

**Ensembles cubiques : Topologie et algorithmes de correction
d'homologie.**

par

Anik Trahan

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 2004

Le 27 avril 2004,
Date

le jury a accepté le mémoire de M. Anik Trahan dans sa version finale.

Membres du jury

M. Tomasz Kaczynski
Directeur
Département de mathématiques

M. Madjid Allili
Membre
- Bishop's University

M. François Dubeau
Président-rapporteur
Département de mathématiques

SOMMAIRE

L'homologie est un outil pour extraire de l'information spécifique des objets géométriques. Pour les besoins actuels, l'ordinateur est devenu essentiel pour effectuer les lourds calculs d'homologie. C'est dans le but d'améliorer les algorithmes que la théorie des ensembles cubiques a été développée. Pour calculer l'homologie sur des ensembles cubiques, il faut connaître les propriétés des ensembles cubiques, les ensembles représentables, le produit cubique et l'opérateur frontière.

Dans ce mémoire, nous présentons en premier la théorie de base sur l'homologie des ensembles cubiques dans \mathbb{R}^d . Ensuite, nous présentons une nouvelle topologie non-métrique qui permet de mettre en évidence les propriétés des ensembles cubiques et des fonctions continues par rapport à cette topologie. Ces fonctions rendent la functorialité de l'homologie. Finalement, nous donnons des algorithmes pour représenter certains types de figures planes par des ensembles cubiques qui ont la même homologie que les figures initiales.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, Monsieur Tomasz Kaczynski, pour m'avoir conseillé et épaulé tout au long de ma maîtrise. Sa passion pour la recherche mathématique et sa bonne humeur font de lui un modèle. Je tiens aussi à remercier tous les autres membres du groupe de Topologie computationnelle : Sylvain Bérubé, David Corriveau et Madjid Allili. Grâce à ce groupe de travail, j'ai pu échanger plusieurs idées qui furent grandement utiles dans mes recherches et dans la rédaction de mon mémoire. Je tiens aussi à remercier plusieurs amis du baccalauréat : David Smith, Julie Dionne et Jonathan Ruel qui m'ont soutenu et conseillé sur plusieurs aspects techniques de la vie d'un étudiant de maîtrise. Finalement, je voudrais remercier le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie (CRSNG) et l'Équipe de dynamique non-linéaire pour leur soutien financier.

Anik Trahan
Sherbrooke, avril 2004

Table des matières

SOMMAIRE	ii
REMERCIEMENTS	iii
INTRODUCTION	1
Chapitre 1 — Homologie des ensembles cubiques	3
1.1 Ensembles cubiques	4
1.2 Ensembles représentables	7
1.3 Algèbre des ensembles cubiques	12
1.4 Homologie des ensembles cubiques	17
1.5 Programmes sur des ensembles cubiques	23
Chapitre 2 — Topologie des ensembles cubiques	25
2.1 Topologie de fermés	25
2.2 Propriétés de la topologie cubique	28

2.3	Homologie d'une fonction cubique	33
Chapitre 3 — Algorithmes de correction d'homologie		49
3.1	Figures polygonales	50
3.2	Figures de classe C^1	57
3.3	Figures de classe C^1 par morceaux	58
CONCLUSION		63
ANNEXE A		65
ANNEXE B		68

Liste des figures

1.1	Figures produites par CUBTOP	24
3.1	Exemple de recouvrement	51
3.2	Preuve 3.1.7	54
3.3	Figure polygonale B	55
3.4	Recouvrement cubique de B	56
3.5	Recouvrement cubique d'échelle $\frac{1}{9}$ de B	56
3.6	Représentation cubique de B avec la même homologie	57
3.7	Figure C^1 par morceau	60
3.8	Tangentes et sécantes au point d'intersection	61
3.9	4 triangles formés par les sécantes	62
3.10	Ensemble cubique	65
3.11	Faces propres	65
3.12	Union disjointe	66
3.13	Données d'un plan projectif	66

3.14 Calcul d'homologie d'un plan projectif	67
---	----

INTRODUCTION

Que ce soit dans le domaine médical ou industriel, il est souvent utile de connaître le nombre de composantes connexes ou le nombre de cycles d'un objet donné. L'homologie est un outil qui répond à ces questions, mais il faut connaître des techniques efficaces de calcul pour les besoins actuels. Plusieurs mathématiciens, Blass et Holsztyński [4] (1972), Ehrenborg et Hetyei [8](1992) et Kaczynski, Mrozek et al.[1], [3], [2], [10] (2004) ont pensé à représenter les objets par des ensembles cubiques pour pouvoir ensuite calculer l'homologie. Une motivation simple est d'étudier les images sur des écrans d'ordinateur qui sont représentées par des unions de petits carrés appelés pixels. Depuis, il y a plusieurs programmes pour calculer l'homologie dont ceux de Pilarczyk [15].

Avec comme point de départ les ensembles cubiques, nous avons développé une topologie dont les fermés sont les ensembles cubiques. Avec ce nouvel espace topologique, nous avons étudié les fonctions continues et fermées pour ensuite calculer l'homologie de ces fonctions. Cette construction se fait par des applications de chaînes induites. De plus, nous avons prouvé que notre définition d'homologie de ces fonctions préserve les propriétés de foncteur de l'homologie.

Pour revenir aux besoins d'obtenir l'homologie d'objets mathématiques, nous expliquons la problématique de représenter des figures en ensemble cubique. Brièvement, le recouvrement cubique ne conserve pas toujours l'homologie de la figure. Suite à ce problème, nous

avons développé des algorithmes pour modifier la figure et ainsi corriger l'homologie.

Au premier chapitre, nous présentons les bases pour représenter les ensembles cubiques sur ordinateur et pour calculer leur homologie. Au deuxième chapitre, nous construisons un espace topologique basé sur les ensembles cubiques et une famille de fonctions qui rend la fonctorialité de l'homologie sur lequel nous pourrions calculer l'homologie de certaines fonctions. Au troisième chapitre, nous présentons les problématiques du recouvrement cubique dans un plan et des algorithmes qui y remédient sur des classes de figures spécifiques. Il est à noter que certains résultats ne sont pas encore présents dans la littérature mathématique actuelle.

Chapitre 1

Homologie des ensembles cubiques

L'homologie est un outil important pour la caractérisation des objets géométriques. Si nous désirons étudier certaines propriétés avancées de ces objets, il est nécessaire de les représenter par des fichiers informatiques. À l'écran, les images sont faites de pixels, alors l'approche d'utiliser des carrés comme structure de données pour représenter l'objet vient naturellement. Dans ce chapitre, nous reprenons les notions de base des ensembles cubiques pour ensuite y faire des calculs d'homologie. Nous présentons les définitions établies par Kaczynski, Mischaikow et Mrozek dans [10]. Dans [11] de Massey, il définit une topologie cubique qui est différente de celle présentée ici. En 1971 dans [4], Blass et Holsztyński définissent des polyèdres cubiques qui sont similaires aux cubes élémentaires définis ici. Ehrenborg et Heteyi reprirent l'idée de Blass et Holsztyński dans [8] pour généraliser le théorème de Baxter.

Dans la première section, nous nous consacrons aux ensembles cubiques. La deuxième section est une petite digression vers les ensembles représentables qui sont des partitions des ensembles cubiques. Nous utilisons l'approche de Mrozek de [12] pour la généralisation des ensembles représentables. Nous montrerons que ces ensembles sont la base pour

l'implantation informatique des ensembles cubiques et c'est pour cette raison qu'ils sont utilisés pour le programme CUBTOP[5]. Dans la troisième section, nous présentons les notions algébriques applicables sur des ensembles cubiques. Dans la quatrième section, nous introduisons le calcul d'homologie sur les ensembles cubiques et finalement nous présentons quelques programmes dans la dernière section.

Dans ce chapitre, les notions d'ensembles sont prises pour acquies. De plus, nous supposons que le lecteur connaît certaines notions d'algèbre comme les isomorphismes, les groupes libres, les bases, les fonctions linéaires et les groupes quotients. Le lecteur qui veut plus de détails sur ces notions d'algèbre peut se référer à la Partie III de [10].

1.1 Ensembles cubiques

La division des nombres réels en intervalles entiers est souvent utilisée en statistiques pour représenter des tableaux de fréquence. Les ensembles cubiques reprennent cette idée et la généralisent sur des dimensions de l'espace plus élevées.

Définition 1.1.1 *Un intervalle élémentaire est un intervalle fermé $I \subset \mathbb{R}$ de la forme $I = [l, l + 1]$ ou $I = [l, l]$ avec l un entier. Un intervalle de la forme $[l, l]$ est appelé un intervalle dégénéré et est noté $[l]$. Un intervalle de la forme $[l, l + 1]$ est appelé un intervalle non-dégénéré.*

Exemple 1.1.2 $[-6, -5]$, $[1]$ et $[3, 4]$ sont des exemples d'intervalles élémentaires. Par contre $[2, 4]$ n'en est pas un, car il est de longueur 2. De même, $[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$ n'en est pas un car les bornes de l'intervalle ne sont pas des entiers.

Définition 1.1.3 *Un cube élémentaire Q est un produit fini d'intervalles élémentaires, alors $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$ où I_i est un intervalle élémentaire pour $i = 1 \dots d$. Le*

nombre d'intervalles est la **dimension d'espace**, notée $\text{emb } Q$. Le nombre d'intervalles non-dégénérés de Q est la **dimension du cube élémentaire**, notée $\text{dim } Q$.

Exemple 1.1.4 $[-6, -5] \times [1] \times [3, 4]$ est un cube élémentaire de dimension 2 et de dimension d'espace 3. Attention, la dimension d'espace est une particularité intrinsèque d'un cube élémentaire. Par exemple $[0]$ et $[0] \times [0]$ sont deux cubes élémentaires différents même s'ils ont la même dimension, car ils n'ont pas la même dimension d'espace.

Définition 1.1.5 Une face P d'un cube élémentaire Q est un cube élémentaire tel que $P \subseteq Q$. Si $P \neq Q$ alors P est une **face propre**.

Exemple 1.1.6 $[-6, -5] \times [1] \times [3, 4]$, $[-6, -5] \times [1] \times [3]$, $[-6,] \times [1] \times [4]$ sont des faces de $[-6, -5] \times [1] \times [3, 4]$.

Notations 1.1.7 Nous notons \mathcal{K} l'ensemble des cubes élémentaires, \mathcal{K}^d l'ensemble des cubes élémentaires dans \mathbb{R}^d , \mathcal{K}_k l'ensemble des cubes élémentaires de dimension k et \mathcal{K}_k^d l'intersection de \mathcal{K}_k et de \mathcal{K}^d . Si $X \subset \mathbb{R}^d$, alors nous notons $\mathcal{K}(X) = \{Q \in \mathcal{K}^d \mid Q \subseteq X\}$. De même pour $\mathcal{K}_k^d(X) = \{Q \in \mathcal{K}_k^d \mid Q \subseteq X\}$

Proposition 1.1.8 Soit $Q \in \mathcal{K}_k^d$, alors Q a exactement 3^k faces.

Démonstration : Posons $Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_d$, I_i est un intervalle élémentaire pour $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Soit $P \in \mathcal{K}^d$ tel que $P \subseteq Q$ et $P = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_d$, J_i est un intervalle élémentaire pour $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Pour tout intervalle I_i , $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, si I_i est dégénéré alors pour respecter l'inclusion $J_i \subseteq I_i$. Si I_i est non-dégénéré, alors il est de la forme $I_i = [l_i, l_i + 1]$, $l_i \in \mathbb{Z}$. Pour que P soit un cube élémentaire inclus dans Q , il faut que J_i soit de la forme $[l_i, l_i + 1]$, $[l_i]$ ou $[l_i + 1]$. Donc il y a trois possibilités. Comme il y a k intervalles non-dégénérés, il y a 3^k cubes élémentaires inclus dans Q . \square

Un cube élémentaire est un peu limité comme objet mathématique, mais si nous travaillons sur un ensemble de cubes élémentaires nous pouvons définir des objets géométriques beaucoup plus intéressants comme par exemple des bouteilles de Klein.

Définition 1.1.9 *Un ensemble cubique $X \subset \mathbb{R}^d$ est une union finie de cubes élémentaires.*

Les ensembles cubiques ont été conçus pour être facilement programmables, mais surtout pour que les calculs puissent se faire d'une manière efficace. C'est pour cette raison que l'union doit être finie, car sinon les algorithmes sur des ensembles cubiques prendraient un temps infini, ce qui est évidemment à proscrire.

Proposition 1.1.10 *Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, deux ensembles cubiques. Alors :*

- (i) $X \cup Y$ est un ensemble cubique.
- (ii) $X \cap Y$ est un ensemble cubique.

Démonstration : (i) X est une union finie de cubes élémentaires, Y aussi, alors leur union est aussi une union finie de cubes élémentaires.

$$(ii) X \cap Y = X \cap \left(\bigcup_{Q \in \mathcal{K}(Y)} Q \right) = \bigcup_{Q \in \mathcal{K}(Y)} Q \cap X$$

Il y a trois cas possibles :

$Q \subseteq X$, alors $Q \cap X = Q$ qui est un cube élémentaire.

$Q \not\subseteq X$ et $Q \cap X \neq \emptyset$, alors il existe une face P de Q telle que $Q \cap X = P$ et P est un cube élémentaire.

$Q \cap X = \emptyset$.

Dans les trois cas $Q \cap X$ est un cube élémentaire, alors $X \cap Y$ est une union finie de cubes élémentaires. □

1.2 Ensembles représentables

Dans cette section, nous quittons l'approche du livre [10] pour utiliser une forme générale d'ensembles représentables développée par Mrozek dans [12]. Cette approche permet de construire des ensembles représentables dans plusieurs espaces. Donc, toutes les preuves de cette section peuvent se généraliser sur d'autres espaces en utilisant X un espace métrique localement compact à la place de \mathbb{R}^d et en posant \mathcal{A} un ensemble de parties de X . Voici des définitions telles que proposées dans [12].

Définition 1.2.1 Soient $B \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, \mathcal{A} un ensemble de parties de \mathbb{R}^d et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ alors nous définissons les ensembles :

$$\mathcal{A}(B) = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap B \neq \emptyset\}, \text{ en particulier } \mathcal{A}(x) = \{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\};$$

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathcal{A}(x) = \mathcal{C}\}.$$

Nous disons que \mathcal{C} est **propre** si $\langle \mathcal{C} \rangle \neq \emptyset$.

La définition de $\langle \mathcal{C} \rangle$ est abstraite, voici une proposition qui donne une équivalence à la définition.

Proposition 1.2.2

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} B$$

Démonstration :

Premièrement, montrons que $\langle \mathcal{C} \rangle \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} B$. Soit $x \in \langle \mathcal{C} \rangle$, alors $\mathcal{A}(x) = \mathcal{C}$ et selon

la définition $\{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\} = \mathcal{C}$, donc $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$. Supposons que $x \in B$ avec $B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$.

Comme $x \in B$ alors $B \in \mathcal{A}(x) = \mathcal{C}$, mais $B \notin \mathcal{C}$, contradiction. Alors $x \notin B$ pour tout

$$B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C} \text{ donc } x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} B.$$

Deuxièmement, montrons que $\langle \mathcal{C} \rangle \supseteq \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} B$.

Soit $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} B$ et en calculant $\mathcal{A}(x)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\} \\ &= \{A \in \mathcal{A} \mid A \in \mathcal{C}\} \\ &= \mathcal{C} \end{aligned}$$

at ainsi $x \in \langle \mathcal{C} \rangle$. □

Exemple 1.2.3 Posons $d = 2$, $\mathcal{A} = \mathcal{K}_2^2$, $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} < x_1 \leq -\frac{1}{4}, x_2 = 3\}$ et $\mathcal{C} = \{[-1, 0] \times [2, 3], [-1, 0] \times [3, 4]\}$ alors :

$$\mathcal{A}(B) = \{A \in \mathcal{K}_2^2 \mid A \cap B \neq \emptyset\} = \{[-1, 0] \times [2, 3], [-1, 0] \times [3, 4]\} = \mathcal{C}$$

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall A \in \mathcal{A}, x \in A \iff A \in \mathcal{C}\} =]-1, 0[\times]3] \neq B$$

Proposition 1.2.4 Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}$ propres, alors

- (i) $\mathcal{A}(\langle \mathcal{C} \rangle) = \mathcal{C}$
- (ii) $\langle \mathcal{C}_1 \rangle = \langle \mathcal{C}_2 \rangle \iff \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$
- (iii) Si $\langle \mathcal{C}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{C}_2 \rangle \neq \emptyset$ alors $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$

Démonstration :

(i) Soit $A \in \mathcal{A}(\langle \mathcal{C} \rangle)$, $A \in \mathcal{A}$ et par définition de $\mathcal{A}(\langle \mathcal{C} \rangle)$, nous avons $A \cap \langle \mathcal{C} \rangle \neq \emptyset$. Donc par la proposition 1.2.2, nous avons $A \in \mathcal{C}$ et de ce fait $\mathcal{A}(\langle \mathcal{C} \rangle) \subseteq \mathcal{C}$.

Pour prouver l'inclusion inverse, soit $A \in \mathcal{C}$ et $x \in \langle \mathcal{C} \rangle$. Alors $x \in A$ et donc $x \in A \cap \langle \mathcal{C} \rangle$. Comme $A \cap \langle \mathcal{C} \rangle \neq \emptyset$, nous avons $A \in \mathcal{A}(\langle \mathcal{C} \rangle)$.

(ii) $\langle \mathcal{C}_1 \rangle = \langle \mathcal{C}_2 \rangle \Rightarrow \mathcal{A}(\langle \mathcal{C}_1 \rangle) = \mathcal{A}(\langle \mathcal{C}_2 \rangle) \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ par (i). L'implication inverse est triviale.

(iii) $\langle \mathcal{C}_1 \rangle = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathcal{A}(x) = \mathcal{C}_1\}$. De même pour \mathcal{C}_2 . Comme l'intersection est non-vide, il existe un $x \in \langle \mathcal{C}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{C}_2 \rangle$ tel que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}(\{x\}) = \mathcal{C}_2$. □

Définition 1.2.5 Soit \mathcal{A} un ensemble de parties de X , alors une **cellule indécomposable** est un élément de la forme $\langle \mathcal{C} \rangle$. Un **ensemble représentable** est une union finie de cellules indécomposables.

Proposition 1.2.6 Soient $\mathring{Q}_1, \mathring{Q}_2$ des cellules indécomposables et A_1, A_2 des ensembles représentables, alors

(i) $\mathring{Q}_1 = \mathring{Q}_2$ ou $\mathring{Q}_1 \cap \mathring{Q}_2 = \emptyset$.

(ii) $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2, A_1 \setminus A_2$ sont des ensembles représentables.

Démonstration :

(i) Il existe $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{A}$ tels que $\mathring{Q}_1 = \langle \mathcal{C}_1 \rangle$ et $\mathring{Q}_2 = \langle \mathcal{C}_2 \rangle$. Selon la proposition 1.2.4 (iii) $\langle \mathcal{C}_1 \rangle = \langle \mathcal{C}_2 \rangle$ ou $\langle \mathcal{C}_1 \rangle \cap \langle \mathcal{C}_2 \rangle = \emptyset$.

(ii) A_1 et A_2 sont des unions finies de cellules indécomposables, alors l'union reste une union finie de cellules indécomposables, donc un ensemble représentable. Posons

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \mathring{Q}_{ij} \text{ avec les } \mathring{Q}_{ij} \text{ des cellules indécomposables et } j \text{ égale à } 1 \text{ ou } 2. \text{ Alors}$$

$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{i=1}^{n_1} (\mathring{Q}_{i1} \cap A_2). \text{ Comme } \mathring{Q}_{k1} \cap \mathring{Q}_{l2} = \emptyset \text{ ou } \mathring{Q}_{l2} \text{ par (i), } A_1 \cap A_2 \text{ est une union}$$

finie de cellules indécomposables. De même pour $A_1 \setminus A_2 = \bigcup_{i=1}^{n_1} (\mathring{Q}_{i1} \setminus A_2)$. Étudions un ensemble de l'union.

$$\mathring{Q}_{k1} \setminus A_2 = \mathring{Q}_{k1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n_2} \mathring{Q}_{i2} \right) = \mathring{Q}_{k1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n_2} \mathring{Q}_{i2} \right)^c = \bigcap_{i=1}^{n_2} (\mathring{Q}_{k1} \cap \mathring{Q}_{i2}^c) = \mathring{Q}_{k1} \text{ ou } \emptyset.$$

La dernière égalité est un conséquence de (i). Bref chaque ensemble de l'union est \emptyset ou une cellule indécomposable, alors l'union est un ensemble représentable. \square

Selon la proposition précédente, les ensembles représentables sont stables pour la soustraction d'ensembles, contrairement aux ensembles cubiques qui ne le sont pas. De plus, la propriété que deux cellules élémentaires ont une intersection vide si les cellules sont différentes rend plusieurs algorithmes plus simples, car nous ne vérifions plus si une cel-

lule est incluse, mais nous vérifions si la cellule est présente. Ceci est un autre avantage des ensembles représentables sur les ensembles cubiques.

Maintenant, nous définissons une cellule élémentaire telle que définie dans [10]. Cette définition précise exactement la forme d'une cellule à la place de la définir par ses propriétés.

Définition 1.2.7 Une cellule élémentaire $\overset{\circ}{Q}$ est un produit fini d'intervalles de la forme $\overset{\circ}{I} =]l, l + 1[$ ou $\overset{\circ}{I} = [l, l]$ avec l un entier.

Notations 1.2.8 Si $Q \in \mathcal{K}^d$, alors $\overset{\circ}{Q}$ représente la cellule élémentaire associée c'est-à-dire si $Q = \prod_{i=1}^d I_i$ alors $\overset{\circ}{Q} = \prod_{i=1}^d \overset{\circ}{I}_i$ avec

$$\overset{\circ}{I}_i = \begin{cases}]l, l + 1[& \text{si } I_i = [l, l + 1] \\ [l] & \text{si } I_i = [l] \end{cases}$$

De plus, les notions d'intervalles dégénérés et non-dégénérés, les dimensions et les dimensions d'espace s'étendent aux cellules élémentaires.

Proposition 1.2.9 En posant l'ensembles des parties $\mathcal{A} = \mathcal{K}_d^d$, les définitions de cellules indécomposables et de cellules élémentaires sont équivalentes.

Démonstration : Soit E une cellule indécomposable, alors $E = \langle \mathcal{C} \rangle$ et par la proposition 1.2.2, $E = \bigcap_{Q \in \mathcal{C}} Q \setminus \bigcup_{Q' \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} Q'$. Supposons $\langle \mathcal{C} \rangle \neq \emptyset$ et prenons $P = \bigcap_{Q \in \mathcal{C}} Q$. P est un cube élémentaire, car il est l'intersection de cubes élémentaires. Alors pour tout $Q \in \mathcal{C}$, $P \subseteq Q$ implique que P est une face de Q . De plus, \mathcal{C} contient toutes les cubes élémentaires de dimension d pour lesquels P est une face, car sinon il existe $Q' \notin \mathcal{C}$ et P est une face de Q' , donc $P \subseteq \bigcup_{Q' \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} Q'$ ce qui impliquerait que $\langle \mathcal{C} \rangle = \emptyset$

$\langle \mathcal{C} \rangle \neq \emptyset$ donc $P \neq \emptyset$ et $\emptyset \neq \overset{\circ}{P} \subseteq P$

Si $y \in \overset{\circ}{P}$ et $y \in Q \in \mathcal{A}$ alors $\overset{\circ}{P} \cap Q \neq \emptyset$. $\overset{\circ}{P}$ est une cellule indécomposable, alors $\overset{\circ}{P} \subseteq Q$. Q

est fermé, alors $P \subseteq Q$ et de ce fait P est une face de Q . Par ce que nous avons démontré plus haut, $Q \in \mathcal{C}$. Nous avons donc $y \in P$ et $y \notin \bigcup_{Q' \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}} Q' = \langle \mathcal{C} \rangle$ donc $\overset{\circ}{P} \subseteq \langle \mathcal{C} \rangle$.

Soit $y \in \langle \mathcal{C} \rangle$ et supposons par l'absurde que $y \notin \overset{\circ}{P}$. Alors $y \in P \setminus \overset{\circ}{P}$. Si $\dim P = 0$, alors $y \in P \setminus \overset{\circ}{P} = \emptyset$ et c'est déjà une contradiction. Sinon P a au moins une face propre P_F . Considérons $Q_F \in \mathcal{A}$ tel que P_F est une face propre de Q_F et P n'est pas une face de Q_F . Alors $Q_F \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$ ce qui implique que $y \notin \langle \mathcal{C} \rangle$ ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc $\overset{\circ}{P} \supseteq \langle \mathcal{C} \rangle$. Nous venons de démontrer qu'il existe une cellule élémentaire ($\overset{\circ}{P}$) pour toute cellule indécomposable. De plus toute cellule élémentaire peut être représenté comme la cellule associé d'une intersection de cube élémentaire de dimension d , d'où l'équivalence.

□

La proposition précédente démontre que les deux définitions de cellules sont équivalentes. Pour la suite, il sera plus facile de travailler avec des cellules élémentaires, c'est pour cette raison que nous redéfinissons les ensembles représentables en fonction des cellules élémentaires.

Définition 1.2.10 *Un ensemble représentable $X \subset \mathbb{R}^d$ est une union finie de cellules élémentaires.*

Proposition 1.2.11 *Soit $X \in \mathbb{R}^d$ un ensemble cubique, alors :*

- (i) $X = \bigcup \{ \overset{\circ}{Q} \mid Q \subseteq X \}$
- (ii) X est un ensemble représentable.

Démonstration :

(i) Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in X$, alors $x \in Q_x$, Q_x un cube élémentaire de X tel que

$$Q_x = \prod_{i=1}^d I_{x_i} \text{ avec}$$

$$I_{x_i} = \begin{cases} [x_i] & \text{si } x_i \in \mathbb{Z} \\ [[x_i], \lceil x_i \rceil] & \text{sinon} \end{cases}$$

En considérant la cellule élémentaire associée à Q_x , nous obtenons $x \in \overset{\circ}{Q}_x \in X$. Alors $X \subseteq \bigcup \{\overset{\circ}{Q} \mid Q \subseteq X\}$

L'autre inclusion est directe, car $\overset{\circ}{Q} \subseteq Q \subseteq X$

(ii) Corollaire immédiat de (i). □

Cette dernière proposition nous affirme qu'en représentant les ensembles cubiques comme unions de cellules élémentaires, alors nous pouvons avoir tous les avantages des ensembles représentables sur des ensembles cubiques. Le programme CUBTOP[5] utilise la structure de données des ensembles représentables pour définir les ensembles cubiques.

1.3 Algèbre des ensembles cubiques

Avant de parler d'homologie, il faut introduire les notions de l'algèbre sur les ensembles cubiques. En effet, le groupe d'homologie est un groupe quotient, il est donc nécessaire de construire un groupe à partir des ensembles cubiques.

Définition 1.3.1 *Le dual d'un cube élémentaire Q est la fonction associée $\widehat{Q} : \mathcal{K} \rightarrow \{0, 1\}$ qui est définie ainsi :*

$$\widehat{Q}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P = Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble des duals des cubes élémentaires de dimension k est noté : $\widehat{\mathcal{K}}_k$

Définition 1.3.2 *Posons C_k le groupe libre engendré par les éléments de $\widehat{\mathcal{K}}_k$. Une chaîne de dimension k (plus simplement appelée une **k-chaîne**) est un élément de C_k .*

Donc $C_k = \mathbb{Z}(\mathcal{K}_k)$. C_k est un groupe libre dont les éléments de sa base sont des fonctions $\widehat{Q} : \mathcal{K}_k \rightarrow \mathbb{Z}$.

En travaillant avec le dual d'un cube élémentaire, cela simplifie quelques démonstrations de propriétés, comme la prochaine.

Proposition 1.3.3 *L'application $\phi : \mathcal{K}_k \rightarrow C_k$ telle que $\phi(Q) = \widehat{Q}$ est injective.*

Démonstration : Soient $Q, P \in \mathcal{K}_k$ tels que $\phi(Q) = \phi(P)$, donc $\widehat{Q} = \widehat{P}$. Nous avons $1 = \widehat{P}(P) = \widehat{Q}(P)$, alors $P = Q$. \square

Pour pouvoir manier les k -chaînes, nous définissons deux produits entre les chaînes, le produit scalaire qui retourne un entier et le produit cubique qui retourne une chaîne. Le produit cubique s'inspire du produit cartésien.

Définition 1.3.4 *Soient c_1, c_2 deux k -chaînes telles que $c_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i$ et $c_2 = \sum_{i=1}^m \beta_i \widehat{Q}_i$. Le produit scalaire de c_1 et de c_2 , noté par $\langle c_1, c_2 \rangle$, est défini par $\langle c_1, c_2 \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i$.*

Définition 1.3.5 *Le produit cubique entre deux chaînes arbitraires c_1 une k -chaîne et c_2 une k' -chaîne, noté $c_1 \diamond c_2$, est défini par $c_1 \diamond c_2 = \sum_{P \in \mathcal{K}_k, Q \in \mathcal{K}_{k'}} \langle c_1, \widehat{P} \rangle \langle c_2, \widehat{Q} \rangle \widehat{P \times Q}$.*

Nous remarquons que le produit cubique est équivalent au produit cartésien pour les éléments de base, en effet : $\widehat{P} \diamond \widehat{Q} = \widehat{P \times Q}$.

Proposition 1.3.6 *Soient c_1, c_2, c_3 trois chaînes arbitraires. Alors :*

- (i) $c_1 \diamond 0 = 0 \diamond c_1 = 0$
- (ii) $(c_1 \diamond c_2) \diamond c_3 = c_1 \diamond (c_2 \diamond c_3)$
- (iii) Si $c_1 \diamond c_2 = 0$ alors $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$.

Démonstration :

(i) se démontre directement par la définition.

(ii) se démontre par l'application de la définition à deux reprises sur chaque côté de

l'égalité.

(iii) Posons $c_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{P}_i$ et $c_2 = \sum_{j=1}^n \beta_j \widehat{Q}_j$ tels que $c_1 \diamond c_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \widehat{P}_i \widehat{Q}_j = 0$.

Donc, il faut que $\alpha_i \beta_j = 0$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ et $j = 1, 2, \dots, n$.

Nous avons alors : $0 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i \beta_j)^2 = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)$. Donc $\sum_{i=1}^m \alpha_i^2 = 0$ ou $\sum_{j=1}^n \beta_j^2 = 0$ ce qui implique que $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$. \square

Le produit cubique de deux chaînes donne une chaîne. Maintenant, nous désirons factoriser les éléments de base de C_k en produit cubique de deux chaînes. Cette technique sera utilisée pour les définitions et les démonstrations par récurrence.

Proposition 1.3.7 *Soit Q un cube élémentaire dont la dimension d'espace est d , $d > 1$. Alors, il existe deux uniques cubes élémentaires I et P tels que les dimensions d'espace de ces deux cubes sont respectivement 1 et $d - 1$ et que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$.*

Démonstration : Q est cube élémentaire de dimension d'espace d . Alors $Q = \prod_{i=1}^d I_i$.

En posant $I = I_1$ et $P = \prod_{i=2}^d I_i$, nous obtenons que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$, avec $\text{emb } I = 1$ et $\text{emb } P = d - 1$. Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe $I' \in \mathcal{K}^1$ et $P' \in \mathcal{K}^{d-1}$ tels que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P} = \widehat{I}' \diamond \widehat{P}'$. Par la définition du produit cubique nous avons $\widehat{I} \times \widehat{P} = \widehat{I}' \times \widehat{P}'$ et par la proposition 1.3.3 nous obtenons que $I \times P = I' \times P'$. $I, I' \subset \mathbb{R}$ ce qui implique que $I = I'$ et finalement que $P = P'$. \square

Le dernier concept que nous devons définir avant de parler d'homologie est l'opérateur frontière. Dans la prochaine section, nous constaterons que cet opérateur répond à notre intuition de frontière géométrique.

Définition 1.3.8 *L'opérateur frontière $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ se définit ainsi : Premièrement, nous définissons l'opérateur par récurrence sur les éléments de base. Lorsqu'il n'y a pas de confusion sur la dimension, nous noterons l'opérateur frontière ∂ . Soit $Q = [k, l]$*

un intervalle élémentaire. Alors nous définissons :

$$\partial\widehat{Q} = \begin{cases} 0 & \text{si } l = k \\ \widehat{[l]} - \widehat{[k]} & \text{si } l = k + 1 \end{cases}$$

Si la dimension de l'espace de Q est d , $d > 1$, alors par la proposition 1.3.7 $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$ avec $I \in \mathcal{K}^1$ et $P \in \mathcal{K}^{d-1}$. Alors nous définissons :

$$\partial\widehat{Q} = \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}$$

Deuxièmement, nous définissons l'opérateur frontière par linéarité sur les k -chaînes. Si $c \in C_k$ tel que $c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i$ alors

$$\partial c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial\widehat{Q}_i$$

Exemple 1.3.9 Calculer $\partial(\widehat{[-6, -5]} \times \widehat{[1]} \times [3, 4])$.

$$\begin{aligned} \partial(\widehat{[-6, -5]} \times \widehat{[1]} \times [3, 4]) &= \partial\widehat{[-6, -5]} \diamond \widehat{[1]} \times [3, 4] + (-1)^{\dim \widehat{[-6, -5]}} \widehat{[-6, -5]} \diamond \partial(\widehat{[1]} \times [3, 4]) \\ &= (\widehat{[-5]} - \widehat{[-6]}) \diamond \widehat{[1]} \times [3, 4] + (-1)^1 \widehat{[-6, -5]} \diamond \partial(\widehat{[1]} \times [3, 4]) \\ &= [-5] \times \widehat{[1]} \times [3, 4] - [-6] \times \widehat{[1]} \times [3, 4] - \widehat{[-6, -5]} \diamond \partial(\widehat{[1]} \times [3, 4]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \partial(\widehat{[1]} \times [3, 4]) &= \partial(\widehat{[1]}) \diamond [3, 4] + (-1)^{\dim \widehat{[1]}} \widehat{[1]} \diamond \partial[3, 4] \\ &= 0 \diamond [3, 4] + (-1)^0 \widehat{[1]} \diamond ([4] - [3]) \\ &= \widehat{[1]} \times [4] - \widehat{[1]} \times [3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \partial(\widehat{[-6, -5]} \times \widehat{[1]} \times [3, 4]) &= [-5] \times \widehat{[1]} \times [3, 4] - [-6] \times \widehat{[1]} \times [3, 4] \\ &\quad - \widehat{[-6, -5]} \times [1] \times [4] + \widehat{[-6, -5]} \times [1] \times [3] \end{aligned}$$

Proposition 1.3.10 Soient $c_1 \in C_k$, $c_2 \in C_{k'}$ alors $\partial(c_1 \diamond c_2) = \partial c_1 \diamond c_2 + (-1)^{\dim c_1} c_1 \diamond \partial c_2$.

Démonstration : ∂ est un opérateur linéaire, donc il suffit de démontrer l'énoncé pour les éléments de base : $\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}') = \partial\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{Q}} \widehat{Q} \diamond \partial\widehat{Q}'$, tel que $Q \in \mathcal{K}^d$, $Q' \in \mathcal{K}^{d'}$. La preuve se fait par récurrence sur d , la dimension de l'espace de Q .

Si $d = 1$ l'énoncé découle immédiatement de la définition de l'opérateur frontière.

Soit l'énoncé vrai pour un certain $d \geq 1$.

Soit $Q \in \mathcal{K}^{d+1}$, alors il existe $I \in \mathcal{K}^1$ et $P \in \mathcal{K}^d$ tels que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$. Donc $\partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}') = \partial(\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}') = \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial(\widehat{P} \diamond \widehat{Q}')$. La dimension d'espace de P est d , donc nous pouvons utiliser l'hypothèse de récurrence pour calculer $\partial(\widehat{P} \diamond \widehat{Q}')$.

$$\begin{aligned} \partial(\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}') &= \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond (\partial\widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{P}} \widehat{P} \diamond \partial\widehat{Q}') \\ &= \partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{I} + \dim \widehat{P}} \widehat{I} \diamond \widehat{P} \diamond \partial\widehat{Q}' \\ &= (\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}) \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{Q}} \widehat{Q} \diamond \partial\widehat{Q}' \\ &= \partial\widehat{Q} \diamond \widehat{Q}' + (-1)^{\dim \widehat{Q}} \widehat{Q} \diamond \partial\widehat{Q}' \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire 1.3.11 Si $Q = \prod_{i=1}^d I_i$, alors

$$\partial\widehat{Q} = \sum_{j=1}^d (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} \dim \widehat{I}_i} \widehat{I}_j \diamond \partial\widehat{I}_j \diamond \left(\widehat{\bigwedge}_{k=1}^d \widehat{I}_k \right)$$

Démonstration : Cet énoncé se démontre directement à partir du théorème précédent.

□

La prochaine proposition démontre la propriété fondamentale de l'opérateur frontière.

Proposition 1.3.12

$$\partial \circ \partial = 0$$

Démonstration : ∂ est un opérateur linéaire, donc il suffit de démontrer l'énoncé pour les éléments de base. La preuve se fait par récurrence sur la dimension de l'espace. Soit $Q \in \mathcal{K}^1$.

Si $Q = [l]$, alors $\partial(\partial\widehat{Q}) = \partial\partial = 0$.

Si $Q = [l, l+1]$, alors $\partial(\partial\widehat{Q}) = \partial(\widehat{[l+1]} - \widehat{[l]}) = \partial\widehat{[l+1]} - \partial\widehat{[l]} = 0 - 0 = 0$.

Supposons que $\partial\partial\widehat{Q} = 0, \forall Q \in \mathcal{K}^d, d \geq 1$. Soit $Q \in \mathcal{K}^{d+1}$, alors il existe $I \in \mathcal{K}^1$ et $P \in \mathcal{K}^d$ tels que $\widehat{Q} = \widehat{I} \diamond \widehat{P}$. Donc :

$$\begin{aligned} \partial(\partial\widehat{Q}) &= \partial(\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}) \\ &= \partial(\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P}) + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond (\partial\widehat{P}) \\ &= \partial\partial\widehat{I} \diamond \widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} (\partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\partial\widehat{P}) \\ &= (-1)^{\dim \widehat{I}} \partial\widehat{I} \diamond \partial\widehat{P} + (-1)^{\dim \widehat{I}} \widehat{I} \diamond \partial\widehat{P}. \end{aligned}$$

La dernière étape se justifie car $\partial\partial\widehat{I} = 0$ par la base de la récurrence et $\partial\partial\widehat{P} = 0$ par hypothèse de récurrence sur \widehat{P} .

Il ne reste qu'à montrer que la dernière ligne vaut 0.

Si $\dim \widehat{I} = 1$ alors $\dim \widehat{\partial I} = 0$ donc les deux termes sont de signes opposés et s'annulent.

Si $\dim \widehat{I} = 0$ alors $\partial I = 0$ et les deux termes valent 0. \square

Définition 1.3.13 Soit c une k -chaîne, le **support** de c , noté $|c|$ est défini ainsi $|c| = \{Q \in \mathcal{K}_k^d \mid c(Q) \neq 0\}$.

Exemple 1.3.14 Soit $\partial([-6, -5] \times [1] \times [3, 4])$ calculé à l'exemple 1.3.9. Alors $|\partial([-6, -5] \times [1] \times [3, 4])| = [-5] \times [1] \times [3, 4] \cup [-6] \times [1] \times [3, 4] \cup [-6, -5] \times [1] \times [4] \cup [-6, -5] \times [1] \times [3]$.

Le dual d'un cube permet de passer d'un ensemble de cubes à une chaîne, tandis que le support est l'inverse, c'est le passage d'une chaîne à un ensemble. Selon l'exemple précédent, la frontière d'une chaîne associée à un carré a comme support les quatre arêtes du carré.

1.4 Homologie des ensembles cubiques

Maintenant que l'opérateur frontière est défini, nous pouvons définir les groupes d'homologie. Les définitions présentées ici sont les mêmes que dans tous livres d'homologie, car

elles dépendent uniquement de l'opérateur frontière.

Notations 1.4.1 Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble cubique. Nous notons l'ensemble des cubes élémentaires contenus dans X par $\mathcal{K}(X) = \{Q \in \mathcal{K}^d \mid Q \subseteq X\}$. Pour l'ensemble des cubes élémentaires de dimension k contenus dans X , nous notons $\mathcal{K}_k(X) = \{Q \in \mathcal{K}_k^d \mid Q \subseteq X\}$. De même pour les k -chaînes. $C_k(X)$ est le sous-groupe de C_k tel que $C_k(X) = \{c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i \in C_k \mid \alpha_i \neq 0 \text{ si et seulement si } Q_i \in \mathcal{K}_k(X)\}$

Exemple 1.4.2 Calcul de $C_k([-6, -5] \times [1] \times [3, 4])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour faciliter l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned} Q &= [-6, -5] \times [1] \times [3, 4], & a_1 &= [-6, -5] \times [1] \times [3], & a_2 &= [-6, -5] \times [1] \times [4], \\ a_3 &= [-6] \times [1] \times [3, 4], & a_4 &= [-5] \times [1] \times [3, 4], & s_1 &= [-6] \times [1] \times [3], \\ s_2 &= [-6] \times [1] \times [4], & s_3 &= [-5] \times [1] \times [3], & s_4 &= [-5] \times [1] \times [4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0(Q) &= \{c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i \in C_0, \mid \alpha_i = 0 \text{ si } Q_i \not\subseteq Q\} \\ &= \{c = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0\} \\ &= \mathbb{Z}\widehat{s}_1 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_2 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_3 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_4 \\ &\cong \mathbb{Z}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(Q) &= \{c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i \in C_1 \mid \alpha_i = 0 \text{ si } Q_i \not\subseteq Q\} \\ &= \{c = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1\} \\ &= \mathbb{Z}\widehat{a}_1 \oplus \mathbb{Z}\widehat{a}_2 \oplus \mathbb{Z}\widehat{a}_3 \oplus \mathbb{Z}\widehat{a}_4 \\ &\cong \mathbb{Z}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(Q) &= \{c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i \in C_2 \mid \alpha_i = 0 \text{ si } Q_i \not\subseteq Q\} \\ &= \{c = \alpha \widehat{Q} \in C_2\} \\ &= \mathbb{Z}\widehat{Q} \end{aligned}$$

$$\cong \mathbb{Z}$$

$$k > 2$$

$$\begin{aligned} C_k(Q) &= \{c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \widehat{Q}_i \in C_k \mid \alpha_i = 0 \text{ si } Q_i \not\subseteq Q\} \\ &= \{c \in C_k, c = 0\} \\ &\cong 0 \end{aligned}$$

Définition 1.4.3 Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble cubique. Une k -chaîne $z \in C_k(X)$ est un **cycle** si $\partial z = 0$. L'ensemble de tous les cycles de $C_k(X)$ est noté $Z_k(X)$.

Exemple 1.4.4 Calcul de $Z_k([-6, -5] \times [1] \times [3, 4])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour faciliter l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned} Q &= [-6, -5] \times [1] \times [3, 4], & a_1 &= [-6, -5] \times [1] \times [3], & a_2 &= [-6, -5] \times [1] \times [4], \\ a_3 &= [-6] \times [1] \times [3, 4], & a_4 &= [-5] \times [1] \times [3, 4], & s_1 &= [-6] \times [1] \times [3], \\ s_2 &= [-6] \times [1] \times [4], & s_3 &= [-5] \times [1] \times [3], & s_4 &= [-5] \times [1] \times [4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_0(Q) &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \partial z = 0\} \\ &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \sum_{i=1}^4 \alpha_i \partial \widehat{s}_i = 0\} \\ &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \sum_{i=1}^4 \alpha_i 0 = 0\} \\ &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q)\} \\ &= C_0(Q) \\ &= \mathbb{Z}\widehat{s}_1 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_2 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_3 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_4 \\ &\cong \mathbb{Z}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1(Q) &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \partial z = 0\} \\ &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \sum_{i=1}^4 \alpha_i \partial \widehat{a}_i = 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \alpha_1(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_1) + \alpha_2(\widehat{s}_4 - \widehat{s}_2) + \alpha_3(\widehat{s}_2 - \widehat{s}_1) + \alpha_4(\widehat{s}_4 - \widehat{s}_3) = 0\} \\
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_4\} \\
&= \{z = \alpha_1(\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 - \widehat{a}_3 + \widehat{a}_4) \in C_1(Q)\} \\
&= \mathbb{Z}(\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 - \widehat{a}_3 + \widehat{a}_4) \\
&\cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2(Q) &= \{z = \alpha \widehat{Q} \in C_2(Q) \mid \partial z = 0\} \\
&= \{z = \alpha \widehat{Q} \in C_2(Q) \mid \alpha \partial \widehat{Q} = 0\} \\
&= \{z = \alpha \widehat{Q} \in C_2(Q) \mid \alpha(\widehat{a}_4 - \widehat{a}_3 - \widehat{a}_2 + \widehat{a}_1) = 0\} \\
&= \{z = \alpha \widehat{Q} \in C_2(Q) \mid \alpha = 0\} \\
&\cong 0
\end{aligned}$$

$k > 2$

$Z_k(Q) \cong 0$ car $C_k(Q) \cong 0$

Définition 1.4.5 Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble cubique. Une k -chaîne $z \in C_k(X)$ est une **frontière** s'il existe une $(k+1)$ -chaîne $z' \in C_{k+1}(X)$ telle $\partial z' = z$. L'ensemble de toutes les frontières de $C_k(X)$ est noté $B_k(X)$.

Exemple 1.4.6 Calcul de $B_k([-6, -5] \times [1] \times [3, 4])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour faciliter l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned}
Q &= [-6, -5] \times [1] \times [3, 4], & a_1 &= [-6, -5] \times [1] \times [3], & a_2 &= [-6, -5] \times [1] \times [4], \\
a_3 &= [-6] \times [1] \times [3, 4], & a_4 &= [-5] \times [1] \times [3, 4], & s_1 &= [-6] \times [1] \times [3], \\
s_2 &= [-6] \times [1] \times [4], & s_3 &= [-5] \times [1] \times [3], & s_4 &= [-5] \times [1] \times [4].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0(Q) &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \partial z' = z, z' = \sum_{i=1}^4 \beta_i \widehat{a}_i\} \\
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \sum_{i=1}^4 \beta_i \partial \widehat{a}_i = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \beta_1(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_1) + \beta_2(\widehat{s}_4 - \widehat{s}_2) + \beta_3(\widehat{s}_2 - \widehat{s}_1) + \beta_4(\widehat{s}_4 - \widehat{s}_3) = \\
&\sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i\} \\
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{s}_i \in C_0(Q) \mid \alpha_1 = -\beta_1 - \beta_3, \alpha_2 = -\beta_2 + \beta_3, \alpha_3 = \beta_1 - \beta_4, \alpha_4 = \\
&-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3\} \\
&= \{z = \alpha_1(\widehat{s}_1 - \widehat{s}_4) + \alpha_2(\widehat{s}_2 - \widehat{s}_4) + \alpha_3(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_4) \in C_0(Q)\} \\
&= \mathbb{Z}(\widehat{s}_1 - \widehat{s}_4) \oplus \mathbb{Z}(\widehat{s}_2 - \widehat{s}_4) \oplus \mathbb{Z}(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_4) \\
&\cong \mathbb{Z}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1(Q) &= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \partial z' = z, z' = \beta \widehat{Q}\} \\
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \partial \beta \widehat{Q} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i\} \\
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \beta(\widehat{a}_4 - \widehat{a}_3 - \widehat{a}_2 + \widehat{a}_1) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i\} \\
&= \{z = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \widehat{a}_i \in C_1(Q) \mid \alpha_1 = \beta, \alpha_2 = -\alpha_1, \alpha_3 = -\alpha_1, \alpha_4 = \alpha_1\} \\
&= \{z = \alpha_1(\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 - \widehat{a}_3 + \widehat{a}_4) \in C_1(Q)\} \\
&= \mathbb{Z}(\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 - \widehat{a}_3 + \widehat{a}_4) \\
&\cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$k > 1$

$$\begin{aligned}
B_k(Q) &= \{z \in C_k(Q) \mid \partial z' = z, z' \in C_{k+1}(Q)\} \\
&\cong 0 \text{ car } C_{k+1} \cong 0.
\end{aligned}$$

Définition 1.4.7 Soit X un ensemble cubique. Le k -ième groupe d'homologie cubique de X (plus simplement appelé le groupe d'homologie de X), noté $H_k(X)$, est le groupe quotient $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$.

Exemple 1.4.8 Calcul de $H_k([-6, -5] \times [1] \times [3, 4])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour faciliter l'écriture, nous posons :

$$\begin{aligned}
Q &= [-6, -5] \times [1] \times [3, 4], & a_1 &= [-6, -5] \times [1] \times [3], & a_2 &= [-6, -5] \times [1] \times [4], \\
a_3 &= [-6] \times [1] \times [3, 4], & a_4 &= [-5] \times [1] \times [3, 4], & s_1 &= [-6] \times [1] \times [3], \\
s_2 &= [-6] \times [1] \times [4], & s_3 &= [-5] \times [1] \times [3], & s_4 &= [-5] \times [1] \times [4].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_0(Q) &= Z_0(Q)/B_0(Q) \\
&= \frac{\mathbb{Z}\widehat{s}_1 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_2 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_3 \oplus \mathbb{Z}\widehat{s}_4}{\mathbb{Z}(\widehat{s}_1 - \widehat{s}_4) \oplus \mathbb{Z}(\widehat{s}_2 - \widehat{s}_4) \oplus \mathbb{Z}(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_4)} \\
&\cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_1(Q) &= Z_1(Q)/B_1(Q) \\
&= \frac{\mathbb{Z}(\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 - \widehat{a}_3 + \widehat{a}_4)}{\mathbb{Z}(\widehat{a}_1 - \widehat{a}_2 - \widehat{a}_3 + \widehat{a}_4)} \\
&\cong 0
\end{aligned}$$

$k > 1$

$$\begin{aligned}
H_k(Q) &= Z_k(Q)/B_k(Q) \\
&\cong 0 \text{ car } Z_k \cong 0.
\end{aligned}$$

Dans les trois exemples précédents, des méthodes d'algèbre linéaire suffisent pour obtenir les ensembles. Nous référons le lecteur à [10] pour la méthode exacte avec les matrices. De même, il y est expliqué comment utiliser les propriétés des ensembles cubiques pour construire des algorithmes efficaces de calcul d'homologie.

L'homologie, qu'elle soit cubique ou non, a plusieurs utilités. Elle permet d'identifier le nombre de composantes connexes, le nombre de boucles et les coefficients de torsion. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à tout livre traitant d'homologie, dont [10], [11] et [13].

1.5 Programmes sur des ensembles cubiques

Dans cette section, nous ferons un survol de deux programmes qui utilisent les ensembles cubiques. Le premier programme est CUBTOP[5] qui fut implanté par Sylvain Bérubé et Anik Trahan. Le deuxième est HOMCUBES[15] implanté par Pawel Pilarczyk.

CUBTOP est un outil pédagogique pour habituer les étudiants à visualiser et à manipuler des ensembles cubiques ou des ensemble représentables. Le programme peut faire plusieurs manipulations sur les ensembles cubiques ou représentables telles que :

- Des opérations d'ensembles : union, intersection, union disjointe.
- Identifier des sous-ensembles : les faces propres, les éléments d'une dimension donnée.
- Calculer le produit cartésien de deux ensembles.
- Représenter sous forme graphique des ensembles de dimension 1 ou 2.
- et plusieurs autres fonctions.

Tous les algorithmes des différentes fonctions sont basés sur le principe des cellules indécomposables. Il y a une infinité de points dans les ensembles cubiques, mais le programme ne travaille qu'avec des cellules indécomposables qui, selon la section 1.2, sont en nombres finis.

Voici trois figures produites à l'aide du programme CUBTOP.

La première est un ensemble cubique quelconque, la deuxième représente les faces libres de cet ensemble cubique et la troisième est une image d'un ensemble représentable qui est l'union disjointe des ensembles cubiques précédents.

Les trois fichiers d'entrées de ces images sont disponible à l'**Annexe A**.

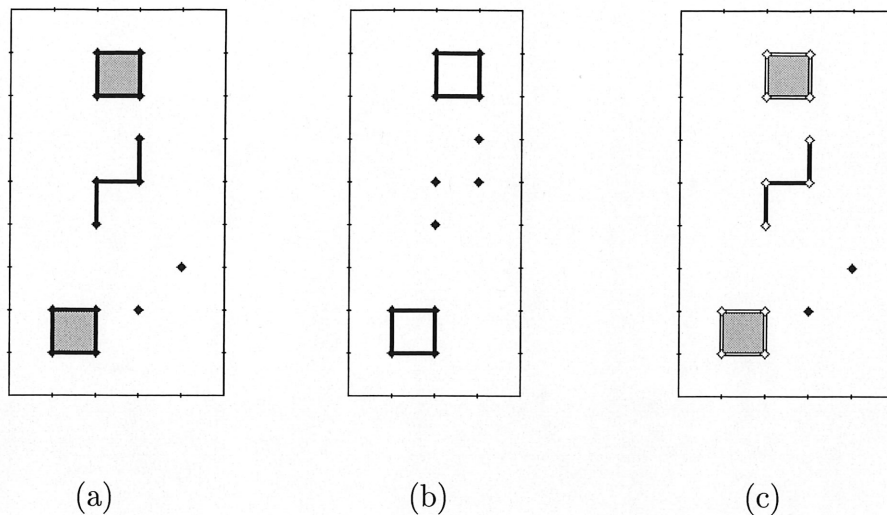


Figure 1.1 – Figures produites par CUBTOP
(a) Ensemble cubique, (b) Faces propres, (c) Union disjointe

Le programme HOMCUBES est un programme fait par Pilarczyk, c'est un des programmes qui sont disponibles sur CHomP (*Cubical Homology Programs*) [15]. Il permet de calculer l'homologie d'un ensemble cubique. Le programme est basé sur des algorithmes de [10]. Le principe est de faire des réductions sur l'ensemble cubique de telle sorte que les réductions ne changent pas l'homologie. Ainsi, les réductions permettent d'éviter des calculs algébriques sur des milliers de variables.

Les données et le résultat calculé par HOMCUBES d'un exemple du plan projectif sont également présenté dans l'**Annexe A**.

Par la suite, nous obtiendrons des ensembles cubiques dont nous désirons obtenir l'homologie, nous supposerons alors que l'homologie sera calculée par le programme HOMCUBES.

Chapitre 2

Topologie des ensembles cubiques

Dans le chapitre 1, nous avons calculé l'homologie des ensembles cubiques sans introduire une topologie. Dans ce chapitre, nous établirons une topologie cubique inspirée de la topologie de Zariski [7]. Ensuite, nous pourrons étudier les propriétés topologiques des ensembles cubiques et des ensembles représentables. Avec ces outils topologiques, nous définirons la continuité des fonctions sur ces espaces topologiques. Par la suite, nous définirons un sous-ensemble des fonctions continues, les fonctions cubiques, pour ensuite calculer l'homologie de ces fonctions.

Le lecteur devra connaître les bases de la topologie, soit les définitions de topologie, d'ensemble ouvert, d'ensemble fermé, de composante connexe et d'espace topologique.

2.1 Topologie de fermés

Une topologie est habituellement définie par ses ouverts. Dans plusieurs livres de topologie, comme dans [14] et [10], la topologie est définie par ses fermés et les compléments de ses fermés, les ouverts, respectent les propriétés de la topologie. Voici la proposition

affirmée.

Proposition 2.1.1 *Soit X un ensemble et \mathcal{V} un ensemble de parties de X qui vérifie les trois conditions suivantes :*

(F1) \emptyset et X sont des éléments de \mathcal{V} .

(F2) Toute intersection d'éléments de \mathcal{V} est un élément de \mathcal{V} .

(F3) Toute réunion d'un nombre fini d'éléments de \mathcal{V} est un élément de \mathcal{V} .

Alors $\mathcal{T} = \{U \mid X \setminus U \in \mathcal{V}\}$ est une topologie de X dont les fermés sont les éléments de \mathcal{V} .

La démonstration se fait directement par les propriétés du complément d'un ensemble.

Nous voulons maintenant construire une topologie à partir des ensembles cubiques, mais avant, nous devons démontrer un lemme qui nous servira pour la construction de la topologie et dans l'étude de cette topologie.

Lemme 2.1.2 *Soit une suite infinie d'ensembles cubiques $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots$, alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $X_n = X_{n+j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.*

Démonstration : Par l'absurde. Soit une suite d'ensembles cubiques $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \dots$, $X_i \in \mathcal{R}^d$. Ces ensembles sont tous non-vides car aucun ensemble ne peut être strictement contenu dans l'ensemble vide. X_1 est un ensemble cubique, alors il existe un entier n tel que $X_1 = \bigcup_{i=1}^n Q_j$ où $Q_j \in \mathcal{K}^d$. Par la proposition 1.1.8, il y a au plus $n3^d$ cubes élémentaires dans X_1 . Pour qu'un ensemble cubique Y soit strictement inclus dans un autre ensemble cubique Z , il faut qu'il y ait un cube élémentaire inclus dans Z qui ne soit pas dans Y , alors $X_{1+n3^d} = \emptyset$ ce qui contredit l'énoncé qu'aucun ensemble n'est vide.

□

Proposition 2.1.3 Soit l'ensemble $\mathcal{V}^d = \{X \subseteq \mathbb{R}^d \mid X \text{ est un ensemble cubique, } X = \emptyset \text{ ou } X = \mathbb{R}^d\}$, alors \mathcal{V}^d définit une topologie sur \mathbb{R}^d où les éléments de \mathcal{V}^d sont les fermés de la topologie.

Démonstration : Selon la proposition 2.1.1, il suffit de prouver que les propriétés (F1), (F2) et (F3) sont vérifiées.

(F1) : \emptyset et $\mathbb{R}^d \in \mathcal{V}^d$ selon la définition de \mathcal{V}^d .

(F2) : Soit $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un ensemble d'éléments de \mathcal{V}^d . Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_i = \mathbb{R}^d$, alors $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_j = \mathbb{R}^d \in \mathcal{V}^d$. Sinon, il existe un ensemble cubique (ou vide) dans $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Sans

perte de généralité, disons \mathcal{V}_1 . Nous définissons la suite $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $X_i = \bigcap_{j=1}^i \mathcal{V}_j$. Alors $X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots$. Par le lemme 2.1.2, nous savons qu'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $X_n = X_{n+i}$. Donc $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_j = \bigcap_{j=1}^n \mathcal{V}_j = X_n$. X_n est une intersection finie d'ensembles cubiques, alors il est un ensemble cubique ou l'ensemble vide, donc $X_n \in \mathcal{V}^d$.

(F3) : Soit $\{V_k\}_{k=1..n}$ une famille de n éléments de \mathcal{V}^d . Si $\mathbb{R}^d \in \{V_k\}_{k=1..n}$, alors $\bigcup_{k=1}^n V_k = \mathbb{R}^d$. Si pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $V_k = \emptyset$, alors $\bigcup_{k=1}^n V_k = \emptyset$. Sinon $\bigcup_{k=1}^n V_k$ est une union d'unions de cubes élémentaires de \mathcal{K}^d qui est un ensemble cubique dans \mathbb{R}^d , donc $\bigcup_{k=1}^n V_k \in \mathcal{V}^d$. \square

Par cette proposition, nous venons de construire une topologie dont tous les ensembles cubiques sont fermés. Par contre, les ouverts sont non-bornés, ce qui crée plusieurs problèmes d'un point de vue algorithmique. Il est cependant possible de construire une nouvelle topologie à partir d'une restriction de l'espace.

Proposition 2.1.4 Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ de la forme $M = [l_1, m_1] \times [l_2, m_2] \times \dots \times [l_d, m_d]$ avec $l_i, m_i \in \mathbb{Z}, l_i \leq m_i$ pour tout i . L'ensemble $\mathcal{M}^d = \{X \subseteq \mathbb{R}^d \mid X \text{ est un ensemble cubique inclus dans } M, X = \emptyset \text{ ou } X = M\}$, alors \mathcal{M}^d définit une topologie sur M où les éléments de \mathcal{M}^d sont les fermés de la topologie.

La démonstration est omise car elle est très semblable à la précédente.

Cette topologie a du sens au niveau algorithmique, car il est toujours possible de borner des ensembles cubiques. De plus, les fermés de cette topologie sont fermés dans la topologie euclidienne de \mathbb{R}^d . Ce qui est intéressant, c'est que la propriété est aussi respectée pour les ouverts. Les ouverts de cette topologie sont tous les ensembles représentables qui sont ouverts sur la topologie euclidienne de \mathbb{R}^d (sauf ceux qui ont une intersection avec le contour de M). De ce fait, tous les ouverts et les fermés peuvent être représentés comme une union finie de cellules élémentaires.

2.2 Propriétés de la topologie cubique

Dans cette section, nous présentons des propriétés de l'espace topologique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$. Ces propriétés sont les mêmes que celle de la topologie de Zariski. De plus, toutes les preuves sont les mêmes, à quelques détails près, que pour l'espace $E = (M, \mathcal{M}^d)$. Elles ne seront donc pas présentées pour cet espace particulier.

Définition 2.2.1 Soit $E = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique. E est un **espace noetherien** si pour toute suite d'ensembles fermés $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq V_4 \supseteq \dots$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $V_n = V_{n+j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.2.2 L'espace de la topologie cubique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$ est noetherien.

Démonstration : Par le lemme 2.1.2 avec la même précaution que dans la preuve de la proposition 2.1.3 en séparant le cas où tous les fermés sont égaux à \mathbb{R}^d . \square

Définition 2.2.3 Soient $E = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique et V un ensemble fermé de cet espace. V est un **fermé irréductible** si $V = V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 des fermés, implique $V = V_1$ ou $V = V_2$.

Proposition 2.2.4 Soit E un espace topologique noetherien, alors pour tout fermé V , il existe une famille finie d'ensembles fermés irréductibles $\{V_k\}_{k=1 \dots n}$ telle que $V = \bigcup_{k=1}^n V_k$. Si $V_i \not\subseteq V_j$ pour tout $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ alors cette décomposition est unique.

Démonstration : Existence : Par l'absurde. Soit un ensemble fermé Z qui n'ait pas de telle décomposition, alors il existe deux fermés Z_1 et Z_2 tels que $Z = Z_1 \cup Z_2$ avec $Z_1 \subset Z$ et $Z_2 \subset Z$. Par hypothèse, un de ces deux fermés n'admet pas de décomposition irréductible. Sans perte de généralité, posons que Z_1 n'admet pas de décomposition, alors il existe deux fermés Z_3 et Z_4 tels que $Z_1 = Z_3 \cup Z_4$ avec $Z_3 \subset Z_1$ et $Z_4 \subset Z_1$. Et ainsi de suite, on obtient une famille de fermés $\{Z_{2i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $Z_1 \supset Z_3 \supset Z_5 \supset \dots$, ce qui contredit l'hypothèse que l'espace est noetherien.

Unicité : Soient $Z = \bigcup_{i=1}^n V_i = \bigcup_{j=1}^m W_j$ deux décompositions d'éléments irréductibles de Z .
 $V_1 = V_1 \cap Z = V_1 \cap \left(\bigcup_{j=1}^m W_j \right) = \bigcup_{j=1}^m (V_1 \cap W_j)$. Comme V_1 est un fermé irréductible, alors il existe un indice $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ tel que $V_1 = V_1 \cap W_k$, donc $V_1 \subseteq W_k$. De la même façon, il existe un indice $k' \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $W_k \subseteq V_{k'}$. Nous avons $V_1 \subseteq W_k \subseteq V_{k'}$, par hypothèse si $1 \neq k'$ implique $V_1 \not\subseteq V_{k'}$ alors $k' = 1$, donc $W_k = V_1$. De la même façon, on identifie chaque fermé à un autre fermé, alors les deux décompositions sont identiques.

\square

La proposition précédente affirme l'existence et l'unicité d'une décomposition d'un fermé en fermés irréductibles. La prochaine proposition donne explicitement les fermés irréductibles sur l'espace de la topologie cubique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$.

Proposition 2.2.5 *Soit l'espace topologique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$, $Q \neq \mathbb{R}^d$ est un un fermé irréductible si et seulement si Q est un cube élémentaire.*

Démonstration :

Implication directe : Soit $Q \neq \mathbb{R}^d$ est un fermé irréductible. Q est fermé, alors Q est un ensemble cubique par définition de E . De plus, si $Q = R \cup S$, R et S deux fermés, alors $R = Q$ ou $S = Q$. Les seuls ensembles cubiques qui satisfont cette propriété sont les cubes élémentaires. Donc Q est un cube élémentaire.

Implication inverse : Soit Q un cube élémentaire tel qu'il existe deux fermés R et S tels que $Q = R \cup S$. R et S sont des fermés alors ils sont des ensembles cubiques et par la proposition 1.2.11, ils sont aussi des ensembles représentables. $\overset{\circ}{Q} \subseteq Q$, alors $\overset{\circ}{Q} \subseteq R$ ou S . Sans perdre de généralité, posons $\overset{\circ}{Q} \subseteq R$. Donc $Q = \overline{\overset{\circ}{Q}} \subseteq \overline{R} = R$, donc $Q = R$, donc Q est un fermé irréductible. \square

La dernière propriété topologique que nous étudierons est celle des espaces séparés.

Définitions 2.2.6 *Soient $E = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x, y \in X$.*

- (i) x et y sont **séparés au sens \mathbf{T}_0** s'il existe $T \in \mathcal{T}$ qui contient exactement l'un de ces deux points.
- (ii) x et y sont **séparés au sens \mathbf{T}_1** s'il existe $T, U \in \mathcal{T}$ avec $x \in T$, $y \notin T$, $y \in U$ et $x \notin U$.
- (iii) x et y sont **séparés au sens \mathbf{T}_2** s'il existe $T, U \in \mathcal{T}$ avec $x \in T$, $y \in U$ tels que $T \cap U = \emptyset$.

Proposition 2.2.7

(i) Soient l'espace de la topologie cubique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors x et y sont séparés au sens T_0 si et seulement si x et y sont dans deux cellules élémentaires disjointes.

(ii) Soient l'espace de la topologie cubique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors x et y sont séparés au sens T_1 si et seulement si x et y sont dans deux cellules élémentaires disjointes $\overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{Q}$ telles que $P \not\subseteq Q$ et $Q \not\subseteq P$.

(iii) Soient l'espace de la topologie cubique $E = (M, \mathcal{M}^d)$ et $x, y \in M$, alors x et y sont séparés au sens T_2 si et seulement si le plus petit ouvert $T_{min} \in \mathcal{M}^d$ contenant x et le plus petit ouvert $U_{min} \in \mathcal{M}^d$ contenant y sont disjoints.

Démonstration :

(i) Implication directe : Par la définition, il existe $T \in \mathcal{V}^d$ qui contient un seul des deux points, sans perdre de généralité, supposons que c'est $x \in T$ et donc $y \notin T$. T est une union de cellules élémentaires, alors il existe $\overset{\circ}{Q}$, telle que $x \in \overset{\circ}{Q}$. De plus, $y \notin T$, alors $y \notin \overset{\circ}{Q}$. Nous savons que $y \in \mathbb{R}^d$, alors il existe une cellule élémentaire $\overset{\circ}{P}$ telle que $y \in \overset{\circ}{P}$ et par la proposition 1.2.6(i), $\overset{\circ}{P}$ et $\overset{\circ}{Q}$ sont deux cellules élémentaires disjointes.

L'implication inverse : Soient deux cellules élémentaires disjointes $\overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{Q}$ telles que $x \in \overset{\circ}{P}$ et $y \in \overset{\circ}{Q}$. Si $x \notin Q$, alors $T = \mathbb{R}^d \setminus Q \in \mathcal{V}^d$ satisfait l'énoncé. Si $y \notin P$ alors $T = \mathbb{R}^d \setminus P \in \mathcal{V}^d$ satisfait l'énoncé. Si $x \in Q$ et $y \in P$, alors $\overset{\circ}{P} \cap Q \neq \emptyset$ et $\overset{\circ}{Q} \cap P \neq \emptyset$. Donc on a $P \subseteq Q$ et $Q \subseteq P$, donc $P = Q$ et $\overset{\circ}{P} = \overset{\circ}{Q}$ ce qui contredit que les deux cellules sont disjointes.

(ii) Implication directe : Par la définition, il existe $T, U \in \mathcal{V}^d$ avec $x \in T$, $y \in U$, $x \notin U$ et $y \notin T$. T et U sont des unions de cellules élémentaires, alors il existe $\overset{\circ}{P}$ et $\overset{\circ}{Q}$ telles que $x \in \overset{\circ}{P} \subset U \setminus V$ et $y \in \overset{\circ}{Q} \subset V \setminus U$. Il ne reste qu'à montrer que $P \not\subseteq Q$ et $Q \not\subseteq P$. Nous avons $\overset{\circ}{Q} \cap U = \emptyset$. U est un ouvert dans \mathcal{V}^d , mais aussi dans la topologie euclidienne et comme $Q = \overline{\overset{\circ}{Q}}$, nous avons $Q \cap U = \emptyset$. Nous concluons qu'il est impossible que $P \subset Q$, car $\overset{\circ}{P} \subset U$. De même, nous démontrons que $Q \not\subseteq P$.

L'implication inverse : Soient deux cellules élémentaires $\overset{\circ}{P}$ et $\overset{\circ}{Q}$ telles que $x \in \overset{\circ}{P}$, $y \in \overset{\circ}{Q}$, $P \not\subseteq Q$ et $Q \not\subseteq P$. Si $x \notin Q$ et $y \notin P$, alors $U = \mathbb{R}^d \setminus Q$ et $V = \mathbb{R}^d \setminus P$ satisfont l'énoncé. Si $x \in Q$, alors $\overset{\circ}{P} \subset Q$ et donc $P \subseteq Q$, ce qui contredit l'énoncé initial. Par les mêmes arguments, nous démontrons que si $y \in P$, cela implique la contradiction que $Q \subseteq P$.

(iii) Avant tout, nous définissons T_{min} et U_{min} . Posons $T_{min} = \bigcap \{T \in \mathcal{M}^d \mid x \in T\}$. Premièrement T_{min} est ouvert, car l'intersection est finie. En effet, M est borné, alors il existe un nombre fini d'ouverts dans \mathcal{M}^d . Deuxièmement il est le plus petit ouvert car il est contenu dans tous les ouverts qui contiennent x . De même, nous définissons $U_{min} = \bigcap \{U \in \mathcal{M}^d \mid y \in U\}$.

Implication directe : Soient x et y séparés au sens T_2 et soient T_{min} et U_{min} les deux plus petits ouverts contenant respectivement x et y . Comme x et y sont séparés au sens T_2 alors il existe deux ouverts T et U , tels que $x \in T$, $y \in U$ et $T \cap U = \emptyset$. De plus, $T_{min} \subseteq T$ et $U_{min} \subseteq U$, alors $T_{min} \cap U_{min} = \emptyset$.

L'implication inverse : T_{min} et U_{min} sont deux ouverts et satisfont l'énoncé. □

Définitions 2.2.8 Soit $E = (X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

- (i) E est un espace séparé au sens T_0 si pour tout $x, y \in X$, x et y sont séparés au sens T_0 .
- (ii) E est un espace séparé au sens T_1 si pour tout $x, y \in X$, x et y sont séparés au sens T_1 .
- (iii) E est un espace séparé au sens T_2 si pour tout $x, y \in X$, x et y sont séparés au sens T_2 .

Proposition 2.2.9 L'espace de la topologie cubique $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$ et l'espace $E' = (M, \mathcal{M}^d)$ ne sont pas des espaces séparés au sens T_0 , a fortiori, les espaces ne sont pas séparés ni au sens T_1 ni au sens T_2 .

Démonstration : En effet, un espace séparé au sens T_2 implique qu'il est séparé au sens T_1 et un espace séparé au sens T_1 implique qu'il est séparé au sens T_0 . Donc il suffit de démontrer que notre espace n'est pas séparé au sens T_0 . Commençons par $E = (\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$. Soient les points de $\mathbb{R}^d : x = (a, a, a, \dots, a), y = (b, b, b, \dots, b) \ a, b \in]0, 1[$ et $a \neq b$. Posons $\overset{\circ}{Q} =]0, 1[^d$, alors $x \in \overset{\circ}{Q}$ et $y \in \overset{\circ}{Q}$. Selon la proposition 2.2.7, x et y ne sont pas séparés au sens T_0 , donc l'espace n'est pas séparé au sens T_0 .

Continuons avec $E' = (M, \mathcal{M}^d)$. Soit $Q \subset M$ un cube élémentaire de dimension d et soient x, y deux points distincts de $\overset{\circ}{Q}$. Donc tous les ouverts qui contiennent x contiennent $\overset{\circ}{Q}$ et de ce fait contiennent y . Donc $E' = (M, \mathcal{M}^d)$ n'est pas séparé au sens T_0 . \square

2.3 Homologie d'une fonction cubique

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'homologie d'un ensemble cubique. Maintenant, nous nous intéressons à l'homologie d'une fonction. Par contre, pour nos calculs, nous devons imposer certaines conditions topologiques sur la fonction. En effet, nous voulons travailler avec des fonctions qui ont pour domaine et pour co-domaine des ensembles cubiques. Cette section est inspirée de résultats de Mrozek et Kaczynski, d'un texte [9] qui a servi pour démarrer la rédaction du chapitre 2 dans [10], mais les sections sur les fonctions cubiques n'ont jamais été publiées. Dans ce texte, ils utilisaient une définition différente pour une fonction cubique, les résultats sont les mêmes, mais les démonstrations sont différentes. La proposition 2.3.15 et le théorème 2.3.18 sont des résultats nouveaux.

Avant tout, voici quelques notations qui allégeront l'écriture de cette section pour une meilleure lecture.

Notations 2.3.1

(i) $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$.

(ii) Soient $A, B \subset \mathbb{N}$ et $\alpha : A \rightarrow B$ une fonction, alors nous notons

$$\text{sgn } \alpha = \begin{cases} (-1)^{\text{card}\{(i,j) \in A^2 \mid \alpha_j < \alpha_i \text{ et } j > i\}} & \text{si } \alpha \text{ est une bijection} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(iii) Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction et $p_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction projection sur la i^e coordonnée alors nous notons $f_i = p_i \circ f$.

(iv) Soit $Q \in \mathcal{K}^d$, $Q = \prod_{i=1}^d I_i$, alors nous notons $\text{ess}(Q) = \{i \in \mathbb{N}_d \mid \dim I_i = 1\}$.

Pour la technique du calcul d'homologie, la fonction doit être continue et fermée par rapport à la topologie cubique définie en 2.1.4. La prochaine définition nomme les fonctions ayant cette caractéristique.

Définition 2.3.2 Soient Y, Z deux ensembles cubiques et $f : Y \rightarrow Z$, une fonction sur l'espace topologique $E = (M, \mathcal{M}^d)$. f est une **fonction cubique** si la pré-image d'un ensemble cubique est un ensemble cubique et si l'image d'un ensemble cubique est un ensemble cubique.

Proposition 2.3.3 Soient $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}^d$ et $Z \subset \mathbb{R}^{d'}$, trois ensembles cubiques et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions cubiques, alors :

(i) $g \circ f$ est cubique.

(ii) Si $Q \in \mathcal{K}(X)$, alors $f(Q) \in \mathcal{K}(Y)$

(iii) Soit P une face de Q alors $f(P)$ est une face de $f(Q)$.

(iv) Soit $Q \in \mathcal{K}(X)$, alors $\dim Q \geq \dim f(Q)$.

Démonstration :

(i) Soit $F \subseteq X$, un ensemble cubique. Alors $f(F)$ est un ensemble cubique car f est cubique. De plus $g(f(F))$ est un ensemble cubique car g est cubique. De même pour la pré-image. Soit $G \subseteq Z$, un ensemble cubique, alors $g^{-1}(G)$ est un ensemble cubique. De

plus $f^{-1}(g^{-1}(G))$ est un ensemble cubique car f est cubique. Donc $g \circ f$ est cubique.

(ii) Soit $f(Q) = R \cup S$, R et S deux ensembles cubiques. Posons $P_R = f^{-1}(R)$, $P_S = f^{-1}(S)$. Donc P_R, P_S sont deux faces de Q telles que $P_R \cup P_S = Q$. Q est un cube élémentaire, par la proposition 2.2.5, Q est un fermé irréductible, alors $P_R = Q$ ou $P_S = Q$. Donc $R = f(P_R) = f(Q)$ ou $S = f(P_S) = f(Q)$, ce qui implique que $f(Q)$ est un fermé irréductible, donc un cube élémentaire.

(iii) Par (ii), $f(Q)$ et $f(P)$ sont des cubes élémentaires. De plus comme f est une fonction, $P \subseteq Q$ implique que $f(P) \subseteq f(Q)$ donc $f(P)$ est une face de $f(Q)$.

(iv) Par récurrence sur $k = \dim Q$.

Si $k = 0$, alors $f(Q)$ est un seul point par la définition d'une fonction, donc $\dim Q = 0 = \dim f(Q)$.

Supposons l'énoncé vrai pour un certain $k \geq 0$.

Soit $Q \in \mathcal{K}_{k+1}(X)$ et posons $\dim f(Q) = m$.

Si $m = 0$, l'énoncé est vérifié.

Si $m > 0$, alors il existe P_+, P_- deux faces opposées de $f(Q)$ de dimension $m - 1$. P_+, P_- sont deux cubes élémentaire disjoints, alors $f^{-1}(P_+)$ et $f^{-1}(P_-)$ sont deux parties propres disjointes de Q , donc $\dim f^{-1}(P_-) \leq k$. Par hypothèse de récurrence sur ces faces de Q , $k \leq m - 1$, donc $\dim Q = k + 1 \leq m = \dim f(Q)$. \square

Exemples 2.3.4

- *La fonction identité est une fonction cubique.*
- *La projection sur un axe est une fonction cubique.*
- *La translation d'un vecteur aux coordonnées entières est une fonction cubique.*
- *La symétrie est une fonction cubique.*

L'exemple suivant montre comment vérifier si une fonction est cubique.

Exemple 2.3.5 Soit la fonction $c : [-6, -5] \times [1] \times [3, 4] \rightarrow [-6, -5] \times [1] \times [3]$ telle que :

Pour $x_1 \in [-6, -5]$, nous avons $c(x_1, 1, 3) = (x_1, 1, 3)$ et $c(x_1, 1, 4) = (x_1, 1, 3)$.

Pour $x_3 \in]3, 4[$, nous avons : $c(-6, 1, x_3) = (-6, 1, 3)$ et $c(-5, 1, x_3) = (-5, 1, x_3)$.

Pour tout $(x_1, 1, x_3) \in]-6, -5[\times]1, 3[\times]3, 4[$, nous avons $c(x_1, 1, x_3) = (-\frac{11}{2}, 1, 3)$.

Pour vérifier que c est une fonction cubique, il faut vérifier si l'image et la pré-image de chaque fermé est un fermé.

$$c([-6] \times [1] \times [3]) = [-6] \times [1] \times [3] \quad c([-6] \times [1] \times [4]) = [-6] \times [1] \times [3]$$

$$c([-5] \times [1] \times [3]) = [-5] \times [1] \times [3] \quad c([-5] \times [1] \times [4]) = [-5] \times [1] \times [3]$$

$$c([-6] \times [1] \times [3, 4]) = [-6] \times [1] \times [3] \quad c([-6, -5] \times [1] \times [4]) = [-6, -5] \times [1] \times [3]$$

$$c([-5] \times [1] \times [3, 4]) = [-5] \times [1] \times [3] \quad c([-6, -5] \times [1] \times [4]) = [-6, -5] \times [1] \times [3]$$

$$c([-6, -5] \times [1] \times [3, 4]) = [-6, -5] \times [1] \times [3]$$

$$c^{-1}([-6] \times [1] \times [3]) = [-6] \times [1] \times [3, 4] \quad c^{-1}([-5] \times [1] \times [3]) = [-5] \times [1] \times [3, 4]$$

$$c^{-1}([-6, -5] \times [1] \times [3]) = [-6, -5] \times [1] \times [3, 4]$$

Donc la fonction c est cubique. Nous remarquons que la fonction c est continue au sens de la topologie cubique et elle n'est pas continue au sens de la topologie habituelle.

Les fonctions cubiques amènent un cube élémentaire sur un cube élémentaire et la pré-image d'un cube élémentaire est un cube élémentaire. Par contre, il n'y a aucune spécification sur le comportement à l'intérieur d'un cube. Une fonction cubique n'a pas besoin d'être continue au sens de la topologie euclidienne comme dans l'exemple précédent. Par contre, le comportement à l'intérieur d'un cube nous intéressera peu, nous travaillerons surtout avec des fonctions plus simples qui ont le même comportement sur chaque cube élémentaire.

Définition 2.3.6 Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction cubique. La **classe cubique** de f est l'ensemble des fonctions cubiques $g : X \rightarrow Y$ telles que pour tout $Q \in \mathcal{K}(X)$, $f(Q) = g(Q)$.

Théorème 2.3.7 Soient $Y \subset \mathbb{R}^d$ et $Z \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles cubiques, $g : Y \rightarrow Z$ une

fonction. g est une fonction cubique si et seulement s'il existe f dans la classe cubique de g ayant la propriété suivante :

Pour tout $Q \in \mathcal{K}(Y)$, la restriction de f à Q peut être exprimée par la forme

$$f_i(x) = m_i + \epsilon_i x_{\mu(i)}.$$

où $i \in \mathbb{N}_{d'}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ et μ est une fonction de $\mathbb{N}_{d'}$ à \mathbb{N}_d telle que ϵ_i , m_i et $\mu(i)$ sont uniquement déterminés par i . De plus, la fonction $\nu_{f,Q} : \text{ess}(f(Q)) \rightarrow \text{ess}(Q)$ telle que $\nu_{f,Q}(k) = \mu(k)$ est une fonction injective uniquement déterminée par f et Q .

Démonstration :

La condition suffisante est triviale car si f est dans la classe cubique de g , alors g est cubique par définition d'une classe cubique.

Pour la nécessité et la construction de f , procédons par une preuve par récurrence sur $k = \dim Q$.

Soit $k = 0$. Alors $g(Q) \in \mathcal{K}_0^{d'}(Z)$ par la proposition 2.3.3 : l'image d'un cube élémentaire est un cube élémentaire de dimension plus petite ou égale. Donc $g(Q) = \prod_{i=1}^{d'} [l_i]$, $l_i \in \mathbb{Z}$. Alors $g_i(Q) = l_i + 0$ qui est une fonction de la forme $m_i + \epsilon_i x_{\mu(i)}$ avec $m_i = l_i$, $\epsilon_i = 0$ et μ quelconque. $\nu_{g,Q}$ n'est pas défini car $\text{ess}(g(Q)) = \emptyset = \text{ess}(Q)$. Comme g est dans la classe cubique de g , nous concluons que $f = g$.

Soit le théorème vrai pour un certain $k \geq 0$. Maintenant supposons que $\dim Q = k + 1$.

Si $\text{ess}(g(Q)) = \emptyset$, alors comme précédemment, $g_i(Q) = l_i + 0$ qui est une fonction de la forme $m_i + \epsilon_i x_{\mu(i)}$ avec $m_i = l_i$, $\epsilon_i = 0$ et μ quelconque. $\nu_{g,Q}$ n'est pas défini car $\text{ess}(g(Q)) = \emptyset$. Comme g est dans la classe cubique de g , nous concluons que $f = g$.

Si $\text{ess}(g(Q)) \neq \emptyset$, alors il existe $n \in \text{ess}(g(Q))$. Posons

$$g_n(Q) = [r_n, r_n + 1]$$

$$P = g(Q)$$

$$P_0 = g_1(Q) \times g_2(Q) \times \dots \times g_{n-1}(Q) \times [r_n] \times g_{n+1}(Q) \times \dots \times g_d(Q)$$

$$Q_0 = Q \cap g^{-1}(P_0)$$

P_0 est une face propre de P , alors $Q_0 \subset Q$. Soient R_1, R_2 deux ensembles cubiques tels que $Q_0 = R_1 \cup R_2$, $R_1 \neq \emptyset \neq R_2$. Alors $g(R_1) \cup g(R_2) = P_0$, mais comme g est cubique et que P_0 est un cube élémentaire, alors $g(R_1) = P_0$ ou $g(R_2) = P_0$, donc $R_1 = Q_0$ ou $R_2 = Q_0$ ce qui montre que Q_0 est une face propre de Q . $\dim Q_0 = k$, car sinon, il existerait R_0 tel que $Q_0 \subset R_0 \subset Q$ qui impliquerait que $g(Q_0) = P_0 \subset g(R_0) \subset g(Q) = P$ ce qui est impossible car les trois sont des cubes élémentaires et que $\dim P_0 + 1 = \dim g(Q)$. Comme P_0 est une face de dimension k , alors par hypothèse de récurrence, il existe f_0 dans la classe cubique de g telle que la restriction de f_0 à Q_0 peut être exprimée par la forme $f_{0i}(x) = m_{0i} + \epsilon_{0i}x_{\mu_0(i)}$ où $i \in \mathbb{N}_d$, $m_{0i} \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_{0i} \in \{-1, 0, 1\}$ et μ_0 est une fonction de \mathbb{N}_d à \mathbb{N}_d tels que ϵ_{0i} , m_{0i} et $\mu_0(i)$ sont uniquement déterminés par i . De plus, il existe un unique $j \in \text{ess}(Q)$ tel que $j \notin \text{ess}(Q_0)$. $\dim p_j(Q) = 1$ alors posons $p_j(Q) = [l_j, l_j + 1]$. Si $p_j(Q_0) = [l_j]$, alors il existe une fonction f dans la classe de g telle que $f_i = f_{0i}$ pour tout $i \neq n$ et $f_n = r_n - l_j + x_j$ ce qui détermine uniquement $m_n = r_n - l_j$, $\epsilon_n = 1$ et qui définit $\mu(n) = j$.

Si $p_j(Q_0) = [l_j + 1]$, alors il existe une fonction f dans la classe de g telle que $f_i = f_{0i}$ pour tout $i \neq n$ et $f_n = r_n + 1 + l_j - x_j$ ce qui détermine uniquement $m_n = r_n + 1 + l_j$, $\epsilon_n = -1$ et qui définit $\mu(n) = j$.

Montrons que $\nu_{f,Q} : \text{ess}(f(Q)) \rightarrow \text{ess}(Q)$ telle que $\nu_{f,Q}(k) = \mu(k)$ est une fonction injective. Soient $a, b \in \text{ess}(f(Q))$, tels que $a \neq b$.

Si $a \neq n \neq b$, alors $a, b \in \text{ess}(f(Q_0))$ et par hypothèse de récurrence $a \neq b$, implique $\nu(a) \neq \nu(b)$.

Si $a = n \neq b$, alors $b \in \text{ess}(f(Q_0))$ et $\nu(n) = j$, mais j n'est pas dans l'image de ν_{f,Q_0} , donc $\nu(a) \neq \nu(b)$. \square

La proposition précédente nous affirme que chaque fonction cubique a une autre fonction

dans sa classe qui est affinement linéaire. De plus, la démonstration nous donne une méthode pour obtenir cette fonction.

Exemples 2.3.8 Soit la fonction c définie à l'exemple 2.3.5, le théorème nous donne l'existence d'une fonction fc qui est dans la même classe que c telle que

$$fc_1(x) = 0 + (1)x_1$$

$$fc_2(x) = 1 + (0)x_1$$

$$fc_3(x) = 3 + (0)x_3$$

Avec $\mu = (1, 1, 3)$ et $\nu(1) = 1$.

Notations 2.3.9 Par la suite, nous utiliserons la notation $\text{sgn}(f, Q)$ pour représenter $\text{sgn}(\nu_{f,Q})$ où ν est la fonction définie au théorème 2.3.7.

Corollaire 2.3.10 Soient $g : X \rightarrow Y$ une fonction cubique, $X \subset \mathbb{R}^d$ et $Y \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles cubiques et $Q \in \mathcal{K}^d$, $Q = \prod_{i=1}^d I_i$ alors il existe une fonction f dans la classe de g et des fonctions cubiques $f^i : I_{\mu(i)} \rightarrow J_i$ telles que

$$f(x) = (f^1(x_{\mu(1)}), f^2(x_{\mu(2)}), \dots, f^d(x_{\mu(d)}))$$

où $\mu : \mathbb{N}_d \rightarrow \mathbb{N}_d$ est la fonction définie au théorème 2.3.7 et $J_i = f^i(x_{\mu(i)})$.

Démonstration : Résultat immédiat du théorème précédent en posant f^i la restriction de f_i sur $I_{\mu(i)}$. □

Exemples 2.3.11 Soient la fonction c définie à l'exemple 2.3.5 et la fonction fc définie à l'exemple 2.3.8. Le corollaire nous donne l'existence d'une famille de fonctions telle que

$$fc^1 : [-6, 5] \rightarrow [-6, -5] \text{ telle que } fc^1(x) = x.$$

$$fc^2 : [-6, 5] \rightarrow [1] \text{ telle que } fc^2(x) = 1.$$

$$fc^3 : [3, 4] \rightarrow [3] \text{ telle que } fc^3(x) = 3.$$

Maintenant que nous savons représenter simplement des fonctions cubiques, nous tenterons de construire l'homologie des fonctions cubiques, mais pour ce faire, nous travaillerons avec des homomorphismes.

Définition 2.3.12 Soient $f : X \rightarrow Y$ une fonction cubique, $X \subset \mathbb{R}^d$ et $Y \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles cubiques, l'homomorphisme associé de dimension k de f noté $f_{\#k}$ tel que $f_{\#k} : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ est défini sur ses éléments de base $\widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{K}}_k(X)$ avec $\dim Q = d$:

(a) Si $k = 0$ et $d = 1$, alors $Q = [l]$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}$ et nous définissons :

$$f_{\#0}(\widehat{[l]}) = \widehat{[f(l)]}$$

(b) Si $k = 1$ et $d = 1$, alors $Q = [l, l + 1]$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}$ et nous définissons :

$$f_{\#1}(\widehat{[l, l + 1]}) = \begin{cases} [f(l), \widehat{f(l + 1)}] & \text{si } f(l) < f(l + 1) \\ -[f(l + 1), \widehat{f(l)}] & \text{si } f(l) > f(l + 1) \\ 0 & \text{si } f(l) = f(l + 1) \end{cases}$$

(c) Si $d > 1$ et $Q = \prod_{i=1}^d I_i$ alors nous définissons

$$f_{\#k}(\widehat{Q}) = \text{sgn}(f, Q) \underset{i=1}{\overset{d}{\diamond}} f_{\#\dim I_{\mu(i)}}(\widehat{I_{\mu(i)}})$$

où μ est la fonction définie au corollaire 2.3.10. Ensuite on définit $f_{\#k}$ par linéarité sur des k -chaînes arbitraires. Nous remarquons que l'image d'une k -chaîne est une k -chaîne du fait que si $\dim Q \neq \dim f(Q)$ alors $\text{sgn}(f, Q) = 0$ et 0 est une k -chaîne et si $\dim Q = \dim f(Q)$, alors l'image est de même dimension.

Exemples 2.3.13 Soient la fonction f_c définie à l'exemple 2.3.8, $X = [-6, -5] \times [1] \times [3, 4]$ et $Y = [-6, -5] \times [1] \times [3]$. Alors l'homomorphisme associé à f_c aux éléments de base de $C(X)$ est :

$$f_{c\#0}(\widehat{[-6] \times [1] \times [3]}) = \widehat{[-6] \times [1] \times [3]}$$

$$\begin{aligned}
fc_{\#0}([-5] \times \widehat{[1]} \times [3]) &= [-5] \times \widehat{[1]} \times [3] \\
fc_{\#0}([-6] \times \widehat{[1]} \times [4]) &= [-6] \times \widehat{[1]} \times [3] \\
fc_{\#0}([-5] \times \widehat{[1]} \times [4]) &= [-5] \times \widehat{[1]} \times [3] \\
fc_{\#1}([-6, -5] \times \widehat{[1]} \times [3]) &= [-6, -5] \times \widehat{[1]} \times [3] \\
fc_{\#1}([-6, -5] \times \widehat{[1]} \times [4]) &= [-6, -5] \times \widehat{[1]} \times [3] \\
fc_{\#1}([-6] \times \widehat{[1]} \times [3, 4]) &= 0 \\
fc_{\#1}([-5] \times \widehat{[1]} \times [3, 4]) &= 0 \\
fc_{\#2}([-6, -5] \times \widehat{[1]} \times [3, 4]) &= 0
\end{aligned}$$

Proposition 2.3.14 *Soit f une fonction cubique, alors son homomorphisme associé commute avec l'opérateur frontière, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ nous avons*

$$\partial_k \circ f_{\#k} = f_{\#k-1} \circ \partial_k$$

Démonstration : Comme les deux fonctions sont linéaires, il suffit de le démontrer sur les éléments de base. Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble cubique et $Q \in \mathcal{K}_k^d(X)$.

Si $d = 1$ et $k = 1$, $Q = [l, l+1], l \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\begin{aligned}
\partial_1 \circ f_{\#1}[\widehat{[l, l+1]}] &= \begin{cases} \partial_1[f(l), \widehat{f(l+1)}] & \text{si } f(l) < f(l+1) \\ \partial_1(-[f(l+1), \widehat{f(l)}]) & \text{si } f(l) > f(l+1) \\ \partial_1 0 & \text{si } f(l) = f(l+1) \end{cases} \\
&= [\widehat{f(l+1)}] - [\widehat{f(l)}] \\
&= f_{\#0}[\widehat{[l+1]}] - f_{\#0}[\widehat{[l]}] \\
&= f_{\#0}([\widehat{[l+1]}] - [\widehat{[l]}]) \\
&= f_{\#0} \circ \partial_1([\widehat{[l, l+1]})
\end{aligned}$$

Dans la deuxième partie de la démonstration, pour alléger l'écriture, nous n'écrivons pas le c de $f_{\#c}^i \widehat{I}_i$, car c représente tout simplement la dimension de I . Donc si $d \geq 1$ et $k \geq 1$, $Q = \prod_{i=1}^d I_i$ tel que $I_i = [a_i, b_i]$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et $b_i \in \{a_i, a_i + 1\}$. Fixons $\mu : \mathbb{N}_d \rightarrow \mathbb{N}^d$ du théorème 2.3.7. Pour Q fixe, nous ajoutons comme notations : $A = \text{ess}(Q)$, $B =$

ess $(f(Q))$ et $\nu = \nu(f, Q)$. Si ν n'est pas une bijection, nous vérifions facilement que $\partial_k \circ f_{\#k} = 0 = f_{\#k-1} \circ \partial_k$. Alors supposons que ν est une bijection, de plus posons pour tout $i \in B$:

$$s_i = \text{card}\{\nu(j) \in A \mid j < i\}$$

$$p_i = \text{card}\{j \in B \mid j < i \text{ et } \nu(j) > \nu(i)\}$$

$$n_i = \text{card}\{j \in B \mid j > i \text{ et } \nu(j) < \nu(i)\}$$

$$t_i = \text{card}\{j \in B \mid \nu(j) < \nu(i)\}$$

$$r_i = \text{card}\{(k, l) \in B_i^2 \mid k < l \text{ et } \nu(k) < \nu(l)\}$$

$$B_i = B \setminus \{i\}$$

$$r'_i = \text{card}\{(k, l) \in B_i^2 \mid k < l \text{ et } \nu(k) < \nu(l)\}$$

$$e_i = \sum_{j=1}^{i-1} \dim I_{\nu(j)}$$

$$e'_i = \sum_{j=1}^{i-1} \dim f_{\#}^j I_{\nu(j)}$$

$$m \in A : e''_m = \sum_{j=1}^{m-1} \dim I_j$$

$$\gamma_i = (-1)^{e'_i}$$

$$\epsilon_i = \text{sgn}(f, Q) \gamma_i$$

ν est une bijection, alors $\dim f_{\#}^i(I_{\nu(i)}) = \dim I_{\nu(i)}$, ce qui implique :

$$\gamma_i = (-1)^{e_i} = (-1)^{s_i}$$

Soient $Q_a^i = \prod_{h=1}^{i-1} I_h \times [a_i] \times \prod_{h=i+1}^d I_h$ et $Q_b^i = \prod_{h=1}^{i-1} I_h \times [b_i] \times \prod_{h=i+1}^d I_h$. Nous remarquons que $\text{ess}(Q_a^i) = B_i = \text{ess}(Q_b^i)$, donc $\text{sgn}(f, Q_a^i) = (-1)^{r'_i} = \text{sgn}(f, Q_b^i)$. De plus $\text{sgn}(f, Q) =$

$(-1)^{r_i} = (-1)^{r'_i + p_i + n_i}$. Ce qui implique que $(-1)^{r'_i} = \text{sgn}(f, Q)(-1)^{p_i + n_i}$ et finalement nous avons $\epsilon_i(-1)^{r_i} = \text{sgn}(f, Q)^2(-1)^{s_i + p_i + n_i} = (-1)^{t_i}$.

Maintenant, nous pouvons enfin calculer $\partial_k \circ f_{\#k} \widehat{Q}$ en utilisant les notations et les identités précédentes. De plus, nous utiliserons le cas démontré dans un espace dimension 1, le corollaire 1.3.11 pour le calcul de ∂Q et la définition de $f_{\#k}$.

$$\begin{aligned}
\partial_k \circ f_{\#k} \widehat{Q} &= \partial_k (\text{sgn}(f, Q) \underset{h=1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\mu(h)}) \\
&= \sum_{i=1}^d \text{sgn}(f, Q) (-1)^{e'_i} \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} f_{\#}^h \widehat{I}_{\mu(h)} \right) \diamond \partial \circ f_{\#}^i (\widehat{I}_{\mu(i)}) \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\mu(h)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^d \epsilon_i \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} f_{\#}^h \widehat{I}_{\mu(h)} \right) \diamond \partial \circ f_{\#}^i (\widehat{I}_{\mu(i)}) \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\mu(h)} \right) \\
&= \sum_{i \in B} \epsilon_i \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond \partial \circ f_{\#}^i (\widehat{I}_{\nu(i)}) \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \\
&= \sum_{i \in B} \epsilon_i \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond f_{\#}^i \circ \partial (\widehat{I}_{\nu(i)}) \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \\
&= \sum_{i \in B} \epsilon_i \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond f_{\#}^i [\widehat{b}_i] \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) - \\
&\quad \sum_{i \in B} \epsilon_i \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond f_{\#}^i [\widehat{a}_i] \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d f_{\#}^h \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \\
&= \sum_{i \in B} \epsilon_i (-1)^{r_i} f_{\#k-1} \left(\left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond [\widehat{b}_i] \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \right) - \\
&\quad \sum_{i \in B} \epsilon_i (-1)^{r_i} f_{\#k-1} \left(\left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond [\widehat{a}_i] \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \right) \\
&= \sum_{i \in B} \epsilon_i (-1)^{r_i} f_{\#k-1} \left(\left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond \partial \widehat{I}_{\nu(i)} \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \right) \\
&= \sum_{i \in B} (-1)^{t_i} f_{\#k-1} \left(\left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond \partial \widehat{I}_{\nu(i)} \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \right) \\
&= f_{\#k-1} \left(\sum_{i \in B} (-1)^{t_i} \left(\underset{h=1}{\diamond}^{i-1} \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \diamond \partial \widehat{I}_{\nu(i)} \diamond \left(\underset{h=i+1}{\diamond}^d \widehat{I}_{\nu(h)} \right) \right) \\
&= f_{\#k-1} \left(\sum_{m \in A} (-1)^{\text{card}\{l \in A \mid l < m\}} \left(\underset{h=1}{\diamond}^{m-1} \widehat{I}_h \right) \diamond \partial \widehat{I}_m \diamond \left(\underset{h=m+1}{\diamond}^d \widehat{I}_h \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{\#k-1} \left(\sum_{m \in A} (-1)^{e''_m} \left(\underset{h=1}{\overset{m-1}{\diamond}} \widehat{I}_h \right) \diamond \partial \widehat{I}_m \diamond \left(\underset{h=m+1}{\overset{d}{\diamond}} \widehat{I}_h \right) \right) \\
&= f_{\#k-1} \left(\sum_{m=1}^d (-1)^{e''_m} \left(\underset{h=1}{\overset{m-1}{\diamond}} \widehat{I}_h \right) \diamond \partial \widehat{I}_m \diamond \left(\underset{h=m+1}{\overset{d}{\diamond}} \widehat{I}_h \right) \right) \\
&= f_{\#k-1} \circ \partial_k \widehat{Q}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.15 *Les homomorphismes associés à des fonctions cubiques respectent ces propriétés :*

(i) Soit $id_X : X \rightarrow X$, la fonction identité sur un ensemble cubique X , alors $(id_X)_{\#k}$ est la fonction identité sur $C_k(X)$.

(ii) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions cubiques, alors $g_{\#k} \circ f_{\#k} = (g \circ f)_{\#k}$.

(iii) Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction cubique, alors $f_{\#k}(Z(X)) \subseteq Z(Y)$ et $f_{\#k}(B(X)) \subseteq B(Y)$.

(iv) Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction cubique, alors il existe une fonction $h_k : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ telle que $h_k(c + B_k(X)) = f_{\#k}(c) + B_k(Y)$.

Démonstration : Comme les homomorphismes sont linéaires, alors il suffit de démontrer les énoncés sur les éléments de base pour (i) et (ii). Posons $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}^d$ et $Z \subset \mathbb{R}^{d'}$.

Soit $\widehat{Q} \in \mathcal{K}_k^d(X)$ avec $Q = \prod_{i=1}^d I_i$.

$$\begin{aligned}
(i) \quad (id_X)_{\#k}(\widehat{Q}) &= \text{sgn}(id_X, Q) \underset{i=1}{\overset{d}{\diamond}} (id_X)_{\#\dim I_{\mu(i)}} \widehat{I}_{\mu(i)} \\
&= (-1)^0 \underset{i=1}{\overset{d}{\diamond}} (id_X)_{\#\dim I_i} \widehat{I}_i, \text{ car } \forall i, \mu(i) = i \\
&= \underset{i=1}{\overset{d}{\diamond}} \widehat{I}_i \\
&= \widehat{Q}
\end{aligned}$$

(ii) Pour cette partie de la preuve, pour alléger l'écriture, nous utiliserons la notation $f_{\#}$ pour représenter $f_{\#k}$ où k est la dimension de l'objet sur lequel l'homomorphisme est appliqué.

Premièrement, étudions le cas où $d = d' = d'' = 1$.

Si $\dim Q = 0$ alors $Q = [l], l \in \mathbb{Z}$ et nous avons :

$$g_{\#} \circ f_{\#}[l] = g_{\#}[\widehat{f(l)}] = [\widehat{g \circ f(l)}] = (g \circ f)_{\#}[\widehat{l}]$$

Si $\dim Q = 1$, alors $Q = [l, l+1], l \in \mathbb{Z}$ et nous avons :

$$\begin{aligned} (g_{\#} \circ f_{\#})([\widehat{l, l+1}]) &= \begin{cases} g_{\#}[f(l), \widehat{f(l+1)}] & \text{si } f(l) < f(l+1) \\ -g_{\#}[\widehat{f(l+1)}, f(l)] & \text{si } f(l) > f(l+1) \\ g_{\#}0 & \text{si } f(l) = f(l+1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} [g \circ f(l), \widehat{g \circ f(l+1)}] & \text{si } f(l) < f(l+1) \text{ et si } g \circ f(l) < g \circ f(l+1) \\ -[g \circ f(\widehat{l+1}), g \circ f(l)] & \text{si } f(l) < f(l+1) \text{ et si } g \circ f(l) > g \circ f(l+1) \\ -[g \circ f(l), \widehat{g \circ f(l+1)}] & \text{si } f(l) > f(l+1) \text{ et si } g \circ f(l) < g \circ f(l+1) \\ [g \circ f(l), \widehat{g \circ f(l+1)}] & \text{si } f(l) > f(l+1) \text{ et si } g \circ f(l) > g \circ f(l+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [g \circ f(l), \widehat{g \circ f(l+1)}] & \text{si } g \circ f(l) < g \circ f(l+1) \\ -[g \circ f(\widehat{l+1}), g \circ f(l)] & \text{si } g \circ f(l) > g \circ f(l+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= (g \circ f)_{\#}([\widehat{l, l+1}]) \end{aligned}$$

Maintenant, supposons $d, d', d'' \geq 1$.

$$\begin{aligned} (g_{\#} \circ f_{\#})(\widehat{Q}) &= g_{\#}(\text{sgn}(f, Q) \underset{i=1}{\overset{d'}{\diamond}} f_{\#}^i \widehat{I}_{\mu_f, Q(i)}) \\ &= \text{sgn}(\nu_{f, Q}) g_{\#k} \left(\underset{i=1}{\overset{d'}{\diamond}} f_{\#}^i \widehat{I}_{\mu_f, Q(i)} \right), \text{ car } g_{\#} \text{ est linéaire.} \\ &= \text{sgn}(\nu_{f, Q}) \text{sgn}(g, \underset{i=1}{\overset{d'}{\diamond}} f_{\#}^i \widehat{I}_{\mu(i)}) \left(\underset{j=1}{\overset{d''}{\diamond}} g_{\#}^j (f_{\#}^{\mu_f, Q(j)}(\widehat{I}_{\mu(\nu(j))})) \right) \\ &= \text{sgn}(\nu_{f, Q}) \text{sgn}(\nu_{g, fQ}) \left(\underset{j=1}{\overset{d''}{\diamond}} g_{\#}^j \circ f_{\#}^{\mu(j)}(\widehat{I}_{\mu(\nu(j))}) \right) \\ &= \text{sgn}(\nu_{f, Q}) \text{sgn}(\nu_{g, fQ}) \left(\underset{j=1}{\overset{d''}{\diamond}} (g^j \circ f^{\mu(j)})_{\#} \widehat{I}_{\mu(\nu(j))} \right) \text{ démontré quand } d = d' = \\ &d'' = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sgn}(\nu_{f,Q}) \operatorname{sgn}(\mu_{g,fQ}) \left(\underset{j=1}{\overset{d''}{\diamond}} (g \circ f)_{\#}^j \widehat{I}_{\mu(\nu(j))} \right) \\
&= \operatorname{sgn}(\mu \nu_{g \circ f, Q}) \left(\underset{j=1}{\overset{d''}{\diamond}} (g \circ f)_{\#}^j \widehat{I}_{\mu(\nu(j))} \right) \text{ par parité des permutations.} \\
&= \operatorname{sgn}(g \circ f, Q) \left(\underset{j=1}{\overset{d''}{\diamond}} (g \circ f)_{\#}^j \widehat{I}_{\mu(\nu(j))} \right) \\
&= (g \circ f)_{\#}
\end{aligned}$$

(iii) Soit $c \in Z_k(X)$, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\partial_k \circ f_{\#k}(c) &= f_{\#k-1} \circ \partial_k(c) \text{ par 2.3.14} \\
&= f_{\#k}(0) \text{ car } c \in Z_k(X). \\
&= 0 \text{ alors } f_{\#k}(c) \in Z_k(Y), \text{ donc } f_{\#k}(Z(X)) \subseteq Z(Y).
\end{aligned}$$

Soit $c' \in B_k(X)$, avec $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe $d' \in C_{k+1}(X)$ tel que $c' = \partial_{k+1}(d')$. Donc

$$\begin{aligned}
f_{\#k}(c') &= f_{\#k} \circ \partial_{k+1}(d') \\
&= \partial_{k+1} \circ f_{\#k+1}(d') \text{ par 2.3.14}
\end{aligned}$$

Alors il existe $f_{\#k+1}(d') \in C_{k+1}(X)$ tel que $\partial_{k+1} \circ f_{\#k+1}(d') = f_{\#k}(c')$, donc $f_{\#k}(B(X)) \subseteq B(Y)$

(iv) La fonction h_k a du sens par (iii). Il ne reste plus qu'à montrer que deux éléments de la même classe d'homologie ont la même image. Soient $c, c' \in Z_k(X)$ deux cycles tels que $c + B_k(X) = c' + B_k(X)$. Alors il existe une frontière $b \in B_k(X)$ telle que $c = c' + b$.
Donc

$$\begin{aligned}
h(c + B_k(X)) &= f_{\#k}(c) + B_k(Y) \\
&= f_{\#k}(c' + b) + B_k(Y) \\
&= f_{\#k}(c') + f_{\#k}(b) + B_k(Y) \text{ car } f_{\#} \text{ est linéaire.} \\
&= f_{\#k}(c') + B_k(Y) \text{ car } f_{\#k}(b) \in B_k(Y) \text{ selon (iii).} \\
&= h(c' + B_k(X))
\end{aligned}$$

□

Le point (iv) de la proposition précédente démontre qu'à partir d'un homomorphisme associé d'une fonction cubique entre deux ensembles, il existe une fonction entre les deux

groupes d'homologie. Cette fonction est simplement la fonction induite de l'homomorphisme associé. La prochaine définition nomme cette fonction.

Définition 2.3.16 Soient $f : X \rightarrow Y$ une fonction cubique et $f_{\#k} : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ son homomorphisme associé de dimension k . La **k -ième homologie de f** , notée $H_k(f)$ est la fonction induite $H(f) : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ de $f_{\#k}$.

Exemples 2.3.17 Soient la fonction fc définie à l'exemple 2.3.8, $X = [-6, -5] \times [1] \times [3, 4]$ et $Y = [-6, -5] \times [1] \times [3]$. Posons $s_1 = [-6] \times [1] \times [3]$, $s_2 = [-6] \times [1] \times [4]$, $s_3 = [-5] \times [1] \times [3]$, $s_4 = [-5] \times [1] \times [4]$. Par un calcul comme dans l'exemple 1.4.6, nous obtenons que $B_0(Y) = \mathbb{Z}([-5] \times [1] \times [3] - [-6] \times [1] \times [3]) = \mathbb{Z}(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_1)$

Soit $z + B_0(X) \in H_0(X)$ avec $z \in \mathbb{Z}_0(X)$ tel que

$$z = \alpha_1 \widehat{s}_1 + \alpha_2 \widehat{s}_2 + \alpha_3 \widehat{s}_3 + \alpha_4 \widehat{s}_4 \text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{Z} \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\begin{aligned} H_0(fc(z + B_0(X))) &= fc_{\#0}(z) + B_0(Y) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) \widehat{s}_1 + (\alpha_3 + \alpha_4) \widehat{s}_3 + B_0(Y) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) \widehat{s}_1 + (\alpha_3 + \alpha_4) \widehat{s}_3 + \mathbb{Z}(\widehat{s}_3 - \widehat{s}_1) \end{aligned}$$

$$H_k(fc) = 0 \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ car } H_k(X) = 0 \text{ pour tout } k \geq 1$$

Théorème 2.3.18 H_k a les propriétés d'un foncteur, c'est-à-dire :

(i) Soit $id_X : X \rightarrow X$, la fonction identité sur un ensemble cubique X , alors $H_k(id_X)$ est la fonction identité sur $H_k(X)$.

(ii) Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions cubiques, alors $H_k(g) \circ H_k(f) = H_k(g \circ f)$.

Démonstration : Comme l'homologie d'une fonction est induite des homomorphismes associés, alors elle a les mêmes propriétés que les homomorphismes associés. Donc, par la proposition 2.3.15, les deux propriétés sont respectées. \square

Comme l'homologie d'une fonction est construite à partir de d'une fonction induite, une

question naturelle est : Quelles conditions deux fonctions cubiques $f, g : X \rightarrow Y$ doivent-elles respecter pour que $H_k(f) = H_k(g)$? La prochaine proposition répond partiellement à cette question en donnant une condition suffisante.

Proposition 2.3.19 *Soient $f, g : X \rightarrow Y$, s'il existe une fonction $D_k : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(Y)$ telle que $\partial_{k+1}D_k + D_{k-1}\partial_k = f_{\#k} - g_{\#k}$, alors $H_k(f) = H_k(g)$.*

Démonstration : Soit $c \in Z_k(X)$, alors :

$$\begin{aligned} f_{\#k}(c) - g_{\#k}(c) &= \partial_{k+1}D_k(c) + D_{k-1}\partial_k(c) \\ &= \partial_k + 1D_k(c) \in B_k(Y) \end{aligned}$$

Donc $f_{\#k}(c) + B_k(Y) = g_{\#k}(c) + B_k(Y)$ ce qui démontre que $H_k(f) = H_k(g)$. □

Chapitre 3

Algorithmes de correction d'homologie

Dans le premier chapitre, nous avons étudié les ensembles cubiques pour ensuite calculer leur homologie à l'aide de programmes. Dans les besoins réels, les données des ensembles cubiques proviennent d'images ou de fonctions géométriques et un programme convertit ces informations en ensembles cubiques. La technique de base pour convertir un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ en un ensemble cubique X est d'utiliser la construction : $X = \{Q \in \mathcal{K}^d \mid A \cap Q \neq \emptyset\}$. Pour obtenir l'homologie de A , nous calculons celle de X . Mais deux problèmes peuvent survenir.

- Le premier problème est le choix de l'échelle. Si par exemple l'objet étudié A est inclus dans $[0, 1]^d$. Alors peu importe A , $X = [0, 1]^d$ et les différents groupes d'homologie de X seront : $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}, k > 0, H_k(X) \cong 0$. Donc l'homologie de A ne sera pas la même que celle de X .
- Le deuxième problème est celui des angles aigus. Limitons-nous à \mathbb{R}^2 pour le moment. Soient deux segments formant un angle aigu. Il est possible que l'ensemble X contienne des trous qui ne se retrouvent pas dans A et ainsi le premier groupe d'homologie de X sera différent de celui de A .

Dans ce chapitre, nous expliquerons des algorithmes qui nous permettent de convertir certaines classes de figures en ensembles cubiques tout en préservant l'homologie, malgré ces deux problèmes. Toutes les figures traitées dans ce chapitre sont de dimension 1 dans l'espace \mathbb{R}^2 .

Les algorithmes et les méthodes présentés sont des résultats nouveaux. Le détail de certains algorithmes est donné dans l'**Annexe B**. Nous prenons pour acquis que le lecteur est familier avec la lecture d'algorithmes et qu'il connaît certaines notions de géométrie et d'analyse sur les fonctions continues.

3.1 Figures polygonales

Voici deux définitions pour formaliser les deux problèmes du début du chapitre.

Définition 3.1.1 *Soit un ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^2$, X est le **recouvrement cubique** de A si $X = \{Q \in \mathcal{K}^2 \mid A \cap Q \neq \emptyset\}$.*

Exemple 3.1.2 *La figure 3.1 donne l'exemple d'un recouvrement cubique. Nous remarquons que la figure n'a pas la même homologie que son recouvrement.*

Définition 3.1.3 *Soit un ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^2$, X est le **recouvrement cubique d'échelle α** de A , $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, si $X = \{Q \in \mathcal{K}^2 \mid A \cap \alpha Q \neq \emptyset\}$.*

Le premier cas auquel nous nous intéresserons est celui des figures formées de segments.

Définition 3.1.4 *Une **figure polygonale** est une figure composée d'un nombre fini de segments.*

Les algorithmes de cette section permettent de calculer l'homologie des figures polygonales en contournant les deux problèmes mentionnés au début du chapitre. Cette première

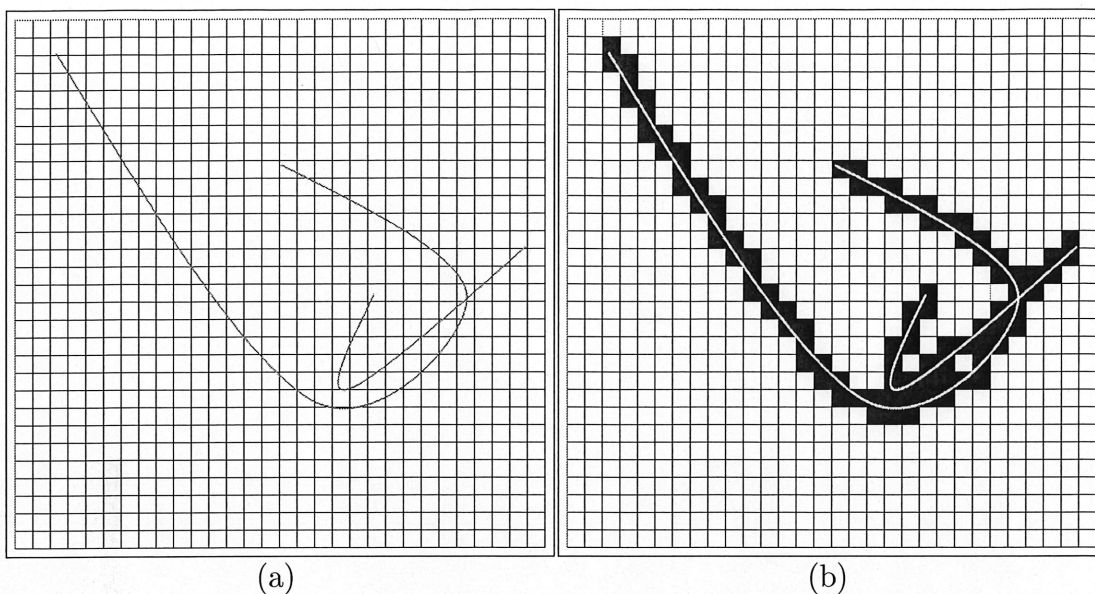


Figure 3.1 – Exemple de recouvrement
 (a) Figure A (b) Recouvrement cubique de A

approche n'est pas la plus simple connue car l'approche simpliciale permet de calculer directement l'homologie des figures polygonales sans même que les deux problèmes soient présents. Les techniques appliquées ici seront les bases pour une approche pour des figures plus générales.

Dans l'énoncé du deuxième problème, nous avons mentionné le problème de faux trous. Définissons ce concept :

Définition 3.1.5 Soit X le recouvrement cubique d'une figure polygonale A dans \mathbb{R}^2 . Un **faux trou** est un ensemble cubique $\emptyset \neq T \in \mathcal{K}_2^2$ connexe par arête tel qu'il existe deux segments S_1, S_2 de A tels que si X' est le recouvrement cubique de $S_1 \cup S_2$, alors $|\partial T| \subseteq X'$ et $(T \setminus |\partial T|) \cap X' = \emptyset$.

Il est à noter que les faux trous ne sont pas tous les trous créés par un recouvrement cubique, mais seulement ceux créés par deux segments. Les autres sont traités dans le

problème du changement d'échelle.

Proposition 3.1.6 *Soit X le recouvrement cubique d'une figure polygonale A . Alors aucun faux trou ne contient un ensemble de la forme $[l, l + 3] \times [n, n + 3]$ avec, $l, n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration :

Par l'absurde. Soit X le recouvrement cubique d'une figure polygonale A dans \mathbb{R}^2 . Soit T un faux trou qui contient un ensemble de la forme $[l, l + 3] \times [n, n + 3]$. Alors il existe deux segments S_1, S_2 de A tels que X' le recouvrement cubique de $S_1 \cup S_2$ est tel que $|\partial T| \subseteq X'$ et $(T \setminus |\partial T|) \cap X' = \emptyset$. Comme $|\partial T| \subseteq X'$, alors le recouvrement de S_1 doit avoir au moins deux points d'intersection avec le recouvrement de S_2 . Les intersections se font avec deux carrés adjacents. Donc à la hauteur de l'intersection, les deux segments doivent avoir une distance plus petite que $2\sqrt{2}$ qui est la longueur de la diagonale de deux carrés adjacents par un sommet.

Supposons que les deux segments sont parallèles. Si la distance est plus petite ou égale à $2\sqrt{2} < 3$, alors le faux trou ne peut contenir de carré de largeur 3.

Supposons que les deux segments ne soient pas parallèles. Considérons les deux droites contenant les deux segments. Alors les deux droites ont un point d'intersection A . Considérons tous les triangles ayant A comme sommet et qui contiennent le faux trou. Si le faux trou contient un carré de largeur 3, alors le côté opposé à A aura une mesure supérieure à 3. Donc dans ce cas-là, les deux segments ne peuvent pas avoir d'intersection avec deux carrés adjacents de l'autre côté du trou. \square

La proposition précédente permet de reconnaître, pour une certaine échelle, les vrais trous des faux trous. Peu importe l'échelle que nous prenons, les faux trous ne contiennent pas de carré de largeur 3. Donc si l'échelle est correctement choisie, il ne resterait qu'à boucher les faux trous et ensuite calculer l'homologie correctement.

Pour trouver l'échelle, il faut maintenant respecter ces conditions : que les trous de la figure contiennent un carré de largeur 3 ; que deux sommets différents ou deux segments différents ne soient pas dans le même cube élémentaire et que si deux segments ont une intersection avec le même cube élémentaire, alors les deux segments sont de la même composante connexe.

Tous les vrais trous sont délimités par au moins trois segments. Chaque trou contient donc tous les triangles possibles à partir des sommets du contour du trou. Si nous trouvons l'échelle pour que chaque triangle possible puisse contenir un carré de largeur 3, le problème est résolu.

Pour étudier le trou à l'intérieur d'un triangle, nous utilisons le cercle inscrit dans le triangle. La prochaine proposition nous donne un critère sur le cercle inscrit pour s'assurer d'avoir un trou assez grand.

Proposition 3.1.7 *Soit un cercle de rayon 3 dessiné sur un quadrillage unitaire. Alors l'union des carrés du quadrillage à l'intérieur du cercle qui n'ont pas d'intersection avec le cercle contient un ensemble de la forme $[l, l + 3] \times [n, n + 3]$ avec, $l, n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration : Soient $O = (x_0, y_0)$ le centre du cercle inscrit et V l'ensemble des carrés du quadrillage à l'intérieur du cercle qui n'ont pas d'intersection avec le cercle. Soit le carré $C_1 = [x_0, x_0 + 2] \times [y_0, y_0 + 2]$. Sa diagonale est $2\sqrt{2} < 3$ et alors $C_1 \subseteq V$. De même pour $C_2 = [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [y_0, y_0 + 2]$, $C_3 = [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$ et $C_4 = [x_0, x_0 + 2] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$ qui ont comme diagonale $2\sqrt{2}$. Alors $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = [x_0 - 1, x_0 + 2] \times [y_0 - 1, y_0 + 2] \subseteq V$. \square

Si pour chaque triplet de sommets non-linéaires, nous nous assurons que le triangle formé contient un cercle d'un diamètre de 6, alors les trous ne pourront pas être confondus avec les faux trous. De plus, deux sommets différents seront dans deux cubes élémentaires différents. Dans le cas linéaire, nous devons nous assurer que la distance entre deux

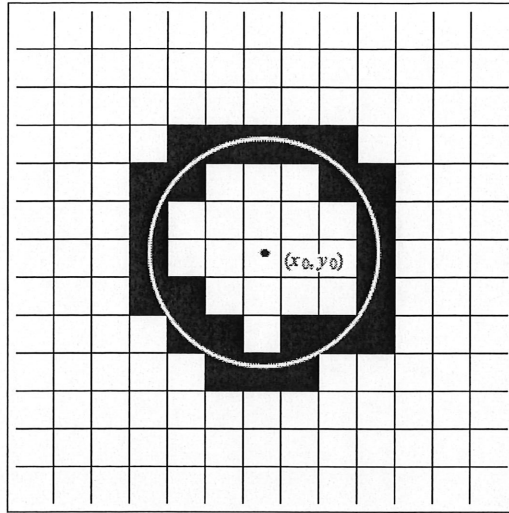


Figure 3.2 – Preuve 3.1.7

sommets est d'au moins 6. Le 6 a été choisi en fonction de l'algorithme de correction pour boucher les trous.

De même, si deux segments ont une intersection avec le même cube élémentaire, ils ne peuvent pas être dans deux composantes connexes différentes. Supposons le contraire, alors une extrémité A d'un des deux segments est dans le même cube élémentaire que l'autre segment \overline{CD} . Alors le triangle ACD ne peut pas contenir un cercle de 3 de rayon.

Le principe pour trouver le facteur de multiplication d'échelle est de considérer tous les triplets de sommets (et les intersections de segments comme des sommets) non-linéaires et de calculer les rayons des cercles inscrits de chaque triangle. Le scalaire de changement d'échelle α est le plus petit diamètre divisé par 3. Si $\alpha > 1$ le changement d'échelle n'est pas obligatoire.

Le dernier détail avant de construire l'algorithme est comment obtenir le rayon du cercle. Mais en connaissant les sommets d'un triangle, la formule de Héron[6] permet de calculer directement le rayon du cercle inscrit à partir de la longueur des trois côtés. La formule

de Héron en isolant le rayon est :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

où r est le rayon du cercle inscrit, a, b, c la longueur des trois côtés du triangle et $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre.

Bref, l'algorithme permet d'obtenir le changement d'échelle pour pouvoir distinguer les sommets de la figure et reconnaître les faux trous des vrais. Par la suite, il faut un algorithme pour boucher les faux trous et ainsi la figure obtenue sur l'ensemble cubique a la même homologie que la figure initiale.

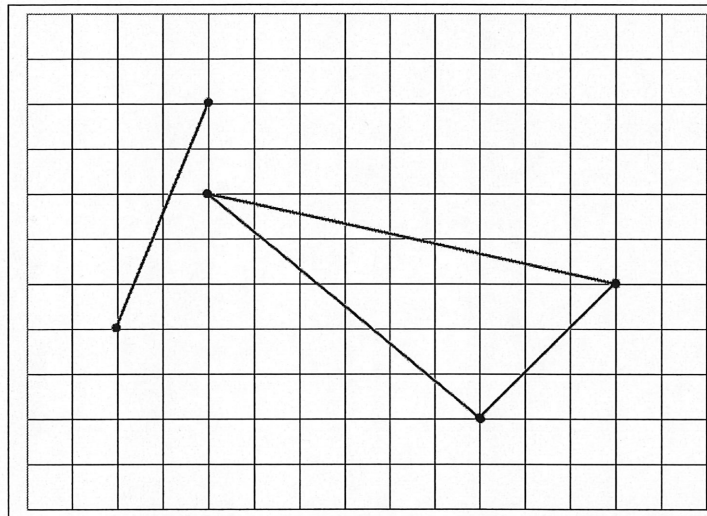


Figure 3.3 – Figure polygonale B

Exemple 3.1.8 Soit une figure polygonale B représentée à la figure 3.3. En calculant l'homologie de B par des méthodes de graphes ou par l'homologie simpliciale, nous obtenons : $H_0(B) \cong \mathbb{Z}^2$ et $H_1(B) \cong \mathbb{Z}$. Soit BX le recouvrement cubique de B représenté à la figure 3.4. En calculant l'homologie de BX , nous obtenons $H_0(BX) \cong \mathbb{Z}$ et $H_1(BX) \cong \mathbb{Z}^2$. Donc les deux premiers groupes d'homologie sont différents pour B et

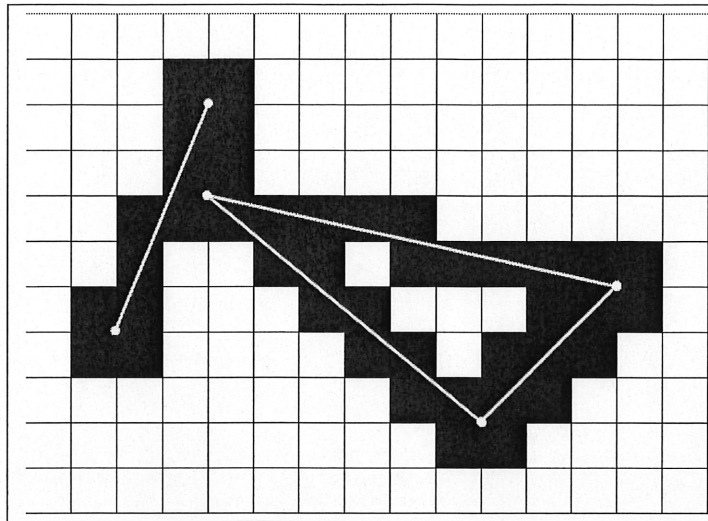


Figure 3.4 – Recouvrement cubique de B

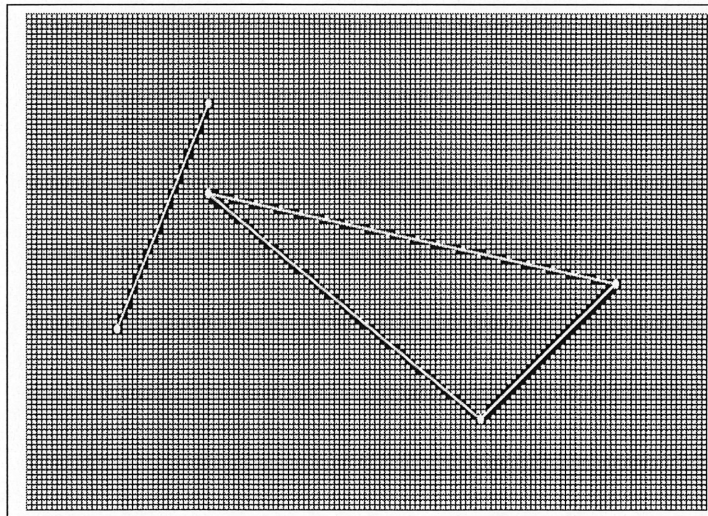


Figure 3.5 – Recouvrement cubique d'échelle $\frac{1}{9}$ de B

BX . En utilisant l'algorithme pour trouver le changement d'échelle, nous obtenons le scalaire $\alpha = \frac{2}{2+\sqrt{13}+\sqrt{29}} \approx 0,121314... > \frac{1}{9}$. Utilisons $\frac{1}{9}$ pour faciliter les calculs. Soit $BX_{\frac{1}{9}}$, le recouvrement cubique d'échelle $\frac{1}{9}$ de B . La figure 3.5 représente $BX_{\frac{1}{9}}$. En calculant l'homologie de $BX_{\frac{1}{9}}$, nous obtenons $H_0(BX_{\frac{1}{9}}) \cong \mathbb{Z}^2$ et $H_1(BX_{\frac{1}{9}}) \cong \mathbb{Z}^2$ qui est

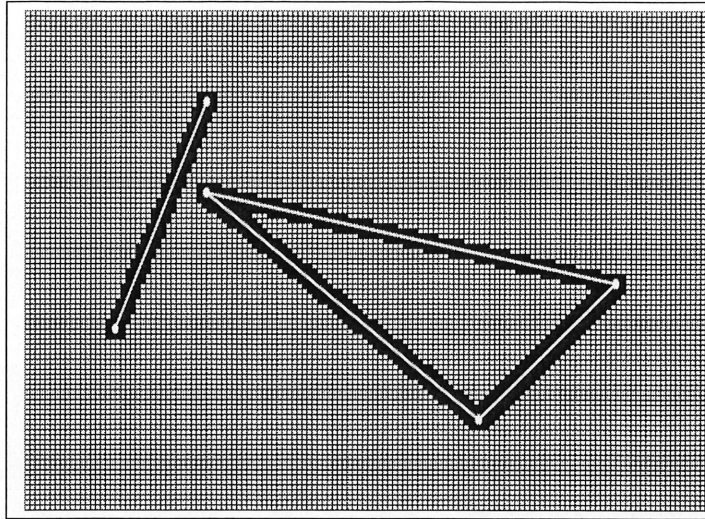


Figure 3.6 – Représentation cubique de B avec la même homologie

encore différente de l'homologie de B . Finalement, soit la figure $BX_{\frac{1}{9}}b$, représentée à la figure 3.6, qui est la figure obtenue en appliquant l'algorithme pour boucher les faux trous à la figure $BX_{\frac{1}{9}}$. En calculant l'homologie de $BX_{\frac{1}{9}}b$, nous obtenons $H_0(BX_{\frac{1}{9}}b) \cong \mathbb{Z}^2$ et $H_1(BX_{\frac{1}{9}}b) \cong \mathbb{Z}$ qui est la même homologie de B .

L'algorithme pour trouver l'échelle et celui pour boucher les trous sont présentés à l'Annexe B.

3.2 Figures de classe C^1

Dans la section précédente, nous avons étudié seulement des figures ayant des côtés droits. Nous aimerions maintenant avoir des figures courbes.

Définition 3.2.1 Une figure de classe C^1 est une figure dont le contour peut être représenté par une fonction $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$ qui est continue, dérivable et dont le gradient est non nul ($\nabla F \neq 0$).

Soit $F(x, y)$ une fonction telle que décrite dans la définition 3.2.1. Alors par le théorème des fonctions implicites, il est possible de représenter localement la fonction F par des fonctions $y = f(x)$ ou $x = g(y)$.

Étudions maintenant le cas où nous avons un ensemble fini de figures simples de classe C^1 dont toute intersection entre deux est vide. Encore ici, nous étudions un cas très simple pour lequel il existe d'autres méthodes plus efficaces pour calculer l'homologie, mais les algorithmes expliqués ici serviront pour des figures plus générales.

Ici, le problème n'est plus celui des faux trous car les courbes n'ont pas d'intersection. Il ne reste que le problème du choix d'échelle. Par exemple, il faut s'assurer que des composantes non-connexes ne soient représentées dans le même cube élémentaire.

Le principe est de diviser chaque figure simple en morceaux. Les points de division d'une figure sont les points où leur dérivée est nulle par rapport à une des coordonnées et que dans un voisinage elle ne soit pas nulle. Deux morceaux seront voisins s'ils sont dans la même figure et s'ils ont un point de division commun. Ainsi, pour chaque morceau, nous calculons sa distance avec tous les autres morceaux non-voisins à lui et nous obtenons notre facteur d'échelle à partir de la plus petite distance divisée par 6. Encore ici, le 6 est choisi pour pouvoir utiliser l'algorithme de boucher les trous pour retrouver l'homologie de la figure initiale. Dans ce problème, nous supposons qu'il est facile de trouver les points dont la dérivée est nulle, ce qui n'est pas toujours évident pour des figures simples de classe C^1 . Nous supposons qu'une approximation numérique de ces points suffit.

3.3 Figures de classe C^1 par morceaux

À partir des méthodes employées dans les deux sections précédentes, nous pouvons trouver un recouvrement cubique d'une classe de figures plus générale.

Définition 3.3.1 Une figure de classe C^1 par morceaux est une union finie de figures simples de classe C^1 .

Dans cette section, nous permettons que les courbes puissent avoir des intersections, mais leurs tangentes des courbes au point d'intersection doivent former un angle $\theta \in [\beta, \pi - \beta]$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. L'angle β est choisi en fonction des changements d'échelle désirés, si nous pouvons nous permettre de grands changements d'échelle, alors β peut être petit. De plus, nous prenons comme hypothèse que les points d'intersection peuvent être facilement calculables tout comme les dérivées des courbes.

Ici, les deux problèmes sont rencontrés et c'est pour cela que nous utiliserons tous les algorithmes de ce chapitre. Premièrement pour s'assurer que deux composantes non-connexes ne soient représentées pas dans le même cube élémentaire, nous utilisons l'algorithme des dérivées nulles. La seule modification est que nous ajoutons les points d'intersections des courbes. Ainsi deux composantes non-connexes seront de distance au moins 6.

Il reste le problème des intersections. Supposons deux courbes dont le point d'intersection est P . Les deux courbes ont respectivement deux tangentes T_1, T_2 au point P formant un angle θ et son complémentaire $\pi - \theta$, $\beta < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Nous désirons insérer des triangles entre les courbes pour pouvoir utiliser l'algorithme pour trouver le changement d'échelle des figures polygonales. Voici la construction des 4 triangles autour de P .

Construire deux droites passant par P et formant un angle de $\frac{\theta}{6}$ et $-\frac{\theta}{6}$ avec T_1 . Construire deux autres droites passant par P et formant un angle de $\frac{\theta}{6}$ et $-\frac{\theta}{6}$ avec T_2 . Considérer les 4 nouvelles droites comme 8 demi-droites d'origine P . Pour chaque demi-droite, vérifier s'il y a une intersection avec les courbes de la figure. Si oui, considérer le point d'intersection le plus près comme sommet du triangle, sinon considérer le point de distance 10 comme sommet du triangle. Ensuite considérer tous les triangles formés du sommet P et de deux sommets identifiés sur les demi-droites entre T_1 et T_2 ou T_2 et T_1 pour utiliser l'algorithme

des figures polygonales.

La distance 10 et la division de θ par 6 ont été choisies pour un bon fonctionnement de l'algorithme, mais tout dépendant la figure, d'autres valeurs peuvent être plus efficaces.

Nous divisons l'angle θ par 6, pour s'assurer que les arêtes des triangles que nous voulons insérer n'aient pas d'intersection avec les courbes.

Ensuite, nous considérons α , le scalaire du changement d'échelle qui est le plus petit obtenu entre les deux algorithmes précédents. Nous calculons le recouvrement cubique d'échelle α de la figure et finalement nous utilisons l'algorithme pour boucher les trous pour obtenir un ensemble cubique ayant la même homologie que la figure initiale.

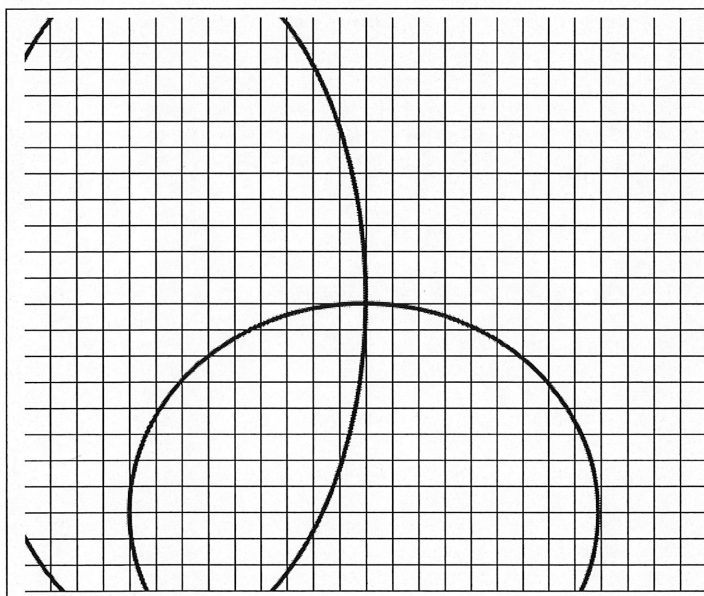


Figure 3.7 – Figure C^1 par morceau

Exemple 3.3.2 Soit la figure C^1 par morceaux représentée à la figure 3.7. Il y a un point d'intersection entre les deux courbes. L'angle entre les tangentes des deux courbes à ce point est $\frac{\pi}{2} \geq \beta$ pour tout β choisi. La figure 3.8 est la construction des deux tangentes et deux droite sécantes formant des angles de $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ avec les tangentes. Par la suite,

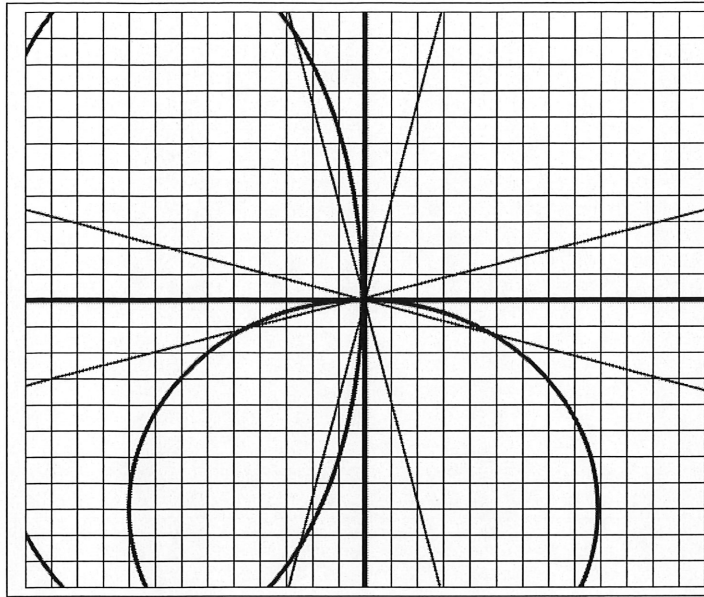


Figure 3.8 – Tangentes et sécantes au point d'intersection

il faut obtenir 4 triangles dont les côtés sont sur les tangentes, alors nous regardons les intersections des sécantes avec les courbes ou nous prenons une distance 10 du point d'intersection pour construire les triangles. Les 4 triangles sont tracés sur la figure 3.9. Par la suite, nous considérons ces triangles pour l'algorithme des figures polygonales et ainsi obtenir le scalaire du changement d'échelle.

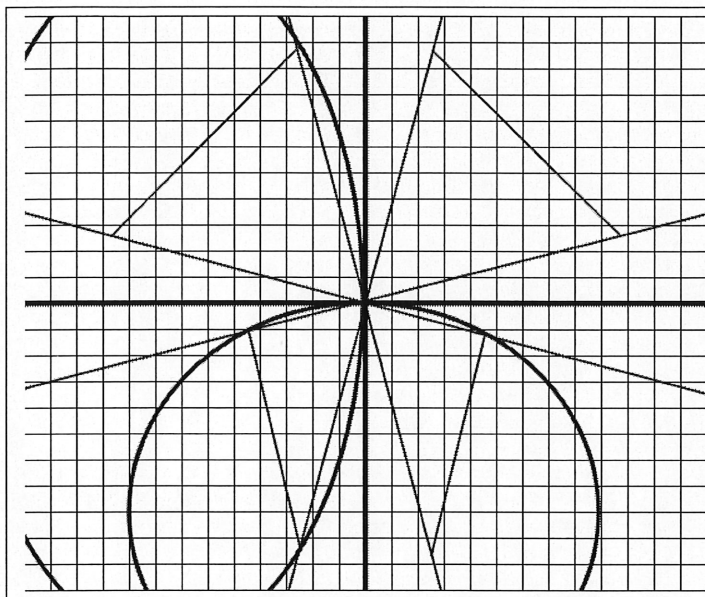


Figure 3.9 – 4 triangles formés par les sécantes

CONCLUSION

Au deuxième chapitre, nous avons défini deux espaces topologiques : $(\mathbb{R}^d, \mathcal{V}^d)$ et (M, \mathcal{M}^d) . Nous avons établi quelques propriétés de ces espaces pour ensuite construire des fonctions dont nous pouvons calculer l'homologie. Il est naturel de se demander si ces deux espaces ont d'autres propriétés intéressantes ou s'ils ont d'autres applications intéressantes. De plus, nous avons calculé l'homologie de fonctions cubiques à partir de ces espaces. Existe-t-il d'autres méthodes pour obtenir l'homologie sur ces espaces de fonctions qui ne sont pas cubiques ?

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié le problème de recouvrement cubique sur un plan. Plusieurs algorithmes peuvent sûrement se généraliser. Pour l'espace en trois dimensions, plusieurs résultats se généralisent bien, il faut parler de sphère inscrite dans une pyramide à la place de cercle inscrit. Pour des dimensions supérieures, le problème reste ouvert.

Dans le chapitre 3, la définition de recouvrement cubique utilise les cubes élémentaires. Il peut être intéressant d'utiliser des cellules élémentaires et ainsi de parler de recouvrement cellulaire.

Définition 3.3.3 *Soit un ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^2$, X est le **recouvrement cellulaire** de A si $X = \{\overset{\circ}{Q} \mid Q \in \mathcal{K}^2 \text{ et } A \cap \overset{\circ}{Q} \neq \emptyset\}$.*

Ainsi le problème des faux trous ne se pose même pas. Par contre, X n'est pas compact et l'homologie sur des ensembles représentables non-compacts n'est pas encore développée de façon algorithmique. Donc le recouvrement cellulaire et son homologie est un des sujets intéressants à explorer dans l'avenir.

Anik Trahan
Sherbrooke, avril 2004

ANNEXE A : Application de programmes d'ensembles cubiques

Les figures 3.10, 3.11 et 3.12 représentent les données des ensembles présentés au Chapitre 1. Les deux premières figures représentent des ensembles cubiques et la troisième représente un ensemble représentable.

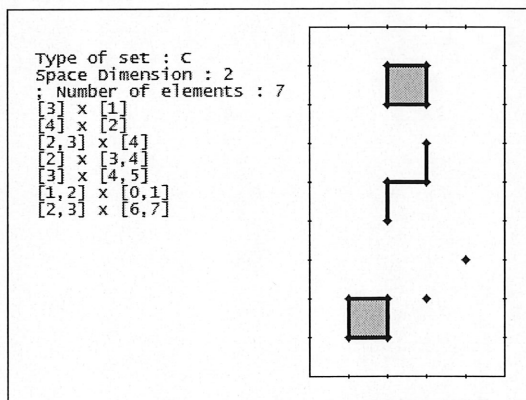


Figure 3.10 – Ensemble cubique

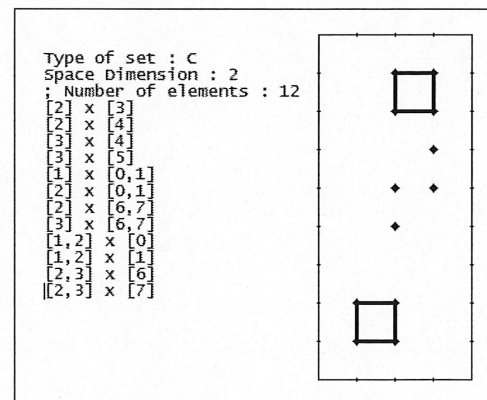


Figure 3.11 – Faces propres

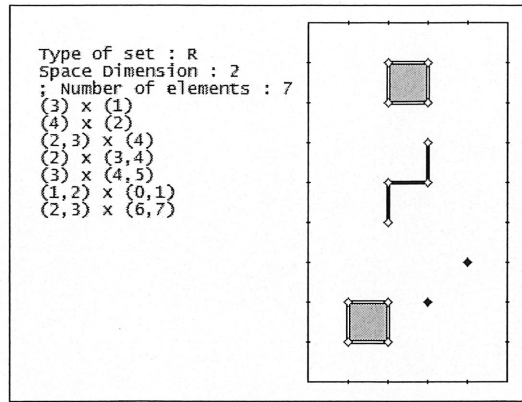


Figure 3.12 – Union disjointe

La figure 3.13 représente les données d'un ensemble cubique du plan projectif. Cet ensemble a été obtenu par l'homéomorphisme présenté dans [4].

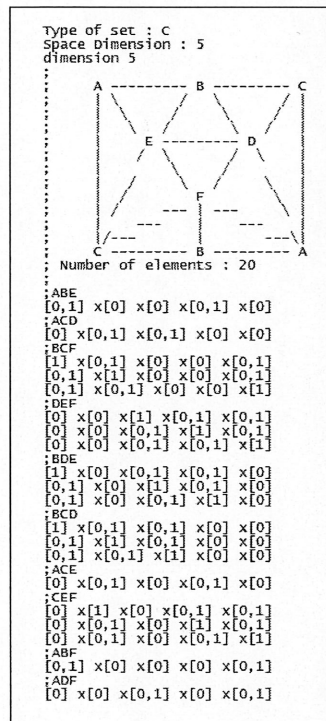


Figure 3.13 – Données d'un plan projectif

```

C:\>
C:\>
C:\>homcubes planproj.txt
HOMCUBES, ver. 3.04, 05/09/03. Copyright (C) 1997-2003 by Pawel Pilarczyk.
This is free software. No warranty. Consult 'license.txt' for details.
[Tech info: cube 4, qcell 8, chain 12, addr 4, coord 2, intgr 2. PBase Ok.]
Verifying if the image of X is contained in Y... Passed.
Reading cells to X from 'planproj.txt'... 20 cells read.
Collapsing faces in X... .. 0 removed, 81 left.
Creating the chain complex of X... .. Done.
Vertices used: 21 of dim 5.
Time used so far: 0.00 sec (0.000 min).
Computing the homology of X over the ring of integers...
Reducing D_2: 0 + 20 reductions made.
Reducing D_1: 19 + 1 reductions made.
H_0 = Z
H_1 = Z_2
Total time used: 0.00 sec (0.000 min).
Thank you for using this software. We appreciate your business.

C:\>

```

Figure 3.14 – Calcul d’homologie d’un plan projectif

La figure 3.14 représente le calcul d’homologie du plan projectif avec le programme HOMCUBES de CHOMP[15].

ANNEXE B : Algorithmes détaillés

Algorithme B.1 — Scalaire de changement d'échelle

Entrée : Liste de segments *ListeDeSegments* (un segment est une paire de points $(p1, p2)$)

Sortie : un scalaire de changement d'échelle α

Algorithmes utilisés : *nbreElement* (prend une liste et retourne le nombre d'éléments de la liste), *intersection* (prend une liste de segments et retourne une liste de points d'intersection des segments, la liste peut être vide), *nonLineaire* (prend trois points et retourne vrai s'ils sont non-linéaires et retourne faux si les trois points sont linéaires), *dist* (prend deux points et retourne la distance entre les deux points).

Variables : des réels $\alpha, \beta, coteA, coteB, coteC, miP$, des points $p, p1, p2, p3$, un tableau de points *TableauDePoints*, des entiers i, j, k, l, m, n .

Scalaire de changement d'échelle (*ListeDeSegments*)

1. $\alpha := 1$;
2. si $nbreElements(ListeDeSegments) < 3$ alors
 - 2.1. { retourner α ; }
3. $i = 1$
3. pour chaque élément $(p1, p2)$ de *ListeDeSegments* faire
 - 3.1. $TableauDePoints[i] := p1$;
 - 3.2. $TableauDePoints[i + 1] := p2$;

```

3.3.    $i = 2 + i;$ 
4.   pour chaque point  $p$  de intersection(ListeDeSegments) faire
4.1   {TableauDePoints[ $i$ ] :=  $p1$  ;  $i := 1 + i$ ;}
5.    $l := 1$ ;
6.   tant que  $l < i - 2$  faire
6.1.   { $m := l + 1$ 
6.2.   tant que  $m < i - 1$  faire
6.2.1   { $n := m + 1$ 
6.2.2.   { tant que  $n < i$  faire
6.2.2.1.   { $p1 := \text{TableauDePoints}[l]$  ;
6.2.2.2.    $p2 := \text{TableauDePoints}[m]$  ;
6.2.2.3.    $p3 := \text{TableauDePoints}[n]$  ;
6.2.2.4.    $coteA := \text{dist}(p1, p2); coteB := \text{dist}(p1, p3); coteC := \text{dist}(p3, p2)$  ;
6.2.2.5.    $miP := (coteA + coteB + coteC)/2$ ;
6.2.2.6.   si nonLineaire( $p1, p2, p3$ ) alors
6.2.2.6.1.   { $beta := \text{racine}((miP - coteA) * (miP - coteB) * (miP - coteC)/miP)$ };
6.2.2.7.   sinon
6.2.2.7.1   { $beta := (\min \{coteA, coteB, coteC\})/4$ };
6.2.2.8.   si ( $beta < alpha$ ) alors
6.2.2.8.1.   { $alpha = beta$ ;}
6.2.2.9.    $n := 1 + n$  ;
6.2.2.10.  si ( $n = i$ ) alors
6.2.2.10.1. { $n = 1; m = m + 1$ }}
6.2.3.   si ( $m = i - 1$ ) alors
6.2.3.1.   { $m = 1; l = l + 1$ }}
7.   retourner  $2 * alpha/3$  ;
fin

```

Algorithme B.2 — boucheLesTrous

Entrée : Un ensemble cubique X (liste de points représentant le coin inférieur gauche des cubes élémentaires)

Sortie : Un ensemble cubique $XBouche$.

Algorithmes utilisés : borne (prend un ensemble cubique et retourne un segment représentant la diagonale d'un rectangle qui contient l'ensemble cubique), ajoute($x, Liste$) (ajoute l'élément x dans $Liste$.

Variables : Un point p , un tableau de points $TableauDePoints$, des entiers bh, hd, i, j . $x.p$ représente l'abscisse de p et $y.p$ représente l'ordonnée de p .

boucheLesTrous (X)

1. $XBouche := X; (bg, hd) := borne(XBouche);$
 2. Initialiser un tableau $tabX[hd.x - bg.x + 2][hd.y - bg.y + 2]$ avec des 0 ;
 3. pour chaque élément (p) de (X) faire
 - 3.1. $\{tabX[p.x - bg.x + 1][p.y - bg.y + 1] := 1;\}$
 4. $i := 1; j := 1;$
 5. tant que $i \leq hd.x - bg.x + 3$ faire
 - 5.1. $\{$ tant que $j \leq hd.y - bg.y + 3$ faire
 - 5.1.1. $\{$ si $(tabX[i][j] = 0$ et $(tabX[i - 1][j - 1] = 1$ ou $tabX[i][j - 1] = 1$ ou $tabX[i + 1][j - 1] = 1$ ou $tabX[i - 1][j] = 1$ ou $tabX[i + 1][j] = 1$ ou $tabX[i - 1][j + 1] = 1$ ou $tabX[i][j + 1] = 1$ ou $tabX[i + 1][j + 1] = 1)$
 - 5.1.1.1. alors $\{ajoute((i - bg.x + 1), [j - bg.y + 1]), XBouche);\}$
 - 5.1.2. $j := j + 1;\}$
 - 5.2. $j := 1; i := i + 1;\}$
 6. retourner $XBouche;$
- fin**

Bibliographie

- [1] M. Allili. *Une approche algorithmique pour le calcul de l'homologie de fonctions continues*. Thèse de doctorat, Dép. de math. et d'info., Univ. de Sherbrooke, Sherbrooke, 1999.
- [2] M. Allili and T. Kaczynski. Geometric Construction of a Coboundary of a Cycle. *Discrete & Comp. Geometry*, (25) :125–140, 2001.
- [3] M. Allili and T. Kaczynski. An Algorithmic Approach to the Constructin of Homomorphism Induced by Map Homology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (352) :2261–2281, 2002.
- [4] J. Blass and W. Holsztyński. Cubical Polyhedra and Homotopy, i, ii, iii, iv, v. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 50(2), 1971, 131–138; 50(6), 1971, 703–708; 53(8), 1972, 275–279; 53(8), 1972, 402–409; 54(8), 1973, 416–425.
- [5] S. Bérubé. Groupe en recherche en topologie computationnelle de l'Université de Sherbrooke. <http://www.espritscartesien.com/tc/>.
- [6] H.S.M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley, NY, 1961.
- [7] J. A. Dieudonné. *Cours de géométrie algébrique*. Collection SUP. Le mathématicien, 10-11, Paris, 1974.
- [8] R. Ehrenborg and G. Hetyei. Generalizations of Baxter's Theorem and Cubical Homology. *J. Combinatorial Theory*, Series A(69) :233–287, 1995.

- [9] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek. An Algorithmic Approach to Homology Theory. *preprint*.
- [10] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek. *Computational Homology*. A.M.S. No 157. Springer Verlag, New York, 2004.
- [11] W. S. Massey. *A Basic course in Algebraic Topology*. Number 127 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1991.
- [12] M. Mrozek. An Algorithmic Approach to the Conley Index Theory. *J. Dynam. Diff. Equ.*, 11(4) :711–734, 1999.
- [13] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, 1994.
- [14] J. R. Munkres. *Topology, 2nd ed.* Prentice Hall, NJ, 2000.
- [15] P. Pilarczyk. CHomP. <http://www.math.gatech.edu/~chom/>.