OPTIMISATION STOCHASTIQUE DANS LE CADRE DE LA GESTION DE PORTEFEUILLES

par

François Watier

thèse présentée au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de docteur ès sciences (Ph. D.).

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, novembre 2002

Le 1er Novembre 2002,
Date

le jury a accepté la thèse de M. François Watier dans sa version finale.

Composition du jury

Membre :	M. Jean Vaillancourt (Direction) Département de mathématiques et d'informatique
Membre :	M. Bruno Rémillard École des Hautes Études Commerciales
Membre externe :	M. Gary Parker Transamerica Life Canada
Membre et président-rapporteur :	M. Ernest Monga Département de mathématiques et d'informatique

Signature

SOMMAIRE

Le présent document propose, aussi bien en contexte multipériodique qu'en temps continu, une solution fermée au problème sans contrainte de moyenne-variance («mean-variance») lorsque le portefeuille de l'investisseur est constitué d'une seule action et d'une seule obligation et que des conditions plutôt générales sont imposées à ces titres. Dans un premier temps, nous rappelons les principaux résultats associés au problème de moyenne-variance original et nous illustrons que ces résultats sont inadéquats lorsqu'il s'agit de la gestion à long terme d'un portefeuille (par exemple la gestion des régimes de pension). Par la suite, à l'aide de propriétés de conditionnement probabiliste, nous construisons une solution explicite au problème multipériodique et nous obtenons en prime un modèle d'évaluation des actifs financiers dit MEDAF («capital asset pricing model (CAPM)») multipériodique généralisé. Nous développons également des exemples de modélisation des actifs qui réduisent le nombre de paramètres à estimer pour la solution optimale tout en augmentant l'efficacité des calculs en temps réel. Enfin, suivant deux approches distinctes, soit l'approche martingale et l'approche par contrôle stochastique, nous établissons une solution au problème de moyenne-variance en temps continu. En nous inspirant des modèles multipériodiques, nous proposons une modélisation générale des actifs qui inclut notamment le célèbre modèle de Black-Scholes.

REMERCIEMENTS

Je désire remercier très chaleureusement mon directeur de recherche, Jean Vaillancourt, pour ses précieux conseils, pour ses encouragements constants ainsi que pour son support financier. Je désire également remercier la Faculté des sciences de l'Université de Sherbrooke, l'Institut des sciences mathématiques du Québec (ISM) et la Société statistique du Canada (SSC) pour l'attribution de plusieurs bourses. Enfin, je tiens à remercier mes parents et mes amis pour leur soutien tout au long de mes études.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION

Il y a un demi-siècle, la gestion de portefeuille était à un carrefour avec la publication de l'article de H. M. Markowitz [23]. Il a été le pionnier du premier traitement rigoureux du dilemme de l'investisseur, à savoir comment atteindre de plus grands profits tout en minimisant le risque. Pour son approche de moyenne-variance dans la sélection de portefeuilles, H. Markowitz a reçu le Prix Nobel d'économie en 1990 (partagé avec M. H. Miller et W. Sharpe). Depuis ce temps, l'analyse de moyenne-variance demeure un sujet qui génère beaucoup d'intérêt parmi les chercheurs et les praticiens. Dans un premier temps, des solutions analytiques à période simple ont été développées par Markowitz [23] et Merton [25] (Prix Nobel d'économie en 1997 partagé avec M. S. Scholes), ce qui a mené naturellement au modèle original d'évaluation des actifs financiers. Des recherches reliées au cas dynamique multipériodique ont été faites principalement par Tobin [38], Mossin [29], Samuelson [34], Fama [9], Hakansson [12] [16], Stevens [37], Markowitz [24], Elton et Gruber [8], Schweizer [35] et Pliska [32]. Une revue historique détaillée de ceci et des autres contributions sur le sujet peut être retrouvée dans Steinbach [36], qui contient également une très volumineuse bibliographie de plus de 200 références. Pour la version continue du problème, le lecteur pourrait consulter Pliska [31], Richardson [33], Merton [26], Duffie et Richardson [7], Karatzas et Shreve [18], Korn et Korn [20] et Lim et Zhou [22].

Avec les progrès technologiques des dernières années, le développement des algorithmes exploitant les nombreuses découvertes en mathématiques financières est en pleine expansion. Il nous suffit de consulter les articles sur les sites Web d'industries financières telles que http ://www.derivativesstrategy.com [1] et http ://www.financial-planning.com [28] pour en mesurer la portée. Dans cet esprit, le présent document se propose de développer des outils d'aide à la prise de décision financière basés sur l'analyse de moyenne-variance de la gestion de portefeuilles.

Le premier chapitre se veut une brève revue des principaux résultats reliés au problème original de moyenne-variance. Nous soulignons également que les stratégies développées dans un tel contexte sont inappropriées lorsqu'il s'agit de la gestion à long terme d'un portefeuille.

Dans le deuxième chapitre, nous définissons le contexte multipériodique, soit un cadre pour la gestion dynamique d'un portefeuille. Nous proposons dans un premier temps d'inclure une dépendance temporelle dans la modélisation de la prime de risque ainsi qu'une dépendance avec des variables exogènes telles que des facteurs économiques. Ces variables bénéficieraient de la propriété d'améliorer la capacité d'estimation des rendements futurs (voir Breen, Glosten et Jagannathan [3] et Ferson et Harvey [10]). Par la suite, nous construisons par récurrence une solution au problème de moyenne-variance multipériodique en exploitant la propriété télescopique de l'espérance conditionnelle. L'approche lagrangienne d'optimisation dans un espace L^2 approprié est à la base de notre résultat principal énoncé sous la forme du théorème 2.2.8. Nous complétons ce chapitre en ciblant une classe de modèles pour la représentation de la prime de risque. Les critères retenus pour l'élaboration de cette classe comprennent la complexité réduite de l'estimation statistique des paramètres ainsi que la précision et l'efficacité des calculs numériques en temps réel.

Le dernier chapitre aborde le problème de moyenne-variance en temps continu. Nous développons une classe générale de modèles, sous la forme d'équations différentielles stochastiques, pour représenter la prime de risque en nous inspirant directement des modèles établis en contexte multipériodique. Dans un premier temps, nous établissons l'existence d'une solution générale au problème en faisant appel à la représentation des martingales de carré intégrable. Nous parvenons par la suite à expliciter la stratégie optimale dans le cas des marchés de coefficients constants. Enfin, nous résolvons le problème de moyenne-variance par une tout autre méthode. Nous réduisons le problème d'optimisation stochastique à un problème d'optimisation déterministe d'une équation aux dérivées partielles évoluant dans le temps, équation dite de Hamilton-Jacobi-Bellman. À l'aide d'une paramétrisation temporelle bien choisie et sous l'hypothèse des marchés de coefficients constants, nous retrouvons la même stratégie optimale telle que rencontrée dans la résolution par l'approche martingale. Notre cheminement est inspiré de Richardson [33] mais la classe étudiée ici est considérablement enrichie. Nous concluons le chapitre en proposant une dernière alternative de résolution, soit de transposer en temps continu les différents résultats clés obtenus en contexte multipériodique.

CHAPITRE 1

PROBLÈME DE MOYENNE-VARIANCE CLASSIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons sans démonstration le problème de base résolu par Markowitz en [23].

Considérons le contexte où un petit investisseur détient un portefeuille constitué d'un titre risqué et d'un titre sans risque dans un marché sans friction (marché sans coût de transaction). Nous utilisons le terme «petit investisseur» dans le sens que la composition du portefeuille détenu par cet investisseur à n'importe quel instant n'affecte pas les prix futurs du marché. Soit P_0 et P_1 la valeur unitaire du titre risqué à l'instant initial $t = 0$ et à l'échéance $t = 1$ respectivement, B_0 et B_1 la valeur unitaire du titre sans risque à l'instant $t = 0$ et $t = 1$ respectivement et X_0 et X_1 la valeur totale du portefeuille à l'instant $t = 0$ et $t = 1$. Soit v_0 la valeur totale des parts du titre risqué détenues juste avant l'instant $t = 1$, $R = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$ le rendement du titre risqué à l'instant $t = 1$, $r = \frac{B_1 - B_0}{B_0}$ le taux d'intérêt (présumé connu à l'avance) du titre sans risque à l'instant $t = 1$, alors la variation de gains entre l'instant $t = 0$ et $t = 1$ peut s'exprimer en terme de la prime de risque («risk premium») $R-r$ à l'instant $t=1$, comme suit :

$$\begin{aligned} X_1 - X_0 &= v_0\left(\frac{P_1-P_0}{P_0}\right) + (X_0-v_0)\left(\frac{B_1-B_0}{B_0}\right) \\ &= v_0 R + (X_0-v_0) r \\ &= v_0(R-r) + rX_0 \end{aligned}$$

Soit $\omega = \frac{v_0}{X_0}$ la proportion ou pondération du portefeuille allouée au titre risqué juste avant l'instant $t=1$, nous pouvons exprimer le rendement $\tilde{R}$ du portefeuille à l'instant $t=1$ par

$$\tilde{R} = \frac{X_1-X_0}{X_0} = \frac{v_0}{X_0}(R-r) + r = \omega(R-r) + r$$

Si $\omega \geq 1$, nous sommes en présence d'une stratégie de levier (emprunt sur le marché des titres sans risques dans le but d'acquérir des titres risqués) et si $\omega \leq 0$, ceci constitue une stratégie de ventes à découvert.

Toutes les variables aléatoires dans ce document sont censées être construites sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dénotons l'espérance et la variance du rendement du titre risqué, respectivement par $\mu = \mathbb{E}(R)$ et $\sigma^2 = \mathbb{VAR}(R)$. Les énoncés classiques suivants, sans leur démonstration, constituent des cas particuliers de résultats généraux qui seront vérifiés ultérieurement dans cette thèse.

Proposition 1.0.1 *Soit une certaine constante $\widetilde{\mu} \geq r$ donnée, alors la stratégie $\omega = \frac{\widetilde{\mu}-r}{\mu-r}$, minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right)$ sous la contrainte $\mathbb{E}\left(\widetilde{R}\right) = \widetilde{\mu}$, sa valeur minimale étant donnée par $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right) = \left(\frac{\widetilde{\mu}-r}{\mu-r}\right)^2 \sigma^2$.*

Proposition 1.0.2 *Soit une certaine constante $\widetilde{\sigma} \geq 0$ donnée, la stratégie $\omega = \frac{\widetilde{\sigma}}{\sigma}$, maximise l'espérance $\mathbb{E}\left(\widetilde{R}\right)$ sous la contrainte $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right) = \widetilde{\sigma}^2$, sa valeur maximale étant donnée par $\mathbb{E}\left(\widetilde{R}\right) = \frac{\widetilde{\sigma}}{\sigma}(\mu - r) + r$*

Corollaire 1.0.3 *Soit une certaine constante $\widetilde{\mu} \geq r$ donnée, la stratégie $\omega = \frac{\widetilde{\mu}-r}{\mu-r}$, minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right)$ sous la contrainte $\mathbb{E}\left(\widetilde{R}\right) \geq \widetilde{\mu}$, sa valeur minimale étant donnée par $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right) = \left(\frac{\widetilde{\mu}-r}{\mu-r}\right)^2 \sigma^2$.*

Corollaire 1.0.4 *Soit P un portefeuille avec pondération $\omega = \frac{\widetilde{\mu}-r}{\mu-r}$ solution du problème de moyenne-variance ; pour tout autre portefeuille Q nous avons*

$$\mathbb{E}(\widetilde{R}^Q) - r = \beta \left(\mathbb{E}(\widetilde{R}^P) - r\right) \tag{1.1}$$

où

$$\beta = \frac{\mathbb{COV}\left(\widetilde{R}^P, \widetilde{R}^Q\right)}{\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}^P\right)} \tag{1.2}$$

Considérons maintenant k titres risqués de rendements R^i, $i = 1 \dots k$, et ω^i, $i = 1 \dots k$, les pondérations des titres risqués associées au portefeuille tous construits sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En posant $\omega = [\omega^i]_{1\times k}$, $\mu = [\mathbb{E}(R^i)]_{k\times 1}$, $\mathit{1} = [1]_{k\times 1}$ et $\Sigma = [\mathbb{E}(R^i - r)(R^j - r)]_{k\times k}$ nous obtenons la version multivariée du théorème de Markowitz suivante.

Proposition 1.0.5 *Soit une certaine constante $\widetilde{\mu} \geq r$ donnée, la stratégie $\omega = \frac{\widetilde{\mu}-r}{\tau}(\mu - \mathit{1}r)^T \Sigma^{-1}$, minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right)$ sous la contrainte $\mathbb{E}\left(\widetilde{R}\right) = \widetilde{\mu}$, sa valeur minimale étant donnée par $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right) = (\widetilde{\mu} - r)^2 \left[\frac{1}{\tau} - 1\right]$ où $\tau = (\mu - \mathit{1}r)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mathit{1}r)$ est un scalaire.*

Une stratégie autofinancée telle que $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ et $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$ est dite une opportunité d'arbitrage. On dira qu'un marché est viable s'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. On appelle une mesure de probabilité $\mathbb{P}^*$ de risque neutre une mesure équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{E}^*(R) = r$ avec $\mathbb{E}^*(\cdot) = \int_\Omega \cdot \, d\mathbb{P}^*$. Les propositions suivantes sont tirées de Pliska [32].

Proposition 1.0.6 *Un marché est viable si et seulement si il existe une mesure de risque neutre $\mathbb{P}^*$.*

On dit qu'une richesse finale x est simulable ou atteignable s'il existe une stratégie autofinancée telle que $X_1 = x$. On dira qu'un marché viable est complet si toutes les valeurs sont simulables.

Proposition 1.0.7 *Un marché viable est complet si et seulement si il existe une unique mesure de risque neutre P^*.*

Proposition 1.0.8 *Soit un modèle de marché viable et complet, une certaine constante $\widetilde{\mu} \geq r$ donnée et $L = \frac{\mathbb{P}^*}{\mathbb{P}}$ la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure risque neutre $\mathbb{P}^*$ par rapport à la mesure $\mathbb{P}$, le rendement $\widehat{R} = \frac{\widetilde{\mu}\mathbb{E}^*(L)-r}{\mathbb{E}^*(L)-1} - \frac{\widetilde{\mu}-r}{\mathbb{E}^*(L)-1}L$ minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(\widetilde{R}\right)$ sous la contrainte $\mathbb{E}\left(\widetilde{R}\right) = \widetilde{\mu}$, sa valeur minimale étant donnée par $\mathbb{VAR}\left(\widehat{R}\right) = \frac{(\widetilde{\mu}-r)^2}{\mathbb{E}^*(L)-1}$.*

Le problème de moyenne-variance classique est un problème statique en ce sens que l'on suppose qu'aucun mouvement du marché ne se produit entre le début et la fin de la période. Mais, dans les faits, la gestion de portefeuille s'effectue sur un certain horizon pendant lequel les mouvements de portefeuilles sont fréquents. Regardons le problème suivant sur un horizon de deux périodes : supposons que les rendements R_1 et R_2 du titre risqué à chaque instant suivent un modèle binomial avec comme états possibles $S = (0.10, 0.05)$ avec loi de probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 = 0.10) &= \mathbb{P}(R_2 = 0.10) = 0.60 \\
\mathbb{P}(R_1 = 0.05) &= \mathbb{P}(R_2 = 0.05) = 0.40
\end{aligned}$$

et que le taux périodique en vigueur pour le titre sans risque est $r = 0.06$. L'investisseur vise un rendement cumulé espéré de son portefeuille sur deux périodes d'au moins $\mathbb{E}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) = 1.07^2$ (correspondant à un rendement périodique de 0.07 appliqué deux fois successivement) et il recherche simultanément une stratégie qui minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right)$ du rendement global. Une première approche consisterait à appliquer successivement le résultat du problème de moyenne-variance au début de chaque période ce qui nous offrirait la stratégie fixe suivante :

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{0.07 - 0.06}{0.08 - 0.06} = 0.50$$

Nous obtenons immédiatement

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) &= \mathbb{E}\left(1+\widetilde{R}_1\right)\mathbb{E}\left(1+\widetilde{R}_2\right) \\
&= \mathbb{E}^2\left(1+\widetilde{R}_1\right) \\
&= 1.07^2
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)^2\mathbb{E}\left(1+\widetilde{R}_2\right)^2\right) - \mathbb{E}^2\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(1+\widetilde{R}_1\right)^2\mathbb{E}\left(1+\widetilde{R}_2\right)^2 - \mathbb{E}^2\left(1+\widetilde{R}_1\right)\mathbb{E}^2\left(1+\widetilde{R}_2\right) \\
&= \mathbb{E}^2\left(1+\widetilde{R}_1\right)^2 - \mathbb{E}^4\left(1+\widetilde{R}_1\right) \\
&= \left(0.60\times 1.08^2 + 0.40\times 1.055^2\right)^2 - 1.07^4 \\
&= 0.0003434925
\end{aligned}$$

Comparons maintenant cette stratégie avec la stratégie dynamique suivante :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0.65 \\
\omega_2 &= \begin{cases} 0.15 & \text{si} \quad R_1 = 0.10 \\ 0.75 & \text{si} \quad R_1 = 0.05 \end{cases}
\end{aligned}$$

Tout d'abord

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) &= 0.36\times 1.086\times 1.066 + 0.24\times 1.086\times 1.0585 \\
&\quad +0.24\times 1.0535\times 1.09 + 0.16\times 1.0535\times 1.0525 \\
&= 1.1456558 \\
&> 1.07^2
\end{aligned}$$

d'un autre côté

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)^2\mathbb{E}\left(1+\widetilde{R}_2\right)^2\right) - \mathbb{E}^2\left(\left(1+\widetilde{R}_1\right)\left(1+\widetilde{R}_2\right)\right) \\
&= 0.36\times 1.086^2\times 1.066^2 + 0.24\times 1.086^2\times 1.0585^2 \\
&\quad +0.24\times 1.0535^2\times 1.09^2 + 0.16\times 1.0535^2\times 1.0525^2 \\
&\quad -1.1456558^2 \\
&\simeq 0.0002745487 \\
&< 0.0003434925
\end{aligned}$$

Cet exemple illustre bien à quel point la solution classique n'est plus performante dans un contexte de minimisation de la variance du rendement à long terme avec un rendement à long terme espéré prédéterminé par l'investisseur. Le chapitre suivant nous dévoilera la stratégie optimale à suivre dans un tel contexte multipériodique.

CHAPITRE 2

PROBLÈME DE MOYENNE-VARIANCE MULTIPÉRIODIQUE

2.1 Contexte multipériodique

Plaçons nous de nouveau dans un contexte où un petit investisseur détient un portefeuille constitué d'un titre risqué et d'un titre sans risque, dans un marché sans friction. Soit n la date d'échéance, pour $k = 0, \ldots, n$, P_k désigne la valeur unitaire du titre risqué à l'instant k, B_k représente la valeur unitaire du titre sans risque à l'instant k et X_k la valeur totale du portefeuille à l'instant k. Soit v_{k-1} indiquant la valeur totale des parts du titre risqué détenues immédiatement avant l'instant k, $R_k = \frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}}$, le rendement du titre risqué à l'instant k et $r = \frac{B_k - B_{k-1}}{B_{k-1}}$ le taux d'intérêt (que nous supposons constant et connu au départ) du titre sans risque à l'instant k, la variation de gains entre l'instant $k-1$ et k peut alors s'exprimer comme suit, en terme de la prime de risque $R_k - r$ à l'instant k :

$$
\begin{aligned}
X_k - X_{k-1} &= v_{k-1}\left(\frac{P_k - P_{k-1}}{P_{k-1}}\right) + (X_{k-1} - v_{k-1})\left(\frac{B_k - B_{k-1}}{B_{k-1}}\right) \\
&= v_{k-1}R_k + (X_{k-1} - v_{k-1})r \\
&= v_{k-1}(R_k - r) + rX_{k-1}
\end{aligned}
$$

Soit $\omega_k = \frac{v_{k-1}}{X_{k-1}}$ la proportion ou pondération du portefeuille allouée au titre risqué immédiatement avant l'instant k, nous pouvons exprimer le rendement $\tilde{R}_k$ du portefeuille à l'instant k par :

$$\tilde{R}_k = \frac{X_k - X_{k-1}}{X_{k-1}} = \frac{v_{k-1}}{X_{k-1}}(R_k - r) + r = \omega_k(R_k - r) + r$$

Si $\omega_k \geq 1$, nous sommes en présence d'une stratégie de levier et si $\omega_k \leq 0$ ceci correspond à une stratégie de ventes à découvert. Remarquons également que, dans le contexte multipériodique, le rendement cumulé du portefeuille entre un instant donné k et une date d'échéance n peut s'exprimer par $\Pi_{i=k+1}^{n}(1 + \widetilde{R}_i) - 1$.

Toutes les variables aléatoires dans ce document sont censées être construites sur un espace de probabilité commun $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et toutes les autres σ-algèbres définies ultérieurement seront contenues dans $\mathcal{F}$.

Considérons $\mathcal{F}_k$ la σ-algèbre engendrée par $\{P_i, 0 \leq i \leq k\}$, $\mathcal{G}_k$ la σ-algèbre engendrée par des variables exogènes appelées signaux $\{S_i, 0 \leq i \leq k\}$ et $\mathcal{H}_k = \mathcal{F}_k \vee \mathcal{G}_k$: la plus petite σ-algèbre contenant à la fois $\mathcal{F}_k$ et $\mathcal{G}_k$. D'où $\mathcal{H}_k$ constitue toute l'information disponible pour l'agent, en matière d'historique, jusqu'à l'instant k, des prix du titre risqué, de même que des indicateurs économiques des fluctuations du marché. Par conséquent, ω_k est considéré comme $\mathcal{H}_{k-1}$-mesurable, ce qui signifie que la fraction de la richesse allouée au titre risqué est déterminée juste avant l'instant k et se base sur l'information donnée jusqu'à l'instant $k - 1$.

2.2 Résolution par conditionnement

L'objectif principal du problème consiste à développer une stratégie qui, étant donné un rendement cumulé espéré $\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1 + \widetilde{R}_i)\right)$ du portefeuille à l'échéance n, minimise la variance de ce rendement global. Pour les lemmes et théorèmes suivants, définissons $\sum_{i\epsilon\emptyset} \alpha_i = 0$ et $\Pi_{i\epsilon\emptyset}\alpha_i = 1$ pour les sommes et produits sur des ensembles vides. De plus, établissons récursivement pour $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$:

$$\tau_{n-1} = \frac{\mathbb{E}^2\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right]}{\mathbb{E}\left[(R_n - r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right]}, \tag{2.1}$$

$$\tau_i = \frac{\mathbb{E}^2\left[\left(1-\sum_{j=i+1}^{n-1}\tau_j\right)(R_{i+1}-r)|\mathcal{H}_i\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1-\sum_{j=i+1}^{n-1}\tau_j\right)(R_{i+1}-r)^2|\mathcal{H}_i\right]} \tag{2.2}$$

À noter que les τ_i sont déterministes si et seulement si les rapports $\frac{\mathbb{E}^2[(R_i-r)|\mathcal{H}_i]}{\mathbb{E}\left[(R_i-r)^2|\mathcal{H}_i\right]}$ le sont.

Nous allons démontrer qu'un portefeuille avec des pondérations associées au titre risqué définies pour $k = 1, \ldots, n$ par

$$\omega_k = -\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-k}\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i)}\right)\frac{\mathbb{E}\left[\left(1-\sum_{i=k}^{n-1}\tau_i\right)(R_k-r)|\mathcal{H}_{k-1}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1-\sum_{i=k}^{n-1}\tau_i\right)(R_k-r)^2|\mathcal{H}_{k-1}\right]} \tag{2.3}$$

lorsque $\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i) > 0$ recèlent toutes les propriétés voulues pour constituer une solution optimale au problème de moyenne-variance multipériodique sans contrainte, si nous effectuons un choix judicieux de la constante λ_n. Les motivations pour le choix de (2.3) apparaissent dans la preuve de la proposition 2.2.8.

Remarque 2.2.1 *Dans* (2.1) *et* (2.2) *la forme 0/0 doit être lue comme 0.*

Pour tout le reste du chapitre, nous faisons l'hypothèse générale que l'espérance du carré de R_j est finie pour tout j, ce qui garantira la finitude presque sûre de toutes les espérances conditionnelles dans les définitions de (2.2), (2.3) et (2.13).

Tout d'abord, nous allons exhiber des conditions suffisantes garantissant l'intégrité de la définition des paramètres τ_k et ω_k (de même que celle du λ_n optimal décrit explicitement en (2.13) ci-dessous).

Lemme 2.2.2 *Selon les conventions ci-dessus et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, nous avons presque sûrement :*

$$0 \leq \tau_i \leq \mathbb{E}\left[1 - \sum_{j=i+1}^{n-1}\tau_j|\mathcal{H}_i\right] \leq 1 \tag{2.4}$$

Démonstration : Nous utiliserons une induction inversée sur k. La propriété est aisément vérifiée dans le cas initial (pour $k = n-1$), soit :

$$0 \leq \tau_{n-1} = \frac{\mathbb{E}^2\left[(R_n - r)|\mathcal{H}_{n-1}\right]}{\mathbb{E}\left[(R_n - r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right]} \leq 1 \tag{2.5}$$

Supposons que l'inégalité est vérifiée pour $k = l$, soit :

$$0 \leq \tau_l \leq \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l+1}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right] \leq 1 \tag{2.6}$$

par conséquent, pour établir la première inégalité $0 \leq \tau_{l-1}$ nous devons simplement démontrer que le dénominateur de τ_{l-1} est positif. À partir de la seconde inégalité dans (2.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\tau_l &\leq \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l+1}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right] \\
\Longrightarrow 0 &\leq \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right] \\
\Longrightarrow 0 &\leq \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right](R_l - r)^2 \\
\Longrightarrow 0 &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right](R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
\Longrightarrow 0 &\leq \mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Vérifions maintenant la seconde inégalité $\tau_{l-1} \leq \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]$. À partir de l'équation (2.7), nous pouvons écrire τ_{l-1} comme suit :

$$\begin{aligned}
\tau_{l-1} &= \frac{\mathbb{E}^2\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)|\mathcal{H}_{l-1}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}^2\left[\mathbb{E}\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right)(R_l - r)|\mathcal{H}_{l-1}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}^2\left[\left(\mathbb{E}\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right)\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right)\right)^{1/2}(R_l - r)|\mathcal{H}_{l-1}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]}
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au numérateur, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau_{l-1} &\leq \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_l\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]}{\mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i\right)(R_l - r)^2|\mathcal{H}_{l-1}\right]} \\
&= \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]
\end{aligned}$$

Enfin, nous démontrons la troisième inégalité $\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right] \leq 1$. En utilisant à la fois les première et troisième inégalités dans (2.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left(1-\sum\nolimits_{i=l+1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right)-\tau_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(1-\sum\nolimits_{i=l+1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]-\mathbb{E}\left[\tau_l|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(1-\sum\nolimits_{i=l+1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.3 *Sous l'hypothèse* $\mathbb{E}[\tau_0] > 0$, *les paramètres apparaissant dans les formules* (2.2), (2.3) *et* (2.13) *sont bien définis.*

Démonstration : La condition entraîne immédiatement le fait que la formule (2.13) est bien définie pour tout $\{\lambda_n : n = 1, 2, ...\}$. Nous devons à présent démontrer qu'un dénominateur nul en (2.2) implique un numérateur nul à la fois dans (2.2) et (2.3), ce qui entraînera que les formules (2.2), (2.3) et (2.13) seront donc toutes bien définies. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à une forme séparée du numérateur de τ_i dans (2.2), nous avons :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}^2\left[\left(1-\sum\nolimits_{j=i+1}^{n-1}\tau_j\right)(R_{i+1}-r)|\mathcal{H}_i\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(1-\sum\nolimits_{j=i+1}^{n-1}\tau_j\right)|\mathcal{H}_i\right]\cdot\mathbb{E}\left[\left(1-\sum\nolimits_{j=i+1}^{n-1}\tau_j\right)(R_{i+1}-r)^2|\mathcal{H}_i\right]
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 2.2.2 pour établir la non-négativité des termes sous les radicaux. En conséquence, si le membre de droite est nul, le membre de gauche l'est également. □

Les trois lemmes clés suivants donnent explicitement des expressions pour l'espérance conditionnelle, la variance conditionnelle et la covariance conditionnelle du rendement total du portefeuille d'un instant donné jusqu'à une date d'échéance déterminée.

Lemme 2.2.4 *Soit λ_n un nombre réel. Alors pour tout $k = 1, ..., n$ les pondérations associées au portefeuille optimal, données par (2.3), satisfont :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i)|\mathcal{H}_{k-1}\right] &= (1+r)^{n-k+1}\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right] \\ &\quad -\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right] \end{aligned} \tag{2.8}$$

sur les trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i) > 0$.

Démonstration : (Par induction inversée). La propriété est aisément vérifiée pour $k = n$ en utilisant les formules (2.2) et (2.3). Remarquons que, par la propriété télescopique :

$$\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)|\mathcal{H}_{k-2}\right] = \mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{k-1})\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i)|\mathcal{H}_{k-1}\right]|\mathcal{H}_{k-2}\right]$$

À présent, supposons que la propriété est vérifiée pour $k = l$, avec pondérations $\omega_l, ..., \omega_n$ définies par (2.3). D'après l'hypothèse d'induction, nous établissons sur l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i) > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\ =\ & (1+r)^{n-l+1}\mathbb{E}\left((1+\widetilde{R}_{l-1})\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ & -\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ =\ & (1+r)^{n-l+2}\mathbb{E}\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ & +(1+r)^{n-l+1}\omega_{l-1}\mathbb{E}\left(\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)(R_{l-1}-r)|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ & -\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \end{aligned}$$

En substituant la valeur de ω_{l-1} dans la dernière équation, nous déduisons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)|\mathcal{H}_{l-2}\right] &= (1+r)^{n-l+2}\mathbb{E}\left(1-\sum\nolimits_{i=l-2}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ &\quad -\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=l-2}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.5 *Soit λ_n un nombre réel. Pour tout $k = 1, ..., n$ les pondérations associées au portefeuille optimal, données par (2.3), satisfont*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{k-1}\right] &= (1+r)^{2(n-k+1)}\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right] \\ &\quad +\frac{\lambda_n^2}{4\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i)^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

sur les trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i) > 0$.

Démonstration : (Par induction inversée). La propriété est aisément vérifiée pour $k = n$, tout comme le cas initial figurant dans la démonstration précédente. Remarquons que nous obtenons par la propriété télescopique :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{k-2}\right] \\ =\;&\mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{k-1})^2\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{k-1}\right]|\mathcal{H}_{k-2}\right]. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la propriété est vérifiée pour $k = l$, avec $\omega_l, ..., \omega_n$ définis par (2.3), par l'hypothèse d'induction, nous déterminons, sur l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i) > 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\ =\;&(1+r)^{2(n-l+1)}\mathbb{E}\left((1+\widetilde{R}_{l-1})^2\left(1-\sum_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ &+\frac{\lambda_n^2}{4\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ =\;&(1+r)^{2(n-l+2)}\mathbb{E}\left(1-\sum_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ &+2\,(1+r)^{2(n-l+1)+1}\,\omega_{l-1}\mathbb{E}\left(\left(1-\sum_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)(R_{l-1}-r)\,|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ &+(1+r)^{2(n-l+1)}\,\omega_{l-1}^2\mathbb{E}\left(\left(1-\sum_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)(R_{l-1}-r)^2\,|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\ &+\frac{\lambda_n^2}{4\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i)^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right). \end{aligned}$$

En substituant la valeur de ω_{l-1} dans la dernière équation, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \;& (1+r)^{2(n-l+2)}\,\mathbb{E}\left(1-\sum\nolimits_{i=l-2}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right) \\
&+\frac{\lambda_n^2}{4\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i)^2}\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=l-2}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right).
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.6 *Soit λ_n un nombre réel, pour tout $k = 1, ..., n$ et tout portefeuille arbitraire Q les pondérations associées au portefeuille optimal P, données par (2.3), satisfont :*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{k-1}\right] \\
= \;& (1+r)^{2(n-k)+1}\left(\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-k}\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right] \\
&+(1+r)^{2(n-k)+2}\,\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right] \\
&-\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{k-1}\right] \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

sur les trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P) > 0$.

Démonstration : Soit γ_i la variable aléatoire $\mathcal{H}_{i-1}$ -mesurable correspondant à la pondération du portefeuille arbitraire Q allouée au titre risqué juste avant l'instant i. Cette fois encore, la démonstration nécessite une induction inversée. Cependant, le cas initial $k = n$ s'avère plus complexe et nous en détaillons ci-dessous la démonstration. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_n^P)(1+\widetilde{R}_n^Q)|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& \mathbb{E}\left[\left((1+r)+\omega_n(R_n-r)\right)\left((1+r)+\gamma_n(R_n-r)\right)|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)^2+(1+r)\,\omega_n\mathbb{E}\left[R_n-r|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
&+(1+r)\,\gamma_n\mathbb{E}\left[R_n-r|\mathcal{H}_{n-1}\right]+\omega_n\gamma_n\mathbb{E}\left[(R_n-r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right].
\end{aligned}$$

En substituant la valeur de ω_n dans la dernière équation, nous déduisons sur l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P) > 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_n^P)(1+\widetilde{R}_n^Q)|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)^2 - (1+r)\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\frac{\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right]}{\mathbb{E}\left[(R_n-r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right]}\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
& + (1+r)\gamma_n\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
& + \gamma_n\left(-\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\frac{\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right]}{\mathbb{E}\left[(R_n-r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right]}\right)\mathbb{E}\left[(R_n-r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)^2 - (1+r)\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\tau_{n-1} + (1+r)\gamma_n\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
& - \gamma_n\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)^2 - (1+r)\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\tau_{n-1} \\
& - \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[\gamma_n(R_n - r)|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)^2(1-\tau_{n-1}) - (1+r)\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\tau_{n-1} \\
& - \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[\left(1+\widetilde{R}_n^Q\right) - (1+r)|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)^2(1-\tau_{n-1}) + (1+r)\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}(1-\tau_{n-1}) \\
& - \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[1+\widetilde{R}_n^Q|\mathcal{H}_{n-1}\right] \\
= \;& (1+r)\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)(1-\tau_{n-1}) - \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{n-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[1+\widetilde{R}_n^Q|\mathcal{H}_{n-1}\right].
\end{aligned}$$

Afin de poursuivre la démonstration, nous devons constamment utiliser la propriété télescopique, notamment pour tout $l = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \;& \mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^P)(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\mathbb{E}\left(\Pi_{i=l}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{l-1}\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right].
\end{aligned}$$

Supposons à présent que la propriété (2.10) est vérifiée pour $k = l$, avec $\omega_l, ..., \omega_n$ définis par (2.3), par hypothèse d'induction nous obtenons pour l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P) > 0$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^P)(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\,(1+r)^{2(n-l)+1}\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l}\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left.\times\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
& -\mathbb{E}\left[\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^P)(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\Pi_{i=l}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{l-1}\right]|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \; & (1+r)^{2(n-l+1)}\,\mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^P)(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
& +(1+r)^{n-l+1}\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
& -\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{l-2}\right].
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour l'espérance dans le premier terme après la dernière égalité, lorsque nous écrivons $\widetilde{R}_{l-1}^Q - r = \gamma_{l-1}\,(R_{l-1}-r)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^P)(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[((1+r)+\omega_{l-1}\,(R_{l-1}-r))\,((1+r)+\gamma_{l-1}\,(R_{l-1}-r))\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \; & (1+r)^2\,\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
& -(1+r)\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\tau_{l-2} \\
& +(1+r)\,\gamma_{l-1}\mathbb{E}\left[(R_{l-1}-r)\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
& -\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\gamma_{l-1}\mathbb{E}\left[\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)(R_{l-1}-r)\,|\mathcal{H}_{l-2}\right] \\
= \; & (1+r)^2\,\mathbb{E}\left[1-\sum\nolimits_{i=l-2}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-2}\right]-\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\tau_{l-2} \\
& -\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\mathbb{E}\left[\left(1-\sum\nolimits_{i=l-1}^{n-1}\tau_i\right)\left(\left(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q\right)-(1+r)\right)|\mathcal{H}_{l-2}\right]
\end{aligned}$$

En substituant la valeur de ω_{l-1} dans la dernière équation, nous déduisons pour l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P) > 0$:

$$\begin{aligned}
&= (1+r)^2 \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l-2}^{n-1} \tau_i | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&\quad + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l-2}^{n-1} \tau_i | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&\quad - \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l-1}^{n-1} \tau_i\right)\left(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q\right) | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&= (1+r)\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right) \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l-2}^{n-1} \tau_i | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&\quad - \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l-1}^{n-1} \tau_i\right)\left(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q\right) | \mathcal{H}_{l-2}\right]. \\
&= (1+r)^{2(n-l+1)}\left((1+r)\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right) \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l-2}^{n-1} \tau_i | \mathcal{H}_{l-2}\right]\right) \\
&\quad - (1+r)^{2(n-l+1)}\left(\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[\left(1 - \sum_{i=l-1}^{n-1} \tau_i\right)\left(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q\right) | \mathcal{H}_{l-2}\right]\right) \\
&\quad + (1+r)^{n-l+1}\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[(1+\widetilde{R}_{l-1}^Q)\left(1 - \sum_{i=l-1}^{n-1} \tau_i\right) | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&\quad - \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q) | \mathcal{H}_{l-2}\right].
\end{aligned}$$

D'où, toujours pour l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P) > 0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q) | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&= (1+r)^{2(n-l+1)+1}\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-l+1}\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right) \mathbb{E}\left[1 - \sum_{i=l-2}^{n-1} \tau_i | \mathcal{H}_{l-2}\right] \\
&\quad - \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-2}(1+\widetilde{R}_i^P)} \mathbb{E}\left[\Pi_{i=l-1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q) | \mathcal{H}_{l-2}\right].
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.7 *À partir des lemmes 2.2.4, 2.2.5 et 2.2.6, nous pouvons établir que*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q) | \mathcal{H}_{k-1}\right) \\
&= \left((1+r)^{n-k+1} + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right) \mathbb{E}\left(1 - \sum_{i=k-1}^{n-1} \tau_i | \mathcal{H}_{k-1}\right) \\
&\quad \times \left((1+r)^{n-k+1} - \mathbb{E}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q) | \mathcal{H}_{k-1}\right)\right) \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)|\mathcal{H}_{k-1}\right)\\
&= \left((1+r)^{n-k+1}+\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)^2 \mathbb{E}\left[\sum_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right]\\
&\qquad \times\left(1-\mathbb{E}\left[\sum_{i=k-1}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right]\right) \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

pour toutes les valeurs de $k = 1, 2, \ldots n$ *et toutes les trajectoires telles que* $\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i) > 0$.

Nous sommes dorénavant en mesure de proposer une solution au problème classique multipériodique de Markowitz lorsque l'investisseur détient un portefeuille constitué d'un titre sans risque avec un taux d'intérêt constant et un titre risqué.

Théorème 2.2.8 *Dénotons par* $c > 0$, *la cible du rendement total. Supposons que les pondérations* ω_k, $k = 1, ..., n$ *du portefeuille apparaissant dans* (2.3) *sont telles que la condition du lemme 2.2.3 et* $\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right] = 1 + c \geq (1+r)^n$ *sont satisfaites. Les pondérations définies en posant :*

$$\lambda_n = 2\left[\frac{(1+r)^n-(1+c)}{\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(\tau_i)} - (1+r)^n\right] \qquad (2.13)$$

dans (2.3) *minimisent la variance* $\mathbb{VAR}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right]$, *sur l'ensemble des trajectoires telles que* $\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i) > 0$, *et sa valeur minimale étant donnée par :*

$$\mathbb{VAR}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right] = ((1+r)^n-(1+c))^2\left[\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}(\tau_i)}-1\right]. \qquad (2.14)$$

Démonstration : Minimisons $\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right]^2$ sous la contrainte $\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right] = 1+c$ et le résultat suivra. Notons par L^2 l'espace des variables aléatoires de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $F : L^2(\mathcal{H}_0) \times ...L^2(\mathcal{H}_{n-1}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par :

$$F(\omega_1, ..., \omega_n, \lambda_n) = \mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right]^2 + \lambda_n\left(\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right]-(1+c)\right).$$

D'emblée, la définition de la fonctionnelle F révèle que, en tant qu'espérance d'une forme quadratique en ω_i pour toute valeur i, il s'agit d'une fonctionnelle continue différentiable au sens de Gâteaux sur son espace de définition des fonctions de carré intégrable (voir page 32 de Clarke [5]). Par conséquent, elle est également strictement différentiable et la version de Clarke de la règle des multiplicateurs de Lagrange (son théorème 6.1.1 en page 228) s'applique à notre problème d'optimisation. Ainsi, pour chaque $k = 1, ..., n$, la solution doit satisfaire :

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F(\omega_1, ..., \omega_n, \lambda_n)}{\partial \omega_k} \\
&= \frac{\partial}{\partial \omega_k}\left[\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i)^2\right) + \lambda_n\left(\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i)\right) - (1+c)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \omega_k}\left(\left(\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i)^2\right) + \lambda_n\left(\left(\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i)\right) - (1+c)\right)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\left(2\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i) + \lambda_n\right)\frac{\partial}{\partial \omega_k}\left(\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(2\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i) + \lambda_n\right)\left(\Pi_{i=1, i\neq k}^n(1+\tilde{R}_i)\right)(R_k - r)\right).
\end{aligned}
$$

Les candidats pour le maximum doivent répondre à cette propriété de point critique. Voici à présent l'idée maîtresse de la démonstration. Des solutions possibles à ces équations sont obtenues lorsque l'espérance conditionnelle est égale à zéro. Dans ce cas, nous observons que

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\left(2\Pi_{i=1}^n(1+\tilde{R}_i) + \lambda_n\right)\left(\Pi_{i=1, i\neq k}^n(1+\tilde{R}_i)\right)(R_k - r)\,|\mathcal{H}_{k-1}\right) \\
=\; & 2\left(\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)^2\right)\mathbb{E}\left(\left(1+\tilde{R}_k\right)\Pi_{i=k+1}^n(1+\tilde{R}_i)^2(R_k - r)\,|\mathcal{H}_{k-1}\right) \\
& +\lambda_n\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left(\left(\Pi_{i=k+1}^n(1+\tilde{R}_i)\right)(R_k - r)\,|\mathcal{H}_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\; & 2\left(\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)^2\right)\left[\mathbb{E}\left(((1+r) + \omega_k(R_k - r))\Pi_{i=k+1}^n(1+\tilde{R}_i)^2(R_k - r)\,|\mathcal{H}_{k-1}\right)\right] \\
& +\lambda_n\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left(\left(\Pi_{i=k+1}^n(1+\tilde{R}_i)\right)(R_k - r)\,|\mathcal{H}_{k-1}\right) \\
=\; & 0.
\end{aligned}
$$

Dans l'expression précédente, à moins que $X_k = 0$ (ce qui signifierait la ruine de l'investisseur) et en isolant ω_k qui est $\mathcal{H}_{k-1}$-mesurable, nous obtenons sur l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)>0$:

$$\omega_k = \frac{-2(1+r)\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_k-r)\Pi_{i=k+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{k-1}\right]}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_k-r)^2\Pi_{i=k+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{k-1}\right]} - \frac{\lambda_n\mathbb{E}\left[(R_k-r)\Pi_{i=k+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)|\mathcal{H}_{k-1}\right]}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_k-r)^2\Pi_{i=k+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_{k-1}\right]}. \tag{2.15}$$

Nous allons démontrer par induction inversée que ces pondérations ω_k sont de la forme (2.3). Pour le cas initial $k=n$, la démonstration apparaît triviale. Supposons ensuite que l'équation (2.3) est vérifiée pour $k=l+1,l+2,...,n$. Selon les lemmes 2.2.4 et 2.2.5, le numérateur de (2.15), avec $k=l$, peut s'exprimer comme pour l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)>0$:

$$\begin{aligned}
&-2(1+r)\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_l-r)\mathbb{E}\left(\Pi_{i=l+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&-\lambda_n\mathbb{E}\left[(R_l-r)\mathbb{E}\left(\Pi_{i=l+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)|\mathcal{H}_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
=\;&-2(1+r)\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left((1+r)^{2(n-l)}\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&-2(1+r)\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_l-r)\frac{\lambda_n^2}{4\Pi_{i=1}^{l}(1+\widetilde{R}_i)^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&-\lambda_n\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left((1+r)^{n-l}\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]-\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
=\;&-2(1+r)\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\,\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&-\lambda_n\,(1+r)^{n-l}\,\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&-(1+r)\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)}{(1+\widetilde{R}_l)^2}\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&+\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)}{(1+\widetilde{R}_l)}\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
=\;&-2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)\,(1+r)^{n-l}}\right)\\
&\qquad\times\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\\
&+\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\omega_l\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)^2}{(1+\widetilde{R}_l)^2}\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]
\end{aligned}$$

et le dénominateur comme :

$$
\begin{aligned}
& 2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\mathbb{E}\left(\Pi_{i=l+1}^{n}(1+\tilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_l\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
= \; & 2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\left((1+r)^{2(n-l)}\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
& +2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\left(\frac{\lambda_n^2}{4\Pi_{i=1}^{l}(1+\widetilde{R}_i)^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
= \; & 2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\,\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
& +\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)^2}{(1+\widetilde{R}_l)^2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_l\right]|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
= \; & 2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\,\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
& +\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)^2}{(1+\widetilde{R}_l)^2}\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right].
\end{aligned}
$$

En substituant ces formules pour le numérateur et le dénominateur dans (2.15), nous obtenons pour l'ensemble des trajectoires telles que $\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)>0$:

$$
\begin{aligned}
& \omega_l\left(2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\,\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\right) \\
& +\omega_l\left(\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)^2}{(1+\widetilde{R}_l)^2}\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right]\right) \\
= \; & -2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)\,(1+r)^{n-l}}\right) \\
& \qquad \times\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
& +\frac{\lambda_n^2}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)}\omega_l\mathbb{E}\left[\frac{(R_l-r)^2}{(1+\widetilde{R}_l)^2}\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_{l-1}\right] \\
\Longrightarrow \; & \omega_l\left(2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\,\mathbb{E}\left[(R_l-r)^2\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]\right) \\
= \; & -2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\tilde{R}_i)\,(1+r)^{2(n-l)}\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{l-1}(1+\widetilde{R}_i)\,(1+r)^{n-l}}\right) \\
& \qquad \times\mathbb{E}\left[(R_l-r)\left(1-\sum_{i=l}^{n-1}\tau_i\right)|\mathcal{H}_{l-1}\right]
\end{aligned}
$$

ce qui est précisément (2.15) avec $k=l$. La preuve par induction est à présent terminée. Le vecteur $\{\omega_k\}$ étant un point critique du problème variationnel, il nous faut démontrer qu'il constitue un point de maximum global. Selon la propriété télescopique, nous établissons :

$$1 + c = \mathbb{E}[\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)|\mathcal{H}_0\right)]$$

en utilisant le lemme 2.2.4, la contrainte mène à

$$\begin{aligned}
1+c &= \mathbb{E}\left[(1+r)^n\,\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_0\right] - \frac{\lambda_n}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_0\right]\right] \\
&= (1+r)^n\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right] - \frac{\lambda_n}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right].
\end{aligned}$$

En isolant λ_n, nous obtenons (2.13). De plus, pour ces pondérations ω_k et selon la propriété télescopique, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right]^2 - \left(\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)^2|\mathcal{H}_0\right)\right] - (1+c)^2.
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant le lemme 2.2.5, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right) \\
&= \mathbb{E}\left((1+r)^{2n}\,\mathbb{E}\left[1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_0\right] + \frac{\lambda_n^2}{4}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_0\right]\right) - (1+c)^2 \\
&= (1+r)^{2n}\,\mathbb{E}\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right) + \frac{\lambda_n^2}{4}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right) - (1+c)^2
\end{aligned}$$

et en substituant la valeur de λ_n nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right) \\
&= (1+r)^{2n}\,\mathbb{E}\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right) + \left[\frac{(1+r)^n-(1+c)}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right]} - (1+r)^n\right]^2\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right) \\
&\quad -(1+c)^2 \\
&= ((1+r)^n-(1+c))^2\left[\frac{1}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right]} - 1\right].
\end{aligned}$$

Enfin, nous allons démontrer que les pondérations ω_k associées au portefeuille P de moyenne fixe $\mathbb{E}[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)] = 1+c$ forment des solutions optimales. En effet, nous établissons par la suite que :

$$\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right) = \mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right)$$

est vérifié pour tout autre portefeuille Q avec une même espérance $\mathbb{E}[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)] = 1+c$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, ceci impliquera :

$$\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right) \leq \sqrt{\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right)\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right)}.$$

En utilisant tout d'abord la propriété télescopique, nous remarquons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right)\\
=\ &\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right) - \mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right)\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right)\\
=\ &\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q)\right) - (1+c)^2\\
=\ &\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_0\right)\right) - (1+c)^2.
\end{aligned}$$

À présent, en appliquant le lemme 2.2.6, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right)\\
=\ &\mathbb{E}\left((1+r)^{2n-1}\left((1+r)+\frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-1}}\right)\mathbb{E}\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i|\mathcal{H}_0\right)\right)\\
&-\mathbb{E}\left(\frac{\lambda_n}{2}\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_0\right)\right) - (1+c)^2\\
=\ &(1+r)^{2n}\mathbb{E}\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right) + \frac{\lambda_n}{2}\left((1+r)^n - (1+c) - (1+r)^n\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right)\right)\\
&-(1+c)^2.
\end{aligned}$$

Et en substituant la valeur de λ_n, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right)\\
=\ &(1+r)^{2n}\mathbb{E}\left(1-\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right)\\
&+\left(\frac{(1+r)^n-(1+c)}{\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right)} - (1+r)^n\right)\left((1+r)^n - (1+c) - (1+r)^n\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right)\right)\\
&-(1+c)^2\\
=\ &((1+r)^n-(1+c))^2\left[\frac{1}{\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right)} - 1\right]\\
=\ &\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi la stratégie $\{\omega_k\}$ nous fournit un extremum global. □

Corollaire 2.2.9 *Dans le théorème* (2.2.8), *si nous élargissons la famille des portefeuilles à celle satisfaisant* $\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i)\right] \geq 1+c \geq (1+r)^n$, *la solution optimale demeure la même.*

Démonstration : La validité de l'énoncé découle immédiatement du fait que la variance est une fonction croissante de c. □

Ce qui suit permet d'établir que la solution au problème multipériodique de moyenne-variance mène à une extension naturelle du modèle classique d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) dans un contexte multipériodique.

Corollaire 2.2.10 *Soit P, un portefeuille avec pondérations ω_k, $k = 1, ..., n$ satisfaisant les conditions du théorème 2.2.8, nous obtenons pour tout autre portefeuille Q :*

$$\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right] - (1+r)^n = \beta_n \left(\mathbb{E}\left[\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right] - (1+r)^n\right) \tag{2.16}$$

où

$$\beta_n = \frac{\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)\right)}{\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)\right)}. \tag{2.17}$$

Démonstration : D'après la remarque 2.2.7, nous déduisons :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{k-1}\right)}{\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)|\mathcal{H}_{k-1}\right)} \\
= \; &\frac{(1+r)^{n-k+1} - \mathbb{E}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{k-1}\right)}{\left((1+r)^{n-k+1} + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\mathbb{E}\left[\sum_{i=k-1}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right]}
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{k-1}\right) - (1+r)^{n-k+1} \\
= \; &-\frac{\mathbb{COV}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P), \Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^Q)|\mathcal{H}_{k-1}\right)}{\mathbb{VAR}\left(\Pi_{i=k}^{n}(1+\widetilde{R}_i^P)|\mathcal{H}_{k-1}\right)} \\
&\times \left((1+r)^{n-k+1} + \frac{\lambda_n}{2\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i^P)}\right)\mathbb{E}\left[\sum_{i=k-1}^{n-1} \tau_i|\mathcal{H}_{k-1}\right].
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.2.8 avec $k=1$, nous établissons finalement :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^{Q})\right)-(1+r)^n \\
= & -\beta_n\left((1+r)^n+\frac{\lambda_n}{2}\right)\mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}\tau_i\right] \\
= & -\beta_n\left((1+r)^n+\left(\frac{(1+r)^n-(1+c)}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right]}-(1+r)^n\right)\right)\mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}\tau_i\right] \\
= & \beta_n\left(\frac{(1+c)-(1+r)^n}{\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\tau_i\right]}\right)\mathbb{E}\left[\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}\tau_i\right] \\
= & \beta_n\left((1+c)-(1+r)^n\right) \\
= & \beta_n\left(\mathbb{E}\left(\Pi_{i=1}^{n}(1+\widetilde{R}_i^{P})\right)-(1+r)^n\right).
\end{aligned}
$$

□

Remarque 2.2.11 *Lorsque $n=1$ nous retrouvons le MEDAF (période simple) classique (voir par exemple Pliska [32] énoncé précédemment sous la forme du corollaire 1.0.4).*

Pour conclure cette section, nous attirons l'attention du lecteur en soulignant qu'il est possible d'obtenir des formes plus générales des lemmes 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 et 2.2.5 du théorème 2.2.8 et des corollaires 2.2.9 et 2.2.10 en substituant le taux d'intérêt fixe r par un taux d'intérêt variable déterministe r_i.

2.3 Exemples

Dans cette section, nous allons présenter plusieurs classes riches regroupant des modélisations pour la prime de risque $(R_n - r)$ du titre risqué à l'instant n. Différents modèles ont été sélectionnés dans le but de satisfaire certains critères de base, notamment la simplicité d'utilisation, l'efficacité numérique et la facilité d'interprétation. Tous offrent une représentation symbolique simplifiée pour les valeurs optimales des paramètres τ_k, ω_k et λ_k définissant la solution au portefeuille de moyenne-variance multipériodique, donnée par les équations (2.2), (2.3) et (2.13). Plusieurs modèles s'avéreront offrir des implémentations algorithmiques avec souplesse tout au long du processus de calcul, assurant ainsi des résultats précis en temps réel, même lorsque l'estimation de paramètres est requise. Enfin, ces modèles faciliteront l'interprétation des résultats dans un contexte financier.

Exemple 2.3.1 *Le premier exemple constitue une classe très générale de modèles motivés par des impulsions du marché multiplicatives et indépendantes (appelée désormais la classe **IMMI**). Pour décrire cette classe, nous devons d'abord faire appel à une suite de variables aléatoires indépendantes $\{\xi_k : k \geq 1\}$, où ξ_n représente les fluctuations aléatoires (le bruit) de la partie significative du marché à l'instant n. Tout ce que nous requérons de la suite $\{\xi_k : k \geq 1\}$ c'est qu'elle soit adaptée à la filtration $\{\mathcal{H}_k : k \geq 1\}$, ceci signifie simplement que ξ_k est $\mathcal{H}_k$-mesurable pour chaque $k \geq 1$ et qu'elle est indépendante de tout le passé du marché. En d'autres mots, ξ_k est non seulement indépendante de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}$ mais de tout $\mathcal{H}_{k-1}$. Plus précisément, nous supposons que $(R_n - r)$ est donné par Ψ_{n-1}, une variable aléatoire à valeurs réelles $\mathcal{H}_{n-1}$-mesurable qui est perturbée par des impulsions de marché $\Phi_n(\xi_n)$ à valeurs réelles, sous la forme multiplicative suivante : pour tout $n \geq 1$, nous avons*

$$R_n - r = \Phi_n(\xi_n) \cdot \Psi_{n-1}. \tag{2.18}$$

Ici, Φ_n représente une application mesurable à valeurs réelles, arbitraire pour l'instant mais essentielle pour la nature des fluctuations du marché pour le titre risqué en question. Par opposition, le choix de Ψ_{n-1} est laissé libre et nous prenons notre modèle de prévision préféré pour le comportement moyen de la prime de risque pour ce titre. Par exemple, toute fonction mesurable donnant lieu à une variable aléatoire Ψ_{n-1} sous la forme $\Psi_{n-1} = \Psi_{n-1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, R_1, R_2, \ldots, R_{n-1})$ conviendra. Des exemples spécifiques sont fournis ci-dessous. En fait, nous allons voir que Ψ_{n-1} n'a aucun lien avec la détermination de deux des familles de paramètres ($\{\tau_i\}$ et $\{\lambda_i\}$) et que son influence n'est perceptible que dans la détermination de la troisième famille (les pondérations ω_i elles-mêmes), comme nous pouvons le voir clairement dans la formule (2.13) pour λ_i et dans la formule simplifiée subséquente (2.21) pour τ_i. Cette information s'avérera impor-

tante lorsque nous discuterons des procédures d'estimation dans des contextes pratiques — lire l'exemple suivant pour les détails. Cette classe IMMI est caractérisée par le fait que la source de bruit agit en compressant ou en dilatant le signal, plutôt qu'en le translatant, comme les modèles additifs le font, nous assurant ainsi, par le biais d'un effet d'échelle, que les fluctuations du rendement excédentaire autour de sa moyenne sont hétéroscédastiques dans tous les cas, sauf les cas spéciaux les plus triviaux. Une autre observation à faire au sujet de la classe IMMI dans l'ensemble, est qu'en combinant son équation (2.18) *et en la définissant avec nos hypothèses, à la fois sur le bruit du marché et sur le modèle de prédiction, ceci implique*

$$\mathbb{E}\left[R_n - r|\mathcal{H}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left(\Phi_n\left(\xi_n\right)\right) \cdot \Psi_{n-1}. \tag{2.19}$$

Cette représentation simple, pour la valeur moyenne au pas suivant du rendement excédentaire, nous permet de voir immédiatement que de simples restrictions sur le bruit et sur le modèle en question assureront en effet quelques très bonnes caractéristiques. Lorsqu'un marché «bull» est attendu pour le titre risqué, la séquence $\{R_n - r\}$ *devrait former une sous-martingale et les conditions suffisantes pour que cela se produise sont que les deux suites* $\{\mathbb{E}\left(\Phi_n\left(\xi_n\right)\right)\}$ *et* $\{\Psi_{n-1}\}$ *demeurent strictement positives à tout instant. Lorsqu'un marché «bear» se présente,* $\{R_n - r\}$ *devrait former plutôt une sur-martingale et, pour ceci, il est suffisant pour la suite* $\{\mathbb{E}\left(\Phi_n\left(\xi_n\right)\right)\}$ *de demeurer strictement positive à tout moment tandis que que la suite* $\{\Psi_{n-1}\}$ *demeure strictement négative. Notons qu'une bonne modélisation suggère la positivité stricte de la suite des bruits moyens* $\{\mathbb{E}\left(\Phi_n\left(\xi_n\right)\right)\}$ *dans toutes circonstances, sans quoi, à un certain instant* n*, notre modèle de prévision* Ψ_{n-1} *aurait une (très indésirable) moyenne de signe opposé à celui de sa cible attendue* $R_n - r$*. Commençons avec l'expression pour* τ_i *dans* (2.2)*. L'indépendance des impulsions transforme tous ces paramètres aléatoires en constantes et réduit les valeurs successives (pour* $i = n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$*) à*

$$\tau_{n-1} \quad = \quad \frac{\mathbb{E}^2\left[(R_n - r)|\mathcal{H}_{n-1}\right]}{\mathbb{E}\left[(R_n - r)^2|\mathcal{H}_{n-1}\right]} = \frac{\mathbb{E}^2\Phi_n(\xi_n)}{\mathbb{E}\Phi_n^2(\xi_n)}, \tag{2.20}$$

$$\tau_i = \left(1 - \sum_{j=i+1}^{n-1} \tau_j\right) \frac{\mathbb{E}^2\Phi_{i+1}(\xi_{i+1})}{\mathbb{E}\Phi_{i+1}^2(\xi_{i+1})}, \tag{2.21}$$

$$\tau_0 = \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \tau_j\right) \frac{\mathbb{E}^2\Phi_1(\xi_1)}{\mathbb{E}\Phi_1^2(\xi_1)}. \tag{2.22}$$

L'espérance dans (2.13) pour λ_n peut être retirée dans la classe IMMI ; les pondérations optimales ω_k associées au titre risqué dans (2.3) se réduisent maintenant à

$$\omega_k = -\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-k}\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i)}\right) \frac{\mathbb{E}\Phi_k(\xi_k)}{\Psi_{k-1}\mathbb{E}\Phi_k^2(\xi_k)}. \tag{2.23}$$

Le lecteur remarquera que, bien que certaines simplifications aient été obtenues pour les paramètres de définition dans (2.2), (2.3) et (2.13) en utilisant la classe générale IMMI, le nombre de paramètres à estimer demeure trop élevé pour les besoins pratiques. La sous-classe SIMMI définie dans ce qui suit corrigera cette lacune.

Exemple 2.3.2 *Lorsque le bruit catalyseur de la classe IMMI prend la forme $\{\Phi(\xi_k) : k \geq 1\}$, avec une seule fonction Φ et une suite $\{\xi_k : k \geq 1\}$ que l'on suppose à présent être non seulement indépendante, mais également identiquement distribuée, nous obtenons ce que nous appellerons une classe IMMI stationnaire (en abrégé, la classe* **SIMMI** *). (Attention, la suite des primes de risque $\{R_k - r : k \geq 1\}$ ne formera pas, en général, un processus stochastique stationnaire, mais seulement la suite des impulsions de marché $\{\Phi(\xi_k) : k \geq 1\}$ présentera cette propriété puisqu'elle y est intrinsèquement construite). En raison de ces restrictions, les paramètres $\{\tau_i : i = 0, 1, \ldots, n-1\}$ apparaissant dans (2.2) forment maintenant les premiers termes d'une progression géométrique. Si nous notons*

$$\rho = \tau_{n-1} = \frac{\mathbb{E}^2\Phi(\xi_1)}{\mathbb{E}\Phi^2(\xi_1)}, \tag{2.24}$$

nous avons clairement $\tau_{n-2} = \rho(1-\rho)$ et, de façon plus générale,

$$\tau_i = \rho(1-\rho)^{n-i-1} \text{ for } i = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.25}$$

De plus, l'expression (2.13) devient

$$\lambda_n = 2\left[\frac{(1+r)^n - (1+c)}{1-(1-\rho)^n} - (1+r)^n\right]. \tag{2.26}$$

Il s'ensuit qu'avec une sélection issue de la classe SIMMI , à l'instant $k-1$ précédant le réinvestissement, les deux paramètres λ_k et τ_k sont des fonctions complètement connues de l'unique paramètre inconnu $\rho \in [0,1]$ qui doit être estimé par une certaine fonction $\widehat{\rho}_n$ tirée des données $\{c, r, R_1, \ldots, R_{k-1}\}$. Par exemple, nous pourrions choisir l'estimateur du moment (asymptotiquement sans biais) donné à l'instant n par

$$\widehat{\rho}_n = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \Phi(\xi_i)\right]^2}{n \sum_{i=1}^{n} \Phi^2(\xi_i)}.$$

Les pondérations optimales du portefeuille ω_k peuvent maintenant s'écrire sous la forme

$$\omega_k = -\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2(1+r)^{n-k}\Pi_{i=1}^{k-1}(1+\widetilde{R}_i)}\right)\frac{\rho}{\Psi_{k-1}\mathbb{E}\Phi(\xi_1)}, \tag{2.27}$$

une fonction connue de ρ, $\mathbb{E}\Phi(\xi_1)$ et Ψ_{k-1}. Le calcul des pondérations optimales peut par conséquent s'accomplir explicitement avec l'estimation de seulement deux paramètres soit ρ et $\mathbb{E}\Phi(\xi_1)$, une fois que les véritables signaux du marché $\{\Psi_j : j < k\}$, pour tous les instants précédents, ont été extraits des données perturbées $\{R_j : j < k\}$. De plus amples informations se retrouvent dans les cas spéciaux ci-dessous. Une autre particularité intéressante de la classe SIMMI est que l'hétéroscédacité y demeure intégrée, tout comme la classe plus large IMMI, bien que les impulsions du marché soient clairement homoscédastiques dans la classe SIMMI . L'explication tient au fait que la nature multiplicative de (2.18) rend la variance de R_n non constante dans tous les cas, sauf pour les exemples les plus triviaux tels que le modèle de Cox-Rubinstein que nous verrons bientôt.

Nous sommes à présent en mesure d'étudier un certain nombre de modèles provenant de la classe SIMMI, possédant les trois propriétés désirées énoncées au début de la présente section.

Exemple 2.3.3 *Le modèle de **Cox-Rubinstein** appartient à la classe SIMMI . En effet, prenons simplement $\Phi(\xi_k) = \mu - r + \sigma\xi_k$ (avec $\mathbb{E}\xi_k = 0$ et $\mathbb{E}\xi_k^2 = 1$) et Ψ_k identiquement égal à un, pour toutes les valeurs $k \geq 0$. Le modèle de Cox-Rubinstein est décrit par $R_n - r = \mu - r + \sigma\xi_n$, les primes de risque elles-mêmes étant maintenant indépendantes* et identiquement distribuées d'un instant à l'autre. La solution optimale est toujours donnée par (2.23), avec (2.24), (2.25) et (2.26), mais (2.23) se réduit à

$$\omega_k = -\left((1+r) + \frac{\lambda_n}{2\,(1+r)^{n-k}\,\Pi_{i=1}^{k-1}\left(1+\widetilde{R}_i\right)}\right)\frac{\mu - r}{\left(\sigma^2 + (\mu - r)^2\right)} \tag{2.28}$$

avec $\rho = (\mu - r)^2 / (\sigma^2 + (\mu - r)^2)$. L'estimation des paramètres se limite ici à celle des premier et deuxième moments μ et σ^2 puisque Ψ_k est connu. Des estimateurs sans biais sont obtenus rapidement : prendre simplement la moyenne et la variance échantillonnales pour les observations R_n jusqu'à l'instant actuel. Cet exemple met également de l'avant une autre propriété intéressante de la classe SIMMI, notamment du fait qu'elle inclut également des modèles linéaires et non multiplicatifs par l'incorporation d'une certaine modélisation du marché à l'intérieur du bruit, ce qui rend la classe encore plus riche.

Exemple 2.3.4 *Soulignons que tous les modèles classiques et décentrés ARCH(p,q), MARCH(p,q), de même que les modèles GARCH(p,q) tels que ξ_n forment des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, appartiennent eux aussi à la classe SIMMI. En effet, selon Guégan [11] (chapitre 5), les modèles GARCH(p,q) peuvent être écrits sous la forme (2.18), où chaque impulsion de marché ξ_n obéit à une distribution normale $N(\mu - r, \sigma^2)$ (où $\Phi(\xi) = \xi$), et où les signaux du marché prennent la forme $\Psi_{n-1} = \sqrt{h_{n-1}}$ où la structure*

$$h_{n-1} = \alpha_0 + \sum\nolimits_{i=1}^{q} \alpha_i (R_{n-i} - r)^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{p} \beta_j h_{n-j} \tag{2.29}$$

requiert $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $q > 0$ et $p \geq 0$.

Les modèles ARCH(p,q) sont simplement ceux dont $\beta_j = 0$. D'autre part, les modèles MARCH(p,q) prennent exactement la forme (3.1) lorsque ξ_n suit une distribution normale standard $N(0,1)$ (ici encore $\Phi(\xi) = \xi$) et $\Psi_{n-1} = \sqrt{h_{n-1}}$ est maintenant donné par

$$h_{n-1} = \sigma \cdot \prod\nolimits_{i=1}^{q} (\xi_{n-i})^{2\alpha_i} \cdot \prod\nolimits_{j=1}^{p} (R_{n-j} - r)^{2\beta_i} \tag{2.30}$$

à condition que les zéros des polynômes $1 - \alpha_1 x - \ldots - \alpha_q x^q$ et $1 - \beta_1 x - \ldots - \beta_p x^p$ soient tous plus grands que 1 et distincts afin d'éviter l'explosion en temps fini. Les modèles *classiques GARCH(p,q) et MARCH(p,q) correspondent au cas où $\mu = r$. La condition $\mathbb{E}[\tau_0] > 0$ dans le lemme 2.2.3 est équivalente au cas $\mu > r$.*

Il est important de noter que tous les modèles MARCH(p,q) sont stationnaires au sens large, ce qui rend parfois irréaliste leur utilisation avec des données de primes de risque. Les modèles GARCH(p,q) subissant le même sort sont identifiés dans Bollerslev [2]. Dans les deux cas, l'estimation statistique des paramètres a fait l'objet de nombreuses recherches. Le lecteur trouvera des solutions explicites pour le modèle GARCH(p,q) classique dans Guégan [11] (chapitre 5) et pour le modèle MARCH(p,q) classique dans Brockwell et Davis [4] (chapitre 8), lorsque nous remarquons (pour cette dernière collection) que $log(R_n - r)^2$ est en fait un modèle ARMA(p,q) classique avec bruit non-gaussien, dès l'instant où nous supposons que $R_n - r$ suit un modèle MARCH(p,q).

Les deux exemples suivants ont pour but de comparer, par le biais de simulations, la précision numérique ainsi que le temps réel de calcul de la solution optimale pour deux modèles couramment utilisés en mathématiques financières.

Exemple 2.3.5 *Soit $\{S_j, j = 1 \ldots k\}$ l'ensemble des états possibles, X^0 une variable aléatoire donnée de distribution $\mathbb{P}(X^0 = S_j) = p_j^0$, $\{X_i^n : n \geq 1, i = 1, \ldots, k\}$ des variables aléatoires indépendantes de distribution stationnaire $\mathbb{P}(X_i^n = S_j) = p_{ij}$.*

Ainsi $\{R_j - r, j = 1 \ldots n\}$ suit un modèle de chaînes de Markov stationnaires avec comme états possibles $\{S_j, j = 1 \ldots k\}$ signifie que $\{R_j - r, j = 1 \ldots n\}$ satisfait

$$\begin{aligned} R_0 - r &= X^0 \\ R_n - r &= \sum\nolimits_{i=1}^{k} X_i^n I_i(R_{n-1} - r). \end{aligned}$$

où la fonction $I_i(u)$ est égale à 1 si $u = S_i$ et 0 autrement.

En posant

$$\begin{aligned} \Psi_{n-1} &= (\Psi_{nj})_{j=1}^{k} \text{ avec } \Psi_{nj} = I_j(R_{n-1} - r) \\ \Phi_n &= (\Phi_{nj})_{j=1}^{k} \text{ avec } \Phi_{nj} = X_j^n \end{aligned}$$

nous obtenons

$$R_n - r = \Phi_n \bullet \Psi_{n-1}.$$

en dénotant par $\bullet$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^k$.

Ce qui nous permet de constater que ce modèle n'appartient pas à la classe IMMI mais pourrait bien appartenir à une classe encore plus large, soit la version vectorielle (ou même matricielle) de la classe IMMI. Le modèle est en fait une superposition de modèles SIMMI.

Le programme Maple 6 en annexe A fournit la stratégie optimale au problème de moyenne-variance multipériodique avec paramètres, c le rendement global espéré du portefeuille de l'investisseur, r le taux d'intérêt périodique, n le nombre de périodes, k le nombre d'états, S la matrice des états, P la matrice de transition $[p_{i,l}]_{k\times k}$, Po le vecteur de distribution initiale $[p_i]_{i=1}^k$ et RM les valeurs $\{R_j - r, j = 1 \ldots n\}$ simulées.

Par exemple, soit n le nombre de jours, $r = \frac{0{,}05}{365}$ (taux d'intérêt de 5% composé quotidiennement), $c = \left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^n - 1$ (rendement annuel de 6% composé quotidiennement calculé sur n jours), $k = 2$,

$$\begin{aligned} S &= \begin{bmatrix} \frac{0{,}17}{365} & -\frac{0{,}11}{365} \end{bmatrix}, \\ Po &= \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}, \\ P &= \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

remarquons d'abord que pour tout $j = 1 \ldots n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(R_j - r | \mathcal{H}_{j-1}\right) &= \begin{cases} \frac{0{,}086}{365} & si \quad R_{j-1} - r = \frac{0{,}17}{365} \\ \frac{0{,}002}{365} & si \quad R_{j-1} - r = -\frac{0{,}11}{365} \end{cases} > 0 \\ \mathbb{VAR}\left(R_j - r | \mathcal{H}_{j-1}\right) &= \begin{cases} \frac{0{,}016464}{365^2} & si \quad R_{j-1} - r = \frac{0{,}17}{365} \\ \frac{0{,}018816}{365^2} & si \quad R_{j-1} - r = -\frac{0{,}11}{365} \end{cases}. \end{aligned}$$

Observons également que $\mathbb{E}\left(R_j - r\right) = \frac{0{,}05}{365}$ et $\mathbb{VAR}\left(R_j - r\right) = \frac{0{,}0192}{365^2}$.

Les tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 représentent les principales caractéristiques obtenues à partir de 200 simulations pour chacun des horizons $n = 30$, $n = 90$ et $n = 180$.

Tableau 2.1 – Principales caractéristiques de la stratégie optimale sur un horizon de 30 jours obtenues à partir de 200 simulations markoviennes

Caractéristiques	Valeurs
Rendement global désiré c	$0,004943279454$
Moyenne du rendement global	$0,004937887242$
Variance du rendement global	$0,101021453610 \times 10^{-7}$
Rendement annuel moyen (composé quotidiennement)	$0,059934706561$
Temps moyen de calcul d'une stratégie (secondes)	$2,79$

Tableau 2.2 – Principales caractéristiques de la stratégie optimale sur un horizon de 90 jours obtenues à partir de 200 simulations markoviennes

Caractéristiques	Valeurs
Rendement global désiré c	$0,014903267192$
Moyenne du rendement global	$0,014903294158$
Variance du rendement global	$0,371719591910 \times 10^{-15}$
Rendement annuel moyen (composé quotidiennement)	$0,060000107774$
Temps moyen de calcul d'une stratégie (secondes)	$8,95$

Tableau 2.3 – Principales caractéristiques de la stratégie optimale sur un horizon de 180 jours obtenues à partir de 200 simulations markoviennes

Caractéristiques	Valeurs
Rendement global désiré c	$0,030028641757$
Moyenne du rendement global	$0,030028641758$
Variance du rendement global	$0,135582624510 \times 10^{-27}$
Rendement annuel moyen (composé quotidiennement)	$0,060000000001$
Temps moyen de calcul d'une stratégie (secondes)	$20,78$

Exemple 2.3.6 *Soit* $\{S_i, i = 1 \ldots k\}$ *l'ensemble des états possibles et des variables* $\{X_i^n : n \geq 1, i = 1, \ldots, k\}$ *aléatoires indépendantes de distribution stationnaire* $\mathbb{P}(X_i^n = S_j) = p_j$ *indépendantes de* i.

Ainsi $\{R_j - r, j = 1 \ldots n\}$ *suit un modèle multinomial avec comme états possibles*

$\{S_i, i = 1 \ldots k\}$ en nous basant sur la démarche de l'exemple précédent nous obtenons

$$\begin{aligned} R_n - r &= X^n \\ &= \Phi_n \bullet 1. \end{aligned}$$

Par conséquent ce modèle appartient à la classe SIMMI

$$\mathbb{P}\left(R_j - r = S_i | \mathcal{H}_{j-1}\right) = \mathbb{P}\left(R_j - r = S_i\right) = p_i.$$

Le programme Maple 6 en annexe B fournit la stratégie optimale au problème de moyenne-variance multipériodique avec paramètres, c le rendement global espéré du portefeuille de l'investisseur, r le taux d'intérêt périodique, n le nombre de périodes, k le nombre d'états, S la matrice des états, Po la matrice de distribution $[p_i]_{i=1}^k$ et RM les valeurs $\{R_j - r, j = 1 \ldots n\}$ simulées.

Par exemple, soit n le nombre de jours, $r = \frac{0{,}05}{365}$ (taux d'intérêt de 5% composé quotidiennement), $c = \left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^n - 1$ (rendement annuel de 6% composé quotidiennement) , $k = 2$,

$$\begin{aligned} S &= \left[\begin{array}{cc} \frac{0{,}17}{365} & -\frac{0{,}11}{365} \end{array}\right], \\ Po &= \left[\begin{array}{cc} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right] \end{aligned}$$

remarquons que pour tout $j = 1 \ldots n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(R_j - r | \mathcal{H}_{j-1}\right) &= \mathbb{E}\left(R_j - r\right) = \frac{0,05}{365} > 0 \\ \mathbb{VAR}\left(R_j - r | \mathcal{H}_{j-1}\right) &= \mathbb{VAR}\left(R_j - r\right) = \frac{0,0192}{365^2}. \end{aligned}$$

Les tableaux 2.4, 2.5 et 2.6 représentent les principales caractéristiques obtenues à partir de 1000 simulations pour chacun des horizons $n = 30$, $n = 90$ et $n = 180$.

Tableau 2.4 – Principales caractéristiques de la stratégie optimale sur un horizon de 30 jours obtenues à partir de 1000 simulations binomiales

Caractéristiques	Valeurs
Rendement global désiré c	$0,004943279454$
Moyenne du rendement global	$0,004944582121$
Variance du rendement global	$0,599072752710 \times 10^{-8}$
Rendement annuel moyen (composé quotidiennement)	$0,060015773736$
Temps moyen de calcul d'une stratégie (secondes)	$0,14$

Tableau 2.5 – Principales caractéristiques de la stratégie optimale sur un horizon de 90 jours obtenues à partir de 1000 simulations binomiales

Caractéristiques	Valeurs
Rendement global désiré c	$0,014903267192$
Moyenne du rendement global	$0,014903288190$
Variance du rendement global	$0,382160534110 \times 10^{-13}$
Rendement annuel moyen (composé quotidiennement)	$0,060000083921$
Temps moyen de calcul d'une stratégie (secondes)	$0,41$

Tableau 2.6 – Principales caractéristiques de la stratégie optimale sur un horizon de 180 jours obtenues à partir de 1000 simulations binomiales

Caractéristiques	Valeurs
Rendement global désiré c	$0,030028641757$
Moyenne du rendement global	$0,030028641758$
Variance du rendement global	$0,311035740510 \times 10^{-22}$
Rendement annuel moyen (composé quotidiennement)	$0,060000000002$
Temps moyen de calcul d'une stratégie (secondes)	$0,99$

Nous remarquons que les deux modèles affichent des résultats numériques comparables mais que le temps nécessaire pour le calcul d'une stratégie est en moyenne environ 20 fois supérieur dans le modèle markovien à deux états, comparativement au modèle binomial.

CHAPITRE 3

PROBLÈME DE MOYENNE-VARIANCE EN TEMPS CONTINU

Dans ce chapitre, nous proposons dans un premier temps une modélisation du portefeuille d'un investisseur sous la forme d'une équation différentielle stochastique (EDS). La modélisation de la prime de risque retenue, sous-jacente à la constitution d'un portefeuille, s'inspire des modèles SIMMI rencontrés au chapitre précédent. Enfin, nous résolvons le problème d'optimisation de moyenne-variance associé au portefeuille en suivant deux approches distinctes, soit l'approche martingale et l'approche par contrôle stochastique.

3.1 Contexte en temps continu

Soit P_t le prix unitaire d'un titre risqué au temps t, B_t le prix unitaire d'un titre sans risque au temps t , ω_t la proportion du portefeuille autofinancé alloué au titre risqué au temps t et Z_t le rendement global du portefeuille au temps t. Z_t est gouverné par l'EDS suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{Z_t} &= \omega_t \frac{dP_t}{P_t} + (1-\omega_t)\frac{dB_t}{B_t} && (3.1) \\ &= \omega_t\left(\frac{dP_t}{P_t} - \frac{dB_t}{B_t}\right) + \frac{dB_t}{B_t} && (3.2) \\ \text{où } Z_0 &= 1. \end{aligned}$$

Supposons que B_t croît à un taux d'intérêt continu r_t dont l'équation associée est :

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt.$$

Compte tenu des nombreuses propriétés que recèlent les modèles SIMMI en contexte multipériodique, propriétés telles que vues à la section du chapitre précédent, nous privilégions la transposition en temps continu de cette modélisation de la prime de risque :

$$\frac{dP_t}{P_t} - \frac{dB_t}{B_t} = \Psi_t d\Phi_t. \tag{3.3}$$

Ainsi, Ψ_t représente en quelque sorte le portrait que se fait l'investisseur de la prime de risque et Φ_t représente, sous la forme de la solution d'une EDS bien choisie, le phénomène de distorsion aléatoire associé à cette image. Il s'agit d'une généralisation du traitement offert par Richardson [33] qui traite le cas Ψ_t identiquement égal à 1.

Plusieurs choix d'EDS étant envisageables, nous optons pour une forme suffisamment générale : supposons que $\{a_t\}$ et $\{b_t\}$ sont des processus adaptés à la filtration engendrée par le brownien donné et que le terme de droite de (3.4) est bien défini comme semimartingale localement de carré intégrable (voir Métivier et Pellaumail [27]), nous posons

$$d\Phi_t = a_t dt + b_t dW_t\ . \tag{3.4}$$

Alors (3.1) peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} dZ_t &= \omega_t \Psi_t Z_t d\Phi_t + r_t Z_t dt \\ &= \omega_t \Psi_t Z_t \left(a_t dt + b_t dW_t\right) + r_t Z_t dt \\ &= \left(r_t + \omega_t a_t \Psi_t\right) Z_t dt + \omega_t b_t \Psi_t Z_t dW_t \qquad (3.5) \\ \text{où } Z_0 &= 1. \end{aligned}$$

Le choix de (3.4) permet d'employer des modèles populaires en milieu financier, par exemple si $\Psi_t \equiv 1$, $a_t = \mu_t - r_t$ et $b_t = \sigma_t$, nous retrouvons le modèle usuel de Black-Scholes. Un autre exemple satisfaisant (3.4) consiste à faire appel aux récentes constructions de processus GARCH en temps continu ; nous invitons le lecteur intéressé à consulter Nelson [30] et Corradi [6].

Les définitions et les résultats qui suivent ont pour but de nous fournir un contexte de travail qui reflétera les hypothèses de base courantes rencontrées dans le domaine financier.

Tout d'abord, désignons par $\mathcal{F}_t$ la σ-algèbre engendrée par le mouvement brownien $\{W_s : 0 \leq s \leq t\}$ et augmentée des ensembles de mesure nulle.

Nous disons qu'un processus stochastique X est progressivement mesurable par rapport à la filtration brownienne $\{\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T\}$ si pour tout t et pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'ensemble $\{(s,\omega) : 0 \leq s \leq t, \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in B\}$ appartient à la σ-algèbre produit $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Nous disons que ω_t est une opportunité d'arbitrage si le processus de richesse associé X_t^ω satisfait

$$\begin{aligned} P(X_0^\omega = 0) &= 1 \\ P(X_T^\omega > 0) &> 0. \end{aligned}$$

Théorème 3.1.1 *(i) Si un modèle de marché est sans arbitrage, il existe un processus $\theta : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ progressivement mesurable appelé le processus du prix du marché de risque («risk market-price») tel que*

$$a_t = b_t \theta_t,\ 0 \leq t \leq T \quad p.s.$$

(ii) Réciproquement, si un tel processus θ existe et s'il satisfait, en plus des conditions citées ci-dessus,

$$\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty,\ p.s \tag{3.6}$$

et

$$\mathbb{E}\left[e^{\left(-\int_0^T \theta_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right)}\right] = 1 \tag{3.7}$$

alors le marché est sans arbitrage.

Démonstration : Voir Karatzas et Shreve [18] $\square$

Proposition 3.1.2 *(Novikov) Si* $\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt}\right] < \infty$ *alors* (3.6) *et* (3.7) *sont vérifiées.*

Démonstration : Voir Karatzas et Shreve [18] $\square$

Pour la suite de ce chapitre, nous nous limitons à la classe des modèles sans arbitrage.

Notre objectif est de résoudre le problème d'optimisation suivant : trouver un portefeuille ω_t qui minimise la variance du rendement terminal $\mathbb{VAR}(Z_T)$ sous la contrainte $\mathbb{E}(Z_T) = 1 + c$. Dans les prochaines sections nous explorons deux approches de résolution de ce problème.

3.2 Résolution par l'approche martingale

Nous commençons par résoudre le problème dans un cadre général par l'approche martingale. L'idée est attribuable aux travaux originaux de Harrison et Kreps [13] et Harisson et Pliska [14][15]. Il s'agit de décomposer le problème d'optimisation en deux parties. La première étape consiste à exploiter la théorie de la représentation des martingales de carré intégrable pour s'assurer de l'existence d'une stratégie simulant le rendement d'un portefeuille donné. La deuxième étape se résume simplement à résoudre, par la méthode usuelle des lagrangiens, un problème d'optimisation statique dont la variable est le rendement du portefeuille en question.

Désignons par H_t le processus de densité neutre au risque («state price-density») défini par

$$H_t = e^{-\int_0^t r_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds - \int_0^t \theta_s dW_s}$$

qui est bien défini sous l'hypothèse de Novikov énoncée à la proposition 3.1.2, **une hypothèse que nous formulons dans tout le reste du chapitre.**

Proposition 3.2.1 *Soit ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $\mathbb{E}\left(H_T^2\xi^2\right) < \infty$. Sous la condition $\mathbb{E}\left(H_T\xi\right) = 1$, il existe une stratégie ω_t atteignant le rendement global $Z_T = \xi$ face au marché défini par l'équation* (3.5). *De plus le rendement global à chaque instant t est donné par*

$$Z_t = \frac{1}{H_t}\mathbb{E}\left[H_T\xi|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.8}$$

Démonstration : Soit la martingale continue

$$M_t = \mathbb{E}\left(H_T\xi|\mathcal{F}_t\right), \quad 0 \leq t \leq T ,$$

la continuité découlant du fait que $\mathcal{F}_t$ est engendrée par un mouvement brownien. D'après l'inégalité de Jensen $M_t^2 = \mathbb{E}^2\left(H_T\xi|\mathcal{F}_t\right) \leq \mathbb{E}\left(H_T^2\xi^2|\mathcal{F}_t\right)$ ainsi $\mathbb{E}\left(M_t^2\right) \leq \mathbb{E}\left(H_T^2\xi^2\right) < \infty$.

Puisque $M_t' = M_t - 1$ est une martingale de carré intégrable telle que $M_0' = 0$, selon le théorème de représentation des martingales (voir Karatzas et Shreve [17]), il existe un processus progressivement mesurable φ_t, $0 \leq t \leq T$, à valeurs réelles, tel que

$$\int_0^T \varphi_u^2 du < \infty, \quad \text{p.s.}$$

et

$$M_t = 1 + \int_0^t \varphi_u dW_u, \quad 0 \leq t \leq T$$

alors

$$dM_t = \varphi_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Définissons un processus Z_t par

$$Z_t = f\left(H_t, W_t\right) = \frac{1}{H_t}M_t = \frac{1}{H_t}\mathbb{E}\left(H_T\xi|\mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{H_t}\left(1 + \int_0^t \varphi_u dW_u\right)$$

où

$$dH_t = -H_t\left(rdt + \theta dW_t\right) .$$

D'après la formule d'Itô (voir Lamberton-Lapeyre [21]),

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{H_t}M_t\right) &= \frac{1}{H_t}dM_t + M_t d\left(\frac{1}{H_t}\right) + d\left\langle \frac{1}{H_t}, M_t \right\rangle_t \\ &= \frac{1}{H_t}\varphi_t dW_t + M_t\left[\frac{1}{H_t}\left(\left(r_t+\theta_t^2\right)dt + \theta_t dW_t\right)\right] + \frac{\theta_t}{H_t}\varphi_t dt \\ &= \left[\frac{1}{H_t}M_t\left(r_t+\theta_t^2\right) + \frac{\theta_t}{H_t}\varphi_t\right]dt + \frac{1}{H_t}\left(\varphi_t + M_t\theta_t\right)dW_t \\ &= \frac{1}{H_t}M_t\left[\left(r_t+\theta_t^2\right) + \frac{1}{M_t}\theta_t\varphi_t\right]dt + \frac{1}{H_t}M_t\left(\frac{\varphi_t}{M_t}+\theta_t\right)dW_t \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$\omega_t = \left[1+\frac{\varphi_t}{\theta_t M_t}\right]\frac{a_t}{b_t^2\Psi_t} = \left[1+\frac{\varphi_t}{\theta_t H_t Z_t}\right]\frac{a_t}{b_t^2\Psi_t} \tag{3.9}$$

$Z_t = \frac{1}{H_t}\mathbb{E}\left(H_T\xi|\mathcal{F}_t\right)$ satisfait la condition (3.5) et bien évidemment $Z_T = \xi$. □

Remarque 3.2.2 *Si dans la proposition précédente nous exigeons de plus que $\xi \geq 0$, alors $Z_t \geq 0$ pour tout t ; ce qui signifie l'existence d'une stratégie dans un contexte où nous désirons éviter à tout moment la ruine de l'investisseur.*

Proposition 3.2.3 *Supposons que $\mathbb{E}\left(H_T^4\right) < \infty$. Sous les contraintes $\mathbb{E}\left(H_T Z_T\right) = 1$ et $\mathbb{E}\left(Z_T\right) = 1 + c$ il existe un portefeuille ω_t qui minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(Z_T\right)$ et cette variance minimale est donnée par*

$$\mathbb{VAR}\left(Z_T\right) = \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left(H_T\right)} - (1+c)\right)^2 \frac{\mathbb{E}^2\left(H_T\right)}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)}. \tag{3.10}$$

Démonstration : Trouvons tout d'abord le rendement global terminal Z_T qui minimise la variance $\mathbb{VAR}\left(Z_T\right)$ sous les contraintes $\mathbb{E}\left(H_T Z_T\right) = 1$ et $\mathbb{E}\left(Z_T\right) = 1 + c$. Il suffit même de minimiser $\mathbb{E}\left(Z_T^2\right)$ sous les contraintes $\mathbb{E}\left(H_T Z_T\right) = 1$ et $\mathbb{E}\left(Z_T\right) = 1 + c$. D'après la théorie des multiplicateurs de Lagrange, nous devons minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(Z_T^2\right) + \alpha_T\left(\mathbb{E}\left(H_T Z_T\right) - 1\right) + \beta_T\left(\mathbb{E}\left(Z_T\right) - (1+c)\right) \\ = \; & \mathbb{E}\left[Z_T^2 + \alpha_T\left(H_T Z_T - 1\right) + \beta_T\left(Z_T - (1+c)\right)\right] \\ = \; & \mathbb{E}\left[Z_T^2 + \left(\alpha_T H_T + \beta_T\right)Z_T - \beta_T - \alpha_T(1+c)\right] \end{aligned}$$

cette forme quadratique atteignant son minimum à

$$Z_T = -\frac{1}{2}\left(\alpha_T H_T + \beta_T\right).$$

Or, Z_T doit satisfaire les contraintes suivantes $\mathbb{E}\left(H_T Z_T\right) = 1$ et $\mathbb{E}\left(Z_T\right) = 1 + c$, ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(\alpha_T \mathbb{E}\left(H_T^2\right) + \beta_T \mathbb{E}\left(H_T\right)\right) &= 1 \\ -\frac{1}{2}\left(\alpha_T \mathbb{E}\left(H_T\right) + \beta_T\right) &= 1 + c. \end{aligned}$$

Ce système linéaire de deux équations à deux inconnues a pour solution

$$\begin{aligned} \alpha_T &= -2\frac{1 - (1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T\right)}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)} \\ \beta_T &= -2\frac{(1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T^2\right) - \mathbb{E}\left(H_T\right)}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)} \end{aligned}$$

et la richesse finale est donc

$$\begin{aligned} Z_T &= -\frac{1}{2}\left(\alpha_T H_T + \beta_T\right) \\ &= \frac{1}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)}\left[\left(1 - (1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T\right)\right) H_T + \left((1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T^2\right) - \mathbb{E}\left(H_T\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

D'autre part, puisque $\mathbb{E}\left(H_T^4\right) < \infty$ cela entraîne que $\mathbb{E}\left(H_T^2 Z_T^2\right) < \infty$.

Ainsi, d'après la proposition 3.2.1, il existe une stratégie ω_t définie par (3.9) avec rendement global terminal Z_T.

Enfin, nous allons déduire une expression de la variance terminale. Notons que

$$\begin{aligned} \mathbb{VAR}\left(Z_T\right) &= \mathbb{VAR}\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha_T H_T + \beta_T\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\alpha_T^2 \mathbb{VAR}\left(H_T\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[4\frac{\left(1 - (1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T\right)\right)^2}{\mathbb{VAR}^2\left(H_T\right)}\right]\mathbb{VAR}\left(H_T\right) \\ &= \frac{\left(1 - (1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T\right)\right)^2}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)} \\ &= \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left(H_T\right)} - (1+c)\right)^2 \frac{\mathbb{E}^2\left(H_T\right)}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.4 *Sous les conditions de la proposition 3.2.3 et si les coefficients de marché r_t, a_t et b_t sont constants, alors le processus de rendement Z_t associé au portefeuille optimal ω_t est donné par*

$$Z_t = \left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right) e^{rt - \frac{3}{2}\theta^2 t - \theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}$$

où

$$\lambda_T = 2\left[\frac{e^{rT} - (1+c)}{1 - e^{-\theta^2 T}} - e^{rT}\right]$$

et la variance minimale $\mathbb{VAR}\,(Z_T)$ *est donnée par*

$$\mathbb{VAR}\,(Z_T) = \left(e^{rT} - (1+c)\right)^2 \left[\frac{1}{1 - e^{-\theta^2 T}} - 1\right].$$

Démonstration : Tout d'abord, rappelons que $M_t = e^{-\frac{a^2}{2}t + aW_t}$ (où W_t est un mouvement brownien standard) est une martingale (voir Lamberton-Lapeyre [21]), alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(H_T|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\left[e^{-rT - \frac{1}{2}\theta^2 T - \theta W_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\theta^2 T - \theta W_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-rT - \frac{1}{2}\theta^2 t - \theta W_t}
\end{aligned}$$

et, de plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(H_T^2|\mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}\left[e^{-2rT - \theta^2 T - 2\theta W_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-2rT}\mathbb{E}\left[e^{-\theta^2 T - 2\theta W_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-2rT + \theta^2 T}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}(2\theta)^2 T - 2\theta W_T}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-2rT + \theta^2 T - \frac{1}{2}(2\theta)^2 t - 2\theta W_t} \\
&= e^{-2rT + \theta^2(T-2t) - 2\theta W_t}.
\end{aligned}$$

Par la propriété télescopique nous déduisons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(H_T) &= e^{-rT} \\
\mathbb{E}\left(H_T^2\right) &= e^{-2rT + \theta^2 T}
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{VAR}\left(H_T\right) &= \mathbb{E}\left(H_T^2\right) - \mathbb{E}^2\left(H_T\right) \\
&= e^{-2rT+\theta^2 T} - e^{-2rT} \\
&= e^{-2rT+\theta^2 T}\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right).
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$$
\frac{1}{H_t \mathbb{VAR}\left(H_T\right)} = \frac{e^{rt+\frac{1}{2}\theta^2 t+\theta W_t}}{e^{-2rT+\theta^2 T}\left(1-e^{-\theta^2 T}\right)}
$$

et

$$
\left(1-(1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T\right)\right)\mathbb{E}\left(H_T^2|\mathcal{F}_t\right) = \left(1-(1+c)\,e^{-rT}\right)e^{-2rT+\theta^2(T-2t)-2\theta W_t}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\left((1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T^2\right) - \mathbb{E}\left(H_T\right)\right)\mathbb{E}\left(H_T|\mathcal{F}_t\right) &= \left((1+c)\,e^{-2rT+\theta^2 T} - e^{-rT}\right)e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t} \\
&= \left((1+c)\,e^{-rT+\theta^2 T} - 1\right)e^{-2rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}.
\end{aligned}
$$

Après les simplifications de l'expression du rendement optimal donné par (3.8) et (3.11), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \frac{1}{H_t \mathbb{VAR}\left(H_T\right)}\left[\left(1-(1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T\right)\right)\mathbb{E}\left(H_T^2|\mathcal{F}_t\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{H_t \mathbb{VAR}\left(H_T\right)}\left[\left((1+c)\,\mathbb{E}\left(H_T^2\right) - \mathbb{E}\left(H_T\right)\right)\mathbb{E}\left(H_T|\mathcal{F}_t\right)\right] \\
&= \frac{1-(1+c)\,e^{-rT}}{1-e^{-\theta^2 T}}e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} + \frac{(1+c)\,e^{-rT+\theta^2 T}-1}{1-e^{-\theta^2 T}}e^{rt-\theta^2 T} \\
&= \frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2 T}}e^{-r(T-t)-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} + \frac{(1+c)-e^{rT-\theta^2 T}}{1-e^{-\theta^2 T}}e^{-r(T-t)} \\
&= \frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2 T}}e^{-r(T-t)-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} + \left(\frac{(1+c)-e^{rT}}{1-e^{-\theta^2 T}} + e^{rT}\right)e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Et en posant $\lambda_T = 2\left[\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2 T}} - e^{rT}\right]$ nous obtenons

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \left(e^{rT} + \frac{\lambda_T}{2}\right)e^{-r(T-t)-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2}e^{-r(T-t)} \\
&= \left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rt-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}.
\end{aligned}
$$

Enfin la variance optimale (3.9) se réduit à

$$
\begin{aligned}
\mathbb{VAR}\left(Z_T\right) &= \left(\frac{1}{\mathbb{E}\left(H_T\right)} - (1+c)\right)^2 \frac{\mathbb{E}^2\left(H_T\right)}{\mathbb{VAR}\left(H_T\right)} \\
&= \left(\frac{1}{e^{-rT}} - (1+c)\right)^2 \frac{e^{-2rT}}{e^{-2rT+\theta^2 T}\left(1-e^{-\theta^2 T}\right)} \\
&= \left(e^{rT} - (1+c)\right)^2 \frac{e^{-\theta^2 T}}{1-e^{-\theta^2 T}} \\
&= \left(e^{rT} - (1+c)\right)^2 \left(\frac{1}{1-e^{-\theta^2 T}} - 1\right).
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 3.2.5 *Sous les conditions de la proposition 3.2.3 et si les coefficients de marché r_t, a_t et b_t sont constants, le portefeuille optimal ω_t est donné par*

$$
\omega_t = -\left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)} Z_t}\right) \frac{a}{b^2 \Psi_t}.
$$

Démonstration : Rappelons que la stratégie optimale est donnée par (3.9) où φ_t est tel que

$$
\begin{aligned}
dM_t &= \varphi_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \\
M_0 &= 1.
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\begin{aligned}
M_t &= H_t Z_t \\
&= e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\left(\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right) e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right) e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2} e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t},
\end{aligned}
$$

d'après le lemme d'Itô, $M_t = f\left(t, W_t\right)$ doit satisfaire

$$
\begin{aligned}
dM_t &= f_t'(t, W_t)dt + f_{W_t}'(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} f_{W_t W_t}''(t, W_t) d\left\langle W_t, W_t\right\rangle \\
&= \left[f_t'(t, W_t) + \frac{1}{2} f_{W_t W_t}''(t, W_t)\right] dt + f_{W_t}'(t, W_t)dW_t.
\end{aligned}
$$

Or, nous observons

$$
\begin{aligned}
f'_t(t,W_t) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}\left(-2\theta^2\right)-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\left(-\frac{1}{2}\theta^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\theta^2\left[4\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\right]\\
f'_{W_t}(t,W_t) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}\left(-2\theta\right)-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\left(-\theta\right)\\
&= -\theta\left[2\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\right]\\
f''_{W_tW_t}(t,W_t) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}\left(4\theta^2\right)-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\left(\theta^2\right)\\
&= \theta^2\left[4\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous déduisons

$$
\begin{aligned}
dM_t &= -\theta\left[2\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}-\frac{\lambda_T}{2}e^{-rT-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\right]dW_t\\
&= -\theta\left(H_tZ_t+\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}\right)dW_t
\end{aligned}
$$

et posons

$$
\varphi_t = -\theta\left(H_tZ_t+\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}\right).
$$

Donc (3.9) devient

$$
\begin{aligned}
\omega_t &= \left[1+\frac{\varphi_t}{\theta H_tZ_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t}\\
&= \left[1-\frac{H_tZ_t+\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}}{H_tZ_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t}\\
&= -\left[\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\frac{e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}}{H_tZ_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t}\\
&= -\left[\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\frac{e^{-2\theta^2 t-2\theta W_t}}{e^{-rt-\frac{1}{2}\theta^2 t-\theta W_t}Z_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t}\\
&= -\left[\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\frac{e^{rt-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t}}{Z_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_t &= -\left[\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\frac{\left(Z_t+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)}{\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)Z_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t} \\
&= -\left[\frac{Z_t+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}}{Z_t}\right]\frac{a}{b^2\Psi_t} \\
&= -\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}Z_t}\right)\frac{a}{b^2\Psi_t}.
\end{aligned}
$$

□

3.3 Résolution par contrôle stochastique

Dans la section précédente, l'approche moderne de la théorie de la représentation des martingales par des intégrales stochastiques a permis de garantir dans un cadre très général l'existence d'une stratégie qui atteint la cible $\mathbb{E}(Z_T) = 1 + c$ tout en minimisant la variance $\mathbb{VAR}(Z_T)$. Dans cette section, nous offrons une autre approche au problème en trouvant directement la stratégie optimale dans le cas où les coefficients de marché r_t, μ_t et σ_t sont constants, en ramenant le problème d'optimisation stochastique à un problème d'optimisation déterministe d'une équation aux dérivées partielles. En fait, cette approche exploite de façon implicite le théorème de Feynman-Kac. Nous reconnaissons Merton [25] comme le précurseur de cette méthode de résolution du problème d'optimisation.

Dans ce qui suit nous exposons les définitions et les résultats usuels rencontrés en théorie du contrôle stochastique.

Considérons une équation différentielle stochastique de la forme :

$$
dX_t = \mu\left(t, X_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, u_t\right) dW_t \tag{3.12}
$$

où u_t est un processus à valeur dans un fermé $U \subseteq \mathbb{R}$, ce processus est dit un processus de contrôle. Nous supposerons que les coefficients $\mu : [0,T]\times\mathbb{R}\times U \to \mathbb{R}$ et $\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}\times U \to \mathbb{R}$ sont continus, $\mu(.,.,u)$ et $\sigma(.,.,u) \in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ pour tout $u \in U$. De plus nous poserons l'hypothèse qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\mu_t| + |\mu_x| &\leq C & (3.13) \\ |\sigma_t| + |\sigma_x| &\leq C & (3.14) \\ |\mu(t,x,u)| + |\sigma(t,x,u)| &\leq C(1+|x|+|u|). & (3.15) \end{aligned}$$

Ces conditions de croissance garantissent l'existence d'une solution forte pour l'équation (3.12) pour tout processus u prévisible et de carré intégrable (voir Métivier et Pellaumail [27]). Un processus de contrôle u_t, $t \in [0,T]$, progressivement mesurable à valeurs dans U est dit un «contrôle admissible» si pour toutes valeurs x telles que $X_0 = x$, la solution X_t à l'équation différentielle stochastique (3.12) existe, est unique et vérifie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_0^T |u_s|^k \, ds\right) &< \infty, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} & (3.16) \\ \mathbb{E}^{t,x}\left(\sup_{s\in[t,T]} |X_s|^k\right) &< \infty, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} & (3.17) \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}^{t,x}(X(s))$ désigne l'espérance du processus $X(s)$ avec condition initiale $X_t = x$.

Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $\overline{O}$ sa fermeture et $f(t,x)$ tel qu'il existe k satisfaisant

$$|f(t,x)| \leq C\left(1+|x|^k\right) \text{ sur } [0,T]\times\overline{O} \tag{3.18}$$

nous introduisons la fonctionnelle $J(t,x,u) = \mathbb{E}^{t,x}(f(T,X_T))$ dite fonctionnelle de coût terminal.

Regardons le problème d'optimisation suivant

$$\min_{u\in A(0,x)} J(0,x,u) \tag{3.19}$$

où $A(t,x)$ est l'ensemble de tous les contrôles admissibles u_t tels que $(t,x) \in [0,T)\times O$ et $X_t = x$. La fonction $V(t,x) = \inf_{u\in A(t,x)} J(t,x,u)$, $(t,x) \in [t,T)\times O$ est dite la fonction valeur associée au problème d'optimisation. Soit $G \in C^{1,2}([0,T)\times O)$, on définit un opérateur A^u comme suit :

$$A^u(G(t,x)) = G_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)\,G_{xx}(t,x) + \mu(t,x,u)\,G_x(t,x). \tag{3.20}$$

Théorème 3.3.1 *Soit $G \in C^{1,2}([0,T) \times O) \cap C\left([0,T] \times \overline{O}\right)$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$|G(t,x)| \leq C\left(1+|x|^k\right) \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} A^u(G(t,x)) &= 0, \textit{ pour tout } (t,x) \in [0,T) \times O & (3.22) \\ G(T,x) &= f(T,x), \textit{ pour tout } x \in \overline{O} & (3.23) \end{aligned}$$

Alors

(i) $G(t,x) \leq J(t,x,u)$ pour tout $(t,x) \in [0,T) \times O$ et $u \in A(t,x)$.

(ii) Si pour tout $(t,x) \in [0,T) \times O$ il existe $u^* \in A(t,x)$ tel que

$$u_s^* \in \arg\min_{u \in U} A^u(G(s,X_s^*)), \textit{ pour tout } s \in [t,T] \tag{3.24}$$

où X_s^* est le processus associé au contrôle u_s^*, alors on obtient

$$G(t,x) = V(t,x) = J(t,x,u^*).$$

Démonstration : Voir Korn et Korn [20]. □

D'après l'approche lagrangienne, rappelons que nous sommes ramenés à minimiser la fonctionnelle $\mathbb{E}\left[Z_T^2 + \lambda_T(Z_T - (1+c))\right]$.

Enfin, cette dernière peut se reformuler en la minimisation de $\mathbb{E}\left(Z_T + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2$. Ce problème d'optimisation peut se résoudre par le biais du contrôle stochastique. Tout d'abord, nous identifions l'équation de rendement (3.5) d'un investisseur avec stratégie ω_t à une équation différentielle stochastique contrôlée de la forme :

$$dZ^u(t) = \mu(t, Z^u(t), u(t))\,dt + \sigma(t, Z^u(t), u(t))\,dW_t$$

en posant

$$\begin{aligned} u(t) &= \omega_t \Psi_t \\ \mu(t,x,u) &= (r_t + u a_t)\,x \\ \sigma(t,x,u) &= u b_t x. \end{aligned}$$

Soit

$$V(t,x) = \inf_{u \in A(t,x)} J(t,x,u)$$

la fonction de valeur du problème de portefeuille. Alors, l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondante a la forme suivante :

$$\inf_{u \in U} \frac{1}{2} u^2 b_t^2 x^2 V_{xx}(t,x) + (r_t + u a_t) x V_x(t,x) + V_t(t,x) = 0 \tag{3.25}$$

et nous devons avoir comme condition terminale

$$V(T,x) = \left(x + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2 .$$

Si nous nous limitons au cas où les coefficients de marché r_t, a_t et b_t sont déterministes et indépendants de t, les conditions (3.13), (3.14) et (3.15) seront satisfaites si nous choisissons U un intervalle fermé et borné de la forme $[\alpha_1, \alpha_2]$. **C'est l'hypothèse que nous faisons dans toute la suite de la présente section.**

Proposition 3.3.2 *Soit Z_t un processus de rendement global à l'instant t satisfaisant la condition* (3.5)*, λ_T un nombre réel, $U = [\alpha_1, \alpha_2]$, $O = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et*

$$G(t,x) = \left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t) - r(T-t)\right)} x + \frac{\lambda_T}{2} e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\right)^2$$

où $dom(G) = U \times O$ alors $G(t,x)$ satisfait la condition de croissance polynômiale (3.21) *et les conditions de Hamilton-Jacobi-Bellman* (3.22) *et* (3.23)*. En particulier*

$$u = -\left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}x}\right) \frac{a}{b^2}$$

est un point d'infimum associé à (3.25).

Démonstration : Tout d'abord, nous vérifions aisément la condition (3.21), car

$$\begin{aligned} |G(t,x)| &\leq \left(x + \frac{\lambda_T}{2}\right)^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{\lambda_T^2}{4}\right)(1 + x^2). \end{aligned}$$

D'autre part, $G_{xx}(t,x) = 2\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\right)^2 > 0$, alors un candidat possible à un extremum est

$$\begin{aligned}
u &= -\frac{axG_x(t,x)}{2\left(\frac{1}{2}b^2x^2G_{xx}(t,x)\right)} \\
&= -\left(\frac{a}{b^2}\right)\frac{G_x(t,x)}{xG_{xx}(t,x)} \\
&= -\frac{2\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\right)e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}}{2\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\right)^2 x}\left(\frac{a}{b^2}\right) \\
&= -\frac{\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\right)}{e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}x}\left(\frac{a}{b^2}\right) \\
&= -\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}x}\right)\left(\frac{a}{b^2}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, remarquons qu'avec un tel choix de u nous devons nous assurer que la fonction $G(t,x)$ a été préalablement choisie pour satisfaire l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}u^2b^2x^2G_{xx}(t,x) + (r+ua)\,xG_x(t,x) + G_t(t,x) \\
&= \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^4}\frac{G_x^2(t,x)}{x^2G_{xx}^2(t,x)}b^2x^2G_{xx}(t,x) \\
&\quad + \left(r - \left(\frac{a}{b^2}\right)\frac{G_x(t,x)}{xG_{xx}(t,x)}a\right)xG_x(t,x) + G_t(t,x) \\
&= \frac{1}{2}\theta^2\frac{G_x^2(t,x)}{G_{xx}(t,x)} + \left(r - \theta^2\frac{G_x(t,x)}{xG_{xx}(t,x)}\right)xG_x(t,x) + G_t(t,x) \\
&= \frac{1}{2}\theta^2\frac{G_x^2(t,x)}{G_{xx}(t,x)} + rxG_x(t,x) - \theta^2\frac{G_x^2(t,x)}{G_{xx}(t,x)} + G_t(t,x) \\
&= -\frac{1}{2}\theta^2\frac{G_x^2(t,x)}{G_{xx}(t,x)} + rxG_x(t,x) + G_t(t,x).
\end{aligned}$$

En effet, en posant $L(t,x) = e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}$ alors

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\theta^2 \frac{G_x^2(t,x)}{G_{xx}(t,x)} + r_t x G_x(t,x) + G_t(t,x) \\
= & -\frac{1}{2}\theta^2 \frac{4L^2(t,x)\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\right)^2}{-2\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\right)^2} - 2rxL(t,x)e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)} \\
& -2L(t,x)\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\left(\frac{\theta^2}{2}-r\right)x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\frac{\theta^2}{2}\right) \\
= & \; \theta^2 L^2(t,x) - 2rxL(t,x)e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)} \\
& -2L(t,x)\left(e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\left(\frac{\theta^2}{2}-r_t\right)x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\frac{\theta^2}{2}\right) \\
= & \; L(t,x)\left[\theta^2 L(t,x) - 2rxe^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\right] \\
& -L(t,x)\left[e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\left(\theta^2-2r\right)x + \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\theta^2\right] \\
= & \; L(t,x)\left[\theta^2 L(t,x) - e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}(T-t)-r(T-t)\right)}\theta^2 x - \frac{\lambda_T}{2}e^{-\frac{\theta^2}{2}(T-t)}\theta^2\right] \\
= & \; L(t,x)\left[\theta^2 L(t,x) - \theta^2 L(t,x)\right] \\
= & \; 0.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.3 *Soit Z_t un processus de rendement global à l'instant t satisfaisant la condition (3.5) et λ_T un nombre réel. Si*

$$\omega_t = -\left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}Z_t}\right)\frac{a}{b^2\Psi_t} \tag{3.26}$$

alors

$$Z_t = \left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rt-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}} \tag{3.27}$$

est l'unique processus de rendement global associé à la stratégie ω_t.

Démonstration : En substituant la valeur de (3.26) dans (3.5) nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \left(r + -\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}Z_t}\right)\frac{a}{b^2\Psi_t}a\Psi_t\right)Z_t dt \\
&\quad -b\Psi_t\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}Z_t}\right)\left(\frac{a}{b^2\Psi_t}\right)Z_t dW_t \\
&= \left[\left(r-\theta^2\right)Z_t - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\theta^2\right]dt - \left[Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right]\theta dW_t \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

où $Z_0 = 1$. Soit $Z_t = f(t, W_t) = \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t} - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}$, alors d'après le lemme d'Itô Z_t doit satisfaire

$$\begin{aligned}
dZ_t &= f_t'(t, W_t)dt + f_{W_t}'(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{W_tW_t}''(t, W_t)d\langle W_t, W_t\rangle \\
&= \left[f_t'(t, W_t) + \frac{1}{2}f_{W_tW_t}''(t, W_t)\right]dt + f_{W_t}'(t, W_t)dW_t.
\end{aligned}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
f_t'(t, W_t) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rt-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\left(r-\frac{3}{2}\theta^2\right) - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}r \\
&= \left(r-\frac{3}{2}\theta^2\right)Z_t - \frac{3}{2}\theta^2\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}} \\
f_{W_t}'(t, W_t) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rt-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t}(-\theta) \\
&= \left(Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)(-\theta) \\
f_{W_tW_t}''(t, W_t) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rt-\frac{3}{2}\theta^2 t-\theta W_t}\theta^2 \\
&\quad \left(Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)\theta^2.
\end{aligned}$$

Ainsi nous déduisons

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \left[\left(\left(r-\frac{3}{2}\theta^2\right)Z_t - \frac{3}{2}\theta^2\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right) + \frac{1}{2}\left(Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)\theta^2\right]dt \\
&\quad + \left(Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)(-\theta)\,dW_t \\
&= \left(\left(r-\theta^2\right)Z_t - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\theta^2\right)dt - \theta\left(Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)dW_t.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le processus (3.27) satisfait l'équation de rendement (3.28).

Enfin, nous allons montrer l'unicité de la solution de l'équation (3.28).

Posons

$$Y_t = g(t, W_t) = \frac{1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}}{Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}} = e^{-rt+\frac{3}{2}\theta^2 t+\theta W_t}$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
g'_t(t, W_t) &= e^{-rt+\frac{3}{2}\theta^2 t+\theta W_t}\left(\frac{3}{2}\theta^2 - r\right) = \left(\frac{3}{2}\theta^2 - r\right) Y_t \\
g'_{W_t}(t, W_t) &= e^{-rt+\frac{3}{2}\theta^2 t+\theta W_t}\theta = \theta Y_t \\
g''_{W_t W_t}(t, W_t) &= e^{-rt+\frac{3}{2}\theta^2 t+\theta W_t}\theta^2 = \theta^2 Y_t.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme d'Itô, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
dY_t &= \left[g'_t(t, W_t) + \frac{1}{2} g''_{W_t W_t}(t, W_t)\right] dt + g'_{W_t}(t, W_t) dW_t \\
&= \left(2\theta^2 - r\right) Y_t dt + \theta Y_t dW_t \\
&= Y_t \left(\left(2\theta^2 - r\right) dt + \theta dW_t\right).
\end{aligned}$$

Soit $\widehat{Z}_t$ une autre solution de (3.28), posons

$$\widehat{Y}_t = h(t, W_t) = \widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}$$

en utilisant une fois de plus le lemme d'Itô, il en découle

$$\begin{aligned}
d\widehat{Y}_t &= d\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}} r dt \\
&= \left(\left(r - \theta^2\right) \widehat{Z}_t - \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\theta^2\right) dt - \theta\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right) dW_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}} r dt \\
&= \left(\left(r - \theta^2\right) \widehat{Z}_t + \left(r - \theta^2\right) \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right) dt - \theta\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right) dW_t \\
&= \left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)\left(\left(r - \theta^2\right) dt - \theta dW_t\right).
\end{aligned}$$

Appliquons la règle du produit à la forme $Y_t\widehat{Y}_t$, alors

$$\begin{aligned}
d\left(Y_t\widehat{Y}_t\right) &= Y_t d\widehat{Y}_t + \widehat{Y}_t dY_t + d\left\langle Y, \widehat{Y}\right\rangle_t \\
&= Y_t\left[\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)\left(\left(r-\theta^2\right)dt - \theta dW_t\right)\right] \\
&\quad + \widehat{Y}_t Y_t\left(\left(2\theta^2 - r\right)dt + \theta dW_t\right) + \left(\theta Y_t\right)\left(-\theta\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)\right)dt \\
&= Y_t\left[\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)\left(\left(r-\theta^2\right)dt - \theta dW_t\right)\right] \\
&\quad + \left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)Y_t\left(\left(2\theta^2 - r\right)dt + \theta dW_t\right) - \theta^2 Y_t\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right)dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $Y_t\widehat{Y}_t = C$ une constante pour tout t en particulier pour $t = 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
Y_0\widehat{Y}_0 &= Y_0\left(\widehat{Z}_0 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right) \\
&= 1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}
\end{aligned}$$

donc

$$Y_t\widehat{Y}_t = \left(\frac{1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}}{Z_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}}\right)\left(\widehat{Z}_t + \frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}}\right) = 1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}$$

d'où nous déduisons que $\widehat{Z}_t = Z_t$. □

Remarque 3.3.4 *Il est important de noter que l'approche par contrôle stochastique permet de trouver explicitement une stratégie mais ne garantit pas la positivité du processus* Z_t.

À partir des expressions (3.26) et (3.27), nous retrouvons aisément une fois de plus les résultats des corollaires 3.2.4 et 3.2.5.

Pour conclure ce chapitre, nous établissons les contreparties en temps continu des propositions, théorème et corollaire rencontrés en contexte multipériodique dans le chapitre précédent. Rappellons encore une fois que le modèle de marché considéré ici est celui donné par l'équation (3.5).

Proposition 3.3.5 *Soit λ_T un nombre réel et* (3.27) *le processus de rendement global associé à la stratégie* (3.26), *alors*

$$\mathbb{E}\left(Z_T^2\right) = e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4}\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right).$$

Démonstration : Observons tout d'abord les simplifications

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_T^2\right) &= \mathbb{E}\left[\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 T-\theta W_T} - \frac{\lambda_T}{2}\right]^2 \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)^2 e^{2rT}\mathbb{E}\left(e^{-3\theta^2 T-2\theta W_T}\right) - \lambda_T\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{3}{2}\theta^2 T-\theta W_T}\right) + \frac{\lambda_T^2}{4} \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)^2 e^{2rT-\theta^2 T}\mathbb{E}\left(e^{-2\theta^2 T-2\theta W_T}\right) - \lambda_T\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\theta^2 T}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\theta^2}{2}T-\theta W_T}\right) \\
&\quad + \frac{\lambda_T^2}{4}.
\end{aligned}$$

Notons que $M_t = e^{-\frac{a^2}{2}t+aW_t}$ (où W_t est un mouvement brownien standard) est une martingale (voir Lamberton-Lapeyre [21]), et donc $\mathbb{E}\left(M_t\right) = \mathbb{E}\left(M_0\right) = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_T^2\right) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)^2 e^{2rT-\theta^2 T} - \lambda_T\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4} \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{e^{rT}}+\frac{\lambda_T^2}{4e^{2rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T} - \left(\lambda_T+\frac{\lambda_T^2}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4} \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \lambda_T e^{rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4}e^{-\theta^2 T} - \lambda_T e^{rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T^2}{2}e^{-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4} \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T^2}{4}e^{-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4} \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4}\left(1-e^{-\theta^2 T}\right).
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.6 *Soit λ_T un nombre réel et* (3.27) *le processus de rendement global du portefeuille P associé à la stratégie* (3.26) *et Z_t^Q le rendement global d'un autre portefeuille Q satisfaisant l'équation* (3.5) *et tel que $\mathbb{E}\left(H_T Z_T^Q\right) = 1$ alors*

$$\mathbb{E}\left(Z_T^P Z_T^Q\right) = \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right).$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_T^P Z_T^Q\right) &= \mathbb{E}\left[\left(\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 T-\theta W_T}-\frac{\lambda_T}{2}\right)Z_T^Q\right] \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\mathbb{E}\left(e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 T-\theta W_T}Z_T^Q\right)-\frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T}\mathbb{E}\left(e^{-rT-\frac{\theta^2}{2}T-\theta W_T}Z_T^Q\right)-\frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T}\mathbb{E}\left(H_T Z_T^Q\right)-\frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T}-\frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.7 *Sous la contrainte* $\mathbb{E}(Z_T)=1+c$ *et* $\mathbb{E}(H_T Z_T)=1$ *, les pondérations* (3.26) *en posant*

$$\lambda_T = 2\left[\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2 T}}-e^{rT}\right]$$

minimisent la variance globale du rendement $\mathbb{VAR}(Z_T)$ *et cette variance est donnée par*

$$\mathbb{VAR}(Z_T) = \left(e^{rT}-(1+c)\right)^2\left[\frac{1}{1-e^{-\theta^2 T}}-1\right].$$

Démonstration : D'abord, nous allons nous assurer que suivant la stratégie $\omega_t = -\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{r(T-t)}Z_t}\right)\left(\frac{a_t}{b_t^2\Psi_t}\right)$ les contraintes $\mathbb{E}(H_T Z_T)=1$ et $\mathbb{E}(Z_T)=1+c$ sont respectées

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_T Z_T) &= \mathbb{E}\left(e^{-rT-\frac{\theta^2}{2}T-\theta W_T}Z_T\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{-rT-\frac{\theta^2}{2}T-\theta W_T}\left(\left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 T-\theta W_T}-\frac{\lambda_T}{2}\right)\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\mathbb{E}\left(e^{-\theta^2 T-2\theta W_T}\right)-\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\theta^2}{2}T-\theta W_T}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_T) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)\mathbb{E}\left(e^{rT-\frac{3}{2}\theta^2 T-\theta W_T}\right)-\frac{\lambda_T}{2} \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{rT-\theta^2 T}\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\theta^2}{2}T-\theta W_T}\right)-\frac{\lambda_T}{2}
\end{aligned}$$

puisque $M_t = e^{-\frac{a^2}{2}t+aW_t}$ (où W_t est un mouvement brownien standard) est une martingale (voir Lamberton-Lapeyre [21]), et donc $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0) = 1$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_T) &= \left(1 + \frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right) e^{rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2} \\
&= e^{rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2}\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right) \\
&= e^{rT-\theta^2 T} - \left[\frac{e^{rT} - (1+c)}{1 - e^{-\theta^2 T}} - e^{rT}\right]\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right) \\
&= e^{rT-\theta^2 T} - \left[e^{rT} - (1+c) - e^{rT}\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right)\right] \\
&= e^{rT-\theta^2 T} - \left[e^{rT-\theta^2 T} - (1+c)\right] \\
&= 1 + c.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant déduire une expression pour la variance $\mathbb{VAR}(Z_T)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{VAR}(Z_T) &= \mathbb{E}\left(Z_T^2\right) - \left(\mathbb{E}(Z_T)\right)^2 \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4}\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right) - (1+c)^2 \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \left[\frac{e^{rT} - (1+c)}{1 - e^{-\theta^2 T}} - e^{rT}\right]^2 \left(1 - e^{-\theta^2 T}\right) - (1+c)^2 \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\left(e^{rT} - (1+c)\right)^2}{1 - e^{-\theta^2 T}} - 2e^{rT}\left(e^{rT} - (1+c)\right) \\
&\quad + e^{2rT}\left(1 - e^{-\theta^2 T}\right) - (1+c)^2 \\
&= \frac{\left(e^{rT} - (1+c)\right)^2}{1 - e^{-\theta^2 T}} - e^{2rT} + 2e^{rT}(1+c) - (1+c)^2 \\
&= \frac{\left(e^{rT} - (1+c)\right)^2}{1 - e^{-\theta^2 T}} - \left(e^{rT} - (1+c)\right)^2 \\
&= \left(e^{rT} - (1+c)\right)^2 \left[\frac{1}{1 - e^{-\theta^2 T}} - 1\right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Enfin, pour montrer l'optimalité de la stratégie ω_t, il suffit de vérifier que pour toute autre stratégie associée à un portefeuille Q pour lequel nous avons $\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) = 1 + c$ alors

$\mathbb{E}\left(Z_T^P Z_T^Q\right) = \mathbb{E}\left(Z_T^P\right)^2$. Nous déduisons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z_T^P Z_T^Q\right) &= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2}(1+c) \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T}{2}\left(e^{rT-\theta^2 T} - (1+c)\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T}{2}\left(e^{rT-\theta^2 T} - e^{rT} + e^{rT} - (1+c)\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T}{2}\left(e^{rT}\left(e^{-\theta^2 T}-1\right) + e^{rT} - (1+c)\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T}{2}\left(1-e^{-\theta^2 T}\right)\left[\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2 T}} - e^{rT}\right] \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T^2}{4}\left(1-e^{-\theta^2 T}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(Z_T^P\right)^2.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3.8 *Soit* (3.27) *le processus de rendement global du portefeuille P associé à la stratégie* (3.26) *avec* $\lambda_T = 2\left[\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2 T}} - e^{rT}\right]$, *alors pour tout autre portefeuille Q tel que le processus de rendement Z_t^Q satisfait* $\mathbb{E}\left(H_T Z_T^Q\right) = 1$ *nous avons*

$$\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT} = \beta_T\left(\mathbb{E}\left(Z_T^P\right) - e^{rT}\right)$$

où $\beta_T = \frac{\mathbb{COV}\left(Z_T^P, Z_T^Q\right)}{\mathbb{VAR}\left(Z_T^P\right)}$.

Démonstration : Calculons simplement la covariance

$$\begin{aligned}
\mathbb{COV}\left(Z_T^P, Z_T^Q\right) &= \mathbb{E}\left(Z_T^P Z_T^Q\right) - \mathbb{E}\left(Z_T^P\right)\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= \left(1+\frac{\lambda_T}{2e^{rT}}\right)e^{2rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2 T} + \frac{\lambda_T}{2}e^{rT-\theta^2 T} - \frac{\lambda_T}{2}\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{COV}\left(Z_T^P, Z_T^Q\right) &= e^{2rT-\theta^2T} + \frac{\lambda_T}{2}\left(e^{rT-\theta^2T} - \mathbb{E}\left(Z_T^Q\right)\right) - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2T} + \frac{\lambda_T}{2}\left(e^{rT-\theta^2T} - e^{rT} + e^{rT} - \mathbb{E}\left(Z_T^Q\right)\right) \\
&\quad - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2T} - \frac{\lambda_T}{2}\left(e^{rT}\left(1-e^{-\theta^2T}\right) + \mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) \\
&\quad - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2T} - \left(e^{rT} - (1+c)\right)e^{rT} + e^{2rT}\left(1-e^{-\theta^2T}\right) \\
&\quad - \left(\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2T}} - e^{rT}\right)\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= e^{2rT-\theta^2T} - e^{2rT} + (1+c)\,e^{rT} + e^{2rT} - e^{2rT-\theta^2T} \\
&\quad - \left(\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2T}} - e^{rT}\right)\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= (1+c)\,e^{rT} - \left(\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2T}} - e^{rT}\right)\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) \\
&\quad - (1+c)\,\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) \\
&= -\left(\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2T}} - e^{rT}\right)\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) - (1+c)\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right)
\end{aligned}
$$

d'où nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{COV}\left(Z_T^P, Z_T^Q\right) &= -\left[\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2T}} - e^{rT} + (1+c)\right]\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) \\
&= -\left[\frac{e^{rT}-(1+c)}{1-e^{-\theta^2T}} - e^{rT} + (1+c)\right]\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) \\
&= \left((1+c) - e^{rT}\right)\left[\frac{1}{1-e^{-\theta^2T}} - 1\right]\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) \\
&= \left((1+c) - e^{rT}\right)\frac{\mathbb{VAR}\left(Z_T^P\right)}{\left((1+c) - e^{rT}\right)^2}\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right) \\
&= \frac{\mathbb{VAR}\left(Z_T^P\right)}{(1+c) - e^{rT}}\left(\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, il découle

$$
\mathbb{E}\left(Z_T^Q\right) - e^{rT} = \frac{\mathbb{COV}\left(Z_T^P, Z_T^Q\right)}{\mathbb{VAR}\left(Z_T^P\right)}\left(\mathbb{E}\left(Z_T^P\right) - e^{rT}\right) = \beta_T\left(\mathbb{E}\left(Z_T^P\right) - e^{rT}\right).
$$

.

$\square$

CONCLUSION

Nous avons présenté une analyse de moyenne-variance, aussi bien en contexte multipériodique qu'en temps continu, pour la sélection de portefeuille lorsque le portefeuille de l'investisseur est composé d'une seule action et d'une seule obligation et que des conditions plutôt générales sont imposées sur ces titres.

Une solution fermée au problème de moyenne-variance multipériodique a été construite en utilisant des techniques d'optimisation dans un contexte d'espace L^2 de même que des propriétés de conditionnement de variables aléatoires et de récurrence. L'existence d'une solution générale au problème de moyenne-variance en temps continu a été démontrée à l'aide de la théorie de représentation des martingales de carré intégrable. Dans le cas de coefficients de marché constants, nous avons déduit une solution explicite aussi bien par l'approche martingale que par l'approche par contrôle stochastique. L'avantage des solutions proposées tient du fait qu'elles sont suffisamment générales pour permettre l'incorporation de la dépendance temporelle dans la modélisation du rendement, de même que la dépendance avec des variables exogènes, telles que des facteurs économiques qui renfermeraient la propriété d'améliorer notre capacité à estimer des rendements futurs. Dans chacun des contextes, multipériodique et continu, un modèle d'évaluation des actifs financiers a été déduit. Nous avons également présenté des modèles pour la prime de risque. Ces modèles ont été sélectionnés dans le but de satisfaire certains critères de base, notamment leur simplicité d'utilisation, leur efficacité numérique et leur interprétation concrète dans le domaine financier. Plusieurs de ces modèles présentent des résultats précis en temps réel, même lorsque l'estimation de paramètres est requise.

Les investigations futures pourraient inclure le développement d'une solution dans un contexte multivarié soit le cas où le portefeuille de l'investisseur consiste en plusieurs titres risqués et en un titre sans risque. Nous pourrions également explorer le cas où les coefficients de marché sont déterministes sans être constants, ou même lorsque ces coefficients sont stochastiques. Une autre avenue intéressante consisterait à inclure des contraintes sur le portefeuille, par exemple en interdisant les ventes à découvert. Pour rendre notre modélisation encore plus réaliste, nous devrions envisager l'incorporation de coûts de transactions. Enfin, nous pourrions aller jusqu'à remplacer la mesure de risque symétrique, jusqu'ici symbolisée par la variance, par une mesure asymétrique telle que la semi-variance ou encore conserver la variance, mais en ajoutant un facteur de pénalisation lorsque le rendement global du portefeuille à un instant donné s'approche de zéro.

ANNEXE A

Le texte ci-dessous représente les instructions, dans le langage du progiciel Maple 6, permettant de générer les simulations de portefeuille associées aux tableaux 2.1, 2.2 et 2.3.

```
> #k est le nombre d'etats, k>=1;
> #r est le taux PERIODIQUE d'interet sur n periodes, r>0;
> #c est le taux GLOBAL desire sur n periodes, c>0;
> #P est la matrice k x k de transition;
> #S est la matrice k x 1 des etats R_i-r;
> #Po est la matrice 1 x k de la distribution des etats initiaux R_0-r;
> #n est le nombre de periodes (iterations), n>=1;
> #RM est la matrice des R_i-r simules par la procedure SIMC
> with(linalg,rowdim);
> with(stats,random);
> SIMC:=proc(m::integer,n::posint)
> global RM;
> #m est la valeur d'initialisation du generateur de nombres aleatoires
> #RM est une simulation de chaine de Markov de longueur n a k etats
  avec matrice de transition P ou la distribution initiale est donnee par Po
> k:=rowdim(S);
> randomize(m);
> RM:=matrix(1,n+1,[seq(0,i=1..k)]);
```

```
> #tirage de la premiere valeur basee sur la distribution Po
> RM[1,1]:=random[empirical[seq(Po[1,i],i=1..k)]](1);
> #tirages successifs basee sur la matrice de transition P
> for l from 1 to n do
> i:=1;
> while not RM[1,l]=i do i:=i+1 od;
> RM[1,l+1]:=random[empirical[seq(P[i,j],j=1..k)]](1);
> od;
> for l from 1 to n+1 do
> i:=1;
> while not RM[1,l]=i do i:=i+1 od;
> RM[1,l]:=S[i,1];
> od;
> evalm(RM);
> end:
> with(linalg,matrix,vector,innerprod,augment,stackmatrix,row,rowdim);
> MVPMC:=proc(r::positive,c::positive,P::'matrix'(nonnegative,square),
  S::matrix,Po::matrix,n::posint,RM::matrix)
> global E,ST2,X0,La,R;
> #k est le nombre d'etats, k>=1;
> #r est le taux PERIODIQUE d'interet sur n periodes, r>0;
> #c est le taux GLOBAL desire sur n periodes, c>0;
> #P est la matrice k x k de transition;
> #S est la matrice k x 1 des etats R_i-r;
> #Po est la matrice 1 x k de la distribution des etats initiaux R_0-r;
> #n est le nombre de periodes (iterations), n>=1;
> #RM est la matrice des R_i-r simules par la procedure SIMC
> k:=rowdim(S);
> #test de validite supplementaire de la matrice P;
```

```
> U:=vector([seq(1.0,i=1..k)]);
> for l from 1 to k do
> if not innerprod(row(P,l),U)=1.0 then ERROR
 ('P_is_not_a_stochastic_matrix') fi;
> od;
> #initialisation des matrices;
> #S2 est la matrice du carre des etats;
> S2:=matrix(k,1,[seq((S[i,1])^2,i=1..k)]);
> A:=matrix(k,1,[seq(0,i=1..k)]);
> B:=matrix(k,1,[seq(0,i=1..k)]);
> T:=matrix(k,1,[seq(0,i=1..k)]);
> #ST est la matrice de sum(E(tau_i|H_0));
> ST:=matrix(k,1,[seq(0,i=1..k)]);
> #X0 est la matrice des coefficients aleatoires associes aux poids
> X0:=matrix(k,1,[seq(0,i=1..k)]);
> for j from 1 to n do
> #E est la matrice E((1-sum(tau_i))*(R_i-r)|H_{i-1});
> E:=evalm(P&*evalm(S-matrix(k,1,[seq(A[i,1]*S[i,1],i=1..k)])));
> #F est la matrice E((1-sum(tau_i))*(R_i-r)^2)|H_{i-1});
> F:=evalm(P&*evalm(S2-matrix(k,1,[seq(B[i,1]*S2[i,1],i=1..k)])));
> #T est la matrice des tau_i;
> T:=matrix(k,1,[seq(E[i,1]^2/F[i,1],i=1..k)]);
> XT:=matrix(k,1,[seq(E[i,1]/F[i,1],i=1..k)]);
> X0:=augment(XT,X0);
> A:=evalm(evalm(P&*A)+T);
> B:=evalm(evalm(P&*B)+T);
> ST:=evalm((P&*ST)+T);
> od;
> #ST2 est la matrice de sum(E(tau_i));
```

```
> ST2:=evalm(Po&*ST);
> #La est la valeur de lambda;
> La:=2*(((1+r)^n-(1+c))/ST2[1,1]-(1+r)^n);
> #Fr est la valeur E/F a chaque instant k basee sur la valeur de l'etat
  precedent fourni par SIMC
> Fr:=matrix(1,n,[seq(0,i=1..n)]);
> for l from 1 to n do
> i:=1;
> while not RM[1,l]=S[i,1] do i:=i+1 od;
> Fr[1,l]:=X0[i,l];
> od;
> #W[k] est le poids associe a l'action a chaque instant k
> #R[k] est le facteur de rendement du portefeuille a chaque instant k
> R[0]:=1;
> for j from 1 to n do
> W[j]:=-((1+r)+La/(2*(1+r)^(n-j)*product(R[q],q=0..j-1)))*Fr[1,j];
> R[j]:=W[j]*RM[1,j+1]+(1+r);
> od;
> #Presentation d'un tableau associant les poids et le rendement effectif
  du portefeuille
> RR:=matrix(n,1,[seq(R[i]^365-1,i=1..n)]);
> WM:=matrix(n,1,[seq(W[i],i=1..n)]);
> Value:=augment(WM,RR);
> Title:=matrix(1,2,[weights,effective_rate_of_return]);
> stackmatrix(Title,Value);
> end:
> NEW:=proc(m::integer)
> global HH;
> for h from 1 to m do
```

```
> SIMC(h,n);
> MVPMC(r,c,P,S,Po,n,RM);
> H[h]:=product(R[i],i=1..n)-1;
> od;
> HH:=matrix(m,1,[seq([H[i]],i=1..m)]);
> end:
> #taux de rendement global sur n periodes obtenu et souhaite
> C_Rate[obtained]:=product(R[i],i=1..n)-1;
> C_Rate[desired]:=c;
> #taux de rendement effectif obtenu et souhaite
> E_Rate[obtained]:=product(R[i],i=1..n)^(365/n)-1;
> E_Rate[desired]:=(1+c)^(365/n)-1;
> #taux de rendement annuel compose quotidiennement obtenu et souhaite
> A_Rate[obtained]:=((product(R[i],i=1..n)^(1/n))-1)*365;
> A_Rate[desired]:=((1+c)^(1/n)-1)*365;
> #ecart-type theorique
> sigma[C]:=((((1+r)^n-(1+c))^2*(1/ST2[1,1]-1))^0.5;
```

ANNEXE B

Le texte ci-dessous représente les instructions, dans le langage du progiciel Maple 6, permettant de générer les simulations de portefeuille associées aux tableaux 2.4, 2.5 et 2.6.

```
> #k est le nombre d'etats, k>=1;
> #r est le taux PERIODIQUE d'interets sur n periodes, r>0;
> #c est le taux GLOBAL desire sur n periodes, c>0;
> #S est la matrice k x 1 des etats R_i-r;
> #Po est la matrice 1 x k de la distribution des etats R_i-r;
> #n est le nombre de periodes (iterations), n>=1;
> #RM est la matrice des R_i-r simules par la procedure SIMULTIN
> with(linalg,coldim);
> with(stats,random);
> SIMULTIN:=proc(m::integer,n::posint)
> global RM;
> #m est la valeur d'initialisation du generateur de nombres aleatoires
> #RM final est une simulation de n valeurs tirees d'un arbre multinomiale
  a k etats avec matrice de probabilite Po
> randomize(m);
> k:=coldim(Po);
> RM:=matrix(1,n,[random[empirical[seq(Po[1,i],i=1..k)]](n)]);
> #construction des valeurs de la chaine basee sur Po
```

```
> for j from 1 to n do
> i:=1;
> while not RM[1,j] = i do i:=i+1 od;
> RM[1,j]:=S[i,1];
> od;
> evalm(RM);
> end:
> with(linalg,matrix,coldim,augment,stackmatrix);
> MVPMULTIN:=proc(r::positive,c::positive,S::matrix,Po::matrix,
  n::posint,RM::matrix)
> global E,ST2,X0,La,R,RHO;
> k:=coldim(Po);
> #k est le nombre d'etats, k>=1;
> #r est le taux PERIODIQUE d'interet sur n periodes, r>0;
> #c est le taux GLOBAL desire sur n periodes, c>0;
> #S est la matrice k x 1 des etats R_i-r;
> #Po est la matrice 1 x k de la distribution des etats R_i-r;
> #n est le nombre de periodes (iterations), n>=1;
> #RM est la matrice des R_i-r simules par la procedure SIMULTIN
> #test de validite supplementaire de la matrice Po;
> if not sum(Po[1,i],i=1..k)=1.0 then ERROR
 ('Po_is_not_a_probability_matrix') fi;
> #initialisation des matrices;
> #S2 est la matrice du carre des etats;
> S2:=matrix(k,1,[seq((S[i,1])^2,i=1..k)]);
> T1:=evalm(Po&*S);
> T2:=evalm(Po&*S2);
> T:=T1[1,1]/T2[1,1];
> RHO:=(T1[1,1])^2/T2[1,1];
```

```
> La:=2*(((1+r)^n-(1+c))/(1-(1-RHO)^n)-(1+r)^n);
> R[0]:=1;
> for j from 1 to n do
> W[j]:=-((1+r)+La/(2*(1+r)^(n-j)*product(R[i],i=0..j-1)))*T;
> R[j]:=W[j]*RM[1,j]+(1+r);
> od;
> #Presentation d'un tableau associant les poids et le rendement effectif
  du portefeuille
> RR:=matrix(n,1,[seq(R[i]^365-1,i=1..n)]);
> WM:=matrix(n,1,[seq(W[i],i=1..n)]);
> Value:=augment(WM,RR);
> Title:=matrix(1,2,[weights,effective_rate_of_return]);
> stackmatrix(Title,Value);
> end:
> NEW:=proc(m::integer)
> for h from 1 to m do
> SIMULTIN(h,n);
> MVPMULTIN(r,c,S,Po,n,RM);
> H[h]:=product(R[i],i=1..n)-1;
> od;
> HH:=matrix(m,2,[seq([H[i],365*((1+H[i])^(1/n)-1)],i=1..m)]);
> end:
> #taux de rendement global sur n periodes obtenu et souhaite
> C_Rate[obtained]:=product(R[i],i=1..n)-1;
> C_Rate[desired]:=c;
> #taux de rendement effectif obtenu et souhaite
> E_Rate[obtained]:=product(R[i],i=1..n)^(365/n)-1;
> E_Rate[desired]:=(1+c)^(365/n)-1;
> #taux de rendement annuel compose quotidiennement obtenu et souhaite
```

```
> A_Rate[obtained]:=((product(R[i],i=1..n)^(1/n))-1)*365;
> A_Rate[desired]:=((1+c)^(1/n)-1)*365;
> #variance theorique
> var[C]:=((1+r)^n-(1+c))^2*(1/(1-(1-RHO)^n)-1);
```

Bibliographie

[1] S. Arterian. Exploring the New Efficient Frontier.
http ://www.derivativesstrategy.com /magazine/archive/1995-1996/1295fea1.asp, 1998

[2] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 : 307-327, 1986.

[3] W. Breen., L. R. Glosten et R. Jagannathan. Economic Significance of Predictable Variations in Stock Index Returns. *Journal of Finance*, 44 : 1177-1189, 1989.

[4] P. J. Brockwell et R. A. Davis. *Time series : theory and methods.* Springer-Verlag, New-York, 1991.

[5] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* CRM, Montréal, 1989.

[6] V. Corradi. Reconsidering the continuous time limit of the GARCH(1,1) process. *Journal of Econometrics,* 96 : 145-153, 2000.

[7] D. Duffie et H. R. Richardson. Mean-Variance Hedging in Continuous Time. *Ann. Appl. Prob.*,1 : 1-15, 1991.

[8] E. J. Elton et M. J. Gruber. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* Wiley, New-York, 1987.

[9] E. F. Fama. Multiperiod Consumption-Investment Decisions. *American Economic Review*, 60 : 163-174, 1970.

[10] W. E. Ferson et C. R. Harvey. Conditioning Variables and the Cross Section of Stock Returns. *Journal of Finance*, 54 : 1325-1360, 1999.

[11] D. Guégan. *Séries chronologiques non linéaires à temps discret.* Economica, Paris, 1994.

[12] N. H. Hakansson. Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6 : 517-557, 1971.

[13] M. J. Harrison et D. M. Kreps. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market. *Journal of Economic Theory*, 29 : 381-408, 1979.

[14] M. J. Harrison et S. R. Pliska. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11 : 215-260, 1981.

[15] M. J. Harrison et S. R. Pliska. A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading : Complete Markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15 : 313-316, 1983.

[16] N. H. Hakansson. Multi-Period Mean-Variance Analysis : Toward a General Theory of Portfolio Choice. *Journal of Finance*, 26 : 857-884, 1971.

[17] I. Karatzas et S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New-York, 1988.

[18] I. Karatzas et S. E. Shreve. *Methods of Mathematical Finance.* Springer-Verlag, New-York, 1998.

[19] R. Korn. Some applications of L2-hedging with a non-negative wealth process. *Applied Mathematical Finance, 4 : 65-79*, 1997.

[20] R. Korn et E. Korn. *Option Pricing and Portfolio Optimization : Modern Methods of Financial Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, 2001.

[21] D. Lamberton et B. Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance.* Ellipses, Paris, 1991.

[22] A. Lim et X. Y. Zhou. Mean-variance Portfolio Selection with Random Parameters in a Complete Market. *Mathematics of Operation Research, 27 : 101-120*, 2002.

[23] H. Markowitz. Portfolio Selection. *Journal of Finance, 7 : 77-91*, 1952.

[24] H. Markowitz. *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Basil Blackwell, Oxford, 1987.

[25] R. C. Merton. : An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1851-1872, 1972.

[26] R. C. Merton. *Continuous-Time Finance.* Basil Blackwell, Cambridge, 1990.

[27] M. Métivier et J. Pellaumail. *Stochastic Integration.* Academic Press, New York, 1980.

[28] R. O. Michaud. A New View of Mean Variance. *http ://www.financial-planning.com/pubs/fp/19980901047.html*, 1996

[29] J. Mossin. Optimal Multiperiod Portfolio Policies. *Journal of Business*, 41 : 215-219, 1968.

[30] D. B. Nelson. ARCH models as diffusion approximation. *Journal of Econometrics*, 45 : 7-38, 1990.

[31] S. R. Pliska. A Stochastic Calculus Model for Continuous Trading : Optimal Portfolios. *Math. Operations Research*, 11 : 371-382 ,1986.

[32] S. R. Pliska. *Introduction to Mathematical Finance.* Basil Blackwell, Malden,1997.

[33] H. R. Richardson. A Minimum Variance Result in Continuous Trading Portfolio Optimization. *Management Sci.*, 35 : 1045-1055, 1989.

[34] P. Samuelson. Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming. *The Review of Economics and Statistics*, 50 : 239-246, 1969.

[35] M. Schweizer. Variance Optimal Hedging in Discrete Time. *Mathematics of Operations Research*, 20 : 1-32, 1995.

[36] M. C. Steinbach. Markowitz Revisited : Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis. *SIAM Review*, 43 : 31-85, 2001.

[37] G. V. G. Stevens. On Tobin's Multi-Period Portfolio Theorem. *The Review of Economical Studies*, 39 : 461-468, 1972.

[38] J. Tobin. *The Theory of Portfolio Selection*, dans *The Theory of Interest Rates*, F. H. Hahn and F. P. R. Brechling. Macmillan, London, 3-51J, 1965.