

**OPTIMISATION D'UN RÉSEAU DE COMMUNICATION PAR
FIBRE OPTIQUE**

par

Lucien Yao N'GADI

Mémoire présenté au Département d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES



Sherbrooke, Québec, Canada, décembre 2008



Library and
Archives Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-49553-7
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-49553-7

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Le 19 janvier 2009

le jury a accepté le mémoire de M. Lucien Yao N'Gadi dans sa version finale.

Membres du jury

M. Jean-Pierre Dussault
Directeur
Département d'informatique

M. Alain Houle
Codirecteur
Département de génie électrique et informatique

M. Kim-Khoa Nguyen
Membre
Département de génie électrique et informatique

M. Abdelhamid Benchakroun
Président-rapporteur
Département d'informatique

À la mémoire de mon père et de ma mère
en témoignage de mon amour et de ma reconnaissance.

À mon épouse, Laretta, pour tout son soutien
à nos enfants, Yao et Ama
à qui je souhaite bonheur et réussite.

À mes frères, sœurs et amis
avec toute mon affection.

Sommaire

Le présent travail concerne la modélisation d'un réseau de communication par fibre optique. Il s'agira de modéliser une topologie virtuelle prenant en compte les nœuds, les capacités de traitement aux nœuds, les exigences de qualité ainsi que les routes virtuelles ou successions de trajets sur lesquels sont embarqués les flux de données ou la matrice de trafic. Le modèle devra aussi tenir compte de divers paramètres (longueurs d'onde, modulations, type de routage, etc.). Nous utiliserons, après la modélisation en un programme linéaire mixte en nombres entiers (MILP), un ensemble de solveurs pour nous permettre d'apprécier les performances ainsi que les limites de la résolution sur ces différentes plateformes au fur et à mesure que le problème croît. Un autre aspect du travail sera de faire le constat de la complexité de la programmation linéaire mixte en nombres entiers. Cela va d'ailleurs susciter le passage d'un MILP dit fort à un MILP dit faible. Un autre volet du travail sera la formalisation du MILP dit faible par une approche de décomposition structurée, prenant en compte la structure du modèle ainsi que des caractéristiques de certaines variables avec pour objectif ultime d'améliorer le processus d'optimisation.

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur Jean-Pierre DUSSAULT mon directeur de recherche pour l'encadrement qu'il m'a assuré et les conseils qu'il m'a prodigué.

Que le professeur Alain HOULE, mon codirecteur de recherche et enseignant au département de génie électrique et de génie informatique de la Faculté de génie, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour sa présence, son soutien scientifique tout au long de la réalisation de ce travail.

Je remercie également tous les membres du jury pour leur participation au jury et pour les commentaires sur ce travail.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont pu contribuer directement, indirectement à la réalisation de ce travail sans oublier mes amis du département d'informatique.

Abréviations

ASON Automatically Switched Optical Network

ATM Asynchronous Transfer Mode

CAPEX Capital Expenditures

CV Connexion Virtuelle

CP Control Plane

DVI Digital Visual Interface

DWDM Dense Wavelength Division Multiplexing

ESCOM Enterprise Systems CONnection

FDM Frequency Division Multiplexing

FICON Fiber CONnectivity

FG First Generation

GFP-F Generic Framing Procedure Frame mapped

GFP-T Generic Framing Procedure Transparent mapped

GMPLS Generalized Multiprotocol Label Switching

GRWA Grooming Routing and Wavelength Assignement

ABRÉVIATIONS

HDLC High-Level Data Link Control

IEEE Institute of Electrical and Electronics Engineers

IETF Internet Engineering Task Force

IPv6 Internet Protocol Version 6

LAPS Link Access Procedure SDH

NDI Node Debugging Information

MH Multi Hop

MILP Mixed Integer Linear Programming

OA Optical Amplifier

OADM Optical Add Drop Multiplexer

OC Optical Carrier

OEO Optical Electrical Optical

OLS Optical Line System

OPEX Operations Expenditures

OTN Optical Transport Network

OXC Optical Cross Connect

PDH Plesiochronous Digital Hierarchy

PoS Packet Over SONET

PPP Point to Point Protocol

PSTN Public Switched Telephone Network

ABRÉVIATIONS

PTP Partial Tree Protection

QoS Quality of Service

RD Recherche et Développement

RWA Routing and Wavelength Assignment

SAN Storage Area Network

SDM Space Division Multiplexing

SG Second Generation

SONET/SDH Synchronous Optical Network / Synchronous Digital Hierarchy

STS Synchronous Transport Signal

TDM Time Division Multiplexing

UNI User Network Interface

WIS WAN Interface Sublayer

WDM Wavelength Division Multiplexing

Table des matières

Sommaire	i
Remerciements	ii
Abréviations	iii
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	ix
Introduction	3
1 Considérations f.o	6
1.1 Domaines d'études dans la fibre optique	7
1.1.1 Développement de la technologie	7
1.1.2 Architecture	7
1.1.3 Management et contrôle plane	10
1.1.4 Protocoles	11
1.2 Défis actuels dans la fibre optique	12
1.3 Techniques de multiplexage et GRWA	13
1.3.1 Techniques de multiplexage	13
1.3.2 GRWA	14
1.4 Définition du problème	18

TABLE DES MATIÈRES

2	Modélisation du problème	21
2.1	Modélisation du problème	22
2.1.1	Paramètres	22
2.1.2	Variables de décision	23
2.1.3	Fonction économique ou objectif	23
2.1.4	Contraintes	24
2.1.5	Résumé de la formulation du problème	27
2.2	Décomposition structurée	33
2.2.1	Rappel des attentes	33
2.2.2	Approche de décomposition structurée	33
3	Programmation mathématique	35
3.1	Préliminaires	36
3.1.1	Optimisation avec contraintes : aperçu de pré-requis	36
3.1.2	Structure du problème	37
3.2	Programmation Mathématique : cas LP et cas MILP	38
3.2.1	Contextes LP et MILP	38
3.2.2	Contraintes compliquées - variables compliquées	39
3.2.3	Stratégies des algorithmes	40
3.2.4	Complexité des algorithmes	43
3.2.5	Techniques de décomposition	45
3.3	Alternatives de résolution pour les problèmes MILP	48
4	Implémentations	51
4.1	Résolutions avec les approches MILP initial et MILP amélioré	52
4.1.1	Paramètres avec MILP initial et MILP amélioré	54
4.1.2	Résultats avec MILP initial et MILP amélioré	55
4.1.3	Analyses et interprétations des deux approches	55
4.2	Comparaisons du modèle obtenu avec d'autres travaux	56
4.2.1	Sous cas 1 : travaux avec 4 nœuds	57
4.2.2	Sous cas 2 : travaux avec 11 nœuds	57

TABLE DES MATIÈRES

4.3	Comparaisons du modèle obtenu sur plusieurs plates-formes	60
4.3.1	Sous cas 1 : travaux sur NEOS avec SOPLEX et CPLEX	60
4.3.2	Paramètres du sous cas 1	61
4.3.3	Résultats du sous cas 1	61
4.3.4	Analyses et interprétations du sous cas 1	61
4.3.5	Sous cas 2 : Travaux effectués localement et sur NEOS	62
4.3.6	Paramètres du sous cas 2	62
4.3.7	Résultats du sous cas 2	62
4.3.8	Analyses et interprétations du sous cas 2	65
5	Perspectives	68
	Conclusion	72
	A Annexe	74
	Bibliographie	87

Liste des figures

1.1	Architecture avec nœuds et détail d'un nœud	9
1.2	Classification dans les réseaux optiques [61]	10
1.3	Aperçu de quelques protocoles employés dans les réseaux de communication par fibre optique (Source : Agilent Technologies)	12
1.4	Modèle en Couches [34]	15
1.5	Architectures non groomée et groomée pour une problématique posée [57] .	17
4.1	Travaux II Sous Cas 1 - résolution du problème avec $N=4$ et $W = 3$	58

Liste des tableaux

1.1	Caractéristiques de travaux précédents sur les réseaux WDM en anneau [27]	20
4.1	Travaux I : MILP initial (<i>OC</i> et λ binaires) MILP amélioré (<i>OC</i> binaire , λ continue)	54
4.2	Résultats Travaux I	55
4.3	Travaux III - sous cas 1 : MILP amélioré et plate-forme NEOS	61
4.4	Résultats Travaux III - Sous cas 1 : Solveurs CPLEX et SOPLEX	61
4.5	Travaux III - sous cas 2 : Tests effectués localement et sur NEOS	63
4.6	Résultats Travaux III - Sous cas 2 : Solveurs CPLEX - SOPLEX et GLPK	64
A.1	Matrice de trafic de référence	75

Liste des algorithmes

1	Algorithme Général du Branch and Bound	42
---	--	----

Introduction

Dans le monde de l'entreprise, l'on estime que la recherche et développement (RD) doit désormais jouer un rôle capital et stratégique dans une économie de plus en plus globalisée et très concurrentielle. L'entreprise doit en effet pouvoir innover, maîtriser ses divers coûts de production et doit aussi être d'une réactivité importante face au marché. C'est justement en majeure partie à la RD que l'on impute la capacité pour l'entreprise de suggérer de nouveaux produits et donc de permettre à l'entreprise de tenir face à la concurrence.

L'on notera de façon spécifique que la recherche scientifique consiste à mener de façon méthodique et rigoureuse un certain nombre de démarches : poser un problème, en faire l'analyse, proposer des solutions adéquates ou appropriées. Ces différentes étapes de la recherche scientifique s'appliquent à divers domaines dont celui des télécommunications.

Dans le paysage des télécommunications, l'on note d'une part une concurrence très forte entre les opérateurs après les dérégulations de l'espace opérées dans la majeure partie des pays du monde, d'autre part d'énormes progrès au niveau des capacités de transmission notamment avec la fibre optique.

Même si les recherches ont permis d'énormes avancées technologiques, il faut dire qu'une préoccupation majeure des opérateurs de télécommunication demeure la réduction du coût global (coûts initiaux et coûts récurrents) de leurs investissements et opérations. Les pistes ici concernent la minimisation du coût du réseau (coût de possession et coût d'exploitation) et la maximisation des gains engrangés à la suite des services proposés grâce aux réseaux et ceci tout en tenant compte des contraintes de trafic et des exigences de qualité. Cette présente étude se focalise sur l'aspect du coût du réseau. Différents points dont le management et l'architecture peuvent être évoqués dans le calcul du coût du réseau. Toutefois, il faut signaler que nous porterons particulièrement notre attention sur les

INTRODUCTION

éléments comme le coût des cartes de transport, les connexions virtuelles ou la topologie logique ainsi que l'interaction entre la topologie logique et le coût du réseau.

Il s'agira, en somme, de voir comment éviter une inutilisation de la bande passante et donc de maximiser son utilisation en prenant en compte les diverses granularités des requêtes des clients et aussi de voir comment ce problème - que l'on peut bien résumer à un problème d'optimisation ou de recherche opérationnelle - peut être résolu avec la programmation mathématique.

Ici, les contributions portent non seulement sur une modélisation pertinente et efficace de la problématique du GRWA dans le cas d'un réseau en anneau avec du trafic statique mais aussi sur la variante MILP amélioré du modèle qui permet d'aboutir à la formalisation avec la décomposition structurée. Nous verrons justement les résultats très encourageants de cet effort de modélisation en comparant nos résultats avec ceux de deux articles ou publications.

Le premier chapitre de notre travail passera par une meilleure connaissance du domaine de la fibre optique avec notamment les domaines d'études de la fibre optique, les défis actuels de la fibre optique ainsi qu'un aperçu de la problématique du GRWA et la définition de notre problème.

Le deuxième chapitre s'intéressera à modéliser le problème précédemment exprimé à travers l'expression des contraintes et de l'objectif économique. Cette partie abordera les grandes lignes de la résolution du problème posé à l'aide de la décomposition structurée.

Nous verrons, en troisième partie, un aperçu de la programmation mathématique avec notamment le cas de la programmation linéaire mixte en nombres entiers ainsi que les stratégies des différents algorithmes dans cette catégorie. On traitera aussi dans cette partie l'application de toutes les étapes de la technique de décomposition structurée énoncée dans la partie précédente.

Notre avant-dernier chapitre abordera la résolution détaillée du problème à travers plusieurs approches (deux méthodes) de programmation mathématique avec des scénarios ainsi que les résultats et interprétations. Cette partie fera également une comparaison des résultats obtenus à l'issue des tests menés sur certaines plates-formes de résolution.

Le dernier chapitre de notre travail ouvrira une brèche. Il s'agira d'évoquer la problématique de modélisation d'une topologie virtuelle qui garantit une certaine pérennité de

INTRODUCTION

la configuration à mesure de satisfaire une matrice de trafic à l'instant t futur. On devra prendre en compte un coût additionnel minimal entre le coût de la configuration à l'instant $t - 1$ et celui futur de l'instant t .

Chapitre 1

Considérations relatives aux réseaux de communication par fibre optique

1.1. DOMAINES D'ÉTUDES DANS LA FIBRE OPTIQUE

On va présenter dans ce chapitre les grands axes de recherche sur la fibre optique. Après cette mise en contexte, on y abordera les défis pour les opérateurs de télécommunication, les techniques de multiplexage ainsi que la problématique du GRWA. Nous terminerons ce chapitre avec la définition du problème à résoudre.

1.1 Domaines d'études dans la fibre optique

Afin de mieux comprendre le domaine des télécommunications par fibre optique ainsi que ses enjeux majeurs, nous allons voir les éléments fondamentaux qui opèrent dans ce domaine. Ces aspects peuvent être classifiés dans plusieurs groupes à savoir le développement de la technologie, l'architecture, le contrôle et le management, les protocoles.

1.1.1 Développement de la technologie

Le développement de la technologie traite des questions relatives aux aspects électriques et électroniques liés à la fibre optique elle-même et à la transmission des signaux. Il vise les divers composants électriques et électroniques, passifs et actifs (ex. isolateurs, circulateurs, amplificateurs, compensateurs dispersion, multiplexeur/démultiplexeur OADM) qui s'intègrent dans un monde de réseau de communication par fibre optique. Le chapitre 3 de [62] avec Ramaswami et Sivarajan aborde une description détaillée de chaque composant avec ses fonctions. Sa lecture permettra d'être situé sur l'enjeu au niveau de la flexibilité des composants.

1.1.2 Architecture

De façon générale, dans les réseaux, une architecture fait suite à une analyse détaillée des besoins (utilisateurs, équipements, environnements). L'architecture est alors la conséquence de la matrice de trafic ainsi que des exigences de connectivité.

Ces études préalables débouchent en principe sur la conception du réseau. Cette phase de dimensionnement du réseau devra déterminer l'ensemble des supports de connectivité nécessaires à l'organisation (entreprise, université, etc..) en question. Si d'un point de vue professionnel, certains facteurs comme :

1.1. DOMAINES D'ÉTUDES DANS LA FIBRE OPTIQUE

- la disponibilité des technologies dans le cadre où doit s'implanter l'infrastructure réseau,
- le coût des technologies et la capacité financière des entreprises vis à vis de ces technologies,

peuvent être déterminants, l'on doit noter, d'un point de vue strictement scientifique, que de nombreuses recherches ont été effectuées ces dernières années sur les supports de transmission de façon générale et sur la fibre optique en particulier. La lecture de Gungor et Lambert dans [38] ainsi que Li-man1 *et al.* dans [52] permettent de se convaincre de cette effervescence sur les supports de transmission.

Pour les réseaux de communication par fibre optique, nous nuancerons cette définition car ici l'on fait allusion aux composants électriques et électroniques précédemment cités et leur intégration pour former un réseau. En effet, dans le contexte des réseaux optiques, nous définirons l'architecture comme un ensemble décrivant à la fois :

- la connexion physique (anneau, étoile, etc..) entre les différents nœuds du réseau,
- le mode de connexion virtuelle (topologie virtuelle) qui assure le routage du trafic entre les différents nœuds ainsi que les relations entre ces nœuds. La topologie virtuelle peut être du type anneau, étoile, single hop où chaque flot d'une requête doit faire un unique saut depuis la source de la requête vers la destinations de la requête, etc.. avec également un routage (unidirectionnel ou bidirectionnel) avec des flots (bifurqués ou non bifurqués).

Il faut savoir aussi qu'une architecture donnée a ses caractéristiques et ses implications (type de fibre, type de nœud, type de composants dans le nœud, etc..). Le schéma suivant (FIG. 1.1) présente un exemple de nœud ainsi qu'une architecture en anneau avec des nœuds. On y retient que :

- sur les signaux en provenance du nœud $i - 1$, certains sont retirés au niveau du nœud i (passage du domaine optique vers le domaine électronique) et les autres signaux restants demeurent dans le domaine optique en direction du nœud $i + 1$,

1.1. DOMAINES D'ÉTUDES DANS LA FIBRE OPTIQUE

- des signaux sont ajoutés au niveau du nœud i (passage du domaine électronique vers le domaine optique) en direction du nœud $i + 1$.

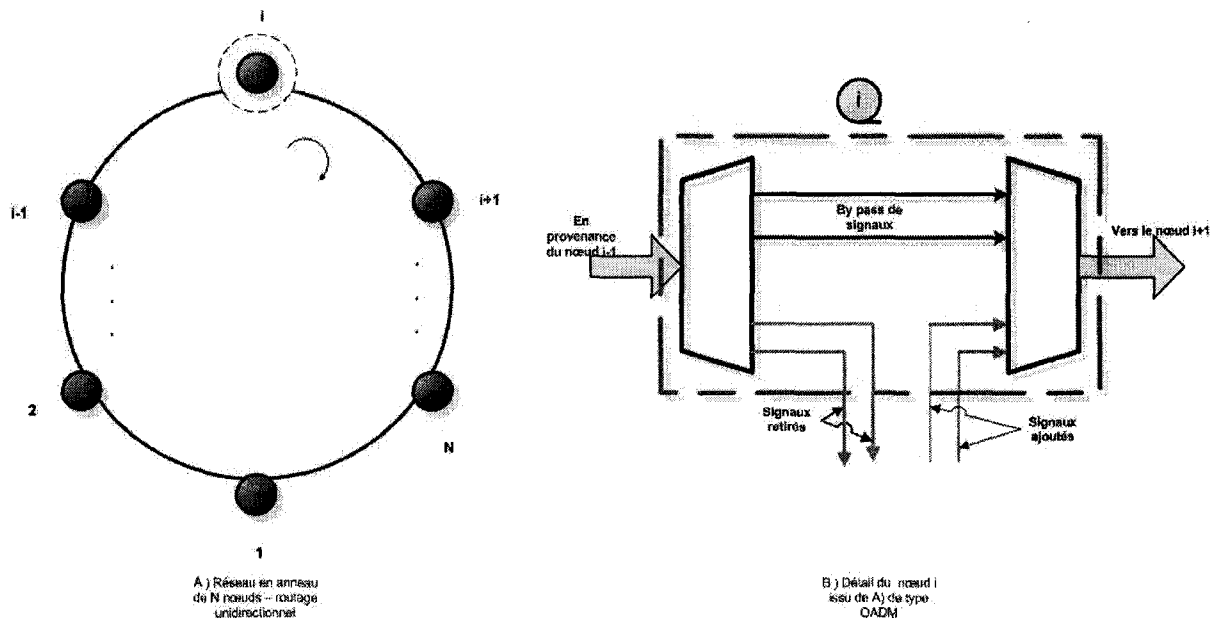


FIGURE 1.1 – Architecture avec nœuds et détail d'un nœud

L'architecture dans les réseaux optiques est aussi de façon traditionnelle regroupée dans trois grandes catégories à savoir le réseau d'accès (zone s'étendant du point d'accès de l'utilisateur final à la frontière avec le réseau métropolitain), le réseau métropolitain (composée de coeur du réseau qui est responsable de la connexion entre le réseau d'accès et l'épine dorsale), et le réseau de transport à longue distance (très grande zone).

La figure (FIG. 1.2) issue de Potts [61] nous permet de mieux appréhender les zones d'application de chaque type d'architecture ainsi que les éléments majeurs constitutifs de chaque zone. On remarquera surtout :

- que le nombre de longueurs d'onde injecté varie selon le type (« Access », « Metro », « Core »),

1.1. DOMAINES D'ÉTUDES DANS LA FIBRE OPTIQUE

- OXC (Optical Cross Connect) qui permet de faire la jonction entre les trois catégories précédentes,
- que le nombre de fibre pour constituer l'architecture physique varie selon diverses préoccupations et technologies adoptées (type de routage, redondance, etc..),
- que l'architecture physique en anneau est l'une des plus utilisées dans les réseaux existants en fibre optique.

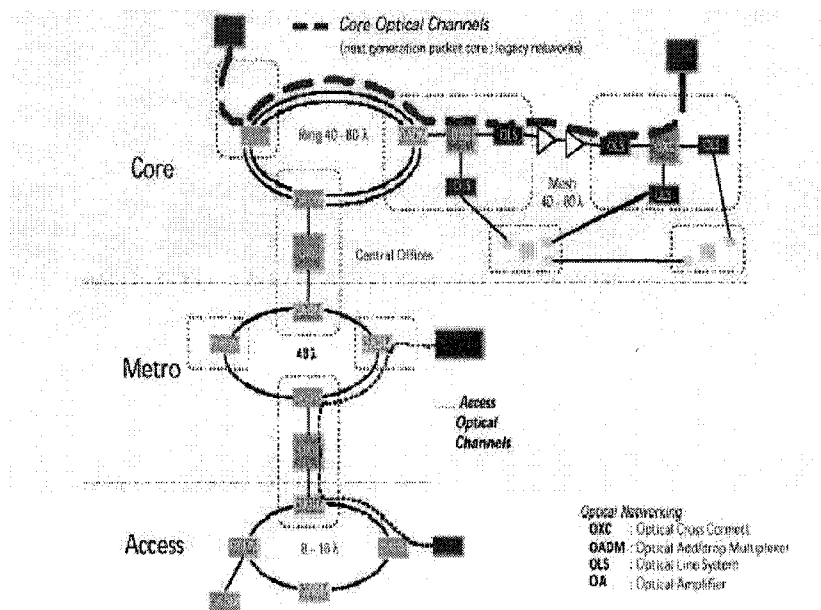


FIGURE 1.2 – Classification dans les réseaux optiques [61]

1.1.3 Management et contrôle plane

Si de façon traditionnelle, les tâches essentielles et premières du management comprennent la gestion des ressources (indicateurs de performance, qualité de service ou QoS, taux d'utilisation), la gestion des connexions (créations, libération des connexions entre deux

1.1. DOMAINES D'ÉTUDES DANS LA FIBRE OPTIQUE

points clients) et les fonctions additionnelles (bande passante, reprise après défaillance), l'on note que le CP (Control Plane) constitue une extension du management en ce sens qu'il s'occupe du niveau optique - vu la place de plus en plus importante de la technologie WDM (IP over WDM, SONET over WDM, etc..). Les problématiques suivantes sont résolues par le CP :

- mécanismes (procédures) de nominations et d'adressage des divers équipements,
- mécanisme de signalisation (comment reporter par exemple les erreurs au niveau supérieur ou alors à l'initiateur de la requête ou de la connexion, etc..),
- protocoles (ex. UNI, NDI) visant à s'affranchir de l'hétérogénéité des marques ou de la cascade d'opérateurs de télécommunication pouvant exister à travers une connexion réseau de bout en bout (vu que le CP nécessite la compréhension entre les différents systèmes qui s'interconnectent cf. Lamy *et al.* dans [51] pour une problématique avec différents opérateurs et technologies).

Il faut également noter qu'un autre exemple d'architecture ASON – lequel participe dans la gestion du CP – est disponible avec Gladisch *et al.* dans [34].

1.1.4 Protocoles

De manière générale, un protocole est un langage – contenant un certain nombre de spécifications – qui permet à des équipements de pouvoir communiquer entre eux (donc se comprendre et de véhiculer des messages).

Il y a aussi bien des protocoles chargés pour les données des clients que des protocoles ayant pour mission d'assurer le management des équipements. Le souci, ici, n'est pas de fournir la liste de tous les protocoles adoptés par les divers organismes de normalisation et de régulations (IEEE, IETF, etc..), néanmoins nous présentons la figure (FIG. 1.3) (Source Agilent Technologies) qui montre une vision globale des interactions entre les diverses couches en jeu dans le domaine des réseaux par fibre optique ainsi quelques protocoles impliqués. On remarquera, au niveau de cet aperçu, que la couche WDM (Wavelength

1.2. DÉFIS ACTUELS DANS LA FIBRE OPTIQUE

Division Multiplexing) constitue la couche basse de ce modèle présentant différents paliers de services et technologies notamment WAN (Wide Area network) (ex. PPP et HDLC). Nous aborderons la technologie WDM au niveau de la section relative aux techniques de multiplexage.

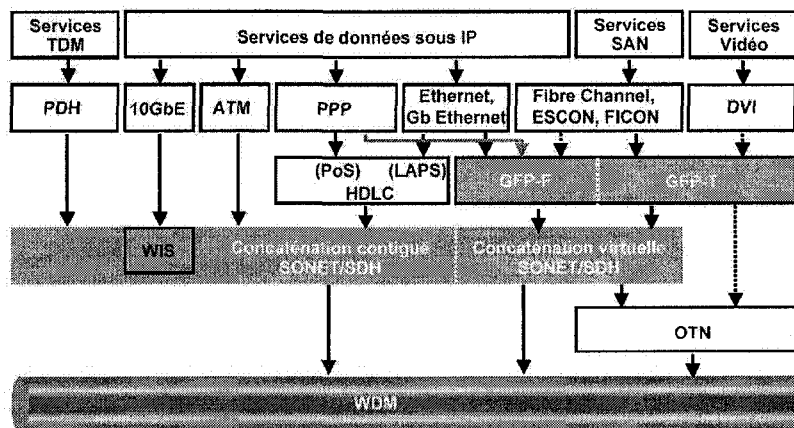


FIGURE 1.3 – Aperçu de quelques protocoles employés dans les réseaux de communication par fibre optique (Source : Agilent Technologies)

1.2 Défis actuels dans la fibre optique

Les grands enjeux dans le domaine des télécommunications sont pour :

- les opérateurs : maîtrise des coûts, satisfaction des clients,
- les utilisateurs : qualité de service, disponibilité du service, coût du service, diversité du contenu avec la multiplicité des applications (notamment Internet et multimédias, etc..).

Potts dans [61] récapitule justement les diverses attentes et exigences des différents acteurs.

1.3. TECHNIQUES DE MULTIPLEXAGE ET GRWA

La maîtrise des coûts passe par une optimisation du réseau c'est-à-dire une utilisation adéquate et efficace de toutes les ressources du réseau. Le souci de rentabilité économique maximale peut alors se traduire par une conjonction de différents facteurs (ressources humaines, ressources matérielles, méthodes de gestion etc..).

Au-delà de la satisfaction des clients et du volume du trafic qui augmente justement à cause du trafic Internet et de ses applications, soulignons que l'objectif majeur des opérateurs télécoms reste la minimisation des coûts d'immobilisation (CAPEX) et des coûts d'exploitation (OPEX) relatifs à l'infrastructure réseau dont ils disposent. De façon concrète, leurs préoccupations portent sur comment :

- abaisser le coût du transport de l'information (coût par bit/s/km),
- transmettre l'information à un débit plus important,
- avoir plus de flexibilité au niveau des composants et leurs remplacements.

Voyons à présent les techniques de multiplexage et la problématique du GRWA.

1.3 Techniques de multiplexage et GRWA

Nous avons souligné qu'il était important pour les opérateurs de télécommunication de transmettre l'information à un débit plus important. Le multiplexage est une technique qui participe à la résolution de cette problématique. Nous verrons aussi, avec le GRWA, que le fait de transmettre l'information à un débit plus important pose des problèmes difficiles à résoudre.

1.3.1 Techniques de multiplexage

Les techniques de multiplexage permettent d'augmenter la capacité de transmission du système. Il y a principalement deux chemins de multiplexage de données à savoir le TDM (Time Division Multiplexing) et le WDM (Wavelength Division Multiplexing).

1.3. TECHNIQUES DE MULTIPLEXAGE ET GRWA

Pour le TDM, il s'agit de répartir la ressource (time) en tranches de longueurs fixes. Les tranches sont, au départ, assignées aux différentes sources ou signaux. Il faut savoir que les tranches ne sont pas réparties équitablement entre les différents signaux. Avec le TDM, différents flots de données de bas débits sont tous multiplexés ensemble pour obtenir un unique signal de haut débit. Ce signal de haut débit est alors transmis sur la fibre optique et ce signal sera plus loin démultiplexé grâce à un démultiplexeur (dégrouper ce signal de haut débit en plusieurs signaux de bas débits). En augmentant donc le débit de transmission, on augmente la capacité de transmission.

Avec le WDM, on note que les signaux sont modulés sur différents supports de fréquence (ou longueur d'onde). Les fréquences étant séparées, cela fait que les signaux transmis sont séparés et il n'y a pas d'interférence entre les signaux. Les données sont transmises simultanément sur plusieurs longueurs d'onde à travers la même fibre optique. Le WDM permet de réaliser plusieurs connexions virtuelles (cv) sur une seule fibre avec chaque connexion virtuelle transportant une ou plusieurs requêtes de données. En augmentant le nombre de longueurs d'onde sur la même fibre, on peut augmenter la capacité de transmission. Dans [17] de Cerutti et Fumagalli, on a un aperçu des générations des technologies WDM notamment la première génération (FG) et la deuxième génération (SG) avec les avantages et les inconvénients de chaque architecture.

Par ailleurs, le lecteur trouvera d'autres informations sur les techniques de multiplexage, avec Barr et Patterson dans [5], au chapitre 1 de [62] avec Ramaswami et Sivarajan ainsi que dans [75] avec Zhu et Mukherjee.

1.3.2 GRWA

Le volet qui nous intéresse particulièrement ici quand on considère la figure (FIG. 1.4) issue de Gladisch *et al.* [34]) est le réseau WDM. Les deux couches « WDM network » et « Optical fibre infrastructure » constituent le domaine optique alors que les deux autres couches restantes sont dans le domaine électronique.

Le WDM ayant permis d'augmenter la capacité de transmission dans les réseaux optiques, on s'est vite aperçu de la problématique de l'utilisation de la bande passante. En effet, un des objectifs de toute organisation étant d'améliorer les divers processus en son

1.3. TECHNIQUES DE MULTIPLEXAGE ET GRWA

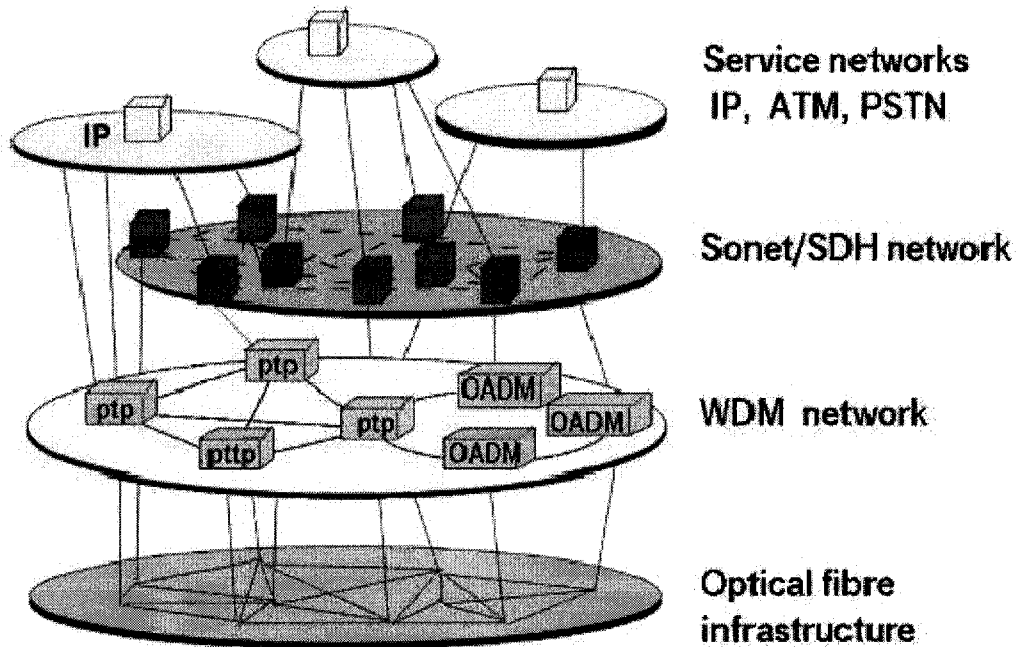


FIGURE 1.4 – Modèle en Couches [34]

sein, on a noté avec Ghani *et al.* [32] que de meilleures perspectives de développement du marché n'ont pas suivi l'effective disponibilité des technologies. Il fallait donc optimiser l'utilisation de la bande passante. Le « grooming » répond à la problématique d'une meilleure utilisation de la bande passante. Les regroupements de requêtes clients, ayant diverses granularités, sont effectués afin d'avoir des longueurs d'onde avec de grandes capacités et mieux utilisées. Il s'agit de multiplexer différents signaux clients de différents formats (STS-1 1.54 Mbps, basse vitesse avec Ethernet, etc..) sur une longueur d'onde à haute capacité de transmission (OC-48, OC-192, OC-768 avec, respectivement, des débits de 2.5 Gb/s, 10 Gb/s et 40 Gb/s).

Le trafic dans les réseaux WDM est acheminé à travers des longueurs d'onde qui ont leurs attributs. On en vient à devoir faire face aux préoccupations suivantes :

- quelles requêtes clients faudrait-il grouper ensemble ?

1.3. TECHNIQUES DE MULTIPLEXAGE ET GRWA

- quelles longueurs d'onde faudrait-il utiliser ? quels tronçons pour telle connexion virtuelle ?
- quelle longueur d'onde faudrait-il assigner à telle connexion virtuelle (assignation) ?
- quelle requête client faudrait-il acheminer sur telle connexion virtuelle (routage du trafic) ?

Ces différentes préoccupations conduisent à la problématique du GRWA. Le GRWA est la conséquence de deux problématiques à savoir le problème du grooming et celui du RWA.

Le problème de grooming concerne le groupement des requêtes des clients et leur assignation sur des chemins virtuels de manière à optimiser un certain objectif (ex. nombre de longueurs d'onde, nombre de cartes de transport, etc..). Le problème de grooming est très complexe à résoudre (cf. Zhang et Qiao dans [74]). Le grooming demeure un aspect permettant de réduire les conversions optique – électronique – optique (OEO) qui sont budgétivores (cf. [17] avec Cerutti et Fumagalli ainsi que [13] de Berry et Modiano). Il permet avec l'utilisation des OADM d'optimiser les passages du domaine optique vers le domaine électronique et vice versa étant donné le coût important des composants électroniques dans la structure du coût global du réseau.

Le RWA concerne le routage des chemins virtuels sur le réseau physique et leur assignation aux longueurs d'onde disponibles dans le réseau. Encore ici, ce problème se résout en vue de l'optimisation d'un certain objectif (ex. nombre de longueurs d'onde, nombre de cartes, etc..). La formulation du RWA, sa résolution, son niveau de complexité, varient selon l'architecture physique du réseau (anneau, étoile, etc..), la capacité de traitement des nœuds en présence. Dutta et Rouskas dans [28] ainsi que Harder *et al.* dans [39] évoquent en effet que le RWA est un problème complexe à résoudre en général en dehors de quelques cas spécifiques (arbre binaire, étoile).

La résolution du problème de grooming et du problème du RWA peut être réalisée indépendamment en séquence. Ces deux problèmes peuvent également être résolus simultanément - c'est le problème GRWA. Dans ce cas, on s'attend généralement à ce que la solution au problème GRWA soit meilleure que la solution séquentielle. Certaines considérations du niveau grooming peuvent influencer certaines considérations du niveau RWA.

1.3. TECHNIQUES DE MULTIPLEXAGE ET GRWA

Pris individuellement, le niveau grooming et le niveau RWA ne sont pas nécessairement optimaux. Toutefois, pris collectivement, ils représentent une solution globale optimale.

A propos d'optimisation, signalons que le schéma suivant (FIG. 1.5) issu de Modiano et Lin [57] permet de comparer deux architectures et de voir la différence en terme de minimisation du coût du réseau (12 cartes pour l'architecture non groomée et 9 cartes pour l'architecture groomée).

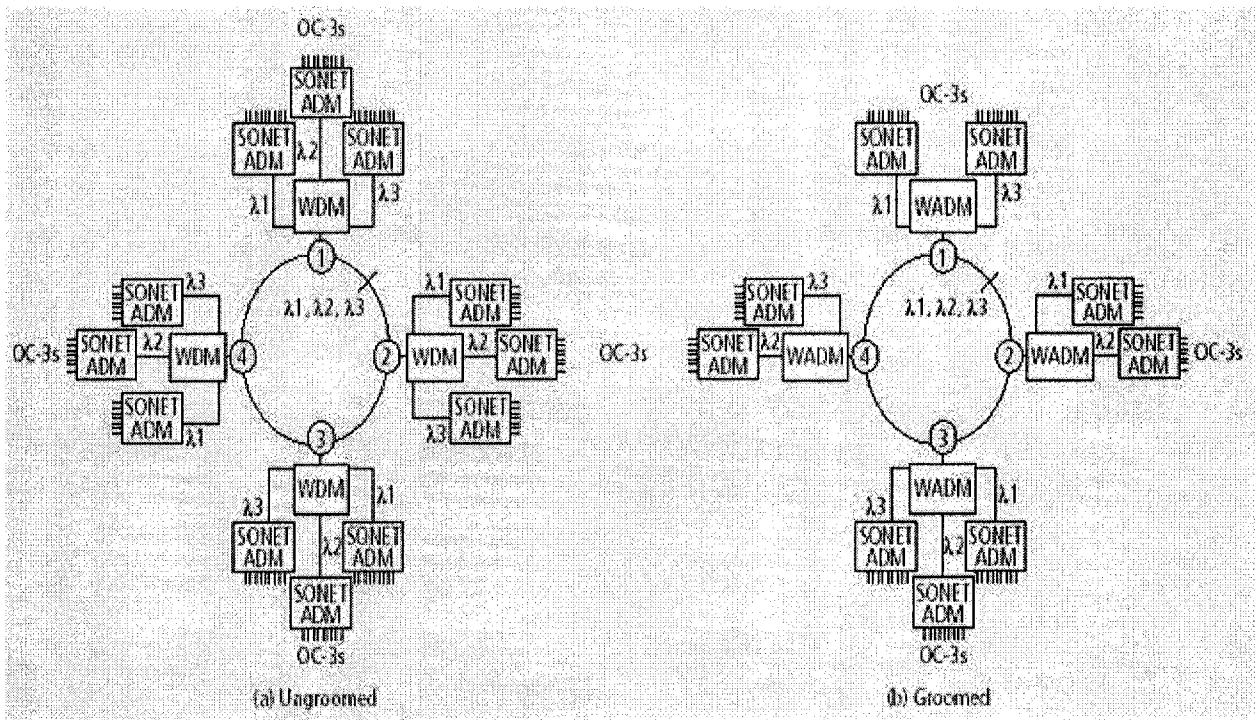


FIGURE 1.5 – Architectures non groomée et groomée pour une problématique posée [57]

Dans cet exemple de Modiano et Lin, il s'agit de satisfaire une matrice de trafic uniforme dans le cadre d'un réseau WDM en anneau de 4 nœuds avec trois longueurs d'onde ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) et un routage unidirectionnel.

On note que pour l'architecture groomée, il y a minimisation du nombre de passage du domaine optique vers le domaine électronique et vice-versa grâce à la présence de WADM ou OADM à chaque nœud. Le OADM permet à certaines connexions virtuelles

1.4. DÉFINITION DU PROBLÈME

de demeurer dans le domaine optique et de traverser des nœuds intermédiaires sans être régénérées (OEO). Cela permet alors de réaliser des économies en investissements de cartes (au nœud 2 et au nœud 4) (présence de OADM dans cette architecture).

Pour l'architecture non groomée, le plan de routage utilisant toutes les longueurs d'onde ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) et en absence de OADM, il y a, pour chaque longueur d'onde et à chaque nœud, passage du domaine optique vers le domaine électronique et vice versa (d'où $3 \times 4 = 12$ cartes au total) (absence d'OADM dans cette architecture). Nous verrons au Chapitre 4 que notre approche permet de réduire à 8 l'investissement pour cet exemple dans le cas de l'architecture groomée.

1.4 Définition du problème

Compte tenu de la concurrence très âpre que se livrent les divers opérateurs de télécommunication et face à la complexité du marché, il est impératif, pour chaque opérateur, d'avoir un réseau bien optimisé. Il est important de rappeler qu'un des objectifs majeurs des opérateurs demeure les coûts d'immobilisation et les coûts d'exploitations relatifs à l'infrastructure réseau dont ils disposent.

Ici, le problème à résoudre est de pouvoir minimiser les coûts de gestion du réseau tout en s'assurant de :

- satisfaire toutes les exigences de requêtes des clients (acheminement de la source vers la destination),
- tenir compte de toutes les granularités des divers clients compte tenu de la multiplicité des types et formats de données devant être véhiculés sur l'architecture réseau,
- tenir compte de la structure des coûts des cartes réseaux à installer aux divers nœuds requis pour satisfaire la matrice de trafic,
- tenir compte de la capacité de traitement de chaque nœud, de la disponibilité de la capacité et de la satisfaction de la demande,
- tenir compte des flots des requêtes qui peuvent être bifurqués ou pas de même que du routage qui peut être unidirectionnel ou bidirectionnel. Dans le cas des flots non

1.4. DÉFINITION DU PROBLÈME

bifurqués, toutes les unités (STS) figurant dans une requête $t(i, j)$ voyagent toutes à la fois sur la même connexion virtuelle alors que, pour les flots bifurqués, toutes les unités (STS) figurant dans une requête $t(i, j)$ peuvent voyager sur différentes connexions virtuelles.

Il faudra déterminer une topologie virtuelle constituée de connexions virtuelles tout en sachant que chaque connexion virtuelle :

- a une source unique et une destination unique,
- a une modulation v déterminée parmi l'ensemble des modulations disponibles pour le réseau,
- embarque diverses requêtes de clients et le flot global véhiculé ne doit pas excéder la modulation de ladite connexion virtuelle,
- utilise une et une seule longueur d'onde k parmi l'ensemble des longueurs d'onde disponibles,
- utilise au nœud source un port et au nœud destination un port et ces deux ports sont modulés à la même valeur v .

Nous limiterons dans le cadre de cette problématique les coûts de gestion exclusivement aux tarifs des cartes de transport et notre topologie physique sera un réseau en anneau. Rappelons que c'est un problème de Grooming (multiplexer de multiples petits flots sur la même longueur d'onde), Routing (choisir des artères à emprunter depuis la source vers la destination et véhiculer le trafic), WaveLength Assignment (assigner des longueurs d'onde aux différentes cv).

Il est aussi, à nos yeux, important de signaler les points d'originalité suivants dans notre démarche :

- codirection assurée dans le cadre de cette initiation à la recherche par deux parcours différents (domaine de la recherche opérationnelle et domaine des télécommunications),

1.4. DÉFINITION DU PROBLÈME

- modèle économique d'évaluation du coût du réseau
même si notre modèle économique d'évaluation du coût du réseau correspond au modèle selon le nombre de ports (considération uniquement du domaine électronique au niveau des ports du routeur - le domaine optique n'est pas pris en compte), on doit signaler que l'objectif final de notre modèle mathématique exprime fidèlement la réalité concernant le mode de décompte des ports.

Parlant toujours de contribution et de pertinence, soulignons que le tableau (TAB. 1.1) extrait de Wang *et al.* dans [71] ainsi que les travaux de Dutta et Rouskas dans [27] permet de mieux situer nos travaux (Trafic statique : uniforme et non uniforme, modulation multiple – Architecture : routage unidirectionnel, PPDWDM – Résultats : MILP amélioré et MILP initial, décomposition structurée, tests numériques, comparaison sur plusieurs plates-formes).

	Traffic assumptions	Ring architecture	Main result
Gerstel [1][2]	<ul style="list-style-type: none"> • Static, uniform • Non-statistic dynamic and fixed wavelength 	<ul style="list-style-type: none"> • PPWDM (multihop) • Fully-optical ring (single-hop) • Single-hub (multihop) • Double-hub (multihop) • Hierarchical ring (multihop) • Incremental ring (multihop) 	<ul style="list-style-type: none"> • First paper that tries to minimize transceiver cost. • Study of dynamic traffic and fixed lightpath. • Different architectures are compared.
Modiano [3]	<ul style="list-style-type: none"> • Egress traffic • Static, uniform 	<ul style="list-style-type: none"> • Unidirectional ring with egress node (single-hop) • Bidirectional ring (single-hop) 	<ul style="list-style-type: none"> • Proof of NP-completeness. • Optimal solution for uniform traffic on egress ring. • Lower bound on uniform all-to-all traffic.
Simmons [4][5]	<ul style="list-style-type: none"> • Static, uniform • Static, distance-dependent traffic 	<ul style="list-style-type: none"> • Bidirectional ring with odd number of nodes (single-hop) 	<ul style="list-style-type: none"> • How to group timeslots. • Maximal savings for some special cases. • Super node model for distance - dependent traffic.
Zhang & Qiao [6]	<ul style="list-style-type: none"> • Static, uniform traffic • Static, non-uniform traffic 	<ul style="list-style-type: none"> • Unidirectional and bidirectional ring (single-hop) 	<ul style="list-style-type: none"> • Greedy heuristic for grooming arbitrary traffic. • Heuristic for circle construction for non-uniform traffic.
Our work	<ul style="list-style-type: none"> • Static, uniform traffic • Static, non-uniform traffic 	<ul style="list-style-type: none"> • Unidirectional and bidirectional ring (single-hop) • Single hub (multihop) 	<ul style="list-style-type: none"> • Formal mathematical problem specification (ILP). • Simulated-annealing-based heuristic for traffic grooming • Greedy heuristic for single-hop and multihop grooming.

TABLE 1.1 – Caractéristiques de travaux précédents sur les réseaux WDM en anneau [27]

Chapitre 2

Modélisation du problème

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

Après l'analyse détaillée du problème à résoudre qui a été faite précédemment, cette partie se chargera d'énoncer et d'explicitier les différentes contraintes ainsi que l'objectif nécessaires à la mise en place du modèle mathématique. Après l'obtention du modèle mathématique initial, nous passerons par des phases d'amélioration du modèle afin d'aboutir à un MILP plus allégé.

2.1 Modélisation du problème

2.1.1 Paramètres

Le problème tel que précédemment exprimé nous conduit à la mise en place des paramètres suivants :

- n : Nombre total de nœuds du réseau,
- w : Nombre total de longueurs d'onde disponibles,
- M : Ensemble des modulations possibles pour les longueurs d'onde,
- $cout(v)$: Grille de tarification pour les modulations utilisées coût de chaque type de port, chaque port étant d'une modulation donnée au niveau du nœud, $v \in M$,
- $t(i, j)$: Matrice de trafic ($i = 1..n, j = i..n, i \neq j$) en unité de flots STS,
- $cmax$: Capacité maximale uniforme de tout segment $[s, s + 1]$ constitué du nœud s et de son successeur $s + 1$ dans le sens horaire $cmax = w \times max \{M\}$,
- $I = \bigcup_{s=1..n} I_s$, I_s étant l'ensemble de toutes les connexions virtuelles (i, j) tel que allant de i à j dans le sens horaire l'on passe par le segment $[s, s + 1]$ constitué du nœud s et de son successeur $s + 1$ - $I_s = A_s \cup B_s$ avec :

$$A_s = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, i = s \text{ et } j \forall j\}$$

$$B_s = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, (s < j < i) \text{ ou } (j < i < s) \text{ ou } (i < s < j)\}$$

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

2.1.2 Variables de décision

Considérant l'énoncé détaillé du problème, les paramètres précédemment définis ainsi que la forme mathématique du problème, on note que les variables de décision permettent de décider de la valeur de toute solution réalisable et de connaître l'optimum du problème posé. Les variables de décision utilisées dans le cadre de la modélisation de ce problème sont :

- $\lambda_k^{ij} = \begin{cases} 1 & \exists \text{ une connexion virtuelle ayant pour source } i, \text{ pour destination } j \\ & \text{avec la longueur d'onde } k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $OC_{k,v}^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_k^{ij} = 1 \text{ avec la modulation } v \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- F_k^{ij} : **variable entière** qui est le volume total des requêtes client embarquées sur λ_k^{ij} ,
- $\mu_{k,sd}^{ij}$: **variable entière** qui est la partie de la requête $t(s, d)$ empruntant la connexion virtuelle λ_k^{ij} .

2.1.3 Fonction économique ou objectif

On notera, au niveau de la fonction économique, cette manière de procéder qui affine le décompte des ports et tient compte d'une caractéristique industrielle qui permet qu'un port d'une carte soit doté d'une interface d'entrée et d'une interface de sortie. Tout port à un nœud i donné a :

- une modulation v unique parmi l'ensemble des modulations disponibles,
- une interface d'entrée pour une connexion virtuelle entrante au nœud i avec la même valeur v précédente de modulation,
- une interface de sortie pour une connexion virtuelle sortante du nœud i avec la même valeur v précédente de modulation.

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

L'objectif du modèle est de minimiser le coût global du réseau en minimisant les ports installés aux différents nœuds. Cet objectif est le suivant

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M} \max \left[\sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{si}, \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{id} \right] \times \text{cout}(v)$$

2.1.4 Contraintes

Les contraintes suivantes sont celles qui sont utilisées dans le modèle.

ROUTAGE CONNEXIONS VIRTUELLES ET LONGUEURS D'ONDES

Le nombre total de toutes les cv passant par le segment constitué de s et de son successeur $s + 1$ (I_s) est inférieur ou égal à w quel que soit le nœud s donné

$$\sum_{(i,j) \in I_s} \sum_{k=1}^w \lambda_k^{ij} \leq w \quad \forall s = 1..n . \quad (2.1)$$

Quels que soient le segment $[s, s + 1]$ et la longueur d'onde k considérés, k la longueur d'onde est utilisée au plus une fois sur ledit segment parmi l'ensemble de toutes les cv traversant $[s, s + 1]$

$$\sum_{(i,j) \in I_s} \lambda_k^{ij} \leq 1 \quad \forall s = 1..n , k = 1..w . \quad (2.2)$$

La variable λ_k^{ij} est égale à la somme de toutes les modulations possibles v de $OC_{k,v}^{ij}$ quels que soient les indices i, j, k donnés avec $i = 1..n$, $j = 1..n$, $k = 1..w$, $i \neq j$

$$\lambda_k^{ij} = \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n , j = 1..n , k = 1..w , i \neq j . \quad (2.3)$$

FLOTS BIFURQUÉS ET CAPACITÉS

La somme de toutes les modulations des cv traversant tout segment $[s, s + 1]$ donné

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

est inférieure ou égale à max

$$\sum_{(i,j) \in I_s} \sum_{k=1}^w \sum_{v \in M} v \times OC_{k,v}^{ij} \leq max \quad \forall s = 1..n. \quad (2.4)$$

La somme de toutes les requêtes partielles ou totales bifurquées sur λ_k^{ij} (F_k^{ij}) est inférieure ou égale à la modulation en vigueur sur ladite connexion virtuelle quelle que soit la cv λ_k^{ij} considérée

$$F_k^{ij} \leq \sum_{v \in M} v \times OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w. \quad (2.5)$$

La valeur de $t(i, j)$ est entièrement répartie parmi l'ensemble des cv prenant leurs sources en i

$$t(i, j) = \sum_{d=1, d \neq i}^n \sum_{k=1}^w \mu_{k,ij}^{id} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, t(i, j) \neq 0. \quad (2.6)$$

La valeur de $t(i, j)$ est entièrement répartie parmi l'ensemble des cv ayant leurs destinations en j

$$t(i, j) = \sum_{s=1, s \neq j}^n \sum_{k=1}^w \mu_{k,ij}^{sj} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, t(i, j) \neq 0. \quad (2.7)$$

ROUTAGE DU TRAFIC

Le produit de $t(i, j)$ et de λ_k^{ij} est toujours supérieur ou égal au flot de $t(s, d)$ qui est acheminé sur ladite cv λ_k^{ij}

$$\mu_{k,sd}^{ij} \leq t(s, d) \times \lambda_k^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, s = 1..n, d = 1..n, s \neq d. \quad (2.8)$$

Le flot total véhiculé sur la cv λ_k^{ij} est égal à la somme de toutes les portions - partielles

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

ou totales - de requêtes qui sont acheminées sur ladite cv λ_k^{ij}

$$F_k^{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{d=1, d \neq s}^n \mu_{k, sd}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w. \quad (2.9)$$

La somme totale de tous les flots de toutes les cv ayant leurs sources au nœud i est supérieure ou égale au cumul de toutes les requêtes ayant pour source ledit nœud

$$\sum_{d=1, d \neq i}^n \sum_{k=1}^w F_k^{id} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n t(i, j) \quad \forall i = 1..n. \quad (2.10)$$

La somme totale de tous les flots de toutes les cv ayant leurs destinations au nœud j est supérieure ou égale au cumul de toutes les requêtes destinées audit nœud

$$\sum_{s=1, s \neq j}^n \sum_{k=1}^w F_k^{sj} \geq \sum_{i=1, i \neq j}^n t(i, j) \quad \forall j = 1..n. \quad (2.11)$$

L'équation suivante exprime la conservation de flot à chaque nœud du réseau quel que soit le nœud

$$\sum_{k=1}^w \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_{k, sd}^{ij} - \sum_{k=1}^w \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_{k, sd}^{ji} = \begin{cases} t(s, d) \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i = s \\ 0 \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i \neq s, i \neq d \\ -t(s, d) \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i = d \end{cases} \quad (2.12)$$

CONTRAINTES de POSITIVITE SUR LES VARIABLES

λ_k^{ij} est une variable binaire qui vaut 1 s'il existe une connexion virtuelle ayant pour source i , pour destination j avec la longueur d'onde k et 0 sinon

$$\lambda_k^{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w. \quad (2.13)$$

$OC_{k,v}^{ij}$ est une variable binaire qui vaut 1 si λ_k^{ij} vaut 1 avec la modulation v et 0 sinon

$$OC_{k,v}^{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, v \in M. \quad (2.14)$$

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

$\mu_{k,sd}^{ij}$ est une variable réelle positive qui est la partie de la requête $t(s, d)$ empruntant la connexion virtuelle λ_k^{ij}

$$\mu_{k,sd}^{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, s = 1..n, d = 1..n, s \neq d. \quad (2.15)$$

F_k^{ij} est une variable réelle positive qui est le volume total des requêtes clients embarquées sur λ_k^{ij}

$$F_k^{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w. \quad (2.16)$$

2.1.5 Résumé de la formulation du problème

Avant de parvenir au résumé de la formulation finale du problème posé, il nous faut faire les opérations suivantes :

- linéarisation de la fonction économique ou objectif afin de rendre notre problème entièrement linéaire,
- suppression des contraintes apparaissant en double afin d'alléger notre modèle et de le simplifier davantage et nous permettre de gagner un tant soit peu en temps de calcul,
- remplacement des contraintes (nous aurons deux modèles entièrement linéarisés : le premier dit MILP initial et le second appelé MILP amélioré).

1) Phase de linéarisation

Compte tenu de la structure des coûts et de l'objectif initial, nous pouvons linéariser la fonction économique et aboutir à un nouvel objectif linéarisé. Ce nouvel objectif linéarisé introduit cependant deux nouvelles contraintes linéaires.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M} nbport_v^i \times cout(v) \quad \text{Nouvel Objectif Linéarisé}$$

Les contraintes suivantes peuvent être ajoutées au modèle initial suite à la linéarisation de l'objectif

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

Le nombre de ports existant au nœud i avec la modulation v est supérieur ou égal à la somme de toutes les cv entrantes au nœud i avec la modulation v

$$nbport_v^i \geq \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{si} \quad \forall i = 1..n, v \in M. \quad (2.17)$$

Le nombre de ports existant au nœud i avec la modulation v est supérieur ou égal à la somme de toutes les cv sortantes du nœud i avec la modulation v

$$nbport_v^i \geq \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{id} \quad \forall i = 1..n, v \in M. \quad (2.18)$$

$nbport_v^i$ est un variable réelle positive qui est le nombre de ports au nœud i ayant la modulation v

$$nbport_v^i \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, v \in M. \quad (2.19)$$

2) Phase d'optimisation des contraintes

Les contraintes suivantes peuvent être supprimées du modèle initial :

1. (2.1) : en effet, la contrainte (2.2) \implies (2.1),
2. (2.11) : en effet, la contrainte (2.17) \implies (2.11)
 vu que l'ensemble de toutes les connexions virtuelles entrantes à un nœud donné transporte nécessairement tout le trafic des requêtes client ayant pour destination ledit nœud (autrement il y aura des requêtes client insatisfaites),
3. (2.10) : en effet, la contrainte (2.18) \implies (2.10)
 vu que l'ensemble de toutes les connexions virtuelles sortantes d'un nœud donné transporte nécessairement tout le trafic des requêtes client ayant pour source ledit nœud (autrement il y aura des requêtes client insatisfaites),
4. (2.4) : compte tenu de l'hypothèse $cmax = w \times Max_{i \in M} \{m_i\}$ et ayant w comme le nombre maximal de longueurs d'onde, on a toujours quelque soit le segment au maximum w longueurs d'onde qui y passent et donc on a toujours la contrainte (2.4) qui est vérifiée.

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

3) Phase de remplacement des contraintes

Le remplacement suivant au niveau des contraintes

Compte tenu du lien entre les deux variables binaires λ et OC par la relation $\lambda_k^{ij} = \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij}$, on peut passer à un modèle où nous disposerons plutôt d'une variable binaire OC et d'une variable continue λ . (cf. ((2.3)) (4.1) (4.2) page 53 pour plus de détails avec le MILP amélioré). On retient déjà qu'on passe d'un modèle MILP initial avec λ et OC binaires à un modèle MILP amélioré avec λ continue et OC binaire grâce à la relation (2.3). Le MILP amélioré a donc moins de variables binaires que le MILP initial.

Par la relation (2.9), $F_k^{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{d=1, d \neq s}^n \mu_{k,sd}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w$ et la définition même des variables $\mu_{k,sd}^{ij}$ et F_k^{ij} avec F_k^{ij} étant le volume total des requêtes client embarquées sur λ_k^{ij} , on peut dire que $\mu_{k,sd}^{ij} \in \mathbb{N}$ fait que l'on peut définir $F_k^{ij} \in \mathbb{R}^+$ en étant toujours assuré qu'à la résolution F_k^{ij} demeurera toujours entière. Par ailleurs, on remarquera lors de l'implémentation qu'on peut définir $\mu_{k,sd}^{ij} \in \mathbb{R}^+$ sans affecter la solution optimale.

On note aussi que $\max(\sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{si}, \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{id}) \in \mathbb{N}$ et en mettant en place la linéarisation de l'objectif avec l'avènement des deux nouvelles contraintes subséquentes (2.17), (2.18) on définit $nbport_v^i \in \mathbb{R}^+$.

Le récapitulatif du MILP initial est le suivant

$$\sum_{(i,j) \in I_s} \lambda_k^{ij} \leq 1 \quad \forall s = 1..n, k = 1..w \quad ((2.2))$$

$$\lambda_k^{ij} = \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, k = 1..w, i \neq j \quad ((2.3))$$

$$F_k^{ij} \leq \sum_{v \in M} v \times OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.5))$$

$$t(i, j) = \sum_{d=1, d \neq i}^n \sum_{k=1}^w \mu_{k,ij}^{id} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, t(i, j) \neq 0 \quad ((2.6))$$

$$t(i, j) = \sum_{s=1, s \neq j}^n \sum_{k=1}^w \mu_{k,ij}^{sj} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, t(i, j) \neq 0 \quad ((2.7))$$

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

$$\mu_{k,sd}^{ij} \leq t(s,d) \times \lambda_k^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, s = 1..n, d = 1..n, s \neq d \quad ((2.8))$$

$$F_k^{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{d=1, d \neq s}^n \mu_{k,sd}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.9))$$

$$\sum_{k=1}^w \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_{k,sd}^{ij} - \sum_{k=1}^w \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_{k,sd}^{ji} = \begin{cases} t(s,d) \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i = s \\ 0 \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i \neq s, i \neq d \\ -t(s,d) \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i = d \end{cases} \quad ((2.12))$$

$$\lambda_k^{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.13))$$

$$OC_{k,v}^{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, v \in M \quad ((2.14))$$

$$\mu_{k,sd}^{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, s = 1..n, d = 1..n, s \neq d \quad ((2.15))$$

$$F_k^{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.16))$$

$$nbport_v^i \geq \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{si} \quad \forall i = 1..n, v \in M \quad ((2.17))$$

$$nbport_v^i \geq \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{id} \quad \forall i = 1..n, v \in M \quad ((2.18))$$

$$nbport_v^i \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, v \in M \quad ((2.19))$$

Le modèle MILP initial ($OC \in \{0,1\}$, $\lambda \in \{0,1\}$) se présente ainsi

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M} nbport_v^i \times \text{cout}(v) \\ \text{s.à} \quad & \left\{ \begin{array}{l} (2.2), (2.3), (2.5) \text{ à } (2.9), (2.12) \text{ à } (2.19) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans ce modèle MILP initial, nous notons que toutes les variables sont continues sauf OC et λ qui sont binaires.

Le récapitulatif du MILP amélioré est le suivant

$$\sum_{(i,j) \in I_s} \lambda_k^{ij} \leq 1 \quad \forall s = 1..n, k = 1..w \quad ((2.2))$$

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

$$F_k^{ij} \leq \sum_{v \in M} v \times OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.5))$$

$$t(i, j) = \sum_{d=1, d \neq i}^n \sum_{k=1}^w \mu_{k,ij}^{id} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, t(i, j) \neq 0 \quad ((2.6))$$

$$t(i, j) = \sum_{s=1, s \neq j}^n \sum_{k=1}^w \mu_{k,ij}^{sj} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, t(i, j) \neq 0 \quad ((2.7))$$

$$\mu_{k,sd}^{ij} \leq t(s, d) \times \lambda_k^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, s = 1..n, d = 1..n, s \neq d \quad ((2.8))$$

$$F_k^{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{d=1, d \neq s}^n \mu_{k,sd}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.9))$$

$$\sum_{k=1}^w \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_{k,sd}^{ij} - \sum_{k=1}^w \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_{k,sd}^{ji} = \begin{cases} t(s, d) \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i = s \\ 0 \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i \neq s, i \neq d \\ -t(s, d) \quad \forall s = 1..n, d = 1..n, i = 1..n : i = d \end{cases} \quad ((2.12))$$

$$0 \leq \lambda_k^{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.20))$$

$$OC_{k,v}^{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, v \in M \quad ((2.14))$$

$$\mu_{k,sd}^{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w, s = 1..n, d = 1..n, s \neq d \quad ((2.15))$$

$$F_k^{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, i \neq j, k = 1..w \quad ((2.16))$$

$$nbport_v^i \geq \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{si} \quad \forall i = 1..n, v \in M \quad ((2.17))$$

$$nbport_v^i \geq \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^w OC_{k,v}^{id} \quad \forall i = 1..n, v \in M \quad ((2.18))$$

$$nbport_v^i \in \mathbb{R}^+ \quad \forall i = 1..n, v \in M \quad ((2.19))$$

$$\lambda_k^{ij} \leq \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, k = 1..w, i \neq j \quad ((4.1))$$

$$\lambda_k^{ij} \geq OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, k = 1..w, i \neq j, v \in M \quad ((4.2))$$

Et notre MILP amélioré ($OC \in \{0, 1\}$, $0 \leq \lambda \leq 1$) se présente ainsi

2.1. MODÉLISATION DU PROBLÈME

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M} nbport_v^i \times cout(v) \\ \text{s.à } & \left\{ \begin{array}{l} (2.2), (2.5) \text{ à } (2.9), (2.12), (2.14) \text{ à } (2.19), (2.20), (4.1), (4.2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dans ce modèle MILP amélioré, nous notons que toutes les variables sont continues sauf OC qui est binaire.

Un résumé général des deux approches de modélisation permet d'établir les groupes suivants de contraintes :

1. MILP initial et MILP amélioré - Contraintes communes
(2.2), (2.5) à (2.9), (2.12), (2.14) à (2.19),
2. MILP initial - Contraintes spécifiques
(2.3), (2.13) ,
3. MILP amélioré - Contraintes spécifiques
(2.20), (4.1) , (4.2) .

Même si ce problème original de programmation linéaire mixte en nombres entiers relève du domaine des télécommunications, il faut noter que la forme générale décrite se retrouve dans les problématiques de diverses natures (transport, ingénierie financière, pétrole, etc..) et les facteurs influant sur la résolution de ce type de problème sont :

- le nombre de variables et de contraintes qui permettront de parler de la taille du problème (petite, moyenne ou grande),
- la structure des données du problème,
- la classe du problème (linéaire, non linéaire, quadratique, contraintes égalités ou pas, etc..).

2.2 Décomposition structurée

2.2.1 Rappel des attentes

Notre problème fait appel à de nombreuses variables et contraintes (problèmes pouvant aller au delà de 100000 variables) et il est important dans ce genre de situations de faire appel à la décomposition structurée. Il s'agira de découvrir l'existence d'une structure qui facilite la résolution du problème.

2.2.2 Approche de décomposition structurée

Considérant notre problème MILP amélioré ($OC \in \{0, 1\}, 0 \leq \lambda \leq 1$) dont nous rappelons la formulation générale

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^n \sum_{v \in M} nbport_v^i \times cout(v) \\ \text{s.à } & \left\{ \begin{array}{l} (2.2), (2.5) \text{ à } (2.9), (2.12), (2.14) \text{ à } (2.19), (2.20), (4.1), (4.2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si nous définissons les ensembles suivants :

- $\Delta : \{ OC_{k,v}^{ij} : \text{contrainte (2.14) soit vérifiée } \},$
- $X : \{ \lambda_k^{ij} : \text{contraintes (2.2) et (2.20) soient vérifiées } \},$
- $Y : \{ nbport_v^i : \text{contrainte (2.19) soit vérifiée } \},$
- $Z : \{ F_k^{ij} : \text{contrainte (2.16) soit vérifiée } \},$
- $R : \{ \mu_{k,sd}^{ij} : \text{contraintes (2.6) et (2.7) et (2.12) et (2.15) soient vérifiées } \},$

Ainsi que

- $G(x, y, z, r)$ représentant la matrice des contraintes des fonctions liant les variables x ou y ou z ou r - les lignes de contraintes où la variable OC est absente ,

2.2. DÉCOMPOSITION STRUCTURÉE

- $B(x, y, z, r) + A(u)$ représentant la matrice des contraintes liant les variables u et (x, y, z, r) les lignes de contraintes où la variable OC est présente à savoir (2.5),(2.17),(2.18),(4.1) et (4.2).

nous pouvons dire que la forme mathématique générale du MILP devient alors :

$$\begin{array}{l} \text{Min } C(x, y, z, r) \\ \text{s.à } \left\{ \begin{array}{l} B(x, y, z, r) + A(u) \leq 0 \\ G(x, y, z, r) \geq 0 \\ u \in \Delta, \quad (x, y, z, r) \in X \times Y \times Z \times R \end{array} \right. \end{array}$$

Nous pouvons dire, à propos de cette nouvelle formulation du problème linéaire mixte en nombres entiers que nous y distinguons deux groupes de variables à savoir (u) et (x, y, z, r) . La méthode de Benders semble être bien adaptée pour traiter ce genre de problèmes où l'on a deux groupes de variables. La méthode de Benders utilisera, en effet, une structure qui rendra facile la résolution de notre problème.

On verra qu'en se servant de la formalisation décrite (cf. section 3.2.5 à la page 45), on arrivera à la mise en place du problème maître, du problème esclave ainsi que des paramètres de convergence pour l'algorithme de Benders.

Il est important, toutefois, de signaler qu'au delà de l'aspect modélisation avec Benders, ce modèle obtenu n'a pas été l'objet d'implémentation dans le cadre de la présente étude.

Chapitre 3

Aspects algorithmiques et aspects
linéaires de la programmation
mathématique

3.1. PRÉLIMINAIRES

Après la modélisation détaillée du problème au chapitre précédent, ce chapitre va se focaliser sur la programmation linéaire et la programmation linéaire mixte en nombres entiers. Nous verrons aussi les stratégies des algorithmes dans ces catégories ainsi que les paramètres qui permettent d'évaluer ou de comparer des algorithmes. Pour terminer, nous aborderons un peu plus en détails la formalisation du modèle MILP amélioré à l'aide de la décomposition structurée avec Benders.

Notre problème d'optimisation du coût du réseau s'inscrit dans le cadre plus global de la recherche opérationnelle (RO). La RO est, en effet, aux confins de plusieurs disciplines à savoir les mathématiques, l'informatique et l'économie.

Les aspects informatiques dans la RO concernent notamment la structuration des données ou l'organisation des données et les diverses relations entre elles. Une bonne connaissance des fondements en structuration des données visent à répondre à des questions essentielles (ex. comment maximiser le flot ?, quel est le plus court chemin ?, etc..). Tarjan avec [67] constitue un excellent point de départ concernant ces préoccupations.

Si le but ici n'est pas de faire un cours sur les options informatiques de la RO, il est important, par contre, d'avoir un aperçu des aspects mathématiques de notre problème d'optimisation du coût du réseau.

3.1 Préliminaires

3.1.1 Optimisation avec contraintes : aperçu de pré-requis

Considérons le vecteur $x \in X$, les fonctions f , g et h différentiables, le problème d'optimisation avec contraintes nommé (P1) se formule ainsi :

$$\begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{s.à } \left\{ \begin{array}{l} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in X \end{array} \right. \end{array} \quad (3.1)$$

On note que selon la nature de l'ensemble X , on pourra évoquer les terminologies

3.1. PRÉLIMINAIRES

de programmation continue ($X : \mathbb{R}^n$) ou de programmation entière ($X : \mathbb{N}^n$) ou de programmation mixte en nombres entiers ($X : \mathbb{R}^m \times \mathbb{N}^{n-m}$) dont un cas spécial est celui des variables entières binaires appartenant à $\{0, 1\}$.

Notons que nous parlerons ici de min mais la forme pourra aussi concerner le max.

Considérons $S = \{x \in X : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$, il s'agit de déterminer un vecteur $x^* \in S$ tel que $\forall x \in S, f(x) \geq f(x^*)$

En d'autres termes, étant donné x_0 , il faut trouver une suite $\{x_0, x_1, \dots, x_n \dots\}$ qui converge vers x^* . Une séquence de vecteurs $\{x_0, x_1, \dots, x_n \dots\}$ dite $\{x_k\}$ tend vers x^* lorsque k tend vers l'infini si $\|x_k - x^*\|$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini c'est à dire $\forall \varepsilon > 0 \exists$ un entier positif N tel que $\|x_k - x^*\| < \varepsilon \forall k \geq N$

Nous notons, à ce stade, que pour parvenir au x^* constituant le min du problème posé (P1), plusieurs points méritent d'être soulevés :

- la convexité demeure un aspect important de la théorie de l'optimisation. La lecture de Luenberger dans [54] ou Bazaraa et Shetty [9] est vivement recommandée pour ce qui a trait à cet aspect important dans la théorie de l'optimisation.
- une bonne compréhension de l'optimisation avec contraintes (cas programmation continue) passe par l'appréciation de certaines notions (minimum local, minimum global, conditions d'optimalité, itérations, etc..) dans le domaine de l'optimisation sans contraintes. Nous recommandons au lecteur de se référer à Bazaraa et Shetty dans [9].
- pour le cas du MILP, la recherche du minimum est souvent complexe et nous verrons à la suite de la section à venir sur la complexité des algorithmes les types d'algorithmes qui sont recherchés dans les cas de MILP.

3.1.2 Structure du problème

La structure du problème a trait à la découverte d'une forme particulière permettant au mieux de résoudre le problème (P1) et de parvenir avec efficacité à l'optimum. Gould *et al.* dans [37] montrent que ce paramètre intrinsèque qui fait partie de la nature du problème contribue à classer les problèmes. Ainsi notons-nous que :

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

- les problèmes linéaires se résolvent 10 fois plus vite que les problèmes non linéaires,
- Les problèmes quadratique de grande taille (autour de 100000 variables) trouvent solution aujourd'hui,
- les problèmes avec une structure moins dense ou une structure décomposable se résolvent plus facilement que ceux avec une structure dense.

Au delà des diverses méthodologies et techniques, il faut noter que l'on distingue généralement quatre catégories dans la programmation mathématique à savoir la programmation linéaire (LP), la programmation linéaire mixte en nombres entiers (MILP), la programmation non linéaire (NLP) et la programmation non linéaire mixte en nombres entiers (MINLP). Nous allons aborder dans les lignes qui vont suivre les aspects concernant le LP et le MILP. Pour les deux derniers (NLP et MINLP), le lecteur pourra se référer à la section 5 de Gould *et al.* dans [37] ainsi qu'à Luenberger dans [54] pour avoir aussi bien un aperçu que des détails approfondis concernant lesdits aspects.

3.2 Programmation Mathématique : cas LP et cas MILP

3.2.1 Contextes LP et MILP

Les entreprises évoluent aujourd'hui dans un contexte de plus en plus concurrentiel et le texte suivant ¹ permet de situer l'importance de la recherche opérationnelle.

« Linear programming is a tool for solving optimization problems. In 1947, George Dantzig developed an efficient method, the simplex algorithm, for solving linear programming problems. Since the development of the simplex algorithm, linear programming has been used to solve optimization problems in industries as diverse as banking, education, forestry, petroleum and trucking. In a survey of Fortune 500 firms, 85 % of the respondents said they had used linear programming »

¹W. L. Winston, from Operations Research : Applications and Algorithms, 4th Edition, (Thomson,2004)

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

Un modèle linéaire est un modèle où l'objectif ainsi que toutes les contraintes sont des expressions linéaires et toutes les variables de décisions sont continues.

La forme générale d'un LP est la suivante :

$$\text{s.à } \begin{cases} \text{Min } \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & \forall i = 1..m \\ x_j \geq 0 & \forall j = 1..n \end{cases}$$

Dès qu'intervient dans un LP une situation où au moins une des variables x_i est entière ou binaire, on parle de programme linéaire mixte en nombres entiers.

Dantzig avec [24], Bazaraa *et al* dans [8] ainsi que Chvatal dans [20] sont d'excellentes références pour la programmation linéaire.

3.2.2 Contraintes compliquées - variables compliquées

Les variables et les contraintes qui font partie du modèle peuvent ne pas être simples. Ces situations lorsqu'elles sont rencontrées rendent difficiles la résolution du problème et cela accroît le niveau de complexité du problème. Voici deux exemples inspirés respectivement des chapitres 2 et 3 de [16] avec Castillo *et al*.

Contraintes compliquées

$$\text{s.à } \begin{cases} \text{Min}_{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v_1, v_2, v_3} & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = & e_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = & e_2 \\ b_{11} y_1 + b_{12} y_2 = & f_1 \\ c_{11} v_1 + c_{12} v_2 + c_{13} v_3 = & g_1 \\ c_{21} v_1 + c_{22} v_2 + c_{23} v_3 = & g_2 \\ d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + d_{13} x_3 + d_{14} y_1 + d_{15} y_2 + d_{16} v_1 + d_{17} v_2 + d_{18} v_3 = & h_1 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v_1, v_2, v_3 \geq & 0 \end{cases}$$

On retient que la contrainte $d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + d_{13} x_3 + d_{14} y_1 + d_{15} y_2 + d_{16} v_1 + d_{17} v_2 + d_{18} v_3 =$

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

h_1 est une contrainte compliquée vu qu'elle comprend toutes les variables du problème et qu'elle empêche une résolution par bloc.

Variables compliquées

$$\begin{array}{l} \text{Max}_{x_1, x_2, x_3, y_1} \quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4y_1 \\ \text{s.à} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{14}y_1 \leq c_1 \\ a_{22}x_2 + a_{24}y_1 = c_2 \\ a_{34}y_1 \leq c_3 \\ a_{44}y_1 \leq c_4 \\ a_{54}y_1 \leq c_5 \\ a_{64}y_1 \leq c_6 \\ a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}y_1 \leq c_1 \\ b_1, b_2, b_3, b_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On note ici aussi que la variable y_1 est celle qui rend difficile la résolution du problème posé difficile. Si on avait une solution pour sa valeur, tout le reste deviendrait alors facile pour la résolution.

Il faut aussi retenir dans cette section relative aux variables et/ou contraintes compliquées qu'il peut être intéressant de faire appel à la dualité (notamment grâce aux théorèmes de la dualité forte et de la dualité faible en programmation linéaire). En effet, résoudre le primal en résolvant le dual correspondant peut présenter dans certains cas des avantages (nombre d'itérations, durée exécution, facilité, etc.).

3.2.3 Stratégies des algorithmes

Indépendamment de la présence ou non de variables compliquées ou de contraintes compliquées dans un modèle, il faut dire que la résolution passe par la mise en place d'un algorithme.

1) Les algorithmes suivants sont les plus utilisés quand il s'agit de LP :

Algorithme du Simplexe

C'est un algorithme largement utilisé pour résoudre des problèmes de type LP. Il est

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

basé sur l'association entre les sommets du polytope (ou domaine réalisable) et l'amélioration de la fonction de l'objectif à travers le passage exclusivement sur les sommets. Il cherche la solution optimale à travers les sommets du domaine réalisable. Les chapitres 3 et 4 de Dantzig et Thapa dans [23] permettent d'approfondir le fonctionnement sur l'algorithme du simplexe. On note aussi que Paparrizos *et al.* dans [59], Arsham *et al.* dans [3] et Isaacs *et al.* dans [44] présentent divers algorithmes inspirés du simplexe avec pour certains une comparaison des résultats simplexe vs nouvel algorithme.

Algorithme du Point Intérieur

Cet algorithme recherche l'optimum en évoluant de l'intérieur du domaine réalisable. Le chapitre 4 de Dantzig et Thapa dans [23] constitue un excellent point de départ concernant les algorithmes de points intérieurs.

2) Les algorithmes les plus utilisés dans le cas du MILP sont :

Algorithme du Branch and Bound

L'idée est de parcourir le domaine réalisable de manière à ce que toutes les solutions possibles ne soient pas toutes explorées. Après un partitionnement du domaine réalisable en une arborescence et avec une utilisation de la récursivité (au niveau des branches) ainsi qu'un mécanisme d'itération et d'amélioration concernant les bornes (supérieure et inférieure), l'optimum est recherché.

Voici, par ailleurs, la forme générale de l'algorithme du Branch and Bound.

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

```
1 - Calculer une solution initiale  $s \in S$  ;
2 -  $L := c(s_i)$  ;
3 - ProcBB ( $S$ ) ;
Procédure ProcBB ( $S$ ) ;
Partition  $S$  en sous ensemble  $S_1, \dots, S_r$  avec
foreach  $S_i \in S$  do
  | Calculer une borne inf.  $LB_i$  pour  $S_i$  ;
  | if  $LB_i \leq L$  then
  |   | if  $S_i$  contient seulement une solution  $s_i$  then
  |   |   |  $L := \min\{L, c(s_i)\}$  ;
  |   |   else
  |   |   | ProcBB( $S_i$ ) ;
  |   |   end
  |   end
end
end
```

Algorithm 1: Algorithme Général du Branch and Bound

Le lecteur pourra aussi se référer, à Mohamed *et al.* dans [58], à Korobkov et Nikiforovo dans [50], à Tang et Wong dans [66] ainsi qu'au chapitre 3 de Drechsler *et al.* dans [26] pour d'autres facettes du Branch and Bound.

Algorithme du Cutting Plane

C'est un algorithme qui fonctionne selon le principe de la relaxation des contraintes entières et par l'ajout de contraintes additionnelles.

Si Focacci *et al.* dans [29] présentent quelques techniques de Cutting Plane et des possibilités d'applications, il faut aussi noter que Avella et Vasil'Ev dans [4] donnent justement un exemple pratique ayant trait à l'application de l'algorithme de type Cutting Plane face à une problématique de gestion de salles et cours (69 cours, 59 enseignants et 15 salles).

La résolution d'un problème de type MILP est assez souvent complexe vu la nature des variables en présence (variables continues et variables discrètes). On fait, quelque fois, appel aux techniques de relaxation dans ces cas. Celles-ci visent dans le cas de variables binaires à introduire de nouvelles contraintes $0 \leq \alpha \leq 1$ en remplacement de celles de

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

type $\alpha \in \{0, 1\}$. Le domaine réalisable du nouveau problème devient plus grand et des techniques complémentaires sont alors utilisées pour évaluer et comparer l'optimum du problème initial à l'optimum du problème relaxé. C'est ainsi que par exemple pour le Branch and Bound, on commence à résoudre un modèle LP en relaxant les contraintes entières du modèle MILP. Si la solution du nouveau modèle continu est entière, celle-ci demeure également la solution du problème MILP original autrement ce sont des mécanismes d'encadrement des bornes et d'itérations qui sont utilisés.

Il faut aussi retenir qu'un aspect important lors de l'optimisation avec contraintes reste le contrôle des bornes (inférieure et supérieure) et l'estimation de la solution.

Si les problèmes d'optimisation de type linéaire peuvent être assez faciles à résoudre (cf. introduction du chapitre 2 Algorithms & Complexity de Brucker et Knust dans [14] ainsi que la section 1 de Gould *et al.* dans [37]), il faut noter que l'on peut avoir aussi du mal à trouver un algorithme efficace dans le cas du MILP ou même d'un LP de très grande taille.

Nous allons maintenant aborder la question de l'efficacité des algorithmes.

3.2.4 Complexité des algorithmes

L'algorithme, qu'il résolve de façon exacte ou approchée le problème posé, doit être efficace. Les aspects concernant l'efficacité des algorithmes sont assez souvent regroupés sous la problématique de la complexité.

La complexité d'un algorithme vise à établir des résultats généraux qui estiment l'efficacité intrinsèque et qui ne dépendent ni de la machine ou du langage de programmation ou encore moins du compilateur et de tous les détails d'implémentation. On parlera de critères principaux (temps de calcul, occupation mémoire) et de critères secondaires (simplicité de l'algorithme, adéquation à certaines données). La démarche générale pour les critères principaux est la suivante :

1. Détermination des opérations fondamentales à mettre en évidence, le temps d'exécution sera proportionnel à ces opérations. Si nous appelons n la taille du problème,

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

le temps d'exécution est $T(n)$, $T(n)$ étant une borne supérieure du temps d'exécution de l'algorithme selon la taille n . On fait en général l'hypothèse que le temps d'exécution est proportionnel à la mesure choisie.

2. Calcul de la complexité qui a trait au nombre d'opérations et au nombre d'itérations par opération. Le calcul de la complexité passe par la détermination de plusieurs valeurs (complexité en moyenne, complexité dans le meilleur des cas, complexité dans le pire des cas).

Nous notons à ce stade de notre développement que nous ne pouvons aborder la critique d'un algorithme sans élucider la question de l'analyse de sa complexité.

Après le calcul de la complexité, intervient l'analyse de la complexité dont le but est de déterminer l'ordre de grandeur asymptotique de $T(n)$ à travers une échelle de comparaison.

Ainsi pouvons nous dire :

$T(n)$ est $O(g(n)) \exists n_0 \in N$ tel que $T(n) \leq cg(n)$ pour tout $n \geq n_0$

Par exemple la fonction $T_1(n) = 27n^4 + 30n^3 + 50n$ est $O(n^4)$ alors que $T_2(n) = 3^n + n^{40} + 1600$ est $O(3^n)$

On retient ici que l'optimalité permet alors de connaître le meilleur algorithme pour traiter un problème donné. Ainsi considérant deux algorithmes avec temps d'exécution en $O(n^4)$ et $O(3^n)$ avec une opération élémentaire coûtant une microseconde, pour $n = 20$ le premier algorithme déroule durant 0.16 sec alors que le second finit au bout de 58 minutes.

Les algorithmes de type polynomial sont d'abord recherchés dans la résolution de tout problème mais dans le cas où la polynomialité est "hors du possible" des méthodes d'approximation sont envisagées. Si le lecteur peut trouver avec Hochbaum dans [40] plus de détails concernant les algorithmes d'approximation pour des problèmes très difficiles à résoudre, on peut déjà retenir les propos suivants de Garey et Johnson [30] concernant lesdits problèmes

« I can't find an efficient algorithm, but neither can all these famous people »

On mentionnera aussi qu'il arrive des cas où l'usage s'accommode assez bien de quelques algorithmes qui ne sont pas polynomiaux. Il s'agit notamment de l'algorithme du simplexe

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

pour les problèmes de type LP (cf. Klee et Minty dans [49] pour la preuve de non polynomialité) et de l'algorithme du Branch and Bound pour les problèmes de type MILP (cf. Zadeh dans [73] pour la preuve de non polynomialité).

Il faut aussi savoir que le niveau de complexité d'algorithmes pour LP ou MILP peut être accru par la présence de variables compliquées et/ou de contraintes compliquées. On note aussi que si le problème est de grande taille, des méthodes de décomposition peuvent être envisagées afin de parvenir plus rapidement à la solution optimale du problème.

Voici à présent quelques lignes relatives aux stratégies de décomposition pour LP et MILP.

3.2.5 Techniques de décomposition

Les modèles lorsqu'ils sont élaborés peuvent avoir soit une très grande taille vu le nombre de contraintes et de variables ou alors ils peuvent avoir en leurs seins des variables compliquées et/ou des contraintes compliquées. Ces situations favorisent des performances médiocres en ce qui concerne des indicateurs comme le temps d'utilisation machine ou le nombre d'itérations pour parvenir à l'optimum. Il est dès lors intéressant de rechercher une structure qui facilite la résolution du modèle.

Il est aussi important de retenir que les variables duales constituent les informations échangées entre le problème maître et les sous problèmes dans la plupart des techniques de décomposition. Nous le verrons d'ailleurs avec l'algorithme de Benders.

Les cas les plus connus de modèles de décomposition sont la décomposition par ligne (Benders) et la décomposition par colonne (Dantzig-Wolfe). Le lecteur pourra se référer à Dantzig avec [24] en ce qui concerne la décomposition par colonnes. On retient aussi que Gilmore et Gomory avec [33] sont les premiers à avoir traité d'un cas d'application des techniques de génération de colonnes à une problématique de type "cutting-stock".

Voici à présent la formalisation du MILP amélioré avec Benders.

Considérons le MILP amélioré que nous nommons (PB1).

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

$$(PB1) \quad \begin{cases} \text{Min } C(x, y, z, r) \\ B(x, y, z, r) + A(u) \geq b \text{ } m \text{ contraintes} \\ G(x, y, z, r) \leq 0 \\ u \in \Delta \text{ } (x, y, z, r) \in X \times Y \times Z \times R \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous allons essayer d'utiliser la décomposition de Benders dont le principe de résolution est basé sur le partitionnement du problème selon les variables u et (x, y, z, r) .

Nous supposons dans notre hypothèse que le problème $(PB1)$ admet une solution optimale.

Considérons l'ensemble K avec

$$K = \{(x, y, z, r) \in X \times Y \times Z \times R : G(x, y, z, r) \leq 0\}$$

Le problème $(PB2)$ suivant est équivalent au problème $(PB1)$

$$(PB2) \quad \begin{cases} \text{Min } C(x, y, z, r) \\ B(x, y, z, r) + A(u) \geq b \text{ } m \text{ contraintes} \\ u \in \Delta, \text{ } (x, y, z, r) \in K \end{cases} \quad (3.3)$$

Si les variables u sont fixées, le problème induit noté $PB(u)$ est un problème continu se formulant

$$PB(u) \quad \begin{cases} \text{Min } C(x, y, z, r) \\ B(x, y, z, r) \geq b - A(u) \text{ } m \text{ contraintes} \\ (x, y, z, r) \in K \end{cases} \quad (3.4)$$

Considérant un problème équivalent à $(PB2)$ en projetant $(PB2)$ sur l'espace des variables u . Le problème $(PB3)$ équivalent est alors :

3.2. PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE : CAS LP ET CAS MILP

$$(PB3) \quad \text{Min}_{u \in \Delta} \{0u + \text{Inf}_{(x,y,z,r) \in K} \{C(x,y,z,r) : B(x,y,z,r) \geq -A(u)\}\}. \quad (3.5)$$

Considérons l'ensemble H avec

$$H = \{u : B(x,y,z,r) \geq b - A(u) \text{ pour au moins un } (x,y,z,r) \in K\}$$

On peut donc dire que l'on a $H \cap \Delta \neq \emptyset$ et si (u, x, y, z, r) est solution optimale de (PB1) alors $u \in \Delta$. On peut alors restreindre u à appartenir à $H \cap \Delta$. Ainsi la projection sur l'espace des variables u peut s'écrire

$$(PB4) \quad \text{Min}_{u \in \Delta \cap H} \{0(u) + \text{Inf}_{(x,y,z,r) \in K} \{B(x,y,z,r) \geq b - A(u)\}\} \quad (3.6)$$

La détermination du Inf du sous problème (PB4) correspond au problème de programmation linéaire $P(u)$.

Dans le but de travailler plutôt avec un problème dont l'ensemble des points réalisables est indépendant de u , il est préférable d'utiliser le dual de $PB(u)$ nommé $DB(u)$. Soit $DB(u)$ ce dual :

$$DB(u) \text{ s.à } \begin{cases} \text{Max } \phi(b - A(u)) \\ \phi B \leq c \\ \phi \geq 0 \\ \phi \text{ étant le vecteur des variables duales} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec chacune des variables $\phi_i = 1..m$ est associé à la i^{ieme} contrainte de $PB(u)$. Le polyèdre des solutions réalisables de $DB(u)$ ne dépend pas des valeurs de u

L'ensemble des points réalisables de $DB(u)$ est indépendant de u et de plus il n'est pas vide puisque par hypothèse le problème original (PB1) admet une solution optimale.

Par le théorème de la dualité forte en programmation linéaire, la valeur à l'optimum $PB(u)$ est égale à la valeur à l'optimum de $DB(u)$.

3.3. ALTERNATIVES DE RÉOLUTION POUR LES PROBLÈMES MILP

L'optimum de $DB(u)$ est atteint en au moins un point extrême du polyèdre défini par le système $\{\phi B \leq c, \phi \geq 0\}$ avec l'enveloppe convexe de ses p points extrêmes $\{\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^p\}$ $\{Max_{i=1..p} \phi^i(b - A(u))\}$

On peut reformuler le problème à l'optimum

$$Max_{u \in \Delta} ou + v(P(u)) = Min_{u \in \Delta} 0u + Max_{i=1..p} \phi^i(b - A(u))$$

On obtient alors le programme (PB5) suivant équivalent au problème original (PB1)

$$(PB5) \text{ s.à } \begin{cases} Min \ 0u + u_0 \\ \phi^i(b - A(u)) \leq u_0, \ \forall i = 1..q \\ r^j(b - A(u)) \leq 0, \ \forall j = 1..J \\ u \in \Delta \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour éviter d'énumérer à l'avance tous les générateurs de points extrêmes $\phi^i \ i = 1..q$ et de rayons extrêmes $r^j \ j = 1..J$, on procède par la génération d'un sous ensemble de contraintes. Par la suite, selon la pertinence, les autres contraintes sont engendrées (cf. Benders avec [11] pour un exposé plus global de la démarche de Benders).

Il peut arriver que l'on ne peut déterminer, avec une certaine qualité, un optimum, dans un délai raisonnable. On fait alors appel à une autre classe d'algorithmes à savoir les heuristiques dont une des caractéristiques fondamentale reste que la preuve d'optimalité n'est pas toujours garantie.

3.3 Alternatives de résolution pour les problèmes MILP

Il arrive des fois où il est très difficile et complexe de déterminer la solution optimale d'un MILP avec des méthodes exactes. Les algorithmes d'approximation ou heuristiques ont pour but de déterminer dans un délai raisonnable une bonne solution.

Le but ici n'est pas de fournir des détails approfondis sur les heuristiques mais de faire une ouverture sur d'autres méthodes ou alternatives que l'on pourrait utiliser dans le cas de problématiques de très grande taille où le facteur temps est très important dans la

3.3. ALTERNATIVES DE RÉOLUTION POUR LES PROBLÈMES MILP

prise de décisions. C'est ainsi que l'on retient qu'il existe dans cette famille d'heuristiques deux grandes classes d'algorithmes à savoir les algorithmes locaux de recherche et les algorithmes génétiques.

L'algorithme local de recherche fonctionne sur un mécanisme d'itérations et d'améliorations de l'objectif. Ici, la particularité est que l'amélioration dans le passage d'une solution x_1 à une solution x_2 (tel que $obj(x_2) \leq obj(x_1)$ dans le cas de la minimisation) est possible grâce à la mise en place d'une structure de voisinage ayant pour but de réorganiser le domaine réalisable et ainsi de faciliter le parcours à l'intérieur de ce domaine réalisable. On note que les algorithmes de type Tabou (cf. Glover et Laguna dans [35], Glover *et al.* dans [36]) ou recuit simulé font partie de cette première classe d'heuristiques. Le lecteur pourra se référer à Aarts et Lenstra dans [1] pour des détails approfondis concernant cette classe et son application aux problèmes d'optimisation combinatoire.

En empruntant des terminologies et pratiques au domaine de la génétique (codage des solutions réalisables sous forme de chromosomes et utilisation d'opérateurs de croisements et de mutations), l'algorithme génétique utilise une population - de solutions candidates - qui évolue sous certaines contraintes. Par un mécanisme d'itérations avec des solutions "enfants" générées à l'aide d'opérateurs et à partir de solutions "parents" issues de la population de solutions candidates, cette population de solutions candidates est alors mise à jour (ajout, retrait). Lorsqu'on atteint la condition d'arrêt, on a la solution approximative qui aura la plus résisté aux contraintes très astreignantes sous lesquelles était la population de solutions candidates (principe du "survival of the fittest"). Le lecteur pourra trouver un approfondissement des algorithmes génétiques avec Holland dans [41].

L'on ne finira pas ce point sur les méthodes de résolution sans mentionner :

- la possibilité de faire cohabiter dans une même démarche ces deux mondes (méthodes exactes et méthodes heuristiques). L'approche intégrée utilise une technique exacte pour fournir la borne inférieure du problème et une méthode heuristique pour fournir des solutions réalisables ainsi que la borne supérieure du problème. Les travaux de Mazzini *et al.* avec [56] traitant d'un problème de conception de réseau de communications de type cellulaire illustrent bien ces propos. Un autre exemple que l'on peut citer est celui de Glover et Laguna [35] qui, à partir du Cutting Plane,

3.3. ALTERNATIVES DE RÉOLUTION POUR LES PROBLÈMES MILP

dérivent une méthode hybride combinant heuristique et Branch and Cut pour des problèmes de type MILP.

- quelques travaux utilisant des heuristiques dans les problématiques de type GRWA ;
 - la colonne "Main Result" du tableau (TAB. 1.1) (cf. page 20) énumère des travaux ayant utilisés des heuristiques,
 - certains algorithmes d'approximation pour le GRWA fournissent les deux bornes (supérieure et inférieure) qui permettent d'encadrer la solution optimale et surtout d'évaluer les performances des solutions heuristiques proposées. Ainsi pouvons-nous citer Dutta et Rouskas avec [27] ainsi que Huang *et al.* avec [43].
- que les heuristiques proposées habituellement pour le GRWA traitent d'instances particulières de problèmes (ex. trafic uniforme ou topologie virtuelle avec hub avec Chiu et Modiano dans [19], connexions personnalisées avec Zhang et Qiao dans [74]). L'intérêt des travaux de Dutta et Rouskas dans [27] est de mettre en place un modèle générique évaluant la performance des heuristiques et exigeant moins de temps de calcul que l'évaluation de la solution optimale par l'heuristique. Ce modèle est aussi utilisé en cas de non disponibilité de la solution optimale avec l'heuristique (encadrement de la solution).

Chapitre 4

Implémentations : tests numériques - analyses et interprétations

4.1. RÉOLUTIONS AVEC LES APPROCHES MILP INITIAL ET MILP AMÉLIORÉ

Ce chapitre concerne les différents travaux d'implémentation du modèle avec ses variantes (MILP initial et MILP amélioré). Nous verrons aussi l'utilisation du modèle sur plusieurs solveurs ainsi que deux exemples comparatifs avec d'autres travaux ou publications.

Il est important de noter qu'une majeure partie des tests a été effectuée relativement à la matrice de trafic de référence (cf. Annexe à la page 75). Un test avec " $Ni+1$ " correspond à un total de $i+1$ nœuds dans le réseau. Il correspond aussi à la sous matrice $i \times i$ - extraite de la matrice de référence - à laquelle on ajoute une $i+1$ ^{ième} ligne et une $i+1$ ^{ième} colonne. Pour cette $i+1$ ^{ième} ligne ou $i+1$ ^{ième} colonne, on a : $t(i+1, j) = t(j, i+1) = 0$, $\forall j = 1..i$.

4.1 Résolutions avec les approches MILP initial et MILP amélioré

Nous abordons maintenant dans cette section une série de travaux - que nous appelons Travaux I- qui concernent les premières implémentations des deux approches MILP initial et MILP amélioré.

Plusieurs travaux (Bayen *et al.* dans [7], Roslof *et al.* dans [63], Zukui et Ierapetritou dans [76]) montrent que les MILP sont en général des problèmes complexes et la difficulté provient de la présence des variables de type $\{0, 1\}$. Une première idée consistera à faire baisser le nombre de variables entières en sorte que l'on puisse passer d'un MILP initial à un autre amélioré. Ce mécanisme se traduit à travers les variables OC et λ et à la relation entre ces variables.

Dans notre modèle initial, nous avons la contrainte que nous rappelons ici "La variable λ_k^{ij} est égale à la somme de toutes les modulations possibles v de $OC_{k,v}^{ij}$ quels que soient les indices i, j, k donnés avec $i = 1..n$, $j = 1..n$, $k = 1..w$, $i \neq j$ "

$$\lambda_k^{ij} = \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n , j = 1..n , k = 1..w , i \neq j \quad ((2.3))$$

avec $OC_{k,v}^{ij} \in \{0, 1\}$ et $\lambda_k^{ij} \in \{0, 1\}$.

4.1. RÉSOLUTIONS AVEC LES APPROCHES MILP INITIAL ET MILP AMÉLIORÉ

Nous remplacerons cette contrainte par ces deux nouvelles contraintes :

$$\lambda_k^{ij} \leq \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, k = 1..w, i \neq j \quad (4.1)$$

$$\lambda_k^{ij} \geq OC_{k,v}^{ij} \quad \forall i = 1..n, j = 1..n, k = 1..w, i \neq j, v \in M \quad (4.2)$$

avec $OC_{k,v}^{ij} \in \{0, 1\}$ et $0 \leq \lambda_k^{ij} \leq 1$.

Il est important de signaler que bien que la variable λ_k^{ij} soit relaxée, il n'y a pas de violation de la contrainte initiale ((2.3)). En effet, $OC_{k,v}^{ij}$ étant binaire, on a avec :

- la contrainte (4.1) $\lambda_k^{ij} \leq \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij}$
 si $\sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} = 0$ il n'existe aucune cv entre i et j avec la longueur d'onde k et on a nécessairement $\lambda_k^{ij} = 0$
 sinon ($\sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} = 1$) et l'on peut dire $\lambda_k^{ij} = 1$ puisqu'il existe une cv entre i et j avec la longueur d'onde k . On a donc

$$\sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} = 0 \implies \lambda_k^{ij} = 0 \quad \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} = 1 \implies \lambda_k^{ij} = 1$$

- la contrainte (4.2) $\lambda_k^{ij} \geq OC_{k,v}^{ij}$
 si $OC_{k,v}^{ij} = 1$ alors on a nécessairement $\lambda_k^{ij} = 1$ puisqu'il existe une cv entre i et j avec la longueur d'onde k
 sinon ($OC_{k,v}^{ij} = 0$) et l'on a soit $\lambda_k^{ij} = 1$ mais c'est la modulation v donnée qui n'est pas utilisée soit $\lambda_k^{ij} = 0$. On remarque que

$$\lambda_k^{ij} \in \{0, 1\} \text{ et } \lambda_k^{ij} = 1 \implies \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} = 1 \quad \lambda_k^{ij} = 0 \implies \sum_{v \in M} OC_{k,v}^{ij} = 0$$

Nous montrons ainsi que ces deux nouvelles contraintes nous permettent alors de mettre en place la relaxation de la variable λ_k^{ij} dans le modèle MILP amélioré.

Par ailleurs, un petit test avec ceux deux modèles permet d'apprécier la qualité des modèles et de faire des extrapolations en ce qui concerne des modèles à résoudre avec

4.1. RÉOLUTIONS AVEC LES APPROCHES MILP INITIAL ET MILP AMÉLIORÉ

beaucoup de variables et de contraintes.

4.1.1 Paramètres avec MILP initial et MILP amélioré

Le tableau (TAB. 4.1) nous permet de voir les hypothèses concernant cette grille de tests. Nous utiliserons, dans ce tableau, plusieurs abréviations (Contr. pour contraintes, enti. pour entières, contin. pour continues).

Instance	Paramètres		Modèle initial				Modèle amélioré			
			Variables			Contr.	Variables			Contr.
	Nœud	Onde	enti.	contin.	Total		enti.	contin.	Total	
4 + 1, 6	4+1	6	360	1330	1690	1685	240	1450	1690	1925
4 + 1, 10	4+1	10	600	2210	2810	2745	400	2410	2810	3145
6 + 1, 3	6+1	3	378	3668	4046	4214	252	3794	4046	4466
6 + 1, 10	6+1	10	1260	12194	13454	13377	840	12614	13454	14217
8 + 1, 20	8+1	20	4320	73458	77778	77095	2880	74898	77778	79975

TABLE 4.1 – Travaux I : MILP initial (OC et λ binaires) MILP amélioré (OC binaire , λ continue)

4.1. RÉOLUTIONS AVEC LES APPROCHES MILP INITIAL ET MILP AMÉLIORÉ

4.1.2 Résultats avec MILP initial et MILP amélioré

Nous avons avec le tableau (TAB. 4.2) les résultats concernant la précédente grille de tests.

Inst.	Modèle Initial					Modèle Amélioré				
	Val.	LB	GAP	Node	Tps(s)	Val.	LB	GAP	Node	Tps(s)
4 + 1, 6	20	20	0.00	4117	244.23	20	20	0.00	1045	122.24
4 + 1, 10	20	20	0.00	13063	991.12	20	20	0.00	7149	479.56
6 + 1, 3	56	56	0.00	5255	5486.335	56	56	0.00	8612	6386.07
6 + 1, 10	56	43.55	28.58	3332	**	56	43.29	29.34	5917	**
8 + 1, 20	116	63.61	82.35	3	**	102	63.61	60.34	4	**

TABLE 4.2 – Résultats Travaux I

Les colonnes 2 à 6 du tableau ont trait au MILP initial avec respectivement :

- Val. correspond à la valeur de la fonction économique retournée par Cplex,
- LB correspond à la borne inférieure du problème linéaire relaxé,
- GAP correspond à $100(UB - LB)/LB$, UB étant la borne supérieure du problème obtenue en utilisant une méta-heuristique,
- Node correspond au nombre de branch and bound trouvés lors de la résolution,
- Tps(s) le temps pour obtenir la solution Val. (le délai maximal fixé est de 10 heures pour les différents tests menés).

On retient aussi que les colonnes 7 à 11 du tableau ont trait au MILP amélioré avec les mêmes correspondances précédemment décrites.

4.1.3 Analyses et interprétations des deux approches

A l'issue de ce test, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- lorsqu'une solution optimale est trouvée, cela reste vrai dans les deux modèles,

4.2. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU AVEC D'AUTRES TRAVAUX

- au fur et à mesure que le modèle devient important (plus de variables), le GAP devient plus important dans les deux cas mais celui du MILP amélioré est moins important que celui du MILP initial. Il en est de même pour la valeur de l'objectif (dans le délai max de 10h),
- sur de très petites instances $((4+1, 6), (4+1, 10))$, la durée d'exécution pour parvenir à l'optimum est plus faible dans le MILP amélioré. Dans ces cas, le MILP amélioré résout moins de problèmes pour parvenir à l'optimum. Le MILP amélioré, dans ces cas, converge beaucoup plus vite.
- lorsque les modèles sont plus importants (plus de nœuds et de longueurs d'onde $(8+1, 20)$) le MILP amélioré résout plus de problèmes en parvenant à un gap moins important que dans celui du MILP initial,
- 33% de plus de variables entières dans le MILP initial et 8% de moins de variables continues dans le MILP initial par rapport au MILP amélioré.
Nous pouvons penser que lorsque le modèle grossira, le MILP amélioré devra converger beaucoup plus vite vers l'optimum que le MILP initial et ce même si le MILP amélioré contient 8% de plus de contraintes au niveau de son modèle.

Au vu de ce qui précède, nous allons considérer le modèle MILP amélioré pour la suite des travaux dans toutes les implémentations.

4.2 Comparaisons du modèle obtenu avec d'autres travaux

Nous abordons maintenant dans cette section une série de travaux - que nous appelons Travaux II - qui concernent la comparaison du modèle MILP amélioré avec d'autres travaux ou publications.

4.2. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU AVEC D'AUTRES TRAVAUX

4.2.1 Sous cas 1 : travaux avec 4 nœuds

Considérons ici le scénario suivant :

Trafic Uniforme $t(i, j) = t(j, i) = 24, i \neq j$, Routage Unidirectionnel, Flots bifurqués,
Nœud = 4 , Longueur d'onde $W = 3$, Modulations $OC - 48$ et $OC - 192$

Pour la problématique posée, nous obtenons, suite à la résolution avec notre modèle, les résultats détaillés suivants :

- Routage du Trafic

$$\begin{aligned} & \mathbf{t(1,2)} \lambda_2^{1,2} / \mathbf{t(1,3)} \lambda_3^{1,3} / \mathbf{t(1,4)} \lambda_2^{1,2} \lambda_1^{2,4} // \mathbf{t(2,1)} \lambda_2^{2,3} \lambda_2^{3,1} / \mathbf{t(2,3)} \lambda_2^{2,3} / \mathbf{t(2,4)} \lambda_1^{2,4} // \\ & \mathbf{t(3,1)} \lambda_2^{3,1} / \mathbf{t(3,2)} \lambda_3^{3,4} \lambda_1^{4,2} / \mathbf{t(3,4)} \lambda_3^{3,4} // \mathbf{t(4,1)} \lambda_3^{4,1} / \mathbf{t(4,2)} \lambda_1^{4,2} / \mathbf{t(4,3)} \lambda_3^{4,1} \lambda_3^{1,3} // \end{aligned}$$

- Plan Assignment des Longueurs Onde

$$\lambda_1 : (2, 4), (4, 2)$$

$$\lambda_2 : (1, 2), (2, 3), (3, 1)$$

$$\lambda_3 : (1, 3), (3, 4), (4, 1)$$

- Flot réel transporté par les connexions virtuelles

$$\lambda_1 : ((2, 4), 48), ((4, 2), 48)$$

$$\lambda_2 : ((1, 2), 48), ((2, 3), 48), ((3, 1), 48)$$

$$\lambda_3 : ((1, 3), 48), ((3, 4), 48), ((4, 1), 48)$$

- Répartition des cartes aux nœuds - Modulation unique OC-48

Nœud 1 : 2 cartes OC48

Nœud 2 : 2 cartes OC48

Nœud 3 : 2 cartes OC48

Nœud 4 : 2 cartes OC48

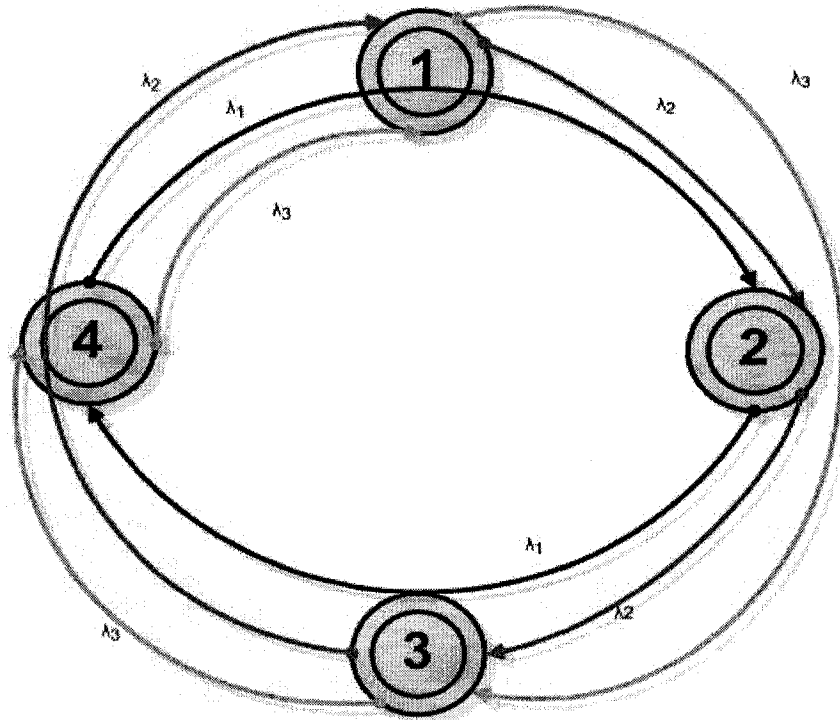
Soit un total de 8 cartes OC-48

Tout ceci peut être schématisé de la façon suivante avec la figure (FIG. 4.1).

4.2.2 Sous cas 2 : travaux avec 11 nœuds

Le sous cas 2 concerne la prise en compte d'un réseau en anneau de 11 nœuds (10 nœuds émetteur et/ou destinataire de requête client et 1 nœud ni émetteur ni destinataire de

4.2. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU AVEC D'AUTRES TRAVAUX



Routage unidirectionnel - Flots bifurqués
Répartition des cartes obtenue - $N=4$ - $W=3$
8 cartes OC-48 au total

FIGURE 4.1 - Travaux II Sous Cas 1 - résolution du problème avec $N=4$ et $W = 3$

requête client). Pour cet exemple, nous avons les paramètres suivants :

Nœuds : 11 - Longueur d'onde $W = 3$ (que nous considérons)

Variables : 27082 dont 660 entières et 26422 continues

Contraintes : 28492

Sous cas 2 - Détails de notre résultat

Suite à la résolution du problème, la valeur de la fonction économique obtenue est de 140.

Il est important de noter que tout le détail (nombre de cartes aux ports, plan d'assignation

4.2. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU AVEC D'AUTRES TRAVAUX

des longueurs d'onde, flot réel transporté par les connexions virtuelles, etc..) de la présente résolution avec notamment les valeurs de toutes les variables de décision se trouvent à l'annexe à la page 75. On remarquera aussi que dans cette solution fournie le nœud de service "+1" n'est pas utilisée dans la solution proposée et le gap au bout de 10 heures de résolution est de 9.56%.

Il faut signaler que nous avons comparé nos résultats avec d'autres publications ou travaux dans le but de voir s'il y avait amélioration du modèle par rapport aux résultats antérieurs. Aussi rappelons-nous que ces deux exemples (Sous cas 1 et Sous cas 2) ont été aussi traités :

- par Modiano et Lin dans [57] pour le Sous Cas 1
nous obtenons au total 8 cartes alors que dans l'article le résultat obtenu est de 9 cartes. Le schéma matérialisant le résultat obtenu, par ces auteurs pour cette instance de données, est d'ailleurs disponible avec la figure (FIG. 1.5) à la page 17 (architecture groomée),
- par Jaumard *et al.* dans [46] pour le Sous Cas 2
nous obtenons 140 comme fonction objectif pour $W = 3$ alors que le résultat obtenu, par ces auteurs, pour cette instance de données est de 148 avec l'implémentation d'une heuristique de type Tabou appelée GRWABOU. On note aussi que ces auteurs obtiennent 132 dans le cas d'une post-optimisation intervenant à la suite du résultat 148 et de la modification des contraintes régissant les modulations des longueurs d'onde sur les connexions virtuelles. Il est important de préciser que notre démarche, dans le cas de notre modèle, ne s'inscrit pas dans une optique de post-optimisation.

Il faut aussi rappeler que la matrice de trafic de référence (à l'annexe à la page 75) est la résultante des trois sous matrices utilisées dans les travaux de Jaumard *et al.* dans [46] pour les flots bifurqués.

Nous retenons, en conclusion, que notre modèle obtient des résultats très intéressants dans la minimisation du coût du réseau qui demeure, rappelons-le, notre objectif principal.

4.3 Comparaisons du modèle obtenu sur plusieurs plates-formes

Cette partie, appelée Travaux III, présente l'intérêt particulier de voir le comportement de plusieurs solveurs sur une classe particulière de problèmes d'optimisation.

Les solveurs considérés dans le cadre de cette étude sont :

1) Cplex

Cplex est un logiciel d'optimisation crée pour traiter et résoudre des problèmes linéaires (pure ou mixte), des problèmes quadratiques, des problèmes en nombres entiers. Notons que Cplex est un logiciel commercial.

2) SoPlex (Sequential object-oriented simplex)

C'est une mise en oeuvre de la version révisée de l'algorithme du simplexe (primal et dual) pour résoudre des problèmes linéaires. Notons, par ailleurs, qu'il peut être interfacé avec d'autres programmes à travers l'utilisation de sa bibliothèque de routines écrites en C++. Le lien suivant fournit plus d'informations sur Soplex <http://www.soplex.zib.de/>

3) Glpk (Gnu Linear Programming Kit)

C'est une librairie de fonctions écrites en C à l'intention des modèles mathématiques linéaires (pure ou mixte) ou en nombres entiers. Ce kit dispose en son sein d'un solveur gratuit glpsol que nous utiliserons comme plate-forme de tests pour la résolution de notre modèle.

Notons que nous aurons ici deux groupes de tests. Les lignes qui suivent décrivent le contexte des tests menés.

4.3.1 Sous cas 1 : travaux sur NEOS avec SOPLEX et CPLEX

Signalons que les tests avec Cplex (SCIP 0.90/Cplex 10.20) et Soplex (SCIP 1.00/SOPLEX 1.3.2) ont été effectués sur le serveur web avec le serveur NEOS <http://www.neos.mcs.anl.gov/> - NEOS est une plate-forme qui regroupe plusieurs solveurs classés selon le type d'optimisation (problème linéaire, problème linéaire mixte, problème avec bornes, etc..).

4.3. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU SUR PLUSIEURS PLATES-FORMES

4.3.2 Paramètres du sous cas 1

Le tableau (TAB. 4.3) nous permet de voir les hypothèses considérées pour cette grille de tests.

Instance	Paramètres		Variables			Contraintes
	Nœuds	Ondes	entières	continues	Total	
4 + 1, 6	4+1	6	240	1450	1690	1925
4 + 1, 10	4+1	10	400	2410	2810	3145
6 + 1, 3	6+1	3	252	3794	4046	4466
6 + 1, 10	6+1	10	840	12614	13454	14217
8 + 1, 20	8+1	20	2880	74898	77778	79975

TABLE 4.3 – Travaux III - sous cas 1 : MILP amélioré et plate-forme NEOS

4.3.3 Résultats du sous cas 1

Le tableau (TAB. 4.4) nous donne les résultats obtenus pour la précédente grille de tests.

Inst.	CPLEX					SOPLEX				
	Val.	LB	GAP	Node	Tps(s)	Val.	LB	GAP	Node	Tps(s)
4 + 1, 6	20	20	0.00	1045	122.24	20	20	0.00	7844	1434.61
4 + 1, 10	20	20	0.00	7149	479.56	20	20	0.00	13104	4177.24
6 + 1, 3	56	56	0.00	8612	6386.07	56	56	0.00	7164	28469.06
6 + 1, 10	56	43.29	29.34	5918	**	56	42.30	32.38	231	**
8 + 1, 20	102	63.61	60.34	4	**	***	***	***	***	**

TABLE 4.4 – Résultats Travaux III - Sous cas 1 : Solveurs CPLEX et SOPLEX

4.3.4 Analyses et interprétations du sous cas 1

A l'issue de ce test, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

4.3. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU SUR PLUSIEURS PLATES-FORMES

- lorsqu'une solution optimale est trouvée dans le délai maximum d'exécution qui est de 10 heures, cela reste vrai sur les deux plates-formes et Cplex résout moins de problèmes pour parvenir à l'optimum que ne le fait SOPLEX,
- lorsqu'aucune solution optimale n'est trouvée dans le délai maximum, cela reste vrai sur les deux plates-formes sauf que le gap est moins important dans le cas de Cplex.

Au vu de ce qui précède, nous pouvons conclure que **Cplex** est beaucoup plus efficace que **Soplex** pour la gamme des problèmes considérés.

4.3.5 Sous cas 2 : Travaux effectués localement et sur NEOS

Signalons que les tests avec :

- Glpk (GLPK LP/MIP Solver 4.23) et Soplex (SCIP 1.00/SOPLEX 1.3.2) ont été effectués localement sur un ordinateur Pentium IV - ayant 512 Mo de Ram et un processeur de 1.65 Ghz de fréquence,
- Cplex (SCIP 0.90/Cplex 10.20) sur le serveur web NEOS.

4.3.6 Paramètres du sous cas 2

Le tableau (TAB. 4.5) nous permet de voir les hypothèses considérées pour cette grille de tests.

4.3.7 Résultats du sous cas 2

Le tableau (TAB. 4.6) nous donne les résultats obtenus à l'issue des tests effectués localement et sur le serveur web NEOS.

4.3. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU SUR PLUSIEURS PLATES-FORMES

Instance	Paramètres		Variables			Contraintes
	Nœuds	Ondes	entières	continues	Total	
4 + 1, 1	4+1	1	40	250	290	400
4 + 1, 2	4+1	2	80	490	570	705
4 + 1, 6	4+1	6	240	1450	1690	1925
4 + 1, 10	4+1	10	400	2410	2810	3145
6 + 1, 2	6+1	2	168	2534	2702	3073
6 + 1, 3	6+1	3	252	3794	4046	4466
6 + 1, 4	6+1	4	336	5054	5390	5859
6 + 1, 10	6+1	10	840	12614	13454	14217
7 + 1, 7	7+1	7	784	14912	15696	16528
7 + 1, 10	7+1	10	1120	21296	22416	23440
8 + 1, 11	8+1	11	1584	41202	42786	44254
8 + 1, 20	8+1	20	2880	74898	77778	79975
9 + 1, 14	9+1	14	2520	85700	88220	90442
9 + 1, 20	9+1	20	3600	122420	126020	128842

TABLE 4.5 – Travaux III - sous cas 2 : Tests effectués localement et sur NEOS

Inst.	CPLEX						SOPLEX						GLPK					
	Val.	LB	GAP	Node	Tps (s)	Val.	LB	GAP	Node	Tps (s)	Val.	LB	GAP	Tps(s)	Val.	LB	GAP	Tps(s)
4 + 1, 1	36	36	0.00	1	0.18	36	36	0.00	1	0.07	36	36	0.00	0.02	36	36	0.00	0.02
4 + 1, 2	20	20	0.00	1	5.24	20	20	0.00	10	5.09	20	20	0.00	7.0	20	20	0.00	7.0
4 + 1, 6	20	20	0.00	1045	122.24	20	20	0.00	7557	1047.89	20	20	0.00	18	20	20	0.00	18
4 + 1, 10	20	20	0.00	7149	479.56	20	20	0.00	19860	4544.53	20	20	0.00	18	20	20	0.00	18
6 + 1, 2	56	55.9	0.00	333	283.47	56	56	0.00	215	818.90	56	56	0.00	5780	56	56	0.00	5780
6 + 1, 3	56	56	0.00	8612	6386.07	56	56	0.00	7326	25601.29	56	56	0.00	**	56	49.54	11.5	**
6 + 1, 4	56	52.42	6.83	36272	**	56	49.06	14.14	5657	**	56	44.5	20.5	**	56	44.5	20.5	**
6 + 1, 10	56	43.29	29.34	5918	**	56	42.56	31.55	679	**	56	***	***	**	***	***	***	**
7 + 1, 7	66	50.46	30.78	1027	**	64	49.66	28.87	173	**	64	***	***	**	***	***	***	**
7 + 1, 10	70	49.66	40.95	204	**	72	49.66	44.98	369	**	72	***	***	**	***	***	***	**
8 + 1, 11	90	63.61	41.48	39	**	106	63.61	66.63	44	**	106	63.61	66.63	**	***	***	***	**
8 + 1, 20	102	63.61	60.34	4	**	108	63.61	69.77	16	**	108	63.61	69.77	**	***	***	***	**
9 + 1, 14	***	***	***	***	**	***	***	***	***	**	***	***	***	**	***	***	***	***
9 + 1, 20	***	***	***	***	**	***	***	***	**	**	***	***	***	**	***	***	***	***

TABLE 4.6 – Résultats Travaux III - Sous cas 2 : Solveurs CPLEX - SOPLEX et GLPK

4.3. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU SUR PLUSIEURS PLATES-FORMES

4.3.8 Analyses et interprétations du sous cas 2

Même si la comparaison sur les trois plates-formes est quelque peu biaisée vu que les tests CPLEX sont effectués sur le web et (SOPLEX, GLPK) le sont localement, on peut néanmoins noter que :

- sur de très petites instances (moins de 1000 variables et 1000 contraintes), les Solveurs SOPLEX et GLPK sont beaucoup plus efficaces que CPLEX,
- pour toutes les instances se situant après $(6 + 1, 4)$ ($(6 + 1, 4)$ correspond à 5390 variables et 5859 contraintes), GLPK n'est pas en mesure de fournir un résultat dans le délai des 10 heures,
- pour toutes les instances se situant après $(8 + 1, 20)$ ($(8 + 1, 20)$ correspond à 77778 variables et 79975 contraintes), aucun des solveurs testés n'est en mesure de fournir un résultat dans le délai des 10 heures,
- le solveur Cplex demeure le plus performant sur l'ensemble des instances au delà de 1690 variables (cas $(4 + 1, 6)$),
- le gap fourni par Cplex est dans l'ensemble le plus faible. Ce constat conforte les conclusions des travaux du sous cas 1 (Sous cas 1 Comparaison SOPLEX et CPLEX sur Plateforme Web NEOS),
- dans tous les cas au delà de $(6 + 1, 4)$ ($(6 + 1, 4)$ correspond à 5390 variables et 5859 contraintes), aucune solution optimale n'est obtenue au bout de dix heures quelque soit le solveur considéré,
- le souci de longueur d'onde adéquat est perceptible au niveau de chaque groupe de tests ($(4 + 1, 1)$ à $(4 + 1, 10)$, $(6 + 1, 2)$ à $(6 + 1, 10)$).

A la lumière des tests effectués précédemment (travaux I et travaux III), on ne peut passer sous silence l'influence importante du nombre de longueur d'onde (w) et de sa relation avec la durée d'exécution pour parvenir à l'optimal, la valeur de la fonction objectif (à l'optimum ou pas).

4.3. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU SUR PLUSIEURS PLATES-FORMES

Nous avons mené, en effet, une démarche à posteriori dans chaque série de tests ((4 + 1, 1) à (4 + 1, 10), (6 + 1, 2) à (6 + 1, 10), etc..) afin de déterminer le minimum de longueur d'onde qui nous permet d'atteindre la solution optimale du problème posé. La démarche fut la suivante :

1. Considérant un w donné et $f(w)$ le coût de la fonction objectif lors de l'exécution avec $Tmax$ suffisamment grand fixé,
2. Après analyse de la solution proposée en 1, considérons w_{max} la valeur maximale de w existant dans la solution proposée quelque que soit le segment $[s, s+1]$. w_{max} est le nombre maximum de connexions virtuelles quelque soit le segment considéré,
3. Quand nous considérons $f(w_{max})$, pour le même $Tmax$ suffisamment grand, nous avons les possibilités suivantes à analyser :

(a) $f(w_{max}) = f(w)$,

(b) $f(w_{max}) > f(w)$,

(c) $f(w_{max}) < f(w)$.

Soit le premier w^* tel qu'une solution optimale est trouvée dans un temps $Tmax$ suffisamment grand.

Considérons alors $w^* + 1$ et calculons $f(w^* + 1)$ dans le délai $Tmax$. Les cas suivants peuvent survenir :

- Cas 1 $f(w^*) = f(w^* + 1)$

Plus besoin d'injecter du w dans le modèle. - Arrêt d'ajout ou de diminution de w

- Cas 2 $f(w^*) > f(w^* + 1)$

La solution optimale n'est donc pas celle que nous croyions (ex. passage de (4 + 1, 1) à (4 + 1, 2))

on doit faire $w^* = w^* + 1$ et reprendre le calcul de $f(w^*)$

- Cas 3 $f(w^*) < f(w^* + 1)$

Plus besoin d'injecter du w mais plutôt le diminuer (ex. passage de (6 + 1, 4) à

4.3. COMPARAISONS DU MODÈLE OBTENU SUR PLUSIEURS PLATES-FORMES

(6 + 1, 3))

on doit faire $w^* = w^* - 1$ et reprendre le calcul de $f(w^*)$

Lorsque nous avons le Cas 1, la question reste de savoir si $w = w_{max}$, w_{max} que nous avons défini, est celui que nous obtenons dans la solution optimale?

Supposons qu'ils ne correspondent pas (c'est à dire $w \neq w_{max}$) :

- Si $w^* < w_{max}$

Alors on peut dire qu'il existe des longueurs d'onde qui ne sont pas assignées et donc inutiles et contribuant à avoir beaucoup plus de variables dans le modèle (temps d'exécution ou nombre de sous problèmes à régler plus important)

Le modèle demeure encore optimisable,

- $w^* > w_{max}$

Cela reste impossible car nous aurions une autre valeur possible de w_{max} ce qui est contraire à la définition de w_{max} .

On prouve alors que $w^* = w_{max}$.

La conclusion est que si l'on pouvait exprimer le modèle en sorte que w soit une variable de décision plutôt qu'un paramètre donné en entrée, on pourrait alléger notre modèle (délai d'exécution, nombre de sous problèmes à régler) et donc accroître son efficacité. La problématique consistera donc à rechercher une double amélioration (w et f notre fonction économique).

Chapitre 5

Extensions et perspectives de la problématique

Ce dernier chapitre présente une possibilité de travaux qui peuvent constituer la suite directe de ce qui précède. Nous y abordons la problématique de la durabilité d'une configuration donnée en tenant compte de la variation entre deux instants t et $t + 1$ de la matrice de trafic.

Cette partie permet d'évoquer une extension possible à la problématique abordée jusqu'à présent que l'on peut résumer à une logique financière pour un opérateur de télécommunication. En effet, au nombre des préoccupations majeures des opérateurs de télécommunication figure la problématique du volume d'informations à transférer. Comment envoyer beaucoup plus d'informations sur l'infrastructure existante sans pour autant augmenter de façon conséquente les capacités ni même ajouter de module d'extension aux différents nœuds du réseau ?

Il peut être important de maintenir la durabilité d'une configuration donnée (topologie physique, topologie virtuelle) afin de ne pas engendrer - ou du moins de faire baisser - des coûts supplémentaires requis à cause d'un changement de la matrice de trafic. Il s'agit, en d'autres termes, de travailler sur l'augmentation ou la baisse de trafic entre un instant t_i passé et un instant t_{i+1} à venir tout en minimisant le coût induit par la modification de trafic.

Il faudra minimiser les coûts induits par une augmentation ou une variation de trafic de façon générale entre la matrice de trafic M_i à instant t_i passé et une hypothétique matrice M_{i+1} à instant t_{i+1} à venir.

L'on veut pouvoir satisfaire la matrice de trafic à l'instant t_{i+1} tout en s'assurant :

- un coût minimum ou nul de modification à chaque nœud,
- un coût minimum global pour les connexions virtuelles (coût ajout, coût modification, coût suppression),
- un coût minimum ou nul de modification par carte ou par port,

de sorte que la différence entre les coûts du réseau à l'instant t_i et celui de l'instant t_{i+1} soit inférieur à ϵ , ϵ étant un paramètre fixé au départ.

En d'autres termes, l'opérateur ayant injecté un coût C_i à l'instant t_i pour son réseau voudrait pouvoir - selon ϵ fixé à l'instant t_{i+1} - déterminer les caractéristiques de la matrice de trafic susceptible de répondre à cette nouvelle exigence. Quelles tendances pour la nouvelle matrice de trafic ? Comment exprimer cette variation ?

Nous pensons qu'il faudrait prendre en compte les données suivantes :

- $x_i^* = (\lambda_k^{ij}, OC_{k,v}^{ij}, F_k^{ij}, \mu_{k,sd}^{ij}, nbport[i,v])$ Solution Optimale à t_i de notre problème initial - λ, OC, F, μ et $nbport$ étant les variables de décision du sujet précédent,
- $V(x_i^*) = C_i$ valeur de l'objectif à la solution optimale à t_i ,
- Matrice des coûts pour l'ajout d'une nouvelle connexion virtuelle,
- Matrice des coûts pour la suppression d'une connexion virtuelle existante,
- Matrice des coûts pour la modification d'une connexion virtuelle existante (coût de passage de la modulation m_a à la modulation m_b $a \neq b$),
- $\epsilon > 0$, ϵ détermine la somme globale maximale que l'opérateur est disposé à injecter pour la nouvelle solution.

Une analyse des connexions virtuelles et des flots qui y sont routés nous permet de dire qu'on $OC_{k,v}^{ij}$ à l'instant t_i devrait commuter en l'une seulement des trois situations suivantes à l'instant t_{i+1} à savoir :

- Intacte (connexion virtuelle avec la modulation),
- Modifiée (uniquement lorsque la modulation varie),
- Supprimée (la connexion virtuelle n'existe plus ou la longueur d'onde utilisée n'est plus la même).

Ensuite, il faudrait prévoir le cas des nouvelles connexions virtuelles (connexion virtuelle qui n'existait pas à l'instant t_i).

Ces quatre états permettent d'ouvrir des pistes de recherche en ce qui concerne le coût financier de la nouvelle configuration.

Nous pensons qu'une analyse plus approfondie de cette nouvelle problématique devra permettre de répondre aux questions essentielles ci-haut posées et satisfaire le détenteur de l'infrastructure réseau.

Conclusion

Ce travail d'initiation à la recherche nous a permis d'aborder une application de la recherche opérationnelle dans le domaine des télécommunications. L'optimisation d'une infrastructure réseau avec le GRWA constitue une réponse à la préoccupation majeure des opérateurs télécoms en ce sens qu'il leur permet de réduire le coût global de possession de leurs réseaux.

Nous avons, tout au long de ce travail, essayé de voir différents aspects de la formulation mathématique du GRWA à travers l'usage de la programmation linéaire mixte en nombres entiers. Nous avons observé qu'en passant d'un modèle avec plus de variables binaires à un autre modèle équivalent avec moins de variables binaires, on améliorerait sensiblement la performance lors de la résolution du problème. Les tests que nous avons menés ont donné des résultats très encourageants. Nous faisons notamment allusion aux différentes comparaisons du modèle obtenu avec les résultats d'autres travaux. Nos résultats, il faut le rappeler, ont surpassé ceux des travaux de référence. En effet, dans le cas de Modiano et Lin [57] nous avons une réduction de 12.5% en terme d'investissement alors que dans Jaumard *et al.* [46] nous avons une amélioration de 5.7%. Nous percevons, à travers la rubrique appelée Travaux II, toute la qualité et la puissance du modèle MILP amélioré.

Par ailleurs, le modèle croissant très rapidement en taille, nous avons eu recours – au niveau formalisation – à l'exploitation de la structure de notre modèle mathématique à travers la décomposition structurée avec Benders en vue de faciliter la résolution du problème posé. Nous pensons qu'une implémentation avec Benders permettrait certainement de constater la qualité du modèle dans le cas des réseaux de moyenne ou de grande taille. Au cas où l'implémentation avec Benders dans les réseaux de grande taille s'avérerait modeste, on pourrait alors envisager l'utilisation d'heuristiques ou d'une démarche

CONCLUSION

hybride.

L'aspect du choix de la topologie physique se justifie amplement par la présence dans cette configuration d'une majeure partie des réseaux implémentés (SONET/SDH).

On note aussi que ce travail a établi des fondements pour une étude portant sur le management, à travers le temps, des configurations du réseau en prenant en compte les variations de trafic et en demeurant toujours dans la perspective de coûts.

Annexe A

Matrice de trafic de référence

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.	1	16	0	1	16	0	1	13	0
2	1	.	17	1	28	17	1	13	17	1
3	16	17	.	16	17	34	16	17	46	13
4	0	1	13	.	1	16	0	1	16	0
5	1	13	17	1	.	17	1	28	17	1
6	16	17	46	13	17	.	16	17	34	16
7	0	1	16	0	1	13	.	1	16	0
8	1	28	17	1	13	17	1	.	17	1
9	13	17	34	16	17	49	13	17	.	16
10	0	0	16	0	1	13	0	1	16	.

TABLE A.1 – Matrice de trafic de référence

Solution détaillée problématique avec $N = 11$ et $W = 3$

Résultat resolution N10+1 avec Cplex

SCIP-AMPL

27082 variables :

660 binary variables

26422 linear variables

28492 constraints, all linear ; 142004 nonzeros

1 linear objective ; 22 nonzeros.

*** You chose CPLEX as LP solver ***

SCIP version 1.00 [precision : 8 byte] [memory : block] [mode : optimized] [LP solver :
CPLEX 11.10]

Copyright (c) 2002-2007 Konrad-Zuse-Zentrum fuer Informationstechnik

Berlin (ZIB)

reading user parameter file <scip.set>

SCIP > original problem has 27082 variables (660 bin, 0 int, 0 impl, 26422 cont) and 28492 constraints

SCIP > parameter <limits/gap> set to 0.0001

SCIP > parameter <limits/absgap> set to 1e-09

SCIP > parameter <limits/time> set to 36000

SCIP > loaded parameter file <scip.set>

SCIP >

SCIP Status : solving was interrupted [time limit reached]

Solving Time (sec) : 36000.12

Solving Nodes : 1466

Primal Bound : +1.4000000000000000e+02 (11 solutions)

Dual Bound : +1.27784432039163e+02

Gap : 9.56

SCIP>

written solution information to file <results1>

SCIP>

written statistics to file <results2>

SCIP> solution status : time limit reached

objective value : 140

OC[1,3,2,192] 1 (obj :0)

OC[2,3,3,192] 1 (obj :0)

OC[3,5,2,192] 1 (obj :0)

OC[3,8,3,192] 1 (obj :0)

OC[4,6,1,192] 1 (obj :0)

OC[5,6,2,192] 1 (obj :0)

OC[6,7,1,192] 1 (obj :0)
OC[6,8,2,192] 1 (obj :0)
OC[7,9,1,192] 1 (obj :0)
OC[8,2,3,192] 1 (obj :0)
OC[8,9,2,192] 1 (obj :0)
OC[9,4,1,192] 1 (obj :0)
OC[9,10,2,192] 1 (obj :0)
OC[10,1,2,192] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,4,5] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,5,3] 17 (obj :0)
mu[1,3,2,6,5] 17 (obj :0)
mu[1,3,2,7,3] 16 (obj :0)
mu[1,3,2,9,3] 28 (obj :0)
mu[1,3,2,9,5] 17 (obj :0)
mu[1,3,2,10,2] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,10,3] 16 (obj :0)
mu[1,3,2,10,5] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,10,6] 13 (obj :0)
mu[1,3,2,10,8] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,10,9] 16 (obj :0)
mu[2,3,3,2,1] 1 (obj :0)
mu[2,3,3,2,3] 17 (obj :0)
mu[2,3,3,2,4] 1 (obj :0)
mu[2,3,3,2,5] 28 (obj :0)
mu[2,3,3,2,6] 17 (obj :0)
mu[2,3,3,2,7] 1 (obj :0)
mu[2,3,3,2,8] 13 (obj :0)
mu[2,3,3,2,9] 17 (obj :0)
mu[2,3,3,2,10] 1 (obj :0)
mu[2,3,3,4,3] 13 (obj :0)
mu[2,3,3,6,3] 46 (obj :0)

mu[2,3,3,7,5] 1 (obj :0)
mu[2,3,3,8,3] 17 (obj :0)
mu[2,3,3,8,5] 13 (obj :0)
mu[2,3,3,9,3] 6 (obj :0)
mu[3,5,2,1,5] 1 (obj :0)
mu[3,5,2,1,6] 16 (obj :0)
mu[3,5,2,2,5] 28 (obj :0)
mu[3,5,2,2,6] 17 (obj :0)
mu[3,5,2,2,7] 1 (obj :0)
mu[3,5,2,3,5] 17 (obj :0)
mu[3,5,2,3,6] 34 (obj :0)
mu[3,5,2,3,7] 15 (obj :0)
mu[3,5,2,4,5] 1 (obj :0)
mu[3,5,2,6,5] 17 (obj :0)
mu[3,5,2,7,5] 1 (obj :0)
mu[3,5,2,8,5] 13 (obj :0)
mu[3,5,2,9,5] 17 (obj :0)
mu[3,5,2,10,5] 1 (obj :0)
mu[3,5,2,10,6] 13 (obj :0)
mu[3,8,3,1,2] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,1,8] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,1,9] 13 (obj :0)
mu[3,8,3,2,1] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,2,4] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,2,8] 13 (obj :0)
mu[3,8,3,2,9] 17 (obj :0)
mu[3,8,3,2,10] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,3,1] 16 (obj :0)
mu[3,8,3,3,2] 17 (obj :0)
mu[3,8,3,3,4] 16 (obj :0)
mu[3,8,3,3,7] 1 (obj :0)

mu[3,8,3,3,8] 17 (obj :0)
mu[3,8,3,3,9] 46 (obj :0)
mu[3,8,3,3,10] 13 (obj :0)
mu[3,8,3,10,2] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,10,8] 1 (obj :0)
mu[3,8,3,10,9] 16 (obj :0)
mu[4,6,1,3,7] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,4,2] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,4,3] 13 (obj :0)
mu[4,6,1,4,5] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,4,6] 16 (obj :0)
mu[4,6,1,4,8] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,4,9] 16 (obj :0)
mu[4,6,1,7,2] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,7,5] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,7,6] 13 (obj :0)
mu[4,6,1,7,8] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,8,6] 17 (obj :0)
mu[4,6,1,8,7] 1 (obj :0)
mu[4,6,1,9,2] 17 (obj :0)
mu[4,6,1,9,3] 6 (obj :0)
mu[4,6,1,9,6] 49 (obj :0)
mu[4,6,1,9,7] 13 (obj :0)
mu[4,6,1,9,8] 17 (obj :0)
mu[5,6,2,1,6] 16 (obj :0)
mu[5,6,2,2,6] 17 (obj :0)
mu[5,6,2,2,7] 1 (obj :0)
mu[5,6,2,3,6] 34 (obj :0)
mu[5,6,2,3,7] 15 (obj :0)
mu[5,6,2,5,1] 1 (obj :0)
mu[5,6,2,5,2] 13 (obj :0)

mu[5,6,2,5,3] 17 (obj :0)
mu[5,6,2,5,4] 1 (obj :0)
mu[5,6,2,5,6] 17 (obj :0)
mu[5,6,2,5,7] 1 (obj :0)
mu[5,6,2,5,8] 28 (obj :0)
mu[5,6,2,5,9] 17 (obj :0)
mu[5,6,2,5,10] 1 (obj :0)
mu[5,6,2,10,6] 13 (obj :0)
mu[6,7,1,2,7] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,3,7] 16 (obj :0)
mu[6,7,1,4,5] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,4,9] 16 (obj :0)
mu[6,7,1,5,1] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,5,3] 17 (obj :0)
mu[6,7,1,5,4] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,5,7] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,5,9] 17 (obj :0)
mu[6,7,1,5,10] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,6,1] 16 (obj :0)
mu[6,7,1,6,4] 13 (obj :0)
mu[6,7,1,6,5] 17 (obj :0)
mu[6,7,1,6,7] 16 (obj :0)
mu[6,7,1,6,9] 34 (obj :0)
mu[6,7,1,6,10] 3 (obj :0)
mu[6,7,1,8,7] 1 (obj :0)
mu[6,7,1,9,7] 13 (obj :0)
mu[6,8,2,4,2] 1 (obj :0)
mu[6,8,2,4,3] 13 (obj :0)
mu[6,8,2,4,8] 1 (obj :0)
mu[6,8,2,5,2] 13 (obj :0)
mu[6,8,2,5,8] 28 (obj :0)

mu[6,8,2,6,2] 17 (obj :0)
mu[6,8,2,6,3] 46 (obj :0)
mu[6,8,2,6,8] 17 (obj :0)
mu[6,8,2,6,10] 13 (obj :0)
mu[6,8,2,7,2] 1 (obj :0)
mu[6,8,2,7,5] 1 (obj :0)
mu[6,8,2,7,8] 1 (obj :0)
mu[6,8,2,9,2] 17 (obj :0)
mu[6,8,2,9,3] 6 (obj :0)
mu[6,8,2,9,8] 17 (obj :0)
mu[7,9,1,4,5] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,4,9] 16 (obj :0)
mu[7,9,1,5,1] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,5,3] 17 (obj :0)
mu[7,9,1,5,4] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,5,9] 17 (obj :0)
mu[7,9,1,5,10] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,6,1] 16 (obj :0)
mu[7,9,1,6,4] 13 (obj :0)
mu[7,9,1,6,5] 17 (obj :0)
mu[7,9,1,6,9] 34 (obj :0)
mu[7,9,1,6,10] 3 (obj :0)
mu[7,9,1,7,2] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,7,3] 16 (obj :0)
mu[7,9,1,7,5] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,7,6] 13 (obj :0)
mu[7,9,1,7,8] 1 (obj :0)
mu[7,9,1,7,9] 16 (obj :0)
mu[8,2,3,1,2] 1 (obj :0)
mu[8,2,3,3,2] 17 (obj :0)
mu[8,2,3,4,2] 1 (obj :0)

mu[8,2,3,4,3] 13 (obj :0)
mu[8,2,3,5,2] 13 (obj :0)
mu[8,2,3,6,2] 17 (obj :0)
mu[8,2,3,6,3] 46 (obj :0)
mu[8,2,3,7,2] 1 (obj :0)
mu[8,2,3,7,5] 1 (obj :0)
mu[8,2,3,8,2] 28 (obj :0)
mu[8,2,3,8,3] 17 (obj :0)
mu[8,2,3,8,5] 13 (obj :0)
mu[8,2,3,9,2] 17 (obj :0)
mu[8,2,3,9,3] 6 (obj :0)
mu[8,2,3,10,2] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,1,9] 13 (obj :0)
mu[8,9,2,2,1] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,2,4] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,2,9] 17 (obj :0)
mu[8,9,2,2,10] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,3,1] 16 (obj :0)
mu[8,9,2,3,4] 16 (obj :0)
mu[8,9,2,3,7] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,3,9] 46 (obj :0)
mu[8,9,2,3,10] 13 (obj :0)
mu[8,9,2,6,10] 13 (obj :0)
mu[8,9,2,8,1] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,8,4] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,8,6] 17 (obj :0)
mu[8,9,2,8,7] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,8,9] 17 (obj :0)
mu[8,9,2,8,10] 1 (obj :0)
mu[8,9,2,10,9] 16 (obj :0)
mu[9,4,1,2,4] 1 (obj :0)

mu[9,4,1,3,4] 16 (obj :0)
mu[9,4,1,3,7] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,5,4] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,6,4] 13 (obj :0)
mu[9,4,1,7,2] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,7,5] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,7,6] 13 (obj :0)
mu[9,4,1,7,8] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,8,4] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,8,6] 17 (obj :0)
mu[9,4,1,8,7] 1 (obj :0)
mu[9,4,1,9,2] 17 (obj :0)
mu[9,4,1,9,3] 6 (obj :0)
mu[9,4,1,9,4] 16 (obj :0)
mu[9,4,1,9,6] 49 (obj :0)
mu[9,4,1,9,7] 13 (obj :0)
mu[9,4,1,9,8] 17 (obj :0)
mu[9,10,2,2,1] 1 (obj :0)
mu[9,10,2,2,10] 1 (obj :0)
mu[9,10,2,3,1] 16 (obj :0)
mu[9,10,2,3,10] 13 (obj :0)
mu[9,10,2,4,5] 1 (obj :0)
mu[9,10,2,5,1] 1 (obj :0)
mu[9,10,2,5,3] 17 (obj :0)
mu[9,10,2,5,10] 1 (obj :0)
mu[9,10,2,6,1] 16 (obj :0)
mu[9,10,2,6,5] 17 (obj :0)
mu[9,10,2,6,10] 16 (obj :0)
mu[9,10,2,7,3] 16 (obj :0)
mu[9,10,2,8,1] 1 (obj :0)
mu[9,10,2,8,10] 1 (obj :0)

mu[9,10,2,9,1] 13 (obj :0)
mu[9,10,2,9,3] 28 (obj :0)
mu[9,10,2,9,5] 17 (obj :0)
mu[9,10,2,9,10] 16 (obj :0)
mu[10,1,2,2,1] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,3,1] 16 (obj :0)
mu[10,1,2,4,5] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,5,1] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,5,3] 17 (obj :0)
mu[10,1,2,6,1] 16 (obj :0)
mu[10,1,2,6,5] 17 (obj :0)
mu[10,1,2,7,3] 16 (obj :0)
mu[10,1,2,8,1] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,9,1] 13 (obj :0)
mu[10,1,2,9,3] 28 (obj :0)
mu[10,1,2,9,5] 17 (obj :0)
mu[10,1,2,10,2] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,10,3] 16 (obj :0)
mu[10,1,2,10,5] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,10,6] 13 (obj :0)
mu[10,1,2,10,8] 1 (obj :0)
mu[10,1,2,10,9] 16 (obj :0)
F[1,3,2] 192 (obj :0)
F[2,3,3] 192 (obj :0)
F[3,5,2] 192 (obj :0)
F[3,8,3] 192 (obj :0)
F[4,6,1] 185 (obj :0)
F[5,6,2] 192 (obj :0)
F[6,7,1] 185 (obj :0)
F[6,8,2] 192 (obj :0)
F[7,9,1] 185 (obj :0)

F[8,2,3] 192 (obj :0)
F[8,9,2] 192 (obj :0)
F[9,4,1] 185 (obj :0)
F[9,10,2] 192 (obj :0)
F[10,1,2] 192 (obj :0)
nbport[1,192] 1 (obj :10)
nbport[2,192] 1 (obj :10)
nbport[3,192] 2 (obj :10)
nbport[4,192] 1 (obj :10)
nbport[5,192] 1 (obj :10)
nbport[6,192] 2 (obj :10)
nbport[7,192] 1 (obj :10)
nbport[8,192] 2 (obj :10)
nbport[9,192] 2 (obj :10)
nbport[10,192] 1 (obj :10)
L[1,3,2] 1 (obj :0)
L[2,3,3] 1 (obj :0)
L[3,5,2] 1 (obj :0)
L[3,8,3] 1 (obj :0)
L[4,6,1] 1 (obj :0)
L[5,6,2] 1 (obj :0)
L[6,7,1] 1 (obj :0)
L[6,8,2] 1 (obj :0)
L[7,9,1] 1 (obj :0)
L[8,2,3] 1 (obj :0)
L[8,9,2] 1 (obj :0)
L[9,4,1] 1 (obj :0)
L[9,10,2] 1 (obj :0)
L[10,1,2] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,1,2] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,1,3] 16 (obj :0)

mu[1,3,2,1,5] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,1,6] 16 (obj :0)
mu[1,3,2,1,8] 1 (obj :0)
mu[1,3,2,1,9] 13 (obj :0)

Bibliographie

- [1] E.H.L. AARTS et J.K. LENSTRA. *Local search in combinatorial optimization*. John Wiley & Sons Ltd., 1997.
- [2] N. ANTONIADES, A. BOSKOVIC, I. TOMKOS, N. MADAMOPOULOS, M. LEE, I. ROUDAS, D. PASTEL, M. SHARMA et M. J. YADLOWSKY. « Performance engineering and topological design of Metro WDM optical networks using computer simulation ». *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 20(1) :149–165, 2002.
- [3] H. ARSHAM, G. CIMPERMAN, N. DAMIJ, T. DAMIJ et J. GRAD. « A computer implementation of the Push-and-Pull algorithm and its computational comparison with LP simplex method ». *Applied Mathematics and Computation (New York)*, 170(1) :36–63, 2005. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc.
- [4] P. 1. AVELLA et I. VASIL'EV. « A computational study of a cutting plane algorithm for university course timetabling ». *Journal of Scheduling*, 8(6) :497–514, 2005. IEE.
- [5] R. BARR et R. A. PATTERSON. « Grooming telecommunications networks ». *Optical Networks Magazine*, 2(3) :20–3, 2001. IEE.
- [6] H. BASTIAANSEN, A. WISSE, E. ZWIERENBERG et S. Van der SMAGT. « Next-generation networks : Forcing operators towards new network design principles ». *J.Inst.British Telecom.Engineer*, 2(3) :20–25, 2001.
- [7] A.M. BAYEN, C.J. TOMLIN, Y. YE et J. ZHANG. « MILP formulation and polynomial time algorithm for an aircraft scheduling problem ». Dans *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, pages 5003–5010, Maui, HI, United States, 2003.

BIBLIOGRAPHIE

- Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc. ; T3 : Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control.
- [8] M. BAZARAA, J.J. JARVIS et H.D SHERALI. *Linear programming and network flows*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], third édition, 2005.
- [9] M. BAZARAA et C. M. SHETTY. *Foundations of optimization*. Springer-Verlag, 1976.
- [10] F. 1. BELBLIDIA et S. 1. BULMAN. « A hybrid topology optimization algorithm for static and vibrating shell structures ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(6) :835–52, 2002. IEE.
- [11] J. F. BENDERS. *Partitioning Procedeures for Solwing Mixed variables Programming Problems*. Numerische Mathematik, 1962.
- [12] R. BERRY et E. MODIANO. « Reducing electronic multiplexing costs in SONET/WDM rings with dynamically changing traffic ». *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 18(10) :1961–71, 2000.
- [13] R. A. BERRY et E. MODIANO. « The role of switching in reducing the number of electronic ports in WDM networks ». *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 22(8) :1396–1405, 2004.
- [14] P. BRUCKER et S. KNUST. *Complex Scheduling*. Springer, 2006. ID : 62571.
- [15] R. CARDILLO, V. CURRI et M. MELLIA. « Considering transmission impairments in configuring wavelength routed optical networks ». Dans *OFCNFOEC 2006. 2006 Optical Fiber Communication Conference and National Fiber Optic Engineers Conference, 5-10 March 2006*, OFCNFOEC 2006. 2006 Optical Fiber Communication Conference and National Fiber Optic Engineers Conference, page 3, Anaheim, CA, USA, 2006. IEEE.
- [16] E. CASTILLO, A. J. CONEJO, R. GARCIA-BERTRAND et R. MINGUEZ. *Decomposition Techniques in Mathematical Programming : Engineering and Science Applications*. Springer, 2006.

BIBLIOGRAPHIE

- [17] I. CERUTTI et A. FUMAGALLI. « Traffic grooming in static wavelength division multiplexing networks ». *Communications Magazine, IEEE*, 43(1) :101–107, 2005.
- [18] B. CHEN, W. ZHONG et S. K. BOSE. « Applying saturated cut method for dynamic traffic grooming in IP/MPLS over WDM networks ». *IEEE Communications Letters*, 10(2) :117–19, 2006.
- [19] A. L. CHIU et E. H. MODIANO. « Reducing electronic multiplexing costs in unidirectional SONET/WDM ring networks via efficient traffic grooming ». Dans *IEEE GLOBECOM 1998*, volume 1, pages 322–327. IEEE, 1998.
- [20] V. CHVATAL. *Linear Programming*. Springer-Verlag New York Inc, Dordrecht, 1983.
- [21] D. COLLE, P. DEMEESTER, P. LAGASSE, P. FALCAO et P. ARIJS. « Application, design, and evolution of DWDM in Pan-European Transport Networks ». *IEEE Communications Magazine*, 41(9) :48–50, 2003.
- [22] M. COOPER et D. C. YEN. « IPv6 : business applications and implementation concerns ». *Computer Standards Interfaces*, 28(1) :27–41, 2005.
- [23] G. B. DANTZIG et M. N. THAPA. *Linear Programming : 2 : Theory and Extensions*. Springer, 2003.
- [24] G.B. DANTZIG. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, 1998.
- [25] D. C. DOWDEN, R. D. GITLIN et R. L. MARTIN. « Next-generation networks ». *Bell Labs Tech J*, 3(4) :3–14, 1998.
- [26] R. DRECHSLER, R. EBENDT et G. FEY. *Advanced BDD Optimization*. Springer, 2005.
- [27] R. DUTTA et G. N. ROUSKAS. « On optimal traffic grooming in WDM rings ». *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 20(1) :110–21, 2002. IEE.

BIBLIOGRAPHIE

- [28] R. DUTTA et G. N. ROUSKAS. « Traffic grooming in WDM networks : past and future ». *IEEE Network*, 16(6) :46–56, 2002.
- [29] F. 1. FOCACCI, A. LODI et M. MILANO. « Cutting planes in constraint programming : an hybrid approach ». Dans *Proceedings of Sixth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 187–201, Singapore, 2000. Springer-Verlag.
- [30] M. R. GAREY et D. S. JOHNSON. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. Freeman, 1979. IEE.
- [31] O. GERSTEL, R. RAMASWAMI et G. H. SASAKI. « Cost-effective traffic grooming in WDM rings ». *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 8(5) :618–30, 2000.
- [32] N. GHANI, S. DIXIT et T. WANGR. « On IP-WDM integration - A retrospective ». *IEEE Communications Magazine*, 41(9) :42–45, 2003.
- [33] P. GILMORE et R. E. GOMORY. « A linear programming approach to the cutting-stock problem ». *Operations research*, 9 :849, 1961.
- [34] A. GLADISCH, R. P BRAUN, D. BREUER, A. EHRHARDT, H. M FOISEL, M. JAEGER, R. LEPPLA, M. SCHNEIDERS, S. VORBECK, W. WEIERSHAUSEN et F. J WESTPHAL. « Evolution of Terrestrial Optical System and Core Network Architecture ». *IEEE Communications Magazine*, 94(5) :869–889, 2006.
- [35] F. GLOVER et M. LAGUNA. « General purpose heuristics for integer programming. II ». *Journal of Heuristics*, 3(2) :161–79, 1997. IEE.
- [36] F. GLOVER, E. TAILLARD et D. de WERRA. « A user’s guide to tabu search ». *Annals of Operations Research*, 41(1-4) :3–28, 1993. IEE.
- [37] N. GOULD, D. ORBAN et P. TOINT. « Numerical methods for large-scale nonlinear optimization ». *Acta Numerica*, 14 :299–361, 2005.
- [38] V. C. 1. GUNGOR et F. C. LAMBERT. « A survey on communication networks for electric system automation ». *Computer Networks*, 50(7) :877–97, 2006.

BIBLIOGRAPHIE

- [39] E. J. HARDER, S. LEE et H. CHOI. « On wavelength assignment in WDM optical networks ». Dans *Proceedings of the Fourth International Conference Massively Parallel Processing Using Optical Interconnections*, pages 32–8, Montreal, Ont., Canada, 1997. IEEE Comput. Soc.
- [40] D. S. HOCHBAUM. *Approximation algorithms for NP-hard problems*. PWS Pub. Co., 1997.
- [41] J. HOLLAND. *Adaptation in natural and artificial systems : an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. MIT Press, 1992.
- [42] A. C. HOULE, B. JAUMARD et Y. SOLARI. « Optimized traffic grooming as a way to mitigate the effect of chromatic dispersion in metro/regional WDM networks ». Dans *2006 Optical Fiber Communication Conference and National Fiber Optic Engineers Conference*, OFCNFOEC 2006, page 3, Anaheim, CA, USA, 2006. IEEE.
- [43] S. HUANG, R. DUTTA et G. N. ROUSKAS. « Traffic grooming in path, star, and tree networks : complexity, bounds, and algorithms ». *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 24(4) :66–82, 2006.
- [44] A. ISAACS, T. RAY et W. SMITH. « A hybrid evolutionary algorithm with simplex local search ». Dans *2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2007*, pages 1701–1708, Singapore, 2008. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc. ; T3 : 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2007.
- [45] G. ISHIKAWA et H. OOI. « Polarization-mode dispersion sensitivity and monitoring in 40-Gbit/s OTDM and 10-Gbit/s NRZ transmission experiments ». Dans *Proceedings of the 1998 Optical Fiber Communication Conference, OFC'98*, pages 117–119, San Jose, CA, USA, 1998. IEEE.
- [46] B. JAUMARD, Y. SOLARI et A. HOULE. « Dimensioning WDM optical networks with minimum MSP configuration ». Dans *Proceedings of the Fourth IASTED International Multi-Conference on Wireless and Optical Communications*, pages 826–833, Banff, Canada, 2004. Acta Press, Anaheim, CA, United States. Compilation and

BIBLIOGRAPHIE

indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc. ; T3 : Proceedings of the Fourth IASTED International Multi-Conference on Wireless and Optical Communications.

- [47] M. KARLSSON et H. SUNNERUD. « Polarization mode dispersion impairments and mitigation in fiber optic transmission lines ». Dans *Passive Components and Fiber-based Devices II*, volume 6019 2, page 60192. International Society for Optical Engineering, Bellingham WA, WA 98227-0010, United States, 2005.
- [48] N. KIKUCHI. « Analysis of signal degree of polarization degradation used as control signal for optical polarization mode dispersion compensation ». *Journal of Lightwave Technology*, 19(4) :480–6, 2001.
- [49] V. KLEE et G. J. MINTY. « How good is the simplex algorithm? ». *Academic Press, New York*, (O. Shisha) :159–175, 1972.
- [50] V. P. KOROBKOV et N. E. NIKIFOROVO. « Modified branch-and-bound method ». *Automatic Control and Computer Sciences*, 26(4) :45–9, 1992. IEE.
- [51] P. LAMY, H. MENENDEZ, T. MULLER et E. L. VARMA. « Status and perspectives for the optical control plane ». *Bell Labs Technical Journal*, 11(2) :171–189, 2006.
- [52] Y. LI-MAN¹, L. YUN-HUA¹ et Y. HAI-BIN¹. « Analysis of time delay in networked control systems and study of data transmission technology ». *Control and Decision*, 19(4) :361–82, 2004.
- [53] X. LIU¹, D. M. GILL et S. CHANDRASEKHAR. « Optical technologies and techniques for high bit rate fiber transmission ». *Bell Labs Technical Journal*, 11(2) :83–104, 2006.
- [54] D. LUENBERGER. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley Pub. Co., 1989.
- [55] P. MARTINEZ, P. MARTI et O. M. QUERIN. « Growth method for size, topology, and geometry optimization of truss structures ». *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(1) :13–26, 2007.

BIBLIOGRAPHIE

- [56] F. MAZZINI, G. R. MATEUS et J. M.G. SMITH. « Lagrangean based methods for solving large-scale cellular networks design problems ». *Wireless Networks*, 9(6) :659–672, 2003. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc.
- [57] E. MODIANO et P. J. LIN. « Traffic grooming in WDM networks ». *IEEE Communications Magazine*, 39(7) :124–129, 2001.
- [58] A. I. MOHAMED, M. I. YUSOFF, S. I. MUTALIB et S. A. I. RAHMAN. « Modified branch and bound algorithm ». Dans *8th WSEAS International Conference on Evolutionary Computing (EC'07)*, pages 273–8, Vancouver, BC, Canada, 2007. World Scientific and Engineering Academy and Society.
- [59] K. PAPARRIZOS, N. SAMARAS et G. STEPHANIDES. « A new efficient primal dual simplex algorithm ». *Computers and Operations Research*, 30(9) :1383–1399, 2003. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc.
- [60] C. POLITI, V. ANAGNOSTOPOULOS, C. MATRAKIDIS et A. STAVDAS. « Physical layer impairment aware routing algorithms based on analytically calculated Q-factor ». Dans *2006 Optical Fiber Communication Conference and National Fiber Optic Engineers Conference*, OFCNFOEC 2006, page 3, Anaheim, CA, USA, 2006. IEEE.
- [61] M. POTTS. « The Evolving Telecommunications Network ». *Lecture Notes in Computer Science*, 2698 :1–17, 2003.
- [62] R. RAMASWAMI et K. N. SIVARAJAN. *Optical Networks A Practical Perspective*. Morgan Kaufman, 2002.
- [63] J. ROSLOF, I. HARJUNKOSKI, T. WESTERLUND et J. ISAKSSON. « Solving a large-scale industrial scheduling problem using MILP combined with a heuristic procedure ». *European Journal of Operational Research*, 138(1) :29–42, 2002. IEE.
- [64] J. STRAND, A. L. CHIU et R. TKACH. « Issues for routing in the optical layer ». *IEEE Communications Magazine*, 39(2) :81–87, 2001.
- [65] P. STREILEIN et J. JOHN. « Enabling revenue-generating services - The evolution of Next-generation networks ». *Bell Labs Tech J*, 6(1) :3–12, 2001.

BIBLIOGRAPHIE

- [66] D. T. TANG et C. K. WONG. « Modified Branch and Bound Strategy ». *Information Processing Letters*, 2(3) :65–69, 1973. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc.
- [67] R. E. TARJAN. *Data structures and network algorithms*, volume 44. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1983.
- [68] I. TOMKOS. « Metropolitan area optical networks ». *Circuits and Devices Magazine, IEEE*, 19(4) :24–30, 2003.
- [69] I. TOMKOS, R. HESSE, N. MADAMOPOULOS, C. FRIEDMAN, N. ANTONIADES, B. HALLOCK, R. VODHANEL et A. BOSKOVIC. « Transport performance of an 80 Gb/s WDM regional area transparent ring network utilizing directly modulated lasers ». *Journal of Lightwave Technology*, 20(4) :562–573, 2002.
- [70] K. R. WAGARKAR, P. BORGESSEN et K. SRIHARI. « A study on optical fiber damage due to optoelectronic assembly processes ». Dans *2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE*, volume 5, pages 399–405. American Society of Mechanical Engineers, New York, NY 10016-5990, United States, 2005.
- [71] J. WANG, W. CHO, V. R. VEMURI et B. MUKHERJEE. « Improved approaches for cost-effective traffic grooming in WDM ring networks : ILP formulations and single-hop and multihop connections ». *Journal of Lightwave Technology*, 19(11) :1645–53, 2001. IEEE.
- [72] C. XIN, B. WANG, X. CAO et J. LI. « Logical topology design for dynamic traffic grooming in WDM optical networks ». *Journal of Lightwave Technology*, 24(6) :2267–75, 2006.
- [73] N. ZADEH. « A bad network problem for the simplex method and other minimum cost flow algorithms ». *Mathematical Programming* 5, pages 255–266, 1973.

BIBLIOGRAPHIE

- [74] X. ZHANG et C. QIAO. « An effective and comprehensive approach for traffic grooming and wavelength assignment in SONET/WDM rings ». *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 8(5) :608–17, 2000. IEE.
- [75] K. ZHU et B. MUKHERJEE. « A review of traffic grooming in WDM optical networks : architectures and challenges ». *Optical Networks Magazine*, 4(2) :55–64, 2003.
- [76] L. ZUKUI et M.G. IERAPETRITOU. « A new methodology for the general multi-parametric mixed-integer linear programming (MILP) problems ». *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 46(15) :5141–5151, 2007. Compilation and indexing terms, Copyright 2008 Elsevier Inc.
- [77] J. ZWECK et C. R. MENYUK. « Detection and mitigation of soft failure due to polarization-mode dispersion in optical networks ». Dans *2006 Optical Fiber Communication Conference and National Fiber Optic Engineers Conference, OFCNFOEC 2006*, page 3, Anaheim, CA, USA, 2006. IEEE.