

**MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE AU  
TRAITEMENT DE L'IMAGE**

par

**FOSSO WAMBA SAMUEL**

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique  
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

**FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

Sherbrooke, Québec, Canada, décembre 2000



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

0-612-74376-4

**Canada**

Le 1 déc 2000 , le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.  
date

**Président-rapporteur: M. Jean-Marc Belley**  
**Département de mathématiques et d'informatique**

**Membre: M. Djemel Ziou**  
**Département de mathématiques et d'informatique**

**Membre: M. François Dubeau**  
**Département de mathématiques et d'informatique**

**Membre: M. Thomasz Kaczynski**  
**Département de mathématiques et d'informatique**

À mes parents, mes frères et soeurs  
pour leur amour et soutien inconditionnels  
tout au long de mes études.

# SOMMAIRE

En 1964, deux chercheurs de l'École des Mines de Paris à Fontainebleau, Georges Matheron et Jean Serra, ont publié leurs premiers travaux sur des problèmes de minéralogie et de pétrographie. À cette époque, leur principal objectif était de caractériser les propriétés physiques des minerais en examinant leur structure géométrique. Par la suite, leurs recherches ont conduit à une nouvelle approche quantitative du traitement d'images, maintenant connue sous le nom de morphologie mathématique. Depuis, de nombreux travaux ont été publiés dans le domaine et ont mené à une variété de champs d'application en traitement d'images, en reconnaissance des formes ainsi qu'en vision par ordinateur.

Dans ce mémoire dont l'objectif général est d'introduire la morphologie mathématique, nous rappelons dans un premier temps, la notion de treillis complet qui est considérée comme la structure minimale pour représenter les opérateurs morphologiques.

Dans une deuxième partie, nous introduisons la morphologie mathématique binaire qui est à la base de la théorie morphologique.

Dans le troisième chapitre, nous effectuons le passage entre la morphologie mathématique binaire et celle à niveaux de gris et ce, à travers les notions de sommet de surface et d'ombre.

Dans le quatrième chapitre, nous introduisons les opérateurs algébriques et montrons l'importance de définir les opérateurs morphologiques binaires sur un treillis complet.

Et enfin, nous définissons la notion de filtre morphologique, étudions les différentes méthodes de construction des filtres morphologiques, puis terminons par l'application d'une classe spécifique de filtres morphologiques, à savoir les filtres alternés séquentiels au filtrage d'images afin de tirer nos conclusions quant à leurs effets sur la réduction du bruit.

# REMERCIEMENTS

Je remercie le professeur François Dubeau, mon directeur de recherche. Son encadrement exemplaire, ses conseils, son soutien financier et sa grande disponibilité furent pour moi des éléments importants quant à la bonne conduite de mes projets de recherche.

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements au professeur Djemel Ziou, mon co-directeur, dont les conseil avisés et le soutien scientifique m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens également à remercier tous mes amis du Département de mathématique et d'informatique, plus précisément François Deschênes pour son aide et sa disponibilité, ainsi que ma copine, Annie Girard, pour sa présence et son amour.

Enfin, qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à mes parents, mes frères et mes soeurs. Spécialement ma soeur Bermine Medzaha et son ami Laurent Trilles qui m'ont incité et permis d'entreprendre des études supérieures.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b>	<b>iii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>v</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>vi</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>ix</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 — Notion de treillis</b>	<b>3</b>
1.1 Structure de treillis . . . . .	4
1.2 Opérateurs sur les treillis . . . . .	7
1.3 Exemples de treillis complets . . . . .	8
1.3.1 Le treillis booléen . . . . .	8
1.3.2 Le treillis des fonctions . . . . .	9
1.3.3 Le treillis des fonctions semi-continues supérieurement . . . . .	10

<b>CHAPITRE 2 — Morphologie mathématique binaire</b>	<b>13</b>
2.1 Notion d'images . . . . .	14
2.1.1 L'addition de Minkowski . . . . .	14
2.1.2 La soustraction de Minkowski . . . . .	15
2.1.3 L'élément structurant . . . . .	17
2.2 La dilatation morphologique binaire . . . . .	18
2.3 Dilatation morphologique binaire, érosion morphologique binaire et dualité	21
2.4 Ouverture morphologique binaire . . . . .	23
2.5 Ouverture morphologique binaire, fermeture morphologique binaire et dualité . . . . .	26
<b>CHAPITRE 3 — Morphologie mathématique à niveaux de gris</b>	<b>30</b>
3.1 Notion de sommet de surface . . . . .	31
3.2 Dilatation morphologique à niveaux de gris . . . . .	34
3.3 Dilatation morphologique à niveaux de gris, érosion morphologique à niveaux de gris et dualité . . . . .	36
3.4 Ouverture et fermeture morphologiques à niveaux de gris . . . . .	38
3.5 Le gradient morphologique . . . . .	41
<b>CHAPITRE 4 — Treillis et opérateurs morphologiques binaires</b>	<b>45</b>
4.1 Dilatation algébrique . . . . .	46
4.2 Érosion algébrique . . . . .	47

4.3	Illustration dans le cas des opérateurs morphologiques binaires . . . . .	48
4.4	Notion d'adjonction . . . . .	49
4.5	Ouvertures et fermetures algébriques . . . . .	53
<b>CHAPITRE 5 — Filtres morphologiques</b>		<b>55</b>
5.1	Les filtres dérivés . . . . .	56
5.2	Les quatre enveloppes . . . . .	59
5.3	Filtres Alternés Séquentiels . . . . .	60
5.4	Utilisation des FAS pour la réduction du bruit . . . . .	62
5.5	Résultats expérimentaux et commentaires . . . . .	64
<b>CHAPITRE 6 — Conclusion</b>		<b>78</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>78</b>

# LISTE DES FIGURES

1.1	Une fonction $f$ et son ombre $U(f)$ . . . . .	10
1.2	Exemple de passage de fonctions aux ensembles . . . . .	12
2.1	Dilatation morphologique binaire d'une image $X$ par un élément structurant $B$ contenant l'origine. . . . .	20
2.2	Dilatation morphologique binaire d'une image $X$ par un élément structurant $B$ ne contenant pas l'origine. . . . .	20
2.3	Érosion morphologique binaire d'une image $X$ par un élément structurant $B$ contenant l'origine. . . . .	22
2.4	Érosion morphologique binaire d'une image $X$ par un élément structurant $B$ ne contenant pas l'origine. . . . .	23
2.5	Ouverture morphologique binaire d'une image $X$ par un élément structurant $B$ . . . . .	26
2.6	Fermeture morphologique binaire d'une image $X$ par un élément structurant $B$ . . . . .	29
3.1	Le sommet d'une surface $A$ . . . . .	31

3.2	Dilatation morphologique à niveaux de gris d'une image. . . . .	35
3.3	Érosion morphologique à niveaux de gris d'une image. . . . .	38
3.4	Ouverture morphologique à niveaux de gris d'une image. . . . .	40
3.5	Fermeture morphologique à niveaux de gris d'une image. . . . .	41
3.6	Gradient morphologique à niveaux de gris d'une image. . . . .	42
3.7	Gradient interne d'une image. . . . .	43
3.8	Gradient externe d'une image. . . . .	44
5.1	Image originale. . . . .	66
5.2	Image bruitée. . . . .	66
5.3	Image filtrée par une ouverture morphologique à niveaux de gris. . . . .	67
5.4	Image filtrée par une fermeture morphologique à niveaux de gris. . . . .	67
5.5	Image filtrée par un filtre FAS2. . . . .	68
5.6	Image filtrée par un filtre FAS3. . . . .	68
5.7	Image filtrée par un filtre FAS4. . . . .	69
5.8	Image extraite de l'image originale contenant des contours de type lignes. . . . .	70
5.9	Image de gradient de l'image extraite de l'image originale contenant des contours de type lignes. . . . .	70
5.10	Image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type lignes. . . . .	71
5.11	Image de gradient de l'image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type lignes. . . . .	71

5.12 Image de gradient de l'image extraite de l'ouverture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type lignes. . . . .	72
5.13 Image de gradient de l'image extraite de la fermeture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type lignes. . . . .	72
5.14 Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS2 contenant des contours de type lignes. . . . .	73
5.15 Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS3 contenant des contours de type lignes. . . . .	73
5.16 Image de gradient image extraite de l'image FAS4 contenant des contours de type lignes. . . . .	73
5.17 Image extraite de l'image originale contenant des contours de type marches.	74
5.18 Image de gradient de l'image extraite de l'image originale contenant des contours de type marches. . . . .	74
5.19 Image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type marches.	75
5.20 Image de gradient de l'image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type marches. . . . .	75
5.21 Image de gradient de l'image extraite de l'ouverture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type marches. . . . .	76
5.22 Image de gradient de l'image extraite de la fermeture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type marches. . . . .	76
5.23 Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS2 contenant des contours de type marches. . . . .	77

5.24 Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS3 contenant des contours de type marches. . . . .	77
5.25 Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS4 contenant des contours de type marches. . . . .	77

# INTRODUCTION

La morphologie mathématique est une science qui a pris forme à la fin des années soixante à l'École Nationale des Mines de Paris, les pionniers en la matière étant G. Matheron [3] et J. Serra [10]. En fait, la morphologie mathématique est une théorie du traitement d'images basée sur la théorie des ensembles, la géométrie ainsi que la topologie [4], [7] et [18]. Fournissant au domaine du traitement d'images une approche basée sur la forme, les opérations qu'elle propose permettent de simplifier, d'améliorer, d'extraire ou de décrire les données d'une image. Les opérations de base de la morphologie mathématique, à savoir la dilatation et l'érosion, furent également introduites par Matheron et Serra. Initialement, elles furent définies comme addition et soustraction de Minkowski sur les sous-ensembles de l'espace euclidien, utilisant les translations, les unions et les intersections. D'autre part, avec Sternberg [21] et [16], elles furent ensuite généralisées à l'ensemble des images à niveaux de gris et ce, au moyen des notions de sommet de surface et d'ombre. Dès lors, une recherche intense a débuté dans le domaine et a engendré une grande variété d'applications en traitement d'images, en reconnaissance des formes ainsi qu'en vision par ordinateur, attirant les chercheurs des horizons aussi variés que la biologie, la géologie, l'informatique, la physique et les mathématiques. La morphologie mathématique repose sur le principe qui consiste à comparer une structure inconnue qui est notre image à un ensemble de formes dont nous maîtrisons toutes les caractéristiques,

ces dernières étant appelées les éléments structurants. Enfin, il importe de mentionner que cette comparaison se fait au moyen des relations booléennes, de l'intersection ou de l'inclusion. Dans cette optique, les images et les les éléments structurants sont considérés comme étant des ensembles.

Le présent travail se veut une introduction à la morphologie mathématique ainsi qu'une application au filtrage d'images.

Ce mémoire est structuré comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous rappelons la notion de treillis complet et donnons quelques propriétés à propos de ceux-ci, plus particulièrement celles concernant la dualité, pour ensuite terminer par des exemples.
- Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la morphologie mathématique binaire qui est considérée comme étant la base de la théorie morphologique.
- Dans le troisième chapitre, nous effectuons le passage entre la morphologie mathématique binaire et celle à niveaux de gris et ce, à travers les notions de sommet de surface et d'ombre.
- Dans le quatrième chapitre, nous introduisons les opérateurs algébriques et montrons l'importance de définir les opérateurs morphologiques binaires sur un treillis complet.
- Dans le dernier chapitre, nous définissons la notion de filtre morphologique, étudions les différentes méthodes de construction des filtres et terminons par quelques applications au filtrage d'images.

Pour nos exemples, il est à noter que nous avons utilisé la librairie NVLib développée par le groupe Moivre du département de mathématiques et informatique de l'Université de Sherbrooke.

# CHAPITRE 1

## Notion de treillis

### Introduction

L'idée principale en analyse d'images linéaires est d'utiliser des transformations qui commutent avec l'addition et qui demeurent inversibles. En morphologie mathématique, les transformations utilisées privilégient les transformations de type ensembliste qui commutent avec le supremum et l'infimum. Par ailleurs, de nombreux travaux ont démontré que le cadre des treillis complets est le cadre adapté ainsi que la structure minimale permettant une bonne modélisation des transformations, opérant sur les images binaires ou sur les images à niveaux de gris [5], [11].

Dans ce chapitre, nous allons donc rappeler les différentes définitions relatives aux treillis [2], pour ensuite introduire la notion de treillis complets et en donner quelques exemples.

## 1.1 Structure de treillis

Une relation définie sur un ensemble  $\mathcal{L}$ , notée  $\leq$ , qui possède les propriétés suivantes :

1. Réflexivité:  $x \leq x, \forall x \in \mathcal{L}$ ;
2. Anti-symétrie:  $x \leq y$  et  $y \leq x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathcal{L}$ ;
3. Transitivité:  $x \leq y$  et  $y \leq z \Rightarrow x \leq z, \forall x, y, z \in \mathcal{L}$ .

est appelée une *relation d'ordre*. Tout ensemble muni d'une relation d'ordre  $\leq$  est dit *partiellement ordonné* et est noté  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Deux éléments  $x$  et  $y$  d'un ensemble partiellement ordonné sont dits *comparables* si nous avons  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ . Soit  $X$  un sous-ensemble d'un ensemble partiellement ordonné  $\mathcal{L}$ . Nous définissons deux opérations binaires sur  $X$  à l'aide des notions de *borne supérieure* et de *borne inférieure*. Un élément  $m \in \mathcal{L}$  est appelé *minorant* de  $X$  si  $m \leq x$  pour tout  $x \in X$ . De même, un élément  $M \in \mathcal{L}$  est appelé *majorant* de  $X$  si  $x \leq M$  pour tout  $x \in X$ . Nous dirons alors que  $m$  (resp.  $M$ ) est la *borne inférieure* (resp. *supérieure*) de  $X$  s'il est le plus grand (resp. petit) des minorants (resp. majorants) de  $X$ . Un minorant (resp. majorant) de  $X$  qui est lui-même dans  $X$  est appelé *le minimum* (resp. *le maximum*) de  $X$ . Le minimum (resp. maximum) est unique lorsqu'il existe. Un élément  $a \in X$  est dit *minimal* dans  $X$  si  $x \not\leq a$  pour tout  $x \in X$ . De même un élément  $a \in X$  est dit *maximal* dans  $X$  si  $a \not\leq x$  pour tout  $x \in X$ . Un ensemble  $\mathcal{L}$  partiellement ordonné dans lequel deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  possèdent à la fois une borne supérieure notée  $x \vee y$  et une borne inférieure notée  $x \wedge y$  est appelé *treillis*.

Un ensemble  $\mathcal{L}$  partiellement ordonné dans lequel toute famille  $\{x_i\}_{i \in I}$  finie ou non de  $\mathcal{L}$  possède une borne inférieure et une borne supérieure est dit *treillis complet*.

Dans un treillis complet, nous noterons la borne inférieure par  $m = \inf_{\mathcal{L}} X = \inf X = \wedge X$  et la borne supérieure par  $M = \sup_{\mathcal{L}} X = \sup X = \vee X$  s'il n'y a aucune confusion possible.

**Principe de dualité.** Si  $(\mathcal{L}, \leq)$  est un treillis, la relation  $\leq'$  définie par  $x \leq' y$  si et seulement si  $y \leq x$  pour tout  $x$  et  $y \in \mathcal{L}$  est également une relation d'ordre sur  $\mathcal{L}$  et  $(\mathcal{L}, \leq')$  est un treillis. Le treillis  $(\mathcal{L}, \leq')$  est appelé *treillis dual* du treillis  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Nous remarquons alors que  $\vee' = \wedge$  et  $\wedge' = \vee$ .

**Proposition 1.1.1** Si  $\mathcal{L}$  un treillis et  $x, y, z \in \mathcal{L}$  alors, nous avons toujours les propriétés suivantes :

$$(P1) \quad x \vee x = x \wedge x = x ;$$

$$(P2) \quad x \vee y = y \vee x \text{ et } x \wedge y = y \wedge x ;$$

$$(P3) \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \text{ et } x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z ;$$

$$(P4) \text{ Absorption: } \quad x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x ;$$

$$(P5) \text{ Consistance: } \quad x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x ;$$

(P6) *Inégalités de distributivité :*

$$(i) \quad x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) ;$$

$$(ii) \quad x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

$$(P7) \text{ Inégalité modulaire: } \quad x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z.$$

Si dans (P6) (resp. (P7)) nous avons des égalités, nous parlons alors de treillis *distributif* (resp. *modulaire*).

**Démonstration** (P1) Nous avons  $x \vee x = x$  car  $x$  est le plus grand élément de  $\{x, x\}$  et  $x \wedge x = x$  car  $x$  est le plus petit élément de  $\{x, x\}$ .

(P2)  $x \vee y = y \vee x$  car les majorants de  $\{x, y\}$  sont ceux de  $\{y, x\}$ . De même  $x \wedge y = y \wedge x$  car les minorants de  $\{x, y\}$  sont ceux de  $\{y, x\}$ .

(P3) Nous avons  $x \wedge y \leq x$ ,  $x \wedge y \leq y$  et  $z \leq z$  aussi  $(x \wedge y) \wedge z \leq (x \wedge y)$  et  $(x \wedge y) \wedge z \leq z$  ainsi,  $(x \wedge y) \wedge z \leq x$  et  $(x \wedge y) \wedge z \leq y \wedge z$ , donc  $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$ . Nous avons aussi,  $x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge y$  et  $x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge z \leq z$ , donc  $x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z$  nous obtenons  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ . L'égalité  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$  s'obtient par dualité.

(P4) Nous avons  $x \leq x \vee (x \wedge y)$ . Comme  $x \wedge y \leq x$ , nous obtenons  $x \vee (x \wedge y) \leq x$ , ainsi  $x = x \vee (x \wedge y)$ . L'égalité  $x = x \wedge (x \vee y)$  s'obtient par dualité.

(P5) Supposons  $x \leq y$ . Nous avons  $x \leq y$  et  $y \leq y$ , donc  $x \vee y \leq y$ . Par ailleurs,  $y \leq x \vee y$  donc  $x \vee y = y$ . Réciproquement si  $x \vee y = y$  alors,  $y$  est un majorant de  $\{x, y\}$  ainsi  $x \leq y$ . L'autre équivalence s'obtient par dualité.

(P6) Nous avons  $x \leq x \vee y$  et  $x \leq x \vee z$ , donc  $x \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ . De même  $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$  et  $y \wedge z \leq z \leq x \vee z$ , ainsi  $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ . donc  $(x \vee z) \wedge (x \vee y)$  est un majorant de  $x$  et de  $y \wedge z$  ce qui donne la première inégalité. La deuxième inégalité s'obtient par dualité.

(P7) Nous avons  $x \leq x \vee y$  et  $x \leq z$  ainsi  $x \leq (x \vee y) \wedge z$ . De même  $y \wedge z \leq y \leq x \vee y$  et  $y \wedge z \leq z$ . Nous obtenons donc  $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$ . Ainsi  $(x \vee y) \wedge z$  est un majorant de  $x$  et de  $y \wedge z$ . Donc  $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ . ■

**Proposition 1.1.2** Dans tout treillis  $\mathcal{L}$ , les égalités suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$$

$$(ii) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$$

**Démonstration** Nous allons démontrer que (i) implique (ii). Soient  $x, y, z \in \mathcal{L}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{par (i)} \\ &= x \vee (z \wedge (x \vee y)) && \text{par (P3)} \\ &= x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) && \text{par (i)} \\ &= (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) && \text{par (P3)} \\ &= x \vee (z \wedge y) && \text{par (P3)} \\ &= x \vee (y \wedge z) && \text{par (P2)} \end{aligned}$$

Donc  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$  ce qui donne l'implication. L'autre implication s'obtiendra par dualité. ■

Soit  $\mathcal{L}$  un treillis possédant un élément  $0$  tel que  $0 = \text{Inf}\mathcal{L}$  et un élément  $I$  tel que  $I = \text{Sup}\mathcal{L}$ . Soit  $x \in \mathcal{L}$ , nous appelons *complément* de  $x$  noté  $\bar{x}$ , un élément de  $\mathcal{L}$  tel que :  $x \vee \bar{x} = I$  et  $x \wedge \bar{x} = 0$ . Le complément de  $I$  est  $0$  et inversement.

Un treillis sera donc dit *complémenté* si tous ses éléments possèdent au moins un complément.

**Théorème 1.1.3** *Dans un treillis distributif  $(\mathcal{L}, \leq)$ , quand le complément  $\bar{x}$  d'un élément  $x \in \mathcal{L}$  existe il est unique.*

**Démonstration** Supposons que  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  sont deux compléments de  $x$  alors  $\bar{x}_1 = \bar{x}_1 \wedge I = \bar{x}_1 \wedge (x \vee \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 \wedge x) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$  donc  $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$ . De même nous montrons que  $\bar{x}_2 \leq \bar{x}_1$ . Donc  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$  ■

Un treillis  $(\mathcal{L}, \leq)$  distributif et complémenté est appelé treillis *booléen*. Ainsi, dans un treillis booléen, chaque élément possède un et un seul complément.

**Théorème 1.1.4** *Si  $\mathcal{L}$  est un treillis booléen alors, nous avons  $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$  et  $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ .*

**Démonstration** Ces deux relations sont duales, nous pouvons donc les déduire l'une de l'autre. Vérifions que le complément (unique) de  $x \wedge y$  est bien  $\bar{x} \vee \bar{y}$ . Nous devons donc vérifier que nous avons bien  $(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = 0$  et  $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = I$ .

Nous avons  $(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = ((x \wedge y) \wedge \bar{x}) \vee ((x \wedge y) \wedge \bar{y}) = ((x \wedge \bar{x}) \wedge y) \vee (x \wedge (y \wedge \bar{y})) = (y \wedge 0) \vee (x \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$ . De même, nous avons  $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) \wedge (y \vee (\bar{x} \vee \bar{y})) = ((x \vee \bar{x}) \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee (y \vee \bar{y})) = (I \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee I) = I \wedge I = I$  donc,  $(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = 0$  et  $(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = I$  ■

## 1.2 Opérateurs sur les treillis

Soit  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis, un opérateur  $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  est dit :

1. *idempotent* si  $\psi(\psi(x)) = \psi(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$ ;

2. *extensif* si  $x \leq \psi(x) \forall x \in \mathcal{L}$ ;
3. *anti-extensif* si  $\psi(x) \leq x \forall x \in \mathcal{L}$ ;
4. *croissant* si  $x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y) \forall x, y \in \mathcal{L}$ ;
5. *décroissant* si  $x \leq y \Rightarrow \psi(y) \leq \psi(x) \forall x, y \in \mathcal{L}$ ;
6. *dual de l'opérateur  $\phi$  par rapport au complémentaire* si  $\psi(x) = (\phi(x^c))^c \forall x \in \mathcal{L}$ .

L'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  est noté  $\mathcal{O}$ . Un opérateur  $\psi$  défini sur  $(\mathcal{L}, \leq)$  est un *automorphisme* si :  $\psi(\bigvee_{j \in J} x_j) = \bigvee_{j \in J} \psi(x_j)$  et  $\psi(\bigwedge_{j \in J} x_j) = \bigwedge_{j \in J} \psi(x_j)$ . L'ensemble des automorphismes sur  $\mathcal{L}$  est noté  $\text{Aut}(\mathcal{L})$ .

Soient  $\mathcal{T} \subseteq \text{Aut}(\mathcal{L})$ ,  $\tau \in \mathcal{T}$ ,  $\eta \in \mathcal{O}$ , nous disons que :

- $\eta$  commute avec  $\tau$  ou encore que  $\eta$  est  $\tau$ -invariant si  $\eta\tau = \tau\eta$ .
- $\eta$  est  $\mathcal{T}$ -invariant si  $\eta$  commute avec tout élément de  $\mathcal{T}$ .
- $\eta$  est pseudo-invariant par rapport à  $\tau$  si  $\eta\tau = \eta$ .

## 1.3 Exemples de treillis complets

Une famille  $\mathcal{B}$  dans un treillis  $(\mathcal{L}, \leq)$  constitue une classe *sup-génératrice* lorsque tout élément  $a$  dans  $\mathcal{L}$  peut s'écrire comme :

$$a = \bigvee \{b \mid b \in \mathcal{B}, b \leq a\} \quad (1.1)$$

### 1.3.1 Le treillis booléen

Le treillis booléen formé par l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties d'un ensemble  $E$  ordonné par l'inclusion, est un treillis complet. En effet, toute partie  $\mathcal{A} = \{E_i\}_{i \in I}$  de  $\mathcal{P}(E)$  admet

comme borne inférieure l'intersection des  $E_i$  et comme borne supérieure la réunion ensembliste des  $E_i$ . Le complément ensembliste  $X^c$  de  $X$  dans  $E$  est encore appelé complémentaire et vérifie bien :  $X \cap X^c = \emptyset$  et  $X \cup X^c = E$  de plus dans  $\mathcal{P}(E)$ , le  $\vee$  et  $\wedge$  deviennent  $\cup$  et  $\cap$ . En outre, l'ensemble  $\mathcal{B}$  des singletons est une famille sup-génératrice.

### 1.3.2 Le treillis des fonctions

Dans ce qui suit, la droite des réels complétée  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  sera notée  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Soit  $E$  un ensemble quelconque et  $\Phi(E) = \{f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}\}$  l'ensemble des fonctions définies sur  $E$  à valeurs dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . Cet ensemble est alors ordonné par la relation :

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

et constitue un treillis complet où le *sup* et le *inf* sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} f = \vee f_i \iff f(x) = \sup_i f_i(x), & \forall x \in E \\ f = \wedge f_i \iff f(x) = \inf_i f_i(x), & \forall x \in E \end{cases}$$

De plus, dans l'ensemble des fonctions à valeurs positives, les fonctions impulsions  $t\chi_{\{x\}}(y)$  sont sup-génératrices ; c'est-à-dire que toute fonction  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(y) = \vee_{x \in E} f(x)\chi_{\{x\}}(y).$$

**Définition 1.3.1** Soit  $f \in \Phi(E)$ . Nous appelons sous-graphe de  $f$ , ou ombre de  $f$ , et nous notons  $SG(f)$  ou  $U(f)$  l'ensemble défini par :

$$SG(f) = U(f) = \{(x,t) \in E \times \bar{\mathbb{R}} \mid t \leq f(x)\}.$$

D'autre part, nous appelons pseudo-sous-graphe ou pseudo-ombre de  $f$ , et nous notons  $SG'(f)$  ou  $U'(f)$  l'ensemble défini par :

$$SG'(f) = U'(f) = \{(x,t) \in E \times \bar{\mathbb{R}} \mid t < f(x)\}.$$

Par ailleurs, nous dirons qu'un sous ensemble  $A \subseteq E \times \bar{\mathbb{R}}$  est une ombre si :

$$(x,y) \in A \Leftrightarrow (x,z) \in A \forall z < y.$$

Enfin, pour toute ombre  $A$ , nous lui associons son sommet  $T[A]$ , une application de  $E \rightarrow E \times \bar{\mathbb{R}}$  définie par  $T[A](x) = \sup\{y | (x,y) \in A\}$ .

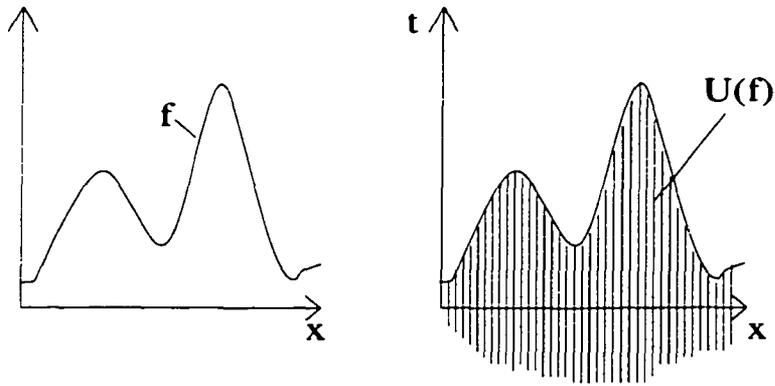


Figure 1.1 - Une fonction  $f$  et son ombre  $U(f)$  .

**Proposition 1.3.2** Si  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , alors  $T[U(f)] = f$ .

**Démonstration** Si  $y = T[U(f)](x)$ , alors  $y = \sup\{z | (x,z) \in U(f)\}$ . Ainsi  $z \leq f(x)$ , donc  $y = f(x)$ . ■

**Corollaire 1.3.3**  $U[T[U(f)]] = U[f]$ .

### 1.3.3 Le treillis des fonctions semi-continues supérieurement

Le treillis des fonctions semi-continues supérieurement (*s.c.s*) est l'un des treillis les plus utilisé en morphologie mathématique, car il nous permet d'effectuer le passage de la notion ensembliste à celle des fonctions et, réciproquement, en utilisant la notion de

sous-graphe fermé ou d'ombre fermée. Dans ce qui suit,  $E = \mathbb{R}^N$  ou  $E = \mathbb{Z}^N$ .

**Définition 1.3.4** Une application  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est dite (s.c.s) si pour tout  $y \in E$ , nous avons  $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq f(y)$ .

Nous notons par  $\Phi^{s.c.s}(E)$  l'ensemble des applications (s.c.s) sur  $E$ .

**Théorème 1.3.5** Soit  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . le  $SG(f)$  est un fermé topologique de  $E \times \bar{\mathbb{R}}$  si et seulement si  $f$  est (s.c.s). ■

Du Théorème 1.3.5 et de la définition d'un sous-graphe, nous avons  $(x,t) \in SG(f)$  si  $t \leq f(x)$ . De plus, si  $(x,t) \in SG(f)$  alors  $(x,a) \in SG(f)$  pour tout  $a < t$ . Aussi, nous pouvons reconstruire de façon unique  $f$  car  $f$  est le supremum de tous les couples  $(x,t)$  dans  $SG(f)$ . Ainsi, à toute fonction s.c.s correspond un unique sous-graphe fermé et inversement. Résumons cette remarque dans le théorème suivant.

**Théorème 1.3.6** À toute fonction  $f$  (s.c.s), est associé un unique sous-graphe fermé  $SG(f)$ . Ce sous-graphe est un ensemble  $A = SG(f)$  tel que :

- (i)  $(x,t) \in A \iff t \leq f(x)$ ;
- (ii)  $(x,t) \in A \iff (x,a) \in A \quad \forall a < t$ ;
- (iii)  $f(x) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid (x,t) \in A\}$ .

Réciproquement, soit  $A$  un ensemble fermé vérifiant (ii), il existe une unique fonction  $f$  (s.c.s) définie par (iii) telle que  $A = SG(f)$ .

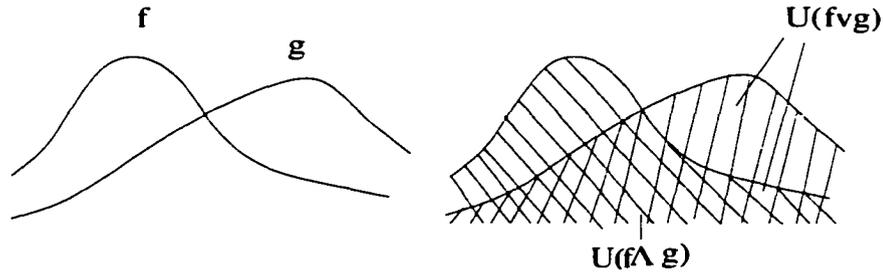


Figure 1.2 – Exemple de passage de fonctions aux ensembles .

Puisqu'une fonction *s.c.s* est exactement déterminée par son sous-graphe, l'union et l'intersection des sous-graphes vont induire deux opérations équivalentes entre des fonctions correspondantes. La figure ci-dessus montre deux fonctions  $f$  et  $g$  et leurs sous-graphes respectifs  $SG(f)$  et  $SG(g)$ . L'intersection de leurs sous-graphes est un sous-graphe correspondant à une nouvelle fonction *s.c.s* et l'union des deux sous-graphes correspond également à une nouvelle fonction *s.c.s* telle que sur la figure. Nous notons ces nouvelles fonctions par :

$$\begin{cases} (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, & \forall x \in E \\ (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, & \forall x \in E \end{cases}$$

La relation d'inclusion des sous-graphes qui est une relation d'ordre partielle va induire une relation d'ordre partielle entre les fonctions *s.c.s* par :

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

de plus:  $f \leq g \iff SG(f) \subseteq SG(g)$  et  $(\Phi^{scs}(E), \leq)$  est un treillis complet dans lequel le *supremum* et l'*infimum* sont donnés par :

$$\begin{cases} f = \vee f_i \iff SG(f) = \overline{\cup SG(f_i)} \\ f = \wedge f_i \iff SG(f) = \cap SG(f_i) \end{cases}$$

# CHAPITRE 2

## Morphologie mathématique binaire

### Introduction

Au départ, la morphologie mathématique a été conçue pour analyser des images binaires [3], [10]. Ainsi, le meilleur moyen de modéliser une image binaire (Blanc et Noir) est de le faire au moyen des ensembles. Ce chapitre est structuré comme suit : après avoir exposé la notion d'images, nous introduirons l'addition et la soustraction de Minkowski ainsi que leurs propriétés. Ensuite, nous présenterons les opérateurs de base de la morphologie mathématique, à savoir la dilatation et l'érosion morphologiques binaires, ainsi que leurs effets sur des images binaires. Dans une autre section, nous présenterons des exemples de dilatations et d'érosions morphologiques binaires. Ensuite, nous étudierons les composées élémentaires de ces deux opérateurs de base qui sont l'ouverture et la fermeture morphologiques binaires, ainsi que leurs effets sur les images binaires. Enfin, nous donnerons un

exemple d'ouverture et de fermeture morphologiques binaires.

## 2.1 Notion d'images

Un *signal* est un support qui véhicule de l'information. Nous pouvons le noter  $s(x)$  ou  $s(x,y)$  en fonction des espaces considérés. Une *image* n'est rien d'autre qu'un signal bidimensionnel  $I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dans le cas continu ou bien  $I: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$  dans le cas discret. Une *image binaire*  $f$  est une application du domaine de  $f$  notée  $\mathcal{D}_f$  à valeurs dans  $\{0,1\}$ .

Chaque point  $P(x,y)$ , appelé *pixel*, possède une valeur  $f(x,y)$  appelée *niveau de gris*. Dans le cas binaire, les pixels à valeur 1 représentent les objets dans l'image et les pixels ayant la valeur 0 représentent le fond de l'image. Nous pouvons aussi voir le problème inversement, c'est-à-dire prendre la valeur 0 pour les objets et 1 pour le fond de l'image. La morphologie mathématique traite donc les images comme des ensembles. Ainsi, nous représentons une image binaire par un ensemble  $X$  qui correspond à l'ensemble des positions dont la valeur de niveau de gris est 1.

### 2.1.1 L'addition de Minkowski

Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Le *translaté* de  $A$  au point  $t$  est l'ensemble, noté  $A_t$ , défini par :

$$A_t = \{a + t \mid a \in A\} = t + A.$$

L'*addition de Minkowski*, notée  $\oplus$ , est définie par :

$$A \oplus B = \{x \in E \mid x = a + b, a \in A, b \in B\} = \cup_{a \in A} (a + B). \quad (2.1)$$

**Proposition 2.1.1** *L'addition de Minkowski a les propriétés suivantes :*

Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

1. *La croissance* :  $A \subseteq B \Rightarrow A \oplus C \subseteq B \oplus C$ .
2. *La commutativité* :  $A \oplus B = B \oplus A$ .
3. *L'associativité* :  $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ .
4. *La distributivité par rapport à la réunion d'ensembles* :  
 $(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$ .
5. *L'invariance par translation* :  $A_h \oplus B = (A \oplus B)_h = A \oplus B_h$ .

### Démonstration

1. Supposons  $A \subseteq B$ . Si  $x \in A \oplus C$  alors,  $x = a + c$ ,  $a \in A$ ,  $c \in C$ . Or  $A \subseteq B$ , ainsi  $x = a + c$ ,  $a \in B$ ,  $c \in C$ . Donc  $x \in B \oplus C$ .
2. La preuve vient de la commutativité de l'addition sur  $E$ .
3. La preuve vient de l'associativité de l'addition sur  $E$ .
4.  $(A \cup B) \oplus C = \cup_{x \in A \cup B} (C_x) = [\cup_{x \in A} (C_x)] \cup [\cup_{x \in B} (C_x)] = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$ .
5. Nous avons  $A_h \oplus B = \cup_{x \in A_h} B + x = \cup_{a \in A} (B + a + h) = (A \oplus B)_h = A \oplus B_h$  ■

## 2.1.2 La soustraction de Minkowski

Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$  et  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

La *réflexion* de  $A$  est l'ensemble, noté  $\check{A}$ , défini par :

$$\check{A} = \{-a \mid a \in A\} = -A.$$

La *soustraction de Minkowski*, notée  $\ominus$ , est définie par :

$$A \ominus B = \{x \in E \mid \forall b \in B, \exists a \in A, x = a - b\} = \{x \in E \mid x + B \subseteq A\}. \quad (2.2)$$

**Proposition 2.1.2** *L'addition et la soustraction de Minkowski sont liées comme suit par dualité:  $A \ominus B = (A^c \oplus \check{B})^c$ .*

**Démonstration** Nous avons :

$$\begin{aligned}
 y \notin A \ominus B &\iff \exists b \in B \text{ tel que } y + b \notin A \\
 &\iff \exists b \in B \text{ tel que } y + b \in A^c \\
 &\iff \exists b \in B \text{ tel que } y \in (A^c)_{-b} \\
 &\iff y \in \cup_{b \in B} (A^c)_{-b} \\
 &\iff y \in \cup_{b \in \check{B}} (A^c)_b \\
 &\iff y \in (A^c \oplus \check{B})
 \end{aligned}$$

Donc  $A \ominus B = (A^c \oplus \check{B})^c$  ■

**Proposition 2.1.3** *La soustraction de Minkowski a les propriétés suivantes :*

Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

1. *La croissance:  $A \subseteq B \Rightarrow A \ominus C \subseteq B \ominus C$ .*
2. *Nous avons:  $A \subseteq B \Rightarrow C \ominus B \subseteq C \ominus A$ .*
3. *Nous avons:  $A \ominus B = \cap_{b \in B} A_{-b} = \cap_{b \in B} (A - b)$ .*
4. *Distributivité par rapport à l'intersection d'ensembles :*  
 $(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$ .
5. *Non associativité:  $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$ .*
6. *L'invariance par translation:  $A_h \ominus B = (A \ominus B)_h$ . Par ailleurs, nous avons*  
 $(A \ominus B)_h = (A \ominus B)_{-h}$ .

**Démonstration**

1. Supposons  $A \subseteq B$ . Si  $x \in A \ominus C$  alors,  $x + c \in A$  pour tout  $c \in C$ . Or  $A \subseteq B$ , ainsi  $x + c \in B$  pour tout  $c \in C$ . Donc  $x \in B \ominus C$ .
2. Supposons  $A \subseteq B$ . Si  $x \in C \ominus B$  alors,  $x + b \in C$  pour tout  $b \in B$ . Or  $A \subseteq B$ , ainsi

$x + b \in C$  pour tout  $b \in A$ . Donc  $x \in C \ominus A$ .

3. Nous avons :

$$\begin{aligned} y \in A \ominus B &\iff y + b \in A \forall b \in B \\ &\iff y \in A_{-b} \forall b \in B \\ &\iff y \in \bigcap_{b \in B} A_{-b} \end{aligned}$$

Donc  $A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$ .

4. Nous avons  $(A \cap B) \ominus C = ((A \cap B)^c \oplus \check{C})^c = ((A^c \cup B^c) \oplus \check{C})^c = ((A^c \oplus \check{C}) \cup (B^c \oplus \check{C}))^c = ((A \ominus C)^c \cup (B \ominus C)^c) = (A \ominus C) \cap (B \ominus C)$ .

5. Nous avons  $(A \ominus B) \ominus C = \bigcap_{c \in C} (A \ominus B)_{-c} = \bigcap_{c \in C} (\bigcap_{b \in B} A_{-b})_{-c} = \bigcap_{c \in C, b \in B} A_{-(c+b)} = \bigcap_{h \in C \oplus B} A_{-h} = A \ominus (C \oplus B) = A \ominus (B \oplus C)$

6. Nous avons  $A_h \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A_h - b) = \bigcap_{b \in B} (A + h - b) = \bigcap_{b \in B} (A - b) + h = (A \ominus B)_h$ .

Par ailleurs,  $A \ominus B_h = \bigcap_{u \in B_h} A_{-u} = \bigcap_{b \in B} A_{-b-h} = (\bigcap_{b \in B} A_{-b})_{-h} = (A \ominus B)_{-h}$ . ■

### 2.1.3 L'élément structurant

Un élément structurant, que nous noterons  $B$ , est un ensemble dont les caractéristiques sont connues et qui est utilisé pour sonder l'image à étudier. En fait, au cours d'une transformation morphologique, l'élément structurant est déplacé à travers l'image de manière à ce que son origine soit, tour à tour, localisée sur tous les pixels de l'image. C'est cette interaction avec l'image qui nous donnera le résultat d'une transformation morphologique. La forme et la taille d'un élément structurant peuvent être quelconques selon le type de transformation morphologique souhaitée. Mais en pratique, la taille et la forme de l'élément structurant dépendent de la structure des objets présents dans l'image à étudier. Par exemple, les éléments structurants linéaires seraient adaptés pour une extraction des objets linéaires dans l'image. En plus de la taille et la structure de

l'élément structurant, nous pouvons lui associer une orientation spécifique pendant une transformation morphologique. Les éléments structurants les plus utilisés sont carrés ou hexagonaux.

## 2.2 La dilatation morphologique binaire

Les deux opérations de base de la morphologie mathématique sont la *dilatation morphologique binaire* et l'*érosion morphologique binaire* [10] [5]. En fait, ce sont des opérateurs locaux puisqu'il s'agit de tester avec des opérateurs booléens un ensemble qui est une image avec un autre ensemble de géométrie connue, appelée *élément structurant*.

Soient  $X$  une image binaire et  $B$  un élément structurant. La *dilatation morphologique binaire* de  $X$  par  $B$ , notée  $\delta(X; B)$ , est définie par :

$$\delta(X; B) = X \oplus B \quad (2.3)$$

**Proposition 2.2.1** *La dilatation morphologique binaire a les propriétés suivantes :*

Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

1. *La croissance* :  $A \subseteq B \implies \delta(A; C) \subseteq \delta(B; C)$ .
2. *La commutativité* :  $\delta(A; B) = \delta(B; A)$ .
3. *L'associativité* :  $\delta(\delta(A; B); C) = \delta(A; \delta(B; C))$ .
4. *La distributivité par rapport à la réunion d'ensembles* :  
 $\delta(A \cup B; C) = \delta(A; C) \cup \delta(B; C)$ .
5. *L'invariance par translation* :  $\delta(A_h; B) = \delta(A; B)_h$
6. *L'invariance par rapport au translaté de l'élément structurant* :  $\delta(A; B_h) = \delta(A; B)_h$ .

**Démonstration** Ce sont des conséquences directes des propriétés de l'addition de Minkowski. ■

**Proposition 2.2.2** *Nous avons :*

$$\delta(X; B) = \{z \in E \mid \tilde{B}_z \cap X \neq \emptyset\} \quad (2.4)$$

**Démonstration** Nous avons :

$$\begin{aligned} \delta(X; B) &= X \oplus B \\ &= \cup_{x \in X} B_x \\ &= \cup_{x \in X} (x + B) \\ &= \{z \mid \exists x \in X, \exists b \in B, z = x + b\} \\ &= \{z \mid \exists x \in X, \exists b \in B, z - b = x\} \\ &= \{z \mid (-B)_z \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

et donc  $\delta(X; B) = \{z \mid \tilde{B}_z \cap X \neq \emptyset\}$  ■

La dilatation morphologique binaire d'une image par un disque a pour effets de :

- connecter les objets quand ils sont assez proches ;
- combler les trous étroits présents dans les objets ;
- élargir les objets d'une taille correspondant au rayon du disque.

**Exemple 2.2.3** Considérons  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $X = \{(0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0)\}$  et  $B = \{(0,0), (0,1)\}$ . Alors  $X \oplus B = \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,0), (0,2), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ .

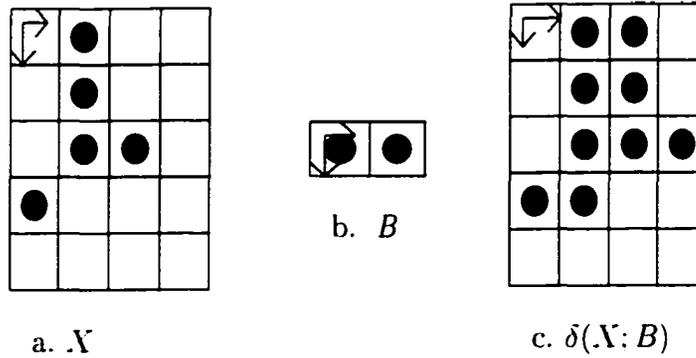


Figure 2.1 – Dilatation morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$  contenant l'origine.

**Exemple 2.2.4** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $X = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2)\}$  et  $B = \{(0, -1), (0,1)\}$ . Alors  $X \oplus B = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3)\}$ . Nous remarquons que dans ce cas, le résultat n'a aucun point en commun avec  $X$ .

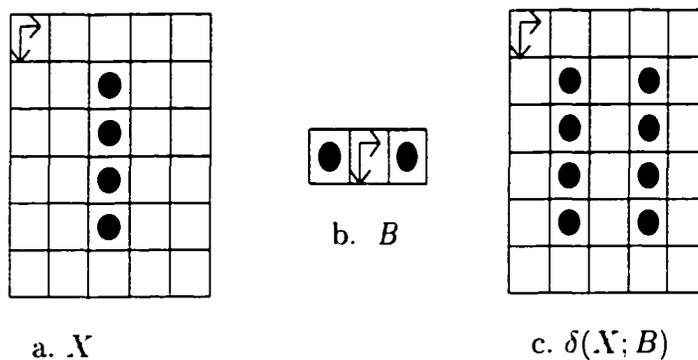


Figure 2.2 – Dilatation morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$  ne contenant pas l'origine.

## 2.3 Dilatation morphologique binaire, érosion morphologique binaire et dualité

En fait, le principe de dualité consiste à faire agir les transformations sur le complémentaire des ensembles. Ce principe, bien que très simple, est fondamental en morphologie mathématique.

L'érosion morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$ , notée  $\varepsilon(X; B)$ , est définie par :

$$\varepsilon(X; B) = X \ominus B \quad (2.5)$$

**Proposition 2.3.1** *L'érosion morphologique binaire a les propriétés suivantes :*

Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

1. *La croissance* :  $A \subseteq B \Rightarrow \varepsilon(A; C) \subseteq \varepsilon(B; C)$ .
2. *Nous avons* :  $A \subseteq B \Rightarrow \varepsilon(C; B) \subseteq \varepsilon(C; A)$ .
3. *Nous avons* :  $\varepsilon(A; B) = \bigcap_{b \in B} A_{-b} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$ .
4. *Distributivité par rapport à l'intersection d'ensembles* :  
 $\varepsilon((A \cap B); C) = \varepsilon(A; C) \cap \varepsilon(B; C)$ .
5. *Non associativité* :  $\varepsilon(\varepsilon(A; B); C) = \varepsilon(A; \delta(B; C))$ .
6. *L'invariance par translation* :  $\varepsilon(A_h; B) = \varepsilon(A; B)_h$ . Par ailleurs, Nous avons  
 $\varepsilon(A; B_h) = \varepsilon(A; B)_{-h}$ .

**Démonstration** Ce sont des conséquences directes des propriétés de la soustraction de Minkowski. ■

De la dualité entre l'addition de Minkowski et la soustraction de Minkowski va découler

une relation de dualité entre la dilatation morphologique binaire et l'érosion morphologique binaire.

**Proposition 2.3.2** *La dilatation morphologique binaire et l'érosion morphologique binaire sont reliées comme suit par dualité :  $\varepsilon(X; B) = (\delta(X^c; \check{B}))^c$ .*

**Démonstration** La preuve vient de la Proposition 2.1.2. ■

L'érosion morphologique binaire d'une image par un disque a pour effets de :

- séparer les objets au niveau de leurs étranglements ;
- éliminer les objets trop étroits ne contenant pas le disque ;
- rétrécir les objets d'une taille correspondante au rayon du disque.

**Exemple 2.3.3** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ .  $X = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$  et  $B = \{(0,0), (0,1)\}$ . Alors  $X \ominus B = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ .

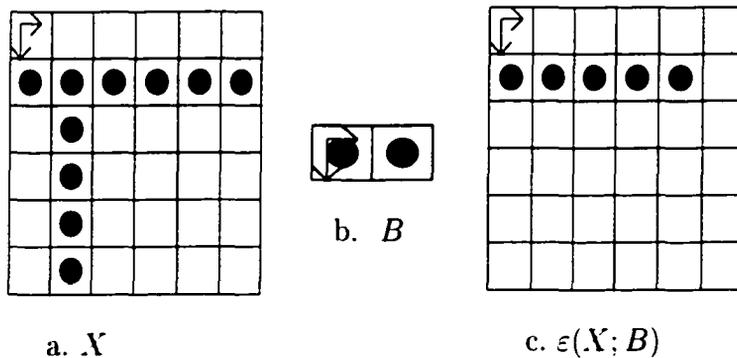


Figure 2.3 - Érosion morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$  contenant l'origine.

**Exemple 2.3.4** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $X = \{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(0,4),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(4,1),(4,3),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$  et  $B = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(1,1),(1,0),(1,-1),(0,-1)\}$ . Alors  $X \ominus B = \{(2,2),(4,2)\}$ . Nous remarquons que dans ce cas, le résultat n'a aucun point en commun avec  $X$ .

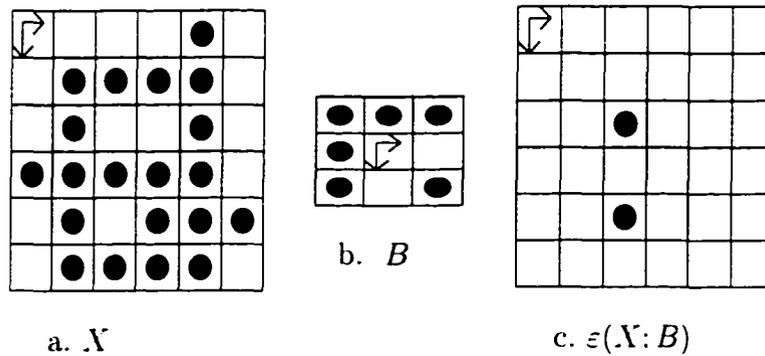


Figure 2.4 - Érosion morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$  ne contenant pas l'origine.

## 2.4 Ouverture morphologique binaire

La dilatation morphologique binaire d'une image initialement érodée par le même élément structurant ne nous permet pas, en général, de la reconstituer. En effet, il n'existe pas de transformation inverse à l'érosion, ceci étant dû au fait que les opérateurs morphologiques sont non linéaires. En fait, chaque opération enlève un certain nombre d'informations et il n'existe aucun moyen de les reconstituer. La recherche d'un opérateur permettant de retrouver le maximum d'informations perdues par une érosion morphologique binaire va nous conduire à la définition d'une ouverture morphologique binaire ayant de meilleures propriétés de stabilité, telles que l'idempotence. Notons que cette dernière est à la base

du filtrage morphologique [6].

Soient  $X$  une image et  $B$  un élément structurant. L'ouverture morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$ , notée  $\gamma(X; B)$  ou  $X \circ B$ , est une érosion morphologique suivie d'une dilatation morphologique de  $X$  par  $B$  c'est-à-dire:

$$\gamma(X; B) = \delta(\varepsilon(X; B); B) = (X \ominus B) \oplus B = X \circ B \quad (2.6)$$

**Théorème 2.4.1** *Si  $X$  est une image et  $B$  est un élément structurant, alors :*

$$\gamma(X; B) = \cup\{t + B \mid t \in E \text{ et } t + B \subseteq X\} \quad (2.7)$$

**Démonstration** Nous avons :

$$\begin{aligned} x \in \gamma(X; B) &\iff x \in (X \ominus B) \oplus B \\ &\iff x \in \cup_{t \in X \ominus B} B_t \\ &\iff \exists t \in X \ominus B \text{ tel que } x \in B_t \\ &\iff \exists t \in E \text{ tel que } B_t \subseteq X \text{ et } x \in B_t \\ &\iff x \in \cup\{t + B \mid t \in E \text{ et } t + B \subseteq X\} \end{aligned}$$

Donc  $\gamma(X; B) = \cup\{t + B \mid t \in E \text{ et } t + B \subseteq X\}$  ■

**Proposition 2.4.2** *L'ouverture morphologique binaire a les propriétés suivantes :*

*Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$*

1. *La croissance :  $A \subseteq B \Rightarrow \gamma(A; C) \subseteq \gamma(B; C)$ .*
2. *L'anti-extensivité :  $\gamma(X; B) \subseteq X$ .*

**Démonstration** Elle est croissante comme composée de deux opérateurs croissants.

L'anti-extensivité de l'ouverture morphologique vient du Théorème 2.4.1. ■

**Proposition 2.4.3** *L'ouverture morphologique binaire est pseudo-invariante par rapport au translaté de l'élément structurant :  $\gamma(X; B_h) = \gamma(X; B)$ .*

**Démonstration** Nous avons  $\gamma(X; B_h) = (X \ominus B_h) \oplus B_h = (X \ominus B)_{-h} \oplus B_h = ((X \ominus B) \oplus B)_{-h+h} = ((X \ominus B) \oplus B) = \gamma(X; B)$ . ■

**Proposition 2.4.4** *Toute image  $X$  dilatée par un élément structurant  $B$  est invariante sous toute ouverture morphologique binaire par  $B$  :  $\gamma((X \oplus B); B) = X \oplus B$ .*

**Démonstration** Nous avons  $(X \oplus B) \circ B \subseteq X \oplus B$  car l'ouverture morphologique binaire est anti-extensive. Soient  $x \in X$ ,  $b \in B$  alors  $x + b \in X \oplus B$  et  $x \in (X \oplus B) \ominus B$ . Ainsi,  $X \subseteq (X \oplus B) \ominus B$ .

Or, si  $X \subseteq (X \oplus B) \ominus B$ , alors  $X \oplus B \subseteq ((X \oplus B) \ominus B) \oplus B = (X \oplus B) \circ B$ . Ainsi  $\gamma((X \oplus B); B) = X \oplus B$ . ■

**Proposition 2.4.5** *L'ouverture morphologique binaire est idempotente :*

$$\gamma(\gamma(X; B); B) = \gamma(X; B).$$

**Démonstration** En remplaçant  $X$  par  $X \oplus B$  dans la Proposition 2.4.4, nous obtenons  $\gamma((X \oplus B) \oplus B; B) = (X \oplus B) \oplus B = \gamma(X; B)$  ■

L'ouverture morphologique binaire d'une image par un disque a pour effets de :

- filtrer les contours dans l'image ;
- éliminer les particules trop étroites présentes dans l'image ;
- séparer en plusieurs composantes connexes les particules présentant un étranglement assez long et étroit.

**Exemple 2.4.6** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $X = \{(2,1), (3,1), (4,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,4)\}$  et  $B = \{(1,0), (1,1)\}$ . Alors  $\gamma(X; B) = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$ . Nous remarquons que tous les éléments de l'ouverture morphologique de  $X$  sont encore des éléments de  $X$ .

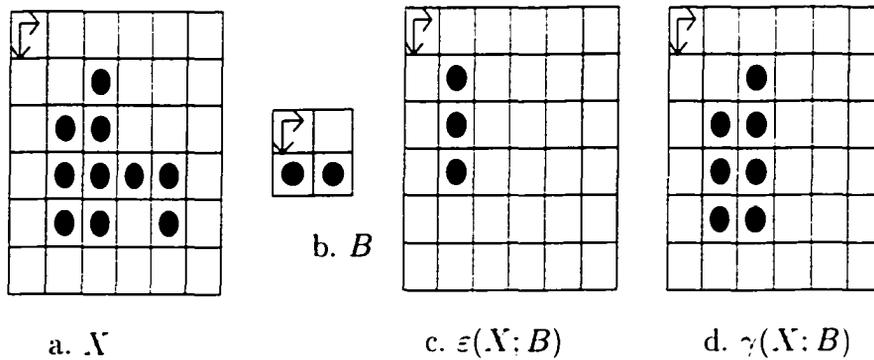


Figure 2.5 – Ouverture morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$ .

## 2.5 Ouverture morphologique binaire, fermeture morphologique binaire et dualité

Comme dans le cas de l'ouverture morphologique binaire, nous définissons la fermeture morphologique binaire afin d'essayer de retrouver le maximum d'informations perdues par une dilatation morphologique binaire.

Soient une image  $X$  et un élément structurant  $B$ . La *fermeture morphologique binaire* de  $X$  par  $B$ , notée  $\phi(X; B)$  ou  $X \bullet B$ , est une dilatation morphologique binaire suivie d'une érosion morphologique binaire de  $X$  par  $B$  c'est-à-dire:

$$\phi(X; B) = \varepsilon(\delta(X; B); B) = (X \oplus B) \ominus B = X \bullet B \quad (2.8)$$

De la dualité entre la dilatation morphologique binaire et l'érosion morphologique binaire va découler une relation de dualité entre l'ouverture morphologique binaire et la fermeture morphologique binaire.

**Proposition 2.5.1** *L'ouverture morphologique binaire et la fermeture morphologique binaire sont liées comme suit par dualité :*

$$\gamma(X; B) = (\phi(X^c; \check{B}))^c \quad (2.9)$$

**Démonstration** Nous avons :

$$\begin{aligned} \gamma(X; B)^c &= \delta(\varepsilon(X; B); B)^c \\ &= \varepsilon(\varepsilon(X; B)^c; \check{B}) \\ &= \varepsilon(\delta(X^c; \check{B}); \check{B}) \\ &= (\phi(X^c; \check{B})) \end{aligned}$$

Donc  $\gamma(X; B) = (\phi(X^c; \check{B}))^c$ . ■

**Proposition 2.5.2** *La fermeture morphologique binaire a la caractérisation suivante :*

$$\phi(X; B) = (X \oplus B) \ominus B = \{x \in E \mid \forall h \in E, x \in \check{B}_h \Rightarrow \check{B}_h \cap X \neq \emptyset\} \quad (2.10)$$

**Démonstration** Nous avons :

$$\begin{aligned} X \bullet B &= (X^c \circ \check{B})^c \\ &= \{x \in E \mid \exists y, x \in \check{B}_y \subseteq X^c\}^c \\ &= \{x \in E \mid \exists y, x \in \check{B}_y \text{ et } \check{B}_y \cap X = \emptyset\}^c \\ &= \{x \in E \mid x \in \check{B}_y \Rightarrow \check{B}_y \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

donc  $\phi(X; B) = (X \oplus B) \ominus B = \{x \in E \mid \forall h \in E, x \in \check{B}_h \Rightarrow \check{B}_h \cap X \neq \emptyset\}$  ■

**Proposition 2.5.3** *La fermeture morphologique binaire a les propriétés suivantes :*

Pour  $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

1. La croissance :  $A \subseteq B \Rightarrow \phi(A; C) \subseteq \phi(B; C)$ .

2. L'extensivité :  $X \subseteq \phi(X; B)$ .

**Démonstration** 1. Elle est croissante comme composée d'opérateurs croissants.

2. Soit  $x \in X, b \in B$ . Alors  $x + b \in X \oplus B$ . Si  $x + b \in X \oplus B$ , pour tout  $b \in B$ , alors  $x \in (X \oplus B) \ominus B$ . Donc  $X \subseteq X \bullet B$ . ■

**Proposition 2.5.4** La fermeture morphologique binaire est pseudo-invariante par rapport au translaté de l'élément structurant :  $\phi(X; B_h) = \phi(X; B)$ .

**Démonstration**  $\phi(X; B_h) = (\gamma(X^c; \tilde{B}_h))^c = (\gamma(X^c; \tilde{B}))^c = \phi(X; B)$  ■

**Proposition 2.5.5** Toute image  $X$  érodée par un élément structurant  $B$  est invariante sous toute fermeture morphologique binaire par  $B$  :  $\phi((X \ominus B); B) = X \ominus B$ .

**Démonstration** La preuve s'obtient de la Proposition 2.4.4 et par dualité. ■

**Proposition 2.5.6** La fermeture morphologique binaire est idempotente :

$\phi(\phi(X; B); B) = \phi(X; B)$ .

**Démonstration** La preuve s'obtient en remplaçant  $X$  par  $X \oplus B$  dans la Proposition 2.5.5. ■

La fermeture morphologique binaire d'une image par un disque a pour effets de :

- filtrer les contours en éliminant les petites concavités dans une image ;
- détecter un groupe spécifique de points dans une image ;
- segmenter une image en plusieurs composantes connexes.

**Exemple 2.5.7** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $X = \{(2,2),(2,4),(3,2),(3,3)\}$  et  $B = \{(0,1),(0,2),(1,1)\}$ . Alors  $\phi(X; B) = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3)\}$ . Nous remarquons que tous les éléments de  $X$  sont dans la fermeture morphologique de  $X$ .

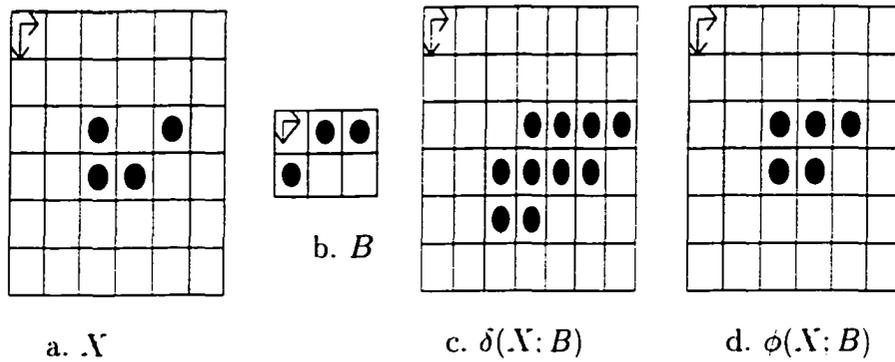


Figure 2.6 – Fermeture morphologique binaire d'une image  $X$  par un élément structurant  $B$ .

# CHAPITRE 3

## Morphologie mathématique à niveaux de gris

### Introduction

Initialement conçue pour les images binaires, la morphologie mathématique a été étendue aux images à niveaux de gris à travers les notions de sommet de surface et d'ombre [19], [16]. Dans ce chapitre, il sera question tout d'abord de rappeler les notions de sommet de surface et d'ombre d'un ensemble. Ensuite, nous utiliserons ces notions pour effectuer le passage entre la morphologie mathématique binaire et la morphologie mathématique à niveaux de gris. Une deuxième partie sera consacrée aux opérateurs dérivés tels que le gradient morphologique et le chapeau-haut-de-forme. Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont semi-continues supérieurement et l'espace euclidien considéré  $E^N$  sera égal à  $\mathbb{R}^N$  dans le cas continu et  $\mathbb{Z}^N$  dans le cas discret.

### 3.1 Notion de sommet de surface

Soient l'espace euclidien  $E^N$  (où  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ),  $A \subseteq E^N$ ,  $A$  et  $F = \{x \in E^{N-1} | \exists y \in E, (x,y) \in A\}$ . Le *sommet* de la surface de  $A$ , noté  $T[A]$  est une application,  $T[A] : F \rightarrow \bar{E}$  définie par :

$$T[A](x) = \sup\{y | (x,y) \in A\} \quad (3.1)$$

Un ensemble  $A \subseteq E^{N-1} \times E$  est une *ombre* si  $(x,y) \in A$  si et seulement si  $(x,z) \in A$  pour tout  $z < y$ . Les notions de sommet de surface et d'ombre sont des notions inversibles dans le sens que toute opération sur la notion de sommet de surface va induire une opération sur celle des ombres et réciproquement sous certaines conditions.

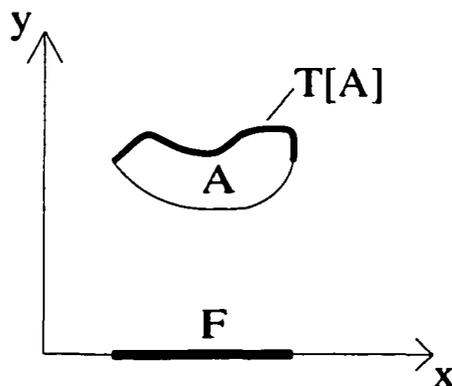


Figure 3.1 - Le sommet d'une surface  $A$  .

**Proposition 3.1.1** Si  $E^N$  est un espace euclidien,  $F \subseteq E^{N-1}$  et  $f : F \rightarrow E$ , alors  $T[U[f]] = f$ .

**Démonstration** La preuve est celle de la Proposition 1.3.2. ■

**Corollaire 3.1.2**  $U[T[U[f]]] = U[f]$ .

**Proposition 3.1.3** Soit  $A \subseteq E^N$ , nous avons

1.  $A \subseteq U[T[A]]$ .
2. Si  $A$  est fermée et  $A$  est une ombre, alors  $A = U[T[A]]$ .

**Démonstration** Soient  $x \in E^{N-1}$ ,  $y \in E$ .

1. Si  $(x,y) \in A$ , alors  $y \leq T[A](x)$  et ainsi  $(x,y) \in U[T[A]]$ .

2. Si  $(x,y) \in U[T[A]]$ , alors  $y \leq T[A](x)$ .

( $\alpha$ ) Si  $y < T[A](x)$ , alors  $\exists(x,z) \in A$  tel que  $y < z < T[A](x)$ . Et alors  $(x,y) \in A$  car  $A$  est une ombre.

( $\beta$ ) Si  $y = T[A](x)$ , alors  $\forall s < y, \exists t, s < t < y$  tel que  $(x,t) \in A$  alors,  $(x,s) \in A$  et donc  $\forall s < y, (x,s) \in A$ , ainsi  $(x,y) \in A$ .

Donc  $A = U[T[A]]$ . ■

**Remarque 3.1.4** Si  $A$  est une ombre, la condition  $A$  fermée est importante pour avoir  $A = U[T[A]]$ . En effet, si  $A = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ , alors  $\forall(x,y) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$  nous avons  $y < 0$  et si  $z < y$  alors  $z < 0$  et  $(x,z) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ . D'autre part, soit  $y$  tel que  $(x,z) \in A \forall z < y$ . Supposons que  $(x,y) \notin A$ , alors  $0 < y$ . Ainsi, il existe  $z'$  tel que  $0 < z' < y$  et donc  $(x,z') \notin A$ . Alors  $(x,y) \in A$ . Donc  $A$  est une ombre.

Mais  $T[A](x) = 0 \forall x$  et  $U(T[A]) = \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \supset A$ .

**Proposition 3.1.5** Si  $A$  et  $B$  sont des ombres alors :

1.  $A \oplus B$  est une ombre.
2.  $A \ominus B$  est une ombre.

**Démonstration** 1. Soient  $(x,y) \in A \oplus B$  et  $w < y$ . Démontrons que  $(x,w) \in A \oplus B$ . Si  $(x,y) \in A \oplus B$ , il existe alors  $(u,v) \in B$  tel que  $(x-u, y-v) \in A$ . Si  $w < y$ , alors  $w-v < y-v$ . Ainsi  $(x-u, w-v) \in A$ , car  $A$  est une ombre. Ainsi  $(x,w) \in A \oplus B$ .

Réciproquement, soient  $(x,z) \in A \oplus B$  et  $y$  tel que  $z < y$ . Démontrons que  $(x,y) \in A \oplus B$

Si  $(x,z) \in A \oplus B$ , il existe alors  $(u,v) \in B$  tel que  $(x-u, z-v) \in A$ . Si  $z < y$ , alors  $z-v < y-v$ . Ainsi  $(x-u, y-v) \in A$ , car  $A$  est une ombre. Ainsi  $(x,z) \in A \oplus B$ .

2. Soient  $(x,y) \in A \ominus B$  et  $w < y$ . Démontrons que  $(x,w) \in A \ominus B$ .

Si  $(x,y) \in A \ominus B$ , alors pour tout  $(u,v) \in B$   $(x+u, y+v) \in A$ . Et  $w < y$  implique  $w+y < y+v$ . Ainsi,  $(x+u, w+v) \in A$ . Donc  $(x,w) \in A \ominus B$

Réciproquement, soient  $(x,z) \in A \ominus B$  et  $y$  tel que  $z < y$ . Démontrons que  $(x,y) \in A \ominus B$

Si  $(x,z) \in A \ominus B$ , il existe alors  $(u,v) \in B$  tel que  $(x+u, z+v) \in A$ . Si  $z < y$ , alors  $z+v < y+v$ . Ainsi  $(x+u, y+v) \in A$ , car  $A$  est une ombre. Donc  $(x,z) \in A \ominus B$ . ■

**Proposition 3.1.6** Soit  $K$  un compact non vide de  $E^N$  muni de la topologie usuelle.

1. Si  $G$  est un ouvert topologique de  $E^N$ , alors  $G \oplus K$  est un ouvert topologique de  $E^N$ .

2. Si  $F$  est un fermé topologique de  $E^N$ , alors  $F \oplus K$ ,  $F \ominus K$ ,  $F \circ K$  et  $F \bullet K$  sont des fermés topologiques de  $E^N$ .

**Démonstration** 1. Si  $G$  est un ouvert topologique de  $E^N$ , alors  $G \oplus K = \cup_{x \in K} G_x$  est un ouvert topologique comme réunion d'ouverts topologiques.

1. Soient  $F$  est un fermé topologique de  $E^N$  et  $(x_n) \subseteq F \oplus K$  une suite convergente vers  $x \in E^N$ . Montrons que  $x \in F \oplus K$ .

Nous avons, pour tout  $n$ ,  $x_n = f_n + k_n$  où  $f_n \in F$  et  $k_n \in K$ . Mais  $K$  est compact, donc il existe une sous-suite  $k_{n_p}$  de  $K$  qui converge vers un point  $v \in K$ .

Ainsi,  $\lim f_{n_p} = x - v = u \in F$ . Donc  $x = u + v \in F \oplus K$ .

Par ailleurs, nous avons  $F \ominus K = (F^c \oplus \tilde{K})^c$ , donc  $F \ominus K$  est un fermé topologique de  $E^N$ .

Enfin,  $F \ominus K$  et  $F \oplus K$  étant des fermés topologiques, nous avons  $F \circ K = (F \ominus K) \oplus K$  et  $F \bullet K = (F \oplus K) \ominus K$  qui sont des fermés topologiques de  $E^N$ . ■

## 3.2 Dilatation morphologique à niveaux de gris

La dilatation morphologique à niveaux de gris est définie à travers les notions de sommet de surface et d'ombre.

Soient un espace euclidien  $E^N$ ,  $F, K$  des parties de  $E^{N-1}$  et les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact. La dilatation morphologique à niveaux de gris de  $f$  par  $k$ , notée  $f \oplus k$ , est définie par  $f \oplus k = T[U[f] \oplus U[k]]$ .

La dilatation morphologique à niveaux de gris peut être ramenée à un supremum de sommes.

**Proposition 3.2.1** Soient  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact, alors  $f \oplus k : F \oplus K \rightarrow E$  peut être obtenue par :

$$(f \oplus k)(x) = \sup_{z \in K \cap (x-F)} \{f(x-z) + k(z)\}.$$

**Démonstration** Posons  $z = (f \oplus k)(x)$ . Alors  $z = T[U[f] \oplus U[k]](x)$ . Par définition du sommet d'une surface,  $z = \sup\{y | (x, y) \in U[f] \oplus U[k]\}$ . Et par définition de la dilatation,  $z = \sup\{a+b | \text{pour } u \in K, x-u \in F, (x-u, a) \in U[f] \text{ et } (u, b) \in U[k]\}$ . Ainsi,  $a = f(x-u)$  et  $b = k(u)$ . Donc  $z = \sup\{f(x-u) + k(u) | u \in K, (x-u) \in F\}$ . ■

**Proposition 3.2.2** Soient un espace euclidien  $E^N$ ,  $F, K$  des parties de  $E^{N-1}$  et les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact. Alors  $U[f \oplus k] = U[f] \oplus U[k]$ . ■

**Démonstration** Nous avons  $f \oplus k = T[U[f] \oplus U[k]]$  ainsi,  $U[f \oplus k] = U[T[U[f] \oplus U[k]]] = U[f] \oplus U[k]$  car  $U[f] \oplus U[k]$  est une ombre fermée. ■

**Proposition 3.2.3** La dilatation morphologique à niveaux de gris a les propriétés suivantes :

1. Commutativité :  $f \oplus k = k \oplus f$ .

2. *Associativité* :  $k_1 \oplus (k_2 \oplus k_3) = (k_1 \oplus k_2) \oplus k_3$ .

**Démonstration** 1. Nous avons  $f \oplus k = T[U[f] \oplus U[k]] = T[U[k] \oplus U[f]] = k \oplus f$

2. Nous avons  $k_1 \oplus (k_2 \oplus k_3) = T[U[k_1] \oplus U[k_2 \oplus k_3]] = T[U[k_1] \oplus (U[k_2] \oplus U[k_3])] = T[(U[k_1] \oplus U[k_2]) \oplus U[k_3]] = T[U[k_1 \oplus k_2] \oplus U[k_3]] = (k_1 \oplus k_2) \oplus k_3$  ■

La dilatation morphologique à niveaux de gris par un disque a pour effets de :

- produire une image plus lumineuse que l'image initiale ;
- réduire ou éliminer les petites structures noires présentes dans l'image.

**Exemple 3.2.4** *Dilatation morphologique à niveaux de gris d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .*



a.  $f$



b.  $f \oplus k$

Figure 3.2 – *Dilatation morphologique à niveaux de gris d'une image.*

### 3.3 Dilatation morphologique à niveaux de gris, érosion morphologique à niveaux de gris et dualité

L'érosion morphologique à niveaux de gris est définie à travers les notions de sommet de surface et d'ombre.

Soient un espace euclidien  $E^N$ ,  $F, K$  des parties de  $E^{N-1}$  et les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact. L'érosion morphologique à niveaux de gris de  $f$  par  $k$ , notée  $f \ominus k$ ,  $f \ominus k : F \ominus K \rightarrow E$ , est définie par  $f \ominus k = T[U[f] \ominus U[k]]$ .

Comme dans le cas binaire, il existe une relation de dualité entre l'érosion morphologique et la dilatation morphologique à niveaux de gris. Soit  $f : F \rightarrow E$ , la réflexion de  $f$ , notée  $\check{f}$ ,  $\check{f} : \check{F} \rightarrow E$  est définie par  $\check{f}(x) = f(-x)$ .

**Proposition 3.3.1** Soient les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact et  $x \in (F \oplus K) \cap (F \ominus \check{K})$ . La dilatation morphologique à niveaux de gris et l'érosion morphologique à niveaux de gris sont liées comme suit par dualité :  $(f \oplus k)(x) = -((-f) \ominus \check{k})(x)$ .

#### Démonstration

$$\begin{aligned} -(f \oplus k)(x) &= -\sup_{z \in K, (x-z) \in F} [f(x-z) + k(z)] = \inf_{z \in K, (x-z) \in F} [-f(x-z) - k(z)] \\ &= \inf_{z \in \check{K}, x+z \in F} [-f(x+z) - \check{k}(z)] = ((-f) \ominus \check{k})(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

L'érosion morphologique à niveaux de gris peut être évaluée en considérant l'infimum d'une différence d'ensemble.

**Proposition 3.3.2** Soient un espace euclidien  $E^N$ ,  $F, K$  des parties de  $E^{N-1}$  et les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact. Alors  $f \ominus k : F \ominus K \rightarrow E$  est obtenue par :

$$(f \ominus k)(x) = \inf_{z \in K} \{f(x+z) - k(z)\}.$$

**Démonstration** Posons  $z = (f \ominus k)(x)$ . Alors  $z = T[U[f] \ominus U[k]](x)$ . Soit encore en utilisant la définition de  $T$ ,  $z = \sup\{y \mid (x,y) \in U[f] \ominus U[k]\}$ . Par définition d'une érosion,  $z = \sup\{y \mid \forall (u,v) \in U[k], (x,y) + (u,v) \in U[f]\}$  et par définition des ombres des applications,  $z = \sup\{y \mid \forall u \in K, v \leq k(u), y \leq f(x+u) - v\}$ . Si,  $y \leq f(x+u) - v$  pour tout  $v \leq k(u)$  alors  $y \leq f(x+u) - k(u)$ . Ainsi,  $z = \sup\{y \mid \forall u \in K, y \leq f(x+u) - k(u)\}$ . De plus, si  $y \leq f(x+u) - k(u)$  pour tout  $u \in K$  alors,  $y \leq \inf_{u \in K} [f(x+u) - k(u)]$  donc  $z = \sup\{y \mid y \leq \inf_{u \in K} [f(x+u) - k(u)]\} = \inf_{u \in K} [f(x+u) - k(u)]$ . ■

**Théorème 3.3.3** Soient un espace euclidien  $E^N$ ,  $F, K$  des parties de  $E^{N-1}$  et les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x \mid k(x) \neq -\infty\}$  est compact. Alors  $U[f \ominus k] = U[f] \ominus U[k]$ .

**Démonstration**  $f \ominus k = T[U[f] \ominus U[k]]$  ainsi,  $U[f \ominus k] = U[T[U[f] \ominus U[k]]] = U[f] \ominus U[k]$  car  $U[f] \ominus U[k]$  est une ombre fermée. ■

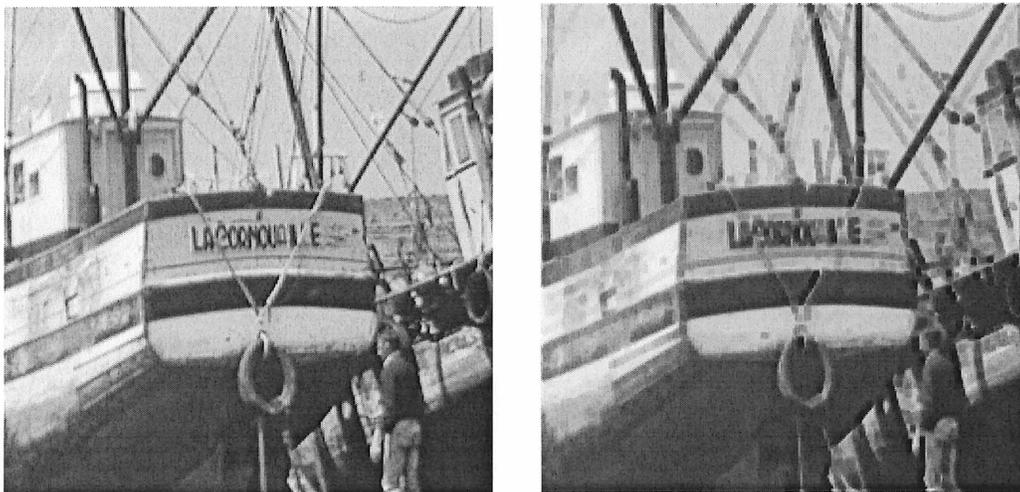
**Proposition 3.3.4** L'érosion morphologique à niveaux de gris est non associative :  
 $(f \ominus k_1) \ominus k_2 = f \ominus (k_1 \oplus k_2)$ .

**Démonstration** Nous avons  $(f \ominus k_1) \ominus k_2 = T[U[f \ominus k_1] \ominus U[k_2]] = T[(U[f] \ominus U[k_1]) \ominus U[k_2]] = T[U[f] \ominus (U[k_1] \oplus U[k_2])] = T[U[f] \ominus U[k_1 \oplus k_2]] = f \ominus (k_1 \oplus k_2)$  ■

L'érosion morphologique à niveaux de gris par un disque a pour effets de :

- produire une image plus sombre que l'image initiale ;
- réduire ou éliminer les petites structures claires présentes dans l'image.

**Exemple 3.3.5** Érosion morphologique à niveaux de gris d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .



a.  $f$

b.  $f \ominus k$

Figure 3.3 – Érosion morphologique à niveaux de gris d'une image.

### 3.4 Ouverture et fermeture morphologiques à niveaux de gris

L'ouverture et la fermeture morphologiques à niveaux de gris sont définies de la même façon que dans le cas binaire et elles ont des propriétés similaires.

Soient les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact.

L'ouverture morphologique à niveaux de gris de  $f$  par l'élément structurant  $k$ , notée  $f \circ k$ ,

$f \circ k : F \circ K \rightarrow E$ , est définie par  $f \circ k = (f \ominus k) \oplus k$ .

La fermeture morphologique à niveaux de gris de  $f$  par l'élément structurant  $k$ , notée

$f \bullet k$ ,  $f \bullet k : F \bullet K \rightarrow E$ , est définie par  $f \bullet k = (f \oplus k) \ominus k$ .

**Proposition 3.4.1** *L'ouverture morphologique à niveaux de gris est un opérateur anti-extensif:  $(f \circ k)(x) \leq f(x)$  pour tout  $x \in F \circ K$ .*

**Démonstration** Nous avons  $f \circ k = (f \ominus k) \oplus k = T[U[f \ominus k] \oplus U[k]] = T[U[f] \ominus U[k] \oplus U[k]]$ . Or,  $(U[f] \ominus U[k]) \oplus U[k] \subseteq U[f]$  car l'ouverture morphologique binaire est

anti-extensive. Donc  $T[(U[f] \ominus U[k]) \oplus U[k]](x) \leq T[U[f]](x) \forall x \in F \circ K$ . Par ailleurs,  $T[U[f]] = f$ , ainsi  $T[U[f] \ominus U[k] \oplus U[k]](x) \leq f(x)$ . Donc  $(f \circ k)(x) \leq f(x)$  pour tout  $x \in F \circ K$  ■

**Proposition 3.4.2** *La fermeture morphologique à niveaux de gris est un opérateur extensif:  $f(x) \leq (f \bullet k)(x)$  pour tout  $x \in F$ .*

**Démonstration** La preuve se fait de la même façon que la précédente en utilisant le fait que toute fermeture morphologique binaire est extensive. ■

**Proposition 3.4.3** *L'ouverture morphologique à niveaux de gris est un opérateur idempotent:  $(f \circ k) \circ k = f \circ k$ .*

**Démonstration** Nous avons  $(f \circ k) \circ k = T[(U[f \circ k] \ominus U[k]) \oplus U[k]] = T[(((U[f] \ominus U[k]) \oplus U[k]) \ominus U[k]) \oplus U[k]] = T[(U[f] \circ U[k]) \circ U[k]] = T[U[f] \circ U[k]] = T[(U[f] \ominus U[k]) \oplus U[k]] = T[U[f \ominus k] \oplus U[k]] = T[U[(f \ominus k) \oplus k]] = T[U[f \circ k]] = f \circ k. ■$

**Proposition 3.4.4** *La fermeture morphologique à niveaux de gris est un opérateur idempotent:  $(f \bullet k) \bullet k = f \bullet k$ .*

**Démonstration** Se démontre de la même façon que la précédente. ■

La dualité entre la dilatation et l'érosion morphologiques à niveaux de gris va induire une relation de dualité entre la fermeture et l'ouverture morphologiques à niveaux de gris.

**Proposition 3.4.5** *L'ouverture et la fermeture morphologiques à niveaux de gris sont liées comme suit par dualité:  $(f \circ k) = -(-f) \bullet \check{k}$ .*

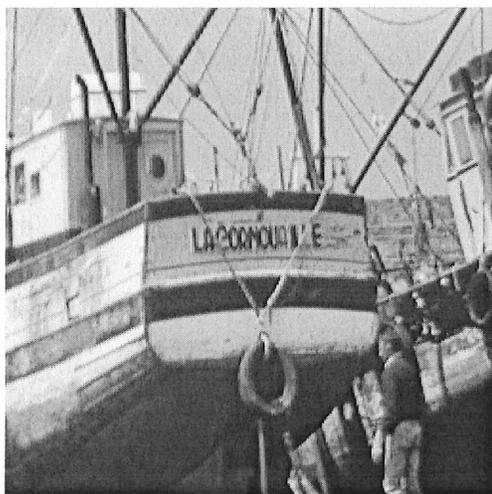
**Démonstration**  $-(f \circ k) = -((f \ominus k) \oplus k) = -(f \ominus k) \ominus \check{k} = ((-f) \oplus \check{k}) \ominus \check{k} = (-f) \bullet \check{k}$ .  
Donc  $(f \circ k) = -(-f) \bullet \check{k}$ . ■

L'ouverture morphologique à niveaux de gris par un disque a pour effets de :

- éliminer les petites structures claires présentes dans l'image;

- réduire ou éliminer les pics présents dans l'image.

**Exemple 3.4.6** *L'ouverture morphologique à niveaux de gris d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .*



a.  $f$



b.  $f \circ k$

Figure 3.4 – *Ouverture morphologique à niveaux de gris d'une image.*

La fermeture morphologique à niveaux de gris élimine les petites structures noires tout en préservant les structures claires présentes dans une image.

**Exemple 3.4.7** *La fermeture morphologique à niveaux de gris d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .*



a.  $f$

b.  $f \bullet k$

Figure 3.5 – Fermeture morphologique à niveaux de gris d'une image.

### 3.5 Le gradient morphologique

Dans une image, les contours sont situés dans les zones de grandes variations des niveaux de gris. Nous introduisons un opérateur appelé *gradient morphologique* afin de mettre ces variations en évidence.

Soient les applications  $f : F \rightarrow E$  et  $k : K \rightarrow E$  telles que  $\{x | k(x) \neq -\infty\}$  est compact. Le *gradient morphologique* de  $f$  par rapport à  $k$ , noté  $\rho_k(f)$ , est défini par :

$$\rho_k(f) = f \oplus k - f \ominus k \tag{3.2}$$

**Exemple 3.5.1** *La gradient morphologique à niveaux de gris d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .*

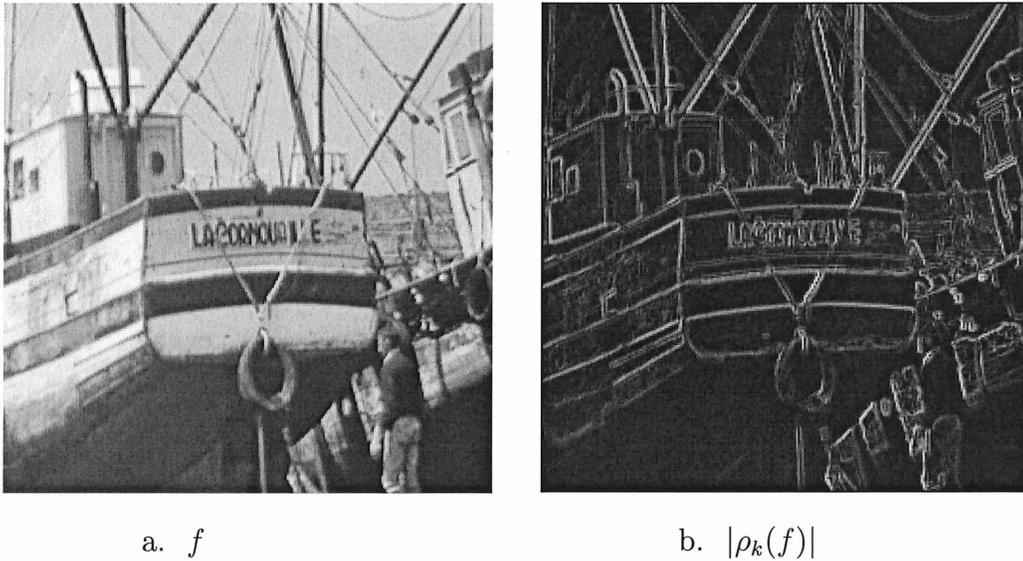


Figure 3.6 – *Gradient morphologique à niveaux de gris d'une image.*

Le *demi-gradient par l'érosion morphologique à niveaux de gris* ou *gradient interne*, noté  $\rho_k^-(f)$ , est défini par :

$$\rho_k^-(f) = f - f \ominus k \quad (3.3)$$

De même, le *demi-gradient par la dilatation morphologique à niveaux de gris* ou *gradient externe*, noté  $\rho_k^+(f)$ , est défini par :

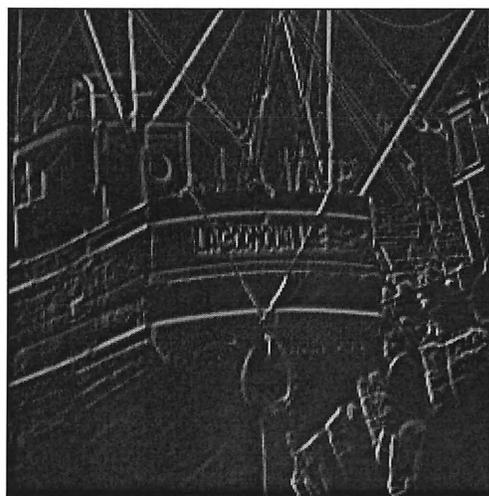
$$\rho_k^+(f) = f \oplus k - f \quad (3.4)$$

Le demi-gradient interne améliore les contours internes des objets blancs dans l'image, alors que le demi-gradient externe améliore les contours externes de ces objets.

**Exemple 3.5.2** *La gradient interne d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .*



a.  $f$



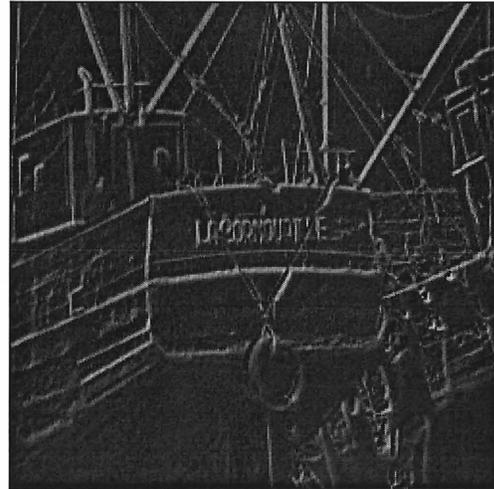
b.  $|\rho_k^-(f)|$

Figure 3.7 – *Gradient interne d'une image.*

**Exemple 3.5.3** La gradient externe d'une image  $f$  par un élément structurant  $k$  de taille  $3 \times 3$ .



a.  $f$



b.  $|\rho_k^+(f)|$

Figure 3.8 – Gradient externe d'une image.

# CHAPITRE 4

## Treillis et opérateurs morphologiques binaires

### Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions de dilatations et d'érosions algébriques. Ces concepts sont en fait des généralisations des notions de dilatations et d'érosions morphologiques. Notons que cette généralisation met en valeur les propriétés fondamentales des dilatations et des érosions et ce, au moyen de la notion d'adjonction [5]. Ensuite, nous définirons les ouvertures et les fermetures algébriques.

## 4.1 Dilatation algébrique

Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\beta \in \mathcal{O}$ . L'opérateur  $\beta$  est une *dilatation algébrique* si :

1.  $\beta$  est croissant,
2.  $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}, \beta(\vee \mathcal{S}) = \vee_{x \in \mathcal{S}} \beta(x)$ .

**Proposition 4.1.1** *L'ensemble des dilatations algébriques est :*

1. Fermé pour la composition des opérateurs et contient l'élément identité,
2. Fermé pour le supremum dans  $\mathcal{O}$ .

**Démonstration** 1. Soient  $\delta_1$  et  $\delta_2$  deux dilatations algébriques et  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$

- i.  $\delta_1 \circ \delta_2$  est croissant comme la composée de deux opérateurs croissants.
- ii.  $\delta_1 \circ \delta_2$  commute par rapport au supremum. En effet,

$$\begin{aligned}
 \delta_1 \circ \delta_2(\vee \mathcal{S}) &= \delta_1(\delta_2(\vee \mathcal{S})) \\
 &= \delta_1(\vee_{x \in \mathcal{S}} \delta_2(x)) \\
 &= \vee_{x \in \mathcal{S}} \delta_1(\delta_2(x)) \\
 &= \vee_{x \in \mathcal{S}} \delta_1 \circ \delta_2(x)
 \end{aligned}$$

Donc  $\delta_1 \circ \delta_2$  est une dilatation algébrique. Comme nous avons  $I_d(\vee \mathcal{S}) = \vee \mathcal{S} = \vee_{x \in \mathcal{S}} x = \vee_{x \in \mathcal{S}} I_d(x)$ , alors  $I_d$  est une dilatation.

2. Démontrons que pour tout ensemble  $\mathcal{D}$  de dilatations,  $\vee \mathcal{D}$  est encore une dilatation algébrique.

Soient  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}$ ,  $x$  et  $y \in \mathcal{L}$  nous avons

$$\begin{aligned}
 x \leq y &\implies \delta(x) \leq \delta(y) \quad \forall \delta \in \mathcal{D} \\
 &\implies \vee_{\delta \in \mathcal{D}} \delta(x) \leq \vee_{\delta \in \mathcal{D}} \delta(y) \\
 &\implies (\vee \mathcal{D})(x) \leq (\vee \mathcal{D})(y)
 \end{aligned}$$

donc  $\vee\mathcal{D}$  est croissant. Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned}
\vee\mathcal{D}(\vee\mathcal{S}) &= \vee_{\delta \in \mathcal{D}} \delta(\vee\mathcal{S}) \\
&= \vee_{\delta \in \mathcal{D}} (\vee_{x \in \mathcal{S}} \delta(x)) \text{ car } \delta \text{ est une dilatation.} \\
&= \vee_{x \in \mathcal{S}} (\vee_{\delta \in \mathcal{D}} \delta(x)) \\
&= \vee_{x \in \mathcal{S}} (\vee\mathcal{D}(x))
\end{aligned}$$

ainsi  $\vee\mathcal{D}$  commute avec le supremum. Donc  $\vee\mathcal{D}$  est une dilatation algébrique. ■

## 4.2 Érosion algébrique

Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\beta \in \mathcal{O}$ . L'opérateur  $\beta$  est une *érosion algébrique* si :

1.  $\beta$  est croissant,
2.  $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}, \beta(\wedge\mathcal{S}) = \wedge_{x \in \mathcal{S}} \beta(x)$ .

Par dualité aux propriétés de l'ensemble des dilatations algébriques, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 4.2.1** *L'ensemble des érosions algébriques est :*

1. Fermé pour la composition des opérateurs et contient l'élément identité,
2. Fermé pour l'infimum dans  $\mathcal{O}$ .

En conséquence, l'ensemble des dilatations algébriques (resp. des érosions algébriques) est un treillis complet.

### 4.3 Illustration dans le cas des opérateurs morphologiques binaires

Soient  $E$  un espace euclidien et  $B \subseteq E$  un élément structurant. Notons :

1.  $\delta_B(X) = X \oplus B$  la dilatation morphologique binaire
2.  $\varepsilon_B(X) = X \ominus B$  l'érosion morphologique binaire
3.  $o$  pour l'origine de  $E$

**Proposition 4.3.1** *Les dilatations (resp. les érosions) morphologiques binaires sont des cas particuliers des dilatations (resp. des érosions) algébriques. De plus, l'ensemble des dilatations (resp. des érosions) morphologiques binaires est fermé pour la composition des opérateurs et contient l'identité.*

#### Démonstration

1. Les opérateurs  $\delta_B$  et  $\varepsilon_B$  sont des opérateurs croissants pour tout  $B \subseteq E$ .
2. Soit  $(B_j)_{j \in J}$  une famille d'éléments structurants. Nous avons  $\delta_{\cup_{j \in J} B_j}(X) = X \oplus (\cup_{j \in J} B_j) = \cup_{j \in J} (X \oplus B_j) = \cup_{j \in J} \delta_{B_j}(X) = \vee_{j \in J} \delta_{B_j}(X)$ . Aussi,  $\varepsilon_{\cap_{j \in J} B_j}(X) = X \ominus (\cap_{j \in J} B_j) = \cap_{j \in J} (X \ominus B_j) = \cap_{j \in J} \varepsilon_{B_j}(X) = \wedge_{j \in J} \varepsilon_{B_j}(X)$ .

Soient  $X, B_1, B_2$ , des parties de  $E$ . Nous avons :

1.  $X \oplus \{o\} = X \ominus \{o\} = X$  en d'autres termes,  $\delta_{\{o\}} = \varepsilon_{\{o\}} = I_d$ .
2. Nous avons  $\delta_{B_1} \circ \delta_{B_2}(X) = \delta_{B_1}(\delta_{B_2}(X)) = \delta_{B_1}(X \oplus B_2) = (X \oplus B_2) \oplus B_1 = X \oplus (B_2 \oplus B_1)$ .
3. Nous avons  $\varepsilon_{B_1} \circ \varepsilon_{B_2}(X) = \varepsilon_{B_1}(\varepsilon_{B_2}(X)) = \varepsilon_{B_1}(X \ominus B_2) = (X \ominus B_2) \ominus B_1 = X \ominus (B_2 \oplus B_1)$ .

Ainsi  $\delta_{B_1} \circ \delta_{B_2} = \delta_{B_1 \oplus B_2} = \delta_{\delta_{B_2}(B_1)}$  et  $\varepsilon_{B_1} \circ \varepsilon_{B_2} = \varepsilon_{B_1 \oplus B_2}$ . ■

## 4.4 Notion d'adjonction

La base de la définition des opérateurs morphologiques sur les treillis vient de la notion de l'adjonction. Celle-ci nous permet d'établir un isomorphisme entre l'ensemble des érosions algébriques et celui des dilatations algébriques.

Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\delta, \varepsilon \in \mathcal{O}$ . Nous disons que  $(\varepsilon, \delta)$  est une *adjonction* si :

$$\delta(x) \leq y \iff x \leq \varepsilon(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (4.1)$$

ou encore

$$\varepsilon(y) \geq x \iff y \geq \delta(x) \quad \forall x, y \in \mathcal{L}. \quad (4.2)$$

donc  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction dans  $(\mathcal{L}, \leq)$  si et seulement si  $(\delta, \varepsilon)$  est une adjonction dans  $(\mathcal{L}, \geq)$ . Puisque  $\delta$  et  $\varepsilon$  jouent un rôle dual, nous noterons  $\delta$  la dilatation algébrique et  $\varepsilon$  l'érosion algébrique.

**Proposition 4.4.1** *Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\delta, \varepsilon \in \mathcal{O}$ . Si  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction alors  $\delta$  est une dilatation algébrique et  $\varepsilon$  est une érosion algébrique.*

**Démonstration** Il nous suffit de montrer que  $\delta$  est une dilatation algébrique. Nous déduirons que  $\varepsilon$  est une érosion algébrique par dualité. Comme  $O \leq \varepsilon(O)$  nous tirons de (4.1) que  $\delta(O) \leq O$  et donc  $\delta(O) = O$ .

Soient  $y \in \mathcal{L}$  et  $\mathcal{S}$  un sous ensemble non vide de  $\mathcal{L}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{S} \delta(x) \leq y &\iff \delta(x) \leq y \text{ pour tout } x \in \mathcal{S} \\ &\iff x \leq \varepsilon(y) \text{ pour tout } x \in \mathcal{S} \\ &\iff \forall \mathcal{S} \leq \varepsilon(y) \\ &\iff \delta(\forall \mathcal{S}) \leq y \end{aligned}$$

En particulier, en prenant successivement  $y = \bigvee_{x \in \mathcal{S}} \delta(x)$  et  $y = \delta(\bigvee \mathcal{S})$ , nous obtiendrons que  $\delta(\bigvee \mathcal{S}) = \bigvee_{x \in \mathcal{S}} \delta(x)$ , donc  $\delta$  est une dilatation algébrique. ■

Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis.  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\eta \in \mathcal{O}$ . Nous définissons  $\dot{\eta} \in \mathcal{O}$  par :

$$\dot{\eta}(y) = \bigvee \{z \mid \eta(z) \leq y\} \forall y \in \mathcal{L} \quad (4.3)$$

et  $\eta \in \mathcal{O}$  par :

$$\eta(x) = \bigwedge \{z \mid x \leq \eta(z)\} \forall x \in \mathcal{L}. \quad (4.4)$$

Comme  $\theta = \dot{\eta}$  dans  $(\mathcal{L}, \leq)$  si et seulement si  $\theta = \eta$  dans  $(\mathcal{L}, \geq)$ , les équations (4.3) et (4.4) sont en dualité. Nous verrons que dans une adjonction  $(\varepsilon, \delta)$ ,  $\varepsilon = \dot{\delta}$  et  $\delta = \dot{\varepsilon}$ .

**Proposition 4.4.2** *Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\delta, \varepsilon \in \mathcal{O}$ . Si  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction, alors nous avons les assertions suivantes :*

- (1)  $\varepsilon$  est croissant et  $I_d \leq \varepsilon \circ \delta$
- (2)  $\varepsilon = \dot{\delta}$
- (3)  $\delta$  est croissant et  $\delta \circ \varepsilon \leq I_d$
- (4)  $\delta = \dot{\varepsilon}$

*Réciproquement, si nous avons (1) ou (2) et (3) ou (4) alors  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction.*

**Démonstration** Il suffit de montrer que :

- (i) si  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction, alors nous avons (2) et (4)
- (ii) (2) implique (1) et (4) implique (3)
- (iii) si nous avons (1) et (3) alors  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction

(i) Notons que  $\varepsilon(y) = \bigvee \{z \mid z \leq \varepsilon(y)\}$  pour tout  $y \in \mathcal{L}$  est équivalent à  $\varepsilon(y) = \bigvee \{z / \delta(z) \leq y\} \forall y \in \mathcal{L}$  et  $\varepsilon = \dot{\delta}$ . Alors  $\delta = \dot{\varepsilon}$  s'obtient par dualité.

(ii) Montrons que **(2)** implique **(1)**, **(4)** implique **(3)** suivra par dualité.

Soit  $y \in \mathcal{L}$ , définissons  $E(y) = \{z \mid \delta(z) \leq y\}$ . Par **(2)** nous avons  $\varepsilon(y) = \hat{\delta}(y) = \vee(E(y))$ .

Si  $y_1 \leq y_2$  alors,  $E(y_1) \subseteq E(y_2)$  et donc  $\vee(E(y_1)) \leq \vee(E(y_2))$ . Ainsi  $\varepsilon$  est croissant.

Aussi,  $\delta(y) \leq \delta(y)$  donc  $y \in E(\delta(y))$  pour tout  $y \in \mathcal{L}$ . Ainsi  $y \leq \vee(E(\delta(y))) = \varepsilon(\delta(y))$ .

Donc  $I_d \leq \varepsilon \circ \delta$ .

(iii) Prouvons enfin que si nous avons **(1)** et **(3)**, alors  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction.

Supposons **(1)** et que  $\delta(x) \leq y$ , pour tout  $x, y \in \mathcal{L}$ . L'opérateur  $\varepsilon$  étant croissant nous avons  $\varepsilon(\delta(x)) \leq \varepsilon(y)$ . Aussi,  $I_d \leq \varepsilon \circ \delta$  donne  $x \leq \varepsilon(\delta(x))$  ainsi  $\delta(x) \leq y \implies x \leq \varepsilon(y)$ .

De même  $x \leq \varepsilon(y) \implies \delta(x) \leq y$  quand nous supposons **(3)**. Ainsi  $\delta(x) \leq y \iff x \leq \varepsilon(y)$  donc  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction. ■

**Exemple 4.4.3** Soient  $E$  un espace euclidien.  $X, B \subseteq E$ , la dilatation morphologique binaire  $\delta_B(X) = X \oplus B$  et l'érosion morphologique binaire  $\varepsilon_B(X) = X \ominus B$ . Le couple  $(\varepsilon_B; \delta_B)$  est une adjonction. En effet, nous avons :

$$Y \oplus B \subseteq X \iff Y \subseteq X \ominus B \quad \forall X, Y \subseteq E$$

Si  $Y \oplus B \subseteq X$  alors  $(Y \oplus B) \ominus B \subseteq X \ominus B$ . Mais  $Y \subseteq (Y \oplus B) \ominus B$ .

Si  $Y \subseteq X \ominus B$  alors  $Y \oplus B \subseteq (X \ominus B) \oplus B$ . Mais  $(X \ominus B) \oplus B \subseteq X$ .

**Théorème 4.4.4** L'ensemble des adjonctions constitue un isomorphisme entre le treillis complet des dilatations algébriques et celui des érosions algébriques. En d'autres termes, nous avons :

**(1)** Pour toute dilatation algébrique  $\delta$ , il existe une et une seule érosion algébrique  $\varepsilon$  telle que  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction et nous avons  $\varepsilon = \hat{\delta}$

**(2)** Pour toute érosion algébrique  $\varepsilon$ , il existe une et une seule dilatation algébrique  $\delta$  telle que  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction et nous avons  $\delta = \hat{\varepsilon}$

(3) De plus, nous avons  $\delta \circ \varepsilon \circ \delta = \delta$  et  $\varepsilon \circ \delta \circ \varepsilon = \varepsilon$ .

**Démonstration** (1) Soit  $\delta$  une dilatation algébrique, posons  $\varepsilon = \dot{\delta}$  tel que dans l'équation (4.3). Ainsi (i) l'opérateur  $\delta$  est croissant et (ii) soit  $y \in \mathcal{L}$ , nous avons  $\delta \circ \varepsilon(y) = \delta(\dot{\delta}(y)) = \delta(\vee\{z \mid \delta(z) \leq y\}) = \vee\{\delta(z) \mid \delta(z) \leq y\} \leq y$  et donc.  $\delta \circ \varepsilon \leq I_d$ . Alors  $\delta$  et  $\varepsilon$  satisfont les conditions (2) et (3) de la Proposition 4.4.2, donc  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction. Par la Proposition 4.4.1, l'opérateur  $\varepsilon$  est une érosion algébrique.

Soit  $\varepsilon'$  une autre érosion telle que  $(\varepsilon', \delta)$  est une adjonction, alors  $\varepsilon' = \dot{\delta} = \varepsilon$  par le (2) de la Proposition 4.4.2.

(2) La deuxième partie de notre théorème s'obtient de la première partie par dualité.

(3) Du (1) et (3) de la Proposition 4.4.2 nous avons  $I_d \leq \varepsilon \circ \delta$ ,  $\delta \circ \varepsilon \leq I_d$  et  $\delta$  est croissant ainsi  $\delta = \delta \circ I_d \leq \delta(\varepsilon \circ \delta) = (\delta \circ \varepsilon) \circ \delta \leq I_d \circ \delta = \delta$ . Donc  $\delta \circ \varepsilon \circ \delta = \delta$  et  $\varepsilon \circ \delta \circ \varepsilon = \varepsilon$  est obtenu par dualité. ■

**Proposition 4.4.5** Soit  $(\varepsilon, \delta)$  une adjonction et  $\mathcal{T}$  un groupe d'automorphismes sur  $\mathcal{L}$ .  $\delta$  est  $\mathcal{T}$ -invariant si et seulement si  $\varepsilon$  est  $\mathcal{T}$ -invariant.

**Démonstration** Supposons que  $\varepsilon$  est  $\mathcal{T}$ -invariant. Alors  $\varepsilon$  commute avec tout  $\tau$  dans  $\mathcal{T}$  et en particulier il commute avec  $\tau^{-1}$ . Soient  $x, y \in \mathcal{L}$  nous avons :

$$\begin{aligned} \delta \circ \tau(x) \leq y &\iff \tau(x) \leq \varepsilon(y) \\ &\iff x \leq \tau^{-1} \circ \varepsilon(y) \\ &\iff \delta(x) \leq \tau^{-1}(y) \\ &\iff \tau \circ \delta(x) \leq y \end{aligned}$$

Donc  $\delta \circ \tau(x) = \tau \circ \delta(x)$  et  $\delta$  commute avec  $\tau$ . Ainsi  $\delta$  est  $\mathcal{T}$ -invariant. La réciproque se montre de la même façon. ■

Nous dirons que  $(\varepsilon, \delta)$  est une  $\mathcal{T}$ -adjonction quand  $\delta$  est une  $\mathcal{T}$ -dilatation et  $\varepsilon$  est une

*T-érosion.*

**Exemple 4.4.6** Sur le treillis booléen  $\mathcal{P}(E)$ , les dilatations et les érosions morphologiques binaires peuvent être construites entièrement à partir des translations. En effet, si nous fixons l'origine  $o$ , tout point  $a \in E$  détermine une unique translation  $\tau_a$  telle que  $\tau_a(o) = a$ . Si  $X \subseteq E$  alors,  $\tau_a(X) = X_a$ . Aussi, pour tout  $X, A \subseteq E$  nous avons  $X \oplus A = \bigcup_{a \in A} \tau_a(X)$  et  $X \ominus A = \bigcap_{a \in A} \tau_a^{-1}(X)$ .

Donc la dilatation morphologique binaire  $\delta_A(X) = X \oplus A$  et l'érosion morphologique binaire  $\varepsilon_A(X) = X \ominus A$  ont la décomposition suivante en termes de translation :

$$\delta_A = \bigvee_{a \in A} \tau_a \quad \text{et} \quad \varepsilon_A = \bigwedge_{a \in A} \tau_a^{-1}$$

■

## 4.5 Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et les fermetures algébriques nous permettent d'étudier la composition d'opérateurs croissants et les nouvelles propriétés telles que l'idempotence.

Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis,  $\mathcal{O}$  l'ensemble des opérateurs sur  $\mathcal{L}$  et  $\beta \in \mathcal{O}$  tel que  $\beta$  est croissant. Nous dirons que :

1.  $\beta$  est une *ouverture algébrique* si et seulement si  $\beta$  est *anti-extensif* et *idempotent*.
2.  $\beta$  est une *fermeture algébrique* si et seulement si  $\beta$  est *extensif* et *idempotent*.

**Exemple 4.5.1** Soient  $E$  un espace topologique,  $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$ . L'opérateur  $\psi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tel que  $\psi(X) = \overset{\circ}{X}$ , l'opérateur qui à un ensemble lui est associé son intérieur. C'est une ouverture algébrique dont le domaine d'invariance est l'ensemble des ouverts topologiques sur  $E$ .

*De même, l'opérateur  $\theta : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tel que  $\theta(X) = \overline{X}$ , l'opérateur qui à un ensemble lui est associé sa fermeture morphologique est une fermeture algébrique dont le domaine d'invariance est l'ensemble des fermetures topologiques sur  $E$ . ■*

# CHAPITRE 5

## Filtres morphologiques

### Introduction

La théorie du filtrage morphologique a été développée par G. Matheron [11] et J. Serra [11] dans les années 80. Conçue comme une généralisation des ouvertures et des fermetures morphologiques, elle étudie la classe des opérateurs croissants et idempotents d'un treillis complet dans lui-même. L'idée principale des filtres morphologiques est de supprimer de façon sélective des structures dans une image, ces structures pouvant être soit du bruit, soit des objets non pertinents. Cela implique donc que les structures préservées ne doivent pas être modifiées par une deuxième application du même filtre. Ceci illustre l'une des propriétés fondamentales des filtres morphologiques : l'idempotence. Le choix d'un filtre morphologique est guidé par le nombre d'informations que nous disposons par rapport aux contours, la taille et l'orientation des structures que nous choisirons de filtrer.

Dans ce chapitre, nous débuterons par une définition d'un filtre morphologique. Ensuite, nous étudierons les filtres dérivés ainsi que les filtres alternés séquentiels pour terminer par une application au filtrage d'images.

Soit  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet. Un opérateur  $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  est un *filtre morphologique* si  $\psi$  est *croissant* et *idempotent*.

Les ouvertures morphologiques sont des filtres morphologiques anti-extensifs et les fermetures morphologiques sont des filtres morphologiques extensifs.

## 5.1 Les filtres dérivés

À ce point, nous étudions des transformations plus générales, qui ne sont ni extensives ni anti-extensives. En fait, nous chercherons à obtenir des formules d'approximations permettant de trouver la majoration d'une classe prédéfinie de transformations, telles que les ouvertures et les fermetures morphologiques [17], [12].

Soient  $(\mathcal{L}, \leq)$  un treillis complet et  $\psi$  un opérateur *croissant* sur  $\mathcal{L}$ . L'opérateur  $\psi$  est :

1. un *sous-filtre* si  $\psi \circ \psi \leq \psi$
2. un *sur-filtre* si  $\psi \circ \psi \geq \psi$
3. un *inf sur-filtre* si  $\psi = \psi \circ (I_d \wedge \psi)$
4. un *sup sous-filtre* si  $\psi = \psi \circ (I_d \vee \psi)$

**Remarque 5.1.1** 1. Si l'opérateur  $\psi$  est un filtre, alors  $\psi$  est un sous-filtre et un sur-filtre.

2. Par ailleurs, nous avons toujours  $\psi \circ (I_d \wedge \psi) \leq \psi$  et  $\psi \circ (I_d \vee \psi) \geq \psi$ .

**Proposition 5.1.2** Soient  $\psi$  et  $\phi$  deux opérateurs sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$ .

(a) Si  $\phi$  est croissant et extensif et  $\psi$  est un sur-filtre, alors  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$  sont des

sur-filtres.

- (a') Si  $\phi$  est croissant et anti-extensif et  $\psi$  est un sous-filtre, alors  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$  sont des sous-filtres.
- (b) Si  $\phi$  est croissant et extensif et  $\psi$  est un inf sur-filtre, alors  $\phi \circ \psi$  est un inf sur-filtre.
- (b') Si  $\phi$  est croissant et anti-extensif et  $\psi$  est un sup sous-filtre, alors  $\phi \circ \psi$  est un sup sous-filtre.

**Démonstration** (a) Supposons que  $\phi$  est croissant et extensif et  $\psi$  est un sur-filtre. Alors  $\phi \circ \psi \circ \phi \circ \psi \geq \phi \circ \psi \circ \psi \geq \phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi \circ \psi \circ \phi \geq \psi \circ \psi \circ \phi \geq \psi \circ \phi$ , donc  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$  sont des sur-filtres.

(a') s'obtient par dualité à (a).

(b) Supposons que  $\phi$  est croissant et anti-extensif et  $\psi$  est un sous-filtre. Alors  $\phi \circ \psi \circ (I_d \wedge \phi \circ \psi) \geq \phi \circ \psi \circ (I_d \wedge \psi) = \phi \circ \psi$ , donc  $\phi \circ \psi$  est un inf sur-filtre.

(b') s'obtient par dualité à (b). ■

**Proposition 5.1.3** Si  $\psi$  un opérateur croissant et extensif et  $\alpha$  est une ouverture algébrique sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$ , alors  $\alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  sont des sur-filtres et  $\psi \circ \alpha$ ,  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$  sont des inf sur-filtres.

**Démonstration** Nous avons  $\alpha \circ \psi \circ \alpha \circ \psi \geq \alpha \circ \alpha \circ \psi = \alpha \circ \psi$  et  $\psi \circ \alpha \circ \psi \circ \psi \circ \alpha \circ \psi \geq \psi \circ \alpha \circ \alpha \circ \psi = \psi \circ \alpha \circ \psi$ . Ainsi,  $\alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  sont des sur-filtres.

Aussi,  $\psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \psi \circ \alpha) \geq \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha) = \psi \circ \alpha \circ \alpha = \psi \circ \alpha$  et  $\alpha \circ \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha \circ \psi \circ \alpha) \geq \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha \circ \alpha) = \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ \alpha = \alpha \circ \psi \circ \alpha$ . Donc,  $\psi \circ \alpha$  et  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$  sont des inf sur-filtres.

■

Cette proposition nous indique comment construire des sur-filtres et des inf sur-filtres.

**Proposition 5.1.4** Soient  $\psi$  un opérateur et  $\alpha$  une ouverture algébrique sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$ .

- (1) Si  $\psi$  est un sous-filtre, alors  $\alpha \circ \psi$ ,  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha$  sont des sous-filtres.

(2) Si  $\psi$  est un sup sous-filtre alors  $\alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  sont des sup sous-filtres.

**Démonstration** (1)  $\alpha \circ \psi$ ,  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha$  sont des sous-filtres comme composées de sous-filtres.

(2) Supposons que  $\psi$  est un sup sous-filtre. Alors,  $\alpha \circ \psi \circ (I_d \vee \alpha \circ \psi) \leq \alpha \circ \psi \circ (I_d \vee \psi) = \alpha \circ \psi$  et  $\psi \circ \alpha \circ \psi \circ (I_d \vee \psi \circ \alpha \circ \psi) \leq \psi \circ \alpha \circ \psi \circ (I_d \vee \psi \circ \psi) \leq \psi \circ \alpha \circ \psi \circ (I_d \vee \psi) = \psi \circ \alpha \circ \psi$ . Donc  $\alpha \circ \psi$  et  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  sont des sup sous-filtres. ■

Cette proposition nous indique comment construire des sous-filtres et des sup sous-filtres.

**Proposition 5.1.5** Soient  $\psi$  un opérateur croissant et  $\alpha$  une ouverture algébrique sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Si  $\alpha \leq \psi$  alors :

(1)  $\alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  et  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$  sont des sur-filtres

(2)  $\psi \circ \alpha$ ,  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$  sont des inf sur-filtres.

(3) De plus, si  $\psi$  est anti-extensif, alors  $\alpha \circ \psi = \psi \circ \alpha = \alpha \circ \psi \circ \alpha = \psi \circ \alpha \circ \psi = \alpha$

**Démonstration** Supposons que  $\alpha \leq \psi$ .

(1) Nous avons  $(\alpha \circ \psi) \circ (\alpha \circ \psi) \geq \alpha \circ \alpha \circ \alpha \circ \psi = \alpha \circ \alpha \circ \psi = \alpha \circ \psi$  et  $(\psi \circ \alpha \circ \psi) \circ (\psi \circ \alpha \circ \psi) \geq \psi \circ \alpha \circ \alpha \circ \alpha \circ \psi = \psi \circ \alpha \circ \alpha \circ \psi = \psi \circ \alpha \circ \psi$ . Enfin,  $(\alpha \circ \psi \circ \alpha) \circ (\alpha \circ \psi \circ \alpha) = \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ \psi \circ \alpha \geq \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ \alpha \circ \alpha = \alpha \circ \psi \circ \alpha$ . Donc  $\alpha \circ \psi$ ,  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  et  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$  sont des sur-filtres.

(2) Nous avons  $\psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \psi \circ \alpha) \geq \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha \circ \alpha) = \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha) = \psi \circ \alpha \circ \alpha = \psi \circ \alpha$  et  $\alpha \circ \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha \circ \psi \circ \alpha) \geq \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha \circ \alpha \circ \alpha) = \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha \circ \alpha) = \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ (I_d \wedge \alpha) = \alpha \circ \psi \circ \alpha \circ \alpha = \alpha \circ \psi \circ \alpha$ . Donc  $\psi \circ \alpha$ ,  $\alpha \circ \psi \circ \alpha$  sont des inf sur-filtres.

(2) Supposons en plus que  $\psi$  est anti-extensif. Alors  $\alpha \circ \psi \leq \alpha$  et  $\alpha \circ \psi \geq \alpha \circ \alpha = \alpha$  donc  $\alpha \circ \psi = \alpha$ . Par ailleurs,  $\alpha = \alpha \circ \alpha \leq \psi \circ \alpha \leq \alpha$  ainsi  $\psi \circ \alpha = \alpha$ . De plus nous avons,  $\alpha \circ \psi \circ \alpha = \alpha \circ \alpha = \alpha$ . De la même manière, nous avons  $\psi \circ \alpha \circ \psi = \alpha \circ \psi = \alpha$ . ■

Le (1) de la Proposition 5.1.4 et la Proposition 5.1.5 donnent que  $\alpha \circ \psi$  et  $\psi \circ \alpha \circ \psi$  sont

des filtres.

**Proposition 5.1.6** *Soit  $\psi$  un opérateur sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$ .*

1. *Si  $\psi$  est un inf sur-filtre alors  $I_d \wedge \psi$  est une ouverture algébrique.*
2. *Si  $\psi$  est un sup sous-filtre alors  $I_d \vee \psi$  est une fermeture algébrique.*

**Démonstration** Supposons que  $\psi$  est un inf sur-filtre. Alors  $(I_d \wedge \psi) \circ (I_d \wedge \psi) = (I_d \wedge \psi) \wedge \psi \circ (I_d \wedge \psi) = (I_d \wedge \psi) \wedge \psi = I_d \wedge \psi$  et  $I_d \wedge \psi \leq I_d$ . Ainsi,  $I_d \wedge \psi$  est anti-extensif et idempotent et donc est une ouverture algébrique. La preuve pour la fermeture algébrique se déduit par dualité à celle de l'ouverture algébrique. ■

Un opérateur  $\psi$  sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$  est un *filtre morphologique fort* si  $\psi$  est à la fois un inf sur-filtre et un sup sous-filtre.

Les ouvertures et les fermetures algébriques sur  $(\mathcal{L}, \leq)$  sont des filtres morphologiques forts. En effet, si  $\alpha$  une ouverture algébrique sur  $(\mathcal{L}, \leq)$ , alors  $\alpha$  est croissant,  $\alpha \circ \alpha = \alpha$  et  $\alpha \leq I_d$ . Ainsi  $\alpha = \alpha \wedge I_d$  et alors  $\alpha \circ \alpha = \alpha \circ (\alpha \wedge I_d)$  donc  $\alpha$  est un inf sur-filtre. Aussi,  $I_d = I_d \vee \alpha$  et alors,  $\alpha = \alpha \circ I_d = \alpha \circ (I_d \vee \alpha)$  donc  $\alpha$  est un sup sous-filtre. La preuve pour les fermetures algébriques se déduit par dualité à celle des ouvertures algébriques.

## 5.2 Les quatre enveloppes

Soit  $\psi$  un opérateur croissant sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$ . Notons par :

$\overline{\psi} = \vee \{\alpha \mid \alpha \text{ ouverture algébrique, } \alpha \leq \psi\}$ , la plus grande ouverture algébrique qui minore  $\psi$  et  $\underline{\psi} = \wedge \{\beta \mid \beta \text{ fermeture algébrique, } \beta \geq \psi\}$ , la plus petite fermeture algébrique qui majore  $\psi$ .

**Théorème 5.2.1** *Si  $\psi$  un filtre morphologique alors, nous avons :  $\overline{\psi} \leq \psi \circ \overline{\psi} \leq \psi \leq \psi \circ \underline{\psi} \leq \underline{\psi}$ .*

Les opérateurs  $\bar{\psi}$  et  $\psi \circ \bar{\psi}$  sont les enveloppes inférieures de  $\psi$  et les opérateurs  $\psi \circ \underline{\psi}$  et  $\underline{\psi}$  sont les enveloppes supérieures de  $\psi$ .

**Démonstration** Nous avons  $\bar{\psi} \leq \bar{\psi} \circ \bar{\psi} \leq \psi \circ \bar{\psi}$ . Aussi,  $\bar{\psi} \leq I_d$  donc  $\psi \circ \bar{\psi} \leq \psi$ . Les autres inégalités s'obtiennent par dualité. ■

Ce théorème en est un d'approximation. En effet, il nous montre comment approcher au mieux un filtre morphologique par l'opérateur le plus proche et ce, au sens de la relation d'ordre à l'intérieur d'une classe d'opérateurs ayant des propriétés prédéfinies, telles que les ouvertures, les fermetures, les inf sur-filtres ou les sup sous-filtres.

### 5.3 Filtres Alternés Séquentiels

Les filtres alternés séquentiels (*FAS*), dont nous donnerons une définition détaillée plus loin, sont les filtres les plus utilisés en pratique [8], [17], [14], [15], [9]. Ils consistent en une séquence alternée d'ouverture morphologique et de fermeture morphologique de taille d'éléments structurants croissante. La taille de l'élément structurant est déterminée par celle des détails significatifs de l'image.

**Théorème 5.3.1** Soient  $\psi$  et  $\phi$  deux filtres morphologiques sur le treillis complet  $(\mathcal{L}, \leq)$  tels que  $\phi \geq \psi$ . Alors :

$$(1) \quad \phi \geq \phi \circ \psi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \vee \psi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \wedge \psi \circ \phi \geq \psi \circ \phi \circ \psi \geq \psi$$

(2)  $\phi \circ \psi$ ,  $\psi \circ \phi$ ,  $\phi \circ \psi \circ \phi$  et  $\psi \circ \phi \circ \psi$  sont des filtres morphologiques

(3)  $\phi \circ \psi \circ \phi$  est le plus petit filtre morphologique supérieur à  $\phi \circ \psi \vee \psi \circ \phi$  et  $\psi \circ \phi \circ \psi$  est le plus grand filtre morphologique inférieur à  $\phi \circ \psi \wedge \psi \circ \phi$

**Démonstration** (1)  $\phi \geq \psi \implies \phi = \phi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \implies \phi = \phi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \circ \phi$  ainsi  $\phi \geq \phi \circ \psi \circ \phi$ . Nous avons aussi  $\phi \geq \psi \implies \psi \circ \phi \geq \psi \circ \psi = \psi \implies \phi \circ \psi \circ \phi \geq \phi \circ \psi$  et

$\phi \geq \psi \implies \phi \circ \psi \geq \psi \circ \psi = \psi \implies \phi \circ \psi \circ \phi \geq \psi \circ \phi$ . Donc  $\phi \circ \psi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \vee \psi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \wedge \psi \circ \phi$ . Par ailleurs,  $\phi \geq \psi \implies \phi = \phi \circ \phi \geq \psi \circ \phi \implies \phi \circ \psi \geq \psi \circ \phi \circ \psi$  et  $\phi \geq \psi \implies \phi = \phi \circ \phi \geq \phi \circ \psi \implies \psi \circ \phi \geq \psi \circ \phi \circ \psi$ , donc  $\phi \circ \psi \wedge \psi \circ \phi \geq \psi \circ \phi \circ \psi$ . Enfin,  $\phi \geq \psi \implies \phi \circ \psi \geq \psi \circ \psi = \psi \implies \psi \circ \phi \circ \psi \geq \psi \circ \psi = \psi$ . Ce qui nous donne notre inégalité.

**(2)**  $\phi \circ \psi$ ,  $\phi \circ \psi \circ \phi$  et  $\psi \circ \phi \circ \psi$  sont des opérateurs croissants comme la composée de tels opérateurs. Il reste à montrer qu'ils sont idempotents.

- Nous avons  $\phi \circ \psi \circ \phi \circ \psi \geq \phi \circ \psi \circ \psi \circ \psi = \phi \circ \psi$  et  $\phi \circ \psi = \phi \circ \phi \circ \phi \circ \psi \geq \phi \circ \psi \circ \phi \circ \psi$  donc  $\phi \circ \psi \circ \phi \circ \psi = \phi \circ \psi$
- Nous avons  $\psi \circ \phi \circ \psi \circ \phi \geq \psi \circ \psi \circ \psi \circ \phi = \psi \circ \phi$  et  $\psi \circ \phi = \psi \circ \phi \circ \phi \circ \phi \geq \psi \circ \phi \circ \psi \circ \phi$  donc  $\psi \circ \phi \circ \psi \circ \phi = \psi \circ \phi$
- Nous avons  $\phi \circ \psi \circ \phi \circ \phi \circ \psi \circ \phi = \phi \circ \psi \circ \phi \circ \psi \circ \phi = \phi \circ \psi \circ \phi$ , car  $\phi$  et  $\phi \circ \psi$  sont des filtres morphologiques. Nous montrons de la même façon que  $\psi \circ \phi \circ \psi$  est idempotent.

**(3)** Montrons que  $\phi \circ \psi \circ \phi$  et  $\psi \circ \phi \circ \psi$  sont respectivement le plus petit filtre et le plus grand filtre morphologiques supérieur à  $\phi \circ \psi \vee \psi \circ \phi$  et inférieur à  $\phi \circ \psi \wedge \psi \circ \phi$ .

- Soit  $f$  un filtre morphologique supérieur à  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$ . Alors  $f = f \circ f \geq \phi \circ \psi \circ \psi \circ \phi = \phi \circ \psi \circ \phi$ . Puisque  $\phi \circ \psi \circ \phi$  est un filtre morphologique supérieur à  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$  alors c'est le plus petit majorant de  $\phi \circ \psi \wedge \psi \circ \phi$ .

- Soit  $f$  un filtre morphologique inférieur à  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$ . Alors  $f = f \circ f \leq \psi \circ \phi \circ \phi \circ \psi = \psi \circ \phi \circ \psi$  donc  $\psi \circ \phi \circ \psi$  est le plus grand minorant de  $\psi \circ \phi \wedge \phi \circ \psi$ . ■

**Corollaire 5.3.2** Si  $\phi_i$  est la fermeture morphologique et  $\psi_i$  est l'ouverture morphologique obtenues par l'élément structurant de taille  $i$ , alors  $m_i = \psi_i \circ \phi_i$ ,  $n_i = \phi_i \circ \psi_i$ ,  $r_i = \phi_i \circ \psi_i \circ \phi_i$  et  $s_i = \psi_i \circ \phi_i \circ \psi_i$  sont des filtres.

**Définition 5.3.3** Un filtre alternatif séquentiel de taille  $i$  est défini comme étant une

*combinaison séquentielle de l'un des filtres  $m_i$ ,  $n_i$ ,  $r_i$ , ou  $s_i$ , la première séquence étant constituée du filtre obtenu en utilisant l'élément structurant de taille 1 et la dernière séquence le filtre obtenu en utilisant l'élément structurant de taille  $i$ .*

## 5.4 Utilisation des FAS pour la réduction du bruit

Dans cette partie, nous allons examiner les performances des filtres alternés séquentiels face à un bruit.

À chaque étape de l'acquisition d'une scène, des perturbations ( poussières, amplification, quantification) vont détériorer la qualité de l'image. Ces perturbations sont alors regroupées sous le nom de *bruit d'image*. Les bruits d'image les plus rencontrés peuvent être modélisés par une distribution gaussienne, uniforme ou impulsionnelle.

Ainsi, un filtre a pour but de réduire ces perturbations tout en conservant des informations pertinentes comme les contours et les lignes présentes dans l'image.

Par ailleurs, il existe plusieurs types de mesures de performance des filtres, à savoir, les mesures objectives et les mesures subjectives.

Les mesures subjectives, dont le critère psychovisuel, emprunté à la psychologie, utilisent le jugement humain pour évaluer la performance d'un filtre. De façon précise, ces mesures consistent à observer une série d'images filtrées et de leur attribuer une note sur une certaine échelle [1] [22]. Ces mesures peuvent être suffisantes pour certaines applications, mais peuvent s'avérer difficiles à mettre en pratique dans d'autres situations. En effet, le nombre de caractéristiques que l'oeil humain peut distinguer est limité. Par exemple, l'oeil ne peut faire la différence entre deux niveaux de gris légèrement différents. De plus, le jugement dépendra de l'expérience de chaque individu.

D'autre part, les mesures objectives ont pour but de mesurer les performances des filtres

suivant un critère prédéfini. Ce critère peut concerner le rapport signal bruit ou la conservation des contours, des notions que nous allons présenter ci-dessous.

### **Le rapport signal bruit(SNR)**

Soient une image idéale  $f$  de moyenne  $\mu_f$  et de variance  $\sigma_f^2$  et  $\tilde{f}$  une image dégradée de moyenne  $\mu_{\tilde{f}}$ . Le rapport signal bruit de l'image  $f$  par l'image  $\tilde{f}$  noté  $SNR_{\tilde{f}}(f)$ , est défini par :  $SNR_{\tilde{f}}(f) = \frac{(\mu_f - \mu_{\tilde{f}})^2}{\sigma_f^2}$ . Cette mesure est objective, quantifiable et permet de dire si un filtre est adapté ou non à un type de bruit donné [20]. Un filtre sera d'autant plus adapté pour un bruit si le rapport signal bruit est petit. À l'opposé, il est moins conseillé pour un bruit si ce rapport est grand.

### **La conservation des contours**

La conservation des contours est l'un des objectifs avoués du filtrage. En fait, c'est la capacité d'un filtre de réduire les variations d'intensité au sein de chaque région de l'image, tout en respectant les transitions entre les régions homogènes de l'image. Il existe plusieurs types de transitions à savoir les contours de type marches et double marches. Nous utiliserons le critère psychovisuel pour évaluer la conservation des contours.

### **La méthode d'évaluation**

Un filtre alterné séquentiel se caractérise comme étant une séquence alternée d'ouverture et de fermeture de taille d'élément structurant croissante. La taille du dernier élément structurant, quant à elle, est déterminée par celle des détails significatifs de l'image.

Soient une image idéale  $f$  (figure 5.1) à laquelle nous ajoutons un bruit impulsionnel de probabilité 0.02 pour obtenir une image bruitée  $\tilde{f}$  (figure 5.2). Nous allons appliquer à l'image bruitée  $\tilde{f}$  trois filtres alternés séquentiels, à savoir :

1.  $FAS2$  qui est le filtre formé d'une ouverture morphologique à niveaux de gris suivie d'une fermeture morphologique à niveaux de gris par un élément structurant de taille 2.
2.  $FAS3$  qui est le filtre formé de  $FAS2$  suivie d'une ouverture morphologique à niveaux de gris et d'une fermeture morphologique à niveaux de gris par un élément

structurant de taille 3.

3. *FAS4* qui est le filtre formé de *FAS3* suivie d'une ouverture morphologique à niveaux de gris et d'une fermeture morphologique à niveaux de gris par un élément structurant de taille 4.

Nous allons ensuite évaluer la performance de ces filtres suivant le critère psychovisuel, le rapport signal bruit et la conservation des contours. Les contours considérés sont de type lignes et de type marches et l'opérateur de détection des contours est le gradient morphologique à niveaux de gris par un élément structurant de taille 2. Les différents éléments structurants considérés sont carrés.

## 5.5 Résultats expérimentaux et commentaires

Dans cette partie, nous présentons et commentons les images obtenues après le passage de nos différents filtres suivant les critères définis précédemment.

Dans le cas du bruit considéré, nous avons les résultats suivants :

Le rapport signal bruit (SNR) de l'image originale par rapport à	
l'image bruitée	$0.162 \times 10^3$
l'image filtrée par FAS2	$0.619 \times 10^3$
l'image filtrée par FAS3	$0.0733 \times 10^3$
l'image filtrée par FAS4	$0.0427 \times 10^3$

Nous pouvons remarquer que le filtre alterné séquentiel *FAS4* est celui qui réduit de façon significative le rapport signal bruit. Par ailleurs, nous remarquons que ce rapport décroît quand nous augmentons le nombre d'opérateurs pour constituer nos différents filtres alternés séquentiels.

Nous remarquons (figure 5.14, figure 5.15, figure 5.16 et figure 5.9) que les contours de

type lignes présents dans l'image sont correctement détectés après l'utilisation des trois filtres alternés séquentiels  $F.AS2$ ,  $F.AS3$  et  $F.AS4$ . De même, nous remarquons (figure 5.23, figure 5.24, figure 5.25 et figure 5.18) que les contours de type marches sont aussi correctement détectés.

Ainsi, nos différents filtres alternés séquentiels éliminent les perturbations tout en préservant les transitions entre les régions homogènes de l'image.

En conclusion, nous remarquons que le filtre alterné séquentiel  $F.AS4$  est celui qui réduit de façon significative le rapport signal bruit. Par ailleurs, nous constatons que les trois filtres alternés séquentiels  $F.AS2$ ,  $F.AS3$  et  $F.AS4$  permettent une bonne conservation des transitions entre les régions homogènes de l'image. Toutefois, le choix de l'un de ces filtres sera conditionné par ce que nous voulons faire de l'image après filtrage. Ainsi, nous proposons l'utilisation de l'un des filtres alternés séquentiels  $F.AS2$ ,  $F.AS3$  et  $F.AS4$  dans le cas du filtrage de notre image en vue d'une détection des contours et le filtre alterné séquentiel  $F.AS4$  dans le cas du filtrage en vue d'une détection des contours et la réduction du rapport signal bruit.



Figure 5.1 – *Image originale.*



Figure 5.2 – *Image bruitée.*



Figure 5.3 – *Image filtrée par une ouverture morphologique à niveaux de gris.*



Figure 5.4 – *Image filtrée par une fermeture morphologique à niveaux de gris.*



Figure 5.5 – Image filtrée par un filtre FAS2.



Figure 5.6 – Image filtrée par un filtre FAS3.



Figure 5.7 – *Image filtrée par un filtre FAS4.*

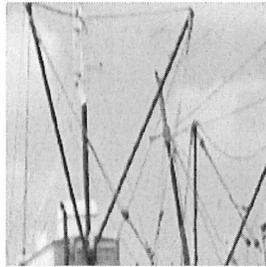


Figure 5.8 – *Image extraite de l'image originale contenant des contours de type lignes.*

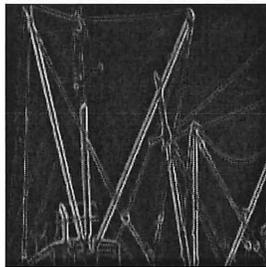


Figure 5.9 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image originale contenant des contours de type lignes.*

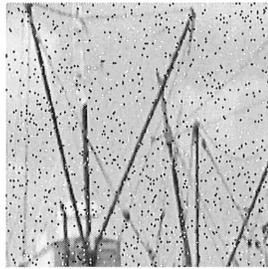


Figure 5.10 – *Image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type lignes.*

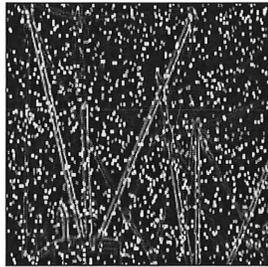


Figure 5.11 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type lignes.*

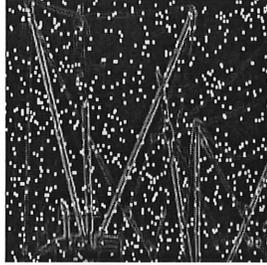


Figure 5.12 – *Image de gradient de l'image extraite de l'ouverture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type lignes.*

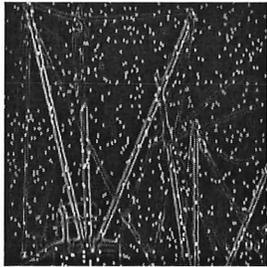


Figure 5.13 – *Image de gradient de l'image extraite de la fermeture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type lignes.*

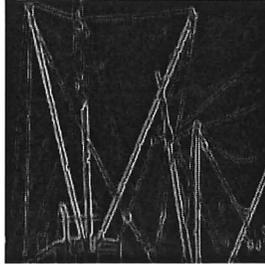


Figure 5.14 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS2 contenant des contours de type lignes.*

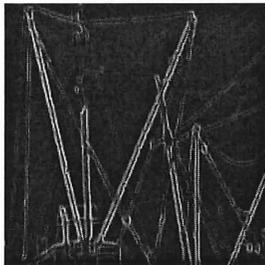


Figure 5.15 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS3 contenant des contours de type lignes.*

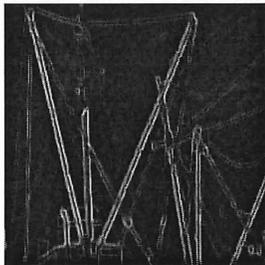


Figure 5.16 – *Image de gradient image extraite de l'image FAS4 contenant des contours de type lignes.*



Figure 5.17 – *Image extraite de l'image originale contenant des contours de type marches.*

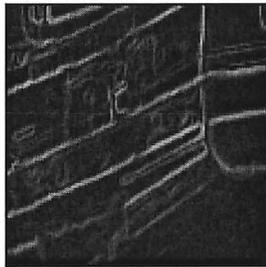


Figure 5.18 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image originale contenant des contours de type marches.*



Figure 5.19 – *Image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type marches.*

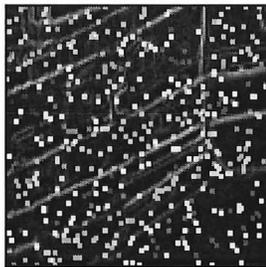


Figure 5.20 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image bruitée contenant des contours de type marches.*

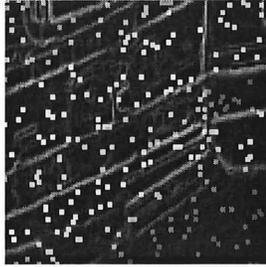


Figure 5.21 – *Image de gradient de l'image extraite de l'ouverture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type marches.*

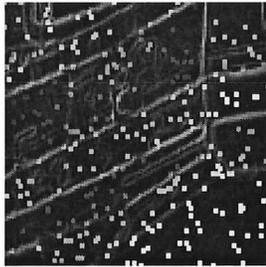


Figure 5.22 – *Image de gradient de l'image extraite de la fermeture morphologique à niveaux de gris contenant des contours de type marches.*

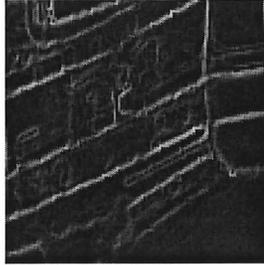


Figure 5.23 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS2 contenant des contours de type marches.*

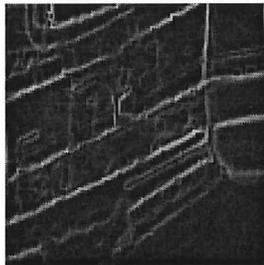


Figure 5.24 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS3 contenant des contours de type marches.*

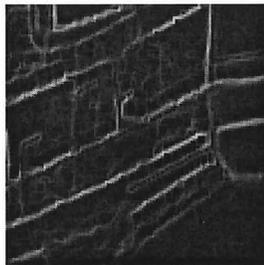


Figure 5.25 – *Image de gradient de l'image extraite de l'image FAS4 contenant des contours de type marches.*

# CHAPITRE 6

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons ainsi présenté une introduction à la morphologie mathématique. Après avoir rappelé les notions de treillis utilisées en morphologie mathématique, nous avons exposé les opérateurs de base de la morphologie mathématique, à savoir la dilatation morphologique binaire et l'érosion morphologique binaire. Par la suite, nous avons présenté les composées élémentaires de ces deux opérateurs de base, soit la fermeture morphologique binaire et l'ouverture morphologique binaire. Ensuite, nous avons effectué le passage entre la morphologie mathématique binaire et celle à niveaux de gris, à travers les notions de sommet de surface et d'ombre. Enfin, nous avons présenté quelques méthodes de construction des filtres morphologiques et une application au filtrage d'images. En effectuant des choix judicieux de nos opérateurs morphologiques ou en combinant des opérateurs morphologiques de base, sans oublier de tenir compte du type de bruit, il ressort que les filtres morphologiques, tout en éliminant le bruit préservent assez bien les contours. Dans bien des cas, le filtrage morphologique est une étape importante vers la segmentation d'une image en régions.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. Nair, A. Mitiche et J. K. Aggarwal. On comparing the performance of object recognition systems. *Internat. Conf. Image Process*, pp. 631-634, 1995.
- [2] G. Birkhoff. Lattice theory, *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, Vol(25), 1967.
- [3] G. Matheron. Random set and integral geometry, John Wiley, New York. 1975.
- [4] Henk. J. A. M. Heijmans. Mathematical morphology : An algebraic approach. *CWI Newsletter*, no. 14, pp. 7-27, 1987.
- [5] Henk. J. A. M. Heijmans et C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology : I. Dilation and Erosion. *Computer Vision, Graphics, and Image processing*, Vol(50), pp 245-295, 1990.
- [6] Henk. J. A. M. Heijmans et C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology : II. Openings and closings. *Computer Vision, Graphics, and Image processing*, Vol(54), pp 74-97, 1991.
- [7] Henk. J. A. M. Heijmans. Mathematical morphology : A modern approach in image processing based on algebra and geometry. *SIAM Review*, Vol(37), no. 1, pp. 1-36, 1995.
- [8] Henk. J. A. M. Heijmans. Composing morphological filters. *IEEE Transaction on image processing*, Vol(6), no. 5, 1997.

- [9] J. A. Bangham et S. Marshall. Image and signal processing with Mathematical Morphology. *Electronics and Communication Engineering Journal*, pp. 117-128. 1998.
- [10] J. Serra. Image analysis and mathematical morphology I, Academic press, London, 1982.
- [11] J. Serra. Image analysis and mathematical morphology II. Academic press, London, 1988.
- [12] M. Schmitt et J. Mattioli. Morphologie mathématique. Masso, Paris, 1993.
- [13] Monique et Francis Biquard. Signaux systèmes linéaires et bruit en électronique édition Marketing. 1992.
- [14] P. Maragos et R. W. Schafer. Morphological Filters- Part I: Their set-theoretic analysis and relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol(35), no. 8, pp. 1170-1184, 1987b.
- [15] P. Maragos et R. W. Schafer. Morphological filters- part II: Their relations to median, order-statistics, and stack filters. Relations to linear shift-invariant filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 35, nO. 8, pp. 1153-1169, 1987a.
- [16] P. Maragos. A representation theory for mathematical image and signal processing. *IEEE Transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol(11), no. 6, 1989.
- [17] P. Soille. Morphological image analysis: Principles and applications. Springer- Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [18] Rafael C. Gonzalez et Richard E. Woods. Digital Image Processing. Addison- Wesley Publishing Compagny 1992.
- [19] Robert M. Haralick, Stanley R. Sternberg, et X. Zhuang. Image analysis using mathematical morphology, *IEEE Transactions on pattern Analysis and Machine*

- Intelligence*, Vol(PAMI-9). no. 4, pp 532-550, 1987.
- [20] Roland T. Chin et Chia-Lung Yeh. Quantitative Evaluation of Some Edge-Preserving Noise-Smoothing Techniques. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol(23), pp. 67-91, 1983.
- [21] S. R. Sternberg. Grayscale morphology, *Computer Vision, Graphics, and Image processing*, Vol(35), no. 3. pp 333-355, 1986.
- [22] T. B. Nguyen, D. Ziou. Contextual and non-contextual performance evaluation of edge detector. *Pattern Recognition Letters*, Vol(21), pp. 805-816. 2000.