

**APPLICATIONS DE LA TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE  
EN THÉORIE DES GRAPHS**

par

Fabrice Colin

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique en vue  
de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

**FACULTÉ DES SCIENCES  
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

Sherbrooke, Québec, Canada, novembre 1996



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-21733-7

À la mémoire de

**Gilles FOURNIER.**

## SOMMAIRE

Depuis que ses fondements ont été exposés, voilà environ un siècle, la topologie algébrique confirme sa grande efficacité dans des champs d'application sans cesse croissants. Parmi les concepts les plus importants, développés dans ce domaine, figure en bonne place la théorie de l'homologie. Dans le présent mémoire, nous exploiterons tout particulièrement le fait que le calcul du premier groupe d'homologie d'un graphe nous permet d'obtenir un ensemble de générateurs des cycles du graphe. Grâce à cette remarque et aux techniques que nous exposerons ultérieurement, nous serons alors à même de détecter des ensembles d'articulation, de démontrer beaucoup plus aisément et esthétiquement des résultats de la théorie des graphes et enfin, d'associer à des graphes des équations diophantiennes et quadratiques. L'étude de ces dernières, nous permettra d'ailleurs de mettre en évidence d'étonnantes conditions nécessaires à l'existence d'un cycle hamiltonien ou d'un isomorphisme de graphes.

## REMERCIEMENTS

J'aimerais, tout d'abord, exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de recherche, **Madame Reine GAGNON** ainsi que **Monsieur Jacques DUBOIS**, pour leur soutien indéfectible et tout particulièrement, pour la confiance qu'ils m'ont accordée et sans laquelle rien n'aurait été possible.

Je tiens également à remercier le **Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada** pour sa très généreuse assistance financière.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>SOMMAIRE</b> .....	ii
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	iii
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> .....	iv
<b>INTRODUCTION</b> .....	1
<b>CHAPITRE 1</b> <b>Éléments de théorie des graphes</b> .....	<b>3</b>
1.1 Définitions et propriétés élémentaires.....	3
1.2 Graphes hamiltoniens et ensembles d'articulation.....	8
1.3 Homomorphismes de graphes.....	14
1.4 Équations quadratiques et diophantiennes.....	16
<b>CHAPITRE 2</b> <b>Homologie singulière et groupes d'homologie</b> <b>d'un graphe</b> .....	<b>22</b>
2.1 Définition des groupes d'homologie singulière.....	22
2.2 Homomorphismes induits par des fonctions continues.....	27
2.3 Groupes d'homologie relative.....	31
2.4 Groupes d'homologie des graphes d'ordre fini.....	36
<b>CHAPITRE 3</b> <b>Applications à la théorie des graphes</b> .....	<b>44</b>
3.1 Propriétés des sous-graphes $G'_0$ et $G'_{n_0}$ .....	44
3.2 Détection d'ensembles d'articulation.....	49

3.3 Cycle de longueur paire dans les graphes.....	57
3.4 Graphes et équations associées.....	63
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>72</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>75</b>

## INTRODUCTION

Le but premier que nous poursuivions, en entamant notre recherche sur le sujet, était la découverte de nouvelles conditions nécessaires à l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe donné. Or, comme le lecteur s'en apercevra, nous avons largement débordé de ce cadre et ainsi obtenu plusieurs résultats inattendus qui seront exposés au chapitre trois. En effet, il nous apparaît important de le préciser, les deux premiers chapitres du présent mémoire seront principalement dédiés à des rappels, de même qu'à des définitions et des propositions qui assureront l'intelligibilité ainsi que la cohérence de notre travail.

Le premier chapitre traitera donc de notions élémentaires de la théorie des graphes, mais également d'équations diophantiennes et abordera les équations quadratiques en s'inspirant des écrits de BOURBAKI [3] et de SERRE [10]. Le second chapitre, quant à lui, s'appuiera sur d'importantes parties de l'ouvrage de topologie algébrique de MASSEY [7] et nous permettra d'asseoir sur des bases solides la suite de notre exposé. Le chapitre trois qui, comme nous l'avons laissé entendre, constitue notre apport au sujet, consistera donc en diverses applications rendues possibles par le calcul des groupes d'homologie d'un graphe.

Effectivement, le calcul du premier groupe d'homologie peut nous fournir une base de générateurs de l'ensemble des cycles d'un graphe, et c'est sur cette idée que reposent bon nombre de nos trouvailles. Il nous faut également mentionner que les méthodes de calcul de groupes d'homologie de complexes simpliciaux élaborées par KACZYNSKI, MROZEK ET SLUSAREK [6], se révèlent d'une grande utilité lorsqu'il s'agit d'appliquer à des graphes concrets, les résultats de ce chapitre. Un de ceux-là se présente sous la forme d'un théorème qui, par la résolution d'un système d'équations linéaires, permet de déterminer si un sommet donné est un point d'articulation d'un graphe. Une autre proposition nous permet d'obtenir, par le truchement d'une équation quadratique associée au graphe, une condition nécessaire à l'existence d'un cycle hamiltonien, fort originale. Ce procédé présente certaines similitudes avec le travail de VAN DEN HEUVEL [11], même si les matrices considérées sont différentes. Toujours grâce à ces équations quadratiques associées, nous sommes à même d'exhiber une surprenante condition nécessaire à l'existence d'un isomorphisme de graphes.

Enfin, les techniques précédentes peuvent se révéler d'une appréciable utilité lorsqu'il s'agit de produire des démonstrations simples et esthétiques de certaines propositions concernant les graphes. Nous en apporterons la preuve, en démontrant ainsi une généralisation d'un théorème de CHUNG, GODDARD et KLEITMAN [4].

# CHAPITRE 1

## ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GRAPHS

La théorie des graphes, croit-on, débuta par l'étude du célèbre problème des ponts de Koenisberg (Kaliningrad), oeuvre du fameux mathématicien allemand Euler. Il s'agissait, à l'époque, de trouver un trajet passant une et une seule fois par chacun des ponts tout en revenant au point de départ et c'est dans ce contexte qu'apparurent les multigraphes. Depuis lors, l'utilisation des graphes dans une multitude de domaines allant de la théorie du diagnostic en informatique jusqu'à la génétique [8] ne fit que s'accroître. Ce chapitre ne se veut pas, loin s'en faut, un exposé des plus approfondis dans ce domaine, mais bien plutôt un rappel des principales définitions communément admises. Il est agrémenté d'une dernière section traitant à la fois des équations diophantiennes et quadratiques puisque, comme nous le montrera le chapitre trois, il est possible d'associer de manière tout à fait originale à un graphe des équations des types précédents.

### 1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Comme nous l'avons précédemment annoncé, nous clarifierons dans cette première section ce que nous entendons par graphe simple ou graphe orienté et aborderons les notions les plus fondamentales associées à ces objets.

#### **Définition 1.1.1 :**

Un *graphe simple* noté  $G = (X, A)$  est un couple où  $X$  est un ensemble fini dont chacun des éléments est appelé *sommet* et où  $A \subseteq \mathbb{P}_2(X)$ , l'ensemble des parties de  $X$  à deux éléments, constitue l'ensemble des *arêtes*.

Notons que le graphe obtenu lorsque  $A = \mathbb{P}_2(X)$ , se nomme le *graphe complet sur  $X$*  et se note  $K_n$  où  $n = |X|$ , le cardinal de l'ensemble  $X$ , qui est appelé *l'ordre du graphe  $G$* .

**Définition 1.1.2 :**

Un *graphe simple orienté* (ou graphe orienté) noté  $G = (X, U)$ , est un couple constitué d'un ensemble fini  $X$  de sommets ainsi que d'un ensemble  $U$  d'arêtes orientées qui est tel que  $U \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$  où  $\Delta$  représente la diagonale du produit cartésien. L'ensemble  $U$  doit également satisfaire la condition suivante :  $(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$ .

Les graphes précédents admettent une représentation naturelle dans le plan en associant à chaque élément de  $X$  un point du plan et à chaque paire  $\{x, y\}$  de  $A$  ou à chaque couple  $(x, y)$  de  $U$ , un trait reliant les points correspondants et en ajoutant, dans le cas de la représentation du couple  $(x, y)$ , une flèche pointée vers le sommet  $y$ . Même si nous ne traiterons pas explicitement de ce cas par la suite, signalons néanmoins que la théorie qui sera développée ultérieurement s'applique sans difficulté aux graphes de type mixte. Nous entendons par ce terme, des graphes comportant à la fois des arêtes orientées et non orientées mais ni boucles, ni arêtes multiples, tout comme le graphe de la figure 1.2. Finalement, si  $x$  et  $y$  sont les deux sommets d'une même arête  $a$  on dira que  $x$  et  $y$  sont *adjacents* dans le graphe, que l'arête  $a$  est *incidente* à  $x$  et à  $y$  et pour terminer, que ces sommets sont les *extrémités* de  $a$ .

**Exemple 1.1.3 :**

Les figures 1.1 et 1.2 ci-dessous sont les représentations graphiques respectives des graphes suivants :  $G = (X, A)$ ,  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $A = \{ \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\} \{f, g\}, \{g, h\} \}$  et  $G = (X, U)$ ,  $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ ,  $U = \{ (a, b), (b, a), (b, c), (d, c), (e, d), (f, e), (f, g), (h, g), (h, a), (a, h), (a, d), (c, f), (i, j), (j, k), (i, k) \}$

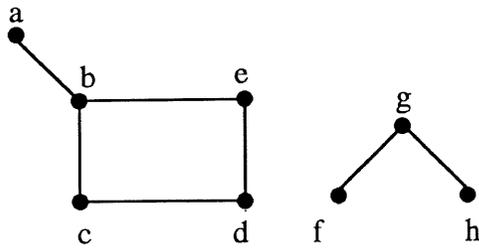


Figure 1.1.

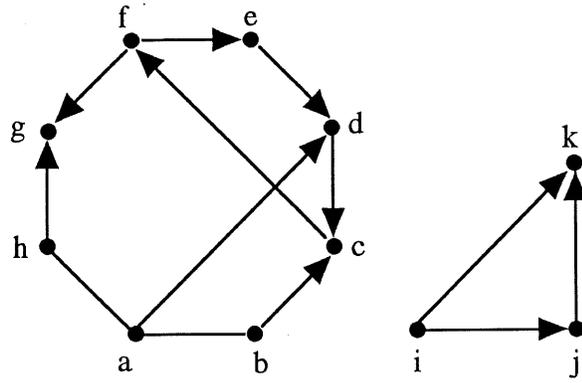


Figure 1.2.

**Définition 1.1.4 :**

Soient  $G$ , un graphe simple orienté ou non et  $s$  un de ses sommets. Alors pour la suite de notre exposé, nous appellerons *degré* de  $s$ , noté  $d_G(s)$  (ou simplement  $\text{deg}(s)$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté), le nombre d'arêtes de  $G$  incidentes à  $s$ .

**Exemple 1.1.5 :**

Le sommet  $b$  du graphe de la figure 1.1 est de degré 3 tout comme le sommet  $a$  du graphe de la figure 1.2.

**Définition 1.1.6 :**

Une *chaîne*  $C$  d'un graphe simple  $G$  est une suite finie d'arêtes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , telles que  $a_i$  ait une extrémité en commun avec  $a_{i-1}$  et l'autre avec  $a_{i+1}$ ,  $\forall i, 1 \leq i \leq n-1$ .

Dans le cas des graphes simples, une chaîne  $C$  peut s'exprimer comme une suite finie de sommets  $s_0, s_1, \dots, s_n$  tels que chaque  $\{s_i, s_{i+1}\}$  soit une arête de  $G$ ,  $\forall i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Nous pouvons alors écrire  $C = [s_0, s_1, \dots, s_n]$  et l'entier  $n$  est appelé la *longueur* de la chaîne  $C$  d'extrémités  $s_0$  et  $s_n$ .

Par exemple dans le graphe de la figure 1.1,  $C = [a, b, c, d]$  est une chaîne de longueur 3. Considérons maintenant  $G = (X, U)$  un graphe orienté.

**Définition 1.1.7 :**

Une suite  $C = [s_0, s_1, \dots, s_n]$  de sommets de  $G$  sera dite un chemin de longueur  $n$  de  $s_0$  à  $s_n$  si  $(s_i, s_{i+1}) \in U, \forall i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Voici, à titre d'exemple, un chemin de longueur 4 du graphe de la figure 1.2 :

$$C = [ a, b, c, f, g].$$

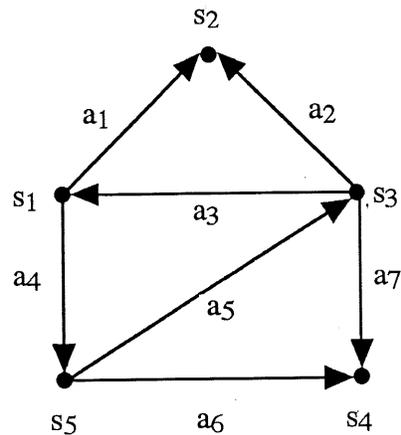
**Définition 1.1.8 :**

Un cycle de longueur  $n$  n'est rien d'autre qu'une chaîne de longueur  $n$  dont toutes les arêtes sont distinctes et qui est telle que  $s_0 = s_n$ . Similairement, nous définirons un circuit de longueur  $n$  comme étant un chemin de longueur  $n$  dont toutes les arêtes sont distinctes et qui est tel que  $s_0 = s_n$ . Enfin, notons que les cycles ou les circuits, seront dits élémentaires si, de surcroît, leurs  $n$  premiers sommets diffèrent.

Dans la suite du présent travail et tout particulièrement au chapitre trois, il sera souvent plus commode d'exprimer un cycle élémentaire d'un graphe orienté  $G = (X, U)$  sous la forme d'un vecteur de  $\mathbb{Z}^n$ , ( $n = |U|$ ), de la manière suivante :

Soit  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , l'ensemble  $U$  des arêtes du graphe  $G$ . La  $i$ -ème composante du vecteur représentant le cycle prendra soit la valeur 0 si l'arête  $a_i$  n'apparaît pas dans l'expression du cycle, soit la valeur 1 si l'arête est parcourue tout en respectant son orientation ou soit la valeur -1 si l'arête est parcourue dans le sens inverse de celui donné par son orientation.

**Exemple 1.1.9 :**



**Figure 1.3.**

Le cycle  $c = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_1]$  utilisant les arêtes  $a_1, a_2, a_7, a_6, a_4$  s'exprime vectoriellement comme suit :

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Définition 1.1.10 :**

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple orienté ou non. La caractéristique d'Euler du graphe  $G$ , que nous noterons  $\chi(G)$ , sera donnée par la différence entre son nombre de sommets et son nombre d'arêtes. C'est-à-dire que  $\chi(G) = |X| - |A|$ .

## 1.2 Graphes hamiltoniens et ensembles d'articulation

Abordons la notion de cycle hamiltonien par la présentation du jeu qui fut créé par Hamilton en 1859. Vingt capitales étaient représentées par les sommets d'un dodécaèdre régulier, il s'agissait de les visiter toutes une et une seule fois en suivant les arêtes du dodécaèdre et tout en revenant à son point de départ. La figure 1.4 est le graphe correspondant au dodécaèdre régulier, quant à la figure 1.5, elle représente une des solutions possibles.

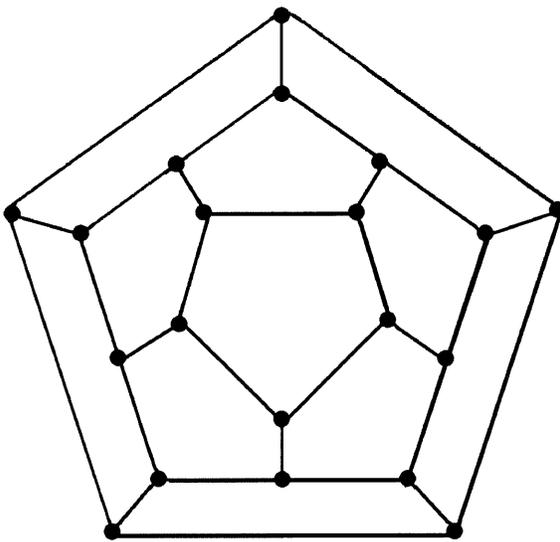


Figure 1.4.

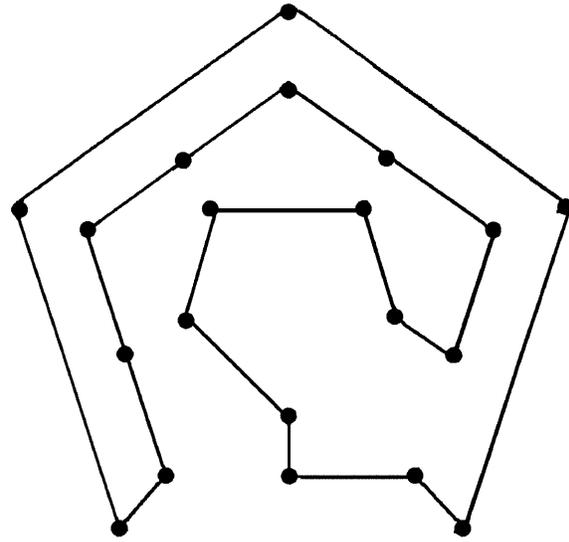


Figure 1.5.

Les propos précédents nous amènent tout naturellement à la définition qui suit :

### **Définition 1.2.1 :**

Un *cycle hamiltonien* est un cycle passant une et une seule fois par tous les sommets du graphe  $G$  qui sera alors dit *hamiltonien* . De manière analogue, un circuit passant une et une seule fois par tous les sommets de  $G$  sera appelé un *circuit hamiltonien* .

Le problème consistant à détecter et à dénombrer les cycles hamiltoniens d'un graphe est, dans la pratique, un problème très ardu. En fait, les informaticiens regroupent sous le vocable NP-complet ce type de problèmes; c'est-à-dire qu'ils sont tels qu'indépendamment de l'algorithme choisi le temps de résolution, qui est une fonction de la taille initiale du problème, croît exponentiellement. C'est ainsi que plusieurs conditions nécessaires concernant l'existence d'un cycle hamiltonien sont connues, mais relativement peu de conditions suffisantes. En voici trois, exprimées sous la forme de deux théorèmes et d'un corollaire, telles que nous pourrions les retrouver dans un cours ou dans un manuel d'introduction à la théorie des graphes [9].

**Théorème 1.2.2 (Bondy et Chvátal, 1976) :**

Soient  $G = (X, A)$  un graphe simple d'ordre  $n \geq 3$  et  $x, y$  des sommets non adjacents de  $G$  tels que  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ . Alors  $G$  est hamiltonien si et seulement si  $G' = (X, A \cup \{x, y\})$  est hamiltonien.

**Théorème 1.2.3 (Ore, 1960) :**

Soit  $G$  un graphe simple d'ordre  $n \geq 3$ . Si, pour toute paire de sommets distincts non adjacents  $x, y$ , nous avons  $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ , alors  $G$  est hamiltonien.

**Corollaire 1.2.4 (Dirac, 1952) :**

Soit  $G$  un graphe simple d'ordre  $n \geq 3$  tel que le degré de tout sommet soit au moins  $n/2$ . Alors  $G$  est hamiltonien.

Il est maintenant temps de présenter une notion qui s'avèrera des plus importantes dans la suite du présent mémoire : la connexité. Pour ce faire considérons la relation suivante sur l'ensemble  $X$  des sommets d'un graphe simple  $G = (X, A)$  :  $a \approx b$  si et seulement s'il existe une chaîne dans  $G$  reliant  $a$  à  $b$ . Nous pouvons aisément constater que  $\approx$  est une relation d'équivalence sur  $X$ , (en admettant conventionnellement en chaque sommet  $x$ , un cycle  $C = [x]$  de longueur 0) dont les classes seront appelées *les composantes connexes* de  $G$ .

**Définition 1.2.5 :**

Nous dirons d'un graphe simple  $G = (X, A)$  qu'il est connexe s'il ne comporte qu'une seule composante connexe.

**Définition 1.2.6 :**

Un graphe orienté  $G = (X, U)$  est dit faiblement connexe si le graphe non orienté sous-jacent est connexe et fortement connexe s'il existe un chemin, de  $x$  à  $y$ , quels que soient les sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ .

**Exemple 1.2.7 :**

Le graphe de la figure 1.4 est connexe tandis que celui de la figure 1.1 ne l'est pas (en fait, il possède 2 composantes connexes). Voici un graphe orienté fortement connexe et par conséquent, également faiblement connexe :

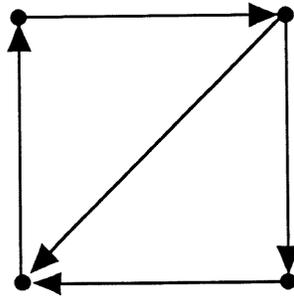
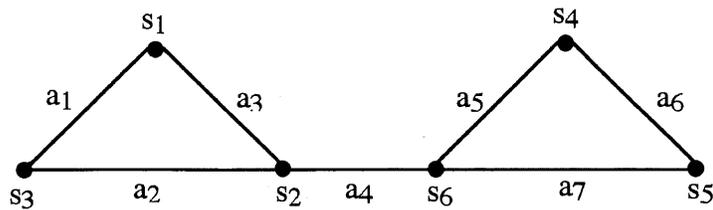


Figure 1.6.

**Définition 1.2.8 :**

On appelle isthme (ou pont) une arête dont la suppression disconnecte le graphe simple  $G = (X, A)$ .

**Exemple 1.2.9 :**



**Figure 1.7.**

L'arête  $a_4$  est un isthme.

**Remarque 1.2.10 :**

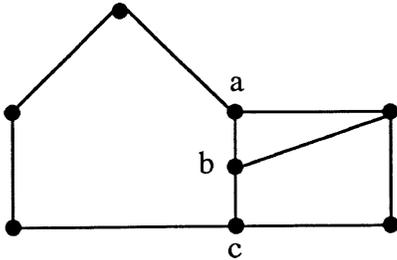
Il est évident qu'un graphe hamiltonien ne peut comporter d'isthme.

**Définition 1.2.11 :**

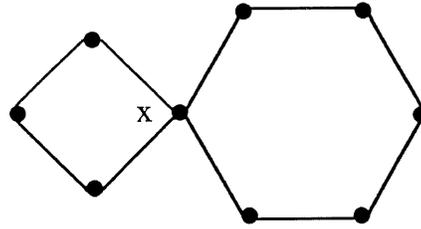
Soient  $G = (X, A)$ , un graphe simple connexe et  $a, b$  deux sommets de  $G$ . Nous dirons qu'un ensemble  $S_{a,b} \subset X \setminus \{a, b\}$  de sommets de  $G$  sépare  $a$  et  $b$ , si ces deux sommets appartiennent à des composantes connexes distinctes du sous-graphe  $G \setminus S_{a,b} = (X \setminus S_{a,b}, A \cap \mathbb{P}_2(X \setminus S_{a,b}))$ . L'ensemble  $S_{a,b}$  sera alors appelé ensemble d'articulation du graphe  $G$ .

Supposons que  $S$  se trouve réduit au singleton  $\{x\}$ ,  $x$  sera alors dit point d'articulation du graphe  $G$ .

**Exemple 1.2.12 :**



**Figure 1.8.**



**Figure 1.9.**

Dans la figure 1.8,  $S = \{a, b, c\}$  est un ensemble d'articulation tandis que  $x$  est un point d'articulation du graphe de la figure 1.9.

La définition précédente nous amène tout naturellement au concept de connectivité que voici.

**Définition 1.2.13 :**

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple connexe d'ordre  $n = |X|$ . On appelle connectivité de  $G$ ,  $h(G)$ , le cardinal minimal d'un ensemble d'articulation si  $G \neq K_n$  et qui est égal à  $n-1$  lorsque  $G=K_n$ . De plus, un graphe sera dit  $k$ -connexe lorsque sa connectivité sera supérieure ou égale à  $k$ .

Remarquons, par ailleurs, que le graphe complet  $K_n$  est l'unique graphe d'ordre  $n$  ayant  $n-1$  pour connectivité.

Par exemple, le graphe de la figure 1.8 est 1-connexe, 2-connexe tandis que celui de la figure 1.9 n'est que 1-connexe.

Il est, de plus, facile de réaliser qu'un graphe est 2-connexe si et seulement s'il ne comporte aucun point d'articulation.

La proposition suivante nous fournira une condition nécessaire à l'existence d'un cycle hamiltonien.

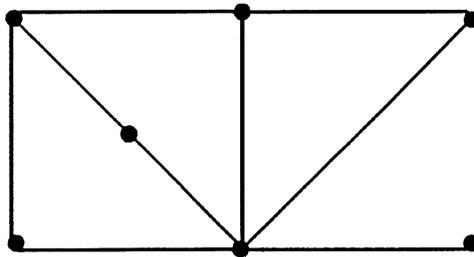
**Proposition 1.2.14 :**

Tout graphe hamiltonien est 2-connexe. (C.-à.-d. qu'il ne comporte aucun point d'articulation.)

La démonstration absolument triviale sera donc omise.

**Remarque 1.2.15 :**

La dernière condition n'est cependant pas suffisante. En effet, il suffit de considérer le graphe 2-connexe mais non hamiltonien de la figure 1.10.



**Figure 1.10.**

Même si cette condition nécessaire à l'existence d'un cycle hamiltonien s'énonce aisément, il est souvent ardu, en pratique, de détecter un ensemble d'articulation ou un isthme. C'est cette tâche que nous mènerons à bien dans le chapitre trois du présent mémoire.

### 1.3 Homomorphismes de graphes

En mathématiques, les relations entre les objets sont souvent plus importantes que les objets eux-mêmes. En théorie des graphes, c'est la notion d'homomorphisme qui nous fournira ces relations.

#### **Définition 1.3.1 :**

Soient  $G = (X, A)$  et  $G_1 = (X_1, A_1)$  des graphes simples et l'application  $\varphi : X \rightarrow X_1$ .

$\varphi$  sera qualifié d'homomorphisme de  $G$  vers  $G_1$  et noté  $\varphi : G \rightarrow G_1$ , si quels que soient  $x, y \in X$ , nous avons  $\{x, y\} \in A \Rightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A_1$ .

Si  $\varphi$  est une bijection et que nous avons de surcroît  $\{x, y\} \in A \Leftrightarrow \{\varphi(x), \varphi(y)\} \in A_1$ , alors nous dirons que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $G$  vers  $G_1$  et que  $G$  et  $G_1$  sont isomorphes.

#### **Exemple 1.3.2 :**

L'application identité est un homomorphisme du graphe de la figure 1.5 vers celui de la figure 1.4 à condition, bien entendu, d'avoir préalablement identifiés les sommets de la même manière pour les deux graphes. Voici un autre exemple moins trivial d'homomorphisme :

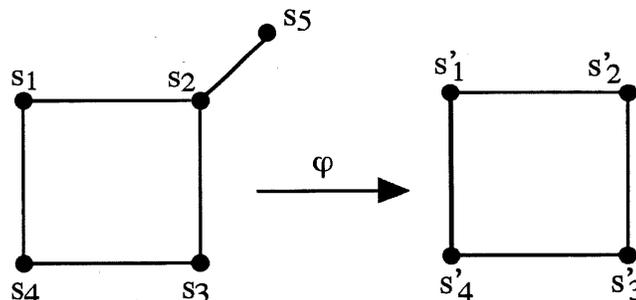


Figure 1.11.

L'homomorphisme  $\varphi$  étant donné par :

$$\varphi(s_i) = s'_i, \text{ pour } i = 1, 2, 3, 4 \text{ et } \varphi(s_5) = s'_3.$$

**Remarque 1.3.3 :**

La relation  $\approx$  sur l'ensemble des graphes simples donnée par  $G \approx G_1 \Leftrightarrow G$  est isomorphe à  $G_1$  est une équivalence. Or, il est souvent plus commode de représenter la classe d'équivalence d'un graphe plutôt que le graphe lui-même comme nous l'avons déjà fait pour les figures 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10.

**Définition 1.3.4 :**

Le graphe  $H = (Y, B)$  sera dit un sous-graphe du graphe simple  $G = (X, A)$  si  $Y \subset X$  et  $B \subset A$ . En d'autres termes, le graphe  $H$  sera déclaré un sous-graphe de  $G$  lorsque l'application inclusion  $i : Y \rightarrow X$ , donnée par  $i(x) = x$ , sera un homomorphisme de  $H$  dans  $G$ .

**Exemple 1.3.5 :**

Voici, à titre d'exemple un sous-graphe du graphe de la figure 1.7.

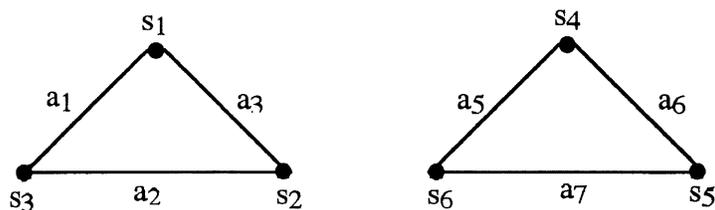


Figure 1.12.

C'est ce type de sous-graphe qui sera au centre de nos préoccupations dans le chapitre trois. Notons, d'ores et déjà, que la seule arête du graphe de la figure 1.7 n'apparaissant pas dans le sous-graphe précédent est précisément un isthme du graphe initial.

## 1.4 Équations quadratiques et diophantiennes

Le problème consistant à considérer  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un polynôme à coefficients entiers (dans  $\mathbb{Z}$ ) en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et à demander à la solution du système :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$$

d'être un  $n$ -uple d'entiers relatifs, préoccupe les mathématiciens depuis plusieurs millénaires déjà. En effet Diophante, un mathématicien grec d'Alexandrie, fut l'un des premiers à s'y intéresser et c'est d'ailleurs en son honneur que les équations du précédent type sont souvent dites, dans leur expression la plus générale, équations diophantiennes [1]. Cependant bien que le problème se formule aisément, la recherche des solutions entières d'un tel système demeure ardu dans bien des cas; que l'on pense, par exemple, à la très récente démonstration de la célèbre conjecture de Fermat effectuée par Andrew Wiles. Cette section ne se veut pas une étude exhaustive de ce vaste domaine, mais bien plutôt un survol de notions élémentaires qui nous seront d'une appréciable utilité dans le chapitre trois. Nous montrerons alors comment associer de telles équations à un graphe simple ou orienté et quelles conséquences l'absence de solution entière peut avoir sur le graphe.

### **Définition 1.4.1 :**

Nous appellerons *équation diophantienne linéaire* ou, plus simplement, *équation diophantienne*, une équation de la forme  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , où  $\forall i, a_i, b \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour laquelle nous ne considérerons que les solutions entières.

Nous n'énoncerons qu'un seul théorème se rapportant aux équations diophantiennes mais il nous faudra auparavant démontrer le lemme suivant, qui n'est rien d'autre qu'une généralisation du célèbre théorème de Bezout.

### **Lemme 1.4.2 :**

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ,  $n$  entiers relatifs copremiers, c'est-à-dire tels que  $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ . Alors il existe  $n$  entiers relatifs  $z_1, z_2, \dots, z_n$  satisfaisant la

$$\text{relation : } \sum_{i=1}^n a_i z_i = 1.$$

**Démonstration :**

Procédons par récurrence.

(1) La proposition est vraie lorsque  $n = 2$ , puisque dans ce cas, nous obtenons la formulation classique du théorème de Bezout.

(2) Admettons la véracité du lemme pour un  $n$ ,  $n \geq 2$ , et montrons qu'il l'est également pour  $n + 1$ . Soient donc  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ,  $n + 1$  entiers relatifs copremiers. Nous pouvons aisément constater que  $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \text{pgcd}(a_n, a_{n+1})) = 1$ , car dans le cas contraire, nous aurions alors un diviseur  $d$  de  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , et du  $\text{pgcd}(a_n, a_{n+1})$ , donc de  $a_n$  et de  $a_{n+1}$ , tel que  $d > 1$ . Ce qui impliquerait que  $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \geq d > 1$ ; ce qui, bien entendu, est impossible. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{n-1} z_{n-1} + \text{pgcd}(a_n, a_{n+1}) z_n = 1$ .

Or, d'un autre côté, en posant  $d = \text{pgcd}(a_n, a_{n+1})$ , nous obtenons  $\text{pgcd}\left(\frac{a_n}{d}, \frac{a_{n+1}}{d}\right) = 1$ .

Toujours en vertu de la relation de Bezout, il existe deux entiers relatifs  $y_1$  et  $y_2$  tels que nous ayons :  $\frac{a_n}{d} y_1 + \frac{a_{n+1}}{d} y_2 = 1$  donc  $a_n y_1 + a_{n+1} y_2 = d$ . Ce qui nous permet maintenant d'achever la démonstration en écrivant que :

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_{n-1} z_{n-1} + a_n (y_1 z_n) + a_{n+1} (y_2 z_n) = 1. \quad \square$$

**Théorème 1.4.3 :**

Une équation diophantienne  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$  est soluble si et seulement si  $b$  est divisible par le  $\text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

### **Démonstration :**

( $\Rightarrow$ ) Cette implication est absolument triviale.

( $\Leftarrow$ ) Posons  $p = \text{pgcd}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et supposons qu'il divise  $b$ . Il s'agit donc de trouver une solution entière du système  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ . Pour ce faire commençons par constater que  $\text{pgcd}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}, \dots, \frac{a_n}{p}\right) = 1$  et appliquons le lemme 1.4.2, nous assurant ainsi de l'existence de  $n$  entiers relatifs  $z_i, 1 \leq i \leq n$ , satisfaisant l'égalité :  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p} z_i = 1$ . Puisque  $p$  divise  $b$ , il existe donc  $d \in \mathbb{Z}$  tel que  $dp = b$  et par conséquent,  $\sum_{i=1}^n a_i (dz_i) = b$ .  $\square$

### **Exemple 1.4.4 :**

Les deux premières équations diophantiennes que voici sont solubles tandis que la troisième ne l'est pas.  $4x_1 + 3x_2 = 5$ ,  $3x_1 + 9x_2 - 27x_3 = 12$  et  $2x_1 - 4x_2 = 7$ .

La notion générale de forme quadratique telle que nous allons la définir, apparaît notamment dans le livre Cours d'arithmétique de Jean-Pierre SERRE [10] qui, lui-même, s'est inspiré du volume Algèbre de BOURBAKI [3].

### **Définition 1.4.5 :**

Soit  $V$  un module sur un anneau commutatif  $A$ . Une application  $Q : V \rightarrow A$  est appelée une forme quadratique sur  $V$  si :

- 1) Nous avons  $Q(ax) = a^2 Q(x)$  pour  $a \in A$  et  $x \in V$ .
  - 2) L'application  $(x, y) \mapsto Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$  est une forme bilinéaire.
- Un tel couple  $(V, Q)$  reçoit le nom de module quadratique.

**Exemple 1.4.6 :**

Considérons  $\mathbb{Z}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , en tant que  $\mathbb{Z}$ -module et soit  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ , une matrice symétrique. Alors l'application  $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par :  $Q(x) = x^t S x$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ , est une forme quadratique sur  $\mathbb{Z}^n$ . En effet, il est parfaitement clair que l'application

$$(x, y) \mapsto Q(x+y) - Q(x) - Q(y) = 2 x^t S y,$$

$S$  étant une matrice symétrique, est une forme bilinéaire.

**Définition 1.4.7 :**

Soient  $(V, Q)$  et  $(V', Q')$  deux modules quadratiques sur un anneau commutatif  $A$ . On appelle *morphisme* (ou *morphisme métrique*) de  $(V, Q)$  dans  $(V', Q')$  toute application linéaire  $f : V \rightarrow V'$  telle que  $Q' \circ f = Q$ .

Nous désirons maintenant exprimer une forme quadratique sous forme matricielle et afin d'y parvenir, il nous faut d'abord énoncer le théorème suivant tel qu'il est formulé dans GODEMENT [5].

**Théorème 1.4.8 :**

Soient  $X, Y$  et  $M$  des modules sur un anneau commutatif  $A$ . Supposons que  $X$  et  $Y$  soient libres de type fini et soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(e'_j)_{1 \leq j \leq m}$  des bases de  $X$  et de  $Y$  respectivement. Pour qu'une application  $f$  de  $X \times Y$  dans  $M$  soit bilinéaire, il faut et il suffit qu'il existe des  $c_{ij} \in M$  tels que l'on ait :

$$f(x, y) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_i b_j c_{ij}$$

quels que soient les vecteurs

$$x = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i e_i \in X \quad \text{et} \quad y = \sum_{1 \leq j \leq m} b_j e'_j \in Y;$$

s'il en est ainsi on a nécessairement

$$c_{ij} = f(e_i, e'_j).$$

Autrement dit, nous avons  $f(x, y) = x^t C y$ , où  $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ .

**Définition 1.4.9 :**

Considérons le groupe abélien libre de type fini  $\mathbb{Z}^n$ . Une application  $Q : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  est appelée une forme quadratique pure sur  $\mathbb{Z}^n$  si :

- 1) Nous avons  $Q(mx) = m^2Q(x)$  pour  $m \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{Z}^n$ .
- 2) L'application  $(x, y) \mapsto \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}$  est une forme bilinéaire.

Nous sommes maintenant à même d'obtenir une expression matricielle d'une forme quadratique pure  $Q$  sur  $\mathbb{Z}^n$  grâce à l'application bilinéaire symétrique

$$f(x, y) = \frac{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)}{2}.$$

Soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $\mathbb{Z}^n$ ,  $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$  et  $y = \sum_{1 \leq j \leq n} y_j e_j$  deux vecteurs de  $\mathbb{Z}^n$ .

Alors, en vertu du théorème 1.4.8, nous pouvons écrire  $f(x, y) = x^t C y$  avec  $C \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$  et où  $c_{ij} = f(e_i, e_j)$ . Or puisque  $f(x, x) = Q(x)$  quel que soit  $x \in \mathbb{Z}^n$ , nous obtenons  $Q(x) = f(x, x) = x^t C x$  et donc  $Q(x) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_i x_j$ ; ce qui montre bien que  $Q$  est

une forme quadratique au sens usuel du terme. Notons que la matrice  $C$  est symétrique, ce qui signifie qu'une forme quadratique pure sur  $\mathbb{Z}^n$  est toujours représentée par une matrice symétrique et réciproquement, l'exemple 1.4.6 nous apprend que toute matrice symétrique engendre une forme quadratique pure sur  $\mathbb{Z}^n$ .

**Définition 1.4.10 :**

Soient  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ , une matrice symétrique et  $b \in \mathbb{Z}$ . L'équation définie par :  $x^t S x = b$  où  $x \in \mathbb{Z}^n$  muni de la base canonique, porte le nom d'équation quadratique.

**Définition 1.4.11 :**

Considérons  $Q$  et  $Q'$ , deux formes quadratiques pures sur  $\mathbb{Z}^n$  ainsi que les matrices  $C$  et  $C'$  qui leur sont associées. Nous déclarerons ces deux formes équivalentes, s'il existe une matrice inversible  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$  telle que  $C' = A^t C A$ . Cette matrice  $A$  est,

en fait, la représentation d'un isomorphisme métrique de  $\mathbb{Z}^n$  dans lui-même.

**Exemple 1.4.12 :**

Considérons  $\mathbb{Z}^n$  muni de la base canonique. Alors les formes quadratiques pures

$$Q(x) = x^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \text{ et } Q'(x) = x^t \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x \text{ sont équivalentes car}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Définition 1.4.13 :**

Soient  $S$  et  $S' \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ , deux matrices symétriques et  $b \in \mathbb{Z}$ . Les équations quadratiques  $x^t S x = b$  et  $x^t S' x = b$  sont dites *équivalentes*, s'il existe une matrice inversible  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$  telle que  $S' = A^t S A$ .

Nous verrons, au chapitre trois, l'influence d'un isomorphisme de graphes sur certaines équations quadratiques qui leur seront associés. Mais, n'anticipons pas et mettons plutôt, avec cette définition, un terme à cette section et également au premier chapitre.

## CHAPITRE 2

### HOMOLOGIE SINGULIÈRE ET GROUPES D'HOMOLOGIE D'UN GRAPHE

Le présent chapitre sera dédié à la présentation des fondements de la théorie de l'homologie de même qu'à son application à des espaces topologiques particuliers : les graphes simples. Nous ne présenterons que les démonstrations des propositions et des théorèmes les plus pertinents pour la suite de notre exposé. Les autres preuves seront laissées au soin du lecteur qui pourra d'ailleurs les trouver dans les chapitres sept et huit du livre de William S. Massey [7], A Basic Course in Algebraic Topology, dont nous nous sommes largement inspirés pour la rédaction de ce chapitre.

Avant toute chose, clarifions d'abord les terminologies et les notations qui seront utilisées à partir de maintenant.

Nous désignerons par  $I$ , l'intervalle fermé  $[0, 1]$  de la droite réelle  $\mathbb{R}$ .

Nous noterons  $I^n = I \times I \times \dots \times I$  ( $n > 0$ ) le  $n$ -cube unitaire.

Par définition,  $I^0$  représentera un espace constitué d'un unique point. De plus, tout espace topologique homéomorphe à  $I^n$ , pourra être appelé cube à  $n$  dimensions ou plus simplement,  $n$ -cube.

#### 2.1 Définition des groupes d'homologie singulière

Tout d'abord, nous définirons les cubes singuliers puis nous examinerons quelques-unes de leurs propriétés. Ensuite, l'étude du noyau et de l'image de certains homomorphismes qui seront construits dans cette section, nous conduira à une définition naturelle des groupes d'homologie.

**Définition 2.1.1 :**

Un *n-cube singulier* dans un espace topologique  $X$ , n'est rien d'autre qu'une application continue  $T : I^n \rightarrow X$  ( $n \geq 0$ ).

Le groupe abélien libre, engendré par tous les  $n$ -cubes singuliers dans  $X$ , sera noté  $Q_n(X)$ . Évidemment, tout élément de  $Q_n(X)$  admet une unique représentation comme combinaison linéaire finie, à coefficients entiers, de  $n$ -cubes singuliers dans  $X$ .

**Définition 2.1.2 :**

Un  $n$ -cube singulier  $T : I^n \rightarrow X$ , sera dit *dégénéré* s'il existe un entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tel que  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ne dépende pas de  $x_i$ .

Soient maintenant :

$D_n(X)$  le sous-groupe de  $Q_n(X)$  engendré par les  $n$ -cubes singuliers dégénérés et

$C_n(X)$ , le groupe quotient  $Q_n(X) / D_n(X)$ . Ce dernier sera nommé *le groupe des  $n$ -*

*chaînes singulières cubiques* dans  $X$ , ou plus simplement, le *groupe des  $n$ -chaînes*

dans  $X$ . Notons que dans le cas  $n = 0$ , nous aurons  $D_0(X) = \{0\}$  et par conséquent,

$C_0(X) = Q_0(X)$ .

**Définition 2.1.3 :**

Soit  $T : I^n \rightarrow X$  un  $n$ -cube singulier avec  $n > 1$ . Définissons, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , les  $(n-1)$ -cubes singuliers  $A_i T, B_i T : I^{n-1} \rightarrow X$  de la manière suivante :

$$A_i T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$$B_i T(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = T(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{n-1})$$

$A_i T$  sera tout naturellement appelé *la  $i$ -ème face antérieure* et  $B_i T$ , *la  $i$ -ème face postérieure*.

**Remarque 2.1.4 :**

Les faces précédentes satisfont les égalités suivantes lorsque nous avons un  $n$ -cube singulier  $T$ ,  $n > 1$  et  $1 \leq i < j \leq n$  :

$$\begin{aligned}
A_i A_j(T) &= A_{j-1} A_i(T), \\
B_i B_j(T) &= B_{j-1} B_i(T), \\
A_i B_j(T) &= B_{j-1} A_i(T), \\
B_i A_j(T) &= A_{j-1} B_i(T).
\end{aligned}$$

Nous allons, dans la définition qui suit, introduire les homomorphismes  $\partial_n : Q_n(X) \rightarrow Q_{n-1}(X)$ ,  $n \geq 1$ , simplement en décrivant leurs effets sur les éléments de base, les  $n$ -cubes singuliers.

**Définition 2.1.5 :**

Pour tout  $n$ -cube singulier  $T$ ,  $n > 0$ , posons :

$$\partial_n(T) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [A_i T - B_i T].$$

Voici maintenant deux propriétés très importantes des homomorphismes que nous venons de définir :

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}(\partial_n(T)) &= 0 \quad (n > 1), \\
\partial_n(D_n(X)) &\subset D_{n-1}(X) \quad (n > 0).
\end{aligned}$$

La vérification de la première d'entre elles repose sur les identités de la remarque 2.1.4, celle de la seconde est, quant à elle, évidente. Cependant, la seconde propriété a pour conséquence que  $\partial_n$  induit aussi un homomorphisme de  $C_n(X)$  dans  $C_{n-1}(X)$  que nous noterons également, sans grand risque de confusion,  $\partial_n$ . Cette suite d'homomorphismes  $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n, \dots$ , est telle que  $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ , ce qui nous autorise à écrire :

$$\begin{aligned}
Z_n(X) &= \text{KER } \partial_n = \{u \in C_n(X) \mid \partial_n(u) = 0\} \quad (n > 0), \\
B_n(X) &= \text{IM } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X)) \quad (n \geq 0).
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet donc de définir les groupes quotients

$$H_n(X) = Z_n(X) / B_n(X) \quad \text{pour } n > 0$$

que nous nommerons les groupes d'homologie singulière de X de dimension n, ou bien les groupes d'homologie de dimension n de X, dont les éléments porteront le nom de classes d'homologie. Bien qu'étant de moindre importance, les groupes  $Z_n(X)$  et  $B_n(X)$  seront appelés respectivement le groupe des n-cycles et le groupe des cycles frontières de dimension n.

Il ne nous reste plus qu'à fournir une définition du groupe  $H_0(X)$  qui dépend essentiellement de la manière dont nous définirons le groupe  $Z_0(X)$ . Une première façon de faire consiste à poser  $Z_0(X) = C_0(X)$  et ainsi obtenir

$$H_0(X) = Z_0(X) / B_0(X) = C_0(X) / B_0(X).$$

Une deuxième façon de procéder consiste à considérer l'homomorphisme  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , homomorphisme qui est souvent appelé l'augmentation de  $C_0(X)$ . Puisque  $C_0(X) = Q_0(X)$  est un groupe libre de 0-cubes, il suffit de définir  $\varepsilon(T)$  pour tout 0-cube  $T$  et la manière la plus facile de le faire est de poser  $\varepsilon(T) = 1$ . Il s'ensuit que pour toute 0-chaîne de la forme  $u = \sum_i a_i T_i$ , nous aurons  $\varepsilon(u) = \sum_i a_i$ ; ce qui nous permet de vérifier que  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ . Cette dernière égalité nous assurant que  $B_0(X) \subset \tilde{Z}_0(X) = \text{KER } \varepsilon$ , nous sommes donc en mesure de considérer le groupe quotient suivant :

$$\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X) / B_0(X)$$

où  $\tilde{H}_0(X)$  sera dénommé le groupe réduit d'homologie de dimension 0 de X. Soulignons enfin que nous ne considérerons le groupe réduit  $\tilde{H}_0(X)$  que dans le cas où  $X \neq \emptyset$ .

La proposition suivante nous sera d'une utilité appréciable dans le prochain chapitre et c'est pourquoi, nous prendrons la peine de la démontrer.

**Proposition 2.1.6 :**

Soient  $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ , toutes les composantes connexes par arcs d'un espace topologique

X. Alors le groupe d'homologie  $H_n(X)$  est isomorphe à la somme directe  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda)$  des groupes  $H_n(X_\lambda)$ .

**Démonstration :**

Notons, avant tout, que l'image de chaque n-cube singulier n'est incluse que dans une seule composante connexe de X. En effet, il suffit de se rappeler que l'image d'un ensemble connexe par une fonction continue doit être également un ensemble connexe.  $Q_n(X)$  s'écrit donc naturellement comme suit :

$$Q_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Q_n(X_\lambda).$$

De manière similaire,

$$D_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} D_n(X_\lambda);$$

et en passant aux groupes quotients, nous obtenons :

$$C_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n(X_\lambda).$$

Nous pouvons aisément constater que puisque l'image de chaque n-cube singulier est entièrement contenue dans une seule composante connexe  $X_\lambda$ , alors il en va de même pour les faces du sus-dit n-cube singulier. Cela entraîne que l'homomorphisme  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  est tel que  $\partial_n(C_n(X_\lambda)) \subset C_{n-1}(X_\lambda)$  et cela nous permet les décompositions suivantes en sommes directes :

$$Z_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_n(X_\lambda),$$

$$B_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_n(X_\lambda),$$

et par conséquent

$$H_n(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda). \quad \square$$

**Corollaire 2.1.7 :**

Quel que soit l'espace topologique X,  $H_0(X)$  est une somme directe de groupes cycliques infinis où chaque composante connexe par arcs de X est associée à un de ces groupes. En d'autres termes, le nombre de composantes connexes par arcs de X est donné par le rang du groupe abélien libre  $H_0(X)$ .

## 2.2 Homomorphismes induits par des fonctions continues

Nous savons maintenant que la théorie homologique associe à tout espace topologique  $X$ , une suite de groupes  $H_n(X)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mais il est important de mentionner qu'elle associe également une suite d'homomorphismes  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , à toute application continue  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques. Il nous faudra, à cette fin, définir d'autres homomorphismes et énoncer quelques-unes de leurs propriétés.

### **Définition 2.2.1 :**

Soit  $f : X \rightarrow Y$ , une fonction continue entre deux espaces topologiques. Alors  $f$  induira une suite d'homomorphismes  $f_{\#} : Q_n(X) \rightarrow Q_n(Y)$  si nous posons

$$f_{\#}(T) = f \circ T \quad \text{pour tout } n\text{-cube singulier } T : I^n \rightarrow X, n \in \mathbb{N}.$$

Signalons quelques propriétés de ces homomorphismes :

(1)  $f_{\#}(D_n(X)) \subset D_n(Y)$  et par conséquent  $f$  induit un homomorphisme de  $C_n(X)$  dans  $C_n(Y)$  que nous noterons aussi, sans réel risque de confusion,  $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(2) Le diagramme suivant commute quel que soit l'entier naturel  $n$ .

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(Y) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n \\ C_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

Figure 2.1.

Par conséquent  $f_{\#}(Z_n(X)) \subset Z_n(Y)$  et  $f_{\#}(B_n(X)) \subset B_n(Y)$  pour tout  $n \geq 0$ , ce qui implique que  $f_{\#}$  induit des homomorphismes, notés  $f_*$ , entre les groupes d'homologie singulière de  $X$  et de  $Y$  respectivement,

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y), n \in \mathbb{N}.$$

(3) En poursuivant dans la même veine, nous pouvons réaliser que le diagramme suivant est également commutatif.

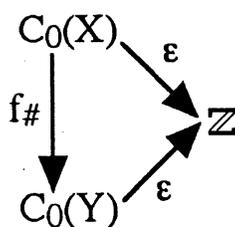


Figure 2.2.

Nous pouvons en déduire que  $f_{\#}(\tilde{Z}_0(X)) \subset \tilde{Z}_0(Y)$  et donc que  $f_{\#}$  induit aussi l'homomorphisme ci-après.

$$f_* : \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y).$$

(4) Enfin, soient  $X, Y, Z$  trois espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  deux applications continues. Il est alors facile de constater que nous aurons l'égalité qui suit :

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Il est maintenant temps d'aborder un concept fort important en topologie algébrique : l'homotopie.

### **Définition 2.2.2 :**

Deux applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  seront dites *homotopes*, ce qui sera noté  $f \cong g$ , s'il existe une application continue  $F : I \times X \rightarrow Y$  telle que  $F(0, x) = f(x)$  et  $F(1, x) = g(x), \forall x, x \in X$ .

**Exemple 2.2.3 :**

Soient  $X$ , un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique  $E$  et  $f, g : X \rightarrow X$  deux applications continues quelconques. Alors  $f$  et  $g$  sont homotopes, l'homotopie  $F$  étant tout simplement donnée par :

$$F : I \times X \rightarrow X.$$
$$F(t, x) = (1-t) f(x) + t g(x).$$

**Remarque 2.2.4 :**

Il nous est facile de réaliser que la relation  $\cong$  présentée plus haut est une équivalence sur l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$ . Cela a pour conséquence que si les espaces topologiques  $X$  et  $Y$  ne sont pas trop pathologiques, alors nous pouvons raisonnablement nous attendre à ce qu'il n'y ait qu'un nombre fini ou, tout au plus, dénombrable de classes d'homotopie. À ce propos, l'exemple 2.2.3, nous permet de constater que la relation  $\cong$  sur l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $X$ , un espace possédant beaucoup de propriétés sympathiques, n'admet qu'une seule classe d'homotopie.

**Théorème 2.2.5 :**

Soient  $f$  et  $g$ , deux applications continues de  $X$  dans  $Y$ , deux espaces topologiques. Si  $f$  et  $g$  sont homotopes, alors les homomorphismes induits  $f_*$  et  $g_*$ , de  $H_n(X)$  dans  $H_n(Y)$  de même que de  $\tilde{H}_0(X)$  dans  $\tilde{H}_0(Y)$ , sont égaux.

Le lecteur pourra, s'il le désire, trouver l'intégralité de cette preuve aux pages 166 et 167 du livre A Basic Course in Algebraic Topology de William S. MASSEY [7].

**Définition 2.2.6 :**

Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  seront dits de même *type homotopique*, s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que l'application  $g \circ f$  soit homotope à l'application identité  $I : X \rightarrow X$  et que  $f \circ g$  soit homotope à l'application identité  $I : Y \rightarrow Y$ . Les applications  $f$  et  $g$  seront alors appelées *équivalences homotopiques*.

**Exemple 2.2.7 :**

Considérons les ensembles  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  en tant que sous-espaces topologiques de  $\mathbb{R}^2$  muni de la topologie usuelle. Alors l'application inclusion :  $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , de même que l'application  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^1$  définie comme suit :

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

sont toutes deux des équivalences homotopiques. En effet,  $f \circ i = I$ , l'identité sur  $S^1$  et  $i \circ f \cong I$ , l'identité sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . L'homotopie  $F$  étant simplement donnée par

$$F(t, (x, y)) = (1 + t\sqrt{x^2 + y^2} - t) f(x, y).$$

Les espaces  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $S^1$  sont donc de même type homotopique.

**Théorème 2.2.8 :**

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une équivalence homotopique. Alors les applications  $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $f_* : \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$  sont des isomorphismes.

**Démonstration :**

Cette démonstration triviale, s'appuyant sur les résultats du théorème 2.2.5, est laissée au soin du lecteur.

**Exemple 2.2.9 :**

Le théorème précédent ainsi que l'exemple 2.2.7, nous permettent de conclure que les groupes  $H_n(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  et  $H_n(S^1)$   $n \in \mathbb{N}$ , ainsi que les groupes  $\tilde{H}_0(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  et  $\tilde{H}_0(S^1)$  sont isomorphes entre eux.

### 2.3 Groupes d'homologie relative

Afin d'être en mesure de déterminer, en pratique, les groupes d'homologie d'un espace topologique  $X$ , il nous faudra définir les groupes d'homologie relative,  $H_n(X, A)$   $n \in \mathbb{N}$ , d'une paire  $(X, A)$  où  $A$  est un sous-espace de  $X$ . Cela tient au fait qu'il existe une très jolie relation entre la structure des groupes d'homologie relative et les homomorphismes  $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ , relation qui est véhiculée par ce que nous appellerons plus tard la suite homologique de la paire  $(X, A)$ .

#### **Définition 2.3.1 :**

Soient  $A$  un sous-espace de l'espace topologique  $X$  et  $i : A \rightarrow X$ , l'inclusion usuelle. Il nous est facile de vérifier que l'homomorphisme induit  $i_* : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$  est en fait un monomorphisme, ce qui nous autorise à voir  $C_n(A)$  comme un sous-groupe de  $C_n(X)$ . Nous noterons, par la suite,  $C_n(X, A)$  le groupe quotient  $C_n(X)/C_n(A)$   $n \in \mathbb{N}$ , qui sera dénommé le groupe des *n*-chaînes de la paire  $(X, A)$ .

De surcroît, l'opérateur  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  possède la propriété que  $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$  et induit donc l'homomorphisme suivant:  $\partial'_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$  que nous noterons habituellement  $\partial_n$  ou  $\partial$  par souci de simplicité. Nous procéderons de manière analogue à ce qui a été fait au début du chapitre afin de définir, dans un premier temps, le groupe des  $n$ -cycles de  $(X, A)$  pour  $n > 0$  par

$$Z_n(X, A) = \text{KER } \partial_n = \{u \in C_n(X, A) \mid \partial(u) = 0\} \quad (n > 0),$$

deuxièmement, le groupe des  $n$ -cycles frontières de  $(X, A)$  par

$$B_n(X, A) = \text{IM } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1}(X, A)) \quad (n \geq 0),$$

et enfin, les groupes d'homologie de dimension  $n$  de la paire  $(X, A)$  par

$$H_n(X, A) = Z_n(X, A) / B_n(X, A) \text{ pour } n > 0.$$

Dans le cas où  $n = 0$ , nous poserons  $Z_0(X, A) = C_0(X, A)$  et obtiendrons

$$H_0(X, A) = C_0(X, A) / B_0(X, A).$$

Pour la suite de notre exposé, il est plus commode de produire le diagramme commutatif suivant impliquant les groupes  $C_n(X)$ ,  $C_n(A)$ ,  $C_n(X, A)$  et où les flèches verticales représentent l'opérateur  $\partial$  approprié,  $i_\#$  représente l'homomorphisme induit par l'inclusion  $i$  et  $j_\#$ , l'épimorphisme naturel de  $C_n(X)$  dans le groupe quotient  $C_n(X, A)$ .

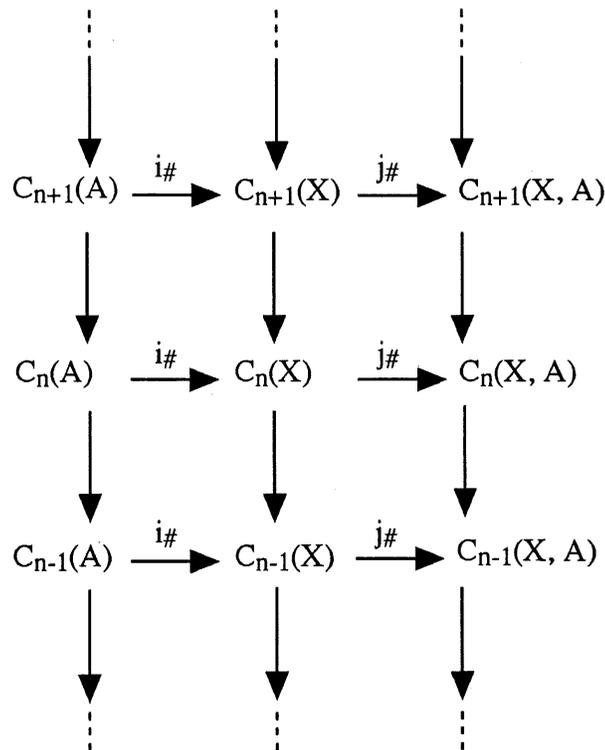


Figure 2.3.

En vertu de ce que nous avons mentionné précédemment,  $i_{\#}$  et  $j_{\#}$  induisent respectivement les homomorphismes  $i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  et  $j_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X, A)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Il ne nous reste plus, dès à présent, qu'à définir une troisième suite d'homomorphismes  $\partial_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour ce faire, il nous suffira de considérer un élément  $u$  quelconque de  $H_n(X, A)$  puis de fournir une expression convenable de l'élément  $\partial_*(u) \in H_{n-1}(A)$ . Choisissons donc le  $n$ -cycle  $u' \in Z_n(X, A) \subset C_n(X, A)$ , un représentant de la classe d'homologie de  $u$ . Puisque  $j_{\#}$  est un épimorphisme, il existe donc une chaîne  $u'' \in C_n(X)$ , telle que  $j_{\#}(u'') = u'$ . Si nous considérons maintenant la chaîne  $\partial(u'')$  de  $C_{n-1}(X)$  nous pouvons remarquer, étant donné que le diagramme précédent est commutatif et que  $u'$  est un cycle, que  $j_{\#}\partial(u'') = 0$ . Par conséquent,  $\partial(u'')$  appartient au sous-groupe  $C_{n-1}(A)$  de  $C_{n-1}(X)$  et il est clair, en plus, que  $\partial(u'')$  est un cycle puisque  $\partial\partial(u'') = 0$ . Définissons donc  $\partial_*(u)$  comme la classe d'homologie du cycle  $\partial(u'')$ .

Évidemment, il nous faut nous assurer de la cohérence d'une telle définition en montrant que l'application  $\partial_*$  ne dépend ni du choix de  $u'$ , ni de celui de  $u''$ . Supposons en effet que nous ayons deux représentants, les cycles  $u'$  et  $v'$  respectivement, de la classe d'homologie de  $u$ . Par conséquent, il existe un élément  $b$  du groupe  $B_n(X, A)$  qui est tel que  $u' = v' + b$ . Nous pouvons donc trouver un élément  $b'$  du groupe  $C_{n+1}(X, A)$  avec  $\partial(b') = b$  puis, en vertu de la surjectivité de l'homomorphisme  $j_{\#}$ , exhiber un élément  $b''$  de  $C_{n+1}(X)$  tel que  $j_{\#}(b'') = b'$ . Maintenant, la commutativité du diagramme précédent nous permet de conclure que  $j_{\#}\partial(b'') = b = j_{\#}(u'') - j_{\#}(v'') = j_{\#}(u'' - v'')$  où  $u''$  et  $v''$  sont les éléments de  $C_n(X)$  tels que  $j_{\#}(u'') = u'$  et  $j_{\#}(v'') = v'$ . Cette égalité nous permet d'écrire que  $u'' - v'' - \partial(b'') = c$ , où  $c$  est un élément de  $C_n(A)$ . Or  $\partial(c) = \partial(u'') - \partial(v'') - \partial\partial(b'') = \partial(u'') - \partial(v'')$ . Ce qui nous permet de conclure que  $\partial(u'') - \partial(v'')$  est un élément de  $B_n(A)$  et donc que  $\partial(u'')$  et  $\partial(v'')$  font partie de la même classe d'homologie.

Dans un second temps, nous souhaiterions prouver que l'application  $\partial_*$  est bien un homomorphisme, c'est-à-dire que nous voulons avoir  $\partial_*(u+v) = \partial_*(u) + \partial_*(v)$  quels que soient les éléments  $u$  et  $v$  de  $H_n(X, A)$ . Choisissons donc les cycles  $u'$  et  $v'$  représentant les

classes d'homologie des éléments  $u$  et  $v$ . Alors nous pouvons choisir, de manière analogue à ce qui a été fait précédemment, les éléments  $u''$ ,  $v''$  et  $w''$  de  $C_n(X)$  qui remplissent les conditions suivantes :  $j_{\#}(u'') = u'$ ,  $j_{\#}(v'') = v'$  et  $j_{\#}(w'') = u' + v'$ . Mais comme  $j_{\#}(w'' - (u'' + v'')) = 0$ , cela implique que  $w'' - u'' - v'' = c$  où  $c$  est un élément de  $C_n(A)$ . Il ne reste plus qu'à appliquer l'homomorphisme  $\partial$  aux deux membres de l'égalité pour obtenir que  $\partial(w'') - \partial(u'') - \partial(v'')$  est élément de  $B_n(A)$ ; ce qui entraîne trivialement le résultat .  $\square$

L'homomorphisme ainsi obtenu reçoit souvent le nom d'opérateur frontière (ou bord) de la paire  $(X, A)$ .

**Définition 2.3.2 :**

Si conventionnellement nous décrétons que pour  $n < 0$

$$H_n(A) = H_n(X) = H_n(X, A) = \{0\},$$

nous obtenons la suite que voici, s'étendant indéfiniment aussi bien vers la droite que vers la gauche :

$$\dots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

qui répond alors au nom de suite homologique de la paire  $(X, A)$ .

**Théorème 2.3.3 :**

La suite homologique d'une paire quelconque d'espaces  $(X, A)$  est exacte, c'est-à-dire que l'image de n'importe lequel des homomorphismes de la suite est égale au noyau de l'homomorphisme immédiatement à sa droite.

**Démonstration :**

La démonstration ne présentant guère de difficulté est laissée au soin du lecteur. Il s'agit en fait de montrer chacune des inclusions suivantes :

$$\text{image } i_* \subset \text{KER } j_*, \quad \text{image } i_* \supset \text{KER } j_*,$$

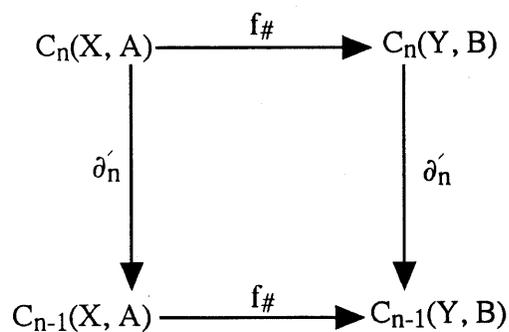
$$\begin{aligned} \text{image } j_* &\subset \text{KER } \partial_*, & \text{image } j_* &\supset \text{KER } \partial_*, \\ \text{image } \partial_* &\subset \text{KER } i_*, & \text{image } \partial_* &\supset \text{KER } i_*. \quad \square \end{aligned}$$

Enfin, dans le but d'obtenir une connaissance plus intime des groupes d'homologie d'une paire d'espaces  $(X, A)$ , il nous faut, tout comme dans le cas de groupes d'homologie d'un espace, considérer les applications entre les paires d'espaces.

**Définition 2.3.4 :**

Soient  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  deux paires. Une fonction continue  $f : X \rightarrow Y$  est dite transformation de paires si  $f(A) \subset f(B)$  et est notée:  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Évidemment, comme nous l'avons décrit précédemment, la fonction continue  $f$  induit l'homomorphisme  $f_{\#} : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $f(A) \subset f(B)$ , il s'ensuit que  $f_{\#}(C_n(A))$  est un sous-groupe de  $C_n(X)$  et par conséquent,  $f$  induit également un homomorphisme entre les groupes quotients  $C_n(X, A)$  et  $C_n(Y, B)$  noté lui aussi  $f_{\#}$ . Ces derniers homomorphismes rendent le diagramme qui suit commutatif pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .



**Figure 2.4.**

Il en découle que  $f_{\#}$  induit l'homomorphisme  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  entre les groupes d'homologie correspondants pour tout entier naturel  $n$ .

## 2.4 Groupes d'homologie des graphes d'ordre fini

Tout au long de la présente section, nous utiliserons les propriétés des groupes d'homologie relative afin d'aboutir à une procédure systématique de calcul de groupes d'homologie des espaces relativement simples que sont les graphes d'ordre fini. Enfin, nous terminerons cette section en présentant les détails d'un tel calcul à l'aide d'un exemple concret, puis nous discuterons des effets sur ces groupes de l'homomorphisme induit par la fonction continue qu'est un homomorphisme de graphes.

Nous savons déjà qu'il est possible de représenter un graphe d'ordre fini, simple ou orienté, à l'aide d'un schéma comportant des points symbolisant les sommets et des lignes reliant ces points représentant les arêtes (lignes que l'on peut munir d'une flèche le cas échéant). Cette remarque nous amène à considérer un graphe simple ou orienté plutôt comme une paire constituée d'un espace de Hausdorff et d'un sous-espace discret fini (l'ensemble des sommets), notés respectivement  $G$  et  $X$  sans grand risque de confusion, qui respectent les deux conditions suivantes :

(a)  $G \setminus X$  n'est autre que l'union disjointe d'un nombre fini de sous-ensembles  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tous homéomorphes à un intervalle ouvert de la droite réelle. Ces sous-ensembles pouvant être assimilés aux lignes dont nous parlions plus haut, c'est donc tout naturellement que nous leur donnerons le nom d'arêtes.

(b) La frontière de chacune des arêtes  $a_i$ ,  $\overline{a_i} \setminus a_i$ , est constituée de deux sommets distincts et par conséquent la paire  $(\overline{a_i}, a_i)$  est homéomorphe à la paire  $([0, 1], (0, 1))$ .

Un résultat relativement célèbre stipule que les graphes simples ou orientés tels que nous les avons redéfinis admettent toujours un plongement homéomorphe dans  $\mathbb{R}^3$ . En peu de mots, cela signifie que la représentation dans  $\mathbb{R}^3$  que nous ferons du graphe sera telle que deux arêtes distinctes ne s'intersecteront jamais par plus d'un sommet.

Attardons-nous maintenant à la détermination des groupes d'homologie du graphe  $G$  en utilisant les groupes d'homologie relative de la paire  $(G, X)$  et la suite homologique exacte de  $(G, X)$  afin de parvenir à notre objectif. Dans cette optique, énonçons le résultat suivant dont la démonstration, s'appuyant sur une proposition de MASSEY [7], ne présente aucune difficulté.

**Lemme 2.4.1 :**

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_k$  l'ensemble des arêtes d'un graphe  $G$  simple ou orienté d'ordre fini et  $\hat{a}_i = \bar{a}_i \setminus a_i$  les ensembles frontières correspondants. Alors, quelle que soit l'arête  $a_i$ , nous avons :

$$H_q(\bar{a}_i, \hat{a}_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } q = 1 \\ 0 & \text{pour } q \neq 1. \end{cases}$$

**Théorème 2.4.2 :**

Soient encore une fois,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  l'ensemble des arêtes d'un graphe  $G$  simple ou orienté d'ordre fini. L'inclusion  $i$  entre les paires d'espaces  $(\bar{a}_i, \hat{a}_i)$  et  $(G, X)$  induit les homomorphismes injectifs suivants  $H_q(\bar{a}_i, \hat{a}_i) \xrightarrow{i_*} H_q(G, X)$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$  et  $H_q(G, X)$  est donc donné par la somme directe  $\bigoplus_{i=1}^k i_*(H_q(\bar{a}_i, \hat{a}_i))$ .

**Démonstration :**

Une démonstration détaillée de ce théorème est fournie à la page 193 de [7].

Il en découle que  $H_1(G, X)$  est un groupe abélien libre de rang  $k$  et que  $H_q(G, X) = 0$  pour  $q \neq 1$ . Notons que le rang d'un groupe abélien libre n'est rien d'autre que le nombre d'éléments d'une base et comme ce nombre est indépendant de la base choisie, la notion de rang a donc un sens.

Comme nous l'avons annoncé plus tôt, nous voulons utiliser la suite homologique exacte de la paire  $(G, X)$ ; c'est d'ailleurs à cette fin que nous avons préalablement déterminé la structure des groupes d'homologie relative  $H_q(G, X)$ . Puisque  $X$  est un espace fini muni de la topologie discrète,  $H_q(X) = 0$  pour  $q \neq 0$  et  $H_0(X)$  est un groupe abélien libre dont le rang correspond au nombre de sommets du graphe. De ces constatations il suit que  $H_q(G) = 0$  pour  $q > 1$  puisque la seule partie non triviale de la suite homologique de la paire  $(G, X)$  est la suivante :

$$0 \rightarrow H_1(G) \xrightarrow{j_*} H_1(G, X) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X) \xrightarrow{i_*} H_0(G) \rightarrow 0.$$

Or nous savons déjà, grâce au corollaire 2.1.7, que  $H_0(G)$  est un groupe abélien libre dont le rang est égal au nombre de composantes connexes par arcs de l'espace topologique  $G$ . Cependant, nous pouvons aisément constater que, dans le cas des graphes simples ou orientés d'ordre fini, les composantes connexes telles que définies au chapitre 1 coïncident avec les composantes connexes par arcs. Par conséquent les structures de tous les groupes d'homologie apparaissant dans la suite homologique exacte de la paire  $(G, X)$  nous sont maintenant connues à l'exception du groupe  $H_1(G)$ . Le théorème suivant nous fournira quelques informations sur ce dernier groupe.

**Théorème 2.4.3 :**

Soit  $G$  un graphe simple ou orienté d'ordre fini. Alors  $H_1(G)$  est un groupe abélien libre et de surcroît :

$$\text{RANG}(H_0(G)) - \text{RANG}(H_1(G)) = \chi(G).$$

**Démonstration :**

1) Puisque la suite homologique de la paire  $(G, X)$  est exacte, l'homomorphisme  $j_*$  est donc injectif ce qui implique que  $H_1(G)$  est isomorphe au sous-groupe  $j_*(H_1(G))$  de  $H_1(G, X)$ . Or ce dernier groupe étant abélien et libre, il est bien connu que tous ses sous-groupes sont également abéliens libres. Ce qui montre bien que  $H_1(G)$  est un groupe abélien libre.

2) Afin de mener à bien la démonstration de l'égalité précédente, il nous faut rappeler le résultat suivant d'algèbre linéaire :

Soit  $f : A \rightarrow F$  un homomorphisme surjectif du groupe abélien  $A$  vers le groupe abélien libre  $F$ . Nous avons alors l'égalité qui suit :  $A = \text{KER } f \oplus H$  où  $H$  est isomorphe à  $F$ .

Toujours en vertu de l'exactitude de la suite homologique de la paire  $(G, X)$ , nous pouvons conclure que l'homomorphisme  $i_*$  du groupe abélien  $H_0(X)$  dans le groupe abélien libre  $H_0(G)$  est surjectif. Par conséquent,  $H_0(X)$  peut s'écrire comme somme directe du noyau de l'homomorphisme  $i_*$  et du groupe abélien libre  $F$  qui est isomorphe à  $H_0(G)$ . Mais nous savons également que  $\text{KER } i_* = \text{IM } \partial_*$  ce qui implique que  $H_0(X) = \partial_*(H_1(G, X)) \oplus F$ . De plus, un résultat élémentaire d'algèbre linéaire nous permet d'affirmer que :

$$\partial_*(H_1(G, X)) \approx H_1(G, X) / \text{KER } \partial_* = H_1(G, X) / j_*(H_1(G)).$$

Par conséquent,  $H_0(X) \approx H_1(G, X) / j_*(H_1(G)) \oplus F$  et donc :

$$\text{RANG } (H_0(X)) = \text{RANG } (H_1(G, X)) - \text{RANG } (H_1(G)) + \text{RANG } (H_0(G)).$$

Il suffit maintenant de se rappeler que les rangs de  $H_0(X)$  et de  $H_1(G, X)$  sont respectivement égaux au nombre de sommets et au nombre d'arêtes de  $G$  pour compléter la démonstration.  $\square$

Étant donné que le groupe  $H_1(G)$  est isomorphe au noyau de l'homomorphisme  $\partial_* : H_1(G, X) \rightarrow H_0(X)$ , nous serons en mesure d'en déterminer précisément la structure dès que nous aurons donné la description que voici de l'homomorphisme  $\partial_*$  :

(a) Choisissons comme base de  $H_0(X)$ , l'ensemble des sommets.

(b) À moins que cela ne soit déjà fait, munissons toutes les arêtes du graphe d'une orientation arbitraire.

(c) Nous pourrions alors considérer l'ensemble des arêtes orientées comme une base de  $H_1(G, X)$ .

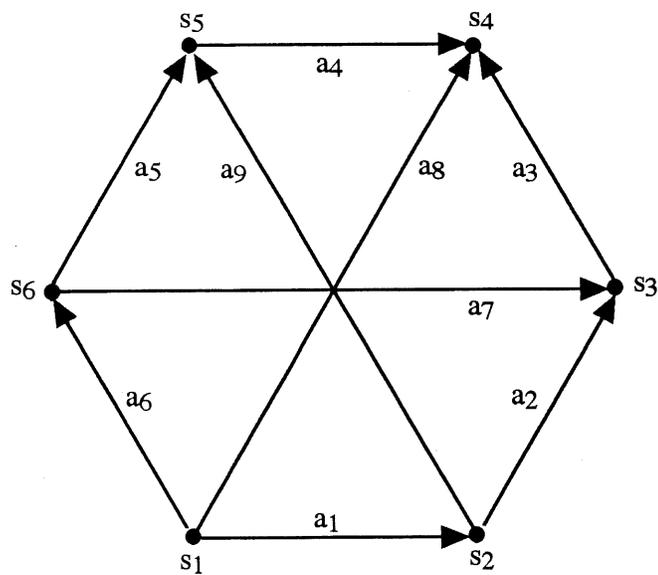
(d) Enfin, soit  $a_i$  une arête incidente aux sommets  $s$  et  $s'$  et orientée suivant la relation  $s' > s$ , alors

$$\partial_*(a_i) = s' - s.$$

Mais nous verrons mieux ce que tout cela peut signifier grâce à l'exemple suivant.

**Exemple 2.4.4 :**

Soit  $G$ , le graphe orienté ci-dessous :



**Figure 2.5.**

L'homomorphisme  $\partial_*$  est donné par les égalités suivantes, puis exprimé sous forme matricielle.

$$\partial_*(a_1) = s_2 - s_1$$

$$\partial_*(a_2) = s_3 - s_2$$

$$\partial_*(a_3) = s_4 - s_3$$

$$\partial_*(a_4) = s_4 - s_5$$

$$\partial_*(a_5) = s_5 - s_6$$

$$\partial_*(a_6) = s_6 - s_1$$

$$\partial_*(a_7) = s_3 - s_6$$

$$\partial_*(a_8) = s_4 - s_1$$

$$\partial_*(a_9) = s_5 - s_2.$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons finalement les quatre générateurs suivants du noyau de l'homomorphisme  $\partial_*$ .

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

qui représentent respectivement les quatre cycles ci-après.

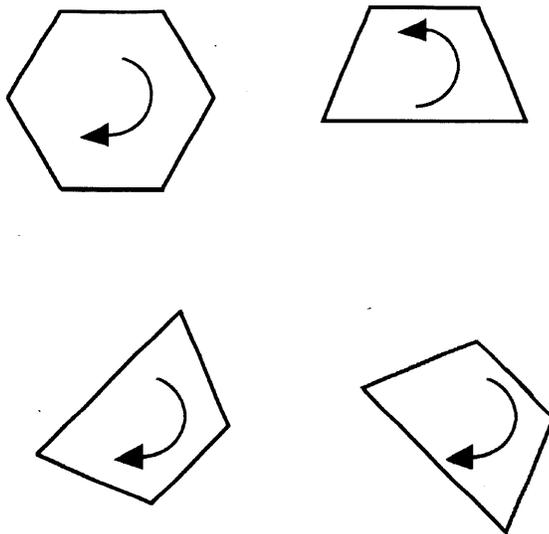


Figure 2.6.

Comme nous l'avons annoncé en début de section, nous nous occuperons maintenant de l'effet des fonctions continues que sont les homomorphismes de graphes, tels que définis au chapitre 1, sur les groupes d'homologie. Effectivement, si nous considérons deux graphes  $G = (X, A)$  et  $G' = (X', A')$  comme des sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$ , alors il est aisé de constater qu'un homomorphisme de graphes n'est rien d'autre qu'une fonction continue possédant les deux propriétés suivantes :

- (1)  $f(X) \subset X'$ , cela revient à dire qu'un sommet de  $G$  est transformé en un sommet de  $G'$ .
- (2) Soit  $a_i$  une arête quelconque de  $G$ , alors l'image de  $\overline{a_i}$  par  $f$  est homéomorphe à  $\overline{a'_i}$ , où  $a'_i$  représente une arête de  $G'$ .

Étant donné que  $f(X) \subset X'$ , nous pouvons considérer  $f$  comme transformation de paires entre  $(G, X)$  et  $(G', X')$  et ainsi obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow H_1(G) & \xrightarrow{j_*} & H_1(G, X) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(X) & \xrightarrow{i_*} & H_0(G) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_* \\
 0 \rightarrow H_1(G') & \xrightarrow{j_*} & H_1(G', X') & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(X_1) & \xrightarrow{i_*} & H_0(G') \rightarrow 0.
 \end{array}$$

Figure 2.7.

À partir de ce diagramme, il devient clair que l'homomorphisme  $f_* : H_1(G) \rightarrow H_1(G')$  peut être entièrement déterminé à partir de l'étude de l'homomorphisme  $f_1$ . Afin d'obtenir une connaissance plus intime de ce dernier homomorphisme, nous décrirons son effet sur la base que nous avons choisie pour le groupe  $H_1(G, X)$ , c'est-à-dire sur l'ensemble des arêtes orientées. Puisque la propriété (2) citée plus haut stipule que  $f(\overline{a_i})$  est homéomorphe à  $\overline{a'_i}$ , quelles que soient les arêtes  $a_i$  et  $a'_i$  appartenant respectivement aux groupes  $H_1(G, X)$  et  $H_1(G', X')$ ; deux cas seulement peuvent alors se présenter :

$$f_1(a_i) = \begin{cases} +a'_i & \text{si } f \text{ préserve l'orientation} \\ -a'_i & \text{si } f \text{ change l'orientation.} \end{cases}$$

Nous possédons maintenant une expression de l'homomorphisme

$$f_1 : H_1(G, X) \rightarrow H_1(G', X')$$

en fonction des éléments de base des groupes  $H_1(G, X)$  et  $H_1(G', X')$ , c'est-à-dire de l'ensemble des arêtes orientées de chacun des graphes. Comme nous le verrons à la fin du chapitre trois, les isomorphismes de graphes auront certains effets sur les équations quadratiques que nous associerons aux graphes.

## CHAPITRE 3

### APPLICATIONS À LA THÉORIE DES GRAPHEs

Ce dernier chapitre, subdivisé en quatre sections, représente une contribution originale au sujet par l'utilisation qui y est faite, des groupes d'homologie d'un graphe. Elle repose principalement sur la constatation que les générateurs du premier groupe d'homologie d'un graphe engendrent également l'ensemble des cycles de ce graphe. La première section sera d'ailleurs consacrée à la définition et à l'énoncé des propriétés immédiates des sous-graphes représentant une base de ces générateurs. Fort de ces remarques, nous serons à même dans la seconde section, de présenter un procédé systématique de détection d'ensembles d'articulation reposant sur la détermination de la dimension du noyau d'un système d'équations linéaires. Dans la troisième section, il sera montré, à l'aide d'un exemple concret [4], à quel point ces techniques peuvent se révéler utiles, simplifiant grandement la démonstration de certains théorèmes concernant les graphes. Pour terminer, la quatrième section nous apprendra qu'il est possible d'associer des équations quadratiques et diophantiennes à des graphes simples ou orientés et ainsi obtenir de surprenantes conditions nécessaires à l'existence d'un cycle ou d'un circuit hamiltonien, de même qu'à l'existence d'un isomorphisme de graphes.

#### 3.1 Propriétés des sous-graphes $G'_o$ et $G'_{no}$

Nous commencerons par définir ces sous-graphes issus du calcul de groupes d'homologie d'un graphe effectué au chapitre deux. L'étude des propriétés intrinsèques de ces sous-graphes nous amènera non seulement à la formulation de conditions nécessaires à l'existence d'un cycle ou d'un circuit hamiltonien, mais nous permettra également une identification immédiate des isthmes du graphe  $G$  d'origine.

Avant toute chose, rappelons-nous que lors du calcul du premier groupe d'homologie d'un graphe  $G = (X, A)$ , il nous fallait impérativement munir d'une orientation arbitraire

chaque arête qui n'était pas déjà préalablement orientée. Notons, dans un but mnémotechnique, le graphe orienté ainsi obtenu,  $G_o = (X, A_o)$  (o rappelant le mot orienté). Évidemment dans le cas d'un graphe orienté  $G$ , les graphes  $G_o$  et  $G$  coïncident. Enfin, gardons à l'esprit que l'ensemble  $A_o = \{a_j\}_{1 \leq j \leq m}$  des arêtes orientées de  $G_o$  forment une base du groupe abélien libre  $H_1(G, X)$ , ce qui permet d'écrire un élément  $b$  de  $H_1(G, X)$  sous la forme  $b = \sum_{j=1}^m d_j a_j$  où  $d_j \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall j, 1 \leq j \leq m$ .

**Définition 3.1.1 :**

Soient  $G = (X, A)$ , un graphe simple ou orienté,  $G_o = (X, A_o)$ , le graphe orienté qui lui est associé avec  $A_o = \{a_j\}_{1 \leq j \leq m}$ . Considérons également  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , une base du groupe abélien libre  $\text{KER } \partial_* \subseteq H_1(G, X)$ . Nous noterons par la suite  $G'_o$ , le graphe orienté

$G'_o = (X', A'_o)$  où  $A'_o = \{a_j \in A_o \mid d_{ij} \neq 0 \text{ pour un } e_i = \sum_{j=1}^m d_{ij} a_j, 1 \leq i \leq n\}$  et

$X' = \{x \in X \mid \text{il existe une arête } a_j \text{ de } A'_o \text{ incidente à } x\}$ .

Le graphe  $G'_{no} = (X', A'_{no})$  n'est rien d'autre que le graphe simple obtenu à partir de  $G'_o = (X', A'_o)$ , en remplaçant chaque couple  $(x, y)$  de  $A'_o$  par la paire  $\{x, y\}$  de  $\mathbb{P}_2(X')$ .

Il est bien évident que les sous-graphes  $G'_o$  et  $G'_{no}$  que nous venons de définir, ne dépendent aucunement de la base de  $\text{KER } \partial_*$  choisie. Cependant, nous utiliserons essentiellement par la suite des bases de cycles élémentaires et ce, afin de faciliter les démonstrations. Indiquons, à ce propos, que l'algorithme récemment développé par KACZYNSKI, MROZEK ET SLUSAREK [6], nous permet d'obtenir directement de telles bases. Lorsque nous disposerons d'une telle base, nous commettrons parfois un abus de langage en parlant des cycles élémentaires de base de  $G'_o$ .

**Exemple 3.1.2 :**

Le graphe orienté  $G$ , donné par la figure 2.5 et le sous-graphe  $G'_o$  coïncident, alors que dans le cas du graphe simple de la figure 1.7, le sous-graphe  $G'_{no}$  est représenté par la figure 1.12.

**Remarque 3.1.3 :**

Nous pouvons constater que si le graphe simple  $G'_{no} = (X', A'_{no})$  n'est pas connexe alors le graphe simple  $G = (X, A)$  ne peut être hamiltonien.

En effet, la connexité du graphe non orienté sous-jacent  $G'_{no} = (X', A'_{no})$  découle trivialement du fait que tout cycle hamiltonien est un élément de  $KER \partial_* \cong H_1(G)$ . Dans le même ordre d'idées, il est aisé de constater que si le graphe orienté  $G = (X, A)$  possède un circuit hamiltonien, alors le sous-graphe  $G'_o = (X', A'_o)$  doit être fortement connexe.

**Proposition 3.1.4 :**

Si le sous-graphe  $G'_{no} = (X', A'_{no})$ , d'un graphe simple ou orienté, est connexe, alors il ne peut en aucun cas posséder d'isthme.

**Démonstration :**

Il suffit de montrer que si on retranche une arête quelconque  $a$  de  $G'_{no}$ , toute chaîne reliant une paire quelconque  $x, y$  de sommets utilisant l'arête  $a$  peut être remplacée par une autre chaîne reliant également  $x$  à  $y$  mais ne faisant pas apparaître l'arête  $a$ .

Soit donc,  $a$  une arête quelconque d'extrémités  $s_1$  et  $s_2$ . La construction du graphe  $G'_{no}$ , nous permet d'affirmer que  $a$  appartient à un cycle élémentaire que nous noterons  $C$ . D'autre part, il existe un nombre fini de sommets de  $G'_{no}$ , tous différents de  $s_1$  ou de  $s_2$  dans l'expression de  $C$  que nous noterons  $s'_i$ , où  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous pouvons par conséquent exprimer  $C$  comme suit :

$C = [s'_0, s'_1, \dots, s'_k, s_1, s_2, s'_{k+1}, \dots, s'_n = s'_0]$  où nous ne pouvons avoir  $s'_i = s'_j$  pour  $i \neq j$ ,  $C$  étant un cycle élémentaire.

Soit  $K = [x, S_0, \dots, S_m, s_1, s_2, S_{m+1}, \dots, S_n, y]$  une chaîne reliant  $x$  à  $y$ . Alors nous pouvons obtenir la chaîne  $K'$  suivante :

$K' = [x, S_0, \dots, S_m, s_1, s'_k, s'_{k-1}, \dots, s'_0, s'_{n-1}, \dots, s'_{k+1}, s_2, S_{m+1}, \dots, S_n, y]$   
 qui relie toujours  $x$  à  $y$  mais qui ne fait plus apparaître l'arête  $a$ . De même si  $K$  avait été donnée par l'expression suivante :

$$K = [x, S_0, \dots, S_m, s_2, s_1, S_{m+1}, \dots, S_n, y],$$

la chaîne  $K'$  aurait eu comme expression :

$$K' = [x, S_0, \dots, S_m, s_2, s'_k, s'_{k-1}, \dots, s'_0, s'_{n-1}, \dots, s'_{k+1}, s_1, S_{m+1}, \dots, S_n, y]. \quad \square$$

La proposition précédente nous a appris que si  $G = (X, A)$  est un graphe simple orienté ou non, alors aucune des composantes connexes du sous-graphe  $G'_{no} = (X', A'_{no})$  ne possède d'isthme. Montrons maintenant que si une arête de  $G = (X, A)$  n'apparaît plus dans le sous-graphe  $G'_{no} = (X', A'_{no})$ , alors cette arête est un isthme pour une composante connexe de  $G$ .

**Proposition 3.1.5 :**

Une arête d'un graphe simple  $G = (X, A)$  orienté ou pas, n'apparaîtra plus dans le sous graphe  $G'_{no} = (X', A'_{no})$  si et seulement si cette arête est un isthme pour une composante connexe de  $G$ .

**Démonstration :**

( $\Rightarrow$ ) Procédons par l'absurde en supposant qu'une arête  $a$  d'une composante connexe  $C$  de  $G$  ne soit pas un isthme, même si elle est absente du sous-graphe  $G'_{no}$ .  $C$  est par conséquent un sous-graphe de  $G$  que nous pouvons noter  $C = (Y, B)$  où  $Y \subset X$  et  $B \subset A$ .

Le résultat suivant provenant de la démonstration de la proposition 2.1.6 nous sera d'une grande utilité par la suite : si un graphe  $G$  possède  $k$  composantes connexes  $G_i$   $1 \leq i \leq k$ , alors  $H_1(G) = \bigoplus_{i=1}^k H_1(G_i)$ ; c'est-à-dire qu'un cycle élémentaire formant la base du groupe  $H_1(G_i)$  pour un  $i$  où  $1 \leq i \leq k$ , est également un élément du groupe  $H_1(G)$ . (Évidemment, les arêtes des composantes connexes  $G_i$  doivent avoir la même orientation que celle dont on munit les arêtes de  $G$  lorsque ce dernier n'est pas déjà orienté.)

Considérons maintenant  $C_a$ , le sous-graphe de  $C$  obtenu en retranchant l'arête  $a$ . Le graphe  $C_a$  doit obligatoirement être connexe, puisque par hypothèse,  $a$  n'est pas un isthme. Cela revient à dire que  $\text{RANG } H_0(C_a) = 1$ . Or l'observation précédente nous permet de voir le sous graphe  $G'_{no}$  comme la réunion de tous les graphes  $G_i'_{no}$ , où  $G_i$  est une composante connexe de  $G$  pour  $1 \leq i \leq k$ . Donc dans le cas qui nous occupe,  $C'_{no}$  est un sous-graphe de  $G'_{no}$  et par conséquent, ne contient pas l'arête  $a$ .  $C'_{no}$  est donc un sous-graphe de  $C_a$  et comme  $C_a$  est également un sous-graphe de  $C$ , il en résulte que  $C_a'_{no}$  et  $C'_{no}$  sont deux graphes simples absolument identiques. Ce qui entraîne naturellement que  $\text{RANG } (H_1(C)) = \text{RANG } (H_1(C_a))$ . En nous servant de la définition 1.1.10 et du théorème 2.4.3, nous obtenons :

$$(1) \text{ RANG } (H_0(C_a)) = \chi(C_a) + \text{RANG } (H_1(C_a))$$

$$(2) \text{ RANG } (H_0(C)) = \chi(C) + \text{RANG } (H_1(C))$$

Grâce aux égalités suivantes :

$$(1') \text{ RANG } (H_0(C)) = 1, \text{ car } C \text{ est une composante connexe.}$$

$$(2') \chi(C) = \chi(C_a) - 1, \text{ car l'arête } a \text{ n'appartient pas au graphe } C_a.$$

$$(3') \text{ RANG } (H_1(C)) = \text{RANG } (H_1(C_a))$$

Nous pouvons tirer de (1) et (2) que :

$\text{RANG } (H_0(C_a)) = 2$ . Contradiction de l'hypothèse stipulant que  $a$  n'est pas un isthme de la composante connexe  $C$ .

( $\Leftarrow$ ) Procédons là encore par l'absurde en supposant qu'un isthme  $a$  d'une composante connexe  $C$  de  $G$  apparaisse dans le graphe  $G'_{no}$  donc par conséquent dans le graphe  $C'_{no}$ . Posons  $K$  comme étant la composante connexe de  $C'_{no}$  contenant l'isthme  $a$ ,  $K$  est alors un sous graphe connexe de  $C$ . Cela implique que  $a$  est également un isthme pour  $K$ . Il ne reste plus maintenant qu'à constater que  $K$  est bien une composante connexe de  $G'_{no}$ . Or, comme nous l'avons vu précédemment, si un graphe  $G$  possède  $k$  composantes connexes  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , alors  $H_1(G) = \bigoplus_{i=1}^k H_1(G_i)$ . Cela nous permet donc de conclure, sachant que

$G_{i'no} \cap G_{j'no} = \emptyset$  pour  $i \neq j$ , que  $G'_{no}$  peut s'écrire comme l'union suivante :  
 $\bigcup_{i=1}^k G_{i'no} \subseteq \bigcup_{i=1}^k G_i$ . Par conséquent,  $a$  est un isthme de la composante connexe  $K$  du graphe  $G'_{no}$  ce qui constitue une contradiction de la proposition 3.1.4.  $\square$

**Remarque 3.1.6 :**

Nous pouvons aisément constater que si un graphe simple  $G = (X, A)$  est hamiltonien, alors il doit être connexe d'une part et dépourvu d'isthme d'autre part. Il en découle que le graphe  $G'_{no}$  est connexe également car il est identique au graphe  $G$ .

**3.2 Détection d'ensembles d'articulation**

Nous allons, dans cette partie de notre travail, fournir une technique de détection des points d'articulation reposant sur la détermination du rang du premier groupe d'homologie de certains sous-graphes. Nous montrerons de quelle façon obtenir ce rang à partir du premier groupe d'homologie du graphe entier. Finalement nous généraliserons, sans grande peine, ces résultats pour des ensembles d'articulation arbitraires.

**Notation :** Soit  $G$ , un graphe simple orienté ou non. Nous noterons  $G \setminus \{x\}$  ou plus simplement  $G \setminus x$ , le sous-graphe de  $G$  obtenu en supprimant le sommet  $x$  ainsi que toutes les arêtes qui lui sont incidentes.

Remarquons qu'un sommet  $x$ , d'un graphe connexe  $G$ , est un point d'articulation si et seulement si le graphe  $G \setminus x$  n'est pas connexe. À la lumière de cette constatation, il devient clair que nous n'avons plus qu'à déterminer le rang du groupe  $H_0(G \setminus x)$  afin d'être en mesure de détecter si, oui ou non, le sommet  $x$  est un point d'articulation. Pour ce faire, il suffit d'exprimer le groupe  $H_1(G \setminus x)$  en fonction du groupe  $H_1(G)$  ou, en d'autres termes, il s'agit d'obtenir le sous-graphe  $(G \setminus x)'_{no}$  à partir du sous-graphe  $G'_{no} = (X', A'_{no})$ . C'est à cette tâche que nous nous consacrerons dans la partie suivante de notre exposé.

**Définition 3.2.1 :**

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple orienté ou non. Dans ce cas le graphe  $G'_0 = (X', A'_0)$  est constitué de  $n$  cycles élémentaires que nous écrirons  $c_1, c_2, \dots, c_n$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Si, conformément à ce que nous avons fait précédemment, nous exprimons ces cycles comme des vecteurs de  $\mathbb{Z}^k$  où  $k = |A'_0|$ ; alors la matrice  $B_G \in M_{k \times n}(\mathbb{Z})$ , dont la  $i$ -ème colonne correspond au cycle  $c_i$ , sera appelée : matrice de base du graphe  $G$ .

Cette définition présente le grand avantage de nous permettre de concevoir un cycle comme une combinaison linéaire entière de cycles élémentaires. L'idée générale de la construction d'une base pour le groupe abélien libre  $H_1(G \setminus x)$  repose sur l'étude des combinaisons linéaires entières, de colonnes de  $B_G$ , que nous déclarons admissibles relativement à  $x$ ; c'est-à-dire telles que l'élément  $B_G \cdot y$ , où  $y \in \mathbb{Z}^n$ , ne contienne aucune arête incidente à  $x$ . Pour ce faire, il est plus aisé de considérer une sous matrice obtenue à partir de l'ensemble  $A'_0 = \{ a_1, \dots, a_k \}$  des arêtes de  $G'_0$ . Soit  $x$ , un sommet de  $G$  et  $a_{i_1}, \dots, a_{i_p}, 1 \leq j \leq k$ , les arêtes incidentes à  $x$  avec  $i_p \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \forall p$  et  $i_p \leq i_q$  si  $p \leq q$ .

**Définition 3.2.2 :**

Alors, la sous-matrice  $I_x$  de  $B_G$ , obtenue en ne considérant que les lignes  $i_1, \dots, i_j$  ainsi que les colonnes  $c_i$  qui ne sont pas réduites au vecteur nul sur ces mêmes lignes, sera appelée matrice associée au sommet  $x$ .

**Exemple 3.2.3 :**

Soit  $G$  le graphe orienté suivant :

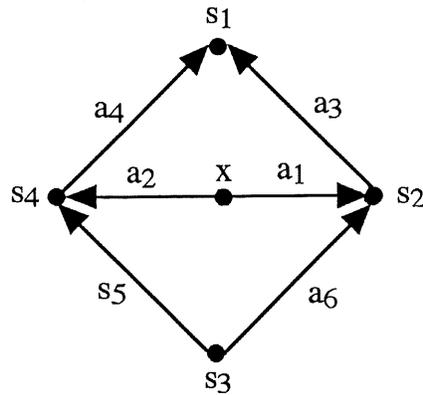


Figure 3.1.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Avant de formuler notre théorème de détection des points d'articulation, il convient auparavant d'énoncer le lemme que voici.

**Lemme 3.2.4 :**

Soit  $V$  un groupe abélien libre de type fini. Un sous-ensemble  $B$  de  $V$  est appelé une base du groupe  $V$  lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $B$  est un ensemble libre
- (ii)  $B$  engendre  $G$ .

Voir à ce sujet GODEMENT [5].

**Théorème 3.2.5 (Détection des points d'articulation) :**

Soient  $G = (X, A)$  un graphe simple orienté ou non,  $x$  un sommet de  $G$  et  $C = (Y, D)$ , la composante connexe de  $x$  provenant du sous-graphe  $G'_{no}$ . Nous avons alors les égalités suivantes :

$RANG (H_1(C \setminus x)) = m + DIM (KER I_x)$  ce qui nous permet d'obtenir :

$RANG (H_0(C \setminus x)) = m + DIM (KER I_x) + \chi(C \setminus x)$

où  $\chi(C \setminus x) = \chi(C) - 1 + deg(x)$  et  $m$  représente le nombre de cycles élémentaires de base de  $C'_o$  ne contenant pas le point  $x$ , où  $C'_o = (Y, D'_o)$  est le graphe orienté obtenu en substituant chaque arête  $\{y, z\}$  de  $C$  par le couple  $(y, z)$  ou  $(z, y)$  de  $A'_o$ .

**Démonstration :**

Si nous supposons que la composante connexe  $C$  n'est pas réduite au point  $x$ , alors nous pouvons poser  $deg(x) = m$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$ . De même, nous sommes assurés que l'un des cycles de base du graphe  $C'_o$  contient le point  $x$ ; ce qui nous autorise à poser  $k, k \in \mathbb{N}^*$ , comme étant le nombre total de tels cycles. Par conséquent, la matrice  $I_x$  peut s'écrire comme suit :

$I_x = (\sigma_{ij})$  où  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k$  et  $\sigma_{ij} \in \{0, 1, -1\} \forall i, j$ .

Afin d'obtenir l'ensemble des combinaisons linéaires admissibles de cycles, c'est-à-dire les combinaisons ne faisant apparaître aucune des arêtes incidentes à  $x$ , il nous faut résoudre le système suivant :

$$(1) \quad I_x \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'ensemble solution du système (1) peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$d_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1k} \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2k} \end{bmatrix} + \dots + d_n \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nk} \end{bmatrix}$$

où  $n = \text{DIM}(\text{KER } I_x)$   $d_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq n$ .

(Évidemment si nous avons  $\text{DIM}(\text{KER } I_x) = 0$ , le vecteur nul est alors l'unique solution du système.)

Nous noterons, pour la suite de la présente démonstration,  $X_i$  le vecteur  $\begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{ik} \end{bmatrix}$  et nous

poserons  $Y_i = B_{C_r} \cdot X_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$ , où  $B_{C_r}$  représente la matrice de base  $B_C$  de la composante connexe  $C$  réduite aux seules colonnes présentes dans la matrice  $I_x$ . Aucune des arêtes incidentes à  $x$  ne peut apparaître dans le "cycle"  $Y_i$  car  $X_i$  est un générateur de  $\text{KER } I_x$ , c'est-à-dire que nous avons  $I_x \cdot X_i = 0$ . Considérons maintenant l'ensemble  $B = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n, c_1, c_2, \dots, c_m\}$  où  $c_1, c_2, \dots, c_m$  représentent les colonnes de  $B_C$  n'apparaissant pas dans la matrice  $I_x$  et montrons qu'il constitue une base du noyau de l'homomorphisme  $\partial_*' : H_1(C \setminus x, X \setminus \{x\}) \rightarrow H_0(X \setminus \{x\})$  qui est isomorphe à  $H_1(C \setminus x)$ .

Procédons par l'absurde en supposant qu'il existe des entiers  $\alpha_i$  et  $\beta_j, 1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq m$ , tels que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i + \sum_{j=1}^m \beta_j c_j = 0$ . Supposons qu'un des  $\beta_j$  soit différent de 0, étant donné que chaque  $Y_i$  n'est qu'une combinaison linéaire des colonnes de la matrice  $B_{C_r}$ , cela signifie que les colonnes de la matrice  $B_C$  ne sont pas linéairement indépendantes. Contradiction!! Par conséquent  $\beta_j = 0, \forall j, 1 \leq j \leq m$ . Supposons maintenant qu'un des  $\alpha_i$  soit différent de 0. Comme  $\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i = 0$  et qu'au moins un des  $\alpha_i$  est différent de 0, nous pouvons écrire :

$B_{Cr} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = 0$ . Ce qui implique que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i = 0$ , puisque toutes les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes. D'où  $\alpha_i = 0 \forall i, 1 \leq i \leq n$ , ce qui constitue une contradiction et par conséquent B est bien un ensemble libre.

Montrons maintenant que B engendre le noyau de l'homomorphisme

$$\partial_*' : H_1(C \setminus x, X \setminus \{x\}) \rightarrow H_0(X \setminus \{x\})$$

qui est isomorphe à  $H_1(C_x)$ . Il est parfaitement clair que tout élément du noyau de l'homomorphisme précédent est également un élément du noyau de  $\partial_* : H_1(C, X) \rightarrow H_0(X)$ .

Supposons maintenant que nous ayons un élément du noyau de  $\partial_*'$ , que nous noterons d. Cependant, d étant aussi un élément du noyau de  $\partial_*$ , il peut donc s'écrire comme la combinaison linéaire que voici des colonnes de la matrice  $B_C$ .  $d = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i + \sum_{j=1}^k \beta_j c_j$  où les  $c_j$  sont les colonnes de  $B_{Cr}$ . Or puisque d est également un élément du groupe

$H_1(C \setminus x, X \setminus \{x\})$ , l'expression de d ne peut en aucun cas comporter une des arêtes incidentes à x. Cela nous permet d'écrire que

$$\sum_{j=1}^k \beta_j c_j = B_{Cr} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} \text{ avec } I_x \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} = 0 \text{ et par conséquent de conclure que}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \beta_k \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdot \\ x_{1k} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdot \\ x_{2k} \end{bmatrix} + \dots + k_n \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \cdot \\ x_{nk} \end{bmatrix} \text{ où } k_i \in \mathbb{Z}, \forall i, 1 \leq i \leq n \text{ et}$$

donc, par transitivité, que  $\sum_{j=1}^k \beta_j c_j = k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \dots + k_n Y_n$ . Ce qui montre bien que

B est un ensemble de générateurs.

Le lemme 3.2.4 ainsi que les parties (1) et (2) nous permettent d'affirmer que B est une base du noyau de l'homomorphisme  $\partial_*$  et par conséquent que

$$\text{RANG} (H_1(C \setminus x)) = m + \text{DIM} (\text{KER } I_x). \quad \square$$

**Exemple 3.2.6 :**

Soit le graphe  $G'_0$  suivant :

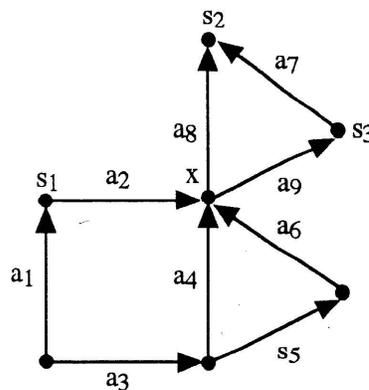


Figure 3.2.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas présent nous avons  $\text{deg}(x) = 5$ ,  $\text{DIM} (\text{KER } I_x) = 0$  et  $m = 0$  ce qui nous permet de conclure que  $\text{RANG} (H_1(G \setminus x)) = 0$  et par conséquent que  $\text{RANG} (H_0(G \setminus x)) = 2$ . Le sommet x est donc un point d'articulation.

**Remarque 3.2.7 :**

Nous ne nous sommes intéressés qu'aux points d'articulation, car nous recherchons avant tout des conditions nécessaires à l'existence de cycle hamiltonien. Cependant, le théorème précédent peut sans difficulté être adapté à la détection d'ensembles d'articulation pouvant contenir à la fois des points et des arêtes. En effet, il suffit alors de considérer une matrice associée à un ensemble  $S$  d'arêtes et de sommets d'une composante connexe  $C$  du graphe  $G'_{no}$ . La sus-dite matrice, que nous noterons  $I_S$ , sera constituée des lignes de la matrice de base  $B_C$  représentant les arêtes de  $S$  ainsi que toutes les arêtes incidentes à l'ensemble  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  des points de  $S$ . Les colonnes de  $I_S$  seront données, quant à elles, par toutes les colonnes de la matrice  $B_C$  qui ne sont pas réduites au vecteur nul sur les lignes précédentes. Soient maintenant  $X_1, X_2, \dots, X_n$  les vecteurs de base du noyau de la matrice  $I_S$  et posons  $Y_i = B_{Cr} \cdot X_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$ , où  $B_{Cr}$  représente la matrice  $B_C$  restreinte aux colonnes apparaissant dans la matrice associée  $I_S$ . Si, conventionnellement, nous décidons de noter  $c_1, c_2, \dots, c_m$  les colonnes de  $B_C$  qui ne font pas partie de la matrice  $B_{Cr}$ , alors nous sommes en mesure de démontrer exactement de la même manière que précédemment que  $B = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n, c_1, c_2, \dots, c_m\}$  est une base du noyau de l'homomorphisme

$$\partial_*' : H_1(C \setminus S, X \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_k\}) \rightarrow H_0(X \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_k\}),$$

qui est isomorphe à  $H_1(C \setminus S)$ . Ce qui nous permet donc de conclure que

$$\text{RANG} (H_1(C \setminus S)) = m + \text{DIM} ( \text{KER} I_S ),$$

où  $m$  est donné par le nombre de cycles élémentaires de  $C'_0$  ne contenant ni arête, ni sommet de l'ensemble  $S$ .

Par exemple considérons le sous-ensemble suivant du graphe de la figure 3.1 :

$$S = \{s_1, s_2, s_3, a_3\}. \text{ Alors } I_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$I_S$  étant, bien entendu, une sous-matrice de  $B_G$ . Nous pouvons sans trop de peine constater que  $\text{DIM}(\text{KER } I_S) = 0$ ,  $m = 1$  et  $\text{RANG}(H_1(C \setminus S)) = 1$ . Ce qui implique que  $\text{RANG}(H_0(C \setminus S)) = m + \text{DIM}(\text{KER } I_S) + \chi(C \setminus S) = 1 + 0 + 1 = 2$ . Par conséquent  $S$  est bien un ensemble d'articulation.

**Remarque 3.2.8 :**

Notre préoccupation consistant à trouver des conditions nécessaires à l'existence de cycle hamiltonien, nous amène à considérer tout particulièrement les chaînes de sommets de degré deux. Une telle chaîne qui prend la forme suivante  $C = [s_1, s_2, \dots, s_n]$  où  $\text{deg}(s_i) = 2 \forall i, 2 \leq i \leq n-1$ , doit faire partie intégrante de n'importe quel cycle hamiltonien. Par voie de conséquence, un graphe hamiltonien qui se verrait retrancher une telle chaîne resterait tout de même connexe. La remarque 3.2.7 nous permet alors de déterminer si, oui ou non, une chaîne de sommets de degré deux est un ensemble d'articulation du graphe.

**3.3 Cycle de longueur paire dans les graphes**

Cependant, la théorie développée précédemment admet bien d'autres applications comme, par exemple, la généralisation aux graphes simples connexes du résultat que voici, démontré par Chung, Goddard et Kleitman [4].

Un graphe orienté  $G$ , fortement connexe comportant  $n$  sommets et au moins

$$\left\lceil \frac{(n + 1)^2}{4} \right\rceil \text{ arêtes doit obligatoirement contenir un circuit élémentaire de longueur}$$

paire.

Afin d'être en mesure de démontrer plus efficacement le résultat annoncé, il convient de présenter, tout d'abord, la remarque et le lemme suivants :

**Lemme 3.3.1 :**

Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple orienté ou non. Alors deux cycles élémentaires  $c_1$  et  $c_2$  de  $G'_0 = (X', A'_0)$  s'intersectant par une ou plusieurs arêtes toutes consécutives, satisfont la propriété suivante :

Dans l'expression vectorielle de  $c_1$  et  $c_2$ , toutes les composantes correspondant aux arêtes de l'intersection auront : soit le même signe pour  $c_1$  et  $c_2$  ou soit un signe opposé pour les deux cycles. Cela revient à affirmer qu'il existe une combinaison linéaire de  $c_1$  et de  $c_2$  de la forme  $\alpha c_1 + \beta c_2$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$ , telle que le cycle ainsi obtenu ne contienne plus aucune arête de l'intersection entre les deux cycles.

**Démonstration :**

Rappelons quelques résultats énoncés lors de la description de l'homomorphisme  $\partial_* : H_1(G, X) \rightarrow H_0(X)$

- a) L'ensemble des sommets de  $G$  constitue une base du groupe  $H_0(X)$ .
- b) L'ensemble des arêtes orientées forme une base du groupe  $H_1(G, X)$ .
- c) Soit  $a_1$ , une arête incidente aux sommets  $s_1$  et  $s_2$  munie d'une orientation déterminée par la relation  $s_2 > s_1$ . Alors  $\partial_*(a_1) = s_2 - s_1$ .
- d)  $H_1(G)$  est isomorphe au noyau de l'homomorphisme  $\partial_*$ .

Un cycle élémentaire  $c$  est donc un élément du noyau de  $\partial_*$ , c'est-à-dire que nous avons :  $\partial_*(c) = 0$ . Exprimons maintenant le cycle  $c$  comme suit :  $\sum_{i=1}^n d_i a_i$  où  $d_i \in \{-1, 1\}$  et  $a_i \in A, \forall i, 1 \leq i \leq n$ . Évidemment, le fait que  $c$  soit un cycle nous permet d'obtenir, grâce à une permutation appropriée d'indices, une suite d'arêtes  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , telle que  $a_i$  ait un sommet en commun avec  $a_{i+1}$  et l'autre avec  $a_{i-1}, \forall i, 2 \leq i \leq n-1$ . Nous exigerons également que le sommet initial et le sommet terminal de cette chaîne coïncident. La remarque b) nous permet de constater que le cycle  $c$  est donné sous la forme d'une combinaison linéaire d'éléments de la base du groupe  $H_1(G, X)$ .

Cela nous autorise à écrire :  $\partial_*(c) = \sum_{i=1}^n d_i \partial_*(a_i)$

Pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , notons maintenant  $s_i$  et  $s_{i+1}$  les deux sommets auxquels l'arête  $a_i$  est incidente. Évidemment, il est clair que si l'arête  $a_i$  est orientée du sommet  $s_i$  vers le sommet  $s_{i+1}$ , la relation d'ordre sera donnée par  $s_{i+1} > s_i$  et nous aurons  $\partial_*(a_i) = s_{i+1} - s_i$ . Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque nous aurons  $s_i > s_{i+1}$ ,  $\partial_*(a_i) = s_i - s_{i+1}$ . L'arête  $a_n$ , quant à elle, est incidente aux sommets  $s_n$  et  $s_1$ ; de plus, selon son orientation, nous aurons soit  $\partial_*(a_n) = s_1 - s_n$  ou soit  $\partial_*(a_n) = s_n - s_1$ .

Nous sommes maintenant en mesure de constater que le signe du coefficient  $d_j$  associé à une arête quelconque  $a_j$  du cycle  $c$ , détermine le signe de tous les autres coefficients  $d_i$  où  $1 \leq i, j \leq n$ . En effet, si  $s_j$  et  $s_{j+1}$  sont les extrémités de l'arête  $a_j$ , nous aurons alors soit :

- 1)  $d_j \partial_*(a_j) = s_{j+1} - s_j$  ou
- 2)  $d_j \partial_*(a_j) = s_j - s_{j+1}$ .

Or, puisque  $c$  est un cycle élémentaire, cela implique que chacun des sommets n'appartient qu'à deux arêtes distinctes. Puisque nous voulons  $\partial_*(c) = \sum_{i=1}^n d_i \partial_*(a_i) = 0$ , il nous faut, par conséquent, dans le cas 1), égalité entre les termes  $d_{j-1} \partial_*(a_{j-1})$  et  $s_j - s_{j-1}$  de même qu'entre les termes  $d_{j+1} \partial_*(a_{j+1})$  et  $s_{j+2} - s_{j+1}$ ; tandis que le cas 2) nécessite les égalités entre  $d_{j-1} \partial_*(a_{j-1})$  et  $s_{j-1} - s_j$  de même qu'entre  $d_{j+1} \partial_*(a_{j+1})$  et  $s_{j+1} - s_{j+2}$ . Il est évident que puisque les orientations des arêtes sont connues, les coefficients  $d_{j-1}$ ,  $d_{j+1}$  sont uniquement déterminés. Nous pouvons poursuivre, connaissant les signes de  $s_{j-2}$  et  $s_{j+2}$ , le même processus afin d'obtenir  $d_{j-2}$ ,  $d_{j+2}$  et ainsi de suite. Enfin, il va de soi, qu'en remplaçant  $d_j$  par  $-d_j$ , nous remplacerons ainsi tous les coefficients  $d_i$  par  $-d_i$  où  $1 \leq i \leq n$ . (En fait, intuitivement, cela correspond à un parcours du cycle en sens inverse).

Soient maintenant  $c_1$  et  $c_2$ , deux cycles élémentaires de  $G'_0$  possédant  $m$  arêtes communes toutes consécutives,  $m \in \mathbb{N}^*$ , que nous noterons  $a_i$  où  $1 \leq i \leq m$ , de telle sorte que la suite  $a_1, a_2, \dots, a_m$  forme une chaîne. Cela nous permet d'exprimer  $c_1$  et  $c_2$  de la manière suivante :

$$c_1 = \sum_{i=1}^m k_i a_i + \sum_{i=1}^p l_i a'_i \text{ et } c_2 = \sum_{i=1}^m k'_i a_i + \sum_{i=1}^q m_i a''_i$$

où  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $k_i, k'_i, l_i, m_i \in \{-1, 1\}$  et  $a_i, a'_i, a''_i \in A$ . Supposons, dans un premier temps, que nous ayons 1)  $k_1 = k'_1$ . Dans ce cas, les remarques précédentes et le fait que les arêtes communes soient toutes consécutives, nous permettent de conclure que  $k_i = k'_i, \forall i, 1 \leq i \leq m$ . Si nous supposons maintenant que 2)  $k_1 = -k'_1$ , alors dans ce cas de figure nous aurons  $k_i = -k'_i, \forall i, 1 \leq i \leq m$ . Ce qui achève la démonstration de la première partie de la proposition. Nous pouvons trivialement constater qu'une combinaison entière de  $c_1$  et  $c_2$  satisfait la condition suivante :

$$\partial_* (\alpha c_1 + \beta c_2) = \alpha \partial_* (c_1) + \beta \partial_* (c_2) = 0$$

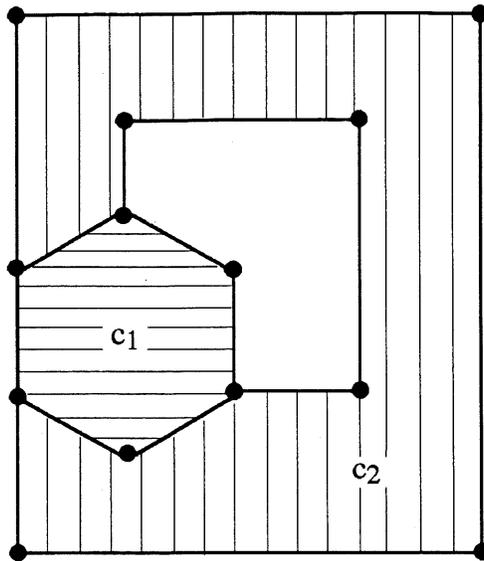
où  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ . Dans le cas 1), il suffit de poser  $\alpha = 1$  et  $\beta = -1$  ou  $\alpha = -1$  et  $\beta = 1$  pour que le cycle  $\alpha c_1 + \beta c_2$  ne contienne plus d'arête commune aux deux cycles. Pour s'en convaincre, il suffit de supposer que les sommets, que nous appellerons  $s$  et  $s'$ , sont les extrémités de la chaîne constituée par les arêtes de l'intersection. Pour obtenir le cycle en question, il suffit de partir du sommet  $s$  puis de parcourir le cycle  $c_1$  jusqu'au sommet  $s'$  sans utiliser les arêtes communes. Ensuite, nous revenons du sommet  $s'$  à notre point de départ en parcourant le cycle  $c_2$ , toujours sans employer les arêtes communes aux deux cycles. Dans le cas 2), nous obtiendrons le même résultat en posant  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$  ou  $\alpha = -1$  et  $\beta = -1$ .

### **Remarque 3.3.2 :**

Lorsque nous considérons deux cycles élémentaires,  $c_1$  et  $c_2$ , deux cas seulement peuvent alors survenir :

- 1) Les deux cycles s'intersectent par un unique sommet ou alors pas du tout.
- 2) Les deux cycles possèdent plusieurs sommets communs.

Une illustration de cette situation est donnée par la figure 3.3.



**Figure 3.3.**

De surcroît dans le cas 2), il est toujours possible de trouver deux sommets,  $s$  et  $s'$ , communs aux deux cycles  $c_1$  et  $c_2$ , de même qu'une chaîne de sommets  $[s, s_1, s_2, \dots, s_n, s']$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , possédant les propriétés qui suivent :

- 1) Les sommets  $s_i$ , où  $1 \leq i \leq n$ , sont tous distincts et appartiennent tous au cycle  $c_1$ .
- 2) Aucun des  $s_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ , n'est un sommet commun aux deux cycles.

Mais étant donné que  $c_2$  est un cycle élémentaire, nous pouvons affirmer qu'il existe une chaîne  $[s', s'_1, \dots, s'_m, s]$ , où les  $s'_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , sont des sommets de  $c_2$  tous distincts. En procédant à la concaténation des deux chaînes précédentes, nous obtenons alors un cycle élémentaire qui intersecte, par une ou plusieurs arêtes consécutives, chacun des deux cycles. Un tel cycle apparaît en blanc au milieu de la figure 3.3.

**Théorème 3.3.3 :**

Soit  $G$  un graphe simple connexe ou un graphe simple orienté faiblement connexe possédant  $n$  sommets ( $n \geq 4$ ) et au moins  $\left\lceil \frac{(n+1)^2}{4} \right\rceil$  arêtes. Alors  $G$  doit contenir un cycle élémentaire de longueur paire.

### **Démonstration :**

Puisque  $G$  est soit connexe, soit faiblement connexe nous aurons  $\text{RANG}(H_0(G)) = 1$  et donc  $1 - \text{RANG}(H_1(G)) = \chi(G)$ , c'est-à-dire

$$1 - \text{RANG}(H_1(G)) \leq n - \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor.$$

$$\text{Ainsi : } \text{RANG}(H_1(G)) \geq \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor - n + 1.$$

Si un des cycles élémentaires de base du graphe  $G'_0$  est de longueur paire, le résultat est immédiat. Nous devons donc supposer que ces cycles, qui sont au nombre de  $\text{RANG}(H_1(G))$ , sont tous de longueur impaire. Maintenant, si nous supposons que deux des cycles élémentaires,  $c_1$  et  $c_2$ , de  $G'_0$  s'intersectent par plus d'un sommet; la remarque 3.3.2, nous permet de construire un cycle élémentaire  $c_3$ , intersectant les deux premiers par une ou plusieurs arêtes consécutives. Deux cas peuvent alors se présenter à nous :

Premièrement, si ce dernier cycle est de longueur paire, la démonstration est terminée.

Dans un deuxième temps, si nous considérons qu'il est de longueur impaire, le lemme 3.3.1 nous indique que nous n'avons qu'à effectuer une combinaison linéaire des cycles  $c_2$  et  $c_3$  en vue d'éliminer les arêtes d'intersection, afin d'obtenir un quatrième cycle  $c_4$ . Le cycle ainsi obtenu est de longueur paire car nous retranchons aux deux cycles, tous deux de longueur impaire, le même nombre d'arêtes. De plus, en vertu de la construction du cycle  $c_3$ , nous pouvons affirmer que  $c_4$  est un cycle élémentaire.

Il ne nous reste maintenant plus qu'à supposer que tous les cycles élémentaires ne s'intersectent pas ou uniquement par un sommet. Donc chacun de ces cycles ne partage aucune arête avec un autre cycle de base et comme ils doivent tous posséder au moins trois arêtes, puisque nous ne nous autorisons ni les boucles, ni les arêtes doubles, cela nous fournit le nombre minimal d'arêtes que doit comporter le graphe  $G$ .

Par conséquent :

$$\text{Nombre minimal d'arêtes de } G - \text{nombre d'arêtes de } K_n = 3 \times \text{RANG}(H_1(G)) - \binom{n}{2}$$

$$\begin{aligned} &\geq 3 \left( \left[ \frac{(n+1)^2}{4} \right] - n + 1 \right) - \left( \frac{2n^2 - 2n}{4} \right) \geq 3 \left( \frac{(n+1)^2}{4} - n \right) - \left( \frac{2n^2 - 2n}{4} \right) \\ &= \frac{n^2 - 4n + 3}{4} = \frac{(n-1)(n-3)}{4} > 0, \text{ si } n \geq 4. \end{aligned}$$

Cela signifie qu'il faudrait au graphe  $G$  plus d'arêtes que n'en contient le graphe complet sur  $n$  sommets (si  $n \geq 4$ ). C'est une absurdité. Nous devons par conséquent conclure, après étude de tous les cas de figure, que la proposition est vérifiée pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à quatre. Ce qui complète la démonstration.  $\square$

### 3.4 Graphes et équations associées

Dans la prochaine partie du présent mémoire, nous aborderons la recherche de conditions nécessaires à la présence d'un cycle hamiltonien avec un point de vue tout à fait différent par le biais de l'association d'une équation. Il s'agit, en effet, de constater qu'un cycle hamiltonien est également un élément du noyau de l'homomorphisme

$$\partial_* : H_1(G, X) \rightarrow H_0(X)$$

et donc de réaliser qu'il doit forcément s'exprimer comme une combinaison linéaire des cycles élémentaires de base formant le graphe  $G'_0$ .

#### **Définition 3.4.1 :**

Considérons la matrice de base,  $B_G$ , d'un graphe simple  $G$  orienté ou pas. L'équation

quadratique obtenue via le produit  $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k] B_G^t B_G \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = n$ , où  $n$  représente

le nombre de sommets de  $G$  et où  $k = \text{RANG}(H_1(G))$ , se nommera équation quadratique associée au graphe  $G$  et se notera  $EQ_G$ .

**Exemple 3.4.2 :**

À titre d'exemple, voici les équations quadratiques associées aux graphes des figures 3.1 et 3.2 respectivement :

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 = 5 \text{ et } 4x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 = 7 .$$

Nous pouvons d'ailleurs constater que la première équation n'admet évidemment aucune solution entière.

**Proposition 3.4.3 :**

Soit  $G$ , un graphe simple orienté ou non. La présence d'un cycle hamiltonien du graphe  $G$  implique l'existence d'au moins deux solutions entières de l'équation quadratique associée,  $EQ_G$ .

**Démonstration :**

Soit  $c_h = [s_0, s_1, \dots, s_n = s_0]$  un cycle hamiltonien du graphe  $G$ . Il est parfaitement clair que le cycle  $c_{h'} = [s_n, s_{n-1}, \dots, s_0 = s_n]$  est également un cycle hamiltonien. Afin d'être en mesure de démontrer que les cycles  $c_h$  et  $c_{h'}$  sont tous deux des éléments du noyau de l'homomorphisme  $\partial_* : H_1(G, X) \rightarrow H_0(X)$ , il est plus aisé d'exprimer les deux cycles sous la forme d'une combinaison linéaire d'arêtes, comme cela a été fait au lemme 3.3.1 :

$$c_h = \sum_{i=1}^n d_i a_i \text{ et } c_{h'} = \sum_{i=1}^n -d_i a_i$$

où  $a_i \in A$  est l'arête incidente aux sommets  $s_{i-1}$  et  $s_i$ , de surcroît  $d_i = 1$  si l'arête  $a_i$  est orientée du sommet  $s_{i-1}$  vers le sommet  $s_i$  ou  $d_i = -1$  dans le cas contraire. Nous aurons par conséquent :

$$\partial_* (c_h) = \sum_{i=1}^n d_i \partial_*(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} s_{i+1} - s_i = 0 \text{ et}$$

$$\partial_* (c_{h'}) = \sum_{i=1}^n -d_i \partial_*(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i - s_{i+1} = 0$$

ce qui prouve bien l'appartenance des deux cycles au noyau de l'homomorphisme  $\partial_*$ . Ces deux cycles peuvent donc s'écrire comme une combinaison linéaire entière des  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , vecteurs de base du noyau de  $\partial_*$  qui sont en fait représentés par les colonnes de la matrice  $B_G$ . Les propos précédents nous autorisent donc à écrire que :

$$c_h = B_G \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} \text{ et } c_{h'} = B_G \cdot \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -x_k \end{bmatrix} \text{ où } x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Z}, \forall i, 1 \leq i \leq k.$$

Il ne nous reste plus, dès lors, qu'à faire la triviale constatation que les produits scalaires  $c_h^t \cdot c_h$  et  $c_{h'}^t \cdot c_{h'}$  sont égaux à  $n$ , le nombre d'arêtes des cycles  $c_h$  et  $c_{h'}$  pour être en mesure

d'affirmer que  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -x_k \end{bmatrix}$  sont deux solutions entières de l'équation quadratique EQG.  $\square$

**Remarque 3.4.4 :**

D'un point de vue pratique la contraposée de la proposition 3.4.3, à savoir que l'absence de solution de l'équation EQ<sub>G</sub> entraîne invariablement l'absence de cycle hamiltonien dans le graphe G, se révèle souvent plus utile. L'avantage d'une telle formulation réside dans le fait qu'une étude d'équations quadratiques suffit pour fournir une preuve du caractère non hamiltonien de certains graphes.

**Exemple 3.4.5 :**

Nous avons préalablement établi dans l'exemple 3.4.2 que l'équation quadratique EQ<sub>G</sub> :  $4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 = 5$  du graphe de la figure 3.1 n'admettait aucune solution entière. En vertu de la remarque 3.4.4, nous pouvons en déduire que ce graphe ne possède aucun cycle hamiltonien.

Si nous sommes plutôt à la recherche d'un circuit hamiltonien, le même genre d'arguments que ceux invoqués précédemment, nous conduisent aux notions suivantes.

**Définition 3.4.6 :**

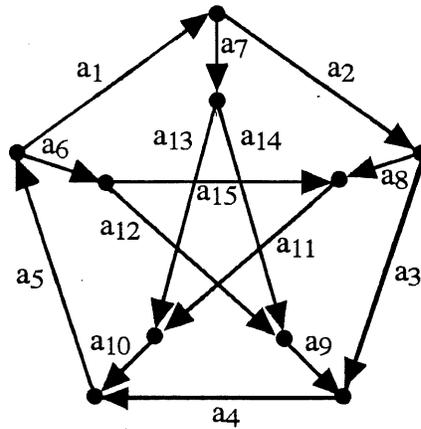
Soit G un graphe préalablement orienté. L'équation, notée ED<sub>G</sub>, fournie par le produit :

$$[1, 1, \dots, 1] B_G \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} = n, \text{ où } n \text{ représente le nombre de sommets du graphe } G, m \text{ le}$$

nombre d'arêtes de G,  $[1, 1, \dots, 1]$  le vecteur unitaire de  $\mathbb{Z}^m$  et  $k = \text{RANG}(H_1(G))$ , sera nommée l'équation diophantienne associée au graphe G.

**Exemple 3.4.7 :**

Voici l'équation diophantienne associée au graphe de Petersen orienté, illustré par la figure 3.4 :



**Figure 3.4.**

$$B_G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } ED_G : -5x_1 + x_2 + x_5 - x_6 = 10.$$

**Proposition 3.4.8 :**

Soient  $G$  un graphe orienté et  $ED_G$  son équation diophantienne associée. La présence d'un circuit hamiltonien dans  $G$  implique l'existence d'au moins une solution entière à l'équation  $ED_G$ .

**Démonstration :**

La démonstration de cette proposition est similaire à celle de la proposition 3.4.6, si ce n'est qu'il faut constater que lorsqu'un circuit hamiltonien,  $ci_h$ , est exprimé sous la forme :

$$ci_h = \sum_{i=1}^n d_i a_i, \text{ alors } d_i = 1, \forall i, 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

**Remarque 3.4.9 :**

Là encore, comme nous l'avons fait dans le cas des équations quadratiques associées, nous pouvons remarquer que la contraposée de la proposition 3.4.8 nous fournit une manière élégante de prouver qu'un graphe simple orienté  $G$  n'admet aucun circuit hamiltonien. Cependant nous pouvons quelquefois, en nous livrant à une étude plus approfondie de l'équation  $ED_G$  et de la matrice  $B_G$ , obtenir le même résultat. Par exemple, si nous considérons avec un peu d'attention la matrice de base du graphe de Petersen donnée à l'exemple 3.4.7, nous constaterons que chacun des cycles élémentaires, formant les colonnes de la sus-dite matrice, possède une arête qui n'apparaît dans aucun autre cycle de base. Par conséquent, si nous voulons engendrer un circuit hamiltonien grâce à une combinaison linéaire,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , des colonnes de  $B_G$ , il nous faut absolument :

$$x_i \in \{0, 1, -1\}, \forall i, 1 \leq i \leq 6.$$

Si nous revenons maintenant à l'équation diophantienne  $ED_G : -5x_1 + x_2 + x_5 - x_6 = 10$ , il devient parfaitement clair qu'elle n'admet aucune solution entière qui soit telle que  $x_1, x_2, x_5, x_6 \in \{0, 1, -1\}$ . En effet  $|-5x_1 + x_2 + x_5 - x_6| \leq 5|x_1| + |x_2| + |x_5| + |x_6| \leq 8$  lorsque  $x_1, x_2, x_5, x_6 \in \{0, 1, -1\}$ . Ce qui entraîne donc que le graphe de Petersen muni de l'orientation présentée à la figure 3.4, ne comporte aucun circuit hamiltonien.

Comme nous l'avions précédemment annoncé, nous terminerons ce chapitre par l'étude des effets d'un isomorphisme de graphes sur leurs équations quadratiques associées. Considérons donc  $G$  et  $G'$ , deux graphes simples et  $f : G \rightarrow G'$  un isomorphisme de graphes. Si, de manière analogue à ce qui a été fait à la section 2.4, nous regardons les graphes  $G$  et  $G'$  comme des sous-espaces topologiques de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $f$  devient un homéomorphisme et donc, à fortiori, une équivalence homotopique. Le théorème 2.2.8 nous apprend que les groupes  $H_1(G)$  et  $H_1(G')$  sont isomorphes. Cependant, nous pouvons obtenir des résultats plus profonds, comme en témoigne la proposition qui suit.

**Proposition 3.4.10 :**

Soient  $G, G'$  deux graphes simples,  $f : G \rightarrow G'$  un isomorphisme de graphes et  $EQ_G, EQ_{G'}$ , les équations quadratiques associées respectivement aux graphes  $G$  et  $G'$ . Alors les équations quadratiques  $EQ_G$  et  $EQ_{G'}$  sont équivalentes.

**Démonstration :**

Reprenons le diagramme commutatif de la figure 2.7 et constatons que, puisque  $f$  est un isomorphisme de graphes, les homomorphismes :

$$f_* : H_1(G) \rightarrow H_1(G') \text{ et } f_1 : H_1(G, X) \rightarrow H_1(G', X')$$

sont, en fait, des isomorphismes. De surcroît, les deux sous-groupes abéliens libres engendrés par les colonnes des matrices  $B_G$  et  $B_{G'}$  sont respectivement isomorphes à  $H_1(G)$  et à  $H_1(G')$ . Maintenant, il suffit de réaliser que l'isomorphisme  $f_*$  peut être représenté par une matrice inversible  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ , où  $n = \text{RANG}(H_1(G)) = \text{RANG}(H_1(G'))$ . L'isomorphisme  $f_1$  étant, quant à lui, représenté par une matrice orthogonale  $O \in M_{m \times m}(\mathbb{Z})$ , où  $m$  représente le nombre d'arêtes du graphe  $G$  (qui est, bien évidemment, égal au nombre d'arêtes du graphe  $G'$ ). En effet, rappelons que pour chaque arête  $a_i$  de  $G$ ,

$$f_1(a_i) = \begin{cases} +a_j & \text{si } f \text{ préserve l'orientation} \\ -a_j & \text{si } f \text{ change l'orientation.} \end{cases}$$

où  $a_j \in G'$ . Il devient clair que la matrice représentant  $f_1$  n'est constituée que de permutations de colonnes de la matrice  $I_{m \times m}$ , de même que de changements de signes; elle est donc clairement orthogonale. Ce qui nous permet d'écrire que

$$B_{G'} A = O B_G \text{ ce qui entraîne, } B_{G'} = O B_G A^{-1}.$$

Les remarques précédentes nous permettent de conclure que :

$$B_{G'}^t B_{G'} = \left( (A^{-1})^t B_G^t O^t \right) (O B_G A^{-1}).$$

$$\Rightarrow B_{G'}^t B_{G'} = (A^{-1})^t B_G^t B_G A^{-1}. \quad \square$$

**Exemple 3.4.11 :**

La proposition précédente nous fournit une condition nécessaire à l'existence d'un isomorphisme de graphes relativement originale. Nous montrerons, effectivement, que les graphes  $G$  (figure 3.5) et  $G'$  (figure 3.6) possèdent des équations quadratiques associées qui ne sont pas équivalentes. Par voie de conséquence,  $G$  et  $G'$  ne peuvent donc pas être isomorphes.

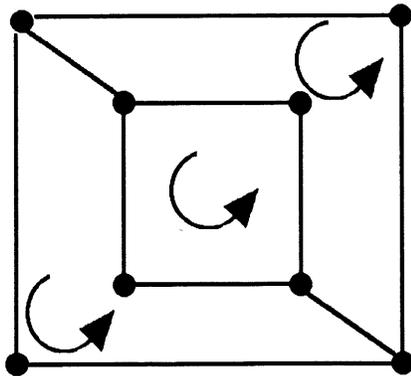


Figure 3.5.

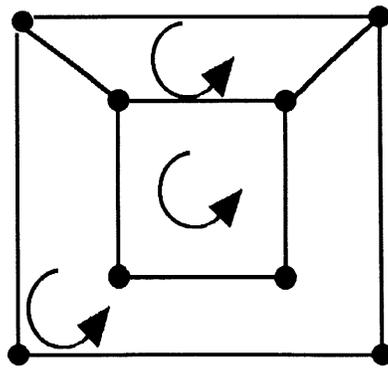


Figure 3.6.

$$\text{EQ}_G : x^t \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} x = 8 \quad \text{et} \quad \text{EQ}_{G'} : x^t \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \end{bmatrix} x = 8 .$$

$$\text{Or DET} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} = 64 \quad \text{et} \quad \text{DET} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \end{bmatrix} = 56 .$$

Donc  $\text{EQ}_G$  et  $\text{EQ}_{G'}$  ne peuvent être équivalentes, ce qui a pour conséquence que  $G$  et  $G'$  ne sont pas isomorphes.

## CONCLUSION

Le troisième chapitre nous a permis, non seulement d'exposer plusieurs applications des groupes d'homologie d'un graphe, mais encore de mettre en évidence l'avantage qu'il peut y avoir à transformer un problème de théorie des graphes en un problème algébrique. Pourtant, comme le lecteur l'aura sans nul doute remarqué, bien d'autres développements sont possibles, plusieurs sujets n'ayant été qu'effleurés. Nous allons maintenant, en guise de conclusion, tenter d'en recenser quelques-uns, tout en gardant à l'esprit qu'une telle liste ne saurait être exhaustive. Ce qui nous amène, tout naturellement, à nous préoccuper de la généralisation de la théorie précédemment exposée, aux multigraphes. De manière informelle, les multigraphes (respectivement les multigraphes orientés) peuvent être assimilés à des graphes (respectivement à des graphes orientés) pouvant admettre à la fois boucles et arêtes multiples. Il nous suffit donc d'être en mesure d'adapter les calculs de groupes d'homologie à de tels graphes. Ajoutons à ce propos qu'il nous semble que les méthodes, développées par KACZYNSKI, MROZEK ET SLUSAREK [6], permettent une généralisation quasi-immédiate, aux multigraphes, des calculs des groupes d'homologie. De plus, obtenir dans ce cas un théorème similaire à 2.4.3 dans notre mémoire, ne nous paraît pas présenter beaucoup de difficultés. Cela rendrait alors possible l'élaboration de techniques de détection d'ensembles d'articulation analogues à celles du chapitre trois.

Nous aurions aussi pu porter notre intérêt sur la proposition 3.4.10 afin d'essayer d'obtenir un résultat encore plus profond. Cependant la réciproque de la précédente proposition n'est malheureusement pas exacte, comme peut en témoigner l'exemple fourni par les deux figures de la page suivante. Les graphes représentés respectivement par les figures 1 et 2, possèdent des équations quadratiques associées équivalentes, mais ne sont clairement pas isomorphes. Un problème intéressant pourrait consister à rechercher les conditions supplémentaires qu'il faudrait imposer aux graphes, afin de parvenir à la formulation d'une condition suffisante à l'existence d'un isomorphisme de graphes. Nous pourrions également considérer la conjecture suivante, qui nous semble digne d'intérêt car elle nous fournirait non seulement une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un isomorphisme de graphes, ce qui est plutôt rare, mais constituerait également une nouvelle

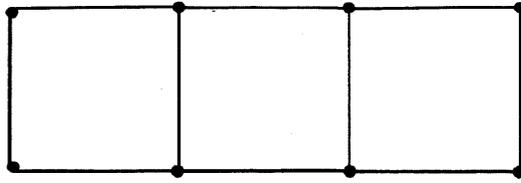


Figure 1.

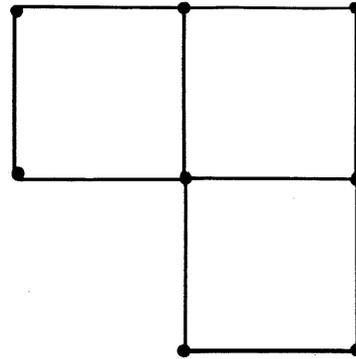


Figure 2.

approche du problème d'isomorphisme de graphes en informatique. Le lecteur intéressé par ce sujet est invité à consulter l'écrit de BOOTH et COLBOURN [2]. Mais auparavant, il nous faut définir ce que nous entendons par graphe complémentaire.

**Définition :**

Soit  $G = (X, A)$ , un graphe simple. Le graphe, noté  $G^c = (X, A^c)$  et appelé *graphe complémentaire de  $G$* , est simplement donné par  $A^c = \mathbb{P}_2(X) \setminus A$ .

**Conjecture :**

Soit  $G$  et  $G'$ , deux graphes simples connexes, sans isthme. Est-il vrai que si  $EQ_G$  et  $EQ_{G'}$  sont équivalentes de même que  $EQ_{G^c}$  et  $EQ_{G'^c}$ , alors  $G$  et  $G'$  sont isomorphes?

Puisque nous avons déjà évoqué un problème relié au domaine de l'informatique, mentionnons qu'il est possible de produire un algorithme à partir du théorème 3.2.5 et par conséquent, de s'intéresser à la performance de ce dernier. En effet, la dimension de  $KER I_x$ , qui conditionne le temps de résolution du problème par un ordinateur, dépend du nombre de cycles élémentaires de base contenant le sommet  $x$  donc, essentiellement du degré de  $x$ . Or dans la pratique, beaucoup de graphes, comme ceux représentant des réseaux électriques ou téléphoniques par exemple, comportent un grand nombre de sommets dont le degré n'est généralement pas élevé. L'avantage d'une telle manière de procéder commence à

devenir évident lorsque le nombre de points d'articulation à identifier est important. Nous devons signaler que KACZYNSKI et al. [6] ont montré dans leur article que le temps calcul du premier groupe d'homologie d'un graphe, qui est un coût fixe de notre algorithme, est une fonction du type  $n \log n$ , où  $n$  représente la taille du graphe. Le même raisonnement tient également si nous désirons considérer des ensembles d'articulation dont la taille n'est pas trop importante.

Pour terminer, indiquons qu'à notre avis, des résultats, comme le célèbre théorème de Lefschetz concernant les points fixes d'applications continues sur des polyèdres, pourraient trouver d'assez heureuses applications en théorie des graphes.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTHOLD (G.) et al., Petite encyclopédie des mathématiques (VEB Bibliographisches Institut, Leipzig, 1980).
  
- [2] BOOTH (K. S.) et COLBOURN (C. J.), Problems Polynomially Equivalent to Graph Isomorphism, (manuscrit).
  
- [3] BOURBAKI (N.), Algèbre, chap. IX, (Hermann, Paris, 1959).
  
- [4] CHUNG (F. R. K.), GODDARD (W.) et KLEITMAN (D. J.), Even Cycles in Directed Graphs, Siam J. Discrete Math., vol.7, No 3 (1994) pp. 474-483.
  
- [5] GODEMENT (R.), Cours d'algèbre (Hermann, Paris, 1966).
  
- [6] KACZYNSKI (T.), MROZEK (M.) et SLUSAREK (M.), Homology Computation by Reduction of Chain Complexes (à paraître).
  
- [7] MASSEY (W. S.), A Basic Course in Algebraic Topology (Springer-Verlag, New-York, 1991).
  
- [8] ORE (O.), Graphs and their uses (Mathematical Association of America, Washington, 1963)
  
- [9] SACHE (A.), La théorie des graphes (Presses Universitaires de France, Paris, 1974).
  
- [10] SERRE (J.-P.), Cours d'arithmétique (Presses Universitaires de France, Paris, 1977).
  
- [11] VAN DEN HEUVEL (J.), Hamilton cycles and eigenvalues of graphs, Linear Algebra Appl., 226/228 (1995) pp. 723-730.