

INFORMATION TO USERS

This manuscript has been reproduced from the microfilm master. UMI films the text directly from the original or copy submitted. Thus, some thesis and dissertation copies are in typewriter face, while others may be from any type of computer printer.

The quality of this reproduction is dependent upon the quality of the copy submitted. Broken or indistinct print, colored or poor quality illustrations and photographs, print bleedthrough, substandard margins, and improper alignment can adversely affect reproduction.

In the unlikely event that the author did not send UMI a complete manuscript and there are missing pages, these will be noted. Also, if unauthorized copyright material had to be removed, a note will indicate the deletion.

Oversize materials (e.g., maps, drawings, charts) are reproduced by sectioning the original, beginning at the upper left-hand corner and continuing from left to right in equal sections with small overlaps. Each original is also photographed in one exposure and is included in reduced form at the back of the book.

Photographs included in the original manuscript have been reproduced xerographically in this copy. Higher quality 6" x 9" black and white photographic prints are available for any photographs or illustrations appearing in this copy for an additional charge. Contact UMI directly to order.

UMI

A Bell & Howell Information Company
300 North Zeeb Road, Ann Arbor MI 48106-1346 USA
313/761-4700 800/521-0600

**MODULES COMPLÈTEMENT COSÉPARANTS ET
MODULES COMPLÈTEMENT SÉPARANTS SUR LES
ALGÈBRES HÉRÉDITAIRES DOCILES**

par

Diane Castonguay

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.).

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 26 janvier 1998

III - 1117



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-35663-9

Canada

Le 29 janvier 1998 , le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.
date

Président-rapporteur: M. Jacques Dubois
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Shiping Liu
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Bernard Courteau
Département de mathématiques et d'informatique

Membre: M. Ibrahim Assem
Département de mathématiques et d'informatique

SOMMAIRE

Les algèbres fortement simplement connexes jouent un rôle important dans la théorie des représentations des algèbres. Il est donc utile de pouvoir construire les algèbres de ce type. On donne un tel résultat pour une classe particulière d'algèbres.

La notion d'algèbre fortement simplement connexe a été introduite par SKOWROŃSKI [14]). Nous voulons classifier les extensions et les coextensions ponctuelles fortement simplement connexes d'une classe d'algèbres incluant les algèbres héréditaires dociles. Pour ce faire, il suffit de classifier les modules complètement coséparants et les modules complètement séparants car, par ASSEM et LIU [3], une extension (ou coextension) ponctuelle d'une algèbre A par un A -module M est fortement simplement connexe si et seulement si A est fortement simplement connexe et M est un A -module complètement coséparant (ou complètement séparant, respectivement).

Même si la plupart des notions importantes sont rappelées, le lecteur doit avoir des connaissances de base dans la théorie des représentations des algèbres associatives et des connaissances générales en algèbre. Un rappel de toutes les notions nécessaires aurait trop alourdi le texte et en aurait dilué le contenu. Nous nous en sommes donc tenus aux notions essentielles en admettant certains faits secondaires.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur Ibrahim Assem ainsi que mon codirecteur Shiping Liu qui m'ont encouragé tout au long de ma maîtrise. Je désire également remercier tous mes collègues de maîtrise (Daniel Brodeur, Juan Carlos Bustamante, James Castonguay, Mathieu Gaouette, François Huard, Jessica Lévesque et Pierre Poulin) pour les discussions autant mathématiques que générales, tout particulièrement Jessica Lévesque pour l'entraide féminine.

J'aimerais remercier le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) qui m'a octroyé une bourse durant mes études de maîtrise. Je veux souligner la contribution financière d'Ibrahim Assem, Shiping Liu et Bernard Courteau pour la dernière partie de mes études de maîtrise. Finalement, je dois remercier toutes les autres personnes qui m'ont aidé de près ou de loin dans mon travail.

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 — NOTIONS PRÉLIMINAIRES	3
1.1 Carquois et sous-carquois	3
1.2 Cycles et contours	6
1.3 Numérotations admissibles	9
1.4 Algèbres	11
1.5 Catégories	16
1.6 Modules et représentations	17
1.7 Carquois d'Auslander-Reiten	20
1.8 Formes quadratiques	22
1.9 Algèbres héréditaires	28
1.10 Extensions ponctuelles	35
CHAPITRE 2 — ALGÈBRES FORTEMENT SIMPLEMENT CONNEXES	37
2.1 Groupe fondamental	37
2.2 Algèbres fortement simplement connexes	38
2.3 La condition de séparation	41
2.4 Construction d'algèbres fortement simplement connexes	43

CHAPITRE 3 — MODULES COMPLÈTEMENT COSÉPARANTS ET MODULES COMPLÈTEMENT SÉPARANTS SUR UNE ALGÈBRE FORTEMENT SIMPLEMENT CONNEXE	48
3.1 Algèbres Schuriennes	48
3.2 Résultats préparatoires sur les algèbres d'arbre	54
3.3 Algèbres héréditaires étoilées à trois branches	58
3.4 Le cas \tilde{D}_n	63
CONCLUSION	74
BIBLIOGRAPHIE	75

INTRODUCTION

Les techniques de recouvrement permettent de ramener la théorie des représentations d'une algèbre sobre, connexe et de dimension finie à celle d'une algèbre plus simple, dite simplement connexe. On connaît bien les algèbres simplement connexes de représentation finie. Par contre, celles de représentation infinie sont plus difficiles à étudier. D'où l'introduction d'une sous-classe de la classe des algèbres simplement connexes qui est plus simple à étudier. Ces algèbres, introduites par SKOWROŃSKI [14], sont appelées les algèbres fortement simplement connexes.

Il est naturel de se demander comment l'on peut construire les algèbres fortement simplement connexes. Puisque le carquois d'une algèbre fortement simplement connexe n'a pas de cycles orientés, toute telle algèbre peut être construite par extensions (ou coextensions) ponctuelles répétées. Ce point de vue a été adopté dans ASSEM et LIU [3] où il a été montré que l'extension (ou coextension) ponctuelle $A[M]$ de l'algèbre A par le A -module M est fortement simplement connexe si et seulement si A est fortement simplement connexe et M est un A -module complètement coséparant (ou complètement séparant, respectivement).

Nous donnerons, dans ce mémoire, une classification des extensions et des coextensions ponctuelles fortement simplement connexes d'une classe d'algèbres contenant les algèbres héréditaires dociles (c'est-à-dire les algèbres héréditaires dont le carquois est un diagramme de Dynkin ou un diagramme euclidien). En appliquant la caractérisation vue plus haut, le problème se ramène à classifier tous les modules complètement coséparants et tous les modules complètement séparants sur cette classe d'algèbres dont le carquois est un arbre (c'est-à-dire autre que \tilde{A}_n).

Le premier chapitre est un rappel des notions de la théorie des représentations. Le deuxième chapitre est consacré aux résultats qui se retrouvent dans l'article d'ASSEM et LIU [3]. Le troisième et dernier chapitre donne la classification des modules complètement coséparants et des modules complètement séparants pour les algèbres héréditaires de type \mathbf{A}_n , les algèbres héréditaires étoilées à trois branches (qui contiennent les algèbres héréditaires de type \mathbf{D}_n , \mathbf{E}_i et $\tilde{\mathbf{E}}_i$ pour $i \in \{6, 7, 8\}$) et celles de type $\tilde{\mathbf{D}}_n$. Ces résultats sont contenus dans ASSEM et CASTONGUAY [2].

CHAPITRE 1

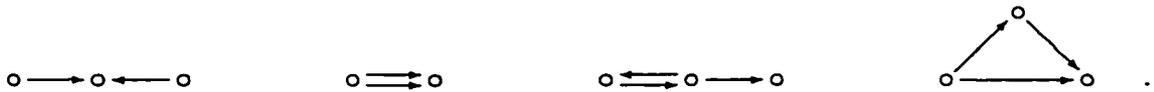
NOTIONS PRÉLIMINAIRES

1.1 Carquois et sous-carquois

Pour débiter, introduisons la notion de carquois ainsi que plusieurs notions combinatoires reliées à ce concept. Ces notions nous seront très utiles par la suite. Pour plus de renseignements sur ce sujet, nous référons à GABRIEL [11].

Définition 1.1.1 *Un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est un quadruplet formé de deux ensembles: Q_0 (dont les éléments sont appelés **points**), Q_1 (dont les éléments sont appelés **flèches**), et de deux applications $s, b : Q_1 \rightarrow Q_0$ qui associent à chaque flèche $\alpha \in Q_1$ sa source $s(\alpha) \in Q_0$ et son but $b(\alpha) \in Q_0$. Une flèche α de source $x = s(\alpha)$ et de but $y = b(\alpha)$ est notée $\alpha : x \rightarrow y$ ou encore $x \xrightarrow{\alpha} y$. Un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est noté brièvement Q .*

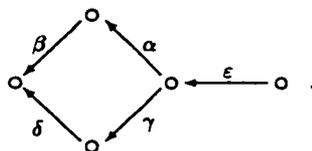
Exemples 1.1.2 Les exemples suivants représentent des carquois:



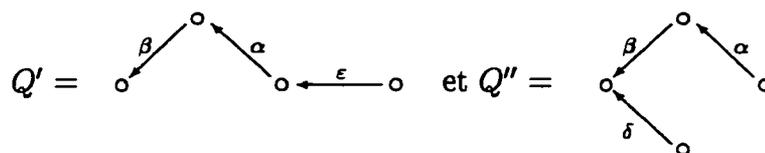
Lorsqu'on définit un objet mathématique, il est naturel de s'intéresser au concept de sous-objet correspondant. Ainsi, définissons la notion de sous-carquois.

Définition 1.1.3 Un sous-carquois d'un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ est un carquois $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', b')$ tel que $Q'_0 \subseteq Q_0$, $Q'_1 \subseteq Q_1$ et les restrictions $s|_{Q'_1}$, $b|_{Q'_1}$ de s , b à Q'_1 sont respectivement égales à s' , b' . Un tel sous-carquois est **plein** si $Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha), b(\alpha) \in Q'_0\}$, c'est à dire: Q'_1 est l'ensemble de toutes les flèches dans Q_1 dont la source et le but appartiennent à Q'_0 . Il est donc entièrement déterminé par Q'_0 .

Exemple 1.1.4 Soit Q le carquois



Alors, les carquois



sont des sous-carquois de Q . Notons que Q' est plein tandis que Q'' ne l'est pas. En effet, $s(\gamma), b(\gamma) \in Q''_0$ mais Q''_1 ne contient pas la flèche γ .

Un carquois Q est **fini** si Q_0 et Q_1 sont des ensembles finis. Le **graphe sous-jacent** \overline{Q} d'un carquois Q est obtenu à partir de celui-ci en oubliant l'orientation des flèches. Le carquois Q est dit **connexe** si \overline{Q} est un graphe connexe.

Exemple 1.1.5 Soit Q le carquois $\circ \rightleftarrows \circ$ alors \overline{Q} est le graphe $\circ \equiv \circ$.

Soient $Q = (Q_0, Q_1, s, b)$ un carquois et $x, y \in Q_0$. Un **chemin de longueur** $l \geq 1$ de source x et de but y (ou plus brièvement de x vers y) est une suite

$$(x | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l | y)$$

où $\alpha_i \in Q_1$ pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$ et tel que $s(\alpha_1) = x$, $b(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ pour tout $i \in \{1, \dots, l-1\}$ et $b(\alpha_l) = y$. Un tel chemin est aussi noté $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ et peut être visualisé dans le carquois Q , comme suit:

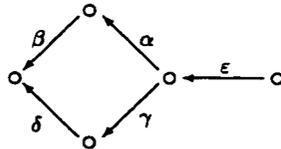
$$x = x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2 \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \xrightarrow{\alpha_{l-1}} x_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l} x_l = y$$

On définit la source $s(\alpha_1 \cdots \alpha_l)$ et le but $b(\alpha_1 \cdots \alpha_l)$ comme étant $s(\alpha_1 \cdots \alpha_l) = s(\alpha_1)$ et $b(\alpha_1 \cdots \alpha_l) = b(\alpha_l)$, respectivement. De plus, on associe à chaque point $x \in Q_0$ un **chemin de longueur 0**, appelé **chemin stationnaire** en x , et noté ε_x .

Un sous carquois plein Q' de Q est **convexe** si, pour tout chemin $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_{l-1} \rightarrow x_l$ dans Q avec $x_0, x_l \in Q'_0$, on a $x_i \in Q'_0$ pour tout $i \in \{1, \dots, l-1\}$.

À chaque flèche $\alpha \in Q_1$, on associe un **inverse formel**, noté α^{-1} . On pose $s(\alpha^{-1}) = b(\alpha)$ et $b(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$. Une **marche** dans Q est une composition formelle $\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_l^{n_l}$ où $\alpha_i \in Q_1$ et $n_i \in \{+1, -1\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$. On pose $s(\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_l^{n_l}) = s(\alpha_1^{n_1})$ et $b(\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_l^{n_l}) = b(\alpha_l^{n_l})$. Une marche $\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_l^{n_l}$ est dite **réduite** si elle ne contient pas de sous-marche de la forme $\alpha^{-1}\alpha$ ou $\alpha\alpha^{-1}$.

Exemple 1.1.6 Soit Q le carquois



alors $\delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon^{-1}\varepsilon\alpha\beta$ est une marche qui n'est pas réduite tandis que $\alpha\beta\delta^{-1}\gamma^{-1}$ et $\varepsilon\alpha\beta\delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon^{-1}$ sont des marches réduites.

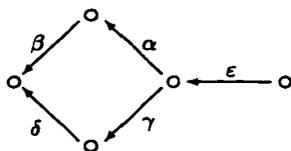
1.2 Cycles et contours

Un **cycle orienté** en x est un chemin de longueur $l \geq 1$ de x à x . Un carquois Q est **acyclique** s'il ne contient pas de cycle orienté.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce mémoire, Q désigne un carquois fini et acyclique.

Un **contour** (p, q) dans Q de x à y est une paire de chemins p, q de longueur positive ayant la même source x et le même but y .

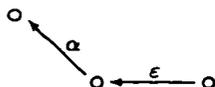
Exemple 1.2.1 Soit Q le carquois



alors $\varepsilon\alpha\beta, \varepsilon\gamma\delta$ sont des chemins de longueur 3. Le carquois



est un sous-carquois plein de Q qui n'est pas convexe tandis que le carquois

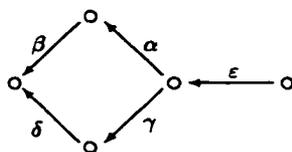


est un sous-carquois plein et convexe de Q . De plus, $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ et $(\varepsilon\alpha\beta, \varepsilon\gamma\delta)$ sont des contours de Q .

On veut caractériser les contours les plus simples. On introduit la notion de contours entrelacés.

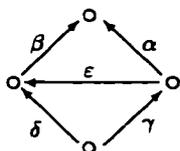
Un contour (p, q) dans Q de x à y est dit **entrelacé** si les chemins p et q ont un point en commun différent de x et de y . Un contour (p, q) est dit **réductible** s'il existe des chemins $p = p_0, p_1, \dots, p_m = q$ dans Q de x à y tels que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ le contour (p_{i-1}, p_i) est entrelacé. Dans ce cas, on dit aussi que p est réductible à q . Sinon, le contour est dit **irréductible**.

Exemples 1.2.2 (a) Soit Q le carquois



alors $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ est un contour irréductible tandis que $(\epsilon\alpha\beta, \epsilon\gamma\delta)$ est un contour entrelacé donc réductible.

(b) Soit Q le carquois

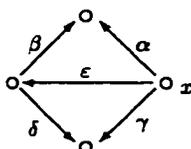


alors $(\gamma\alpha, \delta\beta)$ est un contour réductible. En effet, $(\gamma\alpha, \gamma\epsilon\beta)$ et $(\gamma\epsilon\beta, \delta\beta)$ sont des contours entrelacés. Par contre, $(\gamma\epsilon, \delta)$ et $(\alpha, \epsilon\beta)$ sont des contours irréductibles.

Soit C un sous-carquois de Q , on dit que C est un **cycle simple** si chaque point de C est l'extrémité d'exactly deux flèches dans C et s'il existe une énumération $\{x_0, x_1, \dots, x_l = x_0\}$ des points de C telle qu'il existe exactement une flèche entre x_i et

x_{i+1} dans C pour tout $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Soit C un cycle simple, on dit que C est un **contour** s'il est formé par un contour. Remarquons que C est toujours composé par un cycle non-orienté, puisque Q est acyclique.

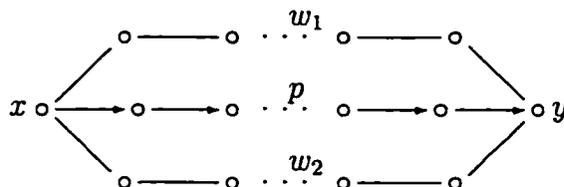
Exemples 1.2.3 (a) Soit Q le carquois



alors $\beta\alpha^{-1}\epsilon\delta\gamma^{-1}\epsilon$ est un cycle non-orienté, mais ne forme pas un cycle simple car le point x est l'extrémité de trois flèches, α, ϵ et γ . Par contre, $\alpha\beta^{-1}\delta\gamma^{-1}$ forme un cycle simple. Ce cycle simple n'est pas formé par un contour.

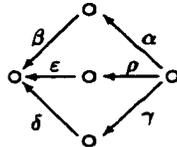
(b) Soit (p, q) un contour dans Q . Si (p, q) n'est pas entrelacé alors il forme un cycle simple.

Soit C un cycle simple qui n'est pas un contour. Notons $\sigma(C)$ le nombre de sources de C (qui est égal au nombre de puits de C). Ainsi, $\sigma(C) > 1$. Le cycle simple C est **réductible** s'il existe deux points $x, y \in C_0$ et un chemin p de x à y dans Q tels que



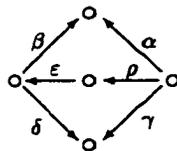
où le cycle C est composé des marches w_1 et w_2 telles w_1p^{-1}, w_2p^{-1} forment des cycles simples et $\sigma(w_1p^{-1}) < \sigma(C)$ et $\sigma(w_2p^{-1}) < \sigma(C)$. On dit alors qu'un chemin tel que p **réduit** le cycle simple C . Un cycle simple est **irréductible** s'il est composé d'un contour irréductible, ou bien, s'il n'est pas réductible par un chemin.

Exemples 1.2.4 (a) Soit Q le carquois



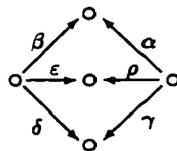
alors $\alpha\beta\delta^{-1}\gamma^{-1}$ forme un cycle simple irréductible car $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ est un contour irréductible.

(b) Soit Q le carquois



alors $\alpha\beta^{-1}\delta\gamma^{-1}$ est un cycle simple qui n'est pas un contour et est réductible par $\rho\epsilon$ car $\sigma(\alpha\beta^{-1}\epsilon^{-1}\rho^{-1}) = 1 < 2 = \sigma(\alpha\beta^{-1}\delta\gamma^{-1})$ et $\sigma(\gamma\delta^{-1}\epsilon^{-1}\rho^{-1}) = 1 < 2 = \sigma(\alpha\beta^{-1}\delta\gamma^{-1})$.

(c) Soit Q le carquois



alors $\alpha\beta^{-1}\delta\gamma^{-1}$ est un cycle simple irréductible qui n'est pas un contour.

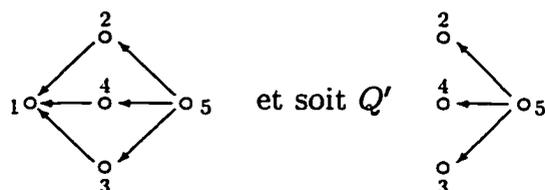
1.3 Numérotations admissibles

Soient $x, y \in Q_0$ tels qu'il existe un chemin de x à y . On dit que x est un **prédécesseur** de y et que y est un **successeur** de x . Soit Q' un sous-carquois plein de Q . Une

énumération $\{x_1, \dots, x_m\}$ des points de Q' est appelée une **numérotation admissible de puits** (ou **de sources**) si $j > i$ implique que x_j n'est pas un successeur (ou prédécesseur, respectivement) de x_i . Un point x_i est parfois identifié à i , sa position dans la numérotation admissible.

Soit Q un carquois fini, connexe et acyclique. Alors, Q admet toujours une numérotation admissible de puits (ou de sources). En effet, soit x_1 un puits (ou une source, respectivement) de Q . Soient Q^1 le sous-carquois plein de Q engendré par $Q_0 \setminus \{x_1\}$ et x_2 un puits (ou une source, respectivement) de Q^1 . On continue avec la récurrence suivante pour tout $i \in \{2, \dots, |Q_0| - 1\}$: Q^i est le sous-carquois plein de Q^{i-1} engendré par $Q^{i-1} \setminus \{x_i\}$ et x_{i+1} est un puits (ou une source, respectivement) de Q^i . Cela donne une numérotation admissible de puits (ou de sources, respectivement).

Exemples 1.3.1 (a) Soit Q le carquois



un sous-carquois de Q . Alors, les énumérations $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 4, 3, 5\}$, $\{3, 2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 2, 5\}$, $\{4, 2, 3, 5\}$ et $\{4, 3, 2, 5\}$ sont toutes les numérotations admissibles de puits possibles de Q' .

(b) $\{x_1, \dots, x_m\}$ est une numérotation admissible de puits si et seulement si $\{x_m, \dots, x_1\}$ est une numérotation admissible de sources.

Pour chaque numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de puits (ou de sources) de Q' , on associe une filtration de Q par une suite de sous-carquois pleins connexes, de la manière suivante: on pose $Q^{(0)} = Q$ (ou ${}^{(0)}Q = Q$, respectivement) et pour chaque $i \in \{1, \dots, m-1\}$,

on note $Q^{(i)}$ (ou ${}^{(i)}Q$, respectivement) le sous-carquois plein de Q engendré par les non-successeurs (ou les non-prédécesseurs, respectivement) de x_1, \dots, x_i dans Q . Clairement, chaque $Q^{(i)}$, et chaque ${}^{(i)}Q$, est convexe. De plus, on a $Q^{(0)} \supseteq Q^{(1)} \supseteq \dots \supseteq Q^{(m-1)}$ et ${}^{(0)}Q \supseteq {}^{(1)}Q \supseteq \dots \supseteq {}^{(m-1)}Q$.

1.4 Algèbres

À partir d'un carquois, on construit une algèbre que l'on appelle algèbre des chemins de ce carquois. Dès maintenant et jusqu'à la fin de ce mémoire, k désigne un corps (algébriquement clos).

Définition 1.4.1 *Soit Q un carquois. L'algèbre kQ des chemins de Q est la k -algèbre dont le k -espace vectoriel sous-jacent a comme base l'ensemble de tous les chemins dans Q . Le produit de deux éléments de la base est défini par:*

$$(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \dots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_k|d)$$

où δ_{bc} est le delta de Kronecker. Le produit de deux éléments arbitraires de kQ est obtenu par distributivité.

Remarquons que le produit de deux chemins p et q est nul si $b(p) \neq s(q)$, et est égal au chemin composé pq si $b(p) = s(q)$. Notons R l'idéal bilatère de kQ engendré par l'ensemble des flèches de Q . Par conséquent, le k -espace vectoriel R admet pour base l'ensemble des chemins de longueur au moins un.

Définition 1.4.2 Soit Q un carquois fini. Un idéal bilatère I de kQ est admissible s'il existe $m \geq 2$ tel que $R^m \subseteq I \subseteq R^2$.

Si I est un idéal admissible de kQ , la paire (Q, I) est appelée un **carquois lié**. L'algèbre quotient kQ/I est dite l'**algèbre du carquois lié** (Q, I) .

Définition 1.4.3 Un carquois lié (Q', I') est un sous-carquois lié plein du carquois lié (Q, I) , si Q' est un sous-carquois plein de Q et $I' = I \cap kQ'$.

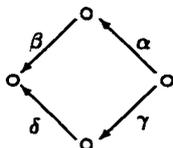
Une **relation** de Q avec coefficients dans k est une combinaison k -linéaire de chemins ayant la même source et le même but et de longueur au moins deux. En d'autres termes, une relation ρ est de la forme

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

où les λ_i sont des scalaires (non nuls), et les w_i des chemins dans Q de longueur au moins deux tels que pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$, on a $s(w_i) = s(w_j)$ et $b(w_i) = b(w_j)$. Si $m=1$, la relation ci-haut est une **relation monomiale** ou **relation-zéro**. Si $m = 2$ et $\rho = w_1 - w_2$, la relation ci-haut est une **relation de commutativité**.

Soit (Q, I) un carquois lié. Un sous-carquois Q' de Q est **sans relation-zéro** si toute relation-zéro appartenant à I n'appartient pas à kQ' .

Exemples 1.4.4 (a) Soit Q le carquois



alors $kQ \cong \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ k^2 & k & k & k \end{bmatrix}$ avec la multiplication suivante:

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ (a_{41}, a'_{41}) & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} & 0 \\ (b_{41}, b'_{41}) & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

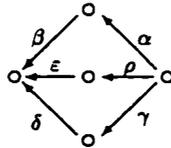
$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & 0 & 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{33}b_{31} & 0 & a_{33}b_{33} & 0 \\ x & a_{42}b_{22} + a_{44}b_{42} & a_{43}b_{33} + a_{44}b_{43} & a_{44}b_{44} \end{bmatrix}$$

où $x = (a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} + a_{44}b_{41}, a'_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} + a_{44}b'_{41})$.

De plus, $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ est un idéal admissible de kQ et $kQ/I \cong \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & 0 \\ k & k & k & k \end{bmatrix}$

avec la multiplication matricielle habituelle. On a que $\alpha\beta - \gamma\delta$ est une relation de commutativité.

(b) Soit Q le carquois



alors $\alpha\beta$ est une relation monomiale. De plus, $\alpha\beta + \gamma\rho + \delta\epsilon$ est une relation qui n'est ni une relation de commutativité ni une relation monomiale.

Soit I un idéal admissible alors il existe des relations $(\rho_j)_{j \in J}$ tels que $I = \langle \rho_j | j \in J \rangle$. Dans ce cas, on dit que le carquois Q est **lié par les relations** $(\rho_j)_{j \in J}$ ou par les relations $\rho_j = 0$ pour tout $j \in J$.

On peut se demander si toute algèbre est une algèbre de carquois lié. Nous nous restreignons au cas des algèbres de k -dimension finie, c'est-à-dire que l'algèbre est de dimension finie en tant que k -espace vectoriel. Pour répondre à cette question, nous avons le théorème suivant, démontré dans ASSEM et al. [4]. On peut supposer sans perte de généralité, voir ASSEM [1], que l'algèbre est sobre et connexe. On doit, de plus, supposer k algébriquement clos.

Théorème 1.4.5 *Soit A une k -algèbre sobre, connexe et de k -dimension finie. Alors il existe un carquois fini connexe Q_A ainsi qu'un idéal admissible I de kQ_A tels que A est isomorphe à l'algèbre kQ_A/I du carquois lié (Q_A, I) .*

*Le carquois lié (Q_A, I) est appelé une **présentation** de A . \square*

Par ASSEM et al. [4], Q_A est unique. En fait, les éléments de $(Q_A)_0$ sont en correspondance bijective avec les éléments d'un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux $\{e_1, \dots, e_n\}$ de A , et pour $i, j \in (Q_A)_0$, l'ensemble des flèches de i vers j est en correspondance bijective avec une base de $e_i(\text{rad}A/\text{rad}^2A)e_j$. Une algèbre A est **triangulaire** si Q_A est acyclique.

Exemple 1.4.6 Soient Q le carquois $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \xrightarrow{\beta} \circ \xrightarrow{\gamma} \circ$, alors $I_1 = \langle \alpha\beta - \alpha\gamma \rangle$ et $I_2 = \langle \alpha\beta \rangle$ sont des idéaux admissibles. De plus, $kQ/I_1 \cong kQ/I_2$.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, toutes nos algèbres sont des algèbres sobres, connexes et de k -dimension finie sur un corps algébriquement clos k .

En théorie des représentations, on s'intéresse à classifier les modules sur une algèbre et les morphismes entre eux. Par le théorème de décomposition unique [4], il suffit de considérer les classes d'isomorphismes de modules indécomposables. Le cas le plus simple est celui où il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de modules indécomposables. Dans ce cas, l'algèbre A est dite de **représentation finie**. Le deuxième cas est celui où il y en a un nombre infini que l'on peut paramétrer.

Définition 1.4.7 (Drozd, [9]) *Une algèbre A est docile si pour tout $d \in \mathbb{N}_*$, il existe une famille finie de foncteurs (dits **paramétrisants**) $F_i : \text{mod } k[x] \rightarrow \text{mod } A$ où $i \in \{1, \dots, n_d\}$ et $k[x]$ est l'algèbre des polynômes en une indéterminée à coefficients dans k , satisfaisant les conditions suivantes:*

- (a) *Pour chaque $i \in \{1, \dots, n_d\}$, $F_i = - \otimes_{k[x]} M_i$, où M_i est un $k[x]$ - A -bimodule et un $k[x]$ -module libre à gauche de type fini.*
- (b) *Sauf pour un nombre fini de classes d'isomorphisme, tous les A -modules indécomposables de dimension d , en tant que k -espaces vectoriels, sont isomorphes à $F_i(S)$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n_d\}$ et pour un certain $k[x]$ -module simple S .*

Enfin, il existe des algèbres non-dociles, appelées **sauvages**, que nous ne considérerons pas dans ce mémoire.

1.5 Catégories

De même que plusieurs propriétés structurelles d'un anneau commutatif sont représentées par son spectre (qui est l'ensemble des ses idéaux premiers), de même, la structure d'une algèbre de dimension finie est représentée par l'ensemble de ses modules projectifs indécomposables. On considère que ceux-ci forment une catégorie qu'on appelle le spectroïde d'une algèbre et que l'on peut définir de la manière suivante.

Définition 1.5.1 *Soit A une algèbre. On définit le spectroïde de A , noté $\text{Spec}(A)$, comme étant la catégorie suivante:*

- (a) *La classe d'objets $(\text{Spec}(A))_0$ de $\text{Spec}(A)$ est égale à l'ensemble $(Q_A)_0$ des points de Q_A .*
- (b) *Pour deux objets x, y de $\text{Spec}(A)$, on pose $\text{Hom}(x, y) = e_x A e_y$ où e_x et e_y sont les idempotents primitifs associés à x et y respectivement.*
- (c) *La composition des morphismes de $\text{Spec}(A)$ est induite de la multiplication dans A .*

On identifie parfois A à son spectroïde. La remarque suivante donne un critère simple permettant de reconnaître les sous-catégories pleines de A .

Remarque 1.5.2 *Soit A une algèbre. Alors, C est une sous-catégorie pleine de A si et seulement s'il existe un idempotent e de A tel que $C = eAe$.*

Par conséquent, on peut visualiser une sous-catégorie pleine de A comme une algèbre en utilisant les opérations induites de A . On dit qu'une sous-catégorie pleine de A est

connexe si elle est connexe en tant qu'algèbre et on dit qu'elle est convexe si son carquois est un sous-carquois convexe du carquois de A .

Soient M un A -module et C une sous-catégorie pleine et convexe de A , alors il existe un idempotent e de A tel que $C = eAe$. On dit alors que le C -module Me est la **restriction de M à C** , et on le note $M|_C$.

Remarque 1.5.3 Toute composante connexe de A peut être vue comme une sous-catégorie pleine et convexe de A .

1.6 Modules et représentations

Pour une présentation (Q_A, I) d'une algèbre A , on veut décrire la catégorie de A -modules à droite de type fini en fonction du carquois lié.

Définition 1.6.1 Une **représentation** $M = (M_x, M_\alpha)$ du carquois Q_A est définie comme suit:

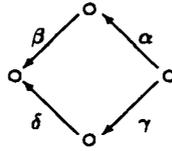
- (a) À chaque point $x \in (Q_A)_0$ est associé un k -espace vectoriel M_x .
- (b) À chaque flèche $\alpha \in (Q_A)_1$ est associée une application k -linéaire $M_\alpha : M_{s(\alpha)} \rightarrow M_{b(\alpha)}$.

Une telle représentation est de **dimension finie** si chacun des M_i est un k -espace vectoriel de dimension finie. Le **vecteur dimension** de M , noté $\mathbf{dim} M$, est le vecteur $(\dim_k M_x)_{x \in (Q_A)_0}$.

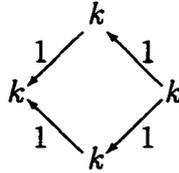
On définit l'évaluation de M sur un chemin $w = \alpha_1 \cdots \alpha_l$ de x vers y dans Q_A comme étant l'application k -linéaire $M(w)$ de M_x vers M_y définie par $M(w) = M_{\alpha_l} \cdots M_{\alpha_1}$. Par exemple, l'évaluation de M sur une flèche α est donnée par $M(\alpha) = M_\alpha$. La définition de l'évaluation s'étend ensuite par linéarité sur des combinaisons linéaires de chemins.

La représentation M est liée par la relation ρ si l'application linéaire correspondante $M(\rho)$ est nulle. Si I est un idéal admissible de kQ_A , alors M est liée par I si $M(\rho) = 0$ pour tout $\rho \in I$. Si I est engendré par les relations $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$, il est clair que la représentation M est liée par I si et seulement si $M(\rho_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Exemple 1.6.2 Soient Q le carquois



et $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$. Alors la représentation M donnée par



est liée par I car $M(\alpha\beta - \gamma\delta) = M(\alpha\beta) - M(\gamma\delta) = M_\alpha M_\beta - M_\gamma M_\delta = 0$.

Soient $M = (M_x, M_\alpha)$ et $M' = (M'_x, M'_\alpha)$ deux représentations de Q_A . Un **morphisme de représentations** $f : M \rightarrow M'$ est une famille d'applications k -linéaires $(f_x : M_x \rightarrow M'_x)_{x \in (Q_A)_0}$ compatibles avec les applications M_α , c'est-à-dire que pour chaque flèche $\alpha \in (Q_A)_1$, on a $M'_\alpha f_{s(\alpha)} = f_{t(\alpha)} M_\alpha$. On peut donc parler de la catégorie des représentations (la composition des morphismes étant la composition évidente). On note $\text{mod} A$

la catégorie des A -modules à droite de type fini et $\text{rep}(Q_A, I)$ la catégorie des représentations de dimension finie de Q_A liées par I . On a alors le théorème suivant dont la démonstration se trouve dans ASSEM et al. [4].

Théorème 1.6.3 *Soit (Q_A, I) une présentation d'une algèbre A . Il existe une équivalence de catégories $\text{mod}A \cong \text{rep}(Q_A, I)$. \square*

Exemples 1.6.4 Soient A une algèbre triangulaire et (Q_A, I) une présentation de A

(a) Pour chaque point x de Q , le module simple $e_x A / \text{rad}(e_x A)$ peut être vu comme la représentation $S(x)$ définie comme suit:

$$S(x)_y = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

$$S(x)_\alpha = 0 \text{ pour tout } \alpha \in Q_1$$

On appelle ce module, ou cette représentation, le **simple en x** .

(b) Pour chaque point x de Q , la couverture projective de $S(x)$ correspond à la représentation $P(x) = (P(x)_y, P(x)_\alpha)$ où $P(x)_y$ est le k -espace vectoriel ayant comme base tous les $w + I$ avec w un chemin de x vers y , et $P(x)_\alpha : P(x)_{s(\alpha)} \rightarrow P(x)_{t(\alpha)}$ est l'application k -linéaire donnée par la composition à droite par $\alpha + I$. On appelle cette représentation le **projectif en x** .

(c) Pour chaque point x de Q , on définit l'**injectif en x** par la représentation $I(x) = (I(x)_y, I(x)_\alpha)$ où $I(x)_y$ est le dual du k -espace vectoriel ayant comme base tous les $w + I$ avec w un chemin de y vers x , et $I(x)_\alpha : P(x)_{s(\alpha)} \rightarrow P(x)_{t(\alpha)}$ est l'application k -linéaire donnée par le dual de la composition à droite par $\alpha + I$.

1.7 Carquois d'Auslander-Reiten

Nous définissons maintenant une nouvelle structure, le carquois d'Auslander-Reiten de $\text{mod } A$, qui fournit une quantité appréciable d'informations sur la catégorie des A -modules de type fini ainsi que sur les morphismes entre ces modules. Avant de donner la définition formelle du carquois d'Auslander-Reiten, nous nous devons d'énoncer certains résultats importants de la théorie sous-jacente.

Les suites presque scindées jouent un rôle de premier plan dans la théorie d'Auslander-Reiten. Le théorème suivant, qui leur est dû, est à la base de tout ce qui suit dans cette section. Il assure l'existence des suites presque scindées.

Théorème 1.7.1 (AUSLANDER et al., [6]) *Soient A une k -algèbre et N_A un A -module indécomposable non-projectif, alors il existe une suite exacte courte non-scindée*

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

telle que:

- (a) *L est un indécomposable non-injectif.*
- (b) *Si $u : L \rightarrow U$ n'est pas une section, alors il existe $u' : M \rightarrow U$ tel que $u = u'f$.*
- (c) *Si $v : V \rightarrow N$ n'est pas une rétraction, alors il existe $v' : V \rightarrow M$ tel que $v = gv'$.*

De plus, la suite ci-haut est unique à isomorphisme près. Dualement, si L_A est un module indécomposable non-injectif, une suite comme ci-haut existe, avec N indécomposable non-projectif et satisfaisant les propriétés (b) et (c), et est encore unique à isomorphisme près. \square

Une telle suite est appelée une **suite presque scindée** débutant en L (ou se terminant en N).

Une conséquence directe de ce théorème et de l'unicité de la suite est que tout A -module indécomposable non-projectif N détermine un autre A -module indécomposable, soit L , le terme de gauche de la suite, qui est appelé le **translaté d'Auslander-Reiten** de N et est noté $L = \tau N$. Dualement, on a aussi que $N = \tau^{-1}L$.

On sait que tout A -module (de type fini) se décompose uniquement comme somme directe finie de A -modules indécomposables. Nous voudrions maintenant définir une notion équivalente d'indécomposabilité pour les morphismes.

Définition 1.7.2 *Un morphisme $f : M \rightarrow N$ dans $\text{mod}A$ est dit irréductible si:*

- (a) *f n'est ni une section, ni une rétraction, et*
- (b) *Si $f = f_1 f_2$, alors soit f_1 est une rétraction, soit f_2 est une section.*

On voit de suite qu'une telle application est soit un monomorphisme, soit un épimorphisme, et que tout morphisme se trouvant dans une puissance finie de $\text{rad}(\text{mod}(A))$ s'écrit comme somme de compositions de morphismes irréductibles. En outre, les morphismes f et g du théorème 1.7.1 sont nécessairement irréductibles. Pour M, N indécomposables, notons $\text{Irr}(M, N)$ le k -espace vectoriel $\text{rad}(M, N)/\text{rad}^2(M, N)$ où $\text{rad}(M, N)$ est l'ensemble des morphismes non-isomorphes de M vers N , voir [1].

Nous pouvons maintenant définir le **carquois d'Auslander-Reiten** Γ_A de A . Ses points sont les classes d'isomorphisme $[M]$ de A -modules indécomposables M . Soient $[M]$ et $[N]$

deux points de Γ_A correspondant aux A -modules indécomposables M et N respectivement. Les flèches $[M] \rightarrow [N]$ sont en correspondance bijective avec les vecteurs d'une base du k -espace vectoriel $\text{Irr}(M, N)$. Comme un endomorphisme n'est jamais irréductible, on a que Γ_A ne contient pas de boucles.

Pour plus de détails sur la construction du carquois d'Auslander-Reiten, nous référons à AUSLANDER *et al.* [6].

1.8 Formes quadratiques

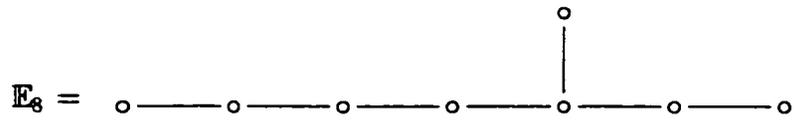
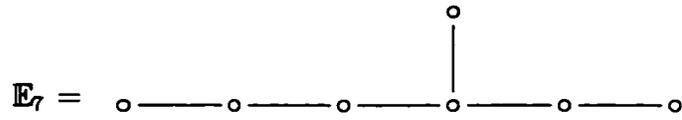
Rappelons deux types importants de graphes: les diagrammes de Dynkin et les diagrammes euclidiens.

Définition 1.8.1 (a) *Les diagrammes de Dynkin sont les suivants:*

$$\mathbb{A}_n = \circ - \circ - \circ - \dots - \circ - \circ - \circ$$

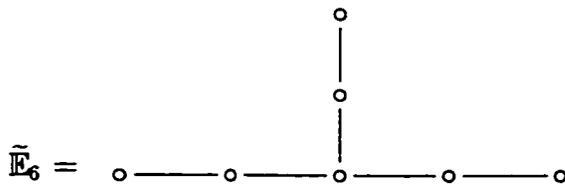
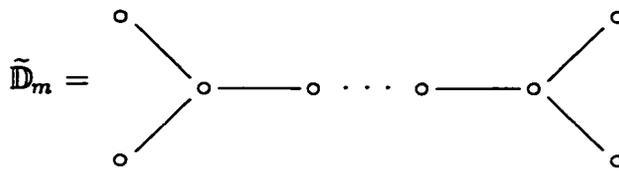
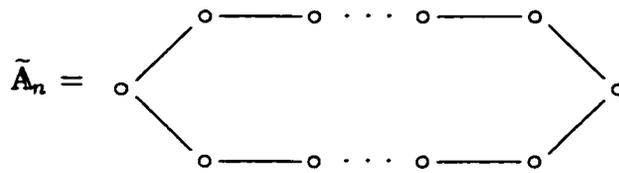
$$\mathbb{D}_m = \circ - \circ - \circ - \dots - \circ - \begin{array}{l} \circ \\ \circ \end{array}$$

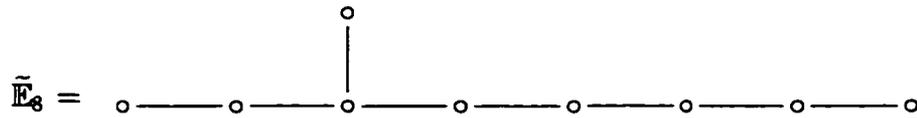
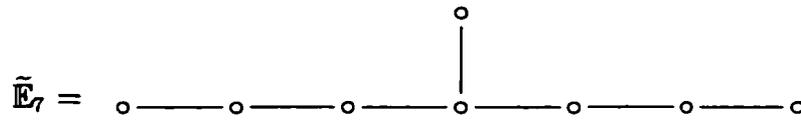
$$\mathbb{E}_6 = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array}$$



(où \mathbb{A}_n et \mathbb{D}_m ont n et m points respectivement, et $n \geq 1$, $m \geq 4$).

(b) Les diagrammes euclidiens sont les suivants:





(où $\tilde{\mathbb{A}}_n$ et $\tilde{\mathbb{D}}_m$ ont $n + 1$ et $m + 1$ points respectivement, et $n \geq 1$, $m \geq 4$).

Soit Q un carquois avec n points. On associe à ce carquois une forme quadratique, dite **forme quadratique de Tits** et notée q_Q , définie par $q_Q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}$.

Énonçons le résultat suivant dont la démonstration se trouve dans ASSEM et al. [4].

Théorème 1.8.2 (a) \bar{Q} est un diagramme de Dynkin si et seulement si q_Q est positive définie.

(b) \bar{Q} est un diagramme euclidien si et seulement si q_Q est positive semidéfinie, mais pas définie.

(c) \bar{Q} n'est ni un diagramme de Dynkin, ni un diagramme euclidien si et seulement si q_Q est indéfinie. \square

Exemple 1.8.3 Soit Q le carquois $2 \circ \rightrightarrows \circ 1$ alors, $q_Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

$= (x_1 - x_2)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$. De plus, $q_Q(x) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$.

Si q_Q est positive semidéfinie, le radical $N = N(q_Q) = \{x \in \mathbb{Z}^n \text{ tel que } q_Q(x) = 0\}$ est un sous-groupe du groupe abélien libre \mathbb{Z}^n et est donc lui-même un groupe abélien libre. On définit le **corang** de q_Q comme étant le rang de ce sous-groupe. Si \bar{Q} est un diagramme euclidien, le corang de q_Q est égal à un. Dans ce cas, on fixe un générateur de N , noté $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n$ avec $r_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $r_j = 1$ pour un certain $j \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple 1.8.4 Dans l'exemple précédent,

$$N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid q_Q(x) = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 = x_2\} = \{(x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

Donc, q_Q est de corang un. De plus, $(1, 1)$ est le générateur fixé de N .

On associe à q_Q une forme bilinéaire symétrique $(-, -)$ définie par:

$$(x, y) = \frac{1}{2}[q_Q(x + y) - q_Q(x) - q_Q(y)].$$

Exemple 1.8.5 Dans l'exemple 1.8.3, $(-, -)$ est définie par

$$\begin{aligned} (x, y) &= \frac{1}{2}[q_Q(x + y) - q_Q(x) - q_Q(y)] \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - 2(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2] \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Pour chaque $i \in Q_0$, on définit la **réflexion en i** , notée $s_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$, par $s_i(x) = x - 2(x, e_i)e_i$. Pour chaque numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_n\}$ de puits des points de

Q , on définit la **transformation de Coxeter** $c = s_n \cdots s_1$. Notons que la transformation de Coxeter ne dépend pas du choix de la numérotation admissible de puits des points de Q comme vu dans DLAB et RINGEL [8] ou encore dans ASSEM et al. [4].

Exemple 1.8.6 Dans l'exemple 1.8.3, la seule numérotation admissible de puits de Q est $\{1, 2\}$. De plus, $s_1(x) = x - 2(x, e_1)e_1 = x - 2(x_1 - x_2)e_1$ et $s_2(x) = x - 2(x, e_2)e_2 = x + 2(x_1 - x_2)e_2$. Donc, $c(x) = s_2s_1(x) = s_2(x - 2(x_1 - x_2)e_1) = x - 2(x_1 - x_2)e_1 + 2(x_1 - 2(x_1 - x_2) - x_2)e_2 = x - 2(x_1 - x_2)r$.

Le groupe W des automorphismes de \mathbb{Z}^n engendré par les s_i s'appelle le **groupe de Weyl**. On sait, par DLAB et RINGEL [8], que $N = \{x \in \mathbb{Z}^n | w(x) = x \text{ pour tout } w \in W\}$. Donc, chaque $w \in W$ induit une transformation linéaire $\bar{w} : \mathbb{Z}^n/N \rightarrow \mathbb{Z}^n/N$ définie par $\bar{w}(x + N) = w(x) + N$. Notons \overline{W} le groupe de ces transformations induites par les éléments de W . Par DLAB et RINGEL [8], le groupe \overline{W} est fini. Donc, la transformation induite, \bar{c} , par la transformation de Coxeter est d'ordre fini m . Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$, on a $c^m(x) = x + (\delta_c x)r$ où r est le générateur fixé de N . Puisqu'il existe un $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $r_j = 1$, on a $\delta_c x \in \mathbb{Z}$. On peut considérer δ_c comme une forme linéaire $\delta_c : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $\delta_c(x) = \delta_c x$ ou encore, comme un vecteur, $\delta_c = (\delta_c e_i)_{i \in Q_0}$, dans \mathbb{Z}^n appelé le **vecteur défaut** de Q .

Exemple 1.8.7 Dans l'exemple 1.8.3, on a $c(e_1) = e_1 - 2(1 - 0)r = e_1 + (-2)r$ et $c(e_2) = e_2 - 2(0 - 1)r = e_2 + (2)r$. Donc, $\delta_c = (-2, 2)$.

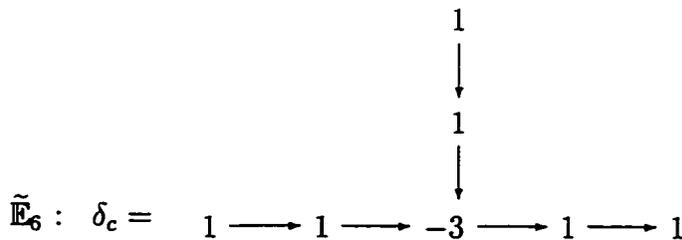
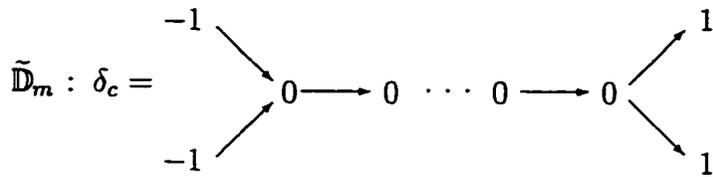
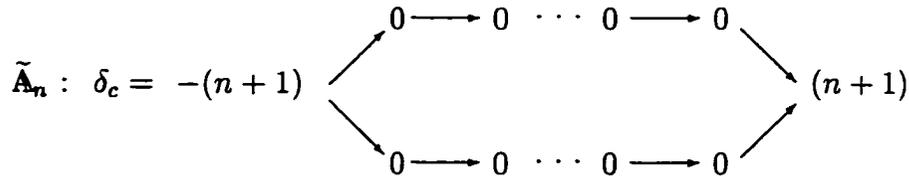
Rappelons que $Q' = \sigma_i Q$, avec $i \in Q_0$, est le carquois obtenu de Q en inversant les flèches dont une extrémité est i . Si i est un puits, la transformation de Coxeter c' de Q' peut

s'écrire $c' = s_i c s_i$ et $(c')^m(e_j) = e_i + (\delta_{c'} e_j) r$. Il s'ensuit que $c^m(s_i e_j) = s_i e_j + (\delta_{c'} e_j) r$ et donc $\delta_{c'} e_j = \delta_c(s_i e_j)$. Donc,

$$\delta_{c'} e_j = \begin{cases} -\delta_c e_i & \text{si } j = i \\ \delta_c e_i & \text{si } j \neq i \text{ et qu'il n'y a pas de flèche entre } i \text{ et } j \\ \delta_c e_j + \delta_c e_i & \text{si } j \neq i \text{ et qu'il y a une flèche entre } i \text{ et } j. \end{cases}$$

On peut donc calculer le vecteur défaut pour tout Q' avec $\overline{Q'} = \overline{Q}$, à partir du vecteur défaut de Q .

Voici la liste, donnée dans DLAB et RINGEL [8], des vecteurs défauts, pour une orientation fixée, des diagrammes euclidiens:



- (d) *Le radical de tout projectif est projectif.*
- (e) *Tout quotient d'un injectif est injectif.*
- (f) *Le quotient de tout injectif par son socle est injectif.*
- (g) *Le carquois Q_A est acyclique et $A \cong kQ_A$. \square*

Commençons par définir certaines particularités des modules sur les algèbres héréditaires.

Définition 1.9.3 *Soient A une algèbre héréditaire et M un A -module indécomposable.*

- (a) *M est **postprojectif** s'il existe un unique entier non négatif, $\nu(M)$, tel que $\tau^{\nu(M)}M$ est un A -module projectif indécomposable.*
- (b) *M est **préinjectif** s'il existe un unique entier non négatif, $\mu(M)$, tel que $\tau^{-\mu(M)}M$ est un A -module injectif indécomposable.*
- (c) *M est **régulier** s'il n'est ni postprojectif ni préinjectif.*

La proposition suivante, démontrée dans HAPPEL [12], nous montre l'intérêt de pouvoir reconnaître les modules postprojectifs ou préinjectifs.

Proposition 1.9.4 *Soient A une algèbre héréditaire et M, N deux modules indécomposables tels que $\dim M = \dim N$. Si M est postprojectif ou préinjectif, alors $M \cong N$. \square*

On aimerait savoir à quoi ressemble le carquois d'Auslander-Reiten de A . Pour ce faire, définissons certaines caractéristiques d'une composante connexe du carquois d'Auslander-Reiten de A .

Définition 1.9.5 *Soient A une algèbre héréditaire et C une composante connexe du carquois d'Auslander-Reiten de A .*

- (a) *C est une composante postprojective si chaque point de C correspond à un A -module postprojectif.*
- (b) *C est une composante préinjective si chaque point de C correspond à un A -module préinjectif.*
- (c) *C est une composante régulière si chaque point de C correspond à un A -module régulier.*

Il peut sembler difficile de savoir si une composante est postprojective ou préinjective ou ni l'un ni l'autre. Le théorème suivant, démontré dans AUSLANDER et al. [6], nous donne une caractérisation plus simple.

Théorème 1.9.6 *Soient A une algèbre héréditaire et C une composante connexe de Γ_A .*

- (a) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
 - (i) *C est une composante postprojective.*
 - (ii) *C contient au moins un point qui correspond à un postprojectif.*
 - (iii) *C contient au moins un point qui correspond à un projectif.*

(b) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *C est une composante préinjective.*
- (ii) *C contient au moins un point qui correspond à un préinjectif.*
- (iii) *C contient au moins un point qui correspond à un injectif.*

(c) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *C est une composante régulière.*
- (ii) *C contient au moins un point qui correspond à un régulier. \square*

Par AUSLANDER *et al.* [6], si A est connexe, alors le carquois d'Auslander-Reiten de A ne contient qu'une seule composante postprojective, notée $\mathcal{P}(A)$, et une seule composante préinjective, notée $\mathcal{I}(A)$. On veut connaître la forme de ces composantes. Pour ce faire, on définit ce que l'on appelle les carquois à translations [13].

Définition 1.9.7 *Un carquois à translation $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, b, P, \tau)$ consiste en la donnée d'un carquois $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, b)$, d'un sous-ensemble $P \subseteq \Gamma_0$ de points et d'une injection $\tau : P \rightarrow \Gamma_0$ tels que :*

- (a) *Le carquois Γ n'a ni boucles, ni flèches doubles.*
- (b) *Pour tout $x \in P$ et pour toute flèche $\alpha : y \rightarrow x$, il existe une flèche $\beta : \tau x \rightarrow y$.*
- (c) *Pour tout $x \in P$ et pour toute flèche $\alpha : \tau x \rightarrow y$, il existe une flèche $\beta : y \rightarrow x$.*

L'injection τ est appelée la translation de Γ .

À partir d'un carquois Q fini, connexe et acyclique, on définit certains carquois à translation.

Définition 1.9.8 Soit Q un carquois fini, connexe et acyclique, alors on définit le carquois à translation $\mathbb{Z}Q$ par:

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}Q)_0 &= \{(n, x) \mid n \in \mathbb{Z}, x \in Q_0\}, \\ (\mathbb{Z}Q)_1 &= \{(n, \alpha) : (n, s(\alpha)) \rightarrow (n, b(\alpha)) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha \in Q_1\} \\ &\quad \cup \{(n, \alpha') : (n-1, b(\alpha)) \rightarrow (n, s(\alpha)) \mid n \in \mathbb{Z}, \alpha \in Q_1\}, \\ \tau(n, x) &= (n-1, x). \end{aligned}$$

Remarque 1.9.9 Dans la définition précédente, τ^m est un automorphisme pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.9.10 Soit Q un carquois fini, connexe et acyclique, alors on définit le sous-carquois à translation, $\mathbb{N}Q$, de $\mathbb{Z}Q$ par:

$$\begin{aligned} (\mathbb{N}Q)_0 &= \{(n, x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in Q_0\}, \\ (\mathbb{N}Q)_1 &= \{(n, \alpha) : (n, s(\alpha)) \rightarrow (n, b(\alpha)) \mid n \in \mathbb{N}, \alpha \in Q_1\} \\ &\quad \cup \{(n, \alpha') : (n-1, b(\alpha)) \rightarrow (n, s(\alpha)) \mid n \in \mathbb{N}, \alpha \in Q_1\}, \\ \tau(n, x) &= (n-1, x). \end{aligned}$$

On définit le sous-carquois à translation, $-\mathbb{N}Q$, de $\mathbb{Z}Q$ de la même manière.

Proposition 1.9.11 Soit A une algèbre héréditaire connexe et Δ le carquois obtenu de Q_A en inversant ses flèches. Alors:

(a) $\phi : \mathcal{P}(A) \rightarrow (\mathbb{N}\Delta)_0$ défini par $\phi([M]) = (\nu(M), \tau^{\nu(M)}M)$ donne un morphisme injectif de carquois à translation de la composante postprojective de Γ_A vers $\mathbb{N}\Delta$.

(b) $\psi : \mathcal{I}(A) \rightarrow (-\mathbb{N}\Delta)_0$ défini par $\psi([M]) = (-\mu(M), \tau^{-\mu(M)}M)$ donne un morphisme injectif de carquois à translation de la composante préinjective de Γ_A vers $-\mathbb{N}\Delta$. \square

Le théorème suivant permet de caractériser les algèbres héréditaires de représentation finie, la démonstration se trouve dans ASSEM et al. [4].

Théorème 1.9.12 (Gabriel, [11]) *Soit A une algèbre héréditaire. Alors, A est de représentation finie si et seulement si \overline{Q}_A est un diagramme de Dynkin.* \square

Le théorème suivant décrit la catégorie de modules et les composantes du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre héréditaire de représentation finie.

Théorème 1.9.13 *Soit A une algèbre héréditaire connexe. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *A est de représentation finie.*
- (b) *Tous les A -modules sont postprojectifs.*
- (c) *Tous les A -modules sont préinjectifs.*
- (d) *Il existe un A -module qui est postprojectif et préinjectif.* \square

Remarque 1.9.14 *Soit A une algèbre héréditaire connexe de représentation finie. Les A -modules indécomposables sont uniquement déterminés par leurs vecteurs dimension. Cela en effet suit de 1.9.4.*

Le deuxième cas, relativement facile à étudier, d'algèbres héréditaires est celui des algèbres dociles de représentation infinie. Le théorème suivant décrit ces algèbres. La démonstration de ce théorème se trouve dans DLAB et RINGEL [8].

Théorème 1.9.15 *Soit A une algèbre héréditaire. Alors, A est docile de représentation infinie si et seulement si $\overline{Q_A}$ est un diagramme euclidien. \square*

Le théorème suivant, démontré dans AUSLANDER et al. [6], nous donne la forme de la composante postprojective et celle de la composante préinjective du carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre héréditaire connexe de représentation infinie.

Théorème 1.9.16 *Soit A une algèbre héréditaire connexe de représentation infinie. Alors:*

- (a) ϕ définie à la proposition 1.9.11 est bijective.
- (b) ψ définie à la proposition 1.9.11 est bijective. \square

On veut également connaître la structure des composantes régulières de Γ_A . Pour ce faire, on définit le carquois \mathbf{A}_∞ comme suit: $\circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \cdots$.

Il est clair que τ^n , pour tout $n \geq 1$, opère comme un automorphisme sur $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty$.

On appelle **tube stable de rang n** le carquois à translation $\mathbf{Z}\mathbf{A}_\infty / \langle \tau^n \rangle$. On a maintenant le théorème suivant dont la démonstration se trouve dans AUSLANDER et al. [6].

Théorème 1.9.17 *Soit A une algèbre héréditaire connexe docile. Alors, toute composante régulière est un tube stable de rang n où n est le plus petit entier positif tel que*

$\tau^n M = M$ pour tout M tel que $[M]$ est dans la composante. \square

Les rangs des tubes sont dans les tables de DLAB et RINGEL [8]. On remarque que tous les tubes, sauf un nombre fini, sont de rang un.

Les algèbres héréditaires dociles correspondent aux diagrammes euclidiens. On peut donc se demander si on peut appliquer la notion de défaut. Soit A une algèbre héréditaire docile. On a que $\overline{Q_A}$ est un diagramme euclidien, donc on peut définir le vecteur défaut de Q_A que l'on notera δ_A . On appelle aussi ce vecteur le **défaut de A** . Soit M un A -module, on définit le **défaut de M** comme étant $\delta_A(\dim M)$. On peut donc énoncer le théorème suivant, démontré dans DLAB et RINGEL [8], qui permet de savoir facilement si un module est postprojectif, préinjectif ou régulier.

Théorème 1.9.18 *Soient A une algèbre héréditaire docile et M un A -module indécomposable. Alors:*

- (a) *Si $\delta_A(\dim M) < 0$ alors M est postprojectif.*
- (b) *Si $\delta_A(\dim M) = 0$ alors M est régulier.*
- (c) *Si $\delta_A(\dim M) > 0$ alors M est préinjectif. \square*

1.10 Extensions ponctuelles

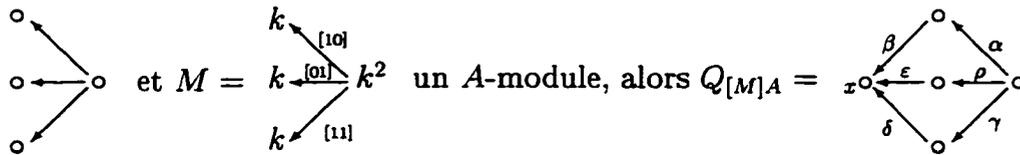
Définition 1.10.1 *L'extension ponctuelle d'une algèbre A par un A -module M , est l'algèbre de matrices $A[M] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & k \end{bmatrix}$ où les opérations sont induites par les opérations*

matricielles et par la structure de A -module de M .

Le carquois Q_A de A est un sous-carquois plein et convexe du carquois $Q_{A[M]}$ de $A[M]$. De plus, $Q_{A[M]}$ s'obtient à partir de Q_A en ajoutant un point additionnel qui est une source.

Dualement, on définit la coextension ponctuelle $[M]A = \begin{bmatrix} A & DM \\ 0 & k \end{bmatrix}$ où D est la dualité $\text{Hom}_k(-, k)$.

Exemple 1.10.2 Soient $A = kQ$ où Q est le carquois



Si on pose $I = \langle \alpha\beta + \gamma\delta - \varepsilon\rho \rangle$ alors $[M]A \cong kQ_{[M]A}/I$. On peut remarquer que $I(x)/\text{soc}I(x)|_A \cong M$ où x est le point additionnel.

Remarquons qu'une algèbre triangulaire peut être construite par extensions ponctuelles et coextensions ponctuelles répétées.

CHAPITRE 2

ALGÈBRES FORTEMENT SIMPLEMENT CONNEXES

2.1 Groupe fondamental

Dès maintenant et jusqu'à la fin de ce mémoire, A désigne une algèbre triangulaire de dimension finie sur un corps algébriquement clos k .

Soit (Q, I) un carquois lié fini et connexe. Une relation $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i \in I$ est **minimale** si $m \geq 2$ et si, pour tout sous-ensemble propre non-vide J de $\{1, \dots, m\}$, on a $\sum_{j \in J} \lambda_j w_j \notin I$.

Notons \sim l'intersection des relations d'équivalence sur l'ensemble de toutes les marches de Q telle que:

- (a) si $\alpha \in Q_1$, alors $\alpha\alpha^{-1} \sim \varepsilon_{s(\alpha)}$ et $\alpha^{-1}\alpha \sim \varepsilon_{t(\alpha)}$
- (b) si $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ est une relation minimale alors $w_i \sim w_j$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$
- (c) si $u \sim v$ alors $uwv' \sim vwv'$ si uwv' et vwv' sont non-nuls.

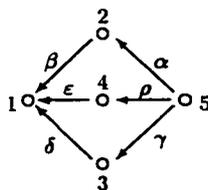
Soit $x \in Q_0$. L'ensemble $\pi_1(Q, I, x)$ des classes d'équivalence de toutes les marches commençant et finissant en x a une structure de groupe avec l'opération induite de la composition des marches. Puisque Q est connexe, le groupe $\pi_1(Q, I, x)$ ne dépend pas du choix de x . Dans ce cas, on le note $\pi_1(Q, I)$ et on l'appelle **le groupe fondamental du**

carquois lié (Q, I) .

Exemples 2.1.1 (a) Soient Q le carquois $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \xrightarrow[\gamma]{\beta} \circ$, $I_1 = \langle \alpha\beta - \alpha\gamma \rangle$ et $I_2 = \langle \alpha\beta \rangle$

Alors $\pi_1(Q, I_1) \cong 0$ et $\pi_1(Q, I_2) \cong \mathbb{Z}$. Remarquons que $\alpha\beta - \alpha\gamma$ est minimale alors que $\alpha\beta$ ne l'est pas.

(b) Soient Q le carquois



et $I = \langle \alpha\beta + \gamma\delta - \epsilon\rho \rangle$ alors $\pi_1(Q, I) \cong 0$.

(c) Soit Q un arbre, alors pour tout idéal admissible I de kQ , on a $\pi_1(Q, I) \cong 0$.

2.2 Algèbres fortement simplement connexes

Les définitions suivantes sont dûes, respectivement, à ASSEM et SKOWROŃSKI [5] et SKOWROŃSKI [14].

Définition 2.2.1 Soit A une algèbre connexe.

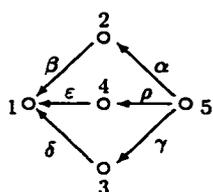
(a) A est simplement connexe si pour toute présentation, (Q_A, I) , de A , on a $\pi_1(Q_A, I) \cong 0$.

(b) *A est fortement simplement connexe si toute sous-catégorie pleine connexe et convexe de A est simplement connexe.*

Exemples 2.2.2 (a) Soient Q le carquois $\circ \xrightarrow{\alpha} \circ \xrightarrow[\gamma]{\beta} \circ$, $I_1 = \langle \alpha\beta - \alpha\gamma \rangle$ et $I_2 = \langle \alpha\beta \rangle$.

Alors, $kQ/I_1 \cong kQ/I_2$ n'est pas simplement connexe.

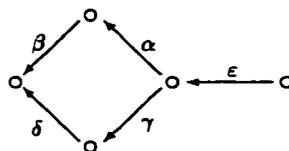
(b) Soient Q le carquois



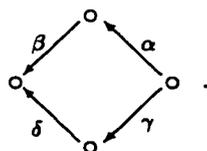
et $I = \langle \alpha\beta + \gamma\delta - \varepsilon\rho \rangle$, alors kQ/I est fortement simplement connexe.

(c) Soit Q un arbre. Alors, pour tout idéal admissible I de kQ , l'algèbre kQ/I est fortement simplement connexe.

(d) Soient Q le carquois



et $I = \langle \varepsilon\alpha\beta - \varepsilon\gamma\delta \rangle$. Alors kQ/I est simplement connexe, mais n'est pas fortement simplement connexe. En effet, soit $A' \cong kQ'$, où Q' est le sous-carquois de Q suivant:



On a que A' est une sous-catégorie pleine connexe et convexe de A qui n'est pas simplement connexe.

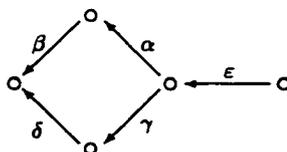
On énonce le théorème suivant, dû à ASSEM et LIU [3], qui nous permet de vérifier plus aisément si une algèbre est fortement simplement connexe ou non.

Théorème 2.2.3 *Soit A une algèbre connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *A est fortement simplement connexe.*
- (b) *Pour toute présentation (Q_A, I) de A et pour tout sous-carquois lié plein connexe et convexe (Q', I') de (Q, I) , on a $\pi_1(Q', I') \cong 0$.*
- (c) *Il existe une présentation (Q_A, I) de A telles que pour tout sous-carquois lié plein connexe et convexe (Q', I') de (Q_A, I) , on a $\pi_1(Q', I') \cong 0$. \square*

Exemples 2.2.4 (a) Une algèbre héréditaire (ou monomiale) est fortement simplement connexe si et seulement si le carquois de A est un arbre. En effet, il n'y a pas de relations minimales. Donc, le groupe fondamental associé à A est trivial si et seulement s'il n'y a pas de cycles dans le carquois de A .

(b) Soient Q le carquois



et $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$, alors kQ/I est fortement simplement connexe.

2.3 La condition de séparation

Les définitions suivantes sont dûes à BAUTISTA et al. [7].

Un A -module est **séparé** si, pour chaque composante connexe C de A , la restriction $M|_C$ de M à C est indécomposable ou nulle.

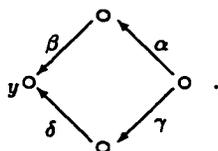
Soit (Q_A, I) une présentation de A . Pour chaque point x de Q_A , on note $Q^{(x)}$ (ou ${}^{(x)}Q$) le sous-carquois plein de Q_A engendré par les non-successeurs (ou les non-prédécesseurs, respectivement) de x dans Q_A . On note également $A^{(x)}$ (ou ${}^{(x)}A$, respectivement) la sous-catégorie pleine engendrée par les points de $Q^{(x)}$ (ou ${}^{(x)}Q$, respectivement).

On dit que x est **séparant** si la restriction de $\text{rad}P(x)$ à $A^{(x)}$ est séparée en tant que $A^{(x)}$ -module. Dualement, x est **coséparant** si la restriction de $I(x)/\text{soc}I(x)$ à ${}^{(x)}A$ est séparée en tant que ${}^{(x)}A$ -module.

On dit que A **satisfait la condition de séparation** (ou **satisfait la condition de coséparation**) si chaque point de Q_A est séparant (ou coséparant, respectivement).

Exemples 2.3.1 (a) Soit A une algèbre connexe. Alors, M est séparé si et seulement si M est indécomposable ou nul.

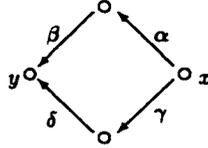
(b) Soit Q le carquois



Si $A \cong kQ$, alors $I(y)$ est indécomposable. Par contre, y n'est pas coséparant car

$$I(y)/\text{soc}I(y)|_{(y)A} = \begin{array}{c} k \xleftarrow{[10]} \\ \searrow \\ k^2 \\ \swarrow \\ k \xleftarrow{[11]} \end{array} \quad \text{est décomposable.}$$

(c) Soient Q le carquois



et $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$. Si $A \cong kQ/I$ alors x est séparant et y est coséparant car

$$I(y)/\text{soc}I(y)|_{(y)A} = \begin{array}{c} k \xleftarrow{1} \\ \searrow \\ k \\ \swarrow \\ k \xleftarrow{1} \end{array} \quad \text{et} \quad \text{rad } P(x)|_{A(x)} = \begin{array}{c} k \xleftarrow{1} \\ \searrow \\ k \\ \swarrow \\ k \xleftarrow{1} \end{array}$$

sont indécomposables. On peut vérifier que tous les points de Q_A sont séparants et coséparants. Donc, A satisfait les conditions de séparation et de coséparation.

Le théorème suivant, dû à SKOWROŃSKI [14], énonce la relation entre les algèbres fortement simplement connexes et les conditions de séparation et de coséparation.

Théorème 2.3.2 *Soit A une algèbre connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *A est fortement simplement connexe.*
- (b) *Toute sous-catégorie pleine connexe et convexe de A satisfait la condition de séparation.*

(c) *Toute sous-catégorie pleine connexe et convexe de A satisfait la condition de coséparation. \square*

2.4 Construction d'algèbres fortement simplement connexes

On sait que toute algèbre triangulaire peut être construite par extensions et coextensions ponctuelles répétées. On peut se demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une extension ou une coextension ponctuelle soit fortement simplement connexe.

Théorème 2.4.1 *Soient A une algèbre et M un A -module. Si $A[M]$ (ou $[M]A$) est fortement simplement connexe alors A est un produit d'algèbres fortement simplement connexes.*

Démonstration: On a $A = \prod_{i=1}^m A_i$ où A_i est une algèbre connexe pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, prenons e_i l'idempotent central associé à A_i . Alors, $A_i = e_i(A[M])e_i = e_i([M]A)e_i$. Donc, A_i est une sous-catégorie pleine connexe et convexe de $A[M]$ et de $[M]A$. Par conséquent, A_i est fortement simplement connexe. \square

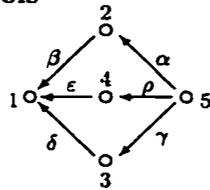
Dès maintenant et jusqu'à la fin de ce mémoire, on suppose que A est une algèbre connexe.

Le théorème précédent donne une condition nécessaire sur A pour que l'extension (ou la coextension) ponctuelle soit fortement simplement connexe. Il est alors naturel de se demander quelle sera la condition nécessaire sur le A -module M . Pour ce faire, introduisons d'abord quelques notations utiles.

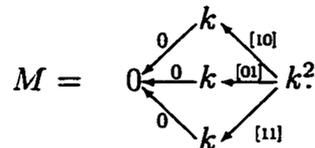
Soient A une algèbre, (Q_A, I) une présentation de A et M un A -module. On appelle **support** de M le sous-carquois plein de Q_A engendré par les points x de Q_A tels que $M_x \neq 0$. On le note parfois **Supp** M . On appelle **algèbre support** l'algèbre associée au carquois lié $(k(\text{Supp } M), I \cap k(\text{Supp } M))$.

À chaque numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de puits (ou de sources) des points de $\text{Supp } M$ et pour chaque $i \in \{0, \dots, m-1\}$, on définit $A^{(i)}$ (ou ${}^{(i)}A$, respectivement) comme étant la sous-catégorie pleine engendrée par les points de $Q^{(i)}$ (ou ${}^{(i)}Q$, respectivement).

Exemple 2.4.2 Soit Q le carquois



et $I = \langle \alpha\beta + \gamma\delta - \varepsilon\rho \rangle$. Posons $A \cong kQ/I$ et



Alors, $\{2, 3, 4, 5\}$ est une numérotation admissible de puits des points de $\text{Supp } M$. On a:

$Q^{(0)} = Q$, $Q^{(1)} = \begin{array}{c} 4 \\ \leftarrow \\ \circ_5 \\ \swarrow \\ \circ_3 \end{array}$, $Q^{(2)} = \begin{array}{c} 4 \\ \leftarrow \\ \circ_5 \end{array}$, $Q^{(3)} = \circ_5$ et $A^{(i)} = kQ^{(i)}$ pour tout

$i \in \{0, 1, 2, 3\}$. D'autre part, $\{5, 2, 3, 4\}$ est une numérotation admissible de sources des points de $\text{Supp } M$. On a:

$(0)Q = Q$, $(1)Q = \begin{array}{c} 2 \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ 3 \end{array} \circ_5$, $(2)Q = \begin{array}{c} 4 \\ \circ \\ \leftarrow \\ \circ \\ 5 \end{array}$, $(3)Q = \circ_5$ et $(i)A = k((i)Q)$ pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

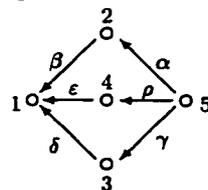
Définissons maintenant la condition nécessaire sur le A -module M pour que l'extension (ou la coextension) ponctuelle soit fortement simplement connexe.

Définition 2.4.3 Soit A une algèbre.

- (a) Un A -module M est **complètement coséparant** si, pour toute numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de puits des points de $\text{Supp } M$ et pour chaque $i \in \{0, \dots, m-1\}$, la restriction $M^{(i)} = M|_{A^{(i)}}$ de M à $A^{(i)}$ est un $A^{(i)}$ -module séparé.
- (b) Un A -module M est **complètement séparant** si, pour toute numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de sources des points de $\text{Supp } M$ et pour chaque $i \in \{0, \dots, m-1\}$, la restriction $(i)M = M|_{(i)A}$ de M à $(i)A$ est un $(i)A$ -module séparé.

Exemples 2.4.4 (a) Tout module unisériel, en particulier tout module simple, est complètement coséparant et complètement séparant.

(b) Soit $A = kQ/I$ où Q est le carquois



et $I = \langle \alpha\beta + \gamma\delta - \varepsilon\rho \rangle$. Alors,

$$M = \begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow 0 & & \searrow [10] \\ 0 & \xrightarrow{k} & k^2 \\ \nwarrow 0 & & \nearrow [01] \\ & k & \\ \swarrow 0 & & \searrow [11] \end{array}$$

n'est pas complètement coséparant ni complètement séparant. En effet,

$$M^{(2)} = \begin{array}{ccc} & k & \\ & \swarrow [10] & \\ & k & \\ & \searrow [11] & \\ & k & \end{array} \quad \text{et} \quad (5)M = \begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow 0 & & \searrow \\ 0 & \xrightarrow{k} & k^2 \\ \nwarrow 0 & & \nearrow \\ & k & \end{array}$$

sont décomposables.

(c) Soit $A = kQ$ où Q est le carquois

$$\begin{array}{ccc} 1 \\ \circ & \swarrow & \\ 2 \\ \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ_4 \\ 3 \\ \circ & \searrow & \end{array} \quad \text{Alors, } M = \begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow [10] & & \searrow \\ k & \xrightarrow{k} & k^2 \\ \nwarrow [01] & & \nearrow [11] \\ & k & \end{array}$$

est complètement séparant mais pas complètement coséparant.

Remarquons que, puisque A est connexe, tout A -module complètement coséparant (ou complètement séparant) est un A -module indécomposable.

Nous pouvons donc énoncer le théorème, dû à ASSEM et LIU [3], qui nous donne les conditions nécessaires et suffisantes sur l'algèbre A et sur le A -module M , pour que l'extension (ou la coextension) ponctuelle soit fortement simplement connexe.

Théorème 2.4.5 *Soit A une algèbre.*

- (a) *$A[M]$ est fortement simplement connexe si et seulement si A est fortement simplement connexe et M est un A -module complètement coséparant.*
- (b) *$[M]A$ est fortement simplement connexe si et seulement si A est fortement simplement connexe et M est un A -module complètement séparant. \square*

Le corollaire suivant suit du théorème précédent et de SKOWROŃSKI [14].

Corollaire 2.4.6 *Soient A une algèbre fortement simplement connexe et M un A -module complètement coséparant (ou complètement séparant) alors M est une brique (c'est-à-dire que $\text{End } M \cong k$). \square*

CHAPITRE 3

MODULES COMPLÈTEMENT COSÉPARANTS ET MODULES COMPLÈTEMENT SÉPARANTS SUR UNE ALGÈBRE FORTEMENT SIMPLEMENT CONNEXE

On a vu, au chapitre précédent, que l'on peut construire à partir d'une algèbre fortement simplement connexe plusieurs algèbres fortement simplement connexes en prenant l'extension (ou la coextension) ponctuelle par un module complètement coséparant (ou complètement séparant, respectivement). Ainsi, on s'intéresse à connaître tous les modules complètement coséparants et tous les modules complètement séparants sur les algèbres fortement simplement connexes. Pour débiter, on caractérise les modules complètement coséparants et les modules complètement séparants sur une algèbre Schurienne qui rendent l'extension ponctuelle Schurienne.

3.1 Algèbres Schuriennes

Commençons pas définir la notion d'algèbre Schurienne.

Définition 3.1.1 *Une algèbre A est Schurienne si $\dim_k e_x A e_y \leq 1$ pour tout $x, y \in (Q_A)_0$ où e_x et e_y sont les idempotents associés à x et y respectivement.*

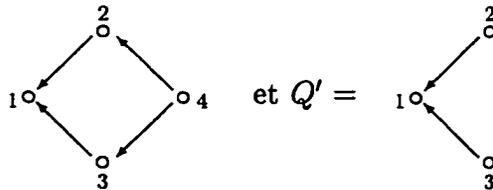
On définit une condition sur un sous-carquois d'un carquois donné.

Définition 3.1.2 Soit Q un carquois fini et acyclique.

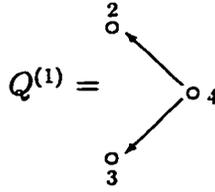
- (a) Un sous-carquois plein Q' de Q est **complètement coséparant** si pour chaque numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de puits des points de Q' et pour chaque $i \in \{0, \dots, m-1\}$ l'intersection de Q' avec chacune des composantes connexes de $Q^{(i)}$ est connexe ou vide.
- (b) Un sous-carquois plein Q' de Q est **complètement séparant** si pour chaque numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de sources des points de Q' et pour chaque $i \in \{0, \dots, m-1\}$ l'intersection de Q' avec chacune des composantes connexes de ${}^{(i)}Q$ est connexe ou vide.

Exemples 3.1.3 (a) Soit Q un arbre alors tout sous-carquois plein connexe Q' de Q est complètement coséparant et complètement séparant. En effet, pour toute numérotation admissible $\{x_1, \dots, x_m\}$ de puits (ou de sources) des points de Q' et pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$, le carquois $Q^{(i)}$ (ou ${}^{(i)}Q$, respectivement) est un arbre. Donc l'intersection de Q' avec chacune des composantes connexes de $Q^{(i)}$ (ou ${}^{(i)}Q$, respectivement) est vide ou connexe.

(b) Soient Q le carquois



Alors Q' est un sous-carquois de Q qui n'est pas complètement coséparant car



et $Q' \cap Q^{(1)} = \circ \circ$ n'est pas connexe. D'autre part, Q' est complètement coséparant.

Donnons le résultat démontré dans ASSEM et LIU [3] qui relie les modules complètement coséparants (ou complètement séparants) aux carquois complètement coséparants (ou complètement séparants, respectivement).

Lemme 3.1.4 *Soient A une algèbre et M un A -module de support Q . Alors:*

- (a) *Si M est un A -module complètement coséparant, alors Q est un sous-carquois complètement coséparant de Q_A .*
- (b) *Si M est un A -module complètement séparant, alors Q est un sous-carquois complètement séparant de Q_A . \square*

Soit A une algèbre Schurienne fortement simplement connexe. On veut connaître tous les A -modules complètement coséparants (ou complètement séparants) qui rendent l'extension (ou la coextension, respectivement) ponctuelle Schurienne. Pour ce faire, introduisons la représentation suivante de Q_A .

Soient A une algèbre et (Q_A, I) une présentation de A . Soit Q un sous-carquois plein de Q_A . On note $U(Q)$ la représentation de Q_A définie par:

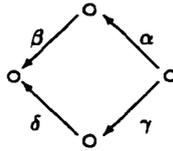
$$U(Q)_x = \begin{cases} k & \text{si } x \in Q_0 \\ 0 & \text{si } x \notin Q_0 \end{cases}$$

$$U(Q)_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \\ 0 & \text{si } \alpha \notin Q_1. \end{cases}$$

On veut que $U(Q)$ soit une représentation de (Q_A, I) . Dans ce but, on définit une présentation particulière. Cette présentation n'existe pas pour toutes les algèbres. Par contre, pour les algèbres Schurienne fortement simplement connexes, ASSEM et LIU [3] ont démontré qu'elle existait toujours.

Théorème 3.1.5 *Soit A une algèbre Schurienne fortement simplement connexe alors il existe une présentation (Q_A, I) telle que tout cycle irréductible de Q_A est un contour irréductible et pour chaque contour irréductible (p, q) , on a $p, q \notin I$ et $p - q \in I$. Une telle présentation est dite **normée**. \square*

Exemple 3.1.6 Soient Q le carquois



et $I = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ alors (Q, I) est une présentation normée de kQ/I .

Le résultat suivant, dont la démonstration se trouve dans ASSEM et LIU [3], nous donne les conditions pour que $U(Q)$ soit une représentation de (Q_A, I) c'est-à-dire un A -module.

Lemme 3.1.7 *Soient A une algèbre Schurienne fortement simplement connexe et (Q_A, I) une présentation normée de A . Soit Q un sous-carquois plein connexe et convexe de Q_A qui est sans relation zéro. Alors $U(Q)$ est un A -module indécomposable. \square*

Maintenant, énonçons le théorème, dû à ASSEM et LIU [3], qui caractérise les modules complètement coséparants (ou, complètement séparants) sur une algèbre Schurienne fortement simplement connexe qui rendent l'extension (ou la coextension, respectivement) ponctuelle correspondante Schurienne.

Théorème 3.1.8 *Soient A une algèbre Schurienne fortement simplement connexe, (Q_A, I) une présentation normée de A et M un A -module de support Q connexe. Alors:*

- (a) *$A[M]$ est Schurienne fortement simplement connexe si et seulement si $M \cong U(Q)$ et Q est un sous-carquois convexe et complètement coséparant de Q_A qui est sans relation zéro.*
- (b) *$[M]A$ est Schurienne fortement simplement connexe si et seulement si $M \cong U(Q)$ et Q est un sous-carquois convexe et complètement séparant de Q_A qui est sans relation zéro. \square*

Précisons ce résultat, lorsque A est une algèbre d'arbre.

Proposition 3.1.9 *Soient A une algèbre d'arbre, (Q_A, I) une présentation de A et M un A -module de support Q connexe. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *$A[M]$ est Schurienne fortement simplement connexe.*

(b) $[M]A$ est Schurienne fortement simplement connexe.

(c) $M \cong U(Q)$ et Q est sans relation zéro.

Démonstration: Trivialement, (a) implique (c) et (b) implique (c) suivent de 3.1.8, montrons que (c) implique (a). Comme A est une algèbre d'arbre, elle est Schurienne fortement simplement connexe et (Q_A, I) est une présentation normée. Soit M de la forme donnée. On affirme que Q est un sous-carquois complètement coséparant de Q_A . En effet, soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ une numérotation admissible de puits des points de Q . Pour $i \in \{0, \dots, m-1\}$, on considère le sous-carquois $Q^{(i)}$ de Q_A . Comme l'intersection de deux sous-carquois connexes d'un arbre est vide ou connexe, l'intersection de Q avec chaque composante connexe de $Q^{(i)}$ est vide ou connexe, d'où notre affirmation. D'autre part, Q est convexe: soit $x = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{l-1} \rightarrow x_l = y$ un chemin de Q_A avec $x, y \in Q_0$, ce chemin coïncide nécessairement avec l'unique marche réduite joignant x à y dans l'arbre Q_A , et donc se trouve dans Q , puisque Q est connexe. Il ne reste plus qu'à appliquer 3.1.8. Dualelement, (c) implique (b). \square

Corollaire 3.1.10 Soient A une algèbre héréditaire de type \mathbf{A}_n et M un A -module de support Q connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) M est un A -module indécomposable.

(b) M est un A -module complètement coséparant.

(c) M est un A -module complètement séparant.

(d) $M \cong U(Q)$.

Démonstration: Il est trivial que (b) implique (a) et que (c) implique (a). Le fait que (a) implique (d) est une propriété bien connue des algèbres héréditaires de type \mathbf{A}_n . Enfin, (d) implique (b) et (c) par 3.1.9. \square

Remarque 3.1.11 Soient A une algèbre d'arbre et M un A -module indécomposable tel que $\dim M_x \leq 1$ pour tout $x \in (Q_A)_0$. Alors, $M \cong U(\text{Supp } M)$. Cela suit en effet de la dernière partie de la démonstration du théorème 3.1.8 dont la démonstration se trouve dans ASSEM et LIU [3] (pour une autre preuve, voir DRÄXLER [10]).

3.2 Résultats préparatoires sur les algèbres d'arbre

Lemme 3.2.1 *Soient A une algèbre et M un A -module. Alors,*

- (a) *M est complètement coséparant si et seulement si M est séparé et, pour tout puits x de $\text{Supp } M$, le $A^{(x)}$ -module $M^{(x)}$ est complètement coséparant.*
- (b) *M est complètement séparant si et seulement si M est séparé et, pour toute source x de $\text{Supp } M$, le ${}^{(x)}A$ -module ${}^{(x)}M$ est complètement séparant.*

Démonstration: (a) Pour la suffisance, il suffit de remarquer que pour toute numérotation admissible de puits $\{x_1, \dots, x_m\}$ des points de $\text{Supp } M$, le point x_1 est un puits. La nécessité suit du fait que pour tout puits x de $\text{Supp } M$ et pour toute numérotation admissible de puits $\{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ des points de $\text{Supp } M^{(x)}$, on a que $\{x, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ est une numérotation admissible de puits des points de $\text{Supp } M$. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

Lemme 3.2.2 Soient A une algèbre d'arbre héréditaire, x un puits (ou une source) de Q_A ayant n voisins y_1, \dots, y_n (avec $n \geq 2$) et M un A -module indécomposable tel que $\dim M_{y_i} = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, $\dim M_x \leq n - 1$.

Démonstration: Si x est un puits, alors pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe une unique flèche $\alpha_i : y_i \rightarrow x$, puisque Q_A est un arbre. Observons d'abord que $M_x = \sum_{i=1}^n \text{Im } M_{\alpha_i}$. Sinon, en effet, le A -module simple $S(x)$ correspondant à x est un facteur direct propre de M , ce qui contredit l'indécomposabilité de ce dernier. De plus, $\dim M_x = \dim(\sum_{i=1}^n \text{Im } M_{\alpha_i}) \leq \sum_{i=1}^n \dim(\text{Im } M_{\alpha_i}) \leq \sum_{i=1}^n \dim M_{y_i} = n$. Supposons que $\dim M_x = n$. Alors $M_{\alpha_1}, \dots, M_{\alpha_n} : k \rightarrow k^n$, considérés comme vecteurs de k^n sont linéairement indépendants et donc les vecteurs $M_{\alpha_1}(1), \dots, M_{\alpha_n}(1)$ forment une base de $M_x = k^n$. Par conséquent, $M_x = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im } M_{\alpha_i}$ et M est décomposable: en effet, soient $Q^{[1]}, \dots, Q^{[n]}$ les n composantes connexes de $Q_A^{(x)}$ contenant respectivement y_1, \dots, y_n , et, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $M^{[i]}$ le A -module défini par

$$M_y^{[i]} = \begin{cases} k & \text{si } y = x \\ M_y & \text{si } y \in Q_0^{[i]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M_\alpha^{[i]} = \begin{cases} M_{\alpha_i} & \text{si } \alpha = \alpha_i \\ M_\alpha & \text{si } \alpha \in Q_1^{[i]} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, il est clair que $M = \bigoplus_{i=1}^n M^{[i]}$. Cette contradiction entraîne l'énoncé. La démonstration est duale pour une source. \square

Remarque 3.2.3 Soit A une algèbre et x un puits (ou une source) de Q_A n'ayant qu'un

seul voisin y et M un A -module indécomposable alors $\dim M_x \leq \dim M_y$.

Proposition 3.2.4 *Soient A une algèbre pas nécessairement connexe et M un A -module dont l'algèbre support restreinte à chaque composante connexe de A est vide ou connexe. Alors, M est un A -module séparé si et seulement si M est un module séparé sur son algèbre support.*

Démonstration: Notons B l'algèbre support de M . Soient C une composante connexe de B , et C' , l'unique composante connexe de A qui contient C . Alors, $C' \cap B = C$. En effet, il est clair que $C \subseteq C' \cap B$. Réciproquement, soient $x \in (C' \cap B)_0$ et $y \in C_0$. Puisque $C' \cap B$ est connexe, il existe une marche de x à y dans $C' \cap B$. Or, C est une composante connexe de B . Donc, $x \in C_0$ et par conséquent $C' \cap B \subseteq C$.

D'autre part, soit C' une composante connexe de A telle que $C' \cap B \neq \emptyset$. Par hypothèse, $C' \cap B$ est connexe alors soit C l'unique composante connexe de B qui contient $C' \cap B$. On affirme que $C = C' \cap B$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $C \subseteq C' \cap B$. Soient $x \in C_0$ et $y \in (C' \cap B)_0$. Puisque C est connexe, il existe une marche de x à y dans C . Or, C' est une composante connexe de A . Donc, $x \in C'_0$. Puisque $C \subseteq B$, on a $C = C' \cap B$.

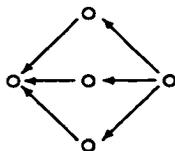
Par définition, M est séparé en tant que A -module si et seulement si, pour toute composante connexe C' de A , on a que $M|_{C'}$ est indécomposable ou zéro. L'argument précédent montre que c'est le cas si et seulement si, pour toute composante connexe C de B , on a que $M|_C$ est indécomposable, c'est-à-dire que M est séparé en tant que B -module. \square

Proposition 3.2.5 Soient A une algèbre d'arbre et M un A -module de support connexe. Alors:

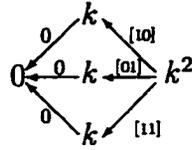
- (a) M est complètement coséparant sur A si et seulement si M est complètement coséparant sur son algèbre support.
- (b) M est complètement séparant sur A si et seulement si M est complètement séparant sur son algèbre support.

Démonstration: (a) Notons B l'algèbre support de M . Soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ une numérotation admissible de puits des points du support de M . Soient $i \in \{0, \dots, m-1\}$ et C une composante connexe de $A^{(i)}$. On affirme que $C \cap B^{(i)}$ est connexe. En effet, soient $x, y \in (C \cap B)_0$. On a $C \cap B^{(i)} \subseteq B$ et B est connexe par hypothèse. Par conséquent, il existe une marche réduite w de x à y dans B . D'autre part, C est connexe, alors il existe une marche réduite w' de x à y dans C . Mais A est une algèbre d'arbre et par conséquent $w = w'$ et se trouve dans $C \cap B = C \cap A^{(i)} \cap B = C \cap B^{(i)}$. Puisque l'algèbre support de $M^{(i)} = M|_{A^{(i)}}$ est $B^{(i)}$, il suit de 3.2.4 que $M^{(i)} = M|_{A^{(i)}}$ est séparé en tant que $A^{(i)}$ -module si et seulement si $M^{(i)}|_{B^{(i)}} = M|_{B^{(i)}}$ est séparé en tant que $B^{(i)}$ -module. La conclusion suit de la définition d'un module complètement coséparant. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

- Remarques 3.2.6** (a) La proposition précédente permet, dans le cas où A est une algèbre d'arbre et M est un A -module indécomposable, de supposer M sincère.
- (b) La proposition 3.2.5 n'est pas vraie si A n'est pas une algèbre d'arbre: En effet, prenons A l'algèbre héréditaire ayant comme carquois



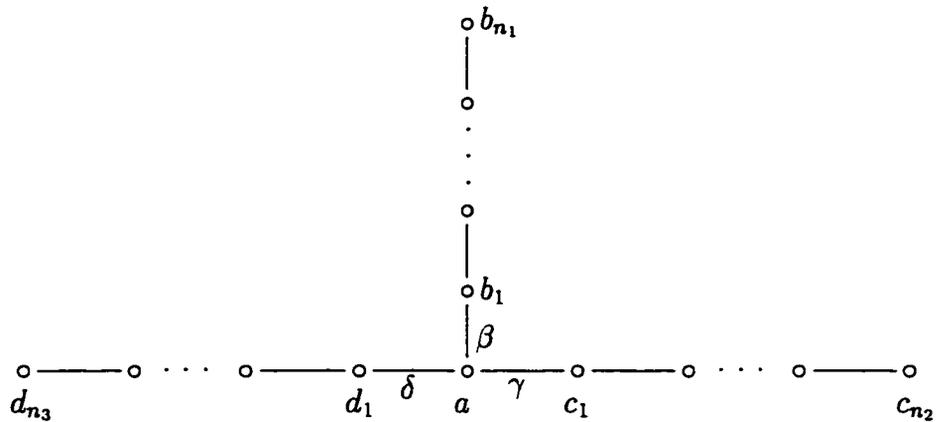
alors le A -module indécomposable défini par



est complètement séparant sur son algèbre support mais il ne l'est pas sur A .

3.3 Algèbres héréditaires étoilées à trois branches

Le but de cette section est de classifier les modules complètement coséparants et les modules complètement séparants sur les algèbres héréditaires dont le carquois a pour graphe sous-jacent une étoile à trois branches $\mathbb{T}_{n_1, n_2, n_3}$ avec $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Par la suite, nous utiliserons toujours les notations de la figure suivante:



Le point ayant trois voisins, a , sera appelé le **noeud** du carquois.

Définition 3.3.1 Soient A une algèbre héréditaire de type $\mathbb{T}_{n_1, n_2, n_3}$ et Q un sous-carquois

plein et connexe de Q_A contenant le noeud et ses voisins.

(a) Si le noeud de Q_A est un puits, on définit le A -module $V(Q)$ par

$$V(Q)_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = a \\ k & \text{si } x \in Q_0 \setminus \{a\} \\ 0 & \text{si } x \notin Q_0 \end{cases}$$

$$V(Q)_\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \gamma \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \delta \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\beta, \gamma, \delta\} \\ 0 & \text{si } \alpha \notin Q_1. \end{cases}$$

(b) Si le noeud de Q_A est une source, on définit le A -module $(Q)V$ par

$$(Q)V_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = a \\ k & \text{si } x \in Q_0 \setminus \{a\} \\ 0 & \text{si } x \notin Q_0 \end{cases}$$

$$(Q)V_\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \gamma \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \delta \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\beta, \gamma, \delta\} \\ 0 & \text{si } \alpha \notin Q_1. \end{cases}$$

Lemme 3.3.2 Soient A une algèbre héréditaire de type $\mathbb{T}_{n_1, n_2, n_3}$ et Q un sous-carquois plein et connexe de Q_A contenant le noeud et ses voisins.

- (a) Si le noeud de Q_A est un puits, alors $V(Q)$ est complètement coséparant.
- (b) Si le noeud de Q_A est une source, alors $(Q)V$ est complètement séparant.

Démonstration: (a) D'abord, $V(Q)$ est indécomposable (car sa restriction à la sous-catégorie pleine formée de a, b_1, c_1, d_1 l'est). Montrons l'énoncé par récurrence sur $n = |Q_0|$. Si $n = 4$, le seul puits de Q est le noeud a . En outre, $Q^{(a)} = Q_b \cup Q_c \cup Q_d$ où Q_b (ou Q_c, Q_d) contient comme unique point b_1 (ou c_1, d_1 , respectivement). Alors $\overline{Q_b} = \overline{Q_c} = \overline{Q_d} = \mathbf{A}_1$ et $V(Q)^{(a)} = U(Q_b) \oplus U(Q_c) \oplus U(Q_d) = k \oplus k \oplus k$ qui est complètement coséparant par 3.1.10. Par 3.2.1, $V(Q)$ est complètement coséparant.

Supposons l'énoncé vrai pour $l < n$ et montrons-le pour n . Soit x un puits de Q . Si $x = a$, alors $Q^{(x)} = Q_b \cup Q_c \cup Q_d$ où Q_b (ou Q_c, Q_d) est connexe et contient b_1 (ou c_1, d_1 , respectivement). Alors, $\overline{Q_b} = \mathbf{A}_{n_1}, \overline{Q_c} = \mathbf{A}_{n_2}, \overline{Q_d} = \mathbf{A}_{n_3}$ et $V(Q)^{(x)} = U(Q_b) \oplus U(Q_c) \oplus U(Q_d)$ qui est complètement coséparant par 3.1.10. Si $x \neq a$, alors x ne peut être un voisin de a et par conséquent, $Q^{(x)} = Q' \cup Q''$ où Q'' est vide ou de la forme \mathbf{A}_l , tandis que Q' est

une étoile à trois branches avec $|Q'_0| < |Q_0|$. Donc, $V(Q^{(x)}) = V(Q') \oplus U(Q'')$ est complètement coséparant, par l'hypothèse de récurrence. Par 3.2.1, $V(Q)$ est complètement coséparant. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

Théorème 3.3.3 *Soient A une algèbre héréditaire de type $\mathbb{T}_{n_1, n_2, n_3}$ et M un A -module avec $Q = \text{Supp} M$ connexe.*

- (a) *M est complètement coséparant si et seulement si $M \cong U(Q)$ ou bien le noeud de Q_A est un puits contenu dans Q avec ses voisins et $M \cong V(Q)$.*
- (b) *M est complètement séparant si et seulement si $M \cong U(Q)$ ou bien le noeud de Q_A est une source contenue dans Q avec ses voisins et $M \cong (Q)V$.*

Démonstration: (a) La suffisance suivant immédiatement de 3.1.8, 3.1.9 et 3.3.2, montrons la nécessité. Supposons que $M \not\cong U(Q)$. Alors le noeud a de Q_A ainsi que ses voisins b_1, c_1, d_1 appartiennent nécessairement à Q : sinon, $\overline{Q} = \mathbf{A}_l$ pour un l et par 3.1.10, $M \cong U(Q)$, une contradiction.

Nous affirmons maintenant que le noeud a est un puits. Supposons que ce n'est pas le cas, et prouvons par récurrence sur $n = |Q_0|$ que $M \cong U(Q)$. Pour $n = 4$, soit x un puits de Q , alors x est un voisin de a . En outre, $\overline{Q^{(x)}} = \mathbf{A}_3$ et par 3.1.10, $M^{(x)} \cong U(Q^{(x)})$. Comme M est un module indécomposable sur une algèbre héréditaire de type \mathbb{D}_4 , on a bien que $M \cong U(Q)$. Supposons $n > 4$, que l'énoncé est vrai pour $l < n$ et montrons-le pour n . Soit x un puits de Q , alors $x \neq a$. En outre, $Q^{(x)} = Q' \cup Q''$ où Q'' est vide ou de la forme \mathbf{A}_l , tandis que Q' est une étoile à trois branches avec $|Q'_0| < n$ ou de la forme \mathbf{A}_{n-l-1} . Comme $M^{(x)}$ est complètement coséparant, l'hypothèse de récurrence et 3.1.10 entraînent que $M^{(x)} \cong U(Q') \oplus U(Q'')$. Comme M est indécomposable, il suit de 3.2.2 que

$\dim M_x \leq 1$. Par 3.1.11, on a bien $M \cong U(Q)$. Cela achève de montrer que a est un puits.

Il reste à prouver qu'avec ces hypothèses, a est un puits contenu dans Q avec ses voisins et $M \not\cong U(Q)$, on a $M \cong V(Q)$. Comme $M^{(a)}$ est complètement coséparant et $Q^{(a)} = Q_b \cup Q_c \cup Q_d$ où Q_b (ou Q_c, Q_d) est connexe et contient b_1 (ou c_1, d_1 , respectivement) alors, $\overline{Q_b} = \mathbf{A}_{n_1}, \overline{Q_c} = \mathbf{A}_{n_2}, \overline{Q_d} = \mathbf{A}_{n_3}$ et 3.1.10 impliquent que $M^{(a)} \cong U(Q_b) \oplus U(Q_c) \oplus U(Q_d)$. Comme M est indécomposable, il suit de 3.2.2 que $\dim M_a \leq 2$. L'hypothèse que $M \not\cong U(Q)$ et 3.1.11 entraînent qu'en fait $\dim M_a = 2$. Notons A' la sous-catégorie pleine de A engendrée par $\{a, b_1, c_1, d_1\}$. Alors A' est héréditaire de type \mathbb{D}_4 et son noeud est un puits. Comme la restriction $M' = M|_{A'}$ est un A' -module indécomposable (et que les modules indécomposables sur les algèbres héréditaires de représentation finie sont uniquement déterminés par leurs vecteurs dimension), il est isomorphe à $V(Q_{A'})$. Par conséquent, $M \cong V(Q)$. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

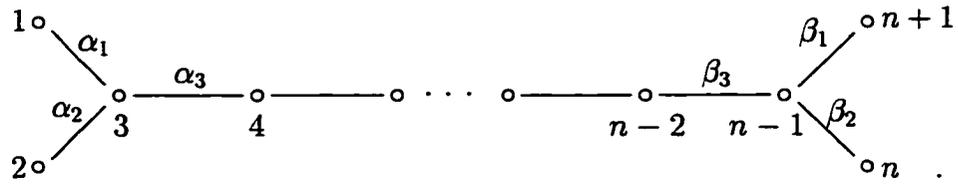
Corollaire 3.3.4 *Soient A une algèbre héréditaire docile telle que $\overline{Q_A} \neq \tilde{\mathbf{A}}_n, \tilde{\mathbf{D}}_n$, et M un A -module dont le support Q est connexe. Alors:*

- (a) *M est complètement coséparant si et seulement si $M \cong U(Q)$, ou bien Q contient un point ayant trois voisins, ce noeud est un puits et $M \cong V(Q)$.*
- (b) *M est complètement séparant si et seulement si $M \cong U(Q)$, ou bien Q contient un point ayant trois voisins, ce noeud est une source et $M \cong (Q)V$.*

Démonstration: La démonstration suit du théorème précédent. \square

3.4 Le cas $\tilde{\mathbb{D}}_n$

Il reste à traiter les algèbres héréditaires de type $\tilde{\mathbb{D}}_n$. Pour $n \geq 5$, le carquois ordinaire d'une telle algèbre a un graphe sous-jacent contenant deux points ayant trois voisins (aussi appelés ses **noeuds**). On utilisera les notations suivantes:



Cela permet de définir six modules sincères selon que 3 et $n-1$ sont des puits, des sources ou ni l'un ni l'autre. On note Q un carquois tel que $\overline{Q} = \tilde{\mathbb{D}}_n$.

(a) Si 3 est un puits de Q , on définit le A -module $V_3(Q)$ par

$$V_3(Q)_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = 3 \\ k & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$$

$$V_3(Q)_\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \alpha_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \alpha_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \alpha_3 \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}. \end{cases}$$

(b) Si 3 est une source de Q , on définit le A -module $(Q)V_3$ par

$$((Q)V_3)_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = 3 \\ k & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$$

$$((Q)V_3)_\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \alpha_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \alpha_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \alpha_3 \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}. \end{cases}$$

(c) Si $n - 1$ est un puits de Q , on définit le A -module $V_{n-1}(Q)$ par

$$V_{n-1}(Q)_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = n - 1 \\ k & \text{si } x \neq n - 1 \end{cases}$$

$$V_{n-1}(Q)_\alpha = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta_3 \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}. \end{cases}$$

(d) Si $n - 1$ est une source de Q , on définit le A -module $(Q)V_{n-1}$ par

$$((Q)V_{n-1})_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = n - 1 \\ k & \text{si } x \neq n - 1 \end{cases}$$

$$((Q)V_{n-1})_{\alpha} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha = \beta_3 \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}. \end{cases}$$

(e) Si 3 et $n - 1$ sont des puits de Q , on définit le A -module $V_{3,n-1}(Q)$ par

$$V_{3,n-1}(Q)_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x \in \{3, n-1\} \\ k & \text{si } x \notin \{3, n-1\} \end{cases}$$

$$V_{3,n-1}(Q)_{\alpha} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \beta_1\} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha \in \{\alpha_2, \beta_2\} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha \in \{\alpha_3, \beta_3\} \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}. \end{cases}$$

(f) Si 3 et $n - 1$ sont des sources de Q , on définit le A -module $(Q)V_{3,n-1}$ par

$$((Q)V_{3,n-1})_x = \begin{cases} k^2 & \text{si } x \in \{3, n-1\} \\ k & \text{si } x \notin \{3, n-1\} \end{cases}$$

$$((Q)V_{3,n-1})_{\alpha} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \beta_1\} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha \in \{\alpha_2, \beta_2\} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{si } \alpha \in \{\alpha_3, \beta_3\} \\ 1 & \text{si } \alpha \in Q_1 \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}. \end{cases}$$

Lemme 3.4.1 Soit $A \cong kQ$ avec $\overline{Q} = \overline{\mathbb{D}}_n$ et $n \geq 5$. Alors:

- (a) Les modules $V_3(Q)$, $V_{n-1}(Q)$ et $V_{3,n-1}(Q)$ sont complètement coséparants (quand ils sont définis).
- (b) Les modules $(Q)V_3$, $(Q)V_{n-1}$ et $(Q)V_{3,n-1}$ sont complètement séparants (quand ils sont définis).

Démonstration: (a) Il est clair que les modules $V_3(Q)$, $V_{n-1}(Q)$ et $V_{3,n-1}(Q)$ sont indécomposables (quand ils sont définis). Supposons que 3 est un puits et montrons que $V_3(Q)$ est complètement coséparant. Soit x un puits de Q . Si $x = 3$, alors $Q^{(x)} = Q(1) \cup Q(2) \cup Q(4)$, où $Q(i)$ est connexe et contient i , pour $i \in \{1, 2, 4\}$. Alors $\overline{Q(1)} = \overline{Q(2)} = \mathbf{A}_1$ et $\overline{Q(4)} = \mathbb{D}_{n-2}$ (sauf si $n = 5$, auquel cas $\overline{Q(4)} = \mathbf{A}_3$), et $V_3(Q)^{(x)} = U(Q(1)) \oplus U(Q(2)) \oplus U(Q(4)) = k \oplus k \oplus U(Q(4))$ est complètement coséparant.

Si $x = n - 1$ alors $Q^{(x)} = Q(n - 2) \cup Q(n) \cup Q(n + 1)$ où $Q(i)$ est connexe et contient i , pour $i \in \{n - 2, n, n + 1\}$. Alors $\overline{Q(n)} = \overline{Q(n + 1)} = \mathbf{A}_1$ et $\overline{Q(n - 2)} = \mathbb{D}_{n-2}$ (en effet, comme 3 et $n - 1$ sont tous deux des puits, on a $n > 5$) et $V_3(Q)^{(x)} = V(Q(n - 2)) \oplus U(Q(n)) \oplus U(Q(n + 1)) = V(Q(n - 2)) \oplus k \oplus k$ est complètement coséparant. Si x n'a que deux voisins, alors $x \in \{4, \dots, n - 2\}$ et $Q^{(x)} = Q' \cup Q''$ où Q' contient 3, $\overline{Q'} = \mathbb{D}_l$ et Q'' contient $n - 1$, $\overline{Q''} = \mathbb{D}_{n-l}$. On a $V_3^{(x)} = V(Q') \oplus U(Q'')$ qui est complètement coséparant.

Enfin, si x n'a qu'un seul voisin, alors $x \in \{n, n + 1\}$ et $Q^{(x)}$ est connexe avec $\overline{Q^{(x)}} = \mathbb{D}_n$, alors $V_3^{(x)} = V(Q^{(x)})$ est complètement coséparant. Comme $V_3(Q)$ est indécomposable, on a fini par 3.2.1. Le cas $V_{n-1}(Q)$ est symétrique.

Il reste à trancher le cas où 3 et $n-1$ sont des puits et montrer qu'alors $V_{3,n-1}(Q)$ est complètement coséparant. Soit x un puits de Q . Alors, $x \in \{3, n-1\}$ ou bien x a deux voisins. Dans le premier cas, supposons par symétrie que $x = 3$, alors $Q^{(x)} = Q(1) \cup Q(2) \cup Q(4)$, où $Q(i)$ est connexe et contient i , pour $i \in \{1, 2, 4\}$, $\overline{Q(1)} = \overline{Q(2)} = \mathbb{A}_1$ et $\overline{Q(4)} = \mathbb{D}_{n-2}$. Alors $V_{3,n-1}(Q)^{(x)} = U(Q(1)) \oplus U(Q(2)) \oplus V(Q(4)) = k \oplus k \oplus V(Q(4))$ est complètement coséparant. Dans le second cas, puisque $x \notin \{4, n-2\}$, on a $Q^{(x)} = Q' \cup Q''$ où $\overline{Q'} = \mathbb{D}_l$ et Q' contient 3, tandis que $\overline{Q''} = \mathbb{D}_{n-l}$ et Q'' contient $n-1$. Donc $V_{3,n-1}^{(x)} = V(Q') \oplus V(Q'')$ qui est complètement coséparant. Comme $V_{3,n-1}(Q)$ est indécomposable, on a fini par 3.2.1. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

Proposition 3.4.2 *Soient A une algèbre héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_n$ avec $n \geq 5$ et M un A -module de support Q connexe. Alors:*

(a) *M est complètement coséparant si et seulement si:*

- (i) $M \cong U(Q)$, ou bien
- (ii) $\overline{Q} = \mathbb{D}_m$ avec $m \leq n$, le noeud de Q est un puits dans Q et $M \cong V(Q)$, ou bien
- (iii) $Q = Q_A$, 3 est un puits et $M \cong V_3(Q)$, ou bien
- (iv) $Q = Q_A$, $n-1$ est un puits et $M \cong V_{n-1}(Q)$, ou bien
- (v) $Q = Q_A$, 3 et $n-1$ sont des puits et $M \cong V_{3,n-1}(Q)$.

(b) *M est complètement séparant si et seulement si:*

- (i) $M \cong U(Q)$, ou bien
- (ii) $\overline{Q} = \mathbb{D}_m$ avec $m \leq n$, le noeud de Q est une source dans Q et $M \cong (Q)V$, ou bien
- (iii) $Q = Q_A$, 3 est une source et $M \cong (Q)V_3$, ou bien

(iv) $Q = Q_A$, $n - 1$ est une source et $M \cong (Q)V_{n-1}$, ou bien

(v) $Q = Q_A$, 3 et $n - 1$ sont des sources et $M \cong (Q)V_{3,n-1}$.

Démonstration: (a) La suffisance suivant de 3.3.2, 3.4.1 et 3.1.8, montrons la nécessité.

Si $Q \neq Q_A$, alors $\overline{Q} = \mathbf{A}_m$ ou $\overline{Q} = \mathbf{D}_m$. On applique alors respectivement 3.1.10 et 3.3.4.

Il reste le cas où $Q = Q_A$. On a deux cas:

(1) Si 3 et $n - 1$ ne sont pas des puits, soit x un puits de Q . Si x n'a qu'un seul voisin dans Q , alors $\overline{Q^{(x)}} = \mathbf{D}_n$ et par 3.3.4, $M^{(x)} \cong U(Q^{(x)})$. Comme M est indécomposable, on a $\dim M_x \leq 1$. On en déduit que $M \cong U(Q)$ par 3.1.11. Si x a deux voisins dans Q , alors $Q^{(x)} = Q' \cup Q''$ où $\overline{Q'} = \mathbf{D}_l$ (ou \mathbf{A}_3 , si $x = 4$) et $\overline{Q''} = \mathbf{D}_{n-l}$ (ou $\overline{Q''} = \mathbf{A}_n$, si $x = n - 2$) et par 3.3.4, $M^{(x)} \cong U(Q') \oplus U(Q'')$. Comme, par 3.2.2, $\dim M_x \leq 1$, on a que $M \cong U(Q)$ par 3.1.11.

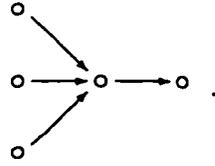
(2) Si 3 ou $n - 1$ est un puits, on peut, par symétrie, supposer que 3 est un puits. Alors $Q^{(3)} = Q(1) \cup Q(2) \cup Q(4)$ où $Q(i)$ est connexe et contient i , pour $i \in \{1, 2, 4\}$ de sorte que $\overline{Q(1)} = \overline{Q(2)} = \mathbf{A}_1$ et $\overline{Q(4)} = \mathbf{D}_{n-2}$. Par 3.3.4, on a deux cas possibles: $M^{(3)} \cong k \oplus k \oplus U(Q(4))$ ou $n - 1$ est un puits et $M^{(3)} \cong k \oplus k \oplus V(Q(4))$. D'autre part, par 3.2.2, on a $\dim M_3 \leq 2$. Si $\dim M_3 = 1$, il suit clairement de l'indécomposabilité de M que $M \cong U(Q)$ ou $M \cong V_{n-1}(Q)$.

Si $\dim M_3 = 2$ et $M \cong k \oplus k \oplus U(Q(4))$, notons A' la sous-catégorie pleine de A engendrée par $\{1, 2, 3, 4\}$, alors A' est héréditaire de type \mathbf{D}_4 et son noeud est un puits. Comme $M' = M|_{A'}$ est un A' module indécomposable, alors $M \cong V_3(Q)$. Tandis que si $\dim M = 2$, $n - 1$ est un puits et $M^{(3)} = k \oplus k \oplus V(Q(4))$. En particulier, si A' note encore la sous-catégorie pleine de A engendrée par $\{1, 2, 3, 4\}$, comme $M^{(n-1)}$ est complètement

coséparant, on en déduit que $M' = M|_{A'} = M^{(n-1)}|_{A'}$ est un A' -module indécomposable. Par conséquent, $M \cong V_{3,n-1}(Q)$. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

Il reste le cas $\tilde{\mathbb{D}}_4$. Commençons par les exemples suivants.

Exemples 3.4.3 (a) Soit $A = kQ$, où Q est le carquois



Pour chaque $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$, on définit $W(\lambda, \mu)$ comme étant le A -module donné par

$$\begin{array}{ccccc}
 k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & & & \\
 & & k^2 & \xrightarrow{[\lambda \ \mu]} & k \\
 k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & & & \\
 k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & & &
 \end{array}$$

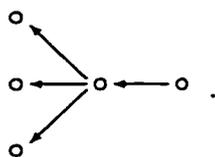
et W comme étant le A -module donné par

$$\begin{array}{ccccc}
 k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & & & \\
 & & k^2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & k^2 \\
 k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} & & & \\
 k & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & & &
 \end{array}$$

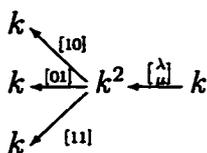
alors $W(\lambda, \mu)$ et W sont des briques et en fait sont complètement coséparants. Observons que W est de défaut -1 et donc est postprojectif, alors que $W(\lambda, \mu)$ est de défaut nul et donc est régulier (en effet, le vecteur défaut pour A est $\delta_A =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

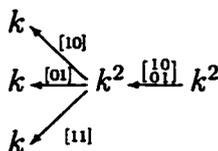
(b) Soit $A = kQ$, où Q est le carquois



Pour chaque $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$, on définit $(\lambda, \mu)W$ comme étant le A -module donné par

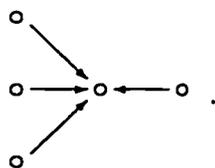


et W' comme étant le A -module donné par



alors $(\lambda, \mu)W$ et W' sont des briques et en fait sont complètement séparants. Observons que W' est de défaut 1 et donc est préinjectif, alors que $(\lambda, \mu)W$ est de défaut nul et donc est régulier (en effet, le vecteur défaut pour A est $\delta_A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

(c) Soit $A = kQ$, où Q est le carquois



Pour chaque $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$, on définit $W(\lambda, \mu)$ comme étant le A -module donné par

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ & \searrow [\delta] & \\ k & \xrightarrow{[\eta]} & k^2 \xrightarrow{[\lambda]} k \\ & \nearrow [\zeta] & \end{array}$$

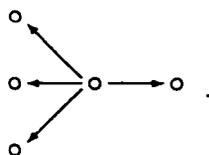
et W comme étant le A -module donné par

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ & \searrow [\delta] & \\ k & \xrightarrow{[\theta]} & k^3 \xrightarrow{[\psi]} k \\ & \nearrow [\vartheta] & \end{array}$$

alors $W(\lambda, \mu)$ et W sont des briques et en fait sont complètement coséparants. Observons que W est de défaut -2 et donc est postprojectif, alors que $W(\lambda, \mu)$ est de défaut nul et donc est régulier (en effet, le vecteur défaut pour A est $\delta_A =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Soit $A = kQ$, où Q est le carquois



Pour chaque $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$, on définit $(\lambda, \mu)W$ comme étant le A -module donné par

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ & \searrow [\alpha] & \\ k & \xrightarrow{[\beta]} & k^2 \xrightarrow{[\lambda, \mu]} k \\ & \nearrow [\gamma] & \end{array}$$

et W' comme étant le A -module donné par

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k & & \\
 & & \swarrow^{[100]} & & \\
 k & \xrightarrow{[001]} & k^3 & \xrightarrow{[111]} & k \\
 & \searrow_{[010]} & & & \\
 & & k & &
 \end{array}$$

alors $(\lambda, \mu)W$ et W' sont des briques et en fait sont complètement séparants. Observons que W' est de défaut 2 et donc est préinjectif, alors que $(\lambda, \mu)W$ est de défaut nul et donc est régulier (en effet, le vecteur défaut pour A est $\delta_A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

La classification des modules complètement coséparants et des modules complètement séparants sur les algèbres héréditaires fortement simplement connexes est achevée par la proposition suivante.

Proposition 3.4.4 *Soient A une algèbre héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_4$ et M un A -module de support Q connexe. Alors:*

(a) *M est complètement coséparant si et seulement si:*

- (i) *$M \cong U(Q)$, ou bien*
- (ii) *$\bar{Q} = \mathbb{D}_4$, le noeud de Q est un puits et $M \cong V(Q)$, ou bien*
- (iii) *$Q = Q_A$ à l'orientation de l'exemple 3.4.3(a) ou celle de l'exemple 3.4.3(c) et on a $M \cong W(\lambda, \mu)$ pour un certain $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$ ou bien $M \cong W$.*

(b) *M est complètement séparant si et seulement si:*

- (i) *$M \cong U(Q)$, ou bien*

(ii) $\overline{Q} = \mathbb{D}_4$, le noeud de Q est une source et $M \cong V(Q)$, ou bien

(iii) $Q = Q_A$ a l'orientation de l'exemple 3.4.3(b) ou celle de l'exemple 3.4.3(d) et on a $M \cong (\lambda, \mu)W$ pour un certain $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$ ou bien $M \cong W'$.

Démonstration: La suffisance suivant de 3.3.2, 3.4.3 et 3.1.8, montrons la nécessité. Supposons que $Q \neq Q_A$, alors Q est de type $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbb{D}_4$ de sorte que $M \cong U(Q)$ ou $M \cong V(Q)$ (et ce dernier cas n'arrive que si $\overline{Q} = \mathbb{D}_4$ et le noeud de Q est un puits de Q). Supposons donc que $Q = Q_A$ et soit x un puits de Q .

Si x n'a qu'un voisin, alors $\overline{Q^{(x)}} = \mathbb{D}_4$. Donc, $M^{(x)} \cong U(Q^{(x)})$ ou bien $M^{(x)} \cong V(Q^{(x)})$ et le noeud de $Q^{(x)}$ est un puits. Dans le premier cas, on a $\dim M_x \leq 1$ car M est indécomposable, donc, par 3.1.11, on a $M \cong U(Q)$. Dans le second cas, Q a l'orientation de 3.4.3(a) et on a $\dim M \leq 2$, car M est indécomposable. On a deux sous-cas. Si $\dim M_x = 1$, alors M est de défaut nul, donc régulier. Comme M est une brique régulière, on a que $M \cong W(\lambda, \mu)$ pour un certain $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$. Si $\dim M_x = 2$, alors M est de défaut $-1 < 0$, donc est postprojectif. Comme un module indécomposable postprojectif est uniquement déterminé par son vecteur dimension, on a $M \cong W$.

Si x a plus d'un voisin, il en a quatre. Par conséquent, le carquois Q a l'orientation de 3.4.3(c) et $M^{(x)} \cong k \oplus k \oplus k \oplus k$. Par 3.2.2, $\dim M_x \leq 3$ ce qui donne trois sous-cas. Si $\dim M_x = 1$ alors, par 3.1.11, $M \cong U(Q)$. Si $\dim M_x = 3$ alors M est de défaut $-2 < 0$ donc est postprojectif et, par conséquent, $M \cong W$. Enfin, si $\dim M_x = 2$, on a que M est de défaut nul, donc est une brique régulière. Donc, $M \cong W(\lambda, \mu)$ pour un certain $(\lambda, \mu) \in k^2 \setminus \{0\}$. La démonstration de (b) est duale de celle de (a). \square

CONCLUSION

On a donné, dans le chapitre trois, une classification des modules complètement co-séparants et des modules complètement séparants sur les algèbres héréditaires dociles. Il serait intéressant de généraliser le résultat donné pour les algèbres héréditaires de type $\tilde{\mathbb{D}}_4$ aux étoiles à quatre branches, comme on l'a fait pour les étoiles à trois branches. On s'aperçoit déjà que la classification des modules complètement coséparants et des modules complètement séparants sur les algèbres héréditaires étoilées à quatre branches est moins simple que celle sur les algèbres héréditaires à trois branches. On pourrait tout de même essayer de généraliser ces résultats pour une algèbre héréditaire étoilée à n branches. Une autre approche serait de regarder ce qui se passe pour les algèbres monomiales en fonction des résultats sur les algèbres héréditaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Assem (I.), Algèbres et modules, Masson (Paris)/ Presses de l'Université d'Ottawa (Ottawa) (1997).
- [2] Assem (I.) et Castonguay (D.), Strongly simply connected one-point extensions of tame hereditary algebras, Université de Sherbrooke, rapport no. 207 (1997).
- [3] Assem (I.) et Liu (S.), Strongly simply connected algebras, Université de Sherbrooke, rapport no. 179 (1996).
- [4] Assem (I.), Simson (D.) et Skowroński (A.), Elements of representation theory of associative algebras, Cambridge University Press (Cambridge) en cours de préparation.
- [5] Assem (I.) et Skowroński (A.), On some classes of simply connected algebras, Proc. London Math. Soc., Vol. 3, no. 56 (1988) pp. 417-450.
- [6] Auslander (M.), Reiten (I.) et Smalø(S.O.), Representation theory of artin algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 36, Cambridge University Press (Cambridge) (1995).
- [7] Bautista (R.), Larrión (F.) et Salmerón (L.), On simply connected algebras, J. London Math. Soc., Vol. 2, no. 27 (1983) pp. 212-230.
- [8] Dlab (V.) et Ringel (C.M.), Indecomposable representations of graphs and algebras, Memoirs of the Amer. Math. Soc., vol. 3, no. 173 (1976).
- [9] Drozd (Y.), Tame and wild matrix problems, Representations and quadratic forms, Kiev (1979) pp. 39-74.

- [10] Dräxler (P.), Completely separating algebras, J. Algebra, no. 165 (1994) pp. 550-565.
- [11] Gabriel (P.), Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Proc. ICRA II (Ottawa, 1979) Lecture Notes in Math. 831, Springer, Berlin (1980) pp.1-71.
- [12] Happel (D.), Composition factors for indecomposable modules, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 1, no. 86 (1982) pp. 29-31.
- [13] Riedtman (C.), Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, Comment. Math. Helv., no. 55 (1980) pp.199-224.
- [14] Skowroński (A.), Simply connected algebras and Hochschild cohomologies, Can. Math. Soc. Conf. Proc., Vol. 14 (1993) pp. 431-447.