

Quelques conjectures homologiques
dans le cas d'algèbres bisérielles spéciales

par

Jean-Philippe MORIN

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, décembre 2005

Le 22 décembre 2005

le jury a accepté le mémoire de M. Jean-Philippe Morin dans sa version finale.

Membres du jury

M. Shiping Liu
Directeur
Département de mathématiques

M. François Huard
Membre
Département de mathématiques - Bishop's University

M. Ibrahim Assem
Membre
Département de mathématiques

M. Thomas Brüstle
Président-rapporteur
Département de mathématiques

SOMMAIRE

Les algèbres bisérielles spéciales, introduites par A. Skowroński et J. Waschbüsch dans le cadre de la classification des algèbres bisérielles de représentation finie, constituent l'une des classes d'algèbres dociles les plus fréquemment étudiées. Il s'agit d'un échantillon d'algèbres faciles d'approche qu'on utilise souvent comme premier test pour éprouver des conjectures.

Dans ce mémoire, nous présenterons une description combinatoire des syzygies de modules de corde et nous rappellerons la construction d'une certaine base des morphismes entre modules de corde obtenue en nous inspirant d'une reformulation, faite par Jan Schröer, de résultats obtenus par William Crawley-Boevey et Henning Krause. Nous obtiendrons aussi une classification des algèbres bisérielles spéciales locales.

Avec tous ces outils en mains, nous comptons mettre à l'épreuve deux conjectures homologiques, qui résistent encore et toujours à l'envahisseur, en les soumettant au cas d'algèbres bisérielles spéciales. Dans un premier temps, on obtiendra un résultat d'où découlera la validité de la *Strong no loops conjecture*, pour laquelle nous utiliserons la traduction libre de *conjecture forte d'absence de boucles*.

Théorème. Soient $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale et S un A -module simple. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Ext}_A^1(S, S) \neq 0$;
2. $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$ pour tout entier $i \geq 1$.

Dans un deuxième temps, on montrera la validité de la conjecture de Tachikawa dans le cas d'algèbres bisérielles spéciales locales auto-injectives. En fait, on montrera le théorème suivant.

Théorème. Soit $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale locale. Alors un A -module indécomposable M de type fini est projectif si et seulement si $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$.

Même si la plupart des notions importantes sont rappelées, le lecteur est présumé posséder des connaissances de base en théorie des représentations des algèbres associatives et de bonnes connaissances en algèbre.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, M. Shiping Liu, pour les nombreuses discussions qui m'ont permis de progresser au cours des dernières années. Sa rigueur et son savoir demeureront pour moi des guides indéniables. Je suis également très reconnaissant envers M. Ibrahim Assem de m'avoir transmis sa passion pour l'algèbre. Je lève mon chapeau à tous les membres du Groupe de recherche en théorie des représentations des algèbres pour les multiples échanges et le formidable esprit d'équipe qui m'a soutenu pendant toute ma maîtrise, en espérant qu'il se perpétuera.

Je n'oserais oublier de remercier ma conjointe, Isabelle Larivière, qui m'a épaulé jusqu'à la fin de ce projet et a contribué à en peaufiner l'aspect linguistique. Je suis aussi redevable envers mes parents, toujours demeurés près de moi : Richard, qui a allumé en moi la flamme des mathématiques et Lyne, qui, preuve à l'appui (voir [43]), est responsable de ma réussite scolaire.

Je souhaite enfin exprimer toute ma gratitude au Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour son soutien financier au cours des dernières années.

22 décembre 2005

Jean-Philippe Morin

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	iii
REMERCIEMENTS	v
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — Rappels et notations	3
1.1 Terminologie et rappels généraux	4
1.2 Carquois et algèbres de chemins	7
1.3 Algèbre de carquois lié	10
1.4 Représentations d'un carquois lié	13
1.5 Théorie d'Auslander-Reiten	16
CHAPITRE 2 — Algèbres bisérielles spéciales	21
2.1 Définitions et exemples	22
2.2 Modules indécomposables	23

2.3	Morphismes entre modules indécomposables	27
2.4	Syzygies des modules de corde	32
2.5	Algèbres bisérielles spéciales locales	36
CHAPITRE 3 — La conjecture forte d’absence de boucles		41
3.1	Historique de la conjecture	42
3.2	Boucles sans puissance composante d’une relation polynomiale	44
3.3	Le cas des algèbres bisérielles spéciales	50
CHAPITRE 4 — La conjecture de Tachikawa		61
4.1	Algèbres auto-injectives	61
4.2	La conjecture de Tachikawa	63
4.3	Le cas des algèbres bisérielles spéciales locales auto-injectives	66
CONCLUSION		77
BIBLIOGRAPHIE		85

INTRODUCTION

Le mathématicien, à l'instar du biologiste qui s'émeut devant de nouvelles espèces et cherche à les classer, est fasciné par des êtres évoluant non pas dans la nature, mais plutôt dans l'univers immatériel de l'esprit. Pour parvenir à bien concevoir et apprécier de telles entités puis à les scruter en profondeur, il doit élaborer des techniques qui, sans en altérer les caractéristiques, en rendent les abords plus aisés et agréables. C'est précisément à cette fin qu'est née la théorie de la représentation des algèbres : étudier les structures complexes que sont, par exemple, les algèbres, les modules et les catégories au moyen d'approches leur conférant maniabilité et convivialité. La première semence de cette théorie date de 1835, lorsque William Rowan Hamilton [26] est parvenu à représenter les nombres complexes sous forme de couples de nombres réels. Un frémissement s'est par la suite fait sentir, lorsqu'au tournant du XIX^e siècle, Burnside et Frobenius ont découvert un lien entre les éléments des groupes de symétrie des cristaux et certains groupes de matrices.

Mais il aura fallu encore plus d'un siècle de gestation avant que cette théorie ne voie le jour, en 1929, avec Emmy Noether [37], à qui l'on attribue l'idée lumineuse de représenter un anneau au moyen des endomorphismes d'un groupe abélien. Les développements subséquents ont évolué vers l'étude de ces structures dotées de la double nature d'anneau et de module que sont les algèbres, et ce, encore aujourd'hui, à travers le regard global

jeté par les catégories de modules.

Cette théorie a gagné beaucoup de vigueur au cours des quarante dernières années, pour constituer aujourd'hui l'un des domaines les plus actifs de l'algèbre. De plus, la tendance à décloisonner les divers secteurs des mathématiques fondamentales a rendu possible, par exemple, la traduction des concepts d'homologie et de cohomologie, initialement évoqués en topologie, au contexte des algèbres et des modules.

C'est donc pour poursuivre cet élan que nous nous proposons, au cours des prochains chapitres, d'explorer le monde plus particulier des algèbres bisérielles spéciales avec pour objectif plus précis de vérifier si elles sont prédestinées à certains comportements postulés par deux conjectures que nous évoquerons sous peu.

Pour ce faire, nous allons d'abord survoler des outils mis à notre disposition par la théorie actuelle des représentations des algèbres. C'est l'essence du premier chapitre, lequel portera d'ailleurs une attention toute particulière au concept de carquois, celui-ci constituant un instrument efficace pour radiographier la plupart des algèbres.

Nous poursuivrons notre préparation à l'aide du second chapitre, destiné à révéler en partie l'anatomie des algèbres bisérielles spéciales et la charpente de leur catégorie de modules. On abordera entre autres les morphismes entre ces modules, mais aussi la notion homologique de syzygie d'un module. Ce chapitre se terminera par la classification complète de la sous-famille des algèbres bisérielles spéciales qui sont locales.

Les deux derniers chapitres seront réservés aux rappels de la conjecture forte d'absence de boucles et de la conjecture de Tachikawa, ainsi qu'à la reconnaissance de leur validité dans le contexte des algèbres bisérielles spéciales pour la première, et dans celui plus restreint des algèbres bisérielles spéciales locales pour la seconde.

En guise de clôture, nous présenterons quelques avenues intéressantes à emprunter pour la poursuite de cette investigation.

CHAPITRE 1

Rappels et notations

Le présent chapitre se veut un rappel des principaux résultats à la base de la théorie des représentations des algèbres. Dans le cas qui nous intéresse, nous verrons qu'il est possible d'établir un lien entre une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos et une structure graphique que nous nommerons carquois. La manipulation de cette représentation plus concrète nous permettra de mieux saisir le comportement de l'objet abstrait qu'est une algèbre. Nous rappellerons aussi la notion de carquois d'Auslander-Reiten de la catégorie de modules d'une algèbre, celui-ci constituant un autre support graphique permettant d'emmagasiner de l'information au sujet d'une algèbre donnée.

Tout au long de ce chapitre, R désignera un anneau commutatif artinien et on écrira plutôt K lorsque le contexte exigera de plus qu'il soit un corps. On écrira A pour désigner une R -algèbre d'Artin ou, selon le contexte, une K -algèbre de dimension finie. Nous la supposerons toujours unifère et, sans perte de généralité, sobre et connexe (voir [2, VI.3.5 et VIII.3.6]). On notera $\text{mod } A$ la catégorie des A -modules à droite de type fini. Les notations utilisées dans ce chapitre seront réutilisées partout dans ce mémoire.

1.1 Terminologie et rappels généraux

Nous fixons ici la terminologie et les notations qui seront utilisées au cours des prochaines lignes.

Soit A une R -algèbre d'Artin. L'algèbre A est dite **connexe** si les seuls idempotents appartenant à son centre sont 0 et 1. Pour un sous-ensemble $X \subseteq A$, nous écrivons $\langle X \rangle$ pour désigner l'idéal bilatère de A engendré par les éléments de X . En outre, il nous arrivera à l'occasion d'utiliser le **delta de Kronecker** que l'on définit, pour des éléments a et b d'un ensemble quelconque E , de la manière suivante :

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons que l'**algèbre opposée** A^{op} est constituée des mêmes éléments que A , mais que la multiplication $*$ y applique deux éléments a et b sur l'élément $a*b = ba$. Considérant l'enveloppe injective J de R_R , on a une dualité $D = \text{Hom}_R(-, J) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$. Si R est un corps, alors $J = K$ et $D = \text{Hom}_K(-, K)$.

Si l'on suppose A connexe puis que l'on fixe $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux, alors en tant que A -module, A peut se décomposer ainsi :

$$A_A = \bigoplus_{i=1}^n e_i A.$$

où $P_1 = e_1 A, P_2 = e_2 A, \dots, P_n = e_n A$ sont tous les A -modules projectifs indécomposables. On dit que A est **sobre** si $i \neq j$ entraîne $e_i A \not\cong e_j A$.

Maintenant, soit M un A -module quelconque. On notera $\text{rad } M$ le **radical** de M , c'est-à-dire l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M s'il en admet, et 0 sinon. La **coiffe** de M , c'est-à-dire le quotient semi-simple de M par son radical, sera notée $\text{top } M$. Par exemple, $\text{top } A_A = e_1 A / e_1 \text{rad } A \oplus e_2 A / e_2 \text{rad } A \oplus \dots \oplus e_n A / e_n \text{rad } A$.

On notera S_i le A -module simple $e_i A / e_i \text{rad } A$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Rappelons que dans le contexte où A est une K -algèbre de dimension finie, on la dit **déployée** si chaque K -espace vectoriel S_i est de dimension 1. Un module de coiffe simple sera dit **local**. On notera aussi $\text{soc } M$ le **socle** de M , c'est-à-dire la somme de tous les sous-modules simples de M . Un module de socle simple sera dit **colocal**.

Considérons une résolution projective de M donnée par

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M.$$

Nous la dirons **minimale** si $\text{Im } d_i \subseteq \text{rad } P_{i-1}$ pour $i \geq 0$. Dans ce cas, cette résolution est uniquement déterminée à isomorphisme près (voir [2, X.1.13]), et, pour $n \geq 1$, nous appellerons $\text{Ker } d_{n-1}$ la n^{e} **syzygie** de M , notée $\Omega^n(M)$. Lorsqu'on considère plutôt une corésolution injective, les notions duales sont aussi définies.

Rappelons que pour deux A -modules M et N , $\mathcal{P}_A(M, N)$ désigne le sous-espace des morphismes $f : M \rightarrow N$ pour lesquels il existe des morphismes $f_1 : M \rightarrow P$, $f_2 : P \rightarrow N$ avec P projectif tels que $f = f_2 f_1$. Ceci fournit en fait un idéal \mathcal{P}_A de la catégorie $\text{mod } A$, ce qui permet de construire la catégorie quotient $\underline{\text{mod}} A = \text{mod } A / \mathcal{P}_A$. Les morphismes entre M et N y sont donnés par

$$\text{Hom}_{\underline{\text{mod}} A}(M, N) = \underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{P}_A(M, N).$$

La décomposition de Pierce de A_A obtenue plus haut peut aussi se généraliser au A -module M , grâce aux isomorphismes de A -modules suivants :

$$M \cong \text{Hom}_A(A, M) \cong \text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i=1}^n e_i A, M\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_A(e_i A, M) \cong \bigoplus_{i=1}^n M e_i.$$

Ceci nous permet de représenter un morphisme $\phi : e_1 A \oplus \cdots \oplus e_n A \rightarrow M$ par une matrice-ligne (x_1, x_2, \dots, x_n) avec $x_i \in M e_i$. En particulier, si $M = f_1 A \oplus f_2 A \oplus \cdots \oplus f_r A$ pour certains idempotents f_j , alors le morphisme ϕ peut être représenté par une matrice $(\phi_{ij})_{r \times n}$ avec $\phi_{ij} \in f_i A e_j$.

Dans le contexte où $R = K$, on a le résultat suivant indiquant qu'il est toujours possible de construire une résolution projective minimale d'un A -module de type fini à partir d'éléments linéairement indépendants de sa coiffe.

Lemme 1.1.1. *Soient A une K -algèbre déployée de dimension finie et e_1, e_2, \dots, e_s des idempotents primitifs. Soient M un A -module non nul de type fini et $x_i \in Me_i$, pour $i = 1, 2, \dots, s$. Si les classes de x_1, x_2, \dots, x_s dans $\text{top } M$ sont K -linéairement indépendantes, alors il existe un entier $r \geq s$, des idempotents primitifs $e_i \in A$ et des éléments $x_i \in Me_i$, pour $i = s + 1, \dots, r$, tels que*

$$(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_r) : e_1A \oplus \dots \oplus e_sA \oplus e_{s+1}A \oplus \dots \oplus e_rA \rightarrow M$$

soit une couverture projective de M .

DÉMONSTRATION : Soit r la dimension du K -module $\text{top } M$. Si $s < r$, alors il existe un élément $y \in M$ tel que $y + \text{rad } M$ n'est pas combinaison linéaire des $x_i + \text{rad } M$ avec $1 \leq i \leq s$. Il existe donc un certain idempotent primitif $e_{s+1} \in A$ tel que $ye_{s+1} + \text{rad } M$ n'est pas combinaison linéaire des $x_i + \text{rad } M$ avec $1 \leq i \leq s$. Posons alors $x_{s+1} = ye_{s+1}$. Alors les $x_i + \text{rad } M$ avec $1 \leq i \leq s + 1$ sont linéairement indépendants. Par récurrence, il existe des idempotents primitifs $e_j \in A$ et des éléments $x_j \in Me_j$, $s < j \leq r$, tels que $\{x_j + \text{rad } M \mid 1 \leq j \leq r\}$ soit une K -base de $\text{top } M$. Or on sait que l'application

$$(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_r) : e_1A \oplus \dots \oplus e_sA \oplus e_{s+1}A \oplus \dots \oplus e_rA \longrightarrow M$$

est surjective. Pour montrer qu'il s'agit en fait d'une couverture projective de M , prenons un élément $(y_1, y_2, \dots, y_r) \in \text{Ker } (x_1, x_2, \dots, x_r) \subseteq \bigoplus_{i=1}^r e_iA$. Écrivons $y_i = \lambda_i e_i + z_i$ avec $\lambda_i \in R$ et $z_i \in \text{rad } A$, pour $i = 1, 2, \dots, r$. Alors

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = -(x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_r z_r) \in \text{rad } M.$$

Ainsi $\lambda_i = 0$, et donc $y_i \in \text{rad } A$ pour tout $1 \leq i \leq r$. \square

1.2 Carquois et algèbres de chemins

Nous ferons ici quelques brefs rappels sur certaines notions de combinatoire. Nous définirons ensuite ce que nous entendons par *carquois* et verrons comment ces derniers peuvent nous fournir un grand nombre d'algèbres, celles-ci étant construites à partir des façons de parcourir le carquois donné comme s'il s'agissait d'une carte routière. La structure graphique que nous utiliserons est fortement inspirée de la structure combinatoire qu'est un **multigraphe** $G = (G_0, G_1)$, c'est-à-dire un ensemble de sommets G_0 reliés par des arêtes G_1 (possiblement multiples). Rappelons que G est dit **connexe** si, pour toute paire de sommets a, b de G , il existe une succession d'arêtes consécutives reliant a et b .

Étant donné un multigraphe G , on peut lui adjoindre une **orientation**, c'est-à-dire fixer un sens de parcours à chacune de ses arêtes. Ceci se traduit mathématiquement par la définition de deux applications allant des arêtes vers les sommets, qui indiqueront respectivement la source et le but de chaque arête. Désormais, nous appellerons flèches ces arêtes auxquelles sont accolés une source et un but. Ce faisant, nous donnons naissance à un nouvel objet mathématique, constitué entre autres d'un ensemble de flèches, qu'il conviendra de baptiser *carquois*. Évidemment, cette approche ne correspond pas au développement chronologique de la notion de carquois effectué par Gabriel. Malgré tout, nous croyons qu'elle en fait ressortir l'essence sans avoir à faire intervenir de notions trop lourdes.

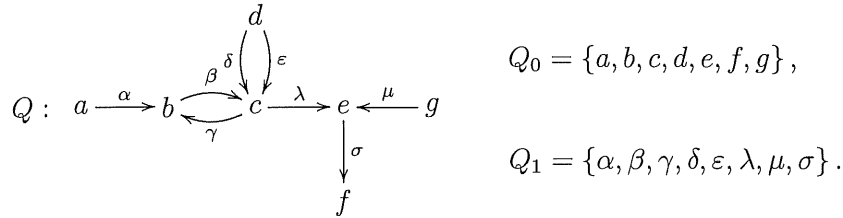
Définition 1.2.1. Un **carquois** Q , représenté par un quadruplet (Q_0, Q_1, s, b) , est un graphe orienté, Q_0 étant l'ensemble des **sommets**, Q_1 , l'ensemble des **flèches** entre les sommets et $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$, deux applications telles que pour toute flèche α ,

1. $s(\alpha)$ est le sommet de départ de α , nommé sa **source**, et
2. $b(\alpha)$ est le sommet d'arrivée de α , nommé son **but**.

Une flèche α de source a et de but b peut être notée de manière plus explicite par

$\alpha : a \rightarrow b$, et s'appelle une **boucle** lorsque $a = b$. On dit de plus que Q est un carquois **fini** lorsque Q_0 et Q_1 sont finis.

Exemple 1.2.2. Le schéma suivant représente un carquois fini :



À un carquois Q on peut associer le **carquois opposé** $Q^{\text{op}} = (Q_0, Q_1^{\text{op}}, s^{\text{op}}, b^{\text{op}})$ où $Q_1^{\text{op}} = \{\alpha^{\text{op}} \mid \alpha \in Q_1\}$ et pour $\alpha \in Q_1$ on pose $s^{\text{op}}(\alpha^{\text{op}}) = b(\alpha)$ et $b^{\text{op}}(\alpha^{\text{op}}) = s(\alpha)$. On associe aussi le **graphe sous-jacent**, noté \bar{Q} , qui est obtenu à partir de Q en oubliant l'orientation de ses flèches. On dit alors de Q qu'il est **connexe** si \bar{Q} est connexe.

Nous introduisons à présent le concept de chemin, qui jouera le rôle de base dans la construction d'une algèbre à partir d'un carquois et d'un corps donnés.

Définition 1.2.3. Un **chemin** p de **longueur** r de Q est une suite de r flèches $p = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ telle que $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \dots, r - 1$.

La longueur r d'un chemin $p = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r$ sera désignée par $|p|$. Nous pouvons étendre les notions de source et de but à un tel chemin p en posant $s(p) = s(\alpha_1)$ et $b(p) = b(\alpha_r)$. Si a est la source du chemin p et si b est son but, on peut écrire, de manière plus explicite, $p = (a \mid \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \mid b)$, ou encore $p : a \rightsquigarrow b$.

Par convention, un sommet a se nomme le **chemin trivial** (ou **chemin stationnaire**) de a vers a , et sa longueur est fixée à 0. On le note traditionnellement $\varepsilon_a = (a \parallel a)$, ou encore $\varepsilon_a : a \rightsquigarrow a$, mais ici il nous arrivera de le confondre avec le sommet a lui-même,

pour alléger le texte. Enfin, un chemin non trivial σ avec $s(\sigma) = b(\sigma)$ sera appelé un **cycle orienté**. L'ensemble des chemins du carquois Q est noté Σ_Q .

Exemple 1.2.4. Voici quelques exemples illustrant les concepts précédents.

1. Soit Q le carquois suivant : $a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c$. L'expression $\alpha\beta$ est un chemin, mais $\beta\alpha$ n'en est pas un. L'ensemble des chemins est $\Sigma_Q = \{a, b, c, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$.
2. Soit Q le carquois suivant : $a \curvearrowright \alpha$. L'ensemble de ses chemins est alors donné par $\Sigma_Q = \{a, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$.

On définit maintenant KQ comme étant le K -espace vectoriel ayant pour base Σ_Q . Ainsi, KQ est composé des combinaisons K -linéaires formelles de chemins de Q .

Les prochaines observations à l'endroit des chemins permettront de doter KQ d'une multiplication, lui conférant ainsi une structure d'algèbre. On remarque d'abord que la concaténation de chemins non triviaux p, q avec $b(p) = s(q)$ donne aussi un chemin pq . Par exemple, considérant le carquois suivant

$$\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \xrightarrow{\beta} \circ \xrightarrow{\gamma} \circ \xrightarrow{\delta} \circ,$$

on retrouve deux chemins $p = \alpha\beta$ et $q = \gamma\delta$ dont la concaténation $pq = (\alpha\beta)(\gamma\delta) = \alpha\beta\gamma\delta$ est aussi un chemin.

Ceci nous entraîne vers l'élaboration d'une opération de multiplication entre deux chemins p et q . On y parvient en écrivant d'abord $p = (a \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r \mid b)$ et $q = (c \mid \beta_1\beta_2 \cdots \beta_s \mid d)$ puis en posant

$$(a \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r \mid b)(c \mid \beta_1\beta_2 \cdots \beta_s \mid d) = \delta_{bc}(a \mid \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r\beta_1 \cdots \beta_s \mid d),$$

où δ_{bc} est le delta de Kronecker. Ainsi, de manière plus explicite, le produit de p et q est

calculé comme suit :

$$p \cdot q = \begin{cases} p & \text{si } q = b \text{ et } b(p) = b ; \\ q & \text{si } p = a \text{ et } s(q) = a ; \\ pq & \text{si } b(p) = s(q) ; \\ 0 & \text{si } b(p) \neq s(q). \end{cases}$$

Remarquons que les sommets (ou chemins stationnaires) sont des éléments idempotents pour cette multiplication, et que si $pq \neq 0$, alors $|pq| = |p| + |q|$.

En prolongeant alors cette multiplication par distributivité, KQ devient dotée d'une structure de K -algèbre associative, appelée **l'algèbre des chemins de Q sur K** .

Exemple 1.2.5. Le carquois Q constitué d'une boucle évoqué à l'exemple 1.2.4 admet pour base $\Sigma_Q = \{a, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \dots\}$. On voit alors aisément que KQ est isomorphe à l'algèbre commutative $K[x]$ des polynômes en une indéterminée x . En effet, le sommet a joue le rôle de l'unité de $K[x]$, tandis que la boucle α représente x .

Remarquons que Q_0 fournit un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux pour l'algèbre KQ . De plus, pour des sommets a et b , $a(KQ)b$ est le sous-espace de KQ des combinaisons linéaires de chemins allant de a vers b . Enfin, on peut montrer que l'algèbre KQ est connexe si et seulement si le carquois Q est lui-même connexe, puis que $K(Q^{\text{op}}) \cong (KQ)^{\text{op}}$ (voir [6]).

Nous sommes donc parvenus à construire une algèbre à partir d'un carquois. Au cours de la prochaine section, nous verrons qu'il est parfois possible d'effectuer le processus inverse, soit associer un carquois à une algèbre donnée.

1.3 Algèbre de carquois lié

Dans cette section, nous montrerons comment passer au quotient d'une algèbre de chemins modulo un idéal bilatère possédant certaines caractéristiques. Nous verrons éga-

lement que toute K -algèbre sobre de dimension finie sur un corps algébriquement clos peut être représentée par un carquois fini lié par des relations.

D'abord, nous indiquons comment construire le carquois associé à une algèbre.

Définition 1.3.1. Soient K un corps algébriquement clos et A une K -algèbre sobre, connexe et de dimension finie. Fixons $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ comme étant un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A . Le **carquois ordinaire** Q_A de A est défini comme suit :

1. l'ensemble des sommets $(Q_A)_0$ de Q_A est en correspondance bijective avec l'ensemble $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;
2. étant donnés deux sommets $a, b \in (Q_A)_0$, le nombre de flèches $\alpha : a \rightarrow b$ est donné par

$$\dim_K a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)b,$$

c'est-à-dire la dimension de la coiffe de $a(\text{rad } A)b$ en tant que K -espace vectoriel.

Remarquons qu'ayant supposé A de K -dimension finie, il s'ensuit que la dimension de $a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)b$ est toujours finie, quels que soient les sommets a et b choisis. Ainsi, Q_A est un carquois fini.

Nous noterons KQ^+ l'idéal bilatère de KQ engendré par l'ensemble Q_1 des flèches de Q . De plus, pour $n \geq 2$, n notera $(KQ^+)^n$ l'idéal bilatère engendré par les chemins de Q de longueur au moins n .

Définition 1.3.2. Un idéal bilatère I de KQ est dit **admissible** s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que $(KQ^+)^m \subseteq I \subseteq (KQ^+)^2$. Dans un tel cas, le couple (Q, I) est appelé un **carquois lié** et l'algèbre quotient KQ/I est appelée l'**algèbre du carquois lié** (Q, I) .

Remarquons qu'un idéal admissible I de KQ induit de manière évidente un idéal admissible I^{op} de KQ^{op} . On peut alors montrer que $KQ^{\text{op}}/I^{\text{op}} \cong (KQ/I)^{\text{op}}$ (voir [4]).

Les concepts que nous venons de définir nous mènent maintenant à un résultat fondamental en théorie des représentations des algèbres, dû à Gabriel [20]. Pour la démonstration, nous référons à [6, III.1.9].

Théorème 1.3.6 ([20]). *Soit K un corps algébriquement clos, A une K -algèbre sobre, connexe et de dimension finie. Il existe alors un carquois fini et connexe Q_A ainsi qu'un idéal admissible I de KQ_A tels que A soit isomorphe à KQ_A/I . \square*

Le carquois lié (Q_A, I) est appelé une **présentation** de A . Ainsi, toute K -algèbre de dimension finie peut se présenter comme une algèbre de carquois lié.

1.4 Représentations d'un carquois lié

La notion de carquois lié définie à la section précédente permet, comme nous l'avons vu, d'avoir une représentation visuelle de la structure de plusieurs algèbres. Nous verrons maintenant qu'elle peut aussi servir de gabarit pour construire les modules de type fini sur une algèbre. De cette façon, à partir d'une présentation (Q, I) d'une algèbre donnée A , nous parviendrons à construire la catégorie $\text{mod } A$ des modules de type fini sur A . La prochaine définition indique comment y arriver.

Définition 1.4.1. Soient K un corps et Q un carquois. Une **représentation**

$$M = ((M_a)_{a \in Q_0}, (\varphi_\alpha)_{\alpha \in Q_1})$$

de Q est obtenue de la manière suivante : à chaque sommet $a \in Q_0$ est associé un K -espace vectoriel M_a , et à chaque flèche $\alpha : a \rightarrow b$ est associée une application K -linéaire $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$.

Une telle représentation sera dite **finie** si chacun des M_i est de dimension finie.

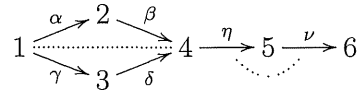
On définit de plus l'évaluation de M sur un chemin non trivial $p = (a \mid \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r \mid b)$ comme étant l'application K -linéaire

$$\varphi_p = \varphi_{\alpha_r} \circ \varphi_{\alpha_{r-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{\alpha_1} : M_a \rightarrow M_b.$$

On étend alors K -linéairement cette évaluation à n'importe quel élément de KQ^+ .

Une représentation M est dite **liée par la relation** ρ si l'application linéaire correspondante φ_ρ est nulle. Ainsi, si I est un idéal admissible de KQ , on dira que M est **liée par** I si $\varphi_\rho = 0$ pour tout $\rho \in I$. On l'appellera alors une **représentation de** (Q, I) . Bien sûr, il suffit que la représentation M soit liée par un ensemble de générateurs de I pour être liée par I .

Exemple 1.4.2. Reprenons le carquois lié (Q, I)



introduit précédemment, à l'exemple 1.3.5. Une représentation M de Q est donc liée par I si et seulement si elle satisfait $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha = \varphi_\delta \circ \varphi_\gamma$ et $\varphi_\nu \circ \varphi_\eta = 0$. Par exemple, la représentation suivante est liée par I ,

$$\begin{array}{ccccc} K & \begin{array}{l} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \end{array} & K^2 & \begin{array}{l} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{array} & K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & K, \end{array}$$

tandis que celle-ci ne l'est pas

$$\begin{array}{ccccc} K & \begin{array}{l} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \end{array} & K^2 & \begin{array}{l} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} \end{array} & K & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & K^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} & K. \end{array}$$

L'utilité de tels objets que sont les représentations d'un carquois lié (Q, I) n'est peut-être pas encore patente, mais nous constaterons, tout de suite après avoir défini la notion

de *morphismes de représentations*, que nous aurons formé une nouvelle catégorie très commode, qui s'avérera être un sosie de $\text{mod } KQ/I$.

Définition 1.4.3. Soient M et M' deux représentations sur K d'un même carquois lié (Q, I) . Un **morphisme de représentations** $f : M \rightarrow M'$ est une famille d'applications linéaires $(f_a : M_a \rightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$ satisfaisant à $\varphi'_\alpha \circ f_a = f_b \circ \varphi_\alpha$ pour toute flèche $\alpha : a \rightarrow b$ de Q .

Ainsi, un morphisme de représentations s'obtient au moyen d'applications linéaires compatibles avec la structure du carquois Q , en ce sens qu'elles préservent l'action des applications linéaires associées aux flèches du carquois.

La composition de tels morphismes est obtenue en prolongeant celle des applications linéaires. Ceci donne jour à la catégorie $\text{Rep}(Q, I)$ des représentations de Q sur K qui sont liées par I . Si l'on préfère se restreindre à celles d'entre elles qui sont de dimension finie, on parlera plutôt de la catégorie $\text{rep}(Q, I)$.

Nous aboutissons maintenant au théorème suivant, aussi dû à Gabriel [20], et tout aussi fondamental que le précédent en théorie des représentations des algèbres. Pour la démonstration, nous référons le lecteur à [6].

Théorème 1.4.4. *Soient K un corps algébriquement clos, Q un carquois fini et I un idéal admissible de Q . Il existe une équivalence entre les catégories $\text{Mod}(KQ/I)$ et $\text{Rep}(Q, I)$, qui se restreint à une équivalence entre les catégories $\text{mod } KQ/I$ et $\text{rep}(Q, I)$. \square*

Pour synthétiser, on rappelle qu'à toute K -algèbre A de dimension finie, sobre et connexe, avec K algébriquement clos, il est possible d'associer un carquois lié (Q_A, I) , nommé présentation de A . Le résultat précédent nous signale que l'étude des A -modules est équivalente à celle des représentations de la présentation (Q_A, I) , cette dernière disposant d'une interprétation visuelle relativement agréable. Dans ce qui suit, nous nous

permettrons donc librement de confondre $\text{Mod } A$ et $\text{Rep}(Q_A, I)$, ainsi que $\text{mod } A$ et $\text{rep}(Q_A, I)$.

Pour clore ce chapitre, nous rappellerons les principes de base d'une théorie établie pour nous assister dans l'étude des catégories de modules en focalisant sur les composantes élémentaires.

1.5 Théorie d'Auslander-Reiten

Dans les sections précédentes, nous avons vu comment représenter graphiquement une algèbre et un module sur cette algèbre. Cette section-ci sera dévolue à la représentation graphique de la catégorie des modules de type fini sur une algèbre donnée. Par souci de développement durable, nous récupérerons de nouveau la notion de carquois pour y colliger plusieurs caractéristiques d'une telle catégorie, tout en les rendant malléables aux fins de diverses manipulations algébriques.

C'est le concept de suite presque scindée qui constitue la pierre angulaire de cette théorie. Il s'agit en effet de la clé de voûte sur laquelle s'appuie l'assemblage des composantes élémentaires et grâce à laquelle on construit et décortique une catégorie de modules de type fini sur une algèbre. Si on vulgarise, les suites presque scindées forment en quelque sorte le code génétique d'une algèbre.

Nous fixons encore ici A une R -algèbre d'Artin. En vertu du théorème de décomposition unique, attribué à Krull, Schmidt et Remak [2], les modules non nuls de type fini sur une algèbre d'Artin admettent une unique décomposition en somme directe de sous-modules **indécomposables** (c'est-à-dire non nuls et n'admettant pas de facteur direct propre). Ces derniers sont donc les candidats tout désignés pour être nos sujets d'étude. Si nous interprétons ceux-ci comme les objets élémentaires de la catégorie sous examen,

nous devons trouver une notion compatible de morphisme élémentaire, afin d'avoir sous la main un ensemble de représentants, à la fois restreint et fidèle, permettant de décoder le plus efficacement possible la structure interne de la catégorie $\text{mod } A$.

La définition suivante nous fournit un premier pas vers la notion souhaitée. Avant de l'énoncer, nous rappelons qu'un morphisme est appelé une **section** ou une **rétraction** lorsqu'il admet un inverse à gauche ou un inverse à droite, respectivement. Dans un cas comme dans l'autre, on dit que ce morphisme est **scindé**.

Définition 1.5.1. Soient L, M et N des A -modules de type fini. On dit qu'un morphisme $f : L \rightarrow M$ est **minimal à gauche** si tout $h \in \text{End}_A M$ tel que $h \circ f = f$ est un automorphisme. On dira d'autre part que f est **presque scindé à gauche** s'il n'est pas une section et qu'il factorise tout morphisme de domaine L qui n'est pas une section. On définit dualement les concepts de morphismes **minimal à droite** et **presque scindé à droite**.

Nous en arrivons maintenant à donner corps au concept de composante irréductible d'un morphisme.

Définition 1.5.2. Soient A une R -algèbre et $M, N \in \text{mod } A$. Un morphisme $f : M \rightarrow N$ est dit **irréductible** s'il n'est pas scindé et si pour toute factorisation $f = f_1 \circ f_2$, le premier facteur f_1 est une rétraction ou le second facteur f_2 est une section.

En particulier, puisque tout morphisme se factorise par son image, on déduit qu'un morphisme irréductible est soit un monomorphisme propre, soit un épimorphisme propre. On peut montrer qu'un morphisme minimal et presque scindé (à gauche ou à droite) est toujours irréductible. Voyons en quoi cette notion possède les qualités cherchées.

Proposition 1.5.3. Soient A une R -algèbre et $L, M, N \in \text{mod } A$, avec L et N indécomposables.

1. Un morphisme $f : L \rightarrow M$ est irréductible si et seulement s'il existe un morphisme $f' : L \rightarrow M'$ tel que le morphisme induit $\begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} : L \rightarrow M \oplus M'$ soit minimal et presque scindé à gauche.
2. Un morphisme $g : M \rightarrow N$ est irréductible si et seulement s'il existe un morphisme $g' : M' \rightarrow N$ tel que le morphisme induit $[g \ g'] : M \oplus M' \rightarrow N$ soit minimal et presque scindé à droite. \square

Grâce à ces nouveaux concepts, nous pouvons énoncer le théorème qui est à la base de la théorie d'Auslander-Reiten. Nous référons le lecteur intéressé aux détails à [6, V.1]

Théorème 1.5.4. *Soient A une R -algèbre d'Artin et $N \in \text{mod } A$ indécomposable et non projectif. Il existe alors une suite exacte courte non scindée*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

dite *suite presque scindée*, qui est telle que

1. L et N sont indécomposables ;
2. f est minimal et presque scindé à gauche ;
3. g est minimal et presque scindé à droite.

De plus, cette suite est *uniquement déterminée par N* , à isomorphisme près. *Dualement, étant donné $L \in \text{mod } A$ indécomposable et non injectif, une telle suite existe aussi et, le cas échéant, est également uniquement déterminée, à isomorphisme près, par L .* \square

L'unicité à isomorphisme près d'une suite presque scindée nous permet d'associer sans ambiguïté à tout $M \in \text{mod } A$ indécomposable et non projectif, un A -module indécomposable non injectif de type fini noté τM . On peut en outre obtenir τM en calculant le noyau de

$$\nu P_0 \xrightarrow{\nu d} \nu P_1$$

où $\nu = \text{DHom}_A(A, -)$ est le foncteur de Nakayama et $P_1 \xrightarrow{d} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est une présentation projective minimale de M . Le module τM est appelé le **translaté d'Auslander-Reiten** de M . Dans le cas où P est projectif, on a $\tau P = \ker \nu d = 0$. De manière duale, on associe à chaque $L \in \text{mod } A$ indécomposable et non injectif un unique A -module indécomposable non projectif de type fini que l'on note $\tau^{-1}L$ et on a $\tau^{-1}I = 0$ lorsque I est injectif. Enfin, on peut définir la τ -orbite d'un module $M \in \text{mod } A$ comme étant la famille $(\tau^m M)_{m \in \mathbb{Z}}$. On dira alors que M est τ -**périodique** s'il existe un $m_0 \geq 1$ tel que $M \cong \tau^{m_0} M$, et τ -**invariant** si on peut prendre $m_0 = 1$.

Nous rappelons maintenant brièvement la notion de morphisme de radical, qui est étroitement reliée à celle de morphisme irréductible. Un morphisme de A -modules $f : M \rightarrow N$ est appelé **morphisme de radical** s'il n'existe pas de A -module indécomposable X accompagné de morphismes $g : X \rightarrow M$ et $h : N \rightarrow X$ tels que hfg soit un isomorphisme. On définit alors $\text{rad}_A(M, N)$ comme étant le K -espace vectoriel formé de tous les morphismes de radical de M vers N . On peut montrer que ceci induit en fait un idéal de la catégorie $\text{mod } A$. Remarquons que lorsque M et N sont indécomposables, $\text{rad}_A(M, N)$ coïncide avec les morphismes non inversibles de M vers N . Il est aussi possible de définir récursivement

$$\text{rad}_A^{n+1}(M, N) = \sum_{L \in \text{mod } A} \text{rad}_A(M, L) \text{rad}_A^n(L, N).$$

Ces rappels étant faits, nous pouvons énoncer le lien tiré de [8] (dont la preuve se retrouve aussi dans [6, V.7.3]) mettant en relation les notions de morphisme de radical et de morphisme irréductible.

Proposition 1.5.5. *Soient A une R -algèbre d'Artin et $f : M \rightarrow N$ un morphisme entre modules indécomposables de $\text{mod } A$. Alors f est irréductible si et seulement si*

$$f \in \text{rad}_A(M, N) \setminus \text{rad}_A^2(M, N). \quad \square$$

Ce résultat nous mène à définir le bimodule des morphismes irréductibles entre deux A -modules indécomposables M et N comme étant le quotient

$$\text{Irr}_A(M, N) = \frac{\text{rad}_A(M, N)}{\text{rad}_A^2(M, N)}.$$

Cette dernière notation fait donc le pont avec le travail effectué lors de la construction du carquois ordinaire d'une algèbre. Nous avons maintenant réuni tous les ingrédients requis pour l'élaboration du puissant instrument d'étude des catégories de modules qu'est le carquois d'Auslander-Reiten.

Définition 1.5.6. Soit A une K -algèbre sobre, connexe et de dimension finie sur un corps algébriquement clos K . Le **carquois d'Auslander-Reiten** de $\text{mod } A$, noté Γ_A , est défini comme suit :

1. les sommets de Γ_A sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables de $\text{mod } A$, et sont notés $[M]$ pour un indécomposable M de $\text{mod } A$;
2. pour deux sommets $[M]$ et $[N]$ de Γ_A , les flèches $[M] \rightarrow [N]$ sont en correspondance bijective avec les vecteurs d'une base fixée du K -espace vectoriel $\text{Irr}_A(M, N)$.

Nous achevons maintenant ce chapitre d'introduction. Nous n'avons manifestement couvert qu'une infime partie des notions et résultats reliés aux carquois et à la théorie des représentations des algèbres. Néanmoins, un portrait des principaux éléments a pu être brossé et ceci devrait suffire à la bonne compréhension des prochains chapitres. Le lecteur qui désirerait quand même approfondir pourra se sustenter en consultant notamment les excellents ouvrages [6] et [4].

CHAPITRE 2

Algèbres bisérielles spéciales

Après avoir forgé plusieurs outils de manipulation algébrique dans le premier chapitre, nous exposerons ici la structure des algèbres que nous souhaitons étudier et soumettre à certaines conjectures. Notre motivation à étudier les algèbres bisérielles spéciales est basée sur les deux aspects suivants. D'abord, comme elles sont toutes dociles [53, 2.3] et que leurs représentations sont aujourd'hui bien connues (grâce, entre autres, aux résultats de [11] et [53]), elles forment un échantillon naturel pour mettre au point un contrôle préliminaire des conjectures en théorie des représentations. En second lieu, elles jouent un rôle important dans la théorie des représentations modulaires des groupes finis, qui remonte à la classification des modules de Harish-Chandra indécomposables sur le groupe de Lorentz réalisée par Gelfand et Ponomarev [22]. Elles surviennent aussi dans plusieurs autres situations, par exemple les algèbres de Nakayama [36], les blocs d'algèbres de groupe admettant un groupe de défaut cyclique ou diédral (voir [29], [31], [42], [13] et [14]) ainsi que les algèbres préinclinées de types \mathbb{A}_n et $\tilde{\mathbb{A}}_n$ (voir [5] et [3]).

Dans ce chapitre, nous allons définir en détail ce qu'est une algèbre bisérielle spéciale. Nous allons ensuite introduire les concepts de module de corde et de module de

bande, qui permettent de classifier tous les modules indécomposables sur une algèbre bisérielle spéciale. Nous parviendrons par la suite à obtenir de façon assez élégante tous les morphismes entre modules de corde. Nous serons aussi en mesure d'exprimer de manière combinatoire les syzygies d'un module de corde donné. Enfin, nous accorderons une attention plus particulière à la classification des algèbres bisérielles spéciales locales.

Tout au long de ce chapitre, on fixe K comme étant un corps algébriquement clos.

2.1 Définitions et exemples

Le concept d'algèbre bisérielle spéciale remonte à Skowroński et Waschbüsch [51], alors qu'ils tentaient de classifier les algèbres bisérielles de représentation finie. Ces algèbres forment en fait une sous-classe de la classe des algèbres dites **bisérielles**, introduites par Fuller [18] et constituant une généralisation naturelle des algèbres de Nakayama.

Définition 2.1.1. Un carquois lié (Q, I) est **bisériel spécial** si :

1. pour tout sommet $a \in Q_0$, a est la source d'au plus deux flèches et le but d'au plus deux flèches ;
2. pour toute flèche $\beta : a \rightarrow b$ de Q , il existe au plus une flèche α avec $b(\alpha) = a$ telle que $\alpha\beta \notin I$, et il existe au plus une flèche γ avec $s(\gamma) = b$ telle que $\beta\gamma \notin I$;
3. I est admissible.

Dans ce cas, on dit que A est une **algèbre bisérielle spéciale** si elle admet une présentation bisérielle spéciale.

Nous allons maintenant rappeler certaines propriétés de ces algèbres. Si (Q, I) est un carquois bisériel spécial, l'idéal I admet alors un ensemble de générateurs constitué uniquement de relations monomiales ou binomiales. On peut aussi montrer que tout sommet

du carquois Q est source d'au plus une relation binomiale. Nous verrons d'ailleurs que les relations binomiales correspondent aux modules indécomposables projectifs-injectifs non unisériels de KQ/I . Ceci nous indique aussi qu'une relation binomiale de (Q, I) de la forme $\rho = p - \lambda q$ est uniquement déterminée par les chemins p et q qui la composent. C'est pourquoi nous désignerons désormais une relation binomiale par sa **paire binomiale** (p, q) , et nous appellerons p et q les **composantes** de cette relation (ou de cette paire). Pour obtenir ces résultats de manière plus explicite, on pourra consulter [51] et [53], par exemple.

2.2 Modules indécomposables

Tel qu'indiqué précédemment, la description des modules indécomposables sur une algèbre bisérielle spéciale a été obtenue par Wald et Waschbüsch [53], s'inspirant de la classification des modules de Harish-Chandra indécomposables sur le groupe de Lorentz réalisée par Gelfand et Ponomarev [22]. D'autres résultats étroitement reliés ont été obtenus dans [11].

À chaque flèche $\alpha : a \rightarrow b$ du carquois Q , on associe un inverse formel $\alpha^{-1} : b \rightarrow a$. Une **marche** de longueur $n \geq 1$ dans Q est une composition formelle $w = c_1 c_2 \cdots c_n$ de flèches ou d'inverses formels de flèches (c'est-à-dire que $c_i \in Q_1$ ou $c_i^{-1} \in Q_1$ pour $i = 1, 2, \dots, n$) telle que $b(c_i) = s(c_{i+1})$ pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Les c_i sont appelés les **arêtes** de w , c_1 étant l'**arête initiale** et c_n , l'**arête terminale** de w . On écrit $|w|$ pour désigner la longueur de w . Si l'on considère le carquois lié opposé $(Q^{\text{op}}, I^{\text{op}})$, remarquons qu'en définissant $(\alpha^{-1})^{\text{op}} = (\alpha^{\text{op}})^{-1}$ on peut associer à w la marche $w^{\text{op}} = c_1^{\text{op}} c_2^{\text{op}} \cdots c_n^{\text{op}}$ de Q^{op} . Il s'agit d'ailleurs d'une correspondance bijective.

On pose $s(w) = s(c_1)$ et $b(w) = b(c_n)$ et on dit que w est une marche de $s(w)$ vers $b(w)$.

Pour chaque sommet a de Q_0 , on définit une marche de longueur nulle, appelée **marche triviale**, qui est le chemin stationnaire ε_a . Une marche $w = c_1 c_2 \dots c_n$ est dite **réduite** si w est triviale ou si $c_i \neq c_{i+1}^{-1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. On note $w^{-1} = c_n^{-1} \dots c_2^{-1} c_1^{-1}$.

Définition 2.2.1. Soit (Q, I) un carquois lié bisériel spécial. Une marche réduite $w = c_1 c_2 \dots c_n$ de Q est une **corde** si tout chemin contenu dans w n'est ni une relation monomiale ni une composante d'une paire binomiale de (Q, I) . On note \mathcal{C} (ou plus explicitement $\mathcal{C}(Q, I)$) l'ensemble de toutes les cordes sur (Q, I) .

Remarquons que toute corde w peut s'écrire, en regroupant les successions de flèches et les successions d'inverses de flèches, sous la forme

$$w = p_1^{-1} q_1 p_2^{-1} q_2 \dots p_{r-1}^{-1} q_{r-1} p_r^{-1} q_r,$$

avec $r \geq 1$ et p_i, q_i des chemins non triviaux, sauf peut-être pour p_1 et q_r .

Il existe aussi une notion de **bande**, similaire à celle de corde, mais nous omettrons de la rappeler ici, puisqu'elle n'interviendra pas de manière importante dans la suite.

Si $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale telle que I est un idéal monomial, A est appelée une **algèbre de corde**. Remarquons qu'on peut facilement associer une algèbre de corde à n'importe quel carquois lié (Q, I) . Il suffit en effet de construire l'idéal \tilde{I} engendré par tous les monômes composant les relations de I . L'algèbre $\tilde{A} = KQ/\tilde{I}$ ainsi obtenue est une algèbre de corde, et correspond au quotient de l'algèbre KQ/I par l'idéal \tilde{I}/I . Aussi, une marche réduite $w = p_1^{-1} q_1 p_2^{-1} q_2 \dots p_{r-1}^{-1} q_{r-1} p_r^{-1} q_r$ est une corde si pour aucun des p_i et q_j n'est contenu dans \tilde{I} .

Une corde p est dite **sérielle** si elle est un chemin et $s(p)$ n'est le sommet de départ d'aucune relation binomiale. D'autre part, on dit qu'une corde w **commence** ou **termine** dans un **creux** s'il n'existe pas de flèche γ telle que $\gamma^{-1}w$ ou $w\gamma$ soit une corde, respectivement.

Il est possible d'associer à chaque corde w de (Q, I) un module $M(w)$ sur l'algèbre KQ/I , appelé un **module de corde**. Ce concept a été obtenu des techniques de classification des modules indécomposables sur une algèbre de groupe donnée développées par Gelfand et Ponomarev (voir [22]).

Soit w une corde. On rappelle ici la construction de $M(w)$:

Si $w = c_1 c_2 \dots c_n$, on se fixe une K -base $\{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$ et, pour $i = 1, 2, \dots, n + 1$ on pose $U_i = Kz_i$. Ensuite, pour $i = 1, 2, \dots, n$, on pose U_{c_i} comme étant l'application $z_i \mapsto z_{i+1}$ si $c_i \in Q_1$ ou plutôt $z_{i+1} \mapsto z_i$ si $c_i^{-1} \in Q_1$. On définit alors une représentation $(M(w)_a, M(w)_a)$ de A de la manière suivante : pour un sommet a , $M(w)_a$ est la somme directe des espaces vectoriels U_i tels que $s(c_i) = a$ avec l'espace vectoriel U_n si $b(c_n) = a$. Donc si a n'apparaît pas sur w , on a $M(w)_a = 0$. Pour une flèche α , $M(w)_\alpha$ est la somme directe des applications U_{c_i} telles que $c_i \in \{\alpha, \alpha^{-1}\}$. Ainsi, $M(w)_\alpha$ est l'application nulle si α n'apparaît dans w .

La famille ordonnée $\{z_1, z_2, \dots, z_{n+1}\}$ est appelée la **base canonique** de $M(w)$. Remarquons que $M(w^{\text{op}})$ est un A^{op} -module ou, de manière équivalente, un A -module à gauche.

Il existe aussi une méthode similaire pour construire une infinité de modules à partir d'une bande donnée. On peut vérifier (voir [21]) que tout module de corde ou de bande est nécessairement indécomposable.

Pour des cordes w, w' , on écrit $w \sim w'$ si $w' \in \{w, w^{-1}\}$. Il est facile de voir que ceci donne une relation d'équivalence sur les cordes. De plus, on peut montrer que $M(w) \cong M(w')$ si et seulement si $w \sim w'$. Ainsi, l'orientation d'une corde n'affecte pas le module de corde associé. Butler et Ringel ([11]) ont d'ailleurs formalisé ceci en indiquant comment définir une certaine orientation sur les marches, mais nous l'omettrons ici, puisqu'elle n'apporterait pas d'éclaircissement notable dans notre contexte. Remarquons enfin que

si $w = \varepsilon_a$ est le chemin trivial en a , on a alors $M(w) \cong S(a)$, le A -module simple en a .

Nous allons maintenant déterminer une représentation et une K -base du module projectif indécomposable $P(a)$ associé à un sommet $a \in Q_0$. D'une part, si la corde a est sérielle, alors il existe des chemins p et q , tous deux de source a , tels que $p^{-1}q$ soit une corde qui commence et termine dans un creux. Dans ce cas, $P(a) = M(p^{-1}q)$. D'autre part, si ε_a n'est pas sériel, alors il existe une relation binomiale $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_r - \lambda\beta_1\beta_2 \cdots \beta_s$ de source a , où les α_i, β_j sont des flèches pour $i = 1, 2, \dots, r$ et $j = 1, 2, \dots, s$. Alors, $P(a)$ admet pour K -base la famille ordonnée $\{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s\}$, où $a_i = s(\alpha_i)$ et $b_j = b(\beta_j)$. On l'appelle la **base canonique** de $P(a)$. On définit maintenant l'action d'une flèche arbitraire γ sur cette base :

$$b_j \bar{\gamma} = \begin{cases} b_{j+1} & \text{si } \gamma = \beta_{j+1} \text{ avec } 1 \leq j < s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$a_i \bar{\gamma} = \begin{cases} b_1 & \text{si } i = 1 \text{ et } \gamma = \beta_1, \\ a_{i+1} & \text{si } 1 \leq i < r \text{ et } \gamma = \alpha_i, \\ \lambda b_s & \text{si } i = r \text{ et } \gamma = \alpha_r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit alors que a_1 est le seul élément de base admettant une classe non nulle dans la coiffe de $P(a)$, tandis que b_s engendre le socle de $P(a)$.

Grâce à la théorie des revêtements de carquois (voir [35],[21]), on parvient à classifier complètement les modules indécomposables sur une algèbre de corde. En effet, l'étude de la catégorie de modules sur une algèbre bisérielle spéciale peut souvent se faire à partir de représentations du carquois de recouvrement, parfois plus facilement manipulable que le carquois original. À la lumière de [53] et [11], il s'avère que les modules indécomposables et non projectifs-injectifs sur une algèbre bisérielle spéciale coïncident exactement avec les notions de modules de corde et de bande. D'autre part, on apprend dans [53] que tout indécomposable N correspondant à un module de bande est τ -invariant, où τ est

la translation d'Auslander-Reiten définie à la section 1.5. Cette dernière remarque sera utile au chapitre 4.

2.3 Morphismes entre modules indécomposables

Maintenant, pour poursuivre cette étude, il nous faudra aussi déterminer les morphismes entre modules de corde.

Pour décrire ces morphismes, nous utiliserons les résultats de Crawley-Boevey [12] et Krause [30] tels que reformulés par Schröer dans [44], [45], [46] et [47].

Pour une corde w , on définit $\mathcal{T}(w)$ comme étant l'ensemble des triplets de cordes (d, e, f) tels que $def = w$, qu'on appelle **trisections de w** .

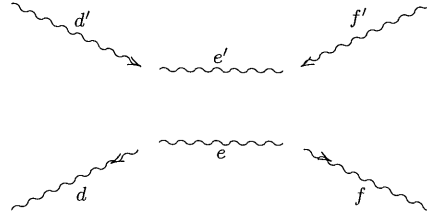
Définition 2.3.1. Soient \mathcal{Q} un carquois et w une marche de \mathcal{Q} . Une trisection (d, e, f) de w telle que ni d ni f^{-1} ne se terminent par une flèche est appelée trisection de w **en corde quotient**. Dualement, on appelle (d, e, f) une trisection de w **en sous-corde** lorsqu'aucune de f et d^{-1} ne commence par une flèche.

Ces deux notions permettront de décrire tous les sous-modules et modules quotients d'un module de corde $M(w)$ donné. En effet, on peut montrer que si L est un sous-module indécomposable de $M(w)$, alors il existe une trisection de w en sous-corde (d, e, f) telle que $M(e) \cong L$. De la même façon, pour chaque quotient $M(w)/N$ indécomposable, on peut trouver une trisection de w en corde quotient (d', e', f') telle que $M(e') \cong M(w)/N$. Nous allons maintenant voir comment ceci permet de décrire les morphismes entre modules indécomposables.

Notons $\overline{\mathcal{T}}(w)$ l'ensemble des trisections en corde quotient de w et $\underline{\mathcal{T}}(w)$, l'ensemble des trisections en sous-corde de w . Pour des cordes w et w' , un couple $((d, e, f), (d', e', f')) \in$

$\overline{\mathcal{T}}(w) \times \underline{\mathcal{T}}(w')$ sera dit **admissible** si $e \sim e'$. Pour alléger le texte, on écrira $\begin{pmatrix} d' & e' & f' \\ d & e & f \end{pmatrix}$ pour désigner un tel couple admissible, et on notera $\mathcal{A}(w, w')$ l'ensemble des couples admissibles de $\overline{\mathcal{T}}(w) \times \underline{\mathcal{T}}(w')$.

On peut visualiser un couple admissible de la façon suivante :



Maintenant, à chaque élément $x = \begin{pmatrix} d' & e' & f' \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(w, w')$, on associe un morphisme $f_x : M(w) \longrightarrow M(w')$, appelé **application-graphe**, que l'on construit de la manière suivante. Notons d'abord $\{z_0, z_2, \dots, z_n\}$ et $\{z'_0, z'_2, \dots, z'_m\}$ les bases canoniques respectives de $M(w)$ et $M(w')$. Si $e' = e$,

$$f_x(z_{|d|+i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } -|d| \leq i < 0 ; \\ z'_{|d'|+i} & \text{si } 0 \leq i \leq |e| ; \\ 0 & \text{si } |e| < i \leq |w|. \end{cases}$$

Dans ce cas, on dira que f_x est **covariante**. Si on a plutôt $e' = e^{-1}$, on applique d'abord l'isomorphisme $M(w) \cong M(w^{-1})$ (ce qui correspond à inverser la numérotation des éléments de la base canonique de $M(w)$) avant d'appliquer l'application K -linéaire f_x définie ci-haut. Dans ce cas, on dira que f_x est **contravariante**.

Soient w, w' des cordes et $x = \begin{pmatrix} d' & e' & f' \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(w, w')$. On considère alors l'application-graphe associée $f_x : M(w) \rightarrow M(w')$. En vertu du théorème de factorisation canonique,

on a le diagramme commutatif suivant, où \bar{f}_x est un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M(w) & \xrightarrow{f_x} & M(w') \\ \downarrow & & \uparrow \\ \frac{M(w)}{\text{Ker } f_x} & \xrightarrow{\bar{f}_x} & \text{Im } f_x \end{array} .$$

Remarquons que les composantes centrales e , et e' de x représentent respectivement la coimage $M(w)/\text{Ker } f_x$ et l'image $\text{Im } f_x$ de l'application-graphe associée f_x .

Il a été démontré par Crawley-Boevey [12] que les applications-graphes constituent une base $\{f_x \mid x \in \mathcal{A}(w, w')\}$ du K -espace vectoriel $\text{Hom}_A(M(w), M(w'))$.

Considérons le groupe abélien libre $\mathbb{Z}\mathcal{C}$ engendré par les cordes du carquois lié (Q, I) . Remarquons qu'il est possible de lui adjoindre une structure de catégorie additive, où les objets sont les cordes, et les morphismes entre deux sommets w et w' sont donnés par les combinaisons \mathbb{Z} -linéaires de couples admissibles $\mathcal{A}(w, w')$. Considérant la sous-catégorie additive $\text{add}M(\mathcal{C})$ de $\text{mod } KQ/I$ engendrée par les modules de corde, on peut construire une équivalence

$$M : \quad \mathbb{Z}\mathcal{C} \longrightarrow \text{add}M(\mathcal{C})$$

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i=1}^r n_i w_i & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{i=1}^r M(w_i)^{n_i} \\ \downarrow x & \xrightarrow{\quad} & \downarrow f_x \\ \sum_{j=1}^s m_j w'_j & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{j=1}^s M(w'_j)^{m_j} \end{array} .$$

Maintenant, nous introduisons une dernière notion qui sera utilisée pour appliquer notre description combinatoire des morphismes à l'étude des groupes d'auto-extensions d'un module de corde.

Définition 2.3.2. Soient (Q, I) un carquois lié et w, w' deux cordes. Un couple

$$x = \left(\begin{array}{c|c|c} d' & e' & f' \\ \hline d & e & f \end{array} \right) \in \mathcal{A}(w, w')$$

et l'application associée f_x sont **élagués à droite** si $|d| = 0 = |d'|$ et $e' = e$ ou $|d| = 0 = |f'|$ et $e' = e^{-1}$, et ils sont **élagués à gauche** si $|f| = 0 = |f'|$ et $e' = e$ ou $|f| = 0 = |d'|$ et $e' = e^{-1}$.

On s'intéresse maintenant au comportement des applications-graphes lorsqu'on les compose. Le prochain lemme nous révélera quelques propriétés intéressantes énoncées sans preuve dans [47, 2.2].

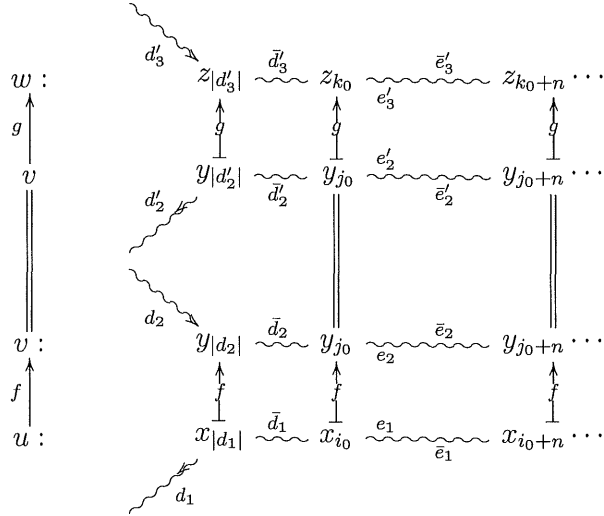
Lemme 2.3.3. Soient u, v et w des cordes et $f : M(u) \rightarrow M(v)$, $g : M(v) \rightarrow M(w)$ des applications-graphes entre les modules de corde correspondants. Supposons que $g \circ f \neq 0$. On a alors les propriétés suivantes :

1. gf est une application-graphe ;
2. si gf est élaguée à gauche (ou élaguée à droite), alors g et f sont toutes deux élaguées à gauche (ou élaguées à droite, respectivement) ;
3. si f et g sont toutes deux covariantes et élaguées à gauche (ou élaguées à droite), alors gf est élaguée à gauche (ou élaguée à droite, respectivement). Il en est de même lorsque f et g sont toutes deux contravariantes.

DÉMONSTRATION : Notons $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_s\}$ et $\{z_0, z_1, \dots, z_t\}$ les bases canoniques respectives de $M(u)$, $M(v)$ et $M(w)$. Sans perte de généralité, nous supposons que les cordes u, v et w sont orientées de façon à ce que les applications f et g soient covariantes par rapport aux bases canoniques. Soient

$$x = \left(\begin{array}{c|c|c} d_2 & e_2 & f_2 \\ \hline d_1 & e_1 & f_1 \end{array} \right) \in \mathcal{A}(u, v) \quad \text{et} \quad x' = \left(\begin{array}{c|c|c} d'_3 & e'_3 & f'_3 \\ \hline d'_2 & e'_2 & f'_2 \end{array} \right) \in \mathcal{A}(v, w)$$

les couples tels que $f = f_x$ et $g = f_{x'}$. Afin de visualiser la situation, considérons le schéma suivant, dont les notations seront explicitées au cours des prochaines lignes :



Puisque $gf \neq 0$, il existe un entier minimal i_0 avec $|d_1| \leq i_0 \leq |d_1 e_1|$ tel que $gf(x_{i_0}) \neq 0$. Ainsi, posant $y_{j_0} = f(x_{i_0})$ et $z_{k_0} = g(y_{j_0})$, on a $j_0 - |d_2| = i_0 - |d_1|$ et $k_0 - |d'_3| = j_0 - |d'_2|$, puisque f et g sont des applications-graphes. D'autre part, il existe un entier maximal $n \geq 0$ avec $i_0 + n \leq |d_1 e_1|$ tel que $gf(x_{i_0+n}) \neq 0$. En adaptant les arguments mentionnés ci-haut, on arrive à ce que $f(x_{i_0+n}) = y_{j_0+n}$ et $g(y_{j_0+n}) = z_{k_0+n}$. Puisque f et g sont des applications-graphes et par choix de i_0 et m , il s'ensuit que $gf(x_{i_0+m}) = z_{k_0+m}$ lorsque m parcourt $\{0, 1, \dots, n\}$, et que gf s'annule sur tous les autres éléments de la base canonique de $M(u)$. On peut donc factoriser $u = d_1 \bar{d}_1 \bar{e}_1 \bar{f}_1 f_1$, où \bar{e}_1 admet pour source et but les sommets correspondant aux éléments x_{i_0} et x_{i_0+n} , respectivement, de la base canonique de $M(u)$. De la même façon, on peut factoriser $w = d'_3 \bar{d}'_3 \bar{e}'_3 \bar{f}'_3 f'_3$, où \bar{e}'_3 admet pour source et but les sommets correspondant aux éléments z_{k_0} et z_{k_0+n} , respectivement, de la base canonique de $M(w)$.

Puisque $e_1 = e_2$ et $\bar{e}_1 = \bar{e}_2$, il est clair que $\bar{d}_1 = \bar{d}_2$. Or la minimalité de i_0 force \bar{d}_2 à

être triviale dès que \bar{d}_1 ne l'est pas. Il en découle la chaîne d'égalités

$$d_2\bar{d}_1 = d_2\bar{d}_2 = d'_2\bar{d}_2 = d'_2.$$

Ainsi, \bar{d}_1 ne se termine pas par une flèche, puisqu'il en est ainsi de d'_2 . Comme d_1 ne se termine pas par une flèche, on peut conclure qu'il en est de même pour le produit $d_1\bar{d}_1$. De manière duale, on montre que \bar{f}_1f_1 est trivial ou commence par une flèche. On obtient donc la trisection de u en corde quotient $(d_1\bar{d}_1, \bar{e}_1, \bar{f}_1f_1) \in \overline{\mathcal{T}}(u)$. En appliquant de nouveau cet exercice, il vient $(d'_3\bar{d}'_3, \bar{e}'_3, \bar{f}'_3f'_3) \in \underline{\mathcal{T}}(w)$. On conclut donc que gf est l'application-graphe correspondant au couple $\left(\begin{array}{c|c} d'_3\bar{d}'_3 & \bar{e}'_3 \\ \hline d_1\bar{d}_1 & \bar{e}_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \bar{f}'_3f'_3 \\ \bar{f}_1f_1 \end{array} \right) \in \mathcal{A}(u, w)$.

Maintenant, si l'on suppose que gf est élaguée, disons à gauche, alors $d_1\bar{d}_1$ et $d'_3\bar{d}'_3$ sont triviaux. Ainsi, $d'_2 = d_2\bar{d}_1 = d_2$. Il en découle que d_2 et d'_2 doivent être triviaux, car autrement, l'un se termine par une flèche, et l'autre, par l'inverse d'une flèche, ce qui contredirait leur égalité. Donc, f et g sont aussi élaguées à gauche. Les autres parties s'obtiennent de manière similaire. \square

Ainsi, l'étude des morphismes entre modules de corde pourra se faire à partir des applications-graphes et en tirant profit de leur comportement relativement agréable pour la composition. Nous verrons plus tard comment elles faciliteront l'étude des groupes d'extensions entre modules de corde.

2.4 Syzygies des modules de corde

Commençons par fixer (Q, I) un carquois lié bisériel spécial. Afin de décrire les syzygies de modules de corde, nous devons d'abord établir une notion de corde-syzygie associée à une corde. Ceci nous mène aux définitions suivantes, formalisant une méthode intuitive de calcul du noyau de la couverture projective minimale d'un module de corde.

Cette méthode consiste en quelque sorte à compléter la représentation du module de corde étudié jusqu'à l'obtention des représentations des projectifs indécomposables associés à sa coiffe. Les « retailles de modules projectifs » ainsi obtenues fournissent, après élimination des flèches aux extrémités, la première syzygie du module. C'est ce que nous souhaitons expliciter dans le cadre de cette section.

Soit w une corde donnée par

$$w = p_1^{-1}q_1 \cdots p_r^{-1}q_r,$$

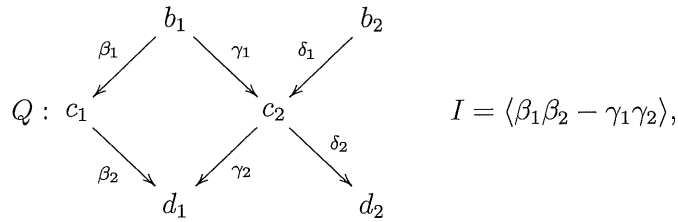
avec $r \geq 1$ et les p_i, q_i des chemins non triviaux, sauf peut-être pour p_1 et q_r . Supposons que $M(w)$ n'est pas projectif. Notre prochaine tâche consiste à compléter les chemins p_i et q_i en des cordes se terminant dans des creux, ce qui correspond à calculer la couverture projective d'une corde. Nous procéderons en trois étapes.

1. Dans le cas où p_1 est non sériel, on fixe α_1 la flèche et u_1, v_1 les chemins tels que $(p_1\alpha_1u_1, q_1v_1)$ est une paire binomiale. Dans le cas où p_1 est sériel, on note v_1 le chemin tel que q_1v_1 soit une corde terminant dans un creux. De plus, si $p_1^{-1}q_1$ ne commence pas dans un creux, on note α_1 la flèche et u_1 le chemin tels que $u_1^{-1}\alpha_1^{-1}p_1^{-1}q_1$ soit une corde qui commence dans un creux. Autrement, on pose $\alpha_1 = u_1 = b(p_1)$.
2. Soit maintenant i un entier tel que $1 < i < r$. Si p_i est non sériel, alors on note u_i, v_i les chemins tels que (p_iu_i, q_iv_i) soit une paire binomiale. Autrement, u_i, v_i sont fixés comme étant les chemins tels que p_iu_i et q_iv_i soient des cordes qui se terminent dans un creux.
3. Finalement, dans le cas où p_r est non sériel, on note α_r la flèche et u_r, v_r les chemins tels que tel que $(p_ru_r, q_r\alpha_rv_r)$ soit une paire binomiale. Dans le cas où p_r est sériel, soit u_r le chemin tel que p_ru_r soit une corde qui termine dans un creux. De plus, si $p_r^{-1}q_r$ ne se termine pas dans un creux, on note α_r et v_r la flèche et le chemin

tels que $p_r^{-1}q_r\alpha_r v_r$ soit une corde qui se termine dans un creux. Autrement, on pose $\alpha_r = v_r = b(q_r)$.

Pour tout $0 < i < r$, on pose $w_i = v_i^{-1}u_{i+1}$, qui est manifestement une corde. De plus, posons $w_0 = |\alpha_1|u_1$ et $w_r = |\alpha_r|v_r^{-1}$. Considérons maintenant la relation d'équivalence minimale \sim sur $[0, r] = \{0, 1, \dots, r\}$ satisfaisant à $i - 1 \sim i$ lorsque p_i est non sériel, pour $i \in [1, r]$. Il est alors aisé de voir que toute classe d'équivalence \tilde{k} avec $0 < k < r$ est de la forme $[i, j]$ avec $i \leq k \leq j$, où i et j sont les entiers minimal et maximal, respectivement, tels que p_{i+1}, \dots, p_j soient tous non sériels. Dans ce cas, $w_i w_{i+1} \cdots w_j$ est une corde, notée $w_{\tilde{k}}$ et appelée une **corde-syzygie** de w . Finalement, on pose $w_{\tilde{0}} = w_0$ lorsque $\tilde{0} = \{0\}$ et $w_{\tilde{r}} = w_r$ lorsque $\tilde{r} = \{r\}$.

Exemple 2.4.1. Considérons le carquois bisériel spécial suivant



ainsi que la corde $w = \beta_1^{-1} \gamma_1 \delta_1^{-1}$. Ainsi, nous avons $r = 2$, $p_1 = \beta_1$, $q_1 = \gamma_1$, $p_2 = \delta_1$ et $q_2 = b_2$. Comme p_1 n'est pas sériel, on pose $\alpha_1 = \beta_2$, $u_1 = d_1 = u_1$ et $u_2 = \gamma_2$, de sorte que $(p_1 \alpha_1 u_1, q_1 v_1) = (\beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2)$ est une paire binomiale. Maintenant comme p_2 est sériel, on pose $u_2 = \delta_2$ le chemin tel que $p_2 u_2 = \delta_1 \delta_2$ termine dans un creux. Enfin puisque $p_2^{-1} q_2$ se termine en un creux, on ne définit pas α_2 et on pose $v_2 = d_2$. On obtient $[0, 2]/\sim = [0, 2]$, d'où $\Omega(w) = \gamma_2^{-1} \delta_2$. Par conséquent, $\gamma_2^{-1} \delta_2$ est l'unique corde-syzygie de w .

Le travail précédent nous permet de déduire une application

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C} \\ w &\longmapsto \sum_{\tilde{k} \in [0, r]/\sim} w_{\tilde{k}}, \end{aligned}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{Z}\mathcal{C}$. On peut maintenant obtenir une description combinatoire de la première syzygie d'un module de corde.

Proposition 2.4.2. *Soit $A = KQ/I$ avec (Q, I) bisériel spécial. Alors, l'application*

$$\Omega_{\mathcal{C}} : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathcal{C} \\ \sum_{i=1}^r n_i w_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^r n_i \Omega(w_i). \end{array}$$

est telle que $M\Omega_{\mathcal{C}}(x) \cong \Omega M(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}\mathcal{C}$.

DÉMONSTRATION :

Nous utiliserons les notations introduites ci-dessus. Soient w une corde et $r = \dim_K \text{top } M(w)$. On peut supposer sans perte de généralité que $\Omega_{\mathcal{C}}(w) \neq 0$. Notons $a_i = s(p_i)$, pour $i = 1, 2, \dots, r$, les éléments de coiffe de la base canonique de $M(w)$. Une couverture projective de $M(w)$ est alors donnée par l'application $\phi : P(a_1) \oplus P(a_2) \oplus \dots \oplus P(a_r) \rightarrow M(w)$ qui, pour tout $1 \leq i \leq r$, applique l'élément de coiffe de la base canonique de $P(a_i)$ sur celui qui lui correspond dans la base canonique de $M(p_i^{-1}q_i)$. Puisque le résultat est évident dans le cas où $r = 1$, nous supposerons de plus que $r > 1$.

Afin de décrire convenablement le noyau de ϕ , nous allons introduire ici davantage de notations. Premièrement, dans le cas où p_1 est non sériel et u_1 , non trivial, on note b_1 l'élément de la base canonique de $P(a_1)$ correspondant à $s(u_1)$ et on note d_0 l'élément de coiffe de la base canonique de $M(w_0)$. Dans tous les autres cas, on pose $b_1 = 0 = d_0$. On poursuit en notant, pour tout indice i avec $1 \leq i < r$, b_{i+1} et c_i les éléments de la base canonique de $P(a_i)$ correspondant à $b(p_{i+1})$ et $b(q_i)$, respectivement, et d_i l'élément de coiffe de la base canonique de $M(w_i)$. Enfin, dans le cas où q_r est non sériel et v_r , non trivial, on note c_r l'élément de la base canonique de $P(a_r)$ correspondant à $s(v_r)$ et on note d_r l'élément de coiffe de la base canonique de $M(w_r)$. Autrement, on pose $c_r = 0 = d_r$.

Maintenant, considérant la surjection naturelle

$$\pi : \bigoplus_{i=0}^r M(w_i) \rightarrow M(\Omega_C(w)),$$

on obtient la base $\{\pi(d_i) \mid 0 \leq i \leq r \text{ et } d_i \neq 0\}$ de la coiffe de $M(\Omega_C(w))$. Considérons le morphisme $\psi : M(\Omega_C(w)) \rightarrow P(a_1) \oplus \cdots \oplus P(a_r)$ déterminé par

$$\psi\pi(d_i)^T = \begin{cases} (b_1, 0, \dots, 0), & \text{si } i = 0 ; \\ (0, \dots, 0, \underbrace{-c_i}_i, b_{i+1}, 0, \dots, 0), & \text{si } 0 < i < r ; \\ (0, \dots, 0, c_r), & \text{si } i = r. \end{cases}$$

On peut alors vérifier aisément que ψ est un monomorphisme tel que $\phi\psi = 0$. Calculant ensuite les dimensions des modules en jeu, on déduit enfin que ψ est le noyau de ϕ . \square

2.5 Algèbres bisérielles spéciales locales

Nous allons maintenant nous concentrer sur les algèbres bisérielles spéciales qui sont locales, c'est-à-dire celles dont le radical est un idéal maximal. Rappelons que pour un carquois lié (Q, I) , l'algèbre $A = KQ/I$ est locale si et seulement si $|Q_0| = 1$ (voir [4]). Ainsi, dans le contexte d'une algèbre bisérielle spéciale, on a $|Q_1| \leq 2$. Si $|Q_1| = 0$, alors nous sommes en présence d'une algèbre simple, c'est-à-dire $KQ/I \cong K$. Si $|Q_1| = 1$, alors nous sommes en présence d'un quotient d'algèbre de polynômes en une indéterminée, c'est-à-dire $KQ/I \cong K[x]/\langle x^m \rangle$ pour un certain entier $m \geq 1$. Ces deux cas particuliers étant bien connus, nous nous attarderons plutôt à la situation où $|Q_1| = 2$. Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition 2.5.1. Nous appellerons **carquois à double boucle** le carquois suivant admettant deux boucles au même sommet :

$$\alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ a \\ \curvearrowleft \end{array} \beta .$$

Soit Q le carquois à double boucle. On introduit la notation suivante pour les besoins du prochain lemme. Pour $n, m \geq 1$, on écrit

1. $I_1(n, m) = \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^m \rangle$;
2. $I_2(n, m) = \langle \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^{n+1}, \beta^{m+1} \rangle$.

Lemme 2.5.2. *Soit Q le carquois à double boucle. Si I est un idéal admissible de KQ tel que (Q, I) est bisériel spécial, alors il existe deux entiers $n, m \geq 1$ tels que $I_1(n, m) \subseteq I$ avec $|n - m| \leq 1$ ou tels que $I_2(n, m) \subseteq I$.*

DÉMONSTRATION : Soit I tel que (Q, I) est bisériel spécial. Supposons que $\alpha^2, \beta^2 \in I$. Puisque I est admissible, il existe deux entiers minimaux $n, m \geq 1$ tels que $(\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^m \in I$, et donc tels que $I_2(n, m) \subseteq I$. Supposons alors que $n - m = k > 1$. Ainsi, $(\beta\alpha)^{n-k} \in I$, tant et si bien que I contient $\alpha(\beta\alpha)^{n-k}\beta(\alpha\beta)^{k-2} = (\alpha\beta)^{n-1}$, ce qui contredit la minimalité de n . Il faut donc avoir $n - m \leq 1$. De la même manière, on trouve que $m - n \leq 1$.

Supposons maintenant que $\alpha^2 \notin I$. Puisque (Q, I) est bisériel spécial, on a alors $\alpha\beta, \beta\alpha \in I$. Or, I étant admissible, il doit exister deux entiers minimaux $n, m \geq 2$ tels que $\alpha^n \in I$ et $\beta^m \in I$, et donc tels que $I_1(n, m) \subseteq I$. De même, si $\beta^2 \notin I$, alors il existe deux entiers minimaux $n, m \geq 2$ tels que $I_1(n, m) \subseteq I$. \square

Remarquons que la première partie de cet énoncé permet de dire que :

$$I_2(n, m) = \begin{cases} \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \rangle, & \text{si } m = n + 1 ; \\ \langle \alpha^2, \beta^2, (\beta\alpha)^m \rangle, & \text{si } m = n - 1 ; \\ \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n \rangle, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Nous obtenons maintenant deux lemmes techniques qui montreront que les deux formes d'idéal mises en évidence ci-dessus permettent de contrôler toutes les algèbres bisérielles spéciales locales non unisérielles.

Lemme 2.5.3. *Soit (Q, I) un carquois bisériel spécial avec Q le carquois à double boucle. Supposons qu'il existe deux entiers $n, m \geq 1$ tels que $I_1(n, m) \subseteq I$ qui sont minimaux*

pour cette propriété. Si I admet une paire binomiale, alors $n = m \geq 2$ et cette paire est unique, avec l'une des formes $((\alpha\beta)^{n-1}, (\beta\alpha)^{n-1})$ ou $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha, \beta(\alpha\beta)^{n-1}$.

DÉMONSTRATION : Supposons que I admet une paire binomiale ρ . Comme $\alpha^2, \beta^2 \in I$, cette paire est nécessairement d'une des formes $((\alpha\beta)^k, (\beta\alpha)^l)$ ou $((\alpha\beta)^s\alpha, (\beta\alpha)^t\beta)$, où $1 \leq k, s < n$ et $1 \leq l, t < m$. Ainsi, $m, n \geq 2$. Dans le premier cas, si $k < l$, on multiplie par β à gauche et par α à droite pour obtenir $(\beta\alpha)^{k+1} \in I$, et donc $(\beta\alpha)^l \in I$, contredisant du coup l'hypothèse que ρ est binomiale; si $l < k$, on multiplie plutôt par α à gauche et par β à droite pour obtenir, de la même façon, $(\alpha\beta)^k \in I$, ce qui donne encore lieu à une contradiction. Donc $k = l$. Si $k < n - 1$, on multiplie par $(\alpha\beta)^{n-k-1}$ pour obtenir la contradiction $(\alpha\beta)^{n-1} \in I$. Donc $k = n - 1$ et, de même, $l = m - 1$. Or $k = l$ conduit à $m = n$. De façon tout à fait semblable, on montre que le second cas mène aussi à $m = n$ et que la paire en question est $((\alpha\beta)^{n-1}\alpha, \beta(\alpha\beta)^{n-1})$. Si I admet une paire binomiale ayant la première forme, il suffit de multiplier par α à droite pour conclure que la deuxième forme ne peut donner lieu à une paire binomiale. \square

Lemme 2.5.4. Soit (Q, I) un carquois bisériel spécial avec Q le carquois à double boucle. Supposons qu'il existe deux entiers $n, m \geq 1$ tels que $I_2(n, m) \subseteq I$ qui sont minimaux pour cette propriété. Si I admet une paire binomiale, alors $n, m \geq 2$ et cette paire est (α^n, β^m) .

DÉMONSTRATION : D'après l'hypothèse, n, m sont minimaux tels que $\alpha^{n+1} \in I$ et $\beta^{m+1} \in I$. Supposons que I admet une relation binomiale ρ . Elle correspond alors nécessairement à une paire binomiale de la forme (α^i, β^j) avec $2 \leq i < n + 1$ et $2 \leq j < m + 1$. Ainsi, $n, m \geq 2$. Or I contient $\rho\alpha = \alpha^{i+1}$ et par le fait même, $i = n$. De façon similaire, on montre que $j = m$ et on obtient donc que $\rho = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{m-1} \in I$. Il est clair que c'est la seule paire binomiale possible. \square

On formule à présent le résultat principal de cette section, qui décrit explicitement

toutes les algèbres bisérielles spéciales locales non unisérielles, en particulier celles de représentation infinie.

Théorème 2.5.5. *Soit (Q, I) un carquois bisériel spécial avec Q le carquois à double boucle. Il existe alors certains entiers $m, n \geq 1$ et un scalaire $\lambda \in K^*$ tels que I est l'un des idéaux suivants :*

1. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\beta\alpha)^n \rangle$;
2. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \rangle$;
3. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n \rangle$;
4. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha \rangle$;
5. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\beta\alpha)^n \beta \rangle$;
6. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha, (\beta\alpha)^n \beta \rangle$;
7. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n - \lambda(\beta\alpha)^n \rangle$;
8. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha - \lambda(\beta\alpha)^n \beta \rangle$;
9. $\langle \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^{n+1} - \lambda\beta^{m+1} \rangle$;
10. $\langle \alpha^{n+1}, \beta^{m+1}, \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$.

DÉMONSTRATION : On s'attarde d'abord au cas où $I_1(n, m) \subseteq I$ avec $n, m \geq 1$ minimaux. Supposons d'abord que $n > m \geq 1$. On a alors $m = n - 1$, en vertu du lemme 2.5.2, d'où I est monomial, en vertu du lemme 2.5.3. Comme $\alpha(\beta\alpha)^{n-2}\beta = (\alpha\beta)^{n-1}$ n'appartient pas à I , on obtient que $\alpha(\beta\alpha)^{n-2}, (\beta\alpha)^{n-2}\beta \notin I$, et donc $(\beta\alpha)^{n-1}$ est une relation monomiale. C'est la seule relation possible autre que α^2 et β^2 . Dans ce cas, on obtient $I = \langle \alpha^2, \beta^2, (\beta\alpha)^{n-1} \rangle$, avec $n \geq 2$.

Si on a plutôt $m > n \geq 1$, on obtient, de manière tout à fait analogue, que $I = \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{m-1} \rangle = \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \rangle$, avec $n \geq 1$.

Enfin, si $n = m$, on obtient $(\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n \in I$, avec $n \geq 1$. On commence par énumérer tous les cas où I est monomial.

Supposons que $(\alpha\beta)^n \in I$ est une relation monomiale. On peut écrire $(\alpha\beta)^n = \alpha(\beta\alpha)^{n-1}\beta$. On en tire donc, en vertu de la définition d'une relation monomiale, que $\alpha(\beta\alpha)^{n-1} \notin I$ et $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \notin I$. Par conséquent, $(\beta\alpha)^n \in I$ est aussi une relation monomiale. Les seules relations monomiales possibles (aux multiples scalaires près) sont alors $\alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n$. Donc, $I = \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n \rangle$, avec $n \geq 1$.

Supposons que $(\alpha\beta)^n \in I$ n'est pas une relation monomiale. Dans ce cas, on a nécessairement $n \geq 2$ et $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \in I$ ou $\beta(\alpha\beta)^{n-1} \in I$. Donc, $(\beta\alpha)^n$ n'est pas une relation monomiale non plus. Ainsi, $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha$ ou $\beta(\alpha\beta)^{n-1}$ sont des relations monomiales, car $(\alpha\beta)^{n-1} \notin I$. On obtient donc $I = \langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha \rangle$ ou $I = \langle \alpha^2, \beta^2, \beta(\alpha\beta)^{n-1} \rangle$ ou encore $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha, \beta(\alpha\beta)^{n-1} \rangle$, avec $n \geq 2$.

Si I n'est pas monomial avec disons ρ une relation binomiale, alors le lemme 2.5.3 nous assure que ρ est associée à l'une des paires $((\alpha\beta)^{n-1}, (\beta\alpha)^{n-1})$ ou $((\alpha\beta)^{n-1}\alpha, \beta(\alpha\beta)^{n-1})$. Dans ces deux cas, il ne peut y avoir d'autre relation monomiale.

Examinons enfin le cas où $I_2(n, m) \subseteq I$ avec $n, m \geq 1$ minimaux. Dans cette situation, I contient $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$. Par minimalité, $\alpha^n, \beta^m \in I$ sont les seules puissances de α et β qui soient des relations monomiales. En vertu du lemme 2.5.4, la seule autre possibilité de relation est donc la paire binomiale $(\alpha^{n-1}, \beta^{m-1})$ d'où l'on tire les deux derniers cas. \square

Ceci met donc un terme à ce second chapitre qui avait pour but d'effectuer un survol succinct des principaux résultats connus sur les algèbres bisérielles spéciales, ainsi que d'obtenir certaines approches qui seront utilisées au cours des deux derniers chapitres, pour éprouver deux célèbres conjectures homologiques en théorie des représentations des algèbres.

CHAPITRE 3

La conjecture forte d'absence de boucles

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre à l'épreuve une première conjecture homologique qui suggère que le premier groupe d'auto-extensions d'un module simple contient de l'information sur une infinité de groupes d'auto-extensions d'ordre supérieur. Plus précisément, nous étudierons la conjecture forte d'absence de boucles, plus communément appelée la *Strong no loops conjecture*.

Nous sillonnerons d'abord un bref historique de cette conjecture. Ensuite, nous obtiendrons une démonstration simplifiée d'un résultat connu à propos de cette conjecture, puis nous nous attarderons finalement au cas plus particulier que constitue la famille des algèbres bisérielles spéciales.

3.1 Historique de la conjecture

Soit $A = KQ/I$ l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) . Il est bien connu que si a, b sont des sommets de Q , alors

$$\dim_K \text{Ext}_A^1(S_a, S_b) = |\{\beta \in Q_1 \mid \beta : a \rightarrow b\}|.$$

En effet, ceci découle de l'isomorphisme de K -espaces vectoriels suivant (voir [6, III.1.15]) :

$$\text{rad}(aAb)/\text{rad}^2(aAb) \cong \text{Ext}_A^1(S_a, S_b).$$

Si nous interprétons ceci de manière plus visuelle, et dans un cas plus particulier, Q admet une boucle α autour du sommet a si et seulement si $\text{Ext}_A^1(S_a, S_a) \neq 0$.

Cette observation explique le nom de la conjecture d'absence de boucles, formulée en 1987 indépendamment par Anick [1] et Zacharia, et ce, dans un cadre plus général que celui sur lequel notre attention a été dirigée plus haut.

Conjecture 3.1.1. *Soit A une algèbre d'Artin. Si A est de dimension globale finie, alors $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$ pour tout A -module simple S .*

Cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas, dont deux plus particuliers, nommément lorsque $\text{rad}^3(A) = 0$ [19] et lorsque $\dim_{\text{gl}} A \leq 2$ [24] et lorsque A est quasis-tratifiée [34], et d'autres plus généraux, à savoir lorsque A est une K -algèbre de dimension finie avec K algébriquement clos [32] ou lorsque A est séparable sur K [28]. Remarquons que la conjecture avait déjà été démontrée par Lenzing dans le cas où l'anneau de base est un corps algébriquement clos avant même qu'elle ne soit formellement énoncée !

La conjecture d'absence de boucles est donc démontrée dans plusieurs cas fréquents, mais ne l'est toujours pas dans le cadre général des algèbres d'Artin.

À la suite de leur étude de cette première conjecture, Igusa et Zacharia ont suggéré une formulation plus forte [28], d'où son nom de conjecture *forte* d'absence de boucles.

Conjecture 3.1.2. *Soit A une algèbre d'Artin. Si S est un A -module simple de dimension projective finie, alors $\text{Ext}_A^1(S, S) = 0$.*

Dans le cas où $A = KQ/I$ avec K un corps algébriquement clos et (Q, I) un carquois lié, on peut la reformuler comme suit : s'il existe une boucle $\alpha : a \rightarrow a$ dans le carquois Q , alors $\text{dp}_A S_a = \infty$. Cette conjecture demeure toutefois toujours ouverte dans la plupart des cas.

Les cas pour lesquels on connaît sa validité sont lorsque A est une algèbre monomiale de carquois lié sur un corps algébriquement clos (voir [28]), lorsque A est une algèbre quasistratifiée d'un côté [34], ainsi que certains cas plus particuliers restreints (voir [9] et [25]).

Pour obtenir leur résultat dans [25], Green, Solberg et Zacharia sont parvenus à montrer que moyennant certaines hypothèses sur la boucle, $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$. Nous présenterons ici une preuve quelque peu allégée de leur résultat. On montrera ensuite comment ce dernier nous permettra de nous restreindre au cas où il existe une puissance de la boucle qui est composante d'une relation non monomiale. Cette réduction se révélera particulièrement utile dans le cas d'une algèbre bisérielle spéciale, grâce à la description obtenue à la section 2.4 pour les syzygies de modules de corde .

Le résultat principal de ce chapitre stipule que si A est bisérielle spéciale et S est un module simple admettant une auto-extension non nulle, alors $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$. Nous obtiendrons en cours de route une caractérisation des algèbres de Nakayama qui renforce celle présentée dans [6, IV.2.10 et IV.2.12].

3.2 Boucles sans puissance composante d'une relation polynomiale

Désormais, pour un idempotent primitif e donné, nous noterons P_e le module projectif indécomposable, I_e le module injectif indécomposable et S_e le module simple correspondants.

Nous énonçons d'abord deux résultats utiles, obtenus en tentant de généraliser la proposition [33, 1.2], lors de fructueux échanges avec Michael Butler [10].

Proposition 3.2.1. *Soient A l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) et $\phi : P_1 \rightarrow P$ un morphisme entre A -modules projectifs tel que $\text{Ker}(\phi) \subseteq \text{rad } P_1$ et $\text{Im}(\phi) \subseteq \text{rad } P$. Soient a et b deux sommets associés à des facteurs directs de P et P_1 , respectivement, et $u : a \rightsquigarrow b$ un chemin non trivial tel que $\phi(\bar{b}) = \bar{u}$. S'il existe un chemin non trivial $v : b \rightsquigarrow c$ tel que uv est élément de I mais pas de $IQ^+ + Q^+I$, alors $\text{Ker}(\phi)$ admet une couverture projective (P_2, ε) telle que P_2 admet un facteur direct indécomposable associé au sommet c dont le générateur est appliqué par ε sur la classe \bar{v} de v dans P_1 .*

DÉMONSTRATION : Supposons que $v : b \rightsquigarrow c$ est un chemin non trivial tel que $\phi(\bar{b}) = \bar{u}$ et $uv \in I \setminus IQ^+ + Q^+I$, ce que l'on peut visualiser comme sur ce schéma :

$$a \overset{\text{.....}}{\rightsquigarrow} b \overset{u}{\rightsquigarrow} b \overset{v}{\rightsquigarrow} c.$$

Par suite, $\phi(\bar{v}) = \phi(\overline{bv}) = \overline{uv} = \bar{0}$, d'où $\bar{v} \in \text{Ker}(\phi)$. Il suffit ainsi de montrer que $\bar{v} \notin \text{rad Ker}(\phi)$, puisqu'on pourra alors invoquer le lemme 1.1.1. Supposons donc, au contraire, que $\bar{v} \in \text{rad Ker}(\phi) \subseteq \text{rad}^2 P_1$. Considérons une décomposition en facteurs directs indécomposables de P_1 de la forme $P_1 \cong \bigoplus_{j=1}^s P_{b_j}$, où les b_j sont des sommets avec $b_1 = b$. Choisissons aussi, pour $j = 2, 3, \dots, s$, un représentant $x_j \in a(KQ^+)b_j$ de

$a\phi(b_j)$. Il existe alors des éléments $Y \in \text{Ker}(\phi)$ et $p \in Q^+$ tels que $\bar{v} = Y\bar{p}$. Mais puisque $Y \in \text{Ker}(\phi) \subseteq \text{rad } P_1$, on peut écrire $Y = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_s)^T$ avec $y_i \in Q^+$. Maintenant si l'on pose $w = v - y_1p$, l'égalité $\bar{v} - Y\bar{p} = \bar{0}$, lorsqu'examinée par composantes, nous permet de conclure que les éléments $w, y_2p, \dots, y_s p$ appartiennent tous à I . De plus, l'élément $uy_1 + x_2y_2 + \dots + x_sy_s$ fournissant un représentant w' de $\phi(Y)$, il en résulte que $w' \in I$, puisque $Y \in \text{Ker}(\phi)$. C'est à ce moment que nous obtenons la contradiction

$$uw = u(w + y_1p) = uw + w'p - (x_2y_2p + \dots + x_sy_sp) \in Q^+I + IQ^+.$$

Par conséquent, \bar{v} ne peut appartenir au radical de $\text{Ker}(\phi)$, et est donc un élément non nul de $\text{top } \text{Ker}(\phi)$. Tel qu'annoncé, on applique enfin le lemme 1.1.1 pour conclure que $\text{Ker}(\phi)$ admet une couverture projective (P_2, ε) telle que P_c est facteur direct de P_2 et $b\varepsilon(c) = \bar{v}$. \square

Ce résultat permet d'obtenir le corollaire suivant au moyen d'une simple récurrence.

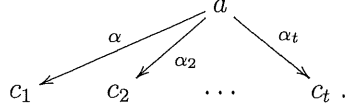
Corollaire 3.2.2. *Soient A l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) et $\alpha : a \rightarrow b$ une flèche de Q . S'il existe une suite de sommets (a_0, a_1, \dots, a_n) avec $a_0 = a$ et $a_1 = b$ ainsi qu'une suite de chemins (p_1, p_2, \dots, p_n) avec $p_1 = \alpha$ et $p_{i+1} \in a_i(KQ^+)a_{i+1}$ tels que $p_i p_{i+1}$ est élément de I mais pas de $Q^+I + IQ^+$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, alors $\text{Ext}_A^i(S_a, S_{a_i}) \neq 0$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.*

DÉMONSTRATION : Considérons une résolution projective minimale du simple S_a associé au sommet a :

$$\dots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow S_a \longrightarrow 0.$$

Il suffit de montrer que P_{a_i} est facteur direct de P_i pour $i = 0, 1, \dots, n$. Notons $t \geq 1$ le nombre de flèches émanant du sommet a dans le carquois Q , et notons-les $\alpha_j : a \rightarrow c_j$, où $\alpha_1 = \alpha$ et $c_i \in Q_0$ pour $j = 1, 2, \dots, t$. On peut visualiser la situation à l'aide du schéma

suivant :



On peut par conséquent décrire plus explicitement $P_0 \cong P_a$ et $Q_1 \cong \bigoplus_{j=1}^t P_{c_j}$ et obtenir que $d_1 \in \text{Hom}_A(P_1, P_0) \cong \bigoplus_{j=1}^t P_a c_j$ agit par multiplication à gauche par $(\bar{p}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_t)$. Ceci confirme l'énoncé pour $i = 0, 1$ et la proposition 3.2.1 appliquée à $u = p_1 = \alpha$ et $v = p_2$ montre que $a_1 d_1(a_2) = \bar{p}_2$. Supposons que $i \geq 1$ est tel que P_{a_i} est facteur direct de P_i et $a_i d_i(a_{i+1}) = \bar{p}_i$. On applique alors la proposition 3.2.1 au morphisme $d_i : P_i \rightarrow P_{i-1}$ avec les chemins $u = p_i$ et $v = p_{i+1}$ pour obtenir que $P_{a_{i+1}}$ est facteur direct de Q_{i+1} et $a_{i+1} d_{i+1}(a_{i+2}) = \bar{p}_{i+1}$. \square

Corollaire 3.2.3 ([33, 1.3]). *Soit A l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) contenant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$. Si aucune puissance de α n'est composante d'une relation polynomiale, alors $\text{Ext}_A^i(S(a), S(a)) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$.*

DÉMONSTRATION : Notons $n \geq 2$ l'entier minimal tel que $\alpha^n \in I$ et faisons l'hypothèse que α^{n-1} n'est composante d'aucune relation polynomiale. Remarquons ensuite que pour tous $\rho \in I$ et $x, y \in KQ$, le produit $x\rho y$ est soit nul, soit une somme de relations. Nous allons montrer que $\alpha^n \notin Q^+I + IQ^+$. Supposons au contraire que ce ne soit pas le cas. On peut alors écrire

$$\alpha^n = (\beta_1 \rho_1 + \dots + \beta_r \rho_r) + (\rho_{r+1} \beta_{r+1} + \dots + \rho_s \beta_s),$$

où les ρ_i sont des relations sur Q et les β_i , des flèches. Par suite, il doit exister un indice $i_0 \in \{1, 2, \dots, s\}$ tel que $\beta_{i_0} \rho_{i_0} = \lambda \alpha^n + y$ ou $\rho_{i_0} \beta_{i_0} = \lambda \alpha^n + y$ avec $\lambda \neq 0$ et y une combinaison linéaire de chemins différents de α^n . Ainsi α^{n-1} est composante de la relation ρ_{i_0} . Or la minimalité de n nous assure que ρ_{i_0} doit être polynomiale, ce qui contredit notre hypothèse sur α^{n-1} . Ainsi, α^n ne peut appartenir à $Q^+I + IQ^+$. On

applique alors le résultat précédent avec la suite de chemins $(\alpha, \alpha^{n-1}, \alpha, \alpha^{n-1}, \dots)$ pour conclure que $\text{Ext}_A^i(S(a), S(a)) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$. \square

On obtient directement le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.4 ([33, 1.4]). *Soit A l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) contenant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$. Si $\alpha^2 \in I$, alors $\text{Ext}_A^i(S_a, S_a) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$. \square*

Nous nous intéressons maintenant aux modules simples admettant une auto-extension presque scindée, c'est-à-dire invariants sous l'action de la translation d'Auslander-Reiten $\tau = D\text{Tr}$. Nous obtenons d'abord le résultat suivant. Ce résultat est en fait une généralisation de [33, 1.5].

Proposition 3.2.5. *Soient R un anneau commutatif artinien, A une R -algèbre d'Artin et a, b deux idempotents primitifs de A . Alors $\tau S_a \cong S_b$ si et seulement si $\text{rad } P_a / \text{rad}^2 P_a \cong S_b$ et $\text{soc } (I_b / S_b) \cong S_a$. Dans ce cas, on a une suite exacte presque scindée*

$$0 \longrightarrow S_b \longrightarrow P_a / \text{rad}^2 P_a \longrightarrow S_a \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION : Supposons d'abord que a, b sont tels que $\text{rad } P_a / \text{rad}^2 P_a \cong S_b$ et $\text{soc } (I_b / S_b) \cong S_a$. Considérons une présentation projective minimale

$$\xi : P_b \xrightarrow{f} P_a \xrightarrow{p} S_a \longrightarrow 0.$$

Posons $d = f(b) \in a(\text{rad } A)b$. Remarquons que la minimalité de la présentation implique $d \notin a(\text{rad}^2 A)b$. On a aussi une coprésentation injective minimale

$$\zeta : 0 \longrightarrow S_b \xrightarrow{i} I_b \xrightarrow{g} I_a.$$

À partir du calcul de $\xi^t = \text{Hom}_A(\xi, A)$, on peut retrouver sans problème la suite exacte

$$Aa \xrightarrow{d} Ab \longrightarrow \text{Tr } S_a \longrightarrow 0.$$

De même, le calcul de $D\zeta = \text{Hom}_R(\zeta, J)$, où J est l'enveloppe injective de R_R , induit la suite exacte

$$Aa \xrightarrow{Dg} Ab \xrightarrow{Di} DS_b \longrightarrow 0.$$

Remarquons que la dernière de ces suites est une présentation projective minimale, puisque c'est la suite duale d'une coprésentation injective minimale. De plus, comme $Aa \rightarrow \text{rad } Ab$ est une couverture projective, ce dernier est de coiffe simple et donc indécomposable. Maintenant, posons $x = Dg(a) \in b(\text{rad } A)a$. Ainsi, $\text{rad } Ab = \text{Ker } Di = Dg(Aa) = Ax$. On prétend que $Ax = Ad$. En effet, il est clair que $Ad \subseteq \text{rad } Ab$, puisque $\text{Tr } S_a \neq 0$. Supposons que $Ad \subsetneq Ax$. Puisque Ax est local, on aurait alors $Ad \subseteq \text{rad } Ax = \text{rad}^2 Ab$, ce qui contredirait le fait que $d \notin a(\text{rad}^2 A)b$. Ainsi, $Ad = Ax = \text{rad } Ab$, d'où $\text{Tr } S_a \cong DS_b$.

Supposons maintenant que $S_b \cong \tau S_a$. Supposons que $\text{toprad } P_a = S_{b_1} \oplus \cdots \oplus S_{b_r}$ pour certains idempotents primitifs orthogonaux $b_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, r$. De la même façon, supposons que $\text{soc } (I_b/S_b) \cong S_{a_1} \oplus \cdots \oplus S_{a_s}$ pour certains idempotents primitifs orthogonaux $a_j \in A$, $j = 1, 2, \dots, s$. Considérons une présentation projective minimale de S_a

$$\delta : P_{b_1} \oplus \cdots \oplus P_{b_r} \longrightarrow P_a \longrightarrow S_a \longrightarrow 0.$$

Appliquant le foncteur $\text{Hom}_A(-, A_A)$ à δ , on obtient une présentation projective minimale du transposé de S_a

$$\bar{\delta}^t : Aa \longrightarrow Ab \oplus \cdots \oplus Ab_r \longrightarrow \text{Tr } S_a \longrightarrow 0.$$

Si l'on note T_b le A -module à gauche simple associé à b , on a aussi une présentation projective minimale

$$\eta : Aa_1 \oplus \cdots \oplus Aa_s \longrightarrow Ab \longrightarrow T_b \longrightarrow 0.$$

Or les isomorphismes $\text{Tr } S_a \cong DS_b \cong T_b$ nous permettent de construire un isomorphisme $\eta \cong \bar{\delta}^t$. En particulier, $r = 1$ avec $b_1 = b$ et $s = 1$ avec $a_1 = a$. \square

Corollaire 3.2.6. *Soient R un anneau commutatif artinien, A une R -algèbre d'Artin connexe. Alors A admet un module simple τ -invariant si et seulement si A est locale et telle que $\text{rad } A/\text{rad}^2 A$ est simple.*

DÉMONSTRATION : Sans perte de généralité, supposons que A est sobre. Supposons que S est un A -module simple τ -invariant et notons e l'idempotent primitif, P le A -module projectif indécomposable et I le A -module injectif indécomposable associés à S . Supposons maintenant que e' est un idempotent primitif tel que $eAe' \neq 0$. On a

$$\frac{e(\text{rad } A)(1 - e)}{e(\text{rad}^2 A)(1 - e)} = \frac{e \text{rad } A}{e \text{rad}^2 A}(1 - e) = \frac{\text{rad } P}{\text{rad}^2 P}(1 - e) \cong S(1 - e) = Se(1 - e) = 0,$$

l'isomorphisme venant de ce que $\text{rad } P/\text{rad}^2 P \cong S$, en vertu de la proposition 3.2.5. Donc $e(\text{rad } A)(1 - e) = e(\text{rad}^2 A)(1 - e)$. Puisque $\text{rad } A$ est nilpotent, on peut montrer que cette dernière égalité implique $e(\text{rad } A)(1 - e) = 0$, d'où $eA(1 - e) = 0$. Ainsi, $eA = eAe$. De manière duale, sachant que la proposition 3.2.5 nous donne aussi $\text{soc}(I/S) \cong S$, on montre que $Ae = eAe$. Ainsi, e est un idempotent central non nul. Or A est connexe et par conséquent $e = 1$. Donc $\text{rad } P = \text{rad } A$ est maximal, d'où A est locale, et $\text{rad } A/\text{rad}^2 A = \text{rad } P/\text{rad}^2 P \cong S$. \square

On rappelle maintenant qu'une algèbre d'Artin A est appelée **algèbre de Nakayama** si tout A -module indécomposable est unisériel. Par exemple, l'algèbre d'un carquois lié connexe est une algèbre de Nakayama si et seulement si le carquois Q est un chemin (possiblement trivial) ou un cycle orienté. Remarquons que le corollaire [6, IV.2.4] permet de déduire que dans le contexte de 3.2.6, A est une algèbre de Nakayama.

Nous apporterons maintenant une autre caractérisation pour cette classe d'algèbres, dans le cas d'une algèbre de carquois lié, caractérisation que l'on pourra comparer à celle de [6, IV.2.10].

Théorème 3.2.7. *Soit A l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) . Alors A est une algèbre de*

Nakayama si et seulement s'il existe une τ -orbite \mathcal{O} constituée uniquement de modules simples. Dans ce cas, \mathcal{O} contient tous les A -modules simples.

DÉMONSTRATION : D'une part, si Q est le carquois $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ avec $n \geq 1$, alors grâce à 3.2.5, on sait que $\tau S_i \cong S_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. Puisque dans ce cas S_n est projectif et S_1 , injectif, les simples S_1, S_2, \dots, S_n forment une τ -orbite. D'autre part, si Q est donné par un unique cycle orienté à $n \geq 1$ sommets, alors on conclut aussi que les simples associés à chaque sommet forment une τ -orbite.

Maintenant, pour la réciproque, supposons que Q admet $n \geq 1$ sommets et que $\mathcal{O} = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ est une τ -orbite. Considérons en premier lieu le cas où $n = 1$. Si S_1 est projectif, alors Q n'admet aucune flèche. Sinon, $\tau S_1 \cong S_1$ et alors le corollaire 3.2.6 indique que Q n'admet qu'une seule flèche. Supposons donc que $n > 1$ et que $\tau S_i \cong S_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, n-1$. On en déduit donc la présence d'une unique flèche α_i de source associée à S_i et de but associé à S_{i+1} . Enfin, si S_n est projectif, alors S_1 est automatiquement injectif. Ainsi, Q est donnée par le carquois $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$. Autrement, $\tau S_n \cong S_1$ et on a une unique flèche de source associée à S_n et de but associé à S_1 . Dans ce cas, Q est nécessairement donné par un cycle orienté à n sommets distincts.

□

3.3 Le cas des algèbres bisérielles spéciales

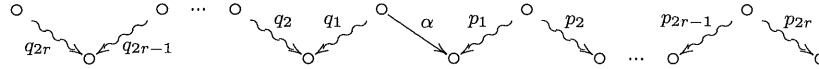
Dans cette section, nous comptons établir la conjecture forte d'absence de boucles pour le cas des algèbres bisérielles spéciales. Nous allons donc supposer que (Q, I) est un carquois lié bisériel spécial admettant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$. En vertu du corollaire 3.2.3, nous pouvons limiter notre investigation au cas où il existe un entier $n \geq 2$ tel que α^n est composante d'une relation binomiale.

Notre stratégie s'articulera autour de la proposition 2.4.2 qui permet de décrire la première syzygie des modules de corde. Nous obtenons d'abord deux lemmes techniques faisant ressortir un comportement d'alternance entre les syzygies d'un module de corde. Un phénomène similaire a déjà été remarqué par Bardzell [7] dans le contexte de construction d'une résolution projective d'une K -algèbre monomiale de dimension finie Λ sur son algèbre enveloppante $\Lambda^{\text{op}} \otimes_K \Lambda$.

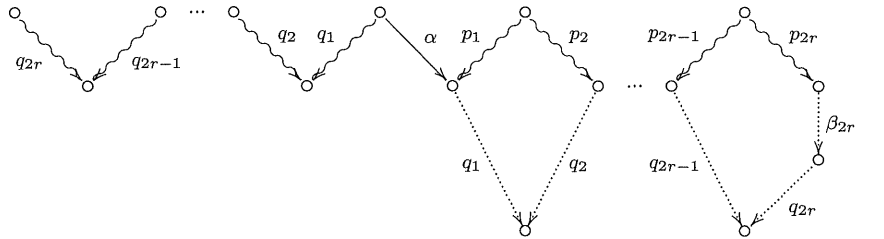
Afin d'alléger les énoncés suivants, nous introduisons les définitions suivantes.

Définition 3.3.1. Soit (Q, I) un carquois lié bisériel spécial admettant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$ et une paire binomiale $(\alpha^{n+1}, \alpha_1 \cdots \alpha_m)$ avec $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Nous considérerons alors les cordes des formes suivantes, que nous appellerons (α) -cordes :

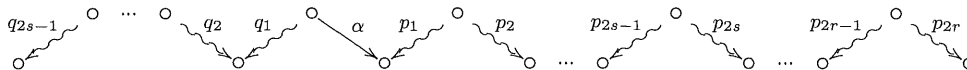
1. les cordes de la forme $q_{2r}q_{2r-1}^{-1} \cdots q_2q_1^{-1}\alpha p_1^{-1}p_2 \cdots p_{2r-1}^{-1}p_{2r}$,



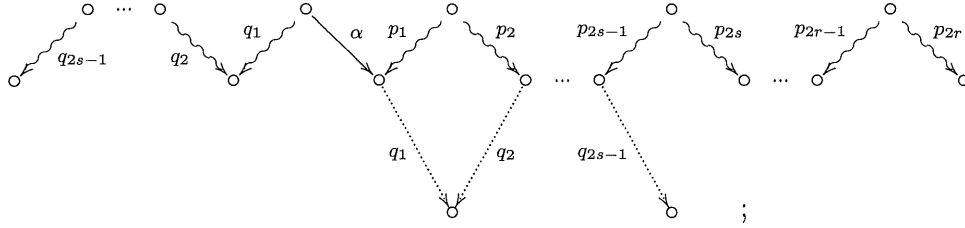
où $r \geq 1$ et les p_i, q_i , non triviaux pour $1 \leq i < 2r$, induisent une paire binomiale $(p_{2i-1}q_{2i-1}, p_{2i}q_{2i})$ lorsque $1 \leq i < r$, ainsi qu'une paire binomiale $(p_{2r-1}q_{2r-1}, p_{2r}\beta_{2r}q_{2r})$ avec β_{2r} une flèche, ce qu'on peut visualiser par



2. les cordes de la forme $q_{2s-1}^{-1} \cdots q_2q_1^{-1}\alpha p_1^{-1}p_2 \cdots p_{2s-1}^{-1}p_{2s} \cdots p_{2r-1}^{-1}p_{2r}$,



où $1 \leq s \leq r$ et les p_i, q_j , non triviaux pour $1 \leq i < 2r$ et $1 \leq j < 2s - 1$, induisent une paire binomiale $(p_{2i-1}q_{2i-1}, p_{2i}q_{2i})$ lorsque $1 \leq i < s$, ainsi qu'une corde sérielle $p_{2s-1}q_{2s-1}$ qui se termine dans un creux, ce qu'on peut visualiser par

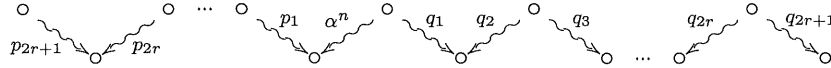


3. la corde triviale a .

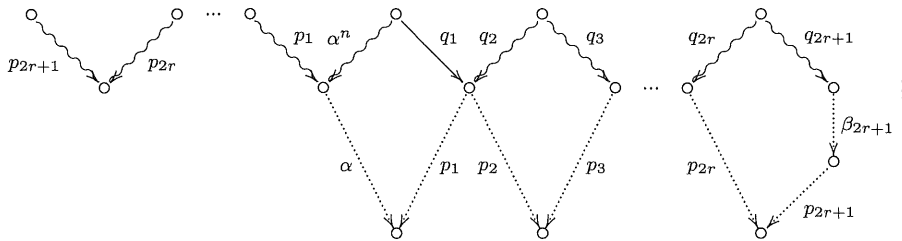
Définition 3.3.2. Soit (Q, I) un carquois lié bisériel spécial admettant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$ et une paire binomiale $(\alpha^{n+1}, \alpha_1 \cdots \alpha_m)$ avec $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Nous considérerons alors les cordes des formes suivantes, que nous appellerons (α^{-n}) -cordes :

1. les cordes de la forme

$$p_{2r+1}p_{2r}^{-1} \cdots p_1 \alpha^{-n} q_1 q_2^{-1} q_3 \cdots q_{2r}^{-1} q_{2r+1},$$

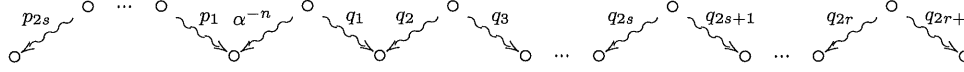


où $r \geq 0$ et les p_i, q_i , non triviaux pour $1 \leq i < 2r + 1$, induisent une paire binomiale $(q_{2i}p_{2i}, q_{2i+1}p_{2i+1})$ lorsque $0 \leq i < r$, avec $q_0 = \alpha^n$ et $p_0 = \alpha$, ainsi qu'une paire binomiale $(q_{2r}p_{2r}, q_{2r+1}\beta_{2r+1}p_{2r+1})$ avec β_{2r+1} une flèche, ce qu'on peut visualiser par

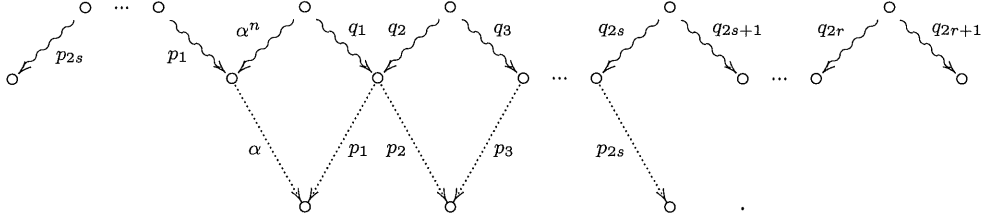


2. les cordes de la forme

$$p_{2s}^{-1} \cdots p_1 \alpha^{-n} q_1 \cdots q_{2s}^{-1} q_{2s+1} \cdots q_{2r}^{-1} q_{2r+1},$$



 où $1 \leq s \leq r$ et les p_i, q_j , non triviaux pour $1 \leq i < 2s$ et $1 \leq j < 2r + 1$, induisent une paire binomiale $(q_{2i}p_{2i}, q_{2i+1}p_{2i+1})$ lorsque $1 \leq i < s$, ainsi qu'une corde sérielle $q_{2s}p_{2s}$ qui se termine dans un creux, ce qu'on peut visualiser par



On précise maintenant le phénomène, évoqué plus tôt, d'alternance de syzygies survenant en présence d' (α) -cordes et d' (α^{-n}) -cordes.

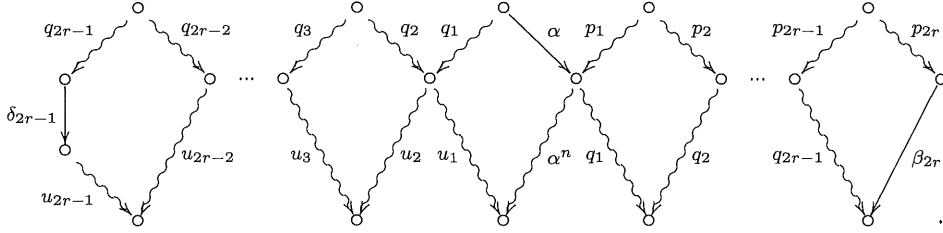
Lemme 3.3.3. *Soit $A = KQ/I$ avec (Q, I) un carquois lié bisériel spécial admettant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$ et une paire binomiale $(\alpha^{n+1}, \alpha_1 \cdots \alpha_m)$ avec $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Dans ce contexte, si w est une (α) -corde, alors l'un des facteurs additifs non nuls de $\Omega(w)$ est une (α^{-n}) -corde.*

DÉMONSTRATION : Remarquons d'abord que si $w = a$, alors $\Omega(w) = \alpha_2 \cdots \alpha_m \alpha^{-n}$, qui est une (α^{-n}) -corde de type 1 avec $r = 0$ et q_1 trivial. En second lieu, on considère le cas où

$$w = q_{2r}^{-1} q_{2r-1} \cdots q_2 q_1^{-1} \alpha p_1^{-1} p_2 \cdots p_{2r-1}^{-1} p_{2r},$$

avec $r \geq 1$ et les p_i, q_i , non triviaux pour $1 \leq i < 2r$, induisant des paires binomiales $(p_{2i-1}q_{2i-1}, p_{2i}q_{2i})$ lorsque $1 \leq i < r$, ainsi qu'une paire binomiale $(p_{2r-1}q_{2r-1}, p_{2r}\beta_{2r}q_{2r})$ avec β_{2r} une flèche. Remarquons ici que $q_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_t$ avec $1 \leq t < m$.

Supposons premièrement que q_{2r} est trivial et qu'il n'existe aucun entier i avec $1 \leq i < r$ tel que q_{2i} soit sériel. Si $r = 1$, alors désignons par u_1 le chemin (peut-être trivial) tel que $\alpha_{t+1}u_1 = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_m$. Notons au passage que nous avons des paires binomiales $(q_1\alpha_{t+1}u_1, \alpha\alpha^n)$ et $(p_1q_1, p_2\beta_2)$. Cela dit, la proposition 2.4.2 nous indique que $\Omega(w) = u_1\alpha^{-n}q_1$ qui est une (α^{-n}) -corde de type 1. On peut maintenant se pencher sur le cas où $r \geq 2$. Soit alors $u_1 = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_m$ puis, pour chaque entier i avec $1 \leq i < r - 1$, soient u_{2i} et u_{2i+1} les chemins non triviaux tels que $(q_{2i}u_{2i}, q_{2i+1}u_{2i+1})$ forme une paire binomiale. Notons finalement δ_{2r-1} la flèche et u_{2r-1}, u_{2r-2} les chemins, avec u_{2r-2} non trivial, tels que $(q_{2r-2}u_{2r-2}, q_{2r-1}\delta_{2r-1}u_{2r-1})$ donne une paire binomiale. On peut visualiser la situation sur le diagramme suivant :



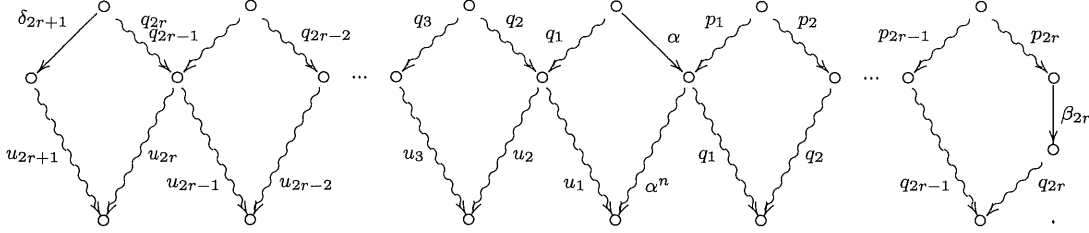
Mais alors, puisqu'aucun des chemins non triviaux p_i et q_j constituant w n'est sériel,

$$\Omega(w) = u_{2r-1}u_{2r-2}^{-1} \cdots u_3u_2^{-1}u_1\alpha^{-n}q_1q_2^{-1} \cdots q_{2r-1},$$

qui est une (α^{-n}) -corde de type 1 (en remplaçant r par $r - 1$ dans 3.3.2).

Supposons maintenant que q_{2r} est non trivial et que chaque q_i est non sériel. Soit $u_1 = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_m$ puis, pour $i = 1, 2, \dots, r - 1$, soient u_{2i} et u_{2i+1} les chemins non triviaux tels que $(q_{2i}u_{2i}, q_{2i+1}u_{2i+1})$ forme une paire binomiale. Notons finalement δ_{2r+1} la flèche et u_{2r}, u_{2r+1} les chemins non triviaux tels que $(q_{2r}u_{2r}, \delta_{2r+1}u_{2r+1})$ donne une paire

binomiale. On peut visualiser la situation sur le diagramme suivant :

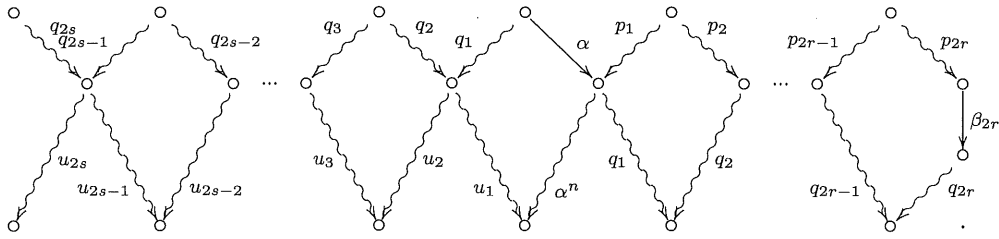


Pour la même raison que précédemment,

$$\Omega(w) = u_{2r+1}u_{2r}^{-1}u_{2r-1}u_{2r-2}^{-1} \cdots u_3u_2^{-1}u_1\alpha^{-n}q_1q_2^{-1} \cdots q_{2r-1}q_{2r}^{-1},$$

qui est encore une (α^{-n}) -corde de type 1 (avec q_{2r+1} trivial dans 3.3.2).

Pour poursuivre, on suppose qu'aucune des situations précédentes n'a lieu. Ainsi, il existe un entier minimal s avec $1 \leq s \leq 2r$ tel que q_{2s} est non trivial et sériel. Soit $u_1 = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_m$ et, pour chaque entier pair i avec $1 \leq i < s$, soient u_{2i} et u_{2i+1} les chemins non triviaux tels que $(q_{2i}u_{2i}, q_{2i+1}u_{2i+1})$ soit une paire binomiale. Finalement, soit u_{2s} le chemin (peut-être trivial) tel que $q_{2s}u_{2s}$ soit une corde qui se termine dans un creux. On peut visualiser la situation sur le diagramme suivant :



Puisque tous les chemins p_i et q_j avec $1 \leq i < 2r$ et $1 \leq j < 2s$ sont non sériels, $\Omega(w)$ admet le facteur additif non nul

$$u_{2s}^{-1}u_{2s-1} \cdots u_3u_2^{-1}u_1\alpha^{-n}q_1q_2^{-1} \cdots q_{2s-1}q_{2s}^{-1} \cdots q_{2r-1}q_{2r}^{-1},$$

qui est une (α^{-n}) -corde de type 2 (avec q_{2r+1} trivial dans 3.3.2).

Nous nous attaquons enfin au dernier cas possible, soit lorsque

$$w = q_{2s-1}^{-1} \cdots q_2 q_1^{-1} \alpha p_1^{-1} p_2 \cdots p_{2s-1}^{-1} p_{2s} \cdots p_{2r-1}^{-1} p_{2r},$$

où $1 \leq s \leq r$ et les p_i, q_j , non triviaux pour $1 \leq i < 2r$ et $1 \leq j < 2s - 1$, induisent une paire binomiale $(p_{2i-1} q_{2i-1}, p_{2i} q_{2i})$ lorsque $1 \leq i < s$, ainsi qu'une corde sérielle $p_{2s-1} q_{2s-1}$ qui se termine dans un creux. Supposons d'abord que chaque q_i est non sériel. Soient δ_{2s-1} la flèche et u_{2s-1}, u_{2s-2} les chemins, avec u_{2s-2} non trivial, tels que $(q_{2s-1} \delta_{2s-1} u_{2s-1}, q_{2s-2} u_{2s-2})$ soit une paire binomiale, où l'on convient d'écrire $q_0 = \alpha$ et $u_0 = \alpha^{-n}$ dans le cas où on aurait $s = 1$, et $u_1 = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_m$ si on a plutôt $s > 1$. Finalement, pour tout entier i avec $2 \leq i < s$, soient u_{2i-1} et u_{2i-2} les chemins non triviaux tels que $(q_{2i-1} u_{2i-1}, q_{2i-2} u_{2i-2})$ soit une paire binomiale. En vertu de l'hypothèse, p_{2s-1} est sériel tandis que les p_i et q_j avec $1 \leq i < 2s - 1$ et $1 \leq j \leq 2s - 1$ sont tous non sériels. Ainsi, $\Omega(w)$ admet comme facteur additif non nul la corde

$$u_{2s-1} u_{2s-2}^{-1} \cdots u_2^{-1} u_1 \alpha^{-n} q_1 q_2^{-1} \cdots q_{2s-2}^{-1} q_{2s-1},$$

qui est une (α^{-n}) -corde de type 1 (en remplaçant r par $s - 1$ dans 3.3.2). Autrement, au moins l'un des q_i avec $1 \leq i \leq 2s - 1$ est sériel. Puisque q_1 est manifestement non sériel, nous devons avoir $s \geq 2$ dans ce cas. Soit alors $d \in \{1, \dots, s - 1\}$ l'entier minimal tel que q_{2d} soit sériel. Notons u_{2d} le chemin tel que $q_{2d} u_{2d}$ soit une corde qui se termine dans un creux. Puisqu'il est non trivial, le chemin q_1 peut s'écrire $q_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_t$ pour un certain $t \in \{1, 2, \dots, m - 1\}$. Posons alors $u_1 = \alpha_{t+1} \cdots \alpha_m$, et, pour chaque entier i avec $1 \leq i < d$, soient u_{2i}, u_{2i+1} les chemins non triviaux tels que $(q_{2i} u_{2i}, q_{2i+1} u_{2i+1})$ soit une paire binomiale. En vertu de l'hypothèse, q_{2d} et p_{2s-1} sont sériels tandis que les autres chemins situés entre eux sur la corde sont non sériels. La première syzygie $\Omega(w)$ admet donc comme facteur additif non trivial le corde

$$u_{2d}^{-1} u_{2d-1} \cdots u_2^{-1} u_1 \alpha^{-n} q_1 q_2^{-1} \cdots q_{2s-2}^{-1} q_{2s-1},$$

qui est une (α^{-n}) -corde de type 2 (en remplaçant s par d et r par $s - 1$ dans 3.3.2). \square

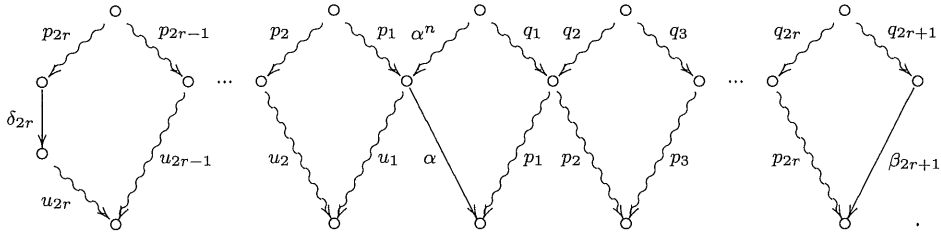
Lemme 3.3.4. Soit $A = KQ/I$ avec (Q, I) un carquois lié bisériel spécial admettant une boucle $\alpha : a \rightarrow a$ et une paire binomiale $(\alpha^{n+1}, \alpha_1 \cdots \alpha_m)$ avec $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Dans ce contexte, si w est une (α^{-n}) -corde, alors l'un des facteurs additifs non nuls de $\Omega(w)$ est une (α) -corde.

DÉMONSTRATION : Soit w une (α^{-n}) -corde. Considérons d'abord le cas où

$$w = p_{2r+1}p_{2r}^{-1} \cdots p_2^{-1}p_1\alpha^{-n}q_1q_2^{-1} \cdots q_{2r}^{-1}q_{2r+1},$$

avec $r \geq 0$ et les p_i, q_i , non triviaux pour $1 \leq i \leq 2r$, induisant une paire binomiale $(q_{2i}p_{2i}, q_{2i+1}p_{2i+1})$ lorsque $0 \leq i < r$, $q_0 = \alpha^n$ et $p_0 = \alpha$, ainsi qu'une paire binomiale $(q_{2r}p_{2r}, q_{2r+1}\beta_{2r+1}p_{2r+1})$ avec β_{2r+1} une flèche.

Supposons premièrement que p_{2r+1} est trivial et qu'il n'existe aucun entier i tel que $1 \leq i \leq r$ et p_{2i-1} est sériel. Si $r = 0$, alors $q_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$ en vertu de l'hypothèse. Ainsi, la proposition 2.4.2 nous indique que $\Omega(w) = a$, qui est une (α) -corde de type 3. On se penche maintenant sur le cas où l'entier $r \geq 1$. On peut alors écrire $p_1 = \alpha_t \cdots \alpha_{m-1}$ pour un certain t avec $1 < t \leq m$. Pour chaque entier pair i avec $1 \leq i \leq r-1$, soient u_{2i} et u_{2i-1} les chemins non triviaux tels que $(p_{2i}u_{2i}, p_{2i-1}u_{2i-1})$ soit une paire binomiale. Finalement, soient δ_{2r} la flèche et u_{2r-1}, u_{2r} les chemins, avec u_{2r-1} non trivial, tels que $(p_{2r}\delta_{2r}u_{2r}, p_{2r-1}u_{2r-1})$ soit une paire binomiale. On peut visualiser la situation sur le diagramme suivant :

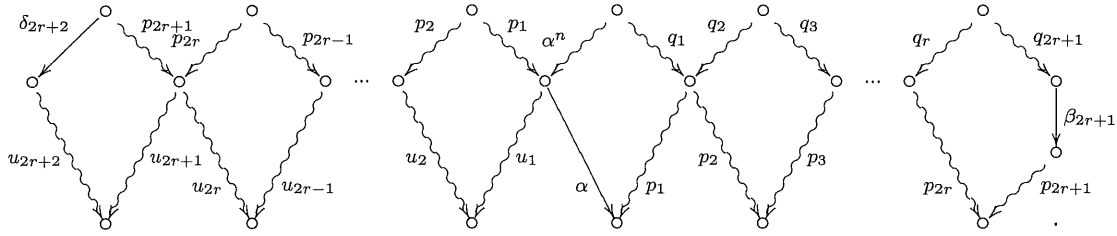


Mais alors, puisqu'aucun des chemins non triviaux p_i et q_j constituant w n'est sériel,

$$\Omega(w) = u_{2r}u_{2r-1}^{-1} \cdots u_2u_1^{-1}\alpha p_1^{-1}p_2p_3^{-1} \cdots p_{2r},$$

qui est une (α) -corde de type 1.

Supposons maintenant que p_{2r+1} est non trivial et que tous les p_i sont non sériels. Pour chaque entier i avec $1 \leq i \leq r$, soient u_{2i-1} et u_{2i} les chemins non triviaux tels que $(p_{2i-1}u_{2i-1}, p_{2i}u_{2i})$ soit une paire binomiale. Finalement, soient δ_{2r+2} la flèche et u_{2r+2}, u_{2r+1} les chemins non triviaux tels que $(p_{2r+1}u_{2r+1}, \delta_{2r+2}u_{2r+2})$ soit une paire binomiale. On peut visualiser la situation sur le diagramme suivant :



Pour la même raison que précédemment,

$$\Omega(w) = u_{r+2}u_{r+1}^{-1}u_ru_{r-1}^{-1} \cdots u_2u_1^{-1}\alpha p_1^{-1}p_2p_3^{-1} \cdots p_{2r}p_{2r+1}^{-1},$$

qui est une (α) -corde de type 1 (en remplaçant r par $r+1$ et avec p_{2r+2} trivial dans 3.3.1).

Pour poursuivre, on suppose qu'aucune des situations précédentes n'a lieu. Ainsi, il existe un entier minimal $s \in \{1, \dots, r\}$ tel que p_{2s-1} est sériel. Soit u_{2s-1} le chemin (peut-être trivial) tel que $p_{2s-1}u_{2s-1}$ soit une corde qui se termine dans un creux. Pour chaque entier i avec $1 \leq i < s$, soient u_{2i-1} et u_{2i} les chemins non triviaux tels que $(q_{2i-1}u_{2i-1}, q_{2i}u_{2i})$ soit une paire binomiale. Puisque tous les chemins p_i, q_j avec $1 \leq i < 2s-1$ et $1 \leq j \leq 2r$ sont non sériels, $\Omega(w)$ admet pour facteur additif non nul la corde

$$u_{2s-1}^{-1}u_{2s-2} \cdots u_2u_1^{-1}\alpha p_1^{-1}p_2 \cdots p_{2s-2}p_{2s-1}^{-1} \cdots p_{2r}p_{2r+1}^{-1},$$

qui est une (α) -corde de type 2 (en remplaçant r par $r+1$ dans 3.3.1 si p_{2r+1} est non trivial).

Nous nous attaquons enfin au dernier cas possible, c'est-à-dire lorsque

$$p_{2s}^{-1} \cdots p_1 \alpha^{-n} q_1 \cdots q_{2s}^{-1} q_{2s+1} \cdots q_{2r}^{-1} q_{2r+1},$$

où $1 \leq s \leq r$ et les p_i, q_j , non triviaux pour $1 \leq i < 2s$ et $1 \leq j < 2r + 1$, induisent une paire binomiale $(q_{2i} p_{2i}, q_{2i+1} p_{2i+1})$ lorsque $1 \leq i < s$, ainsi qu'une corde sérielle $q_{2s} p_{2s}$ qui se termine dans un creux

Supposons d'abord que tous les p_i sont non sériels. Soient δ_{2s} la flèche et u_{2s}, u_{2s-1} les chemins, avec u_{2s-1} non sériel, tels que $(p_{2s} \delta_{2s} u_{2s}, p_{2s-1} u_{2s-1})$ est une paire binomiale. Finalement, pour tout entier i tel que $1 \leq i < s$, soient u_{2i} et u_{2i-1} les chemins non triviaux tels que $(p_{2i} u_{2i}, p_{2i-1} u_{2i-1})$ soit une paire binomiale. Comme, par hypothèse, q_{2s} est sériel tandis que tous les p_i, q_j avec $1 \leq i \leq 2s$ et $1 \leq j < 2s$ sont non sériels, la première syzygie $\Omega(w)$ admet pour facteur additif non nul la corde

$$u_{2s} u_{2s-1}^{-1} \cdots u_2 u_1^{-1} \alpha p_1^{-1} p_2 \cdots p_{2s-1}^{-1} p_{2s},$$

qui est une (α) -corde de type 1 (en remplaçant r par s dans 3.3.1).

Autrement, soit alors $d \in \{1, \dots, s\}$ l'entier minimal tel que p_{2d-1} soit sériel. Notons u_{2d-1} le chemin tel que $p_{2d-1} u_{2d-1}$ soit une corde qui se termine dans un creux, et, pour chaque entier i avec $1 \leq i < d$, soient u_{2i-1}, u_{2i} les chemins non triviaux tels que $(p_{2i} u_{2i}, p_{2i-1} u_{2i-1})$ soit une paire binomiale. Comme, par hypothèse, p_{2d-1} et q_{2s} sont sériels tandis que les autres chemins situés entre eux sur la corde sont non sériels, la première syzygie $\Omega(w)$ admet pour facteur additif non nul la corde

$$u_{2d-1}^{-1} u_{2d-2} \cdots u_2 u_1^{-1} \alpha p_1^{-1} p_2 \cdots p_{2s-1}^{-1} p_{2s},$$

qui est une (α) -corde de type 2 (en remplaçant s par d et r par s dans 3.3.1). \square

Maintenant, grâce à ces deux lemmes, nous pouvons mettre un terme aux spéculations entourant la conjecture forte d'absence de boucles dans le cas d'algèbres bisérielles

spéciales. Afin d'énoncer le prochain théorème dans toute sa généralité, on rappelle les notions suivantes. Soient A l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) et M un A -module. Notons Q_M l'enveloppe convexe dans Q de $S_M = \{a \in Q_0 \mid \text{Hom}_A(P(a), M) \neq 0\}$, c'est-à-dire le carquois tel que $(Q_M)_0$ contient tout sommet situé sur un chemin de source et de but appartenant à S et $(Q_M)_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), b(\alpha) \in S\}$. Le **support convexe** de M est alors le carquois lié (Q_M, I_M) , où $I_M = I \cap (KQ_M)$.

Théorème 3.3.5. *Soient $A = KQ/I$ l'algèbre d'un carquois lié (Q, I) et S un A -module simple admettant une auto-extension non scindée. Si le support convexe de S est bisériel spécial, alors $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$ pour tout $i \geq 1$.*

DÉMONSTRATION : Soient (Q_S, I_S) le support convexe de S et $B = KQ_S/I_S$. Il est connu que $\text{Ext}_A^i(S, S) = \text{Ext}_B^i(S, S)$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que (Q, I) est bisériel spécial.

Il existe donc une boucle, que nous noterons α , autour du sommet a associé au module simple S . Si aucune puissance de α n'est composante du relation binomiale sur Q , alors on obtient le résultat énoncé en appliquant le corollaire 3.2.3. Supposons maintenant qu'il existe une paire binomiale $(\alpha^{n+1}, \alpha_1 \cdots \alpha_m)$ pour certains entiers $n \geq 1$ et $m \geq 2$. Remarquons que $\Omega^0(S) = M(a)$. Supposons, pour $i \geq 0$, que $\Omega^i(S)$ admet pour facteur direct un module de corde associé à une (α) -corde ou une (α^{-n}) -corde. Supposons de plus que $S(a)$ est facteur direct de la coiffe de $\Omega^i(S)$. En utilisant les lemmes 3.3.3 et 3.3.4, on peut conclure que $\Omega^{i+1}(S)$ satisfait aux mêmes hypothèses. Ainsi, pour tout $i \geq 1$, S est facteur direct de la coiffe de $\Omega^i(S)$, ce qui montre que $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$. \square

La conjecture forte d'absence de boucles dans le cas d'algèbres bisérielles spéciales est une conséquence directe de ce théorème.

CHAPITRE 4

La conjecture de Tachikawa

Dans ce chapitre, nous nous proposons de mettre les algèbres bisérielles spéciales locales à l'épreuve la conjecture de Tachikawa.

Nous nous proposons d'abord de rappeler la notion d'algèbre auto-injective. Après quoi, nous ferons un petit historique des développements entourant la conjecture. Finalement, nous montrerons que lorsque l'algèbre étudiée est une algèbre bisérielle spéciale locale, pour tout module indécomposable non projectif M , on peut construire une suite exacte courte non scindée admettant M aux deux extrémités. De ce résultat découlera la validité de la conjecture de Tachikawa pour ce type bien particulier d'algèbres.

4.1 Algèbres auto-injectives

Nous rappellerons ici ce qu'est la notion d'algèbre auto-injective. Cette famille d'algèbres se veut, en quelque sorte, une généralisation des algèbres de groupes finis. On a par la suite établi que toute algèbre d'Artin pouvait s'exprimer comme un quotient d'une

certaine algèbre auto-injective, à savoir son extension triviale (voir [6, IV.2]). En cours de route, plusieurs sous-classes d'algèbres auto-injectives ont été développées, comme les algèbres frobénusiennes et les algèbres symétriques. Toutefois, elles ne seront pas l'objet des prochaines observations. Le lecteur curieux pourra en apprendre davantage à ce sujet en consultant [6, IV.2] et [2, XII.3]

Commençons donc en énonçant la définition formelle d'une algèbre auto-injective.

Définition 4.1.1. Soit A une R -algèbre d'Artin. Alors A est dite **auto-injective** (à droite ou à gauche) si le A -module (à droite ou à gauche, respectivement) A est injectif.

On fournit maintenant une série de résultats généraux déjà connus au sujet des algèbres auto-injectives.

Théorème 4.1.2 ([2, XII.3.2]). *Soit A une R -algèbre noethérienne à droite et à gauche. Alors A est auto-injective (à droite) si et seulement si tout A -module (à droite) projectif est injectif. \square*

Proposition 4.1.3 ([2, XII.3.3]). *Soit A une R -algèbre auto-injective et non semi-simple. Tout A -module M non projectif est de dimension projective infinie. \square*

On considère maintenant le cas où K est un corps et A est une K -algèbre de dimension finie. On a le théorème suivant :

Théorème 4.1.4 ([2, XII.3.4]). *Soit A une K -algèbre de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) A est auto-injective à droite ;
- (b) A est auto-injective à gauche ;
- (c) $(DA)_A$ est un A -module projectif ;
- (d) ${}_A(DA)$ est un A^{op} -module projectif ;

- (e) *Tout A -module injectif de type fini est projectif;*
- (f) *Tout A^{op} -module injectif de type fini est projectif;*
- (g) *Tout A -module injectif de type fini est projectif;*
- (h) *Tout A^{op} -module projectif de type fini est injectif. \square*

Lorsque $A = KQ/I$ pour un carquois lié (Q, I) , nous pouvons utiliser certains des résultats précédents pour établir des conditions nécessaires sur le carquois Q pour que A soit auto-injective, notamment le critère ci-dessous, obtenu dans [23]. Avant de l'énoncer, on rappelle qu'un carquois Q est **connexe par chemins** si pour tous sommets a et b , il existe un chemin $p : a \rightsquigarrow b$ et un chemin $q : b \rightsquigarrow a$.

Proposition 4.1.5 ([23, 3.1 et 3.4]). *Soit (Q, I) un carquois lié. Si $A = KQ/I$ est auto-injective, alors Q est connexe par chemins. Dans ce cas, il existe un cycle orienté $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ tel que $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = Q_1$. \square*

4.2 La conjecture de Tachikawa

Cette section a pour objectif d'apprêter l'étude de la conjecture suivante, dont l'intérêt a été soulevé dans [6, p. 410].

Conjecture 4.2.1 (Tachikawa [52, p. 116]). *Soient A une algèbre d'Artin auto-injective et $M \in \text{mod } A$. Si M n'est pas projectif, alors il existe un $i \geq 1$ tel que $\text{Ext}^i(M, M) \neq 0$.*

Signalons qu'il a été établi dans [50], qu'on ne peut élargir le cadre de cette conjecture au contexte d'anneaux, puisqu'il existe un exemple d'anneau auto-injectif local pour lequel la conjecture n'est pas valide. De plus, on mentionne au passage que la conjecture de Tachikawa peut être vue comme un cas particulier de la conjecture de Nakayama,

une autre conjecture bien connue (voir [6]). Pour des détails plus approfondis, on pourra consulter [52].

On introduit la notion de module *exceptionnel*, ce qui permettra d'alléger le texte au cours des prochaines lignes. Soit A une algèbre d'Artin. Un A -module M est dit **exceptionnel** si $\text{Ext}_A^i(M, M) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi, lorsque reformulée, la conjecture de Tachikawa stipule que sur une algèbre auto-injective, tout module exceptionnel est automatiquement projectif.

Cette conjecture a été démontrée dans plusieurs cas particuliers d'algèbres auto-injectives. Par exemple, grâce à un résultat de Schulz [48], on sait qu'elle est valide dans le cas d'algèbres de représentation finie. Elle a aussi été démontrée pour les algèbres de groupe KG , où K est un corps et G un groupe fini [48, 3.2], pour les extensions triviales d'algèbres héréditaires [27, 3.2], pour les algèbres symétriques de radical cube nul [27, 3.1], ainsi que pour les algèbres locales de radical cube nul [27, 3.4]. Ce dernier cas a été davantage approfondi dans [49], où il est établi que dans ce contexte particulier, on peut fixer $i = 1$ dans la conjecture.

Nous nous proposons ici d'attaquer le cas particulier où A est une algèbre bisérielle spéciale auto-injective locale. Nous tenterons d'abord de classifier ce genre d'algèbres pour ensuite les examiner individuellement. Mais avant de poursuivre, on présente certaines observations qui permettront de simplifier la suite de notre analyse. Ceci fera le pont entre l'approche combinatoire des morphismes en modules de corde de la section 2.3 et l'étude du premier groupe d'auto-extensions d'un module.

Soient M un A -module et $\varepsilon_0 : P_0 \rightarrow M$ une couverture projective. Posons $\iota_0 = \ker \varepsilon_0$. Prenons une résolution projective minimale de M

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \longrightarrow P_{i+1} \xrightarrow{d_i} P_i \xrightarrow{d_{i-1}} P_{i-1} \xrightarrow{d_{i-2}} \cdots \xrightarrow{d_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} M \quad 0.$$

On a donc des suites exactes courtes : $0 \longrightarrow \Omega^i M \xrightarrow{\iota_{i-1}} P_{i-1} \xrightarrow{\varepsilon_{i-1}} \Omega^{i-1} M \longrightarrow 0$, où

$\varepsilon_{i-1} = \text{coker } d_{i-1}$ et $\iota_{i-1} = \text{ker } \varepsilon_{i-1}$. Alors, pour tout $i \geq 1$, on a que

$$\text{Ext}_A^i(M, M) = \text{Hom}_A(\Omega^i M, M) / \{f \iota_i \mid f : P_i \rightarrow M\}.$$

En effet, le groupe $\text{Ext}_A^i(M, M)$ est obtenu en calculant le i^{e} -groupe de cohomologie du complexe $\text{Hom}_A(\mathbf{P}_\bullet, M)$

$$\text{Hom}_A(\mathbf{P}_\bullet, M) : \cdots \longrightarrow (P_{i-1}, M) \xrightarrow{(d_{i-1}, M)} (P_i, M) \xrightarrow{(d_i, M)} (P_{i+1}, M) \xrightarrow{(d_{i+1}, M)} \cdots,$$

c'est-à-dire $\text{Ext}_A^i(M, M) = \text{Ker } (d_i, M) / \text{Im } (d_{i-1}, M)$. Ainsi, pour $f \in \text{Ker } (d_i, M)$, on doit avoir $f d_i = 0$, d'où l'existence requise d'un unique morphisme $f' : \Omega^i M = \text{Coker } d_i \rightarrow M$ tel que $f = f' \text{coker } d_i = f' \varepsilon_i$. C'est pourquoi nous chercherons les éléments de $\text{Hom}_A(\Omega^i M, M)$ qui ne se factorisent pas par ι_{i-1} à droite, ce qui correspond aux éléments ne se factorisant pas via la couverture projective de M .

Soit $f : \Omega M \rightarrow M$. On rappelle comment en déduire une suite exacte courte dont les extrémités sont M . Il suffit de considérer le diagramme commutatif à lignes exactes suivant, où (Q, ϕ, ψ) est la somme amalgamée de f et ι_0 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega M & \xrightarrow{\iota_0} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\phi} & Q & \longrightarrow & M \longrightarrow 0. \end{array}$$

La ligne du bas est la suite exacte cherchée. Remarquons que si f se factorise par ι_0 , c'est-à-dire qu'il existe une application f' telle que $f = f' \iota_0$, la propriété universelle de somme amalgamée nous fournit un morphisme $q : Q \rightarrow M$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega M & \xrightarrow{\iota_0} & P_0 & & \\ \downarrow f & & \downarrow \psi & \searrow f' & \\ M & \xrightarrow{\phi} & Q & \xrightarrow{q} & M \\ & \searrow \varphi & & & \uparrow 1 \end{array}$$

Ceci montre que φ est une section. Ainsi, dans ce cas la suite exacte courte est scindée et correspond donc à l'élément trivial de $\text{Ext}_A^1(M, M)$. On retrouve donc, comme ci-haut, une correspondance entre un élément non trivial du groupe d'extension $\text{Ext}_A^1(M, M)$ et un morphisme de classe non triviale dans $\underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M)$. On pourra tirer profit de celle-ci dans l'interprétation combinatoire des morphismes entre modules de corde. Il suffira en effet d'étudier les morphismes $f : \Omega M \rightarrow M$ qui ne se factorisent pas par la couverture projective de M , qui est toujours projective-injective dans le contexte d'une algèbre auto-injective.

Remarquons enfin que lorsque A est auto-injective, Ω et Ω^{-1} sont des équivalences, quasi-inverses l'une de l'autre, pour la catégorie stable $\underline{\text{mod}} A$ (voir [6, IV.3.5]).

4.3 Le cas des algèbres bisérielles spéciales locales auto-injectives

On se restreint à présent, tel qu'annoncé plus tôt, aux algèbres bisérielles spéciales qui sont à la fois auto-injectives et locales. D'abord, on circonscrit davantage notre domaine d'observation, grâce aux remarques suivantes.

Nous avons mentionné précédemment que la conjecture à l'étude était déjà confirmée dans le cas d'algèbres de représentation finie (voir [48, 3.1(3)]). On remarque au passage que le corollaire 3.2.6 confirmait aussi la conjecture dans le contexte d'une algèbre de carquois lié admettant un module simple τ -invariant, puisqu'il s'agit alors d'une algèbre de Nakayama, et donc de représentation finie (voir [6]).

Nous pouvons donc restreindre notre étude aux algèbres bisérielles spéciales locales $A = KQ/I$ qui ne sont pas de Nakayama, ce qui correspond précisément aux cas où Q

est le carquois à double boucle :

$$Q : \alpha \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} a \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \beta .$$

Maintenant, souvenons-nous qu'à la section 2.5 nous avons obtenu le théorème 2.5.5 indiquant que si (Q, I) est bisériel spécial, alors il existe des entiers $m, n \geq 1$ et un scalaire $\lambda \in K^*$ tels que I est l'un des idéaux suivants :

1. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\beta\alpha)^n \rangle$;
2. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \rangle$;
3. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n \rangle$;
4. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha \rangle$;
5. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\beta\alpha)^n \beta \rangle$;
6. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha, (\beta\alpha)^n \beta \rangle$;
7. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n - \lambda(\beta\alpha)^n \rangle$;
8. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha - \lambda(\beta\alpha)^n \beta \rangle$;
9. $\langle \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^{n+1} - \lambda\beta^{m+1} \rangle$;
10. $\langle \alpha^{n+1}, \beta^{m+1}, \alpha\beta, \beta\alpha \rangle$.

Or pour que $A = KQ/I$ soit auto-injective, tout projectif indécomposable doit être un injectif indécomposable. En particulier, les projectifs doivent être locaux et colocaux. Pour les besoins de notre étude, nous pouvons donc d'emblée éliminer les idéaux qui ne satisfont à cette condition, ou, de manière équivalente, ne conserver que ceux des formes 7, 8 et 9. On reformule ceci au moyen de la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. *Soit $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale auto-injective. Si A est locale, alors I est de l'une des formes suivantes :*

1. $\langle \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^n - \lambda\beta^m \rangle$ avec $n, m \geq 2$ et $\lambda \in K^*$;

2. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n - \lambda(\beta\alpha)^n \rangle$ avec $n \geq 1$ et $\lambda \in K^*$;
3. $\langle \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n \alpha - \lambda\beta(\alpha\beta)^n \rangle$ avec $n \geq 1$ et $\lambda \in K^*$. \square

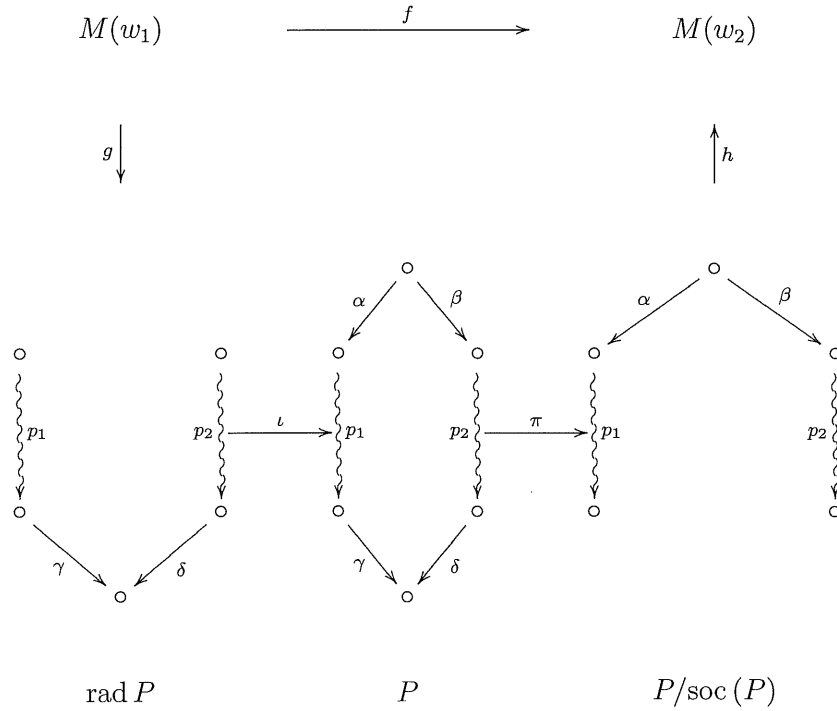
Enfin, comme nous l'avons rappelé à la section 2.2, les objets indécomposables de la catégorie des modules de dimension finie d'une algèbre bisérielle spéciale sont les modules de corde, les modules de bande et les modules projectifs-injectifs indécomposables non sériels. À l'intérieur du cadre qui nous intéresse, à savoir celui d'algèbres auto-injectives, tous les objets projectifs ou injectifs sont projectifs-injectifs. De plus, tel que rappelé à la fin de la section 2.2, on sait que les modules de bande sont τ -invariants. Ainsi, pour tout module de bande M , on a $\tau M \cong M$, d'où $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$. Ainsi, pour confirmer la conjecture de Tachikawa dans le cas des algèbres bisérielles spéciales, il suffit de se concentrer sur un module de corde non projectif arbitraire et de lui dénicher un indice $i > 0$ pour lequel $\text{Ext}_A^i(M, M) \neq 0$. Nous cherchons donc à montrer que les seuls modules exceptionnels dans ce cas-ci sont précisément les projectifs-injectifs.

Dans ce qui suit, nous n'effectuerons qu'une partie de cette tâche en montrant que lorsque A est de surcroît locale, on peut prendre $i = 1$. Pour y parvenir, rappelons d'abord les lemmes 3.1 et 3.2 obtenus dans [47] au moyen du résultat suivant.

Lemme 4.3.2. *Soient $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale, $w_1, w_2 \in \mathcal{C}$ et $f : M(w_1) \rightarrow M(w_2)$ une application-graphe (voir 2.3). Si f se factorise par une somme directe de projectifs-injectifs non unisériels, alors elle est non élaguée.*

DÉMONSTRATION : Soit $f : M(w_1) \rightarrow M(w_2)$ une application-graphe qui se factorise en $f_2 f_1$, avec $f_1 : M(w_1) \rightarrow P$, $f_2 : P \rightarrow M(w_2)$ et P un projectif-injectif non unisériel. On peut supposer sans perte de généralité que P est indécomposable. Soit $\rho = (\alpha p_1 \gamma, \beta p_2 \delta)$ la paire binomiale associée au projectif-injectif P , où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des flèches et p_1, p_2 des chemins.

Notons $\iota : \text{rad } P \rightarrow P$ l'inclusion et $\pi : P \rightarrow P/\text{soc } P$ la projection canonique. Il est clair que $M(w_1) \not\cong P$, puisque P , non unisériel, ne peut être un module de corde. Ainsi, f_1 n'est pas un isomorphisme et ne peut donc être surjectif. Comme P est un module local, f_1 doit donc se factoriser par son radical $\text{rad } P$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $g : M(w_1) \rightarrow \text{rad } P$ tel que $f_1 = \iota g$. De plus, $\text{rad } P$ est le module de corde $M(p_1 \gamma \delta^{-1} p_2^{-1})$. Dualement, comme P est aussi de colocal, il existe un morphisme $h : P/\text{soc } P \rightarrow M(w_2)$ tel que $f_2 = h\pi$ et $P/\text{soc } (P) = M(p_1^{-1} \alpha^{-1} \beta p_2)$. On peut visualiser ceci sur le diagramme suivant :



On peut trouver des bases $\{f_{a_1}, \dots, f_{a_r}\}$ et $\{f_{b_1}, \dots, f_{b_s}\}$ de $\text{Hom}_A(M(w_1), \text{rad } P)$ et $\text{Hom}_A(P/\text{soc } P, M(w_2))$, avec les f_{a_i}, f_{b_j} des applications-graphes. Ainsi, $g = \sum_{i=1}^r \lambda_i f_{a_i}$ et $h = \sum_{j=1}^s \mu_j f_{b_j}$. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \lambda_i \mu_j f_{b_j} \pi \iota f_{a_i}.$$

Considérons les éléments

$$a = \left(\begin{array}{c|c} p_2^{-1}\beta^{-1}\alpha & p_1 \\ \hline s(p_1) & \gamma\delta^{-1}p_2^{-1} \end{array} \middle| \begin{array}{c} b(p_1) \\ \hline \gamma\delta^{-1}p_2^{-1} \end{array} \right), \quad b = \left(\begin{array}{c|c} b(p_2) & p_2^{-1} \\ \hline p_1\gamma\delta^{-1} & p_2^{-1} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \alpha^{-1}\beta p_1 \\ \hline s(p_2) \end{array} \right) \in \mathcal{A}(p_1\gamma\delta^{-1}p_2^{-1}, p_1^{-1}\alpha^{-1}\beta p_2).$$

Ces couples sont clairement non élagués et induisent des morphismes f_a et f_b de $\text{Hom}_A(\text{rad}(P), P/\text{soc}(P))$ tels que $\pi\iota = f_a + f_b$. Ainsi, en vertu des propriétés énoncées dans 2.3.3, toute composition $f_{b_j}\pi\iota f_{a_i}$ est soit nulle soit une somme d'applications-graphes non élaguées. \square

On peut dès lors comprendre comment élaborer, à partir de ce résultat, une méthode d'analyse utile pour nos fins. Et qui plus est, il conviendra de s'équiper des techniques présentées à la section 2.4. En effet, d'après ce qu'on y a vu, la sous-catégorie $\text{add}(M(\mathcal{C}))$ des sommes directes de modules de corde est stable pour l'action de Ω et Ω^{-1} . On rappelle d'ailleurs l'action de Ω sur les cordes, inspirée de la section 2.4 :

$$\Omega : \mathbb{Z}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}$$

$$w \mapsto n_1w_1 + \cdots + n_rw_r$$

où $w_1, \dots, w_r \in \mathcal{C}$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ sont tels que $\Omega(M(w)) = \bigoplus_{i=1}^r M(w_i)^{n_i}$. On peut d'ailleurs montrer que $\Omega(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C} \cup \{0\}$ (voir par exemple [48]).

Par dualité, on peut déduire l'action Ω^{-1} sur les mêmes objets :

$$\Omega^{-1} : \mathbb{Z}\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}$$

$$w' \mapsto m_1w'_1 + \cdots + m_sw'_s$$

où $w'_1, \dots, w'_s \in \mathcal{C}$ et $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}$ sont tels que $\Omega^{-1}(M(w')) = \bigoplus_{j=1}^s M(w'_j)^{m_j}$.

On obtient alors le résultat suivant.

Lemme 4.3.3. *Soient (Q, I) un carquois bisériel spécial et $w = p_1^{-1}q_1 \cdots p_t^{-1}q_t$ une corde avec p_1 et p_t non sériels. Considérant l'algèbre KQ/I , on a les propriétés suivantes :*

1. si w commence et termine dans un creux avec p_1 et q_t non triviaux, alors

$$\dim_K \text{top } M(\Omega w) = t - 1;$$

2. si w commence et termine dans un pic avec p_1 et q_t triviaux, alors

$$\dim_K \text{top } M(\Omega^{-1}w) = t - 1.$$

DÉMONSTRATION : On applique les résultats de la section 2.4 à la corde w pour trouver des flèches β_1 et β_t et des chemins u_i et v_i tels que l'on ait des paires binomiales $(p_1\beta_1, q_1v_1)$, $(p_tu_t, q_t\beta_t)$ et (p_iu_i, q_iv_i) pour chaque p_i est non sériel avec $1 < i < t$, ainsi que des cordes se terminant dans un creux p_ju_j et q_jv_j pour chaque p_j sériel avec $1 < j < t$. Notant $w_i = v_i^{-1}u_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \dots, t - 1$, on peut alors construire sans peine un épimorphisme minimal

$$\bigoplus_{i=1}^{t-1} M(w_i) \twoheadrightarrow M(\Omega w) \cong \Omega M(w).$$

Or chacun des $M(w_i)$ étant local, on a

$$\dim_K \text{top } M(\Omega w) = \sum_{i=1}^{t-1} \dim_K \text{top } M(w_i) = t - 1.$$

Ceci montre la première propriété. L'autre se montre de manière duale. \square

Avec tout cet arsenal en main, nous sommes d'attaque pour affronter notre problème. L'étape stratégique de cette frappe se cache dans les trois lemmes suivants.

Lemme 4.3.4. *Soient $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale auto-injective locale et M un A -module de corde. Si I est de la forme 4.3.1(1), alors il existe un morphisme $f : \Omega M \rightarrow M$ tel que f ne se factorise pas par A .*

DÉMONSTRATION : Supposons que l'idéal I est de la forme 4.3.1(1). Soit $w = p_1^{-1}q_1 \cdots p_t^{-1}q_t$ une corde telle que $M \cong M(w)$, où p_i, q_j sont des chemins qui

ne sont composantes d'aucune relation de I . On peut supposer sans perte de généralité que pour tous i, j on a $p_i = \alpha^{n_i}$ et $q_j = \beta^{m_j}$, avec $0 < n_i < n$ et $0 < m_j < m$ pour $1 < i \leq t$ et $1 \leq j < t$ et $0 \leq n_1 < n$, $0 \leq m_t < m$. Ainsi,

$$\Omega(w) = w' = u_1 v_1^{-1} \cdots u_t v_t^{-1}$$

où $u_i = \alpha^{n'_i - \delta_{it}}$ et $v_i = \beta^{m'_i - \delta_{it}}$, les n'_i, m'_i étant tirés des relations $n_i + n'_i = n$ et $m_i + m'_i = m$ et δ_{ij} étant le delta de Kronecker.

On procède par récurrence sur t , la dimension de la coiffe de M , pour trouver un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^n w, \Omega^{n+1} w)$ admette un élément élagué.

Si $t = 1$, on fait face à trois cas. D'abord, lorsque $n_1 = 0$, on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w^{-1} \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}) \in \mathcal{A}(\Omega w^{-1}, w)$. Si on a plutôt $0 < n_1 < n-1$, alors on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. Enfin, la seule autre possibilité survient lorsque $n_1 = n-1$, auquel cas on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w^{-1} \\ \Omega w \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}) \in \mathcal{A}(\Omega w, w^{-1})$.

Supposons maintenant que $t \geq 2$ et que pour toute corde w' avec $\dim_K \text{top } M(w') = t-1$ il existe un $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^{n'} w', \Omega^{n'+1} w')$ admette un élément élagué. On conditionne encore ici notre étude selon la valeur de n_1 . D'abord, lorsque $n_1 = 0$, trois situations peuvent se présenter. Si $m_t = m-1$, on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w^{-1} \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix})$ de $\mathcal{A}(\Omega w^{-1}, w)$. Si $0 < m_t < m-1$, on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix})$ de $\mathcal{A}(\Omega w, w)$. Autrement, $m_t = 0$ entraîne que w commence et termine dans un pic, d'où $\dim_K \text{top } M(\Omega^{-1} w) = t-1$ en vertu de 4.3.3(2). On applique alors l'hypothèse de récurrence à la corde $\Omega^{-1} w$, pour trouver un $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^{n'} w, \Omega^{n'+1} w)$ admette un couple élagué x' . Ensuite, lorsque $0 < n_1 < n-1$, on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix}) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. Finalement, lorsque $n_1 = n-1$, trois situations peuvent survenir. D'abord, si $m_t = 0$, on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w^{-1} \\ \Omega w \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}) \in \mathcal{A}(\Omega w, w^{-1})$. Si on a plutôt $0 < m_t < m-1$, on trouve le couple élagué $(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. En dernier lieu, $m_t = m-1$ entraîne que w commence et termine dans un creux, d'où $\dim_K \text{top } M(\Omega w) = t-1$ en vertu de 4.3.3(1).

On applique alors l'hypothèse de récurrence à la corde Ωw pour trouver un $m' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^{m'} w, \Omega^{m'+1} w)$ admette un couple élagué y' .

Ainsi, rappelant que Ω est une équivalence dans le contexte d'une algèbre auto-injective, pour toute corde w on peut trouver un couple élagué $x \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$, donnant lieu à un morphisme élagué $f_x \in \text{Hom}_A(\Omega M(w), M(w))$. En vertu du lemme 4.3.2, f_x ne peut se factoriser par A qui est projectif indécomposable et non unisériel. \square

La démonstration du prochain lemme s'inspirera fortement de la précédente, à cette distinction près qu'ici nous devons gérer une notation un peu plus lourde pour couvrir tous les cas possibles.

Lemme 4.3.5. *Soient $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale auto-injective locale et M un A -module de corde. Si I est de la forme 4.3.1(2) ou de la forme 4.3.1(3) alors il existe un morphisme $f : \Omega M \rightarrow M$ tel que f ne se factorise pas par A .*

DÉMONSTRATION : Supposons que l'idéal I est de l'une des formes énoncées et posons

$$N_I = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } I \text{ est de la forme 4.3.1(2),} \\ 2n & \text{si } I \text{ est de la forme 4.3.1(3).} \end{cases}$$

Soit $w = p_1^{-1} q_1 \cdots p_t^{-1} q_t$ une corde telle que $M \cong M(w)$, où p_i, q_j sont des chemins qui ne sont composantes d'aucune relation de I . Pour chacun des p_i, q_i , quatre formes sont *a priori* possibles : $(\alpha\beta)^k, (\alpha\beta)^k\alpha, (\beta\alpha)^k$ et $(\beta\alpha)^k\beta$. Ainsi, en se rappelant que w est réduite, on peut écrire de manière générale

$$p_i = \beta^{e_i} (\alpha\beta)^{n_i} \alpha^{f_{i-1}} \quad \text{et} \quad q_i = \alpha^{e_i} (\beta\alpha)^{m_i} \beta^{f_i},$$

où $e_i, f_i \in \{0, 1\}$, $n_i + e_i f_{i-1} < n$ et $m_i + e_i f_i < n$. Sans perte de généralité, on peut aussi fixer $f_0 = 0$, quitte à permuter les noms des flèches α et β . Grâce aux résultats de

la section 2.4, on obtient alors $\Omega(w) = w' = u_1 v_1^{-1} \dots u_t v_t^{-1}$ où

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{cases} \beta(\alpha\beta)^{(n-1)-n_1} & \text{si } e_1 = 0, \\ (\beta\alpha)^{(n-1)-(n_1+f_0)} & \text{si } e_1 = 1, \end{cases} \\ v_i &= \alpha^{f_i} (\beta\alpha)^{m'_i} \beta^{e_i}, & i = 1, 2, \dots, t-1, \\ u_i &= \beta^{f_{i-1}} (\alpha\beta)^{n'_i} \alpha^{e_i}, & i = 2, 3, \dots, t, \\ v_t &= \begin{cases} \alpha^{(1-f_t)} (\beta\alpha)^{(n-1)-m_t} & \text{si } e_t = 0, \\ \beta^{f_t} (\alpha\beta)^{(n-1)-(m_t+f_t)} & \text{si } e_t = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

les n'_i, m'_i étant obtenus pour $i = 1, 2, \dots, t$ de manière à satisfaire les relations

$$2n_i + 2n'_i + e_i + f_{i-1} = 2n = 2m_i + 2m'_i + e_i + f_i.$$

On procède par récurrence sur t , la dimension de la coiffe de M , pour trouver un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^n w, \Omega^{n+1} w)$ admette un élément élagué.

Si $t = 1$, on fait face à trois cas. D'abord, lorsque $e_1 + 2n_1 = 0$, on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} w^{-1} \\ \Omega w \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w, w^{-1})$. Si on a plutôt $0 < e_1 + 2n_1 < N_I$, alors on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. Enfin, la seule autre possibilité survient lorsque $e_1 + 2n_1 = N_I$, auquel cas on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} w \\ \Omega w^{-1} \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w^{-1}, w)$.

Supposons maintenant que $t \geq 2$ et que pour toute corde w' avec $\dim_K \text{top } M(w') = t - 1$ il existe un $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^{n'} w', \Omega^{n'+1} w')$ admette un élément élagué. On conditionne encore ici notre étude selon la valeur de $e_1 + 2n_1$. D'abord, lorsque $e_1 + 2n_1 = 0$, trois situations peuvent se présenter. Si $e_t + 2m_t + f_t = N_I$, on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w^{-1} \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w^{-1}, w)$. Si $0 < e_t + 2m_t + f_t < N_I$, on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. Autrement, $e_t + 2m_t + f_t = 0$ entraîne que w commence et termine dans un pic, d'où $\dim_K \text{top } M(\Omega^{-1} w) = t - 1$ en vertu de 4.3.3(2). On applique alors l'hypothèse de récurrence à la corde $w' = \Omega^{-1} w$, pour trouver un $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^{n'} w', \Omega^{n'+1} w')$ admette un élément élagué x' . Ensuite, lorsque $0 < e_1 + 2n_1 < N_I$, on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} w \\ \Omega w \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. Finalement, $e_1 + 2n_1 = N_I$, trois

situations peuvent survenir. D'abord, si $e_t + 2m_t + f_t = 0$, on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} w^{-1} & a & a \\ \Omega w & a & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w, w^{-1})$. Si on a plutôt $0 < e_t + 2m_t + f_t < N_I$, on trouve le couple élagué $\left(\begin{smallmatrix} w & a & a \\ \Omega w & a & a \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$. En dernier lieu, $e_t + 2m_t + f_t = N_I$ entraîne que Ωw commence et termine dans un creux, d'où $\dim_K \text{top } M(\Omega w) = t - 1$ en vertu de 4.3.3(1). On applique alors l'hypothèse de récurrence à la corde $w'' = \Omega w$ pour trouver un $m' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A}(\Omega^{m'} \Omega w'', \Omega^{m'+1} \Omega w'')$ admette un élément élagué y' .

Ainsi, rappelant que Ω est une équivalence dans le contexte d'une algèbre auto-injective, pour toute corde w on peut trouver un couple élagué $x \in \mathcal{A}(\Omega w, w)$, donnant lieu à un morphisme élagué $f_x \in \text{Hom}_A(\Omega M(w), M(w))$. En vertu du lemme 4.3.2, f_x ne peut se factoriser par A qui est projectif indécomposable et non unisériel. \square

Ces interventions étant complétées avec succès, on peut dès lors avancer le résultat suivant.

Théorème 4.3.6. *Soit $A = KQ/I$ une algèbre bisérielle spéciale locale. Si A est auto-injective, alors un module M est projectif si et seulement si $\text{Ext}^1(M, M) = 0$.*

DÉMONSTRATION : Sans perdre de généralité, on peut supposer que A n'est pas une algèbre de Nakayama. Alors nous savons que I est d'une des formes 4.3.1(1), 4.3.1(2) ou 4.3.1(3) énumérées ci-haut. Soit $M \in \text{mod } A$. Si M est projectif, le foncteur $\text{Ext}^1(M, -)$ est nul, d'où $\text{Ext}_A^1(M, M) = 0$. Supposons donc M non projectif. Tel que mentionné précédemment, on peut supposer que M est un module de corde. On applique alors les lemmes 4.3.4 et 4.3.5 pour trouver un $f \in \text{Hom}_A(\Omega M, M)$ qui ne se factorise pas par A , le seul A -module projectif indécomposable. Ainsi, $\underline{\text{Hom}}_A(\Omega M, M) \neq 0$ donne $\text{Ext}_A^1(M, M) \neq 0$. \square

La conjecture de Tachikawa dans le cas des algèbres bisérielles spéciales locales découle alors directement de ce résultat.

CONCLUSION

C'est ici que s'achève cette incursion dans le merveilleux monde des algèbres d'Artin et de leurs représentations. Ce bref voyage nous a donné l'occasion d'effectuer plusieurs observations et de vérifier certaines hypothèses. Il est évident qu'un séjour prolongé permettrait d'approfondir davantage. Nous présentons ici quelques avenues potentiellement pertinentes à explorer de plus près, énumérées chronologiquement par rapport à ce mémoire.

À la section 2.3, nous avons rappelé et quelque peu reformulé les idées de Crawley-Boevey et Schröer concernant les morphismes entre modules de cordes. Krause a aussi adapté ceci aux modules de bande. Il serait maintenant intéressant d'utiliser ceci, et éventuellement les démonstrations de la section 4.3, pour interpréter visuellement les produits fibrés et sommes amalgamées de morphismes entre modules de corde et entre modules de bande. On pourrait aussi penser à l'adapter aux non-isomorphismes impliquant des modules projectifs-injectifs indécomposables, sachant qu'on peut alors les restreindre au quotient par le socle ou les co-restreindre au radical.

À la section 2.4, nous avons formalisé une méthode intuitive et visuelle de calcul de syzygies de modules de cordes. Il est très probable que cette méthode puisse s'adapter au calcul des syzygies de modules de bande. De cette manière, la méthode serait applicable à tout module indécomposable sur une algèbre bisérielle spéciale.

En ce qui concerne la conjecture forte d'absence de boucles, étudiée à la section 3.3, il est possible que la technique utilisée puisse être étendue à un cadre plus général que les algèbres bisérielles spéciales. Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Happel a en effet construit un exemple, cité dans [25], où le résultat précédent ne tient plus. Il suffit de considérer l'algèbre du carquois lié (Q, I) où

$$Q : \alpha \circlearrowleft 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xleftarrow{\gamma} \end{array} 2$$

et $I = \langle \alpha^2 - \beta\gamma, \gamma\alpha\beta, \gamma\beta \rangle$. Si l'on note S le module simple associé au sommet 1, un calcul direct montre que pour tout $i \geq 1$, $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$ si et seulement si $i \equiv 3 \pmod{4}$. Ainsi, il est possible d'avoir un module simple S avec $\text{Ext}_A^1(S, S) \neq 0$ mais $\text{Ext}_A^i(S, S) = 0$ pour un nombre infini d'entiers, dans un contexte non bisériel spécial.

Il est néanmoins possible d'envisager une conjecture encore plus forte que la *Strong no loops conjecture* :

Conjecture 4.3.7 (Extreme no loops conjecture [33]). *Soient A une algèbre d'Artin et S un A -module simple tel que $\text{Ext}_A^1(S, S) \neq 0$. Alors $\text{Ext}_A^i(S, S) \neq 0$ pour un nombre infini d'entiers i .*

Finalement, en ce qui a trait au dernier chapitre, réservé à l'étude de la conjecture de Tachikawa, on souhaiterait évidemment établir le résultat pour toute algèbre bisérielle spéciale auto-injective.

Une première curiosité serait de vérifier si la technique utilisée correspond à celle qu'on pourrait développer au moyen de la formule d'Auslander-Reiten combinée avec les descriptions des suites exactes presque scindées de modules de cordes obtenues dans [11] et [17].

Il y a aussi lieu de s'interroger sur le potentiel de caractérisations du carquois d'algèbres $A = KQ/I$ bisérielles spéciales auto-injectives comme les suivantes, tirées de la

section 2 de [16] ou se montrant aisément :

1. si A n'est pas semi-simple, alors pour toute flèche β de Q , il existe des flèches α, γ telles que $\alpha\beta, \beta\gamma \notin I$;
2. pour tout sommet a de Q , le nombre de flèches de source a est égal au nombre de flèches de but a ;
3. le foncteur de Nakayama $\nu = \text{DHom}_A(-, A)$ induit une permutation, dite **de Nakayama**, reliant les sommets de Q correspondant aux coiffe et socle d'un même module projectif-injectif indécomposable, et cette permutation préserve les nombres de flèches attachées ;
4. tout sommet source de deux flèches distinctes est associé à un module projectif-injectif non unisériel.

On peut, entre autres, envisager de reprendre la technique de la section 4.3 en symbiose avec une récurrence sur le nombre de sommets associés à un module projectif unisériel. Il semble en effet que, dans ce cas, les calculs de syzygies résistent bien à une sorte de fusion des flèches attachées à un tel sommet. On devra alors s'attendre à devoir fouiller dans les groupes d'auto-extensions d'ordres supérieurs à 1, dans un contexte de vérification de la conjecture de Tachikawa.

On pourrait aussi tirer profit des travaux de [53], où l'on montre que toute algèbre bisérielle spéciale peut s'obtenir à partir des *trajectoires* de flèches du carquois Q , sachant que celles-ci sont toutes cycliques dans le cas auto-injectif.

Enfin, on pourrait aussi vérifier les rapprochements possibles avec les cas traités par Erdmann, Pogorzały et Skowroński dans [15], [38], [39], [40] et [41].

On comprend dès lors que le sujet n'est nullement épuisé et que bien d'autres approches pourraient être tentées pour vérifier les deux conjectures qui ont fait l'objet de ce mémoire.

Bibliographie

- [1] D. Anick, *Nato Algebra conference*, Lecture, Antwerp, 1987.
- [2] I. Assem, *Algèbres et modules. cours et exercices*, Enseignement des mathématiques, Les Presses de l'Université d'Ottawa, Ottawa, 1997.
- [3] I. Assem and D. Happel, *Iterated tilted algebras of type \tilde{A}_n* , *Comm. Algebra* **9** (1981), 2101–2125.
- [4] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [5] I. Assem and A. Skowroński, *Generalized tilted algebras of type A_n* , *Math. Z.* **195** (1987), 269–290.
- [6] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [7] M. J. Bardzell, *The alternating syzygy behavior of monomial algebras*, *J. Algebra* **188** (1997), 69–89.
- [8] R. Bautista, *Irreducible morphisms and the radical of a category*, *An. Inst. Math., UNAM* (1982), 83–135.

- [9] W. D. Burgess and M. Saorín, *Homological aspects of semigroup gradings on rings and algebras*, *Canad. J. Math.* **51** (1999), no. 3, 488–505.
- [10] M. C. R. Butler, *Entretien privé*, 2003.
- [11] M. C. R. Butler and C. M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, *Comm. Algebra* **15** (1987), 145–179.
- [12] W. W. Crawley-Boevey, *Maps between representations of zero-relation algebras*, *J. Algebra* **126** (1989), 259–263.
- [13] P. W. Donovan, *Dihedral defect groups*, *J. Algebra* **56** (1979), 184–206.
- [14] K. Erdmann, *Algebras and dihedral defect groups*, *Proc. London Math. Soc.* **54** (1987), 88–114.
- [15] K. Erdmann and O. Kerner, *On the stable module category of a self-injective algebra*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), no. 5, 2389–2405.
- [16] K. Erdmann and C. Sáenz, *On standardly stratified algebras*, *Comm. Algebra* **31** (2003), no. 7, 3429–3446.
- [17] K. Erdmann and A. Skowroński, *On Auslander-Reiten components of blocks and self-injective biserial algebras*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), 165–189.
- [18] K. R. Fuller, *Biserial rings*, vol. 734, Springer Lecture Notes in Math., 1979.
- [19] K. R. Fuller and B. Zimmermann-Huisgen, *On the generalized Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **294** (1986), 679–691.
- [20] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen I*, *Manuscripta Math.* **6** (1972), 71–103.
- [21] ———, *The universal cover of a representation finite algebra*, Proceedings ICRA III (Puebla, 1980), Springer Lecture Notes in Math., vol. 903, 1981, pp. 68–105.
- [22] I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev, *Indecomposable representations of the Lorentz group*, *Russian Math. Surveys* **23** (1968), 1–58.

- [23] E. L. Green, *Frobenius algebras and their quivers*, *Canad. J. Math.* **30** (1978), no. 5, 1029–1044.
- [24] E. L. Green, W. H. Gustafson, and D. Zacharia, *Artin rings of global dimension two*, *J. Algebra* **92** (1985), 375–379.
- [25] E. L. Green, Ø. Solberg, and D. Zacharia, *Minimal projective resolutions*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 2915–2939.
- [26] W. R. Hamilton, *Theory of conjugate functions, on algebraic couples*, *Trans. Royal Irish Acad.* **17** (1837), 293–422.
- [27] M. Hoshino, *Modules without self-extensions and Nakayama’s conjecture*, *Arch. Math.* **43** (1984), 493–500.
- [28] K. Igusa, *Notes on the no loops conjecture*, *J. Pure Appl. Algebra* **69** (1990), no. 2, 161–176.
- [29] G. Janusz, *Indecomposable modules for finite groups*, *Ann. Math.* **89** (1969), 209–241.
- [30] H. Krause, *Maps between tree and band modules*, *J. Algebra* **137** (1991), 186–194.
- [31] H. Kupisch, *Unzerlegbare Moduln endlicher Gruppen mit zyklischer p -Sylowgruppe*, *Math. Z.* **108** (1969), 77–104.
- [32] H. Lenzing, *Nilpotente elemente in ringen von endlicher globaler dimension*, *Math. Z.* **108** (1969), 313–324.
- [33] S. Liu and J.-P. Morin, *The strong no loop conjecture for special biserial algebras*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 3513–3523.
- [34] S. Liu and C. Paquette, *Some homological conjectures for quasi-stratified algebras*, Preprint, 2005.
- [35] R. Martinez-Villa and J.A. de la Peña, *The universal cover of a quiver with relations*, *J. Pure Appl. Algebra* **30** (1983), 277–292.
- [36] T. Nakayama, *On Frobeniusean algebras*, *Ann. Math.* **40** (1939), 611–633.

- [37] E. Noether, *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*, Math. Z. **30** (1929), 641–692.
- [38] Z. Pogorzały, *Regularly biserial algebras*, Topics in algebra **26** (1990), 371–384.
- [39] ———, *On a construction of algebras stably equivalent to selfinjective special biserial algebras*, Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), 65–97.
- [40] ———, *Algebras stably equivalent to selfinjective special biserial algebras*, preprint, 1998.
- [41] Z. Pogorzały and A. Skowroński, *Selfinjective biserial standard algebras*, J. Algebra **138** (1991), 491–504.
- [42] C. M. Ringel, *The indecomposable representations of the dihedral 2-groups*, Math. Ann. **214** (1975), 19–34.
- [43] V. Robert, *C'est la faute de maman!*, L'actualité **29** (2004), no. 5, 43.
- [44] J. Schröer, *Modules without self-extensions over gentle algebras*, J. Algebra **216** (1997), 178–189.
- [45] ———, *On the infinite radical of a module category*, Proc. London Math. Soc. **83** (2000), no. 3, 651–674.
- [46] ———, *Varieties of pairs of nilpotent matrices annihilating each other*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), 396–426.
- [47] J. Schröer and A. Zimmermann, *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*, Math. Z. **244** (2003), 515–530.
- [48] R. Schulz, *Boundedness and periodicity of modules over QF rings*, J. Algebra **101** (1986), 450–469.
- [49] ———, *Modules without self-extensions over radical cube zero rings*, J. Algebra **167** (1994), 100–103.

- [50] ———, *A non-projective module without self-extensions*, Arch. Math. **62** (1994), 497–500.
- [51] A. Skowroński and J. Waschbüsch, *Representation-finite biserial algebras*, J. Reine Angew. Math. **345** (1983), 172–181.
- [52] H. Tachikawa, *Quasi-Frobenius rings and generalizations*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [53] B. Wald and J. Waschbüsch, *Tame biserial algebras*, J. Algebra **95** (1985), 480–500.