Déterminant de Cartan d'algèbres de Nakayama

par

Jean-Simon Senécal

mémoire présenté au Département de mathématiques
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, octobre 2004

Your file Votre référence
ISBN: 0-494-05956-7
Our file Notre référence
ISBN: 0-494-05956-7

Le 29 octobre 2004,
Date

le jury a accepté le mémoire de M. Jean-Simon Senécal dans sa version finale.

Membres du jury

M. Ibrahim Assem
Directeur
Département de mathématiques

M. Thomas Brüstle
Membre
Département de mathématiques

M. Shiping Liu
Président-rapporteur
Département de mathématiques

SOMMAIRE

La matrice de Cartan d'une algèbre artinienne constitue un invariant fournissant de l'information sur le nombre de morphismes entre ses modules projectifs indécomposables. Pour une algèbre de dimension globale finie, il a été démontré en 1954 par Eilenberg (voir [8]) que son déterminant vaut $+1$ ou -1. Or, aucune algèbre de dimension globale finie de déterminant de Cartan -1 n'est connue à ce jour, et les classes d'algèbres pour lesquelles ce déterminant vaut $+1$ ne cessent de s'accumuler depuis Eilenberg. Ainsi, l'affirmation selon laquelle toutes les algèbres artiniennes de dimension globale finie sont de déterminant de Cartan $+1$ est connue sous le nom de conjecture du déterminant de Cartan.

Les techniques utilisées pour s'y attaquer jusqu'à aujourd'hui étant très variées, nous donnons dans ce mémoire un aperçu de ces tentatives, en plus de proposer une nouvelle approche très simple, à l'aide de laquelle nous redémontrons la conjecture pour une classe restreinte d'algèbres de Nakayama. Nous généralisons ensuite ce résultat à une sous-classe des algèbres sérielles à gauche ou à droite.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur Ibrahim Assem pour son temps, son soutien, mais surtout pour sa confiance en moi. Je remercie également tous les membres du groupe de recherche pour votre accueil, votre dévouement et votre ardeur à partager votre contagieuse passion pour notre science. Merci également à toute ma famille et tous mes amis qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de cette maîtrise.

Merci à l'Université de Sherbrooke et à la Faculté des sciences pour leur soutien financier.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Au cours de ce mémoire, nous travaillons avec la matrice de Cartan d'un anneau artinien. Celle-ci peut s'écrire sous différentes formes selon le contexte dans lequel nous désirons l'étudier. Voici une des formes les plus souvent rencontrées.

Définition 0.0.1 *La matrice de Cartan C_R d'un anneau artinien à droite R est la $n \times n$-matrice d'entiers*

$$C_R = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$$

donnée par

$$c_{ij} = c_i(P_j),$$

avec P_j les n R-modules projectifs indécomposables, et où $c_i(M)$ désigne le nombre de copies de $S_i \cong P_i/\mathrm{rad}P_i$ apparaissant dans une suite de composition du R-module M.

Nous nommons le déterminant de C_R le déterminant de Cartan de R. Pour un anneau artinien R de dimension globale finie, il est bien connu (voir [8]) que le déterminant de Cartan de R vaut soit 1, soit -1. Or, aucun exemple d'anneau R de déterminant de Cartan -1 n'est connu à ce jour. Depuis les années 50, les classes d'anneaux de déterminant de Cartan 1 se sont accumulés et élargies, mais sans jamais englober la totalité des anneaux artiniens.

Nous présentons dans ce mémoire un aperçu des principaux résultats concernant cette conjecture, en plus de proposer une approche nouvelle avec laquelle nous la démontrons pour les algèbres de Nakayama dites à chevauchements finis (voir 4.1.3). Par la suite, nous remarquons que le déterminant de Cartan est stable pour les extensions ponctuelles et les coextensions ponctuelles en général, ce qui nous permet d'élargir notre preuve aux algèbres sérielles à gauche ou à droite à chevauchement fini (voir 4.4.1). Ceci constitue une preuve partielle de la suffisance du théorème suivant, tiré de [7].

Théorème 0.0.2 (Burgess, Fuller, Voss, Zimmermann-Huisgen) *Soit A une algèbre d'artin sérielle à gauche ou à droite. Alors* $\det C_A = 1$ *si et seulement si A est de dimension globale finie.*

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1 Considérations générales

Commençons par rappeler les notions d'algèbre qui soutiennent la théorie des représentations. Nous tiendrons toutefois pour acquis les concepts d'algèbre sur un corps et de module sur une algèbre, qui peuvent être trouvés dans [1]. Dans toute ce chapitre, A désignera une algèbre sur un anneau commutatif K, et tous les modules sur cette dernière sont des modules à droite de type fini, sauf s'il est indiqué autrement.

Définition 1.1.1 ([1]VI,4 et [1]VII,6) *Soit M un A-module non nul. On dit que*

(a) M est simple si M ne possède aucun sous-module propre.

(b) M est indécomposable si $M \neq 0$ et $M = M_1 \oplus M_2$ entraîne $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

Un A-module indécomposable n'est pas nécessairement simple. Par exemple, si

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix},$$

le A-module

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est indécomposable mais n'est pas simple. Le lemme suivant constitue un résultat classique, utile dans une multitude de branches de l'algèbre.

Lemme 1.1.2 (Lemme de Schur) *Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules non nul.*

(a) Si M est simple, alors f est injectif.

(b) Si N est simple, alors f est surjectif.

Comme conséquence directe de ce lemme, tout morphisme non nul entre deux A-modules simples doit être un isomorphisme. Ainsi, si S_1 et S_2 sont deux A-modules simples non isomorphes, alors $\mathrm{Hom}_A(S_1,S_2) = \mathrm{Hom}_A(S_2,S_1) = 0$.

Définition 1.1.3 ([1]VI,3) *Une K-algèbre A est dite connexe si pour toute décomposition $A = A_1 \times A_2$ en produit direct d'algèbres A_1 et A_2, on a $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$.*

Afin d'étudier plus en profondeur les algèbres artiniennes, nous en donnerons une décomposition en somme directe de certains modules spécifiques. Pour déterminer ceux-ci, il est nécessaire de considérer des éléments particuliers de A.

Définition 1.1.4 ([1]VI,3) *Soit $e \in A$. On dit que e est un idempotent si $e^2 = e$.*

Définition 1.1.5 ([1]VI,3) *Soient $e,e' \in A$ deux idempotents non nuls. On dit que*

(a) e et e' sont orthogonaux si $ee' = e'e = 0$;

(b) e est primitif si $e = e_1 + e_2$, avec e_1 et e_2 des idempotents orthogonaux, implique $e_1 = 0$ ou $e_2 = 0$;

(c) un ensemble $\{ e_1,...,e_n \}$ *d'idempotents est complet si* $1_A = e_1 + ... + e_n$.

Donnons maintenant quelques définitions de base concernant les propriétés homologiques des A-modules.

Définition 1.1.6 *Un* A*-module* I *est dit injectif si pour tout morphisme injectif de* A*-modules* $f : L \to M$ *et tout morphisme* $u : L \to I$*, il existe un morphisme* $v : M \to I$ *tel que* $u = vf$.

Définition 1.1.7 *Un* A*-module* P *est dit projectif si pour tout morphisme de* A*-modules* $f : M \to N$ *surjectif et tout morphisme* $u : P \to N$*, il existe un morphisme* $v : P \to M$ *tel que* $u = fv$.

Il est facile de montrer que tout A-module projectif est facteur direct d'un A-module libre, et réciproquement. Conséquemment, tout A-module libre est projectif. Ainsi, par exemple, le A-module A_A est projectif, ainsi que tous les A-modules de forme eA, avec e un idempotent.

Définition 1.1.8 ([1]IV,4) *L'enveloppe injective d'un* A*-module* M *est une paire* (I, j)*, où* I *est un* A*-module injectif et* $j : M \to I$ *un monomorphisme tel que si* (I', j') *est une autre paire telle que* I' *est injectif et* $j' : M \to I'$ *un monomorphisme, alors il existe un monomorphisme* $f : I \to I'$ *tel que* $fj = j'$.

Définition 1.1.9 ([1]VIII,2) *La couverture projective d'un* A*-module* M *est une paire* (P, f)*, où* P *est un* A*-module projectif et* $f : P \to M$ *un épimorphisme qui induit un isomorphisme* $\bar{f} : P/\mathrm{rad}P \to M/\mathrm{rad}M$*, où* $\mathrm{rad}M$ *désigne le radical de Jacobson d'un* A*-module* M *(voir [1]VII,1).*

Ces deux dernières notions ne sont pas, à première vue, duales. Par contre, si A est artinienne, il est possible de montrer que la couverture projective d'un A-module de type fini se caractérise de façon entièrement duale à l'enveloppe injective. En outre, tout A-module admet une enveloppe injective, mais certains modules n'admettent pas de couverture projective. Cette dernière existe toujours si l'on suppose que A est artinienne et que M_A est de type fini. Pour le reste de cette section, on supposera que toutes les algèbres utilisées sont artiniennes.

Proposition 1.1.10 ([1]VIII,1) *Soit* $\{ e_1,...,e_n \}$ *un ensemble complet d'idempotents orthogonaux de* A. *Alors* A_A *admet une décomposition de forme*

$$A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus ... \oplus e_nA.$$

De plus, si chaque e_i *est primitif, alors chaque* e_iA *constitue un* A*-module indécomposable projectif.*

Théorème 1.1.11 (Théorème de décomposition unique) *Soit* A *une algèbre artinienne.*

(a) Si M *est un* A*-module indécomposable projectif de type fini, alors il existe un idempotent primitif* e *tel que* $M \cong eA$.

(b) Si M *est un* A*-module projectif de type fini, alors* M *est isomorphe à une somme directe finie de* A*-modules projectifs indécomposables de type fini. Cette décomposition est unique à isomorphisme près.*

Ce théorème nous permet d'affirmer qu'à isomorphisme près, il n'existe qu'un nombre fini de A-modules projectifs indécomposable de type fini, toujours en supposant que A est artinienne. Nous noterons ces modules $\{P_1, ..., P_n\}$. Si A est une algèbre de dimension finie sur un corps K, alors les A-modules injectifs indécomposables à droite peuvent se caractériser de façon semblable. On les obtient en dualisant les A-modules projectifs indécomposables à gauche: $I_i \cong D(Ae_i) = \mathrm{Hom}_K(Ae_i, K)$.

Définition 1.1.12 ([1]VI,5) *Une suite finie de sous-modules d'un A-module M non nul*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_m = M$$

dont chaque quotient M_{i+1}/M_i (avec $0 \leq i \leq m$) est un A-module simple est appelée une suite de composition de longueur m pour M. Ces A-modules simples sont appelés les facteurs de composition de M.

Un A-module M peut avoir plusieurs suites de composition. Cependant, le théorème de Jordan-Hölder (voir [1] au théorème VI.5.3) nous assure que lorsque c'est le cas, les suites de M ne diffèrent que par l'ordre dans lequel apparaissent les facteurs de composition. En outre, toutes les suites de composition d'un même A-module M sont de même longueur.

Définition 1.1.13 ([2]IV,2,1) *Un A-module M est dit sériel s'il n'admet qu'une seule suite de composition.*

Exemple 1.1.14 Si on considère l'algèbre A des matrices triangulaires à coefficients dans K de forme $\begin{bmatrix} K & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$ et le A-module à droite $M = \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{bmatrix}$, on remarque que M n'admet qu'une seule suite de composition, soit

$$0 \subseteq \begin{bmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq M,$$

donc M est sériel.

Définition 1.1.15 ([2]IV,2,3) *Une algèbre A est dite sérielle à droite si tout A-module à droite projectif indécomposable est sériel. De même, une algèbre A est dite sérielle à gauche si tout A-module à gauche projectif indécomposable est sériel.*

Définition 1.1.16 ([2]IV,3,1) *Une algèbre A est dite de Nakayama si elle est sérielle à gauche et à droite.*

Une algèbre A de dimension finie sur un corps est donc de Nakayama si tous ses modules projectifs indécomposables et tous les modules injectifs indécomposables sont sériels. On peut aisément démontrer que l'algèbre présentée en 1.1.14 est une algèbre de Nakayama.

Proposition 1.1.17 ([1]VIII,1,9) *Soit A artinienne. Il existe une bijection entre l'ensemble $\{P_1, ..., P_n\}$ des A-modules projectifs indécomposables non isomorphes et l'ensemble $\{S_1, ..., S_n\}$ des A-modules simples non isomorphes. De plus, il est possible d'ordonner les S_i de façon à ce que top $P_i \cong S_i$ pour $i = 1,...,n$, où $\mathrm{top}P_i = P_i/\mathrm{rad}Pi$.*

Proposition 1.1.18 ([1]VIII,1,1) *Soient $e \in A$ un idempotent et M un A-module. Alors*

$$\mathrm{Hom}_A(eA,M) \cong Me.$$

Donnons-nous maintenant une manière d'écrire un A-module de type fini, de façon à exposer ses facteurs de composition.

Définition 1.1.19 ([1]VIII,5) *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps K, et soit $\{e_1,...,e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs de A. Le vecteur-dimension d'un A-module M est l'élément de $\mathbb{Z}^n$ donné par le vecteur colonne*

$$\mathbf{dim}M = \begin{bmatrix} \dim_K Me_1 \\ \vdots \\ \dim_K Me_n \end{bmatrix}.$$

Proposition 1.1.20 (additivité de dim,[1]VIII,1,9) *Soit $0 \to L \to M \to N \to 0$ une suite exacte de A-modules. Alors $\mathbf{dim}M = \mathbf{dim}L + \mathbf{dim}N$.*

Proposition 1.1.21 ([1]VIII,5,1) *Soit M un A-module de type fini. Alors* $\dim_K Me_i$ *est égal au nombre de facteurs de composition de M qui sont isomorphes à S_i.*

En vertu de la définition de **dim**, les vecteurs-dimension $\mathbf{dim} S_i$ des n A-modules simples non isomorphes (avec A artinienne) forment la base canonique de $\mathbb{Z}^n$.

Définition 1.1.22 ([1]VIII,5) *La matrice de Cartan C_A d'une algèbre A est la $n \times n$ matrice $[c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $c_{ij} = \dim_K(e_j A e_i)$.*

En vertu du théorème 1.1.11 et des propositions 1.1.18 et 1.1.21, il nous est possible de donner plusieurs interprétations à la matrice de Cartan.

- La i$^{\text{ème}}$ colonne de C_A peut être vue comme le vecteur dimension du A-module projectif indécomposable P_i.
- La i$^{\text{ème}}$ ligne de C_A peut être vue comme le vecteur dimension du A-module injectif indécomposable I_i.
- Chaque élément c_{ij} de C_A désigne le nombre de copies du A-module simple S_j apparaissant dans une suite de composition de P_i.
- Chaque élément c_{ij} de C_A désigne la dimension de $\mathrm{Hom}_K(P_j,P_i)$.

Définition 1.1.23 *Le déterminant de la matrice de Cartan C_A est appelé le déterminant de Cartan de A.*

Donnons de suite un exemple de calcul de matrice de Cartan.

Exemple 1.1.24 Considérons l'algèbre des matrices 3×3 de forme

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}.$$

Les modules projectifs indécomposales sur cette algèbre sont

$$P_1 \cong e_1A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1, \quad P_2 \cong e_2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad P_3 \cong e_3A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}.$$

On a donc $\mathbf{dim}P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{dim}P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{dim}P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et la matrice de Cartan de A est $C_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.2 Dimensions homologiques

Donnons maintenant les éléments définissant les dimensions homologiques d'une algèbre et de ses modules.

Définition 1.2.1 ([1]IV,2) *Une suite exacte de la forme*

$$\cdots \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

avec les P_i des A-modules projectifs s'appelle une résolution projective de M.

Définition 1.2.2 ([1]X,1) *Soit M un A-module. S'il existe une résolution projective de forme*

$$0 \to P_n \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

on dira que M est de dimension projective au plus n (noté $\mathrm{dp}\ M \leq n$*). Si n est le plus petit entier tel qu'il existe une telle résolution, on dit que la dimension projective de M est égale à n (noté* $\mathrm{dp}\ M = n$*). S'il n'existe pas de résolution projective finie de M, on dit que* $\mathrm{dp}\ M = \infty$*. Par convention,* $\mathrm{dp}\ 0 = -\infty$.

On définit de manière duale une résolution injective d'un A-module M, de même que sa dimension injective. Calculons de ce pas un exemple de résolution projective.

Exemple 1.2.3 Considérons de nouveau l'algèbre des 3×3- matrices de forme

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$$

avec les modules projectifs P_1,P_2 *et* P_3 comme dans l'exemple *1.1.24*. On a

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La suite exacte courte suivante est une résolution projective du A-module $S = P_2/e_2J$.

$$0 \to P_1 \to P_2 \to S \to 0$$

On peut donc affirmer que dp$S \leq 1$.

Proposition 1.2.4 ([1]X,1,4) *Si* $0 \to L \to M \to N \to 0$ *est une suite exacte de* A*-modules, alors*

(a) dp $N \leq \sup\{$dp M, dp $L+1\}$, *avec l'égalité quand* dp $M \neq$ dp L.

(b) dp $L \leq \sup\{$dp M, dp $N-1\}$, *avec l'égalité quand* dp $M \neq$ dp N.

(c) dp $M \leq \sup\{$dp L, dp $N\}$, *avec l'égalité quand* dp $N \neq$ dp $L+1$.

Définition 1.2.5 ([1]X,2) *On définit la dimension globale à droite d'une algèbre* A *comme suit:*

$$\text{dim.gl.d. } A = \sup\{\text{dp } M \mid M \text{est un } A\text{-module à droite}\}.$$

De même, la dimension globale à gauche de A *est*

$$\text{dim.gl.g. } A = \sup\{\text{dp } M \mid M \text{est un } A\text{-module à gauche}\}.$$

Quand dim.gl.d. A = dim.gl.g. A, leur valeur commune est appelée la dimension globale de A, notée dim.gl. A. Dans notre cas, elles le seront toujours puisque A est artinienne.

Théorème 1.2.6 ([1]X,2,8) *Soit A artinienne. Alors*

$$\text{dim.gl.d. } A = \sup\{\text{dp } S \mid S \text{ est un } A\text{-module simple}\}.$$

1.3 Théorie des catégories

Une compréhension élémentaire de la théorie des catégories est nécessaire à celle de la théorie des représentations des algèbres. Nous donnons ici les axiomes de base qui définissent ce que sont les catégories, ainsi que quelques résultats de base les concernant.

Définition 1.3.1 ([1]III,1) *Une catégorie $\mathcal{C}$ est définie par la donnée de :*

(a) une collection d'objets $\mathcal{C}_0$ (ou $\mathcal{OB}(\mathcal{C})$) .

(b) pour deux objets X et Y de $\mathcal{C}$ arbitraires, un ensemble $\mathcal{C}(X,Y)$ (ou $Mor_{\mathcal{C}}(X,Y)$) dont les éléments sont appelés morphismes de source X et de but Y, et tels que si $(X, Y) \neq (X', Y')$, alors $\mathcal{C}(X, Y) \cap \mathcal{C}(X', Y') = \emptyset$.

(c) Pour chaque paire de morphismes $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ il existe un unique morphisme $g \circ f$ de $\mathcal{C}(X,Z)$, tel que:

(C1) Si h est un morphisme de $\mathcal{C}(Z,W)$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ et;

(C2) Pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme 1_X dans $\mathcal{C}(X,X)$ tel que $1_X \circ f = f$ et $g \circ 1_X = g$.

Parmi les catégories les mieux connues se trouvent la catégorie Mod$A$ des modules sur une algèbre A, celle des anneaux, celle des groupes, celle des ensembles et celle des espaces topologiques.

Il est naturel de se demander s'il existe des "morphismes" entre les différentes catégories, qui nous permettraient de passer d'une catégorie à une autre. Il en existe évidemment, et ils sont nommés foncteurs.

Définition 1.3.2 ([1]III,1) *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est défini par la donnée de :*

(a) pour chaque objet $X \in \mathcal{C}_0$, d'un objet FX de $\mathcal{D}$.

(b) pour chaque morphisme $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, d'un morphisme Ff de $\mathcal{D}(FX,FY)$ tel que:

(F1) si $g \circ f$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors $Ff \circ Fg$ est un morphisme de $\mathcal{D}$, et $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$

(F2) $F(1_Y) = 1_{F(Y)}$ pour tout objet Y de $\mathcal{C}_0$;

Définition 1.3.3 ([1]III,6) *Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur covariant, il définit une application $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ pour tous $X,Y \in \mathcal{C}_0$. Alors :*

(a) F est dit fidèle si cette application est injective pour tous les objets X, Y de $\mathcal{C}_0$;

(b) F est dit plein si cette application est surjective pour tous les objets X, Y de $\mathcal{C}_0$;

(c) F est dit dense si pour tout objet D de $\mathcal{D}$, il existe un objet C de $\mathcal{C}$ tel que $F(C) \cong D$

Établissons la notion d'équivalence entre deux catégories.

Définition 1.3.4 ([1]III,6) *Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est appelé équivalence s'il existe un foncteur $F' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que $F' \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ et $F \circ F' \cong 1_{\mathcal{D}}$*

On dit que F' est un quasi-inverse de F. Il existe cependant un critère (le théorème fondamental sur les équivalences) permettant de déterminer si un tel F' existe.

Théorème 1.3.5 ([1]III,6,2) *Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant. Alors F est une équivalence si et seulement si F est plein, dense et fidèle.*

Il est légitime de se demander si on peut définir une catégorie dont les objets seraient les foncteurs et comment les morphismes y seraient définis. La réponse à cette question se trouve dans la théorie des ensembles. En effet, il est bien connu que la collection de tous les ensembles ne constitue pas en soi un ensemble.

Définition 1.3.6 ([1]III,1) *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si $\mathcal{C}_0$ est un ensemble, alors $\mathcal{C}$ est dite petite.*

Ainsi, la collection des objets $\mathcal{C}_0$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ concrète n'est généralement pas un ensemble. Notons que ces deux classes n'incluent pas toutes les catégories; il existe en effet des catégories qui ne sont ni concrètes ni petites. Définissons maintenant la notion qui tiendra lieu de morphisme entre deux foncteurs.

Définition 1.3.7 ([1]III,1) *Soient F,G : $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Un morphisme fonctoriel $\varphi : F \to G$ est une collection de morphismes $\varphi_X : FX \to GX$, avec $X \in \mathcal{C}_0$, telle que si $f \in \mathcal{C}(X,\, X')$, alors le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "Ff"] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FX' \arrow[r, "\varphi_{X'}"] & GX' \end{tikzcd}$$

Si, comme dans la définition précédente, la catégorie $\mathcal{C}$ est petite, alors il existe une catégorie de foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$, notée $Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})$, avec les morphismes fonctoriels comme ensemble de morphismes. Cette condition sur $\mathcal{C}$ vient du fait que si cette dernière n'est pas petite, alors la collection des morphismes fonctoriels ne forme pas un ensemble, condition exigée par la définition d'une catégorie.

1.4 Carquois et représentations

C'est à l'aide des carquois liés que l'on peut se donner une manière efficace de visualiser, de classifier, ou mieux, de créer des algèbres. Il est en effet démontré qu'il existe un lien étroit entre les carquois (des graphes orientés) et les algèbres. Pour cette section, les algèbres seront de dimension finie sur un corps K. Débutons avec les définitions de base.

Définition 1.4.1 ([2]II,1,1) *Un carquois est un quadruplet* $Q = (Q_0,\, Q_1,\, s : Q_1 \to Q_0,\, t : Q_1 \to Q_0)$ *constitué de deux ensembles, à savoir* Q_0 *l'ensemble des points et* Q_1 *l'ensemble des flèches, et de deux applications* s *et* t *associant à chaque flèche* α *un point (respectivement appelés source et but de* α*). Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, on écrira seulement* Q*. Si* Q_0 *et* Q_1 *sont des ensembles finis, on dira que* Q *est un carquois fini.*

Exemple 1.4.2

(a)

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ 2 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, shift right, "\beta"'] \arrow[l, shift left, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Afin de pouvoir travailler avec les carquois, nous devons leur transmettre une structure algébrique.

Définition 1.4.3 ([2]II,1) *Soit* Q *un carquois. Un chemin* λ *de longueur* n *de source* $a = s(\lambda)$ *et de but* $b = t(\lambda)$ *(on dira que* λ *est un chemin de* a *vers* b*) est une suite de flèches* α_1,α_2, ..., α_i, ..., α_{n-1}, α_n *telle que* $s(\alpha_1) = a$ *et* $t(\alpha_n) = b$*, et telle que* $s(\alpha_k) = t(\alpha_{k-1})$ *pour* $k = 2,\ldots,n$*. On notera ce chemin* $\lambda = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$*.*

À tout carquois Q, nous associons un chemin de longueur nulle ε_a de source et de but a à chacun des points a de Q_0. La multiplication de deux chemins $\lambda = \alpha_1 ... \alpha_n$ et $\kappa = \beta_1 ... \beta_m$ d'un carquois Q se définira comme suit: si $t(\alpha_n) = s(\beta_1)$, alors $\lambda \cdot \kappa = \alpha_1 ... \alpha_n \beta_1 ... \beta_m$. Sinon, $\lambda \cdot \kappa = 0$.

Définition 1.4.4 ([2]II,1) *Soit $Q = (Q_0, Q_1, s : Q_1 \to Q_0, t : Q_1 \to Q_0)$ un carquois.*

(a) Un sous-carquois $Q' = (Q'_0, Q'_1, s : Q'_1 \to Q'_0, t : Q'_1 \to Q'_0)$ de Q est un carquois tel que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ et tel que les restrictions $s|_{Q'_1}$ et $t|_{Q'_1}$ de s et t sont égales à s' et t' respectivement.

(b) Un sous-carquois Q' de Q est dit plein si Q'_1 correspond à l'ensemble des flèches de Q_1 dont la source et le but se trouvent dans Q'_0.

(c) Un sous-carquois Q' de Q est dit convexe si pour tout chemin $\lambda = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ de Q tel que $s(\alpha_1)$, $t(\alpha_n) \in Q'_0$, les sources $s(\alpha_i)$ (pour i=1,..., n) sont également dans Q'_0.

Définition 1.4.5 ([2]II,1,2) *L'algèbre de chemins KQ d'un carquois Q est la K-algèbre engendrée par l'espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des chemins de Q, munie de la multiplication définie ci-haut.*

L'algèbre des chemins du carquois présenté dans l'exemple 1.4.2 est isomorphe à celle de l'exemple 1.1.24. Il est également possible de prouver que pour un carquois fini Q, l'algèbre des chemins KQ est connexe (voir 1.1.3) si et seulement si Q est connexe en tant que graphe.

Définition 1.4.6 ([2]II,1,9 et [2]II,2,1) *Soit Q un carquois fini.*

(a) L'idéal de KQ engendré par les flèches de Q est appelé l'idéal des flèches de KQ, et est noté R.

(b) Un idéal bilatère I de KQ est dit admissible s'il existe un $m \geq 2$ tel que

$$R^m \subseteq I \subseteq R^2.$$

Si I est un idéal admissible de KQ, alors la paire (Q, I) est appelé carquois lié. L'algèbre quotient KQ/I est appelée l'algèbre du carquois lié (Q, I).

Définition 1.4.7 ([2]II,2,3) *Une relation ρ de Q est une combinaison linéaire à coefficients dans K de m chemins ayant tous le même but et la même source. Si $m = 1$, la relation est dite monomiale, ou encore relation zéro.*

Par convention, on représentera, sur les carquois, les relations zéro par des pointillés. L'intérêt des définitions précédentes vient du fait qu'une quantité considérable d'algèbres peuvent être représentées par des algèbres de carquois liés, comme le stipule le théorème suivant.

Théorème 1.4.8 ([2]II,3,7) *Soit A une algèbre réduite, connexe et de K-dimension finie, avec K algébriquement clos. Il existe un carquois fini connexe Q_A et un idéal admissible I de KQ_A tels que $A \cong KQ_A/I$. On dit que le carquois lié (Q_A,I) est une présentation de A.*

Afin de pouvoir appliquer ce théorème dans la suite de ce mémoire, on supposera que K est algébriquement clos et que A est réduite, connexe et de K-dimension finie. Maintenant que nous avons défini une manière de présenter une algèbre, donnons-nous une façon d'utiliser cette présentation pour représenter les modules sur cette algèbre.

Définition 1.4.9 ([2]II,4,1) *Soit Q un carquois fini et I un idéal admissible de KQ. Une représentation M de Q est définie par la donnée suivante:*

(a) À chaque point a de Q_0 est associé un K-espace vectoriel M_a

(b) À chaque flèche $\alpha : a \to b$ de Q_1 est associé une application K-linéaire $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Une représentation M de Q est dite liée par I (ou satisfaisant aux relations de I) si $M(\rho) = 0$ pour toutes les relations ρ de I.

Les représentations d'un carquois Q (munies de morphismes adéquats) forment en fait une catégorie, notée *Rep*(Q), et les représentations liées d'un carquois Q lié par un idéal I forment la catégorie *Rep*(Q, I).

Théorème 1.4.10 ([2]II,4,6) *Soit $A = KQ/I$ avec Q un carquois fini et connexe, et I un idéal admissible de KQ. Il existe une équivalence entre les catégories $Mod\ A$ et Rep(Q, I).*

L'équivalence de 1.4.10 peut se restreindre aux catégories mod$A$ de modules de type fini et des représentations de dimension finie *rep*(Q, I). Donnons des exemples de représentations des algèbres présentées en 1.4.2.

Exemple 1.4.11

(a)

$$\begin{tikzcd} & K & \\ K \arrow[ur, "1"] & & 0 \arrow[ul, "0"'] \end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd} K^2 & K \arrow[l, shift right, "{[0\ \ 1]}"'] \arrow[l, shift left, "{[1\ \ 0]}"] \end{tikzcd}$$

Le premier exemple de représentation donné ci-haut correspond au module projectif indécomposable P_2 de l'algèbre décrite en *1.1.24* selon l'équivalence du théorème *1.4.10.* Le second exemple est également un module projectif, sur l'algèbre de Kronecker.

CHAPITRE 2

Historique du déterminant de Cartan

Ce chapitre constitue une revue de la bibliographie portant sur la conjecture du déterminant de Cartan. Sans entrer dans les détails, nous donnons un bref aperçu de la majorité des résultats aujourd'hui connus par rapport à la conjecture, en tentant d'en reconstruire l'historique afin de faire ressortir l'avancement des connaissances qui s'y rapportent. Certains termes utilisés dans ce chapitre ne sont pas définis dans ce mémoire; le lecteur pourra se référer aux articles cités pour en prendre connaissance. Dans ce chapitre, R désigne toujours un anneau.

2.1 Avant la conjecture

De façon générale, la conjecture du déterminant de Cartan est posée pour les anneaux, de façon suivante.
Si R est un anneau artinien de dimension globale finie à gauche, de matrice de Cartan C_R, alors $\det C_R = 1$.
Avant même que ne soit formulée la conjecture, quelques résultats étaient connus sur le

déterminant de Cartan. En 1938, dans [15] Nakayama faisait remarquer qu'en général, les matrices de Cartan "à gauche" et "à droite" d'un anneau artinien ne sont pas identiques. Autrement dit, si

$$C_{_RR} = [c_{ij}] \ \text{ et } \ C_{R_R} = [d_{ij}],$$

avec

$$c_{ij} = l({}_{e_iRe_i}e_iRe_j) \ \text{ et } \ d_{ij} = l(e_jRe_{i_{e_iRe_i}}),$$

alors

$$C_{_RR} \neq C_{R_R}.$$

Par contre, si R est une algèbre d'artin, on a le résultat suivant.

Proposition 2.1.1 (Nakayama [15]) *Si R est une algèbre d'artin, alors* det $C_{_RR}=$ det C_{R_R}.

Quelques années plus tard, en 1954, Eilenberg (voir [8]) a formulé le résultat fondamental suivant, dont une preuve sera fournie dans ce mémoire pour les algèbres artiniennes (voir 3.2).

Théorème 2.1.2 (Eilenberg [8]) *Si R est un anneau artinien de dimension globale finie, alors* det $C_R \in \{1,\ -1\}$.

En 1958, Jans et Nakayama (voir [14]) démontrent que si R est un anneau artinien de dimension globale finie tel que $\mathrm{rad}^2 R = 0$, alors det C_R=1, et qu'il en est de même si R est facteur direct d'un anneau héréditaire. À partir de ces résultats, on peut prouver que si R est une algèbre sobre sur un corps algébriquement clos dont le carquois lié Q contenant n points est acyclique, alors dim. gl.$R \leq n-1$ et det $C_R = 1$.

Plus tard, dans un article portant sur les anneaux quasi-héréditaires (voir [4]), Burgess et Fuller démontrent que si R est quasi-héréditaire, alors son déterminant de Cartan vaut également 1.

2.2 La conjecture

Ce n'est qu'en 1982 que Dan Zacharia pose la conjecture telle qu'on la connait aujourd'hui, dans [19], article dans lequel il la démontre pour les algèbres d'artin de dimension globale 2. Il soulève alors la question à savoir si elle est vraie pour toutes les algèbres d'artin de dimension globale finie. Notons qu'à ce jour, la conjecture n'est pas démontrée en général pour les algèbres d'artin de dimension globale 3.

Peu après, Burgess, Fuller, Voss et Zimmermann-Huisgen traiteront dans [7] des anneaux sériels à gauche, et obtiendront les résultats suivants. Il est cependant utile de noter qu'afin de respecter le contenu des articles, les résultats de cette section sont exprimés pour des R-modules à gauche. Pour les exemples, nous utilisons des R-modules à droite, comme dans le reste de ce mémoire.

Théorème 2.2.1 (Burgess, Fuller, Voss, Zimmermann-Huisgen [7]) *Si R est un anneau sériel à gauche, alors* dim. gl. $R < \infty$ *si et seulement si* $\det C_R = 1$.

Avec la proposition 2.1.1, on arrive facilement à généraliser le résultat aux algèbres sérielles à gauche ou à droite.

Corollaire 2.2.2 (Burgess, Fuller, Voss, Zimmermann-Huisgen [7]) *Soit A une algèbre d'artin sérielle à gauche ou à droite. Alors* dim. gl. $A < \infty$ *si et seulement si* $\det C_A = 1$.

Un des éléments nouveaux qu'apporte cet article réside dans le fait que la matrice de Cartan peut servir, dans les cas cités plus haut, d'indicateur de la finitude de la dimension globale des anneaux étudiés. Les auteurs soulèvent également la question à savoir si cette double implication est toujours vraie. Vers la fin de l'article, ils donnent un contre exemple: deux anneaux de longueur de Loewy 3 dont un de dimension globale finie et l'autre infinie, de matrices de Cartan identiques. La conjecture n'est donc pas, en général, une double implication.

Jusqu'ici, les preuves partielles de la conjecture étaient toujours basées sur l'existence d'un R-module simple de dimension projective 1. Il était alors légitime de se demander si l'on pouvait espérer que cette technique puisse mener à la démonstration définitive de la conjecture. Dans le même article, les auteurs étudient un exemple, qu'ils qualifient de désillusionnant, dans lequel ils construisent un anneau d'artin de dimension globale 4, de déterminant de Cartan 1, mais qui n'admet pas de module simple de dimension projective 1 (voir [7], exemple 11). Cette technique ne peut donc pas mener à la preuve de la conjecture. Il fallait trouver un autre moyen.

2.3 Une nouvelle matrice

Quelques années auparavant, en utilisant la K-théorie, Wilson (voir [17]) développait une technique lui permettant de s'attaquer à plusieurs problèmes, dont celui de la conjecture du déterminant de Cartan. Il définit ce qu'il nomme la matrice de Cartan F-filtrée.

Définition 2.3.1 (Wilson [17]) *Supposons qu'il existe un idéal F de A tel que*

$$F^{k+1}P_i \subseteq F^kP_i \subseteq ... \subseteq FP_1 \subseteq F^0P_1$$

avec $F^0P_i = P_i$, $F^1P_i = \text{rad } P_i$ et $F^l = 0$ pour l assez grand, pour tout R-module projectif indécomposable P_i. La matrice de Cartan F-filtrée de R est la $n \times n$ matrice de polynômes en T à coefficients entiers

$$\widehat{C}_R(T) = [\hat{c}_{ij}]$$

où

$$\hat{c}_{ij}(T) = \sum_{k=0}^{n} c_i(F^k P_j / F^{k+1} P_j) T^k,$$

avec $c_i(M)$ désignant le nombre de copies de R-module simple S_i apparaissant dans une suite de composition du R-module M.

On voit immédiatement que l'idéal F peut être le radical de l'anneau. Calculons un exemple de matrice de Cartan filtrée par le radical.

Exemple 2.3.2 Considérons l'anneau R suivant, exprimé comme somme directe de ses modules projectifs indécomposables.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ / & & \backslash \\ 2 & & 2 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 2 & \\ / & | & \backslash \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} & 3 & \\ & | & \\ & 1 & \\ / & & \backslash \\ 2 & & 2 \end{array}$$

La matrice de Cartan rad$R$-filtrée de R est

$$\widehat{C}_R(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T \\ 2T & 1 & 2T^2 \\ 0 & 3T & 1 \end{bmatrix}.$$

On voit que pour un anneau R, la matrice de Cartan F-filtrée évaluée en 1 est égale à la matrice de Cartan usuelle. En considérant $\widehat{C}_R(T)$ comme une matrice d'applications entre deux groupes de Grothendieck, Wilson vérifie la conjecture pour les anneaux positivement gradués.

En utilisant cette nouvelle définition, Fuller et Zimmermann-Huisgen, dans [10], généralisent ce résultat à ce qu'ils nommèrent les anneaux Cartan-filtrés de dimension globale finie. En outre, ils démontrent le corollaire suivant, qui répond à une question soulevée dans [7].

Corollaire 2.3.3 (Fuller, Zimmermann-Huisgen [10]) *Soit R un anneau artinien de dimension globale finie tel que* $\mathrm{rad}^3 R = 0$. *Alors* $\det C_R = 1$.

Dans le même article, faisant suite à [7], il est démontré que $\det C_R = 1$ si R est sériel à gauche ou à droite. Mais contrairement à ce qui fut montré dans [7] pour les anneaux sériels à gauche, le déterminant de Cartan ne peut pas servir d'indicateur de la finitude de la dimension globale des anneaux sériels à droite. Ce n'était que partie remise...

En 1992, dans [5], Burgess et Fuller introduisent les anneaux presque sériels à gauche.

Définition 2.3.4 (Burgess, Fuller [5]) *Un anneau artinien à gauche R est dit presque sériel à gauche si pour chaque $j \in \{1,...,n\}$, il existe des entiers positifs $i(j)$, $u(j)$ et $d(j)$, avec $i(j) \in \{1,...,n\}$, $u(j) \geq 0$ et $d(j) \geq 1$ tels que*

$$Je_j \cong \left(\frac{Re_{i(j)}}{J^{u(j)}e_{i(j)}}\right)^{(d(j))}.$$

Les anneaux presque sériels à droite sont définis de manière analogue.

Exemple 2.3.5 L'anneau R_R de l'exemple *2.3.2,* qui est presque sériel à droite. En effet, on a

$$e_1J \cong \left(\frac{e_2R}{e_2J^1}\right)^{(2)}$$

$$e_2J \cong \left(\frac{e_3R}{e_3J^1}\right)^{(3)}$$

$$e_3J \cong \left(\frac{e_1R}{e_1J^2}\right)^{(1)}.$$

Burgess et Fuller démontrent le théorème suivant.

Théorème 2.3.6 (Burgess, Fuller [5]) *Soit R un anneau presque sériel à gauche. Alors* dim. gl. $R < \infty$ *si et seulement si* $\det \widehat{C}_R(T) = 1$.

Or, il est possible de montrer que si R est sériel à droite, chacune de ses composantes irréductibles (voir [9]) est presque sérielle à gauche.

Corollaire 2.3.7 (Burgess, Fuller [5]) *Si R est un anneau artinien sériel à droite, alors* dim. gl. $R < \infty$ *si et seulement si* $\det \widehat{C}_R(T) = 1$.

La déterminant de Cartan n'étant pas suffisant pour tester la finitude de la dimension globale de anneaux sériels à gauche, nous devons regarder la matrice F-filtrée afin d'avoir un indicateur.

En 1995, Burgess et Fuller [6] généralisent leur résultat de [4] concernant les anneaux quasi-héréditaires. Ils définissent en fait deux classes plus larges d'anneaux: les anneaux K-héréditaires à gauche (qui sont tous de dimension globale finie), obtenus en changeant légèrement la définition d'anneau quasi-héréditaire, et les anneaux dits avec série réductrice de matrices à gauche (en anglais, "rings with left reducing series") pour lesquels ils démontrent la conjecture du déterminant de Cartan ainsi que sa réciproque.

Il existe plusieurs autres résultats concernant la conjecture du déterminant de Cartan, notamment dans [16], [13] et [18]. Le lecteur désirant pousser davantage son étude de la conjecture s'y référera.

CHAPITRE 3

Déterminants de Cartan de quelques algèbres artiniennes

Ca chapitre contient les démonstrations de deux résultats cruciaux concernant le déterminant de Cartan: le résultat d'Eilenberg [8] ainsi que celui de Zacharia [19] pour les algèbres d'artin de dimension globale 2.

3.1 Algèbres de dimension globale finie

Un résultat important concernant le déterminant de Cartan d'une algèbre a été formulé par S. Eilenberg (voir la proposition 21 de [8]), et concerne les anneaux de dimension globale finie, en général. Reformulons-le en termes d'algèbres.

Théorème 3.1.1 *Soit A une K-algèbre de dimension finie, connexe, réduite, déployée et de dimension globale finie. Alors* $\det C_A \in \{+1, \ -1\}$.

Démonstration : Nous obtiendrons le résultat en démontrant que C_A est inversible sur $\mathbb{Z}$. Cherchons donc une matrice à coefficients entiers qui serait l'inverse de C_A. Comme la dimension globale de A est finie, chaque A-module simple S_i admet une résolution projective finie:

$$0 \to P_{i,n_i} \to P_{i,n_i-1} \to \ldots \to P_{i,0} \to S_i \to 0.$$

En vertu de l'additivité de **dim**, on a

$$\mathbf{dim} S_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{dim} P_{i,k}.$$

Par ailleurs, selon le théorème de décomposition unique 1.1.11, les modules projectifs de cette résolution peuvent s'écrire comme somme directe finie de copies des modules projectifs indécomposables P_j. Ainsi,

$$\mathbf{dim} S_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \mathbf{dim} P_j,$$

où les a_{ij} sont des entiers. Or, il est clair que les vecteurs $\mathbf{dim} S_i$, (où $1 \le i \le n$) forment la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. Mais l'équation précédente nous indique que ceux-ci sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{dim} P_j$, (où $1 \le j \le n$), avec des coefficients entiers a_{ij}. On obtient donc, sous forme matricielle,

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= [\mathbf{dim} S(1) | \ldots | \mathbf{dim} S(n)] \\ &= [\mathbf{dim} P(1) | \ldots | \mathbf{dim} P(n)] \cdot [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \\ &= C_A \cdot [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Par conséquent, C_A est inversible sur $\mathbb{Z}$. $\square$

3.2 Algèbres de dimension globale 2

Dans cette section, nous démontrons la conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres d'artin de dimension globale égale à 2. Cette preuve est l'oeuvre de D. Zacharia

[19] et constitue un exemple classique d'une démonstration concernant le déterminant de Cartan qui utilise l'existence d'un A-module simple de dimension projective 1.

Nous utiliserons, pour cette preuve, la notation $a_{ij} = l_{\mathrm{End}(P_i)}\mathrm{Hom}_A(P_i, P_j)$, la longueur de $\mathrm{Hom}_A(P_i, P_j)$ en tant que $\mathrm{End}_A(P_i)$ module.

Lemme 3.2.1 *Soit A une algèbre d'artin telle que* dim. gl. $A = 2$. *Alors il existe un A-module simple de dimension projective 1.*

Démonstration :

Soit B un A-module de longueur minimale parmi les A-modules de dimension projective 1. Montrons que B est simple.

Supposons, à l'inverse, que B n'est pas simple. Alors il existe un A-module M tel que $0 \neq M \subset B$ et $M \neq B$. Donc, en vertu de l'hypothèse sur B, on a dp $M = 0$ ou dp $M = 2$, car B est minimal pour les A-modules de dimension projective 1.
Considérons la suite exacte $0 \longrightarrow M \longrightarrow B \longrightarrow B/M \longrightarrow 0$. Si dp $M = 2$, la proposition 1.2.4 nous donne que dp $B/M = 3$, ce qui contredit le fait que dim.gl.$A = 2$. En revanche, si dp $M = 0$, alors la 1.2.4 nous donne que dp $B/M = 1$. Mais comme $l(B/M) < l(B)$, on a une contradiction à la minimalité de la longueur de B parmi les A-modules de dimension projective 1. Donc, B est simple. $\square$

Lemme 3.2.2 *Soit A une algèbre d'artin. Posons* dp S_1*=1, et soit* $\Gamma = \mathrm{End}_A(P_2 \oplus P_3 \oplus \ldots \oplus P_n)^{op}$. *Alors* dim. gl. $\Gamma \leq$ dim. gl. A.

Démonstration : Considérons le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus P_3 \oplus \ldots \oplus P_n, -) : modA \rightarrow mod\Gamma$ (où mod A et mod Γ sont les catégories de A-modules et de Γ-modules à gauche de type fini). Ce foncteur est évidemment exact. Rappelons que les Γ-modules projectifs indécomposables sont de forme $\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus P_3 \oplus \ldots \oplus P_n, P_i)$, et que les Γ-modules simples sont de forme $\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus P_3 \oplus \ldots \oplus P_n,\, S_i)$, pour $i = 2, \ldots, n$ (voir [3]II).

Donc, pour i tel que $2 \leq i \leq n$, si

$$0 \longrightarrow Q_l \longrightarrow Q_{l-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow S_i \longrightarrow 0$$

est une résolution projective minimale d'un A-module simple S_i , alors

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n,\, Q_l) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n,\, Q_{l-1}) \longrightarrow \ldots$$

$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n, Q_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n, Q_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n, S_i) \longrightarrow 0$$

est une résolution projective (pas nécessairement minimale) du Γ-module $\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n,\, S_i)$, avec $2 \leq i \leq n$. Ainsi, dp $\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \ldots \oplus P_n,\, S_i) \leq \mathrm{dp} S_i$ pour $i = 2, \ldots, n$, donc dim. gl. $\Gamma \leq$ dim. gl.A. $\square$

Dans la preuve précédente, comme dp $S_1 = 1$, le radical de P_1 est un A-module projectif. Ainsi, il peut s'écrire sous la forme d'une somme directe de copies des projectifs indécomposables P_1,...,P_n, soit $\mathrm{rad} P_1 = m_{12}P_2 \oplus m_{13}P_3 \oplus \ldots \oplus m_{1n}P_n$, avec les m_{1i} des entiers positifs. Remarquons que P_1 ne fait pas partie des facteurs de $\mathrm{rad}P_1$. Si c'était le cas, on aurait $P_1 \subseteq \mathrm{rad}P_1$, situation impossible puisque A est une algèbre d'artin. On a ainsi, $\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus P_3 \oplus \ldots \oplus P_n,\, P_1) \cong \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus P_3 \oplus \ldots \oplus P_n,\, radP_1)$ est un Γ-module projectif.

Théorème 3.2.3 *Soient A une algèbre d'artin et S_1 un A-module simple tel que* dp $S_1 = 1$, $\Gamma = \mathrm{End}_A(P_2, \oplus \ldots \oplus P_n)^{op}$ *et C_Γ la matrice de Cartan de* Γ. *Alors* det C_A = det C_Γ

Démonstration :

Considérons la résolution projective de S_1

$$0 \longrightarrow m_{12}P_2 \oplus m_{13}P_3 \oplus \ldots \oplus m_{1n}P_n \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0 \qquad (3.1)$$

Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P_1,-)$ à cette dernière. On obtient

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, m_{12}P_2 \oplus m_{13}P_3 \oplus ... \oplus m_{1n}P_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, P_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, S_1) \longrightarrow 0,$$

ce qui est équivalent à

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, m_{12}P_2) \oplus \mathrm{Hom}_A(P_1, m_{13}P_3) \oplus ... \oplus \mathrm{Hom}_A(P_1, m_{1n}P_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, P_1)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, S_1) \longrightarrow 0.$$

Or, pour une suite exacte courte $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ de modules, on a $l(M) = l(L) + l(N)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} l(\mathrm{Hom}_A(P_1, P_1)) &= l(\mathrm{Hom}_A(P_1, m_{12}P_2) + \mathrm{Hom}_A(P_1, m_{13}P_3) + ... + \mathrm{Hom}_A(P_1, m_{1n}P_n)) \\ &\quad + l(\mathrm{Hom}_A(P_1, S_1)) \\ &= l(\mathrm{Hom}_A(P_1, m_{12}P_2)) + l(\mathrm{Hom}_A(P_1, m_{13}P_3)) + ... + l(\mathrm{Hom}_A(P_1, m_{1n}P_n)) \\ &\quad + l(\mathrm{Hom}_A(P_1, S_1)), \end{aligned}$$

ce qui nous donne, par définition des éléments a_{ij} de la matrice de Cartan de A,

$$a_{11} = m_{12}a_{12} + ... + m_{1n}a_{1n} + 1. \tag{3.2}$$

De façon similaire, pour tout j tel que $1 < j \leq n$, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P_j, -)$ à 3.1, on obtient

$$a_{j1} = m_{12}a_{j2} + m_{13}a_{j3} + ... + m_{1n}a_{jn}. \tag{3.3}$$

En réécrivant les équations 3.2 et 3.3, on a

$$\begin{aligned} a_{11} + (-m_{12})a_{12} + (-m_{13})a_{13} + ... + (-m_{1n})a_{1n} &= 1 \\ a_{j1} + (-m_{12})a_{j2} + (-m_{13})a_{j3} + ... + (-m_{1n})a_{jn} &= 0. \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on obtient de ces deux équations

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -m_{12} \\ \vdots \\ -m_{1n} \end{bmatrix} = 1$$

et

$$\begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -m_{12} \\ \vdots \\ -m_{1n} \end{bmatrix} = 0, \text{ pour } j = 2,\dots,n.$$

Avec $C_A = [a_{ij}]$, on a

$$C_A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{12} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{13} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{1n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

De plus, comme le déterminant de la deuxième matrice vaut évidemment 1, on a

$$\det C_A = \det \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Or, comme $\mathrm{Hom}_A(P_i, P_j) \cong \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \dots \oplus P_n, P_i), \mathrm{Hom}_A(P_2 \oplus \dots \oplus P_n, P_j))$ (voir [3], II.2.1), les éléments a_{ij} de la matrice C_A sont égaux aux coefficients respectifs de C_Γ. On a bien

$$\det \begin{bmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det C_\Gamma.$$

□

Il est bien connu que le déterminant de Cartan d'une algèbre de dimension globale au plus un vaut nécessairement $+1$. En effet, une telle algèbre est héréditaire (voir [1]

XII.1.7), et Jans et Nakayama ont démontré dans [14] que si une algèbre A est facteur directe d'une algèbre héréditaire, alors $\det C_A = 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat principal de cette section.

Théorème 3.2.4 *Soit A une algèbre d'artin de dimension globale 2. Alors* $\det\ C_A = 1$.

Démonstration : Soit A une algèbre d'artin de dimension globale 2. Selon le lemme 3.2.1, il existe un A-module simple S_1 de dimension projective 1. L'idée de la preuve est de construire une suite d'algèbres d'artin $A = A_0$, A_1,..., A_k telles que

(a) dim. gl. $A_i \geq$ dim. gl. A_j si $i \leq j$.

(b) $\det\ C_{A_i} = \det\ C_{A_j}$ pour tous i, j.

Posons $A_1 = \mathrm{End}_A(P_2 \oplus ,..., \oplus P_n)^{op}$. Alors, selon le théorème 3.2.3 et le lemme 3.2.2, dim. gl. $A_1 \leq$ dim. gl. A et $\det\ C_A = \det\ C_{A_1}$. Si dim. gl. $A_1 \leq 1$, $\det C_{A_1} = det\ C_A = +1$ car A_1 est héréditaire. Sinon, dim. gl. $A_1 = 2$. Il existe alors un A_1-module simple de dimension projective 1, et nous pouvons recommencer le processus. Ce procédé inductif doit s'arrêter à A_{n-1}, qui n'admet qu'un seul module simple. L'algèbre A_{n-1} est ainsi une algèbre simple, et donc $\det\ C_{A_{n-1}} = 1$. $\square$

CHAPITRE 4

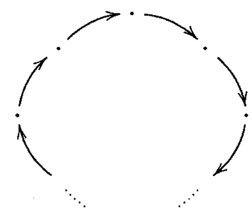
Algèbres de Nakayama

Dans ce chapitre, nous donnons une nouvelle preuve de la conjecture du déterminant de Cartan pour une sous-classe des algèbres de Nakayama, telles que décrites en 1.1.16. Cela constitue un cas particulier du résultat principal de [7]. L'originalité de la démarche présentée ici réside dans le calcul explicite des matrices de Cartan de ces algèbres de Nakayama. Par la suite, un raisonnement simple permet d'étendre ce résultat aux algèbres sérielles à gauche ou à droite respectant une certaine condition. Pour ce chapitre, nous travaillons avec des algèbres sobres, connexes et de dimension finie sur un corps K algébriquement clos.

Il est bien connu que le carquois Q_A d'une algèbre de Nakayama $A = KQ_A/I$ est d'une des deux formes suivantes (voir [2] IV.3.2).

(i)

(ii)



Si le carquois d'une algèbre A est de la première forme, alors celle-ci est une algèbre triangulaire, c'est à dire que son carquois est acyclique. Dès lors, on sait que sa matrice de Cartan est de déterminant 1 (voir 2.1). Nous ne nous intéresserons donc à partir d'ici qu'aux algèbres de Nakayama A dont le carquois Q_A est de la seconde forme.

4.1 Préliminaires

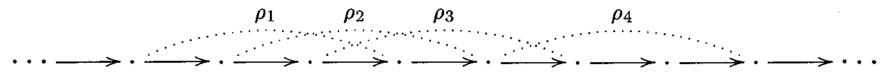
Définissons d'abord la sous-classe des algèbres de Nakayama de dimension globale finie pour laquelle nous vérifierons la conjecture du déterminant de Cartan.

Même si dans tous les exemples présentés dans ce chapitre, le carquois de l'algèbre est de forme cyclique, nous les représenterons sous une forme linéaire par souci de clarté graphique. Le lecteur devra toujours garder en tête la vraie forme du carquois afin de bien comprendre les exemples.

Définition 4.1.1 *Soit* (Q, I) *un carqois lié avec* $I = <\rho_1,...,\rho_n>$. *On dira qu'une relation* ρ_i *(de source* s_i *et de but* t_i*) admet un chevauchement si au moins une relation* ρ_j *a sa source* s_j *strictement entre* s_i *et* t_i.

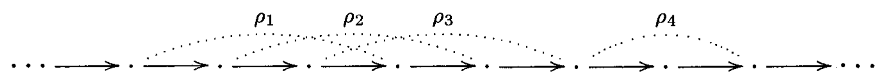
Exemple 4.1.2

(a)



Dans ce cas, ρ_1, ρ_2 et ρ_3 admettent un chevauchement, mais pas ρ_4.

(b)



Ici, seules ρ_1 et ρ_2 admettent un chevauchement.

Il est important de remarquer que la définition de chevauchement donnée ici n'est pas exactement la même que celle utilisée dans certains articles tels que [11].

Définition 4.1.3 *On dira qu'une algèbre de Nakayama $A = KQ/I$ est à chevauchements fini si au moins une des relations qui engendrent I n'admet pas de chevauchement.*

Selon un théorème de Green, Happel et Zacharia (voir [12] ou [11]), ces algèbres sont de dimension globale finie. À partir d'ici, nous ne considérerons que des algèbres A à chevauchements finis. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre théorème principal.

Théorème 4.1.4 *Soit $A = KQ/I$ une algèbre de Nakayama à chevauchements finis. Alors* $\det C_A = 1$.

Afin de démontrer ce théorème, nous aurons à séparer nos algèbres en deux classes distinctes.

Définition 4.1.5 *On dira que A est*

(a) sans multiplicité si aucun A-module projectif indécomposable n'admet de répétition

de A-modules simples parmi ses facteurs de composition;

(b) avec multiplicité sinon.

De façon visuelle, on peut reconnaître les algèbres $A = KQ/I$ sans multiplicité par le fait qu'elles n'admettent aucun chemin non nul passant deux fois par le même point. De même, les algèbres $A = KQ/I$ avec multiplicité en admettent au moins un. Nous traiterons séparément ces deux classes d'algèbres.

4.2 Algèbres sans multiplicité

Dans cette section, comme les A-modules projectifs indécomposables ne contiennent aucune répétition de A-modules simples dans leur suite de composition, on peut voir que les matrices de Cartan étudiées ne contiendront que des 1 et des 0.

La preuve de la conjecture pour la classe d'algèbres qui nous intéresse ici repose en grande partie sur la numérotation des points des carquois.

Nous choisirons de numéroter les points des carquois comme suit: nous fixons une relation qui n'admet pas de chevauchement, que nous nommons ρ_0, qui existe par hypothèse. Pour le reste de cette section, s_0 désignera la source de ρ_0, et t_0 désignera son but. Le point 1 du carquois sera placé immédiatement après s_0. On numérote les points suivants de manière croissante en suivant le sens des flèches. Remarquons que pour une algèbre dont le carquois Q_A comprend n points, $s_0 = n$. De plus, s'il existe, dans I, plus d'une relation n'admettant pas de chevauchement, le choix de ρ_0 peut se faire de façon arbitraire parmi celles-ci.

Construction de la matrice de Cartan

Nous verrons que le choix effectué plus haut nous donnera une matrice triangulaire inférieure, avec quelques éléments non nuls dans la partie supérieure, qui ne viendront pas influencer la valeur du déterminant de C_A.

Notation 4.2.1 *Soit M un A-module sériel de suite de composition $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_l = M$. Sachant que chaque facteur de composition de M est un A-module simple, on notera*

$$M = \begin{pmatrix} i_l \\ i_{l-1} \\ \vdots \\ i_2 \\ i_1 \end{pmatrix},$$

avec les i_k tels que $M_k / M_{k-1} \cong S_{i_k}$.

Définition 4.2.2 *On dira qu'une relation ρ arrête un A-module projectif indécomposable P_i quand la source s de ρ est la première source de relation rencontrée en suivant un chemin de source i.*

Exemple 4.2.3

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dotted, no head, "\rho_1"] & n \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, dotted, no head, "\rho_2"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dotted, no head, "\rho_3"] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ici, P_{n-1} est arrêté par ρ_1, P_n est arrêté par ρ_2 , et P_1, P_2 et P_3 sont arrêtés par ρ_3.

Autrement dit, si un A-module indécomposable P_i est arrêté par une relation ρ (de source s et de but t), il est de la forme

$$P_i = \begin{pmatrix} i \\ \vdots \\ t-1 \end{pmatrix}.$$

Lemme 4.2.4 *La diagonale principale de C_A ne contient que des 1.*

Démonstration : Puisque A est sans multiplicité, il est clair que $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_i, P_i)) = 1$, pour $i = 1,..., n$. $\square$

Intéressons-nous maintenant aux A-modules projectifs qui interviennent dans les t_0 premières colonnes de C_A.

Lemme 4.2.5 *Pour les points $i \in \{2,..., t_0\}$, avec t_0 le but de ρ_0, la relation n'admettant pas de chevauchement par rapport à laquelle nous avons numéroté les points du carquois, on a $P_i = \mathrm{rad}\ P_{i-1}$.*

Démonstration : Comme ρ_0 n'admet pas de chevauchement, les A-modules projectifs indécomposables $P_1, P_2,..., P_{t_0}$ sont tous arrêtés par la même relation, disons ρ_1. Ainsi, ils sont de forme

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ t_0 \\ \vdots \\ t_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ t_0 \\ \vdots \\ t_1 - 1 \end{pmatrix}, ..., P_{t_0 - 1} = \begin{pmatrix} t_0 - 1 \\ t_0 \\ \vdots \\ t_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad P_{t_0} = \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Conséquemment, chaque colonne de C_A se trouvant dans les t_0 premières est identique à celle qui la précède, excepté pour l'élément placé au dessus de la diagonale principale de la matrice. Voyons un exemple de ce phénomène.

Exemple 4.2.6

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[r] \arrow[rrr, dash, dotted, bend left] & n-1 \arrow[r] & n \arrow[r] \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "\rho_0"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] \arrow[rr, dash, dotted, bend left, "\rho_1"] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ici, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ *et* $P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont arrêtés par ρ_1. Ainsi, leurs vecteurs-dimension sont $\mathbf{dim}P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{dim}P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{dim}P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

En particulier, pour les t_0 premières colonnes de C_A, l'élément placé immédiatement au dessus de la diagonale principale est nul. Généralisons ce résultat à toute la matrice.

Lemme 4.2.7 *La diagonale secondaire placée immédiatement au dessus de la diagonale principale de C_A est nulle.*

Démonstration : Supposons qu'un élément de cette diagonale soit non nul, donc que $c_{i,i-1} = 1$ pour un certain i. Alors la i^e colonne de C_A ne contient que des 1, donc le A-module projectif indécomposable au point i est de forme

$$P_i = \begin{pmatrix} i \\ i+1 \\ \vdots \\ n \\ 1 \\ \vdots \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, ce module est arrêté par une relation ρ_i dont le but est le point i. Il n'existe donc pas de relation dans I dont la source ne soit pas entre s_i et t_i. Sinon, P_i serait arrêté par celle-ci. Mais comme dans notre cas, il ne doit pas exister de chemin passant deux fois par le même point, une relation ρ_0 doit nécessairement avoir sa source au point $i-1$.

De plus, comme aucune relation ne peut prendre sa source ailleurs qu'entre s_i et t_i, alors ρ_0 est la seule relation à ne pas admettre de chevauchement, et donc $i = 1$. Ceci contredit le fait que la première colonne de C_A n'a pas d'élément sur la première diagonale secondaire. $\square$

Regardons maintenant la partie supérieure de la matrice. Nous voulons montrer que dans cette partie, il n'y a pas d'éléments non nuls dans les lignes inférieures à la ligne t_0-1. Considérons donc les A-modules indécomposables projectifs P_i tels que $\mathrm{Hom}_A(P_1,\, P_i) \neq 0$. Ces derniers sont les responsables des éléments non nuls dans la partie supérieure de C_A.

Lemme 4.2.8 *Soit P_i un A-module projectif indécomposable tel que* $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_1,\, P_i) \neq 0$*, où $i \neq 1$. Alors* $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_j,\, P_i) = 0$ *pour tout j tel que $t_0 \leq j < i$.*

Démonstration : Démontrons d'abord que $t_0 < i$, autrement dit que pour tout i tel que $1 \leq i \leq t_0$, on a $\mathrm{Hom}_A(P_1,P_i) = 0$.

Comme A est sans multiplicité, il existe une relation ρ_1 qui arrête P_1. Donc, $t_{\rho_1} \notin \{1,2,...t_0\}$. Mais comme ρ_0 n'admet pas de chevauchement, $s_{\rho_1} \notin \{1,2,...t_0-1\}$, donc P_i est arrêté par ρ_1 pour les i tels que $1 \leq i \leq t_0$. Ainsi, comme $t_{\rho_1} \notin \{1,2,...t_0\}$, $Hom_A(P_1,P_i) = 0$.

D'après notre choix de l'emplacement du point 1 dans le carquois, il est clair que $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_1,\, P_n) = 1$. Or, comme $n = s_0$, P_n est arrêté par ρ_0. Il est donc de forme

$$P_n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ \vdots \\ t_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

De même, tous les A-modules projectifs indécomposables P_i tels que $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_1, P_i) \neq 0$ sont arrêtés soit par ρ_0 soit par une autre relation ayant son but strictement entre $n = s_0$ et t_0, d'où le résultat. $\square$

Exemple 4.2.9

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[r] \arrow[rrrr, bend left, dotted, no head] & n-1 \arrow[r] & n \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, dotted, no head, "\rho_0"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, dotted, no head, "\rho_1"] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Ici, $P_n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $P_{n-1} = \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont arrêtés par ρ_0, tandis que $P_{n-2} = \begin{pmatrix} n-2 \\ n-1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $P_{n-3} = \begin{pmatrix} n-3 \\ n-2 \\ n-1 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$ sont arrêtés par ρ_1.

Calcul du déterminant

En vertu des lemmes de la section 4.2, toutes les algèbres traitées dans la présente section ont une matrice de Cartan de forme

$$
C_A = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & & & & & & & & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & & & & & & & & & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & 1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & 1 & & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{bmatrix}
$$

Les espaces laissés vides peuvent être des 0 ou des 1. Ce qu'il faut remarquer, c'est que nous sommes en présence d'une matrice triangulaire inférieure avec un groupe de 1 dans le coin supérieur droit, n'allant jamais plus bas que la ligne $t_0 - 1$, ni plus bas que la première diagonale supérieure (qui est nulle). De plus, les t_0 premières colonnes s'annulent toutes à partir de la même ligne. Calculons son déterminant. Notons C_i la $i \times i$ sous-matrice de C_A située dans le coin inférieur droit, et procédons par récurrence sur i.

Pour $i \in \{1,..., (n-(t_0-1))\}$, $\det C_{i-1} = 1$ trivialement. Posons k tel que $(n-(t_0-1)) \leq k < n$ et que $\det C_i = 1$ pour tout $i \in \{1,..., k\}$, et calculons $\det C_{k+1}$. En vertu des remarques précédentes, C_{k+1} est de forme

$$C_{k+1} = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots\ 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & & 1 \\ \hline \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & C_{k-1} & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right]$$

Or, si on calcule le déterminant de cette matrice à l'aide de l'expansion de Laplace, on arrive à

$$\det C_{k+1} = 1 \cdot \det C_k - 0 \cdot C^{(1,2)} + ... + (-1)^{k+1} c_{(1,k)} \cdot C^{(1,k)} + (-1)^{k+2} c_{(1,k+1)} \cdot C^{(1,k+1)},$$

où $C^{(i,j)}$ désigne le mineur associé à l'élément $c_{(i,j)}$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de C_{k+1}. Mais comme les deux premières colonnes de C_{k+1} s'annulent à partir de la même ligne (voir 4.2.5), les mineurs $C^{(1,j)}$ sont tous nuls pour $j \in \{3,..., k+1\}$. Ainsi, $\det C_{k+1} = \det C_k = 1$.

4.3 Algèbres avec multiplicité

Afin de compléter la démonstration de la conjecture du déterminant de Cartan pour les algèbres de Nakayama à chevauchements finis, traitons les algèbres $A = KQ/I$ avec multiplicité, donc celles qui contiennent au moins un chemin non nul passant deux fois par un même point. La première remarque à faire dans ce cas est que pour qu'un tel chemin existe, au moins un point du carquois Q_A doit être placé strictement entre la source et le but de toutes les relations de I. Dans cette section, afin d'obtenir des matrices facilement manipulables, nous choisirons de placer le point 1 du carquois au premier point (en suivant le sens des flèches) placé strictement entre la source et le but de toutes les relations qui engendrent I. De plus, contrairement au cas précédent, les exemples présentés ici illustreront toutes les relations génératrices de I. Voyons des exemples illustrant ceci.

Exemple 4.3.1

(a)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[rrr, dotted, no head, bend left] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[rrr, dotted, no head, bend left] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Ici, aucun chemin non nul ne passe deux fois par le même point.

(b)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & n-1 \arrow[r] \arrow[rrrr, dotted, no head, bend left, "r_2"] & n \arrow[r] \arrow[rrrr, dotted, no head, bend left, "r_1"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dans cet exemple, il existe des chemins non nuls passant deux fois par les points *1* et *2*.

Il est important de noter que si une algèbre $A = KQ/I$ est telle que Q compte n points et que I ne compte qu'une seule relation ρ, alors la longueur de cette dernière est strictement inférieure à $n + 1$. Sinon, ρ admet un chevauchement et A n'est pas à chevauchements finis.

L'idée de la preuve sera de montrer que, pour $A = KQ/I$, $\det C_A = +1$ au moyen d'une récurrence sur le nombre minimal de relations qui engendrent I.

Considérons d'abord une algèbre $A = KQ/I$ où Q compte n points et où I est engendré par une seule relation de longueur $m \leq n+1$. On a le carquois suivant.

$$\cdots \longrightarrow n \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \qquad \cdots \longrightarrow m \longrightarrow m+1 \longrightarrow \cdots$$

La matrice de Cartan de cette algèbre est la $n \times n$ matrice suivante.

$$C_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ddots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Avant de calculer le déterminant de cette matrice, soulignons deux choses. La dernière ligne de C_A n'est contituée que de 1, et il se cache une matrice triangulaire de déterminant 1 dans le coin inférieur droit de C_A, plus précisément la $n-(m-1) \times n-(m-1)$ matrice située à l'intersection des $n-(m-1)$ dernières colonnes et des $n-(m-1)$ dernières lignes de C_A. Appelons cette matrice ${C_A}^{n-(m-1)}$. Calculons maintenant det C_A.

Soustrayons la dernière ligne de C_A à la première. La matrice C'_A obtenue a le même déterminant que C_A, en vertu de la définition du déterminant. On obtient

$$C_A{}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \ddots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Or, il est clair que le déterminant de cette matrice est égal à celui de la sous-matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de $C_A{}'$, que nous nommerons $C_A{}^{n-1}$. On a donc

$$\det C_A = \det C_A{}' = \det C_A{}^{n-1}$$

En appliquant le même procédé $m-1$ fois, on ramène le calcul du déterminant de C_A à celui de $C_A{}^{n-(m-1)}$, d'où $\det C_A = 1$ pour une algèbre $A = KQ/I$ telle que I est engendré par une seule relation.

Considérons maintenant une algèbre $A = KQ/I$ telle que I est engendré par $k \geq 1$ relations, et supposons que $\det C_A = 1$. Rappelons que dans les algèbres de cette section, au moins un point du carquois Q_A doit être placé strictement entre la source et le but de toutes les relations qui engendrent I. Ainsi, nous pouvons numéroter les k relations génératrices de $I = <\rho_1, \ldots, \rho_k>$ de manière à ce que $s_{i+1} < s_i$ et $t_{i+1} < t_i$ pour $i = 1, \ldots k-1$.

Posons $A' = KQ/I'$, avec $I' = I \cup \{\rho_{k+1}\}$, avec ρ_{k+1} une relation de source s_{k+1} et de but t_{k+1} telle que le point 1 de Q_A (avec la position du point 1 comme définie en début de section) se trouve strictement entre s_{k+1} et t_{k+1}. Sans perdre de généralité, on peut supposer que ρ_{k+1} est placée "en amont" de toutes les relations de I, c'est à dire que $s_{k+1} < s_i$ et $t_{k+1} < t_i$ pour $i = 1,\ldots k$. Comparons les matrices C_A et $C_{A'}$, et montrons qu'elles sont de même déterminant.

Remarquons tout d'abord que les A'-modules projectifs indécomposables aux points $s_{k+1} + 1,\ldots\ s_k$ sont identiques aux A-modules projectifs indécomposables aux mêmes points. En effet, ils sont tous arrêtés par la relation ρ_k. Par conséquent, les colonnes $s_{k+1} + 1,\ldots,\ s_k$ sont les mêmes pour C_A et $C_{A'}$. Le même raisonnement s'applique à tous les points i tels que $s_{k+1} + 1 \leq i \leq n$, donc les colonnes $s_{k+1} + 1,\ldots,\ n$ sont les mêmes pour C_A et $C_{A'}$.

D'autre part, les A-modules indécomposables aux points $1,\ldots,\ s_{k+1}$ sont arrêtés par la relation ρ_k, tandis que les A'-modules indécomposables aux mêmes points sont arrêtés par ρ_{k+1}.

$$P_i = \begin{pmatrix} i \\ i+1 \\ \vdots \\ t_{k+1} \\ \vdots \\ t_k - 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad P_i' = \begin{pmatrix} i \\ i+1 \\ \vdots \\ t_{k+1} - 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $C_{A'}$ peut donc être obtenue en soustrayant 1 des éléments de C_A situés dans l'intersection des colonnes $1,\ldots,\ s_{k+1}$ et des lignes $t_{k+1},\ldots,\ t_k - 1$.

Or, le A-module injectif indécomposable au point s_{k+1} est de forme

$$I_{s_{k+1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ s_{k+1} \end{pmatrix}.$$

La ligne s_{k+1} de C_A est donc de forme (1 1...1 0...0), avec la dernière composante non nulle en position s_{k+1}. On peut donc obtenir $C_{A'}$ à partir de C_A, en soustrayant la ligne

s_{k+1} des lignes t_{k+1},..., $t_k - 1$, ce qui ne change pas la valeur du déterminant. Donc, on a

$$\det C_{A'} = \det C_A = 1.$$

Donnons un exemple pour mieux illustrer la dernière situation.

Exemple 4.3.2 Soit l'algèbre A donnée par le carquois lié suivant.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] \arrow[rrrr, dash, dotted, bend left, "r_2"] & 7 \arrow[r] \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "r_1"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La matrice de Cartan de cette algèbre est

$$C_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ajoutons une relation à l'idéal de A afin d'obtenir l'algèbre A' donnée par le carquois lié suivant.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 5 \arrow[r] \arrow[rrrr, dash, dotted, bend left, "r_3"] & 6 \arrow[r] \arrow[rrrr, dash, dotted, bend left, "r_2"] & 7 \arrow[r] \arrow[rrr, dash, dotted, bend left, "r_1"] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On a

$$C_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

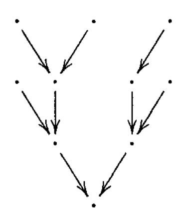
On remarque que les colonnes 6 et 7 des deux matrices sont identiques, et que l'on peut obtenir $C_{A'}$ à partir de C_A en soustrayant la ligne 5 à la ligne 2.

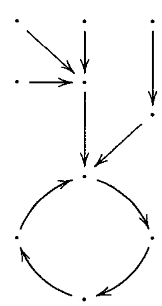
4.3.1 Preuve du théorème

On a prouvé que le déterminant de Cartan des algèbres de Nakayama à chevauchements finis sans multiplicité et avec multiplicité vaut 1, d'où le résultat.

4.4 Algèbres sérielles à droite

Dans cette section, nous généralisons le résultat ci-haut à certaines algèbres sérielles à droite. Il est bien connu que le carquois d'une algèbre sérielle à droite peut prendre la forme d'un arbre enraciné (comme ci-bas) ou bien d'un tel arbre dont on remplace la racine par un cycle orienté.





Définition 4.4.1 *On dira qu'une algèbre sérielle est à chevauchements fini si toute algèbre de Nakayama donnée par un sous-carquois plein et convexe de* $(Q_A,\, I)$ *est à chevauchements finis.*

Lemme 4.4.2 *Soient* $A = KQ/I$ *une algèbre dont le carquois* Q *est fini, et* $B = A[M] = KQ'/I'$ *une extension ponctuelle de* A*. Alors* $\det C_A = \det C_B$.

Démonstration : Par définition, le point de Q' ne figurant pas dans Q est une source. Ainsi, le B-module injectif indécomposable qui lui est associé est un B-module simple.

Conséquemment, la matrice de Cartan de B est de forme

$$\left[\begin{array}{cccc|c} & & & & c_{1,n+1} \\ & & & & c_{2,n+1} \\ & & C_A & & \vdots \\ & & & & c_{n,n+1} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dès lors, il est clair que $\det C_A = \det C_B$. □

Corollaire 4.4.3 *Soit $A = KQ/I$ une algèbre sérielle à droite à chevauchements finis de dimension globale finie et dont le carquois Q est fini. Alors* $\det C_A = 1$.

Démonstration : Les algèbres sérielles à droite peuvent être obtenues par extensions ponctuelles successives d'algèbres de Nakayama, dont le déterminant de Cartan vaut 1. □

De manière duale, on peut démontrer que le déterminant de Cartan des algèbres sérielles à gauche (qui peuvent être obtenues par coextensions ponctuelles successives d'une algèbre de Nakayama) vaut également 1.

CONCLUSION

Nous avons donc démontré dans ce mémoire que le déterminant de Cartan des algèbres sérielles à gauche ou à droite à chevauchements finis vaut 1. La raison pour laquelle nous imposons cette restriction réside en la nécessité d'avoir une relation ρ n'admettant pas de chevauchement, afin de trouver un point de départ dans le cycle et ainsi obtenir des matrices de Cartan facilement manipulables.

Il serait maintenant intéressant de généraliser notre résultat à toutes les algèbres sérielles à gauche ou à droite de dimension globale finie, sans exiger l'existence d'une telle relation dans l'idéal I. Ces algèbres existent et en voici un exemple.

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
\cdot \arrow[urr, "\sigma"] & & & & \cdot \arrow[dl, "\beta"] \\
 & \cdot \arrow[ul, "\gamma"] & & \cdot \arrow[ll, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

Si on factorise par l'idéal $I =< \alpha\beta\delta,\ \beta\delta\gamma,\ \delta\gamma\sigma\alpha >$, on obtient une algèbre de dimension globale finie mais qui n'est pas à chevauchement fini.

Afin d'utiliser la même technique de calcul explicite des matrices de Cartan, il faudrait trouver un moyen efficace pour choisir où placer le point 1 dans le cycle afin d'obtenir des matrices convenables. La généralisation aux algèbres sérielles à gauche où à droite en découlerait immédiatement. Il pourrait ensuite être utile de retrouver avec cette technique la nécessité du théorème de Burgess, Fuller, Voss, Zimmermann-Huigen [7], et de tenter ensuite d'aborder des classes plus larges d'algèbres.

Bibliographie

[1] I. Assem. *Algèbres et modules: cours et exercices.* Enseignement des mathématiques. Les Presses de l'Université d'Ottawa–Masson, Ottawa–Paris, 1997.

[2] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. Elements of Representation Theory of Associative Algebras. À paraître. Version préliminaire, Toruń, janvier 2004.

[3] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras.* Number 36 in Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University press, Cambridge, 1995.

[4] W. D. Burgess and K. R. Fuller. On Quasihereditary Rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106:321–328, 1989.

[5] W. D. Burgess and K. R. Fuller. Left Almost Serial Rings and the Cartan Determinant Conjecture. *Methods in module theory (Colorado Springs, CO) Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 140:19–328, 1992.

[6] W. D. Burgess and K. R. Fuller. The Cartan Determinant and Generalizations of Quasihereditary Rings. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 41:23–32, 1998.

[7] W. D. Burgess, K. R. Fuller, E. Voss, and B. Zimmermann-Huisgen. The Cartan Matrix as an Indicator of finite Dimension for Artinian Rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95:157–165, 1985.

[8] S. Eilenberg. Algebras of Cohomologically Finite Dimension. *Comment. Math. Helv.*, 28:310–319, 1954.

[9] K. R. Fuller. The Cartan Determinant and Global Dimension of Artinian Rings. *Contemp. Math.*, 124:51–72, 1992.

[10] K. R. Fuller and B. Zimmermann-Huisgen. On the Generalized Nakayama Conjecture and the Cartan Determinant Problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 294:679–691, 1986.

[11] C. Gauvreau. A New Proof of a Theorem of Green, Happel and Zacharia. *Ann. Sci. Math. Québec*, 21(1):83–89, 1997.

[12] E. L. Green, D. Happel, and D. Zacharia. Projective Resolutions over artin Algebras with Zero Relations. *Illinois J. Math.*, 29:180–190, 1985.

[13] K. Igusa. Cyclic Homology and the Determinant of the Cartan Matrix. *J. Pure Appl. Algebra*, 83(2):101–119, 1992.

[14] J. P. Jans and T. Nakayama. On the Dimensions of Modules and Algebras vii. *Nagoya Math. J.*, 11:67–76, 1957.

[15] T. Nakayama. Some Studies on Regular Representations, Induced Representations and Modular Representations. *Ann. of Math.*, 39:361–369, 1938.

[16] M. Saorín. Monoid Gradings on Algebras and the Cartan Determinant Conjecture. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 41(3):539–551, 1998.

[17] G. V. Wilson. The Cartan Map on Categories of Graded Modules. *J. Algebra*, 85:390–398, 1983.

[18] K. Yamagata. A Reduction Formula for the Cartan Determinant Problem for Algebras. *Arch. Math.*, 61:27–34, 1993.

[19] D. Zacharia. On the Cartan Matrix of an Artin Algebra of Global Dimension Two. *J. Algebra*, 82:353–357, 1983.