

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Faculté de génie  
Département de génie mécanique

CONTRÔLE DE L'ÉPAISSEUR DE GELÉE  
DANS LES RÉACTEURS  
MÉTALLURGIQUES À HAUTE  
TEMPÉRATURE À L'AIDE D'UN  
CAPTEUR VIRTUEL

Thèse de doctorat  
Spécialité : génie mécanique

Marc LEBREUX

Jury : Martin DÉSILETS (directeur)  
Marcel LACROIX (co-directeur)  
Philippe MICHEAU  
Bernard MARCOS  
Olivier BALIMA

Sherbrooke (Québec) Canada

Septembre 2011

IV-2175



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Your file Votre référence  
ISBN: 978-0-494-83324-7

Our file Notre référence  
ISBN: 978-0-494-83324-7

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

# Canada

À la Vie avec un grand V. Et aux cheveux  
que j'ai perdus pendant mon doctorat!

# RÉSUMÉ

Au Québec, les producteurs d'aluminium consomment 12% de la puissance totale installée d'Hydro-Québec. Dans un contexte où le prix de l'énergie est en constante progression, les alumineries font donc face à des défis énergétiques de taille ; de plus, la production d'émissions de gaz à effet de serre étant directement reliée à la consommation d'énergie, des défis environnementaux importants s'annoncent pour le futur. Pour répondre à ces défis, une des avenues envisagées concerne la couche de gelée qui est présente dans chacune des cuves d'électrolyse d'aluminium. La couche de gelée a une importance capitale dans le procédé de fabrication d'aluminium, car elle sert de barrière protectrice aux parois réfractaires contre le bain électrolytique très corrosif à haute température. Elle permet également de minimiser les courants horizontaux à l'intérieur de la cuve, ce qui assure sa stabilité magnéto-hydrodynamique et permet d'optimiser l'efficacité de courant du procédé. La méthode traditionnelle pour mesurer le profil de gelée dans une cuve se fait manuellement à l'aide d'une sonde mécanique, mais cette opération nécessite beaucoup de temps ainsi que du personnel qualifié. De plus, ces mesures sont réalisées à une faible fréquence, et nécessitent l'ouverture du capot, ce qui libère beaucoup de chaleur et d'émissions chimiques dans l'atmosphère. Pour pallier aux désavantages de la méthode traditionnelle, ce travail présente le développement d'une méthode inverse (capteur virtuel) qui permet d'estimer en continu, et de manière non-intrusive, l'épaisseur de gelée à partir de mesures thermiques (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve d'électrolyse. Le capteur virtuel est composé d'un filtre de Kalman et d'un estimateur récursif aux moindres-carrés, et il est combiné à une procédure d'identification du procédé en modèles d'état. Cette approche est appliquée pour la première fois dans la résolution d'un problème inverse avec changement de phase et en utilisant des capteurs de flux de chaleur. Parce que pour les alumineries, l'intérêt et le réel défi consistent plutôt à contrôler l'épaisseur de gelée, le capteur virtuel est ensuite combiné à un algorithme de contrôle qui régule le système de refroidissement des parois latérales de la cuve d'électrolyse. Ceci permet alors de contrôler à sa guise l'épaisseur de gelée malgré les perturbations thermiques inhérentes au procédé. La stratégie de contrôle retenue consiste en un contrôleur classique proportionnel-intégral-dérivatif, largement utilisé en industrie. Le capteur virtuel et l'algorithme de contrôle sont ensuite validés pour des conditions d'opérations typiques présentes dans les réacteurs métallurgiques à haute température. Les résultats montrent que la différence entre l'épaisseur réelle de gelée et celle prédite avec le capteur virtuel demeure dans tous les cas inférieure à 5%, tandis que la stratégie de contrôle demeure stable pour chacune des conditions d'opération, assure une erreur nulle en régime permanent ainsi qu'aucun dépassement de consigne, et procure une erreur maximale de  $1 \times 10^{-3}$  m sur le suivi de la consigne de l'épaisseur de gelée. Pour répondre simultanément à la problématique d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée, le présent travail nécessite donc la combinaison de plusieurs domaines traditionnellement séparés (modélisation, transfert de chaleur, identification, méthodes inverses, contrôle) et cette procédure est appliquée pour la première fois dans le procédé d'électrolyse d'aluminium.

**Mots-clés :** Réacteur métallurgique, gelée, capteur virtuel, méthode inverse, contrôle, PID, filtre de Kalman, estimateur récursif aux moindres-carrés.

# REMERCIEMENTS

Mes sincères remerciements à Martin Désilets et Marcel Lacroix pour m’avoir fait profiter de votre expérience et de m’avoir enseigné les rouages de la *game*... Merci également pour toute la liberté accordée durant la durée du projet ; c’est très utile avec un bébé ! Merci également pour toute la reconnaissance donnée à mon travail, ainsi qu’aux nombreuses discussions enrichissantes qui insufflent un élan de momentum dans le projet de thèse. Merci aussi pour ta plume Marcel, et Martin pour les bonnes questions, dans le genre celles qui t’empêche de passer des *tites vite* ! Merci également pour toutes, et je dis bien toutes, les lettres de recommandation que je vous ai demandées durant mon doctorat.

D’autres chaleureux remerciements à Philippe Micheau pour d’autres discussions du type *crash course* à son bureau, de même que pour le meilleur cours à vie que j’ai suivi dans une université, i.e. compléments de mécatronique. Un cours qui fait avancer ta thèse pour vrai, pas seulement faire des problèmes pour le plaisir d’en faire. Un grand merci.

Merci également à Bernard Marcos et Olivier Balima d’avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour leurs bonnes suggestions concernant la thèse.

Merci aussi à mes collègues : Marc-André Marois pour les dîners “pizza jasons méthodes inverses” ainsi que pour les nombreuses idées d’articles, à Clément Bertrand pour le conseil du *Shame of Gaslamp Quarter* de San Diego et pour les discussions post-vie après le doc, et à Jean-Sébastien Savard pour parler d’identification et de fonctions de transfert entre deux baignades. Merci aussi à Philippe-Aubert Gauthier pour parler de choses discrètes et donc pas continues, et pour le bonheur que j’ai ressenti la journée où j’ai enfin trouvé quelqu’un qui parlait le même langage que moi ! Et merci à Nicolas Quaegebeur pour le principe de superposition, ainsi que tous les logiciels open source.

Merci également à tout mon groupe de musique les Voyageurs Nus : Mattéo, Johnny, Martin, Steve, Nico, et Elisabeth, avec qui la thèse n’aurait jamais été aussi agréable. Que dire des voyages et des dégustations de bières ! Merci aussi à mes amis POG : Ouell et D.Rob.D International avec qui les *hits* foisonnent au studio.

Merci à ma mère, mon père, pour les nombreuses félicitations et encouragements relativement aux études. Merci aussi pour les nombreux déménagements et les judicieux placements qui évitent de payer des prêts étudiants pendant 15 ans ! Merci à mon frère John et son dernier cadeau de Noël, une édition rare d’un vieux bouquin de thermodynamique. Merci à ma soeur Stéphanie pour les leçons de français, ainsi que pour les inspirations brésilienne et cubaine.

Et finalement merci aux deux femmes de ma vie : Stéphanie la lionne W.O.W, et Kaïla le petit ange descendu droit du ciel. Stéphanie, merci pour écouter chacune de mes présentations avant de les faire devant public ; tu es mon meilleur public ! Merci aussi pour me calmer lorsque ma tête surchauffe, et de me rappeler que les ordinateurs ne sont pas des personnes. Kaïla, merci d’avoir fait tes nuits tôt, comme ça Papa n’était pas fatigué lorsque qu’il programmait les méthodes inverses. Merci aussi à toutes les randonnées de

poussette que l'on a faites ensemble au Lac Bowker et où j'ai trouvé mes meilleures idées. Merci de me faire connaître l'essence de la Vie. Je vous aime tendrement.

Parce que l'argent mène le monde, je ne voudrais passer sous silence les contributeurs financiers du présent projet de recherche : le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT), le Centre québécois de recherche et de développement de l'aluminium (CQRDA), le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG), et le Fonds québécois de recherche sur la nature et les technologies par l'intermédiaire du Centre de recherche sur l'aluminium (RÉGAL).

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1	Mise en contexte . . . . .	1
1.2	Définition du projet de recherche . . . . .	5
1.3	Objectifs du projet de recherche . . . . .	5
1.4	Contributions originales . . . . .	8
1.5	Plan du document . . . . .	10
<b>2</b>	<b>ÉTAT DE L'ART</b>	<b>13</b>
2.1	Gelée dans le procédé d'électrolyse d'aluminium . . . . .	13
2.2	Méthodes inverses (capteurs virtuels) . . . . .	17
2.3	Contrôle . . . . .	20
<b>3</b>	<b>MÉTHODE INVERSE (CAPTEUR VIRTUEL)</b>	<b>23</b>
	Avant-propos . . . . .	23
	Title . . . . .	24
	Abstract . . . . .	24
	Keywords . . . . .	25
	Nomenclature . . . . .	25
3.1	Introduction . . . . .	28
3.2	Finite difference model of the melting/solidification problem . . . . .	30
3.3	State-space identification of the finite difference model . . . . .	34
3.4	The inverse method . . . . .	38
3.5	Results and discussion . . . . .	42
3.6	Concluding remarks . . . . .	48
3.7	Acknowledgements . . . . .	49
<b>4</b>	<b>CONTRÔLE</b>	<b>51</b>
	Avant-propos . . . . .	51
	Title . . . . .	52
	Abstract . . . . .	52
	Keywords . . . . .	53
	Nomenclature . . . . .	53
4.1	Introduction . . . . .	56
4.2	Finite difference model (FDM) of the reactor . . . . .	59
4.3	State-space identification of the reactor . . . . .	63
4.4	Inverse method for estimating the ledge thickness . . . . .	65
4.5	Transfer function identification of the reactor and the virtual sensor . . . . .	70
4.6	Control of the ledge thickness in the Laplace domain . . . . .	71
4.7	Control of the ledge thickness using a virtual sensor . . . . .	77
4.8	Concluding Remarks . . . . .	80
4.9	Acknowledgements . . . . .	81



<b>5 CONCLUSION</b>	<b>83</b>
5.1 Sommaire . . . . .	83
5.2 Contributions . . . . .	84
5.3 Travaux futurs . . . . .	85
<b>A Modèle direct</b>	<b>89</b>
<b>B Modèles d'état</b>	<b>93</b>
B.1 Modèles d'état du chapitre 3 . . . . .	93
B.1.1 Modèle $Y(x,t)$ : capteur de température à $x=0$ . . . . .	93
B.1.2 Modèle $s(t)$ . . . . .	94
B.2 Modèles d'état du chapitre 4 . . . . .	95
B.2.1 Modèle $Y(x,t)$ : capteur de flux de chaleur à $x=L$ . . . . .	95
B.2.2 Modèle $s(t)$ . . . . .	95
B.3 Remarques . . . . .	96
<b>C Méthode inverse (capteur virtuel)</b>	<b>97</b>
C.1 Le filtre de Kalman . . . . .	97
C.2 L'estimateur récursif aux moindres-carrés . . . . .	98
<b>D Contributions scientifiques du présent projet de recherche</b>	<b>103</b>
D.1 Publications dans les journaux avec comité de lecture . . . . .	103
D.2 Actes de colloques avec comité de lecture . . . . .	103
D.3 Autres contributions sans comité de lecture . . . . .	103
<b>LISTE DES RÉFÉRENCES</b>	<b>105</b>

# LISTE DES FIGURES

1.1	Une cellule d'électrolyse d'aluminium. . . . .	3
1.2	Sonde mécanique utilisée pour la mesure du profil de gelée [19]. . . . .	4
1.3	Représentation 1D du problème de changement de phase dans une cellule d'électrolyse. . . . .	6
1.4	Représentation schématique du système de refroidissement des parois latérales utilisés sur les cuves d'électrolyse. . . . .	7
1.5	Le contrôle de l'épaisseur de gelée en utilisant un capteur virtuel ; à partir des mesures de température et/ou de flux de chaleur $Y(x, t)$ qui sont teintées d'un bruit de mesure $v(t)$ , le capteur virtuel estime l'épaisseur de la gelée $\hat{s}(t)$ . À partir de la différence $e(t)$ entre l'estimation $\hat{s}(t)$ et la consigne $r(t)$ , le contrôleur calcule le refroidissement $h(t)$ nécessaire afin de maintenir continuellement l'épaisseur de gelée désirée $r(t)$ , et ce malgré les variations inconnues du flux de chaleur $q''_{in}(t)$ à l'intérieur de la cuve d'électrolyse. . . . .	7
1.6	Méthodologie complète pour effectuer le contrôle de l'épaisseur de gelée dans un réacteur métallurgique à haute température à l'aide d'un capteur virtuel. . . . .	9
1.7	La combinaison de différents domaines est nécessaire pour répondre à la problématique d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée. . . . .	11
3.1	Cross-view of a typical high temperature furnace with molten material and protective banks. . . . .	29
3.2	Schematic of a melting furnace. . . . .	29
3.3	Overall calculation procedure. . . . .	31
3.4	Comparison of the FDM with the numerical results of Voller [125] as applied to the solidification of the binary Al-4.5% Cu alloy. . . . .	33
3.5	The state-space identification procedure. . . . .	36
3.6	$q''_{in}(t)$ and $h(t)$ used for the FDM and the state-space identification procedure. . . . .	38
3.7	FDM versus the state-space models. . . . .	38
3.8	The inverse method ; a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator (RLSE). . . . .	39
3.9	Predicted (inverse method) and exact (FDM) input heat flux for test case #1. . . . .	45
3.10	Predicted (inverse method) and exact (FDM) bank thickness for test case #1. . . . .	45
3.11	Effect of $\sigma_R$ on the predicted bank thickness (case #2). . . . .	46
3.12	Effect of the location of the temperature sensor on the predicted bank thickness (case #3). . . . .	47
3.13	Effect of the location of the heat flux sensor on the predicted bank thickness (case #4). . . . .	48
3.14	Effect of $s_0$ on the predicted bank thickness variation $\delta s(t) = s_0 - s(t)$ (case #5). . . . .	48

4.1	Cross view of a typical aluminum electrolysis cell with molten material (electrolyte) and protective ledge. . . . .	57
4.2	Schematic of a 1-D phase change problem inside a high temperature metallurgical reactor. . . . .	58
4.3	Overall calculation procedure. . . . .	60
4.4	The state-space identification procedure. . . . .	65
4.5	The inverse method : a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator and a state-space model. It acts as a virtual sensor for estimating the ledge thickness. . . . .	66
4.6	The ledge thickness calculation is done in the Laplace domain with the use of the transfer functions $G(s)$ and $F(s)$ . . . . .	70
4.7	The transfer function identification procedure. . . . .	71
4.8	The control of the ledge thickness using a feedback loop in the Laplace domain. . . . .	72
4.9	Control of the ledge thickness using the PI-PID controllers. . . . .	74
4.10	Nichols chart of the open-loop function $L(s) = K(s)G(s)$ . . . . .	76
4.11	Bode diagram of the sensitivity function $S(s) = [1 + K(s)G(s)]^{-1}$ . . . . .	77
4.12	Control of the ledge thickness using a PID controller when structured uncertainties are included in the transfer functions $G(s)$ and $F(s)$ . . . . .	78
4.13	Control of the ledge thickness in metallurgical reactor using a virtual sensor. . . . .	78
4.14	Control of the ledge thickness using a virtual sensor. . . . .	79
A.1	Notation employée pour la discrétisation. . . . .	90
A.2	Notation employée pour la condition aux frontières à $x=0$ . . . . .	90
A.3	Notation employée pour la condition aux frontières à $x=L+D$ . . . . .	90
C.1	La méthode inverse ; un filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés (RLSE). . . . .	97

# LISTE DES TABLEAUX

1.1	Consommation énergétique et émissions de GES du Canada en 2008 [2]. . .	1
1.2	Les différentes alumineries au Québec [90]. . . . .	2
1.3	La puissance installée d'Hydro-Québec en 2010 [3]. . . . .	2
2.1	Études sur la modélisation de la gelée dans le procédé d'électrolyse d'aluminium. . . . .	13
2.2	Études sur la gelée qui incluent le changement de phase. . . . .	15
2.3	La classification des méthodes inverses disponibles . . . . .	18
2.4	Études sur la prédiction de l'épaisseur de gelée, ou des bancs, dans les réacteurs métallurgiques en utilisant des méthodes inverses. . . . .	18
2.5	Études sur les méthodes d'estimation en temps réel. . . . .	19
2.6	Études sur les systèmes de refroidissement des cuves d'électrolyse. . . . .	20
2.7	Études sur les stratégies de contrôle appliquées aux procédés thermiques. . . . .	22
3.1	Physical properties of the binary Al-4.5% Cu alloy [125]. . . . .	34
3.2	Physical properties of the brick wall and of the PCM. . . . .	34
3.3	Parameters for the inverse method. . . . .	43
3.4	Main results. . . . .	44
4.1	Physical properties of the brick wall and of the PCM for a typical high temperature metallurgical reactor [116, 126]. . . . .	63
4.2	Parameters for the inverse method [79]. . . . .	69
5.1	Limitations du projet de doctorat et solutions proposées dans le cadre du projet de postdoc. . . . .	87
A.1	Le coefficient $a_E$ pour les différents noeuds. . . . .	91
A.2	Le coefficient $a_W$ pour les différents noeuds. . . . .	91
A.3	Le coefficient $a_P^0$ pour les différents noeuds. . . . .	91
A.4	Le coefficient $a_P$ pour les différents noeuds. . . . .	91
A.5	Le coefficient $b$ pour les différents noeuds. . . . .	91
A.6	La dérivée $dF/dT$ et la fonction inverse $F^{-1}(f)$ selon la température. . . . .	92



# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Mise en contexte

En 2008, la consommation énergétique totale du Canada s'élevait à 8720 PJ (1 PJ = 10<sup>15</sup> J) où 3237 PJ étaient utilisées par le secteur industriel. Pendant ce temps, les émissions totales de gaz à effet de serre (GES) qui contribuent fortement au réchauffement climatique, incluant celles liées à l'électricité, étaient de 488 mégatonnes d'équivalent de dioxyde de carbone (Mt éq. CO<sub>2</sub>) pour le pays dont 154 Mt éq. CO<sub>2</sub> étaient attribuées seulement au niveau industriel. Le tableau 1.1 montre pour sa part la consommation énergétique ainsi que la production de GES reliées à la production primaire d'alumine et d'aluminium. Il est possible d'y remarquer que ce secteur consomme à lui seul 6% de la consommation énergétique industrielle canadienne et émet par le fait même 7% des GES provenant du milieu industriel [2].

Tableau 1.1 Consommation énergétique et émissions de GES du Canada en 2008 [2].

Provenance	Énergie [PJ]	GES [Mt éq. CO <sub>2</sub> ]
Total canadien	8720	488
Secteur industriel	3237	154
Production primaire d'alumine et d'aluminium	202	11

Au niveau de la production mondiale primaire d'aluminium, en 2009 le Canada se retrouvait au 3<sup>e</sup> rang avec 3 Mt/année derrière la Chine (12.9 Mt/année) et la Russie (3.8 Mt/année) [25]. Les alumineries canadiennes sont d'ailleurs toutes situées au Québec à l'exception de celle de Kitimat, localisée en Colombie Britannique. Elles sont présentées avec leur production annuelle d'aluminium respective au tableau 1.2.

Avec le procédé d'électrolyse, il faut environ 13,5 kWh d'énergie électrique pour produire 1 kg d'aluminium [54]. En effectuant le simple calcul ci-dessous, il est très facile de démontrer que les alumineries québécoises sont de grandes consommatrices d'électricité.

$$2\,787\,000 \frac{\text{tonne}}{\text{année}} \times 13.5 \frac{\text{MWh}}{\text{tonne}} \times \frac{\text{année}}{8760\text{h}} = 4295 \text{ MW} \quad (1.1)$$

Tableau 1.2 Les différentes alumineries au Québec [90].

<b>Aluminerie</b>	<b>Compagnie</b>	<b>Production [t/année]</b>
Bécancour	Alcoa et Rio Tinto Alcan	413 000
Shawinigan	Rio Tinto Alcan	100 000
Lauralco Deschambault	Alcoa	260 000
Grande-Baie	Rio Tinto Alcan	215 000
Laterrière	Rio Tinto Alcan	235 000
Alma	Rio Tinto Alcan	435 000
Arvida Jonquièrre	Rio Tinto Alcan	172 000
Baie-Comeau	Alcoa	385 000
Sept-Iles	Alouette	572 000
Production totale		2 787 000

En comparant cette puissance aux chiffres d'Hydro-Québec (voir Tableau 1.3), les alumineries québécoises utilisent 12% de la puissance totale installée au Québec. D'ailleurs, la quantité de 4295 MW est du même ordre de grandeur que la production du barrage Robert-Bourassa, le plus grand barrage québécois avec une capacité de 5616 MW [3]. En termes plus concrets, en considérant que chaque résidence consomme en moyenne 5 kW, la consommation électrique des alumineries québécoises correspond alors à une consommation normale d'électricité d'environ 860 000 résidences [36].

Tableau 1.3 La puissance installée d'Hydro-Québec en 2010 [3].

<b>Source</b>	<b>Puissance [MW]</b>
Centrales hydroélectriques	34 490
Centrale nucléaire	675
Centrales thermiques classiques	1506
Parc éolien	2
Puissance totale	36 671

Dans un contexte où le prix de l'énergie est en constante progression, les alumineries font donc face à des défis énergétiques de taille; de plus, la production de GES étant directement reliée à la consommation d'énergie, des défis environnementaux importants s'annoncent pour le futur. Dans cette optique, le International Aluminium Institute (IAI) a produit un rapport encourageant les entreprises oeuvrant dans le secteur de l'aluminium à améliorer leurs pratiques [1]. Ce document consiste en 13 objectifs volontaires, couvrant toutes les phases reliées au cycle de vie de l'aluminium, dont les plus intéressants sont présentés ici :

- Atteindre en 2010 *vs* 1990, une réduction de 80% des émissions de gaz perfluorocarbonés ( $\text{CF}_4$ ,  $\text{C}_2\text{F}_6$ ) par tonne d'aluminium produite

- Atteindre en 2010 *vs* 1990, une réduction minimale de 33% des émissions de fluorures par tonne d'aluminium produite
- Atteindre en 2010 *vs* 1990, une réduction de 10% de la consommation moyenne d'énergie utilisée pour l'électrolyse de l'aluminium par tonne d'aluminium produite

Pour répondre à ces défis, une des avenues envisagées concerne la couche de gelée qui est présente dans chacune des cuves d'électrolyse d'aluminium (Figure 1.1). Cette couche de gelée, régie par un équilibre de phase entre l'électrolyte liquide et solide, est rendue possible par une dissipation thermique importante des parois ; environ 35% de la chaleur totale dissipée par la cuve [27]. À cet endroit, le transfert de chaleur a une importance capitale, car il dicte le profil de la couche de gelée. Cette couche de gelée sert de barrière protectrice aux parois réfractaires de la cuve contre le bain électrolytique très corrosif à haute température (970 °C).

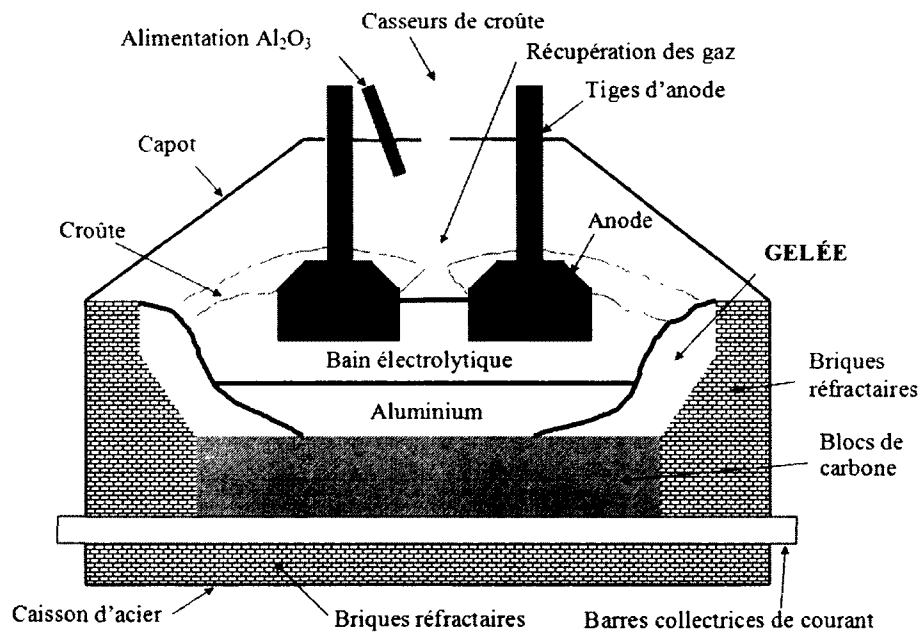


Figure 1.1 Une cellule d'électrolyse d'aluminium.

Selon plusieurs autopsies de cuves, l'absence de gelée conduit à un vieillissement prématuré des cellules d'électrolyse [96, 119]. En effet, alors que la durée de vie moyenne d'une cuve d'électrolyse est d'environ 2000 jours, certaines doivent être remplacées après quelques centaines de jours lorsqu'elles sont opérées avec une trop faible épaisseur de gelée. Par contre, si l'épaisseur de gelée est trop épaisse, il y a une partie du bloc cathodique qui devient isolée électriquement, ce qui génère des courants horizontaux dans la couche d'aluminium. Ceux-ci augmentent alors la consommation énergétique du procédé et diminuent



l'efficacité de courant (ratio du courant électrique ayant produit de l'aluminium par rapport au courant réel circulant dans la cuve), ce qui se traduit par des augmentations du coût de production de l'aluminium et les émissions de GES [54, 96]. Les courants horizontaux causent également un mouvement de la nappe de métal qui augmente les coefficients d'échange thermique entre le bain liquide et la gelée, entraîne du même coup la diminution de l'épaisseur de gelée. Par conséquent, pour la fonctionnement sécuritaire et profitable de la cellule d'électrolyse, il est crucial d'assurer une épaisseur de gelée optimale.

Malheureusement, de par le milieu de mesure très hostile qui sévit à l'intérieur de la cuve (corrosif, haute température), il est très difficile, voire impossible, de mesurer l'épaisseur de gelée à l'aide de capteurs submergés dans le bain électrolytique. La méthode actuelle pour mesurer l'épaisseur de gelée consiste à mesurer le profil manuellement avec une sonde mécanique [121], semblable à celle présentée à la Figure 1.2 [19]. Cette méthode comporte un lot de désavantages; les mesures sont obtenues à une basse fréquence et demandent beaucoup de temps ainsi que du personnel qualifié. Ceci engendre alors des coûts d'opération élevés. De plus, cette méthode nécessite l'ouverture du capot de la cuve, ce qui libère beaucoup de chaleur et d'émissions chimiques (gaz fluorés) [21]. Ces mesures ne sont donc pas idéales, ni efficaces, ce qui est paradoxal vu l'importance qui est accordée à la gelée [96, 119].

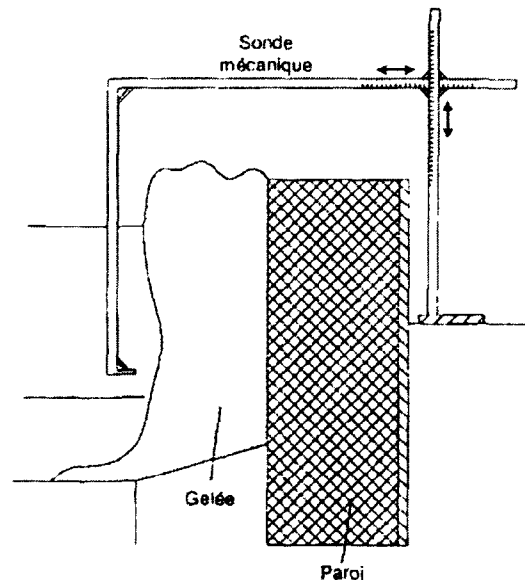


Figure 1.2 Sonde mécanique utilisée pour la mesure du profil de gelée [19].

Or, existerait-il un autre moyen de mesurer l'épaisseur de gelée et serait-ce possible de faire cette mesure en continu ?

## 1.2 Définition du projet de recherche

Une avenue envisagée concerne l'utilisation de méthodes inverses. La figure 1.3 présente la distinction entre les problèmes direct et inverse où la gelée correspond à la phase solide du matériau à changement de phase. Dans le problème direct (Figure 1.3 a), le flux de chaleur  $q''_{in}(t)$  à la frontière droite est connu. Celui-ci représente la puissance injectée à la cuve d'électrolyse. À la frontière gauche, qui représente le refroidissement des parois latérales, le coefficient de transfert de chaleur  $h(t)$  et la température du fluide de refroidissement  $T_{\infty}$  sont connus également. Le champ de température  $T(x, t)$ , de flux de chaleur  $q''(t)$ , et l'épaisseur de gelée  $s(t)$ , i.e. la position du front de solidification, sont déterminés en résolvant l'équation de conservation d'énergie. Dans le problème inverse (Figure 1.3 b), le flux de chaleur  $q''_{in}(t)$  à la frontière droite est par contre inconnu. À partir de mesures thermiques  $Y(x, t)$  (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve d'électrolyse ou à la surface de celle-ci, la méthode inverse permet de calculer le flux de chaleur inconnu  $q''(t)$  et par le fait même d'estimer l'épaisseur de gelée  $s(t)$ .

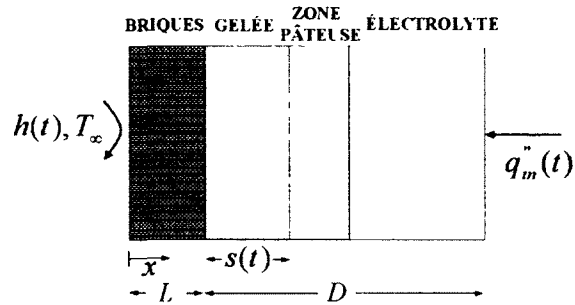
La méthode inverse estime donc en continu, et d'une manière non-intrusive, l'épaisseur de gelée. Cette approche est équivalente au concept de capteur virtuel [52]. À partir d'informations connues (mesures thermiques des capteurs), le capteur virtuel estime l'information inconnue (l'épaisseur de gelée).

Par ailleurs, dans un contexte industriel, l'intérêt, et surtout le défi, sont de contrôler en tout temps l'épaisseur de gelée. Or, en pratique, rien n'est fait pour y parvenir, car aucune mesure continue de l'épaisseur de gelée n'est disponible. Par conséquent, en combinant le capteur virtuel à un contrôleur qui régule le système de refroidissement des parois latérales de la cuve d'électrolyse (Figure 1.4) [81], il est possible de contrôler à sa guise l'épaisseur de gelée malgré les perturbations thermiques inhérentes au procédé (Figure 1.5).

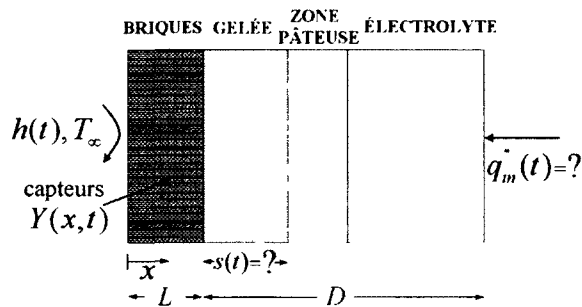
## 1.3 Objectifs du projet de recherche

Afin de répondre à la problématique industrielle entourant la mesure et le contrôle de l'épaisseur de gelée, les objectifs de recherche principaux de la présente thèse sont les suivants :

1. Développer un capteur virtuel qui estime en continu, et de manière non-intrusive, l'épaisseur de gelée à partir de mesures thermiques (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve d'électrolyse ;



(a) Problème direct :  $q_m''(t)$  et  $h(t)$  sont connus ;  $T(x, t)$ ,  $q''(x, t)$ , et  $s(t)$  sont prédits avec le modèle numérique aux différences finies.



(b) Problème inverse :  $q_m''(t)$  est inconnu. Il est déterminé à partir de à partir de mesures thermiques  $Y(x, t)$  (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés sur les parois extérieures de la cuve d'électrolyse. L'estimation du flux de chaleur  $q_m''(t)$  permet ensuite d'estimer l'épaisseur de gelée  $s(t)$  en utilisant le modèle direct

Figure 1.3 Représentation 1D du problème de changement de phase dans une cellule d'électrolyse.

2. Contrôler en continu l'épaisseur de gelée en combinant le capteur virtuel à une stratégie de contrôle du refroidissement des parois latérales de la cuve.

Dans le cadre de ce projet, des objectifs secondaires sont également nécessaires :

1. Modéliser numériquement le procédé d'électrolyse avec un modèle numérique direct ;
2. Identifier le modèle numérique direct en modèles d'état ;
3. Identifier le modèle numérique direct et le capteur virtuel en fonctions de transfert ;
4. Vérifier la performance, la stabilité et la robustesse de l'algorithme de contrôle.

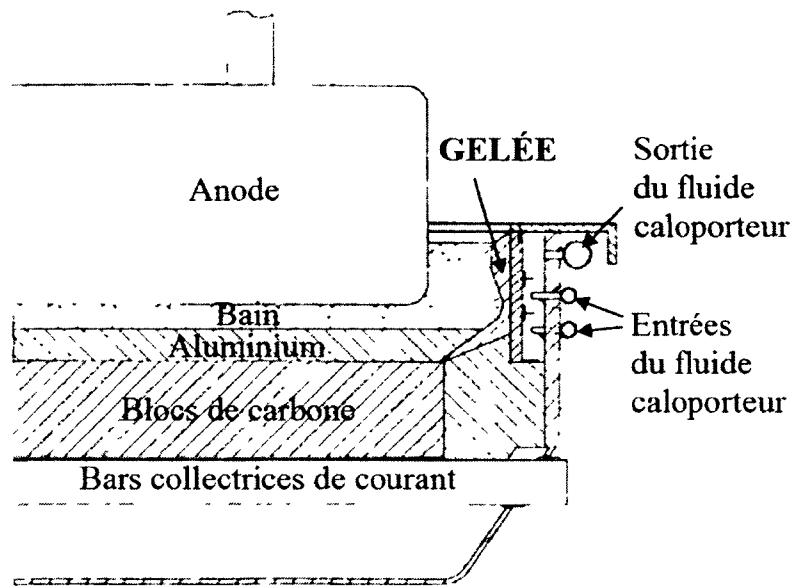


Figure 1.4 Représentation schématique du système de refroidissement des parois latérales utilisées sur les cuves d'électrolyse.

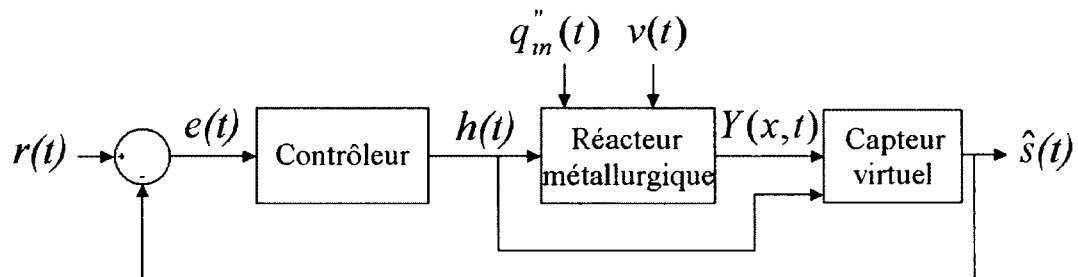


Figure 1.5 Le contrôle de l'épaisseur de gelée en utilisant un capteur virtuel ; à partir des mesures de température et/ou de flux de chaleur  $Y(x, t)$  qui sont teintées d'un bruit de mesure  $v(t)$ , le capteur virtuel estime l'épaisseur de la gelée  $\hat{s}(t)$ . À partir de la différence  $e(t)$  entre l'estimation  $\hat{s}(t)$  et la consigne  $r(t)$ , le contrôleur calcule le refroidissement  $h(t)$  nécessaire afin de maintenir continuellement l'épaisseur de gelée désirée  $r(t)$ , et ce malgré les variations inconnues du flux de chaleur  $q_m''(t)$  à l'intérieur de la cuve d'électrolyse.

Les objectifs de recherche de ce projet de doctorat peuvent être résumés par la figure 1.6, qui présente une méthodologie complète en six étapes pour effectuer le contrôle de l'épaisseur de gelée en utilisant un capteur virtuel. La **première étape** consiste à développer un modèle numérique aux différences finies (FDM) qui prédit le comportement non-linéaire du procédé de fusion/solidification à l'intérieur du réacteur métallurgique. En résolvant ce modèle, le champ de température  $T(x, t, q_m''(t), h(t))$ , de flux de chaleur  $q''(x, t, q_m''(t), h(t))$  et l'épaisseur de gelée  $s(t, q_m''(t), h(t))$  sont obtenus. La **deuxième étape** concerne l'iden-

tification du modèle numérique FDM en deux modèles d'état, le modèle  $Y(x, t)$  pour les mesures thermiques et le modèle  $s(t)$  pour l'épaisseur de gelée. La **troisième étape** présente la méthode inverse (capteur virtuel) qui consiste en un filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés et un modèle d'état. À partir de mesures thermiques  $Y(x, t)$  provenant de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve, le capteur virtuel estime l'épaisseur de gelée  $\hat{s}(t)$ . La **quatrième étape** montre l'identification du comportement thermique du réacteur et du capteur virtuel sous la forme de fonctions de transfert  $G(s)$  et  $F(s)$  dans le domaine de Laplace. La **cinquième étape** consiste à réaliser la boucle de contrôle classique dans le domaine de Laplace à l'aide des fonctions de transfert précédentes et à partir des analyses de performance, stabilité et robustesse, de proposer un design pour le contrôleur  $K(s)$  qui permet de contrôler l'épaisseur de gelée  $\hat{s}(t)$  malgré les perturbations thermiques  $d(s)$  du procédé. Finalement, la **sixième étape** consiste à utiliser le contrôleur précédent  $K(s)$  et de le combiner au capteur virtuel afin de contrôler en temps réel l'épaisseur de gelée  $\hat{s}(t)$  à l'intérieur du réacteur métallurgique, ici représenté par le modèle numérique FDM non-linéaire.

## 1.4 Contributions originales

Le présent projet de recherche, qui consiste à contrôler l'épaisseur de gelée dans les cellules d'électrolyse d'aluminium (réacteurs métallurgiques) en utilisant un capteur virtuel, est original sur plusieurs aspects. D'abord, le capteur virtuel permet une mesure en continu, contrairement aux mesures manuelles qui sont obtenues à une très basse fréquence (par exemple, 1 fois chaque 3 jours) et qui nécessite beaucoup de temps ainsi que du personnel qualifié. Le capteur virtuel est également une méthode de mesure non-intrusive, i.e. qu'il prédit l'épaisseur de gelée à l'intérieur de la cuve, mais à partir de mesures thermiques provenant de capteurs situés à l'extérieur de la cuve. Cette méthode de mesure ne nécessite donc pas l'ouverture du capot de la cuve, ce qui empêche la libération de beaucoup de chaleur et d'émissions chimiques (gaz fluorés), et pose des risques de santé et sécurité aux travailleurs. L'utilisation d'un capteur virtuel pour estimer l'épaisseur de gelée permet alors d'enrayer les désavantages associés à la méthode de mesure actuelle.

Par ailleurs, le capteur virtuel proposé, qui combine un filtre de Kalman et un estimateur récursif aux moindres-carrés, est appliqué pour la première fois dans la résolution d'un problème à changement de phase, et où les mesures thermiques peuvent provenir de capteurs de température et/ou flux de chaleur. Cette méthode s'avère très efficace en terme de rapidité de calcul, car elle utilise une représentation du procédé sous forme de modèles d'état, contrairement à une modélisation classique qui utilise normalement les dif-

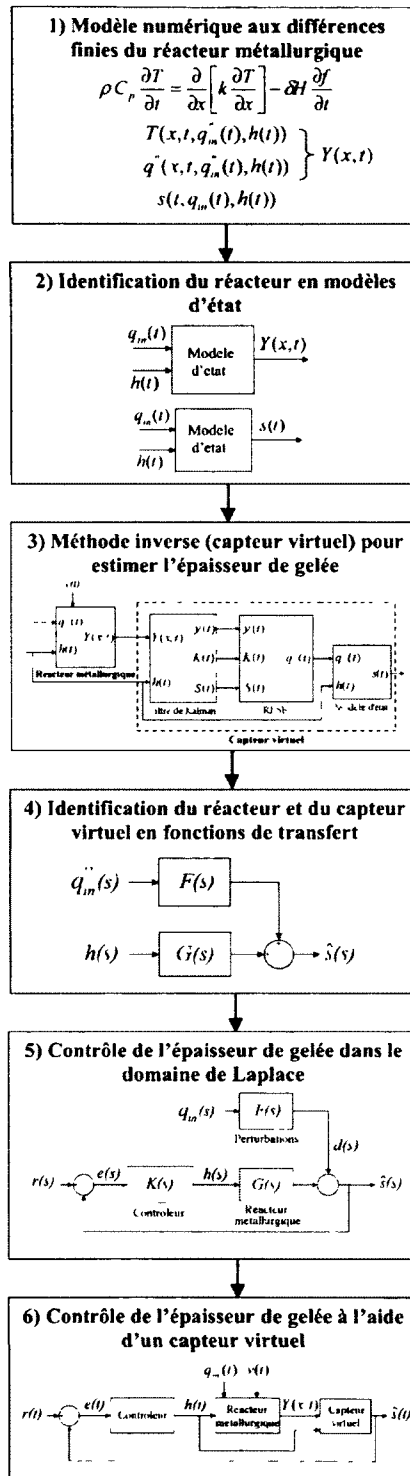


Figure 1.6 Méthodologie complète pour effectuer le contrôle de l'épaisseur de gelée dans un réacteur métallurgique à haute température à l'aide d'un capteur virtuel.

férences ou éléments finis. En utilisant les modèles d'état, le capteur virtuel fait appel au concept de réduction de modèle présenté dans les travaux de Petit [97], de Videcoq [124], de Newman [93], de Girault [50] et Balima [11]. À partir de la connaissance d'un modèle physique, la technique de réduction de modèle consiste à extraire un système d'ordre faible (modèle réduit), beaucoup plus simple et rapide à calculer, qui reproduit avec une précision acceptable le comportement du modèle original (modèle détaillé). La majorité des méthodes inverses utilisées pour résoudre des problèmes de changement de phase utilise la méthode du gradient conjugué où le gradient est obtenu par la méthode adjointe [11, 48]. Il s'avère que dans la plupart des cas, cette technique a recourt à un modèle détaillé pour résoudre le problème direct. Les résultats montrent que cette méthode devient de plus en plus gourmande en temps de calcul, à mesure que les temps de simulation et/ou le nombre de noeuds du système augmentent [17, 68]. Dans ces cas, l'utilisation des modèles réduits est une alternative intéressante.

À la connaissance de l'auteur, dans l'industrie de l'aluminium, l'utilisation d'un capteur virtuel pour prédire l'épaisseur de gelée n'a jamais été réalisée, de même que l'utilisation d'un système de contrôle du refroidissement des parois de la cuve pour contrôler explicitement l'épaisseur de gelée. Ainsi, malgré sa "supposée" importance capitale dans le procédé [96, 119], peu d'efforts ont été appliqués dans la mesure et le contrôle de la gelée. En contrôle de procédés, les producteurs d'aluminium semblent plutôt avoir mis leurs énergies au niveau du contrôle de l'alimentation en alumine, car cette opération est extrêmement importante pour le bon fonctionnement de la cellule d'électrolyse [22, 65, 88].

Finalement, tel que présenté à la Figure 1.7, pour répondre simultanément à la problématique d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée, la présente thèse nécessite la combinaison de plusieurs domaines, traditionnellement séparés : modélisation, transfert de chaleur, identification, méthodes inverses, contrôle. L'intégration de ces domaines en une procédure complète d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée (Figure 1.6) contribue une fois de plus à l'avancement technologique du procédé d'électrolyse d'aluminium.

## 1.5 Plan du document

Le présent document est divisé en cinq chapitres. Le deuxième chapitre traite de l'état de l'art qui a permis de cerner les limitations des travaux antérieurs et de dénicher plusieurs opportunités de recherche, permettant de déterminer les objectifs de ce projet. Le troisième chapitre expose le premier article publié dans le *International Journal of Heat and Mass Transfer* qui présente le capteur virtuel permettant d'estimer l'épaisseur de ge-

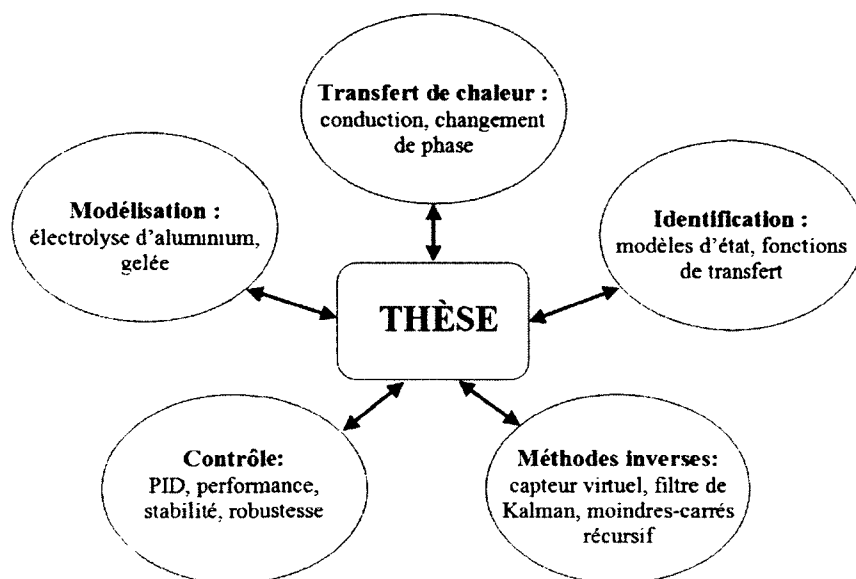


Figure 1.7 La combinaison de différents domaines est nécessaire pour répondre à la problématique d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée.

lée dans une cuve d'électrolyse à l'aide de mesures thermiques de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve. La procédure d'identification en modèles d'état, de même que l'algorithme utilisé, i.e. un filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés, y sont présentés. Le quatrième chapitre montre le deuxième article soumis au International Journal of Thermal Sciences qui consiste au contrôle de l'épaisseur de gelée dans une cuve d'électrolyse en utilisant le capteur virtuel proposé ainsi qu'un contrôleur classique proportionnel-intégral-dérivatif (PID). La procédure d'identification en fonctions de transfert, de même que les analyses de performance, de stabilité, et de robustesse y sont présentées aussi. Le cinquième et dernier chapitre présente quant à lui les conclusions et perspectives de ces travaux de recherche.





# CHAPITRE 2

## ÉTAT DE L'ART

### 2.1 Gelée dans le procédé d'électrolyse d'aluminium

Tel qu'il a été vu dans le chapitre précédent, la gelée a une importance capitale dans le procédé d'électrolyse d'aluminium. Cependant, étant donné que la cuve d'électrolyse est un environnement très hostile, très peu d'études sur le comportement de la gelée sont obtenues à partir de mesures industrielles. De surcroît, peu de données sont publiées à cause de la sensibilité des données, impératifs de propriété intellectuelle. La modélisation numérique est alors un outil très intéressant pour simuler la dynamique de la gelée selon différentes perturbations du procédé telles l'alimentation d'alumine, l'effet d'anode, le changement d'anode, le siphonnage du métal. Depuis les dernières décennies, la modélisation de la gelée a fait l'objet de plusieurs études (Tableau 2.1).

Tableau 2.1 Études sur la modélisation de la gelée dans le procédé d'électrolyse d'aluminium.

Référence	Auteurs	Régime	Méthode de calcul
[60]	Haupin (1971)	Permanent	Résistances thermiques 1D
[120]	Thonstad et coll. (1983)	Permanent	Résistances thermiques 1D
[59]	Haugland et coll. (2003)	Permanent	Résistances thermiques
[26]	Bruggeman et coll. (1990)	Permanent	Éléments finis 2D
[44]	Dupuis et Tabsh (1992)	Permanent	Éléments finis 3D
[41]	Dupuis (2000)	Permanent	Éléments finis 2D et 3D
[42]	Dupuis (2002)	Permanent	Éléments finis 3D
[43]	Dupuis et Bojarevics (2005)	Permanent	Éléments finis 3D
[74]	Kiss et Dassylva (2008)	Permanent	Éléments finis 2D
[119]	Taylor et coll. (1983)	Transitoire	Différences finies 1D

Le premier travail qui porte sur le comportement de la gelée est celui de Haupin en 1971 [60]. Il utilise le concept des résistances thermiques (régime permanent) en 1D afin de déterminer l'épaisseur de la gelée. Bien entendu, le désavantage majeur de son travail est qu'il ne tient pas en compte l'aspect transitoire et ne permet donc pas de suivre l'évolution temporelle de la gelée. Pourtant, tel que montré au tableau 2.1, plusieurs auteurs poursuivront dans cette même direction. En 1983, Taylor est le premier à traiter de l'aspect dynamique de la gelée en résolvant l'équation transitoire de conduction de chaleur [119]. Le changement de phase est pris en compte en retenant une chaleur massique dont la

valeur est augmentée à l'interface, et non par un terme latent. L'originalité des travaux de Taylor réside dans la question qu'il a adressée, i.e. est-il possible de prédire les paramètres du procédé pouvant amener la disparition complète de la gelée? Les résultats numériques et expérimentaux, concordant très bien entre eux, montrent que le surplus d'énergie causé par un effet d'anode fait fondre totalement la gelée, exposant ainsi la brique réfractaire aux dangers du bain électrolytique à haute température.

Concernant la prédiction de la gelée dans le procédé d'électrolyse, une autre école de pensée repose sur des simulations par éléments finis. À l'aide du logiciel ANSYS, Dupuis est le premier auteur à s'être intéressé au couplage thermo-électrique d'une cuve d'électrolyse dans le but de prédire le profil de la gelée [44]. Au fil des années, avec des ordinateurs de plus en plus puissants, le nombre de mailles de calcul a augmenté considérablement permettant de résoudre des domaines de calculs beaucoup plus complexes. Par exemple, Dupuis est passé d'un demi bloc cathodique en 1992 [44] à une cellule d'électrolyse complète en 2005 [43]. D'ailleurs, ce dernier travail a été le premier à coupler les aspects magnéto-thermo-électrique du procédé d'électrolyse, servant par le fait le même à la conception d'une cuve de 500 kA [43]. Le problème majeur dans ces simulations réside dans la lourdeur associée aux calculs. En effet, les simulations sont gourmandes en temps de calcul parce que le nombre de noeuds et la complexité du domaine de calcul sont très élevés, et parce que le couplage thermo-électrique ou magnéto-thermo-électrique nécessite la résolution d'un nombre plus élevé d'équations. Par conséquent, les gens s'en tiennent à des simulations en régime permanent, ce qui ne permet pas de suivre l'évolution temporelle de la gelée ni d'aucun processus de changement de phase.

Le tableau 2.1 permet donc de voir qu'un très faible nombre de travaux s'intéressent au comportement transitoire de la gelée. Ainsi, le changement de phase et la complexité supplémentaire lui étant associée sont omis. Les producteurs d'aluminium sont d'abord intéressés par des problématiques de design, pour lesquelles un modèle transitoire n'est pas nécessaire. Or, parce que le processus de formation de la gelée dans une cuve d'électrolyse correspond à un problème de fusion/solidification, le changement de phase doit être considéré. De plus, étant une solution plutôt qu'une substance pure, la gelée va subir un changement de phase non-isotherme délimité par les températures liquidus et solidus [40]. Le tableau suivant présente les études concernant la gelée qui incluent le changement de phase (Tableau 2.2), et montre que beaucoup moins d'études sont disponibles que dans le cas contraire (Tableau 2.1).

L'électrolyse de l'aluminium est un procédé multivariable couplant le transfert de chaleur, le transfert de masse, la magnétohydrodynamique, ainsi qu'un champ électriques. Des pro-

Tableau 2.2 Études sur la gelée qui incluent le changement de phase.

Référence	Auteurs	Méthode de calcul
[58]	Hashimoto et Ikeuchi (1979)	Différences finies 1D
[116]	Taylor (1984)	Différences finies 1D
[126]	Wei et coll. (1997)	Différences finies 1D
[72]	Kaseb et coll. (1997)	Différences finies 2D
[12]	Barantsev et coll. (2000)	Différences finies 1D
[99]	Romerio et coll. (2005)	Éléments finis 3D

blématiques thermo-électro-mécaniques, d'expansion thermique, de pression de contact, de résistance de contact, et de fissuration de matériaux sont également rencontrées. Par conséquent, la dynamique de la gelée est affectée par plusieurs éléments : Hashimoto discute de la résistance thermique de la cuve [58], Kaseb parle plutôt des conditions de refroidissement sur la paroi extérieure [72], tandis que Barantsev énonce qu'il faut tenir compte de la composition chimique et de la température du bain pour quantifier correctement la gelée [12]. Selon lui, le transfert de masse de l'alumine ( $Al_2O_3$ ) et du fluorure d'aluminium ( $AlF_3$ ) ne peut pas être dissocié de l'aspect thermique, car il influence grandement la température liquidus du bain électrolytique, qui est directement lié au transfert de chaleur dans la gelée. Toutefois avec un modèle numérique purement thermique, Taylor [116] et Wei [126] ont montré qu'il est possible de simuler un effet d'anode ou l'alimentation d'alumine en faisant varier simultanément la température liquidus et la température du bain selon un profil basé sur des mesures expérimentales [118].

La majorité des études provenant du tableau 2.2 utilisent dans leurs modèles numériques des conditions aux frontières de type convective dans le bain et la zone de métal. Cette condition est représentée par un coefficient de transfert de chaleur ainsi que par la température du bain électrolytique. Par le passé, la littérature regorgeait d'études démontrant que ces coefficients étaient très différents d'une étude à l'autre [8, 43, 60, 73, 117]. Les auteurs semblent toutefois s'entendre aujourd'hui sur une valeur de  $830 \text{ W/m}^2\text{K}$  pour le coefficient de transfert de chaleur au niveau du bain [73, 110, 126], valeur qui varie bien entendu selon les conditions opératoires et le design de la cuve, tandis qu'au niveau du métal, un consensus n'a toujours pas été atteint [43, 73, 109]. Malgré ces dires, Wei [126] conclut son étude en affirmant que le coefficient de transfert de chaleur du bain devrait être supérieure à  $830 \text{ W/m}^2\text{K}$  afin de représenter une dynamique de la gelée plus réaliste! Bref, une grande source d'incertitude réside toujours dans le choix des coefficients de transfert de chaleur, ce qui influencera évidemment les résultats provenant des simulations numériques.

Le travail de Romerio [99] permet quant à lui d'obtenir pour la première fois le profil de gelée en 3D sur toute la cuve. Cependant, malgré ce résultat intéressant, les simulations numériques magnéto-thermo-électriques 3D sont très gourmandes en temps de calcul et ne permettent pas l'application de ce modèle à un algorithme de contrôle en temps réel.

Dans cette optique, il a donc été décidé d'utiliser un modèle simple mathématique représentant bien la physique du procédé d'électrolyse. Pour ce faire, l'équation de conservation d'énergie est discrétisée avec la méthode des différences finies et le changement de phase est pris en compte grâce à la méthode enthalpique. Cette dernière a été retenue pour sa polyvalence, car elle permet d'effectuer facilement un changement de phase isotherme ou non-isotherme, tout en conservant la physique du problème. De plus, les schémas de discrétisation par différences finies sont bien connus, robustes et faciles à mettre en oeuvre [125]. Pour plus de détails concernant la résolution du problème direct, se reporter à l'annexe A.

Même si cela rendra impossible la prédiction complète du profil de la gelée, normalement considéré bidimensionnel, le problème étudié dans cette thèse sera unidimensionnel. Ceci est justifié, car les gradients thermiques sont beaucoup plus élevés à travers les parois de la cuve que dans les autres directions. En plus, l'utilisation d'un modèle 1D minimisera le temps de calcul associé à la résolution numérique. Par ailleurs, l'approximation unidimensionnelle est une fois de plus justifiée, car le modèle numérique sera utilisé à la zone de pincement ("pinch zone"), soit la zone située juste au dessus de l'interface entre le bain électrolytique et la zone de métal. La zone de pincement est la zone la plus à risque concernant l'érosion des parois réfractaires, parce que l'épaisseur de gelée atteint un minimum à cet endroit [87].

Pour ce qui est du coefficient de transfert de chaleur utilisé à la zone de pincement, étant donné la discordance et l'incertitude sur sa valeur, il a été décidé de s'en départir et de plutôt utiliser une condition aux frontières de type flux de chaleur telle que présentée à la figure 1.3. Le flux de chaleur  $q''_m(t)$  à cet endroit est influencé par les opérations effectuées sur les cuves telles l'alimentation en alumine, le changement d'anode, ou la variation de la distance anode-cathode (ACD) [54, 113, 119, 126]. Ces opérations correspondent donc à des perturbations thermiques du procédé d'électrolyse et peuvent être reliées au flux de chaleur  $q''_m(t)$  à partir de l'équation de conservation d'énergie [54].

## 2.2 Méthodes inverses (capteurs virtuels)

Comme il a été présenté à la section 1.2, le flux de chaleur  $q''_{in}(t)$  qui correspond aux perturbations thermiques du procédé est inconnu. Avec le modèle numérique du procédé d'électrolyse (modèle direct), il est donc impossible d'estimer l'épaisseur de gelée  $s(t)$ . Afin de pallier à la situation, l'idée est d'utiliser une méthode inverse qui permet d'estimer l'épaisseur de gelée à partir de mesures thermiques  $Y(x, t)$  (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés sur les parois latérales de la cuve d'électrolyse (Figure 1.3 b).

Malheureusement, les problèmes inverses sont plus complexes à résoudre que les problèmes directs. En effet, les problèmes inverses sont des problèmes fondamentalement mal posés contrairement aux problèmes directs qui sont bien posés. Selon Hadamard [57], un problème bien posé satisfait les trois propriétés suivantes :

1. La solution doit exister
2. La solution doit être unique
3. La solution doit être stable même si les valeurs d'entrée sont légèrement bruitées

Dans un problème inverse, au moins une des propriétés ci-dessus n'est pas vérifiée.

En thermique, la raison pour laquelle les problèmes inverses sont mal posés provient de la physique elle-même. En effet, de par la nature diffusive de la conduction de chaleur, les échanges thermiques sont amortis et retardés [14]. Dans la solution inverse recherchée, l'amortissement cause une amplification des erreurs de mesure tandis que le délai temporel rend la tâche plus difficile, car selon l'inertie thermique du système, les capteurs prennent un certain temps avant d'obtenir l'information pertinente. Par ailleurs, les mesures provenant des capteurs posent un autre problème. En effet, il serait tentant d'utiliser ces mesures le plus souvent possible, i.e. minimiser le pas de temps entre deux mesures, afin d'obtenir le plus d'information possible. Or, contrairement aux problèmes directs, de petits pas de temps causent des instabilités dans la solution [13].

Afin de résoudre et stabiliser les problèmes inverses mal posés, plusieurs techniques sont disponibles. Celles-ci se divisent normalement en deux catégories : 1) le domaine complet ("whole domain") où tous les paramètres inconnus sont déterminés simultanément pour un intervalle de temps donné, et 2) séquentielle où les paramètres inconnus sont trouvés

à tour de rôle, i.e. un pas de temps à la fois. Le tableau 2.3 résume les méthodes inverses disponibles, classifiées selon les deux approches.

Tableau 2.3 La classification des méthodes inverses disponibles

<b>Méthode inverse</b>	<b>Approche</b>
Méthode de spécification de fonction (MSF)	Séquentielle
Filtre de Beck	Séquentielle
Régularisation de Tikhonov	Domaine complet
Méthode du gradient conjugué (MGC)	Domaine complet
Réseaux de neurones artificiels (RNA)	Séquentielle ou domaine complet
Surfaces virtuelles	Séquentielle
Filtre de Kalman	Séquentielle

Plusieurs méthodes inverses existent et celles-ci sont utilisées dans des domaines tout aussi variés. Cependant, en thermique, la grande majorité de ces méthodes est appliquée à des problèmes où seulement la conduction de chaleur est en jeu [13, 15, 16, 106]. Le terme IHCP pour “Inverse Heat Conduction Problem” est fréquemment rencontré dans la littérature et consiste généralement à estimer un flux de chaleur à partir de mesures de températures. Contrairement aux IHCP, les problèmes inverses avec changement de phase sont beaucoup moins étudiés [78] et ce malgré leur grande importance dans les systèmes de protection de procédés à haute température [51, 108].

Pour ce qui est des réacteurs métallurgiques, la prédiction de l'épaisseur de gelée, ou des bancs, en utilisant des méthodes inverses de transfert de chaleur a fait l'objet d'un nombre très limité de travaux (Tableau 2.4).

Tableau 2.4 Études sur la prédiction de l'épaisseur de gelée, ou des bancs, dans les réacteurs métallurgiques en utilisant des méthodes inverses.

<b>Référence</b>	<b>Auteurs</b>	<b>Méthode inverse</b>
[66]	Huang et Chao (1997)	Gradient conjugué
[76]	Lan et coll. (2001)	Gradient conjugué
[114]	Tadrari et Lacroix (2006)	Gradient conjugué
[112]	Su et Chen (2007)	Surfaces virtuelles
[30]	Chen et Su (2008)	Surfaces virtuelles

Cependant, dans un contexte industriel, l'intérêt est de contrôler en tout temps l'épaisseur de gelée. Ainsi, la majorité des méthodes inverses utilisées dans ces problèmes de changement de phase ont été développées avec l'unique objectif de prédire la position du front de solidification  $s(t)$ . La méthode la plus populaire correspond à la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint, appelée également la méthode de régularisation itérative d'Alifanov [7]. Malgré son succès, cette méthode est gourmande en temps

de calcul, car dans la plupart des cas, elle a recourt à des modèles détaillés du procédé [11, 17, 68]. Par conséquent, une telle méthode inverse n'est pas adaptée à une application de contrôle en temps réel. Pour ce qui est de la méthode des surfaces virtuelles, son algorithme des moindres-carrés est très efficace, mais malheureusement cette technique n'inclut pas le changement de phase. De plus, elle est en régime permanent et ne peut être utilisée qu'avec un capteur de température, i.e. sans capteur de flux de chaleur.

Afin d'être combinée à une stratégie de contrôle en continu, la méthode inverse doit donc être efficace en termes de temps de calcul. Tel que montré au tableau 2.5, plusieurs méthodes d'estimation en temps réel sont disponibles : le filtre de Kalman avec état augmenté, le filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés (RLSE), la régression "Partial Least-Square" (PLS).

Tableau 2.5 Études sur les méthodes d'estimation en temps réel.

Référence	Auteurs	Méthode inverse
[102]	Scarpa et Milano (1995)	Filtre de Kalman avec état augmenté
[32]	Daouas et Radhouani (2004)	Filtre de Kalman avec état augmenté
[53]	Graichen et coll. (2006)	Filtre de Kalman avec état augmenté
[122]	Tuang et coll. (1996)	Filtre de Kalman et RLSE
[68]	Jang et coll. (2006)	Filtre de Kalman et RLSE
[31]	Chen et Hsu (2007)	Filtre de Kalman et RLSE
[34]	Dayal et MacGregor (1997)	Régression PLS
[104]	Sharmin et coll. (2006)	Régression PLS
[47]	Facco et coll. (2009)	Régression PLS

Malgré le succès de ces méthodes, aucune de celles-ci n'a été développée pour résoudre des problèmes de changement de phase. De plus, ces méthodes d'estimation, équivalentes aux méthodes inverses ou capteurs virtuels, n'utilisent jamais de capteurs de flux de chaleur. Pourtant tel que démontré par Samaï et Loulou [100], de même que LeBreux et coll. [79, 80], l'utilisation d'un capteur de flux de chaleur améliore grandement la précision et la stabilité de la méthode inverse. Selon Samaï et Loulou, il n'y a pas d'études qui explique ce phénomène, car la majorité des problèmes inverses utilisent des mesures de température, beaucoup plus faciles à mesurer. En ce qui concerne la méthode de régression PLS, celle-ci nécessite une grande quantité de données disponibles afin d'appliquer les outils statistiques. Or, pour ce qui est des cuves d'électrolyse, parce que les mesures manuelles de l'épaisseur de gelée sont réalisées à une très faible fréquence, cette grande quantité de données n'existe tout simplement pas.

Par conséquent, à la lumière des constats des tableaux 2.4 et 2.5, l'auteur a choisi d'utiliser la méthode du filtre de Kalman et RLSE, et de la combiner à une procédure d'identification



en modèles d'état afin d'inclure le changement de phase dans la résolution du problème inverse. L'utilisation du concept d'identification permet également d'utiliser à sa guise un capteur de température et/ou de flux de chaleur et ne nécessite aucune base de données statistiques. Pour plus de détails concernant les modèles d'état et la méthode inverse utilisée, se reporter respectivement aux annexes B et C.

À la connaissance de l'auteur, il n'existe donc aucune approche inverse qui soit utilisée dans le domaine de l'électrolyse de l'aluminium, encore moins une méthode inverse pour mesurer l'épaisseur de gelée. Seul Boily s'en est rapproché avec une méthode inverse utilisée sur un montage expérimental simulant la gelée [20]. Dans ce cas toutefois, l'étude n'était pas appliquée à la cuve d'électrolyse. Drezet a pour sa part utilisé une méthode inverse, mais elle était dédiée à la coulée de l'aluminium et non pour prédire la gelée [39].

## 2.3 Contrôle

Même si la prédiction de l'épaisseur de gelée est très importante, ce qui intéresse plutôt les producteurs d'aluminium est de contrôler en tout temps l'épaisseur de gelée. Le capteur virtuel, qui permet d'estimer l'épaisseur de gelée, peut alors être combiné à un système de contrôle (Figure 1.5) qui régule le système de refroidissement des cuves d'électrolyse (Figure 1.4). Plusieurs brevets et articles ont été réalisés aux sujets de ces systèmes de refroidissement (Tableau 2.6).

Tableau 2.6 Études sur les systèmes de refroidissement des cuves d'électrolyse.

Référence	Auteurs	Fluide utilisé
[89]	Miller (1980)	Air
[23]	Bos et coll. (1999)	Air
[64]	Holmen (1988)	Hélium
[45]	Eika et Skeggstad (1993)	Hélium
[10]	Aune et coll. (2003)	Hélium, CO <sub>2</sub> , Argon
[63]	Haywood et coll. (2003)	Eau
[81]	Liu et coll. (2008)	Inconnu

Encore une fois, les auteurs mentionnent que de tels dispositifs permettent de contrôler l'épaisseur de la gelée, mais sans l'expliquer. Ces derniers donnent plus de détails sur le système de refroidissement lui-même, et non comment celui-ci agit sur la gelée. L'idée derrière de tels dispositifs est bien entendu d'augmenter l'intensité de courant dans les cuves afin de produire davantage d'aluminium. Le passage de la convection naturelle à la convection forcée permet d'accroître substantiellement le flux de chaleur à la paroi extérieure, ce qui pour une augmentation de chaleur générée de par un courant plus élevé,

assure toujours l'équilibre thermique au sein de la cuve. Toutefois, la gelée n'est toujours pas mesurée, ni contrôlée., mais la productivité du procédé est accrue !

Heureusement, ceux-ci ont certains avantages : production d'électricité dans certains cas avec la chaleur récupérée [10, 64, 89], et une diminution significative de la température du caisson d'acier qui permet d'augmenter le confort environnant des opérateurs, d'augmenter la durée de vie et de minimiser les coûts d'entretien de la cuve [83].

Mais, pour plusieurs de ces applications, il faut modifier significativement les parois latérales de la cuve traditionnelle, ce qui entraîne des coûts financiers substantiels pour la modification de la cuve. Par contre, en utilisant un système de refroidissement qui agit sur les parois extérieures de la cuve tel que reporté par Bos et coll. [23], il est possible d'effectuer le refroidissement au moyen d'un jet d'air comprimé. Ceci ne nécessite donc pas l'enfouissement d'échangeurs de chaleur dans les parois latérales de la cellule d'électrolyse, et permet du même coup de supprimer les risques associés aux fuites qui pourraient survenir avec un fluide de refroidissement tel l'eau. Le seul contre coup de système de refroidissement des parois extérieures est qu'il utilise l'air comme fluide de refroidissement, ce qui procure un coefficient de transfert de chaleur entre  $60 \text{ W/m}^2\text{K}$  et  $120 \text{ W/m}^2\text{K}$  [67] limitant, par le fait même, sa capacité de refroidissement.

Ainsi, à la connaissance de l'auteur, aucune étude ne s'attarde explicitement au contrôle de la couche de gelée, malgré son importance majeure au niveau du procédé d'électrolyse. Pourquoi? D'abord, parce qu'aucune mesure continue de la gelée n'est disponible, et que celle-ci serait nécessaire afin de réaliser son contrôle. Et sans doute, parce que tous les efforts en contrôle de procédés dans l'industrie de l'aluminium ont été mis sur le contrôle de la concentration d'alumine, car celui-ci est extrêmement important sur plusieurs aspects [22, 65, 88, 107, 128]. D'une part, pour éviter les effets d'anode qui produisent des émissions très nocives de gaz perfluorocarbonés, et qui surconsommement l'énergie faisant fondre totalement la gelée. D'autre part, afin d'enrayer le dépôt de boue dans le fond de la cuve qui cause des distributions de courants horizontaux nuisibles.

Tel qu'il sera mentionné au chapitre 4, la stratégie de contrôle utilisée pour réguler le système de refroidissement des cuves d'électrolyse est le contrôleur classique proportionnel-intégral-dérivatif (PID). Ce contrôleur est largement utilisé dans l'industrie [9, 35, 115] et est fréquemment utilisé pour contrôler des procédés thermiques. Le tableau 2.7 montre que plusieurs stratégies de contrôle plus évoluées sont également disponibles pour contrôler ces procédés : le contrôle par modèle interne, le contrôle prédictif par modèle, les réseaux de neurones artificiels et le contrôle optimal (Tableau 2.7).

Tableau 2.7 Études sur les stratégies de contrôle appliquées aux procédés thermiques.

Référence	Auteurs	Méthode de contrôle
[5]	Aguilar et coll. (2002)	Contrôleur PID
[101]	Sampath et coll. (2002)	Contrôleur PID
[6]	Alfora et coll. (2009)	Contrôleur PID
[91]	Morari et Zafiriou (1989)	Contrôle par modèle interne
[46]	Eki et coll. (1998)	Contrôle par modèle interne
[86]	Mawire et McPherson (2008)	Contrôle par modèle interne
[28]	Camacho et Bordons (1995)	Contrôle prédictif par modèle
[98]	Pickhardt (2000)	Contrôle prédictif par modèle
[77]	Lazar et coll. (2000)	Contrôle prédictif par modèle
[61]	Haykin (1994)	Réseaux de neurones artificiels
[103]	Schenker et Agarwal (1998)	Réseaux de neurones artificiels
[38]	Diaz (2001)	Réseaux de neurones artificiels
[130]	Zhou et coll. (1996)	Contrôle optimal
[95]	Noda et coll. (2003)	Contrôle optimal
[69]	Wang et coll. (2007)	Contrôle optimal

Malgré le succès de toutes ces approches, la simplicité, la disponibilité et l'implantation facile et rapide du PID, en font le choix le plus propice. Par ailleurs, en contrôle de procédés, plus de 90% des contrôleurs utilisés sont des contrôleurs du type PI-PID [9, 35, 115]. De plus, la complexité du contrôle de l'épaisseur de gelée provient majoritairement du capteur virtuel lui-même. Selon l'auteur, une stratégie plus évoluée que le PID ne procurerait guère de meilleurs résultats au niveau du contrôle. Finalement, parce que la majorité des cellules d'électrolyse sont refroidies par convection naturelle [81], i.e. sans systèmes de refroidissement, même l'application d'un simple PID est considéré comme une nouvelle application aux yeux de l'industrie de l'aluminium.

# CHAPITRE 3

## MÉTHODE INVERSE (CAPTEUR VIRTUEL)

### Avant-propos

**Auteurs et affiliation :**

M. LeBreux : étudiant au doctorat, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

M. Désilets : professeur, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

M. Lacroix : professeur, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

**Date d'acceptation :** 16 août 2010

**État de l'acceptation :** version finale publiée

**Revue :** International Journal of Heat and Mass Transfer

**Référence :** [79]

**Titre français :**

Prédiction inverse de la gelée dans les fournaies à haute température avec un filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés

**Contribution au document :**

Cet article contribue à la thèse en présentant le capteur virtuel qui estime l'épaisseur de gelée dans une cuve d'électrolyse à l'aide de mesures thermiques (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve. Ce capteur virtuel consiste en un filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés qui permet de résoudre le problème inverse de changement de phase. La procédure d'identification en modèles d'état qui est nécessaire afin d'utiliser cette technique est également présentée. Son utilisation permet d'intégrer facilement des mesures de température et/ou de flux de chaleur dans la méthodologie inverse, et s'avère très efficace en rapidité de calcul, ce qui permet d'entrevoir l'implantation du capteur virtuel avec une stratégie de contrôle en temps réel.

**Résumé français :**

Une procédure inverse de transfert de chaleur qui permet d'estimer l'épaisseur de gelée à l'intérieur des réacteurs métallurgiques à haute température est présentée dans le cadre de ce travail. L'avantage de cette méthode inverse est qu'elle ne nécessite pas beaucoup de ressources informatiques, ce qui permet de la combiner facilement à des systèmes de contrôle en temps réel dédiés aux procédés industriels. La méthode inverse repose sur une représentation en modèles d'état (modèle direct), très efficaces en rapidité de calcul, qui sont utilisés pour représenter le modèle numérique direct aux différences finies qui résoud le problème de changement de phase. Une filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés (méthode inverse) est utilisée ensuite pour estimer l'évolution du front de solidification à partir de mesures thermiques (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois du réacteur. La procédure inverse de transfert de chaleur est validée rigoureusement pour des conditions d'opération typiques présentes dans les réacteurs métallurgiques à haute température. L'effet du type de capteur (température et/ou flux de chaleur), de son bruit de mesure et de sa position dans la paroi, sur la précision et la stabilité de l'estimation de l'épaisseur de gelée, sont présentés. Il est montré que la technique inverse proposée devient de plus en plus fiable et précise à mesure que l'épaisseur de gelée diminue. Cet élément est d'autant plus important dans l'optique de prévenir la perte complète de la gelée dans le réacteur. Finalement, des recommandations sur le type et la position des capteurs sont présentées.

**Title**

Fast inverse prediction of phase change banks in high temperature furnaces with a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator.

**Abstract**

An inverse heat transfer procedure for predicting the time-varying thickness of phase-change banks on the inside surface of the walls of high temperature furnaces is presented. The main feature of the inverse method is its unique capability of making fast predictions so that it can be easily integrated to existing real-time control systems of industrial facilities. The method rests on fast computing state-space models (direct model) that are designed to mimic the response of a full finite-difference model of the phase change problem. A Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator (inverse method) is employed

to estimate the time-varying phase front position from the data collected by a temperature and/or heat flux sensor located in the furnace wall. The inverse heat transfer procedure is thoroughly tested for typical phase change conditions that prevail inside industrial facilities. The effect of the sensor type (temperature sensor or heat flux sensor), of its location and of the measurement noise on the accuracy and stability of the predicted bank thickness is investigated. It is shown that the proposed inverse heat transfer procedure becomes increasingly reliable and accurate for predicting the bank thickness as it shrinks. This feature is of the utmost interest for preventing the sudden and accidental loss of the protective banks of industrial furnaces filled with molten material. Recommendations are also made concerning the type and location of sensors.

## Keywords

Inverse heat transfer method, Phase change, Kalman filter, Recursive least-square estimator, Furnace.

## Nomenclature

Roman

$A$	state-space matrix
$B$	state-space matrix
$C$	state-space matrix
$C_p$	specific heat [J/kgK]
$dt$	time step [s]
$dx$	space step [m]
$D$	width of the PCM layer [m]
$e$	difference between the output of the data bank and the response of the state-space model
$E$	variance
$f$	liquide fraction
$K$	optimal Kalman gain
$K_b$	RLSE correction factor
$h$	heat transfer coefficient [W/m <sup>2</sup> K]
$I$	identity matrix
$k$	thermal conductivity [W/mK]
$L$	width of the brick wall [m]

$Lag$	time lag [s]
max	maximum value
$M$	RLSE sensivity matrix
$n$	total number of time steps for the simulation
$N$	total number of input/output data
$q''$	heat flux [ $W/m^2$ ]
$\hat{q}''$	estimated heat flux [ $W/m^2$ ]
$q''_{in}$	heat flux imposed at the boundary $x = L + D$ [ $W/m^2$ ]
$P$	covariance matrix of the estimated state
$P_{-1 -1}$	initial covariance matrix of the estimated state
$P_b$	covariance matrix of the estimated heat flux
$P_{b,-1}$	initial covariance matrix of the estimated heat flux
$PCM$	phase change material
$PEM$	prediction error minimization
$Q$	covariance matrix of the process noise
$R$	covariance matrix of the measurement noise
$RLSE$	recursive least-square estimator
$RRMSE$	relative root-mean-square error [%]
$s$	bank thickness [m]
$\hat{s}$	estimated bank thickness [m]
$S$	residual covariance
$t$	time [s]
$T$	temperature [K]
$u$	input signal vector
$\hat{u}$	estimated input signal vector
$v$	measurement noise [K, $W/m^2$ ]
$V_N$	PEM algorithm cost function
$w$	process noise
$W$	RLSE sensitivity matrix
$x$	state vector or space direction
$\hat{x}$	estimated state vector
$y$	measurement vector [m, K, $W/m^2$ ]
$\hat{y}$	mean of $y$ [m, K, $W/m^2$ ]
$\bar{y}$	measurement residual [K, $W/m^2$ ]
$\hat{y}$	predicted output of the state-space model [m, K, $W/m^2$ ]
$Y$	sensor signal [K, $W/m^2$ ]

## Greek symbols

$\delta$	dynamic variation
$\delta_{kj}$	Kronecker delta function
$\delta H$	volumetric enthalpy change [J/m <sup>3</sup> ]
$\gamma$	RLSE forgetting factor
$\lambda$	heat of fusion [J/kg]
$\rho$	density [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_Q$	process noise standard deviation
$\sigma_R$	measurement noise standard deviation [K, W/m <sup>2</sup> ]

## Subscripts

0	initial or constant
$\infty$	ambient
<i>brick</i>	brick wall
<i>E</i>	eutectic
<i>F</i>	freezing point
<i>k</i>	time iteration number
<i>k k - 1</i>	<i>a priori</i> estimate
<i>k k</i>	<i>a posteriori</i> estimate
<i>liq</i>	liquidus
<i>liquid</i>	liquid (PCM)
<i>PCM</i>	phase change material
<i>s</i>	<i>s(t)</i> state-space model
<i>sol</i>	solidus
<i>solid</i>	solid(PCM)

## Superscripts

<i>T</i>	transposed matrix
----------	-------------------



### 3.1 Introduction

An interesting melting/solidification process that arises in many high temperature industrial furnaces such as electric arc furnaces [114], blast furnaces [55] and electrolysis cells [126] is the formation of solid layers, sometimes called banks or ledges, on the inside surface of the furnace walls (Figure 3.1). These banks are created as the molten material comes into contact with the cooled surface of the wall and undergoes a solidification process. In many cases, the presence of these banks is highly desirable. They serve as a protective barrier against the corrosive molten material, thereby maintaining the integrity of the furnace and prolonging its active life. On the other hand, too thick a bank is detrimental to the furnace throughput as the active furnace volume is reduced. Keeping banks of optimal size at all times is therefore crucial for the safe and profitable operation of the furnace. Unfortunately, due the hostile conditions that prevail inside these furnaces, probing the time-varying thickness and shape of the banks with sensors submerged into the molten bath is a very difficult task, not to say impractical. The alternative is to attempt to predict their behavior with inverse heat transfer methods that rely on temperatures and/or heat fluxes recorded by non-intrusive sensors embedded into the furnace walls.

Shape design predictions of banks or ledges on furnace walls with inverse heat transfer methods have been the subject of few investigations in the past [30, 66, 76, 112, 114]. Figure 3.2 shows a schematic of such an inverse problem. The bank is represented by the solid phase of the phase change material (PCM). In the direct problem (Figure 3.2 a), the time-varying heat flux at the right boundary is known. This heat flux may represent the heat load inside the furnace. The solution for the temperature distribution and for the thickness of the bank (the phase front position) may then be determined from the solution of the energy conservation equation. In the inverse problem (Figure 3.2 b), the time-varying heat flux at the right boundary is not known. It can be estimated however with an inverse method that uses temperatures and/or heat fluxes recorded by sensors located inside the brick wall. With the estimated heat flux, the temperature distribution and the thickness of the bank are then determined from the solution of the energy conservation equation.

Inverse heat transfer methods for this one-dimensional heat conduction phase change problem have been developed with the sole purpose of predicting the location of the phase front. From an industrial point of view however, the interest and the real challenge is to control in real-time the thickness of the bank. As a result, most of the inverse heat transfer methods such as the Levenberg-Marquardt method or the conjugate gradient methods that have been developed for prediction purposes are unsuitable for real-time control systems.

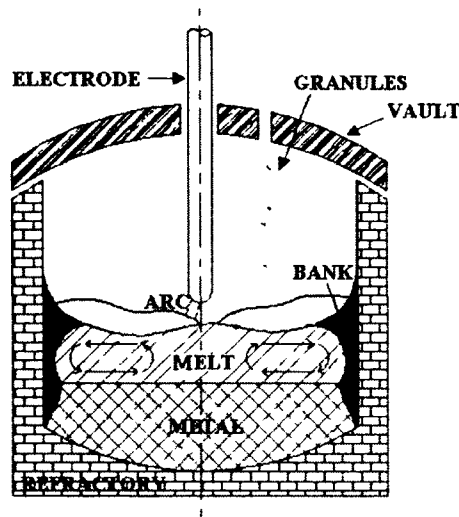
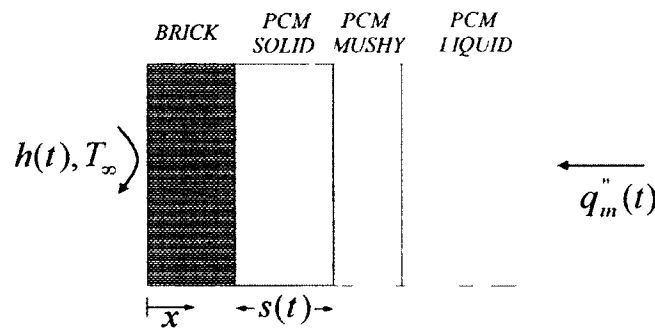
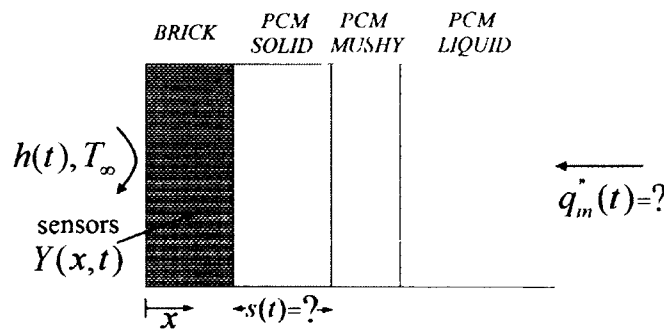


Figure 3.1 Cross-view of a typical high temperature furnace with molten material and protective banks.



(a) Direct problem  $q_m''(t)$  and  $h(t)$  are known,  $T(x,t)$ ,  $q''(x,t)$ , and  $s(t)$  are predicted with the FDM



(b) Inverse Problem  $q_m''(t)$  is unknown. It is determined from temperatures and/or heat fluxes  $Y(x,t)$  measured inside the brick wall.

Figure 3.2 Schematic of a melting furnace

They are time-consuming and computationally inefficient because they use complex direct models usually composed of finite differences or finite elements [17, 66, 122].

The objective of the present study is to remedy this situation by proposing an inverse sequential heat transfer procedure based on a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator. The procedure is then tested numerically for fast inverse prediction of phase change banks in high temperature furnaces.

The overall calculation strategy to be developed in the present paper is summarized in Figure 3.3. First, a mathematical model for the melting/solidification process is presented. Second, a state-space identification of this mathematical model is proposed and validated. Third, a Kalman filter and a recursive least-square estimator (RLSE) inverse technique are then presented. Finally, the inverse procedure is thoroughly tested and the effect of different parameters (sensor noise, sensor location, sensor type, and steady-state initial bank thickness) on the behavior of the system is investigated.

## 3.2 Finite difference model of the melting/solidification problem

The one-dimensional phase change problem under investigation is depicted in Figure 3.2 a). A bank of thickness  $s(t)$ , which corresponds to the phase front location, is pressed against the inner surface of a brick wall of thickness  $L$ . The outer surface of the brick wall, i.e. the left boundary condition, is cooled with an air stream at constant temperature  $T_\infty$  and with a known time-varying heat transfer coefficient  $h(t)$ . A time-varying heat flux  $q_m''(t)$ , which represents the furnace heat load, is imposed on the right boundary condition at  $x = L + D$ .

The mathematical model for the phase change problem rests on the following assumptions :

- The temperature gradients across the wall ( $x$  direction) are much larger than the temperature gradients in the vertical direction so that a one-dimensional analysis can be applied.
- The phase change problem is non isothermal.
- The thermal contact resistance between the brick wall and the bank is neglected.
- The thermal properties of the PCM are temperature independent ; they are, however, different for the liquid and the solid phase.

- The heat transfer across the liquid layer of the PCM is conduction dominated. The effect of the flow circulation in the liquid layer could however be accounted for in the diffusion model by means of an effective thermal conductivity [114, 123].

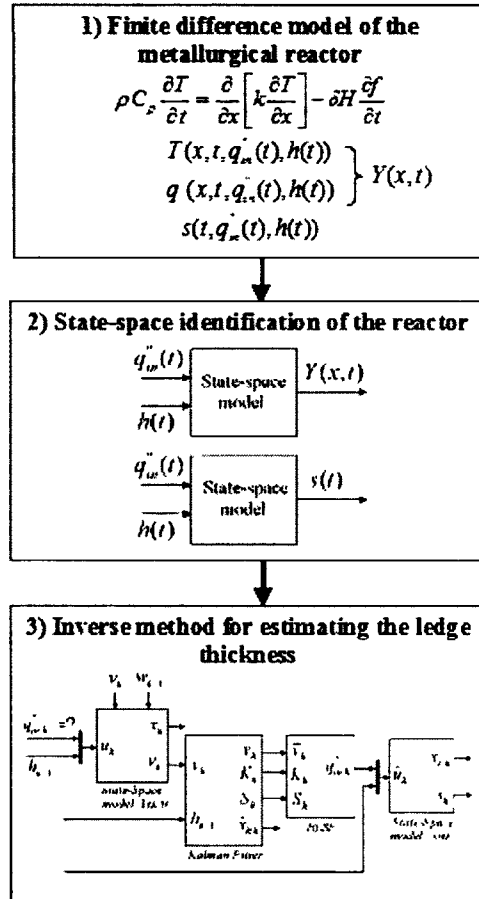


Figure 3.3 Overall calculation procedure.

With the foregoing assumptions, the governing heat diffusion equation for the wall and the PCM may be stated as :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \delta H \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.1)$$

The boundary conditions are :

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(t) [T(0, t) - T_\infty] \quad (3.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L+D} = q''_{in}(t) \quad (3.3)$$

and the initial condition is :

$$T(x, 0) = T_0 \quad (3.4)$$

The second term on the right-hand side of Eq. (3.1) accounts for the solid/liquid phase change. Of course, this term vanishes inside the brick wall. The enthalpy change  $\delta H$  is defined as  $\delta H = \rho(C_{p,liquid} - C_{p,solid})T + \rho\lambda$ . The liquid fraction  $f$  varies linearly between the solidus  $T_{sol}$  and the liquidus  $T_{liq}$  in the following manner :

$$f = f(T) = \begin{cases} 0 & T \leq T_{sol} \\ \frac{T-T_{sol}}{T_{liq}-T_{sol}} & T_{sol} < T < T_{liq} \\ 1 & T \geq T_{liq} \end{cases} \quad (3.5)$$

Eqs. (3.1-3.5) were discretized using second-order finite differences in space, and first-order differences in time with an implicit scheme. The resulting set of difference equations is then solved using a tri-diagonal matrix algorithm (TDMA). For each time step, the liquid fraction  $f$  in Eq. 3.1 is determined according to the enthalpy method, an iterative procedure developed by Voller [125]. More details concerning the resolution of Eqs.(3.1-3.5) can be found in appendix A.

The above finite difference model (FDM) was thoroughly tested and validated using analytical solutions and results available in the open literature. As an example of validation, the one-dimensional solidification of the binary Al-4.5% Cu alloy reported in reference [125] was simulated using a time step  $dt = 5$  s and the physical properties of the alloy provided in Tableau 3.1. As for the space increment  $dx$ , values of  $1.25 \times 10^{-3}$  m and  $2.5 \times 10^{-3}$  m were employed. A Dirichlet boundary condition of  $T = 573$  K is assumed at the boundary  $x = L$  (Figure. 3.2 a) and the width of the PCM layer is set equal to  $D = 0.5$  m. Figure 3.4 shows that the predicted movement of both the solidus front and the liquidus front are in very good agreement with the results of Voller [125].

Numerical simulations were also conducted to ensure that the predictions are grid space and time step independent. A time step  $dt = 100$  s and a mesh size  $dx = 0.5 \times 10^{-3}$  m were found to be a good compromise between numerical accuracy and CPU time requirement. Moreover, the mesh size was chosen so as to yield the required resolution for the predicted

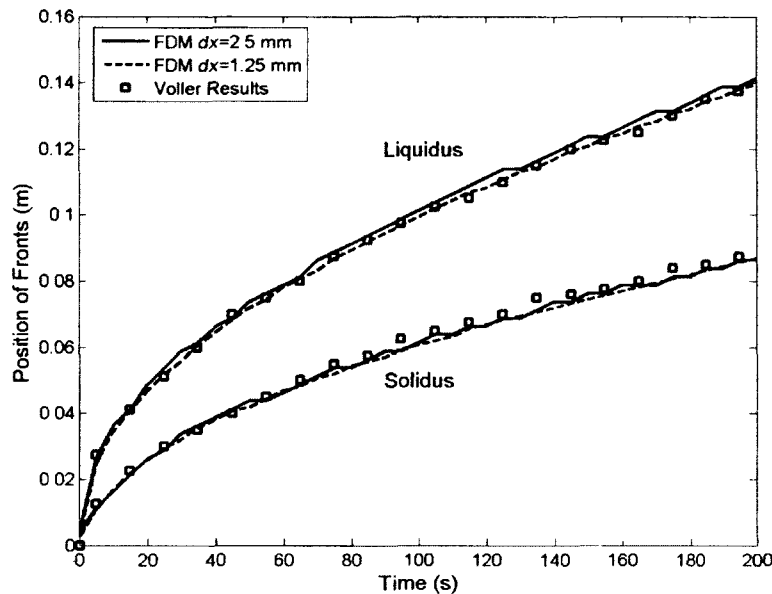


Figure 3.4 Comparison of the FDM with the numerical results of Voller [125] as applied to the solidification of the binary Al–4.5% Cu alloy.

bank thickness and to smooth the thermal conductivity jump inside the control volumes that undergo phase change.

Numerical solutions of transient non-linear phase change problems with finite-difference or finite-element methods become increasingly CPU time-consuming as the number of nodes or elements augments. As a result, these mathematical models are usually not suitable for real-time applications that require fast computation. The above FDM is no exception. Therefore, the FDM was employed to generate a data bank that contains the results of a series of numerical simulations for different melting/solidification scenarios. These scenarios were defined by the boundary conditions  $q''_{in}(t)$  and  $h(t)$  so as to encompass the entire range of the operating conditions of a typical high temperature melting furnace. The results of the simulations were then compiled into a data bank in terms of the phase front location  $s(t, q''_{in}(t), h(t))$ , of the temperature distribution  $T(x, t, q''_{in}(t), h(t))$  and of the heat flux distribution  $q''(x, t, q''_{in}(t), h(t))$ . Once this data bank has been generated, the time-consuming FDM is no longer needed. In other words, the identification models presented in the next section will simply extract the information stored into this data bank for the prediction of the melting/solidification process, thereby ensuring fast computation. Another advantage of the data bank is that it can also be generated and/or enriched by other means, such as with experimental data for example.

Tableau 3.1 Physical properties of the binary Al-4.5% Cu alloy [125].

Parameter	Value
$C_{p,solid}$ (J/kgK)	900
$k_{solid}$ (W/mK)	200
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	2800
$C_{p,liquid}$ (J/kgK)	1100
$k_{liquid}$ (W/mK)	90
$\lambda$ (J/kg)	$3.9 \times 10^5$
$T_E$ (K)	821
$T_F$ (K)	933
$T_{liq}$ (K)	919

In order to generate the data bank, the thickness of the brick wall was fixed at  $L = 0.1$  m and the width of the PCM layer (solid, mushy, and liquid) was set equal to  $D = 0.1$  m (Figure 3.2 a). The outside temperature was kept constant at  $T_\infty = 300$  K. The time step  $dt$  was set equal to 100 s and the mesh size  $dx$  was maintained at  $0.5 \times 10^{-3}$  m. The physical properties of the refractory bricks and of the PCM are provided in Tableau 3.2.

Tableau 3.2 Physical properties of the brick wall and of the PCM.

Parameter	Value
$C_{p,brick}$ (J/kgK)	875
$k_{brick}$ (W/mK)	16.8
$\rho_{brick}$ (kg/m <sup>3</sup> )	2600
$C_{p,PCM,solid}$ (J/kgK)	1800
$k_{PCM,solid}$ (W/mK)	1
$\rho_{PCM}$ (kg/m <sup>3</sup> )	2100
$C_{p,PCM,liquid}$ (J/kgK)	1800
$k_{PCM,liquid}$ (W/mK)	10
$\lambda$ (J/kg)	$5.1 \times 10^5$
$T_{sol}$ (K)	1213
$T_{liq}$ (K)	1233

### 3.3 State-space identification of the finite difference model

As explained in the previous section, the use of a finite-difference model for real-time inverse phase change problems is, in terms of CPU time, impractical. Consequently, a data bank comprising the results of a series of numerical predictions performed with the FDM was generated. These data must now be fit into dynamic models, called state-space models that will mimic faithfully the behavior of the phase change process while providing

quickly and efficiently the required information for the inverse method. The purpose of this section is to present the state-space models that will be identified from the data bank. The inverse method will be presented in section 3.4.

The state-space identification of the finite difference model consists of transforming the data extracted from the data bank into the following linear state-space form :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (3.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (3.7)$$

$x(t)$  is the identified state vector. The state vector has no physical meaning.  $u(t) = \begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$  is the input vector.  $w(t)$  is the process noise. The process noise acts as disturbances to the plant dynamics.  $y(t)$  is the measurement vector, that is the information stored in the data bank ( $s$ ,  $T$ , or  $q''$ ).  $v(t)$  is the measurement noise. Finally, the state-space matrices are defined by the symbols  $A$ ,  $B$ , and  $C$  respectively.

It was assumed that the process noise  $w(t)$  in Eq. (3.6) and the measurement noise  $v(t)$  in Eq. (3.7) are null, as a result of generating the data bank from the “exact” predictions of the FDM.

Moreover, due to the fact that heat is absorbed or released during the phase change process, the mathematical model of the previous section is highly nonlinear, i.e. the relations between the input vector  $u(t) = \begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$  and the measurement vector  $y(t)$  ( $s$ ,  $T$ , or  $q''$ ) are nonlinear. In order to put the FDM into the state-space form (Eqs. 3.6,3.7), it must be linearized first. A linearized model is an approximation of a nonlinear system. It is valid only for values around the operating point of the system [75]. In the present case, the operating point of the furnace corresponds to a constant value for the input vector  $u_0$ . The value around the operating point is defined by the dynamic variation  $\delta u(t)$  of the input vector. The input vector can thus be rewritten in the following manner :

$$u(t) = u_0 \pm \delta u(t) = \begin{bmatrix} q''_{in,0} \pm \delta q''_{in}(t) \\ h_0 \pm \delta h(t) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$



where  $q''_{in,0}$  and  $h_0$  are the constant values of the heat flux and of the heat transfer coefficient respectively, and  $\delta q''_{in}(t)$  and  $\delta h(t)$  are their respective dynamic variations whose maximum magnitude around the working point are chosen *ad hoc* in order to ensure a linear relation between  $u(t)$  and  $y(t)$ . This is achieved by calculating the best fit (Eq. 3.9) each time the state-space identification procedure is run [82]. The best fit corresponds to a percentage value that quantifies the match between the predicted output of the state-space model  $\hat{y}$  and the data extracted from the data bank  $y(t)$ . A best fit of 100% corresponds to a perfect fit. A linear behaviour was assumed for best fits larger than 90% :

$$\text{best fit} = \left( 1 - \left| \frac{y(t) - \hat{y}(t)}{y(t) - \bar{y}} \right| \right) \times 100\% \quad (3.9)$$

where  $\bar{y}$  corresponds to the mean of  $y(t)$ .

The resulting state-space identification procedure is summarized in Figure 3.5. This procedure was called upon for each of the operating points stored into the data bank.

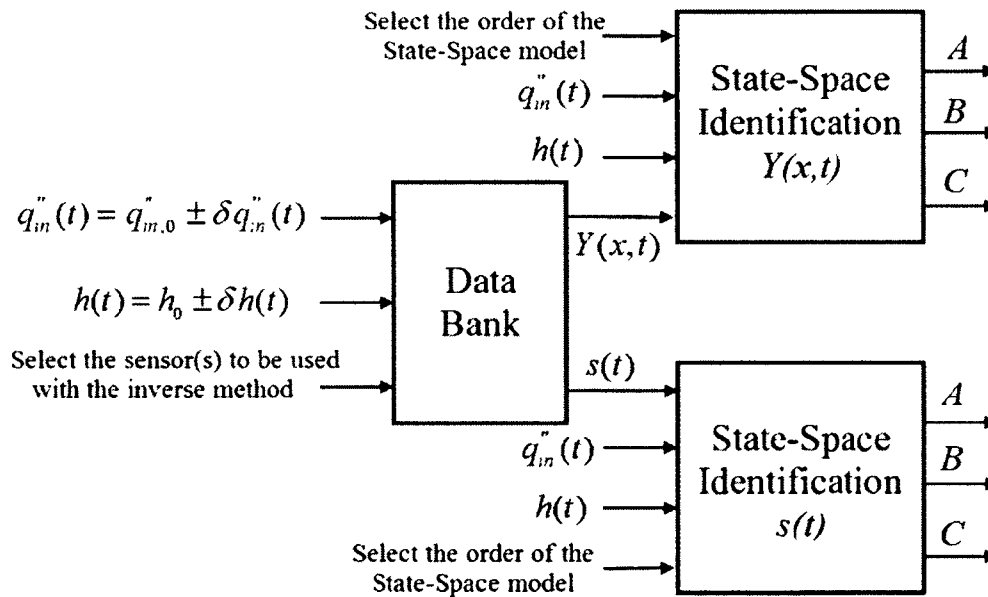


Figure 3.5 The state-space identification procedure.

In the first step, the input vector of Eq. 3.8 is fed to the data bank. The corresponding output signals provided by the data bank are the phase front location  $s(t)$ , the temperature distribution  $T(x, t)$  and the heat flux distribution  $q''(x, t)$ . When the identification procedure is employed in conjunction with an inverse method (see section 3.4), additional output signals  $Y(x, t)$  (which correspond to the response of temperature and/or heat flux sensors)

may be extracted from the data bank. For example, the signal  $Y(x, t) = T(x = 0, t)$  represents the temperature measured by a thermocouple located at the left boundary and the signal  $Y(x, t) = q''(x = L, t)$  is the heat flux measured by a heat flux sensor located at the wall/PCM interface.

Thus, by specifying the order of the desired state-space models (size of the state-space vector), and from the input/output data pair  $\begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, [s(t)]$  and  $\begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, [Y(x, t)]$ , the identification algorithm generates the matrices  $A$ ,  $B$ , and  $C$  for each of the two state-space models, i.e. the  $s(t)$  model and the  $Y(x, t)$  model. The state-space identification algorithm corresponds to the iterative prediction-error minimization method (PEM) reported in reference [82]. The objective of the PEM is to minimize the cost function  $V_N$  defined as :

$$V_N = \sum_{t=1}^N e^2(t) = \sum_{t=1}^N [y(t) - \hat{y}(t)]^2 \quad (3.10)$$

where  $N$  is the total number of input/output data pair, and  $e(t)$  is the difference between the data extracted from the data bank  $y(t)$  and the predicted output of the state-space model  $\hat{y}(t)$ .

The usefulness of the present state-space identification procedure is exemplified in the following example. Figure 3.6 defines a phase-change scenario in terms of the step functions of Eq. (3.8) for the boundary conditions  $q''_{in}(t)$  and  $h(t)$ . For simplicity, we have assumed that the data bank contains only one working point which is defined by the following elements :  $q''_{in,0} = 10000 \text{ W/m}^2$ ,  $\max\{\delta q''_{in}(t)\} = 1000 \text{ W/m}^2$ ,  $h_0(t) = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$  and  $\max\{\delta h(t)\} = 2 \text{ W/m}^2\text{K}$ . This phase change scenario was simulated using the “exact” FDM of section 3.2 and the 9<sup>th</sup> order identified state-space models of the present section. More details concerning the state-space models are given in appendix B. The corresponding predictions of these models are compared in Figure 3.7. A temperature sensor was used at the left boundary for  $Y(x, t) = T(x = 0, t)$  while a heat flux sensor was employed for  $Y(x, t) = q''(x = L, t)$ . It is seen that the agreement between the predictions of the state-space models and the FDM is excellent, i.e. the best fit value remains higher than 90% in each case. In terms of CPU time however, the simulations are matchless. The models were run on an Intel® Pentium® Dual CPU T2390 1.86 GHz. The state-space model runs a 1000 times faster than the FDM that employs a mesh size  $dx = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m}$  and it still runs 30 times faster when the mesh size is increased to  $2 \times 10^{-3} \text{ m}$ . It is clear from these results that the state-space approach is far superior to the FDM for handling inverse problems that require fast computation.

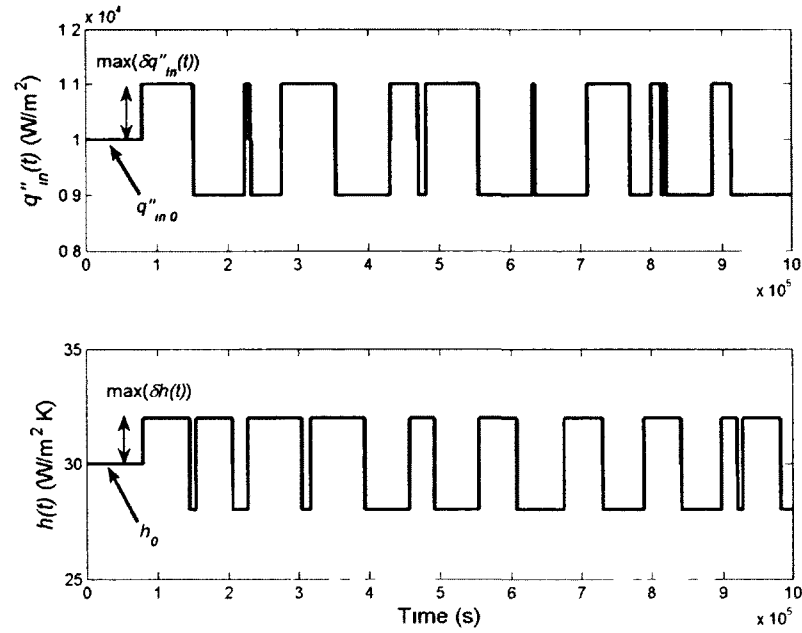


Figure 3.6  $q''_{in}(t)$  and  $h(t)$  used for the FDM and the state-space identification procedure.

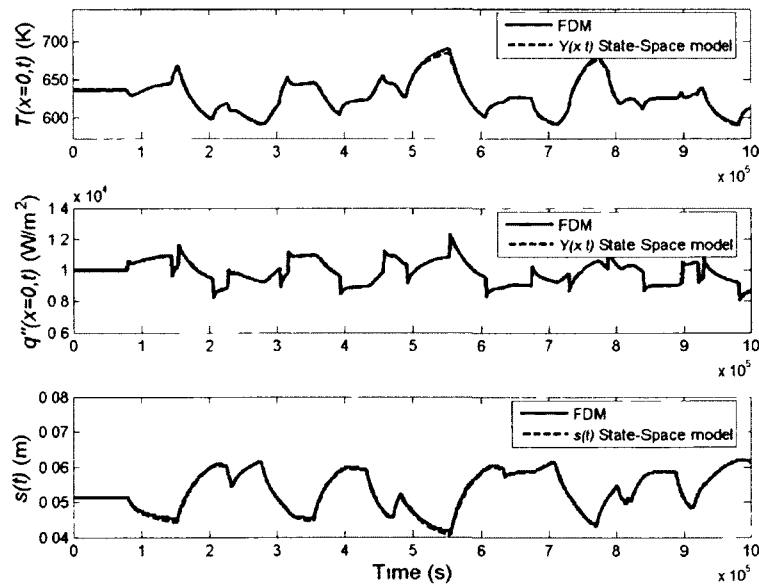


Figure 3.7 FDM versus the state-space models

### 3.4 The inverse method

In the inverse problem, the heat flux  $q''_{in}(t)$  on the right boundary is unknown (Figure 3.2 b). It is estimated however with an inverse method which uses temperature and/or

heat flux  $Y(x, t)$  measured by sensors embedded in the brick wall or placed on its outside surface. Once the heat flux  $q''_{in}(t)$  has been estimated, the phase front location  $s(t)$  is determined from the fast computing  $s(t)$  state-space model of section 3.3.

The overall inverse methodology based on the Kalman filter/recursive least-square estimator is shown in Figure 3.8. The method may be divided into four steps:

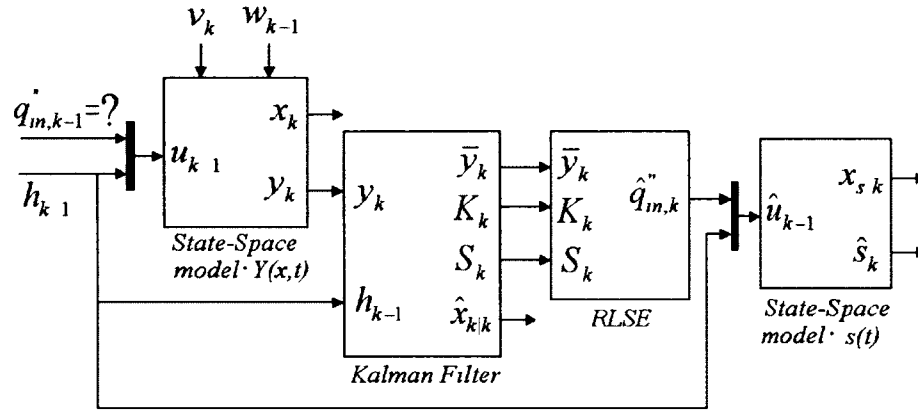


Figure 3.8 The inverse method, a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator (RLSE)

In the **first step**, the unknown heat flux  $q_{in,k-1}$  and the known heat transfer coefficient  $h_k = k - 1$ , from time  $t_{k-1}$  to time  $t_k$ , are processed by the  $Y(x, t)$  state-space model. This model generates the output  $y_k$  according to the chosen sensor type (temperature or heat flux sensor). In order to accommodate the Kalman filter, the discrete form of Eqs. (3.6) and (3.7) is adopted, that is:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} = Ax_{k-1} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q''_{in,k-1} \\ h_{k-1} \end{bmatrix} + w_{k-1}$$

(3.11)

$$y_k = Cx_k + v_k \tag{3.12}$$

Here, the process noise in Eq. (3.11) and the measured noise in Eq. (3.12) are taken into account via the white Gaussian variance  $E$  with null mean. The variance is given by the following expressions [24]:

$$E \{ w_k w_j^T \} = Q \delta_{kj} = \text{diag} [\sigma_Q^2] \quad (3.13)$$

$$E \{ v_k v_j^T \} = R \delta_{kj} = \text{diag} [\sigma_R^2] \quad (3.14)$$

where  $Q$  is the covariance matrix for the process noise,  $R$  is the covariance matrix for the measurement noise,  $\sigma_Q$  is the standard deviation of the process noise,  $\sigma_R$  is the standard deviation of the measurement noise, and  $\delta_{kj}$  is the Kronecker delta function.

The **second step** consists in using a Kalman filter. A Kalman filter is a set of mathematical equations that provides an efficient recursive means to estimate the state of a process (the phase change process), in a way that minimizes the mean of the square error (the square of the difference between the computed and the target thermal state) [71]. The Kalman filter estimates a process by using a form of feedback control : the filter estimates the process state at some time and then obtains feedback in the form of noisy measurement. Referring to Figure 3.8, the Kalman filter estimates the process state  $x_k$  of Eq. 3.11 with the sensor measurement  $y_k$  from Eq. 3.12. It also uses simultaneously only one of the input signals, i.e. the heat transfer coefficient  $h_{k-1}$ . In order to estimate correctly the process state  $x_k$ , the Kalman filter proceeds through two steps : 1) the time update step (prediction) followed by 2) the measurement update step (correction) [127].

The time update equations project the current state estimate  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  and the error covariance matrix estimate  $P_{k-1|k-1}$  forward in time in order to obtain the *a priori* estimate for the next time step, i.e.  $\hat{x}_{k|k-1}$  and  $P_{k|k-1}$  (Eqs. 3.15-3.16).

$$\hat{x}_{k|k-1} = A \hat{x}_{k-1|k-1} + B_2 h_{k-1} \quad (3.15)$$

$$P_{k|k-1} = A P_{k-1|k-1} A^T + Q \quad (3.16)$$

The covariance matrices  $P_{k-1|k-1}$  and  $P_{k|k-1}$  characterize the accuracy of the computed state estimate  $\hat{x}_{k-1|k-1}$  and  $\hat{x}_{k|k-1}$  respectively.

The feedback is then performed by the measurement update equations that incorporate a new measurement  $y_k$  into the *a priori* estimates  $\hat{x}_{k|k-1}$  and  $P_{k|k-1}$  in order to obtain an improved *a posteriori* estimate  $\hat{x}_{k|k}$  and  $P_{k|k}$  (Eqs. 3.17-3.18).

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \quad (3.17)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k C) P_{k|k-1} \quad (3.18)$$

$\bar{y}_k = (y_k - C\hat{x}_{k|k-1})$  corresponds to the measurement residual which reflects the discrepancy between the predicted measurement  $C\hat{x}_{k|k-1}$  and the actual measurement  $y_k$ .  $I$  is the identity matrix, and  $K_k$  is the optimal Kalman gain (Eq. 3.19) that minimizes the *a posteriori* error covariance  $P_{k|k}$ .

$$K_k = P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R)^{-1} \quad (3.19)$$

$S_k = (C P_{k|k-1} C^T + R)$  represents the residual covariance which is the covariance matrix of the measurement residual  $\bar{y}_k$ .

In the **third step** of the inverse method, the recursive least-square estimator (RLSE) is applied to the present heat transfer problem. The RLSE is a well known recursive technique used in the field of adaptive signal processing. The reader is referred to [62] for a full discussion on this technique. The RLSE estimates the unknown heat flux  $q''_{in,k}$  using the information generated from the Kalman filter, that is the measurement residual  $\bar{y}_k$ , the optimal Kalman gain  $K_k$ , and the residual covariance  $S_k$ . The full RLSE algorithm is reported in references [31, 122] and in appendix C. The overall results can be stated in terms of the following set of five equations :

$$M_k = [I - K_k C] [A M_{k-1} + I] \quad (3.20)$$

$$W_k = H [A M_{k-1} + I] B_1 \quad (3.21)$$

$$K_{b,k} = \gamma^{-1} P_{b,k-1} W_k^T [W_k \gamma^{-1} P_{b,k-1} W_k^T + S_k]^{-1} \quad (3.22)$$

$$P_{b,k} = [I - K_{b,k} W_k] \gamma^{-1} P_{b,k-1} \quad (3.23)$$

$$\hat{q}_{in,k}'' = \hat{q}_{in,k-1}'' + K_{b,k} [\bar{y}_k - W_k \hat{q}_{in,k-1}''] \quad (3.24)$$

$\hat{q}_{in,k}''$  corresponds to the estimated heat flux,  $P_{b,k}$  is the covariance error of the estimated heat flux,  $K_{b,k}$  is a correction gain, and  $M_k$  and  $W_k$  are the sensitivity matrices. The magnitude of the forgetting factor  $\gamma$  ranges from 0 to 1. It is employed to prevent to shrink to zero, thereby maintaining the RLSE updating ability when time-varying heat fluxes need to be estimated. This is a consequence of the RLSE algorithm where older data are gradually discarded in favour of more recent measurements. As reported in [62], measurements older than  $(1 - \gamma)^{-1}$  samples are forgotten. Thus, in spite of the fact that the RLSE algorithm remains sequential, it uses information from the  $(1 - \gamma)^{-1}$  previous measurements in order to estimate the heat flux at the current iteration. The magnitude of  $\gamma$  is usually chosen so as to ensure good tracking ability without the loss of estimate accuracy. Choosing a forgetting factor close to one will achieve a stable estimation but with reduced tracking ability (large time lag), while a smaller value for  $\gamma$  will result in better tracking capabilities but at the cost of increased noise in the solution. For more information on the Kalman filter/recursive least-square estimator and its numerical implementation, the reader is referred to [31, 62, 122].

The **fourth and last step** of the inverse method consists in calculating the phase front location with the  $s(t)$  state-space model of section 3.3, and with the estimated heat flux  $\hat{q}_{in,k}''$  given by the RLSE, that is :

$$x_{s,k} = A_s x_{s,k-1} + B_s \hat{u}_{k-1} = A_s x_{s,k-1} + B_s \begin{bmatrix} \hat{q}_{in,k-1}'' \\ h_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\hat{s}_k = H_s x_{s,k} \quad (3.26)$$

where  $x_{s,k}$  is the state vector,  $\hat{u}_{k-1} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{in,k-1}'' \\ h_{k-1} \end{bmatrix}$  is a new input vector,  $\hat{s}_k$  is the estimated phase front position, and  $A_s, B_s, H_s$  are the discrete state-space matrices of the  $s(t)$  model.

### 3.5 Results and discussion

The above inverse heat transfer procedure was thoroughly tested for estimating the time-varying input heat flux  $q_{in}''(t)$  on the right boundary and therefore for predicting the time-

varying thickness of the bank  $s(t)$ . The main feature of the present inverse heat transfer methodology is its unique capability of making predictions in real-time so that it can be easily integrated into existing control systems for predicting protective banks or ledges inside industrial high temperature furnaces. For this reason, numerical simulations were carried out using typical operating conditions that prevail in such facilities.

The main parameters for the Kalman filter and of the recursive least square estimator are provided in Tableau 3.3. As a compromise between stability and accuracy, a time step  $dt$  of 100 s was retained for the calculations. The inverse solution becomes very sensitive to the measurement errors when the time step takes too small a value (stability). On the other hand, if the time step is too large, the inverse procedure cannot capture the steep variation in the estimated heat flux (accuracy). All simulations were purposely launched with large covariance matrices  $P_{-1|-1}$  and  $P_{b,-1}$  so as to ignore the initial estimates  $\hat{x}_{-1|-1}$  and  $\hat{q}_{in,-1}''$  [29]. Consequently, the predictions for  $q_{in}''(t)$  and  $s(t)$  may exhibit some oscillations in the early stages of a simulation. These oscillations are quickly dampened however by the Kalman filter and the recursive least square estimator. Moreover, they disappear completely when the covariance matrices  $P_{-1|-1}$  and  $P_{b,-1}$  take lower values. Also, the forgetting factor  $\gamma$  was set equal to a constant value of 0.9 in order to give a good tracking ability without the loss of estimate accuracy for the predictions of  $q_{in}''(t)$  and  $s(t)$ .

Tableau 3.3 Parameters for the inverse method.

Parameter	Value
$dt$ (s)	100
$\gamma$	0.9
$\sigma_Q$	$10^{-5}$
$\hat{x}_{-1 -1}$	$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$
$P_{-1 -1}$	diag $[10^{10}]$
$\hat{q}_{in,-1}''$ (W/m <sup>2</sup> )	0
$P_{b,-1}$	diag $[10^4]$
$M_{-1}$	Zero matrix

The effect of a number of key parameters on the accuracy and stability of the predicted input heat fluxes  $q_{in}''(t)$  and bank thickness  $s(t)$  was investigated. These key parameters are the measurement noise standard deviation  $\sigma_R$ , the sensor type and its location (temperature sensor or heat flux sensor) and the steady-state initial thickness of the bank  $s_0$ . The steady-state initial thickness of the bank  $s_0$  is the thickness of the bank at the time the input heat flux  $q_{in}''(t)$  of the steady-state process is suddenly perturbed. The main results are summarized in Tableau 3.4. They are presented in terms of the relative root-



mean-square errors (RRMSE) for the input heat flux  $q''_m(t)$  and for the bank thickness  $s(t)$ . These errors are defined in the following manner :

$$RRMSE_{q''_m(t)} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n [(q''_{in,k} - \hat{q}''_{in,k}) / q''_{in,k}]^2}{n}} \quad (3.27)$$

$$RRMSE_{s(t)} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n [(s_k - \hat{s}_k) / s_k]^2}{n}} \quad (3.28)$$

Tableau 3.4 Main results.

Case	$\sigma_R$ (K or W/m <sup>2</sup> )	$s_0$ (m)	$Y(x, t)$	$RRMSE_{q''_m(t)}$ (%)	$RRMSE_{s(t)}$ (%)	$Lag_{q''_m(t)}$ (s)
#1	0.5	0.05	$T(x = 0, t)$	5.7	3.4	21000
#2	5	0.05	$T(x = 0, t)$	7.7	6.3	55000
	0.5	0.05	$T(x = 0, t)$	5	2.8	20000
#3	0.5	0.05	$T(x = L, t)$	5.4	3.1	21000
	0.5	0.05	$T(x = 1.3L, t)$	3.9	1.7	10000
#4	25	0.05	$q''(x = 0, t)$	6.1	3.7	21000
	25	0.05	$q''(x = L, t)$	4.8	1.9	8000
#5	0.5	0.075	$T(x = 0, t)$	8.2	4.3	27000
	0.5	0.02	$T(x = 0, t)$	3.3	3.5	14000

$q''_{in,k}$  and  $s_k$  represent the exact input heat flux and the exact bank thickness respectively.  $\hat{q}''_{in,k}$  and  $\hat{s}_k$  are the corresponding values estimated by the inverse method.  $n$  stands for the number of time steps for the simulation. The magnitude of the time lag  $Lag_{q''_m(t)}$  is illustrated in Figure 3.9.

As an example, Figure 3.9 compares the exact and the estimated input heat flux  $q''_m(t)$  for the reference test case #1. The corresponding time-varying exact (FDM) and estimated (inverse method) bank thicknesses are depicted in Figure 3.10. In this case, the inverse heat transfer method employs a temperature sensor located on the outside surface of the brick wall  $T(x = 0, t)$ . It is seen that the discrepancy between the exact and the estimated bank thickness remains smaller than 5% at all times. It is also noted that for a full inverse heat transfer simulation of  $2.5 \times 10^5$  s (69.4 hours), the required CPU time on an Intel® Pentium® Dual CPU T2390 1.86 GHz is less than 2 seconds.

The effect of the measurement noise standard deviation  $\sigma_R$  on the on the predicted bank thickness is shown in Figure 3.11 (case #2). As expected, the  $RRMSE$  and the time lag (Tableau 3.4) diminish as  $\sigma_R$  decreases. This is due to the fact that the Kalman gain  $K_k$  increases. In other words, more confidence is placed in the new measurement  $y_k$  (correction step) than in the *a priori* state-space vector estimation  $\hat{x}_{k|k-1}$  (prediction step) (see Eq.

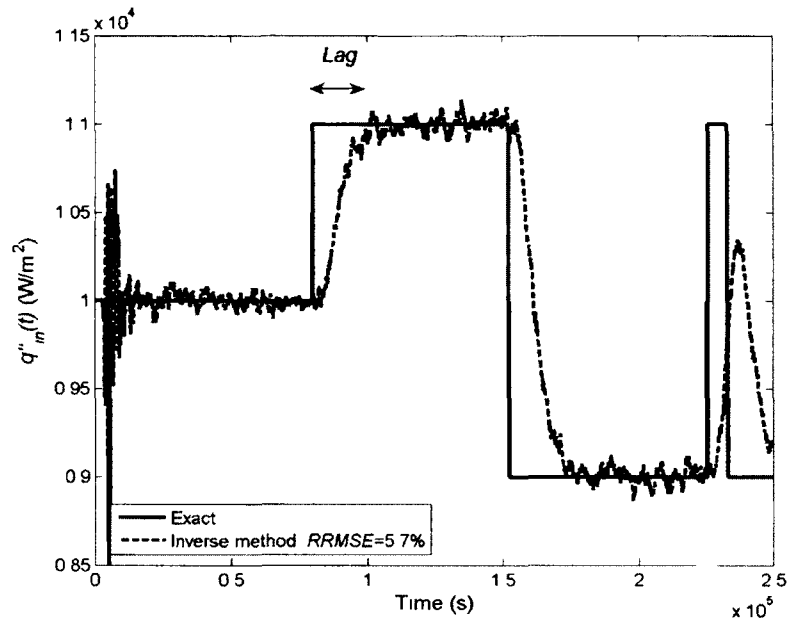


Figure 3.9 Predicted (inverse method) and exact (FDM) input heat flux for test case #1.

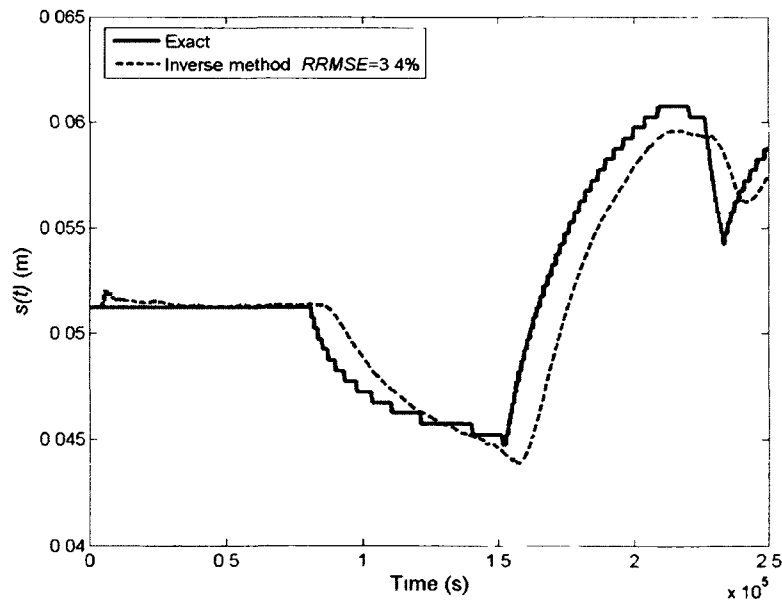


Figure 3.10 Predicted (inverse method) and exact (FDM) bank thickness for test case #1.

3.17). As a result, it yields faster transient performance for the filter [33]. It would be,

however, pointless to employ too accurate a temperature sensor, i.e.  $\sigma_R \leq 0.05$  K since, for this accuracy, the *RRMSE* and the time lag become plateaued.

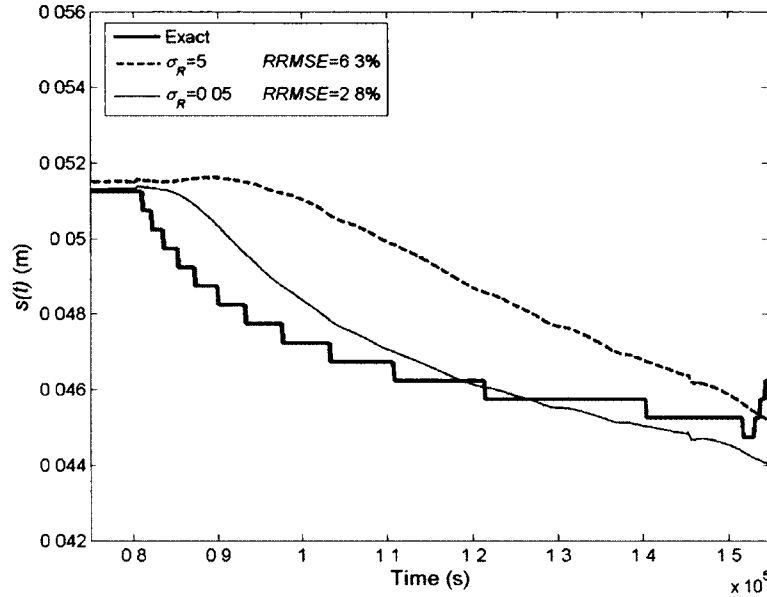


Figure 3.11 Effect of  $\sigma_R$  on the predicted bank thickness (case #2).

Figure 3.12 illustrates the effect of the sensor location on the predicted bank thickness (case #3). Due to the fact that heat transfer is conduction dominated, the closer the sensor to the phase front, the better the predictions, i.e., the *RRMSE* and the time lag are smaller. The drawback however is that embedding a sensor into the brick wall (or in the PCM) may be impractical in an industrial context. It is clear that the relative thermal resistance and the thermal contact resistance between the brick wall and the PCM play a significant role on the estimated time-varying bank thickness.

The predictions for the bank thickness were improved when the embedded temperature sensor is substituted for a heat flux sensor (Figure 3.13). This intriguing behavior has recently been highlighted in the paper of Samaï and Loulou [100]. According to these authors, there are no comprehensive studies that explain this kind of behavior. Indeed, the voluminous literature on inverse heat transfer problems considers mainly temperature target data as additional information, because temperature is one of the easiest measured physical quantities in thermal sciences. On the other hand, Figure 3.13 reveals that the predictions for the bank thickness are insensitive to the type of sensor when it is located on the outside surface of the brick wall, i.e. at  $x = 0$ . In this case, it is recommended to use a temperature sensor instead of a heat flux sensor as the former is less sensitive than

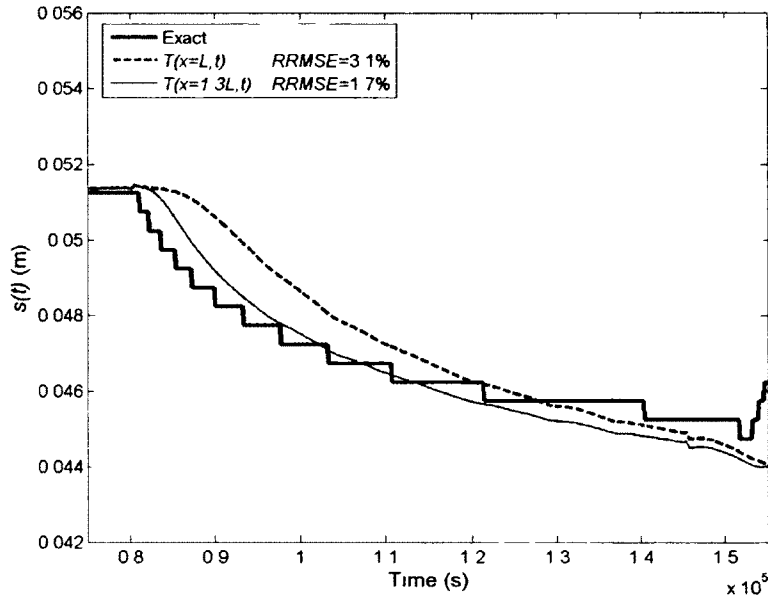


Figure 3.12 Effect of the location of the temperature sensor on the predicted bank thickness (case #3).

the latter to the fluctuating values of process noise  $w_{k-1}$ . In fact, to mimic temperature oscillations similar to those experienced in case #1, the standard deviation of the process noise  $\sigma_Q$  for the heat flux sensor located at  $x = 0$  had to be set to a lower value, i.e.  $\sigma_Q = 10^{-6}$ .

Finally, the effect of the steady-state initial bank thickness  $s_0$  was examined (Case #5). Figure 3.14 compares the exact and the estimated bank thicknesses variation  $\delta s(t) = s_0 - s(t)$  for two different  $s_0$ : 0.02 m and 0.075 m. The corresponding heat flux constant values  $q''_{in,0}$  are 15000 W/m<sup>2</sup> and 8000 W/m<sup>2</sup> respectively. This figure shows that the accuracy of the predictions is strongly influenced by the thermal resistance across the bank. Once again, this is a consequence of the heat diffusion phenomenon. As a result, the *RRMSE* and the time lag are smaller for thinner banks. This tendency of the inverse method to provide faster and increasingly accurate predictions of the bank thickness as it shrinks is of the utmost interest for the industry. Indeed, it is when the protective banks become thin and threaten to disappear that it is more than ever imperative for the control system to react quickly and accurately in order to avoid accidental damages to the facility.

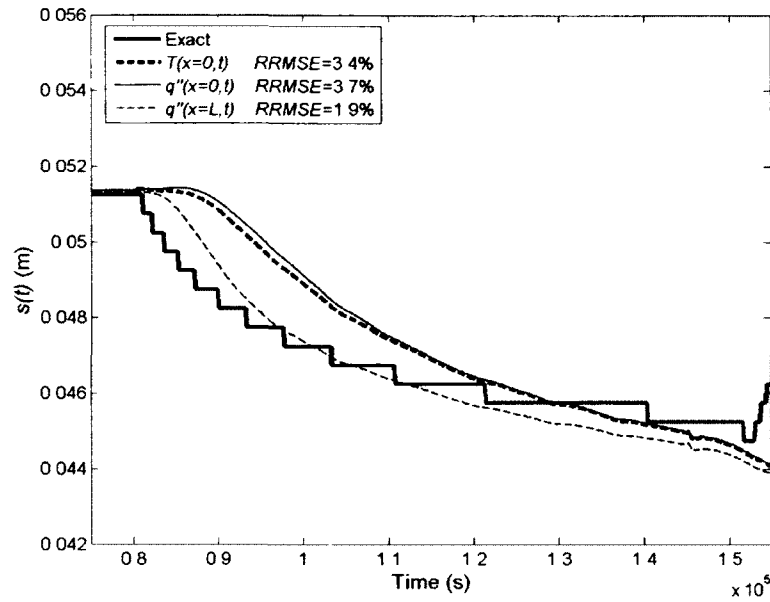


Figure 3.13 Effect of the location of the heat flux sensor on the predicted bank thickness (case #4).

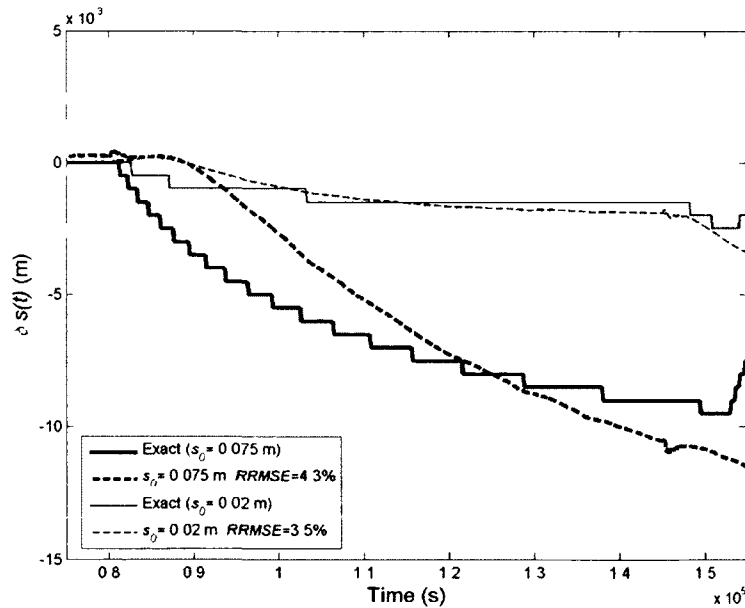


Figure 3.14 Effect of  $s_0$  on the predicted bank thickness variation  $\delta s(t) = s_0 - s(t)$  (case #5).

### 3.6 Concluding remarks

An inverse heat transfer procedure for predicting the time-varying thickness of phase-change banks on the inside surface of the walls of high temperature furnaces was presented.

The main feature of the inverse method is its unique capability of making fast predictions so that it can be easily integrated to existing real-time control systems of industrial facilities. The method rests on fast computing state-space models (direct model) that are designed to mimic the response of a full finite-difference model of the phase change problem. A Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator (inverse method) is employed to estimate the time-varying phase front position from the data collected by a temperature and/or heat flux sensor located in the furnace wall. The inverse heat transfer procedure was thoroughly tested for typical phase change conditions that prevail inside industrial facilities. The effect of the sensor type (temperature sensor or heat flux sensor), of its location, of the measurement noise and of the steady-state initial bank thickness on the accuracy and stability of the predicted time-varying bank thickness was investigated. It was shown that the proposed inverse heat transfer procedure becomes increasingly reliable and accurate for predicting the bank thickness as it shrinks. This feature is of the utmost interest for preventing the sudden and accidental loss of the protective banks of industrial furnaces filled with molten material. Recommendations were also made concerning the type and location of sensors.

### 3.7 Acknowledgements

The authors are very grateful to the *Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT)*, to the *Centre québécois de recherche et de développement de l'aluminium (CQRDA)*, and to the Natural Sciences and Engineering Council of Canada (NSERC) for their financial support. M. LeBreux would also like to thank Professor Philippe Micheau for having introduced him to the state-space theory and the Kalman filter.



# CHAPITRE 4

## CONTRÔLE

### Avant-propos

**Auteurs et affiliation :**

M. LeBreux : étudiant au doctorat, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

M. Désilets : professeur, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

M. Lacroix : professeur, Université de Sherbrooke, Faculté de génie, Département de génie mécanique.

**Date de soumission :** 9 avril 2011

**Revue :** International Journal of Thermal Sciences

**Référence :** [80]

**Titre français :**

Contrôle de la gelée dans les réacteurs métallurgiques à haute température en utilisant un capteur virtuel

**Contribution au document :**

Cet article contribue à la thèse en présentant une procédure complète pour estimer et contrôler l'épaisseur de gelée dans une cuve d'électrolyse à l'aide d'un capteur virtuel. Grâce à sa rapidité de calcul, le capteur virtuel développé au chapitre 3 est combiné à une stratégie de contrôle qui régule le système de refroidissement des parois latérales de la cuve, ce qui permet de contrôler à sa guise l'épaisseur de gelée malgré les perturbations thermiques inhérentes du procédé d'électrolyse. La stratégie de contrôle présentée correspond à un contrôleur classique proportionnel-intégral-dérivatif (PID), largement utilisé dans l'industrie. De plus, les procédures d'identification en modèles d'états et en fonctions de transfert, qui sont nécessaires pour le capteur virtuel et la boucle de contrôle respectivement, sont exposées tour à tour. En utilisant les fonctions de transfert, tous les outils de la théorie du contrôle linéaire sont disponibles. Ainsi, les analyses de performance, stabilité, et robustesse



de la stratégie de contrôle sont effectuées et permettent le design du contrôleur PID. Ce contrôleur, combiné au capteur virtuel, est ensuite validé sur le modèle numérique non-linéaire de la cuve d'électrolyse. Finalement, des travaux futurs se pencheront sur les améliorations possibles de la procédure d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée dans une cuve d'électrolyse : la validation expérimentale, le développement de la méthode inverse non-linéaire, et l'utilisation d'une stratégie de contrôle non-linéaire.

### Résumé français :

Une procédure complète pour estimer et contrôler l'épaisseur de gelée à l'intérieur des réacteurs métallurgiques à haute température est présentée dans le cadre de ce travail. Un filtre de Kalman, basé sur une représentation en modèles d'état du réacteur, est combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés (méthode inverse) afin d'estimer l'évolution du front de solidification à partir de mesures thermiques (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois du réacteur. La méthode inverse, utilisée ici comme un capteur virtuel, est ensuite combinée à une stratégie de contrôle afin de contrôler l'épaisseur de gelée en régulant le refroidissement sur les parois extérieures du réacteur. En utilisant des fonctions de transfert pour le réacteur et le capteur virtuel dans le domaine de Laplace, le design d'un contrôleur classique proportionnel-intégral-dérivatif (PID) est réalisé en vérifiant sa performance, sa stabilité et sa robustesse. Finalement, le contrôle de l'épaisseur de gelée à l'aide d'un capteur virtuel est vérifié sur le modèle non-linéaire du réacteur métallurgique. Les résultats montrent que le contrôleur PID demeure stable pour chacune des conditions d'opération, qu'il assure une erreur nulle en régime permanent ainsi qu'aucun dépassement de consigne, et procure une erreur maximale de  $1 \times 10^{-3}$  m sur le suivi de la consigne de l'épaisseur de gelée.

## Title

Control of phase change ledges in high temperature metallurgical reactors using a virtual sensor.

## Abstract

A methodology for the inverse prediction and control of the time-varying ledge thickness in high temperature metallurgical reactors is presented. A Kalman filter, based on a state-

space representation of the reactor, is coupled with a recursive least-square estimator and a state-space model (inverse method) in order to estimate the real-time-varying solidification front position from the data collected by a heat flux sensor embedded in the reactor wall. The inverse method, used here as a virtual sensor, is then combined to a control strategy in order to control the ledge thickness by regulating the air cooling applied on the outside surface of the reactor wall. By employing transfer functions for the reactor and a virtual sensor in the Laplace domain, the design of the proportional-integral-derivative controller (PID) is performed by verifying its performance and robustness. Finally, the control of the ledge thickness using a virtual sensor is tested for the nonlinear reactor model. Results indicate that the controller remains stable under all operating conditions. Moreover, it ensures a null steady-state tracking error and shows no overshoots, and the maximum tracking error remains less than  $2.5 \times 10^{-3}$  m on the estimated ledge thickness.

## Keywords

Ledge, Metallurgical reactor, Virtual sensor, Soft sensor, Inverse method, Control, PID, Kalman filter, Recursive least-square estimator.

## Nomenclature

Roman

$A$	state-space matrix
$B$	state-space matrix
$C$	state-space matrix
$C_p$	specific heat [J/kgK]
$dt$	time step [s]
$dx$	space step [m]
$d(s)$	disturbance signal [m]
$D$	width of the PCM layer [m]
$e$	tracking error [m]
$E$	variance
$f$	liquide fraction
$F(s)$	transfer function of the disturbances
FDM	Finite-difference model
$K$	optimal Kalman gain

$K_b$	RLSE correction factor
$G(s)$	transfer function of the reactor
GM	gain margin [dB]
$h$	heat transfer coefficient [W/m <sup>2</sup> K]
$H$	state-space matrix
$I$	identity matrix
$k$	thermal conductivity [W/mK]
$K(s)$	transfer function of the controller
$K_p$	controller proportional gain
$L$	width of the brick wall [m]
$L(s)$	open-loop transfer function
max	maximum value
$M$	RLSE sensitivity matrix
$N$	total number of input/output data
$q''$	heat flux [W/m <sup>2</sup> ]
$\hat{q}''$	estimated heat flux [W/m <sup>2</sup> ]
$q''_m$	heat flux imposed at the boundary $x = L + D$ [W/m <sup>2</sup> ]
$P$	covariance matrix of the estimated state
$P(0 0)$	initial covariance matrix of the estimated state
$P_b$	covariance matrix of the estimated heat flux
$P_b(0)$	initial covariance matrix of the estimated heat flux
PCM	phase change material
PEM	prediction error minimization
PM	phase margin [deg]
$Q$	covariance matrix of the process noise
$r$	ledge thickness set point [m]
$R$	covariance matrix of the measurement noise
RLSE	recursive least-square estimator
$s$	ledge thickness [m]
$\hat{s}$	estimated ledge thickness [m]
$S$	residual covariance
$S(s)$	sensitivity function
$t$	time [s] or number of sampling instants
$t t-1$	<i>a priori</i> estimate
$t t$	<i>a posteriori</i> estimate
$T$	temperature [K]

$T_d$	derivative time constant [s]
$T_i$	integral time constant [s]
$u$	input signal vector
$\hat{u}$	estimated input signal vector
$v$	measurement noise [W/m <sup>2</sup> ]
$V_N$	PEM algorithm cost function
$w$	process noise
$W$	RLSE sensitivity matrix
$x$	state vector or space direction
$\hat{x}$	estimated state vector
$y$	measurement vector [m, K, W/m <sup>2</sup> ]
$\hat{y}$	mean of $y$ [m, K, W/m <sup>2</sup> ]
$\bar{y}$	measurement residual [K, W/m <sup>2</sup> ]
$\hat{y}$	predicted output of the state-space model [m, K, W/m <sup>2</sup> ]
$Y$	thermal readings from the sensor [W/m <sup>2</sup> ]

#### Greek symbols

$\alpha$	parameter related to structured uncertainties [%]
$\delta$	dynamic variation
$\delta H$	volumetric enthalpy change [J/m <sup>3</sup> ]
$\epsilon$	difference between the outputs of the FDM and the state-space model
$\gamma$	RLSE forgetting factor
$\lambda$	heat of fusion [J/kg]
$\rho$	density [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_Q$	process noise standard deviation
$\sigma_R$	measurement noise standard deviation [W/m <sup>2</sup> ]

#### Subscripts

0	initial or constant
$\infty$	ambient
<i>brick</i>	brick wall
<i>liq</i>	liquidus
<i>liquid</i>	liquid (PCM)
<i>PCM</i>	phase change material

$s$	$s(t)$ state-space model
$sol$	solidus
$solid$	solid(PCM)

#### Superscripts

$T$	transposed matrix
-----	-------------------

## 4.1 Introduction

An interesting melting/solidification process that arises in high temperature metallurgical reactors such as aluminum electrolysis cells (EC) is the formation of a solid layer, called a ledge, on the inside surface of the reactor walls (Figure 4.1) [54, 119, 126]. This ledge is formed as the molten material comes into contact with the cooled surface of the wall and solidifies. The presence of the ledge is highly desirable. It serves as a protective barrier against the corrosive molten material, thereby maintaining the integrity of the cell and prolonging its active life [96, 119]. On the other hand, too thick a ledge is detrimental to the reactor as the active cell volume is reduced. Furthermore, horizontal currents may be generated thereby disturbing the magneto-hydrodynamics stability of the cell and, as a result, decreasing the current efficiency [54, 96]. Maintaining a ledge of optimal size at all times is therefore crucial for the safe and profitable operation of the EC.

Unfortunately, due to the hostile conditions that prevail inside the EC, i.e. the high temperature and corrosiveness of the electrolytic bath, probing the time-varying thickness and shape of the ledge with sensors submerged into the molten electrolyte is a very difficult task, not to say impractical. The standard method for measuring the thickness of the ledge is to probe it manually [121]. This method is time consuming and requires qualified personnel to perform the task. Also, the measurements are usually taken days apart and they require the opening of the cell which results in significant heat losses to the surroundings and the release of undesirable chemicals into the atmosphere [21].

The alternative is to attempt to predict the ledge profile with inverse heat transfer methods that rely on temperatures and/or heat fluxes recorded by non-intrusive sensors embedded in the cell walls. These non-intrusive sensors may be seen as a virtual sensor or soft sensor. A virtual sensor can be seen as a set of smart sensors which allow on-line measurements of “hard to measure” process variables [52].

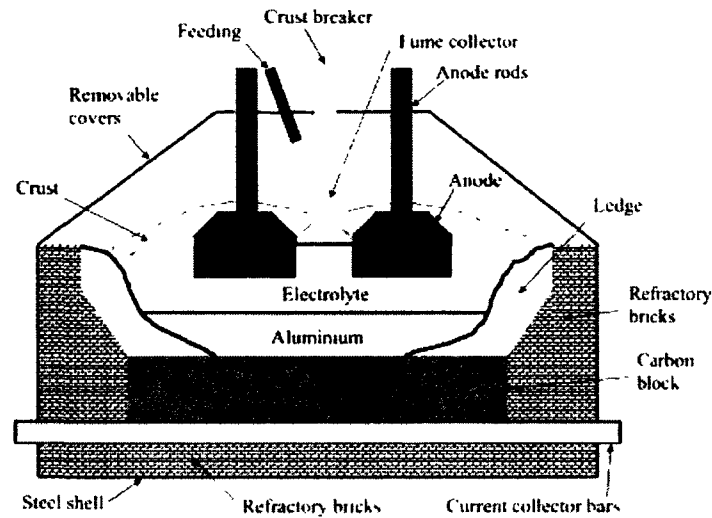
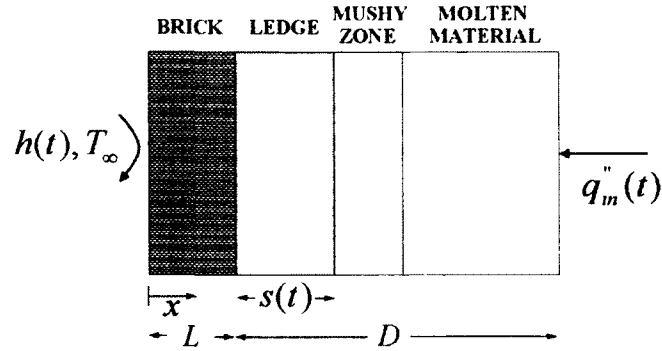


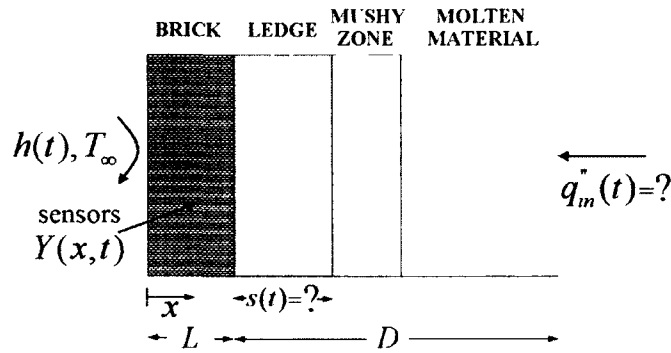
Figure 4.1 Cross view of a typical aluminum electrolysis cell with molten material (electrolyte) and protective ledge.

Shape predictions of banks or ledges on reactor walls with inverse heat transfer methods have been the subject of few investigations in the past [20, 30, 66, 76, 112, 114]. Figure 4.2 shows such an inverse 1-D problem. The ledge is represented by the solid phase of the phase change material (PCM). In the direct problem (Figure 4.2 a), the time-varying heat flux  $q''_m(t)$  at the right boundary is known. This heat flux may represent the heat load supplied to the reactor. The solution for the temperature distribution  $T(x, t)$  and for the thickness of the ledge (the location of the solidification front)  $s(t)$  may then be determined from the solution of the energy conservation equation. In the inverse problem (Figure 4.2 b), the time-varying heat flux  $q''_m(t)$  at the right boundary is unknown. It can be estimated however with an inverse method that uses temperatures and/or heat fluxes  $Y(x, t)$  recorded by sensors located inside the brick wall. With the estimated heat flux  $q''_m(t)$ , the ledge thickness  $s(t)$  can therefore be estimated.

In an industrial context, the interest (and the challenge) is to control at all times the thickness of the ledge. Most inverse heat transfer methods for phase change problems have been developed however with the sole purpose of predicting the location of the solidification front  $s(t)$ . Indeed, most of the proposed inverse calculation strategies rely on the conjugate gradient method with an adjoint equation. These strategies are referred as the Alifanov's iterative regularization method. In spite of its success, this method is CPU time consuming, because in most cases, it uses complex direct models composed of finite differences or finite elements. As the simulation time and the number of nodes grow, the conjugate gradient



(a) Direct problem :  $q_m''(t)$  and  $h(t)$  are known;  $T(x, t)$ ,  $q''(x, t)$ , and  $s(t)$  are predicted with the finite difference numerical model.



(b) Inverse Problem :  $q_m''(t)$  is unknown. It is determined from temperatures and/or heat fluxes  $Y(x, t)$  measured inside the brick wall.

Figure 4.2 Schematic of a 1-D phase change problem inside a high temperature metallurgical reactor.

method with an adjoint equation become unsuitable for real-time control applications [17, 68]. As for the virtual area method, its least-square algorithm is CPU time efficient, but the downside is that it doesn't include the phase change process, the inverse methodology can be used only with a temperature sensor (not a heat flux sensor) and that the simulations are conducted in steady-state.

The objective of the present study is to remedy this situation by proposing an inverse heat transfer procedure adapted to the real-time control of the ledge inside a reactor. The inverse method (or virtual sensor) is based on a Kalman-filter that employs a recursive least-square estimator (RLSE) and a state-space model coupled to a traditional proportional-integral-derivative (PID) control strategy. In spite of the fact that various real-time estimation methods are available for implementing a control algorithm, for example Kalman filters

with augmented state [32, 53, 102], Kalman filters with RLSE [31, 68, 122], partial least-square (PLS) regression methods [34, 47, 104] or adaptive iterative filters [84, 85, 92], the present work is a continuation of the study reported in reference [79]. The main features of the proposed linear method are as follows : 1) the algorithm is simple ; 2) it handles complex inverse phase change processes ; 3) it doesn't need to rely on a statistical database ; and 4) the inverse methodology can be carried out indiscriminately with temperature and/or heat flux sensors.

A schematic of the overall calculation procedure is depicted in Figure 4.3. First, a finite-difference model (FDM) is developed for predicting the nonlinear melting/solidification process inside the reactor. Second, a state-space identification of this mathematical model is proposed. Third, the inverse method (the virtual sensor), combining a Kalman filter, a RLSE and a state-space model, is presented. Fourth, transfer functions for the reactor and for the virtual sensor are identified in order to use the performance and stability tools available from the linear control theory. Fifth, using the traditional feedback loop in the Laplace domain and the previous transfer functions, a controller is designed in order to control the ledge thickness. The performance and the robustness of the controller are examined. Finally, the control strategy is coupled with the virtual sensor in order to control in real-time the ledge thickness inside the reactor. The control strategy is thoroughly tested for typical operating conditions that prevail inside an industrial facility.

## 4.2 Finite difference model (FDM) of the reactor

The one-dimensional phase change problem under investigation is depicted in Figure 4.2 a). A time-varying ledge of thickness  $s(t)$ , which corresponds to the solidification front location, is pressed against the inner surface of a brick wall of thickness  $L$ . The outer surface of the brick wall, i.e. the left boundary condition, is cooled by forced convection heat transfer with an impinging air jet. The air temperature remains constant and equal to  $T_\infty$  and the time-varying heat transfer coefficient  $h(t)$  is known. The temperature  $T_\infty$  is measured with a thermocouple. As for the air flow rate of the impinging jet, it is coupled to the heat transfer coefficient via an empirical correlation that employs the non dimensional Reynolds and Nusselt numbers of the flow [67]. Consequently, the heat transfer coefficient  $h(t)$  may easily be controlled by varying the air mass flow rate of the impinging jet. For the present cooling system, the heat transfer coefficient ranges from 60 W/m<sup>2</sup>K to 120 W/m<sup>2</sup>K [67]. A time-varying heat flux  $q''_m(t)$ , which represents the heat load supplied to the reactor, is imposed on the right boundary condition at  $x = L + D$ . In the case of aluminium electrolysis cells, the heat load may be affected by different operating conditions : alumina



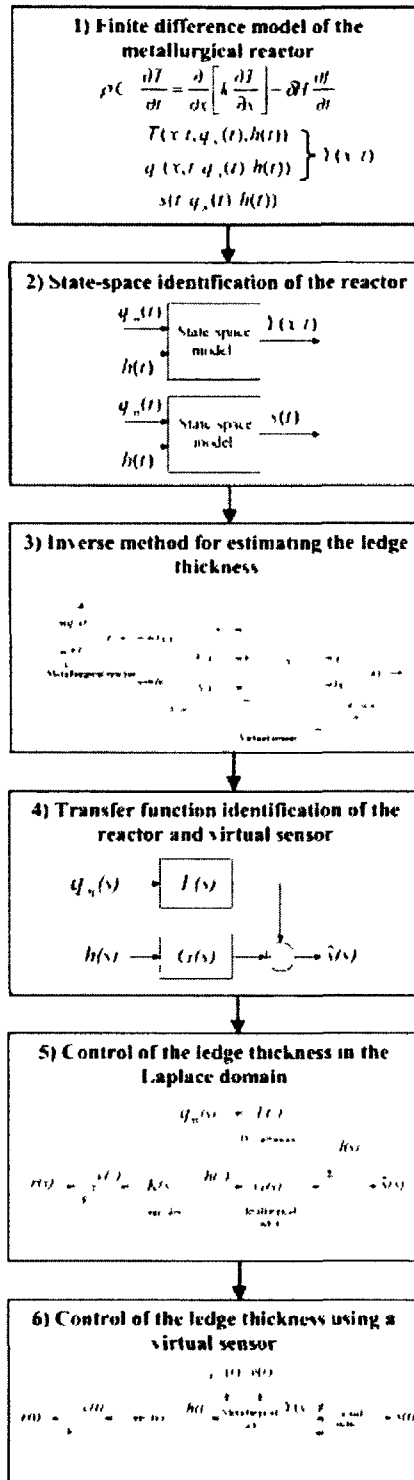


Figure 4.3 Overall calculation procedure.

feeding, anode replacement, changes in the anode-cathode distance [54, 113, 119, 126]. These operations can be thought as thermal disturbances to the electrolysis process. They can be correlated to the variation of the input heat flux  $q''_{in}(t)$  from energy balances [54].

The mathematical model for the phase change problem rests on the following assumptions :

- The temperature gradients across the wall ( $x$  direction) are much larger than the temperature gradients in the vertical direction so that a one-dimensional analysis can be applied. As a result, a single portion of the metallurgical reactor (at the metal/bath interface) is examined, and thus the ledge profile is assumed to be uniform.
- The phase change problem is non isothermal. It is characterized by a mushy zone between the solidus temperature  $T_{sol}$  and the liquidus temperature  $T_{liq}$ .
- The 1D cooling of the reactor external wall by an impinging jet corresponds to forced convection heat transfer only. The cooling process is thermally decoupled from the phase change problem inside the reactor. Therefore, the ambient temperature  $T_{\infty}$  and the heat transfer coefficient  $h(t)$  are well known at all times.
- The thermal contact resistance between the brick wall and the ledge is neglected.
- The thermal properties of the phase change material (PCM) are temperature independent ; they are, however, different for the liquid and the solid phase.
- The heat transfer across the liquid layer of the PCM is conduction dominated. The effect of the flow circulation in the liquid layer could however be accounted for in the diffusion model by means of an effective thermal conductivity. The reader is referred to references [114, 123] for further details on this matter.

With the foregoing assumptions, the governing heat diffusion equation for the wall and the PCM may be stated as :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \delta H \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.1)$$

The boundary conditions are :

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(t)[T(0, t) - T_{\infty}] \quad (4.2)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L+D} = q_{in}''(t) \quad (4.3)$$

and the initial condition is :

$$T(x, 0) = T_0 \quad (4.4)$$

The second term on the right-hand side of Eq. (4.1) accounts for the solid/liquid phase change. Of course, this term vanishes inside the brick wall. The enthalpy change  $\delta H$  is defined as  $\delta H = \rho(C_{p,liquid} - C_{p,solid})T + \rho\lambda$ . The liquid fraction  $f$  varies linearly between the solidus  $T_{sol}$  and the liquidus  $T_{liq}$  in the following manner :

$$f = f(T) = \begin{cases} 0 & T \leq T_{sol} \\ \frac{T - T_{sol}}{T_{liq} - T_{sol}} & T_{sol} < T < T_{liq} \\ 1 & T \geq T_{liq} \end{cases} \quad (4.5)$$

Eqs. (4.1-4.5) were discretized using second-order finite differences in space, and first-order differences in time with an implicit scheme. The resulting set of algebraic equations is then solved using a tri-diagonal matrix algorithm (TDMA). For each time step, the liquid fraction  $f$  in Eq. 4.1 is determined according to the enthalpy method, an iterative procedure developed by Voller [125]. More details concerning the resolution of Eqs.(4.1-4.5) can be found in appendix A.

The above FDM was thoroughly tested and validated using analytical solutions and results available in the open literature. More details concerning the validation of the numerical model are reported in Ref. [79].

Due to the fact that no experimental data are available at the moment, the present paper assumes that the FDM simulates accurately the thermal behaviour of a high temperature metallurgical reactor. Moreover, the thickness of the brick wall was fixed at  $L = 0.1$  m and the width of the PCM layer (solid, mushy, and liquid) was set equal to  $D = 0.1$  m (Figure 4.2 a). The outside temperature was kept constant at  $T_{\infty} = 300$  K. The time step  $dt$  and the mesh size  $dx$  were set to 100 s and  $0.5 \times 10^{-3}$  m respectively. The physical properties of the brick wall and of the PCM for a typical high temperature metallurgical reactor are provided in Tableau 4.1 [116, 126].

Tableau 4.1 Physical properties of the brick wall and of the PCM for a typical high temperature metallurgical reactor [116, 126].

Parameter	Value
$C_{p,brick}$ (J/kgK)	875
$k_{brick}$ (W/mK)	16.8
$\rho_{brick}$ (kg/m <sup>3</sup> )	2600
$C_{p,PCM,solid}$ (J/kgK)	1800
$k_{PCM,solid}$ (W/mK)	1
$\rho_{PCM}$ (kg/m <sup>3</sup> )	2100
$C_{p,PCM,liquid}$ (J/kgK)	1800
$k_{PCM,liquid}$ (W/mK)	10
$\lambda$ (J/kg)	$5.1 \times 10^5$
$T_{sol}$ (K)	1213
$T_{liq}$ (K)	1233

### 4.3 State-space identification of the reactor

State-space models are needed for estimating the ledge thickness with the inverse method (section 4.4), and for identifying the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$  of the reactor and of the virtual sensor (section 4.5).

The state-space identification consists in casting the predictions of the FDM into the following linear state-space form :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.6)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.7)$$

$x(t)$  is the identified state vector, with no physical meaning.  $u(t) = \begin{bmatrix} q''_in(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$  is the input vector.  $y(t)$  is the measurement vector, which contains the information from the FDM ( $s$ ,  $T$ , or  $q''$ ).  $v(t)$  is the measurement noise. Finally, the state-space matrices are defined by the symbols  $A$ ,  $B$ , and  $C$  respectively.

Moreover, due to the fact that heat is absorbed or released during the phase change process, the mathematical model of the reactor is strongly nonlinear, i.e. the relations between the input vector  $u(t) = \begin{bmatrix} q''_in(t) \\ h(t) \end{bmatrix}$  and the measurement vector ( $y(t)$  ( $s$ ,  $T$ , or  $q''$ )) are nonlinear. In order to cast the FDM into the state-space form of Eqs. 4.6 and 4.7,

it must be linearized first. This linear approximation of the real system is valid only for values around the operating point of the system [75]. In the present case, the operating point of the reactor corresponds to a constant value for the input vector  $u_0$ . The range around the operating point is defined by the dynamic variation  $\delta u(t)$  of the input vector. The input vector can thus be rewritten in the following manner :

$$u(t) = u_0 \pm \delta u(t) = \begin{bmatrix} q''_{in,0} \pm \delta q''_{in}(t) \\ h_0 \pm \delta h(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

where  $q''_{in,0}$  and  $h_0$  are the constant values of the heat flux and of the heat transfer coefficient respectively, and  $\delta q''_{in}(t)$  and  $\delta h(t)$  are their respective dynamic variations whose maximum magnitude around the working point are chosen *ad hoc* in order to ensure a linear relation between  $u(t)$  and  $y(t)$ . This is achieved by calculating the best fit (Eq. 4.9) each time the state-space identification procedure is run [82]. The best fit corresponds to a percentage value that quantifies the match between the predicted output of the state-space model  $\hat{y}$  and the data yielded from the FDM  $y(t)$ . A best fit of 100% corresponds to a perfect fit.

$$\text{best fit} = \left( 1 - \left| \frac{y(t) - \hat{y}(t)}{y(t) - \hat{y}} \right| \right) \times 100\% \quad (4.9)$$

where  $\hat{y}$  corresponds to the mean of  $y(t)$ .

The resulting state-space identification procedure is summarized in Figure 4.4. First, the input vector of Eq. 4.8 is fed to the FDM. The corresponding output signals generated by this model are the solidification front location  $s(t)$  and the thermal response of the sensors  $Y(x, t)$ . These sensors record temperature and/or heat flux signals taken inside the reactor's brick wall. For example, the signal  $Y(x, t) = T(x = 0, t)$  represents the temperature measured by a thermocouple located at the left boundary and the signal  $Y(x, t) = q''(x = L, t)$  is the heat flux measured by a heat flux sensor located at the wall/ledge interface.

Thus, by specifying the order of the desired state-space models, i.e. the length of the state vector, and from the input/output data pair  $\begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, [s(t)]$  and  $\begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, [Y(x, t)]$ , the identification algorithm generates the matrices  $A$ ,  $B$ , and  $C$  for each of the two state-space models, i.e. the model  $s(t)$  and the  $Y(x, t)$  model. The state-space identification algorithm corresponds to the iterative prediction-error minimization method (PEM) reported in reference [82]. The objective of the PEM is to minimize the cost function  $V_N$  defined as :

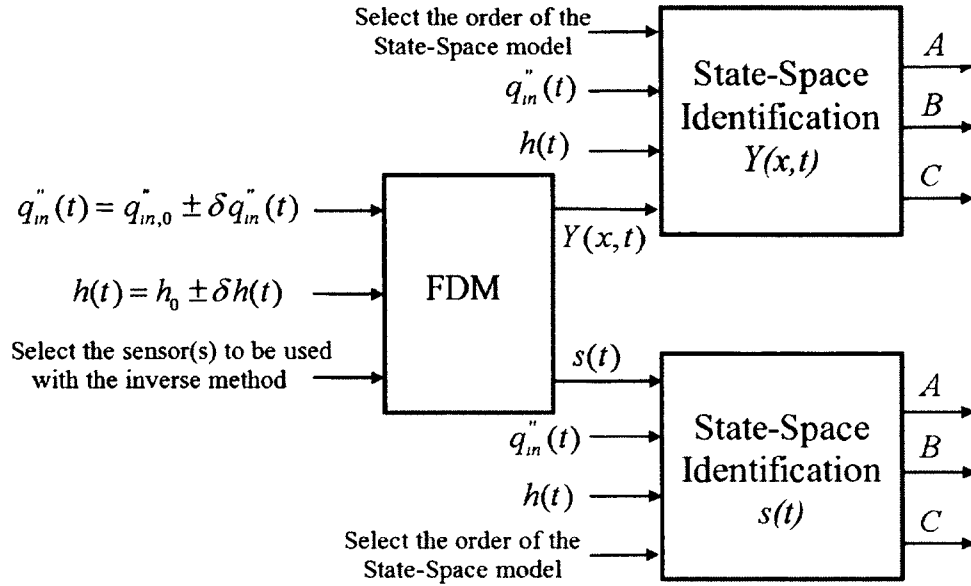


Figure 4.4 The state-space identification procedure.

$$V_N = \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t) = \sum_{t=1}^N [y(t) - \hat{y}(t)]^2 \quad (4.10)$$

where  $N$  is the total number of input/output data pair, and  $\epsilon(t)$  is the difference between the data extracted from the data bank  $y(t)$  and the predicted output of the state-space model  $\hat{y}(t)$ .

## 4.4 Inverse method for estimating the ledge thickness

In the inverse problem, the heat flux  $q_{in}''(t)$  on the right boundary is unknown (Figure 4.2 b). It may be estimated however with an inverse method which employs a temperature and/or heat flux sensor embedded in the brick wall. Once the heat flux  $q_{in}''(t)$  has been estimated based on these measurements  $Y(x, t)$ , the solidification front location, or ledge thickness,  $s(t)$  is determined from the  $s(t)$  state-space model of section 4.3. The overall inverse methodology based on the Kalman filter, RLSE, and state-space model is illustrated in Figure 4.5. The method may be divided into four steps.

The **first step** is concerned with the thermal behavior of the reactor. Bear in mind that it is assumed that the FDM represents faithfully the thermal behavior of a real high temperature metallurgical reactor. While the industrial process is running, the PCM inside the reactor may undergo melting/solidification cycles due to the time-varying heating  $q_{in}''(t)$

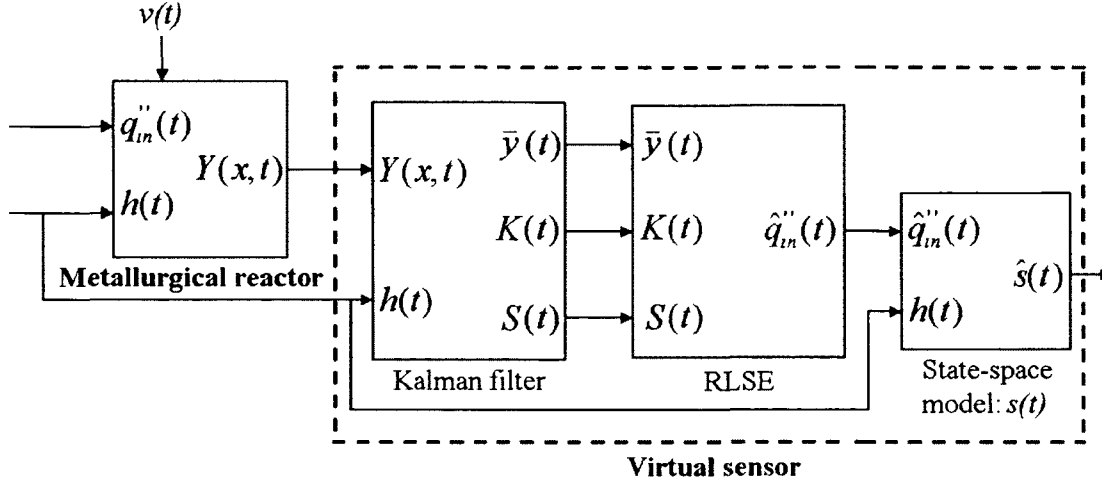


Figure 4.5 The inverse method : a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator and a state-space model. It acts as a virtual sensor for estimating the ledge thickness.

and cooling  $h(t)$  conditions. This will in turn generate data for the heat flux sensor  $Y(x, t)$  located in the brick wall. These data contain noise  $v(t)$  which is considered as a zero mean Gaussian white noise with covariance  $R$  defined as the covariance matrix of the measurement noise (Eq. 4.11).

$$v(t) \sim N(0, R) = N(0, \sigma_R^2) \quad (4.11)$$

The **second step** consists in using a Kalman filter which is a set of mathematical equations that provide an efficient recursive mean to estimate the state of a process (the phase change process) [71]. The Kalman filter estimates a process by using a form of feedback control : the filter estimates the process state at some time and then obtains feedback in the form of noisy measurement. Referring to Figure 4.5, the Kalman filter estimates the process state of the reactor with the sensor measurement  $Y(x, t)$ . It also uses simultaneously only one of the input signals, i.e. the heat transfer coefficient  $h(t)$ . In order to estimate correctly the process state, the Kalman filter proceeds through two steps : 1) the time update step (prediction) followed by 2) the measurement update step (correction) [127].

The time update equations project the current state estimate  $\hat{x}(t-1|t-1)$  and the error covariance matrix estimate  $P(t-1|t-1)$  forward in time in order to obtain the *a priori* estimate for the next time step, i.e.  $\hat{x}(t|t-1)$  and  $P(t|t-1)$  (Eqs. 4.12-4.13). The variable

$t$  stands here for the number of sampling intervals. In order to accommodate the Kalman filter, the inverse method developed in the present paper is for discrete systems.

$$\hat{x}(t|t-1) = A\hat{x}(t-1|t-1) + B_2h(t) \quad (4.12)$$

$$P(t|t-1) = AP(t-1|t-1)A^T + Q \quad (4.13)$$

where  $B$  is the state-space matrix  $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ . The covariance matrices  $P(t-1|t-1)$  and  $P(t|t-1)$  characterize the accuracy of the computed state estimate  $\hat{x}(t-1|t-1)$  and  $\hat{x}(t|t-1)$  respectively.  $Q$  is the covariance matrix of the process noise  $w(t)$  which accounts for the disturbances to the metallurgical reactor dynamics. The process noise  $w(t)$  is assumed once again to be zero mean Gaussian white noise with covariance  $Q$  defined as the covariance matrix of the process noise (Eq. 4.14).

$$w(t) \sim N(0, Q) = N(0, \sigma_Q^2) \quad (4.14)$$

The feedback is then performed by the measurement update equations that incorporate a new measurement  $Y(x, t)$  into the *a priori* estimates  $\hat{x}(t|t-1)$  and  $P(t|t-1)$  in order to obtain an improved *a posteriori* estimate  $\hat{x}(t|t)$  and  $P(t|t)$  (Eqs. 4.15-4.16).

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)[Y(x, t) - C\hat{x}(t|t-1)] \quad (4.15)$$

$$P(t|t) = [I - K(t)C]P(t|t-1) \quad (4.16)$$

Where  $I$  is the identity matrix, and  $K(t)$  is the optimal Kalman gain (Eq. 4.17) that minimizes the *a posteriori* error covariance  $P(t|t)$ .

$$K(t) = P(t|t-1)C^T [CP(t|t-1)C^T + R]^{-1} \quad (4.17)$$

One important result of this process,  $\bar{y}(t) = [Y(x, t) - C\hat{x}(t|t-1)]$ , corresponds to the measurement residual which reflects the discrepancy between the predicted measurement  $C\hat{x}(t|t-1)$  and the actual measurement  $Y(x, t)$ . Finally,  $S(t) = [CP(t|t-1)C^T + R]$



stands for the residual covariance which is the covariance matrix of the measurement residual  $\bar{y}(t)$ .

In the **third step** of the inverse method, the recursive least-square estimator (RLSE) is applied to the present heat transfer problem. The RLSE is a well known recursive technique used in the field of adaptive signal processing. The reader is referred to reference [62] for a full discussion on this technique. The RLSE estimates the unknown heat flux  $q''_{in}(t)$  using the information generated from the Kalman filter, that is the measurement residual  $\bar{y}(t)$ , the optimal Kalman gain  $K(t)$ , and the residual covariance  $S(t)$ . The full RLSE algorithm is reported in references [31, 122] and in appendix C. The overall results can be stated in terms of the following set of five equations :

$$M(t) = [I - K(t)C] [AM(t-1) + I] \quad (4.18)$$

$$W(t) = C [AM(t-1) + I] B_1 \quad (4.19)$$

$$K_b(t) = \gamma^{-1} P_b(t-1) W(t)^T [W(t) \gamma^{-1} P_b(t-1) W(t)^T + S(t)]^{-1} \quad (4.20)$$

$$P_b(t) = [I - K_b(t)W(t)] \gamma^{-1} P_b(t-1) \quad (4.21)$$

$$\hat{q}''_{in}(t) = \hat{q}''_{in}(t-1) + K_b(t) [\bar{y}(t) - W(t)\hat{q}''_{in}(t-1)] \quad (4.22)$$

Where  $\hat{q}''_{in}(t)$  corresponds to the estimated heat flux,  $P_b(t)$  is the covariance error of the estimated heat flux,  $K_b(t)$  is a correction gain, and  $M(t)$  and  $W(t)$  are the sensitivity matrices. The magnitude of the forgetting factor  $\gamma$  ranges from 0 to 1. It is employed to prevent  $K_b(t)$  to shrink to zero, thereby maintaining the RLSE updating ability when the time-varying heat fluxes need to be estimated. This is a consequence of the RLSE algorithm where older data are gradually discarded in favour of more recent measurements. As reported in [62], measurements older than  $(1 - \gamma)^{-1}$  samples are forgotten. The magnitude of  $\gamma$  is usually chosen so as to ensure good tracking ability without the loss of accuracy.

In the **fourth and last step** of the inverse method, the solidification front location is calculated with the  $s(t)$  state-space model of section 4.3, and with the estimated heat flux  $\hat{q}_{in}''(t)$  given by the RLSE, that is :

$$x(t) = Ax(t-1) + B\hat{u}(t-1) = Ax(t) + B \begin{bmatrix} \hat{q}_{in}''(t-1) \\ h(t-1) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\hat{s}(t) = Cx(t) \quad (4.24)$$

where  $x(t)$  is the state vector,  $\hat{u}(t-1) = \begin{bmatrix} \hat{q}_{in}''(t-1) \\ h(t-1) \end{bmatrix}$  is a new input vector,  $\hat{s}(t)$  is the estimated ledge thickness, and  $A, B, C$  are the discrete state-space matrices of the  $s(t)$  model.

The main parameters for the Kalman filter and of the recursive least square estimator are provided in Tableau 4.2. The selection of these parameters is documented in Ref. [79]. Moreover, a heat flux sensor located at the wall/ledge interface will be used with the inverse method, i.e.  $Y(x, t) = q''(x = L, t)$ . As reported in Ref. [79], this sensor is the most accurate and yields the lowest time lag. It will be retained for the remainder of the present study.

Tableau 4.2 Parameters for the inverse method [79].

Parameter	Value
$dt$ (s)	100
$\sigma_R$ (W/m <sup>2</sup> )	25
$\sigma_Q$	$10^{-5}$
$\gamma$	0.9
$\hat{x}(0 0)$	$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$
$P(0 0)$	diag $[10^4]$
$\hat{q}_{in}''(0)$ (W/m <sup>2</sup> )	0
$P_b(0)$	diag $[10^2]$
$M(0)$	Zero matrix

Thus, from Figure 4.5, the inverse method is equivalent to a virtual sensor [52] allowing on-line measurements of the process variable  $Y(x, t) = q''(x = L, t)$ . The virtual sensor relies on an estimation algorithm (Kalman filter, RLSE,  $s(t)$  state-space model) so as to provide on-line estimates of the non-measurable ledge thickness  $\hat{s}(t)$ . Furthermore, the use of a virtual sensor for estimating the ledge thickness is preferable to a manual probe. Contrary to manual probing, the virtual sensor enables a continuous estimation of the ledge

thickness. Moreover, it does not require the opening of the reactor which results in heat losses to the surroundings and the release of undesirable chemicals into the atmosphere.

## 4.5 Transfer function identification of the reactor and the virtual sensor

Now that a calculation procedure has been devised for predicting the ledge thickness, the next step is to adapt it for control purposes. In order to exploit the mathematical tools available in the control theory, the reactor and of the virtual sensor of Figure 4.5 are first cast into the Laplace domain using transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$  as shown in Figure 4.6.

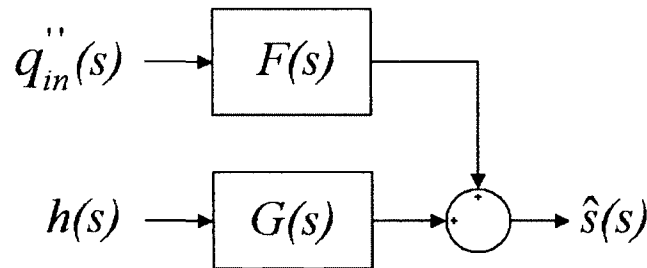


Figure 4.6 The ledge thickness calculation is done in the Laplace domain with the use of the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$ .

The resulting transfer function identification procedure is summarized in Figure 4.7. A striking feature of this identification procedure is that it resembles to that of section 4.3. Every element of the input vector  $\hat{u}(t) = \begin{bmatrix} \hat{q}''_{in}(t) \\ \hat{h}(t) \end{bmatrix}$  is fed to the reactor  $Y(x, t)$  state-space model of section 4.3, for which the sensor noise  $v(t)$  and the process noise  $w(t)$  are taken into account (Eqs. 4.11 and 4.14). The corresponding thermal response  $Y(x, t)$  and the heat transfer coefficient  $h(t)$  are next fed to the virtual sensor where the estimated ledge thickness  $\hat{s}(t)$  is obtained. Finally, by specifying the type of model (first order with or without delay, second order with complex or real poles, etc.) and by using the input/output data pair  $[h(t)], [\hat{s}(t)]$  and  $[q''_{in}(t)], [\hat{s}(t)]$ , the identification algorithm finds the location of the gain, poles, zeros and delay of the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$  respectively. Once again, the transfer function identification algorithm is based on the iterative prediction-error minimization method (PEM) described in section 4.3.

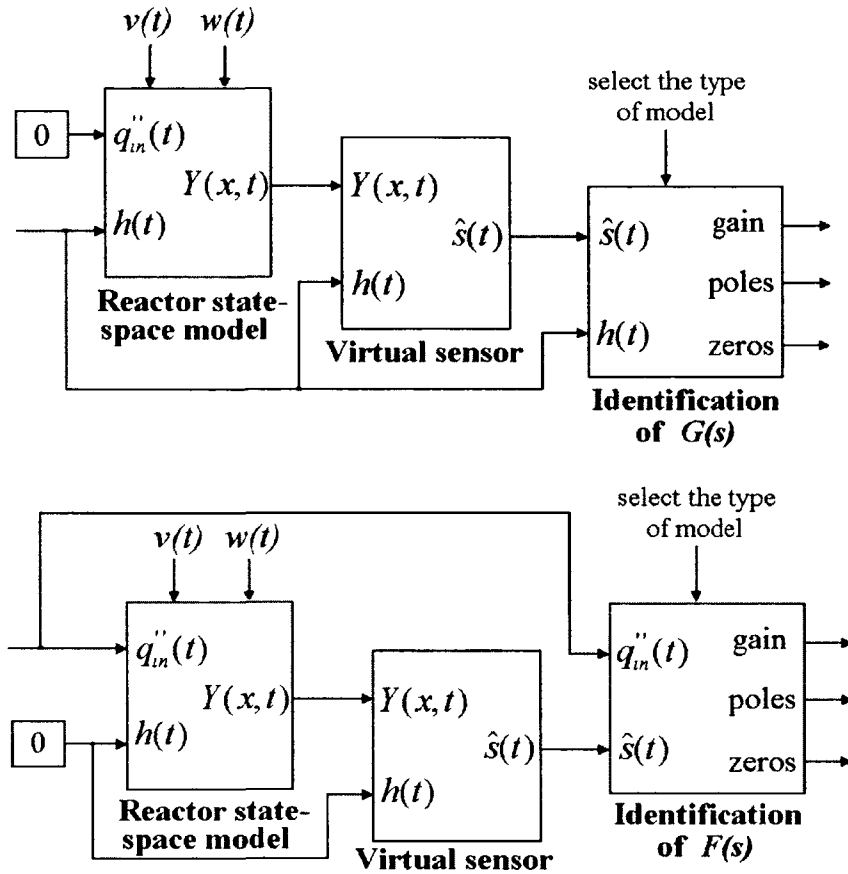


Figure 4.7 The transfer function identification procedure.

## 4.6 Control of the ledge thickness in the Laplace domain

A feedback control loop that employs the transfer functions of the previous section has been devised (Figure 4.8). Recalling Mason's rule [35], the Laplace domain ledge thickness  $\hat{s}(s)$  can be expressed in the following manner :

$$\hat{s}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} r(s) + \frac{1}{1 + K(s)G(s)} d(s) \quad (4.25)$$

where  $r(s)$  is the set point, i.e. the desired ledge thickness,  $K(s)$  is the controller transfer function, and  $d(s) = q''_{in}(s) F(s)$  is the disturbance signal. The tracking error  $e(s)$ , i.e., the difference between the set point  $r(s)$  and the actual ledge thickness  $\hat{s}(s)$ , is defined as :

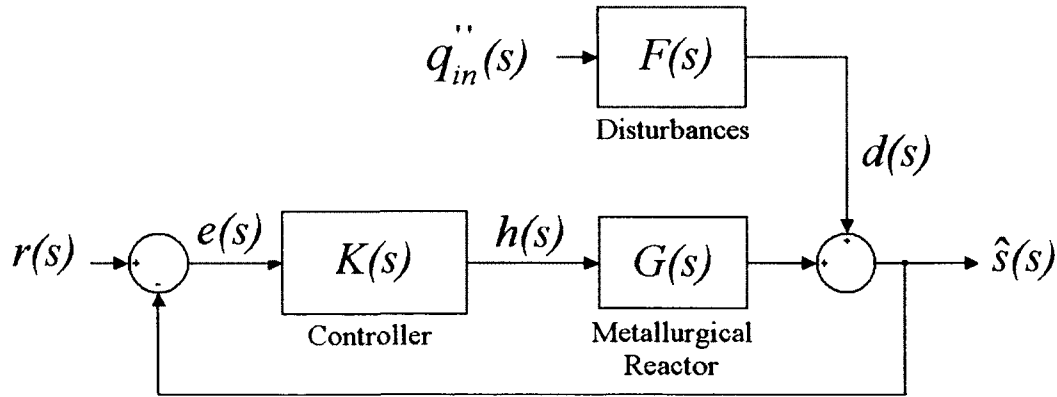


Figure 4.8 The control of the ledge thickness using a feedback loop in the Laplace domain.

$$e(s) = r(s) - \hat{s}(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} [r(s) - d(s)] \quad (4.26)$$

The main goal of the control strategy used in the present paper is to minimize the tracking error  $e(s)$  when subjected to external disturbances  $d(s)$ . Thus, the performance of the controller is obtained if it has good disturbance rejection properties. This can be related to the calculation of the sensitivity function  $S(s) = [1 + K(s)G(s)]^{-1}$ . From Eq. 4.26, the smaller the magnitude of the sensitivity function  $S(s)$ , the smaller the tracking error  $e(s)$ , and thus the better the performance of the control strategy.

The control strategy used in the present work rests on a standard proportional-integral-derivative (PID) controller. Incidentally, more than 90% of the controllers employed in the process industry are PI-PID controllers [9, 35, 115]. The transfer function  $K(s)$  for the PID controller is given by Eq. 4.27 for which the derivative term (D) is approximated.

$$K(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{0.1 T_d s + 1} \right) \quad (4.27)$$

where  $K_p$  is the proportional gain,  $T_i$  is the integral time constant, and  $T_d$  is the derivative time constant.

Other more complex control strategies such as the internal model control [91], model predictive control [28], artificial neural networks [61], and optimal control [130], are available for controlling different thermal processes. But the simplicity, the availability, and the easy and straightforward implementation of the PID makes it the most suitable choice. Moreover, due to the fact that the majority of electrolysis cells are cooled by natural convection

[81], i.e. without any forced convection cooling devices, even the implementation of a simple PID is considered as a new application in the eyes of the rather conservative aluminum smelting industry.

In order to verify the performance and stability of the PID controller, the transfer function  $G(s)$  and  $F(s)$  of section 4.5 are needed. Consequently, the state-space and transfer function identification procedures (Figs. 4.4 and 4.7) were run for the working point defined by :  $q''_{in,0} = 15000 \text{ W/m}^2$ ,  $\max\{\delta q''_{in}(t)\} = 2000 \text{ W/m}^2$ ,  $h_0(t) = 60 \text{ W/m}^2\text{K}$  and  $\max\{\delta h(t)\} = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ . This working point represents typical values for the heat load inside a high temperature metallurgical reactor [27] and for the heat transfer coefficient for forced convection heat transfer in air [67]. The ledge thickness  $s_0 = 3.78 \times 10^{-2} \text{ m}$  is also representative of the experimental results reported in Refs. [119, 126]. Results of the state-space identification procedure have shown that 9<sup>th</sup> order state-space models are needed in order to ensure a linear relation between  $u(t)$  and  $y(t)$ . More details concerning the state-space models are presented in appendix B. As for the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$ , it is seen that they are best represented by a second order model with real poles (Eqs. 4.28-4.29).

$$G(s) = \frac{3.1148 \times 10^{-4}}{(1 + 12894s)(1 + 3903s)} \quad (4.28)$$

$$F(s) = \frac{-3.9478 \times 10^{-6}}{(1 + 6374s)(1 + 3844s)} \quad (4.29)$$

The control scenario of the metallurgical reactor, to be used throughout the rest of the paper, is the following. The initial operating conditions are set at the steady-state working point ( $q''_{in,0} = 15000 \text{ W/m}^2$ ,  $h_0 = 60 \text{ W/m}^2\text{K}$ ). At time  $t = 1 \times 10^4 \text{ s}$ , the ledge is suddenly upset with an input heat flux of  $17000 \text{ W/m}^2$  until time  $t = 3 \times 10^4 \text{ s}$  where it lowers to  $16000 \text{ W/m}^2$  up to the end of the simulation. The sudden change in the heat load by the square wave signal can be related to the alumina feeding inside the reactor. This semi batch process, as reported in Refs. [113, 119, 126], generates sudden variations in the input heat flux  $q''_{in}(t)$ . Finally, the ledge thickness set point is kept fixed at  $s_0 = 3.78 \times 10^{-2} \text{ m}$ .

As an example, Figure 4.9 illustrates the predicted time-varying ledge thickness for a reactor operated with and without the ledge control system. For comparison purposes, a proportional-integral (PI) controller, using the PID proportional gain  $K_p$  and integral time constant  $T_i$ , is also employed for controlling the ledge thickness.

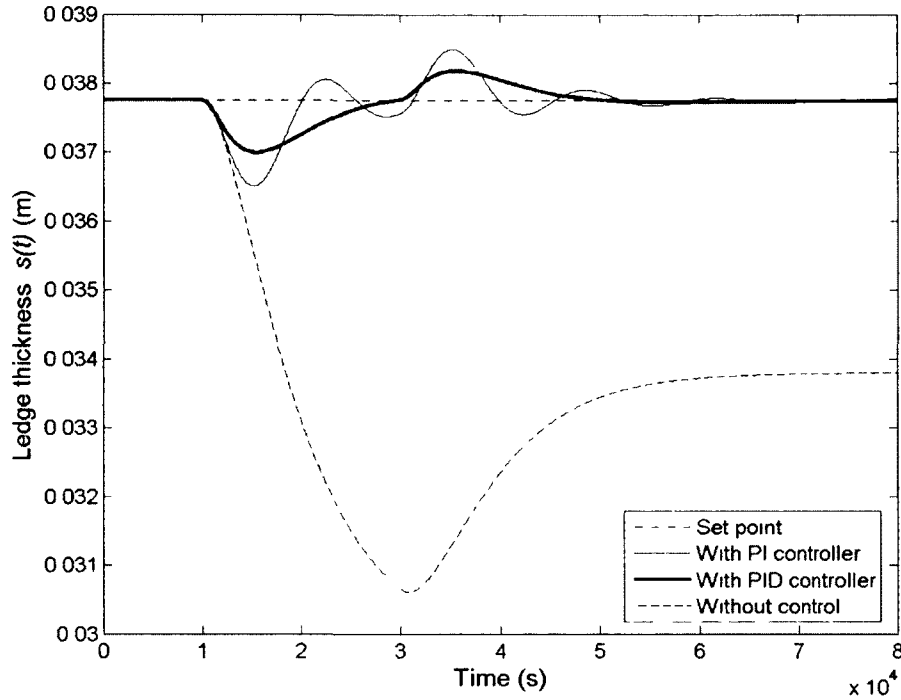


Figure 4.9 Control of the ledge thickness using the PI-PID controllers.

By using the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$ , and based on common guidelines typically used to manually tune a PID controller for an open-loop stable system [129], the proportional gain  $K_p = 40000$ , the integral time constant  $T_i = 10000$  s and the derivative time constant  $T_d = 2000$  s were determined in order to obtain a maximum tracking error that remains smaller than  $1 \times 10^{-3}$  m, a null steady-state tracking error, and no overshoot. These specifications are required in order to minimize the ledge thickness variation, thus ensuring a continuous protective barrier against the corrosive molten material [54, 119, 126]. Other tuning methods, such as the Ziegler-Nichols method [131] or a second order method [105], were also examined and they yielded similar results.

Figure 4.9 reveals that the maximum tracking error for the PID controller is  $8 \times 10^{-4}$  m, an order of magnitude smaller than that without the control system of  $8 \times 10^{-3}$  m. It is also seen that the performance of the PID is superior to that of the PI controller; no overshoots are observed, and the maximum tracking error remains smaller ( $8 \times 10^{-4}$  m *vs*  $1.2 \times 10^{-3}$  m). Due to the fact that the tracking error is small, the settling time of the PID controller is not an issue for the present study.

The robustness of the controllers were also checked in order to account for the fact that the transfer functions identification for  $G(s)$  and  $F(s)$  may not mimic exactly the thermal behaviour of the metallurgical reactor. These modelling errors may adversely affect the stability and the performance of the PID controller. In many industrial control systems, the dynamic perturbations may be caused by inaccurate description of component characteristics, torn-and-worn effects on plant components, or shifting of operating points. Such perturbations may be represented by variations of certain system parameters over some possible value ranges. They affect the low-frequency range performance and are called parametric or structured uncertainties [56]. To include such uncertainties, the nominal models of Eqs. 4.28-4.29 was rewritten by modifying the values of its gain and poles. Eqs. 4.30-4.31 now stand as the uncertain models.

$$G(s) = \frac{3.1148 \times 10^{-4}(1 \pm \alpha_1)}{[1 + 12894(1 \pm \alpha_2)s][1 + 3903(1 \pm \alpha_3)s]} \quad (4.30)$$

$$F(s) = \frac{-3.9478 \times 10^{-6}(1 \pm \alpha_4)}{[1 + 6374(1 \pm \alpha_5)s][(1 + 3844(1 \pm \alpha_6)s)]} \quad (4.31)$$

Where, in this case,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_6 = \alpha$ . The value of  $\alpha$  was set equal to 0.3 *ad hoc* in order to yield a maximum error of  $5 \times 10^{-3}$  m between the predicted (inverse method) and the exact (FDM) ledge thickness.

The robust stability of the control loop was thoroughly examined for the reactor operating scenario of Figure 4.9. The resulting open-loop function  $L(s) = K(s)G(s)$  of the nominal model, of some sampled uncertain models, and of the worst-case is exemplified in the Nichols chart of Figure 4.10. The sampled uncertain models were generated from the Monte-Carlo sampling method, where random parameters are created within a hypercube defined by the minimum and maximum values of all uncertain parameters (gain, poles) [4]. The Nichols chart shows that the PID controller remains stable even for an uncertainty as large as 30%. The stability of the close-loop system is ensured by having appropriate values of the gain margin (GM) and phase margin (PM). The worst-case scenario, defined as the uncertain model having the smallest gain and phase margins with  $\alpha = 0.3$ , shows that its GM is infinite and that the PM takes a value of 59 deg, thus ensuring the robust stability of the control strategy [35].

The robust performance of the controller was also examined with a Bode diagram of the sensitivity function  $S(s)$  for the nominal model, the sampled uncertain models, and the worst-case (Figure 4.11). It is seen that at low frequency ( $10^{-6}$  rad/s), the magnitude of



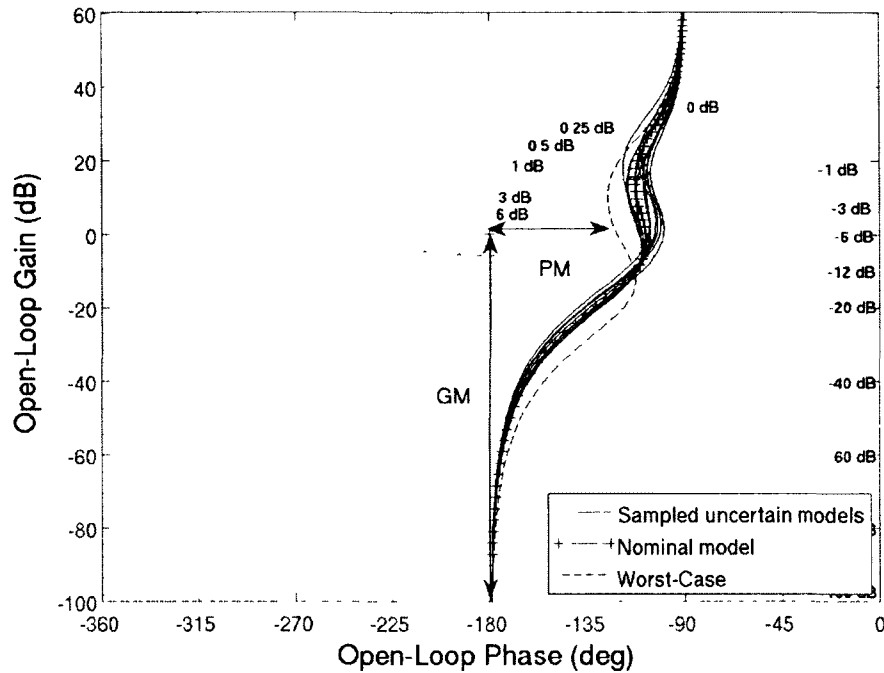


Figure 4.10 Nichols chart of the open-loop function  $L(s) = K(s)G(s)$ .

the sensitivity function lies between -59 dB and -64 dB thereby ensuring the performance of the controller (Eq. 4.26). This figure also illustrates the continuous trade-off between the performance and the robustness of the control strategy. As an example, the worst-case scenario shows that the best disturbance rejection is obtained at low frequency with a magnitude of the sensitivity function of -64 dB at  $10^{-6}$  rad/s. At high frequencies however, the controller is less robust, i.e. the magnitude of the sensitivity function takes a peak value of 1.4 dB at 0.004 rad/s.

Figure 4.12 depicts the time-varying ledge thickness predicted with the PID controller. In spite of a structured uncertainty of 30% on the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$ , the PID controller remains reliable. For the worst-case scenario, the maximum tracking error attains  $2.6 \times 10^{-3}$  m and an overshoot of 2% is depicted. In order to reduce the tracking error, the controller proportional  $K_p$  should be lowered, thus increasing the magnitude of the sensitivity function  $S(s)$  at low frequency (see Eq. 4.26). The resulting controller would be more robust but its performance would be diminished. Once again, a trade-off must be struck between robustness and performance [111].

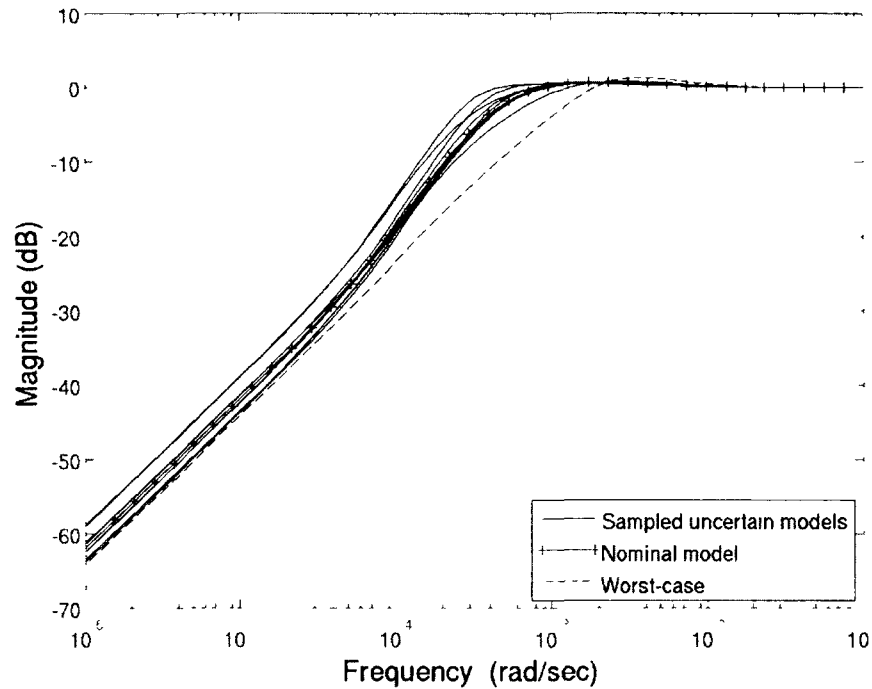


Figure 4.11 Bode diagram of the sensitivity function  $S(s) = [1 + K(s)G(s)]^{-1}$ .

## 4.7 Control of the ledge thickness using a virtual sensor

The inverse method (virtual sensor) presented in section 4.4 estimates the ledge thickness  $\hat{s}(t)$  from heat flux measurements  $Y(x, t)$  taken inside the brick wall. With the help of the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$  of section 4.5, it is possible to design a PID controller for controlling the ledge thickness. Section 4.6 has shown that the proposed controllers remain reliable and robust even when the process is subjected to uncertainties. In this section, the virtual sensor and the control strategy are now implemented on the metallurgical reactor (Figure 4.13). As before, it is assumed that the thermal behaviour of the high temperature reactor may be described by the finite difference model (FDM) of section 4.2. The implementation of the control loop is done in discrete time, where the PID controller is transformed in its discrete forms by using a sampling time interval  $dt = 100$  s. The choice of this sampling time interval is a compromise between stability and accuracy [79].

The control of the ledge thickness using a virtual sensor is exemplified in Figure 4.14. The control scenario is the same as in section 4.6. The physical properties of the brick

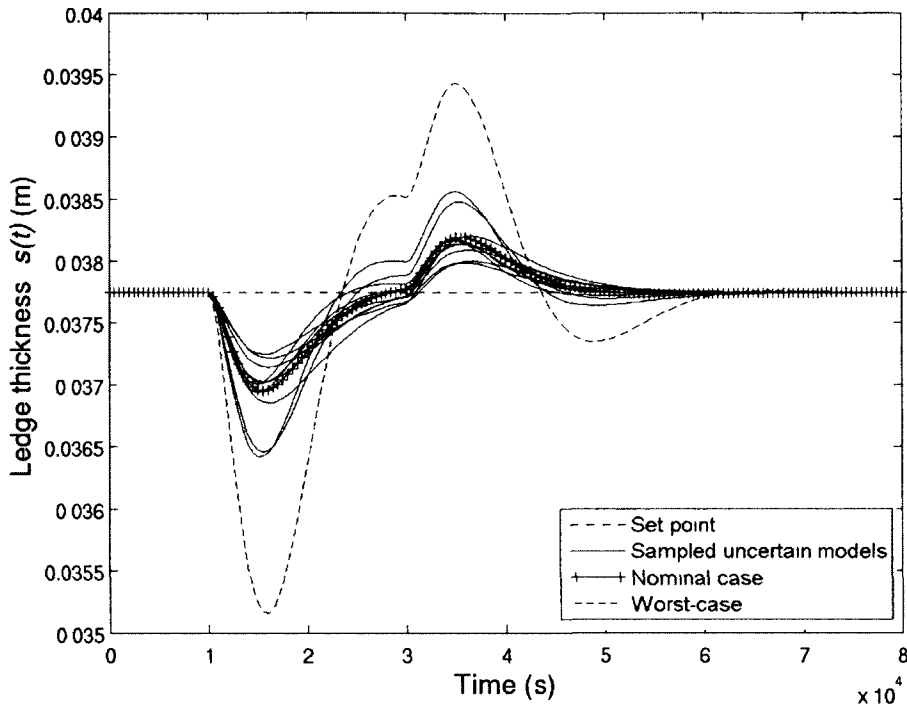


Figure 4.12 Control of the ledge thickness using a PID controller when structured uncertainties are included in the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$ .

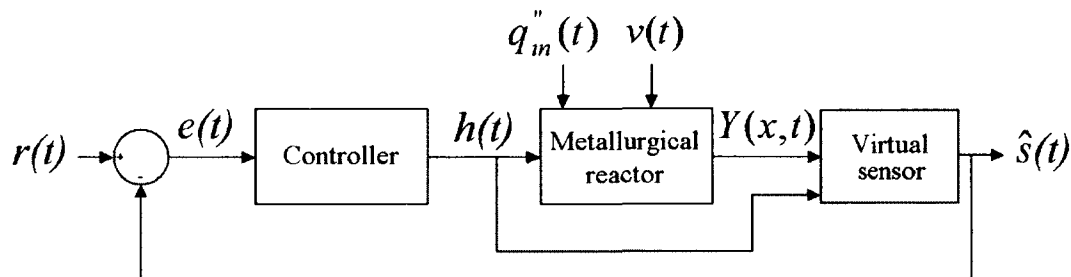


Figure 4.13 Control of the ledge thickness in metallurgical reactor using a virtual sensor.

wall/PCM and the main parameters for the Kalman filter/RLSE remain also the same as in the previous sections (Tableaux 4.1-4.2).

Numerical simulations have shown that the close-loop system defined by a PI controller, the virtual sensor and the metallurgical reactor has the same dynamic behaviour as that of the PID controller using the transfer functions and (Figure 4.14). In other words, the derivative term (D) of the PID controller is irrelevant since the nonlinear thermal model combined to the virtual sensor naturally adds damping to the close-loop system, which, normally, is

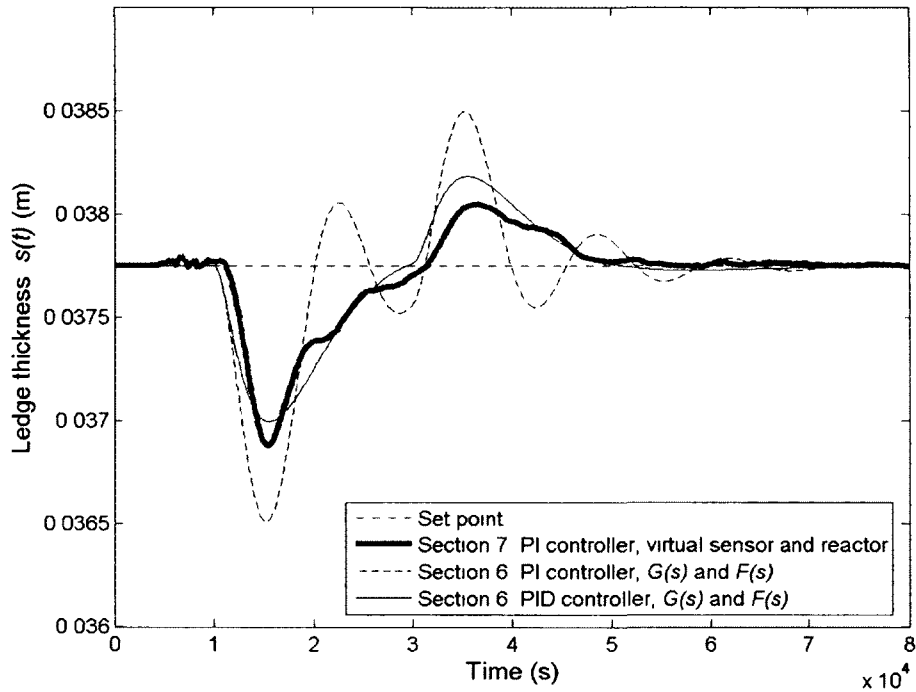


Figure 4.14 Control of the ledge thickness using a virtual sensor.

the objective of the derivative term [35]. Thus, in the present case, the derivative term was shut off and a PI controller was used instead. The proportional gain  $K_p$  and the integral time constant  $T_i$  take the same value as in section 4.6.

The performance of the PI controller using a virtual sensor and the metallurgical reactor, and of the PI-PID controllers using the transfer functions  $G(s)$  and  $F(s)$  is depicted in Figure 4.14. It is seen that the PI controller combined to the virtual sensor ensures a null steady-state tracking error and no overshoots, and it provides a maximum tracking error of only  $8.4 \times 10^{-4}$  m compared to  $8 \times 10^{-3}$  m for the case without control (Figure 4.9). As for the oscillations observed at the beginning of the simulation, they are caused by the virtual sensor, specifically by the large initial covariance matrices  $P(0|0)$  and  $P_b(0)$  used to ignore the initial estimates  $\hat{x}(0|0)$  and  $q''_m(0)$ . The oscillations are quickly damped however by the Kalman filter and the recursive least square estimator.

Moreover, the complete methodology for the inverse prediction and control of the time-varying ledge thickness presented throughout this paper (Figure 4.3) will be applied to an experimental setup of a high temperature metallurgical reactor in the near future. The objective of the entire study is to come up with a complete methodology that can

be easily transposed and applied to various technologies (electrolysis cells, electric arc furnaces, melting furnaces and experimental rigs). This procedure is not only restricted to metallurgical processes but can be used in a wide variety of phase change problem requiring inverse prediction and control.

Lastly, in order to improve the proposed methodology, current work focuses on the non-linear estimation of the ledge thickness by the use of unscented Kalman filter (UKF) combined to the RLSE strategy. As reported in Ref. [70], the UKF appears to be a more robust solution than the more common extended Kalman filter. As for the control, in order to widen the range of the operating conditions, the gain scheduling method, one of the most popular approaches to control nonlinear system, is currently under study. This method has been widely and successfully applied in fields ranging from aerospace to process control [49, 94]. The gain scheduling method is implemented with a family of linear PI-PID controllers, each of which provides satisfactory control for a different operating point of the system.

## 4.8 Concluding Remarks

A methodology for the inverse prediction and control of the time-varying ledge thickness in high temperature metallurgical reactors was presented. A Kalman filter, based on a state-space representation of the reactor, was coupled with a recursive least-square estimator and a state-space model (inverse method) in order to estimate the real-time-varying solidification front position from the data collected by a heat flux sensor embedded in the reactor wall. The inverse method, used here as a virtual sensor, was then combined to a control strategy in order to control the ledge thickness by regulating the air cooling applied on the outside surface of the reactor wall. By employing transfer functions for the reactor and a virtual sensor in the Laplace domain, the design of the proportional-integral-derivative controller (PID) was performed by verifying its performance and robustness. Finally, the control of the ledge thickness using a virtual sensor was tested for the nonlinear reactor model. Results indicated that the controller remained stable under all operating conditions. Moreover, it ensured a null steady-state tracking error and shows no overshoots, and the maximum tracking error remained less than  $1 \times 10^{-3}$  m on the estimated ledge thickness.

## 4.9 Acknowledgements

The authors are very grateful to the *Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT)*, to the *Centre québécois de recherche et de développement de l'aluminium (CQRDA)*, and to the Natural Sciences and Engineering Council of Canada (NSERC) for their financial support.



# CHAPITRE 5

## CONCLUSION

### 5.1 Sommaire

Afin d'enrayer les désavantages de la méthode traditionnelle de mesure de l'épaisseur de gelée dans les cuves d'électrolyse d'aluminium, ce travail a présenté le développement d'une méthode inverse (capteur virtuel) qui permet d'estimer en continu, et de manière non-instrusive, l'épaisseur de gelée à partir de mesures thermiques (température et/ou flux de chaleur) provenant de capteurs situés dans les parois latérales de la cuve ou à la surface de celle-ci. Le capteur virtuel est composé d'un filtre de Kalman et d'un estimateur récursif aux moindres-carrés, et il a été combiné à une procédure d'identification du procédé en modèles d'état. Cette technique a été appliquée pour la première fois dans la résolution d'un problème inverse avec changement de phase et en utilisant des capteurs de flux de chaleur. Le capteur virtuel s'est également avéré très efficace en termes de rapidité de calcul, contrairement aux méthodes standards utilisés pour résoudre des problèmes inverses à changement de phase telle la méthode du gradient conjugué avec problème adjoint.

Parce que pour les alumineries, l'intérêt et le réel défi consistent plutôt à contrôler l'épaisseur de gelée, le capteur virtuel a ensuite été combiné à un algorithme de contrôle qui régule le système de refroidissement des parois latérales de la cuve d'électrolyse. Ceci permet alors de contrôler à sa guise l'épaisseur de gelée malgré les perturbations thermiques inhérentes au procédé. La stratégie de contrôle retenue consiste en un contrôleur classique proportionnel-intégral-dérivatif (PID), largement utilisé en industrie. Une procédure d'identification a été appliquée une fois de plus, mais cette fois-ci afin obtenir une représentation du procédé sous la forme de fonctions de transfert dans le domaine de Laplace. Par conséquent, tous les outils, provenant de la théorie du contrôle linéaire, qui concernent la performance, la stabilité et la robustesse de la boucle de contrôle ont été employés.

Le capteur virtuel et l'algorithme de contrôle ont ensuite été validés pour des conditions d'opérations typiques présentes dans les réacteurs métallurgiques à haute température telle une cuve d'électrolyse d'aluminium. Les résultats ont montré que la différence entre l'épaisseur réelle de gelée (qui provenait d'un modèle numérique non-linéaire) et celle prédite avec le capteur virtuel demeurait dans tous les cas inférieure à 5%. Par ailleurs, il a été observé que les capteurs de flux, contrairement aux capteurs de température, procuraient



une meilleure précision sur l'estimation de gelée lorsqu'ils étaient enfouis dans les parois latérales de la cuve. De plus, parce que la résistance thermique principale consistait en la gelée elle-même, il a été démontré que plus celle-ci était mince, plus la précision et la fiabilité du capteur virtuel étaient élevées. Cet élément est d'autant plus important dans l'optique de prévenir la perte complète de la gelée dans la cuve.

Au niveau du contrôle, il a été observé que la stratégie de contrôle demeurait stable pour chacune des conditions d'opération même si une incertitude structurée de 30% était prise en compte dans l'analyse de robustesse. L'algorithme de contrôle s'est également avéré plus performant lorsqu'un capteur de flux était utilisé par le capteur virtuel. Dans ce cas, avec le modèle numérique non-linéaire de la cuve d'électrolyse, le contrôle de l'épaisseur de gelée à l'aide du capteur virtuel assurait une erreur nulle en régime permanent ainsi qu'aucun dépassement de consigne, et procurait une erreur maximale de  $1 \times 10^{-3}$  m sur le suivi de la consigne de l'épaisseur de gelée.

Finalement, pour répondre simultanément à la problématique d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée, le présent travail nécessitait la combinaison de plusieurs domaines traditionnellement séparés (modélisation, transfert de chaleur, identification, méthodes inverses, contrôle) et cette procédure a été appliquée pour la première fois au procédé d'électrolyse d'aluminium.

## 5.2 Contributions

Ainsi, le présent projet de recherche contribue à l'avancement technologique du procédé d'électrolyse d'aluminium. D'abord, le capteur virtuel qui estime l'épaisseur de gelée permet une mesure en continu, contrairement aux mesures manuelles qui sont obtenues à une très basse fréquence et qui nécessitent beaucoup de temps ainsi que du personnel qualifié. Le capteur virtuel est également une méthode de mesure non-intrusive, i.e. qu'il prédit l'épaisseur de gelée à l'intérieur de la cuve, mais à partir de mesures thermiques provenant de capteurs situés à l'extérieur de la cuve. Cette méthode de mesure ne nécessite donc pas l'ouverture du capot de la cuve, ce qui empêche la libération de beaucoup de chaleur et d'émissions chimiques (gaz fluorés). L'utilisation d'un capteur virtuel pour estimer l'épaisseur de gelée permet alors d'enrayer les désavantages associés à la méthode de mesure actuelle.

Par ailleurs, le capteur virtuel proposé, qui combine un filtre de Kalman et un estimateur récursif aux moindres-carrés, est appliqué pour la première fois dans la résolution d'un problème à changement de phase, et où les mesures thermiques peuvent provenir

de capteurs de température et/ou flux de chaleur. Cette méthode s'avère très efficace en terme de rapidité de calcul, car elle utilise une représentation du procédé sous forme de modèles d'état, contrairement à une modélisation classique qui utilise normalement les différences ou éléments finis. En utilisant les modèles d'état, le capteur virtuel fait appel au concept de réduction de modèle. À partir de la connaissance d'un modèle physique, la technique de réduction de modèle consiste à extraire un système d'ordre faible (modèle réduit), beaucoup plus simple et rapide à calculer, qui reproduit avec une précision acceptable le comportement du modèle original (modèle détaillé). La majorité des méthodes inverses utilisées pour résoudre des problèmes de changement de phase utilise la méthode du gradient conjugué avec le problème adjoint. Il s'avère que dans la plupart des cas, cette technique a recourt à un modèle détaillé pour résoudre le problème direct. Les résultats montrent que cette méthode devient de plus en plus gourmande en temps de calcul, à mesure que les temps de simulation et/ou le nombre de noeuds du système augmentent. Dans ces cas, l'utilisation de la méthode du gradient conjugué dans une boucle de contrôle en continu n'est pas une option envisageable.

À la connaissance de l'auteur, dans l'industrie de l'aluminium, l'utilisation d'un capteur virtuel pour prédire l'épaisseur de gelée n'a jamais été réalisé, de même que l'utilisation d'un système de contrôle du refroidissement des parois de la cuve pour contrôler explicitement l'épaisseur de gelée. Ainsi, malgré sa "supposée" importance capitale dans le procédé, peu d'effort ont été appliqués dans la mesure et le contrôle de la gelée.

### 5.3 Travaux futurs

Plusieurs autres objectifs de recherche que ceux présentés à la section 1.3 auraient pu être réalisés dans le cadre de ce projet de recherche, mais les ressources de temps et la durée limitée de la bourse du FQRNT ont restreint le nombre d'objectifs. Alors, malgré l'intérêt et l'originalité du présent travail, celui-ci comporte quelques limitations.

D'abord, le modèle numérique aux différences finies (le modèle direct) est purement thermique, i.e. que les aspects électrique, mécanique et magnétique ne sont pas pris en compte. Pourtant, le procédé d'électrolyse de l'aluminium est un procédé multivariable où tous ces phénomènes interviennent simultanément. De plus, ce modèle numérique modélise seulement le transfert de chaleur unidimensionnel, ce qui ne permet donc pas de prédire le profil complet de la gelée. Malgré l'hypothèse des gradients thermiques plus élevés dans la direction des parois latérales, le réel profil de gelée dans une cuve d'électrolyse demeure un problème bidimensionnel, voire tridimensionnel.

Par ailleurs, même si la procédure d'identification en modèles d'état permet de se soustraire de l'utilisation du modèle numérique aux différences finies, les modèles d'état obtenus demeurent linéaires. Si les signaux d'entrées de la cuve, i.e. le chauffage  $\dot{q}_{in}''(t)$  et le refroidissement  $h(t)$ , dépassent les plages permises par l'étape de linéarisation ( $\delta\dot{q}_{in}''(t)$  et  $\delta h(t)$ ), la précision des modèles d'état diminuent grandement. Par conséquent, dans l'optique d'utiliser des modèles d'état précis, les plages permises de variation des signaux d'entrées doivent être limitées. Tout comme l'identification en modèles d'état, le capteur virtuel proposé demeure linéaire. En effet, le capteur virtuel, qui utilise une représentation du procédé sous forme de modèles d'état, va devenir de moins en moins fiable au fur et à mesure que les signaux d'entrées de la cuve s'éloigneront des plages permises. Par conséquent, l'estimation de l'épaisseur de gelée à l'aide du capteur virtuel sera précise seulement pour des conditions d'opération (chauffage, refroidissement) limités dans la cuve.

Au niveau du contrôle, la stratégie utilisée correspond au contrôleur PID classique linéaire. Malgré sa simplicité et son utilisation massive dans l'industrie, cette technique possède certaines lacunes. D'abord, en contrôlant un procédé non-linéaire tel l'électrolyse de l'aluminium, le contrôleur PID va procurer une performance satisfaisante pour seulement une plage d'opération donnée. En effet, la procédure d'ajustement (*tuning*) des gains du PID ( $K_p, T_i, T_d$ ) est réalisée avec une représentation linéaire du procédé, i.e. des fonctions de transfert identifiées à un point d'opération donné. Par conséquent, dans certains cas, ces gains ne pourront pas permettre la performance désirée lorsque les conditions d'opération de la cuve varieront.

Ce projet de doctorat ne contient également pas de portion expérimentale. Selon l'auteur, la validation expérimentale d'un modèle thermique 1D n'était pas justifiée. En plus, le montage expérimental développé par Bertrand [18] n'est pas conçu pour simuler des procédés de changement de phase 1D. Des validations expérimentales 2D ont plutôt été réalisées par Bertrand et coll. [18]. Pour ce qui est d'une validation avec des mesures en usine, cette étape n'a pas été planifiée parce qu'elle consiste en un projet en soit, prévu dans le cadre d'un programme de subventions de recherche et de développement coopérative (RDC) du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG). Ce RDC, désigné Diagnostic thermique des réacteurs multiphasiques à haute température, est effectué en collaboration avec l'entreprise Rio Tinto Alcan [37]. Par conséquent, la procédure complète d'estimation et de contrôle de l'épaisseur de gelée a seulement été appliquée sur des modèles numériques.

Afin d'enrayer les limitations associées au projet de recherche, l'auteur va poursuivre ses travaux dans le cadre d'un projet postdoctoral qui débutera à l'automne 2011. Les

limitations du projet de doctorat ainsi que les solutions proposées dans le cadre du projet de postdoc sont présentées au tableau 5.1.

Tableau 5.1 Limitations du projet de doctorat et solutions proposées dans le cadre du projet de postdoc.

<b>Limitation</b>		<b>Solution proposée</b>	
Modèle purement thermique		Modèle thermo-électrique	
Modèle 1D		Modèle 2D	
Identification linéaire		Identification non-linéaire	
Capteur virtuel linéaire (filtre de Kalman)	Capteur virtuel non-linéaire (filtre de Kalman non-parfumé)		
Contrôleur PID linéaire		Méthode <i>gain scheduling</i> pour le contrôle non-linéaire	
Aucune validation expérimentale		Validation avec des mesures en usine	

Dans le cadre de ce projet, le modèle direct qui sera utilisé consistera en un modèle d'éléments finis thermo-électrique bidimensionnel bâti avec le code commercial ANSYS. Ainsi, l'intégration de l'effet joule dans le bain électrolytique, grâce au courant et voltage fournis à la cuve, permettra d'obtenir un comportement plus réaliste qu'avec un modèle purement thermique. De plus, contrairement au modèle 1D, il sera possible d'obtenir un profil complet de l'épaisseur de gelée avec le modèle 2D. Une fois de plus, celui-ci sera plus représentatif du comportement réel de la gelée dans la cuve d'électrolyse.

Par ailleurs, afin de permettre des plus grandes plages de variation des signaux d'entrées de la cuve et d'obtenir en plus des modèles d'état précis, la méthode d'identification utilisée dans le cadre du postdoc sera non-linéaire. Au niveau du capteur virtuel, le filtre de Kalman sera remplacé par le filtre de Kalman non-parfumé qui est une version non-linéaire du filtre. Selon Julier et Uhlmann [70], cette méthode est plus fiable que le filtre de Kalman étendu, la version la plus connue du filtre de Kalman non-linéaire. Pour ce qui est de l'estimateur récursif aux moindres-carrés, son algorithme sera modifié afin d'inclure la non-linéarité du filtre de Kalman non-parfumé. Par conséquent, un capteur virtuel non-linéaire qui estime l'épaisseur de gelée sur une plus grande plage de conditions d'opération sera développé dans le cadre de ce projet.

Afin d'assurer la performance désirée du contrôleur même si les conditions d'opération de la cuve varient, la méthode du *gain scheduling* sera utilisée. Cette méthode est une des méthodes les plus populaires pour contrôler des systèmes non-linéaires, et a été appliquée largement dans les domaines de l'aérospatial et du contrôle de procédés [49, 94]. La méthode du *gain scheduling* consiste à utiliser une famille de contrôleurs linéaires PI-PID où chacun procure la performance désirée pour les différents points d'opération de la cuve.

Finalement, pour ce qui est de la partie expérimentale, après avoir développé et fabriqué le capteur virtuel non-linéaire qui estime l'épaisseur de gelée, celui-ci sera testé sur un

nouveau montage expérimental qui permet de simuler les conditions d'opération de la cuve. Le capteur virtuel sera ensuite installé sur une vraie cuve d'électrolyse lors d'une campagne de mesures chez Rio Tinto Alcan, ce qui permettra d'effectuer une validation avec des mesures en usine.

# ANNEXE A

## Modèle direct

Le phénomène de changement de phase qui se produit à l'intérieur d'un réacteur métallurgique peut être décrit par l'équation 1D de la conservation d'énergie (Eq. A.1).

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \right] - \delta H \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Les conditions aux frontières et initiale, nécessaires pour résoudre l'équation différentielle précédente, sont données par les équations (A.2 - A.4).

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(t)[T(0, t) - T_\infty] \quad (\text{A.2})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L+D} = q_{in}''(t) \quad (\text{A.3})$$

$$T(x, 0) = T_0 \quad (\text{A.4})$$

Le second terme de droite dans l'équation (A.1) inclut le changement de phase solide/liquide de la gelée. Ce terme est évidemment nul dans la brique. La variation d'enthalpie  $\delta H$  est définie comme suit :  $\delta H = \rho(C_{p,liquid} - C_{p,solid})T + \rho\lambda$ . Finalement, tel que présenté à l'équation (A.5), la fraction liquide  $f$  varie linéairement entre les températures solidus  $T_{sol}$  et liquidus  $T_{liq}$ .

$$f = f(T) = \begin{cases} 0 & T \leq T_{sol} \\ \frac{T - T_{sol}}{T_{liq} - T_{sol}} & T_{sol} < T < T_{liq} \\ 1 & T \geq T_{liq} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Pour résoudre le système d'équations (A.1-A.5), celles-ci sont discrétisées avec les différences finies. Pour les dérivées selon l'espace, les différences finies du deuxième ordre sont utilisées, tandis que pour les dérivées temporelles, les différences finies du premier ordre avec un schéma implicite sont employées. Avec la notation présentée à la figure A.1, l'équation (A.1) prend la forme suivante :

$$\rho C_p (T_P - T_P^0) \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{k_e}{\delta x_e} (T_E - T_P) - \frac{k_w}{\delta x_w} (T_P - T_W) + \delta H_P \frac{\Delta x}{\Delta t} (f_P^0 - f_P) \quad (\text{A.6})$$

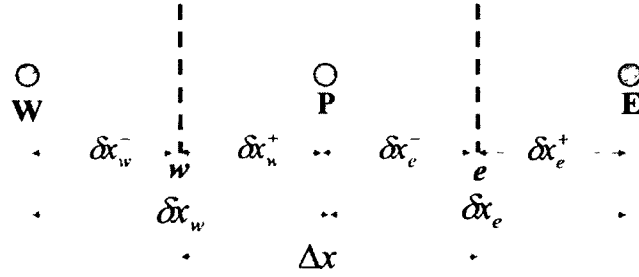


Figure A.1 Notation employée pour la discrétisation.

En regroupant les termes de l'équation (A.6), il est possible d'obtenir l'équation générale suivante :

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \tag{A.7}$$

où les tableaux A.1 à A.5 présentent les différents coefficients  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_P^0$ ,  $a_P$  et  $b$  pour chacun des nœuds. Les notations pour les deux conditions aux frontières (CF) sont montrées aux figures A.2 et A.3.

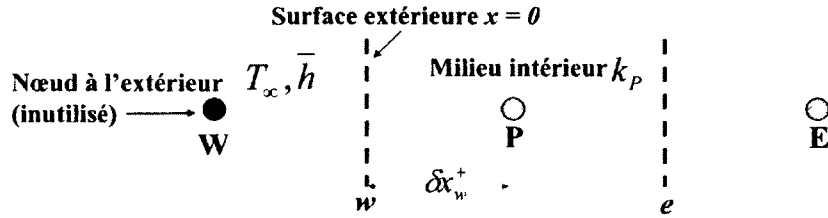


Figure A.2 Notation employée pour la condition aux frontières à  $x=0$ .

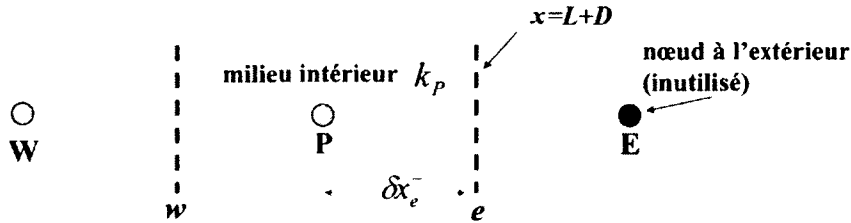


Figure A.3 Notation employée pour la condition aux frontières à  $x=L+D$ .

En prenant l'équation générale A.7 au pas de temps  $m + 1$ , on obtient :

$$a_P T_P^{m+1} = a_E T_E + a_W T_W + a_P^0 T_P^0 + \delta H_P \frac{\Delta x}{\Delta t} (f_P^0 - f_P^{m+1}) \tag{A.8}$$

où  $T_E$  et  $T_W$  sont estimés au pas de temps  $m + 1$  également.

Tableau A.1 Le coefficient  $a_E$  pour les différents noeuds.

Noeud	$a_E$
Premier	$k_e \delta x_e^{-1}$
Deuxième à l'avant-dernier	$k_e \delta x_e^{-1}$
Dernier	0

Tableau A.2 Le coefficient  $a_W$  pour les différents noeuds.

Noeud	$a_W$
Premier	0
Deuxième à l'avant-dernier	$k_w \delta x_w^{-1}$
Dernier	$k_w \delta x_w^{-1}$

Tableau A.3 Le coefficient  $a_P^0$  pour les différents noeuds.

Noeud	$a_P^0$
Premier	$\rho C_p \Delta x \Delta t^{-1}$
Deuxième à l'avant-dernier	$\rho C_p \Delta x \Delta t^{-1}$
Dernier	$\rho C_p \Delta x \Delta t^{-1}$

Tableau A.4 Le coefficient  $a_P$  pour les différents noeuds.

Noeud	$a_P$
Premier	$a_E + a_P^0 + \left(\frac{1}{h} + \frac{\delta x_P^+}{k_P}\right)^{-1}$
Deuxième à l'avant-dernier	$a_E + a_W + a_P^0$
Dernier	$a_W + a_P^0$

Tableau A.5 Le coefficient  $b$  pour les différents noeuds.

Noeud	$b$
Premier	$a_P^0 T_P^0 + T_\infty \left(\frac{1}{h} + \frac{\delta x_P^+}{k_P}\right)^{-1} + \delta H_P \Delta x \Delta t^{-1} (f_P^0 - f_P)$
Deuxième à l'avant-dernier	$a_P^0 T_P^0 + \delta H_P \Delta x \Delta t^{-1} (f_P^0 - f_P)$
Dernier	$a_P^0 T_P^0 + q_{in}'' + \delta H_P \Delta x \Delta t^{-1} (f_P^0 - f_P)$

Parce que la fraction liquide  $f$  est une fonction de la température, et que la température est la solution recherchée, la fraction liquide au pas de temps  $m + 1$  doit donc être estimé à l'aide d'une série de Taylor (Eq. A.9).

$$f_P^{m+1} \approx f_P^m + \left(\frac{df}{dT}\right)_P^m (T_P^{m+1} - T_P^m) \quad (\text{A.9})$$

La fraction liquide  $f$  est une fonction qui dépend de la température  $T$  (Éq. A.5). Il est donc possible de déterminer une relation inverse qui permet de calculer la température à partir de la fraction liquide, i.e.  $T = F^{-1}(f)$ . L'équation (A.9) est alors réécrite sous la forme suivante :



$$f_P^{m+1} \approx f_P^m + \left( \frac{dF}{dT} \right)_P^m \left( T_P^{m+1} - F^{-1}(f_P^m) \right) \quad (\text{A.10})$$

En remplaçant l'équation (A.10) dans la relation (A.8), l'équation suivante est obtenue :

$$(a_P - S_P^*) T_P^{m+1} = a_E T_E + a_W T_W + a_P^0 T_P^0 + \delta H_P \frac{\Delta x}{\Delta t} (f_P^0 - f_P^{m+1}) + S_C^* \quad (\text{A.11})$$

Les valeurs  $S_P^*$  et  $S_C^*$  sont données respectivement par les équations (A.12) et (A.13). Voir également le tableau

$$S_P^* = -\Delta H_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \left( \frac{dF}{dT} \right)_P^m \quad (\text{A.12})$$

$$S_C^* = \Delta H_P \frac{\Delta x}{\Delta t} \left( \frac{dF}{dT} \right)_P^m F^{-1}(f_P^m) \quad (\text{A.13})$$

Tableau A.6 La dérivée  $dF/dT$  et la fonction inverse  $F^{-1}(f)$  selon la température.

Température $T$	$dF/dT$	$F^{-1}(f)$
$T < T_{sol}$	0	$T_P$
$T_{sol} < T < T_{liq}$	$(T_{liq} - T_{sol})^{-1}$	$(T_{liq} - T_{sol}) f + T_{sol}$
$T > T_{liq}$	0	$T_P$

Après avoir résolu l'équation (A.11) à l'aide d'un algorithme matricielle tri-diagonal (méthode TDMA), la mise à jour de la fraction liquide est effectuée itérativement grâce à l'équation (A.10). Cette méthode de mise à jour est communément appelée la méthode enthalpique [125].

Après convergence, on obtient finalement, pour chaque pas de temps, la température et la fraction liquide pour chacun des noeuds. Les variables recherchées soit l'évolution du champ de température  $T(x, t)$  et la position du front de solidification (en d'autres mots l'épaisseur de gelée  $s(t)$ ) sont ainsi obtenus.

# ANNEXE B

## Modèles d'état

En utilisant la procédure d'identification en modèles d'état (Figs. 3.5 et 4.4), la méthode itérative de minimisation de l'erreur de prédiction (PEM) estime deux modèles d'état : un modèle d'état  $Y(x, t)$  qui correspond aux mesures thermiques, et un modèle d'état  $s(t)$  qui prédit l'épaisseur de gelée. L'objectif de la présente annexe est de présenter quelques modèles d'état identifiés précédemment.

Ceux-ci se divisent en deux parties : les modèles identifiés du chapitre 3 et ceux du chapitre 4. Concernant le chapitre 3, le modèle d'état  $Y(x, t)$ , utilisant un capteur de température à  $x = 0$ , et le modèle d'état  $s(t)$  sont présentés à la section B.1. Pour ce qui est du chapitre 4, le modèle d'état  $Y(x, t)$ , utilisant un capteur de flux de chaleur à  $x = L$ , et le modèle d'état  $s(t)$  sont présentés à la section B.2.

À titre informatif, la forme linéaire des modèles d'état linéaires est présentée une fois de plus :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{B.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{B.2})$$

### B.1 Modèles d'état du chapitre 3

#### B.1.1 Modèle $Y(x, t)$ : capteur de température à $x=0$

$$A = \begin{bmatrix} 0.997 & 0.004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.010 & 0.925 & 0.096 & 0.027 & -0.024 & 0.012 & -0.002 & -0.006 & -0.001 \\ -0.038 & 0.178 & 0.713 & -0.171 & 0.166 & -0.096 & 0.018 & 0.048 & 0.011 \\ 0 & 0.077 & -0.130 & 0.788 & 0.614 & -0.145 & 0.458 & -0.427 & 0.027 \\ 0.003 & -0.016 & 0.045 & 0.077 & 0.554 & 0.881 & -0.033 & -0.744 & -0.129 \\ 0 & 0 & -0.002 & -0.013 & 0.039 & 0.573 & 1.12 & -0.401 & 0.260 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.010 & 0.004 & 0.685 & -1.08 & -0.661 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & -0.005 & -0.010 & -0.027 & 0.249 & 0.226 \\ 0 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.007 & 0.065 & -0.166 & 0.992 & -0.346 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0.0003 \\ 0 & -0.0366 \\ 0 & 0.1707 \\ 0 & 0.3025 \\ -0.0002 & -0.2276 \\ 0 & 0.1628 \\ 0 & -0.0772 \\ -0.0001 & 0.0704 \\ 0.0004 & -0.2817 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$C = \begin{bmatrix} -1967.9 & -4.06 & -0.1223 & 0.0360 & -0.0025 & -0.0009 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

### B.1.2 Modèle $s(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0.996 & -0.006 & 0.007 & 0.003 & -0.003 & -0.005 & 0.001 & 0.001 & -0.007 \\ 0.001 & 0.812 & 0.406 & 0.035 & -0.136 & -0.118 & -0.055 & 0.197 & -0.361 \\ -0.004 & 0.028 & 0.771 & -0.517 & 0.220 & 0.454 & -0.168 & 0.180 & 0.306 \\ 0 & 0.004 & -0.243 & -0.878 & -0.368 & -0.017 & -0.059 & 0.160 & -0.236 \\ -0.003 & -0.034 & 0.098 & 0.25 & -0.829 & 0.378 & -0.248 & 0.018 & 0.176 \\ 0 & 0.033 & 0.086 & 0.002 & -0.276 & -0.246 & 0.894 & -0.349 & 0.280 \\ 0 & -0.015 & 0.108 & -0.047 & -0.126 & -0.796 & -0.383 & -0.160 & 0.395 \\ 0.001 & -0.009 & 0.023 & -0.045 & 0.009 & 0.069 & -0.075 & -0.795 & -0.303 \\ -0.002 & 0.054 & -0.113 & 0.050 & 0.010 & 0.026 & -0.029 & -0.110 & 0.056 \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0020 \\ 0 & 0.0142 \\ 0 & -0.0262 \\ 0 & -0.0448 \\ 0 & -0.0060 \\ 0 & -0.0581 \\ -0.0001 & -0.1388 \\ 0 & -0.0209 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.4567 & 0.0047 & -0.0002 & 0.0002 & -0.001 & 0 & -0.0005 & 0.0004 & -0.0005 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Modèles d'état du chapitre 4

### B.2.1 Modèle $Y(x,t)$ : capteur de flux de chaleur à $x=L$

$$A = \begin{bmatrix} 0.993 & 0.020 & 0.002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.019 & 0.969 & 0.185 & 0.003 & -0.011 & 0 & -0.004 & 0.002 & -0.002 \\ 0.036 & -0.185 & 0.439 & -0.191 & 0.257 & -0.078 & -0.002 & 0.044 & 0.024 \\ -0.003 & -0.012 & 0.131 & 0.935 & 0.207 & 0.057 & -0.088 & 0.174 & 0.086 \\ -0.007 & 0.006 & -0.049 & 0.052 & 0.797 & 0.410 & 0.119 & 0.272 & -0.059 \\ -0.006 & -0.005 & 0.025 & -0.109 & -0.116 & 0.516 & -0.639 & -0.110 & 0.444 \\ 0 & 0.002 & -0.021 & 0.013 & -0.257 & -0.003 & 0.044 & 0.865 & -0.056 \\ 0.002 & 0.003 & 0.002 & -0.025 & 0.046 & 0.244 & -0.453 & -0.034 & -0.942 \\ -0.001 & -0.002 & 0.017 & 0.061 & 0.233 & -0.711 & -0.533 & -0.305 & -0.183 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0021 \\ 0.0004 & -0.0151 \\ 0.0004 & -0.0077 \\ -0.0003 & 0.0230 \\ 0.0018 & -0.0618 \\ 0.0032 & -0.1087 \\ -0.0001 & -0.0338 \\ 0.0012 & -0.1164 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$C = \begin{bmatrix} -110130 & -1122.6 & -86.63 & 2.9827 & 1.3043 & 2.5008 & 0.85353 & 1.9399 & -2.3719 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

### B.2.2 Modèle $s(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0.993 & -0.003 & 0.009 & 0.003 & -0.004 & -0.001 & -0.004 & 0.001 & 0 \\ 0.008 & 0.955 & 0.296 & 0.085 & -0.122 & -0.0343 & -0.084 & -0.023 & -0.099 \\ -0.003 & 0.033 & 0.541 & -0.208 & 0.296 & 0.088 & 0.349 & -0.029 & -0.116 \\ 0.001 & -0.003 & 0.070 & -0.913 & -0.087 & 0.179 & -0.234 & 0.079 & 0.115 \\ -0.006 & -0.001 & 0.035 & -0.192 & 0.053 & -0.942 & -0.031 & -0.233 & -0.073 \\ 0 & -0.004 & 0.056 & 0.098 & 0.878 & 0.029 & -0.373 & 0.094 & 0.223 \\ 0 & 0.017 & -0.104 & -0.043 & 0.013 & -0.258 & 0.132 & 0.933 & 0.174 \\ 0 & 0.011 & -0.065 & 0.0118 & -0.052 & 0.023 & -0.653 & 0.098 & -0.671 \\ 0.001 & -0.009 & 0.010 & -0.082 & 0.217 & 0.043 & 0.420 & 0.111 & -0.721 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 \\ 0 & -0.0006 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 \\ 0 & -0.0001 \\ 0 & 0.0002 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.0002 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$C = \left[ \begin{array}{ccccccccc} 0.5022 & 0.0053 & -0.0038 & 0 & -0.0001 & -0.00019 & -0.0003 & -0.0005 & -0.0001 \end{array} \right] \quad (\text{B.13})$$

### B.3 Remarques

Tous les modèles d'état utilisés dans ce travail sont d'ordre 9, i.e. que le vecteur d'état  $x$  est un vecteur contenant 9 éléments. L'ordre du vecteur d'état consiste à trouver un compromis entre la taille du vecteur d'état et la valeur du *best fit* (Eq. 3.9), qui est équivalent aux erreurs obtenues entre le modèle «exact» (FDM) et le modèle d'état. Le 9<sup>e</sup> ordre s'est avéré être le meilleur choix. À noter qu'en utilisant des modèles plus réduits, tel le 3<sup>e</sup> ordre, de très bons résultats pouvaient être obtenus dans certains cas. Une étude plus approfondie sur ce sujet est prévue pour le futur.

# ANNEXE C

## Méthode inverse (capteur virtuel)

Dans le cadre de ce travail, la méthode inverse utilisée consiste en la combinaison d'un filtre de Kalman avec un estimateur récursif aux moindres-carrés (Figure C.1). L'objectif de cet annexe est faire la démonstration de l'algorithme présenté dans les références [31, 122].

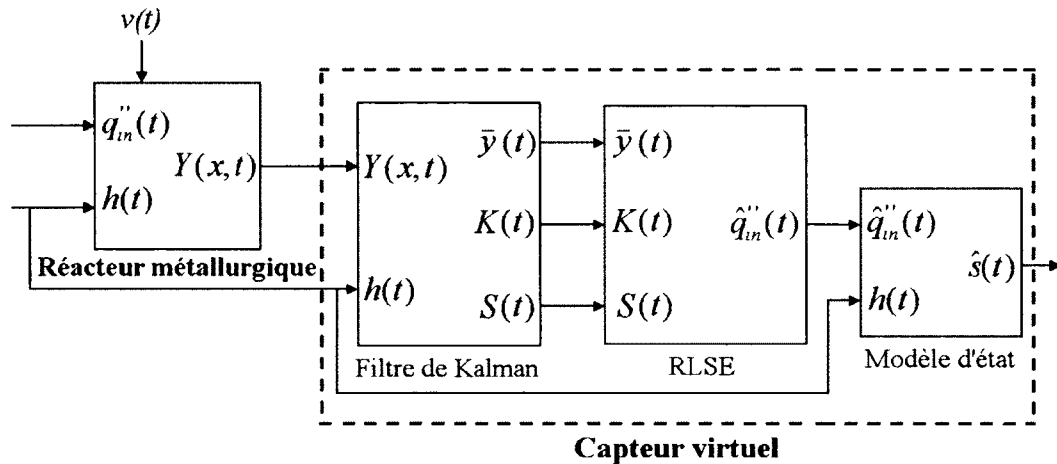


Figure C.1 La méthode inverse ; un filtre de Kalman combiné à un estimateur récursif aux moindres-carrés (RLSE).

### C.1 Le filtre de Kalman

Tel qu'il a été montré précédemment, le filtre de Kalman est un observateur qui permet d'estimer l'état thermique (le vecteur d'état) du réacteur métallurgique. Pour y parvenir, le filtre de Kalman procède en deux phases : 1) la phase de **prédiction** qui permet d'obtenir une estimation du vecteur d'état à l'aide de la représentation du procédé sous forme de modèles d'état (matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ), et 2) la phase de **correction** qui va intégrer les mesures thermiques  $Y(x, t)$  provenant des capteurs afin d'améliorer la prédiction du vecteur d'état.

La phase de **prédiction** projette dans le temps l'estimé du vecteur d'état  $\hat{x}(t-1|t-1)$  et la matrice de covariance de l'erreur  $P(t-1|t-1)$  afin d'obtenir les estimés *a priori* pour le prochain pas de temps, i.e.  $\hat{x}(t|t-1)$  and  $P(t|t-1)$  (Eqs. C.1-C.2). À noter ici que seulement un des signaux d'entrée est utilisé, i.e. le coefficient de transfert de chaleur  $h(t)$ , car l'autre signal d'entrée  $q_{in}''(t)$  est inconnu.

$$\hat{x}(t|t-1) = A\hat{x}(t-1|t-1) + B_2h(t) \quad (C.1)$$

$$P(t|t-1) = AP(t-1|t-1)A^T + Q \quad (\text{C.2})$$

où  $B$  est la matrice d'état  $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ . Les matrices de covariance de l'erreur  $P(t-1|t-1)$  et  $P(t|t-1)$  donnent une indication respective de la fiabilité des vecteurs d'état estimés  $\hat{x}(t-1|t-1)$  et  $\hat{x}(t|t-1)$ .  $Q$  est la matrice de covariance du bruit de procédé  $w(t)$  qui correspond à des perturbations au niveau de la dynamique du réacteur métallurgique. Une fois de plus, le bruit de procédé fait l'hypothèse d'un bruit blanc, gaussien, avec une moyenne nulle et une covariance  $Q$  définie comme étant la matrice de covariance du bruit de procédé (Eq. C.3).

$$w(t) \sim N(0, Q) = N(0, \sigma_Q^2) \quad (\text{C.3})$$

La phase de **correction** consiste par la suite à utiliser les mesures thermiques  $Y(x, t)$  provenant des capteurs afin d'améliorer les estimés *a priori*  $\hat{x}(t|t-1)$  et  $P(t|t-1)$ , obtenus précédemment. Cette étape permet alors de proposer de nouveaux estimés *a posteriori* pour le vecteur d'état  $\hat{x}(t|t)$  et la matrice de covariance de l'erreur  $P(t|t)$  (Eqs. C.4 - C.5).

$$\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t) [Y(x, t) - C\hat{x}(t|t-1)] \quad (\text{C.4})$$

$$P(t|t) = [I - K(t)C] P(t|t-1) \quad (\text{C.5})$$

où  $I$  correspond à la matrice identité et  $K(t)$  est le gain optimal de Kalman (Eq. C.6) qui minimise la matrice de covariance de l'erreur *a posteriori*  $P(t|t)$ .

$$K(t) = P(t|t-1)C^T [CP(t|t-1)C^T + R]^{-1} \quad (\text{C.6})$$

Un résultat très important de ces équations est  $\bar{y}(t) = [Y(x, t) - C\hat{x}(t|t-1)]$  qui correspond au résiduel de mesure et qui reflète l'erreur entre la prédiction du filtre de Kalman  $C\hat{x}(t|t-1)$  et la mesure  $Y(x, t)$  provenant des capteurs. Finalement, la covariance résiduelle  $S(t) = [CP(t|t-1)C^T + R]$  correspond à la matrice de covariance du résiduel de mesure  $\bar{y}(t)$ .

## C.2 L'estimateur récursif aux moindres-carrés

Tel que présenté à la figure C.1, un estimateur récursif aux moindres-carrés (RLSE) est ensuite utilisé afin d'estimer le flux de chaleur  $q''_m(t)$  appliqué au réacteur métallurgique. La valeur de ce flux de chaleur est malheureusement inconnue; la seule information disponible provenant des mesures thermiques  $Y(x, t)$  prises dans le réacteur. Cependant, à partir de

trois paramètres issus du filtre de Kalman, i.e. le résiduel de mesure  $\bar{y}(t)$ , la covariance résiduelle  $S(t)$  et le gain optimal de Kalman  $K(t)$ , le RLSE permet d'estimer le flux de chaleur inconnu  $q''_{in}(t)$ . En d'autres mots, à l'aide du filtre de Kalman, l'estimateur récursif aux moindres-carrés estime le signal d'entrée inconnu  $q''_{in}(t)$ .

Le principe fondamental de l'algorithme du RLSE est l'utilisation de deux filtres de Kalman : 1) un filtre de Kalman qui ne connaît pas le signal d'entrée  $q''_{in}(t)$ , et 2) un filtre de Kalman qui connaît la valeur du signal d'entrée  $q''_{in}(t)$ . Le premier filtre de Kalman est celui qui est présenté plus haut (Eqs. C.1, C.2, C.4 -C.6). Le fonctionnement du deuxième filtre de Kalman est similaire à celui du premier à la différence que le signal d'entrée  $q''_{in}(t)$  est maintenant connu.

La phase de **prédiction** projette dans le temps l'estimé du vecteur d'état  $\tilde{x}(t-1|t-1)$  et la matrice de covariance de l'erreur  $P(t-1|t-1)$  afin d'obtenir les estimés *a priori* pour le prochain pas de temps, i.e.  $\tilde{x}(t|t-1)$  and  $P(t|t-1)$  (Eqs. C.7-C.8).

$$\tilde{x}(t|t-1) = A\tilde{x}(t-1|t-1) + B \begin{bmatrix} q''_{in}(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \quad (C.7)$$

$$P(t|t-1) = AP(t-1|t-1)A^T + Q \quad (C.8)$$

La phase de **correction** consiste par la suite à utiliser les mesures thermiques  $Y(x, t)$  provenant des capteurs afin d'améliorer les estimés *a priori*  $\tilde{x}(t|t-1)$  et  $P(t|t-1)$ , obtenus précédemment. Cette étape permet alors de proposer de nouveaux estimés *a posteriori* pour le vecteur d'état  $\tilde{x}(t|t)$  et la matrice de covariance de l'erreur  $P(t|t)$  (Eqs. C.9 - C.10).

$$\tilde{x}(t|t) = \tilde{x}(t|t-1) + K(t)[Y(x, t) - C\tilde{x}(t|t-1)] \quad (C.9)$$

$$P(t|t) = [I - K(t)C]P(t|t-1) \quad (C.10)$$

où  $I$  correspond à la matrice identité et  $K(t)$  est le gain optimal de Kalman (Eq. C.11) qui minimise la matrice de covariance de l'erreur *a posteriori*  $P(t|t)$ .

$$K(t) = P(t|t-1)C^T [CP(t|t-1)C^T + R]^{-1} \quad (C.11)$$

Le résiduel de mesure  $\bar{y}(t) = [Y(x, t) - C\tilde{x}(t|t-1)]$  reflète une fois de plus l'erreur entre la prédiction du filtre de Kalman  $C\tilde{x}(t|t-1)$  et la mesure  $Y(x, t)$  provenant des capteurs. Finalement, la covariance résiduelle  $S(t) = [CP(t|t-1)C^T + R]$  correspond à la matrice de covariance du résiduel de mesure  $\bar{y}(t)$ .

En réarrangeant les vecteurs d'état *a posteriori* estimés par les deux filtres de Kalman, les Eqs. (C.13, C.14) sont obtenues.



$$\tilde{x}(t|t) = [I - K(t)C] \left( A\tilde{x}(t-1|t-1) + B \begin{bmatrix} q_{in}''(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \right) + K(t)\tilde{y}(t) \quad (C.12)$$

$$\hat{x}(t|t) = [I - K(t)C] [A\hat{x}(t-1|t-1) + B_2h(t)] + K(t)\bar{y}(t) \quad (C.13)$$

La différence entre les deux vecteur d'état est exprimée par l'équation (C.14).

$$\tilde{x}(t|t) - \hat{x}(t|t) = M(t)B_1q_{in}''(t) \quad (C.14)$$

où la matrice de sensibilité  $M(t) = [I - K(t)C][AM(t-1) + I]$ .

Il est par la suite intéressant d'effectuer la différence entre les résiduels de mesure provenant des deux mêmes filtres de Kalman. Les résiduels  $\tilde{y}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$ , et leur différence sont présentées respectivement aux Éqs. (C.15 - C.17).

$$\tilde{y}(t) = Y(x, t) - C \left( A\tilde{x}(t-1|t-1) + B \begin{bmatrix} q_{in}''(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \right) \quad (C.15)$$

$$\bar{y}(t) = Y(x, t) - C [A\hat{x}(t-1|t-1) + B_2h(t)] \quad (C.16)$$

$$\bar{y}(t) - \tilde{y}(t) = W(t)q_{in}''(t) \quad (C.17)$$

où la matrice de sensibilité  $W(t) = C [AM(t-1) + I] B_1$ . L'équation (C.17) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\bar{y}(t) = W(t)q_{in}''(t) + \tilde{y}(t) \quad (C.18)$$

où  $q_{in}''(t)$  correspond au signal d'entrée recherché, et où le résiduel de mesure  $\bar{y}(t)$  est donné par le filtre de Kalman présenté à la figure C.1. Le résiduel de mesure  $\tilde{y}(t)$ , provenant du filtre de Kalman qui connaît le signal d'entrée  $q_{in}''(t)$ , correspond quant à lui à un vecteur de perturbations. Celui-ci a les propriétés d'être un bruit blanc, Gaussien, et avec une moyenne nulle, si le vecteur d'état initial  $\tilde{x}(0|0)$ , le bruit des capteurs  $v(t)$  et le bruit de procédé  $w(t)$  respectent ces trois propriétés. En comparant les équations (C.6) et (C.11), il est également possible d'observer que le vecteur de perturbations  $\tilde{y}(t)$  possède une covariance résiduelle  $S(t)$  semblable à celle fournie par le premier filtre de Kalman.

Ainsi, à partir de l'équation (C.18), et en utilisant la forme classique des moindres-carrés pondérés [62], le signal d'entrée inconnu  $q_{in}''(t)$  peut être estimé de la manière suivante :

$$\hat{q}_{in}''(t) = [W^T(t)\Theta^{-1}(t)W(t)]^{-1} W^T(t)\Theta^{-1}(t)\bar{y}(t) \quad (C.19)$$

où  $\hat{q}_{in}''(t)$  correspond au signal d'entrée estimé.  $\Theta^{-1}(t)$  correspond à la matrice de pondération, égale à l'inverse de la covariance résiduelle  $S(t)$ , et qui inclut un facteur d'oubli (*forgetting factor*). Celui-ci est nécessaire afin d'estimer correctement le signal d'entrée qui va par nature varier dans le temps. En l'utilisant, le facteur d'oubli permet alors d'accorder plus d'importance aux nouvelles données obtenues. Son utilisation permet également de passer de l'algorithme des moindres-carrés pondérés traditionnel (*batch form*) à la forme récursive désirée.

La covariance de l'erreur  $P_b(t)$ , i.e. l'erreur entre le flux de chaleur exact  $q_{in}''(t)$  et le flux de chaleur estimé  $\hat{q}_{in}''(t)$ , est représentée quant à elle par l'équation (C.20). À noter ici que la covariance de l'erreur correspond à la matrice inverse de l'équation (C.19).

$$P_b(t) = [W^T(t)\Theta^{-1}(t)W(t)]^{-1} \quad (C.20)$$

Afin de mettre les équations (C.19) et (C.20) sous une forme récursive, l'estimation du signal d'entrée  $\hat{q}_{in}''(t+1)$  et de sa covariance de l'erreur  $P_b(t+1)$  sont calculés pour le prochain pas de temps :

$$\hat{q}_{in}''(t+1) = [W^T(t+1)\Theta^{-1}(t+1)W(t+1)]^{-1} W^T(t+1)\Theta^{-1}(t+1)\bar{y}(t+1) \quad (C.21)$$

$$P_b(t+1) = [W^T(t+1)\Theta^{-1}(t+1)W(t+1)]^{-1} \quad (C.22)$$

où la matrice de pondération  $\Theta^{-1}(t+1)$  est égale à l'équation (C.23).

$$\Theta^{-1}(t+1) = \begin{bmatrix} \gamma\Theta^{-1}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & S^{-1}(t+1) \end{bmatrix} \quad (C.23)$$

En utilisant la matrice de pondération  $\Theta^{-1}(t+1)$ , et en considérant que le résiduel de mesure  $\bar{y}(t+1)$ , la matrice de sensibilité  $W(t+1)$  et le vecteur de perturbations  $\tilde{y}(t+1)$ , contiennent leurs valeurs respectives aux pas de temps précédents, l'équation (C.21) peut être réécrite sous la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{q}_{in}''(t+1) &= [\gamma W^T(t)\Theta^{-1}(t)W(t) + W^T(t+1)S^{-1}(t+1)W(t+1)]^{-1} \\ &\times [\gamma W^T(t)\Theta^{-1}(t)\bar{y}(t) + W^T(t+1)S^{-1}(t+1)\bar{y}(t+1)] \end{aligned} \quad (C.24)$$

De la même manière, la covariance de l'erreur  $P_b(t+1)$  (Eq.C.22) est réécrite de la manière suivante :

$$P_b(t+1) = [\gamma P_b^{-1}(t) + W^T(t+1)S^{-1}(t+1)W(t+1)]^{-1} \quad (C.25)$$

En appliquant l'identité de Woodbury [62] à l'équation précédente, la covariance de l'erreur s'écrit maintenant :

$$P_b(t+1) = \gamma^{-1}P_b(t) - \gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1) \quad (C.26)$$

$$\times \left[ W(t+1)\gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1) + S(t+1) \right]^{-1} \times W(t+1)\gamma^{-1}P_b(t)$$

En insérant l'équation (C.26) dans l'équation (C.24), et en utilisant l'équation (C.19), le signal d'entrée inconnu se réécrit de la manière suivante :

$$\hat{q}_{in}''(t+1) = \hat{q}_{in}''(t) + \gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1)S^{-1}(t+1)\bar{y}(t+1) - \gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1) \quad (C.27)$$

$$\times \left[ W(t+1)\gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1) + S(t+1) \right]^{-1} W(t+1)$$

$$\times \left[ \hat{q}_{in}''(t) + \gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1)S^{-1}(t+1)\bar{y}(t+1) \right]$$

Dans le deuxième terme de droite de l'équation (C.27), entre les termes  $W^T(t+1)$  et  $S^{-1}(t+1)$ , l'identité matricielle suivante est insérée :

$$\left[ W(t+1)\gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1) + S(t+1) \right]^{-1} \quad (C.28)$$

$$\times \left[ W(t+1)\gamma^{-1}P_b(t)W^T(t+1) + S(t+1) \right]$$

Les deux termes qui multiplient le résiduel de mesure  $\bar{y}(t+1)$  peuvent alors être combinés, et en remplaçant  $t+1$  par  $t$ , le signal d'entrée estimé  $\hat{q}_{in}''(t)$  et la covariance de l'erreur  $P_b(t)$  se réécrivent sous la forme suivante :

$$\hat{q}_{in}''(t) = \hat{q}_{in}''(t-1) + K_b(t) \left[ \bar{y}(t) - W(t)\hat{q}_{in}''(t-1) \right] \quad (C.29)$$

$$K_b(t) = \gamma^{-1}P_b(t-1)W^T(t) \left[ W(t)\gamma^{-1}P_b(t-1)W^T(t) + S(t) \right]^{-1} \quad (C.30)$$

$$P_b(t) = [I - K_b(t)W(t)] \gamma^{-1}P_b(t-1) \quad (C.31)$$

CQFD!

## ANNEXE D

### Contributions scientifiques du présent projet de recherche

#### D.1 Publications dans les journaux avec comité de lecture

- LeBreux, M., Désilets, M. et Lacroix, M. (2011). Control of phase change ledges in high temperature metallurgical reactors using a virtual sensor. Soumis au *International Journal of Thermal Sciences* le 9 avril 2011. 53 pages
- LeBreux, M., Désilets, M. et Lacroix, M. (2010). Fast inverse prediction of phase change banks in high temperature furnaces with a Kalman filter coupled with a recursive least-square estimator, volume 55, p. 5250-5260.

#### D.2 Actes de colloques avec comité de lecture

- LeBreux, M., Désilets, M. et Lacroix, M. (2011). Inverse prediction and control of the bank thickness in high temperature metallurgical reactors. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting, Sensor, Sampling, and Simulation for Process Control Symposium*. TMS, San Diego, CA, USA.
- LeBreux, M., Désilets, M. et Lacroix, M. (2010). Inverse prediction of phase change banks in high temperature furnaces. Dans *Inverse Problems Symposium*. Michigan State University, East Lansing, MI, USA.

#### D.3 Autres contributions sans comité de lecture

- LeBreux, M. (2010) Prédiction inverse et contrôle de la gelée dans les réacteurs métallurgiques à haute température. *Encyclopédie de la recherche sur l'aluminium au Québec - Édition 2010*.
- LeBreux, M. (2010). Prédiction inverse et contrôle de la gelée dans les réacteurs métallurgiques à haute température. Dans *Journée de la JER 2010-Régal*. Université Laval, Sainte-Foy, Québec.



## LISTE DES RÉFÉRENCES

- [1] (2003). *Aluminium for Future Generations Sustainability* (Rapport technique). International Aluminium Institute.
- [2] (2008). *Guide de données sur la consommation d'énergie 1990-2008* (Rapport technique). Ressources Naturelles Canada.
- [3] (2010). *Rapport annuel* (Rapport technique). Hydro-Québec.
- [4] (2010). *Simulink® Design Optimization User's Guide* (Rapport technique). The MathWorks Inc., 51–53 p.
- [5] Aguilar, R., Poznyak, A., Martinez-Guerra, R. et Maya-Yescas, R. (2002). Temperature control in catalytic cracking reactors via a robust pid controller. *Journal of Process Control*, volume 12, numéro 6, p. 695–705.
- [6] Alfora, V.M., Vilanova, R. et Arrieta, O. (2009). Robust tuning of two-degree-of-freedom (2-dof) pi/pid based cascade control systems. *Journal of Process Control*, volume 19, numéro 10, p. 1658–1670.
- [7] Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A. et Rumiantzev, S.V. (1988). *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems*. Nauka.
- [8] Arita, Y., Urata, N. et Ikeuchi, H. (1978). Estimation of frozen bath shape in an aluminium reduction cell by computer simulation. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Denver, CO, USA, p. 59–72.
- [9] Åström, K.J. et Hägglund, T. (1995). *PID Controllers : Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, NC 27709, 59–197 p.
- [10] Aune, J.A., Johansen, K. et Nos, P.O. (2003). Electrolytic cell for the production of aluminium and a method for maintaining a crust on a sidewall and for recovering electricity, US patent, 0,183,514 A1.
- [11] Balima, O. (2006). *Réduction de Modèle Non Linéaire par Identification : Application en thermique et comparaison avec la méthode POD-Galerkin*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- [12] Barantsev, A.G., Yurkov, V.V., Mann, V.C., Piskazhova, T.V. et Nikandrov, K.F. (2000). Model of process of electrolyses. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Nashville, TN, USA, p. 315–321.
- [13] Battaglia, Jean-Luc (2002). A modal approach to solve inverse heat conduction problems. *Inverse Problems in Engineering*, volume 10, numéro 1, p. 41–63.
- [14] Beck, J. V., Blackwell, B. et St Clair, C.R. (1985). *Inverse heat conduction : Ill posed problems*. Wiley-Interscience.

- [15] Beck, J.V. (1962). Calculation of surface heat flux from an internal temperature history. *ASME Paper*, volume 62-HT-46.
- [16] Beck, J.V. (1970). Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 13, numéro 4, p. 703–716.
- [17] Beck, J.V., Blackwell, B. et Haji-Sheikh, A. (1996). Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 39, numéro 17, p. 3649–3657.
- [18] Bertrand, C., Marois, M.A., Désilets, M. et Soucy, G. (2011). Measurement of the solidification front inside a metallurgical reactor. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting, Sensors, Sampling, and Simulation for Process Control Symposium*. TMS, San Diego, CA, USA.
- [19] Boily, P. (2001). *Application des capteurs thermiques implantés pour la détection du profil de gelée dans la cuve d'électrolyse*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Chicoutimi.
- [20] Boily, P., Kiss, L.I., Bui, R.T. et Desclaux, P. (2001). Sensitivity analysis of the thermal detection of the freeze profile in an aluminium reduction cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Warrendale, PA, USA, p. 1209–1215.
- [21] Bonnardel, O. et Homsy, P. (1999). Pechiney semi-continuous & automatic measurement device (cmd), a new tool for automatic measurements. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Warrendale, PA, USA, p. 303–309.
- [22] Bonnardel, O. et Homsy, P. (1999). Process for regulating the temperature of the bath of an electrolytic pot for the production of aluminium, US patent, 5,882,499.
- [23] Bos, J., Feve, B. et Homsy, P. (1999). Electrolytic pot for production of aluminium using the hall-héroult process comprising cooling means, US patent, 6,251,237.
- [24] Brown, R.G. et Hwang, P.Y.C. (1997). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, 3<sup>e</sup> édition. John Wiley & Sons, New York, 72–113 p.
- [25] Brown, T.J., Bide, T., Walters, A.S., Idoine, N.E., Shaw, R.A., Hannis, S.D., Lusty, P.A.J. et Kendall, R. (2009). *British Geological Survey - World Mineral Production 2005-2009* (Rapport technique). Natural Environment Research Council.
- [26] Bruggeman, J.N. et Danka, D.J. (1990). Two-dimensional thermal modeling of the hall-heroult cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Anaheim, CA, USA, p. 203–209.
- [27] Bruggemann, J.N. (1998). Pot heat balance fundamentals. Dans *Proceedings of the Sixth Australasian Aluminium Smelter Technology Conference and Workshops*. p. 167–189.
- [28] Camacho, E.F. et Bordons, C. (1995). *Model Predictive Control in the Process Industry*. Springer, New York.

- [29] Chan, Y T , Hu, A G C et Plant, J B (1979) A kalman filter based tracking scheme with input estimation *IEEE Trans Aerospace Electron Syst* , volume AES-15, p 237-244
- [30] Chen, C K et Su, C R (2008) Inverse estimation for temperatures of outer surface and geometry of inner surface of furnace with two layer walls *Energy conversion and Management*, volume 49, numéro 2, p 301-310
- [31] Chen, T C et Hsu, S J (2007) Input estimation method in the use of electronic device temperature prediction and heat flux inverse estimation *Numerical Heat Transfer-Part A*, volume 52, numéro 9, p 795-815
- [32] Daouas, N et Radhouani, M S (2004) A new approach of the kalman filter using future temperature measurements for nonlinear inverse heat conduction problems *Numerical Heat Transfer-Part B*, volume 45, numéro 6, p 565-585
- [33] Daouas, N et Radhouani, M S (2004) A new approach of the kalman filter using future temperature measurements for nonlinear inverse heat conduction problems *Numerical Heat TransferPart B*, volume 45, numéro 6, p 565-585
- [34] Dayal, B S et MacGregor, J F (1997) Recursive exponentially weighted pls and its applications to adaptive control and prediction *Journal of Process Control*, volume 7, numéro 3, p 169-179
- [35] De Larminat, P (1993) *Automatique commande des systèmes lineaires* Hermes, Paris, 49-58 p
- [36] Demers, C (2007) Portrait de l'électricité au quebec et les enjeux des différentes filieres Dans *Symposium sur l'efficacité énergétique dans les alumineries*
- [37] Désilets, M (2007) *RDC-Diagnostic thermique des réacteurs multiphasiques a haute température* (Rapport technique) Université de Sherbrooke
- [38] Diaz, G , Sen, M , Yang, K T et McClain, R L (2001) Dynamic prediction and control of heat exchangers using artificial neural networks *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 44, numéro 9, p 1671-1679
- [39] Drezet, J M , Gruen, G U et Gremaud, M (2000) Determination of thermal properties and boundary conditions in the dc casting process using inverse stationary methods Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting* TMS, Nashville, TN, USA, p 585-590
- [40] Dupuis, M (1997) Les modèles thermiques *Symposium électrolyse CQRDA optimisation du procédé par modélisation*, p 1-23
- [41] Dupuis, M (2000) Thermo-electric design of a 400 ka cell using mathematical models A tutorial Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting* TMS, Nashville, TN, USA, p 297-302



- [42] Dupuis, M. (2002). Toward the development of a 3d full cell and external busbars thermo-electric model. Dans *Proceedings of the 41st Conference on Light Metal, CIM*. p. 25–39.
- [43] Dupuis, M. et Bojarevics, V. (2005) Weakly coupled thermo-electric and mhd mathematical models of an aluminium electrolysis cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, San Francisco, CA, USA, p. 449–454.
- [44] Dupuis, M. et Tabsh, I. (1992). Thermo-electric analysis of aluminum reduction cells. Dans *Proceedings of the International Symposium on Advances in Production and Fabrication of Light Metals and Metal Matrix Composites*. p. 55–60.
- [45] Eika, K. et Skjeggstad, R. (1993). Heat recovery and dynamic process studies. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Denver, CO, USA, p. 277–284.
- [46] Eki, Y., Hirasawa, K., Murata, J. et Hu, J. (1998). Feed-forward control of thermal power plants using neural networks. *Research Reports on Information Science and Electrical Engineering of Kyushu University*, volume 3, numéro 1, p. 13–21.
- [47] Facco, P., Doplicher, F., Bezzo, F. et Barolo, M (2009) Moving average pls soft sensor for online product quality estimation in an industrial batch polymerization process. *Journal of Process Control*, volume 19, numéro 3, p. 520–529.
- [48] Favennec, Y., Girault, M. et Petit, D. (2006). The adjoint method coupled with the modal identification method for nonlinear model reduction. *Inverse Problems in Science and Engineering*, volume 14, numéro 2, p. 153–170.
- [49] Gao, J et Budman, H.M. (2005). Design of robust gain-scheduled pi controllers for nonlinear processes *Journal of Process Control*, volume 15, p. 807–817.
- [50] Girault, M. (2003). *Résolution de problèmes inverses en thermique par modèle réduit : applications en conduction non linéaire et en convection forcée*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers
- [51] Gol'dman, N L. (1997). *Inverse Stefan Problems*. Kluwer Academic Publishers.
- [52] Gonzaga, J.C.B., Meleiro, L A C , Kiang, C. et Maciel Filho, R (2009). Ann-based soft-sensor for real-time process monitoring and control of an industrial polymerization process. *Computers and Chemical Engineering*, volume 33, numéro 1, p. 43–49.
- [53] Graichen, K., Hagenmeyer, V. et Zeitz, M. (2006). Feedforward control with online parameter estimation applied to the chylla-haase reactor benchmark. *Journal of Process Control*, volume 16, numéro 7, p 733–745.
- [54] Grjotheim, K. et Kvande, H. (1993). *Introduction to Aluminium Electrolysis*, 2<sup>e</sup> édition. Aluminium-Verlag, Düsseldorf, 147–160 p
- [55] Groth, R.J. et Zhao, Y. (1995). Determining protective layer thickness of blast furnaces, US patent, 5,961,214.
- [56] Gu, D.W., Petkov, P.H. et Konstantinov, M.M. (2005). *Robust Control Design with Matlab®*. Springer-Verlag, London, 13–20 p.

- [57] Hadamard, J. (1952). *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. New-York : Dover Publications.
- [58] Hashimoto, T. et Ikeuchi, H. (1979). Computer simulation of dynamic behavior of an aluminium reduction cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Las Vegas, NV, USA, p. 273–283.
- [59] Haugland, E., Borset, H., Gikling, H. et Hoic, H. (2003). Effects of ambient temperature and ventilation on shell temperature, heat balance and side ledge of an alumina reduction cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, San Diego, CA, USA, p. 269–276.
- [60] Haupin, W.E. (1971). Calculating thickness of containing walls frozen from melt. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, New York, NY, USA, p. 188–194.
- [61] Haykin, S. (1994). *Neural Networks : a Comprehensive Foundation*. Macmillan College Publishing Company, New York.
- [62] Haykin, S. (1995). *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, 3<sup>e</sup> édition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 562–587 p.
- [63] Haywood, R., Sarvinis, J., Monaghan, A. et Baker, P.W. (2003). Intensive sidewall cooling in hall-héroult cells. Dans *Proceedings of COM Ligth Metals*. p. 77–90.
- [64] Holmen, H.K. (1988). Electrometallurgical cell arrangement, US patent, 4,749,463.
- [65] Homsí, P., Peyneau, J.M. et Reverdy, M. (2000). Overview of process control in reduction cells and potlines. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Nashville, TN, USA, p. 223–230.
- [66] Huang, C.H. et Chao, B.H. (1997). An inverse geometry problem in identifying irregular boundary configurations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 40, numéro 9, p. 2045–2053.
- [67] Incropera, F.P. et DeWitt, D.P. (2002). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 5<sup>e</sup> édition. John Wiley & Sons, New York, 428–434 p.
- [68] Jang, H.Y., Tuan, P.C., Chen, T.C. et Chen, T.S. (2006). Input estimation method combined with the finite-element scheme to solve ihcp hollow-cylinder inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer-Part A*, volume 50, numéro 3, p. 263–280.
- [69] Jiangjiang, W., Chunfa, Z., Youyin, J. et Dawei, A. (2007). Control system design for radiator thermal characteristics experiment system. Dans *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. p. 654–659.
- [70] Julier, S.J. et Uhlmann, J.K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, volume 92, p. 401–422.
- [71] Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME J. Basic Eng.*, volume 82, p. 35–45.

- [72] Kaseb, S., Ahmed, H.A., El-Refaie, F.A., El-Raghy, S.M. et Bassuny, Z. (1997). Thermal behavior of prebaked aluminum reduction cells : Modeling and experimental analysis. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Orlando, FL, USA, p. 395–401.
- [73] Khokhlov, V.A., Filatov, E.S., Solheim, A. et Thonstad, J. (1998). Thermal conductivity in cryolitic melts - new data and its influence on heat transfer in aluminum cells. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, San Antonio, TX, USA, p. 501–506.
- [74] Kiss, L.I. et Dassylva-Raymond, V. (2008). Freeze thickness in the aluminium electrolysis cells. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, New Orleans, LA, USA, p. 431–436.
- [75] Kreyszig, E. (1998). *Advanced Engineering Mathematics*, 8<sup>e</sup> édition. Wiley, New York, USA, 175–182 p.
- [76] Lan, C.H., Cheng, C.H. et Wu, C.Y. (2001). Shape design for heat conduction problems using curvilinear grid generation, conjugate gradient, and redistribution methods. *Numerical Heat Transfer-Part A*, volume 39, numéro 5, p. 487–510.
- [77] Lazar, C., Poli, E. et Mustata, B. (2000). Implementation of a predictive controller for thermal treatment processes. *Control Engineering Practice*, volume 8, numéro 3, p. 345–350.
- [78] LeBreux, M. (2009). Définition du projet de recherche.
- [79] LeBreux, M., Désilets, M. et Lacroix, M. (2010). Fast inverse prediction of phase change banks in high temperature furnaces with a kalman filter coupled with a recursive least-square estimator. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 53, numéro 23–24, p. 5250–5260.
- [80] LeBreux, M., Désilets, M. et Lacroix, M. (2011). Control of phase change ledges in high temperature metallurgical reactors using a virtual sensor. *International Journal of Thermal Sciences*.
- [81] Liu, X., Beeler, R., Hornack, T., Burg, J. et Czekaj, S. (2008). Electrolysis cells for the production of metals from melts comprising sidewall temperature control systems, WO patent, 014042.
- [82] Ljung, L. (1999). *System Identification : Theory for the Users*, 2<sup>e</sup> édition. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 197–234 p.
- [83] Martin, O., Benkahla, B., Tomasino, T., Fardeau, S., Richard, C. et Hugron, I. (2007). The latest developments of alcan's ap3x and alpsys technologies. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Orlando, FL, USA, p. 253–258.
- [84] Matsevity, Y.M. et Moulthanovsky, A.V. (1991). Solution of multi-parameter inverse problems of heat conduction. *Journal of Engineering Physics*, volume 60, numéro 1, p. 117–124.

- [85] Matsevity, Y.M., Moultanovsky, A.V. et Timchenko, V. (1992). Modelling of thermal processes and identification of local heat transfer parameters with the help of an adaptive iterative filter. *High Temperature*, volume 30, numéro 1, p. 71–78.
- [86] Mawire, A. et McPherson, M. (2008). A feedforward imc structure for controlling the charging temperature of a tes system of a solar cooker. *Energy Conversion and Management*, volume 49, numéro 11, p. 3143–3154.
- [87] McClung, M. et Zerkle, R. (2004). Autopsy procedures and results at century aluminum of west virginia. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Charlotte, NC, USA, p. 213–218.
- [88] Meghlaoui, A., Thibault, J., Bui, R.T., Tikasz, L. et Santerre, R. (1998). Neural networks for the identification of the aluminium electrolysis process. *Computers and Chemical Engineering*, volume 22, numéro 10, p. 1419–1428.
- [89] Miller, J.J. (1980). Hall cell, US patent, 4,222,841.
- [90] Mobbs, P.H. (2011). *2009 Mineral Yearbook - The Mineral Industry of Canada* (Rapport technique). U.S. Department of Interior, U.S. Geological Survey.
- [91] Morari, M. et Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [92] Moultanovsky, A.V. et Rekada, M. (2002). Inverse heat conduction problem approach to identify the thermal characteristics of super-hard synthetic materials. *Inverse Problems in Engineering*, volume 10, numéro 1, p. 19–39.
- [93] Newman, A. (1999). *Modeling and Reduction with Application to Semiconductor Processing*. Thèse de doctorat, University of Maryland - Departement of Electrical and Computer Engineering.
- [94] Nichols, R.A., Reicher, R.T. et Rugh, W.J. (1993). Gain scheduling for  $h_\infty$  controllers : a flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, volume 1, p. 69–79.
- [95] Noda, Y., Yamazaki, T., Matsuba, T., Kamimura, K. et Kurosu, S. (2003). Comparison in control performance between pid and  $\mathcal{H}_\infty$  controllers for hvac control. Dans *ASHRAE Transactions - Part 1*. volume 109. p. 3–11.
- [96] Peacey, J.G. et Medlin, G.W. (1979). Cell sidewall studies at noranda aluminium. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Warrendale, PA, USA, p. 475–491.
- [97] Petit, D. (1991). *Réduction de modèles de connaissance et identification de modèles d'ordre réduit. Application aux processus de diffusion thermique*. Thèse de doctorat, Université de Provence.
- [98] Pickhardt, R. (2000). Nonlinear modelling and adaptive predictive control of a solar power plant. *Control Engineering Practice*, volume 8, p. 937–947.

- [99] Romerio, M.V., Flueck, M., Rappaz, J. et Safa, Y. (2005). Determination and influence of the ledge shape on electrical potential and fluid motions in a smelter. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, San Francisco, CA, USA, p. 461–468.
- [100] Samaï, M. et Loulou, T. (2009). A comparative study of heat flux and temperature based objective functional to solve inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer Part B*, volume 56, numéro 1, p. 75–104.
- [101] Sampath, V., Palanki, S., Cockburn, J.C. et Corriou, J.P. (2002). Robust controller design for temperature tracking problems in jacketed batch reactor. *Journal of Process Control*, volume 12, numéro 1, p. 27–38.
- [102] Scarpa, F. et Milano, G. (1995). Kalman smoothing technique applied to the inverse heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer-Part B*, volume 28, numéro 1, p. 79–96.
- [103] Schenker, B. et Agarwal, M. (1998). Predictive control of a bench-scale chemical reactor based on neural-network models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, volume 6, numéro 3, p. 388–400.
- [104] Sharmin, R., Sundararaj, U., Shah, S., Vande Griend, L. et Sun, Y.J. (2006). Inferential sensors for estimation of polymer quality parameters : Industrial application of a pls-based soft sensor for a ldpe plant. *Chemical Engineering Science*, volume 61, numéro 19, p. 6372–6384.
- [105] Shen, J.C. et Chiang, H.K. (2004). Pid tuning rules for second order systems. Dans *Proceedings of the fifth Asian Control Conference*. IEEE, Melbourne, Australia, p. 472–477.
- [106] Shiguemori, E.H., Da Silva, J.D.S et De Campos Velho, H.F. (2004). Estimation of initial condition in heat conduction by neural network. *Inverse Problems in Science and Engineering*, volume 12, numéro 3, p. 317–328.
- [107] Shuiping, Z., Jinhong, L. et Bijun, R. (2007). Adaptive fuzzy control system of 300ka aluminum production cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Orlando, FL, USA, p. 559–563.
- [108] Slota, D. (2007). Direct and inverse one-phase stefan problem solved by the variational iteration method. *Computers and Mathematics with Applications*, volume 54, numéro 7–8, p. 1139–1146.
- [109] Solheim, A. (2006). Towards a proper understanding of sideledge facing the metal in aluminium cells? Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, San Antonio, TX, USA, p. 439–443.
- [110] Solheim, A. et Stoen, L.I.R. (1997). On the composition of solid deposits frozen out from cryolitic melts. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Orlando, FL, USA, p. 325–332.

- [111] Stein, G. (2003). Respect the unstable. *IEEE Control System Magazine*, volume 23, p. 12–25.
- [112] Su, C.R. et Chen, C.K. (2007). Geometry estimation of the furnace inner wall by an inverse approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 50, numéro 19–20, p. 3767–3773.
- [113] Tabsh, I., Dupuis, M. et Gomes, A. (1996). Process simulation of aluminium reduction cells. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Warrendale, PA, USA, p. 451–457.
- [114] Tadrari, O. et Lacroix, M. (2006). Prediction of protective banks in high temperature smelting furnaces by inverse heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 49, numéro 13–14, p. 2180–2189.
- [115] Takatsu, H., Itoh, T. et Araki, M. (1998). Future needs for the control theory in industries - report and topics of the control technology survey in japanese industry. *Journal of Process Control*, volume 8, numéro 5–6, p. 369–374.
- [116] Taylor, M.P. (1984). *The Influence of Process Dynamics on the Heat Balance and Cell Operation in the Electrowinning of Aluminium*. Thèse de doctorat, University of Auckland, Auckland, New Zealand.
- [117] Taylor, M.P. et Welch, B.J. (1985). Bath/freeze heat transfer coefficients : experimental determination and industrial application. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, New York, NY, USA, p. 781–789.
- [118] Taylor, M.P., Welch, B.J. et Keniry, J.T. (1983). Influence of changing process conditions on the heat transfer during the early life of an operating cell. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Atlanta, GA, USA, p. 437–447.
- [119] Taylor, M.P., Welch, B.J. et O'Sullivan, M.J. (1983). Sidewall ledge dynamics in cells used for electrowinning aluminium. Dans *Proceedings of the Eleventh Australian Conference on Chemical Engineering*. p. 493–500.
- [120] Thonstad, J. et Rolseth, S. (1983). Equilibrium between bath and side ledge in aluminium cells. basic principals. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Atlanta, GA, USA, p. 415–424.
- [121] Torklep, K. et Nordbo, T. (1994). Some applications of the elkem position probe. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, San Francisco, CA, USA, p. 449–456.
- [122] Tuan, P.C., Ji, C.C., Fong, L.W. et Huang, W.T. (1996). An input estimation approach to on-line two-dimensional inverse heat conduction problems. *Numerical Heat Transfer-Part B*, volume 29, numéro 3, p. 345–363.
- [123] Vidalain, G., Gosselin, L. et Lacroix, M. (2009). An enhanced thermal conduction model for the prediction of convection dominated solidliquid phase change. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, volume 52, numéro 7–8, p. 1753–1760.

- [124] Videcoq, E. (1999). *Problèmes inverses en diffusion thermique instationnaire : Résolution par représentation d'état et apport de la réduction de modèle*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- [125] Voller, V.R. et Swaminathan, C.R. (1991). General source-based method for solidification phase change. *Numerical Heat Transfer*, volume 19, p. 175–189.
- [126] Wei, C.C., Chen, J.J.J., Welch, B.J. et Voller, V.R. (1997). Modelling of dynamic ledge heat transfer. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Orlando, FL, USA, p. 309–316.
- [127] Welch, G. et Bishops, G. (2006). *An Introduction to the Kalman Filter* (Rapport technique TR 95-041). University of North Carolina, Department of Computer Science, 1–16 p.
- [128] Yurkov, V., Mann, V., Nikandrov, K. et Trebukh, O. (2004). Development of aluminium reduction process supervisory control system. Dans *Proceedings of Sessions, TMS Annual Meeting*. TMS, Charlotte, NC, USA, p. 263–267.
- [129] Zhong, Q.C. (2006). *Robust Control of Time-Delay Systems*. Springer-Verlag, London, 17–22 p.
- [130] Zhou, K., Doyle, J.C. et Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [131] Ziegler, J.G. et Nichols, N.B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the ASME*, volume 64, p. 759–768.