

Mesure de parité en électrodynamique quantique en circuit

par

Kevin Lalumière

mémoire présenté au département de physique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 25 février 2010



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-61412-9
Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-61412-9

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Le 16 avril 2010

*le jury a accepté le mémoire de Monsieur Kevin Lalumière
dans sa version finale.*

Membres du jury

Professeur Alexandre Blais
Directeur de recherche
Département de physique

Professeur Mario Poirier
Membre
Département de physique

Professeur David Poulin
Président rapporteur
Département de physique

À ceux que j'aime.

Sommaire

L'opération d'un qubit supraconducteur dans un résonateur électromagnétique a été proposée et réalisée en 2004 par A. Blais, A. Wallraff et leurs collègues de l'université de Yale. Depuis, beaucoup de progrès ont été faits avec ce type de système. En particulier, le qubit de charge, souvent utilisé alors, a été remplacé par le transmon : un système beaucoup moins sensible au bruit de charge, mais avec un spectre plus linéaire que celui du qubit de charge. Ainsi, il faut souvent tenir compte de plusieurs niveaux pour bien caractériser le transmon. De plus, des systèmes constitués d'un résonateur et de deux qubits ont été réalisés et des algorithmes quantiques ont été effectués avec ces systèmes.

Ce travail a deux objectifs. Le premier objectif est de trouver un modèle mathématique simple pour représenter l'évolution temporelle d'un nombre N de transmons de M niveaux couplés à un seul résonateur lors d'une mesure. Plus précisément, puisqu'en général, ce qui nous intéresse est la dynamique des transmons et non la dynamique du résonateur, il est utile d'éliminer le résonateur de l'équation qui gouverne l'évolution du système et de tenir compte de son effet à travers un nombre fini de variables complexes suivant une évolution temporelle simple. Pour atteindre cet objectif, une transformation analogue à la transformation du polaron est appliquée au système. L'équation obtenue peut être réduite dans plusieurs cas d'intérêts, et quelques un de ces cas sont présentés.

Le deuxième objectif de ce travail est d'utiliser ce modèle réduit pour analyser la possibilité d'effectuer une mesure de parité sur un système composé de deux transmons de deux niveaux couplés à un résonateur. Ainsi, la mesure de parité est étudiée, et ses principales caractéristiques sont mises en évidence. Des simulations numériques de la mesure de parité sont présentées, confirmant les caractéristiques discutées et montrant qu'il est possible d'obtenir un état enchevêtré à partir d'un état séparable d'une manière déterministe seulement à l'aide de la mesure.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon directeur de recherche, Alexandre Blais. Merci Alexandre pour tes nombreux conseils, pour ta patience et pour ton sens de l'humour. Je remercie aussi mes collègues de travail Jérôme, Maxime, Marcus et Jay. Merci messieurs pour toutes les discussions intéressantes et pour votre temps que vous consacriez sans hésitation à répondre à mes nombreuses questions. Un merci spécial à Jay pour ses excellentes idées originales.

Je veux aussi remercier mes amis. Guillaume, Louis-Philippe, David, les soirées autour d'une bière ou d'un gin en votre compagnie n'ont peut-être pas été autant nombreuses que durant le baccalauréat, mais elles étaient toujours très appréciées! Maxime... merci mec! Les combats de G.I. Joe, les constructions de bases secrètes, les rebellions contre tous les enfants du quartier, les matchs maisons de WWF, les voyages à pied au cinéma, les feux de camp illégaux, les manoeuvres irresponsables en automobile, les soirées bien arrosées, les voyages de camping et j'en passe : il s'en est passé des trucs depuis 1990. Avec toi comme ami, ma vie a toujours été palpitante. Ne t'inquiète pas Max, je vais continuer de descendre à St-Hyacinthe te visiter régulièrement pendant au moins un autre 19 ans, sauf si tu jettes une de mes cartes de Tortues Ninja dans la fournaise...

Je remercie mes parents Jacques et France pour avoir toujours cru en moi. Sébastien, merci, tu as toujours été comme un frère pour moi. Sérieusement, merci petit frère pour ta complicité réconfortante. Merci à ma copine, Marilyne, de toujours être là pour moi. Raoul et toi, tous les jours, vous mettez de l'ellipsoïde d'hydrogène en fusion dans ma vie.

Finalement, j'aimerais remercier Karina, Bernard et Jean du Collège Antoine-Girouard, et Fernand du cégep de St-Hyacinthe. Sans vous, je n'aurais peut-être jamais eu la piqure pour la science. Enfin, merci au CRSNG et au FQRNT pour le financement.

Table des matières

Sommaire	iv
Table des matières	vi
Liste des figures	viii
Introduction	1
1 Présentation des systèmes physiques de base	4
1.1 La boîte de Cooper	4
1.2 Le transmon	7
1.3 Électrodynamique quantique en cavité	8
1.4 Électrodynamique quantique en circuit	10
2 Modèle théorique	12
2.1 Écriture des états du système	12
2.2 Évolution du système	13
2.3 Équation maîtresse	15
2.4 Approche des trajectoires quantiques	16
2.4.1 Mesures ponctuelles et continues	16
2.4.2 Trajectoires quantiques	18
2.4.3 Mesure homodyne	19
2.5 Transformation du polaron	21
2.5.1 Application sur l'équation maîtresse dispersive	22
2.5.2 Application sur l'équation maîtresse stochastique	25
2.6 Méthode de simulation numérique	26
2.7 Évaluation de la validité des approximations	26

<i>Table des matières</i>	vii
3 Mesures de parité	29
3.1 Réécriture de l'équation maîtresse stochastique réduite	29
3.1.1 Cas de deux qubits dégénérés	32
3.2 Régime de paramètres pour une mesure de parité	34
3.2.1 Optimisation des paramètres dans le régime stationnaire	35
3.3 Simulation numérique de la mesure de parité	38
3.3.1 Concurrence	38
3.3.2 Mesure de parité	39
Conclusion	46
Annexe A Hamiltonien dispersif	48
Annexe B Équation maîtresse dispersive	50
Annexe C Application de la transformation du polaron	52
C.1 Application sur l'équation maîtresse dispersive	52
C.1.1 Approche générale	52
C.1.2 Mesure faible	57
C.1.3 Deux qubits dégénérés	58
C.2 Application sur l'équation maîtresse stochastique	59
C.2.1 Mesure faible	61
C.2.2 Un seul transmon	62
C.2.3 Deux qubits dégénérés	62
Annexe D Taux du régime stationnaire de la mesure de parité	64
Bibliographie	65

Liste des figures

1.1	Boîte de Cooper	5
1.2	Transmon	8
1.3	Cavité électromagnétique	9
1.4	Résonateur électromagnétique et transmon	11
2.1	Résonateur électromagnétique et transmons lors d'une mesure	20
2.2	Erreur sur les équations réduites en fonction du ratio κ/γ_{00}	27
3.1	Mesure et états cohérents dans un plan complexe	31
3.2	Taux de gain d'information stationnaires en fonction de Δ_r	34
3.3	Ratios d'intérêt pour la mesure de parité en fonction de χ_{e1}	36
3.4	Densité de probabilité des courants intégrés pour 10000 trajectoires	40
3.5	Fidélité moyenne en fonction du temps pour 10000 trajectoires	41
3.6	Concurrence moyenne en fonction du temps pour 10000 trajectoires	42
3.7	Concurrence, fidélité et fraction des matrices acceptées pour la moyenne des matrices densité de parité positive $\bar{\rho}_{\psi_+}$ et négative $\bar{\rho}_{\phi_+}$	45

Introduction

En 1982, Richard Feynman remarqua que le meilleur moyen de simuler un système physique se comportant selon les règles de la mécanique quantique serait à l'aide d'un ordinateur se comportant selon ces mêmes règles : un ordinateur quantique [1]. Quelques années plus tard, en 1985, David Deutsch trouva un exemple simple suggérant qu'en effet, un ordinateur quantique pourrait être plus efficace que n'importe quel ordinateur classique grâce entre autres au parallélisme quantique [2]. Avec en parallèle le développement de la cryptographie quantique [3], le domaine de l'informatique quantique était né. À cette époque, plusieurs travaux décrivant les caractéristiques avantageuses et uniques de l'informatique quantique furent réalisés, donnant naissance entre autres à l'encodage super dense [4] et à la téléportation quantique [5]. Cependant, ce n'est qu'au milieu des années 1990 que le domaine de l'informatique quantique allait devenir ce qu'il est aujourd'hui. En 1994, Peter Shor décrivait un algorithme pour factoriser un nombre N sur un ordinateur quantique [6]. Cet algorithme prend de l'ordre de $(\log N)^3$ opérations alors que les algorithmes les plus rapides connus pour les ordinateurs classiques prennent de l'ordre de $\exp\left((\log N)^{1/3} (\log \log N)^{2/3}\right)$ opérations. Ce gain d'efficacité spectaculaire suscita beaucoup d'intérêt auprès de la communauté scientifique. L'année suivante, deux articles décrivant respectivement un nouvel algorithme permettant à un ordinateur quantique de rechercher plus rapidement que son analogue classique dans une base de données non ordonnée [7] et une méthode permettant d'implémenter l'équivalent des codes correcteurs d'erreurs sur un ordinateur quantique [8] étaient publiés.

Il n'en fallait pas plus pour motiver les physiciens à commencer à travailler sur l'implémentation d'un ordinateur quantique. Dans les années subséquentes, une myriade de moyens pour réaliser un ordinateur quantique furent proposés, comme l'optique [9], les ions piégés [10], la résonance magnétique nucléaire (RMN) [11–13], les systèmes de l'état solide [14, 15], les atomes froids [16], les sites d'azote vacants dans le diamant [17], l'interaction entre un atome et un résonateur optique (électrodynamique quantique en

cavité) [18] et les systèmes supraconducteurs [19]. C'est en utilisant ensemble les principes de ces deux dernières suggestions que le système qui sera l'objet de ce travail a été créé.

En 2004, le groupe de Yale proposa de placer un système supraconducteur jouant le rôle de bit quantique (qubit) dans un résonateur (aussi nommé cavité) supraconducteur [20]. Ce dispositif était un des premiers exemples d'électrodynamique quantique en circuit (EDQC). Il présente plusieurs avantages en ce qui a trait à l'informatique quantique. En disposant le qubit dans un résonateur, celui-ci est isolé du bruit extérieur à toutes les fréquences sauf aux fréquences près de la résonance de la cavité et aux fréquences presque nulles. De plus, le résonateur permet de lire et de contrôler le qubit facilement. Aussi, puisque le qubit supraconducteur et que le résonateur sont des circuits électriques, leur confection peut se faire à l'aide des techniques usuelles de fabrication de circuits.

Plusieurs expériences utilisant le système décrit ci-dessus ont été réalisées. D'abord, en 2004, Wallraff *et al.* ont observé expérimentalement un couplage fort entre un qubit supraconducteur et un photon unique [21]. Ils ont aussi observé les oscillations de Rabi du qubit [22]. En 2007, Koch *et al.* ont amélioré le design du qubit pour le rendre presque insensible au bruit de charge [23]. Son équipe et lui ont nommé ce nouveau type de qubit *transmon*. Le transmon possède aussi un spectre plus linéaire que les qubits supraconducteurs initiaux. Il est donc parfois nécessaire de considérer le transmon comme un système à M niveaux plutôt que comme un système à deux niveaux pour bien le décrire. Toujours en 2007, Schuster *et al.* observaient expérimentalement le décalage de la fréquence du qubit dépendant du nombre de photons dans la cavité [24] tandis que Majer *et al.* se servaient du résonateur pour coupler deux qubits (bus quantique) [25]. La même année, Houck *et al.* réussissaient à générer un signal sortant du résonateur d'un seul photon sur demande [26]. Plus récemment, Hofheinz *et al.* ont réussi à créer un état quantique arbitraire dans le résonateur [27] tandis que Dicarlo *et al.* ont réalisé les premiers algorithmes quantiques utilisant ce système [28].

L'intérêt des expériences mentionnées ci-dessus n'est pas exclusif à l'informatique quantique. Ces expériences sondent la mécanique quantique fondamentale à grande échelle et elles ont un lien direct avec des expériences d'optique quantique [26]. D'ailleurs, une expérience récente du domaine a même testé les inégalités de Bell en fermant l'échappatoire de la mesure [29].

Le système étudié dans ce mémoire est composé de N transmons de M niveaux à

l'intérieur d'un résonateur. Le cas où deux transmons ($N = 2$) se comportant comme des qubits ($M = 2$) sont à l'intérieur d'une cavité sera étudié plus particulièrement. Il sera montré que dans un tel système, il est possible de faire une mesure de parité des qubits. Ce type de mesure est essentiel pour réaliser certains codes correcteurs d'erreurs quantiques [8]. De plus, il sera montré que cette mesure peut servir à enchevêtrer les qubits du système d'une manière déterministe.

Dans le premier chapitre, les dispositifs de base associés au système étudié seront présentés. Il s'agit de la boîte de Cooper, du transmon, de la cavité électromagnétique et du résonateur électromagnétique supraconducteur. Dans le deuxième chapitre, le modèle théorique derrière le système étudié sera décrit. L'approche utilisée pour écrire les états sera présentée avant de décrire le hamiltonien et l'équation maîtresse qui dictent l'évolution du système sans et avec de la dissipation respectivement. Par la suite, l'approche des trajectoires quantiques pour simuler la mesure sera décrite. Cette approche permettra de présenter conceptuellement et mathématiquement la mesure homodyne dans la sous-section suivante. Ensuite, la transformation du polaron sera décrite et appliquée aux équations décrivant le système étudié. Le cas général et certains cas précis seront étudiés. Enfin, les méthodes utilisées pour faire les simulations numériques dans les chapitres suivants seront exposées. Dans le troisième chapitre, la mesure de parité sera expliquée dans le cas où $N = M = 2$. Des simulations numériques viendront corroborer les équations analytiques et montreront que la mesure de parité peut produire deux états enchevêtrés d'une manière déterministe lorsque l'état initial est choisi correctement.

Certains compléments théoriques seront présentés en annexe. Ainsi, l'annexe A décrit comment obtenir le Hamiltonien dans le régime dispersif, l'annexe B décrit comment obtenir l'équation maîtresse dans ce même régime, l'annexe C montre comment appliquer la transformation du polaron sur le système étudié et l'annexe D introduit les taux importants dans le régime stationnaire de la mesure de parité.

Chapitre 1

Présentation des systèmes physiques de base

Dans ce chapitre, les dispositifs à la base de l'électrodynamique quantique en circuit seront présentés de manière qualitative. Ce sont la boîte de Cooper, le transmon, la cavité électromagnétique et le résonateur coplanaire supraconducteur. L'accent sera mis sur les avantages du transmon face à la boîte de Cooper et sur les avantages de l'électrodynamique quantique en circuit face à sa version en cavité.

1.1 La boîte de Cooper

La réalisation d'un qubit à l'aide de circuits électriques nécessite un élément non linéaire (c'est-à-dire un élément qui permet d'obtenir un spectre anharmonique) et non dissipatif. Il est important qu'un qubit ait un spectre anharmonique puisque c'est ce qui permet de considérer seulement deux de ses niveaux d'énergie et de négliger l'existence des autres. Les jonctions Josephson sont les seuls éléments de circuit satisfaisant les deux conditions énoncées ci-dessus simultanément. En effet, lorsqu'elles sont utilisées à de faibles températures, ces jonctions se comportent comme de pures inductances non linéaires. Un des circuits les plus simples pouvant réaliser un qubit est la *boîte de Cooper* [19]. Ce circuit est illustré à la figure 1.1a). La région entre la capacité de grille C_g et la jonction Josephson de ce circuit est désignée comme *l'île* du circuit. La réf. [19] montre que le hamiltonien de ce circuit prend la forme

$$H = E_C (N - N_g)^2 - E_J \cos \theta, \quad (1.1)$$

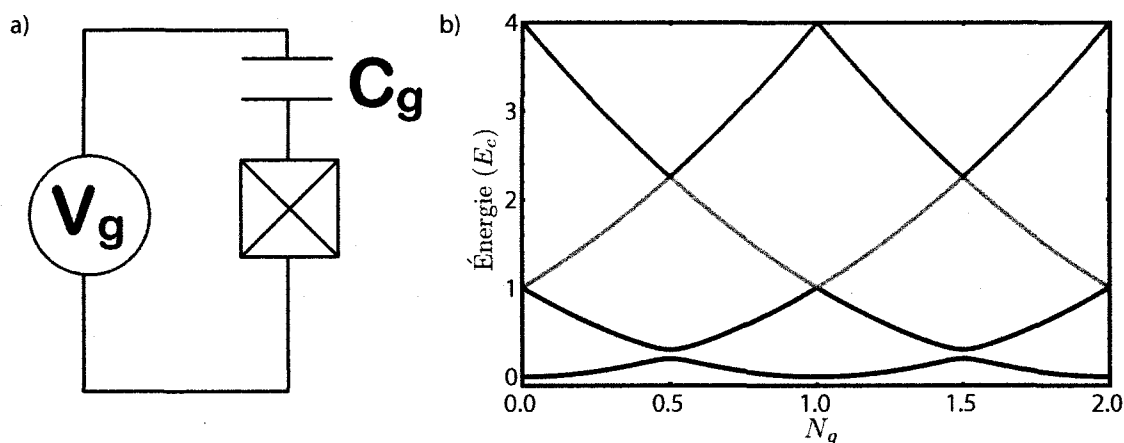


FIGURE 1.1 – a) Circuit de la boîte de Cooper b) Énergie de la boîte de Cooper en fonction de N_g pour $E_J/E_C = 0.1$. L'anharmonicité du spectre de la boîte de Cooper est importante.

où $E_C = (2e)^2/(2(C_J + C_g))$ est l'énergie de charge de l'île et où E_J et C_J sont respectivement l'énergie et la capacité de la jonction Josephson. N représente le nombre de paires de Cooper sur l'île par rapport à l'arrière-plan ionique positif. $N_g = C_g V_g/(2e)$ est la charge de grille, c'est-à-dire la charge de polarisation induite sur l'île par la source de tension V_g . Celle-ci va faciliter, ou entraver, l'effet tunnel des paires. Finalement, θ est la différence de phase entre les deux supraconducteurs formant la jonction. Lors de la quantification, N et θ deviennent des opérateurs respectant la relation de commutation $[\theta, N] = i$ [19].

Le hamiltonien de la boîte de Cooper possède une solution analytique en terme des fonctions de Mathieu [19]. Ainsi, la boîte de Cooper est à la physique des circuits quantiques ce que l'atome d'hydrogène est à la physique atomique. Deux variables du hamiltonien de la boîte de Cooper peuvent être contrôlées en temps réel en laboratoire : N_g , qui est contrôlée par la différence de potentiel V_g , et E_J , qui est contrôlée dans des circuits où la jonction Josephson est remplacée par un SQUID et où un flux est appliqué à travers ce SQUID [19]. La figure 1.1b) illustre l'énergie de la boîte de Cooper en fonction de N_g pour $E_J/E_C = 0.1$. Ce ratio entre l'énergie Josephson et l'énergie de charge est typique pour la boîte de Cooper.

La figure 1.1b) montre que, près de $N_g = (2z + 1)/2$, avec $z \in \mathbb{Z}$, la différence entre les deux premiers niveaux d'énergie est beaucoup plus petite que la différence entre le

deuxième et le troisième niveau d'énergie. Autrement dit, à ces points, l'anharmonicité du spectre du système est importante. Ainsi, près de ce point, il est réaliste de décrire la boîte de Cooper en se limitant à ses deux premiers niveaux. Ainsi, en projetant le hamiltonien (1.1) dans un sous-espace à deux charges, la réf. [19] obtient

$$H_q = -E_z (\sigma_z + X_{control}\sigma_x), \quad (1.2)$$

où, dans la limite $E_J/E_C \ll 1$, $E_z = E_J/2$ et $X_{control} = -2(E_C/E_J)(N_g - 1/2)$. σ_z et σ_x sont les opérateurs de Pauli. Le terme proportionnel à σ_z représente l'énergie du qubit. En effet, comme il est expliqué ci-dessous, le terme proportionnel à σ_x sera choisi comme nul sauf lors du contrôle de l'état du qubit. L'énergie du qubit peut être changée avec le flux magnétique appliqué qui à son tour changera E_J . Le terme proportionnel à σ_x cause une rotation de l'état du système sur la sphère de Bloch autour de l'axe des x . Ainsi, puisque ce terme varie comme $X_{control}$ qui varie lui-même comme N_g , c'est la variable N_g qui sera la plus utilisée pour manipuler l'état du système. C'est pour cette raison et parce que N_g représente une charge effective que ce qubit est souvent nommé *qubit de charge*. En pratique, $N_g = n_g^{cc} + n_g^{ca}$ est contrôlée par une différence de potentiel $V_g = v_g^{cc} + v_g^{ca}$, où cc est pour courant continu et ca est pour courant alternatif. La variable n_g^{ca} sera modifiée pour contrôler le système et $n_g^{cc} = 1/2$. Ainsi, lorsque le contrôle du qubit n'est pas souhaité, $N_g = 1/2$. Ce régime de paramètres se nomme le *sweet-spot* puisque lorsque $N_g = 1/2$, le système est insensible au bruit de charge (c'est-à-dire le bruit sur N_g) au premier ordre [19].

Le bruit peut avoir deux effets néfastes sur un qubit. Premièrement, il peut le faire relaxer, c'est-à-dire faire passer le qubit de son état excité ($|e\rangle$) à son état fondamental ($|g\rangle$). T_1 peut être vu comme le temps après lequel la probabilité que le qubit ait relaxé est importante. Le deuxième effet néfaste du bruit est la décohérence, c'est-à-dire la perte des cohérences de la matrice densité du qubit. Par exemple, soit un qubit dans l'état $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. Sa matrice densité sera

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Après avoir subi une décohérence complète, la matrice densité représentant le système sera

$$\rho_f = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Autrement dit, la décohérence fait passer une superposition d'états à un état mixte. T_2 peut être vu comme le temps après lequel la probabilité que la matrice densité du qubit ait perdu ses cohérences est importante.

Malgré l'utilisation du *sweet-spot*, le bruit de charge limite tout de même le temps de cohérence T_2 des qubits de charge à 500 ns ou moins [22] dans les circuits optimaux (résonateurs coplanaires). En tenant compte de la durée typique des opérations sur ce type qubit (~ 10 ns [22]), ce temps de cohérence semble insuffisant pour construire un ordinateur quantique.

1.2 Le transmon

L'augmentation du ratio E_J/E_C diminue la sensibilité au bruit de charge de la boîte de Cooper et son anharmonicité. La sensibilité au bruit de charge diminue d'une manière exponentielle tandis que l'anharmonicité diminue d'une manière polynomiale avec une augmentation du ratio E_J/E_C [23]. Ainsi, l'augmentation du ratio E_J/E_C permet d'obtenir un dispositif pratiquement insensible au bruit de charge, mais qui garde tout de même une anharmonicité assez importante pour être utilisé comme un qubit. Malgré ce fait, il peut parfois être nécessaire de tenir compte des niveaux d'énergie supérieurs [28]. La valeur optimale du ratio entre l'énergie Josephson et l'énergie de charge se situe autour de $E_J/E_C \sim 50$ [23]. Pour obtenir un ratio E_J/E_C si élevé, une capacité est placée en parallèle avec la jonction Josephson. Ce nouveau dispositif, le *transmon*, est illustré à la figure 1.2a). Le hamiltonien du transmon est le même que celui de la boîte de Cooper : seul le ratio E_J/E_C est changé [23].

La figure 1.2b) illustre l'énergie du transmon en fonction de N_g . Comme annoncé, l'énergie est pratiquement constante en fonction de N_g (ce qui rend le transmon insensible au bruit de charge) et une faible anharmonicité est tout de même conservée. L'insensibilité du transmon au bruit de charge a été montrée expérimentalement. Une de ces expériences rapporte un temps de relaxation de $T_1 \approx 1.57\mu\text{s}$ et un temps de cohérence de $T_2 \approx 2.94\mu\text{s}$ pour un transmon dans un circuit optimal (résonateur électromagnétique) [30]. Il s'agit d'une amélioration d'environ un facteur six face à la boîte de Cooper. Le temps nécessaire

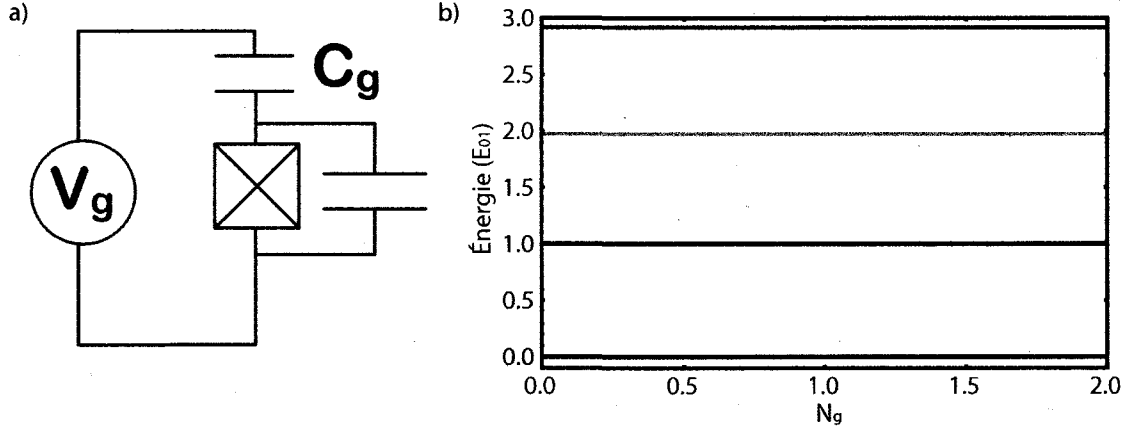


FIGURE 1.2 – a) Circuit du transmon b) Énergie du transmon en fonction de N_g pour $E_J/E_C = 50$. E_{01} représente la différence d'énergie entre le premier et le deuxième niveau d'énergie. L'anharmonicité du spectre du transmon est faible.

pour effectuer une opération sur le transmon étant de l'ordre de $t_{op} = 5\text{ns}$ ¹ [31], le nombre d'opération pouvant être faites sur le transmon avant qu'il ne relaxe est de l'ordre de $t_{op}/T_1 \sim 10^2$.

Le temps de cohérence T_2 peut s'écrire [19]

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_\phi}, \quad (1.5)$$

où T_ϕ est le temps de déphasage pur. L'expérience de la réf. [30] rapportant les T_1 et T_2 expérimentaux montre que T_ϕ est très grand ($\geq 35\mu\text{s}$) et que le temps de cohérence du transmon est limité par sa relaxation ($T_2 \approx 2T_1$). La relaxation du transmon est majoritairement causée par l'effet Purcell [23], qui découle du fait que le transmon est placé dans un résonateur électromagnétique. Cet effet sera expliqué dans la section suivante.

1.3 Électrodynamique quantique en cavité

Tel qu'illustré à la figure 1.3, l'électrodynamique quantique en cavité étudie l'interaction entre un atome et le champ électromagnétique dans une cavité formée de deux miroirs. En ne considérant que deux niveaux d'énergie de l'atome, avec une séparation en

¹Dans le cas du transmon, ce temps est limité par l'anharmonicité du qubit, tandis que dans le cas de la boîte de Cooper, ce temps est limité par d'autres facteurs techniques du circuit.

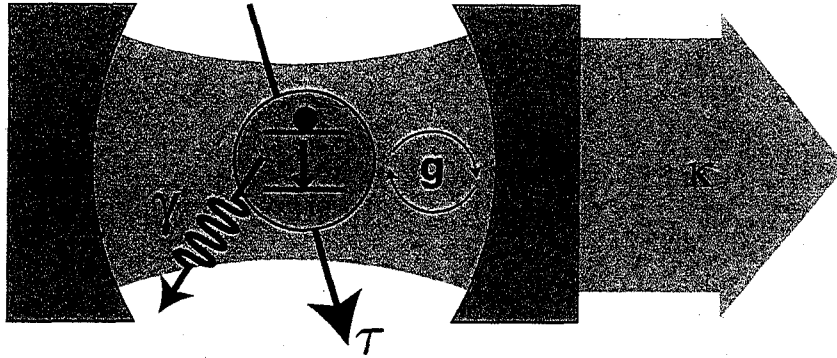


FIGURE 1.3 – Représentation schématique d'une cavité électromagnétique couplée à un système à deux niveaux. Figure tirée de la réf. [20].

énergie $\hbar\omega_a$, et en considérant qu'un seul mode de la cavité est important, le hamiltonien de ce système prend la forme [32]

$$H = \hbar\omega_r a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_a}{2} \sigma_z + \hbar g (a^\dagger \sigma_- + a \sigma_+), \quad (1.6)$$

où ω_r est la fréquence de résonance du mode du champ électromagnétique et g la constante de couplage entre ce mode et l'atome. Le mode électromagnétique a un taux de relaxation de $\kappa = \omega_r/Q$, avec Q le facteur de qualité de la cavité, tandis que l'atome a un taux de relaxation $\gamma = 1/T_1$. Lorsque la fréquence de l'atome est très près de celle de la cavité ($\omega_a \sim \omega_r$), un quanta d'énergie peut être transféré de façon résonante de l'atome à la cavité. Ce quanta d'énergie peut ensuite être perdu par la cavité via sa relaxation à un taux κ . Il s'agit de l'effet Purcell. Pour cette raison, lorsque la cavité et l'atome sont près de la résonance, le taux de relaxation significatif est la somme des taux de relaxation individuels de la cavité et de l'atome, $(\kappa + \gamma)/2$. Lorsque $|\omega_a - \omega_r| \gg g$, le couplage entre la cavité et l'atome devient purement virtuel. Ainsi, dans ce cas, l'effet Purcell devient moins important [33].

Puisque l'atome est couplé au mode du champ électromagnétique, le contrôle d'une de ces deux quantités permet de contrôler l'autre. Par exemple, en contrôlant le champ électromagnétique qui se trouve dans la cavité (ce qui peut se faire à l'aide d'un laser), il est possible de contrôler l'atome [32]. Il est aussi possible de mesurer l'état du mode électromagnétique de la cavité à laquelle l'atome se couple en mesurant l'état d'un atome qui est passé à travers cette cavité et qui a interagi avec celle-ci pendant un temps τ suffisamment long [32].

C'est dans ces faits que réside une grande partie de l'intérêt de l'électrodynamique quantique en cavité pour l'informatique quantique. En effet, celle-ci propose un moyen simple de contrôler et de mesurer un qubit (l'atome) à travers le champ électromagnétique. De plus, la cavité agit comme un filtre face au qubit. Ainsi, seulement le bruit près de la fréquence de résonance ω_r de la cavité affectera l'atome. Cependant, il n'y a pas que des avantages à ce système. Par exemple, les atomes traversent la cavité. Ainsi, ils n'interagissent avec celle-ci que pendant un temps τ . De plus, le couplage g entre la cavité et l'atome n'est généralement pas beaucoup plus grand que $1/\tau$ ou que des taux de relaxation combinés de la cavité et de l'atome $(\kappa + \gamma)/2$ [20]. Aussi, certains paramètres du système, comme la fréquence de transition de l'atome ω_a , sont intrinsèques. De ce fait, ils ne peuvent pas être contrôlés.

1.4 Électrodynamique quantique en circuit

La physique décrite à la section précédente peut être réalisée à l'aide de circuits électriques. Par exemple, il est possible de coupler électriquement un qubit supraconducteur à un mode d'un résonateur coplanaire supraconducteur. Ce système est illustré schématiquement à la figure 1.4. Dans ce système, le résonateur joue le rôle de la cavité tandis que le qubit supraconducteur joue le rôle de l'atome. Comme l'atome, qui pouvait être contrôlé via l'application d'un laser à travers un des miroirs de la cavité, le qubit peut être contrôlé via l'application d'une différence de potentiel à travers le port d'entrée du résonateur (voir figure 1.4). Dans le même ordre d'idée, la mesure du qubit à l'intérieur du résonateur peut être effectuée en amplifiant et en observant la tension transmise au port de sortie (voir figure 1.4) ou la tension réfléchie au port d'entrée. Le hamiltonien de ce système prend la forme déjà introduite à l'équation (1.6) [20]. Ce hamiltonien n'est pas valide lorsqu'il faut tenir compte des niveaux supérieurs du transmon. Un autre hamiltonien correspondant à cette situation sera présenté dans le chapitre suivant. L'analogie entre ce système et l'électrodynamique quantique en cavité est telle que j'utiliserai parfois les termes atome et cavité pour désigner respectivement le qubit et le résonateur.

L'électrodynamique quantique en circuit présente plusieurs avantages par rapport à l'électrodynamique quantique en cavité. D'abord, le transmon est fixé dans le résonateur, contrairement aux atomes qui ne font que passer un temps τ dans la cavité. Ceci permet au transmon et au résonateur d'interagir pendant un temps arbitraire. De plus, puisque ce circuit possède un design bidimensionnel, l'énergie du point zéro est distribuée sur un

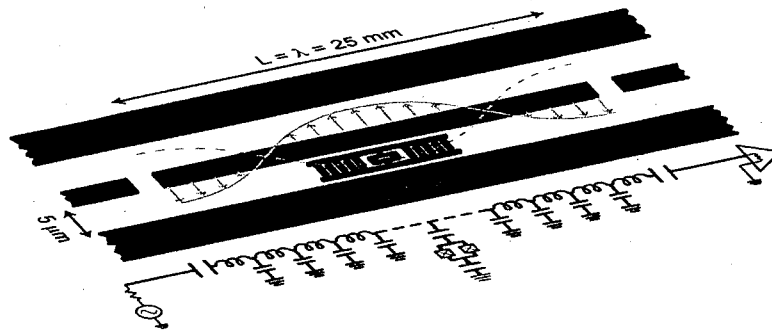


FIGURE 1.4 – Représentation schématique d'un résonateur électromagnétique (en bleu) à l'intérieur duquel se trouve un transmon (en vert). Figure tirée de la réf. [34].

très petit volume effectif en comparaison aux cavités tridimensionnelles. En conséquence, le champ électromagnétique va se coupler très fortement au transmon [20]. Ceci permet d'atteindre le régime du *couplage très fort* ($g \gg \kappa + \gamma$). Un autre avantage de taille est le fait de pouvoir choisir tous les paramètres du circuit. En effet, comme dans le cas de la cavité, la fréquence du résonateur ω_r , son taux de relaxation κ et le couplage g entre le champ électromagnétique et le transmon peuvent être choisis lors de la conception du dispositif. Cependant, dans le cas de l'électrodynamique quantique en circuit, il est possible de contrôler la fréquence de transition du transmon ω_a non seulement lors de la fabrication, mais aussi lors de l'opération du circuit (voir section 1.2). Ceci permet de contrôler le couplage effectif entre le transmon et le champ électromagnétique $g/(\omega_a - \omega_r)$ lors de l'opération du circuit.

En résumé, un résonateur électromagnétique supraconducteur à l'intérieur duquel se trouve un qubit supraconducteur permet d'étudier, grâce à toutes ses différences avec son analogue optique, de la physique qui est qualitativement et quantitativement différente de ce qui peut être fait en cavité. Ainsi, en plus d'être un système avantageux pour l'informatique quantique [28], ce dispositif permet d'en apprendre plus sur la mécanique et l'optique quantique.

Chapitre 2

Modèle théorique

Dans ce chapitre, le modèle théorique utilisé pour décrire le système étudié dans ce mémoire sera présenté. Dans la première section, une façon compacte d'écrire les états de ce système sera exposée. Par la suite, l'évolution du système sera décrite, avec et sans la dissipation. Les concepts de trajectoire quantique et de mesure homodyne seront ensuite introduits. Dans la section suivante, la transformation du polaron sera appliquée à notre système pour réduire les équations obtenues. Des approximations et des cas importants seront analysés. Puisque les équations étudiées n'admettent pas de solution analytique exacte, des méthodes numériques seront utilisées pour les résoudre. La méthode utilisée pour effectuer ces simulations numériques sera exposée. En fin de chapitre, les erreurs faites en utilisant les approximations menant aux équations réduites seront évaluées numériquement.

2.1 Écriture des états du système

Considérons un système de N transmons sans interaction possédant chacun M niveaux. L'état du transmon i du système peut s'écrire comme $|q_i\rangle$ avec q_i un entier de 0 à $M - 1$. Conséquemment, un état des N transmons peut s'écrire

$$|\sigma\rangle = |q_1\rangle \otimes |q_2\rangle \otimes \dots \otimes |q_{N-1}\rangle \otimes |q_N\rangle. \quad (2.1)$$

Cette manière d'écrire un état propre du système est précise et intuitive, mais elle n'est pas compacte. Pour remédier à cette situation, un état du système peut être écrit sans ambiguïté en utilisant un seul nombre σ ,

$$\sigma = \sum_{i=0}^{N-1} q_i M^i. \quad (2.2)$$

Par exemple, l'état de trois transmons ayant chacun deux niveaux peut s'écrire comme $|\sigma\rangle$ avec σ prenant les valeurs allant de 0 à 7. En utilisant cette notation, l'état général d'un système de N transmons de M niveaux peut s'écrire comme

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma=0}^{M^N-1} c_\sigma |\sigma\rangle. \quad (2.3)$$

Il est finalement utile d'introduire trois types de projecteur :

$$\Pi_\sigma = |\sigma\rangle\langle\sigma|, \quad (2.4)$$

$$\Pi_\sigma^{j+} = (|q_1\rangle \otimes |q_2\rangle \otimes \dots \otimes |q_j + 1\rangle \otimes \dots \otimes |q_{N-1}\rangle \otimes |q_N\rangle) \langle\sigma|, \quad (2.5)$$

$$\Pi_\sigma^{j-} = (\Pi_\sigma^{j+})^\dagger, \quad (2.6)$$

où Π_σ^{j+} ajoute un quantum d'énergie au transmon j qui était initialement dans l'état $|\sigma\rangle$. Dans le même ordre d'idées, Π_σ^{j-} enlève un quantum d'énergie au transmon j pour l'amener dans l'état $|\sigma\rangle$.

2.2 Évolution du système

Considérons maintenant un système de N transmons couplés à une cavité électromagnétique. Chaque transmon possède M niveaux. Le but est d'étudier la mesure des N transmons à travers le résonateur. Le hamiltonien du système est obtenu en généralisant le hamiltonien pour un seul qubit dans un résonateur de l'équation (1.6) [23] :

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \hbar\omega_{ij} |i\rangle_j \langle i| + \hbar\omega_r a^\dagger a + \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \hbar g_{ij} |i\rangle_j \langle i+1| a^\dagger + \text{c.h.} \right) + \hbar (\mathcal{E}(t) a^\dagger + \text{c.h.}). \quad (2.7)$$

Dans ce hamiltonien, $\hbar\omega_{ij}$ est l'énergie du niveau i du transmon j , ω_r la fréquence de résonance du résonateur, $\hbar g_{ij}$ l'énergie de couplage entre le résonateur et la transition $i \leftrightarrow (i+1)$ du transmon j et $|a\rangle_j \langle b|$ agit sur le transmon j . Finalement, le dernier terme représente une excitation d'amplitude complexe $\mathcal{E}(t)$ sur le port d'entrée ou de sortie du

résonateur [32]. L'amplitude complexe peut s'écrire comme

$$\mathcal{E}(t) = \epsilon_m(t) + \epsilon_c(t), \quad (2.8)$$

où $\epsilon_m(t)$ correspond à l'excitation de mesure des transmons et où $\epsilon_c(t)$ correspond à l'excitation de contrôle. En pratique, la fréquence caractéristique de $\epsilon_m(t)$ sera près de celle du résonateur tandis que la fréquence caractéristique de $\epsilon_c(t)$ sera près de la fréquence de la transition du transmon dont le contrôle est souhaité.

Dans le cadre de l'informatique quantique, il faut que le qubit soit bien isolé de son environnement lorsqu'il n'est pas contrôlé. Conséquemment, pendant ce temps, les échanges d'énergie entre le transmon et le résonateur ne sont pas souhaités. Dans ce cas, il est utile de se placer dans un régime de paramètres où le couplage entre le résonateur et le transmon est purement virtuel. Soit Δ_{ij} la différence de fréquence entre la transition $i \leftrightarrow (i+1)$ du transmon j et le résonateur : $\Delta_{ij} = (\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}) - \omega_r$. La couplage effectif entre la transition $i \leftrightarrow (i+1)$ du transmon j et le résonateur peut s'écrire $\lambda_{ij} = g_{ij}/\Delta_{ij}$. Si $|\lambda_{ij}| \ll 1$ pour tout i, j , il est justifié d'inclure ce couplage comme une perturbation. Ceci peut se faire en appliquant une transformation, dite transformation dispersive, sur le hamiltonien. Tel que montré à l'annexe A, dans cette situation, le hamiltonien (2.7) est remplacé par le hamiltonien effectif suivant :

$$\begin{aligned} H_D = & \hbar \left(\omega_r + \sum_{\sigma} \tilde{\chi}_{\sigma} \Pi_{\sigma} \right) a^{\dagger} a + \sum_{\sigma} \hbar \tilde{\omega}_{\sigma} \Pi_{\sigma} + \sum_{\sigma j} \hbar \lambda_{qjj} (\epsilon_c(t) \Pi_{\sigma}^{j+} + \text{c.h.}) \\ & + \sum_{\substack{j < l \\ \sigma}} \hbar J_{qjjql} (\Pi_{\sigma}^{j+} \Pi_{\sigma}^{l-} + \text{c.h.}) + \hbar (\epsilon_m(t) a^{\dagger} + \text{c.h.}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ici, $\tilde{\chi}_{\sigma}$ est le déplacement de la fréquence de résonance de la cavité dû aux transmons. En réécrivant le hamiltonien, ce terme peut aussi apparaître comme le décalage de Stark puisqu'il modifie l'énergie des transmons en fonction du nombre de photons dans le résonateur. Le déplacement de la fréquence de résonance de la cavité $\tilde{\chi}_{\sigma}$ dépend de l'état des transmons : il y a donc un couplage entre les transmons et la cavité. Ce type de couplage peut être utilisé pour effectuer une mesure quantique non destructive (QND) [32] de l'état des transmons. $\hbar \tilde{\omega}_{\sigma}$ est l'énergie des transmons dans l'état $|\sigma\rangle$. Cette énergie est décalée par rapport à l'énergie des transmons dans le hamiltonien non dispersif. Ce décalage est dû au résonateur : c'est le décalage de Lamb. Le troisième terme représente

les transitions entre les états des transmons induites par l'excitation $\epsilon_c(t)$. Le quatrième terme représente le processus d'interaction virtuelle, via la cavité, entre chaque paire de transmons. Ce processus permet un échange de quanta entre deux transmons [25]. Il se déroule à un taux $J_{q_j q_l}$. Finalement, le dernier terme représente l'excitation d'amplitude $\epsilon_m(t)$ servant à la mesure.

2.3 Équation maîtresse

L'évolution d'un système quantique isolé est gouvernée par l'équation de Schrödinger. Afin de décrire l'évolution des systèmes réalistes, en contact avec leur environnement, c'est-à-dire des systèmes présentant de la dissipation, l'approche de l'équation maîtresse est utilisée [32]. Cette approche considère que le système d'intérêt est en interaction avec un bain d'oscillateurs harmoniques. Dans le cas du système traité ci-dessus, il est utile de supposer que la température de ce bain est $T \rightarrow 0$. Cette approximation est réaliste puisque les expériences sont réalisées à $T \sim 20$ mK tandis que les énergies caractéristiques du système sont de l'ordre de 0.5 K. En raison du très grand nombre de modes de ce bain, lorsque de l'information passe du système au bain, cette information est perdue de façon irréversible du point de vue du système. Une description ne prenant pas en compte le bain ne peut être qu'incomplète et requerra l'usage de la matrice densité plutôt que du vecteur d'état. L'équation maîtresse est l'équation qui dicte l'évolution temporelle de cette matrice densité. Une généralisation des résultats présentés dans la réf. [32] permet d'obtenir l'équation maîtresse de notre système :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \kappa D[a] \rho + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{M-1} \gamma_{ij} D[|i\rangle_j \langle i+1|] \rho + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_{i=0}^{M-1} \eta_{ij} |i\rangle_j \langle i| \right] \rho \\ &= \mathcal{L} \rho. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Le premier terme représente l'évolution unitaire du système (l'équation de Schrödinger), tandis que les autres termes correspondent à la dissipation. Le superopérateur $D[x] \rho$ prend la forme $D[x] \rho = x \rho x^\dagger - \{x^\dagger x, \rho\}/2$, où les crochets représentent un anticommutateur. Cette forme préserve la positivité et la trace de la matrice densité. Ce superopérateur est appelé *dissipateur*. Ainsi, le deuxième terme représente la dissipation de la cavité à un

taux κ , le troisième la relaxation des transmons à un taux γ_{ij} et le dernier le déphasage des transmons à un taux $\gamma_{\phi j}/2$. Le terme représentant la relaxation des transmons est obtenu directement en utilisant le résultat de la réf. [35] concernant l'équation maîtresse dans la représentation d'Heisenberg et en utilisant l'approximation séculaire [36]. Puisque seul le couplage entre les niveaux voisins d'un transmon est important [23], seulement la relaxation entre ces niveaux est considérée. Le dernier terme de l'équation maîtresse est obtenu en généralisant le résultat de la section 2.2.4 de la réf. [37] concernant le déphasage. Les facteurs η_{ij} sont des constantes phénoménologiques qui fixent l'intensité relative du déphasage entre les niveaux.

L'équation maîtresse dans le régime dispersif est obtenue à l'annexe B. Elle s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_D &= -\frac{i}{\hbar} [H_D, \rho_D] + \kappa D [a] \rho_D + \sum_{ij} \gamma_{ij} D \left[\sum_{\sigma} \Pi_{\sigma}^{j-} \delta_{q_{ji}} \right] \rho_D \\ &+ \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_{\sigma} \eta_{q_{jj}} \Pi_{\sigma} \right] \rho_D + \kappa D \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_{jj}} \Pi_{\sigma}^{j-} \right] \rho_D \\ &= \mathcal{L}_D \rho_D. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le nouveau terme dans cette équation (le dernier) décrit l'effet Purcell [26, 38, 39]. Cet effet représente la modification du taux de relaxation des transmons par le résonateur. Cet effet peut s'expliquer par un processus virtuel d'échange de quanta d'énergie entre un transmon et la cavité, suivi de la perte du quantum d'énergie par la cavité. L'amplitude des échanges de quanta d'énergie entre un transmon et la cavité est de l'ordre de λ_{ij}^2 . Le taux de dissipation de la cavité étant κ , l'amplitude de l'effet Purcell devrait donc être de l'ordre de $\kappa \lambda_{ij}^2$, le résultat trouvé à l'équation (2.11).

2.4 Approche des trajectoires quantiques

2.4.1 Mesures ponctuelles et continues

Intéressons nous à la mesure d'un observable R au temps T sur un système préparé dans l'état $\rho(T)$. Grâce au théorème de décomposition spectrale, l'observable R peut s'écrire comme

$$R = \sum_{ij} r_i |r_i^j\rangle \langle r_i^j|, \quad (2.12)$$

où les projecteurs $|r_i^j\rangle \langle r_i^j|$ respectent la relation de fermeture

$$\sum_{ij} |r_i^j\rangle \langle r_i^j| = 1. \quad (2.13)$$

La somme sur j tient compte de la dégénérescence possible d'une valeur propre r_i . Selon le postulat de projection, si le résultat de la mesure est $r_i = r$, immédiatement après la mesure, l'état du système peut s'écrire [40]

$$\rho(T + dt|r) = \frac{M_r \rho(T) M_r^\dagger}{\text{Tr} [M_r^\dagger M_r \rho(T)]}, \quad (2.14)$$

où

$$M_r = \sum_j |r^j\rangle \langle r^j|. \quad (2.15)$$

La matrice densité $\rho(T + dt|r)$ a comme signification « matrice densité au temps $T + dt$ conditionnellement à l'obtention du résultat de mesure r ». C'est un état conditionnel du système. En effet, en général, le résultat de la mesure de R sera probabiliste et l'état du système $\rho(T + dt|r)$ ci-dessus sera obtenu si et seulement si le résultat de la mesure est r . Ainsi, le système, pour $t < T$, suit une évolution continue dictée par l'équation de Schrodinger, mais lorsque $T = t$, il y a une discontinuité dans l'évolution du système. Cette discontinuité est due à la réduction du paquet d'ondes causée par la mesure. Cette mesure est effectuée à un moment précis dans le temps : il s'agit donc d'une mesure ponctuelle.

Afin d'introduire la mesure continue, supposons maintenant un atome à deux niveaux d'énergie initialement dans son état excité. On supposera également que cet atome est complètement entouré de détecteurs de photons. Ces détecteurs sont assez loin de l'atome pour ne pas interagir avec celui-ci. À un certain moment, l'atome relaxe en émettant un photon qui sera détecté au temps T par un des détecteurs. Cette mesure est une mesure continue. En effet, tant que les détecteurs n'ont pas reçu le photon, nous savons que l'atome est dans son état excité. Par contre, dès que le photon est détecté, nous savons que l'atome est maintenant dans son état fondamental. Il est important de réaliser que

la matrice densité de l'atome ne représente pas l'état du système à proprement dit. Elle représente notre meilleure description de l'état du système. En négligeant le temps que le photon a pris pour se rendre aux détecteurs, au temps T , dans notre meilleure description de l'état du système, l'atome est passé d'une manière abrupte de son état excité à son état fondamental. Ainsi, la matrice densité est un état conditionnel du système (conditionnel à la détection d'un photon ou non). Il s'agit d'un état conditionnel similaire à celui obtenu dans le cas de la mesure ponctuelle. Par contre, si cette expérience est répétée plusieurs fois, le temps T où le photon est détecté ne sera jamais le même puisque la nature du phénomène physique en question, la relaxation d'un atome, est stochastique. Par conséquent, si une moyenne d'ensemble est faite sur un grand nombre de réalisations de cette expérience donnant chacune des états conditionnels $\pi(t)$, une matrice densité $\rho(t)$ dite inconditionnelle sera obtenue, et son évolution sera décrite par

$$\dot{\rho}(t) = \mathbb{E}[\dot{\pi}(t)] = \gamma \mathcal{D} [|g\rangle\langle e|] \rho, \quad (2.16)$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ dénote une moyenne d'ensemble. Ici, $\rho(t)$ aura une évolution continue [35], donnée par l'équation maîtresse à la droite de l'équation (2.16) [32]. Il est facile de montrer que pour un état initial quelconque $a|e\rangle + b|g\rangle$,

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} |a|^2 e^{-\gamma t} & ab^* e^{-\gamma t/2} \\ a^* b e^{-\gamma t/2} & 1 - |a|^2 e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

où γ est le taux de relaxation de l'atome.

Un dernier détail important à noter sur cette expérience est le fait qu'aucune mesure n'est faite directement sur l'atome. En effet, c'est la réception (ou l'absence de réception) d'un photon qui vient nous renseigner sur l'état de l'atome. Ce qui nous permet de mesurer le système est donc le couplage entre l'atome et le photon. Ce type de situation où la mesure d'un système quantique s'effectue à travers le couplage à un autre système quantique est très courante [32].

2.4.2 Trajectoires quantiques

En mécanique classique, la trajectoire d'un système est le chemin qu'il prend dans l'espace des phases en fonction du temps. D'après cette définition, il peut sembler absurde de parler de trajectoire en mécanique quantique. En effet, puisqu'il est impossible de définir exactement à la fois la quantité de mouvement et la position en mécanique

quantique (principe d'incertitude de Heisenberg), il est aussi impossible de parler de chemin précis dans l'espace des phases. D'ailleurs, d'un point de vu classique, une trajectoire est souvent considérée comme étant continue dans le temps. Toutefois, comme le montre l'exemple précédent, en mécanique quantique, la mesure apporte des discontinuités à l'état du système via la réduction du paquet d'ondes. Néanmoins, il est possible de définir une trajectoire quantique comme étant le chemin suivi par l'état conditionnel du système tel que l'état inconditionnel du système évolue d'une manière continue [35]. Ainsi, comme il est montré au paragraphe précédent, si un système est mesuré d'une manière continue, il suivra différentes trajectoires à chaque réalisation de l'expérience et la moyenne des trajectoires donnera l'état inconditionnel du système, état qui est continu dans le temps. Par contre, s'il n'y a pas de mesure, notre connaissance sur l'état du système sera la même à chaque réalisation de l'expérience. Ainsi, la matrice densité suivra la même trajectoire à chaque fois et cette trajectoire correspondra directement à l'état inconditionnel du système.

Puisqu'une trajectoire dépend du type de mesure effectuée, il existe plusieurs types de trajectoires. Les trajectoires décrites plus haut avec l'exemple de la relaxation de l'atome sont de type *saut*. Elles sont appelées ainsi parce que notre connaissance sur le système change d'une manière abrupte lors de la réception du photon et que le système « saute » d'un état à un autre lors de cet évènement. Les trajectoires diffuses sont un autre type de trajectoire important. Elles se nomment ainsi puisque dans celles-ci, le gain d'information sur l'état du système s'effectue de manière progressive dans le temps. Notre connaissance sur l'état du système changeant en fonction de l'information acquise sur celui-ci, la matrice densité va aussi évoluer d'une manière progressive dans le temps, comme lors d'une diffusion. Les trajectoires diffuses correspondent entre autres aux trajectoires d'un système qui subit une mesure homodyne faible. C'est ce type de mesure qui sera effectué sur notre système.

2.4.3 Mesure homodyne

Revenons au système de N transmons couplés à la cavité électromagnétique. Selon l'équation (2.10), les photons, c'est-à-dire les porteurs d'information, sortent à un taux κ de la cavité. Soit κ_{in} le taux de perte d'information de la cavité par son port d'entrée et κ_{out} le taux de perte d'information de la cavité par son port de sortie (voir figure 2.1). Ces quantités doivent évidemment respecter $\kappa = \kappa_{in} + \kappa_{out}$. Nous considérons ici des mesures

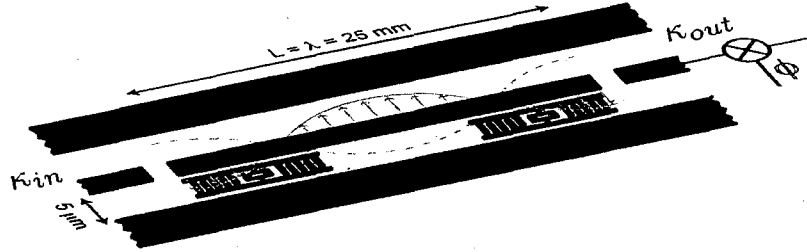


FIGURE 2.1 – Représentation schématique d'un résonateur électromagnétique à l'intérieur duquel se trouvent deux transmons lors d'une mesure. Figure tirée de la réf. [34].

en transmission où seulement le signal venant du port de sortie est accessible. Pour faire une mesure homodyne, il suffit de faire passer ce signal par un mixeur (équivalent de la lame séparatrice dans le schéma optique). Un autre signal de phase ϕ est envoyé par l'autre port d'entrée du mixeur, comme à la figure 2.1. Ce signal se nomme *oscillateur local*. Sa fréquence est choisie pour être la même que la fréquence du signal qui sort de la cavité. De plus, son intensité est réglée pour être très grande devant l'intensité du signal sortant du résonateur. En choisissant la phase ϕ de l'oscillateur local, il est possible de choisir la quadrature du signal de sortie qui est mesurée [32]. Sous une mesure homodyne, l'évolution du système suit une trajectoire diffusive [35]. Ainsi, l'équation maîtresse stochastique (EMS) décrivant la trajectoire suivie par le système est [35]

$$\dot{\rho}_s = \mathcal{L}\rho_s + \sqrt{\kappa\eta}\xi(t)\mathcal{H}[ae^{-i\phi}]\rho_s, \quad (2.18)$$

où $\mathcal{H}[x]\rho = x\rho + \rho x^\dagger - \text{Tr}[x\rho + \rho x^\dagger]\rho$, l'action de \mathcal{L} est définie plus haut et où $\xi(t)$ est du bruit blanc gaussien satisfaisant [41]

$$\text{E}[\xi(t)] = 0, \quad (2.19)$$

$$\text{E}[\xi(t)\xi(t')] = \delta(t - t'). \quad (2.20)$$

η est l'efficacité de la mesure. Sa valeur maximale est 1. Elle peut être écrite comme $\eta = \kappa_{out}\eta_{det}/\kappa$ avec η_{det} l'efficacité avec laquelle les photons sont détectés [41]. Ainsi, le dernier terme de l'équation (2.18) représente une mesure homodyne d'efficacité η . Compte tenu de l'équation (2.19), $\text{E}[\dot{\rho}_s] = \dot{\rho}$ comme il se doit. Finalement, le « courant » d'information

¹Ce dernier terme est nécessaire pour préserver la trace de la matrice densité. Son retrait permet d'obtenir une équation maîtresse linéaire ne préservant pas la trace [35].

sortant du résonateur peut être écrit comme [35]

$$J = \sqrt{\kappa\eta}\langle ae^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi} \rangle + \xi(t). \quad (2.21)$$

Comme annoncé plus haut, il est possible de choisir la quadrature mesurée en choisissant la phase de l'oscillateur local. En effet, $\phi = 0$ donnera de l'information sur la quadrature $x = a + a^\dagger$ tandis que $\phi = \pi/2$ donnera de l'information sur la quadrature $y = -i(a - a^\dagger)$.

Dans le régime dispersif, l'EMS peut s'écrire comme (voir annexe B)

$$\dot{\rho}_{sd} = \mathcal{L}_D \rho_{sd} + \sqrt{\kappa\eta}\xi(t)\mathcal{H} \left[\left(a + \sum_{ij} \lambda_{ij} |i\rangle_j \langle i+1| \right) e^{-i\phi} \right] \rho_{sd}. \quad (2.22)$$

En pratique, lors de la mesure homodyne, seulement le signal qui a une fréquence près de la fréquence du résonateur sera mesuré. Puisque les fréquences de transition des transmons sont par hypothèse loin de la fréquence de la cavité dans le régime dispersif, il est correct de réécrire cette EMS comme [38]

$$\dot{\rho}_{sd} = \mathcal{L}_D \rho_{sd} + \sqrt{\kappa\eta}\xi(t)\mathcal{H} [ae^{-i\phi}] \rho_{sd}, \quad (2.23)$$

ce qui n'est rien d'autre que l'équation maîtresse dispersive à laquelle le terme correspondant à la mesure homodyne a été rajouté.

2.5 Transformation du polaron

Malgré le fait que les équations obtenues aux sections précédentes soient compactes et intuitives, elles décrivent l'évolution d'un système complexe de N transmons couplés à un résonateur. Dans le contexte de l'information quantique, ce qui nous intéresse vraiment est seulement le comportement des transmons. Il serait donc utile d'avoir une équation décrivant les transmons couplés au résonateur sans devoir décrire explicitement l'état du résonateur qui de façon générale est une matrice de taille infinie. Cet objectif peut être atteint en réalisant qu'une excitation électromagnétique $\epsilon_m(t)$ va créer un état cohérent $|\alpha_\sigma\rangle$ dans le résonateur [41]. L'avantage des états cohérents par rapport à un état général du résonateur est qu'ils sont décrits par un seul nombre complexe, ce qui simplifie grandement leur traitement. Dans la base de Fock, un état cohérent s'écrit

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.24)$$

En raison du couplage dispersif $\tilde{\chi}_\sigma$, l'état cohérent du résonateur va dépendre de l'état $|\sigma\rangle$ des transmons. Ainsi, un moyen d'éliminer la cavité est d'effectuer un déplacement dépendant de l'état des transmons sur celle-ci pour que son état redevienne toujours l'état du vide. Cette approche revient à effectuer la transformation unitaire

$$P = \sum_{\sigma} D(\alpha_{\sigma}) \Pi_{\sigma}, \quad (2.25)$$

sur l'équation maîtresse, où $D(\alpha_{\sigma}) = \exp[\alpha_{\sigma} a^{\dagger} - \alpha_{\sigma}^* a]$ est l'opérateur déplacement du résonateur, et où $D^{\dagger}(\alpha_{\sigma}) |\alpha_{\sigma}\rangle = |0\rangle$. Cette transformation est une généralisation de la transformation du polaron. Dans le contexte de l'électrodynamique quantique en circuit, elle a été effectuée dans le cas à un qubit ($N = 1$ et $M = 2$) à la réf. [41]. Elle a alors permis d'obtenir une équation maîtresse réduite ne décrivant que l'évolution du qubit.

2.5.1 Application sur l'équation maîtresse dispersive

Dans ce mémoire, on s'intéresse à appliquer la transformation du polaron sur l'équation maîtresse dispersive dans le cas à N transmons ayant chacun M niveaux. Ce calcul est présenté en détails à l'annexe C.1. Malheureusement, dans ce cas, il n'est pas possible d'obtenir une formulation compacte de l'équation maîtresse réduite. Ainsi, il faudra se restreindre à des cas précis ou utiliser une approximation. Dans le reste de cette section, trois cas particuliers sont considérés.

Approximation de la mesure faible

Soit $\beta_{\sigma'}^{\sigma} = \alpha_{\sigma} - \alpha_{\sigma'}$ la différence entre deux états cohérents du résonateur associés à deux états différents des transmons ($|\sigma\rangle$ et $|\sigma'\rangle$). Si la mesure est très faible, $|\beta_{\sigma'}^{\sigma}| \ll 1$ pour tout σ, σ' et l'équation maîtresse réduite est, à l'ordre le plus faible en $\beta_{\sigma'}^{\sigma}$ (annexe C.1.2),

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{pd} \approx & -\frac{i}{\hbar} \left[H_D^Q, \rho_{pd} \right] - i\Pi_\alpha \left[\sum_\sigma \tilde{\chi}_\sigma \Pi_\sigma, \rho_{pd} \right] \Pi_\alpha^* + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \mathcal{D} \left[\sum_\sigma \eta_{q_j j} \Pi_\sigma \right] \rho_{pd} \\
& + \sum_{ij} \gamma_{ij} \mathcal{D} \left[\sum_\sigma \delta_{iq_j} \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho_{pd} + \kappa \mathcal{D} \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho_{pd} = \mathcal{L}_p \rho_{pd},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

où

$$H_D^Q = \sum_\sigma \hbar \tilde{\omega}_\sigma \Pi_\sigma + \sum_{\sigma j} \hbar \lambda_{q_j j} (\epsilon_c(t) \Pi_\sigma^{j+} + \text{c.h.}) + \sum_{\substack{j < l \\ \sigma}} \hbar J_{q_j j q_l} (\Pi_\sigma^{j+} \Pi_\sigma^{l-} + \text{c.h.}), \tag{2.27}$$

est le hamiltonien dispersif associé aux transmons et

$$\Pi_\alpha = \sum_\sigma \alpha_\sigma \Pi_\sigma, \tag{2.28}$$

où α_σ suit l'équation différentielle (annexe C.1)

$$\dot{\alpha}_\sigma = -i(\omega_r + \tilde{\chi}_\sigma) \alpha_\sigma - i\epsilon_m(t) - \frac{\kappa}{2} \alpha_\sigma. \tag{2.29}$$

Ainsi, l'équation maîtresse réduite décrit l'évolution des N transmons en incluant l'effet du résonateur à travers les variables classiques α_σ qui suivent une évolution temporelle dictée par une simple équation différentielle. Dans l'équation maîtresse réduite éq. (2.26), le premier terme représente l'évolution des transmons due au hamiltonien dispersif. La partie réelle du deuxième terme représente le déphasage induit par la mesure tandis que sa partie imaginaire représente le décalage de Stark. Les trois derniers termes représentent respectivement le déphasage des transmons, la relaxation des transmons et l'effet Purcell.

Cas d'un seul transmon

En suivant l'approche de l'annexe C.1 et de la réf. [41], il est possible de montrer que dans le cas d'un seul transmon dans la cavité ($N = 1$) et $\epsilon_c(t) = 0$, l'équation maîtresse réduite s'écrit comme

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{pd} = & -i \left[\sum_{\sigma} \tilde{\omega}_{\sigma} \Pi_{\sigma}, \rho_{pd} \right] - i \Pi_{\alpha} \left[\sum_{\sigma} \tilde{\chi}_{\sigma} \Pi_{\sigma}, \rho_{pd} \right] \Pi_{\alpha}^{*} + \frac{\gamma_{\phi}}{2} \text{D} \left[\sum_{\sigma} \eta_{\sigma} \Pi_{\sigma} \right] \rho_{pd} \\ & + \sum_{\sigma} (\gamma_{\sigma} + \kappa \lambda_{\sigma}^2) \text{D} \left[\Pi_{\sigma}^{-} \right] \rho_{pd} = \mathcal{L}_p \rho_{pd}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Il est important de noter que ce résultat est *exact*.

Cas de deux qubits dégénérés

Soit un système de deux qubits couplés à un résonateur ($M = 2, N = 2$). Supposons que les paramètres du système sont choisis de telle façon à ce que $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg}$ et $\lambda_{00} = -\lambda_{01}$. C'est le cas, par exemple, dans un système où les deux qubits sont dégénérés et où leur couplage à la cavité est tel que $g_{00} = -g_{01}$. Dans ce cas, l'état cohérent du résonateur si les transmons sont dans l'état $|ge\rangle$ sera le même que si les transmons sont dans l'état $|eg\rangle$ ($\alpha_{ge} = \alpha_{eg}$). En effet, l'équation différentielle (2.29) gouvernant l'évolution temporelle de ces deux variables sera exactement la même. De plus, on suppose ici que l'état initial du résonateur est le même peu importe l'état des transmons. En tenant compte de ces symétries et en l'absence d'excitation de contrôle ($\epsilon_c(t) = 0$), les équations (C.12) et (C.13) donnent l'équation maîtresse (annexe C.1.3)

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{pd} \approx & -\frac{i}{\hbar} \left[H_D^Q, \rho_{pd} \right] - i \Pi_{\alpha} \left[\sum_{\sigma} \tilde{\chi}_{\sigma} \Pi_{\sigma}, \rho_{pd} \right] \Pi_{\alpha}^{*} + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \text{D} \left[\sum_{\sigma} \eta_{q_j j} \Pi_{\sigma} \right] \rho_{pd} \\ & + \sum_{ij} \gamma_{ij} \text{D} \left[\sum_{\sigma} \delta_{iq_j} \Pi_{\sigma}^{j-} \right] \rho_{pd} + \kappa \text{D} \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} \Pi_{\sigma}^{j-} \right] \rho_{pd} = \mathcal{L}_p \rho_{pd}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

où

$$H_D^Q = \sum_{\sigma} \hbar \tilde{\omega}_{\sigma} \Pi_{\sigma} + \sum_{\substack{j < l \\ \sigma}} \hbar J_{q_j j q_l} (\Pi_{\sigma}^{j+} \Pi_{\sigma}^{l-} + \text{c.h.}). \quad (2.32)$$

Il est important de noter que cette équation maîtresse est une *approximation*, valide lorsque

$$\gamma_{00}, \gamma_{01} \ll \frac{\kappa}{2}. \quad (2.33)$$

Cette condition est suffisante pour que l'équation maîtresse ci-dessus soit valable. Elle requiert que les photons sortent plus vite de la cavité que les transmons relaxent [41].

2.5.2 Application sur l'équation maîtresse stochastique

La transformation du polaron appliquée à l'EMS dispersive éq. (2.23) est présentée à l'annexe C.2. Cependant, comme dans le cas dispersif, il n'est pas possible d'obtenir une formulation compacte de l'équation maîtresse réduite. Ainsi, il faut à nouveau se restreindre à un cas plus précis ou utiliser une approximation afin d'obtenir un résultat utile en pratique. Dans le cas de l'approximation de la mesure faible, d'un seul transmon ou dans le cas de deux qubits dégénérés, l'EMS réduite s'écrit

$$\dot{\rho}_p = \mathcal{L}_p \rho_p + \sqrt{\kappa\eta} \xi(t) \mathcal{H} [\Pi_\alpha e^{-i\phi}] \rho_p. \quad (2.34)$$

Cette équation est toujours valide dans l'approximation de la mesure faible, et elle est valable dans le cas d'un seul transmon et dans le cas des deux qubits dégénérés si la condition

$$\sum_j \gamma_{q_j j} \ll \frac{\kappa}{2}, \quad (2.35)$$

est respectée pour tout σ (et donc pour tout q_j). Il est intéressant de noter que cette condition est très semblable à celle pour que l'équation maîtresse dispersive réduite dans le cas des deux qubits dégénérés soit valide, éq. (2.33). Ainsi, il sera facile de satisfaire les deux conditions simultanément. L'EMS réduite consiste en l'équation maîtresse dispersive réduite à laquelle un terme associé à la mesure homodyne a été ajouté. L'argument du terme associé à la mesure homodyne a cependant changé : il est passé de $a e^{-i\phi}$ à $\Pi_\alpha e^{-i\phi}$. Ainsi, la mesure du résonateur est maintenant traitée comme une mesure indirecte des transmons. Le courant d'information sortant de la cavité peut maintenant être écrit comme

$$J = \sqrt{\kappa\eta} (\Pi_\alpha e^{-i\phi} + \Pi_\alpha^* e^{i\phi}) + \xi(t). \quad (2.36)$$

Cette manière d'écrire J met en évidence que le courant d'information sortant du résonateur fournit directement de l'information sur l'état des transmons.

2.6 Méthode de simulation numérique

Les résultats de simulations numériques présentés dans le reste de ce document ont été obtenus à l'aide du Sherbrooke QUantum pACKage (SQUACK) [42]. Cette librairie C++ a été développée par Maxime Boissonneault et Steve Allen. Elle permet de simuler le type d'équation maîtresse retrouvé dans ce document. Les équations maîtresses non stochastiques ont été résolues en utilisant un pas de temps adaptatif et les équations stochastiques avec l'algorithme *Platen Strong* au premier ordre en dt [43].

2.7 Évaluation de la validité des approximations

Vu la complexité du calcul fait à l'annexe C, il est important de comparer les équations réduites avec les équations complètes analogues. Les comparaisons ont été faites à l'aide de simulations numériques utilisant la méthode décrite ci-dessus. Seulement le cas à deux qubits est abordé. Tout d'abord, l'évolution dictée par l'équation dispersive réduite a été comparée à l'évolution dictée par l'équation dispersive. Pour se faire, l'erreur absolue maximale E_D a été calculée,

$$E_D = \text{Maximum} [|\rho_D(t_f) - \rho_{pd}(t_f)|], \quad (2.37)$$

où t_f est le temps final de la simulation et où la fonction $\text{Maximum}[X(T)]$ retourne la plus grande valeur absolue de la matrice $X(t)$ et ce sur la plage $t = 0$ à $t = T$. E_D est illustrée en fonction du ratio κ/γ_{00} à la figure 2.2. La valeur de E_D diminue lorsque le ratio κ/γ_{00} augmente. Ainsi, plus le ratio κ/γ_{00} est grand, plus l'erreur commise en utilisant l'équation réduite est petite, comme le prédit la condition (2.33). Pour tous les ratios illustrés, l'erreur est de l'ordre de 10^{-5} , ce qui est négligeable dans nos simulations où les éléments de la matrice densité peuvent être de l'ordre de l'unité.

Il faut utiliser des moyens plus sophistiqués pour comparer l'évolution dictée par l'équation dispersive stochastique et l'évolution dictée par l'équation dispersive stochastique réduite. Tout d'abord, vu la nature stochastique des modèles, les taux de variations peuvent parfois être très grands, ce qui peut causer une très grande différence entre le modèle exact et le modèle réduit à certains points isolés dans le temps. Pour considérer l'erreur globale commise en utilisant le modèle réduit et non seulement certaines erreurs locales dans le temps, il est utile de faire la moyenne temporelle de la différence entre le modèle exact et le modèle réduit. Un autre aspect important dû à la nature stochastique

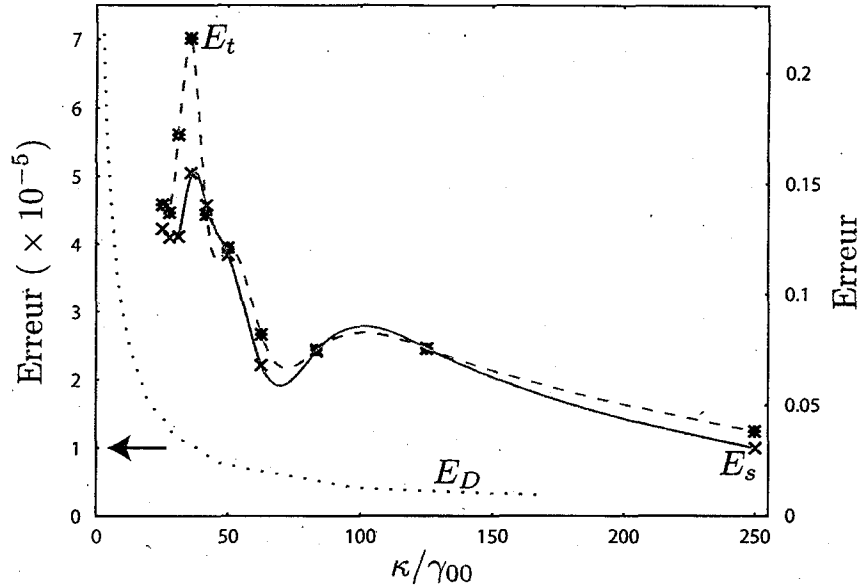


FIGURE 2.2 – Erreur sur les équations réduites en fonction du ratio κ/γ_{00} . La ligne en tirets cyan et la ligne pleine magenta sont des guides pour les yeux. La courbe en pointillés rouge suit l'échelle de gauche tandis que les deux autres suivent celle de droite. Lorsque le ratio κ/γ_{00} est grand, les erreurs tendent vers 0.

des équations est le fait que l'erreur sera elle aussi stochastique. Autrement dit, l'erreur commise en utilisant le modèle réduit ne sera pas la même pour chaque trajectoire. C'est pourquoi il est important de calculer l'erreur commise pour plusieurs trajectoires et de faire la moyenne de ces erreurs. En tenant compte de tout cela, l'erreur moyenne maximale E_s peut s'écrire :

$$E_s = E [\text{Maximum} [\text{Moyenne} (|\rho_{sd} - \rho_p|)]] . \quad (2.38)$$

où la fonction Moyenne(X) retourne les moyennes temporelles des éléments de la matrice X . E_s est illustrée en fonction du ratio κ/γ_{00} à la figure 2.2. Le point important à noter en regardant la figure 2.2 est que pour de grands ratios κ/γ_{00} , l'erreur semble tendre vers 0, comme le prédit la condition (2.35). Pour le ratio utilisé dans le reste de ce mémoire, $\kappa/\gamma_{00} = 250$, l'erreur commise est de l'ordre de 3%. Avec les paramètres utilisés lors des simulations, cette erreur est du même ordre de grandeur que l'erreur introduite en utilisant l'approximation dispersive [36]. Ainsi, puisque l'approximation dispersive permet de décrire d'une manière fructueuse les résultats expérimentaux lors de mesures

de qubits [44], l'approximation introduite ici devrait faire tout aussi bien.

Pour observer l'importance des variations locales de la différence entre le modèle stochastique exact et le modèle stochastique réduit, il est utile de calculer l'écart type moyen E_t .

$$E_t = E [\text{EcartType}(|\rho_{sd} - \rho_p|)]. \quad (2.39)$$

où la fonction $\text{EcartType}(X)$ retourne les écarts types temporels des éléments de la matrice X . Les valeurs de E_t correspondant à E_s sont illustrées en fonction du ratio κ/γ_{00} à la figure 2.2. L'aspect important à noter en regardant la figure 2.2 est encore que pour de grands ratios κ/γ_{00} , l'écart type semble tendre vers 0. Pour le ratio utilisé dans le reste de ce mémoire, l'écart type de l'erreur commise est de l'ordre de 4%. Cet écart type est acceptable puisqu'il est du même ordre que l'erreur moyenne maximale. Ainsi, les erreurs commises en utilisant les modèles réduits ne sont pas trop élevées. Ces modèles réduits pourront donc être utilisés en toute confiance dans le chapitre suivant afin d'étudier la mesure de parité de deux qubits dans un résonateur.

Chapitre 3

Mesures de parité

Dans ce chapitre, la mesure de parité de deux transmons à deux niveaux dans un résonateur sera étudiée. D'abord, dans la première section, l'équation maîtresse stochastique réduite sera réécrite d'une manière permettant de mieux mettre en évidence les quantités mesurées. Ensuite, les différentes quantités d'intérêt lors de la mesure seront décrites dans leur régime stationnaire. C'est ainsi qu'un régime de paramètres idéal pour la mesure de parité sera trouvé. Finalement, des simulations numériques de cette mesure seront présentées. Ces simulations montreront la possibilité d'effectuer ce type de mesure et de l'utiliser pour obtenir des états enchevêtrés d'une manière déterministe à partir d'état mixte. La concurrence de ces états enchevêtrés sera étudiée numériquement dans plusieurs cas d'intérêt.

3.1 Réécriture de l'équation maîtresse stochastique réduite

L'EMS réduite introduite au chapitre précédent à l'équation (2.34) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{pd} = & -\frac{i}{\hbar} \left[H_D^Q, \rho_{pd} \right] - i\Pi_\alpha \left[\sum_\sigma \tilde{\chi}_\sigma \Pi_\sigma, \rho_{pd} \right] \Pi_\alpha^* + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \mathcal{D} \left[\sum_\sigma \eta_{q_j j} \Pi_\sigma \right] \rho_{pd} \\ & + \sum_{ij} \gamma_{ij} \mathcal{D} \left[\sum_\sigma \delta_{iq_j} \Pi_\sigma^j \right] \rho_{pd} + \kappa \mathcal{D} \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} \Pi_\sigma^j \right] \rho_{pd} + \sqrt{\kappa \eta} \xi(t) \mathcal{H} \left[\Pi_\alpha e^{-i\phi} \right] \rho_p, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où, dépendamment de l'approximation utilisée, le hamiltonien H_D^Q prend différentes formes. En réarrangeant les termes, cette équation peut se réécrire

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{pd} = & -\frac{i}{\hbar} [H_D^Q, \rho_{pd}] + \sum_{\sigma\sigma'} \left(\Gamma_d^{\sigma\sigma'} - iA_c^{\sigma\sigma'} \right) \Pi_\sigma \rho_{pd} \Pi_{\sigma'} + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_\sigma \eta_{qj} \Pi_\sigma \right] \rho_{pd} \\ & + \sum_{ij} \gamma_{ij} D \left[\sum_\sigma \delta_{iqj} \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho_{pd} + \kappa D \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{qj} \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho_{pd} \\ & + \mathcal{M}[c_\phi] \rho_{pd} \xi(t) - i [c_{\phi-\pi/2}, \rho_{pd}] \xi(t)/2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$\Gamma_d^{\sigma\sigma'} = (\chi_\sigma - \chi_{\sigma'}) \text{Im} [\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*], \quad (3.3)$$

$$A_c^{\sigma\sigma'} = (\chi_\sigma - \chi_{\sigma'}) \text{Re} [\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*], \quad (3.4)$$

$$c_\phi = \sum_\sigma \sqrt{\Gamma_\sigma(\phi)} \Pi_\sigma, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_\sigma(\phi) = \kappa\eta |\alpha_\sigma|^2 \cos^2(\phi - \theta_\sigma), \quad (3.6)$$

$\mathcal{M}[x]\rho = \{x - \langle x \rangle, \rho\}$ et $\theta_\sigma = \text{Arg}[\alpha_\sigma]$. Sous cette forme, il est facile de différencier le déphasage induit par la mesure $\Gamma_d^{\sigma\sigma'}$ du décalage de Stark $A_c^{\sigma\sigma'}$. De plus, en utilisant cette notation, le courant d'information s'écrit

$$J = \langle c_\phi \rangle + \xi(t). \quad (3.7)$$

Ainsi, la mesure donne de l'information sur c_ϕ . Sous sa nouvelle forme, l'EMS sépare le terme stochastique en deux termes. Le premier, dans lequel apparaît le superopérateur \mathcal{M} , dépend de c_ϕ . C'est pourquoi le superopérateur \mathcal{M} sera désormais nommé *superopérateur de mesure*. Le deuxième terme fait intervenir $c_{\phi-\pi/2}$. Ce terme possède une phase orthogonale à c_ϕ et ne peut donc pas être associé à un gain d'information (une mesure homodyne donne de l'information sur une quadrature à la fois [35]). Cependant, sa présence dans l'équation maîtresse vient tout de même de l'inclusion de la mesure homodyne dans la description de notre système. Ainsi, ce terme représente l'effet de la

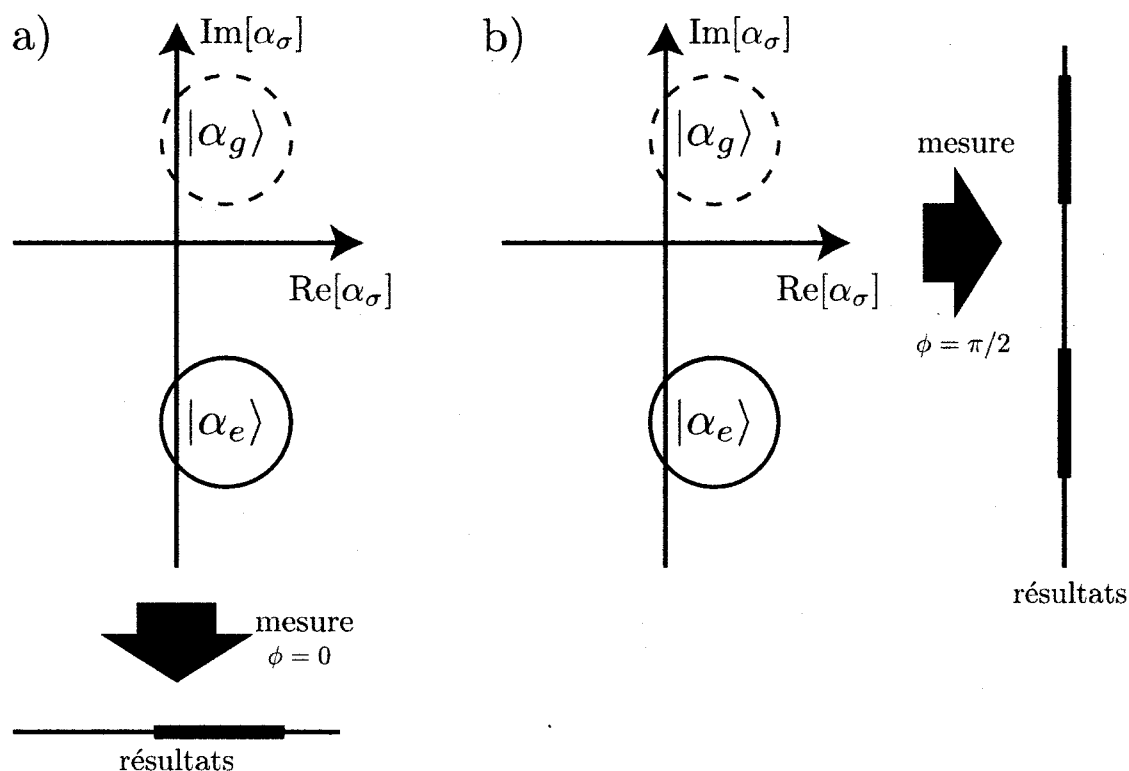


FIGURE 3.1 – Mesure et états cohérents dans un plan complexe. La représentation des états cohérents se fait par des cercles et non par des points pour respecter le principe d’incertitude de Heisenberg [32]. a) La mesure est faite en choisissant $\phi = 0$. La mesure ne révèle aucune information, mais puisque $\alpha_g \neq \alpha_e$, la mesure a tout de même un effet qu’on appelle la rétroaction. b) La mesure est faite en choisissant $\phi = \pi/2$. Tout l’effet de la mesure est associé à un gain d’information. Ainsi, par définition, il n’y a pas de rétroaction.

mesure sur le système sans qu’il n’y ait un gain d’information : c’est la rétroaction de la mesure. Dans une mesure parfaite, $c_{\phi-\pi/2} = 0$. Dans le cas d’un seul qubit ($N = 1$, $M = 2$), cette condition est facilement satisfaite en choisissant ϕ correctement [41]. Par contre, en général, il n’est pas toujours possible de satisfaire cette condition. Il faudra alors se contenter de minimiser $c_{\phi-\pi/2}$ à défaut de le rendre complètement nul.

Il faut faire attention puisque l’utilisation du mot *rétroaction* peut porter à confusion. Tel que défini ici, la rétroaction n’a rien à voir avec le principe d’incertitude de Heisenberg. Pour illustrer ce fait, considérons la mesure d’un seul qubit dans un état arbitraire $a|e\rangle + b|g\rangle$. Lors d’une mesure homodyne, un expérimentateur aura accès à la quantité $\alpha_\sigma e^{-i\phi} +$

$\alpha_\sigma^* e^{i\phi}$, où $\sigma \in \{g, e\}$, $|\alpha_\sigma\rangle$ est l'état cohérent qui se forme dans la cavité si le qubit est dans l'état $|\sigma\rangle$ et où ϕ est la phase de l'oscillateur local. Ainsi, la mesure revient à projeter les états cohérents sur une droite définie par son angle ϕ avec l'axe réel dans le plan complexe, comme à la figure 3.1. Si les états cohérents sont tel que $\alpha_g e^{-i\phi} + \alpha_g^* e^{i\phi} = \alpha_e e^{-i\phi} + \alpha_e^* e^{i\phi}$ pour un ϕ donné, comme à la figure 3.1a) lorsque $\phi = 0$, les deux états ne sont pas distinguables à l'aide de la mesure. Dans ce cas, le courant d'information $J(t) = \xi(t)$, c'est-à-dire que seulement le bruit est mesuré. De plus, si $\alpha_g \neq \alpha_e$, la mesure aura tout de même un effet : la rétroaction. L'effet de la rétroaction sera d'ajouter une phase relative dépendant de $\xi(t)$ à $a|e\rangle + b|g\rangle$. En théorie, cette phase pourrait être déduite à partir de $J(t)$ puisque $J(t) = \xi(t)$. Cependant, en pratique, il s'agit de quelque chose de très difficile à faire puisque le bruit $\xi(t)$ est difficile à complètement caractériser. La figure 3.1b) illustre une mesure sans rétroaction puisque tout l'effet de la mesure est associé à un gain d'information.

3.1.1 Cas de deux qubits dégénérés

Dans une mesure de parité parfaite, aucune information sur l'état individuel des qubits n'est gagnée. Par exemple, dans le cas de deux qubits, la mesure de parité permettra d'apprendre si les qubits sont dans le même état (ee ou gg) ou dans un état différent (eg ou ge), sans permettre d'apprendre l'état du premier ou du second qubit individuellement. Dans le système étudié, la mesure s'effectue grâce au décalage $\tilde{\chi}_\sigma$ de la fréquence de résonance du résonateur. Ainsi, un moyen simple pour acquérir de l'information seulement sur la parité des deux qubits lors de la mesure est que le système étudié réponde à $\tilde{\chi}_{eg} = \tilde{\chi}_{ge}$ et $\tilde{\chi}_{ee} = \tilde{\chi}_{gg}$. Malheureusement, ces deux conditions ne peuvent pas être remplies en même temps. Par contre, comme il sera montré plus loin, ceci ne signifie pas qu'une mesure de parité ne peut pas être effectuée sur un système de deux qubits dans un résonateur.

À défaut de pouvoir remplir les deux conditions sur le décalage de fréquence $\tilde{\chi}_\sigma$ en même temps, un bon départ pour effectuer une mesure de parité est d'en remplir une des deux. Le choix le plus judicieux, pour des raisons qui deviendront claires plus tard, est de remplir la condition $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg}$. Comme nous l'avons vu à la section 2.5, dans cette situation, l'équation (3.2) peut être utilisée, avec

$$H_D^Q = \sum_{\sigma} \hbar \tilde{\omega}_{\sigma} \Pi_{\sigma} + \sum_{j < l} \hbar J_{q_j q_l} (\Pi_{\sigma}^{j+} \Pi_{\sigma}^{l-} + \text{c.h.}), \quad (3.8)$$

dans le cas où

$$\frac{\kappa}{2} \gg \gamma_{00} + \gamma_{01}. \quad (3.9)$$

Pour faire apparaître explicitement le terme responsable de la mesure de parité, il est utile de récrire, pour une troisième et dernière fois, l'EMS réduite (3.2) à l'aide des opérateurs de Pauli. Ceci donne l'EMS réduite

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{pd} = & -\frac{i}{\hbar} [H_D^Q, \rho_{pd}] + \sum_{\sigma\sigma'} \left(\Gamma_d^{\sigma\sigma'} - iA_c^{\sigma\sigma'} \right) \Pi_{\sigma} \rho_{pd} \Pi_{\sigma'} + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D[\sigma_z^j] \rho_{pd} \\ & + \sum_j \gamma_{0j} D[\sigma_-^j] \rho_{pd} + \kappa D \left[\sum_j \lambda_{0j} \sigma_-^j \right] \rho_{pd} \\ & + \mathcal{M}[c_{\phi}] \rho_{pd} \xi(t) - i [c_{\phi-\pi/2}, \rho_{pd}] \xi(t)/2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où

$$c_{\phi} = \sqrt{\Gamma_{10}(\phi)} \sigma_z^1 + \sqrt{\Gamma_{01}(\phi)} \sigma_z^2 + \sqrt{\Gamma_{11}(\phi)} \sigma_z^1 \sigma_z^2, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{ij}(\phi) = \kappa \eta |\beta_{ij}|^2 \cos^2(\phi - \theta_{\beta_{ij}}), \quad (3.12)$$

$$\beta_{ij} = (\alpha_{ee} + (-1)^j \alpha_{eg} + (-1)^i \alpha_{ge} + (-1)^{i+j} \alpha_{gg}) / 2, \quad (3.13)$$

$$H_D^Q = \sum_j \hbar \tilde{\omega}_j \sigma_z + \hbar J_T (\sigma_-^1 \sigma_+^2 + \sigma_+^1 \sigma_-^2). \quad (3.14)$$

Cette forme met clairement en évidence le fait que c_{ϕ} , l'opérateur mesuré, contient trois contributions : les contributions respectives des deux qubits individuels (σ_z^1 et σ_z^2) et la contribution de la parité de ces deux qubits ($\sigma_z^1 \sigma_z^2$). L'information sur ces contributions est gagnée à un taux Γ_{10} (Γ_{01}) pour le premier (deuxième) qubit et à un taux Γ_{11} pour la parité. Ainsi, pour effectuer une mesure de parité, il faut que $\Gamma_{10} = \Gamma_{01} = 0$ et que $\Gamma_{11} \neq 0$.

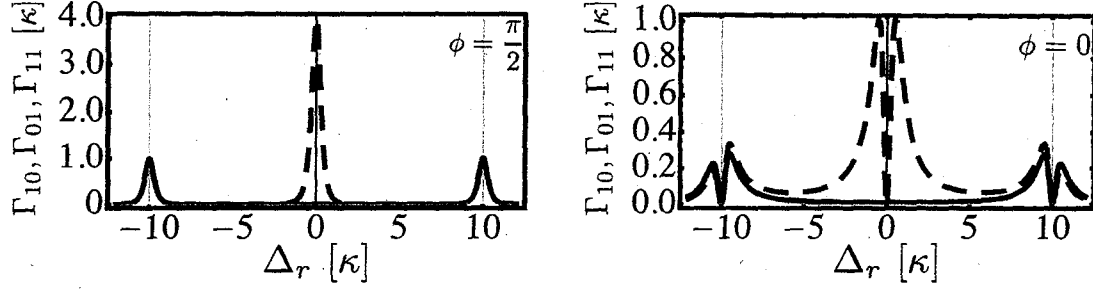


FIGURE 3.2 – Taux de gain d'information stationnaires en fonction de Δ_r pour les quadratures $\phi = \pi/2$ et $\phi = 0$. Les lignes en tirets mauves représentent le taux de gain d'information sur la parité Γ_{11} tandis que les lignes pleines rouges représentent les taux de gain d'informations individuels Γ_{01}, Γ_{10} qui sont égaux. Les paramètres utilisés pour tracer cette figure sont $\epsilon = \kappa$ et $\chi_{e1} = \chi_{e2} = 5\kappa$. Les lignes directrices gris pâle sont situées à $\pm\chi_{ee} = \pm 10\kappa$. Lorsque $\Delta_r = 0$, seulement de l'information sur la parité est acquise pour la quadrature $\phi = \pi/2$.

3.2 Régime de paramètres pour une mesure de parité

L'état cohérent $|\alpha_\sigma\rangle$ peuplant la cavité en présence d'une excitation de mesure $\epsilon_m(t) = \epsilon(t)(e^{-i\omega_d t} + e^{i\omega_d t})$, dans un référentiel tournant à la fréquence ω_d et en utilisant l'approximation séculaire, satisfait l'équation différentielle

$$\dot{\alpha}_\sigma = -i(\Delta_r + \tilde{\chi}_\sigma)\alpha_\sigma - i\epsilon(t) - \frac{\kappa}{2}\alpha_\sigma, \quad (3.15)$$

où $\Delta_r = \omega_r - \omega_d$. $\tilde{\chi}_\sigma$ étant déjà fixé par la restriction $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg}$, les paramètres libres sont la différence de fréquence entre le résonateur et l'excitation de mesure Δ_r (ajustable via la fréquence de l'excitation de mesure), l'amplitude de l'excitation de mesure $\epsilon(t)$ ainsi que le taux de relaxation du résonateur κ . Le premier paramètre étudié sera Δ_r . Cependant, pour bien comprendre le comportement des taux de gain d'information $\Gamma_{01}, \Gamma_{10}, \Gamma_{11}$ en fonction de ce paramètre, il faut étudier en plus de détails la condition $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg}$ et ses implications. Comme le montre l'annexe A, $\tilde{\chi}_{ge} = \chi_{g1} + \chi_{e2} = -\chi_{e1} + \chi_{e2}$, où χ_{gi}, χ_{ei} sont les déplacements de la fréquence de résonance de la cavité associés aux états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ du qubit i . De même, $\tilde{\chi}_{gg} = \chi_{g1} + \chi_{g2} = -\chi_{e1} - \chi_{e2} = -\tilde{\chi}_{ee}$. Ainsi, la condition $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg}$ implique $\chi_{e1} = \chi_{e2}$ et donc $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg} = 0$.

La figure 3.2 illustre les taux de gain d'information $\Gamma_{01}, \Gamma_{10}, \Gamma_{11}$ stationnaires en fonction de Δ_r pour deux valeurs de la phase de l'oscillateur local, $\phi = 0$ et $\phi = \pi/2$. Clairement, lorsque $\Delta_r = 0$, $\Gamma_{01}(\phi = \pi/2) = \Gamma_{10}(\phi = \pi/2) = 0$ et $\Gamma_{11}(\phi = \pi/2) \neq 0$. Ainsi, la

mesure de parité est possible dans le système étudié. Cependant, $\Gamma_{01}(\phi = 0) = \Gamma_{10}(\phi = 0) \neq 0$, ce qui signifie qu'il y aura de la rétroaction due à la mesure. La minimisation de cette rétroaction sera le sujet de la prochaine sous-section.

Lorsque $\Delta_r = \tilde{\chi}_{ee}$ ($\Delta_r = \tilde{\chi}_{gg}$), il est possible, en principe, de distinguer l'état ee (gg) des trois autres états à l'aide de la mesure. Ce fait est visible sur la figure 3.2. En effet, les taux de gain d'information individuels $\Gamma_{01}(\pi/2), \Gamma_{10}(\pi/2)$ sont maximaux pour ces deux points, tandis que la rétroaction $\Gamma_{01}(0), \Gamma_{10}(0), \Gamma_{11}(0)$ est nulle. Ainsi, le choix $\Delta_r = \tilde{\chi}_{ee}$ ($\Delta_r = \tilde{\chi}_{gg}$) permet de faire une mesure parfaite ($c_{\phi-\pi/2} = 0$) des qubits, en gagnant pratiquement autant d'information sur leur état individuel que sur leur état collectif (leur parité).

3.2.1 Optimisation des paramètres dans le régime stationnaire

Cette section a pour but d'optimiser les paramètres pour la mesure de parité dans le régime stationnaire où $\dot{\alpha}_\sigma = 0$. Les restrictions nécessaires à ce type de mesure qui ont été trouvées dans les sections précédentes ($\Delta_r = 0, \tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg}$) seront prises en compte. Le régime stationnaire permet de comprendre comment les différents taux se comportent en fonction des paramètres d'intérêt en gardant les calculs simples. Le régime transitoire sera observé lors des simulations numériques. Dans le cas où l'inverse du taux de dissipation du résonateur $1/\kappa$ est assez petit devant le temps de mesure τ_m , le régime transitoire peut être ignoré complètement. En effet, comme il est montré dans l'annexe D, l'état cohérent $|\alpha_\sigma\rangle$ dans la cavité tend vers sa valeur stationnaire exponentiellement à un taux $\kappa/2$.

Pour avoir une bonne mesure de parité, il faut minimiser trois quantités face à $\Gamma_{11}(\pi/2)$. Premièrement, il faut minimiser la rétroaction. Puisque $\Gamma_{11}(0) = 0$, il ne reste que $\Gamma_{10}(0) = \Gamma_{01}(0)$ à minimiser. Deuxièmement, il faut minimiser le déphasage induit par la mesure entre les états correspondants à la même parité. Les états propres de la mesure de parité affectés par le déphasage sont les états enchevêtrés $|\phi_\theta\rangle = (|eg\rangle + e^{i\theta}|ge\rangle)/\sqrt{2}$ et $|\psi_\theta\rangle = (|ee\rangle + e^{i\theta}|gg\rangle)/\sqrt{2}$ avec θ un nombre réel quelconque. Ainsi, il faut minimiser le déphasage induit par la mesure affectant ces états, c'est-à-dire $\Gamma_d^{eg,ge}$ et $\Gamma_d^{ee,gg}$. Puisque $\tilde{\chi}_{eg} = \tilde{\chi}_{ge}$, $\Gamma_d^{eg,ge}$ est déjà nul (voir annexe D). Il ne reste donc que $\Gamma_d^{ee,gg}$ à minimiser. Finalement, il est utile de minimiser le décalage de Stark affectant les états propres de la mesure de parité, c'est-à-dire $A_c^{eg,ge}$ et $A_c^{ee,gg}$. Encore ici, puisque $\tilde{\chi}_{eg} = \tilde{\chi}_{ge}$, $A_c^{eg,ge} = 0$, ne laissant que $A_c^{ee,gg}$ à minimiser. La minimisation de ces trois quantités revient à la maximisation des trois ratios (voir annexe D) :

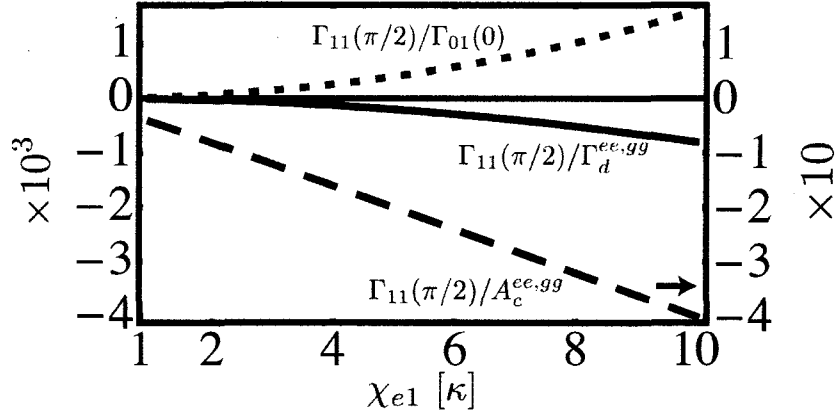


FIGURE 3.3 – Ratios d'intérêt pour la mesure de parité en fonction de χ_{e1} . La courbe en tirets mauves suit l'échelle en dizaine à droite tandis que les deux autres courbes suivent l'échelle en millier à gauche. L'efficacité de la mesure $\eta = 1$. À χ_{e1}/κ élevé, le taux de gain d'information sur la parité $\Gamma_{11}(\pi/2)$ domine en amplitude les taux nuisibles pour la mesure de parité.

$$\frac{\Gamma_{11}(\pi/2)}{A_c^{ee,gg}} = \frac{-2\tilde{\chi}_{ee}^2}{\tilde{\chi}_{ee}^2 - \kappa^2/4} \left(\frac{\tilde{\chi}_{ee}\eta}{\kappa} \right), \quad (3.16)$$

$$\frac{\Gamma_{11}(\pi/2)}{\Gamma_d^{ee,gg}} = -2 \left(\frac{\tilde{\chi}_{ee}\sqrt{\eta}}{\kappa} \right)^2, \quad (3.17)$$

$$\frac{\Gamma_{11}(\pi/2)}{\Gamma_{01}(0)} = 4 \left(\frac{\tilde{\chi}_{ee}}{\kappa} \right)^2. \quad (3.18)$$

La figure 3.3 illustre ces ratios en fonction de χ_{e1} . Il est clair, selon cette figure et les équations ci-dessus, qu'il faut maximiser le ratio $\tilde{\chi}_{ee}/\kappa = 2\chi_{e1}/\kappa$. Si l'efficacité de la mesure n'est pas parfaite ($\eta < 1$), deux de ces ratios sont réduits. Le ratio entre le taux de gain d'information sur la parité et la rétroaction n'est pas affecté par l'efficacité de la mesure puisque $\Gamma_{11}(\pi/2)$ dépend de η de la même manière que $\Gamma_{10}(0)$. Le ratio le plus affecté par une efficacité imparfaite est celui entre le taux de gain d'information sur la parité et le décalage de Stark. De plus, ce ratio dépend de χ_{ee}/κ linéairement tandis que les autres ratios dépendent de χ_{ee}/κ d'une manière quadratique. Heureusement, ce ratio n'est pas que le plus dur à optimiser, c'est aussi le moins important des trois à maximiser. En effet, le décalage de Stark est un effet déterministe, cohérent et connu. Ainsi, son effet peut être corrigé après la mesure. Néanmoins, s'il est assez petit face à

$\Gamma_{11}(\pi/2)$, le décalage de Stark sera négligeable, ce qui en pratique est avantageux.

Une autre condition importante à respecter pour avoir une bonne mesure de parité est que le temps de mesure τ_m soit beaucoup plus petit que les temps de relaxation $1/\gamma_{0i}$ et de déphasage $1/\gamma_{\phi i}$. Le temps de mesure dépend du temps nécessaire pour atteindre le régime stationnaire qui va comme $2/\kappa$ (il faut peupler la cavité avant d'avoir une mesure) et de l'inverse du taux de gain d'information stationnaire sur la parité $\Gamma_{11}(\pi/2)$. Ainsi,

$$1/\tau_m \sim \text{Min} \left[\frac{\kappa}{2}, \Gamma_{11}(\pi/2) \right] \gg \text{Max} [\gamma_{0i}, \gamma_{\phi i}]. \quad (3.19)$$

Autrement dit, une bonne mesure de parité nécessite de maximiser le ratio $\tilde{\chi}_{ee}/\kappa$ tout en ayant un κ assez grand pour pouvoir gagner de l'information assez rapidement. Il faut donc maximiser $\tilde{\chi}_{ee}$. Dans la limite des grands $\tilde{\chi}_{ee}/\kappa$, la condition ci-dessus peut se réécrire (voir annexe D)

$$1/\tau_m \sim \text{Min} \left[\frac{\kappa}{2}, \kappa\eta|\alpha_{eg}|^2 \right] \gg \text{Max} [\gamma_{0i}, \gamma_{\phi i}]. \quad (3.20)$$

Ainsi, l'augmentation du nombre de photons maximal $|\alpha_{eg}|^2 = (2\epsilon/\kappa)^2$ permet d'augmenter la vitesse de la mesure. Cette augmentation pourrait compenser une faible efficacité de mesure η . Par contre, elle ne peut pas compenser un faible κ puisque le nombre de photons dans le résonateur ne change pas la durée du régime transitoire.

En résumé, voici comment choisir les paramètres pour effectuer une mesure de parité. D'abord, il faut choisir les plus grands $\chi_{e1} = \chi_{e2}$ possible, tout en restant dans le régime dispersif. L'opération de la mesure dans le régime dispersif permet d'éviter les transferts d'énergie entre les qubits et le résonateur. En effet, dans le régime dispersif, l'interaction entre ceux-ci est purement virtuelle. Ensuite, il faut choisir κ pour qu'il respecte $\tilde{\chi}_{ee} \gg \kappa \gg \text{Max} [\gamma_{0i}, \gamma_{\phi i}]$. Finalement, il faut envoyer une excitation de mesure en résonance avec la cavité ($\Delta_r = 0$) et d'une amplitude ϵ suffisante pour que le nombre de photons maximal $|\alpha_{eg}|^2$ compense pour l'efficacité imparfaite de la mesure η . Cependant, pour demeurer dans le régime dispersif, ce nombre de photons doit être beaucoup plus petit que le nombre de photon critique $n_{crit} = 1/(4\lambda_{0i}^2)$ [36]. De plus, il est bon de garder en tête que comme le montre l'annexe D, une augmentation de $|\alpha_{eg}|^2$ augmente la grandeur de tous les taux, autant ceux qui aident à la mesure de parité que ceux qui lui nuisent.

3.3 Simulation numérique de la mesure de parité

Dans cette section, la mesure de parité est simulée numériquement en utilisant des paramètres propres à l'électrodynamique quantique en circuit. Les paramètres utilisés sont comparables, mais légèrement meilleurs à ceux qui ont déjà été réalisés expérimentalement. Ainsi, les simulations numériques représentent une expérience qui pourrait être faite dans un futur proche. Premièrement, les taux de dissipation des qubits sont $\gamma_{0i}/(2\pi) = 0.02$ MHz et $\gamma_{\phi i}/(2\pi) = 0$, ce qui correspond à des taux réalistes pour un qubit supraconducteur [30, 45, 46]. Ensuite, le taux de dissipation du résonateur est $\kappa/(2\pi) = 5$ MHz. Le couplage entre la cavité et les qubits est $g_{00} = -g_{01} = 500$ MHz, valeur grande, mais tout de même réaliste pour certains types de qubits supraconducteurs [45, 46]. Ceci permet d'obtenir $\chi_{e1} = \chi_{e2} = 10\kappa = 50$ MHz en choisissant $\lambda_{00} = -\lambda_{01} = 0.1$. Ce choix de λ_{0i} permet à l'état $|\phi_+\rangle = (|eg\rangle + |ge\rangle)/\sqrt{2}$ d'être insensible à l'effet Purcell, la cause majeure de relaxation dans les qubits du type du transmon [47]. De plus, puisque $\tilde{\chi}_{eg} = \tilde{\chi}_{ge}$, cet état est aussi insensible au déphasage induit par la mesure $\Gamma_d^{eg,ge}$ et à la rétroaction de la mesure $\Gamma_{01}(0)$. Ainsi, l'état $|\phi_+\rangle$ est un état très robuste avec notre choix de paramètres. Toutefois, nous choisissons un bruit complètement non corrélé (sans effet Purcell), ce qui correspond au pire bruit possible dans le cas présent. L'état $|\phi_+\rangle$ ne sera donc pas complètement protégé.

3.3.1 Concurrence

L'état initial des simulations sera l'état séparable $|+\rangle_1|+\rangle_2 = (|ee\rangle + |eg\rangle + |ge\rangle + |gg\rangle)/2$, ce qui veut dire que la mesure de parité projettera l'état du système vers les états de Bell $|\phi_+\rangle$ et $|\psi_+\rangle = (|ee\rangle + |gg\rangle)/\sqrt{2}$. Ainsi, la mesure permet de partir d'un état complètement séparable et de créer un état enchevêtré. Un des moyens pour évaluer l'efficacité de la mesure est de vérifier si celle-ci réduit bien l'état du système à un de ses deux états propres enchevêtrés. Ainsi, l'observation du degré d'enchevêtrement des qubits en fonction du temps permettra d'observer l'effet de la mesure et de l'évaluer, une mesure de parité parfaite donnant toujours des états parfaitement enchevêtrés.

L'évaluation de la mesure de parité nécessite donc un moyen de calculer le niveau d'enchevêtrement d'une matrice densité ρ . C'est exactement ce que la concurrence fait. Dans le cas de deux qubits, celle-ci s'écrit [48]

$$C(\rho) = \text{Maximum}[0, E_1 - E_2 - E_3 - E_4], \quad (3.21)$$

où les E_i sont les racines carrées des valeurs propres en ordre décroissant de la matrice non-hermitique $\rho(\sigma_y^1 \sigma_y^2 \rho^* \sigma_y^1 \sigma_y^2)$. Les E_i sont des nombres positifs réels [48]. La concurrence est reliée de manière monotone à l'enchèvement. Une concurrence de 1 signifie un état complètement enchevêtré et une concurrence de 0 signifie un état complètement mixte ou séparable. Ainsi, la concurrence permet de bien évaluer l'enchèvement entre deux qubits.

La concurrence est une fonction non linéaire de ρ . Ainsi, $E[C(\rho)] \neq C(E[\rho])$. Dans le cas de la mesure de parité avec l'état initial choisi ci-dessus, $C(E[\rho]) \approx 0$. En effet, la moitié du temps, la mesure donnera l'état $|\phi_+\rangle$ et l'autre moitié du temps, elle donnera l'état $|\psi_+\rangle$. Ainsi, $C(E[\rho])$ revient à calculer la concurrence de $\rho_{\phi\psi} = (|\psi_+\rangle\langle\psi_+| + |\phi_+\rangle\langle\phi_+|)/2$, un état mixte qui ne possède aucun enchevêtré. Il faudra donc calculer $E[C(\rho)]$. Ce n'est cependant pas ce qui sera fait expérimentalement. Dans une expérience, le protocole de mesure sera répété de nombreuses fois sur le même système dans le même état initial afin d'augmenter le rapport signal sur bruit (celui-ci est encore trop faible pour donner des résultats utiles lors d'une seule mesure). Chaque fois, le résultat de la mesure indiquera soit une parité positive ($\langle\sigma_z^1 \sigma_z^2\rangle = 1$) ou négative ($\langle\sigma_z^1 \sigma_z^2\rangle = -1$). Ensuite, les expérimentateurs feront la moyenne d'ensemble des matrices densité de parité positive ($\bar{\rho}_{\psi_+}$) et la moyenne d'ensemble des matrices densité de parité négative ($\bar{\rho}_{\phi_+}$). Ils calculeront ensuite la concurrence de ces deux quantités. Dans un cas idéal, ils devraient obtenir $C(\bar{\rho}_{\phi_+}) = C(\bar{\rho}_{\psi_+}) = 1$.

3.3.2 Mesure de parité

Avant toute chose, il est important de noter que lors des simulations discutées ci-dessus, l'interaction d'échange entre les qubits a été négligée ($J_T = 0$). Ce choix a été fait pour n'observer que la concurrence créée par la mesure (l'interaction d'échange peut enchevêtrer les qubits). Négliger J_T est correct dans le cas présent puisque les états propres de la mesure ($|\phi_+\rangle$ et $|\psi_+\rangle$) sont aussi des états propres de l'interaction d'échange.

Lors d'une mesure, la quantité accessible expérimentalement est le courant d'information J . Cependant, cette quantité en tant que telle n'est pas très utile puisqu'elle est très bruyante. En fait, la quantité utile est le courant intégré

$$s(t) = \int_0^t J(t') dt'. \quad (3.22)$$

Cette quantité a été calculée lors des simulations numériques. Deux histogrammes repré-

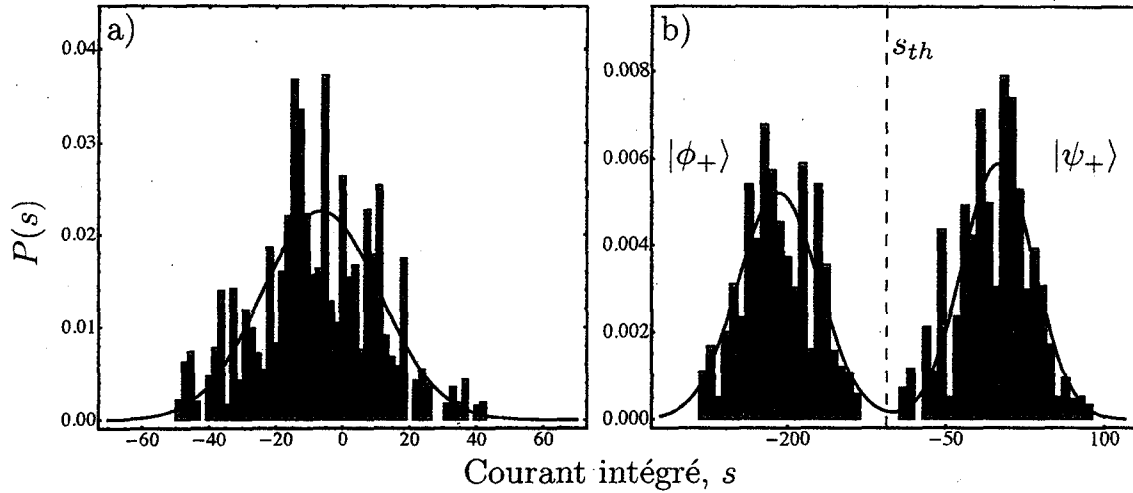


FIGURE 3.4 – Densité de probabilité $P(s)$ des courants intégrés pour a) $t = 50$ ns et b) $t = 200$ ns. Ces courants ont été obtenus lors de 10000 trajectoires du système. Les paramètres utilisés dans les simulations numériques ayant permis d’obtenir ces courants sont ceux indiqués en début de section, sauf qu’il n’y a pas de dissipation sur les qubits. Avec ces paramètres, $\tau_m \sim 10^2$ ns. Les courbes bleues sont des gaussiennes ajustées aux données. L’information acquise lors de la mesure permet de distinguer deux cas différents associés aux deux résultats possibles de la mesure de parité.

sentant cette quantité sont illustrés à la figure 3.4. Ceux-ci représentent les différents s obtenus pour dix mille trajectoires et ce à deux temps différents. Les simulations ayant mené à cette figure n’incluent pas la dissipation sur les qubits et supposent une efficacité parfaite de mesure ($\eta = 1$) pour bien illustrer le phénomène en question. En a), le temps t est petit face au temps de mesure τ_m . Ainsi, il n’est pas possible de distinguer $|\phi_+\rangle$ de $|\psi_+\rangle$ et la mesure ne donne aucune information. En b), le temps t est de l’ordre du temps de mesure τ_m . Deux gaussiennes sont observées, correspondant aux états $|\phi_+\rangle$ et $|\psi_+\rangle$. Ces deux gaussiennes se séparent à un taux de l’ordre de $1/\tau_m$.

La fidélité d’une matrice densité ρ à état pur $|\theta\rangle$ est définie comme $F_\theta(\rho) = \text{Tr}[\rho|\theta\rangle\langle\theta|]$. La figure 3.5 représente les fidélités moyennes aux états $|\phi_+\rangle$ et $|\psi_+\rangle$ en fonction du temps, dans un système avec et sans dissipation. Dans le cas idéal, la fidélité moyenne à l’état $|\phi_+\rangle$ est de l’ordre de 0.5 puisqu’environ la moitié des trajectoires finissent dans cet état. La fidélité moyenne à l’état $|\psi_+\rangle$ oscille en fonction du temps en raison du décalage de Stark $A_c^{ee,gg}$. Elle oscille entre ~ 0.5 et ~ 0 . La fidélité à l’état $|\psi_+\rangle$ ne sera jamais parfaite en raison de la rétroaction de la mesure $\Gamma_{01}(0)$ et du déphasage induit par la mesure $\Gamma_d^{ee,gg}$ qui ne seront jamais exactement nuls. Lorsqu’il y a de la dissipation sur les

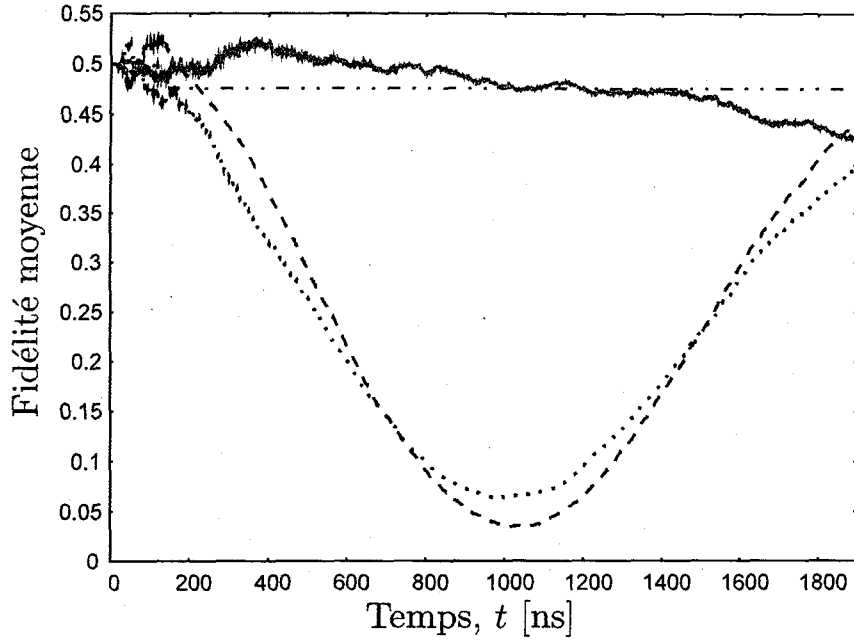


FIGURE 3.5 – Fidélité moyenne en fonction du temps pour un système régi par les paramètres discutés en début de section, avec $(\gamma_{0i}/(2\pi), \eta) = (0, 1)$ pour la courbe en tirets rouge et pour la courbe en tirets-pointillés verte et avec $(\gamma_{0i}/(2\pi), \eta) = (0.02 \text{ MHz}, 1/20)$ pour la courbe pleine mauve et pour la courbe en pointillés bleue. Les courbes en tirets rouge et en pointillés bleue représentent la fidélité moyenne à l'état $|\psi_+\rangle$ tandis que les deux autres représentent la fidélité moyenne à l'état $|\phi_+\rangle$. La moyenne a été faite sur 10000 trajectoires. La fidélité à l'état $|\psi_+\rangle$ oscille dans le temps à cause du décalage de Stark.

qubits et une efficacité de mesure imparfaite, la fidélité moyenne à l'état $|\phi_+\rangle$ diminue avec le temps puisque la relaxation amène les qubits vers leur état fondamental $|gg\rangle$. L'amplitude d'oscillation de la fidélité moyenne associée à l'état $|\psi_+\rangle$ va aussi diminuer, mais elle ne tendra pas vers zéro puisque les états $|gg\rangle$ et $|\psi_+\rangle$ ne sont pas orthogonaux. Le fait que la mesure ne soit pas parfaite ($\eta < 1$) ne change rien à la fidélité moyenne puisque celle-ci est la même pour $\rho_{\phi\psi} = (|\psi_+\rangle\langle\psi_+| + |\phi_+\rangle\langle\phi_+|)/2$ que dans le cas où la moitié des trajectoires tendent vers $|\psi_+\rangle$ et l'autre moitié tendent vers $|\phi_+\rangle$. Or, les taux $\Gamma_d^{eg,ee}$ et $\Gamma_d^{eg,gg}$ vont amener la matrice densité initiale associée à l'état $|+\rangle_1|+\rangle_2$ à la matrice $\rho_{\phi\psi}$ peu importe la valeur de η . En effet, $\Gamma_d^{eg,ee}$ et $\Gamma_d^{eg,gg}$ ne dépendent pas de η . Ainsi, la fidélité ne permet pas de faire la distinction entre une moyenne d'états mixtes et une moyenne d'états purs. Autrement dit, $F_\theta(E[\rho]) = E[F_\theta(\rho)]$. Il sera donc nécessaire de déterminer la concurrence pour voir si le schéma de mesure fonctionne correctement.

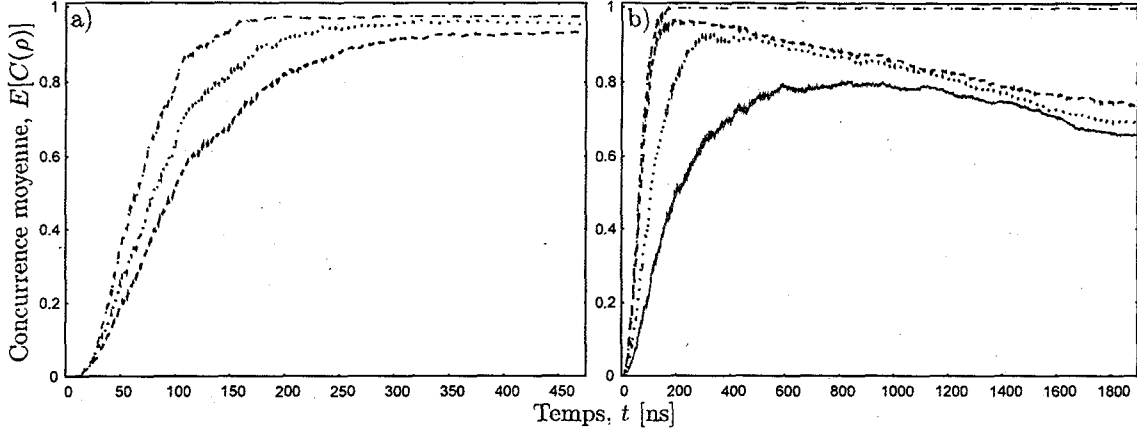


FIGURE 3.6 – Concurrence moyenne en fonction du temps pour 10000 trajectoires. a) Il n’y a pas de dissipation sur toutes les courbes. La courbe rouge en tirets-pointillés est pour $\eta = 1$ et les deux autres sont pour $\eta = 0.43$ (courbe bleue en pointillés) et $\eta = 0.24$ (courbe verte en tirets). La courbe rouge en tirets-pointillés est pour un régime de paramètres dans lequel $\chi_{e1}/\kappa = 1.5$ et les deux autres sont pour un régime de paramètres dans lequel $\chi_{e1}/\kappa = 4.5$. b) Ces courbes ont été réalisées avec les paramètres indiqués au début de cette section, excepté pour la courbe rouge en tirets-pointillés pour laquelle il n’y a pas de dissipation sur les qubits. Pour ces courbes, $\eta = 1$ (courbe rouge en tirets-pointillés), $\eta = 0.8$ (courbe verte en tirets), $\eta = 0.2$ (courbe bleue en pointillés), $\eta = 0.05$ (courbe mauve pleine). Les concurrences élevées obtenues en b) indiquent la présence d’états enchevêtrés après la mesure.

La concurrence moyenne en fonction du temps est illustrée à la figure 3.6 pour les paramètres discutés ci-dessus en b) et des paramètres pour lesquels $\chi_{e1} < 10\kappa$ en a). Dans les cas sans dissipation, la concurrence atteint rapidement un maximum et ne change plus ensuite. Ceci indique que la mesure réduit l’état à un état enchevêtré dans chaque trajectoire. La concurrence n’est jamais exactement 1 en raison du déphasage induit par la mesure $\Gamma_d^{ee,gg}$. Cependant, comme annoncé plus haut, l’augmentation du ratio χ_{e1}/κ se traduit bien par une diminution de $\Gamma_d^{ee,gg}$, ce qui se manifeste par une augmentation de la concurrence maximale de la figure 3.6a) à la figure 3.6b). En présence de dissipation et pour une efficacité imparfaite de la mesure, la concurrence atteint son maximum plus tard. Ceci s’explique par le fait qu’une efficacité imparfaite de mesure diminue $\Gamma_{11}(\pi/2)$ ce qui augmente τ_m . De plus, lorsque le maximum est atteint, la concurrence commence à diminuer plutôt que de rester constante. Ceci s’explique par la relaxation qui tend à amener le système vers son état fondamental $|gg\rangle$. Ainsi, le maximum de la concurrence est atteint lorsque le taux de gain d’information $\Gamma_{11}(\pi/2)$ compense exactement la

relaxation. Après ce maximum, la relaxation prend le dessus sur le taux de gain d'information $\Gamma_{11}(\pi/2)$ et la concurrence diminue. La figure 3.6a) illustre aussi deux courbes sans relaxation, mais pour lesquelles l'efficacité de la mesure est imparfaite. Ces courbes atteignent un maximum et restent constantes par la suite. Par contre, elles pourraient aussi diminuer après avoir atteint leur maximum en raison du déphasage induit par la mesure $\Gamma_d^{ee,gg}$. Aussi, le maximum atteint par ces courbes est plus petit que dans le cas où l'efficacité de la mesure est parfaite. Ceci s'explique par le fait qu'une diminution de η va diminuer le ratio entre le taux de gain d'information $\Gamma_{11}(\pi/2)$ et le déphasage induit par la mesure $\Gamma_d^{ee,gg}$.

Il est aussi utile de reproduire ce qui serait fait expérimentalement. Ainsi, à un temps fixe (le temps où la concurrence atteint son maximum), les matrices densité sont séparées en deux groupes en fonction d'une valeur seuil du courant intégré s . Cette valeur seuil est notée s_{th} , voir figure 3.4b). Les matrices densité associées à une valeur plus grande (plus petite) de s que s_{th} sont conservées et elles sont considérées comme étant de parité positive (négative). La moyenne de ces matrices densité est faite et la concurrence ainsi que la fidélité à $|\psi_+\rangle$ ($|\phi_+\rangle$) sont calculées en fonction de s_{th} . Ces valeurs sont illustrées à la figure 3.7. Lorsque la fraction des matrices conservées pour faire la moyenne est de l'ordre de 0.5, s_{th} se situe entre les deux gaussiennes sur la figure 3.4b). Il est donc situé à une valeur optimale pour séparer les deux états. Comme attendu, la fidélité et la concurrence de l'état $|\phi_+\rangle$ pour un s_{th} optimal sont parfaites, figure 3.7a). Par contre, la fidélité et la concurrence de l'état $|\psi_+\rangle$ sont inférieures à 1 pour un s_{th} optimal, même sans dissipation, figure 3.7b). Ceci s'explique par le fait que le déphasage induit par la mesure et la rétroaction de la mesure sont non nuls pour cet état. Toujours sur la figure 3.7b), la concurrence tend vers 1 lorsque s_{th} est grand puisque dans ce cas, une plus petite fraction des matrices densité sont conservées pour faire la moyenne. Or, dans le cas présent, la rétroaction de la mesure change des états enchevêtrés en d'autres états enchevêtrés. En effet, puisqu'elle est complètement réelle avec les paramètres utilisés, la rétroaction a une contribution dans l'équation maîtresse qui est purement imaginaire. Ainsi, son effet est de changer la phase de l'état $|\psi_+\rangle$ d'une manière aléatoire. Donc, si une seule matrice densité est considérée, celle-ci aura tout de même une concurrence de 1, mais sa fidélité à l'état attendu ($|\psi_+\rangle$) sera moins grande que prévu. C'est justement ce qui se produit sur la figure 3.7b) lorsque s_{th} devient grand : de moins en moins d'états sont utilisés pour faire la moyenne, la concurrence tend vers 1 et la fidélité à l'état $|\psi_+\rangle$ diminue. En incluant la dissipation sur les qubits et une efficacité de mesure imparfaite,

figure 3.7c) et d), la concurrence maximale et la fidélité maximale sont diminuées. Néanmoins, des concurrences et des fidélités élevées sont obtenues ce qui indique que l'objectif d'implémenter une mesure de parité à l'aide de deux qubits supraconducteurs dans un résonateur est atteignable.

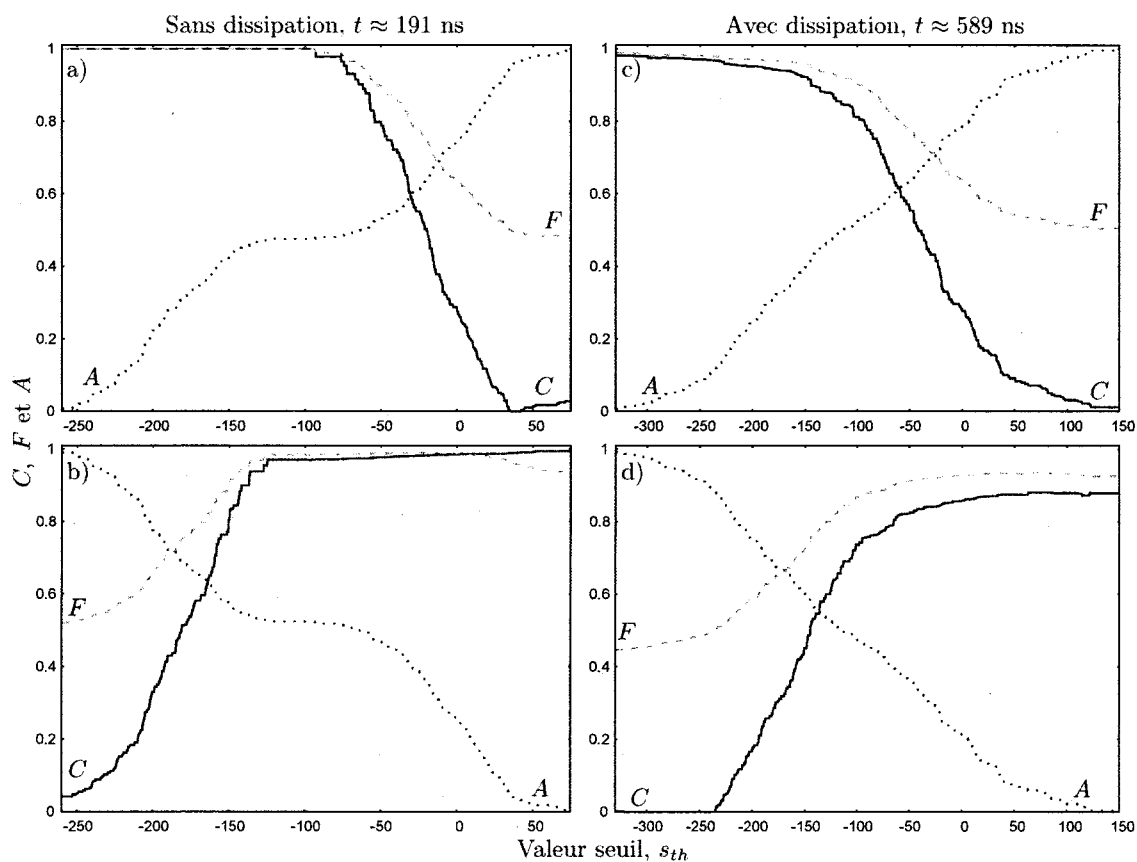


FIGURE 3.7 – Concurrence C (courbe pleine rouge), fidélité F (courbe en tirets verte) et fraction des matrices acceptées A (courbe en pointillés bleue) pour la moyenne des matrices densité de parité positive $\bar{\rho}_{\psi_+}$, b) et d), et négative $\bar{\rho}_{\psi_-}$, a) et c). Voir le texte pour savoir comment ces moyennes de matrices densité sont calculées en fonction de la valeur seuil s_{th} . La fraction des matrices acceptées (conservées) A indique le nombre de matrices densité utilisées pour faire la valeur moyenne sur les 10000 matrices densité associées aux trajectoires. La moyenne des matrices densité associées à une parité positive $\bar{\rho}_{\psi_+}$ a été corrigée pour annuler le décalage de Stark. Les hautes fidélités et les hautes concurrences obtenues pour une fraction des matrices conservées optimale ($A \approx 0.5$) indiquent que c'est bien une mesure de parité qui est effectuée sur le système.

Conclusion

Dans ce mémoire, la mesure d'un système de N transmons de M niveaux couplés à un résonateur a été étudiée. La transformation du polaron a été appliquée sur le système, ce qui a permis d'obtenir une équation maîtresse transformée très générale. Cette équation pourra être utilisée sans problème dans le but de développer des équations maîtresses réduites avec différentes approximations. Dans ce travail, elle a été réduite dans plusieurs cas d'intérêt. Entre autres, le cas où deux transmons de deux niveaux sont couplés à un résonateur a été étudié. Il a été montré que, dans ce cas, lorsque le décalage de fréquence entre le résonateur et les transmons est beaucoup plus grand que leur couplage, il est possible d'effectuer une mesure de parité. Il a aussi été montré que cette mesure peut servir à enchevêtrer deux qubits d'une manière déterministe.

D'une manière plus précise, au chapitre 1, les systèmes d'intérêt ont été présentés d'une manière qualitative dans le but de donner une intuition sur le système de N transmons de M niveaux couplés au résonateur. Dans le chapitre 2, les équations régissant l'évolution du système, avec et sans dissipation, ont été présentées. Il s'agit respectivement de l'équation maîtresse et du hamiltonien. Pour tenir compte que nous nous plaçons dans le régime où l'interaction entre le résonateur et les transmons est purement virtuelle, la transformation dispersive a été appliquée sur ces équations. Ensuite, la mesure d'un système a été abordée, distinguant la mesure ponctuelle de la mesure continue. Ceci a permis d'introduire les concepts de trajectoires quantiques et de mesure homodyne. Une équation maîtresse stochastique incluant ces concepts a été présentée. Par la suite, la transformation du polaron a été appliquée sur l'équation maîtresse dispersive et stochastique et certaines approximations permettant d'obtenir une équation maîtresse réduite ont été explorées.

Au chapitre 3, les équations maîtresses réduites ont été réécrites dans le but de mieux mettre en évidence la mesure de parité. La mesure de parité a été définie, et le régime de paramètre permettant de la réaliser a été mis en évidence. Les caractéristiques clef de la

mesure de parité, comme le temps de mesure τ_m , la rétroaction à la mesure $\Gamma_{ij}(\phi - \pi/2)$ et le déphasage des états propres de la mesure $\Gamma_d^{ee,gg}$ ont été étudiées. Par la suite, un ensemble de simulations numériques a permis de vérifier le comportement prédit de la mesure de parité en fonction de ses paramètres. Aussi, la concurrence, une mesure de l'enchevêtrement d'une matrice densité de deux qubits, a été utilisée. À l'aide de celle-ci, il a été montré qu'en commençant dans un état initial donné, les états propres de la mesure de parité étaient bien deux états enchevêtrés. Ainsi, la mesure de parité permet bien d'obtenir un état enchevêtré à partir d'un état séparable d'une manière déterministe. Les simulations numériques indiquent aussi que la mesure de parité pourrait être effectuée bientôt dans une architecture d'électrodynamique quantique en circuit.

La possibilité d'effectuer une mesure de parité est un pas important pour pouvoir un jour implémenter des codes correcteurs d'erreurs quantiques. Ainsi, la caractérisation de la mesure de parité ouvre la porte à l'implémentation du code à trois qubits dans un système composé de trois transmons et d'un résonateur. Des travaux futurs pourraient observer l'influence des niveaux supérieurs du transmon sur la mesure de parité. Ils pourraient aussi tenter de caractériser la mesure sans utiliser l'approximation dispersive.

Annexe A

Hamiltonien dispersif

Soit le hamiltonien (2.7)

$$H = \sum_{ij} \hbar\omega_{ij} |i\rangle_j \langle i| + \hbar\omega_r a^\dagger a + \left(\sum_{ij} \hbar g_{ij} |i\rangle_j \langle i+1| a^\dagger + \text{c.h.} \right) + \hbar (\mathcal{E}(t) a^\dagger + \text{c.h.}). \quad (\text{A.1})$$

Ce hamiltonien peut se ré-écrire d'une manière différente, mais équivalente, en appliquant une transformation unitaire U sur celui-ci :

$$H' = U^\dagger H U - i\hbar U^\dagger \dot{U}, \quad (\text{A.2})$$

où le deuxième terme est nécessaire pour préserver la forme de l'équation de Schrödinger. Dans le régime où le couplage effectif entre le résonateur et les transmons est faible ($|\lambda_{ij}| \ll 1$ pour tout i, j), une transformation similaire à celle utilisée dans la réf. [20] est intéressante à appliquer :

$$U = \exp \left[\sum_{ij} \lambda_{ij} (|i\rangle_j \langle i+1| a^\dagger - \text{c.h.}) \right]. \quad (\text{A.3})$$

En utilisant la relation de Hausdorff, le hamiltonien transformé (dit hamiltonien dispersif) peut s'écrire, au premier ordre en λ_{ij} ,

$$\begin{aligned}
H_D = & \hbar \left(\omega_r + \sum_{ij} \tilde{\chi}_{ij} |i\rangle_j \langle i| \right) a^\dagger a + \sum_{ij} \hbar \tilde{\omega}_{ij} |i\rangle_j \langle i| + \sum_{ij} \hbar \lambda_{ij} (\epsilon_c(t) |i+1\rangle_j \langle i| + \text{c.h.}) \\
& + \sum_{\substack{j < l \\ ik}} \hbar J_{ijkl} (|i+1\rangle_j \langle i| \otimes |k\rangle_l \langle k+1| + \text{c.h.}) + \hbar (\epsilon_m(t) a^\dagger + \text{c.h.}),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

où

$$\tilde{\chi}_{ij} = \chi_{i-1,j} \Theta_{i-1} - \chi_{ij}, \tag{A.5}$$

$$\tilde{\omega}_{ij} = \omega_{ij} + \chi_{i-1,j} \Theta_{i-1}, \tag{A.6}$$

$$J_{ijkl} = \frac{g_{ij} g_{kl}}{2 \Delta_{ij} \Delta_{kl}} (\Delta_{ij} + \Delta_{kl}), \tag{A.7}$$

et $\chi_{ij} = g_{ij}^2 / \Delta_{ij}$. La fonction Θ_x vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon. L'approximation séculaire [36] a été utilisée pour réduire $\mathcal{E}(t)$ à $\epsilon_c(t)$ où $\epsilon_m(t)$ selon les circonstances.

Il est possible de récrire le hamiltonien dispersif H_D en sommant sur les états plutôt qu'en sommant sur les niveaux et sur les transmons. Il prend alors la forme

$$\begin{aligned}
H_D = & \hbar \left(\omega_r + \sum_{\sigma} \tilde{\chi}_{\sigma} \Pi_{\sigma} \right) a^\dagger a + \sum_{\sigma} \hbar \tilde{\omega}_{\sigma} \Pi_{\sigma} + \sum_{\sigma j} \hbar \lambda_{q_j j} (\epsilon_c(t) \Pi_{\sigma}^{j+} + \text{c.h.}) \\
& + \sum_{\substack{j < l \\ \sigma}} \hbar J_{q_j j q_l} (\Pi_{\sigma}^{j+} \Pi_{\sigma}^{l-} + \text{c.h.}) + \hbar (\epsilon_m(t) a^\dagger + \text{c.h.}),
\end{aligned} \tag{A.8}$$

où

$$\tilde{\chi}_{\sigma} = \sum_j \tilde{\chi}_{q_j j}, \tag{A.9}$$

$$\tilde{\omega}_{\sigma} = \sum_j \tilde{\omega}_{q_j j}. \tag{A.10}$$

Annexe B

Équation maîtresse dispersive

L'équation maîtresse s'écrit comme

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \kappa D[a] \rho + \sum_{ij} \gamma_{ij} D[|i\rangle_j \langle i+1|] \rho + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_i \eta_{ij} |i\rangle_j \langle i| \right] \rho. \quad (\text{B.1})$$

En transformant les opérateurs de cette équation de la même manière que le Hamiltonien a été transformé dans l'annexe A, l'équation maîtresse dispersive est obtenue. Cette méthode fonctionne puisque la transformation U utilisée ne dépend pas du temps. Par contre, puisque pour une constante c quelconque, $D[cx] \rho = c^2 D[x] \rho$, les opérateurs à l'intérieur des dissipateurs n'ont pas besoin d'être transformés. En effet, une transformation au premier ordre en λ_{ij} dans un dissipateur donne un terme au deuxième ordre en λ_{ij} dans l'équation maîtresse, termes qui sont négligés dans notre approche. Cependant, les termes de l'ordre $\kappa \lambda_{ij}^2$ ne seront pas négligés puisque κ peut être grand. Une fois transformés, les opérateurs deviennent, au premier ordre en λ_{ij} ,

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H_D, \\ a &\rightarrow a + \sum_{ij} \lambda_{ij} |i\rangle_j \langle i+1|, \end{aligned}$$

où H_D est donné à l'équation (A.8). Il suffit ensuite d'utiliser l'approximation séculaire pour écrire l'équation maîtresse dispersive comme

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_D = & -\frac{i}{\hbar} [H_D, \rho_D] + \kappa D [a] \rho_D + \sum_{ij} \gamma_{ij} D [|i\rangle_j \langle i+1|] \rho_D \\
& + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_i \eta_{ij} |i\rangle_j \langle i| \right] \rho_D + \kappa D \left[\sum_{ij} \lambda_{ij} |i\rangle_j \langle i+1| \right] \rho_D.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Il est possible de récrire l'équation maîtresse dispersive en sommant sur les états plutôt qu'en sommant sur les niveaux et les transmons. Elle prend alors la forme

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_D = & -\frac{i}{\hbar} [H_D, \rho_D] + \kappa D [a] \rho_D + \sum_{ij} \gamma_{ij} D \left[\sum_{\sigma} \Pi_{\sigma}^{j-} \delta_{q_j i} \right] \rho_D \\
& + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_{\sigma} \eta_{q_j j} \Pi_{\sigma} \right] \rho_D + \kappa D \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} \Pi_{\sigma}^{j-} \right] \rho_D.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Annexe C

Application de la transformation du polaron

C.1 Application sur l'équation maîtresse dispersive

C.1.1 Approche générale

L'approche suivie ici sera la même que celle suivie dans la référence [41]. Dans le référentiel du polaron, la matrice densité peut s'écrire comme

$$\rho^P = P^\dagger \rho_D P = \sum_{mn\sigma\sigma'} \rho_{mn\sigma\sigma'}^P |m\sigma\rangle \langle n\sigma'|. \quad (\text{C.1})$$

Ainsi, la matrice densité réduite des transmons peut s'écrire

$$\rho_{pd} = \text{Tr}_{\text{res}}[\rho_D] = \text{Tr}_{\text{res}}[P\rho^P P^\dagger], \quad (\text{C.2})$$

où $\text{Tr}_{\text{res}}[\rho]$ est la trace partielle de ρ sur le résonateur. En récrivant ρ^P comme ci-dessus et en simplifiant, la matrice densité réduite peut s'écrire sous la forme

$$\rho_{pd} = \sum_{\sigma} \sum_n \rho_{nn\sigma\sigma}^P |\sigma\rangle \langle \sigma| + \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{mn} \lambda_{nnmm}^{\sigma\sigma'} |\sigma\rangle \langle \sigma'|, \quad (\text{C.3})$$

où

$$\lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'} = \rho_{mn\sigma\sigma'}^P d_{pq}^{\sigma\sigma'} = \lambda_{mnpq\sigma\sigma'}, \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} d_{pq}^{\sigma\sigma'} &= \langle p | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}) D(\alpha_\sigma) | q \rangle \\ &= \langle p | D(\beta_{\sigma'}^\sigma) | q \rangle \exp[-i \text{Im}[\alpha_{\sigma'} \alpha_\sigma^*]], \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\beta_{\sigma'}^\sigma = \alpha_\sigma - \alpha_{\sigma'}. \quad (\text{C.6})$$

L'équation maîtresse dans le référentiel du polaron s'écrit comme

$$\dot{\rho}^P = P^\dagger \dot{\rho}_D P - P^\dagger \dot{P} \rho^P - \rho^P \dot{P}^\dagger P, \quad (\text{C.7})$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^P &= -i \left[\left(\omega_r + \sum_\sigma \tilde{\chi}_\sigma \Pi_\sigma \right) a^\dagger a + \sum_\sigma \tilde{\omega}_\sigma \Pi_\sigma + \sum_\sigma \Pi_\sigma \text{Re}[\epsilon_m \alpha_\sigma^*], \rho^P \right] \\ &\quad - i \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} (\epsilon_c(t) D^\dagger(\alpha_\sigma^{q_j+1}) D(\alpha_\sigma) \Pi_\sigma^{j+} + \text{c.h.}), \rho^P \right] \\ &\quad - i \left[\sum_{\substack{j < l \\ \sigma}} J_{q_j j q_l} (D^\dagger(\alpha_\sigma^{q_j+1}) D(\alpha_\sigma^{q_l+1}) \Pi_\sigma^{j+} \Pi_\sigma^{l-} + \text{c.h.}), \rho^P \right] \\ &\quad + \kappa D[a] \rho^P + \kappa D[\Pi_\alpha] \rho^P + \kappa a [\rho^P, \Pi_\alpha^*] + \kappa [\Pi_\alpha, \rho^P] a^\dagger \\ &\quad + \sum_{ij} \gamma_{ij} D \left[\sum_\sigma \delta_{q_j i} D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_j+1}) \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho^P + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_\sigma \eta_{q_j j} \Pi_\sigma \right] \rho^P \\ &\quad + \kappa D \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_j+1}) \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho^P. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Dans cette équation,

$$\Pi_\alpha = \sum_\sigma \alpha_\sigma \Pi_\sigma, \quad (\text{C.9})$$

et la notation $\alpha_\sigma^{q_j+1}$ signifie que la variable α est associée à l'état $|\sigma\rangle = |q_1 q_2 q_3 \dots q_j + 1 \dots q_N\rangle$ des transmons. Pour que la dynamique relative au résonateur disparaisse de l'évolution unitaire du système, c'est-à-dire pour que les termes proportionnels à a et a^\dagger disparaissent du Hamiltonien, la variable α_σ est choisie comme étant la solution de l'équation

différentielle

$$\dot{\alpha}_\sigma = -i(\omega_r + \tilde{\chi}_\sigma) \alpha_\sigma - i\epsilon_m(t) - \frac{\kappa}{2}\alpha_\sigma. \quad (\text{C.10})$$

Maintenant, la quantité qui dictera l'évolution temporelle de la matrice densité réduite, $\dot{\rho}_{mn\sigma\sigma'}^P = \langle m\sigma | \dot{\rho}^P | n\sigma' \rangle$, peut être calculée :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{mn\sigma\sigma'}^P &= -i(\omega_r(m-n) + \tilde{\chi}_\sigma m - \tilde{\chi}_{\sigma'} n + \tilde{\omega}_\sigma - \tilde{\omega}_{\sigma'} + \text{Re}[\epsilon_m(t)(\alpha_\sigma^* - \alpha_{\sigma'}^*)]) \rho_{mn\sigma\sigma'}^P \\ &\quad - i \sum_{aj} \left(\rho_{an\sigma\sigma'}^P \lambda_{q_j-1,j}^{q_j-1} \epsilon_c(t) \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_{\sigma'}^{q_j-1}) | a \rangle \Theta_{q_j-1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad + i \sum_{aj} \left(\rho_{ma\sigma\sigma'}^P \lambda_{q'_j,j}^{q'_j+1} \epsilon_c(t) \langle a | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}^{q'_j+1}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle - \text{c.h.} \right) \\ &\quad - i \sum_{j<l} \sum_a \left(\rho_{an\sigma\sigma'}^P \lambda_{q_j-1,j,q_l}^{q_j+1,q_l-1} J_{q_j-1,j,q_l} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_{\sigma'}^{q_l+1,q_j-1}) | a \rangle \Theta_{q_j-1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad + i \sum_{j<l} \sum_a \left(\rho_{ma\sigma\sigma'}^P \lambda_{q'_j,j,q'_l}^{q'_j-1,q'_l+1} J_{q'_j,j,q'_l} \langle a | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}^{q'_l-1,q'_j+1}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle \Theta_{q'_l-1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad + \kappa \left(\sqrt{(m+1)(n+1)} \rho_{m+1,n+1,\sigma\sigma'}^P - \frac{1}{2}(m+n) \rho_{mn\sigma\sigma'}^P \right) \\ &\quad + \kappa \left(\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^* - \frac{1}{2}(|\alpha_\sigma|^2 + |\alpha_{\sigma'}|^2) \right) \rho_{mn\sigma\sigma'}^P \\ &\quad + \kappa \left(\sqrt{m+1} (\alpha_{\sigma'}^* - \alpha_\sigma^*) \rho_{m+1,n\sigma\sigma'}^P + \text{c.h.} \right) \\ &\quad + \sum_j \frac{\gamma_{\phi_j}}{2} \rho_{mn\sigma\sigma'}^P \left(\eta_{q_j j} \eta_{q'_j j} - \frac{1}{2} (\eta_{q_j j}^2 + \eta_{q'_j j}^2) \right) \\ &\quad + \sum_{jab} \left(\gamma_{q_j j} + \kappa \lambda_{q_j j}^2 \right) \delta_{q_j q'_j} \rho_{ab\sigma\sigma'}^P \lambda_{q_j+1,q_j+1}^{q_j+1,q_j+1} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_{\sigma'}^{q_j+1}) | a \rangle \\ &\quad \times \langle b | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}^{q_j+1}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_j \rho_{mn\sigma\sigma'}^P \left((\gamma_{q_j-1,j} + \kappa \lambda_{q_j-1,j}^2) \Theta_{q_j-1} + (\gamma_{q'_j-1,j} + \kappa \lambda_{q'_j-1,j}^2) \Theta_{q'_j-1} \right) \\ &\quad + \kappa \sum_{ij} \sum_{ab} \lambda_{q_i i} \lambda_{q'_j j} \left(1 - \delta_{q_j q'_j} \delta_{ij} \right) \rho_{ab\sigma\sigma'}^P \lambda_{q_i+1,q'_j+1}^{q_i+1,q'_j+1} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_{\sigma'}^{q_i+1}) | a \rangle \\ &\quad \times \langle b | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}^{q'_j+1}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle \end{aligned}$$

$$-\frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ a}} \left(\lambda_{q_i-1,i} \lambda_{q_j,j} \rho_{an\sigma\sigma'}^P \lambda_{q_i-1,q_j+1} \Theta_{q_i-1} \langle m | D^\dagger (\alpha_\sigma) D (\alpha_\sigma^{q_i-1,q_j+1}) | a \rangle + \text{c.h.} \right), \quad (\text{C.11})$$

où $\rho_{mn\sigma\sigma'}^P \lambda_{q_j+1,q_i'+1}$ est le coefficient de l'état associé au projecteur

$$|m, q_1 q_2 q_3 \dots q_j + 1 \dots q_N \rangle \langle n, q'_1 q'_2 q'_3 \dots q'_l + 1 \dots q'_N|.$$

$\lambda_{mnpq\sigma\sigma'}^{q_j+1,q_i'+1}$ est associé à ce même projecteur. Finalement, l'évolution des termes diagonaux de la matrice densité réduite $\dot{\rho}_{pd}^{\sigma\sigma} = \langle \sigma | \dot{\rho}_{pd} | \sigma \rangle$ est

$$\begin{aligned} \sum_n \dot{\rho}_{nn\sigma\sigma}^P &= \sum_{jn} \left(\left(\gamma_{q_j j} + \kappa \lambda_{q_j j}^2 \right) \rho_{nn\sigma\sigma}^P \lambda_{q_j+1,q_j+1} - \Theta_{q_j-1} \left(\gamma_{q_j-1,j} + \kappa \lambda_{q_j-1,j}^2 \right) \rho_{nn\sigma\sigma}^P \right) \\ &\quad - i \sum_{jan} \left(\lambda_{q_j-1,j} \epsilon_c(t) \Theta_{q_j-1} \lambda_{anna\sigma\sigma}^{q_j-1} - \lambda_{q_j,j} \epsilon_c(t) \lambda_{naana\sigma\sigma}^{q_j+1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad - i \sum_{j<l} \sum_{an} \left(J_{q_j-1,j,q_l,t} \Theta_{q_j-1} \lambda_{anna\sigma\sigma}^{q_j-1,q_l+1} - J_{q_j,j,q_l-1,t} \Theta_{q_l-1} \lambda_{naana\sigma\sigma}^{q_j+1,q_l-1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad + \kappa \sum_{i \neq j} \sum_{an} \left(\lambda_{q_i,i} \lambda_{q_j,j} \lambda_{anna\sigma\sigma}^{q_j+1,q_i+1} - \frac{1}{2} \left(\Theta_{q_i-1} \lambda_{q_i-1,i} \lambda_{q_j,j} \lambda_{anna\sigma\sigma}^{q_i-1,q_j+1} + \text{c.h.} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

et l'évolution des termes non diagonaux $\dot{\rho}_{pd}^{\sigma\sigma'} = \langle \sigma | \dot{\rho}_{pd} | \sigma' \rangle$ est

$$\begin{aligned} \sum_{mn} \dot{\lambda}_{mnnm}^{\sigma\sigma'} &= -i \sum_{mn} \left(\omega_r (m - n) + \tilde{\chi}_\sigma m - \tilde{\chi}_{\sigma'} n + \tilde{\omega}_\sigma - \tilde{\omega}_{\sigma'} \right) \lambda_{mnnm}^{\sigma\sigma'} \\ &\quad - i \sum_{jmn} \left(\lambda_{q_j-1,j} \epsilon_c(t) \Theta_{q_j-1} \lambda_{mnnm\sigma\sigma'}^{q_j-1} - \lambda_{q'_j,j} \epsilon_c(t) \lambda_{mnnm\sigma\sigma'}^{q'_j+1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad - i \sum_{j<l} \sum_{mn} \left(J_{q_j-1,j,q_l,t} \Theta_{q_j-1} \lambda_{mnnm\sigma\sigma'}^{q_l+1,q_j-1} - J_{q'_j,j,q'_l-1,t} \Theta_{q'_l-1} \lambda_{mnnm\sigma\sigma'}^{q'_l-1,q'_j+1} - \text{c.h.} \right) \\ &\quad - i \sum_{mn} \left(\tilde{\chi}_\sigma - \tilde{\chi}_{\sigma'} \right) \left(\text{Re} [\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*] + i \text{Im} [\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*] \right) \lambda_{mnnm}^{\sigma\sigma'} \\ &\quad + \kappa \sum_{mn} (1 - \delta_{mn}) \left(\sqrt{(m+1)(n+1)} \lambda_{m+1,n+1,nm}^{\sigma\sigma'} - \frac{1}{2} (m+n) \lambda_{mnnm}^{\sigma\sigma'} \right) \\ &\quad + \sum_{mn} \left(\sqrt{n+1} \left(\kappa \beta_{\sigma'}^\sigma + \dot{\beta}_{\sigma'}^\sigma \right) \lambda_{m,n+1,nm}^{\sigma\sigma'} + \text{c.h.} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{jmn} \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \lambda_{mnm}^{\sigma\sigma'} \left(\eta_{q_j j} \eta_{q'_j j} - \frac{1}{2} \left(\eta_{q_j j}^2 + \eta_{q'_j j}^2 \right) \right) \\
& + \sum_{jmn} \left(\gamma_{q_j j} + \kappa \lambda_{q_j j}^2 \right) \delta_{q_j q'_j} \lambda_{mnm}^{q_j+1; q_j+1} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{jmn} \lambda_{mnm}^{\sigma\sigma'} \left(\Theta_{q_j-1} \left(\gamma_{q_j-1, j} + \kappa \lambda_{q_j-1, j}^2 \right) + \text{c.h.} \right) \\
& + \kappa \sum_{ij} \sum_{mn} \lambda_{q_i i} \lambda_{q'_j j} \lambda_{mnm}^{q_i+1; q'_j+1} \left(1 - \delta_{q_j q'_j} \delta_{ij} \right) \\
& - \frac{\kappa}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{mn} \left(\lambda_{q_i-1, i} \lambda_{q_j j} \lambda_{mnm}^{q_i-1, q_j+1; \Theta_{q_i-1} + \text{c.h.} \right), \tag{C.13}
\end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_{mnpq}^{\sigma\sigma'} & = -i (\omega_r (m-n) + \tilde{\chi}_\sigma m - \tilde{\chi}_{\sigma'} n + \tilde{\omega}_\sigma - \tilde{\omega}_{\sigma'}) \lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'} \\
& - i \sum_{aj} \left(\rho_{ans\sigma'}^{P; q_j-1; \lambda_{q_j-1, j} \epsilon_c(t) \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_j-1}) | a \rangle \Theta_{q_j-1} - \text{c.h.} \right) d_{pq}^{\sigma\sigma'} \\
& + i \sum_{aj} \left(\rho_{mas\sigma'}^{P; q'_j+1; \lambda_{q'_j, j} \epsilon_c(t) \langle a | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle - \text{c.h.} \right) d_{pq}^{\sigma\sigma'} \\
& - i \sum_{a, j < l} \left(\rho_{ans\sigma'}^{P; q_l+1, q_j-1; J_{q_j-1, j, q_l, l} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_l+1, q_j-1}) | a \rangle \Theta_{q_j-1} - \text{c.h.} \right) d_{pq}^{\sigma\sigma'} \\
& + i \sum_{a, j < l} \left(\rho_{mas\sigma'}^{P; q'_l-1, q'_j+1; J_{q'_j, j, q'_l-1, l} \langle a | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle \Theta_{q'_l-1} - \text{c.h.} \right) d_{pq}^{\sigma\sigma'} \\
& - i (\tilde{\chi}_\sigma - \tilde{\chi}_{\sigma'}) (\text{Re} [\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*] + i \text{Im} [\alpha_\sigma \alpha_{\sigma'}^*]) \lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'} \\
& + \kappa \left(\sqrt{(m+1)(n+1)} \lambda_{m+1, n+1, pq}^{\sigma\sigma'} - \frac{1}{2} (m+n) \lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'} \right) \\
& + \kappa \left(\sqrt{n+1} \beta_{\sigma'}^\sigma \lambda_{m, n+1, pq}^{\sigma\sigma'} + \text{c.h.} \right) + \left(\sqrt{p} \beta_{\sigma'}^\sigma \lambda_{mn, p-1, q}^{\sigma\sigma'} + \text{c.h.} \right) \\
& + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} \lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'} \left(\eta_{q_j j} \eta_{q'_j j} - \frac{1}{2} \left(\eta_{q_j j}^2 + \eta_{q'_j j}^2 \right) \right) \\
& + \sum_{jab} \left(\gamma_{q_j j} + \kappa \lambda_{q_j j}^2 \right) \delta_{q_j q'_j} \rho_{ab\sigma\sigma'}^{P; q_j+1; q_j+1} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_j+1}) | a \rangle \\
& \times \langle b | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}^{q_j+1}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle d_{pq}^{\sigma\sigma'} \\
& - \frac{1}{2} \sum_j \lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'} \left(\left(\gamma_{q_j-1, j} + \kappa \lambda_{q_j-1, j}^2 \right) \Theta_{q_j-1} + \left(\gamma_{q'_j-1, j} + \kappa \lambda_{q'_j-1, j}^2 \right) \Theta_{q'_j-1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa \sum_{ij} \sum_{ab} \lambda_{q_i i} \lambda_{q'_j j} \left(1 - \delta_{q_j q'_j} \delta_{ij}\right) \rho_{ab\sigma\sigma'}^{P q_i+1; q'_j+1} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_i+1}) | a \rangle \\
& \times \langle b | D^\dagger(\alpha_{\sigma'}^{q'_j+1}) D(\alpha_{\sigma'}) | n \rangle d_{pq}^{\sigma\sigma'} \\
& - \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ a}} \left(\lambda_{q_i-1, i} \lambda_{q_j j} \rho_{an\sigma\sigma'}^{P q_i-1, q_j+1}; \Theta_{q_i-1} \langle m | D^\dagger(\alpha_\sigma) D(\alpha_\sigma^{q_i-1, q_j+1}) | a \rangle + \text{c.h.} \right) d_{pq}^{\sigma\sigma'}.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

En général, il n'y a aucune manière simple de réduire ces équations à une équation maîtresse compacte pour ρ_{pd} . Cependant, certains cas précis et certaines approximations permettent de simplifier ces équations.

C.1.2 Mesure faible

Lorsque la mesure est très faible, $|\beta_\sigma^\sigma| \ll 1$ pour tout σ, σ' . À l'ordre zéro en β_σ^σ , $d_{pq}^{\sigma\sigma'} \approx \delta_{pq}$ pour tout σ, σ' [41]. Avec cette simplification, le terme hors-diagonal peut s'écrire $\dot{\rho}_{pd}^{\sigma\sigma'} = \dot{\lambda}_{0000}^{\sigma\sigma'}$. En effet, dans le référentiel du polaron, la population de la cavité est initialement nulle. Dans l'approximation considérée, comme dans la réf. [41], il n'y a aucun mécanisme pour augmenter cette population. Ainsi, le seul terme hors diagonale non nul sera le terme pour lequel $m = n = 0$, comme énoncé ci-dessus. Dans ce cas, l'équation maîtresse réduite peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{pd} = & -\frac{i}{\hbar} \left[H_D^Q, \rho_{pd} \right] - i \Pi_\alpha \left[\sum_\sigma \tilde{\chi}_\sigma \Pi_\sigma, \rho_{pd} \right] \Pi_\alpha^* + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_\sigma \eta_{q_j j} \Pi_\sigma \right] \rho_{pd} \\
& + \sum_{ij} \gamma_{ij} D \left[\sum_\sigma \delta_{iq_j} \Pi_\sigma^j \right] \rho_{pd} + \kappa D \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} \Pi_\sigma^j \right] \rho_{pd},
\end{aligned} \tag{C.15}$$

où

$$H_D^Q = \sum_\sigma \hbar \tilde{\omega}_\sigma \Pi_\sigma + \sum_{\sigma j} \hbar \lambda_{q_j j} (\epsilon_c(t) \Pi_\sigma^{j+} + \text{c.h.}) + \sum_{\substack{j < l \\ \sigma}} \hbar J_{q_j j q_l l} (\Pi_\sigma^{j+} \Pi_\sigma^{l-} + \text{c.h.}), \tag{C.16}$$

est le hamiltonien dispersif associé aux transmons.

C.1.3 Deux qubits dégénérés

Dans le cas de deux qubits dégénérés, le système obéit, par hypothèse, aux conditions $\chi_{ge} = \chi_{eg}$, $\lambda_{00} = -\lambda_{01}$ et $\epsilon_c(t) = 0$. Dans cette situation où $\alpha_{ge} = \alpha_{eg}$, l'équation (C.12) se simplifie. Pour obtenir une version compacte de l'équation maîtresse réduite, il faut aussi que le terme hors-diagonal puisse s'écrire $\dot{\rho}_{pd}^{\sigma\sigma'} = \dot{\lambda}_{0000}^{\sigma\sigma'}$ comme dans l'approximation de la mesure faible (annexe C.1.2). Ainsi, il faut qu'il n'y ait aucun mécanisme pour peupler les termes de l'équation (C.13) avec $m, n \neq 0$. Cependant, de tels mécanismes existent dans le cas des deux qubits dégénérés. Ils se manifestent dans les termes $\lambda_{mnpq}^{ge,gg}$ et $\lambda_{mnpq}^{eg,gg}$. En effet, le taux de variation temporel de $\lambda_{mnpq}^{ge,gg}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_{mnpq}^{ge,gg} = & -i(\omega_r(m-n) + \tilde{\chi}_{ge}m - \tilde{\chi}_{gg}n + \tilde{\omega}_{ge} - \tilde{\omega}_{gg}) \lambda_{mnpq}^{ge,gg} \\
& -i(\rho_{mn,eg,gg}^P J_{0,1,0,0} - \text{c.h.}) d_{pq}^{ge,gg} - i(\tilde{\chi}_{ge} - \tilde{\chi}_{gg}) \alpha_{ge} \alpha_{gg}^* \lambda_{mnpq}^{ge,gg} \\
& + \kappa \sqrt{(m+1)(n+1)} \lambda_{m+1,n+1,pq}^{ge,gg} \\
& + \kappa \left(\sqrt{n+1} \beta_{gg}^{ge} \lambda_{m,n+1,pq}^{ge,gg} + \text{c.h.} \right) + \left(\sqrt{p} \beta_{gg}^{ge} \lambda_{mn,p-1,q}^{ge,gg} + \text{c.h.} \right) \\
& - \left(\frac{\kappa}{2}(m+n) + \frac{1}{2}(\gamma_{01} + \kappa \lambda_{00}^2) + \gamma_{\phi 1} \right) \lambda_{mnpq}^{ge,gg} \\
& + \sum_{ab} (\gamma_{00} + \kappa \lambda_{00}^2) \rho_{ab,ee,eg}^P \langle m | D^\dagger(\alpha_{ge}) D(\alpha_{ee}) | a \rangle \langle b | D^\dagger(\alpha_{eg}) D(\alpha_{gg}) | n \rangle d_{pq}^{ge,gg} \\
& - \sum_{ab} \kappa \lambda_{00}^2 \rho_{ab,ee,ge}^P \langle m | D^\dagger(\alpha_{ge}) D(\alpha_{ee}) | a \rangle \langle b | D^\dagger(\alpha_{ge}) D(\alpha_{gg}) | n \rangle d_{pq}^{ge,gg} \\
& + \frac{\kappa}{2} \lambda_{00}^2 (\rho_{mn,eg,gg}^P + \text{c.h.}) d_{pq}^{ge,gg}. \tag{C.17}
\end{aligned}$$

L'équation gouvernant l'évolution de $\lambda_{mnpq}^{eg,gg}$ est similaire. À partir de ce résultat, une condition *suffisante* est trouvée pour pouvoir négliger $\lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'}$ si $m, n, p, q \neq 0$. Cette condition est

$$\gamma_{00}, \gamma_{01} \ll \frac{\kappa}{2}. \tag{C.18}$$

Lorsque cette condition est respectée, l'équation maîtresse réduite peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{pd} = & -\frac{i}{\hbar} \left[H_D^Q, \rho_{pd} \right] - i\Pi_\alpha \left[\sum_\sigma \tilde{\chi}_\sigma \Pi_\sigma, \rho_{pd} \right] \Pi_\alpha^* + \sum_j \frac{\gamma_{\phi j}}{2} D \left[\sum_\sigma \eta_{q_j j} \Pi_\sigma \right] \rho_{pd} \\ & + \sum_{ij} \gamma_{ij} D \left[\sum_\sigma \delta_{iq_j} \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho_{pd} + \kappa D \left[\sum_{\sigma j} \lambda_{q_j j} \Pi_\sigma^{j-} \right] \rho_{pd}, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

où

$$H_D^Q = \sum_\sigma \hbar \tilde{\omega}_\sigma \Pi_\sigma + \sum_{\substack{j \leq l \\ \sigma}} \hbar J_{q_j j q_l} (\Pi_\sigma^{j+} \Pi_\sigma^{l-} + \text{c.h.}). \quad (\text{C.20})$$

C.2 Application sur l'équation maîtresse stochastique

L'EMS dans le régime dispersif s'écrit

$$\dot{\rho}_{sd} = \mathcal{L}_D \rho_{sd} + \sqrt{\kappa \eta} \xi(t) \mathcal{H} [a e^{-i\phi}] \rho_{sd}. \quad (\text{C.21})$$

La version non normalisée de cette équation sera utilisée pour faire le calcul dans le but de simplifier la démarche. Ceci revient à changer le superopérateur \mathcal{H} pour $\bar{\mathcal{H}}[x] \rho = x\rho + \rho x^\dagger$ [41]. La normalisation sera réintroduite à la fin du calcul. La démarche pour obtenir l'équation maîtresse réduite est identique à celle présentée à l'annexe C.1.

L'équation maîtresse dans le référentiel du polaron s'écrit comme

$$\dot{\rho}^P = (\text{C.8}) + \sqrt{\kappa \eta} \xi(t) \bar{\mathcal{H}} [(a + \Pi_\alpha) e^{-i\phi}] \rho^P. \quad (\text{C.22})$$

Dans l'expression ci-dessus, le numéro d'équation fait référence à la partie de droite de l'équation en question. À partir de l'équation ci-haut, la quantité qui dictera l'évolution temporelle de la matrice densité réduite, $\dot{\rho}_{mn\sigma\sigma'}^P = \langle m\sigma | \dot{\rho}^P | n\sigma' \rangle$, peut être calculée :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{mn\sigma\sigma'}^P = & (\text{C.11}) + \sqrt{\kappa \eta} \xi(t) \left(\sqrt{m+1} \rho_{m+1, n\sigma\sigma'}^P e^{-i\phi} + \sqrt{n+1} \rho_{m, n+1, \sigma\sigma'}^P e^{i\phi} \right) \\ & + \sqrt{\kappa \eta} \xi(t) (\alpha_\sigma e^{-i\phi} + \alpha_{\sigma'}^* e^{i\phi}) \rho_{mn\sigma\sigma'}^P. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Finalement, l'évolution des termes diagonaux de la matrice densité réduite non normalisée

$\dot{\rho}_{pn}^{\sigma\sigma} = \langle \sigma | \dot{\rho}_{pn} | \sigma \rangle$ est

$$\sum_n \dot{\rho}_{nn\sigma\sigma}^P = (\text{C.12}) + \sqrt{\kappa\eta}\xi(t) \left(\sum_n (\alpha_\sigma e^{-i\phi} + \alpha_\sigma^* e^{i\phi}) \rho_{nn\sigma\sigma}^P + (\rho_{1,l,\sigma}^P e^{-i\phi} + \text{c.h.}) \right), \quad (\text{C.24})$$

où

$$\rho_{1,l,\sigma}^P = \sum_n \sqrt{n+1} \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^P. \quad (\text{C.25})$$

De même, l'évolution des termes non diagonaux $\dot{\rho}_{pn}^{\sigma\sigma'} = \langle \sigma | \dot{\rho}_{pn} | \sigma' \rangle$ est

$$\begin{aligned} \sum_{mn} \dot{\lambda}_{mnnm}^{\sigma\sigma'} &= (\text{C.13}) + \sum_{mn} \sqrt{\kappa\eta}\xi(t) \left(\sqrt{m+1} \lambda_{m+1,nnm}^{\sigma\sigma'} e^{-i\phi} + \text{c.h.} \right) \\ &+ \sum_{mn} \sqrt{\kappa\eta}\xi(t) (\alpha_\sigma e^{-i\phi} + \alpha_\sigma^* e^{i\phi}) \lambda_{mnnm}^{\sigma\sigma'}, \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

puisque

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{mnpq}^{\sigma\sigma'} &= (\text{C.14}) + \sqrt{\kappa\eta}\xi(t) \left(\sqrt{m+1} \lambda_{m+1,npq}^{\sigma\sigma'} e^{-i\phi} + \sqrt{n+1} \lambda_{m,n+1,pq}^{\sigma\sigma'} e^{i\phi} \right) \\ &+ \sqrt{\kappa\eta}\xi(t) (\alpha_\sigma e^{-i\phi} + \alpha_\sigma^* e^{i\phi}) \lambda_{mnpq}^{\sigma\sigma'}. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Pour pouvoir simplifier ces équations et obtenir une équation maîtresse réduite compacte, il faut que $\rho_{1,l,\sigma}^P(t) \rightarrow 0$. Cette quantité étant initialement nulle, il suffit donc qu'elle n'augmente pas dans le temps. En négligeant des termes stochastiques dont la valeur moyenne est nulle, son évolution s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1,l,\sigma}^P &= -i(\omega_r + \tilde{\chi}_\sigma) \rho_{1,l,\sigma}^P \\ &- i \sum_{jan} r_n \left(\lambda_{q_j-1,j} \epsilon_c(t) \Theta_{q_j-1} \lambda_{an,n+1,a\sigma\sigma}^{q_j-1} - \lambda_{q_j,j} \epsilon_c(t) \lambda_{n+1,aan\sigma\sigma}^{q_j+1} - \text{c.h.} \right) \\ &- i \sum_{j<l} \sum_{an} r_n \left(J_{q_j-1,j,q_l} \Theta_{q_j-1} \lambda_{an,n+1,a\sigma\sigma}^{q_l+1,q_j-1} - J_{q_j,j,q_l-1} \Theta_{q_l-1} \lambda_{n+1,aan\sigma\sigma}^{q_l-1,q_j+1} - \text{c.h.} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa \left(\sum_n r_n^2 \sqrt{(n+2)} \rho_{n+2,n+1,\sigma\sigma}^P - \frac{1}{2} (2n+1) \rho_{1,l,\sigma}^P \right) \\
& + \sum_{jn} \left(\gamma_{q_j j} + \kappa \lambda_{q_j j}^2 \right) \left(r_n \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P q_j+1; q_j+1} + (\alpha_\sigma^{q_j+1} - \alpha_\sigma) \rho_{nn\sigma\sigma}^{P q_j+1; q_j+1} \right) \\
& - \sum_j \rho_{1,l,\sigma}^P \left(\gamma_{q_j-1,j} + \kappa \lambda_{q_j-1,j}^2 \right) \Theta_{q_j-1} \\
& + \kappa \sum_{i \neq j} \sum_{xy} \lambda_{q_i i} \lambda_{q_j j} \rho_{xy\sigma\sigma}^{P q_i+1; q_j+1} \langle y | D^\dagger (\alpha_\sigma^{q_j+1}) (a - \alpha_\sigma) D (\alpha_\sigma^{q_i+1}) | x \rangle \\
& - \frac{\kappa}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{an} r_n \left(\lambda_{q_i-1,i} \lambda_{q_j j} \lambda_{an,n+1,a\sigma\sigma}^{q_i-1, q_j+1; } \Theta_{q_i-1} + \text{c.h.} \right), \tag{C.28}
\end{aligned}$$

où $r_n = \sqrt{n+1}$. À priori, il n'y a aucun moyen de simplifier cette équation pour trouver une condition simple qui permettrait que $\rho_{1,l,\sigma}^P(t) \rightarrow 0$ soit respecté pour tout temps. Cependant, les cas précis et les approximations introduites à la section 2.5.1 permettent de trouver une telle condition et par conséquent de trouver une équation maîtresse compacte pour ρ_{pn} .

C.2.1 Mesure faible

Dans l'approximation de la mesure faible ($|\beta_{\sigma\sigma'}| \ll 1$ pour tout σ, σ'), l'équation (C.28) se réduit à

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{1,l,\sigma}^P & = -i(\omega_r + \tilde{\chi}_\sigma) \rho_{1,l,\sigma}^P \\
& - i \sum_{jn} r_n \left(\lambda_{q_j-1,j} \epsilon_c(t) \Theta_{q_j-1} \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P q_j-1; } - \lambda_{q_j,j} \epsilon_c(t) \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P ; q_j+1} - \text{c.h.} \right) \\
& - i \sum_{j < l} \sum_n r_n \left(J_{q_j-1,j,q_l,t} \Theta_{q_j-1} \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P q_l+1, q_j-1; } - J_{q_j,j,q_l-1,t} \Theta_{q_l-1} \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P ; q_l-1, q_j+1} - \text{c.h.} \right) \\
& + \kappa \left(\sum_n r_n^2 \sqrt{(n+2)} \rho_{n+2,n+1,\sigma\sigma}^P - \frac{1}{2} (2n+1) \rho_{1,l,\sigma}^P \right) \\
& + \sum_{jn} \left(\gamma_{q_j j} + \kappa \lambda_{q_j j}^2 \right) r_n \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P q_j+1; q_j+1} - \sum_j \rho_{1,l,\sigma}^P \left(\gamma_{q_j-1,j} + \kappa \lambda_{q_j-1,j}^2 \right) \Theta_{q_j-1} \\
& + \kappa \sum_{i \neq j} \sum_n r_n \left(\lambda_{q_i i} \lambda_{q_j j} \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P q_i+1; q_j+1} - \frac{1}{2} \left(\lambda_{q_i-1,i} \lambda_{q_j j} \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P q_i-1, q_j+1; } \Theta_{q_i-1} + \text{c.h.} \right) \right). \tag{C.29}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans cette approximation, $\rho_{1,l,\sigma}^P(t)$ reste toujours nul puisque son évolution est diagonal dans la base du résonateur (ou elle dépend d'états plus peuplés dans la base du résonateur que $\rho_{1,l,\sigma}^P(t)$). Dans ce cas, l'EMS réduite s'écrit (une fois normalisée)

$$\dot{\rho}_p = \mathcal{L}_p \rho_p + \sqrt{\kappa\eta} \xi(t) \mathcal{H} [\Pi_\alpha e^{-i\phi}] \rho_p. \quad (\text{C.30})$$

C.2.2 Un seul transmon

Lorsqu'il y a un seul transmon dans la cavité ($N = 1$) et lorsque $\epsilon_c(t) = 0$, l'équation (C.28) se réduit à

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1,l,\sigma}^P &= -i(\omega_r + \tilde{\chi}_\sigma) \rho_{1,l,\sigma}^P \\ &+ \kappa \left(\sum_n r_n^2 \sqrt{(n+2)} \rho_{n+2,n+1,\sigma\sigma}^P - \frac{1}{2}(2n+1) \rho_{1,l,\sigma}^P \right) \\ &+ (\gamma_\sigma + \kappa\lambda_\sigma^2) \left(\rho_{1,l,\sigma+1}^P + \sum_n (\alpha_{\sigma+1} - \alpha_\sigma) \rho_{nn,\sigma+1,\sigma+1}^P \right) \\ &- \rho_{1,l,\sigma}^P (\gamma_\sigma + \kappa\lambda_\sigma^2) \Theta_{\sigma-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Ainsi, dans ce cas, $\rho_{1,l,\sigma}^P(t) \rightarrow 0$ pour tout temps à la condition que

$$\gamma_\sigma \ll \frac{\kappa}{2}, \quad (\text{C.32})$$

pour tout σ . Dans ce cas, l'EMS réduite s'écrit (une fois normalisée)

$$\dot{\rho}_p = \mathcal{L}_p \rho_p + \sqrt{\kappa\eta} \xi(t) \mathcal{H} [\Pi_\alpha e^{-i\phi}] \rho_p. \quad (\text{C.33})$$

C.2.3 Deux qubits dégénérés

Dans le cas des deux qubits dégénérés, le système obéit, par hypothèse, aux conditions $\chi_{ge} = \chi_{eg}$, $\lambda_{00} = -\lambda_{01}$ et $\epsilon_c(t) = 0$. Dans ce cas, l'équation (C.28) se réduit à

$$\dot{\rho}_{1,l,\sigma}^P = -i(\omega_r + \tilde{\chi}_\sigma) \rho_{1,l,\sigma}^P$$

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{j < l} \sum_n r_n J_{0,j,0,l} \left(\Theta_{q_j-1}^{P \ q_i+1,q_j-1}; - \Theta_{q_i-1}^{P \ ;q_i-1,q_j+1} - \text{c.h.} \right) \\
& + \kappa \left(\sum_n r_n^2 \sqrt{(n+2)} \rho_{n+2,n+1,\sigma\sigma}^P - \frac{1}{2} (2n+1) \rho_{1,l,\sigma}^P \right) \\
& + \sum_{jn} (\gamma_{0j} + \kappa \lambda_{0j}^2) \left(r_n \rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P \ q_j+1;q_j+1} + (\alpha_\sigma^{q_j+1} - \alpha_\sigma) \rho_{nn\sigma\sigma}^{P \ q_j+1;q_j+1} \right) \\
& - \sum_j \rho_{1,l,\sigma}^P (\gamma_{0j} + \kappa \lambda_{0j}^2) \Theta_{q_j-1} \\
& - \kappa \lambda_{00}^2 \delta_{\sigma,gg} \sum_n \left(r_n \rho_{n+1,n,eg,ge}^P + \rho_{nn,eg,ge}^P \beta_{gg}^{eg} + \text{c.h.} \right) \\
& + \frac{\kappa}{2} \lambda_{00}^2 \sum_{i \neq j} \sum_n r_n \left(\rho_{n+1,n\sigma\sigma}^{P \ q_i-1,q_j+1}; \Theta_{q_i-1} + \text{c.h.} \right). \tag{C.34}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, $\rho_{1,l,\sigma}^P(t) \rightarrow 0$ pour tout temps à la condition que

$$\sum_j \gamma_{0j} \ll \frac{\kappa}{2}. \tag{C.35}$$

Dans ce cas, l'EMS réduite s'écrit (une fois normalisée)

$$\dot{\rho}_p = \mathcal{L}_p \rho_p + \sqrt{\kappa \eta} \xi(t) \mathcal{H} [\Pi_\alpha e^{-i\phi}] \rho_p. \tag{C.36}$$

Annexe D

Taux du régime stationnaire de la mesure de parité

Lors d'une mesure d'amplitude fixe ϵ , avec $\Delta_r = 0$, la solution de l'équation différentielle (3.15) représentant le taux de variation de l'état cohérent α_σ dans la cavité s'écrit

$$\alpha_\sigma(t) = \frac{-\epsilon(\tilde{\chi}_\sigma + i\kappa/2)}{\tilde{\chi}_\sigma^2 + \kappa^2/4} (1 - e^{-i\tilde{\chi}_\sigma t} e^{-\kappa t/2}). \quad (\text{D.1})$$

Ainsi, l'état cohérent tend vers sa valeur stationnaire d'une manière exponentielle à un taux $\kappa/2$. Cette valeur stationnaire est

$$\alpha_\sigma = \frac{-\epsilon(\tilde{\chi}_\sigma + \kappa i/2)}{\tilde{\chi}_\sigma^2 + \kappa^2/4}. \quad (\text{D.2})$$

Le nombre de photons stationnaire dans le résonateur est $|\alpha_\sigma|^2$ si les transmons sont dans l'état $|\sigma\rangle$. Ainsi, le nombre de photons maximal dans le résonateur dans le cas où $\tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg} \Rightarrow \tilde{\chi}_{ge} = \tilde{\chi}_{eg} = 0$ comme dans la section 3.2, est

$$|\alpha_{eg}|^2 = \left(\frac{2\epsilon}{\kappa}\right)^2. \quad (\text{D.3})$$

De ces résultats, il est possible de calculer les taux stationnaires d'intérêt qui sont

$$\Gamma_d^{\sigma\sigma'} = \frac{-(\tilde{\chi}_\sigma - \tilde{\chi}_{\sigma'})^2 \kappa^3 |\alpha_{eg}|^2}{8(\tilde{\chi}_\sigma^2 + \kappa^2/4)(\tilde{\chi}_{\sigma'}^2 + \kappa^2/4)}, \quad (\text{D.4})$$

$$A_c^{\sigma\sigma'} = \frac{(\tilde{\chi}_\sigma - \tilde{\chi}_{\sigma'}) (\tilde{\chi}_\sigma \tilde{\chi}_{\sigma'} + \kappa^2) \kappa^2 |\alpha_{eg}|^2}{4 (\tilde{\chi}_\sigma^2 + \kappa^2/4) (\tilde{\chi}_{\sigma'}^2 + \kappa^2/4)}, \quad (\text{D.5})$$

$$\Gamma_{11} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\kappa \eta \tilde{\chi}_{ee}^4 |\alpha_{eg}|^2}{(\tilde{\chi}_{ee}^2 + \kappa^2/4)^2}, \quad (\text{D.6})$$

$$\Gamma_{01}(0) = \frac{\kappa^3 \eta \tilde{\chi}_{ee}^2 |\alpha_{eg}|^2}{4 (\tilde{\chi}_{ee}^2 + \kappa^2/4)^2}, \quad (\text{D.7})$$

$$\Gamma_d^{ee,gg} = \frac{-\kappa^3 \tilde{\chi}_{ee}^2 |\alpha_{eg}|^2}{2 (\tilde{\chi}_{ee}^2 + \kappa^2/4)^2}, \quad (\text{D.8})$$

$$\Gamma_d^{ee,eg} = \frac{-\kappa \tilde{\chi}_{ee}^2 |\alpha_{eg}|^2}{2 (\tilde{\chi}_{ee}^2 + \kappa^2/4)}, \quad (\text{D.9})$$

$$A_c^{ee,gg} = \frac{-(\tilde{\chi}_{ee}^2 - \kappa^2/4) \kappa^2 \tilde{\chi}_{ee} |\alpha_{eg}|^2}{2 (\tilde{\chi}_{ee}^2 + \kappa^2/4)^2}, \quad (\text{D.10})$$

et les ratios d'intérêt qui sont

$$\frac{\Gamma_{11}(\pi/2)}{A_c^{ee,gg}} = \frac{-2\tilde{\chi}_{ee}^2}{\tilde{\chi}_{ee}^2 - \kappa^2/4} \left(\frac{\tilde{\chi}_{ee}\eta}{\kappa} \right), \quad (\text{D.11})$$

$$\frac{\Gamma_{11}(\pi/2)}{\Gamma_d^{ee,gg}} = -2 \left(\frac{\tilde{\chi}_{ee}\sqrt{\eta}}{\kappa} \right)^2, \quad (\text{D.12})$$

$$\frac{\Gamma_{11}(\pi/2)}{\Gamma_{01}(0)} = 4 \left(\frac{\tilde{\chi}_{ee}}{\kappa} \right)^2. \quad (\text{D.13})$$

Bibliographie

- [1] R. P. Feynman. *International Journal of Theoretical Physics* **21**, 467–488 (1982).
- [2] D. Deutsch. Dans *Proceedings of the Royal Society of London*, volume 400, 97–117, (1985).
- [3] C. H. Bennett et G. Brassard. Dans *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing*, (1984).
- [4] C. H. Bennett et S. J. Wiesner. *Phys. Rev. Lett.* **69**(20), 2881–2884 (1992).
- [5] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, et W. K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.* **70**(13), 1895–1899 (1993).
- [6] P. W. Shor. Dans *Proceedings of the 35nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Shafi Goldwasser, ed.)*, (1994).
- [7] L. K. Grover. Dans *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, (1996).
- [8] P. W. Shor. *Phys. Rev. A* **52**(4), R2493–R2496 (1995).
- [9] I. L. Chuang et Y. Yamamoto. *Phys. Rev. A* **52**(5), 3489–3496 (1995).
- [10] J. I. Cirac et P. Zoller. *Phys. Rev. Lett.* **74**(20), 4091–4094 (1995).
- [11] D. P. DiVincenzo. *Phys. Rev. A* **51**(2), 1015–1022 (1995).
- [12] D. G. Cory, A. F. Fahmy, et T. F. Havel. Dans *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, volume 94, 1634–1639, (1997).
- [13] N. Gershenfeld et I. L. Chuang. *Science* **275**, 350 (1997).
- [14] B. E. Kane. *Nature* **393**(6681), 133–137 (1998).
- [15] D. Loss et D. P. DiVincenzo. *Phys. Rev. A* **57**(1), 120–126 (1998).
- [16] G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen, et I. H. Deutsch. *Phys. Rev. Lett.* **82**(5), 1060–1063 (1999).
- [17] L. Childress, M. V. Gurudev Dutt, J. M. Taylor, A. S. Zibrov, F. Jelezko, J. Wrachtrup, P. R. Hemmer, et M. D. Lukin. *Science* **314**(5797), 281–285 (2006).
- [18] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, et H. J. Kimble. *Phys. Rev. Lett.* **75**(25), 4710–4713 (1995).
- [19] M. H. Devoret, A. Wallraff, et J. M. Martinis. arXiv :cond-mat/0411174v1, (2004).

- [20] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [21] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **431**(7005), 162–167 (2004).
- [22] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. Lett.* **95**(6), 060501 (2005).
- [23] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. A* **76**(4), 042319 (2007).
- [24] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **445**(7127), 515–518 (2007).
- [25] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **449**(7161), 443–447 (2007).
- [26] A. A. Houck, D. I. Schuster, J. M. Gambetta, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **449**(7160), 328–331 (2007).
- [27] M. Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, J. Wenner, J. M. Martinis, et A. N. Cleland. *Nature* **459**(7246), 546–549 (2009).
- [28] L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Nature* **460**(7252), 240–244 (2009).
- [29] M. Ansmann, H. Wang, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O’Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, A. N. Cleland, et J. M. Martinis. *Nature* **461**(7263), 504–506 (2009).
- [30] A. A. Houck, J. Koch, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Quantum Information Processing* **8**(2-3) (2009).
- [31] J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Tornberg, J. Koch, L. S. Bishop, A. A. Houck, B. R. Johnson, L. Frunzio, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. Lett.* **102**(9), 090502 (2009).
- [32] D. F. Walls et G. J. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, (1994).
- [33] C. L. Hutchison, J. M. Gambetta, A. Blais, et F. K. Wilhelm. *Canadian Journal of Physics* **87**(225) (2009).
- [34] A. Blais. INTRIQ’s workshop on the physical implementation of quantum information (2009).
- [35] H. M. Wiseman et G. J. Milburn. *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, (2009).

- [36] M. Boissonneault. Mémoire de Maîtrise, Université de Sherbrooke, Canada, (2007).
- [37] H. J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1*. Springer, (2002).
- [38] M. Boissonneault, J. M. Gambetta, et A. Blais. *Phys. Rev. A* **79**(1), 013819 (2009).
- [39] E. M. Purcell, H. C. Torrey, et R. V. Pound. *Phys. Rev.* **69**(1-2), 37–38 (1946).
- [40] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique I*. Hermann, (1998).
- [41] J. Gambetta, A. Blais, M. Boissonneault, A. A. Houck, D. I. Schuster, et S. M. Girvin. *Phys. Rev. A* **77**(1), 012112 (2008).
- [42] M. Boissonneault, S. Allen, et A. Blais. (non publié), (2009).
- [43] P. E. Kloeden et E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, (1995).
- [44] S. Filipp, P. Maurer, P. J. Leek, M. Baur, R. Bianchetti, J. M. Fink, M. Göppl, L. Steffen, J. M. Gambetta, A. Blais, et A. Wallraff. *Phys. Rev. Lett.* **102**(20), 200402 (2009).
- [45] V. E. Manucharyan, J. Koch, L. I. Glazman, et M. H. Devoret. *Science* **326**(5949), 113 (2009).
- [46] J. Bourassa, J. M. Gambetta, J. A. A. Abdumalikov, O. Astafiev, Y. Nakamura, et A. Blais. *Phys. Rev. A* **80**(3), 032109 (2009).
- [47] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, et R. J. Schoelkopf. *Phys. Rev. Lett.* **101**(8), 080502 (2008).
- [48] W. K. Wootters. *Phys. Rev. Lett.* **80**(10), 2245–2248 (1998).