

Aspects géométriques de la fonte des flocons de neige.

par

Gaël David

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, juin 2011



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-79788-4
Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-79788-4

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Le 9 juin 2011

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Gael David
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeure Virginie Charette
Directrice de recherche
Département de mathématiques

Professeur Serge Lacelle
Codirecteur de recherche
Département de chimie

Professeure Vasilisa Shramchenko
Membre
Département de mathématiques

Professeur Jean-Marc Belley
Président rapporteur
Département de mathématiques

Ce mémoire est dédié à tous ceux qui se sont investis dans mon éducation.

SOMMAIRE

La fonte des flocons de neige nous permet de témoigner d'un phénomène capillaire d'une richesse et complexité inégalée. Dans ce mémoire, nous mettons de l'avant les aspects mathématiques et physiques de ce processus de fusion qui expliquent la convergence des flocons vers la goutte d'eau. À cette fin, nous proposons au lecteur une revue originale de la capillarité pour ensuite incorporer des éléments classiques de la théorie de l'élasticité afin de tenir compte de la déformation de l'interface capillaire par la structure cristalline. Nous montrons en quoi ceci explique la forme de la pellicule d'eau du flocon et les écoulements d'eau le long des dendrites. Par le fait même, ceci nous donne une façon de tenir compte de l'évolution du flocon vers la sphère. Nous terminons en exhibant le rôle de la courbure intrinsèque du substrat de glace en tant que mécanisme de frustration géométrique facilitant la transition de phase. D'un point de vue philosophique, nous montrons la tendance du flocon à atténuer ses différences de courbures au cours de sa fonte.

mots clés : capillarité, flocon, Laplace-Young, fonte, courbure, symétrie.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de mes superviseurs de recherche à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance, Serge Lacelle et Virginie Charette.

Gaël David
Sherbrooke, avril 2011

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	iii
REMERCIEMENTS	iv
TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Propriétés des fluides	3
1.1 La cohésion	3
1.2 L'adhésion	6
CHAPITRE 2 — Description du flocon	8
2.1 Morphogénèse	8
2.2 Longueur caractéristique	9

2.3	Fonte	10
2.3.1	Protocole	10
2.3.2	Étape 1	14
2.3.3	Étape 2	14
2.3.4	Étape 3	16
2.3.5	Étapes 4 et 5	17
CHAPITRE 3 — Caractérisation des énergies des fluides		18
3.1	Description géométrique	19
3.1.1	Énergie de surface	19
3.1.2	Énergie de mouillage	20
3.1.3	Énergie gravitationnelle	20
3.1.4	Énergie de volume	21
3.1.5	Énergie totale	21
3.2	Équilibre capillaire	22
CHAPITRE 4 — Exemples classiques de la capillarité		30
4.1	Équation de Laplace-Young	30
4.2	Onduloïdes	36
4.2.1	Géométrie de l'onduloïde	36
4.2.2	Instabilité de Plateau-Rayleigh	37

4.2.3	Onduloïdes sur le flocon	38
CHAPITRE 5 — Rôle de la courbure		41
5.1	<i>L'elastica</i>	42
5.2	Courbure d'une surface	43
5.2.1	Énergie de Helfrich	45
5.2.2	Flocon	46
CHAPITRE 6 — Dynamique de l'eau		54
6.1	Équations constitutives	54
6.2	Hypothèses	55
6.2.1	Conditions frontières	58
6.2.2	Air	58
6.2.3	Glace	59
6.3	Solution et conclusions	59
CHAPITRE 7 — Fonte de la glace		62
7.1	Tension de surface	62
7.2	Hydrodynamique	63
7.3	Courbure intrinsèque du substrat	64
7.3.1	Flot de Ricci	69

CONCLUSION	72
CHAPITRE 8 — Annexe mathématique	75
BIBLIOGRAPHIE	93

LISTE DES FIGURES

1.1	Situation capillaire	5
1.2	Interactions moléculaires	6
2.1	Diagramme morphologique	9
2.2	Flocons aux étapes 1 et 2	12
2.3	Flocons aux étapes finales	13
2.4	Étape 1	14
2.5	Étape 2	15
2.6	Étape 3	16
2.7	Étapes 4 et 5	17
3.1	Pellicules de savon	28
4.1	Onduloïde	36
4.2	Courbe de profil d'une onduloïde	36
4.3	Onduloïdes sur le flocon	38

5.1	Profil du flocon	48
5.2	Flocon bâton (partie 1)	51
5.3	Flocon bâton (partie 2)	51
6.1	Profil de vitesse de l'écoulement le long des dendrites	60
7.1	Couche de matière en transition	63
7.2	Agencement des colonnes à partir de l'équateur. Les géodésiques (en pointillés) convergent au pôle nord.	66

INTRODUCTION

Les flocons de neiges sont renommés pour leur pluralité et leur caractère pastoral au point d'en devenir un symbole pour la saison hivernale. Leur structure complexe et délicate est le résultat de la cristallisation en périphérie des molécules d'eau environnantes pendant leur descente des nuages. En contraste avec leur célèbre diversité, les flocons de neige partagent un autre point en commun : ils terminent tous leur fonte en bulle d'eau sphérique. Dans le mémoire qui suit, nous nous intéressons à comprendre en quoi la sphère est l'attracteur du processus de fusion d'un flocon de neige.

Nous investiguerons les propriétés de la pellicule d'eau qui englobe peu à peu le cristal de glace qui disparaît dans la bulle d'eau qui en résulte. Sous cette optique, nous limitons le rôle de la glace à celui de support solide qui déforme la couche d'eau et nous intéressons principalement à l'interface eau/air.

En guise de mise en contexte, nous commençons par un bref rappel des caractéristiques physiques propres aux fluides et leur interface. Nous poursuivrons par un survol de la morphogénèse des flocons de neige et profitons de l'occasion pour y établir l'importance relative des éléments de la capillarité. Par la suite, nous décomposons leur fonte en plusieurs étapes dans la section 2 afin de mieux cerner les éléments phénoménologiques permettant d'expliquer qualitativement le processus.

Dans la section 3, nous proposons une description mathématique des systèmes capillaires

à l'équilibre à partir des considérations physiques introduites dans la première section. Ce faisant, nous revisitons la relation de Laplace-Young et exhiberons quelques surfaces capillaires d'intérêt. Nous en déduirons ensuite les implications au niveau du processus de fonte du flocon dans les sections 4 et 6. Nous montrons d'une part en quoi les différences de courbure moyenne dans la pellicule d'eau induit des gradients de pression au sein du liquide qui favoriseront son écoulement vers le centre du flocon. D'autre part, la relation de Laplace-Young nous permet d'expliquer la tendance de la pellicule d'eau à adopter une forme sphérique ou onduloïdale.

Nous rappelons au lecteur que cette dernière n'est pas en équilibre, mais nous croyons tout de même pouvoir expliquer les formations d'eau en équilibre métastable. Dans la section 5, nous montrons en quoi la courbure joue un rôle mécanique qui doit être incorporé aux ingrédients classiques de la capillarité afin d'obtenir une description analytique plus juste de l'évolution de la pellicule d'eau du flocon lors de sa fusion.

Nous terminons avec quelques aspects géométriques de la transition de phase solide à liquide dans la section 7. Nous montrons en quoi la courbure intrinsèque de la surface de glace sert de champ favorisant l'ordre en tant que mécanisme de frustration géométrique durant la transition de phase.

D'un point de vue idéologique, nous espérons cerner et mettre à l'avant-plan les propriétés géométriques du processus de fonte d'un flocon de neige et montrer en quoi la goutte d'eau est un attracteur du processus de fonte. En annexe se trouve un bref survol des mathématiques essentielles ainsi que les détails des calculs présentés dans le texte principal.

CHAPITRE 1

Propriétés des fluides

1.1 La cohésion

À l'état liquide ou gazeux, les molécules de la matière ont suffisamment d'énergie cinétique pour bouger les unes par rapport aux autres et tourner sur elles-mêmes. On distingue les deux phases en remarquant que les interactions intermoléculaires au sein d'un liquide sont plus importantes. Dans les deux cas, cette prépondérance aux molécules d'un fluide à s'attirer mutuellement leur confère une propriété supplémentaire : *la cohésion*.

Pour mieux en comprendre l'importance, considérons par exemple un béccher d'eau à l'air libre (Fig.1.1). Les molécules au milieu du liquide ne subissent que les interactions attractives entre molécules de même type, contrairement à celles à l'interface, qui sont dans un état énergétique défavorable de par leur contact avec les molécules d'air (Fig.1.2).

Lorsque deux fluides sont mis en contact, leur force de cohésion respective favorise leur agglomération entre molécules de même type. Dans certains cas, ces fluides ne se mélangeront pas, même après un brassage mécanique. On peut penser à l'eau et l'huile, les

bulles de gaz carbonique dans la bière ainsi qu'à l'eau avec l'air ambiant. Ainsi, lorsque deux fluides immiscibles sont mis en contact, il se crée une interface les séparant, appelé la *surface capillaire*.

La *capillarité* s'intéresse justement aux phénomènes hydrodynamiques de surface, c'est-à-dire l'étude des fluides où les conditions frontières, leur interface, y jouent un rôle prépondérant.

En plus d'être considérées lisses d'un point de vue mathématique, les surfaces capillaires sont décrites chimiquement par la *tension superficielle*. La tension superficielle est une mesure du coût énergétique associé au déficit d'interactions cohésive et admet les interprétations physiques suivantes.

Supposons que l'on veuille perturber l'interface capillaire pour augmenter son aire de dA . L'énergie mécanique requise sera proportionnelle à la quantité de surface créée [dBWQ02] :

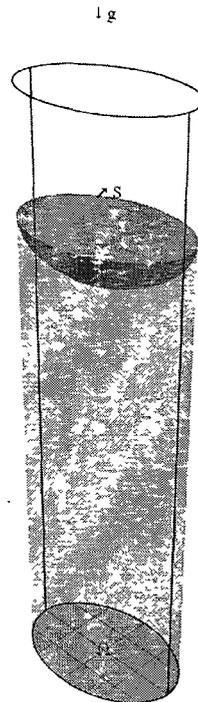
$$\delta W = \gamma dA, \tag{1.1}$$

où γ est le coefficient de tension superficielle et δW le travail effectué. Ainsi, γ représente l'énergie nécessaire pour augmenter d'une unité l'aire de la surface. À température constante, ce dernier dépend de la composition chimique des fluides et est déterminé de façon expérimentale.

Une autre facette de la tension superficielle est plus manifeste dans le cas des minces films de savons. Elle agit comme force tangente à la pellicule résistant les déformations.

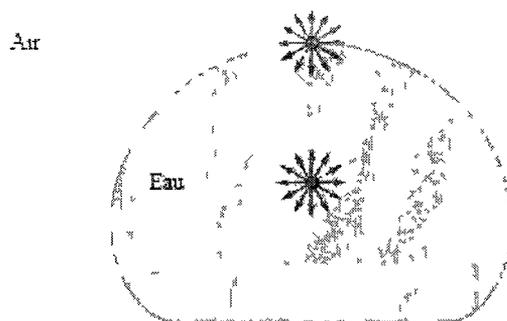
De façon générale, la tension superficielle est une propriété macroscopique de l'interface entre deux fluides émergeant de leur cohésion respective. Il en résulte une énergie de surface, ou encore une force, qui s'oppose à l'expansion de cette frontière commune. Deux fluides immiscibles en contact se déforment de façon à minimiser leur surface de

Figure 1.1 – Situation capillaire



contact afin de favoriser les interactions cohésives. C'est pour cette raison que les bulles de savon ou de gaz carbonique et gouttes diverses adoptent une forme sphérique. De même, les cheveux mouillés forment des mèches afin de minimiser leur contact avec l'air ambiant.

Figure 1.2 – Interactions moléculaires



Dans le cas de phénomènes hydrodynamiques sur de petites échelles, les forces de surfaces sont dominantes. Une fourmi peut littéralement marcher sur une goutte sans la crever. Les longues pattes des gérridés ont évolué en exploitant la tension superficielle afin de marcher sur les étangs. Nous mentionnons en terminant que deux fluides sans tension interfaciale se mélangeraient et l'interface disparaîtrait. Dans le cas où la tension superficielle est négative, la matière se transforme en surface fractale.

1.2 L'adhésion

Retournons maintenant à notre bécber. Les molécules d'eau en contact avec la paroi du bécber subissent aussi une force additionnelle. On appelle *adhésion* la force attractive ou répulsive entre un fluide et une paroi rigide. Étant donné que cette dernière ne se déforme pas au contact avec un fluide, l'interface qui en résulte est fondamentalement différente à une interface capillaire. Par exemple, une paroi solide peut supporter un stress tangentiel contrairement à un fluide. On dit qu'un liquide mouille un solide lorsqu'il s'agit de liens attractifs favorisant le contact entre les deux milieux. Par exemple, la montée capillaire est due aux forces d'adhésion qui incitent le liquide à grimper le long du tube capillaire

jusqu'à en être contrebalancé par la gravité. Dans le cas contraire, la cohésion du liquide est favorisée au détriment du mouillage avec la paroi solide. C'est le cas de la majorité de vernis ou peintures extérieures qui obligent l'eau à perler sur la surface qu'ils recouvrent.

La cohésion, l'adhésion et par surcroît la tension superficielle sont les caractéristiques physiques prépondérantes dans l'étude des systèmes capillaires. Tel que mentionné précédemment, ce sont des propriétés de surfaces (capillaires). Pour cette raison, elles n'interviennent pas directement dans les équations constitutives d'un fluide mais servent plutôt de conditions frontières. Nous en ferons état plus en détails dans la section 4.1 sur la relation de Laplace-Young.

Nous déduirons sous peu les propriétés générales des systèmes capillaires à l'équilibre. Ces principes nous guideront dans l'étude de la fonte d'un flocon, un système hors-équilibre. Nous en proposons une mise en contexte par l'entremise d'une description qualitative du processus de fonte avant de procéder à un traitement analytique des éléments de la capillarité que nous avons exhibé dans cette section.

CHAPITRE 2

Description du flocon

2.1 Morphogénèse

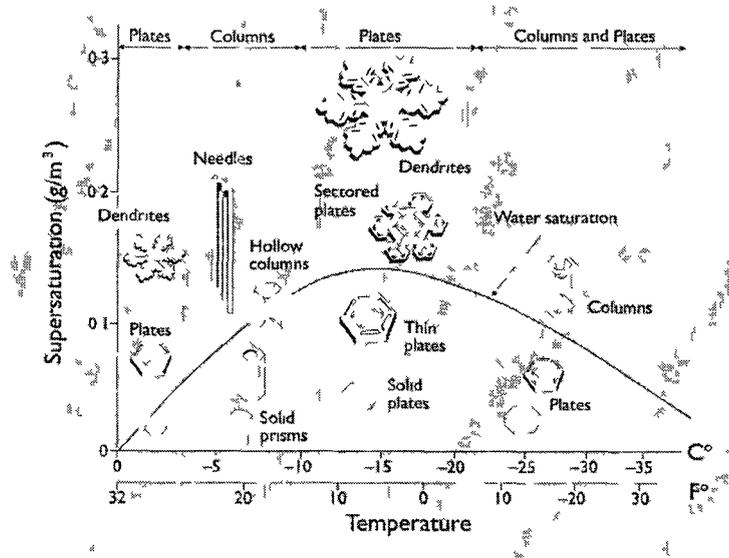
Un flocon de neige vient au monde dans un nuage lorsque des molécules d'eau en phase vapeur se solidifient autour d'une impureté en créant un réseau cristallin.

Subséquentement à cette nucléation, les particules d'eau avoisinantes se cristallisent à la surface pour former le noyau puis les dendrites du flocon.

La saturation en eau, la température et la pression sont les principaux facteurs externes déterminant la forme finale du flocon. La grande diversité de leur forme provient des imperfections lors de la nucléation et du processus de cristallisation délicat dans des conditions atmosphériques diverses [Lib05]. Ainsi, il est en pratique impossible de prédire ou simuler exactement la croissance d'un flocon de neige. Tout de même, Nakaya et Bentley réussirent à observer et classer les différents types de flocons. Nous invitons le lecteur intéressé à la morphogénèse des flocons de neige à consulter leur oeuvre. Nous illustrons les différentes familles de flocons de neige en fonction des conditions physiques

décrites ci-haut dans le diagramme morphologique de Furukawa [Lib05]

Figure 2 1 Diagramme morphologique



La forme plaquette ou colonne est surtout déterminée par la température tandis que la sursaturation en vapeur d'eau ajoute à la complexité des dendrites

Malgré leur célèbre diversité, les flocons possèdent tous un point en commun une symétrie hexagonale Elle semble provenir de la structure d'empilement des molécules d'eau Au cours de la cristallisation, les liens intermoléculaires entre atomes d'hydrogène agencent la matière dans un réseau de prismes hexagonaux Ceci laisse croire au fait que la symétrie hexagonale globale du flocon soit une conséquence de la symétrie locale du réseau cristallin

2.2 Longueur caractéristique

Les flocons de neige que nous rencontrons sont constitués d'environ 10^{18} molécules d'eau et leur diamètre sont habituellement de quelques millimètres De plus, leur forme parti-

culière fait en sorte que la surface physique totale est comparable au volume de glace. Ainsi, lorsque celui-ci sera recouvert d'eau, les phénomènes d'hydrodynamique de surface domineront tout au long de la fonte. La force de gravité, agissant sur le volume du flocon, sera sans importance étant donné la taille du flocon. Pour s'en convaincre, il est coutume de comparer la force de gravité à celle de tension superficielle par l'entremise de la longueur capillaire, définie par le bilan égal de ces forces :

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (2.1)$$

Dans notre cas, $\gamma \sim 75 \frac{\text{dynes}}{\text{cm}}$ et donc $\lambda_c \sim 3\text{mm}$

Ainsi, la longueur caractéristique de la pellicule d'eau d'un flocon de neige est de l'ordre de la longueur capillaire. Nous en concluons donc que les énergies gravitationnelles sont à négliger dans notre étude de la fonte.

2.3 Fonte

Cette section est dédiée aux observations du processus de fonte.

Nous commençons par un bref survol du protocole expérimental qui nous a permis de capturer sur pellicule vidéo la fonte des flocons de neige. Nous ferons ensuite état des observations qui en ont découlé où nous mettons à l'avant-plan les caractéristiques qui seront analysés plus en détails dans les sections à venir. La fonte de chaque flocon est séparée en cinq étapes se distinguant par leur phénoménologie.

2.3.1 Protocole

La procédure expérimentale consiste à amener des flocons de neige naturels en dessous d'un microscope [Gau06].

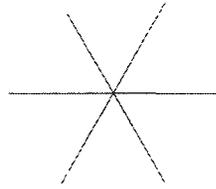
Nous commençons en allant recueillir quelques flocons de neige frais dans des plats de pétri tapissés. Ceux-ci seront placés dans des bacs en styrofoame réfrigérés et amenés au laboratoire. Pour éviter la fonte prématurée des flocons lors des manipulations, on place chaque plat de pétri par dessus un contenant de neige carbonique à -78° Celsius. Par la suite, nous observons le plat de pétri à l'aide d'un microscope muni d'une caméra unifocale. Lorsqu'un flocon intéressant est trouvé, il suffit de commencer la capture vidéo et retirer le contenant de neige carbonique pour amorcer la fonte.

Nous obtenons une vue bidimensionnelle du dessus où les facettes du flocon sont rehaussés par la couleur du tapis.

Les constatations dont nous ferons état au cours de ce mémoire découlent de l'information vidéo. Nous nous fions aux observations avec nos yeux, aucune mesure à proprement parler n'a été faite, quoique des mesures d'étalons standards furent obtenues et serviront suite à la compréhension qualitative du phénomène de fusion. Avant d'expliquer les principales facettes de la fonte, nous invitons le lecteur à en témoigner de ses propres yeux.

Figure 2.2 – Flocons aux étapes 1 et 2

(a) Étape 1



(b) Étape 2

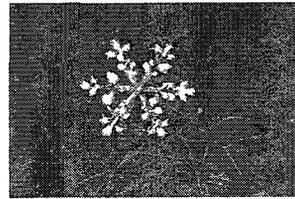
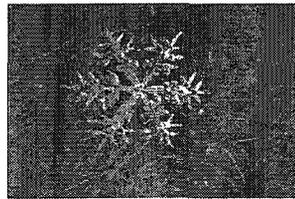
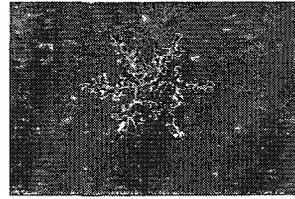
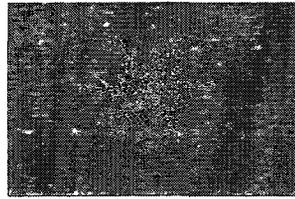
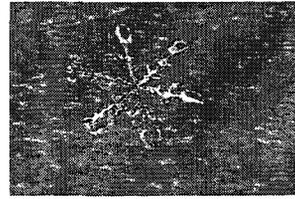
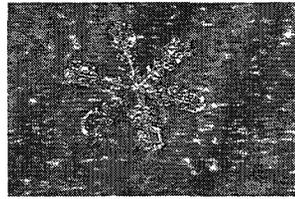
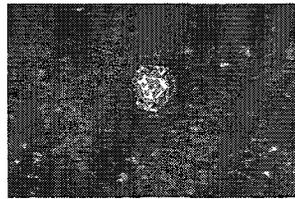
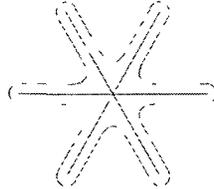
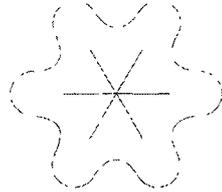
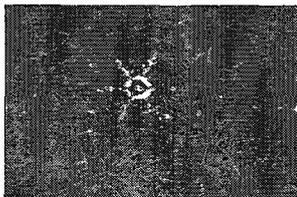
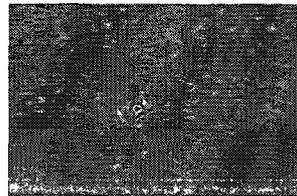
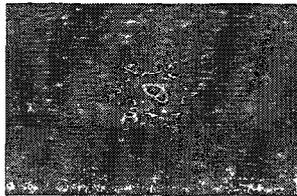
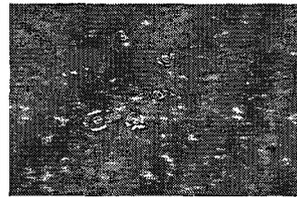
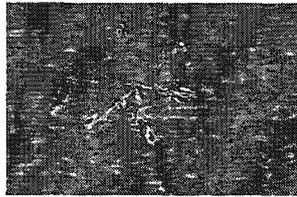
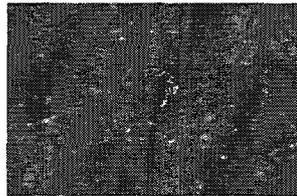
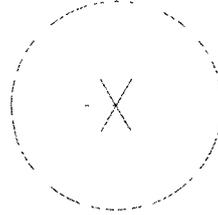


Figure 2.3 – Flocons aux étapes finales

(a) Étape 3

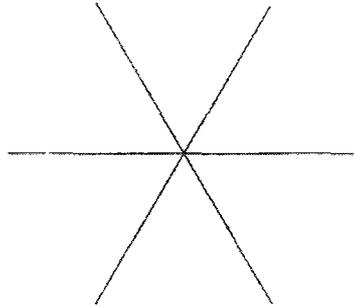


(b) Étapes 4-5



2.3.2 Étape 1

Figure 2.4 – Étape 1



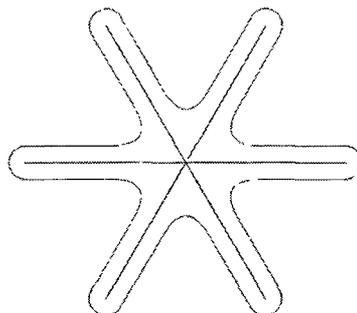
Nous débutons l'étude du flocon lorsque celui-ci est encore gelé. En retirant la plaque de neige carbonique sous le microscope, l'agitation thermique amorce la transition de phase. Les pointes des dendrites et échardes de glace s'émousent et de micro-gouttelettes font leur apparition sur la surface du flocon. La lumière du microscope est reflétée sur la surface du flocon avec moins de diffraction. Le flocon s'illumine littéralement lorsque la pellicule d'eau apparaît. Au fur et à mesure que le cristal fond, le volume des gouttelottes d'eau augmente. Celles-ci compensent en augmentant leur surface de contact avec la glace et l'air ambiant jusqu'à totalement recouvrir le cristal d'une infime couche d'eau.

2.3.3 Étape 2

C'est à ce moment que la seconde étape commence : lorsque la pellicule d'eau se connecte et les écoulements d'eau s'amorcent.

Tout de même, la forme du flocon est encore dictée en grande partie par celle du cristal. Premièrement, les imperfections du cristal retiennent la pellicule d'eau étant donné qu'elle est très mince. D'une part, la rugosité du cristal induit une grande viscosité au liquide en plus de rendre les écoulements difficiles. D'autre part, il arrive que des échardes de glace

Figure 2.5 – Étape 2



retiennent physiquement la pellicule d'eau.

Deuxièmement, la tension de surface écrase la pellicule d'eau sur le cristal. De plus, l'aire de la pellicule est presque égale à son volume. Ce faisant, la dynamique et les forces de pression internes du liquide (volume) sont dominées par les énergies d'aire.

Troisièmement, le cristal impose sa courbure à la pellicule d'eau, ne serait-ce que par sa présence. La pellicule d'eau épouse le profil de la glace, ce qui lui induit une courbure. En effet, le film d'eau n'est pas assez épais pour lisser les défauts de la glace.

Nous tenons compte de cet aspect de la phénoménologie en pénalisant les endroits fléchis en ne faisant intervenir que la géométrie de la surface. Nous ne cherchons pas de solutions analytiques sophistiquées, mais plutôt à dégager les principes de la dynamique de l'eau à partir des observations.

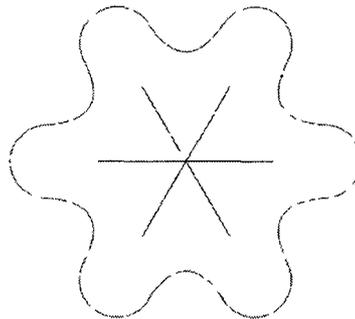
En résumé, la couche d'eau est prise en étau par la glace et l'air. Les énergies de mouillage, de surface et de flexion dominant les énergies cinétiques internes du fluide.

De façon plus subtile, cette transition se répercute sur la topologie de la pellicule d'eau. Il y a coalescence des composantes connexes d'eau (gouttes) pour former une surface difféomorphe à S^2 . De plus, la pellicule d'eau a pour la première fois une contrainte physique interne : la glace.

Ainsi, la seconde étape est marquée par une transition dans la topologie et les conditions frontières. Nous avançons que la glace ne sert plus simplement de support et exerce maintenant une force de flexion en chaque point de l'interface liquide/solide en tant que déformation en plus d'alimenter la phase liquide en nombres de molécules. Nous espérons tenir compte de tous ces éléments dans la section (Sect. 5) avec un hamiltonien différent de celui de la capillarité classique.

2.3.4 Étape 3

Figure 2.6 – Étape 3



Pendant la troisième étape, le film d'eau croît au fur et à mesure que le cristal fond et se polit. Il en résulte une couche d'eau dont seul le fond est encore piégé par le cristal. Nous considérons donc la pellicule d'eau une surface capillaire, légèrement déformée par la glace et la dynamique interne de l'eau. Cette dernière devient justement beaucoup plus complexe à mesure que le volume augmente. Ceci permet au film d'eau de s'épaissir plus aisément à cause des forces de pression dans toutes les directions. Il en résulte que la couche d'eau en contact avec l'air ambiant cherche plus à se déformer, se courber de façon à minimiser son aire.

Ainsi, l'eau adopte une forme ondulée le long des branches, leurs intersections s'arrondissent et se confondent. Un capuchon sphérique d'eau devient de plus en plus visible au

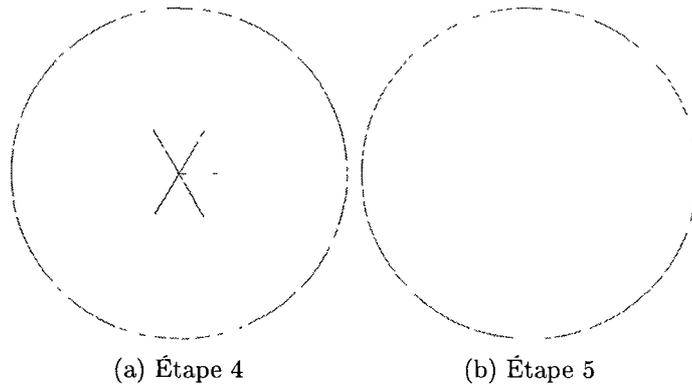


Figure 2.7 – Étapes 4 et 5

centre du flocon. Il s'agit d'un signe précurseur du destin réservé aux flocons de neige en fonte.

2.3.5 Étapes 4 et 5

Dans l'avant dernière étape de la fonte, le flocon adopte une forme sphérique, n'étant plus contraint par la glace. Le squelette de glace tourne en disparaissant au centre de la bulle d'eau.

Presque tous les flocons terminent leur fonte ainsi : en une goutte sphérique totalement symétrique. Dans le cas contraire, la structure cristalline a cédé et le flocon s'est scindé en plusieurs morceaux qui aboutissent individuellement en sphères.

Afin de continuer notre exploration du flocon, il nous faut mieux connaître les principales caractéristiques de la physique de la capillarité. Nous proposons donc un retour plus mathématique sur ces éléments pour ensuite déterminer leur conséquence dans la fonte du flocon.

CHAPITRE 3

Caractérisation des énergies des fluides

Nous laissons de côté nos chers flocons le temps d'introduire le lecteur au côté mathématique de la capillarité. Dans ce qui suit, nous jetons un regard plus analytique sur les éléments de la section afin d'inférer les propriétés géométriques des surfaces capillaires. L'élaboration d'une théorie cohérente de la capillarité a été ralentie par les difficultés de nature phénoménologique et mathématique. Ainsi, pour des raisons de justesse, autant conceptuelles qu'analytiques, nous basons ce qui suit sur une caractérisation moderne des énergies proposée par R.Finn [Fin86] due à Gauss. Nous en proposons une l'analyse variationnelle originale et autosuffisante. Nous évitons donc volontairement d'explicitier le traitement de la frontière solide/liquide/gaz car les phénomènes de mouillages ne sont pas importants sur le flocon. En effet, à partir de la seconde étape de la fonte, le contact liquide/solide est maximisé et les énergies de mouillage ce font que forcer le liquide à rester sur la structure de glace. Le lecteur trouvera en annexe les détails des calculs.

3.1 Description géométrique

Pour fixer les idées, considérons par exemple un cylindre vertical et de section Ω dans le plan x_1x_2 , rempli d'un liquide incompressible de densité constante ρ . Nous supposons le fluide au repos et l'interface avec l'air ambiant décrivant une surface capillaire M paramétrisée par $u(x_1, x_2)$. Nous notons par g la métrique induite sur M par u . Une telle situation est à priori sans perte de généralité et est illustrée en (Fig.1.1).

L'aire totale de M est donnée par :

$$\mathcal{S} = \int dA = \int_{\Omega} \sqrt{\det g} dx_1 \wedge dx_2.$$

Le volume total de M est donné par :

$$\mathcal{V} = \int dV = \int_{\Omega} u dx_1 \wedge dx_2.$$

Nous adoptons comme convention que le travail soit défini positif dans la direction du vecteur normal pointant vers l'extérieur de la surface. Nous en tiendrons compte explicitement lors de l'écriture des termes d'énergies décrivant une surface capillaire.

3.1.1 Énergie de surface

La cohésion d'un fluide induit un coût énergétique à la création de surface à son interface. L'énergie requise pour créer la surface capillaire M , proportionnelle à son aire, est donnée par :

$$E_S = -\gamma \mathcal{S}. \tag{3.1}$$

3.1.2 Énergie de mouillage

Ces énergies sont dues à l'adhésion entre un liquide et une paroi solide. Elles dépendent de l'aire du solide mouillé par la surface capillaire :

$$E_M = -\beta\gamma \oint_{\partial\Omega} u ds, \quad (3.2)$$

où β est le coefficient d'adhésion relatif. Nous supposons la paroi du cylindre homogène de sorte que β soit constant.

3.1.3 Énergie gravitationnelle

Ce terme tient compte du coût énergétique associé au déplacement de particules dans un potentiel Ψ :

$$E_G = \rho \int \Psi dV. \quad (3.3)$$

Plus concrètement, nous supposons en général la surface capillaire $u(x_1, x_2)$ à la verticale et notons par g l'accélération gravitationnelle terrestre. Dans ce cas, l'énergie potentielle gravitationnelle Ψ est donné par $\Psi = g x_3$.

Ainsi, le travail effectué pour monter un élément de volume infinitesimal de la forme $\delta A dh$ d'une hauteur h est $\rho g h \delta A dh$. Le travail effectué pour 'remplir' un tube vertical de section $\delta A = dx_1 \wedge dx_2$ d'une hauteur u est donc :

$$\int_0^u \rho g h dh dx_1 \wedge dx_2 = \frac{\rho g u^2}{2} dx_1 \wedge dx_2.$$

Il en résulte que l'énergie gravitationnelle totale du fluide est :

$$E_G = \frac{\rho \mathbf{g}}{2} \int_{\Omega} u^2 dx_1 \wedge dx_2 \quad (3.4)$$

$$= \frac{\gamma \kappa}{2} \int_{\Omega} u^2 dx_1 \wedge dx_2, \quad (3.5)$$

où $\kappa = \frac{\rho \mathbf{g}}{\gamma}$ est la constante capillaire (voir Eq. 2.1). Nous discuterons son importance dans une section à venir.

3.1.4 Énergie de volume

La quantité de volume doit être conservée lors du déplacement virtuel en plus d'offrir une résistance au mouvement due à la pression respective des fluides. En introduisant un multiplicateur de Lagrange λ de façon à tenir compte du volume \mathcal{V} de liquide déplacé, le terme d'énergie prend la forme :

$$E_V = \lambda \gamma \int dV = \lambda \gamma \mathcal{V}. \quad (3.6)$$

Pour le moment, nous supposons λ constant et déterminé de façon unique par les contraintes. Nous en ferons état plus en détails en plus d'y donner un sens physique dans la section (Sect. 4.1) où nous présentons quelques exemples de surfaces capillaires.

3.1.5 Énergie totale

L'énergie totale de la surface capillaire est donc :

$$E_T = \gamma \left\{ -\mathcal{S} - \beta \oint_{\Sigma} u ds + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} u^2 dx_1 \wedge dx_2 + \lambda \mathcal{V} \right\} \quad (3.7)$$

Dans la section suivante nous déduirons les propriétés géométriques des surfaces capillaires à partir de la description phénoménologique que nous terminons à l'instant.

3.2 Équilibre capillaire

Nous commençons par étudier l'équilibre mécanique de l'interface entre deux fluides immiscibles. Nous supposons les fluides homogènes et à température constante. Ce faisant, une telle surface capillaire sera à l'équilibre lorsque les forces de tension superficielle sont contrebalancées par les forces de pression et de gravité. De façon équivalente, nous cherchons à minimiser les énergies gravitationnelles, de surface et de volume. Pour des raisons de simplicité mathématique, nous procéderons à une caractérisation des énergies représentées schématiquement par :

$$E_T = E_S + E_V + E_G \quad (3.8)$$

En vertu du principe des travaux virtuels d'Alembert, les énergies d'un système à l'équilibre sont conservées sous une variation infinitésimale cohérente avec leurs contraintes respectives. Négligeant les effets du mouillage, la surface capillaire est sans bord. Il nous suffit donc de considérer une variation normale arbitraire de l'interface liquide/gaz. Paramétrisons l'évolution de la surface capillaire par $M(t) = u(x_1, x_2, t)$ où $M = M(0)$ est donnée par $u(x_1, x_2) = u(x_1, x_2, 0)$. Soulignons la distinction entre le vecteur position $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ et la fonction réelle $u(x_1, x_2)$.

Soit $\phi = \phi_t : S(t) \rightarrow \mathbb{R}$ et laissons $M(t)$ évoluer selon le déplacement virtuel suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \phi(x_1, x_2) \mathbf{n}(x_1, x_2, t) \quad (3.9)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal orienté vers l'extérieur de $M(t)$. Le lecteur trouvera les détails des calculs qui suivent en annexe.

Les énergies en jeu et leurs variations sont :

(i) Énergie de surface :

$$E_S(t) = \gamma \int dA(t).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_S(t) = \gamma \int 2H \phi dA.$$

(ii) Énergie de volume :

$$E_V(t) = \gamma \lambda \mathcal{V}(t) = \gamma \lambda \int_{\Omega} u(t) dx_1 \wedge dx_2.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_V(t) = \gamma \lambda \int \phi dA.$$

(iii) Énergie gravitationnelle :

$$E_G(t) = \frac{\kappa \gamma}{2} \int_{\Omega} u^2(t) dx_1 \wedge dx_2.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_G(t) = \kappa \gamma \int u \phi dA.$$

La condition d'équilibre se traduit par :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} E_T \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \{E_S + E_V + E_G\} \\ &= \int \{-2\gamma H \phi + \lambda \gamma \phi + \kappa \gamma u \phi\} dA \\ &= \int \phi \{-2H + \lambda + \kappa u\} dA. \end{aligned}$$

Étant donné que ϕ est arbitraire :

$$0 = -2H + \lambda + \kappa u$$

sur toute la surface. Les phénomènes capillaires admettent donc une description purement géométrique. Trouver une surface $u = u(x_1, x_2)$ dont la courbure moyenne est prescrite par :

$$2H = \kappa u + \lambda \tag{3.10}$$

et satisfaisant aux conditions frontières dont nous avons évité de faire état. Elles consistent en la donnée de la géométrie de la région liq/sol/gaz et des angles de contact. La difficulté réside dans l'analyse plus sophistiquée de la variation de l'interface capillaire autour de cette ligne triple contact.

L'équation permet de décrire la forme de gouttes d'eau pendante, sessile ou d'un menisque dans un tube capillaire.

Malgré sa généralité, l'équation (3.10) est en pratique peu utile. D'une part, la théorie pour trouver une solution générale analytique à de telles équations aux dérivées partielles est à ce jour incomplète et les diverses conditions frontières rendent la tâche d'autant plus ardue. Tout de même, l'existence de surfaces minimisant l'énergie E_T fut démontrée en 1977 par J.E. Taylor [Fin02]. D'autre part, l'unicité des solutions n'est pas garantie, au contraire. Dans le cas classique où le volume de fluide est bien défini, [Fin86] montre comment λ est déterminé uniquement à partir des hypothèses physiques. Nous donnerons justement un sens physique au terme λ dans la section. Malgré ceci, l'unicité d'une solution à (3.10) ne peut pas être garantie, et avec raison.

Les systèmes physiques capillaires sont par définition très sensibles aux conditions frontières. La théorie élaborée semble atteindre ses limites ne serait-ce qu'en changeant un

peu la forme du tube capillaire. Sans entrer dans les détails techniques, nous tenons à exhiber un résultat théorique, expérimentalement corroboré, soulignant les subtilités du domaine. Il est question d'étudier la forme de l'interface retrouvée dans un tube capillaire exotique à volume fini en l'absence de gravité.

Théorème 3.1. *[Fin02] Il existe des tubes capillaires rotationnellement symétriques admettant une famille continue de surfaces capillaires rotationnellement symétriques qui circonscrivent le même volume de fluide et possèdent la même énergie mécanique.*

Théorème 3.2. *[Fin02] Les surfaces capillaires dont le théorème précédent fait état sont mécaniquement instables. Il existe des surfaces capillaires arbitrairement proches des membres de la famille décrite ci-haut, satisfaisant aux mêmes conditions frontière et délimitant le même volume, qui possèdent une énergie mécanique moindre.*

Il en résulte que de telles surfaces sont asymétriques.

La capillarité nous offre donc un exemple fascinant où la symétrie est brisée. La configuration d'équilibre d'un système physique symétrique est asymétrique.

Une expérience sur la station internationale Mir a permis d'observer de telles configurations capillaires exotiques, comparables aux surfaces obtenues par simulation numérique [Fin02].

Il n'en reste pas moins que le(s) véritable(s) minima(s) absolu(s) sont à ce jour inconnu(s).

Pour ce qui est du flocon de neige en fonte, le volume de la pellicule d'eau augmente. Ce faisant, nous ne pouvons pas fixer indépendamment du temps une constante λ pour tenir compte des contraintes de volume. Comme nous le verrons dans la section de Laplace-Young, λ tient compte du volume de fluide. Ainsi, les équations décrivent à priori le flocon de neige à chaque instant, pour un volume donné. Dans une section à venir nous formaliserons le problème en termes plus mathématiques et proposerons une généralisation

physiquement justifiée de façon à fixer le volume de liquide.

Nous terminons avec quelques remarques en ce qui a trait à la signification physique de λ .

D'une part, λ est à priori déterminable à partir de la donnée des volumes de fluides en jeu, leurs pressions internes respectives et la géométrie de la situation physique. Nous exhiberons un exemple simple dans la section de Laplace-Young.

D'autre part, on montre par calcul direct en effectuant le changement de variable approprié :

$$u = u' - \frac{\lambda}{\kappa}, \quad (3.11)$$

que la forme de la surface capillaire est indépendante du volume de fluide qu'elle confine.

Par exemple, deux petites gouttes d'eau de volumes différents reposant sur un support plat donnent lieu à deux surfaces capillaires décrites par des sphères de rayons différents. Dans cette optique, nous convenons que les deux surfaces ont la même forme. Autrement dit, nous pouvons rendre le système a-dimensionnel en ce qui a trait au volume en effectuant le changement de variable exhibé en (Eq. 3.11).

Une autre équivalence toute aussi forte peut être établie entre différents types de situations capillaires. Considérons d'abord une goutte d'eau reposant sur un support plat et à la verticale dans le champ gravitationnel terrestre. Tel que démontré, la hauteur d'eau $u(x_1, x_2)$ décrivant l'interface capillaire de la goutte satisfait à la relation (3.10) au même titre que le ménisque dans le tube capillaire.

Théorème 3.3. *[Fin86] Il existe une correspondance bi-univoque entre les gouttes sessiles et les tubes capillaires circulaires.*

La symétrie rotationnelle des deux surfaces capillaires fait en sorte que les conditions de bord soient analogues. Ensuite, la correspondance est effectuée par l'entremise d'un

changement de variables similaire à (Eq. 3.11) qui, d'une part rend l'équation (Eq. 3.10) indépendante de λ , et d'autre part tient compte de la différence d'orientation entre les deux types de surfaces capillaires.

Dans le cas où la gravité est négligeable étant donné la longueur d'échelle du phénomène étudié ($\kappa \ll 1$), les surfaces capillaires à l'équilibre sont à courbure moyenne constante :

$$2H = \lambda \tag{3.12}$$

et nous nous trouvons par exemple à modéliser les petites gouttes d'eau ou des bulles de savon sphériques. Des structures plus complexes, tels des amas de bulles de savons, de minces filets d'eau ou des tubes capillaires dans l'espace, sont aussi décrits par cette relation.

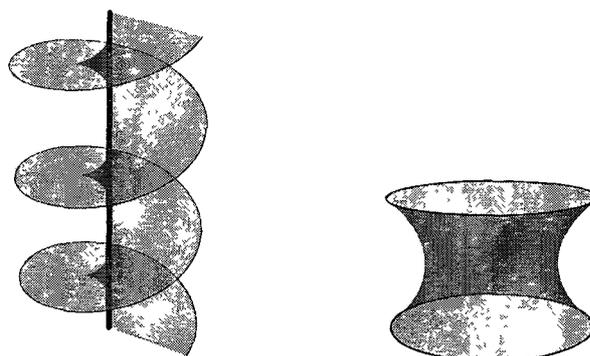
Lorsqu'aucun volume de fluide n'est confiné de part et d'autre de l'interface,

$$2H = 0. \tag{3.13}$$

C'est la cas des pellicules de savon sur des armatures de fer. Nous nous contentons d'en illustrer quelques exemples(Fig. 3.1).

Dans le cas qui nous occupe, nous croyons que l'interface eau/air du flocon est tenue en compte avec justesse en chaque instant par les éléments établis précédemment. Nous utiliserons donc la caractérisation des énergies pour décrire l'interface capillaire parce qu'en chaque instant, le volume de fluide, et par conséquent λ , sont bien définis. La ligne de triple contact liquide/solide/gaz est à nos yeux sans importance au début de la fonte et inexistante par après car l'eau englobe le flocon.

En résumé, la méthode de caractérisation des énergies de Gauss permet de décrire la phénoménologie de la majorité des systèmes capillaires simples avec justesse. Tout de



(a) Hélicoïde

(b) Caténoïde

Figure 3.1 – Pellicules de savon

même, de nombreux cas, par exemple ceux mentionnés ci-haut, restent incompris et semblent parfois paradoxaux.

Pour cette raison, l'étude des états d'équilibres des interfaces capillaires exotiques est encore un domaine actif de recherche qui s'est depuis diversifié étant donné les difficultés techniques inhérentes à l'approche variationnelle. Dans les cas des bulles de savons, la théorie de la mesure géométrique s'est distinguée en élucidant l'amoncellement de deux ou trois bulles de savon. Les surfaces minimales, popularisée par les phénomènes physiques qu'elles décrivent, sont maintenant étudiées par l'entremise de techniques d'analyse complexe sophistiquées mise de l'avant au 19ième siècle par Weierstrass.

En général, les systèmes définis à l'aide de tels principes variationnels n'admettent de traitement mathématique satisfaisant . Il est difficile, voir impossible, de caractériser le type de maxima ou minima. Ce faisant, une étude des variations secondes de l'énergie est de mise pour assurer la stabilité des points critiques trouvés. Nous nous restreignons pour le moment en la détermination des surface capillaires et leur occurrence dans la

nature et évitons une discussion subtile sur leur stabilité. Pour détails et explications en profondeur, en plus d'autres cas pathologiques, le lecteur est prié de consulter [Fin02] et [Fin86].

Dans la prochaine section (Sect. 4), nous montrons comment les cas classiques de la capillarité s'incorporent dans la théorie que nous venons d'exhiber. Nous proposerons ensuite une généralisation dans la section 5 pour tenir compte de la phénoménologie particulière du flocon de neige.

CHAPITRE 4

Exemples classiques de la capillarité

Nous mettons de côté pour quelques instants le flocon de neige afin de préciser la signification physique du résultat mathématique (Eq. 3.10). Dans cette section, nous nous attardons à quelques manifestations classiques de la tension de surface qui ont mis de l'avant l'aspect géométrique des phénomènes capillaires à l'équilibre. Nous commencerons en revisitant la célèbre loi de Laplace-Young, pour ensuite exhiber quelques exemples de surfaces capillaires qui en découlent. Nous rappelons au lecteur que le flocon de neige en fonte n'est pas un système physique à l'équilibre. Ainsi, les lois que nous mettons de l'avant ne décrivent pas complètement la forme du flocon, mais jouent un rôle certain dans la dynamique de fonte. Nous en feront état à la fin des sections 4.1 et 4.2 où nous présentons la relation de Laplace-Young et les onduloïdes.

4.1 Équation de Laplace-Young

Le lecteur attentif remarquera la similarité entre le résultat que nous présentons et celui de la section (Sect. 3.2) où nous traitons les surfaces capillaires générales. En effet, il

s'agit d'un cas particulier du portrait qui y a été dressé car les forces de gravité seront négligées : $\kappa = 0$. Nous nous trouvons à modéliser une petite surface capillaire résultante du mélange de deux fluides immiscibles. On peut par exemple penser aux bulles de gaz carbonique dans la bière, aux bulles de savon ou à de petites gouttes d'eau.

Nous présentons dans ce qui suit une preuve originale du fameux théorème de Laplace-Young. Les arguments et l'approche sont sensiblement ceux de Landau [LL59a], mais les mathématiques sont plus modernes et mettent de l'avant la nature géométrique des surfaces capillaires.

Lorsque deux fluides immiscibles sont mis en contact, il existe une différence de pression de part et d'autre de leur interface. Les forces de pression cherchent à dilater ou compresser la surface capillaire décrivant cette interface, tandis que cette dernière cherche à se contracter afin d'amoinrir sa surface de contact. L'équilibre est atteint lorsque les forces de pression sont contrebalancées par la tension superficielle.

La relation Laplace-Young établit un lien formel entre la différence de pression à l'interface de deux fluides et la forme de celui-ci.

L'énergie totale du système est donnée par :

$$E_T = p_I \mathcal{V}_I + p_E \mathcal{V}_E - \gamma \mathcal{S}. \quad (4.1)$$

où p_I et \mathcal{V}_I (respectivement p_E et \mathcal{V}_E) sont la pression et le volume du fluide à l'intérieur (resp. extérieur) de la surface capillaire M .

Laissons cette dernière effectuer un déplacement normal tel que décrit par l'équation (Eq. 3.9). La condition d'équilibre s'écrit :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} E_T \quad (4.2)$$

$$0 = p_I \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}_I + p_E \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}_E - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S} \quad (4.3)$$

$$0 = \Delta p \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V} - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S} \quad (4.4)$$

$$\text{où } \Delta p = p_I - p_E, \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}_I = -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}_E = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}.$$

En rappelant les relations (Eq. 8.20) et (Eq. 8.21), la condition d'équilibre (Eq. 4.2) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \int \Delta p \phi \, dA - 2\gamma H \phi \, dA \\ 0 &= \int \phi \{ \Delta p - 2\gamma H \} \, dA \end{aligned}$$

Étant donné ϕ arbitraire, nous concluons :

$$\Delta p = 2\gamma H. \quad (4.5)$$

En écrivant la courbure moyenne H en fonction des rayons de courbure principaux, nous obtenons la formule célèbre de Laplace-Young :

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.6)$$

La courbure moyenne d'un interface capillaire à l'équilibre est donc proportionnelle à la différence de pression entre les deux milieux. La constante de proportionnalité étant justement le coefficient de tension superficielle.

L'équation (4.6) encapsule bel et bien toutes les facettes de la phénoménologie capillaires à petites échelles macroscopiques. La tension de surface courbe l'interface faisant pression sur les fluides de part et d'autre, jusqu'à en être contrebalancé par leurs pressions respectives.

Finalement, la démarche présentée ci-haut permet d'interpréter le multiplicateur de Lagrange λ comme étant le rapport comparant les forces de pressions (énergie de volume) aux forces de tension superficielles (énergie d'aire) :

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\gamma}. \quad (4.7)$$

Rappelons qu'à température constante, la tension superficielle γ , qui dépend des composantes chimiques, est constante une fois les fluides en jeu déterminés. C'est pour cette raison que nous associons exclusivement, dans la section sur l'équilibre capillaire, le terme λ aux contraintes de volume. Rappelons que la pression interne d'un fluide l'équilibre est constante. Ainsi, la différence de pression Δp d'une surface capillaire à l'équilibre est constante. Il en résulte donc que λ est constant. De plus, rappelons que [Fin86] λ est uniquement déterminée par la géométrie du problème. Ainsi, des considérations physiques et théoriques précédentes découlent l'existence et l'unicité du multiplicateur de Lagrange. Considérons à titre d'exemple une bulle de savon sphérique de volume V_0 . La relation de Laplace-Young se réduit à :

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r}$$

où r est le rayon de la bulle. La différence de pression est :

$$\Delta p = 2\gamma \left(\frac{3V_0}{4\pi} \right)^{-3}$$

et il en découle que λ est fonction uniquement du volume de fluide V_0 .

La relation de Young-Laplace nous permet aussi d'interpréter physiquement les surfaces à courbure moyenne nulle décrites par les pellicules de savon sur une armature de tige solide. Ce sont des surfaces ouvertes séparant le même fluide et donc que la pression est la même de part et d'autre de l'interface capillaire. En rappelant équation (4.7), il en résulte que λ est nul. Autrement dit, de telles surfaces ne circonscrivent aucun volume et sont dites *minimales* étant donné qu'elles ne minimisent que leur aire. En considérant l'équation (Eq. 8.20), nous pouvons aussitôt conclure que les surfaces minimales sont les points fixes du flot selon la courbure moyenne.

Dans le cas de la fonte du flocon de neige, la relation de Laplace-Young dicte en grande partie la forme de l'interface eau/air en plus d'intervenir directement dans les équations constitutives de l'eau en tant que conditions frontières. Bien entendu, le flocon de neige n'est pas à l'équilibre, mais nous pouvons quand même en tirer des conclusions importantes.

Premièrement, étant donné la taille du système, les énergies de surface sont dominantes. La relation de Laplace-Young nous permet de conclure que l'eau sur le flocon cherche à se courber sur elle-même le plus possible. Mais rappelons que la pellicule d'eau est arrimée par les échardes de glace facilitant l'accumulation d'eau dans une région en particulier qui adoptera le plus possible une forme sphérique. Ces formations sont en quelque sorte des réservoirs d'eau, dont la pression capillaire est moindre (étant donné leur taille) qu'à côté sur le plus petit dendrite, et donc sont stables dans ce sens. Lorsque les défauts et échardes du cristal s'estompent, ces petits réservoirs (en état métastable) entrent en contact avec la plus grosse bulle d'eau au centre. En vertu de la relation de Laplace-Young, les petites bulles d'eau se videront dans les plus grosses. En effet, la pression dans la petite bulle est supérieure à celle dans la grosse. Ceci favorise la coalescence vers la bulle d'eau au centre du flocon. Au fur et à mesure que l'eau s'accumule au centre vers la fin de la deuxième étape, nous observons un capuchon d'eau très courbé apparaître sur

la surface plane de glace.

Ainsi, la relation de Laplace-Young nous permet de conclure que les formations stationnaires, ou état d'équilibre métastable, tendront localement à être de courbure moyenne constante, en formant des sphères ou des onduloïdes, en plus d'expliquer la prépondérance des gouttes d'eau à s'agglomérer vers le centre du flocon. Nous reviendrons plus en détails dans la section 4.2 sur les onduloïdes.

Deuxièmement, remarquons que le coefficient de tension superficielle et la pression de l'air sont constants partout sur l'interface. À la lumière de (4.6), il faut admettre que seule la pression interne de l'eau peut contrebalancer la courbure de l'interface. Ainsi, l'interface capillaire induit une pression à l'eau qui est proportionnelle à sa courbure moyenne. C'est donc en tant que source de pression externe, que la relation de Laplace-Young entre en jeu dans la dynamique de l'eau. Ce sont justement les différences et gradients de courbures qui faciliteront les écoulements d'eau vers le centre du flocon. Nous reviendrons sur cet aspect de la fonte dans (Sect. 6) sur la dynamique de l'eau.

En conclusion, la forme de l'eau sur le flocon est dictée par la tension superficielle dans la mesure où cette dernière force le fluide à adopter le plus possible une forme sphérique et initie la migration de l'eau vers le centre. Ce faisant, les différences de courbure de la pellicule d'eau s'estompent et le flocon adopte une forme sphérique pendant que les derniers vestiges de la structure cristalline disparaissent. Dans ce qui suit, nous réaffirmons plus en détails le rôle de la tension superficielle par l'entremise d'un exemple de situation capillaire métastable que nous observons pendant la fonte

4.2 Onduloïdes

Dans cette section nous revenons sur les accumulations d'eau en équilibre métastable sur les dendrites. En vertu de la relation de Laplace-Young, ces formations sont aptement modélisés par les onduloïdes, un autre type de surface à courbure moyenne constante que nous illustrons en (Fig. 4.1) . Bien qu'elles admettent une construction géométrique riche en conséquence [OMH07], nous proposons plutôt une brève description avant d'en tirer les conséquence physiques.

Figure 4.1 – Onduloïde

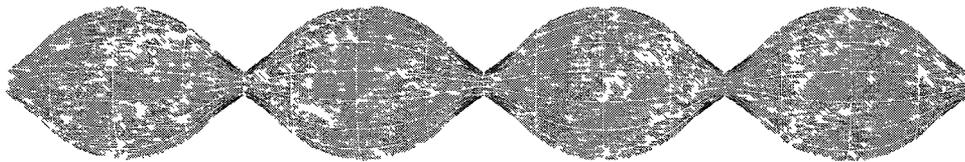
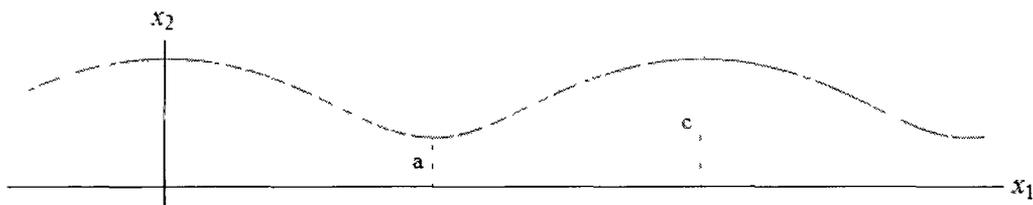


Figure 4.2 – Courbe de profil d'une onduloïde



4.2.1 Géométrie de l'onduloïde

L'onduloïde est une surface de révolution à courbure moyenne constante dont la courbe de profil est illustré en (Fig. 4.2). Elle admet une paramétrisation qui ne dépend de

ses hauteurs maximale et minimale, représentés respectivement par les coefficients a et c tel qu'indiqué en (Fig. 4.2). Nous évitons de faire état de la paramétrisation étant donné qu'elle découle d'une construction géométrique différente (quoiqu'équivalente) à celle proposée par la situation physique.

Nous résumons dans le lemme suivant quelques propriétés géométriques de l'onduloïde qui a pour courbe de profil celle illustrée en (Fig. 4.2).

Lemme 4.1 ([OMH07]).

(i) *La longueur d'une période, ou encore la distance entre deux minima locaux consécutifs est :*

$$\mathcal{L} = 2cE(q) + 2aK(q).$$

(ii) *Le volume d'une période est :*

$$\mathcal{V} = \frac{2\pi c}{3}((2a^2 + 3ac + 2c^2)E(q) - a^2K(q)).$$

(iii) *L'aire totale d'une période est :*

$$\mathcal{S} = 4\pi(a + c)cE(q).$$

(iv) *La courbure moyenne est :*

$$H = \frac{1}{a + c}.$$

Ici $E(q)$ représente l'intégrale elliptique incomplète de seconde espèce et $K(q)$ l'intégrale elliptique complète de première espèce. La constante q est donnée par :

$$q^2 = \frac{c^2 - a^2}{c^2}.$$

4.2.2 Instabilité de Plateau-Rayleigh

L'instabilité de Plateau-Rayleigh fait allusion au processus de déformation d'une interface capillaire pour minimiser son aire. Ce phénomène fut étudié pour la première fois afin

d'expliquer pourquoi un jet d'eau se brise en gouttellettes sphériques. Pour la même raison, en revêtant une fibre cylindrique d'un liquide, cette pellicule ondulera jusqu'à se stabiliser de façon symétrique tel qu'illustré en (Fig. 4.1) pour former une onduloïde. Ces manifestations ne sont dûes qu'aux forces de tension superficielle qui incitent le liquide à minimiser son aire [dBWQ02].

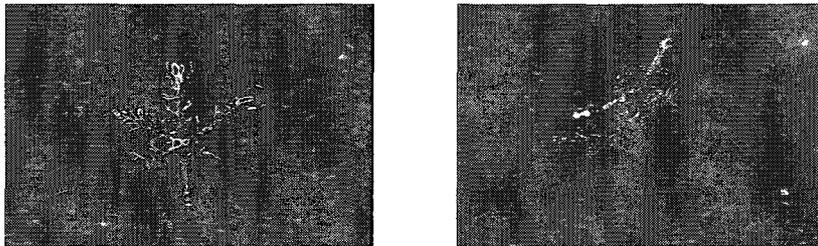
Dans le cas d'une onduloïde, sans la contrainte de la fibre, le liquide adopterait une forme sphérique. Cet aspect de la phénoménologie sera reflété dans les conditions frontières étant donné que les énergies en jeux sont les mêmes :

$$E_T = E_S + E_V = \gamma \mathcal{S} + \Delta p \mathcal{V}. \quad (4.8)$$

La pellicule admet comme axe de symétrie la fibre sur laquelle elle repose. Pour la paramétriser, il suffit donc de considérer une courbe de profil $u = u(x_1)$ décrivant la hauteur du film par rapport au centre de la tige. La minimisation de $E_T = E_T(u, u')$ s'effectue à l'aide des équations d'Euler-Lagrange et la courbe de profil $u(x_1)$ admet une expression analytique en fonction d'intégrales elliptiques tel que nous en faisons état au début de cette section.

4.2.3 Onduloïdes sur le flocon

Figure 4.3 – Onduloïdes sur le flocon



L'instabilité de Plateau-Rayleigh est d'une importance capitale pour expliquer la forme de l'interface capillaire formé par la pellicule d'eau sur le flocon. Cette dernière se déforme constamment de façon à minimiser son aire afin de palier à l'augmentation de volume de fluide résultant de la fonte. La cinétique du phénomène fait en sorte que seules des situations d'équilibre métastable sont observées. Plus précisément, nous nous intéressons aux accumulations d'eau le long des dendrites et au milieu du flocon. Lorsque les défauts du flocon limitent les écoulements d'eau vers le centre, il se crée un petit réservoir d'eau métastable le long des dendrites (Fig. 4.3).

Nous croyons que ces formations d'eau en équilibre temporaire sont justement représentées par une période d'une onduloïde. Cette situation d'équilibre temporaire est d'intérêt pour plusieurs raisons.

D'une part, la géométrie des onduloïdes est bien connue analytiquement. Il suffit de mesurer l'épaisseur minimale et maximale du liquide sur le dendrite, notés a et c , pour ensuite déterminer l'onduloïde correspondante. Nous pourrions comparer la géométrie du réservoir d'eau sur le dendrite à celle d'une onduloïde théorique. Nous pouvons par conséquent calculer le bilan énergétique de la surface capillaire sur une partie du dendrite à partir des formules du lemme 4.1. De plus, ces connaissances théoriques nous guideront aussi pour mesurer l'épaisseur minimale de la pellicule d'eau. Sur le dendrite du flocon, il nous faut déterminer (arbitrairement) où commence notre pseudo-onduloïde lorsque nous effectuons la mesure du coefficient a . Il en résulte qu'en évaluant expérimentalement la hauteur a nous déterminons aussi la longueur de notre pseudo-onduloïde. En effet, cette distance est le double de celle entre un minima et maxima consécutif. Il nous faudra justement la comparer avec celle d'une onduloïde théorique de paramètres a et c , afin de ré-ajuster si nécessaire la mesure de la hauteur minimale a . En plus de nous guider expérimentalement, ceci nous donnera une aussi idée de la longueur d'échelle sur laquelle notre approximation des réservoirs d'eau par des onduloïdes est acceptable.

D'autre part, les onduloïdes sont les premières manifestations de l'épaississement de la la pellicule d'eau vers une surface capillaire 'libre' au cours des deuxième et troisièmes étapes de la fonte. Dans la section suivante, nous proposons une description physique différente que (Eq. 4.8) lorsque la pellicule d'eau est mince et les déformations par la structure de glace encore importantes. Pour ce faire, nous adjoignons à l'hamiltonien (Eq. 4.8) un terme supplémentaire tenant compte des énergies de flexion de l'interface eau/air. Ainsi, les onduloïdes seraient en quelque sorte l'avatar d'une transition phénoménologique.

Ceci nous permettrait justement de confirmer ou infirmer si l'augmentation de courbure observée avec l'augmentation du volume d'eau sur les dendrites peut être tenue en compte par une famille d'onduloïdes. Pour différentes épaisseur maximales et minimales d'eau correspondraient des onduloïdes de paramètres a et c différents. Auquel cas, nous étudierons l'évolution de ces coefficients obtenus expérimentalement au cours de la fonte. Dans le cas contraire, nous y trouvons une motivation nouvelle derrière l'utilisation des énergies de courbure pour modéliser l'interface liquide/air . Nous espérons aussi que de plus amples comparaisons puissent fournir des indications sur le volume critique de liquide qui initierait cette transition.

CHAPITRE 5

Rôle de la courbure

Nous avons déduit la description géométrique des surfaces capillaires à l'équilibre ainsi que le rôle des énergies en jeu dans les sections (Sect. 3) , (Sect.3.2) et (Sect. 4.1). Dans cette section nous introduisons un autre ingrédient physique qui expliquerait la forme de la pellicule d'eau du flocon. Cette dernière recouvre la structure de glace en épousant jusqu'à un certain point son relief. En particulier, durant la seconde étape de fonte, le volume d'eau est petit, la couche d'eau est très mince et épouse le cristal au point d'en être contraint par ses défauts.

Malgré le fait que l'eau est un médium continu, nous voulons tenir en compte le fait que la mince couche d'eau soit étirée par le cristal. Étant donné la température constante et supposant le liquide de l'interface incompressible, les principales déformations sont dues aux flexions de la surface capillaire. Autrement dit, la géométrie du cristal s'impose, par l'entremise de forces de flexions provenant de la courbure, en tant que contrainte sur la pellicule d'eau. Nous croyons bon d'en tenir compte par l'ajout d'un terme relié à la courbure dans l'hamiltonien (Eq. 3.8) décrivant les surfaces capillaires.

Nous voulons d'une part pénaliser les endroits à haute courbure. En effet, ce sont ces

endroits que le flocon en fusion cherche à éliminer. La bulle d'eau au centre, quant à elle, est peu perturbée tout au long de la fonte. D'autre part, nous cherchons aussi à mesurer la déviation du flocon en fonte de sa situation d'équilibre, la sphère.

5.1 L'*elastica*

Pour commencer, nous proposons de tenir compte de la courbure de façon analogue aux travaux d'Euler et J.Bernoulli sur l'élasticité. Ce fameux problème, datant de l'ère de Galilée, admet la formulation originale suivante :

Étant donné une poutre fixée à un mur, quel est le poids maximal que l'on puisse ajouter à son extrémité avant qu'elle ne cède ?

Le problème s'avéra plus subtil que prévu étant donné qu'à partir d'un certain poids, la poutre fléchit. Il a fallu attendre les travaux de Hooke sur les ressorts et l'élaboration du calcul différentiel par Newton pour que l'importance mécanique de la notion analytique de courbure soit prévalente [LL59b].

À cette époque, la question originale de Galilée s'était sophistiquée en l'étude de la forme de minces tiges rigides soumises à des forces de flexion en leurs extrémités.

Ce célèbre problème, maintenant connu sous le nom d' *elastica*, fut enfin posé dans des termes géométriquement rigoureux par James Bernoulli aux environs de 1670. Tout de même, faute de moyens techniques, il n'en fournit qu'une solution incomplète. En 1750, les efforts communs de Euler et Daniel Bernoulli suivant l'élaboration du calcul variationnel permettent une formulation définitive de l'*elastica* :

L'*elastica* est décrite par la courbe plane paramétrisée naturellement $c(s)$, qui minimise l'énergie élastique :

$$E_C = \int_0^l k(s)^2 ds, \quad (5.1)$$

où $k(s)$ est la courbure de la courbe recherchée qui s'exprime en fonction de $c(s)$. Bien entendu, la connaissance des forces du système physique fixent les conditions initiales sur $c(s)$ et ses dérivées.

Euler réussit par la suite à expliciter quelques solutions analytiques qui donnent lieu aux différentes familles de courbes. Ces travaux serviront aussi d'inspiration à Pierre-Simon Laplace dans ses recherches sur la capillarité. Plus précisément, il remarqua que la courbe de profil décrivant la surface d'un liquide à l'intérieur d'un tube capillaire circulaire soumis à la gravité correspond à une solution particulière de l'*elastica*. En rappelant la correspondance donné par (Thm. 3.3), force est d'admettre que le profil d'une grosse goutte symétrique au repos peut être vue comme une tige flexible déformée en ses extrémités. Ainsi, il s'est avéré correct de considérer une courbe de profil auquel on adjoint un coût énergétique relié à sa courbure au lieu d'étudier une surface décrite par l'hamiltonien (Eq. 3.8). Nous sommes motivés par l'utilisation de la symétrie rotationnelle de l'eau sur le dendrite du flocon et du capuchon sphérique au centre pour obtenir une description analytique du phénomène en utilisant cette approche. En effet, nous nous limiterions à l'étude d'une courbe de profil afin d'éviter d'avoir recours à une théorie plus sophistiquée dans le cas d'une surface en général dont nous ferons état dans la section suivante (Sect. 5.2).

5.2 Courbure d'une surface

Dans le cas d'une surface en général, il faut tenir compte de la courbure différemment pour la raison suivante ; il existe une infinité de courbes sur la surface passant en chacun de ses

points. Nous commençons donc par une construction classique qui découle naturellement des travaux sur l'*elastica*. En tout point p d'une surface sans bord M , nous définissons :

$$C = \int_0^\pi k_n(\theta)^2 d\theta, \quad (5.2)$$

où $k_n(\theta)$ est la courbure normale de toutes les courbes sur M au point p faisant un angle θ avec une des directions principales. Rappelons que la courbure totale d'une courbe sur une surface peut être décomposée en courbures normales et géodésiques. La courbure normale est la courbure de la courbe sur la surface dans le plan normal à la courbe. La courbure géodésique représente à quel point la courbe est courbée à même la surface. Ainsi, nous nous assurons d'associer à chaque point de notre surface, une énergie qui prend compte de la flexion de notre surface.

En écrivant la courbure normale k_n en fonction des courbures principales à l'aide de la formule d'Euler, l'équation devient :

$$C = \int_0^\pi \{k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \sin^2(\theta)\}^2 d\theta \quad (5.3)$$

$$C = \frac{3}{8}k_1^2 + \frac{2}{8}k_1k_2 + \frac{3}{8}k_2^2 \quad (5.4)$$

$$C = \frac{3}{2}H^2 - \frac{1}{2}K, \quad (5.5)$$

qui admet la généralisation naturelle suivante :

$$C = \alpha H^2 + \nu K, \quad (5.6)$$

où H et K sont respectivement les courbures moyenne et gaussienne (voir Annexe).

Ainsi, l'énergie élastique totale de la surface est définie par

$$E_C = \int C dA. \quad (5.7)$$

où α et ν sont des coefficients à déterminer expérimentalement.

En supposant la topologie de la surface inchangée, il est équivalent, en vertu du théorème de Gauss-Bonnet, de minimiser la fonctionnelle :

$$E_C = \alpha \int H^2 dA. \quad (5.8)$$

5.2.1 Énergie de Helfrich

Helfrich fut le premier à utiliser cette approche pour décrire les énergies dues à la courbure afin de modéliser avec succès la forme de cellules biologiques. Il proposa de tenir compte des énergies de flexions des membranes biologiques à l'aide du terme [CL95], [LMS09] :

$$E_H = \alpha \int (H - H_0)^2 dA \quad (5.9)$$

où H_0 est la courbure d'équilibre, la courbure moyenne de référence, par rapport à laquelle on considère les déviations. Elle représente en quelque sorte la configuration préconisée par le système, celle qui lui encourt un coût énergétique moindre.

La forme \mathbf{u} d'une membrane biologique à l'équilibre est trouvée en minimisant

$$E_T = E_H + E_S + E_V. \quad (5.10)$$

Énergie de Willmore

D'un point de vue plus géométrique, nous avons aussi cru bon considérer :

$$E_W = \int (k_1 - k_2)^2 dA = 4 \int (H^2 - 4K) dA. \quad (5.11)$$

Historiquement, T.J. Willmore utilisa ce terme pour mesurer à quel point une surface compacte dévie de la sphère. En effet, on adjoint comme coût énergétique à chaque point de la surface la différence entre ses courbures principales. Étant donné que k_1 et k_2 sont les courbures maximales et minimales de la surface en ce point, nous nous assurons de maximiser les déviations de courbure en chaque point.

La sphère est le minimum absolu de la fonctionnelle E_W car tous ses points sont ombilicux. Des surfaces de genre plus élevé offrent aussi des minima locaux beaucoup plus intéressants d'un point de vue théorique.

Remarquons que E_H et E_W coïncident dans le cas où $\alpha = 1$ et $H_0 = 0$, et nous pouvons donc considérer E_H une généralisation naturelle de E_W . De façon plus importante, les fonctionnelles E_C , E_W et E_H admettent une construction fondamentalement différente mais ultimement font intervenir les mêmes quantités géométriques.

5.2.2 Flocon

Nous proposons de tenir compte de la flexion de la pellicule d'eau de façon analogue. À chaque instant (à volume constant), nous postulons que la forme \mathbf{u} de la pellicule d'eau est déterminée par les énergies de courbure, d'aires et de volumes. Autrement dit, nous cherchons donc les points de selle $(\mathbf{u}, \Delta p)$ tels que

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3} \sup_{\Delta p \in \mathbb{R}} E_T, \quad (5.12)$$

où :

$$E_T = E_C + E_S + E_V \quad (5.13)$$

$$= \int f(H) dA - \gamma \int dA + \Delta p \left(\int dV - V_0 \right) \quad (5.14)$$

et v_0 est le volume de fluide provenant du problème physique. La fonction $f(H)$ faisant intervenir la courbure moyenne de la surface représente une généralisation du terme H^2 qui s'était imposé de lui-même à partir de la construction de E_W et E_H . Nous nous restreignons aux points de selle dans le sens où la fonctionnelle doit être minimale par rapport à la surface tout en maximisant les contraintes de volumes.

En réalité, le flocon de neige que nous tentons de décrire est en fonte. Le volume de liquide n'est donc pas constant. Ainsi, le modèle que nous proposons représente l'énergie que le flocon cherche à minimiser en chaque instant. C'est aussi pour cette raison que nous généralisons la fonctionnelle d'énergie de façon à prescrire le volume de référence V_0 à chaque moment de la fonte. Notons que nous avons considéré la différence de pression Δp constante sur la surface. Ceci correspond à une situation capillaire à l'équilibre, ce qui n'est pas le cas avec le flocon, mais consiste pour le moment en une approximation raisonnablement acceptable vue la complexité de la réalité.

E_T satisfait aux deux conditions :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E_T}{\partial(\Delta p)} \\ 0 &= \frac{\partial E_T}{\partial \mathbf{u}} \end{aligned}$$

La première équation nous permet de fixer le volume si nécessaire. La dernière équation, faisant état de la variation de l'énergie du système lorsque la surface est déformée, représente en quelque sorte une généralisation du traitement analytique réservé aux surfaces capillaires dans les sections (Sect. 3.2) et (Sect. 8), où nous avons laissé la surface effectuer une variation normale arbitraire.

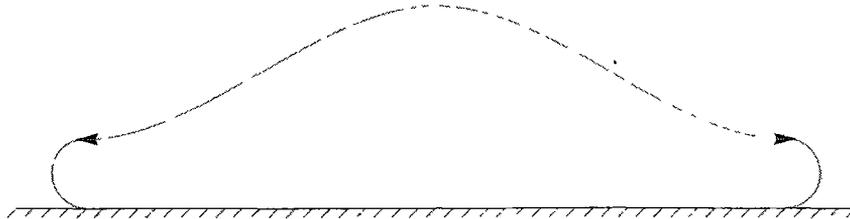
On trouve d'une part comme condition d'équilibre [LMS09] :

$$\Delta p - 2\gamma H + 2Hf(H) + (K - 2H^2)f'(H) - \frac{1}{2}\Delta_M(f'(H)) = 0, \quad (5.15)$$

ou $f'(H)$ représente la dérivée de f par rapport à H et Δ_M l'opérateur de Laplace-Beltrami. D'autre part, remarquons que pour $f \equiv 0$, nous retrouvons l'équation de Laplace-Young.

Nous postulons que l'hamiltonien proposé en (Eq. 5.12) sert de fil conducteur à l'évolution de la forme du film d'eau sur le flocon en mesurant combien il dévite globalement de sa configuration d'équilibre, la sphère. La fonction $f(H) = H^2$ nous semble de mise pour le moment étant donné son occurrence naturelle à partir de notre construction de l'énergie de courbure. D'un point de vue géométrique, elle nous permet de mesurer de combien la surface est déformée de son état d'équilibre, la sphère. De plus, tout comme dans le cas des surfaces capillaires décrites par (Eq. 3.8), la sphère est aussi un minimum absolu de (Eq. 5.12). Ceci étant dit, nous devons nous attendre à ce que tout terme d'énergie faisant intervenir une fonction du carré de la courbure normale, se transforme en une fonction qui dépend du carré de la courbure moyenne plus un terme due à la courbure gaussienne. Pour cette raison, l'énergie de courbure moyenne s'impose naturellement comme généralisation de la théorie de l'élasticité classique. Tout de même, nous n'excluons pas la possibilité de fonctions $f(H)$ plus générales découlant d'une meilleure phénoménologie de la situation. Cette augmentation de symétrie se répercute par une diminution de l'énergie du système décrit par l'hamiltonien étant donné que les différences de courbures s'estompent. Le capuchon sphérique au centre du flocon, l'endroit le plus stable du flocon et ce vers quoi tend le flocon, minimise justement les termes d'énergie que nous proposons.

Figure 5.1 – Profil du flocon



Nous croyons bon de tenir compte de la rigidité de la surface capillaire pour la raison suivante : Le mince film d'eau connecté est jusqu'à un certain point 'collé' au cristal étant donné sa rugosité et la prédominance des forces de tension superficielle. Ce faisant, nous croyons que surtout durant la deuxième étape, l'interface eau/air est plus contrainte qu'une surface capillaire libre habituelle car la courbure de la glace impose un stress additionnel à la pellicule par l'entremise de flexion supplémentaire. Nous observons expérimentalement que la structure de glace reste littéralement arrimée en quelques endroits sur la surface capillaire jusqu'au dernier stage de la fonte.

Sans pour autant supposer la solidité de cette dernière, étant donnée la haute viscosité de l'eau, nous croyons important de tenir compte de l'effet de flexion due à la présence de glace lorsque la pellicule d'eau devient connexe. Seulement à ce moment, la courbure du côté du flocon qui circonscrit la pellicule d'eau, peut agir de façon concertée en tant que forces de flexion sur la pellicule (Fig. 5.1). Avant que l'eau ne soit connecté, la pellicule d'eau compensait par une augmentation de son aire de contact avec la glace et l'air ambiant. Autrement dit, la courbure de la glace poussait les gouttes d'eau à recouvrir le flocon. Une fois que les gouttes d'eau se connectent, nous nous retrouvons avec une surface d'eau englobant le cristal de glace. Il s'agit d'un autre aspect important du changement de la topologie de l'eau pour devenir une surface connexe. La glace devient une contrainte interne qui l'étire ou la déforme. La glace agit de façon concertée, ou globale, dans la mesure où la surface doit compenser au sein d'elle-même ces flexions. Pour cette raison, les forces de flexion deviennent une source de stress sur la pellicule d'eau et non pas seulement une force motrice favorisant la dynamique interne de l'eau. Les deuxième et troisième étapes de fonte sont justement en contraste avec la première étape où la glace sert seulement de relief non uniforme incitant les écoulements d'eau.

Il n'en reste pas moins l'effet de la glace comme force motrice étant donné que sa présence déforme la pellicule. Pour cette raison, nous pénalisons la surface aux endroits les plus

courbés : les intersections des dendrites et surtout le bout des flocons, là où l'eau a le moins tendance à s'y accumuler. Notre hamiltonien permet aussi d'expliquer en quoi les pseudo-onduloïdes sur les dendrites ne sont pas des situations d'équilibre, contrairement dans le cas où l'hamiltonien classique (Eq. 3.8) de la capillarité est considéré.

Nous souhaitons aussi dériver les composantes du tenseur de stress provenant des énergies de courbure. Par exemple, dans le cas de l'hamiltonien de Helfrich, il a été démontré que les courbures contribuent aux forces tangentielles à l'interface. Nous espérons tracer un parallèle avec ces forces tangentielles et celles d'une *elastica* dans le cas où la symétrie du problème nous permet de considérer une courbe de profil, comme par exemple le capuchon au milieu ou les pseudo-onduloïdes sur les dendrites.

Nous croyons qu'une courbe de profil donnée par une solution particulière à (Eq. 5.1) pourrait correspondre au capuchon du flocon, où les forces de flexions additionnelles dues à la courbure de la glace qui nous permettrait de décrire une situation en équilibre métastable. Plus précisément, nous postulons que le profil de l'interface eau/air du flocon peut être décrit comme une mince tige, initialement circulaire, qui est déformé par des forces latérales tel qu'illustré en (Fig. 5.1).

Cette approche nous permettra aussi de cibler quelles caractéristiques les forces de flexions doivent posséder afin de différencier ces courbes de profil aux solutions classiques de la capillarité. Nous serons en position d'infirmer ou confirmer la nécessité d'inclure les énergies de flexions ou si la relation de Laplace-Young suffit pour décrire les pseudo-onduloïdes sur les dendrites ou le capuchon sphérique au centre. Nous mentionnons qu'en ne considérant que les ingrédients classiques de la capillarité, nos efforts pour trouver les équations analytiques décrivant ces formations ont été infructueux.

Un cobaye parfait pour tester notre théorie serait le flocon baton illustré en (Fig. 5.2) et (Fig. 5.3) . D'une part, la simplicité de sa forme minimise l'influence des défauts

provenant de la rugosité de la structure cristalline et du contact avec le tapis. D'autre part, étant donnée qu'il y a peu de gradients de courbure, la dynamique interne de l'eau est beaucoup plus simple et la surface capillaire qui résulte en équilibre métastable. Autrement dit, l'interface eau/air est peu déformée de son état d'équilibre temporaire par la cinétique du milieu. De plus, ce flocon admet une description mathématique des éléments physiques plus simple étant donné la symétrie rotationnelle en plus de nous offrir une situation physique avec peu de défauts qui peut être posée en termes mathématiques exactes à partir de la théorie de l'élasticité. La pellicule d'eau nous semble tout de même moins bombée qu'une onduloïde et nous laisse croire en la nécessité des forces additionnelles de flexion. Cette situation nous permet de mieux témoigner de la possible transition phénoménologique de la pellicule d'eau.

Figure 5.2 – Flocon bâton (partie 1)

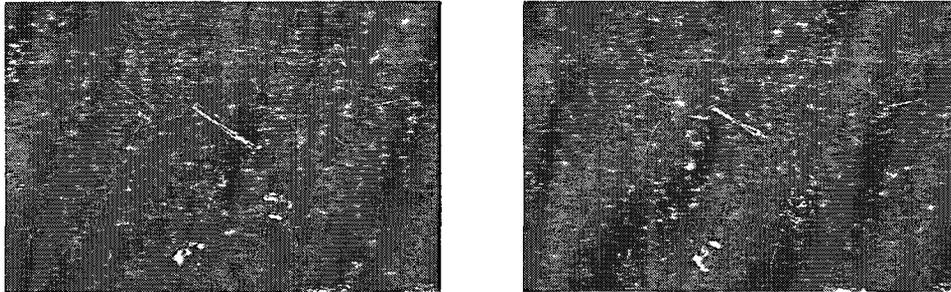
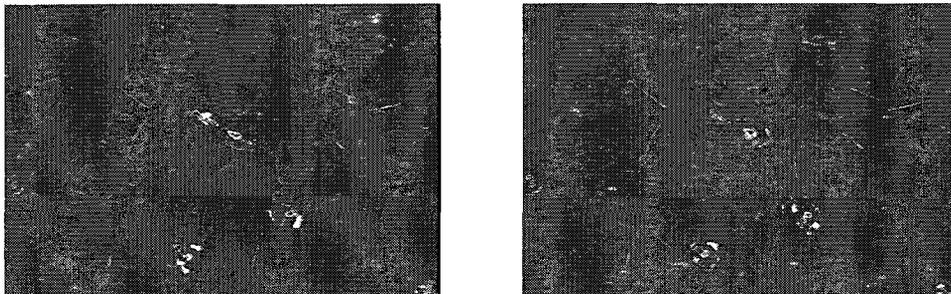


Figure 5.3 – Flocon bâton (partie 2)



En conclusion, nous postulons l'énergie de surface proposée diminue au cours de la fonte pour atteindre son minimum lorsque l'eau forme une goutte parfaite. La sphère est en effet un minimum de l'hamiltonien ci-haut. Nous croyons que ce dernier fournit une bonne caractérisation de l'évolution du flocon vers son état d'équilibre. Sans tenir compte des imperfections ou des détails microscopiques, notre hamiltonien fournit une description de la tendance commune des flocons lors de leur fonte. En effet, nous croyons encapsuler les éléments importants de la phénoménologie macroscopique, c'est-à-dire :

- (i) **Énergie de volume** : Les forces de pression des fluides déforment l'interface.
- (ii) **Énergie d'aire** : La tension de surface agit en tant que force tangente à l'interface de façon à minimiser son aire.
- (iii) **Énergie de courbure** : L'interface eau/air est déformée par la glace. Le terme d'énergie de flexion provenant de la présence de la structure cristalline interne s'impose par l'entremise des considérations de la théorie de l'élasticité. De plus, ceci nous permet de tenir compte de l'évolution de la symétrie du flocon vers la sphère, le point fixe du processus de fonte.

Il sera aussi intéressant de considérer, à partir d'une meilleure connaissance de la phénoménologie du problème, d'autres fonctionnelles E_C dépendant de la géométrie de l'interface. Tout de même, rappelons que les surfaces décrites par la pellicule d'eau sont homéomorphes à la sphère si nous ne tenons pas compte de ses défauts temporaires. Ainsi, nous devons nous attendre à ce que toute fonctionnelle cherchant à minimiser les différences de courbes sectionnelles fasse converger la surface vers une sphère. Par contre, les équations de mouvements locales et globales de la surface qui en résulteront seront révélatrice du choix de l'énergie de courbure, $f(H)$.

Bien entendu, l'hamiltonien (Eq. 5.14) ne nous permet pas de connaître exactement, analytiquement la forme de la pellicule d'eau du flocon mais fait état des éléments clés dans la description du phénomène physique. De la même façon, l'hamiltonien classique

de la capillarité ne nous donne pas la forme exacte d'un fluide subissant par exemple l'instabilité de Plateau-Rayleigh, mais nous fournit les éléments phénoménologiques importants permettant d'en déduire le comportement [Fin86]. Pour le moment, l'avenue la plus prometteuse nous semble être l'utilisation de l'énergie de courbure pour modéliser le capuchon sphérique et les pseudo-onduloïdes par des *elastica*.

CHAPITRE 6

Dynamique de l'eau

Dans cette section, nous sommes intéressés à la dynamique de la couche d'eau sur le flocon. À partir de nos observations, il nous semble sans doute que la principale facette soit les écoulements le long des dendrites vers le centre du flocon. Nous proposons un modèle minimaliste incorporant les principales facettes de la dynamique de la pellicule au cours de la deuxième étape de fonte. Bien entendu, les équations qui en découleront sont valides sur une courte période de temps, mais les éléments phénoménologiques présentés ainsi que les conclusions restent à propos tout au long de la fonte.

6.1 Équations constitutives

Rappelons les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible sans l'influence du champ gravitationnel terrestre. Comme il est coutume, nous considérons en coordonnées

eulériennes les vecteurs positions et vitesses du fluide, \mathbf{x} et \mathbf{v} :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (6.2)$$

où

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

est la dérivée substantielle.

Les constantes ρ et μ représentent respectivement la densité et la viscosité dynamique du liquide. Les équations sont obtenues en appliquant les lois de la physique classique Newtonienne à un medium continu (au sens thermodynamique du terme). La première équation découle du principe conservation de quantité de mouvement. La seconde équation, quant à elle, rend compte de l'incompressibilité du fluide et découle directement du principe de conservation de la masse.

6.2 Hypothèses

Nous proposons d'étudier l'écoulement de l'eau sur les dendrites du flocon. Nous explicitons comment s'initie l'hydrodynamique le long des branches vers le centre du flocon. Les équations qui en découleront ne sont donc valides que sur la courte période de temps au milieu de la deuxième étape de fonte. Tout de même, les conclusions qualitatives que nous en tirerons seront valides tout au long de la fonte du flocon. Nous commençons par faire état des hypothèses physiques nous permettant de simplifier les équations constitutives.

Premièrement, nous supposons que la pellicule d'eau englobe de façon radialement symétrique la glace. Autrement dit, la pellicule est une surface de révolution dont l'axe coïncide avec le centre du dendrite. Ce faisant, nous décrivons la situation par un écoulement dans

le plan tel qu'illustré en (Fig.6.1).

Deuxièmement, la longueur caractéristique du flocon nous permet de négliger l'effet de la gravité.

Troisièmement, le film d'eau est entre la surface rugueuse de la glace et l'interface capillaire. Il y aura donc un fort gradient vertical dans la vitesse du fluide étant donné les imperfections de la glace. L'eau en contact avec la glace est presque immobile comparativement à l'interface capillaire. Autrement dit, la couche d'eau est très visqueuse en ses débuts.

Quatrièmement, la pellicule est très mince et les écoulements sont lents. Ainsi, nous pouvons supposer le flot sans turbulence et le profil de vitesse constant pendant le court interval de temps qui nous occupe :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0.$$

Étant donné le dendrite court, le liquide relativement homogène et peu perturbée par les conditions extérieures, nous supposons la vitesse horizontale uniforme le long du dendrite :

$$v_1(x_1, x_2) = v_1(x_2).$$

Similairement, étant donné la minceur de la pellicule d'eau, nous supposons la vitesse verticale uniforme sur toute l'épaisseur du film d'eau :

$$v_2(x_1, x_2) = v_2(x_1).$$

Maintenant, notons que l'eau en contact avec la glace est immobile en vertu du 'no slip condition' :

$$\forall x_1, v_2(x_1) = 0 \text{ en } x_2 = 0.$$

Il en résulte que : $v_2 \equiv 0$, illustrant le fait que le flot se fasse selon l'axe horizontal.

Ainsi, nous analyserons l'écoulement laminaire et stationnaire dans le plan d'un fluide visqueux et lent.

Pour ce faire, notons par L, U, ρ_0, p_0 , respectivement les dimensions caractéristiques de longueur, vitesse, viscosité cinétique et pression du système.

Nous étudierons une forme a-dimensionnelle des équations de Navier-Stokes (Eq. 6.2) afin de déduire leur forme particulière à partir de nos hypothèses. Dans notre cas, les forces de viscosité sont beaucoup plus fortes que celles dues aux accélérations des particules du fluide.

Nous effectuons donc le changement de variables classique suivant pour mieux comparer les forces d'inertie ($\frac{\mu U}{L^2}$) à celles de viscosités ($\frac{\rho_0 U^2}{L}$) :

$$\begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i}{L} & v'_i &= \frac{v_i}{U} & \rho' &= \frac{\rho}{\rho_0} \\ t' &= \frac{\nu t}{L^2} & p' &= \frac{L(p-p_0)}{\mu U} \end{aligned}$$

Dans le référentiel $\{\mathbf{x}', \mathbf{v}', \rho', T', t', p'\}$ l'équation (6.2) s'écrit (en laissant tomber les ') :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + Re(v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \nabla^2 v_i \quad (6.3)$$

où $Re = \frac{\rho_0 U L}{\mu}$ est le nombre sans dimension de Reynolds mesurant l'importance relative entre l'inertie et la viscosité.

En ce qui nous concerne, la viscosité domine, ce qui se traduit par $Re \rightarrow 0$ et l'équation (6.3) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} \quad (6.4)$$

appelées les équations de Stokes. Nous supposons le profil de vitesse uniforme sur la courte période de temps considérée, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0.$$

L'équation (6.4) devient donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial (x_2)^2},$$

appelée l'équation de mouvement rampant lorsqu'il y a équilibre effectif de la pression locale et les forces visqueuses.

6.2.1 Conditions frontières

6.2.2 Air

La frontière eau/air est à priori une surface capillaire qui ne peut supporter de stresses visqueux [dBWQ02] [LL59a]. En effet, la pellicule ne peut soutenir de force tangente qu'en présence d'un gradient dans la tension superficielle.

La viscosité provenant justement des différences de vitesses entre les couches d'un fluide, il en résulte que le gradient de vitesse doit être nul à l'interface :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \text{ en } x_2 = e.$$

De plus, tel que démontré dans les sections précédentes, les forces normales de pressions d'un liquide sont contrebalancées par les forces de tensions superficielles :

$$p_{eau} - p_{air} = 2\gamma H.$$

Les régions de la pellicule à haute courbure moyenne, le bout des dendrites, ont par conséquent une plus grande pression interne. Similairement, le creux des branches, où la courbure moyenne est faible ou négative, induit une pression faible, voir négative dans l'eau.

Notons par $\Delta P_{eau} \geq 0$ cette différence de pression de part et d'autre des extrémités d'un des dendrites. Pour des raisons de simplicité mathématique, nous la supposons constante le long du dendrite et effectuons la substitution :

$$-\Delta P_{eau} = \frac{\partial p}{\partial x_1}.$$

6.2.3 Glace

Il y a adhérence entre le liquide et la paroi immobile de la glace. En vertu de la compatibilité des contraintes, leurs vitesses doivent coïncider :

$$v_1 = 0 \text{ en } x_2 = 0.$$

Nous n'imposons aucune contrainte sur le gradient de vitesse étant donné que la paroi (rigide) du cristal peut supporter une contrainte visqueuse. Nous reviendrons sur cet aspect important dans la transition de phase de la glace.

6.3 Solution et conclusions

La fonction vitesse est obtenue par intégration successive de

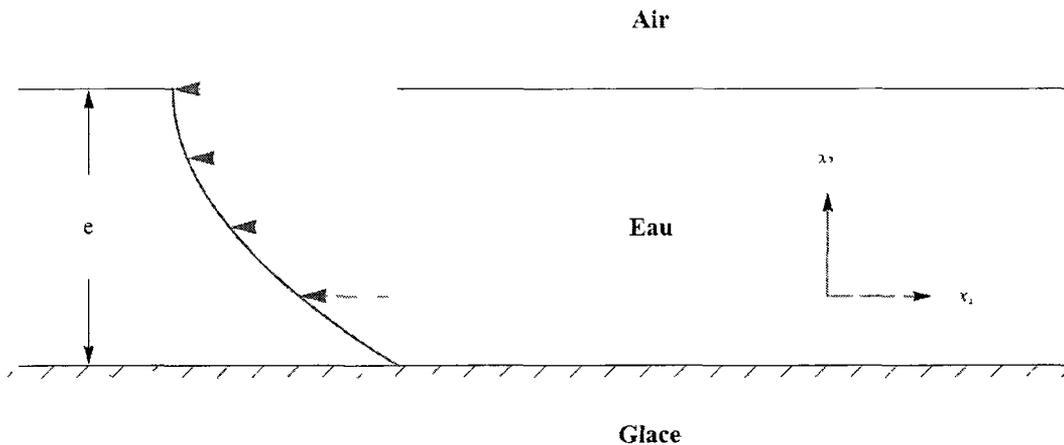
$$-\Delta P_{eau} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial (x_2)^2}$$

par rapport à la variable x_2 où les constantes d'intégrations sont uniquement déterminées à partir des conditions frontières :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= 0 \text{ en } x_2 = e. \\ v_1 &= 0 \text{ en } x_2 = 0. \end{aligned}$$

Le profil parabolique de vitesse ainsi obtenu est illustrée et nous permet de dégager les principes importants.

Figure 6.1 – Profil de vitesse de l'écoulement le long des dendrites



D'une part, en vertu de la relation de Laplace-Young, les variations de la courbure moyenne de l'interface capillaire induisent des différences de pressions, qui à leur tour favorisent la migration de l'eau vers le centre du flocon. Mais rappelons que la courbure de la pellicule est induite par celle de la glace. Donc, la géométrie, plus précisément la courbure de la glace, permet en soi d'expliquer les principales facettes de la dynamique de l'eau qui favorise sa coalescence en bulle au centre du flocon. Ceci constitue une réaction naturelle du système aux différences de courbure de la structure cristalline.

D'autre part, la contrainte visqueuse subit par la glace semble être un des facteurs favorisant sa transition en phase liquide. En effet, nous observons expérimentalement que la glace se polit et fond plus expressément une fois que la pellicule d'eau l'englobe. Nous croyons ceci dû aux forces de viscosité du liquide qui exercent une force supplémentaire sur la structure cristalline.

Il nous semble d'autant plus important poursuivre notre étude de la pellicule d'eau pour y inclure les effets de la transition au niveau topologique lorsque l'eau se connecte pour former une variété homéomorphe à une 3-boule avec un trou. Pour ce faire, nous devons ré-écrire les équations constitutives dans un langage plus moderne à l'aide des groupes de Lie. Nous espérons montrer le rôle du tenseur de courbure du fluide comme source de stress à la glace favorisant sa transition de phase. Autrement dit, montrer que la topologie sphérique induit à elle seule des contraintes hydrodynamiques qui se répercutent en source de stress sur le cristal qui favorise son passage en phase liquide.

CHAPITRE 7

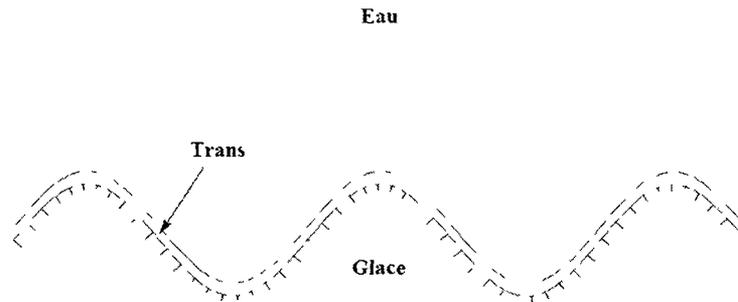
Fonte de la glace

Dans cette section, nous souhaitons faire la lumière sur quelques mécanismes sous-jacents au processus de fonte. Nous montrons premièrement comment les forces visqueuses dues à l'hydrodynamique entrent en jeu pour ensuite mettre en évidence le rôle de la géométrie en tant que mécanisme de frustration du réseau cristallin pendant sa fusion. Pour ce faire nous supposons que la glace en transition vers la phase liquide produit une couche intermédiaire pouvant aller d'une épaisseur de quelques atomes de matière en transition de phase à une centaine de nanomètres. Nous voyons cette couche de transition comme un réseau cristallin moins complet, affaibli par des défauts telles les dislocations, et par conséquent ne possédant pas la même solidité que la glace au coeur du flocon. De telles hypothèses furent étudiées numériquement par [DRP05].

7.1 Tension de surface

Une des raisons physiques du passage des molécules de la couche en transition à la phase liquide est la différence de tensions superficielles entre les deux milieux. En effet, la

Figure 7.1 – Couche de matière en transition



géométrie de l'interface entre ces deux phases est la même. Par contre, chacune possède une tension de surface qui lui est propre, provenant d'une différence dans leur densité moléculaire ainsi que dans la nature des interactions dues aux défauts. Nous représentons donc la disparité dans l'énergie de surface par :

$$E_{eau} = \gamma_{eau} \int dA$$
$$E_{trans} = \gamma_{trans} \int dA$$

qui sert de force motrice favorisant le passage des molécules de la couche en transition en phase liquide.

7.2 Hydrodynamique

Une autre raison derrière la fonte de la glace semble provenir de l'eau. Nos motivations sont expérimentales : le cristal semble se polir et fondre beaucoup plus lorsque l'eau est connectée. Rappelons que c'est aussi à ce moment que la dynamique de l'eau dûe

aux différences de pression internes est initiée. Ainsi, nous croyons que la contrainte visqueuse de l'eau, due aux gradients verticaux de vitesse, peut littéralement arracher par cisaillement la couche en transition.

De plus, la pellicule d'eau devient une 3-variété topologiquement équivalente à une 3-boule avec un trou lorsqu'elle se connecte et englobe la glace. Nous croyons que cette nouvelle configuration géométrique implique l'existence d'un stress supplémentaire à la glace. En particulier, nous croyons que seule la donnée de la topologie permet de démontrer l'existence de flots dont les composantes normales agissent sur la structure cristalline par l'entremise de force de compression.

7.3 Courbure intrinsèque du substrat

Nous nous intéressons maintenant au rôle de la courbure du substrat de glace pendant la transition de phase. Remarquons qu'étant donné son épaisseur, la matière en transition doit épouser le relief de la structure cristalline. Nous croyons que la géométrie de la surface, plus précisément sa courbure intrinsèque, sert de champ préconisant l'ordre (ordering field) dans l'alignement de la matière de la couche en transition et sert par conséquent de force motrice dans la fusion. Plus concrètement, en plus du désordre cinétique, nous estimons que la courbure de la glace déforme la membrane en l'étirant de sa configuration plane privilégiée. Il en résulte que le principal mode de déformation de la couche en transition consiste en déplacements sur la surface, et donc cette dernière ne peut que compenser par une plus ou moins grande compression de ses molécules.

Pour s'en convaincre, nous procédons par contradiction en essayant de recouvrir notre surface de façon uniforme et sans compression [KNSV09], [VLN07]. À cette fin, nous choisissons arbitrairement une courbe Φ représentant une infime colonne de matière sur

la surface, que nous déplacerons sur la surface de façon à la revêtir uniformément.

Soit $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ la surface sur laquelle repose le substrat en transition. Nous notons par \mathbf{N} le vecteur unitaire normal à la surface et par \mathbf{t} le vecteur unitaire tangent aux colonnes sur la surface. Nous définissons le vecteur binormale $\mathbf{n} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$, tangent à la surface.

Dans cette situation, les colonnes de la matière en transition sont convenablement décrites par les courbes de niveau $\Phi(u^1, u^2) = m$ où m est un entier numérotant les colonnes. Cette situation est sans perte de généralité étant donné que nous choisissons arbitrairement la courbe initiale Φ .

Premièrement, \mathbf{n} est donc parallèle à $\nabla\Phi$ dans le plan tangent de la surface. Mentionnons que ∇ agit aussi sur la surface et étant donné que Φ est une fonction scalaire, $\nabla\Phi$ coïncide avec la dérivée covariante. Comme d'habitude, $\nabla\Phi$ est normal aux courbes de niveau de Φ , qui décrivent chacune des colonnes.

La norme de $\nabla\Phi$ sur la surface est donc :

$$|\nabla\Phi|^2 = \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi$$

ou encore :

$$|\nabla\Phi| = \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi.$$

avec \mathbf{n} donné par

$$n^i = g^{ij} \frac{\Phi_j}{|\nabla\Phi|}.$$

Il s'agit précisément de la façon dont nous construirions les colonnes espacées également. Nous commençons avec une colonne (une courbe sur la surface) $\Phi = 0$. À partir de chaque point sur cette courbe, nous nous déplaçons (par exemple) d'une unité de distance sur la surface dans la direction de \mathbf{n} sur la surface. La courbe déplacée ainsi obtenue nous

donnerait dans ce cas la colonne $\Phi = 1$.

Nous illustrons à titre d'exemple la sphère avec comme courbe initiale $\Phi = 0$ à l'équateur. Quelques normales (en pointillé) aux courbes Φ (en couleur) sont exhibés en (Fig. 7.2). Les géodésiques convergent au pôle nord, correspondant à une singularité dans cet agencement de la matière.

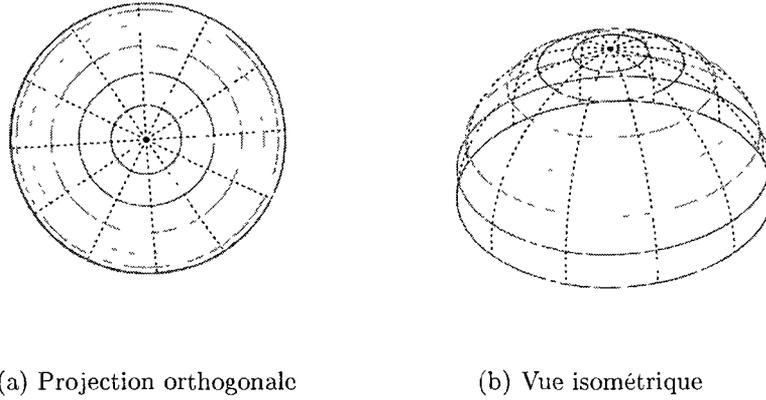


Figure 7.2 – Agencement des colonnes à partir de l'équateur. Les géodésiques (en pointillés) convergent au pôle nord.

De plus, nous voulons une configuration sans compression, autrement dit que les colonnes ne se devancent pas. Pour ce faire, considérons la courbe intégrale $t(s, \mathbf{x}_0)$ représentant l'endroit sur la surface après avoir parcouru une distance $s \ll 1$ sur la géodésique qui commence perpendiculaire à la courbe $\Phi = 0$ en \mathbf{x}_0 , et ce pour tout \mathbf{x}_0 sur la courbe $\Phi = 0$. À partir de chaque point \mathbf{x}_0 qui se trouve sur la courbe $\Phi = 0$ nous déterminons ainsi un point sur la courbe (ou colonne) suivante.

Si les colonnes sont sans compression, on a que :

$$\Phi(\mathbf{x}_0 + t(s, \mathbf{x}_0)) = s \quad \forall \mathbf{x}_0 \text{ sur } \Phi = 0.$$

En différentiant le long de $t(s, \mathbf{x})$ nous obtenons :

$$\frac{d}{ds}\Phi(\mathbf{x}_0 + t(s, \mathbf{x}_0)) = \frac{d}{ds}s,$$

où encore :

$$\frac{dt}{ds} \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}_0 + t(s, \mathbf{x}_0)) = 1. \quad (7.1)$$

Remarquons que $\frac{dt}{ds}$ est le transport parallèle du vecteur \mathbf{n} .

En effet, $t(s, \mathbf{x})$ est une géodésique, donc $\frac{dt}{ds}$ satisfait à l'équation géodésique :

$$\nabla_{\frac{dt}{ds}} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (7.2)$$

et $\frac{dt}{ds}$ coïncide justement avec \mathbf{n} en \mathbf{x}_0 sur $\Phi = 0$.

Il en résulte donc que nous nous assurons de se déplacer perpendiculairement aux courbes subséquentement générées ou autrement dit, que \mathbf{n} décrit des géodésiques.

En conclusion, les courbes de niveau de Φ sont traversés perpendiculairement, quadrillant ainsi la surface. Dans un agencement uniforme et sans compression, les normales aux colonnes sont des géodésiques sur la surface.

Deuxièmement, nous constatons que dans le cas d'une surface courbée intrinsèquement, une telle configuration admet des singularités : les normales aux colonnes décrivent des géodésiques sur la surface qui s'intersecteront. Pour s'en convaincre, nous étudions localement deux géodésiques 'adjacentes', γ_1 et γ_2 . Considérons \mathbf{J} le champ de Jacobi de la première géodésique vers la seconde. Autrement dit, \mathbf{J} nous donne la famille de géodésiques reliant perpendiculairement chaque point de γ_1 à un de γ_2 .

Dans un voisinage de $\gamma_1(0)$, nous avons l'approximation linéaire suivante :

$$\gamma_2 \approx \gamma_1 + \epsilon \mathbf{J}. \quad (7.3)$$

Autrement dit, \mathbf{J} est une mesure de la distance entre γ_1 et γ_2 . Étant donné que la seconde variation de longueur des géodésiques est nulle [Spi99], nous avons que \mathbf{J} satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial s^2} = -K \mathbf{J}.$$

où s est le paramètre naturel de γ_1 . Donc, lorsque $K < 0$, les géodésiques auront tendance à s'éloigner l'une de l'autre, tandis qu'une courbure gaussienne positive, $K > 0$, les incitera à converger. Ceci implique que les normales aux colonnes risquent de s'entrecouper, formant des singularités dans la couche en transition. Ces dernières sont habituellement associés à un haut coût énergétique et nous croyons que la matière s'arrange de façon à chercher un compromis en induisant des énergies de compression dans la région avoisinante. Dans les deux cas, ces singularités et inévitables compressions sont coûteuses énergétiquement et seront les premières à disparaître lors du passage en phase liquide.

En conclusion, la surface sert donc de champ favorisant l'ordre en tant que mécanisme géométrique de déformation. La courbure agit en tant que source de stress tangent sur la couche en transition et favorise son passage en la phase liquide. De plus, il a été montré [CL95], [VLN07], que le même type de frustration géométrique intervient au niveau de la structure cristalline. Les endroits à haute courbure gaussienne compensent par des disclinations et interstices. Il en résulte un réseau cristallin affaibli en ces endroits et par conséquent plus prompt à initier sa transition en phase liquide. Nous témoignons ces phénomènes lors de la fonte du flocon car les endroits à haute courbure gaussienne, c'est-à-dire le bout des dendrites et échardes, sont les premiers à fondre.

7.3.1 Flot de Ricci

Nous terminons la section en proposant une façon de tenir compte de l'effet de la géométrie du substrat sur la transition de phase. Tel qu'exhibé dans la section précédente, la courbure intrinsèque d'une surface semble y jouer un rôle important. Typiquement, la courbure gaussienne est associée aux déformations de types élastiques d'étirement, et la courbure moyenne de type flexion ou torsion. Mais la courbure gaussienne ne dépend que de la métrique, et non pas de la réalisation de la 2-variété topologique dans \mathbb{E}^n . Sous cet angle, toute surface compacte peut être vue comme une sphère munie d'une métrique à courbure non constante plongée dans l'espace euclidien. Ainsi une couche en transition peut être considérée une sphère munie d'une métrique à courbure non constante. De plus, nous attribuons justement la courbure de la métrique aux étirements de la couche en transition. Il nous semble plausible que pendant le court séjour d'une couche de matière en transition, son réseau se voit déformé selon le flot de Ricci.

Soit (M^2, g) une 2-variété, alors le flot de Ricci est :

$$\frac{\partial}{\partial t} g = -Ric = -2K g. \quad (7.4)$$

Par l'entremise d'une déformation de sa métrique, le flot de Ricci déforme la variété en uniformisant la courbure de sa métrique. Quoiqu'une solution explicite est en général hors de question, R. Hamilton (1988), réussit tout de même à démontrer que ce processus converge vers une métrique à courbure constante [CK04].

Dans le cas d'une surface compacte, le flot de Ricci converge vers la sphère euclidienne avant de se réduire en un point. Ceci nous rappelle le processus de fonte de la glace jusqu'à sa disparition au centre du flocon.

Sous le flot de Ricci, l'élément d'aire de la surface évolue selon [CK04] :

$$\frac{\partial}{\partial t}dA = -KdA. \quad (7.5)$$

En discrétisant que le réseau de matière en transition, et ce faisant déterminant une métrique discrète sur la sphère, nous croyons que l'équation (Eq. 7.5) tient compte du processus d'étirement sur la surface en transition exhibé dans la section (Sect. 7.3). En effet, les endroits où la courbure gaussienne est positive ont comme effet de compacter la couche en transition, rapetissant l'élément d'aire. Similairement, les endroits à courbure gaussienne négative étirent le réseau et l'élément d'aire qui en résulte.

Bien entendu, rien ne garantit à priori la réalisation, d'une métrique, discrète ou continue, en tant que surface dans l'espace euclidien. Il s'agit d'une première embûche à l'étude analytique du problème. Ceci étant dit, en laissant évoluer la surface discrète pendant un court interval de temps selon le flot de Ricci discret est envisageable en pratique numériquement. Nous croyons que ceci permettrait de simuler l'effet du substrat de glace sur la couche en transition.

La seconde difficulté rencontrée provient des singularités que pourrait développer la surface lors de sa déformation. À cet effet, G. Perelman a refusé en 2006 la médaille Fields qui lui a été offerte suite à ses travaux élucidant le caractère des singularités que la métrique développe durant le flot de Ricci.

Ces singularités sont justement les bienvenues : la glace se brise lorsque sa structure devient trop faible. Nous voulons étudier par l'entremise des singularités du flot de Ricci, le caractère de celles que subit la couche en transition pendant qu'elle se scinde.

Une autre raison pour laquelle nous croyons le flot de Ricci approprié est qu'il agit sur l'espace tangent de notre surface. Ceci correspond au processus mécano-physique de l'étirement [Cal88], agissant de façon tangent à notre surface. Similairement, une variation normale d'une surface capillaire mimique la force résultante de la différence de

pression entre les deux fluides et l'élément d'aire évolue selon (Eq. 8.20).

En conclusion, nous retrouvons dans le flot de Ricci les caractéristiques physiques importante du processus de compression et étirement de la couche en transition. Par l'entremise d'une déformation tangente à la surface selon la courbure intrinsèque, les différences de courbures sont estompées et font converger la surface vers la sphère [CK04]. Le flot de Ricci incorpore tous les éléments de la phénoménologie et pour cette raison nous trouvons possiblement pertinent comme explication du rôle sous-jacent de la géométrie à la fusion d'un flocon de neige.

CONCLUSION

En terminant, nous espérons avoir mis de l'avant les ingrédients physiques et principes mathématiques qui expliquent l'évolution du flocon vers la sphère lors de sa fonte. Il s'agit avant tout d'un phénomène capillaire à petite échelle étant donné que les forces de tension superficielle y sont dominantes. Pendant la première étape de la fusion du flocon, une mince pellicule d'eau englobe peu à peu le cristal. À ce moment, cette dernière effectue une transition topologique passant de gouttellettes non connexes à une 3 variété avec bords (glace et air). Ceci a influence significative le processus de fusion pour les raisons suivantes : D'une part, les différences de pression au travers de la surface capillaires, favorisent les écoulements d'eau vers le centre du flocon pour former un capuchon sphérique. En vertu de la relation de Laplace-Young, ces différences de pression sont le résultat des différences de courbure moyenne à l'interface, induites par la structure cristalline. En quelque sorte, l'asymétrie de la structure de glace est la raison pour laquelle l'eau adopte une forme symétrique au centre, un signe précurseur du sort réservé aux flocons.

D'autre part, nous croyons que cette nouvelle configuration topologique permet à elle seule l'existence de stresses supplémentaires à la structure cristalline, provenant des écoulements d'eau contraints par sa présence. Toujours est-il que l'écoulement rampant de l'eau sur les dendrites nous permet de démontrer l'existence d'une contrainte visqueuse sur la couche de glace en transition, favorisant son passage en phase liquide.

Si les défauts de la structure de glace empêchent le flot de l'eau des dendrites vers le centre, nous témoignons d'une formation aqueuse en équilibre métastable qui nous rappelle les onduloïdes. En effet, en vertu de la relation de Laplace-Young, les surfaces capillaires à l'équilibre ont tendance à adopter un courbure moyenne constante. Ainsi, les agglomérations d'eau ont tendances à opter pour une forme sphérique ou onduloïdale. Ceci étant dit, nous étudions un phénomène hors équilibre, qui nous croyons n'est pas totalement tenu en compte par les éléments de la capillarité. Expérimentalement, nous observons une certaine disparité entre ces formations et les surface capillaires classiques que nous expliquons par le fait suivant.

À partir de la seconde étape de la fonte, l'eau est très visqueuse étant donné son épaisseur et la rugosité du crystal. Pour cette raison, nous croyons l'interface eau/air décrit une surface capillaire plus contrainte que d'habitude, soumise au forces de flexion du cristal qui la déforme de sa configuration privilégié. À cet effet, nous avons introduit quelques méthodes (qui se sont avérées équivalentes) pour tenir compte du coût énergétique associé à la flexion de la surface.

Nous voulions pénaliser énergétiquement les endroits fléchis ainsi que de mesurer la déviation de la pellicule d'eau de sa configuration d'équilibre ; la sphère. Ces considérations nous ont conduits vers l'hamiltonien de la section (Sect. 5). Ce dernier incorpore tous les ingrédients de la phénoménologie (aire, volume, courbure) et nous fournit un fil conducteur nous permettant de quantifier l'augmentation de symétrie du système. En effet, l'énergie totale décrite par (Eq. 5.14) diminue pour atteindre son minimum lorsque la surface capillaire converge vers la sphère.

Nous aimerions calculer les composantes du tenseur de stress qui résulte afin de tracer un parallèle avec les forces mécano-physiques découlant de la situation particulière. Ceci nous guidera dans la description analytique plus précise de la contribution énergétique de la courbure de la surface. D'un point de vue pratique, nous testerons localement notre

théorie dans le cas où la symétrie de la situation nous permet de considérer une courbe de profil pour décrire la pellicule d'eau. C'est le cas des pseudo-onduloides sur les dendrites ou du capuchon sphérique au centre et nous nous retrouvons à étudier les courbes connues sous le nom d'elastica.

La courbure de la glace joue aussi un rôle durant sa transition en phase liquide. D'une part, il est connu de la théorie de cristal que les endroits à hautes courbure gaussiennes sont structurellement instables car ils compensent par disclinations et interstices. D'autre part, nous avons montré que la courbure intrinsèque du substrat de glace agit en tant que champs favorisant l'ordre sur la matière en transition vers la phase liquide en plus de lui induire des énergies de compression. Il nous semble plausible de modéliser l'effet d'étirement sur la couche en transition par le flot de Ricci. Il en résulte que les endroits à courbure gaussienne élevées seront les premiers à disparaître, en accordance avec nos observations expérimentales : les échardes du cristal et extrémités des dendrites fondent en premier.

En conclusion, le flocon de neige en fonte cherche à estomper les différences de courbure, autant au niveau de la structure cristalline que de l'interface capillaire. Autrement dit, la géométrie de la situation physique contient tous les ingrédients pour assurer la convergence du flocon vers la sphère .

CHAPITRE 8

Annexe mathématique

L'annexe est constituée de deux parties. La première résume les éléments de la géométrie contemporaine essentiels à notre discussion. Dans la seconde partie, nous utilisons ces notions théoriques dans nos travaux sur les déformations de surface, principalement afin de démontrer de façon originale et autosuffisante le théorème fondamental de la capillarité.

Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension n et g sa métrique.

Nous supposons $M^n = M$ orientable et rappelons que g est une forme quadratique bilinéaire symétrique définie positive variant continuellement sur M . Plus précisément :

Définition 8.1. *En tout point $p \in M$, g est l'application définie par*

$$g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_g$$

Considérons $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \dots, x^n)$ une carte locale autour d'un point $p \in M$. Autrement dit, \mathbf{x} est un homéomorphisme $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ définissant le système de coordonnées dans un voisinage U contenant p . Ce faisant, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ sert de base naturelle à

$T_p M$ en tant qu'espace vectoriel. Nous obtenons en la base duale aux $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ une description locale de g .

Définition 8.2. *La première forme fondamentale, ou métrique, induite sur M par \mathbf{x} , est la matrice $g_{ij} = (g)_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$), ayant pour composantes*

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle. \quad (8.1)$$

Pour $\mathbf{w} = (w^1, \dots, w^n)$ et $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) \in T_p M$ nous retrouvons l'expression plus familière :

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_g = g_{ij} w^i v^j. \quad (8.2)$$

Lorsque $M = \mathbb{E}^n$, $g_{ij} = \delta_{ij}$ et nous obtenons le produit scalaire habituel.

Nous aurions pu définir de façon équivalente la métrique g comme un $\binom{0}{2}$ champ de tenseurs covariants sur M . En effet, il y a isomorphisme entre le dual de l'espace E , noté E^* et l'ensemble des applications linéaires à valeur réelle sur E . Autrement dit, tout élément de E^* peut être considéré comme une application linéaire $E \rightarrow \mathbb{R}$. Lorsque $E = TM$ nous observons la correspondance classique entre éléments de T^*M , les covecteurs ou autrement dit les $\binom{0}{1}$ tenseurs, et fonctionnelles linéaires agissant sur l'espace tangent. Par exemple, pour $\mathbf{w} \in T_p M$ fixé, nous pouvons former le $\binom{0}{1}$ tenseur covariant w_j , ou encore l'application

$$W : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (8.3)$$

$$\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_g \quad (8.4)$$

définie en coordonnées locales par $w_j v^j$ où $w_j = g_{ij} w^i$.

Ainsi, la métrique nous permet de transformer un vecteur contravariant w^i en un covecteur w_j , qui, dans cet exemple, agit sur les éléments de $T_p M$ en calculant le produit scalaire.

Dans le cas général, mais sans pour autant entrer dans les détails, la métrique nous fournit une façon de transformer un tenseur de type $\binom{l}{k}$ en un tenseur de type $\binom{l-1}{k+1}$ ou $\binom{l+1}{k-1}$. Cette correspondance est dite l'isomorphisme musicale et est mieux connue comme abaisser et monter des indices.

D'un point de vue plus géométrique, la métrique rend compte des distances sur M via le produit scalaire et nous pouvons parler de :

Définition 8.3. *L'élément d'aire de M est donné par :*

$$dA = \sqrt{\det g} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (8.5)$$

Nous croyons apte le moment de rappeler une propriété des matrices symétriques dont nous aurons de besoin :

Théorème 8.4. *Soit M une matrice symétrique définie positive de dimension m par m . Alors :*

$$\log[\det[M]] = \text{tr}[\log[M]] \quad (8.6)$$

Nous investigons (8.17) les ramifications de cette construction au niveau de la courbure de (M, g) . D'un point de vue physique des membranes [Cal88], [LL59b], nous associons la métrique aux énergies dues à l'étirement d'un facteur $\sqrt{\det g}$ l'élément d'aire de \mathbb{E}^2 .

Pour le moment, définissons la notion de différentiation de champs de vecteurs sur M .

Définition 8.5. *Une connection affine, [DP00], [DFN92], est une application*

$$\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \mapsto \nabla(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$$

satisfaisant à

$$\begin{aligned}\nabla_{f\mathbf{w}+g\mathbf{v}} &= f\nabla_{\mathbf{w}} + g\nabla_{\mathbf{v}} \\ \nabla_{\mathbf{w}}(f\mathbf{v}) &= f\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v} + (\mathbf{w}f)\mathbf{v}\end{aligned}$$

pour toute fonction $f, g \in \mathcal{F}$ et champs de vecteurs $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM$.

On dit que $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ est la dérivée covariante de \mathbf{v} dans la direction de \mathbf{w} selon ∇ . Ainsi, ∇ est un opérateur différentiel décrivant la manière dont les vecteurs sont transportés sur M et peut être interprété comme étant une généralisation de la dérivée directionnelle.

En tout point $p \in M$, il est donc possible de calculer $\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$ s'il nous est prescrit \mathbf{v} et ses valeurs le long de la courbe $c(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = \mathbf{w}$ pour tout $0 < \epsilon \ll 1$.

Considérons par exemple la 2-sphère de rayon r plongée dans l'espace euclidien habituel, S_r^2 .

Fixons pour commencer un point $p \in S_r^2$. Soient \mathbf{n} son vecteur normal habituel de S_r^2 variant continuellement dans un voisinage contenant p et $\mathbf{w} \in T_p S_r^2$. Prenons une courbe $c(t)$ sur S_r^2 telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = \mathbf{w}$. Alors,

$$\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{n} = \frac{d}{dt}\mathbf{n} \circ c(t)|_{t=0},$$

où

$$\mathbf{n} \circ c(t) = \mathbf{n}(c(t)) = \frac{c(\vec{t})}{\|c(t)\|} = \frac{c(\vec{t})}{r}.$$

En substituant dans l'équation précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{n} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{c(\vec{t})}{r} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{1}{r} \frac{dc(\vec{t})}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \frac{1}{r} c'(0).
\end{aligned}$$

Autrement dit, la connection

$$\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{w} \tag{8.7}$$

est facilement calculable en tout point à partir de la donnée d'une courbe sur la sphère ou de son vecteur tangent. Bien entendu, la connection est définie dans le voisinage de chaque point même si nous nous intéressons en sa valeur en un point. Pour cette raison, nous sous-entendons généralement la continuité des vecteurs et courbes dans un voisinage lorsque nous référons à des propriétés ponctuelles des opérateurs différentiels.

Nous nous intéressons maintenant au transport de vecteurs tangents à notre variété.

Définition 8.6. *Un champ de vecteur \mathbf{v} le long d'une courbe $c(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ est dit parallèle si*

$$\nabla_{c'(t)} \mathbf{v} = 0 \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Plus généralement, étant donné $c(t)$ et \mathbf{v} tels que définis ci-haut :

Théorème 8.7. *Il existe un unique champ de vecteur $\mathbf{v}(t)$ avec $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}$, dit résultant du transport parallèle de $\mathbf{v} \in T_p M$ le long de c , tel que $\nabla_{c'(t)} \mathbf{v}(t) = 0$ pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Ainsi, étant donné $\mathbf{v} \in T_p M$ et une courbe c passant par p , on appelle, [DFN92] [DP00], $\tau_c = \tau_{c(t)}$ l'unique transport parallèle de \mathbf{v} le long de c :

$$\tau_{c(t)} : T_p M \rightarrow T_{c(t)} M$$

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}(t)$$

Étant donné deux points $p, q \in M$, les vecteurs \mathbf{v} et $\mathbf{w} \in T_pM$ et T_qM respectivement sont dit parallèles s'il existe une courbe c de p à q tel que τ_c décrive le transport parallèle de \mathbf{v} à \mathbf{w} .

Définition 8.8. Une connection ∇ sur M est dite compatible avec g si en tout point $p \in M$, les transports parallèles τ_c qu'elle définit sont des isométries, c'est-à-dire :

$$\langle \tau_c \mathbf{w}, \tau_c \mathbf{v} \rangle_g = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_g$$

le long de toute courbe $c \in M$ passant par p et $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_pM$.

Cette définition a pour conséquence d'assurer que les vecteurs sont déplacés de façon à rester sur TM , sans glisser ni tourner. La richesse structurelle de cette restriction naturelle se dévoile de façon succincte dans le lemme suivant :

Lemme 8.9. La connection ∇ sur M est compatible avec la métrique g si et seulement si

$$\mathbf{w} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g = \langle \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_g + \langle \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \rangle_g$$

pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in TM$.

Le lecteur aguerri remarquera la ressemblance avec la règle de dérivation de Leibniz.

Dorénavant, nous adoptons la convention suivante :

Définition 8.10. Nous notons par ∇ la connection de Levi-Civita, l'unique connection symétrique compatible avec g .

Lemme 8.11. *La connection de Levi-Civita ∇ est totalement déterminée par la métrique et s'exprime en coordonnées locales à l'aide de la première forme fondamentale g_{ij} et ses dérivés premières. [DFN92]*

Informellement, ∇ permet de définir la différentiation sur (M, g) similairement à celle dans \mathbb{E}^n . Pour cette raison, nous utiliserons les termes dérivée covariante et connection de Levi-Civita sans distinction. Les détails de la nature tensorielle de l'opérateur de dérivation covariante peuvent être retrouvés dans [DP00] et [DFN92]. La difficulté supplémentaire dans cette construction vient du fait qu'en général la variété (M, g) est courbée. Ce faisant, le transport parallèle de vecteurs tangents ne consiste plus en une simple translation. Il en résulte aussi que la notion de ligne droite dans \mathbb{E}^n doit être généralisée à celle de géodésique sur notre variété :

Définition 8.12. *Une courbe $c(t)$ de M est une géodésique si elle décrit le transport parallèle de son vecteur tangent, c'est-à-dire :*

$$\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0.$$

La connection de Levi-Civita permet justement de rendre compte de cette courbure d'un point de vue analytique en décrivant la manière dont les vecteurs tangents doivent être transportés sur M . Considérons par exemple deux points P et Q d'une variété courbée. Le résultat du transport parallèle d'un vecteur tangent de P à Q varie selon le chemin emprunté. Par contraste, le résultat du déplacement d'un vecteur tangent à \mathbb{E}^n d'un point P à Q est indépendant du chemin reliant ces deux points. Ceci motive la description suivante de la courbure de (M, g) :

Définition 8.13. *Le tenseur de Riemann est l'application*

$$R : TM \times TM \rightarrow L(TM; TM)$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto R(\mathbf{v}, \mathbf{w}) : \mathbf{t} \mapsto R(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{t}$$

définie par :

$$R(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{t} = \nabla_{\mathbf{v}}(\nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{t}) - \nabla_{\mathbf{w}}(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{t}) - \nabla_{[\mathbf{v}\mathbf{w}]}\mathbf{t}$$

et peut-être aussi interprété comme un $\binom{1}{3}$ champ de tenseurs sur M en raison de l'isomorphisme naturel entre $L(TM; TM)$ et $T^*M \otimes TM$. De plus, on montre que la valeur de la courbure en p ne dépend que de la valeur des vecteurs tangents au point p et non de leur extension dans un voisinage de T_pM . En effet, c'est la variété M qui est courbée et non une section de son espace tangent [DP00].

Étant donné un système de coordonnées locales, les composantes $\{R_{jkl}^i\}$ pour $(i, j, k, l = 1, \dots, n)$ de R sont données par

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

On abaisse les indices comme il est coutume avec la métrique pour obtenir les composantes totalement covariantes :

$$g^{hi} R_{jkl}^i = R_{ijkl}$$

Nous résumons dans le lemme qui suit les propriétés de R qui découlent de sa construction géométrique et de la structure de ∇ .

Lemme 8.14.

$$(i) \quad R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

$$(ii) R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

$$(iii) R_{ijkl} + R_{klij} + R_{iljk} = 0$$

$$(iv) R_{ijkl} = R_{klij}$$

En tenant compte de ces symétries, nous obtenons :

Lemme 8.15. [DP00] *En tout point $p \in M^n$, l'espace des tenseurs de courbure R est de dimension $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$.*

D'une part, il en résulte que pour $n \geq 3$, il n'existe pas de choix naturel de base en fonction de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^n$.

D'autre part, dans le cas où $n = 2$ (M est une surface), le lemme 8.15 implique que R est déterminée par un nombre. Historiquement, Gauss fut le premier à formaliser la courbure intrinsèque d'une surface dans son fameux *Theorema Egregium*. Le point de vue tensoriel proposé ci-haut fut développé dans les années suivant les travaux de Riemann. Quoique plus générale, cette approche semble plus naturelle pour expliquer pourquoi nous devons considérer un tenseur de rang 4 plutôt qu'un nombre lorsque n passe de 2 à 3.

Théorème 8.16. *Soit (M^n, g) une variété telle que définie précédemment. Alors le tenseur de courbure de Riemann est uniquement déterminé par la métrique g .*

Nous évitons les détails plutôt techniques ainsi que quelques subtilités dans la construction des tenseurs pour offrir l'explication suivante : La connection de Levi-Civita, et par conséquent le tenseur de Riemann R , sont uniquement déterminés lorsque l'on exige le transport parallèle des vecteurs tangents.

Pour faciliter l'étude de la courbure des variétés, certaines contractions du tenseur de courbure sont de mise. Pour des raisons de simplicité, nous donnons les définitions en coordonnées locales et dirigeons le lecteur intéressé vers [DP00] pour les détails de leur

construction géométrique. À l'aide de la notation tensorielle introduite ci-haut, nous définissons en tout point $p \in (M^n, g)$:

Définition 8.17.

(i) La courbure scalaire est le nombre :

$$\mathcal{R} = g^{ij} R_{jk}^k \quad (8.8)$$

(ii) Le $\binom{0}{2}$ tenseur de Ricci : $(Ric)_{ij} = R_{ij}$, est la contraction :

$$R_{ij} = R_{ikj}^k \quad (8.9)$$

Le tenseur de Ricci est une contraction naturelle ou canonique du tenseur de courbure dans le sens où toute autre est soit triviale, ou bien expressible en terme du tenseur de Ricci [DP00]. Dans le cas où $n = 2$, le tenseur de courbure se voit considérablement simplifié et le tenseur de Ricci est donné par :

Lemme 8.18.

$$R_{ij} = \mathcal{R}g_{ij}. \quad (8.10)$$

De plus, par respect envers Gauss, nous proposons la définition originale de courbure intrinsèque en tout point p de (M^2, g) :

Définition 8.19. L'application de Gauss $G : M^2 \rightarrow S^2$ associe chaque point p à son vecteur normal \mathbf{n} sur la sphère unitaire. La courbure gaussienne de M^2 au point p , notée $K(p)$, est le Jacobien de G évalué en p . Elle représente le ratio entre un élément d'aire infinitésimal autour de $p \in M^2$ et son image sur S^2 .

Étant donné une légère différences entre les définitions, la correspondance entre la courbure gaussienne et scalaire d'une surface est donnée par :

$$\mathcal{R} = 2K \quad (8.11)$$

La preuve s'appuie sur l'étroite relation entre la courbure gaussienne d'une surface et son élément d'aire, qui lui ne dépends que de la métrique. De façon plus générale, nous pouvons construire le tenseur de courbure d'une variété avec comme seule donnée le couple (M^n, g) .

Théorème 8.20. *Soit (M^2, g) une surface compacte sans bord. Alors*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M) \quad (8.12)$$

où $\chi(M)$ est l'invariant topologique appelé caractéristique d'Euler.

La courbure scalaire d'une hypersurface ne dépends que de la donnée d'une topologie et d'une métrique. Elle ne dépend pas de leur réalisation locale (e.g. immersion dans un espace ambiant de dimension supérieure) en tant que tel, contrairement à la prochaine notion de courbure que nous souhaitons étudier. Nous parlerons plutôt de courbure extrinsèque, faisant allusion à comment la variété est courbée par son plongement dans \mathbb{E}^m . À cette fin, nous définissons la seconde forme fondamentale de M^n .

Définition 8.21. *Soit $p \in M^n$ et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur de M^n défini dans un voisinage de p . Alors, la seconde forme fondamentale de M^n , note h , est l'application bilinéaire symétrique :*

$$\begin{aligned} h : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{n} \rangle \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant une définition plus pratique en terme d'un système de coordonnées. Pour se faire, il nous faut considérer une carte locale $\mathbf{x}(x^1, \dots, x^n)$ dans le voisinage d'un point p de M^n .

Définition 8.22. La seconde forme fondamentale induite sur M^n par \mathbf{x} , $h = (h)_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$) a pour composantes

$$h_{ij} = -\left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x^i \partial x^j}, \mathbf{n} \right\rangle$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal habituel de M^n .

Nous nous servirons aussi de la formulation équivalente suivante :

Lemme 8.23. Soit h tel que défini ci-haut. Alors

$$h_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^j} \right\rangle$$

Démonstration. Étant donné que \mathbf{n} est normal au plan tangent :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \mathbf{n} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x^i \partial x^j}, \mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^j} \right\rangle \end{aligned}$$

□

Dans le cas où M^n est une surface ($n = 2$), la construction de la seconde forme fondamentale est inspirée de la définition suivante :

Définition 8.24. Soit $c(t)$ une courbe paramétrisée naturellement sur M^2 , $p \in M^2$ un point de la courbe et \mathbf{n} le vecteur normal unitaire défini dans un voisinage de p . La courbure normale de $c(t)$ au point p , notée k_n , est la projection du vecteur $c''(t)$ sur la normale \mathbf{n} :

$$k_n = -\langle c'', \mathbf{n} \rangle$$

Nous en osons donc l'interprétation suivante : h représente la déviation de l'hypersurface M par rapport à son vecteur normal. Ou encore, la seconde forme fondamentale nous indique comment le vecteur normal varie sur l'hypersurface. Ce faisant, nous prenons compte de la façon dont notre variété est courbée par son plongement. La seconde forme fondamentale est bilinéaire en vertu des propriétés de la connection de Levi-Civita et symétrique étant donné que les dérivées partielles d'une surface lisse commutent.

Nous pouvons donc définir ;

Définition 8.25. *La courbure moyenne de M^n , notée H , est définie en tout point $p \in M^n$ par*

$$H = \frac{1}{n} \operatorname{tr}_g h \quad (8.13)$$

ou encore par composantes :

$$H = \frac{1}{n} g^{ij} h_{ij} \quad (8.14)$$

Nous justifions notre convention de signe de la seconde forme fondamentale par l'entremise de l'exemple suivant : considérons la 2-sphère S_r^2 dans l'espace euclidien habituel.

Fixons $p \in S_r^2$ et soit \mathbf{n} son vecteur normal habituel. Prenons $c(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_r^2$ une courbe sur S_r^2 telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = \mathbf{w} \in T_p S_r^2$. En rappelant le résultat (Eq. 8.7) du calcul de connection, la seconde forme fondamentale au point p est donnée par :

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{r} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

ou encore :

$$h = \frac{1}{r} g.$$

Il en résulte que la courbure moyenne est :

$$H = \frac{1}{2r} g^{ij} g_{ij} = \frac{1}{r}.$$

Notre définition a pour conséquence d'assurer que la courbure moyenne de la sphère soit naturellement positive.

Dans le cas où M^n est une surface ($n = 2$), les courbures extrinsèque et intrinsèque admettent une construction plus intuitive. Pour ce faire, considérons en tout point $p \in M$ la forme quadratique définie par :

$$\det(g - kh) = 0, \tag{8.15}$$

où g et h sont les première et seconde formes fondamentales de la surface M dans la carte locale \mathbf{x} . Les deux racines réelles, k_1 et k_2 , sont appelées les *courbures principales* de M au point p . Les courbures moyenne et gaussienne sont données par :

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{8.16}$$

$$K = k_1 k_2 \tag{8.17}$$

Dans ce qui suit, nous établissons les équations qui décrivent l'évolution des quantités géométriques lorsque la variété M est déformée selon son vecteur normal. Nous considérons cette déformation sur un intervalle de temps $0 \leq t \ll 1$ qui nous assure que la variété ne développe de singularités. Pour ce faire, soient $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3(t))$ la paramétrisation de la surface $M(t)$ et ϕ une fonction quelconque :

$$\phi = \phi_t : M(t) \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous sommes intéressés aux déformations de M de la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \phi \mathbf{n} \quad (8.18)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal à $M(t)$. Notons dans le cas particulier où $\phi \equiv -H$, nous retrouvons le flot selon la courbure moyenne. Nous commençons par calculer les équations d'évolution de la première forme fondamentale pour ensuite étudier le comportement de l'élément d'aire ainsi que le volume engendré par la déformation.

Lemme 8.26. *La métrique évolue selon :*

$$\frac{\partial}{\partial t} g = 2\phi h. \quad (8.19)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \phi \mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \phi \mathbf{n} \right\rangle \\ &= \phi \left\{ \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^j} \right\rangle \right\} \\ &= \phi \left\{ \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^j}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^j} \right\rangle \right\} \\ &= 2\phi \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i}, \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= 2\phi h_{ij} \end{aligned}$$

car la métrique est symétrique ($g_{ij} = g_{ji}$). □

Lemme 8.27. *L'élément d'aire évolue selon :*

$$\frac{\partial}{\partial t} dA = n\phi H dA. \quad (8.20)$$

Démonstration. L'élément d'aire est donné en coordonnées locales par :

$$dA = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2,$$

Nous commençons par calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \det g &= \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\exp[\log[\det g]]) \\ &= \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\exp[\text{tr}[\log g]]) \\ &= (\exp[\text{tr}[\log g]]) \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\text{tr}[\log g]) \\ &= (\det g) \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\text{tr}[\log g]) \\ &= (\det g) \text{tr} \left[\frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\log g) \right] \\ &= (\det g) \text{tr} \left[g^{-1} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} g \right] \\ &= (\det g) (g^{ik} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} g_{kl}) \\ &= (\det g) g^{ij}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \sqrt{\det g} = \frac{1}{2} (\sqrt{\det g}) g^{ij}.$$

Les composantes g_{ij} de la métrique varient eux aussi au cours de la déformation de la surface. Ainsi, en vertu de la règle de dérivation en chaîne de Leibniz :

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det g} = \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \sqrt{\det g} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t},$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det g} &= \frac{1}{2} (\sqrt{\det g}) (g^{ij}) \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2} (g^{ij}) \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right) \sqrt{\det g} \\
&= \frac{1}{2} (g^{ij}) (2\phi h_{ij}) \sqrt{\det g} \\
&= \phi (g^{ij} h_{ij}) \sqrt{\det g} \\
&= \phi (nH) \sqrt{\det g}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} dA &= \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2) \\
&= n\phi H \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2 \\
&= n\phi H dA
\end{aligned}$$

□

Afin d'effectuer les calculs de variation au sein de la surface, nous utilisons le théorème de divergence Gauss-Ostrogradsky qui nous permet d'inférer que la variation virtuelle est égale au flux du champ de perturbation au travers la surface [Ale05], [Fin86]. Au cours de la déformation (Eq. 8.18), le volume varie selon :

Lemme 8.28.

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t) = \int \phi dA \tag{8.21}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}V(t) &= \int \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t), \mathbf{n} \right\rangle dA \\ &= \int \langle \phi \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle dA \\ &= \int \phi \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle dA \\ &= \int \phi dA.\end{aligned}$$

□

Le champ gravitationnel agit sur le volume de fluide de densité ρ et pour cette raison, au cours de la déformation (Eq. 8.18), la dérivée de l'énergie gravitationnelle due au potentiel (par unité de masse) Ψ est donnée par :

Lemme 8.29.

$$\frac{\partial}{\partial t}E_G(t) = \rho \int \phi \Psi dA \quad (8.22)$$

Démonstration. La variation d'énergie gravitationnelle est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}E_G(t) &= \int \langle \Psi \rho \phi \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle dA \\ &= \rho \int \Psi \phi \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle dA \\ &= \rho \int \Psi \phi dA.\end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [Ale05] V.A. Aleksandrov. Sabitov's conjecture that volume is constant under infinite bending of a surface. *Siberian Mathematical Journal*, 5, 2005.
- [Cal88] C.R. Calladine. *Theory of shell structures*. Cambridge University Press, 1988.
- [CK04] B. Chow and D. Knopf. *The Ricci flow, an introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS Bookstore, 2004.
- [CL95] P.M. Chaikin and T.C. Lubenksy. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, 1995.
- [dBWQ02] P-G. deGennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, Paris, 2002.
- [DFN92] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern geometry - methods and applications : part I*. Springer, 1992.
- [DP00] C.T.J. Dodson and T. Poston. *Tensor geometry*. Springer, 2000.
- [DRP05] D. Donadio, P. Raiteri, and M. Parrinello. Topological defects and bulk melting of hexagonal ice. *J. Phys. Chem. B.*, 109, 2005.
- [Fin86] R. Finn. *Equilibrium capillary surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Fin02] R. Finn. 8 remarkable properties of capillary surfaces. *The mathematical Intelligencer*, 24(3) :21–33, 2002.
- [Gau06] M. Gauthier. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, juillet 2006.

- [KNSV09] R.D. Kamien, D.R. Nelson, C.D. Santangelo, and V. Vitelli. Extrinsic curvature, geometric optics and lamellar order on curved substrates. *Phys.Rev.E.*, 80, 2009.
- [Lib05] Kenneth G. Libbrecht. The physics of snow crystals. *Rep. Prog. Phys.*, 68 :855–895, 2005.
- [LL59a] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid mechanics*, volume 6. Pergamon Press, 1959.
- [LL59b] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Theory of elasticity*, volume 7. Pergamon Press, 1959.
- [LMS09] A. Laadhari, C. Misbah, and P. Saramito. On the equilibrium equation for a generalized biological membrane energy by using a shape optimisation approach. <http://en.scientificcommons.org/46022058>, 2009.
- [OMH07] J. Oprea, I.M. Mladenov, and M. Hadzhilazova. Unduloids and their geometry. *Archivum mathematicum*, 43(5) :417–429, 2007.
- [Spi99] M. Spivak. *A comprehensize introduction to differential geometry*, volume 4. Publish or Perish, 1999.
- [VLN07] V.Vitelli, J.B. Lucks, and D.R. Nelson. Crystallography on curved surfaces. *Computer Aided Design and Applications*, 4, 2007.