

Les structures conformes du tore et les empilements de cercles

par

Marc-Olivier BÉLISLE

mémoire présenté au Département de mathématiques  
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, avril 2011



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-79806-5  
*Our file* *Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-79806-5

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

■+■  
**Canada**

Le 5 mai 2011

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Marc-Olivier Bélisle  
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeure Virginie Charette  
Directrice de recherche  
Département de mathématiques

Professeur Maxime Descoteaux  
Membre externe  
Département d'informatique

Professeur Tomasz Kaczynski  
Président rapporteur  
Département de mathématiques

# SOMMAIRE

Sur une surface de Riemann, un empilement de cercles représente une collection de cercles respectant une certaine tangence. Il existe un théorème disant que si la surface est simplement connexe, alors il existe un empilement de cercles sur cette surface. On dit alors que la surface est *empilable*. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à ces surfaces.

Tout d'abord, je rappellerai des notions d'analyse complexe que nous utiliserons. Ensuite, au chapitre 2, nous allons aborder le thème des surfaces de Riemann. Plus particulièrement, nous verrons le théorème d'uniformisation de Poincaré. Au chapitre 3, nous allons introduire plus rigoureusement les empilements de cercles. Nous verrons la version discrète du théorème d'uniformisation. Enfin, pourquoi s'intéresser à la question ? Parce que cette théorie est applicable dans le domaine de la santé, comme nous le verrons au chapitre 4.

# REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier monsieur Tomasz Kaczynski, du département de mathématiques, ainsi que monsieur Maxime Descoteaux, du département d'informatique, d'avoir accepté de faire partie du jury d'évaluation de ce mémoire. Je voudrais également remercier madame Marie-France Roy, qui s'est occupé de mes fiches d'inscription lorsqu'il m'était impossible de me rendre à Sherbrooke, ainsi qu'en répondant rapidement à toutes mes questions au sujet de mes inscriptions.

Mais surtout, je veux remercier madame Virginie Charette, ma directrice d'étude. Tout d'abord, c'est elle qui m'a fait découvrir la théorie des empilements de cercles lors de mon entrée à l'Université de Sherbrooke. De plus, ses conseils ont été essentiels durant l'écriture de ce mémoire. De plus, sa grande disponibilité m'a été très bénéfique, par ses réponses rapides à mes courriels, même si elle était à Singapour. Sans son aide, jamais je ne serais parvenu à écrire ce mémoire. Merci beaucoup, Virginie!

Également, je voudrais remercier monsieur Kenneth Stephenson, de l'Université du Tennessee, qui m'a grandement aidé à comprendre CirclePack, afin de produire les exemples numériques du chapitre trois.

Marc-Olivier Bélisle  
Sherbrooke, avril 2011

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>ii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>iv</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 — Quelques notions préliminaires en analyse complexe</b>	<b>3</b>
1.1 Fonctions holomorphes . . . . .	3
1.2 Topologie de $\mathbf{C}$ . . . . .	5
1.3 Fonctions conformes . . . . .	6
<b>CHAPITRE 2 — Surfaces de Riemann</b>	<b>8</b>
2.1 Surfaces de Riemann et leur uniformisation . . . . .	8
2.1.1 Définitions de base dans la théorie des surfaces de Riemann . . . . .	8
2.1.2 Propriétés des surfaces de Riemann . . . . .	12

2.1.3	Le théorème d'uniformisation de Poincaré . . . . .	16
2.2	Le tore et ses propriétés . . . . .	16
<b>CHAPITRE 3 — Les empilements de cercles</b>		<b>22</b>
3.1	Définitions et uniformisation discrète . . . . .	22
3.1.1	Définitions de base . . . . .	22
3.1.2	Théorème d'uniformisation discrète . . . . .	25
3.2	Un cas particulier : le tore . . . . .	26
3.3	Approximations numériques avec <i>CirclePack</i> . . . . .	31
<b>CHAPITRE 4 — La géométrie au service de la médecine</b>		<b>37</b>
<b>CONCLUSION</b>		<b>41</b>
<b>ANNEXE A : Essais numériques</b>		<b>42</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>45</b>

# INTRODUCTION

La théorie des empilements de cercles a pris son envol en 1985, lors d'une conférence du mathématicien américain William Thurston. Il a émis une conjecture disant qu'il serait peut-être possible d'effectuer une approximation pour le théorème de l'application conforme de Riemann par les empilements de cercles. Deux mathématiciens américains, Burton Rodin et Dennis Sullivan, ont réussi à démontrer que la conjecture est vraie, en 1987, dans [RS87].

Malgré le fait que les empilements de cercles sont apparus en 1987 pour effectuer des approximations, ce n'était pas la première fois que des cercles étaient utilisés pour recouvrir une surface. En 1936, le mathématicien allemand Paul Koebe a démontré un résultat concernant le recouvrement de la sphère par des cercles tangents. En 1970, le mathématicien russe E.M. Andreev a démontré une fois de plus ce résultat, dans [And70]. Ensuite, Thurston, en 1985, à également démontré ce résultat en étudiant la frontière de la sphère hyperbolique. Ce théorème se nomme le **théorème de Koebe-Andreev-Thurston**.

**Théorème 0.0.1.** *Si  $K$  est un complexe simplicial compact et simplement connexe, alors il existe un empilement de cercles univalent  $P_K$  pour  $K$  sur la sphère de Riemann.*

Ce résultat était le premier résultat garantissant l'existence d'un empilement de cercles sur une surface. Par contre, pour le théorème d'uniformisation discrète, il aura fallu attendre en 1990, dans [BS90]. Ce sont les mathématiciens américains Alan F. Beardon et



Kenneth Stephenson qui l'ont démontré. En 1996, dans [Ste96], Stephenson a généralisé le résultat de Rodin et Sullivan. Par la suite, les mathématiciens Zheng-Xu He et Oded Schramm ont démontré que deux des hypothèses du résultat de Stephenson étaient inutiles, dans [HS96]

Stephenson a également contribué à l'essor de la théorie des empilements de cercles en publiant d'abord l'article [Ste99], puis ensuite en publiant son livre [Ste05], en 2005.

Dans le cadre de ses recherches, Stephenson a également créé un outil fort utile pour les empilements de cercles : le programme *CirclePack* (disponible au <http://www.math.utk.edu/~kens/CirclePack/downloads/>). Cet outil informatique permet de générer, manipuler et étudier des empilements de cercles. Donc, il permet une visualisation de cette théorie.

Ce faisant, Stephenson franchissait un premier pas vers une application pratique de cette théorie. En 2004, dans [HS04], avec l'aide de Monica Hurdal, il procédait à l'application de la théorie dans le domaine de la médecine.

La théorie venait de trouver son utilité dans le cadre de l'étude des images corticales obtenues par résonance magnétique.

# CHAPITRE 1

## Quelques notions préliminaires en analyse complexe

Ce chapitre sert à introduire les termes importants que j'utiliserai dans ce mémoire. Je suppose que la plupart de ces notions sont acquises, donc je n'expliquerai pas en détail chaque terme. Le but de ce chapitre est de rappeler ces notions. Pour plus de détails, consulter [SS03].

### 1.1 Fonctions holomorphes

On note par  $\mathbf{C}$  le plan complexe. Tout point  $z \in \mathbf{C}$  s'écrit de la forme  $z = x + iy$ , où  $i^2 = -1$  et  $x, y \in \mathbf{R}$ . Nous pouvons définir des fonctions complexes définies sur des sous-ensembles de  $\mathbf{C}$  vers des sous-ensembles de  $\mathbf{C}$ . Par contre, pour économiser de l'écriture, j'écrirai toujours  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  pour de telles fonctions.

**Définition 1.1.1.** Soit  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction et soit  $z_0 \in \mathbf{C}$ . La *dérivée de  $f$  en  $z_0$*  est donnée par

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

si cette limite existe.

**Définition 1.1.2.** Une fonction  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  est dite *holomorphe* sur un ouvert  $U$  si elle admet une dérivée pour tous les points de  $U$ . Si  $f$  est inversible avec inverse holomorphe, alors on dit que  $f$  est *biholomorphe*.

Dans la définition d'une dérivée complexe, nous devons remarquer que  $z_0$  peut être approché par n'importe quelle direction. En ce sens, il peut être un peu difficile de vérifier si une fonction est holomorphe, particulièrement si elle est donnée sous la forme  $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ . Nous utilisons alors les équations de Cauchy-Riemann.

**Définition 1.1.3.** Soit  $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ . Les *équations de Cauchy-Riemann* associées à  $f$  sont les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Pour déterminer si une fonction est holomorphe, dans ce cas, nous utilisons le théorème suivant.

**Théorème 1.1.1.** Soit  $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$  définie sur un ouvert  $U$ . Si les dérivées partielles de  $u$  et  $v$  existent, sont continues et respectent les équations de Cauchy-Riemann pour tous les points de  $U$ , alors  $f$  est holomorphe sur  $U$ . Dans ce cas,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Exemple 1.1.1.** La fonction définie par  $f(z) = \frac{1}{z}$  est holomorphe sur  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ . En effet,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{x + iy} \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 - (-2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(-2xy)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Comme les dérivées partielles sont définies et sont continues partout sauf en  $x = y = 0$  et que les équations de Cauchy-Riemann sont respectées, on conclue que  $\frac{1}{z}$  est holomorphe.

## 1.2 Topologie de $\mathbf{C}$

La topologie principalement utilisée dans  $\mathbf{C}$  est la topologie habituelle de  $\mathbf{R}^2$ . Les éléments de la base de la topologie autour d'un point  $z \in \mathbf{C}$  sont des disques ouverts. Nous aurons besoin de quelques faits sur le plan complexe, durant la preuve de la proposition 2.1. Ces faits concernent les ensembles compacts.

**Définition 1.2.1.** Un ensemble  $\mathcal{K}$  est dit *compact* si l'on peut extraire un sous-recouvrement fini de tout recouvrement d'ouverts de  $\mathcal{K}$ .

Dans le cas du plan complexe, les compacts possèdent une certaine forme.

**Lemme 1.2.1.** *Un ensemble  $\mathcal{K} \subset \mathbf{C}$  est compact si et seulement si  $\mathcal{K}$  est fermé et borné.*

Nous en déduisons quatre faits, que nous utiliserons plus tard.

**Fait 1 :** Si  $U$  est un ouvert borné de  $\mathbf{C}$ , alors il existe un compact  $\mathcal{K}$  tel que  $U \subset \mathcal{K}$ .

Nous pouvons prendre un disque fermé de rayon  $\epsilon$ .

**Fait 2 :** Si  $\mathcal{K}$  est défini comme dans 1 et si  $z_1, z_2 \in \mathcal{K}$ , alors il existe des disques fermés  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  tels que  $z_1 \in \mathcal{K}_1$ ,  $z_2 \in \mathcal{K}_2$  et  $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$ . Il suffit de prendre des rayons suffisamment petits.

**Fait 3 :** Si  $\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{K}_n$ , où  $\mathcal{K}_i$  est un disque obtenu comme dans **2** contenant  $z_1$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $n < \infty$ , alors  $\mathcal{K}_n$  est un disque fermé de rayon  $\epsilon_n > 0$  contenant  $z_1$ .

**Fait 4 :** Il existe un disque ouvert  $U \subset \mathcal{K}_n$  (où  $\mathcal{K}_n$  est défini comme en **3**). Ici, il suffit de prendre le disque  $\mathcal{K}_n$  moins sa frontière. On peut choisir  $z_1 \in U$ .

Ces faits seront implicitement utilisés lors de la démonstration de la proposition 2.1.

## 1.3 Fonctions conformes

Le théorème d'uniformisation dit qu'il existe une application conforme entre certaines surfaces. Il serait donc utile de définir ce qu'est une telle application.

**Définition 1.3.1.** Une fonction  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est dite *conforme* si elle préserve les angles entre les courbes.

Pour savoir si une fonction complexe est conforme, nous utilisons le résultat suivant.

**Théorème 1.3.1.** *Une fonction holomorphe est conforme en tout point  $z_0$  tel que  $f'(z_0) \neq 0$ .*

Par la formule de dérivation inverse, nous avons qu'une application est conforme en tout point où elle est biholomorphe.

Voyons maintenant une forme particulière de fonction.

**Définition 1.3.2.** Une *transformation de Möbius* est une fonction  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de la forme  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  avec la restriction  $ad - bc \neq 0$ .

Remarquons deux choses, ici. Premièrement, nous avons  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ , donc une transformation de Möbius est conforme sur son domaine. Deuxièmement, nous voyons que si

$ad - bc = 0$ , alors  $f$  est constante. La restriction  $ad - bc \neq 0$  est donc importante. En particulier, les applications définies par  $f(z) = az + b$  sont conformes.

# CHAPITRE 2

## Surfaces de Riemann

### 2.1 Surfaces de Riemann et leur uniformisation

#### 2.1.1 Définitions de base dans la théorie des surfaces de Riemann

Dans ce chapitre, je supposerai que le lecteur est familier avec les notions de base en topologie générale et en topologie algébrique. Mes principales références sont [AS60] et [Jos06]. En cas de doute, le lecteur peut se référer à [Mun00] pour les notions de topologie générale et à [Mas91] pour les notions de topologie algébrique. Je donnerai, par contre, une définition dont nous aurons besoin dans cette section.

**Définition 2.1.1.** Un espace topologique  $X$  est un *espace de Hausdorff* si toute paire de points distincts  $x$  et  $y$  de  $X$  admet des voisinages ouverts  $U_x \ni x$  et  $U_y \ni y$  tels que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

Prenons donc  $S$ , un espace de Hausdorff. Soit  $\Phi := \{(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ , où  $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha$  avec  $V_\alpha \subset S$  ouvert et  $U_\alpha \subset \mathbf{C}$  ouvert, une famille d'homéomorphismes

locaux telle que

1. Si  $(\varphi, V, U) \in \Phi$  et  $V' \subset V$ , alors  $(\varphi|_{V'}, V', \varphi(V')) \in \Phi$  ;
2. Si  $(\varphi, V'_\beta, U_\beta) \in \Phi$  et si  $V \subseteq \bigcup_{\beta} V'_\beta$ , alors  $(\varphi, V, \varphi(V)) \in \Phi$  ;
3.  $S \subseteq \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ .

**Définition 2.1.2.** Une telle famille d'homéomorphismes est un *atlas* pour la 1-variété complexe  $X$ . Les éléments de  $\Phi$  sont les *cartes de l'atlas*. Parfois, nous noterons la 1-variété complexe  $(X; \varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$ , lorsque nous voulons expliciter les cartes.

Avec cette définition, nous voyons qu'une 1-variété complexe est un espace de Hausdorff localement homéomorphe à un ouvert de  $\mathbf{C}$ .

Soient, ensuite,  $(\varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$  et  $(\varphi_\beta, V_\beta, U_\beta)$ , deux cartes telles que  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ . Nous pouvons alors définir l'*application de changement de cartes*  $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) : \varphi_\beta(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow U_\alpha$ .

Voici deux remarques sur les changements de cartes :

- 1- Ils sont définis dès que  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ .
- 2- Un changement de cartes est une fonction définie sur une région du plan complexe dont l'image est une région du plan complexe.

**Définition 2.1.3.** Soit  $S$  une 1-variété complexe. Si tous les changements de cartes sont biholomorphes, alors  $S$  est une *surface de Riemann*.

*Remarque 2.1.1.* Soit  $(\varphi, V \subset S, U \subset \mathbf{C})$  où  $\varphi : V \rightarrow U$  tel que  $(\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})$  et  $(\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1})$  soient biholomorphes. Alors, on pose que  $(\varphi, V, U) \in \Phi$ . Un atlas possédant cette propriété est dit *maximal*. Pour ce mémoire, tous les atlas seront maximaux.

**Exemple 2.1.1.** Le plan complexe  $\mathbf{C}$  est une surface de Riemann. Nous prenons l'atlas contenant la carte  $(\text{Id}, \mathbf{C}, \mathbf{C})$ . Le changement de cartes est l'identité, qui est biholomorphe. La maximalité de l'atlas nous permet de conclure que nous avons une surface de Riemann.



**Exemple 2.1.2.** La sphère de Riemann  $\mathbf{P}$  est une surface de Riemann.

En effet, prenons l'atlas contenant les cartes,  $(\varphi_1, \mathbf{P} \setminus (0, 0, 1), \mathbf{C})$  et  $(\varphi_2, \mathbf{P} \setminus (0, 0, -1), \mathbf{C})$ .

On pose

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \frac{x_2}{1-x_3}, \varphi_1^{-1}(z) = \left( \frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

et puis

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1+x_3} - i \frac{x_2}{1+x_3}, \varphi_2^{-1}(z) = \left( \frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, -\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1} \right)$$

Il suffit de vérifier que les changements de cartes  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$  et  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  sont biholomorphes sur  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) &= \varphi_1(\varphi_2^{-1}(z)) \\ &= \varphi_1\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, -\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}\right) \\ &= \frac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}}{1-\frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}} + i \frac{-\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}}{1-\frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}} \\ &= \frac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}}{\frac{2|z|^2}{|z|^2+1}} + i \frac{-\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}}{\frac{2|z|^2}{|z|^2+1}} \\ &= \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - i \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}{|z|^2} \\ &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

On a donc que  $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ , qui est biholomorphe sur son domaine. Nous pouvons alors conclure que  $\mathbf{P}$  est une surface de Riemann.

**Exemple 2.1.3.** Le disque de Poincaré  $\mathbf{D} := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$  est une surface de Riemann, avec l'atlas contenant la carte  $(\text{Id}, \mathbf{D}, \mathbf{D})$ .

Ces trois surfaces de Riemann sont importantes, car, comme nous le verrons un peu plus tard, toutes les surfaces de Riemann sont définies à partir de ces trois cas. Il est important de noter que ce sont les surfaces portant les trois géométries de base, soient euclidienne, sphérique et hyperbolique, respectivement.

Les surfaces de Riemann héritent d'une structure complexe. Donc, nous pouvons définir plusieurs types de fonctions sur celles-ci.

**Définition 2.1.4.** Soient  $(S_1; \varphi_\alpha, V_\alpha, U_\alpha)$  et  $(S_2; \psi_\beta, V'_\beta, U'_\beta)$  deux surfaces de Riemann. Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une application telle que  $p \in V_\alpha$  et  $f(p) \in V'_\beta$ . L'application est dite :

- holomorphe en  $p$  si  $\psi_\beta \circ f|_{V_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}$  est holomorphe ;
- conforme en  $p$  si  $\psi_\beta \circ f|_{V_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}$  est conforme ;

Schématisons le tout.

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha & \xrightarrow{f} & V'_\beta \\ \uparrow \varphi_\alpha^{-1} & & \downarrow \psi_\beta \\ U_\alpha & \xrightarrow{\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}} & U'_\beta \end{array}$$

Nous voyons que  $\psi_\beta \circ f|_{V_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}$  correspond à une application de  $\mathbf{C}$  dans  $\mathbf{C}$ . Voyons, avec un exemple, comment effectuer les calculs.

**Exemple 2.1.4.** Soit

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{P} \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} & \longrightarrow & \mathbf{P} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1, -x_2, -x_3) \end{array} .$$

Choisissons, comme cartes,  $(\varphi_1, \mathbf{P} \setminus (0, 0, 1), \mathbf{C})$  et  $(\varphi_2, \mathbf{P} \setminus (0, 0, -1), \mathbf{C})$  définies comme dans l'exemple 2.1.2

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} &= \varphi_2(f(\varphi_1^{-1}(z))) \\
 &= \varphi_2\left(f\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)\right) \\
 &= \varphi_2\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, -\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1}\right) \\
 &= \frac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}}{\frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} + 1} + i \frac{\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}}{\frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1} + 1} \\
 &= \frac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}}{\frac{2}{|z|^2 + 1}} + i \frac{\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}}{\frac{2}{|z|^2 + 1}} \\
 &= \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z \\
 &= z
 \end{aligned}$$

Un calcul similaire nous permet de conclure que  $\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(z) = z$ . La fonction  $f$  est donc conforme.

Finalement, nous avons besoin de la définition suivante.

**Définition 2.1.5.** On dit que deux surfaces de Riemann  $S_1$  et  $S_2$  sont *conformément équivalentes* s'il existe une bijection conforme  $f : S_1 \rightarrow S_2$ .

*Remarque 2.1.2.* Si une fonction  $f : S_1 \rightarrow S_2$  est conforme, alors  $f^{-1}$  est également conforme.

## 2.1.2 Propriétés des surfaces de Riemann

Avant de commencer, nous aurons besoin de deux définitions. Je suppose, ici, que le lecteur sait ce qu'est une action d'un groupe sur un ensemble.

**Définition 2.1.6.** Soit  $S$  une surface de Riemann et  $\Gamma$  un groupe agissant sur  $S$ . On dit que l'action de  $\Gamma$  est *proprement discontinue* si pour tout compact  $\mathcal{K}$  de  $S$ , l'ensemble  $\{g \in \Gamma \mid g\mathcal{K} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset\}$  est de cardinalité finie.

**Définition 2.1.7.** Un groupe d'actions agit *librement* si tous les éléments de ce groupe, autre que l'identité, agissent sans point fixe.

Nous obtenons, avec ces définitions, un premier résultat important.

**Proposition 2.1.** *Soit  $S$  une surface de Riemann et  $\Gamma$  un groupe d'applications biholomorphes agissant librement sur  $S$  de façon proprement discontinue. Alors,  $S/\Gamma$  est une surface de Riemann.*

*Démonstration.* Comme  $S$  est localement homéomorphe à des ouverts de  $\mathbf{C}$ ,  $S$  possède les mêmes propriétés locales que  $\mathbf{C}$ . En particulier, nous utiliserons les faits de la section 1.2. Nous devons montrer deux choses :  $S/\Gamma$  doit être un espace de Hausdorff et les changements de cartes doivent être biholomorphes. Construisons d'abord un atlas sur  $S/\Gamma$ .

Prenons  $x \in S$  et  $y \in S$  tels que  $x \neq gy, \forall g \in \Gamma$ . Comme  $S$  est Hausdorff,  $x$  et  $y$  admettent des voisinages compacts disjoints  $\mathcal{K}_x$  et  $\mathcal{K}_y$ .

Puisque  $\Gamma$  agit de façon proprement discontinue, on a que  $\{g \in \Gamma \mid \mathcal{K}_x \cap g\mathcal{K}_x \neq \emptyset\} = \{g_1, g_2, \dots, g_n, \text{Id}\}$ . Comme  $S$  possède les mêmes propriétés locales que  $\mathbf{C}$ , il existe un compact  $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_x$  tel que  $x \in \mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_1 \cap g_1\mathcal{K}_1 = \emptyset$ . Ensuite, il existe un compact  $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1$  tel que  $x \in \mathcal{K}_2$  et  $\mathcal{K}_2 \cap g_2\mathcal{K}_2 = \emptyset$ . En procédant ainsi, nous raffinons nos compacts pour éventuellement avoir qu'il existe

$$\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_{n-1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_x$$

tel que  $x \in \mathcal{K}_n$  et  $\{g \in \Gamma \mid \mathcal{K}_n \cap g\mathcal{K}_n \neq \emptyset\} = \{\text{Id}\}$ , puisque  $\Gamma$  agit librement. Nous avons, toujours par les propriétés locales de  $\mathbf{C}$ , que  $\mathcal{K}_n$  est un voisinage compact de  $x$ , tel que

l'intérieur de  $\mathcal{K}_n$  soit non-vide. Dans le même sens, nous avons  $y \in \mathcal{K}'_m \subset \mathcal{K}_y$  avec  $\{g \in \Gamma | \mathcal{K}'_m \cap g\mathcal{K}'_m \neq \emptyset\} = \{\text{Id}\}$ . Posons alors  $\mathcal{K} := \mathcal{K}_n$  et  $\mathcal{K}' := \mathcal{K}'_m$ .

Ensuite, remarquons que si  $f, g \in \Gamma$ , alors

$$f(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \cap g(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \neq \emptyset \Leftrightarrow (\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \cap (f^{-1} \circ g)(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \neq \emptyset.$$

Par construction, nous avons  $\{G \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\} | (\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') \cap G(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}') = \emptyset\} = \emptyset$ . Nous obtenons donc  $f(\mathcal{K}) \cap g(\mathcal{K}') = \emptyset$  pour toute paire  $f, g \in \Gamma$ .

En utilisant le dernier fait de la section 1.2, nous pouvons extraire des voisinages ouverts  $U \subset \mathcal{K}$  de  $x$  et  $U' \subset \mathcal{K}'$  de  $y$ . Nous avons ainsi que  $f(U) \cap g(U') = \emptyset, \forall f, g \in \Gamma$ .

Soit, ensuite,  $\bar{\Phi} = \{(\bar{\varphi}_\alpha, \bar{U}_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ , une famille d'homéomorphismes  $\bar{\varphi}_\alpha : \bar{U}_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset S$  où  $\bar{U}_\alpha$  est obtenu par la méthode ci-haut. Nous posons également que  $\bar{U}_\alpha$  est la projection de  $U_\alpha$ . Cette famille d'applications joue un rôle d'atlas pour  $S/\Gamma$ , sauf que l'on obtient un espace localement homéomorphe à  $S$ . Or,  $S$  est elle-même localement homéomorphe à  $\mathbf{C}$ . Donc, par composition, nous trouvons que  $S/\Gamma$  est localement homéomorphe à  $\mathbf{C}$ . Les changements de cartes sont biholomorphes, puisque les applications de  $\Gamma$  sont toutes biholomorphes (les changements de cartes sont, en fait, ces applications).

Posons  $\pi : S \rightarrow S/\Gamma$ , la projection. Soient  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , où  $\bar{x}, \bar{y} \in S/\Gamma$ . Alors,  $x \neq gy, \forall g \in \Gamma$  où  $x \in \pi^{-1}(\bar{x})$  et  $y \in \pi^{-1}(\bar{y})$ . Nous avons montré qu'il existe  $U \ni x$  et  $U' \ni y$  tels que  $f(U) \cap g(U') = \emptyset$ . Donc, si  $\bar{U} := \pi(U)$  et  $\bar{U}' := \pi(U')$ , alors  $\bar{x} \in \bar{U}, \bar{y} \in \bar{U}'$  et  $\bar{U} \cap \bar{U}' = \emptyset$ , signifiant que l'espace est Hausdorff. Donc,  $S/\Gamma$  est une surface de Riemann.

□

Prenons un exemple que nous utiliserons, un peu plus tard.

**Exemple 2.1.5.** Prenons  $S = \mathbf{C}$ . Posons  $t_\omega$ , une fonction complexe telle que  $t_\omega(z) = z + \omega$  et posons  $\Gamma = \langle t_{\omega_1}, t_{\omega_2} \rangle$ , où  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$  sont tels que  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbf{R}$ . Cette dernière condition est équivalente à dire que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont linéairement indépendants, si considérés comme

vecteurs de  $\mathbf{R}^2$ . Comme ce sont des translations, les applications sont biholomorphes et agissent librement. Il reste à vérifier la condition de l'action proprement discontinue. Soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $\mathbf{C}$ . On pose  $diam(\mathcal{K})$  comme étant la distance maximale entre deux points de  $\mathcal{K}$ .

La cardinalité maximale de  $\{g\mathcal{K} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset\}_{g \in \Gamma}$  est alors de  $\frac{diam(\mathcal{K})}{|\omega_1|} + \frac{diam(\mathcal{K})}{|\omega_2|} + 2 < \infty$ .

Donc,  $\mathbf{C}/\Gamma$  est une surface de Riemann. En fait, la surface résultante est un tore.

**Définition 2.1.8.** Une *triangulation*  $K$  d'une surface  $S$  est une décomposition localement finie de  $S$  en une collection de triangles topologiquement fermés  $K = \{t_j\}$  tels que les triangles sont soit

1. Deux à deux disjoints ;
2. S'intersectent en un sommet ;
3. S'intersectent le long d'une arête.

**Théorème 2.1.3.** Si  $S$  est une surface de Riemann compacte, alors il existe une triangulation  $K$  sur  $S$ .

La preuve de ce théorème requiert la notion de région de Jordan. Le concept n'est pas complexe à définir, mais la preuve requiert plusieurs résultats intermédiaires. De plus, la preuve est longue à faire. On peut la retrouver dans [AS60].

Maintenant, nous allons définir ce qu'est le genre d'une surface de Riemann.

La façon la plus simple de définir le genre d'une surface est par la définition suivante.

**Définition 2.1.9.** Soit  $S$  une surface de Riemann qui soit une somme connexe de  $p$  tores. Alors,  $p$  est appelé le *genre* de  $S$ .

La sphère de Riemann est de genre 0 tandis que le tore est de genre 1. Nous avons également le résultat suivant, dont la preuve requiert la preuve du théorème 2.1.3.

**Corollaire 2.1.1.** *Deux surfaces de Riemann compactes sont homéomorphes si et seulement si elles sont de même genre.*

### 2.1.3 Le théorème d'uniformisation de Poincaré

Ici, nous allons énoncer une version du théorème d'uniformisation de Poincaré. Ce théorème possède plusieurs versions.

La version que je vais donner, ci-dessous, est la version donnée par Jöst dans [Jos06]. Elle explicite la forme des surfaces de Riemann.

**Théorème 2.1.4** (Théorème d'uniformisation). *Soit  $S_1$  une surface de Riemann compacte de genre  $p$ . Alors,  $S_1$  est conformétement équivalente à  $S_2$ , où  $S_2$  est*

1. *une surface de Riemann compacte de la forme  $\mathbf{D}/\Gamma$  si  $p \geq 2$ , où  $\Gamma$  est un groupe d'applications biholomorphes agissant de façon libre et proprement discontinue préservant  $\mathbf{D}$ ;*
2. *une surface de Riemann compacte de la forme  $\mathbf{C}/\Gamma$  si  $p = 1$ , où  $\Gamma$  est comme dans l'exemple 2.1.5;*
3. *la sphère de Riemann  $\mathbf{P}$  si  $p = 0$ .*

Nous obtenons un corollaire direct.

**Corollaire 2.1.2.** *Le revêtement universel d'une surface de Riemann compacte est conformétement équivalent à  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{P}$ .*

## 2.2 Le tore et ses propriétés

Nous avons vu qu'un tore est de la forme  $\mathbf{C}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est engendré par deux translations  $t_{\omega_1}$  et  $t_{\omega_2}$  telles que  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbf{R}$ . Voyons un premier résultat, issu de la topologie algébrique

(je ne donnerai pas tous les détails et les définitions qui nous amènent à ce résultat).

**Proposition 2.2.** *Soit  $T$  un tore. Alors,  $\pi_1(T) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ .*

Avant de continuer, définissons le plan hyperbolique  $\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ . La géométrie présente dans  $\mathbf{H}$  est la géométrie hyperbolique. Par contre, ce qui nous intéresse, ici, c'est le fait que  $\mathbf{H}$  représente le demi-plan supérieur de  $\mathbf{C}$ .

Nous avons vu qu'un tore est le quotient du plan complexe par le groupe d'actions engendré par  $t_{\omega_1}$  et  $t_{\omega_2}$ . Dans ce cas, nous allons dire que le tore est *engendré* par  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et ces deux nombres formeront *la base du tore*. Nous pouvons définir  $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ . Par hypothèse, nous avons que  $\tau \notin \mathbf{R}$ . Donc,

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

Nous remarquons que  $\text{Im } \tau$  est soit plus grand que zéro, soit plus petit que zéro, dépendamment de la fraction  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ . Nous pouvons donc demander que  $\text{Im } \tau > 0$ . Dans ce cas, nous pouvons écrire  $\tau \in \mathbf{H}$ .

*Remarque 2.2.1.* La base d'un tore n'est pas unique. En effet, soit  $T$  un tore de base  $(\omega_1, \omega_2)$ . Prenons une autre base de ce tore, disons  $(\omega'_1, \omega'_2)$ . Les bases respectent la relation

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2$$

$$\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2.$$

Or, nous voulons conserver les lacets du tore. Donc, pour ce faire, les coefficients doivent être entiers. De plus, le changement de base doit être inversible. Alors, nous avons



$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbf{Z})$ . Également,

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}$$

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d}$$

Soit  $\tau \in \mathbf{H}$  et posons qu'une matrice  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  agisse sur  $\mathbf{H}$  de la façon suivante :

$$g\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Nous remarquons que les éléments  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$  agissent de la même façon, car

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \tau &= \frac{-a\tau - b}{-c\tau - d} \\ &= \frac{-(a\tau + b)}{-(c\tau + d)} \\ &= \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau \end{aligned}$$

Nous posons alors  $\text{PSL}(2, \mathbf{Z}) = \text{SL}(2, \mathbf{Z}) / \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Ceci signifie que l'action de  $g$  et l'action de  $-g$  est la même dans  $\text{PSL}(2, \mathbf{Z})$  (en fait, il est possible de définir  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$  de la même façon, mais le cas qui nous intéresse est  $\text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ ). Nous arrivons finalement à la définition suivante.

**Définition 2.2.1.** Soient  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$  tels que  $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbf{H}/\text{PSL}(2, \mathbf{Z})$  et soit

$T = \mathbf{C} / \langle t_{\omega_1}, t_{\omega_2} \rangle$  le tore engendré par  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Alors,  $\tau$  est appelé le *module du tore*  $T$ . Nous noterons un tel tore par  $T(\tau)$ .

Il est important de noter que le module d'un tore n'est pas la même chose qu'un module au sens algébrique. En anglais, le module d'un tore est appelé "modulus" tandis que le module algébrique est appelé "module". En français, malheureusement, la distinction n'est pas aussi facile.

Maintenant, nous sommes intéressés aux tores conformément équivalents. Nous noterons

$$T(\tau) \equiv T(\tau')$$

et nous dirons que ces tores sont *équivalents* s'il existe une application conforme entre les deux tores. Nous voulons savoir sous quelle(s) condition(s)  $T(\tau) \equiv T(\tau')$ .

*Remarque 2.2.2.* Si  $T$  est un tore engendré par  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , alors  $z$  est identifié à  $z + m\omega_1 + n\omega_2$ , où  $m, n \in \mathbf{Z}, \forall z \in \mathbf{C}$ .

Nous aurons également besoin du lemme suivant, qui est une simplification d'un résultat plus général, que nous retrouvons dans [Jos06][p.76].

**Lemme 2.2.1.** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux tores et soit  $f : T_1 \rightarrow T_2$  conforme. Alors,  $f$  peut être relevée à un automorphisme  $\tilde{f} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  tel que  $\tilde{f}(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ .*

Nous sommes alors prêts à démontrer le résultat principal.

**Théorème 2.2.3.** *L'espace des classes d'équivalences de tores est isomorphe à  $\mathbf{H}/\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ .*

*Démonstration.* Nous devons montrer que  $T(\tau) \equiv T(\tau') \Leftrightarrow \tau \equiv \tau' \pmod{\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})}$ .

$\Rightarrow$ ) Soit  $T(\tau) \equiv T(\tau')$ . Alors, il existe une application conforme  $f : T(\tau) \rightarrow T(\tau')$ . Par le lemme 2.2.1,  $f$  peut être relevée à  $\tilde{f} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ , avec  $\tilde{f}(z) = az + b$ ,  $a \neq 0$ . Calculons  $\tilde{f}(z + m\tau + n)$ , où  $m, n \in \mathbf{Z}$ .

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z + m\tau + n) &= a(z + m\tau + n) + b \\ &= az + b + am\tau + an \\ &= \tilde{f}(z) + am\tau + an \end{aligned}$$

De plus, comme  $T(\tau) \equiv T(\tau')$ , il existe  $p, q \in \mathbf{Z}$  tels que

$$\tilde{f}(z + m\tau + n) = \tilde{f}(z) + p\tau' + q$$

puisque nous avons un changement de base (voir remarque 2.2.2).

Donc,

$$\tilde{f}(z) + am\tau + an = \tilde{f}(z) + p\tau' + q$$

$$am\tau + an = p\tau' + q$$

En particulier, nous avons deux cas : premièrement, si  $m = 1$  et  $n = 0$ ,

$$a\tau = p_1\tau' + q_1$$

Ensuite, si  $m = 0$  et  $n = 1$ , on a

$$a = p_2\tau' + q_2$$

Donc, nous avons

$$\frac{a\tau}{a} = \frac{p_1\tau' + q_1}{p_2\tau' + q_2}$$

Alors,

$$\tau = \frac{p_1\tau' + q_1}{p_2\tau' + q_2} = g\tau', \text{ où } g \in \text{GL}(2, \mathbf{Z})$$

Donc, le déterminant de  $g$  est  $\pm 1$ . Or, si l'on accepte un déterminant de  $-1$ , alors, nous permettons  $\tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tau' = -\tau'$ . Dans ce cas, nous aurions  $\text{Im } \tau < 0$ , qui est impossible. Donc, nous devons avoir un déterminant positif, c'est-à-dire  $g \in \text{SL}(2, \mathbf{Z})$ .

Par contre, ici, nous aurions deux choix pour  $g$ , car l'action de  $g$  et celle de  $-g$  est exactement la même. Donc, nous ajustons à  $g \in \text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ . Nous avons alors

$$T(\tau) \equiv T(\tau') \Rightarrow \tau \equiv \tau' \pmod{\text{PSL}(2, \mathbf{Z})}.$$

$\Leftrightarrow$  Soit  $\tau \equiv \tau' \pmod{\text{PSL}(2, \mathbf{Z})}$ , où  $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$  et  $\tau' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2}$ . Alors,

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d}$$

$$\frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}$$

En particulier, nous pouvons choisir

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2$$

$$\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$$

Ici, nous avons simplement un changement de base (voir remarque 2.2.1).

Donc,  $T(\tau) \equiv T(\tau')$ .

Le résultat est alors démontré. □

Pour conclure le chapitre, nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire 2.2.1.** *Il existe une quantité non-dénombrable de tores conformément distincts.*

# CHAPITRE 3

## Les empilements de cercles

### 3.1 Définitions et uniformisation discrète

#### 3.1.1 Définitions de base

Dans la théorie des empilements de cercles, beaucoup de concepts sont définis à partir de l'analyse complexe et de la géométrie.

**Définition 3.1.1.** Soient deux sommets  $u$  et  $v$  d'une triangulation  $K$ . On note le segment reliant  $u$  et  $v$  par  $\langle u, v \rangle$ . Si le segment  $\langle u, v \rangle$  est une arête de  $K$ , alors  $u$  et  $v$  sont dits *voisins*.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un empilement de cercles.

**Définition 3.1.2.** Soit  $\mathcal{S}$  une surface munie d'une métrique. Une collection  $P = \{C_v\}$  de cercles est un *empilement de cercles* pour une triangulation  $K$  de  $\mathcal{S}$  si

1.  $P$  a un cercle  $C_v$  associé à chacun des sommets  $v$  de  $K$  ;
2. Deux cercles  $C_u$  et  $C_v$  sont tangents si et seulement si  $u$  et  $v$  sont voisins ;

3. Trois cercles  $C_u$ ,  $C_v$  et  $C_w$  forment un triplé orienté positivement dans  $\mathcal{S}$  si  $\langle u, v, w \rangle$  forme une face orientée positivement de  $K$ .

Lorsque  $K$  définit un empilement de cercles  $P$ , alors nous notons l'empilement par  $P(K)$ .

*Remarque 3.1.1.* Par le théorème d'uniformisation, toute surface de Riemann compacte peut être munie d'une métrique.

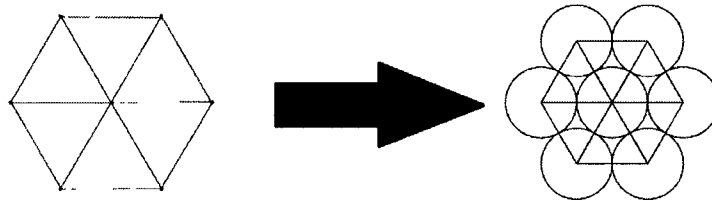
*Remarque 3.1.2.* Un empilement de cercles peut être défini pour un complexe simplicial quelconque, qui ne respecte pas nécessairement les conditions d'une triangulation. Lorsque l'empilement de cercles ne possède pas de points d'embranchement (c'est-à-dire des points où les cercles se chevauchent), on dit que l'empilement de cercles est *univalent*. Dans ce mémoire, les empilements de cercles seront toujours univalents.

*Remarque 3.1.3.* La troisième condition signifie que l'orientation de la surface est préservée par les empilements de cercles.

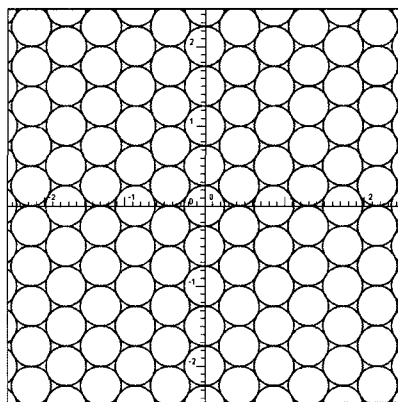
**Définition 3.1.3.** Soit  $P(K)$  un empilement de cercles pour une surface munie d'une métrique  $\mathcal{S}$ . Si  $K$  est une triangulation pour toute la surface  $\mathcal{S}$ , alors on dit que  $P(K)$  *remplit*  $\mathcal{S}$ .

Voyons quelques exemples d'empilement de cercles.

**Exemple 3.1.1.** L'empilement de cercles suivant est une petite partie de ce que l'on appelle *l'empilement hexagonal* du plan complexe. Nous prenons la triangulation représentée par un hexagone régulier, signifiant que les triangles sont tous équilatéraux.

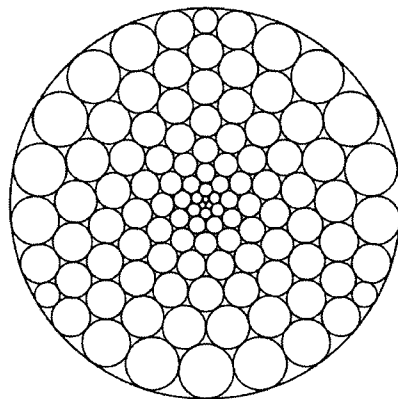


**Exemple 3.1.2.** Si l'on prend l'empilement de cercles de l'exemple précédent, généralisé à tout  $\mathbf{C}$ , nous avons l'empilement hexagonal du plan complexe  $\mathbf{C}$



Il est important de remarquer que *tous* les cercles ont le même rayon. De plus, l'empilement remplit  $\mathbf{C}$ , car la triangulation utilisée triangule complètement le plan.

**Exemple 3.1.3.** Voici à quoi peut ressembler un empilement de cercles dans le disque hyperbolique.



Remarquons que les cercles au bord de l'empilement sont tangents à  $\delta\mathbf{D}$ . Ils ont donc un rayon infini. On appelle un tel cercle un *horocycle*. Un empilement tel que tous les cercles autour de l'empilement sont des horocycles est un *empilement maximal*.

### 3.1.2 Théorème d'uniformisation discrète

Dans cette section, nous allons donner la version discrète du théorème d'uniformisation.

**Théorème 3.1.4** (Théorème d'uniformisation discrète). *Soit  $K$  un complexe triangulant une surface topologique  $S$ . Alors, il existe une surface de Riemann  $S_K$  homéomorphe à  $S$  et un empilement de cercles  $P$  pour  $K$  dans la métrique intrinsèque sphérique, euclidienne ou hyperbolique associée à  $S_K$  telle que  $P(K)$  soit univalent et remplisse  $S_K$ . La surface de Riemann  $S_K$  est unique à équivalence conforme près et  $P$  est unique à automorphisme conforme de  $S_K$  près.*

Je ne donnerai pas la preuve de ce théorème, car il faudrait que je définisse plusieurs objets que l'on utilise dans la preuve, tel un empilement parabolique ou un empilement hyperbolique. De plus, la preuve est longue et abstraite, puisqu'il est pratiquement impossible d'utiliser des dessins facilitant sa compréhension. Elle peut être retrouvée dans [Ste05][pp. 62–124]. Une chose, par contre, qu'il est important de mentionner, est la chose suivante.

**Définition 3.1.4.** Soient  $P$  et  $Q$  deux empilements de cercles. Une application  $f : P \rightarrow Q$  est une *application analytique discrète* si les tangences et l'orientation est préservée.

Donc, le théorème d'uniformisation discrète dit que  $P$  est unique à application  $f : P \rightarrow P$  analytique discrète près.

**Exemple 3.1.4.** Une translation d'un empilement de cercles est une application analytique discrète, car on déplace tout l'empilement, signifiant que les tangences sont préservées. Une rotation de tout l'empilement est également une application analytique discrète.



## 3.2 Un cas particulier : le tore

La sphère, le disque hyperbolique et le plan complexe sont les trois espaces de base et peuvent représenter pratiquement tous les objets. Ces trois espaces sont empilables, par le théorème d'uniformisation discrète.

Sauf que ces trois espaces sont de genre 0.

Une approche différente sera nécessaire si l'objet à étudier est de genre 1 : l'étude des tores devient alors inévitable.

Nous savons qu'il existe une quantité non-dénombrable de tores conformément distincts. Or, l'ensemble des triangulations pour un tore est de cardinalité dénombrable. Autrement dit, ce ne sont pas tous les tores qui peuvent porter une triangulation. Nous voulons donc savoir quels sont les tores qui sont empilables.

Gareth McCaughan, dans sa thèse de doctorat ([McC96]), a commencé cette étude.

Il a donné une partie de la réponse, que je résume sous forme de proposition.

**Proposition 3.1.** *Soit  $T(\tau)$  un tore empilable. Alors,  $\tau$  est un nombre algébrique.*

Donc, nous savons qu'un tore de module transcendant n'est pas empilable. La question devient alors : Est-ce que tous les tores de modules algébriques sont empilables ?

Quelques résultats existent déjà sur le sujet. Les preuves que je donne ici pour ces résultats sont des preuves plus intuitives, qui utilisent des dessins d'empilements.

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $T$ , un tore de module  $\tau = x + iy$ , où  $x \in \mathbf{Q}$  et  $y \in \mathbf{Q}$ . Alors,  $T$  est empilable.*

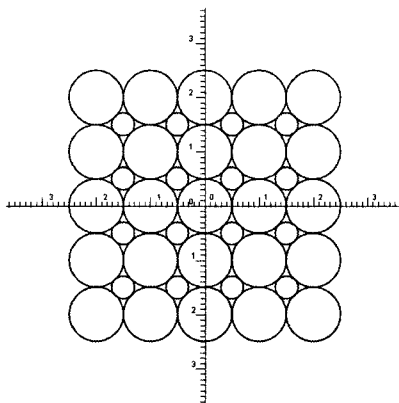
*Démonstration.* Soit  $\tau = \frac{a}{b} + i\frac{c}{d}$ , où  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ . Le but de la preuve est de trouver un empilement de cercles valide pour un tore dans la classe de  $T(\tau)$ . Autrement dit, si je trouve un empilement de cercles pour le tore  $T$  et que  $T$  est un tore conforme au tore

$T(\tau)$ , alors  $T(\tau)$  sera empilable. Nous avons :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{a}{b} + i\frac{c}{d} \\ &= \frac{ad + ibc}{bd}\end{aligned}$$

Posons alors  $\omega_1 = ad + ibc$  et  $\omega_2 = bd$  pour obtenir  $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ .

Prenons l'empilement de cercles décrit de la façon suivante, dans  $\mathbf{C}$  : pour chaque point  $x + iy$ , où  $x \in \mathbf{Z}$  et  $y \in \mathbf{Z}$ , on place un cercle de rayon  $\frac{1}{2}$  centré en  $x + iy$  ; ensuite, on complète l'empilement en introduisant des petits cercles de rayon  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$  aux points  $(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$ , afin de compléter les tangences et rendre l'empilement valide. Voici un exemple autour de l'origine :

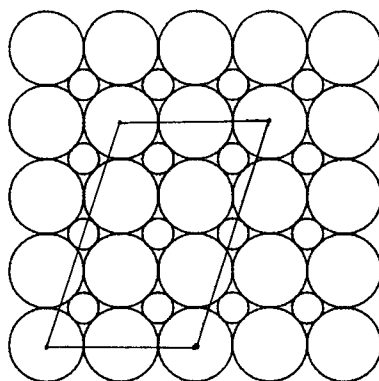


Nous remarquons que l'empilement de cercles est *engendré* par  $\eta_1 = 1$  et  $\eta_2 = i$  au sens où si  $C_v^r$  est un cercle de rayon  $r$  centré en  $v$ , alors  $C_{v+m\eta_1+n\eta_2}^r$ , où  $m, n \in \mathbf{Z}$  est une copie du même cercle avec les mêmes tangences.

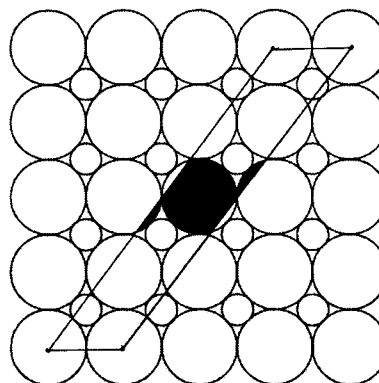
Maintenant, dans cet empilement de  $\mathbf{C}$ , introduisons le parallélogramme engendré par  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , tels que calculés précédemment. Comme l'empilement est engendré par  $1$  et  $i$ , alors il est également engendré  $m + ni$  et  $p$ , où  $m, n, p \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq 0$ . En particulier, si on prend  $m + ni = ad + bci$  et  $p = bd$ , nous avons que l'empilement est engendré par  $\omega_1$  et

$\omega_2$ . Donc, nous avons un empilement de cercles univalent pour le tore  $T(\tau)$ . Les exemples qui suivront vont aider à comprendre l'essence de la preuve.  $\square$

**Exemple 3.2.1.** Prenons  $\tau = \frac{1}{2} + 2i = \frac{1}{2} + \frac{2}{1}i$ . Dans ce cas, nous avons  $\omega_1 = 1 + 4i$  et  $\omega_2 = 2$ . Nous obtenons alors



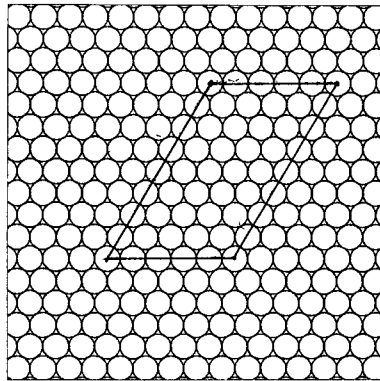
**Exemple 3.2.2.** Prenons  $\tau = 3 + 4i$ . Dans ce cas,  $\omega_1 = 3 + 4i$  et  $\omega_2 = 1$ . Nous obtenons alors



Les parties de cercles en noir sont les trois parties du cercle central sur le tore : lorsque nous effectuons le quotient, ces trois parties se recollent.

Pour la prochaine partie, je me suis demandé comment je pouvais trouver le résultat dans l'empilement hexagonal. Alors, pour commencer, j'ai décidé d'imprimer plusieurs copies de l'empilement hexagonal de l'exemple 3.1.2. Ensuite, j'ai tracé des parallélogrammes dans ces empilements pour voir si je pouvais trouver des tores empilables. Dans l'empilement hexagonal, la seule condition que j'avais besoin pour avoir un empilement valide est que les sommets du parallélogramme devaient se retrouver aux centres de cercles. De cette façon, le fait que les cercles aient tous le même rayon faisait en sorte que le quotient donnait des cercles valides. Avant de continuer avec le résultat trouvé, voyons un exemple.

**Exemple 3.2.3.** Prenons le cas suivant.



Nous voyons que c'est un empilement valide. Il reste à trouver le module. Avant de le trouver, voyons le résultat et nous reviendrons à cet empilement.

**Lemme 3.2.2.** Soit  $\tau = p(1 + \sqrt{3}i)$  avec  $p \in \mathbf{Q}$ . Alors,  $T(\tau)$  est empilable.

*Démonstration.* Soit l'empilement de cercles hexagonal de l'exemple 3.1.2 (voir également l'exemple 3.2.3). Nous avons que l'empilement est engendré par  $\eta_1 = 2Re^{\frac{\pi}{3}}$  et  $\eta_2 = 2R$ , où  $R$  est le rayon des cercles.

Ensuite, soit  $\tau = p(1 + \sqrt{3}i)$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{m}{n}(1 + \sqrt{3}i), \text{ où } m, n \in \mathbf{Z} \\
&= \frac{4mR}{4nR}(1 + \sqrt{3}i) \\
&= \frac{4mR}{2nR}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \frac{4mR}{2nR}e^{\frac{i\pi}{3}} \\
&= \frac{4mRe^{\frac{i\pi}{3}}}{2nRe^0} \\
&= \frac{|\omega_1|e^{\frac{i\pi}{3}}}{|\omega_2|e^0}
\end{aligned}$$

en posant  $\omega_1 = 4mRe^{\frac{i\pi}{3}}$  et  $\omega_2 = 2nRe^0$ .

Nous avons  $\omega_1 = 2m\eta_1$  et  $\omega_2 = n\eta_2$ . Donc, nous avons que l'empilement de cercles est également engendré par  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , car  $m, n \in \mathbf{Z}$  et  $m, n \neq 0$ . Donc, nous obtenons un empilement de cercles univalent lors du passage au quotient, signifiant que nous avons un tore empilable.  $\square$

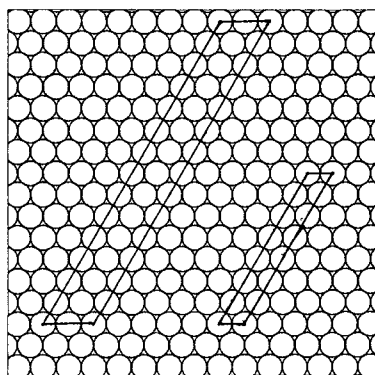
*Remarque 3.2.1.* Le  $p$  du module du tore représente le rapport

$$\frac{\frac{1}{2} \times (\text{Nombre de cercles le long de la droite oblique})}{\text{Nombre de cercles le long de la droite horizontale}}$$

*Remarque 3.2.2.* Le rayon des cercles n'est pas important. Nous pouvons alors prendre un empilement hexagonal quelconque, sans se soucier du rayon des cercles. Ceci est dû au fait qu'une homothétie est conforme.

**Exemple 3.2.4.** Reprenons l'empilement de l'exemple 3.2.3. Le module du tore est  $\frac{4}{5}(1 + \sqrt{3}i)$ . En effet, la norme de  $\omega_1$  est de 8 cercles ( $= 2 \times 4$ ) et celle de  $\omega_2$  est de 5 cercles.

**Exemple 3.2.5.** Soit  $\tau = \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ . Ici, nous avons deux possibilités, qui sont les suivantes



Ces tores sont équivalents, car les côtés du parallélogramme de gauche mesurent 14 et 2, tandis que ceux du parallélogramme de droite mesurent 7 et 1.

### 3.3 Approximations numériques avec *CirclePack*

Dans cette partie, nous allons voir que le programme de Stephenson comporte des limites. Nous allons étudier un tore de module  $\tau = \sqrt{2}i$ . Nous allons utiliser *CirclePack* afin de créer des empilements aléatoires d'un tel tore. Il est important de noter que les tores générés ainsi sont des approximations de la réalité. Nous allons alors nous intéresser à l'erreur commise.

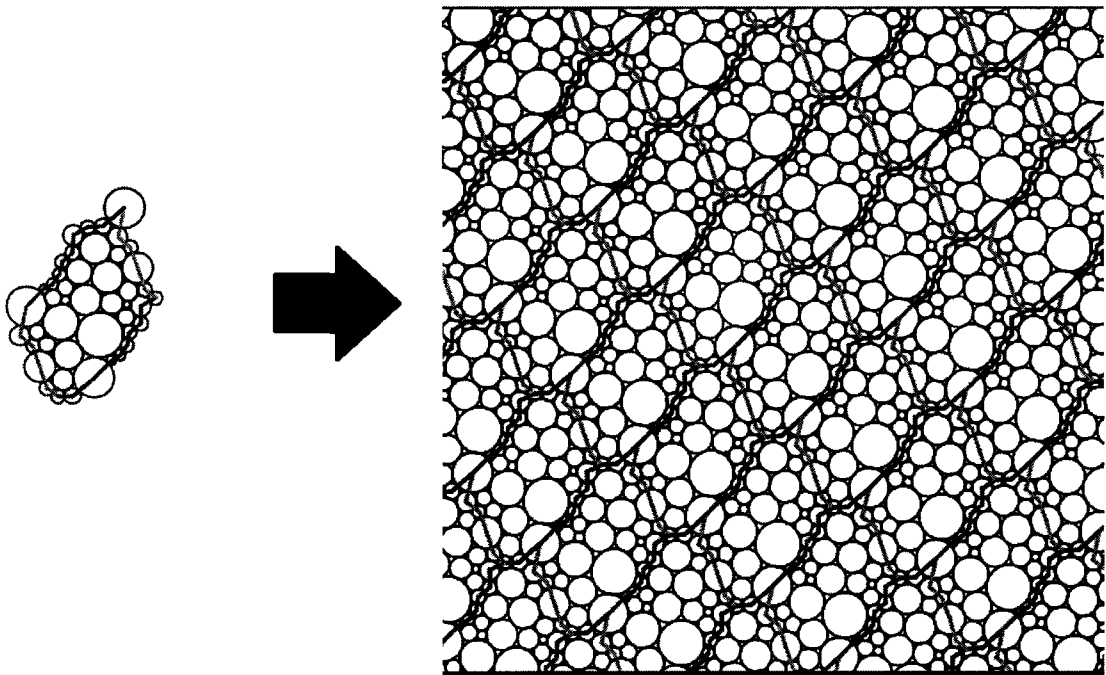
La commande utilisée est

```
“act 0;random_triangulation -T 0 1.414214 -N 32;max_pack;layout;set_screen -a;disp
-w -B -R a;torus_t”.
```

De cette façon, nous demandons un empilement pour un tore de module  $\tau = 0+1,414214i$ , avec 32 cercles (je ne prends pas plus de décimales de précision, car les résultats que *CirclePack* nous donne contiennent 7 chiffres, en notation scientifique). La partie “-N 32” signifie que 32 cercles seront utilisés. Finalement, la partie “torus\_t” nous donnera le

module réel du tore généré.

Comme nous utilisons une approximation d'un nombre fini de décimales, nous introduisons une erreur dans les calculs. En effet, il sera impossible de trouver un empilement de cercles pour un tore de module autre que rationnel, avec *CirclePack*. Également, le lemme 3.2.1 nous garantit que les approximations utilisées sur les modules admettent des empilements de cercles valides pour les tores. Ici, le but est de savoir à quel point *CirclePack* peut aider ou, au contraire, être inutile dans la recherche de résultats sur des tores de modules différents que ceux mentionnés dans les lemmes précédants.



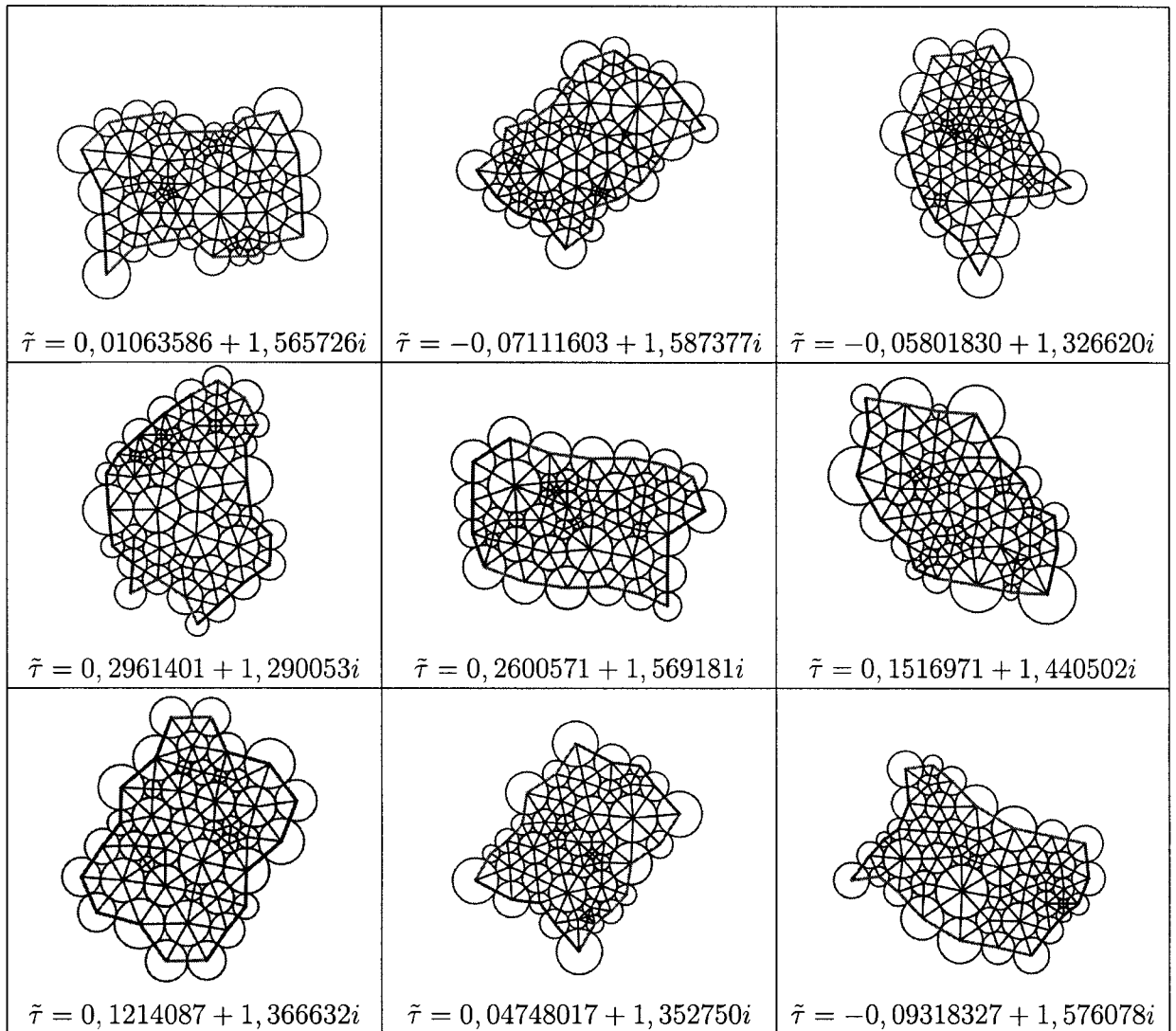
Cette première image illustre une commande entrée dans *CirclePack* (à gauche) et ce que nous obtenons dans le plan (à droite). Elle nous donne les cercles utilisés pour empiler le tore, dans le plan complexe. En ce sens, les cercles sur la frontière, qui sont reliés par des lignes de différentes couleurs, sont deux-à-deux identifiés. Tous les cercles sur une ligne d'une couleur donnée sont exactement les mêmes que ceux sur la ligne de

la même couleur de l'autre côté (couleur non-disponible, lors de l'impression). Lors du passage au quotient, ces cercles sont identifiés ensemble. Le module réel de ce tore est  $\tilde{\tau} = -0,04408519 + 1,417338i$ . L'erreur absolue est donnée par  $E = |\tau - \tilde{\tau}|$ . Dans ce cas,  $E_1 = 0,044195739$ . L'erreur relative est donnée par  $E_{\%} = \frac{E}{|\tau|} * 100$ . Dans ce cas,  $E_{\%}^1 = 3,13\%$ .

Aussi, l'erreur trouvée n'est pas exacte pour les tores de modules irrationnels, étant donné le fait qu'il y a eu troncature. Pour les tores de modules rationnels, avec lesquels nous travaillons, on peut la considérer exacte.

Pour avoir une idée de ce qui se passe, j'ai effectué dix essais avec image, que j'ai regroupés dans le tableau suivant.





En termes d'erreur relative, nous avons

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_{\%}^n$	3,13%	10,74%	13,24%	7,43%	22,71%	21,41%	10,89%	9,22%	5,49%	13,21%

L'erreur relative moyenne est de 11,74% et son écart type est de 6,31%. Nous observons que cette erreur est élevée. Est-ce que le fait que cette erreur soit élevée signifie

qu'un tore de module  $\tau = \sqrt{2}i$  n'est pas empilable? Avant de conclure quoi que ce soit, jetons un coup d'oeil à un tore que l'on sait empilable, disons, un tore de module  $\tau = 2i$ . En répétant la même expérience, toujours avec 32 cercles, nous avons le tableau suivant

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_{\%}^n$	20,77%	12,91%	15,73%	7,30%	14,36%	4,74%	26,11%	15,61%	7,23%	20,88%

Ici, la moyenne est de 14,56% et l'écart type est de 6,83%. Comme l'erreur relative moyenne est aussi élevée que dans le cas précédant, nous ne pouvons donc rien conclure sur le module  $\tau = \sqrt{2}i$ . Voyons, enfin, si le nombre de cercles influence la précision. Répétons la dernière expérience, c'est-à-dire celle où  $\tau = 2i$ , mais en demandant 320 cercles. Nous obtenons

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_{\%}^n$	9,05%	4,02%	3,30%	0,42%	4,84%	5,72%	7,90%	5,16%	3,66%	4,50%

La moyenne de l'erreur relative est de 4,86% et son écart type est de 2,41%. Ceci nous laisse donc croire que la précision augmente avec le nombre de cercles utilisés. Pour voir si cette tendance est réaliste, réalisons l'expérience une troisième fois, mais avec 3200 cercles, cette fois.

*Remarque 3.3.1.* Plus le nombre de cercles est élevé, plus *CirclePack* prend du temps à effectuer les calculs.

Nous obtenons les erreurs suivantes

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_{\%}^n$	1,38%	0,77%	1,65%	1,91%	0,85%	1,06%	0,95%	0,38%	2,53%	2,00%

Ici, la moyenne est de 1,35% et l'écart type est de 0,66%. L'erreur relative est petite, du moins comparativement au cas où l'on avait 32 cercles.

Donc, l'erreur semble s'améliorer avec le nombre de cercles grandissant. Voyons ce qui arrive avec 20 000 cercles.

$n$	1	2	3	4	5	6
$E_{\%}^n$	1,36%	20,22%	19,05%	48,19%	55,99%	45,24%

La moyenne et l'écart type de l'erreur relative sont respectivement de 31,68% et de 21,25%. C'est énorme! Nous voyons ici qu'augmenter le nombre de cercles augmente la précision de l'approximation... jusqu'à un certain point. Ceci peut être dû au fait que l'ordinateur utilisé n'était pas assez puissant. Donc, pour cet ordinateur, peut-être y existe-t-il un nombre de cercles "optimal"? Ce nombre de cercles est-il dépendant de l'ordinateur? Finalement, est-il possible de borner l'erreur relative? Mais, même avec ces réponses, il sera impossible de conclure quoi que ce soit sur les tores de module irrationnel, avec *CirclePack*, puisque nous devons utiliser des approximations de ces modules. Peut-être qu'une version future de *CirclePack* nous permettra d'entrer la valeur exacte? Seul le temps nous répondra.

Pour terminer, voici une remarque importante.

*Remarque 3.3.2.* Les modules que *CirclePack* nous donne sont dans le *domaine fondamental* de  $H/\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$ . Ce domaine est donné par l'ensemble

$\{\tau \in H/\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z}) \mid -\frac{1}{2} < \mathrm{Re} \tau \leq \frac{1}{2} \text{ et } |\tau| \geq 1\}$  (pour plus de renseignements, voir [Jos06][pp.72–74]).

## CHAPITRE 4

### La géométrie au service de la médecine

C'est en 2004, dans [HS04], que Hurdal et Stephenson explorent, pour la première fois, une application des empilements de cercles en médecine. En effet, il est bien connu que le cerveau comporte plusieurs petites fentes sur toute sa surface. Les experts estiment d'ailleurs que 60% à 70% du cerveau se retrouve caché dans ces fentes. En quelque sorte, le cerveau se replie sur lui-même. Plusieurs techniques sont étudiées afin de pouvoir aller chercher l'information se trouvant dans cette partie cachée. La théorie des empilements de cercles en est une.

Pour y parvenir, il faut supposer que le cerveau est une surface de Riemann. Le problème, c'est que cette surface de Riemann est à l'intérieur d'une boîte crânienne, donc inaccessible pour effectuer des recherches sur une personne vivante.

Ce sont les progrès réalisés en imagerie médicale qui ont motivé l'utilisation de la théorie des empilements de cercles pour accroître le niveau de précision des diagnostics.

La première chose à faire, afin d'étudier le cerveau d'une personne donnée, est d'acquérir une image de celui-ci. Par définition, un image est une collection de points (pixels) dénombrables.

Nous pouvons donc trianguler l'image obtenue. Un algorithme tel que celui de L.P Chew dans [Che93] est une façon de procéder. Nous obtenons ainsi une triangulation  $K$  d'environ 150 000 sommets.

Comme nous avons une triangulation, il est désormais possible de l'empiler. La triangulation en question comportant une très grande quantité de sommets, CirclePack, l'outil créé par Kenneth Stephenson, devient utile, puisqu'il permet de générer l'empilement  $P(K)$  en quelques secondes.

Une fois l'empilement généré, l'exploration commence. Les manipulations se font à l'aide de fonctions analytiques discrètes. De cette façon, nous pouvons effectuer des rotations, des translations ou des amplifications de certaines parties voulues. Ces manipulations deviennent faciles à faire, avec les empilements de cercles.

Avec l'exploration, nous cherchons des anomalies, telles une déformation ou une section une section manquante (détruite). Pour détecter ses anomalies, il existe des propriétés géométriques permettant, par exemple, de mesurer la distance entre deux points. Donc, si une déformation semble présente, il est possible d'en être persuadé en mesurant la distance entre deux points près de cette déformation et de comparer cette distance avec un cerveau "en santé" (à noter que ceci est purement théorique : il n'est pas encore certain que ce soit possible).

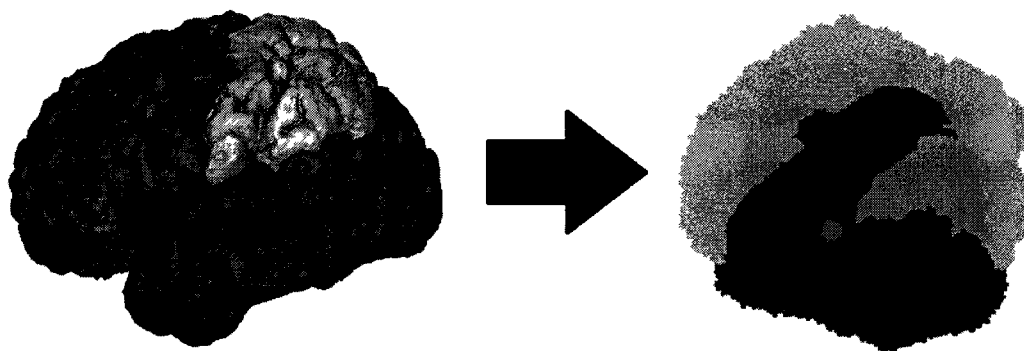


Figure 4.1 – Un cerveau et sa modélisation dans le plan complexe (Image tirée de [HS04])

La deuxième étape consiste à augmenter le rayon des cercles de la région visée, de façon à préciser davantage une région d'intérêt.

Puisque les tangences et l'orientation des cercles sont intégralement préservées (la région ne se transformant pas), il s'agit d'une application analytique discrète (voir définition 3.1.4).

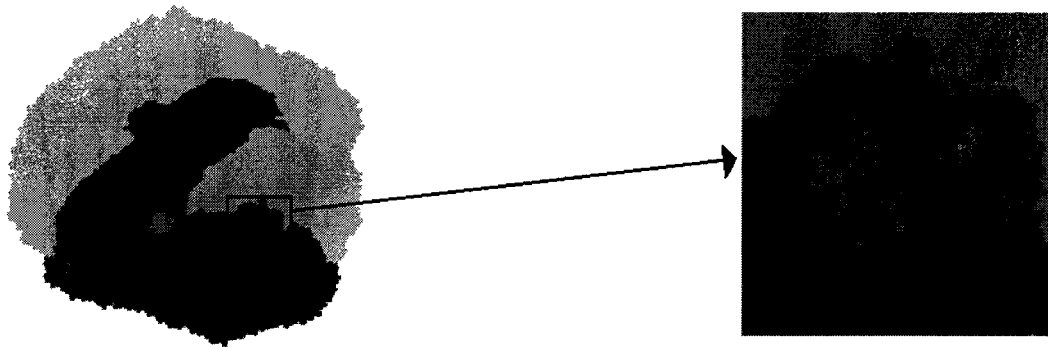


Figure 4.2 – Agrandissement d'une région d'intérêt (Image tirée de [HS04])

Lorsque la région d'intérêt a été déterminée avec une plus grande précision, l'application de la théorie des empilements de cercles trouve son utilité et est mise à contribution. Encore là, une simple augmentation du rayon des cercles de la région d'intérêt permet d'obtenir le résultat souhaité.

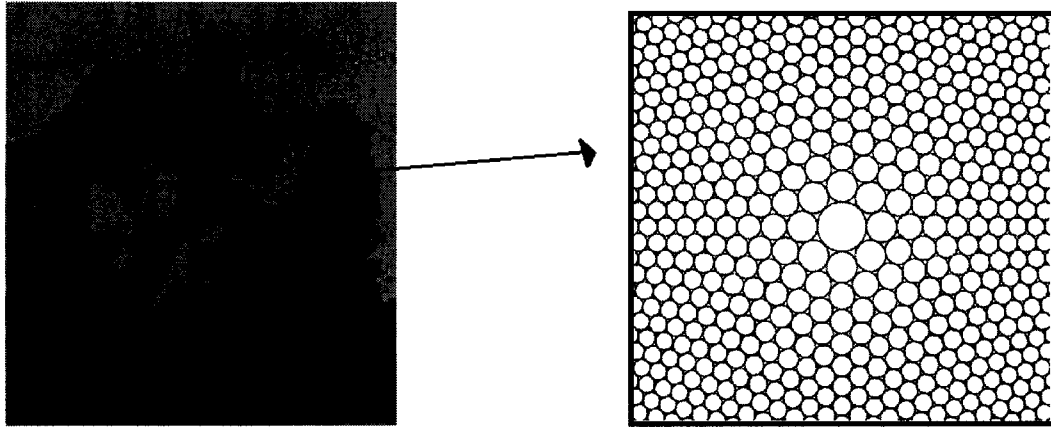


Figure 4.3 – La région d'intérêt

À ce jour, ces recherches n'en sont qu'à leurs balbutiements, mais la preuve de l'exactitude d'abord élaborée par Thurston, finalisée par Rodin et Sullivan, puis généralisée par Stephenson, permet d'entrevoir que des applications pratiques révolutionnaires pourraient survenir dans le domaine médical.

Les chercheurs tentent effectivement de déterminer s'il est possible d'utiliser les empilements de cercles afin de détecter des anomalies au cerveau.

Subséquentement, les informations ainsi recueillies par une simple pratique d'une théorie géométrique complexe pourraient effectivement permettre de suivre avec une très grande précision, l'évolution d'une anomalie et deviendrait ainsi un outil essentiel pour les équipes médicales dans l'évaluation des traitements administrés aux victimes de ces anomalies.

# CONCLUSION

L'analyse complexe et la théorie des surfaces de Riemann trouvent présentement l'essentiel de leurs applications en physique et en ingénierie. Or, La théorie des empilements de cercles nous donne l'opportunité d'effectuer des discrétisations de surfaces de Riemann. À l'aide de ces discrétisations, l'analyse complexe et la théorie des surfaces de Riemann pourraient devenir importantes en médecine.

Malheureusement, bien que le logiciel *CirclePack* s'avère prometteur, nous n'en sommes néanmoins qu'au stade des essais.

Mais si ces essais permettent de croire que nous obtiendrons éventuellement des résultats concrets sur l'information "cachée" dans les fentes du cerveau, il est possible de conclure que les empilements de cercle nous aideront peut-être à comprendre, voir à prévenir certaines maladies dont l'origine est encore inconnue à ce jour.



## ANNEXE A : Essais numériques

Ici, nous retrouvons les modules réels des tores utilisés au chapitre 3, avec les calculs d'erreur.

Les deux premières colonnes représentent le module demandé à CirclePack. La première est la partie réelle et la seconde est la partie imaginaire. Les deux colonnes suivantes représentent le module réel du tore généré. Ce nombre est obtenu via l'onglet "Messages" de CirclePack. La cinquième colonne est l'erreur absolue commise en utilisant le tore de CirclePack. La dernière colonne est l'erreur relative commise. La moyenne et l'écart type ont été calculés avec les commandes intégrées en Excel.

Re Tau	Im Tau	Re Tau'	Im Tau'	E Absolue	E Relative	
0	1,414214	-0,04408519	1,417338	0,0441957	3,13%	
0	1,414214	0,01063586	1,565726	0,1518849	10,74%	
0	1,414214	-0,07111603	1,587377	0,1871975	13,24%	
0	1,414214	-0,0580183	1,32662	0,1050658	7,43%	
0	1,414214	-0,2961401	1,290053	0,3211151	22,71%	
0	1,414214	0,2600571	1,569181	0,3027284	21,41%	
0	1,414214	0,1516971	1,440502	0,153958	10,89%	
0	1,414214	0,1214087	1,366632	0,1303998	9,22%	
0	1,414214	0,04748017	1,35275	0,0776672	5,49%	
0	1,414214	-0,09318327	1,576078	0,1867701	13,21%	
				Moyenne	0,1660983	11,74%
				Écart type	0,0891936	6,31%
N=32	0	2	0,2880863	1,700624	0,4154753	20,77%
	0	2	0,221669	2,132383	0,2581906	12,91%
	0	2	0,3048025	2,077981	0,3146198	15,73%
	0	2	-0,05671598	2,134429	0,1459036	7,30%
	0	2	0,2476987	2,145553	0,2872983	14,36%
	0	2	-0,05398915	1,922092	0,0947865	4,74%
	0	2	-0,494181	1,831266	0,5221935	26,11%
	0	2	0,3065918	2,058467	0,3121168	15,61%
	0	2	0,08685293	1,884281	0,144687	7,23%
	0	2	-0,3918941	1,856021	0,4175056	20,88%
				Moyenne	0,2912777	14,56%
				Écart type	0,1366267	6,83%
N=320	0	2	0,02536353	2,179279	0,1810643	9,05%
	0	2	-0,06933487	2,04085	0,0804739	4,02%
	0	2	-0,05466849	2,036994	0,0660091	3,30%
	0	2	-0,003548647	1,992459	0,0083342	0,42%
	0	2	-0,0278923	2,092678	0,0967843	4,84%
	0	2	-0,07196247	2,089041	0,1144854	5,72%
	0	2	0,003741609	1,842026	0,1580183	7,90%
	0	2	0,03655531	2,096599	0,1032844	5,16%
	0	2	0,000592453	1,926707	0,0732954	3,66%
	0	2	-0,007139014	2,089792	0,0900754	4,50%
				Moyenne	0,0971824	4,86%
				Écart type	0,0481202	2,41%

N=3200

0	2	0,02692986	1,993886	0,0276152	1,38%
0	2	-0,01530838	2,00182	0,0154162	0,77%
0	2	-0,0327365	2,004275	0,0330145	1,65%
0	2	0,01113498	1,963503	0,0381578	1,91%
0	2	-0,00625041	1,984162	0,0170267	0,85%
0	2	0,00500243	2,020667	0,0212638	1,06%
0	2	-0,01898717	1,998371	0,0190569	0,95%
0	2	0,00671701	2,003615	0,007628	0,38%
0	2	-0,02727947	2,042665	0,0506406	2,53%
0	2	0,03628983	2,016617	0,0399134	2,00%

Moyenne 0,0269733 1,35%

Écart type 0,0132983 0,66%

N=20 000

0	2	0,02712990	2,000182	0,0271305	1,36%
0	2	0,2349636	1,670846	0,4044135	20,22%
0	2	0,2727931	2,266109	0,3810906	19,05%
0	2	-0,4140489	1,129619	0,9638462	48,19%
0	2	-0,1368348	3,111390	1,1197819	55,99%
0	2	0,0763120	1,098366	0,9048577	45,24%

Moyenne 0,6335201 31,68%

Écart type 0,4249962 21,25%

# Bibliographie

- [And70] E M Andreev Convex Polyhedra in Lobačevskiĭ Space *Math USSR Sbornik*, 10(3) 413–440, 1970
- [AS60] L Ahlfors and L Sario *Riemann Surfaces* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960
- [BS90] A Beardon and K Stephenson The Uniformization Theorem for Circle Packings *Indiana Univ Math J*, 39 1383–1425, 1990
- [Che93] L P Chew Guaranteed-Quality Mesh Generation for Curved Surfaces *SCG '93 Proceedings of the ninth annual symposium on Computational geometry*, pages 274–280, 1993
- [HS96] Z-X He and O Schramm On the Convergence of The Circle Packings to the Riemann Mapping *Invent Math*, 125 285–305, 1996
- [HS04] M K Hurdal and K Stephenson Cortical Cartography Using the Discrete Conformal Approach of Circle Packings *NeuroImage*, 23(1) S119–S128, 2004
- [Jos06] J Jost *Compact Riemann Surfaces* Springer-Verlag Heidelberg Inc, New York – Berlin – Heidelberg, 2006
- [Mas91] W S Massey *A Basic Course in Algebraic Topology* Number 127 in Graduate texts in mathematics Springer-Verlag New York Inc, New York – Berlin – Heidelberg, 1991

- [McC96] G. McCaughan. *Some Results on Circle Packings*. Thèse de doctorat, janvier 1996.
- [Mun00] J.R. Munkres. *Topology, second edition*. Prentice Hall Inc, Upper Saddle River, 2000.
- [RS87] B. Rodin and D. Sullivan. The Convergence of Circle Packings to the Riemann Mapping. *J. Differential Geometry*, 26 :349–360, 1987.
- [SS03] E.B. Saff and A.D. Snider. *Fundamentals of Complex Analysis with Applications for Engineering and Science, third edition*. Prentice Hall Inc, Upper Saddle River, 2003.
- [Ste96] K. Stephenson. A Probabilistic Proof of Thurston’s Conjecture on Circle Packings. *Rendiconti del Seminario Mate. e Fisico di Milan*, LXVI .201–291, 1996.
- [Ste99] K. Stephenson. The Approximation of Conformal Structures via Circle Packing. *Computational Methods and Function Theory 1997, Proceedings of the Third CMFT Conference, World Scientific*, pages 551–582, 1999.
- [Ste05] K. Stephenson. *Introduction to Circle Packing : the Theory of Discrete Analytic Functions*. Cambridge University Press, New York, 2005.