

**UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

Faculté des sciences appliquées  
Département de génie mécanique

**TRANSFERT DE CHALEUR DANS UN MATÉRIAU À CHANGEMENT  
DE PHASE : APPLICATION AU STOCKAGE CYCLIQUE D'ÉNERGIE  
ÉLECTRIQUE**

Thèse de doctorat (Ph.D)  
Spécialité : Génie mécanique

Abdelaziz LAOUADI

Mai 1996

Sherbrooke (Québec), Canada

## *Dédicace*

*À qui revient le mérite de la réalisation de ce travail :*

*Ma mère,  
ma femme,  
mes frères et soeurs*

## SOMMAIRE

La présente étude est consacrée à l'analyse de transfert de chaleur dans un système de stockage cyclique d'énergie électrique par chaleur latente de fusion. Ce système peut être utilisé afin d'emmagasiner de la chaleur la nuit pour la restituer le jour, réduisant ainsi la demande d'électricité pour le chauffage pendant les heures de pointe. Un modèle enthalpique basé sur le principe de "*moyenne volumique*" est développé pour un milieu à deux phases. La présence de l'interface est ignorée et remplacée par une conductivité thermique effective du milieu. Ce modèle est ensuite utilisé pour prédire les performances thermiques et cycliques du système de stockage. Un prototype d'un élément plan pouvant servir aux positions horizontale (plafond) ou verticale (mur) est conçu, fabriqué puis testé au laboratoire sous un régime cyclique de charge et de décharge consécutives durant plusieurs jours et pour différentes intensités de la puissance électrique fournie. L'élément de stockage décharge sa chaleur dans le milieu ambiant par convection naturelle et par rayonnement. Dans le but de déterminer les paramètres optimums de fonctionnement, une étude paramétrique est enfin réalisée à l'aide du modèle réduit et efficace se basant sur des constatations expérimentales. En fin, pour bien contrôler la température de la plaque d'échange de l'élément de stockage, une modification technique est apportée à l'élément de stockage lui permettant de décharger sa chaleur par convection forcée, par rayonnement et par convection naturelle dans l'environnement.

## REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier vivement mes directeurs de recherche, les professeurs **Marcel LACROIX** et **Nicolas GALANIS**, pour leur suivi, leur assistance et leurs conseils précieux le long de ma formation. Leurs compétences ainsi que leurs expériences dans le domaine m'ont été d'une grande utilité.*

*Jé désire exprimer ma reconnaissance à tous les membres du jury d'avoir accepté de lire ce manuscrit et d'apporter les critiques nécessaires à la mise en forme finale de cet ouvrage.*

*Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à toute ma famille pour leur sacrifice et soutien inestimables durant toutes mes études.*

*Ce travail a été supporté financièrement par le Ministère de l'énergie et des ressources du Québec.*

# TABLE DES MATIÈRES

	Page
<b>SOMMAIRE</b> .....	I
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	II
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> .....	III
<b>LISTE DES FIGURES</b> .....	VI
<b>LISTES DES TABLEAUX</b> .....	IX
<b>Chapitre 1 INTRODUCTION</b> .....	1
<b>Chapitre 2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE</b> .....	6
2.1 Travaux concernant la modélisation .....	6
2.1.1 Modèles analytiques .....	6
2.1.2 Modèles numériques .....	8
2.1.2.1 Méthodes qui suivent le mouvement de l'interface .....	8
2.1.2.2 Méthodes à domaine fixe .....	12
2.1.2.3 Méthodes qui fixent l'interface .....	18
2.2 Travaux concernant les systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente .....	19
2.3 Conclusion .....	23
<b>Chapitre 3 MODÉLISATION DES PROBLÈMES DE CHANGEMENT DE PHASE</b> .....	24
3.1 Introduction .....	24
3.2 Développement des équations de conservation d'un système biphasique dans le cas de la conduction pure sans sources internes .....	25
3.2.1 Équations locales .....	25
3.2.2 Équations moyennées dans l'espace .....	27
3.2.3 Équations globales .....	30

3.3	Formulation avec un terme source de chaleur latente .....	34
3.3.1	Changement de phase isotherme .....	35
3.3.2	Changement de phase dans une marge de température .....	38
3.4	Détermination de la conductivité thermique effective d'un milieu biphasique .....	39
3.4.1	Interface fixe .....	40
3.4.2	Interface mobile .....	41
3.5	Méthode numérique de résolution .....	46
3.5.1	Discrétisation numérique .....	46
3.5.2	Détermination de la marge de fusion "numérique" pour les problèmes de changement de phase isotherme .....	48
3.5.3	Méthode de calcul de la fraction liquide .....	51
3.5.3.1	Méthodes de Voller .....	51
3.5.3.2	Méthode proposée .....	54
3.6	Validation du modèle proposé .....	56
3.6.1	Cas unidimensionnel: Fusion d'une barre semi-infinie .....	56
3.6.2	Cas bidimensionnel: Solidification dans une cavité .....	63
3.6.3	Performance de la méthode proposée .....	65

**Chapitre 4 STOCKAGE D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE PAR CHALEUR  
LATENTE DE FUSION DANS UN ÉLÉMENT PLAN .....** 67

4.1	Introduction .....	67
4.2	Étude expérimentale .....	69
4.2.1	Montage expérimental .....	69
4.2.2	Acquisition de données .....	70
4.2.3	Choix du matériau de stockage .....	71
4.2.4	Modèle analytique .....	72
4.2.5	Bilan thermique de l'élément .....	74
4.2.6	Analyse des résultats .....	77

4.2.6.1	Élément horizontal .....	77
4.2.6.2	Élément vertical .....	85
4.2.6.3	Puissance émise par l'élément .....	93
4.3	Étude paramétrique .....	94
4.3.1	Effet de l'épaisseur du MCP .....	95
4.3.2	Effet de la puissance fournie .....	98
4.3.3	Estimation des temps de charge et de décharge .....	99
4.3.4	Effet des temps de charge et de décharge .....	102
4.3.4.1	Charge partielle et décharge complète .....	103
4.3.4.2	Charge complète et décharge partielle .....	105
4.3.4.3	Charge et décharge partielles .....	106
<b>Chapitre 5</b>	<b>SYSTÈME DE STOCKAGE D'ÉNERGIE DÉCHARGEANT</b>	
	<b>SA CHALEUR PAR CONVECTION FORCÉE PURE, PAR</b>	
	<b>CONVECTION NATURELLE ET PAR RADIATION .....</b>	<b>109</b>
5.1	Introduction .....	109
5.2	Description du système de stockage .....	110
5.3	Analyse des échanges de chaleur .....	111
5.4	États de fonctionnement du système .....	113
5.5	Effet du débit d'air .....	118
5.6	Effet de la hauteur de passage d'air .....	120
5.7	Effet des émissivités des plaques d'échange .....	121
5.8	Variations des temps de charge et de décharge .....	122
5.9	Conclusion .....	123
	<b>CONCLUSION .....</b>	<b>124</b>
	<b>NOMENCLATURE .....</b>	<b>128</b>
	<b>RÉFÉRENCES .....</b>	<b>132</b>
	<b>ANNEXE .....</b>	<b>139</b>

## LISTES DES FIGURES

Figure 3.1	Volume de contrôle. ....	25
Figure 3.2	Volume élémentaire représentatif (VER). ....	28
Figure 3.3	Représentation d'une barre composée. ....	42
Figure 3.4	Zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixe et mobile- cas: $k_1 > k_2$ . ....	43
Figure 3.5	Zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixe et mobile- cas: $k_1 < k_2$ . ....	44
Figure 3.6	Variation de la conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique: cas d'une interface fixe. ....	46
Figure 3.7	Volume de contrôle de discrétisation- cas unidimensionnel. ....	49
Figure 3.8	Fusion d'une barre semi-infinie. ....	57
Figure 3.9	Position de l'interface en fonction du temps lors de la fusion d'une barre semi-infinie. ....	59
Figure 3.10	Position de l'interface en fonction du temps lors de la solidification de l'eau. .	61
Figure 3.11	Champ de température dans la barre lors de la solidification de l'eau. ....	62
Figure 3.12	Position de l'interface en fonction du temps lors de la fusion de la glace. ...	62
Figure 3.13	Solidification dans une cavité. ....	63
Figure 3.14	Variation de la fraction solidifiée en fonction du temps lors de la solidification de l'eau dans une cavité. ....	64
Figure 3.15	Isothermes dans une cavité lors de la solidification de l'eau. ....	64
Figure 4.1	Vue transversale prise au milieu de l'élément de stockage. ....	70
Figure 4.2	Appareillage expérimental. ....	71
Figure 4.3	Schéma représentatif de l'élément de stockage. ....	73



Figure 4.4	Isothermes expérimentales dans le MCP (élément horizontal).	79
Figure 4.5	Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour $E = 80 \text{ W}$ (élément horizontal).	80
Figure 4.6	Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour $E = 120 \text{ W}$ (élément horizontal).	81
Figure 4.7	Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour $E = 80 \text{ W}$ (élément horizontal).	83
Figure 4.8	Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour $E = 120 \text{ W}$ (élément horizontal).	84
Figure 4.9	Isothermes expérimentales dans le MCP (élément vertical).	88
Figure 4.10	Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour $E = 80 \text{ W}$ (élément vertical).	89
Figure 4.11	Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour $E = 120 \text{ W}$ (élément vertical).	90
Figure 4.12	Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour $E = 80 \text{ W}$ (élément vertical).	91
Figure 4.13	Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour $E = 120 \text{ W}$ (élément vertical).	92
Figure 4.14	Puissance émise par unité de surface pour $e = 1053 \text{ W/m}^2$ et $l = 2 \text{ cm}$ .	94
Figure 4.15	Variation cyclique des températures des deux plaques pour $e = 702 \text{ W/m}^2$ et $l = 3 \text{ cm}$ (élément horizontal).	95
Figure 4.16	Variation cyclique des températures des deux plaques pour $e = 702 \text{ W/m}^2$ et $l = 3 \text{ cm}$ (élément vertical).	96
Figure 4.17	Puissance émise par unité de surface pour $e = 702 \text{ W/m}^2$ et $l = 3 \text{ cm}$ .	97
Figure 4.18	Effet de l'épaisseur du MCP sur les temps de charge et de décharge pour $e = 702 \text{ W/m}^2$ .	98
Figure 4.19	Effet de la puissance fournie par unité de surface sur les temps de charge et de décharge pour $l = 2 \text{ cm}$ .	99
Figure 4.20	Variation du temps de charge en fonction de l'épaisseur du MCP et de la	

	puissance fournie par unité de surface. ....	100
Figure 4.21	Variation cyclique de la fraction fondue du MCP pour $t_{ch} = 2 h$ , $e = 702 W/m^2$ et $l = 2 cm$ : charge partielle et décharge complète. ....	104
Figure 4.22	Variation cyclique des températures des deux plaques pour $t_{ch}=2h$ , $e=702W/m^2$ et $l = 2 cm$ : charge partielle et décharge complète (élément horizontal). ....	104
Figure 4.23	Variation cyclique de la fraction fondue du MCP pour $t_{dech}=4h$ , $e=702W/m^2$ et $l = 2 cm$ : charge complète et décharge partielle. ....	105
Figure 4.24	Variation cyclique des températures des deux plaques pour $t_{ch}=4h$ , $e=702W/m^2$ et $l = 2 cm$ : charge complète et décharge partielle (élément horizontal). ....	106
Figure 4.25	Variation cyclique de la fraction fondue du MCP pour $e = 702 W/m^2$ et $l = 2 cm$ : charge et décharge partielles. ....	107
Figure 4.26	Variation cyclique des températures des deux plaques pour $e = 702 W/m^2$ et $l = 2 cm$ : charge et décharge partielles (élément horizontal). ....	108
Figure 5.1	Croquis d'un système de stockage déchargeant sa chaleur par convection forcée, par convection naturelle et par radiation dans le milieu ambiant. ....	110
Figure 5.2	Variation des températures adimensionnelles de l'air à la sortie et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec $h_{ci}$ comme paramètre. ....	115
Figure 5.3	Variation des températures adimensionnelles de l'air à la sortie et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec $h_{ri}$ comme paramètre. ....	115
Figure 5.4	Variation des taux d'évacuation de chaleur de l'air et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec $h_{ci}$ comme paramètre. ....	117
Figure 5.5	Variation des taux d'évacuation de chaleur de l'air et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec $h_{ri}$ comme paramètre. ....	117
Figure 5.6	Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à sortie pour $NTU = 0.3$ , $l_0 = 1 cm$ , $e = 700 W/m^2$ et $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$ (élément horizontal). ....	119
Figure 5.7	Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à sortie pour $NTU = 2$ , $l_0 = 1 cm$ , $e = 700 W/m^2$ et $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$ (élément horizontal). ....	120

Figure 5.8	Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à sortie pour $NTU = 0.3, l_0 = 2 \text{ cm}, e = 700W/m^2$ et $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$ (élément horizontal). .....	121
Figure 5.9	Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à sortie pour $NTU = 2, l_0 = 1 \text{ cm}, e = 700W/m^2$ et $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 0.5$ (élément horizontal). .....	122
Figure 5.10	Variation des temps de charge et de décharge en fonction du NTU. ....	123
Figure 1a	Vue longitudinale prise au milieu de l'élément de stockage et l'enceinte dans laquelle il est mis .....	139

## LISTES DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Définition des variables et paramètres figurant dans les équations (3.64) et (3.65). .....	47
Tableau 3.2	Comparaison des performances de la méthode proposée et celle de Voller. ....	66
Tableau 4.1	Propriétés physiques de la paraffine P116 (données du manufacturier). ....	72

## **INTRODUCTION**

Les problèmes de changement de phase ont suscité beaucoup d'attention dans divers domaines d'industrie, tels que la solidification des métaux purs ou des alliages, la formation de fins cristaux utilisés pour les systèmes électroniques, le contrôle thermiques des engins spatiaux, etc. Ainsi, la récupération de chaleur rejetée par des procédés industriels, le stockage d'énergie solaire durant le jour et le stockage d'énergie électrique pour délester le problème de pointe en utilisant des systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion d'un matériau à changement de phase représentent des moyens efficaces pour économiser de l'énergie dont sa consommation est en croissance permanente. La connaissance des mécanismes de transfert de chaleur dans ces systèmes est donc primordiale pour leur conception et pour déterminer leurs performances thermiques.

Les problèmes de changement de phase se classent dans les problèmes à frontières libres, une caractéristique qui les rend différents aux problèmes conventionnels de transfert de chaleur. En effet, la présence de l'interface séparant les deux phases dans le domaine de calcul rend les équations de

conservation transitoires et fortement non linéaires et requiert des traitements spéciaux pour obtenir leur solution. Deux modèles sont largement utilisés: (1) modèle à deux phases et (2) modèle à une seule phase.

Dans le modèle à deux phases, les équations de conservation sont écrites dans chaque phase et couplées par le biais de l'équation de mouvement de l'interface. La solution de ces équations est obtenue par deux types de méthodes: (1) méthodes qui suivent le mouvement de l'interface et (2) méthodes qui la fixent à l'aide de transformation de coordonnées de telle sorte que l'interface dans le nouveau système de coordonnées est fixe. Ces méthodes s'appliquent généralement aux problèmes unidimensionnels alors qu'elles deviennent très compliquées, même impossibles, à implanter aux problèmes multidimensionnels. En outre, ces méthodes sont limitées aux problèmes de changement de phase isotherme à interfaces régulières.

Cependant, dans le modèle à une seule phase, les équations de conservation sont écrites dans tout le domaine en définissant une variable physique continue et l'interface est ignorée. Plusieurs méthodes ont été proposées pour obtenir leur solution, connues sous le nom méthodes à domaine fixe ou méthodes enthalpiques. Elles sont les plus populaires vu leur généralité aux problèmes multidimensionnels et elles ne nécessitent pas de suivre le mouvement de l'interface. Les méthodes enthalpiques sont dérivées de trois modèles: (1) du modèle à deux phases en introduisant l'enthalpie dans les équations de conservation (Crank, 1984); (2) du modèle continu (Benyon et Incropera, 1987a), développé pour un milieu poreux, où le système solide-liquide est vu comme un milieu continu ayant des propriétés physiques moyennes dépendant de celles de ses constituants et leurs fractions volumiques; (3) du modèle "*moyenne volumique*" (Beckermann et Viskanta, 1988), lui aussi développé pour un milieu poreux, où les équations de conservation locales sont moyennées dans un volume de contrôle élémentaire représentatif (VER) afin d'obtenir des équations globales, écrites en termes de variables et constantes physiques moyennées, valables dans tout le domaine. Les équations résultantes sont semblables à celles obtenues par le modèle continu, mais avec des constantes physiques (propriétés) dépendant de la morphologie de l'interface et sa nature, si elle est

fixe ou mobile. Toute hypothèse considérée dans ces modèles peut avoir des répercussions sévères sur le traitement des problèmes de changement de phase isotherme par les méthodes enthalpiques. En effet, une hypothèse principale considérée dans les modèles sus-mentionnés est que les phases sont en équilibre thermodynamique. Par conséquent, les gradients thermiques dans le VER peuvent être ignorés. Cela ne peut être toléré, cependant, pour des phases ayant une grande différence de conductivité thermique. À cause de cette hypothèse, toutes les méthodes enthalpiques appliquées aux problèmes de changement de phase isotherme engendrent des oscillations dans le champ thermique et dans la prédiction de l'interface. Ces oscillations ont une période égale aux dimensions du volume de contrôle.

Il convient d'ajouter que, dans les modèles développés pour un milieu poreux, il n'y a pas une expression claire de la conductivité thermique effective du milieu contenant les deux phases bien qu'elle figure dans les équations de conservation. La conductivité thermique effective d'un milieu poreux homogène est déterminée sur la base de données pratiques ou statistiques. On rapporte que, pour un milieu composé de particules solides (lit de galets), la conductivité thermique effective est fonction de celles de ses constituants, de leurs fractions volumiques et d'une constante qui dépend de la taille de ces particules.

La connaissance de mécanismes de transfert de chaleur dans les phases solide et liquide d'un matériau à changement de phase (MCP) nécessite un modèle bien fondé, robuste et cohésif afin de prédire de façon précise les performances thermiques des systèmes de stockage d'énergie utilisant un MCP. De tels systèmes de stockage sont utilisés dans le but de rendre l'offre en terme d'énergie uniforme, cas de stockage d'énergie électrique pour délester le problème de pointe, de stocker de l'énergie provenant des sources discontinues où l'offre et la demande sont déphasées par rapport au temps, cas de stockage d'énergie solaire, de récupérer la chaleur rejetée par des procédés industriels. Dans ces systèmes, l'énergie thermique est stockée pour une période de temps durant laquelle l'offre est suffisante ou moins coûteuse, et elle sera ensuite restituée lorsque l'offre devient insuffisante ou coûteuse.

Les systèmes de stockage d'énergie électrique ont reçu beaucoup d'attention dans les dernières décennies vu la croissance rapide des systèmes de chauffage électrique, notamment dans les pays nordiques. Le problème majeur de chauffage électrique, particulièrement durant les périodes hivernales, est qu'il place une charge croissante sur les producteurs d'électricité, résultant en des périodes de pointe électrique très coûteuses. Par conséquent, la grille de distribution devient surchargée et résulte en une interruption du courant électrique, s'il n'y a pas d'installations secondaires. Cela a stimulé le besoin d'alterner la demande des périodes de pointe aux périodes hors pointe en utilisant des systèmes de stockage d'énergie électrique. Dans ces systèmes, l'énergie électrique est convertie en énergie thermique en faisant passer un courant électrique dans des éléments chauffants placés dans le matériau de stockage. La chaleur est stockée pendant une période de temps, généralement durant la nuit, puis elle sera restituée pendant le jour suivant. Le courant électrique est coupé automatiquement durant les périodes de pointe et l'unité commence à décharger sa chaleur stockée dans le milieu ambiant par rayonnement et/ou par convection forcée ou naturelle. L'unité peut être conçue pour produire assez de chaleur durant les heures hors pointe pour assurer une température confortable dans l'espace à chauffer et en même temps elle stocke de la chaleur pour la décharger durant les périodes de pointe.

Le stockage d'énergie électrique peut se faire par deux formes: (1) par chaleur sensible et (2) par chaleur latente de fusion. La première forme de stockage a été implantée en Europe et aux États Unis il y a quelques années. Les systèmes qui utilisent ce type de stockage nécessitent des matériaux à grandes capacités thermiques, et ils doivent opérer dans des températures élevées. De tels matériaux comprennent les briques réfractaires, les briques en céramique ou en magnésite, les pierres, etc. Leur inconvénient majeur est leur poids et leur volume.

Cependant, le stockage par chaleur latente de fusion offre quelques avantages tels que l'isothermie et une grande capacité de stockage par unité de volume ou de masse. Les matériaux de stockage (MCP) utilisés sont des matières organiques (cires de paraffines, acides gras) et non organiques (sels hydratés). Le choix d'un matériau de stockage se base sur plusieurs critères tels que

sa température de fusion, sa chaleur latente par unité de masse ou de volume, sa conductivité thermique, son comportement chimique vis-à-vis du conteneur, son comportement cyclique, s'il se dégrade en fonction du temps ou non, son prix, etc. Toutefois, la majorité des MCP ne remplissent pas ces critères. Les cires de paraffine ont comme inconvénient leur faible conductivité thermique alors que les sels hydratés possèdent un pouvoir chimique destructif, s'ils ne sont pas bien encapsulés.

Les objectifs principaux de ce travail sont: (1) de développer un modèle bien fondé et robuste pour traiter les problèmes de changement de phase afin de prédire de façon précise les performances thermiques des systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion; (2) de déterminer expérimentalement les performances thermiques et cycliques d'un élément de stockage d'énergie électrique par chaleur latente de fusion utilisé pour délester le problème de pointe électrique.



## **REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

### **2.1 TRAVAUX CONCERNANT LA MODÉLISATION**

Les modèles utilisés pour résoudre les problèmes de changement de phase comprennent les modèles analytiques exactes et les modèles numériques.

#### **2.1.1 Modèles analytiques**

Les solutions analytiques ou semi analytiques des problèmes de changement de phase englobent les solutions exactes de type Neumann, les solutions quasi-statiques, les solutions de Mergerlin, les solutions de bilan thermique intégral et les solutions par les méthodes de perturbation.

Les solutions exactes sont disponibles pour des géométries régulières semi-infinies (barre, cylindre, sphère, coin) et pour des conditions aux limites constantes. Le cas unidimensionnel a reçu beaucoup d'attention, et on trouve une littérature abondante. Pour plus de détails, on peut se référer aux excellents ouvrages de Crank (1984), Alexiades et Solomon (1993) et Viskanta (1986).

Cependant, le cas bidimensionnel a suscité moins d'attention vu sa complexité mathématique. Rathjen et Jiji (1971) ont déterminé une solution exacte d'un problème de solidification d'un matériau dans un coin droit, semi infini et soumis à une température uniforme et constante. Leur solution est basée sur la méthode de similitude de Neumann dans les deux directions. L'interface est approximée par une super hyperbole. Leurs résultats se comparent très bien avec les solutions numériques. Budhia et Kreith (1973), eux aussi, ont déterminé une solution exacte d'un problème de solidification dans un coin non droit, semi infini et soumis sur ses côtés à des températures uniformes et constantes, mais pas nécessairement égales. Leur solution est basée sur le principe de superposition.

Dans les méthodes quasi-statiques le terme transitoire figurant dans l'équation d'énergie est négligé par rapport aux termes de diffusion. Cette hypothèse est valable lorsque le nombre de Stefan est très faible. La température obéira à l'équation de Laplace dans chaque phase. La position de l'interface est déterminée à l'aide d'un bilan thermique à l'interface.

La solution de Mergerlin suppose un profil de température parabolique dans chaque région. Cette solution satisfait uniquement l'équation d'énergie à l'interface. Une amélioration de cette méthode est proposée par Goodman (1958) connue sous le nom de bilan thermique intégral. Dans cette méthode, l'équation d'énergie est intégrée dans le temps de sorte que le profil de température (parabolique) satisfait l'équation d'énergie en moyenne.

Les méthodes de perturbations utilisent le développement en séries infinies en terme du nombre de Stefan pour réduire l'équation aux dérivées partielles d'énergie à des équations différentielles ordinaires impliquant les coefficients de la série. En général, on se contente des premiers termes de la série. Comme les méthodes exactes, les méthodes par perturbations peuvent être appliquées seulement pour les problèmes simples et unidimensionnels, mais elles permettent de traiter des conditions aux limites variables. Elles servent donc comme un guide qualitatif plutôt que des solutions précises.

En résumé, les méthodes analytiques et semi-analytiques sont généralement développées pour les cas unidimensionnels, excepté l'approximation quasi-statique qui peut être généralisée aux cas multidimensionnels. De plus, ces méthodes peuvent traiter des problèmes dont les conditions aux limites sont simples et constantes. En général, les méthodes semi-analytiques sont à leur tour valables pour des faibles nombres de Stefan. Cette stricte limitation rend ces méthodes moins utilisées dans la pratique.

### **2.1.2 Modèles numériques**

Les techniques numériques appliquées aux problèmes de changement de phase peuvent être divisées en trois groupes selon la formulation du problème. Le premier groupe concerne les méthodes qui suivent le mouvement de l'interface, le second concerne les méthodes à domaine fixe (ou méthodes enthalpiques) et le troisième concerne les méthodes qui fixent l'interface. On présentera par la suite quelques travaux qui correspondent aux objectifs de la présente étude. Le lecteur peut se référer aux excellents ouvrages par Crank (1984), Viskanta (1986) et Alexiades et Solomon (1993). De plus, les travaux concernant la modélisation par éléments finis seront exclus.

#### **2.1.2.1 Méthodes qui suivent le mouvement de l'interface**

Les équations de conservation sont écrites en termes de température dans chaque phase, et elles sont couplées par le biais de conditions aux limites à l'interface. On les appelle aussi méthodes à deux régions. Elles s'appliquent principalement aux problèmes unidimensionnels, car elles deviennent très complexes à mettre en oeuvre pour les problèmes multidimensionnels. Les travaux utilisant ces méthodes incluent: (1) méthode à grille fixe avec pas de temps fixe, (2) méthode à grille variable avec pas de temps fixe et (3) méthode à grille fixe avec pas de temps variable.

**a) Grille fixe avec pas de temps fixe**

Murray et Landis (1959) ont traité deux problèmes de solidification: un problème de solidification d'une barre semi-infinie initialement à sa température de fusion (pour lequel Stefan a développé une solution exacte), et l'autre concerne la solidification d'une barre finie soumise initialement à une température supérieure à la température de solidification. Murray et Landis ont proposé deux schémas à grilles fixe et variable avec pas de temps fixe pour déterminer la distribution de température dans les deux phases aux noeuds internes, excepté ceux au voisinage de l'interface. Pour ces derniers, la température est approximée par l'interpolation de Lagrange à trois points. Leurs résultats, présentés graphiquement, sont en bon accord avec les résultats exacts.

Lazaridis (1970) a étendu le schéma de Murray et Landis (1959) à grille fixe aux quelques problèmes de solidification multi-dimensionnels. Il a étudié la solidification dans un moule à section carrée pour différentes conditions aux limites. Il a aussi examiné l'effet des coins d'une enceinte cubique pour la solidification d'un métal initialement à sa température de fusion. Il a utilisé le schéma explicite mais il n'a pas mentionné comment la position de l'interface est calculée.

Harding (1982) a utilisé la méthode à grille fixe pour solutionner un problème de fusion unidimensionnel. Il a considéré deux cas: un cas d'une fusion isotherme et un cas d'une fusion dans une marge de température. Dans le premier cas, la phase liquide du MCP est supposée semi transparente permettant la pénétration du rayonnement thermique émis par le liquide. Le flux de rayonnement qui atteint l'interface augmente le taux de fusion. Dans le deuxième cas, la fraction liquide est prise fonction de température ou de coordonnées. Dans sa modélisation, il a utilisé un schéma aux différences finies explicite pour les noeuds internes loin de l'interface. Un développement en série de Taylor de deuxième ordre est utilisé pour déterminer la température des noeuds très proches de l'interface. De même, une série similaire est utilisée dans la zone pâteuse. La position de l'interface est déterminée explicitement pour la prochaine étape de temps.

Il convient de mentionner que le développement en série de Taylor de deuxième ordre pour les noeuds adjacents à l'interface et ceux de la zone pâteuse suppose que le mouvement de l'interface est relativement lent, et que l'épaisseur de la zone pâteuse est mince. Par conséquent, les résultats de Harding ne peuvent être généralisés aux problèmes ayant un nombre de Stefan supérieur à l'unité et une zone pâteuse épaisse.

Récemment, Hasan (1988) et Hasan et coll. (1991) ont étudié la fusion et la solidification cycliques unidimensionnelles d'une barre finie de MCP dont une extrémité est soumise à une température variant autour du point de fusion (profil rectangulaire). L'autre extrémité de la barre est maintenue adiabatique. Plusieurs interfaces sont ainsi formées. Ils ont aussi réalisé une expérience sur la même barre qui peut être inclinée d'un angle allant de 0 (chauffage/refroidissement par le dessus) à  $\pi$  (chauffage/refroidissement par le dessous) afin de valider leur modèle numérique. Le MCP choisi est le n-octadécane. Dans leur modélisation numérique, ils ont employé un schéma aux différences finies explicite pour les noeuds internes, excepté ceux près de l'interface. La température en ces derniers est calculée à l'aide d'un profil parabolique dont les coefficients sont fonction du temps. Une solution de départ est proposée au point de singularité. Les positions des interfaces sont déterminées explicitement. Des simulations en régime transitoire ont été faites jusqu'au régime transitoire périodique où l'énergie stockée pendant la fusion est complètement restituée pendant la solidification. Une étude paramétrique concernant les effets des temps de charge/décharge, les plages de température et les propriétés physiques est ainsi effectuée. Leurs résultats numériques sont en bon accord avec leurs résultats expérimentaux lorsque la barre est horizontale et chauffée par le dessus.

#### **b) Grille variable avec pas de temps fixe**

Murray et Landis (1959) ont aussi proposé une grille variable avec pas de temps fixe. Pour chaque pas de temps, la distance entre la surface externe et l'interface est divisée en un nombre de points fixe. Le pas d'espace augmente ainsi au fur et à mesure qu'on avance dans le temps alors que l'interface est toujours située au même noeud. Un schéma aux différences finies explicite est utilisé

pour trouver la distribution de température. À cause du mouvement de la grille, une interpolation de la température est effectuée pour chaque pas de temps. Le mouvement de l'interface est déterminé explicitement.

Hastaoglu (1986) a employé la méthode de grille variable pour la solidification unidimensionnelle d'une barre finie. Griffith et Nassersharif (1990) ont considéré le problème de solidification unidimensionnelle dans une marge de température. Les équations d'énergie sont écrites en termes de température dans chaque région (solide, zone pâteuse, liquide) avec les équations de bilan d'énergie aux interfaces. Dans leur modélisation, ils ont amélioré la méthode de grille variable de Murray et Landis (1959) par un terme convectif qui prend en compte le mouvement de la grille sans recours aux interpolations entre les pas de temps. Un schéma aux différences finies semi-implicite est employé pour la discrétisation des équations d'énergie. Un modèle basé sur la formulation enthalpique est en plus utilisé afin d'évaluer leur méthode. Ils ont remarqué que les résultats numériques présentent des oscillations autour de la vraie valeur, dues, selon eux, au schéma aux différences finies centré appliqué au terme convectif du mouvement de la grille.

### **c) Grille fixe avec pas de temps variable**

Dans cette méthode le domaine de calcul est subdivisé en un nombre fini de noeuds alors que le pas de temps est choisi de sorte que l'interface se déplace d'un noeud à l'autre. Le pas de temps est calculé itérativement. Les travaux qui emploient cette méthode se distinguent par la façon dont ce pas de temps est calculé. Généralement, cette méthode est très limitée et s'applique aux problèmes unidimensionnels.

Douglas et Gallie (1955) sont les premiers qui ont employé cette méthode avec un schéma aux différences finies implicite pour trouver la température dans une barre initialement à sa température de fusion. Leur critère pour déterminer le pas de temps est basé sur le taux de variation de l'énergie totale. Le même problème de Douglas et Gallie est traité d'une manière différente par

Gupta et Kumar (1983a,1983b, 1983c, 1981, 1980) et par Goodling et Khader (1974). Gupta et Kumar ont discuté en détail les différentes méthodes employant un pas de temps variable et leurs applications au problème sus-mentionné avec différentes conditions aux limites et initiales.

### **2.1.2.2 Méthodes à domaine fixe**

Ces méthodes, appelées aussi méthodes enthalpiques, sont caractérisées par une seule variable continue dans tout le domaine. Elles englobent la méthode de l'enthalpie totale, la méthode de capacité thermique apparente et la méthode de terme source latente. Ces méthodes sont écrites pour tout le domaine de calcul sans tenir compte des conditions de saut à l'interface. Elles peuvent être employées pour résoudre des problèmes multidimensionnels avec changement de phase isotherme ou dans une marge de température. Ces méthodes sont, en fait, dérivées du modèle à deux phases ou à deux régions (Crank, 1984), ou du modèle d'un milieu continu (Bennon et Incropera, 1987a). Voller et coll. (1990) ont présenté une revue bibliographique sur les différentes méthodes enthalpiques qui traitent la conduction pure alors que Samarski et coll. (1993) ont étendu leur bibliographie aux problèmes qui traitent la conduction et la convection simultanément.

#### **a) Formulation enthalpie totale**

Dans cette formulation, l'enthalpie totale et la température sont des variables dépendantes. Cette approche est l'une des plus utilisées à cause de sa généralité aux problèmes de changement de phase. En effet, les problèmes multidimensionnels qui présentent des singularités peuvent être facilement traités. Les schémas aux différences finies explicites ou implicites peuvent être utilisés. Dû au fait que les équations d'énergie sont fortement non linéaires, un schéma implicite itératif est employé. Les travaux qui retiennent cette approche diffèrent par la manière dont l'enthalpie en un noeud est mise à jour d'une itération à l'autre.

Shamsundar et Sparrow (1975) ont proposé une méthode pour traiter le changement de phase isotherme. Cette méthode est aussi présentée dans un livre par Shamsundar et Rooz (1988). Cette approche utilise le schéma itératif de Gauss-Seidel. Pour un noeud quelconque, l'enthalpie est calculée en premier et, à l'aide de la relation température-enthalpie, la température correspondante est estimée et ensuite substituée dans l'équation discrétisée pour le noeud suivant. Un balayage de gauche à droite est ainsi fait. Étant donné le champ de température, l'enthalpie est mise à jour en utilisant la relation enthalpie-température. Un coefficient de sous-relaxation est utilisé pour les noeuds qui subissent le changement de phase afin d'éviter des itérations excessives. En connaissant la nouvelle valeur de l'enthalpie, la température est estimée par la relation inverse température-enthalpie.

Furzeland (1980) a utilisé un schéma itératif par point pour un problème de changement de phase isotherme. Il a employé la méthode itérative de Newton pour la mise à jour de l'enthalpie. Un coefficient de relaxation est aussi utilisé pour tous les points du domaine.

Cao et coll. (1989) ont utilisé l'approche d'enthalpie totale pour simuler un problème multidimensionnel. Une relation générale entre la température et l'enthalpie est proposée, ce qui permet de traiter les problèmes de changement de phase dans une plage de température.

Raw et Schneider (1985) ont considéré le problème de solidification d'un matériau qui présente une marge de température pour la transition. Une variation linéaire est supposée entre l'enthalpie et la température dans chaque région (solide, zone pâteuse, liquide). Ils ont proposé une méthode de mise à jour de l'enthalpie/température basée sur deux règles: (1) le changement de phase doit passer par les états solide, pâteux et liquide pour la solidification ou l'inverse pour la fusion; autrement dit, si l'état initial est solide et si l'état actuel est liquide alors le nouvel état modifié devrait être pâteux. (2) la deuxième règle stipule que si les états d'un volume de contrôle et de ses voisins à l'itération précédente sont les mêmes, alors l'état actuel modifié de ce volume de contrôle reste



inchangé. Ils ont rapporté que cette approche est plus rapide (par un facteur de deux) par rapport aux autres approches explicites.

Pham (1985) a combiné l'approche basée sur l'enthalpie totale et celle basée sur la température en utilisant un schéma à trois niveaux de temps. Ce schéma est incondtionnellement stable, et il exige moins de temps de calcul.

Bennon et Incropera (1987a) ont développé un modèle d'un milieu continu pour la solidification des alliages. Leur modèle est basé essentiellement sur la théorie des mélanges pour avoir des équations de conservation continues dans tout le domaine. Ainsi, les discontinuités (interfaces) sont ignorées. Dans cette formulation, on se base principalement sur une hypothèse stricte qui stipule que les constituants sont en équilibre thermodynamique. La zone qui contient les deux phases solide et liquide ( zone pâteuse) est considérée comme un milieu poreux et le fluide suit la loi de Darcy ou de Carman-Cozeny. La distribution des espèces est régie par des lois empiriques. Dans d' autres articles subséquents, Bennon et Incropera (1987b, 1988) ont appliqué avec succès leur modèle aux problèmes de solidification des alliages binaires.

Beckermann et Viskanta (1988) ont développé un modèle enthalpique basé sur le principe de "*moyenne volumique*", qui consiste à moyenner les équations de conservation locales dans un volume élémentaire représentatif (VER) contenant des portions de chaque phase. Les équations moyennées résultantes sont valables dans tout le domaine et semblables en forme à celles du modèle continu. Les auteurs n'ont pas proposé une méthode pour estimer la conductivité thermique effective du milieu ainsi formé. Le modèle a été utilisé pour simuler la fusion et la solidification d'un matériau à changement de phase contenu dans une matrice poreuse. Les équations de conservation moyennées sont reformulées en terme de terme source pour chaleur latente, et le changement de phase est supposé se dérouler dans une plage de température. Les auteurs ont employé la relation de Weinberg (1967) pour estimer la conductivité thermique effective du milieu poreux. Leur modèle est partialement validé par des séries d'expériences de fusion-solidification sur une enceinte verticale

remplie par des particules sphériques en verre comme matrice et du gallium comme MCP. Un accord raisonnable entre les résultats numériques et expérimentales est rapporté.

Le modèle continu a été appliqué par Oldenburg et Spera (1991, 1992) et Neilson et Incropera (1993) pour simuler la solidification et la fusion des alliages. Oldenburg et Spera (1991) ont étudié numériquement la solidification d'un alliage eutectique binaire - Diopside-Anorthite (Di-An) dans une enceinte rectangulaire refroidie sur le côté gauche et isolée sur le reste. Dans leur second article de 1992, ils ont présenté un modèle hybride qui modélise l'écoulement du liquide dans la zone formée par le liquide et le solide. Les auteurs distinguent deux régions dans cette zone: une région où la viscosité est dominante (fraction solide  $< 0.5$ ) et une région où la perméabilité est dominante (fraction solide  $> 0.5$ ). Dans la première région, les termes de Darcy sont négligeables et l'écoulement est modélisé en variant la viscosité du liquide en fonction de la fraction solide. Par contre, dans la deuxième région le fluide suit la loi de Darcy et la perméabilité est donnée par la relation Blake-Kozeny-Carman. Le modèle hybride ainsi proposé utilise la fonction arctangente pour changer du régime de Darcy au régime de viscosité variable selon la valeur de la fraction solide. Cependant, le modèle n'a pas été validé par des résultats expérimentaux.

Brent et coll. (1988) ont proposé une méthode basée sur la formulation enthalpie-porosité pour les problèmes de convection-diffusion avec changement de phase isotherme. La zone pâteuse est aussi considérée comme une zone poreuse, et le comportement du fluide dans cette zone obéit à la loi de Garman-Kozeny. Cette approche est validée avec des résultats expérimentaux. Dans un autre article plus récent, Voller et Swaminathan (1993) ont proposé une méthode pour traiter les discontinuités de la conductivité thermique à l'interface. Leur méthode est basée essentiellement sur la transformation de Kirchhoff pour calculer la conductivité thermique aux interfaces d'un volume de contrôle. Cette méthode produit de bon résultats et les oscillations dues aux modèles enthalpiques sont relativement réduites.

**b) Capacité thermique apparente**

Dans cette formulation, le changement de phase est supposé se produire dans une marge de température centrée autour de la température de fusion. La chaleur latente libérée est prise en compte par l'emploi d'une capacité thermique apparente. Cette capacité est fonction du temps et de l'espace. Par conséquent, les équations d'énergie deviennent fortement non-linéaires, et une procédure itérative est nécessaire. Cette méthode est généralement associée aux difficultés de choisir le pas de temps, le pas d'espace et la marge de transition.

Bonacina et coll. (1973) ont utilisé cette approche pour traiter un problème de changement de phase unidimensionnel. Ils ont rapporté que, pour avoir des bons résultats, la marge de transition choisie devrait embrasser au moins deux noeuds de l'espace. Ils ont aussi rapporté qu'une grande marge de transition pourrait donner des mauvais résultats.

Morgan et coll. (1978) ont trouvé que le pas de temps devrait être choisi de telle sorte que la variation de la température pendant ce laps de temps, dans la région qui subit le changement de phase, est plus petite que la marge de transition choisie. Hsiao (1985) a développé une méthode qui permet de calculer la capacité thermique d'un volume de contrôle. Il l'a estimée par la moyenne de celles des noeuds avoisinants. Il a rapporté que cette méthode n'est pas sensible au choix de la marge de transition. Tandis que Poirier et Salcudean (1988) ont proposé une capacité thermique effective qui est égale à la moyenne de l'intégrale de la capacité thermique apparente, basée sur la température nodale, dans un volume de contrôle. Un profil de température linéaire entre les noeuds est supposé.

**c) Terme source pour chaleur latente**

Dans cette méthode, la chaleur latente libérée est prise en compte par la définition d'une source de chaleur latente. Cette source est basée sur la fraction liquide qui s'est transformée en solide. En général, la fraction liquide dépend de plusieurs facteurs, à savoir la température, la concentration,

le taux de fusion/solidification, le taux de nucléation, la vitesse de l'interface (Voller et coll., 1990)... Les équations d'énergie dans chaque phase sont ramenées en une seule équation linéaire dans tout le domaine, mais avec un terme source variable. Un schéma itératif devrait être utilisé. Les travaux qui emploient cet approche se diffèrent par la manière dont cette source (ou fraction liquide) est mise à jour après chaque itération.

Voller (1990) a proposé une méthode itérative pour la mise à jour de la fraction liquide lors d'un changement de phase isotherme. Il a utilisé la linéarisation de Newton tout en gardant le coefficient du noeud principal infini, et ce pour tous les noeuds qui subissent le changement de phase. Cette méthode est très efficace et résulte en un temps de calcul réduit, selon l'auteur. Toutefois, il arrive que cette méthode ne converge pas s'il y a une variation brusque des propriétés physiques à l'interface. Dans un article subséquent, Voller et Swaminathan (1991) ont présenté les différentes méthodes proposées pour traiter le changement de phase dans une plage de température. La fraction liquide est ainsi donnée en fonction de la température. Ils ont aussi proposé une méthode générale de la mise à jour de la fraction liquide après chaque itération. Cette méthode est basée essentiellement sur la linéarisation du terme source latente, comme recommandé par Patankar (1980).

Il convient de noter que toutes les formulations enthalpiques engendrent des oscillations de température ou de la position de l'interface autour de la valeur exacte, dues au fait que les noeuds qui subissent le changement de phase sont supposés être à la température de fusion. Ce qui n'est pas toujours vrai, notamment lorsqu'il y a une grande discontinuité des conductivités thermiques des deux phases. De plus, les méthodes enthalpiques sous-estiment ou sur-estiment généralement la position de l'interface à cause de mauvais traitement des conductivités thermiques aux interfaces des volumes de contrôle de discrétisation.

Lee et Tzong (1991) ont utilisé l'approche de terme source latente avec un suivi de l'interface. Ils ont développé un schéma numérique pour traiter la discontinuité de conductivité thermique à

l'interface. Leur schéma est basé essentiellement sur l'intégration directe de l'équation d'énergie dans un volume de contrôle. Si l'intervalle entre deux noeuds consécutifs contient une discontinuité (interface), l'intégration est faite numériquement en utilisant un schéma en puissance pondéré. La position de l'interface est calculée à l'aide d'une interpolation linéaire de température aux noeuds adjacents à l'interface. Leur résultats, comme il est attendu, se comparent très bien avec la solution exacte, et les oscillations dues au modèle enthalpique sont éliminées.

### 2.1.2.3 Méthodes qui fixent l'interface

L'immobilisation de l'interface se fait à l'aide d'une transformation de coordonnées de telle sorte que la position de l'interface demeure fixe dans le nouveau système de coordonnées; les deux phases y occupent des domaines fixes. Dû au fait que l'interface est curviligne, les coordonnées curvilignes (dites aussi coordonnées naturelles) sont généralement utilisées pour les problèmes multidimensionnels. Par contre, la transformation de Landau (1950) est très populaire dans les problèmes unidimensionnels. Les équations d'énergie résultantes sont non linéaires, compliquées et contenant des paramètres qui caractérisent le mouvement de l'interface. On trouve aussi parmi ces méthodes la méthode de migration de l'isotherme où la température est interchangée avec une variable indépendante spatiale. L'interface est déterminée par l'isotherme  $T = T_i$ .

Landau (1950) est le premier qui a employé cette transformation aux problèmes unidimensionnels. La transformation de Landau a été utilisée ultérieurement par Mastanaiah (1976), Hsu et coll. (1981) et Sparrow et Chuk (1984). Dans le cas des problèmes multi-dimensionnels, la transformation en coordonnées curvilignes est généralement employée. Lacroix et Arsenault (1993), Lacroix et Garon (1992), et Gilmore et Guceri (1988) ont employé les coordonnées curvilignes pour traiter la solidification/fusion d'un MCP. Lacroix et Voller (1990) ont présenté une étude comparative des méthodes de terme source pour chaleur latente et de transformation en coordonnées curvilignes. Ils rapportent que la première méthode résulte en un temps de calcul réduit par rapport à l'autre, en particulier si tout le domaine est considéré.

## 2.2 TRAVAUX CONCERNANT LES SYSTÈMES DE STOCKAGE D'ÉNERGIE PAR CHALEUR LATENTE

Le stockage d'énergie est considéré actuellement comme un moyen de mieux gérer la demande d'énergie. Dans plusieurs situations où l'énergie solaire est utilisée, la demande et l'offre en terme d'énergie sont déphasés par rapport au temps. Ainsi, le stockage d'énergie électrique en dehors des heures de pointe et la récupération pendant les heures de pointe représente un moyen efficace pour réduire la surcharge des installations de génération d'électricité et d'éliminer le besoin de construire des installations d'appoint.

Le stockage d'énergie thermique est généralement fait sous deux formes: (1) stockage par chaleur sensible, où on utilise un matériau ayant une grande capacité thermique, tel que l'eau, les briques de céramique ou de magnésite, les pierres,..., et (2) stockage par chaleur latente de fusion, où un matériau à changement de phase (MCP) est utilisé. Le premier type a plus d'avantages économiques plutôt que thermiques, tels que la disponibilité des matériaux de stockage avec des prix abordables alors que ces inconvénients majeurs sont: il nécessite des systèmes volumineux et une grande marge de température de fonctionnement, et par conséquent une bonne isolation thermique (coûteuse) est exigée. Cependant, le deuxième type offre plus d'avantages thermiques plutôt qu'économiques, tels que l'isothermie ou faible plage de température de fonctionnement, une grande capacité de stockage par unité de masse ou de volume (et par conséquent, moins d'espace occupé) et un meilleur contrôle thermique des systèmes. Ses inconvénients sont: les MCP ne sont pas aussi disponibles que ceux du premier type et ils sont plus ou moins chers; ils ont une faible conductivité thermique, notamment les MCP organiques; leurs comportements chimiques vis-à-vis du contenant devraient être bien étudiés.

Plusieurs matériaux à changement de phase sont employés aux basses températures (de 0 °C à 120°C). Pour plus de détails sur les différents matériaux de changement de phase et leurs caractéristiques, on peut se référer aux articles et ouvrages par Abhat (1983), Van Galen et Van Den

Brink (1988) et Lane (1986). Dans ce qui suit, on présentera quelques travaux reliés aux objectifs de la présente étude, et qui concernent les systèmes de stockage périodique d'énergie thermique et électrique par chaleur latente.

Plusieurs configurations géométriques sont utilisées afin d'optimiser les performances des systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente. Les MCP sont contenus dans des enceintes rectangulaires ou dans des tubes annulaires placés horizontalement ou verticalement.

Bransier (1979) est le premier qui a étudié analytiquement la solidification et la fusion cyclique d'un MCP. Un modèle conductif unidimensionnel est utilisé. Le MCP est mis dans deux configurations, à savoir (1) un élément plan où le fluide caloporteur (FC) circule de part et d'autre de ces deux surfaces (courants parallèles), et (2) un élément composé de deux cylindres concentriques où le FC circule à l'intérieur du cylindre alors que le MCP se trouve dans l'espace annulaire entre les cylindres. La surface extérieure du cylindre est isolée. La température du FC est supposée une fonction sinusoïdale du temps variant autour de la température de fusion. Le coefficient de transfert convectif est supposé constant. Dans sa modélisation il a adopté la méthode de la capacité thermique apparente et un schéma aux différences finies implicite à trois niveaux de temps. Il a rapporté qu'il y a une épaisseur optimale pour l'élément plan pour laquelle l'énergie stockée ou déstockée est maximale. Ainsi, l'élément cylindrique est plus défavorable pour le stockage que l'élément plan. Cependant, il n'a pas signalé si les conditions périodiques sont atteintes ou non. De plus, ses résultats n'ont pas été validés expérimentalement.

Sparrow et Broadbent (1982) ont examiné expérimentalement la fusion d'un MCP dans un cylindre vertical plongé dans un bain chaud. La phase solide du MCP peut être initialement à sa température de fusion ou sous-refroidie. Les auteurs rapportent que la convection naturelle dans la phase liquide augmente le transfert de chaleur par un facteur de 50% par rapport à la conduction pure. De plus, le sous-refroidissement initial du solide diminue considérablement le taux de transfert de chaleur.

Kalhari et Ramadhyani (1985) ont effectué une étude expérimentale sur la solidification et la fusion autour des cylindres lisse et mené d'ailettes. Le MCP utilisé est le n-écosane (99% pur). De l'eau circule à l'intérieur du cylindre avec une température d'entrée de 12.8 °C au-dessous de celle de fusion au cours de la solidification et de 11.1 °C au-dessus de la température de fusion au cours de la fusion. Les durées de fusion et de solidification sont respectivement 7.25 heures et 15.25 heures. Le MCP peut être initialement sous-refroidi ou à sa température de fusion. Ils rapportent que, pour le cylindre lisse, la convection libre a un effet considérable sur le taux de fusion. Ainsi, le taux de transfert de chaleur et le taux de fusion sont réduits lorsque le MCP est initialement sous-refroidi. Par contre, pour le cylindre mené d'ailettes, les effets de la convection libre et du sous-refroidissement du MCP sont faibles.

Jariwala et coll. (1987) ont étudié expérimentalement la solidification et la fusion d'un MCP autour d'un serpentin hélicoïdal. De l'eau, dont la température est contrôlée, circule à l'intérieur du serpentin. Un modèle numérique unidimensionnel basé sur l'approximation quasi-statique est développé; le transfert de chaleur s'effectue par conduction lors de la solidification et par convection naturelle lors de la fusion. Leurs résultats expérimentaux sont en bon accord avec ceux prédits par le modèle.

Farid et Husian (1990) ont développé un élément de stockage d'énergie électrique par chaleur latente. L'élément de stockage consiste en plusieurs unités rectangulaires remplies d'un matériau à changement de phase et arrangées dans une enceinte verticale. Pendant le cycle de charge, un courant électrique passe dans des fils résistants placés au milieu de chaque unité alors que, pendant le cycle de décharge, un courant d'air passe entre les espaces laissés entre les unités. Un modèle analytique unidimensionnel basé sur la conduction pure est ainsi proposé. La convection naturelle dans la phase liquide du MCP est, cependant, prise en compte en définissant une conductivité thermique équivalente. Les résultats expérimentaux et numériques se comparent très bien. Dans d'autres articles, Farid et Kanzawa (1989) et Farid et coll. (1990) ont étudié expérimentalement et analytiquement un élément de stockage d'énergie par chaleur latente constitué de plusieurs capsules



cylindriques montées verticalement et fixées dans un tubes isolé. Les capsules sont disposées en trois groupes contenant trois différents MCP. Pendant la charge, de l'air chaud passe à travers les capsules de façon à ce que les températures de fusion des trois MCP décroissent dans la direction de l'écoulement. Cependant, pendant la décharge, la direction de l'écoulement d'air est inversée. Les auteurs rapportent que le taux de transfert de chaleur est amélioré pendant la charge et la décharge, et leur modèle numérique est en accord raisonnable avec l'expérience.

Zhang et Bejan (1989) ont étudié expérimentalement la fusion d'un MCP dans une enceinte verticale de 74 cm de hauteur et de 14.6 cm d'épaisseur. L'enceinte est chauffée uniformément par des éléments électriques attachés sur un côté, et elle est refroidie par un courant d'alcool sur le coté opposé. Les auteurs rapportent que la fusion du MCP se fait principalement par convection naturelle faiblement turbulente. Ils ont aussi proposé une corrélation du nombre de Nusselt à la paroi chauffée.

Hirata et Nishida (1989) ont considéré la fusion dans un échangeur de chaleur à coquille. Le MCP est contenu à l'intérieur du tube alors que l'espace annulaire entre les deux tubes est divisé en trois compartiments où le fluide caloporteur circule pour assurer une température uniforme sur la surface de contact. Ils ont analysé la fusion du MCP par un modèle analytique basé sur la conductivité thermique équivalente. Ainsi, ils ont discuté et proposé une corrélation de la conductivité thermique équivalente.

Fath (1991) a examiné les performances d'un échangeur de chaleur à coquille horizontal dans lequel le MCP se trouve du côté coquille et le fluide caloporteur circule à l'intérieur du tube. Il a utilisé un MCP dont la température de fusion est de 50°C. Un modèle analytique basé sur l'approximation quasi stationnaire est développé pour prédire les performance du système. L' auteur rapporte que l'augmentation du débit massique, la température initiale du fluide et la longueur de l'échangeur augmentent le transfert de chaleur et l'énergie accumulée dans le MCP. Ainsi, un seul

échangeur est thermiquement plus efficace que deux échangeurs parallèles ayant chacun la moitié de longueur et la même capacité thermique.

Le même type d'échangeur est examiné par Lacroix (1993). Cependant, Lacroix a utilisé un MCP dont la température de fusion est plus basse (28°C, n-octadécane). Un modèle analytique est aussi proposé pour faire une étude paramétrique et prédire les performances du système. L'auteur rapporte que le rayon du tube, le débit massique et la température initiale du fluide caloporteur devraient être choisis attentivement pour optimiser les performances du système.

### 2.3 CONCLUSION

La revue bibliographique entreprise révèle que les solutions analytiques ou semi-analytiques des problèmes de changement de phase sont très limitées aux géométries simples et semi-infinies et aux conditions aux limites uniformes et constantes. De leur tour, les méthodes numériques qui suivent le mouvement de l'interface ou qui la fixent sont très compliquées à mettre en oeuvre et elles sont limitées aux problèmes de changement de phase isotherme. Par contre, les méthodes enthalpiques ou à domaine fixe, obtenues par le modèle continu ou par le principe de "*moyenne volumique*", semblent les meilleures méthodes actuellement utilisées pour traiter le changement de phase isotherme (substances pures) ou dans une plage de température (alliages). Ces méthodes sont appliquées avec succès aux problèmes de solidification des alliages binaires en présence de la diffusion thermique, massique et de quantité de mouvement. Cependant, ces méthodes manquent plus de développement des travaux expérimentaux afin de les valider et de les généraliser.

En ce qui concerne les systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente, la littérature est consacrée aux systèmes de stockage d'énergie thermique, telle que l'énergie solaire. Par contre, il y a peu de travaux consacrés au stockage d'énergie électrique par chaleur latente pour soulever le problème plus fréquent de pointe électrique qui frappe les pays nordiques. De plus, la littérature révèle que le stockage périodique, i.e le stockage et le déstockage alternés et continus, a reçu moins d'attention dans les applications thermiques bien qu'il se présente dans beaucoup de situations pratiques: l'énergie solaire est périodique et la pointe électrique se répète plusieurs fois par jour.

## MODÉLISATION DES PROBLÈMES DE CHANGEMENT DE PHASE

### 3.1 INTRODUCTION

Les problèmes de changement de phase font partie des problèmes à frontières libres, c'est à dire, les frontières qui se déforment en fonction du temps; on les appelle parfois problèmes de Stefan. Contrairement aux problèmes conventionnels à frontières fixes, ces problèmes exigent de spécifier plusieurs quantités physiques aux frontières libres, à savoir la température, le flux de chaleur et le flux de masse, ce qui rend les équations de conservation encore plus compliquées et requiert des traitements spéciaux pour obtenir leurs solutions.

Il existe deux formulations mathématiques pour traiter les problèmes de changement de phase. Une formulation est basée sur la température où les équations de conservation sont écrites dans chaque phase et sont couplées par les conditions aux limites à l'interface. La deuxième formulation est basée sur l'enthalpie, et les équations de conservation sont écrites dans tout le domaine sans tenir compte de la position de l'interface. Cette formulation est dérivée du modèle continu, qui est lui-même basé sur la théorie des mélanges. Toute propriété physique du mélange est supposée une conséquence mathématique de celles de ses constituants. Les constituants sont supposés en équilibre thermodynamique. Dans ce qui suit, on présentera une autre formulation basée sur le principe de "*moyenne volumique*" qui consiste à moyenniser les équations de conservation

locales (microscopiques) dans un volume élémentaire représentatif (VER) contenant les deux phases. Cette formulation est adoptée afin d'offrir plus d'information sur les termes négligés et les hypothèses considérées dans le modèle continu. Les équations globales (macroscopiques) résultantes sont écrites et valables dans tout le domaine (semblables à celles du modèle continu). Cependant, les termes dûs à la présence de l'interface sont traités séparément.

### 3.2 DÉVELOPPEMENT DES ÉQUATIONS DE CONSERVATION D'UN SYSTÈME BIPHASIQUE DANS LE CAS DE LA CONDUCTION PURE SANS SOURCES INTERNES

#### 3.2.1 Équations locales

Considérons un système à deux composants immiscibles, et soit  $\Omega$  un volume géométrique, c'est à dire, un volume fixe dans l'espace et dans le temps mais à frontières perméables.

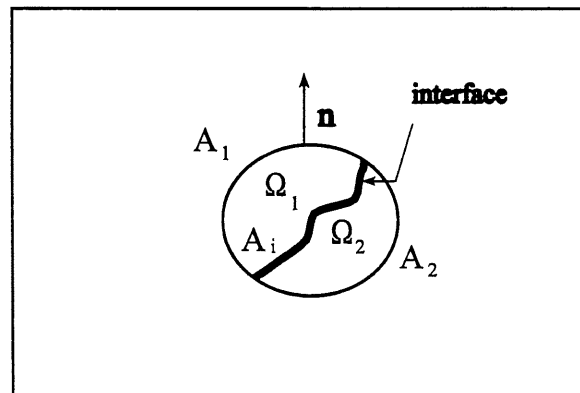


Figure 3.1 Volume de contrôle

Ce volume est divisé en deux parties par l'interface  $A_i$ , figure 3.1. Dans le cas de la conduction pure sans sources internes, le bilan de conservation d'énergie interne ( $u$ ) dans ce volume s'écrit de la façon suivante:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u d\omega = - \oint_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA \quad (3.1)$$

où A est la surface limitant le volume de contrôle,  $\mathbf{q}$  le flux de conduction et  $\mathbf{n}$  la normale sortante de la surface. Le volume d'intégration  $\Omega$  consiste en un volume de la phase 1,  $\Omega_1$ , et en un volume de la phase 2,  $\Omega_2$ . De même, la surface  $A = A_1$  (phase 1) +  $A_2$  (phase 2). L'équation (3.1) devient alors:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} (\rho u)_1 d\omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} (\rho u)_2 d\omega = - \int_{A_1} (\mathbf{q} \mathbf{n})_1 dA - \int_{A_2} (\mathbf{q} \mathbf{n})_2 dA \quad (3.2)$$

En utilisant les relations de Leibnitz et de Gauss suivantes:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho u) d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) d\omega + \oint_A (\rho u) \mathbf{w} \mathbf{n} dA \quad (3.3)$$

$$\oint_A \mathbf{q} \mathbf{n} dA = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{q} d\omega \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{w}$  est la vitesse de la surface. L'équation (3.2) est alors réécrite comme suit:

$$\int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot \mathbf{q} \right)_1 d\omega + \int_{\Omega_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot \mathbf{q} \right)_2 d\omega = - \int_{A_1} [\rho u \mathbf{w} \mathbf{n} - \mathbf{q} \mathbf{n}]_1 dA - \int_{A_2} [\rho u \mathbf{w} \mathbf{n} - \mathbf{q} \mathbf{n}]_2 dA \quad (3.5)$$

Cette équation doit être satisfaite quelque soit les volumes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . On en déduit les équations de conservation locales et les conditions de saut suivantes ( $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k = 0 ; \quad (k = 1 \text{ et } 2) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n} + [(\rho u)_1 - (\rho u)_2] w \mathbf{n} \quad (3.7)$$

Si on introduit l'enthalpie  $\rho h = \rho u + p$  (pression), on aura les équations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n} + \Delta H w \cdot \mathbf{n} \quad (3.9)$$

où  $\Delta H = (\rho h)_1 - (\rho h)_2$ , est l'énergie de changement de phase.

### 3.2.2 Équations moyennées dans l'espace

Considérons un volume élémentaire représentatif (VER), associé à un point fixe dans l'espace et dans le temps, contenant des portions des deux phases tel que indiqué dans la figure 3.2. Ce volume doit avoir des dimensions ( $l$ ) suffisamment grandes par rapport à l'échelle microscopique ( $d$ ) et suffisamment petites par rapport à l'échelle macroscopique ( $L$ ) ( $d \ll l \ll L$ ) de sorte que les fluctuations des variables  $y$  sont extrêmement réduites (Whitaker, 1977). Toute quantité physique quelconque définie dans ce volume prend des valeurs non nulles dans la phase à laquelle elle appartient et des valeurs nulles dans le reste du volume. L'intégration des équations de conservation

locales microscopiques dans ce volume résulte en des équations moyennées macroscopiques. On définit à cet effet les opérateurs suivants:

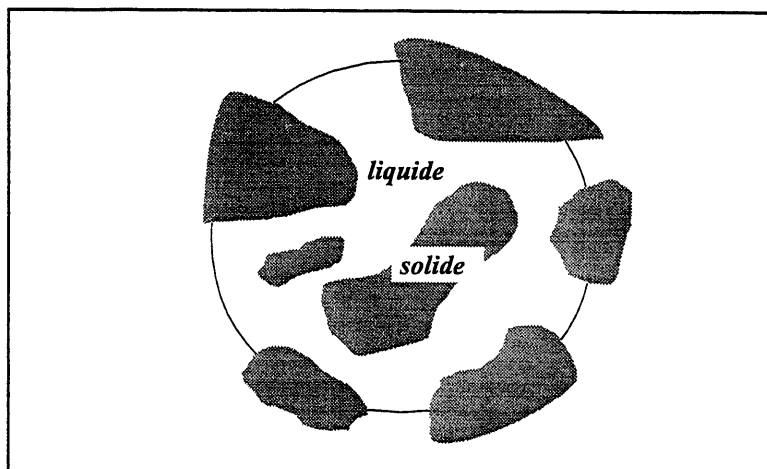


Figure 3.2 Volume élémentaire représentatif (VER)

**Moyenne phasique:**

$$\langle \psi_k \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \psi_k d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_k} \psi_k d\omega \quad (3.10)$$

**Moyenne phasique intrinsèque:**

$$\bar{\psi}_k = \frac{1}{\Omega_k} \int_{\Omega_k} \psi_k d\omega = \frac{1}{\Omega_k} \int_{\Omega} \psi_k d\omega \quad (3.11)$$

où  $\psi_k$  désigne une quantité physique quelconque définie par:

$$\psi_k = \begin{cases} \psi_k & \text{dans } \Omega_k \\ 0 & \text{dans } \Omega - \Omega_k \end{cases} \quad (3.12)$$

Il est clair que  $\langle \psi_k \rangle = \epsilon_k \bar{\psi}_k$ , où  $\epsilon_k = \Omega_k / \Omega$  est la fraction volumique de la phase k. Les quantités  $\langle \psi_k \rangle$  et  $\bar{\psi}_k$  sont définies dans tout le volume de contrôle et peuvent prendre des valeurs non nulles dans la phase j (j ≠ k). Implicitement, la fraction volumique  $\epsilon_k$  est aussi une fonction continue dans tout le domaine. La valeur locale de  $\psi_k$  peut être représentée en fonction de la moyennephasique intrinsèque ( $\bar{\psi}$ ) et une déviation de cette moyenne ( $\psi'$ ) par (Gray, 1975):

$$\psi_k = \bar{\psi}_k + \psi'_k \quad (3.13)$$

Intégrons l'équation (3.8) dans le volume de contrôle (VER) et divisons le tout par  $\Omega$ , on aura:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho h)_k + \nabla \cdot \mathbf{q}_k \right] d\omega = 0 \quad (3.14)$$

En utilisant la formule de Leibnitz (équation 3.3), le premier terme de l'équation (3.14) devient:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho h)_k d\omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega_k} (\rho h)_k d\omega \right) - \frac{1}{\Omega} \int_{A_i} (\rho h)_k \mathbf{w} \mathbf{n}_k dA \quad (3.15)$$

Le deuxième terme de l'équation (3.14) peut être transformé en utilisant la relation développée par Whitaker (1977) suivante:

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{q} \rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{q} \rangle + \frac{1}{\Omega} \int_{A_i} \mathbf{q} \mathbf{n} dA \quad (3.16)$$



Tournons notre attention maintenant au premier terme du membre de droite de l'équation (3.16). Le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier:

$$\mathbf{q}_k = -k_k \nabla T \quad (3.17)$$

En utilisant la relation modifiée de l'équation (3.16) développée par Gray (1975) suivante:

$$\langle \nabla T_k \rangle = \epsilon_k \nabla \bar{T}_k + \frac{1}{\Omega} \int_{A_i} T'_k \mathbf{n}_k dA \quad (3.18)$$

L'équation (3.14) devient alors:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho h \rangle_k = \nabla \left\{ k_k \epsilon_k \nabla \bar{T}_k + \frac{k_k}{\Omega} \int_{A_i} T'_k \mathbf{n}_k dA \right\} + \frac{1}{\Omega} \int_{A_i} [ (\rho h w)_k - \mathbf{q}_k ] \mathbf{n}_k dA \quad (3.19)$$

où on a remplacé la dérivée totale du temps par la dérivée partielle, car les équations moyennées sont associées à un volume fixe dans le temps et dans l'espace (Whitaker, 1977).

### 3.2.3 Équations globales

L'équation d'énergie globale moyennée dans tout le volume de contrôle s'obtient en additionnant les équations d'énergie de chaque constituant. À cet effet, on considère les hypothèses suivantes (Whitaker, 1977):

**H-1** *les phases sont en équilibre thermodynamique:  $\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = \bar{T}$ .*

**H-2** *un point quelconque de l'espace est occupé simultanément par chaque phase.*

On définit les variables globales suivantes:

**Densité de mélange**

$$\rho_m = \langle \rho_1 \rangle + \langle \rho_2 \rangle = \epsilon_1 \rho_1 + \epsilon_2 \rho_2 \quad (3.20)$$

**Capacité calorifique de mélange**

$$(\rho c)_m = \langle \rho c \rangle_1 + \langle \rho c \rangle_2 = (\epsilon \rho c)_1 + (\epsilon \rho c)_2 \quad (3.21)$$

**Conductivité thermique de mélange**

$$k_m = \langle k_1 \rangle + \langle k_2 \rangle = \epsilon_1 k_1 + \epsilon_2 k_2 \quad (3.22)$$

**Enthalpie de mélange**

$$\rho_m h_m = \langle \rho h \rangle_1 + \langle \rho h \rangle_2 = (\epsilon \rho \bar{h})_1 + (\epsilon \rho \bar{h})_2 \quad (3.23)$$

En faisant la somme des équations (3.19) pour tous les constituants et en tenant compte de la condition de saut à l'interface, équation (3.9), on obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m h_m) = \nabla \cdot \left\{ k_m \nabla \bar{T} + \frac{(k_1 - k_2)}{\Omega} \int_{A_i} T' n dA \right\} \quad (3.24)$$

Il convient de noter que l'équation d'énergie globale (3.24) contient un terme relatif à l'interface, qui est difficile à évaluer, dû au fait que l'interface est inconnue a priori (milieu poreux), et que les variables n'y sont pas spécifiées (on peut développer une forme semblable à l'équation (3.24) impliquant des termes de dérivée à l'interface, voir par exemple Bachmat et Bear (1986) et

Bear et Bachmat, 1986). Notre but est donc de rendre l'équation (3.24) sous une forme conventionnelle. À cet effet, la déviation  $T'$  dans VER peut être exprimée par une série de Taylor suivante:

$$T' = T - \bar{T} = \mathbf{dx} \cdot \nabla T + \frac{1}{2} [ \mathbf{dx} \cdot \nabla T ]^2 + \dots \quad (3.25)$$

où  $\mathbf{dx} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x}$  est le vecteur de position d'un point microscopique appartenant à VER et  $\mathbf{X}$  le vecteur de position du point (macroscopique) associé à ce volume (son centre géométrique, par exemple). Par ailleurs, on peut poser:

$$\nabla T = \mathbf{D} \cdot \nabla \bar{T} \quad (3.26)$$

où  $\mathbf{D}$  est un coefficient (tenseur de transformation de coordonnées), qui est une fonction d'espace. Si on garde le premier terme de la série (3.25), le terme d'interface figurant dans l'équation (3.24) devient équivalent à:

$$\frac{1}{\Omega} \int_{A_i} T' \mathbf{n} dA = \frac{1}{\Omega} \int_{A_i} [ \mathbf{dx} \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla \bar{T} ] \mathbf{n} dA = \mathbf{G} \cdot \nabla \bar{T} \quad (3.27)$$

où le tenseur  $\mathbf{G}$  est donné par:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\Omega} \int_{A_i} [ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{dx}) \cdot \mathbf{D} ] dA \quad (3.28)$$

On définit maintenant une conductivité thermique tensorielle associée à l'interface par:

$$k_i = (k_1 - k_2) \mathbf{G} \quad (3.29)$$

La conductivité thermique exprimée par l'équation (3.29) peut dépendre en général de plusieurs paramètres et variables, à savoir, le temps, les coordonnées du point (macroscopique), la morphologie de l'interface et de tout paramètre physique figurant dans l'équation d'énergie et les conditions aux limites correspondantes, alors qu'elle devrait être indépendante du système de coordonnées (Whitaker, 1977). On définit ainsi une conductivité thermique effective d'un milieu poreux par:

$$k_{eff} = k_m + k_i \quad (3.30)$$

l'équation d'énergie (3.24) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m h_m) = \nabla (k_{eff} \nabla \bar{T}) \quad (3.31)$$

Nous reviendrons plus tard à la détermination théorique de  $k_i$ . Dans ce qui suit, on élimine la barre de moyenne intrinsèque afin d'alléger le texte.

Il est important de noter que l'équation (3.31), développée par le principe de "*moyenne volumique*" est similaire en forme à celle développée par le modèle continu (voir Bennon et Incropera, 1987a). La présence de l'interface ainsi que le gradient de température dans un volume de contrôle semble bien avoir des effets sur les propriétés physiques du mélange selon le modèle préconisé. Cependant, dans le modèle continu, cet effet est absent.

### 3.3 FORMULATION AVEC UN TERME SOURCE DE CHALEUR LATENTE

Il convient de noter que l'équation (3.31) contient explicitement deux variables physiques  $h_m$  et  $T$  et implicitement les fractions volumiques de chaque phase rendant l'équation d'énergie non linéaire. Il est donc préférable de reformuler l'équation d'énergie en terme d'une seule variable inconnue avec un terme source variable afin de pouvoir mettre en oeuvre une méthode numérique de résolution. Pour le cas d'un milieu à deux phases solide/liquide, les enthalpies phasiques intrinsèques peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$H_s = (\rho \bar{h})_s = \rho_s \int_{T_r}^T c_s d\theta \quad (3.32)$$

$$H_l = (\rho \bar{h})_l = \rho_l \int_{T_r}^T c_l d\theta + \delta H \quad (3.33)$$

où  $H$  est l'enthalpie volumique,  $\delta H$  l'enthalpie de référence du liquide et  $T_r$  la température de référence. Les fractions volumiques satisfont l'équation suivante:

$$\epsilon_l + \epsilon_s = 1 \quad (3.34)$$

L'enthalpie de mélange devient:

$$H_m = \rho_m h_m = (\epsilon \rho)_l \int_{T_r}^T c_l d\theta + (\epsilon \rho)_s \int_{T_r}^T c_s d\theta + \delta H \epsilon_l = H^s + \delta H \epsilon_l \quad (3.35)$$

L'enthalpie de mélange est donc divisée en une enthalpie sensible ( $H^s$ ) et une enthalpie latente ( $\delta H \epsilon_l$ ). Noter que  $H^s$  est continue dans tout le domaine.

Appliquons le gradient sur l'enthalpie sensible,  $H^s$ , on a:

$$\nabla H^s = (\rho c)_m \nabla T + \left\{ \rho_l \int_{T_r}^T c_l d\theta - \rho_s \int_{T_r}^T c_s d\theta \right\} \cdot \nabla \epsilon_l \quad (3.36)$$

D'où, on tire:

$$\nabla T = \frac{1}{(\rho c)_m} \left\{ \nabla H^s - \left[ \rho_l \int_{T_r}^T c_l d\theta - \rho_s \int_{T_r}^T c_s d\theta \right] \cdot \nabla \epsilon_l \right\} \quad (3.37)$$

L'équation d'énergie (3.31) devient, sous sa forme finale, équivalente à:

$$\frac{\partial H^s}{\partial t} = \nabla (\alpha_{eff} \nabla H^s) - \delta H \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} - \nabla \left\{ \alpha_{eff} \left[ \rho_l \int_{T_r}^T c_l d\theta - \rho_s \int_{T_r}^T c_s d\theta \right] \cdot \nabla \epsilon_l \right\} \quad (3.38)$$

où  $\alpha_{eff} = k_{eff} / (\rho c)_m$ , la diffusivité thermique. Cette équation (3.38) est compatible avec celle de Fourier contenant un terme source, et elle peut être traitée par des méthodes et codes numériques déjà existant: la méthode de volume de contrôle, en particulier. De plus, l'équation (3.38) peut traiter n'importe quel comportement de la fraction liquide. Elle est valable aussi bien pour un changement de phase isotherme que pour un changement de phase dans une marge de température. Cependant, chaque comportement requiert une formulation spécifique. L'équation (3.38) est plus convenable pour les problèmes de changement de phase isotherme.

### 3.3.1 Changement de phase isotherme

L'équation (3.38) est adoptée pour ce type de changement de phase. Soit  $T_f$  la température de fusion. On définit la chaleur de fusion ( $L$ ) par:

$$\rho_l L = H_l(T_f) - H_s(T_f) \quad (3.39)$$

d'où, on tire:

$$\delta H = \rho_l L - \rho_l \int_{T_r}^{T_f} c_l d\theta + \rho_s \int_{T_r}^{T_f} c_s d\theta \quad (3.40)$$

L'équation (3.38) regroupe deux inconnues à déterminer, à savoir l'enthalpie sensible  $H^s$  et la fraction liquide  $\epsilon_l$ . Une relation entre elles est donc nécessaire. En vertu de l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique entre les phases (i. e., les phases co-existent à la température  $T_f$ ), on a la relation suivante:

$$\begin{cases} \epsilon_l = 0 & : & H < H(T_f) \\ 0 < \epsilon_l < 1 & : & H = H(T_f) \\ \epsilon_l = 1 & : & H > H(T_f) \end{cases} \quad (3.41)$$

Cette relation a été utilisée par plusieurs auteurs (Voller, 1990). Cependant, d'un point de vue numérique, un volume de contrôle qui contient les deux phases peut être à une température différente de celle de fusion, et les phases pourraient donc co-exister dans une marge de température "numérique" (indéfinie a priori). On pose alors l'hypothèse suivante:

### ***H-3 les deux phases co-existent dans une marge de température***

Cette supposition viole l'hypothèse d'un équilibre thermique admise précédemment. Cependant, si le volume de contrôle est rempli en grande partie du liquide ou du solide, il y aurait une différence

de température entre les deux phases, notamment s'il y a une grande différence des propriétés physiques des phases à l'interface. De toute manière, cette hypothèse reste valable pour un milieu poreux où les deux phases peuvent co-exister à n'importe quelle température. Il convient d'ajouter que cette supposition est aussi considérée par Beckermann et Viskanta (1988) et Hashemi et Sliepcevich (1973).

La tâche consiste maintenant à trouver la variation de l'enthalpie sensible dans cette marge (zone pâteuse). On peut donc avancer une autre hypothèse:

***H-4 l'enthalpie sensible de mélange varie en fonction de la fraction liquide dans la marge de fusion.***

En effet, si on développe en série de Taylor l'enthalpie autour du point  $\epsilon_l = 0.5$ , on a:

$$H^s = H^s(T_f) + (\epsilon_l - 1/2) \left\{ \frac{\partial H^s}{\partial \epsilon_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^s}{\partial \epsilon_l^2} (\epsilon_l - 1/2) + \dots \right\} \quad (3.42)$$

Où on a supposé qu'à  $\epsilon_l = 1/2$ ,  $H^s = H^s(T_f)$  (cas unidimensionnel, par exemple). L'équation (3.42) prend la forme suivante:

$$H^s = H^s(T_f) + C(\epsilon_l - 1/2) \quad (3.43)$$

où C est un coefficient à déterminer désignant la marge de fusion " numérique ". Nous reviendrons plus tard pour déterminer ce coefficient. Une relation similaire à la relation (3.43) est aussi utilisée par Beckermann et Viskanta (1988) et Hashemi et Sliepcevich (1973). Ces auteurs ont tous spécifié la plage de changement de phase  $\Delta T$ , i.e., le coefficient C est considéré constant. Cependant, dans



la relation (3.43), le coefficient  $C$  varie en fonction de l'espace et du temps. On croit que l'étendue de la zone liquide est strictement dépendante de ce coefficient. En utilisant cette relation (3.43), les oscillations de la fraction fondue/solidifiée produites par les méthodes enthalpiques pourraient être éliminées.

### 3.3.2 Changement de phase dans une marge de température

Dans ce cas, il serait mieux de reformuler l'équation (3.31) en termes de température, car la fraction liquide est généralement donnée en fonction de cette dernière. Supposons que la fusion se fasse sur la plage  $\Delta T = T_2 - T_1$ . La chaleur de fusion prend la formule suivante:

$$\rho_l L = H_f(T_2) - H_f(T_1) \quad (3.44)$$

D'où, on tire:

$$\delta H = \rho_l L - \rho_l \int_{T_r}^{T_2} c_l d\theta + \rho_s \int_{T_r}^{T_1} c_s d\theta \quad (3.45)$$

Évaluons le membre de gauche de l'équation (3.31). On a:

$$\frac{\partial H_m}{\partial t} = (\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + \left\{ \delta H + \rho_l \int_{T_r}^T c_l d\theta - \rho_s \int_{T_r}^T c_s d\theta \right\} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} \quad (3.46)$$

et l'équation (3.31) devient:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla [k_{eff} \nabla T] - \delta H' \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} \quad (3.47)$$

avec

$$\delta H' = \rho_l L + \rho_l \int_{T_2}^T c_l d\theta - \rho_s \int_{T_1}^T c_s d\theta \quad (3.48)$$

La fraction liquide peut être exprimée par:

$$\begin{cases} T \leq T_1 & : & \epsilon_l = 0 \\ T_1 < T < T_2 & : & \epsilon_l = [T - T_1] / \Delta T \\ T \geq T_2 & : & \epsilon_l = 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

Équation (3.49) représente la forme la plus simple que peut prendre la fraction liquide. En général, la fraction liquide peut être une fonction non linéaire de température, et l'équation (3.49) représente dans ce cas une linéarisation de cette fonction. La marge de fusion  $\Delta T$  est donc variable en fonction de la température (pour les comportements possibles de la fraction liquide, voir Voller et coll. (1990), et Voller et Swaminathan, 1991). Il convient de mentionner que l'équation (3.47) est valable aussi bien pour un changement de phase dans une plage de température que pour un changement de phase isotherme.

### 3.4 DÉTERMINATION DE LA CONDUCTIVITÉ THERMIQUE EFFECTIVE D'UN MILIEU BIPHASIQUE

Les équations (3.38) et (3.47) précédentes contiennent deux variables physiques à déterminer, l'enthalpie sensible (ou la température) et la fraction liquide  $\epsilon_l$ , et une propriété thermique  $\alpha_{eff}$ . On

a vu que la présence d'une interface peut associer une conductivité thermique dépendante de la morphologie qui rend le milieu anisotrope. Étant donné que cette morphologie est inconnue à priori (cas d'un milieu poreux), on peut à la limite supposer que le tenseur de conductivité  $\mathbf{G}$  est un tenseur isotrope, et que  $\mathbf{G}$  peut dépendre principalement des fractions volumiques de chaque phase, des propriétés physiques du milieu et de tout paramètre adimensionnel figurant dans l'équation d'énergie et les conditions aux limites correspondantes. À cet égard, on pose:

$$k_i = (k_1 - k_2) \mathbf{G} = A \cdot |k_1 - k_2| \cdot \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2, k_1, k_2, \dots) \quad (3.50)$$

où  $A$  est une constante dépendante des propriétés physiques du milieu et les paramètres adimensionnels du problème alors que  $\Phi$  est une fonction ayant les caractéristiques suivantes:

$$\begin{aligned} \Phi|_{\epsilon_1=0;1} &= 0; \\ \Phi(\epsilon_1, \epsilon_2, k_1, k_2, \dots) &= \Phi(\epsilon_2, \epsilon_1, k_2, k_1, \dots) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Deux cas sont à considérer:

### 3.4.1 Interface fixe

Dans ce cas le flux de chaleur est continu à l'interface (voir équation 3.9). On sait que, pour ce cas, la conductivité thermique est bornée inférieurement par la moyenne harmonique et supérieurement par la moyenne arithmétique (Tien et Vafai, 1979), soit:

$$k_h = \frac{k_1 k_2}{k_1 \epsilon_2 + k_2 \epsilon_1} \leq k_{eff} \leq k_1 \epsilon_1 + k_2 \epsilon_2 = k_m \quad (3.52)$$

L'inégalité (3.52) devient équivalente à:

$$-|k_1 - k_2| \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{k_1 \epsilon_2 + k_2 \epsilon_1} \leq A \cdot \Phi \leq 0 \quad (3.53)$$

D'où, on tire:

$$A_{\min} = -\frac{|k_1 - k_2|}{k_{\max}} \leq A \leq 0 \quad (3.54)$$

et si la fonction  $\Phi$  est indépendante de la configuration géométrique du milieu, on a:

$$\Phi = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(k_1 / k_{\max}) \epsilon_2 + (k_2 / k_{\max}) \epsilon_1} \quad (3.55)$$

où  $k_{\max} = \max(k_1, k_2)$ . Les relations (3.54) et (3.55) démontrent donc que la conductivité thermique d'un milieu composé est fonction des conductivités et fractions volumiques de ses constituants et une constante qui détermine le type de sa structure ou sa morphologie. Cette constante (A) devrait être déterminée expérimentalement.

### 3.4.2 Interface mobile

Dans ce cas le flux de chaleur est discontinu à l'interface (voir équation 3.9). Le flux qui en sort ( $q_2$ ) dépendra principalement des propriétés physiques de la phase 2 alors qu'il est indépendant du flux qui y entre. Par conséquent, la moyenne harmonique, qui suppose un flux continu à l'interface, ne peut être appliquée. On définit le flux de chaleur qui traverse l'interface se trouvant entre deux points 1 et 2, figure 3.3, par:

$$q_{1-2} = \frac{k_{eff}}{\Delta x} [T_1 - T_2] \quad (3.56)$$

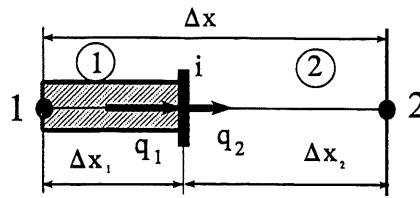


Figure 3.3 représentation d'une barre composée

De plus, on a:

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_1 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k_1}{\Delta x_1} [T_1 - T_i] \\ q_2 &= -k_2 \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k_2}{\Delta x_2} [T_i - T_2] \end{aligned} \quad (3.57)$$

D'où, on tire:

$$k_{eff} = \frac{q_{1-2}}{q_1 \epsilon_1 / k_1 + q_2 \epsilon_2 / k_2} \quad (3.58)$$

avec  $\epsilon_1 = \Delta x_1 / \Delta x$  et  $\epsilon_2 = \Delta x_2 / \Delta x$ . Le flux  $q_{1-2}$  peut être calculé par la façon suivante:

$$q_{1-2} = \frac{1}{\Delta x} \int q dx = q_1 \epsilon_1 + q_2 \epsilon_2 \quad (3.59)$$

En comparant l'équation (3.58) avec l'équation (3.30), on trouve:

$$A = \text{signe}(k_1 - k_2) \cdot (k_2 - \sigma k_1) / k_{max} \quad (3.60)$$

$$\Phi = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(k_2 / k_{max}) \epsilon_1 + \sigma (k_1 / k_{max}) \epsilon_2} \quad (3.61)$$

où  $\sigma = q_2 / q_1$ . Trois cas limites sont possibles:

- $\sigma = 1$ : Ce cas correspond asymptotiquement à  $k_1 \ll k_2$ ; l'interface se meut très lentement, et l'équation (3.58) produit la moyenne harmonique  $k_{eff} = k_h$ .
- $\sigma = k_2/k_1$ : Les phases sont structurées en parallèles; l'équation (3.58) produit  $k_{eff} = k_m$ .
- $\sigma = 0$ : Ce cas correspond à  $q_2 = 0$  où asymptotiquement à  $k_1 \gg k_2$ ; l'équation (3.58) est ainsi réduite à  $k_{eff} = k_1$  alors que la moyenne harmonique produirait  $k_2/\epsilon_2$ .

Les figures 3.4 et 3.5 montrent les zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixes ou mobiles. Une interface fixe est caractérisée par les valeurs de  $\sigma$  comprises entre 1 et  $k_2/k_1$ , et une interface mobile est caractérisée par les valeurs de  $\sigma$  comprises entre 0 et 1. En conclusion, les relations (3.60) et (3.61) sont valables pour n'importe quelle configuration (série, parallèle ou mixte). Le coefficient  $\sigma$  peut être déterminé en connaissant les composantes des flux arrivant et sortant de l'interface. En outre, les relations sus-mentionnées sont valables aussi bien pour une interface mobile que pour une interface fixe.

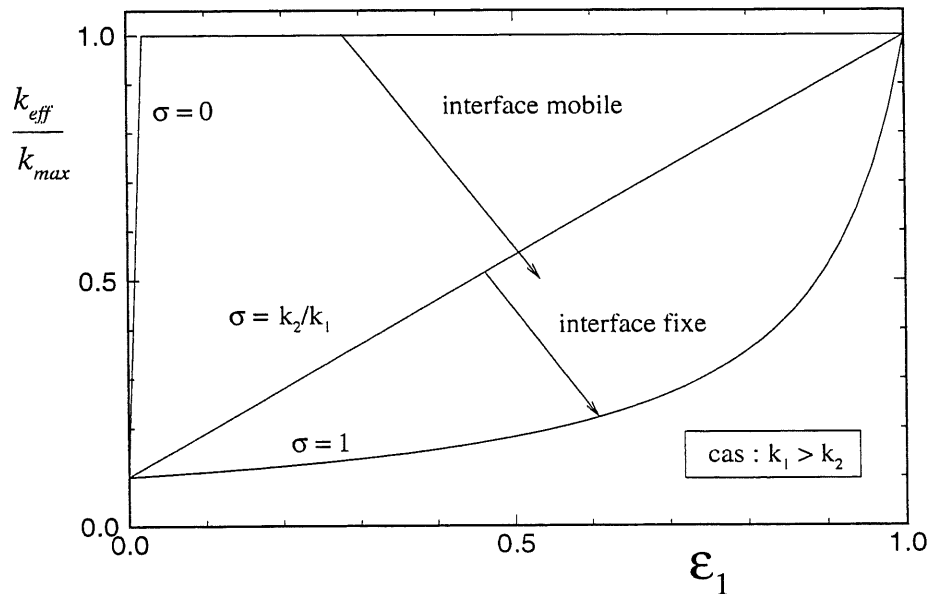


Figure 3.4 Zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixe et mobile - cas:  $k_1 > k_2$ .

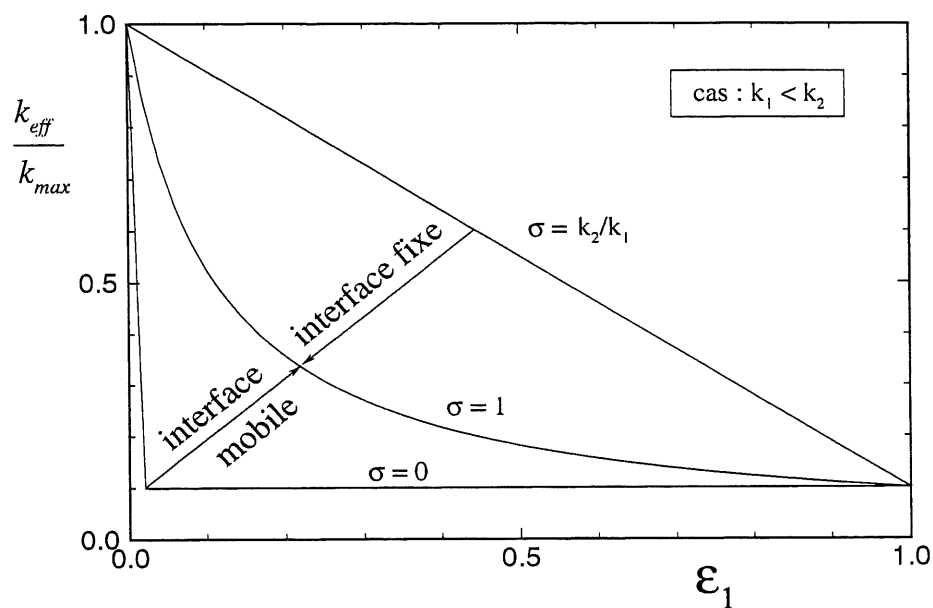


Figure 3.5 Zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixe et mobile - cas:  $k_1 < k_2$ .

Pour valider le cas d'une interface fixe, on considère les relations existant suivantes:

**Relation de Veinberg:** Veinberg (1967) a développée une relation non linéaire de conductivité thermique effective d'un milieu rempli de façon aléatoire par des inclusions sphériques formant un milieu poreux. Cette relation est donnée par l'équation suivante:

$$\epsilon_1 \left[ \frac{k_{eff}}{k_1} \right]^{1/3} = \frac{k_{eff} - k_2}{k_1 - k_2} \quad (3.62)$$

Veinberg (1967) prétend que cette relation est universelle pour ce type d'inclusions.

$$\Phi = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{(k_2/k_{\max}) \epsilon_1 + \sigma (k_1/k_{\max}) \epsilon_2} \quad (3.63)$$

où  $\sigma = q_2/q_1$ . Trois cas limites sont possibles:

- $\sigma = 1$ : Ce cas correspond asymptotiquement à  $k_1 \ll k_2$ ; l'interface se meut très lentement, et l'équation (3.60) produit la moyenne harmonique  $k_{eff} = k_h$ .
- $\sigma = k_2/k_1$ : Les phases sont structurées en parallèles; l'équation (3.60) produit  $k_{eff} = k_m$ .
- $\sigma = 0$ : Ce cas correspond à  $q_2 = 0$  où asymptotiquement à  $k_1 \gg k_2$ ; l'équation (3.60) est ainsi réduite à  $k_{eff} = k_1$  alors que la moyenne harmonique produirait  $k_2/\epsilon_2$ .

Les figures 3.5 et 3.6 montrent les zones de conductivité thermique effective correspondant à une interface mobile ou fixe. En conclusion, les relations (3.62) et (3.63) sont valables pour n'importe quelle configuration (série, parallèle ou mixte). Le coefficient  $\sigma$  peut être déterminé en connaissant les composantes des flux arrivant et sortant de l'interface. En outre, les relations sus-mentionnées sont valables aussi bien pour une interface mobile que pour une interface fixe.

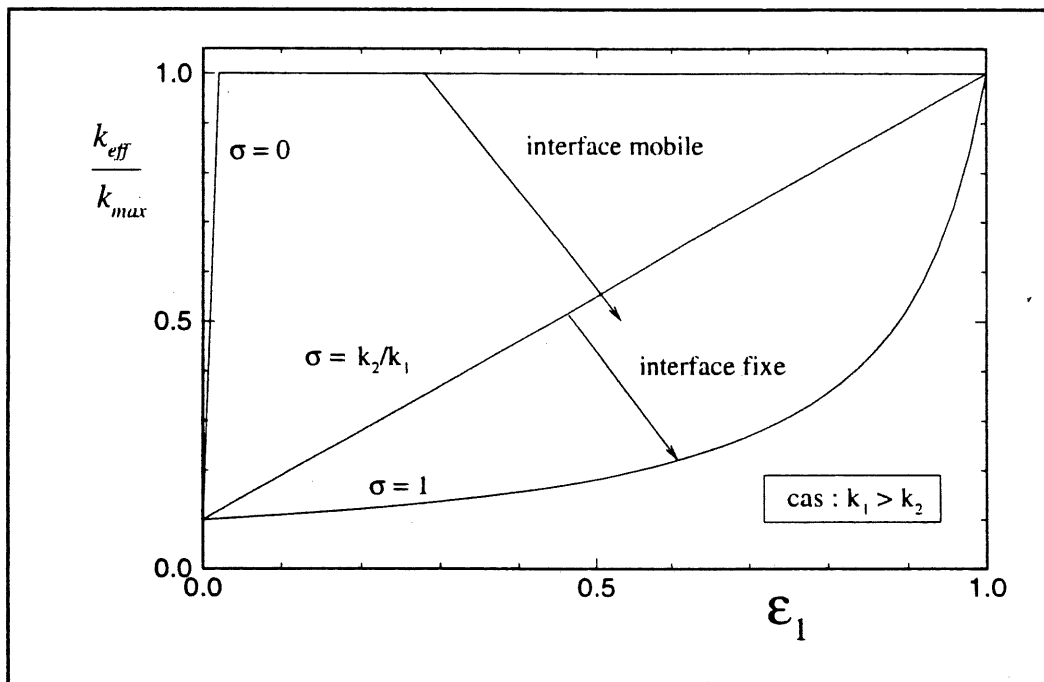


Figure 3.5 Zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixe et mobile - cas:  $k_1 > k_2$ .



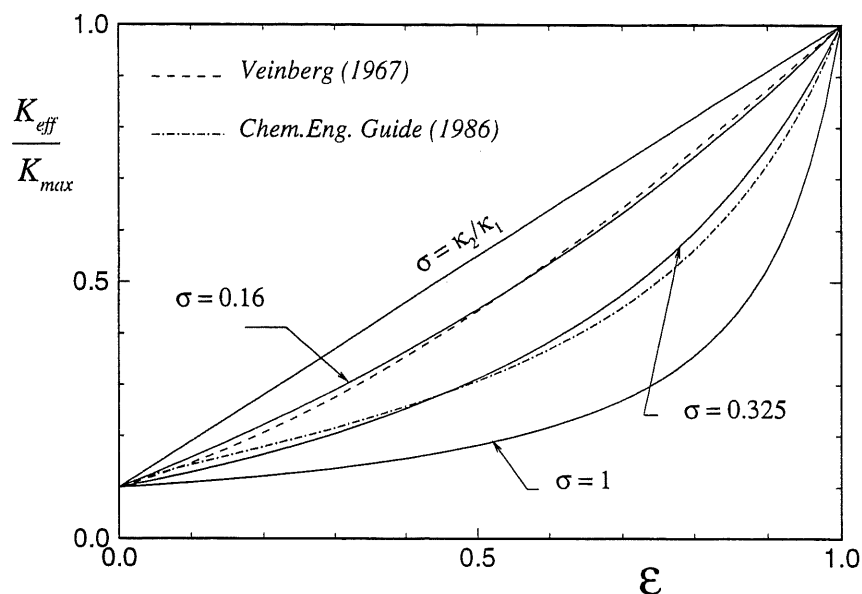


Figure 3.6 Variation de la conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique: cas d'une interface fixe

Le cas d'une interface mobile se présente fréquemment dans les problèmes de changement de phase, où le mouvement de l'interface est dû principalement à la discontinuité du flux de chaleur à l'interface qui sépare les deux phases. La validation de ce cas sera examinée plus tard.

### 3.5 MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION

#### 3.5.1 Discrétisation numérique

Les équations (3.38) et (3.47) peuvent s'écrire sous la forme standard suivante:

$$\lambda_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \Gamma_{\phi} \cdot \nabla \phi - \beta_{\phi} \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} - S_{\phi} \quad (3.64)$$

et les équations (3.43) et (3.49) prennent la forme suivante:

$$\phi = b_0 + b_1 \epsilon_l \tag{3.65}$$

Les différents variables et paramètres figurant dans les équation (3.64) et (3.65) sont donnés au tableau 3.1.

variable/ paramètre	changement de phase isotherme, équation (3.38)	changement de phase dans une marge de température, équation (3.47)
$\phi$	$H^s$	$T$
$\lambda_\phi$	1	$(\rho c)_m$
$\Gamma_\phi$	$\alpha_{eff}$	$k_{eff}$
$\beta_\phi$	$\delta H$ (équation 3.40)	$\delta H'$ (équation 3.48)
$S_\phi$	$\nabla \{ \alpha_{eff} [ \rho_l \int_{T_r}^T c_l d\theta - \rho_s \int_{T_r}^T c_s d\theta ] \cdot \nabla \epsilon_l \}$	0
$b_0$	$H^s(T_f) - C/2$	$T_l$
$b_1$	$C$	$\Delta T$

Tableau 3.1 Définition des variables et paramètres figurant dans les équations (3.64) et (3.65)

L'équation (3.64) est discrétisée selon un schéma implicite pour les termes temporaires et selon l'approche de volume de contrôle décrite par Patankar (1980) pour les termes spatiaux. On obtient:

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} - \beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \epsilon_{l,p} + b \tag{3.66}$$

avec:

$$a_{nb} = S_{nb} \frac{(\Gamma_{\phi})_{nb}}{|\Delta x_{nb}|} ; \quad b = \frac{\Delta V}{\Delta t} \left\{ \lambda_{\phi} \phi_P^0 + \beta_{\phi} \epsilon_i^0 - S_{\phi} \right\} \quad (3.67)$$

$$a_p = \frac{\Delta V}{\Delta t} \lambda_{\phi} + \sum a_{nb} \quad (3.68)$$

où  $S_{nb}$  est la section du volume de contrôle perpendiculaire à la direction  $x_{nb}$ ,  $\Delta x_{nb} = x_{nb} - x_p$ ,  $\Delta t$  est le pas de temps et  $\Delta V$  le volume du volume de contrôle. L'indice (nb) est affectée aux noeuds adjacents au noeud P du volume de contrôle alors que l'exposant (<sup>0</sup>) indique les valeurs au temps précédent. La moyenne harmonique est utilisée pour calculer les valeurs de  $(\Gamma_{\phi})_{nb}$  aux interfaces du volume de contrôle..

### 3.5.2 Détermination de la marge de fusion "numérique" pour les problèmes de changement de phase isotherme

#### (a) Cas unidimensionnel

Considérons la figure 3.7 dans la direction x et affectons les indices 1 et 2 respectivement aux phases à gauche et à droite de l'interface. On a:

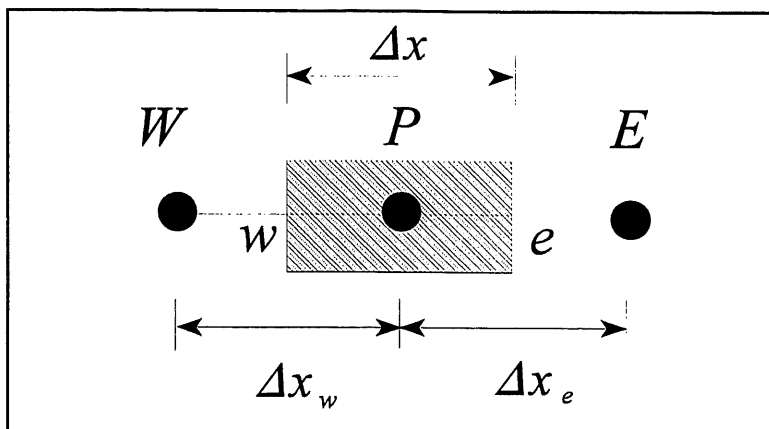


Figure 3.7 Volume de contrôle de Discrétisation-cas unidimensionnel

*pour  $\epsilon_1 \leq 0.5$ :*

$$\phi_i = \phi(T_f) = \phi_P + \frac{\partial \phi}{\partial x} (x_i - x_P) = \phi_P + \frac{\Delta x}{\Delta x_e} (\phi_E - \phi_P) (\epsilon_1 - 1/2) \quad (3.69)$$

d'où, on tire

$$\phi_P = \frac{\Delta x_e / \Delta x \phi(T_f) - (\epsilon_1 - 1/2) \phi_E}{\Delta x_e / \Delta x - \epsilon_1 + 1/2} \quad (3.70)$$

*pour  $\epsilon_1 > 0.5$ :*

$$\phi_i = \phi(T_f) = \phi_P + \frac{\partial \phi}{\partial x} (x_i - x_P) = \phi_P - \frac{\Delta x}{\Delta x_w} (\phi_W - \phi_P) (\epsilon_1 - 0.5) \quad (3.71)$$

d'où, on tire

$$\phi_p = \frac{\Delta x_w / \Delta x \phi(T_f) + (\epsilon_1 - 1/2) \phi_w}{\Delta x_w / \Delta x + \epsilon_1 - 1/2} \quad (3.72)$$

En comparant les équations (3.70) et (3.72) avec l'équation (3.43), on a finalement pour la fusion d'un solide ( $\epsilon_i = \epsilon_l$ ):

$$C = \begin{cases} - \frac{\phi_E - \phi(T_f)}{\Delta x_e / \Delta x - \epsilon_l + 1/2} ; & \epsilon_l \leq 1/2 \\ \frac{\phi_w - \phi(T_f)}{\Delta x_w / \Delta x + \epsilon_l - 1/2} ; & \epsilon_l > 1/2 \end{cases} \quad (3.73)$$

### (b) cas multidimensionnel

La démonstration précédente peut être généralisée aux cas multi-dimensionnels. En effet, développons en série de Taylor la variable dépendante  $\phi$  autour d'un point situé sur l'interface, on obtient:

$$\phi_p = \phi_i - \frac{\partial \phi}{\partial x} (x_i - x_p) - \frac{\partial \phi}{\partial y} (y_i - y_p) - \frac{\partial \phi}{\partial z} (z_i - z_p) - \dots \quad (3.74)$$

et considérons le fait que les fractions surfaciques d'une phase dans les directions x, y et z sont égales et équivalentes à la fraction volumique phasique (Bachmat et Beer, 1986),

$$x_i - x_p = \Delta x (\epsilon_l - 1/2) ; \quad y_i - y_p = \Delta y (\epsilon_l - 1/2) ; \quad z_i - z_p = \Delta z (\epsilon_l - 1/2) \quad (3.75)$$

Si les zones liquide et solide sont *connexes* de sorte que l'on peut discrétiser les dérivées partielles dans l'équation (3.74) par des manières similaires à celles appliquées aux équations (3.69) et (3.71), le coefficient  $C$  pour les problèmes multi-dimensionnels devient:

$$C = \frac{- \sum [\phi_{nb} - \phi(T_f)] \Delta x / \Delta x_{nb}}{1 - (\epsilon_l - 1/2) \sum \Delta x / \Delta x_{nb}} \quad (3.76)$$

Il convient d'ajouter que le coefficient  $C$  ne peut prendre des valeurs négatives (voir équation, 3.43). Autrement dit, si la valeur calculée de  $C$  est négative, sa nouvelle valeur est réinitialisée à zéro.

### 3.5.3 Méthode de calcul de la fraction liquide

L'équation (3.66) contient deux variables inconnues  $\phi$  et  $\epsilon_l$ . Une méthode itérative est donc nécessaire. Cette méthode commence par donner une valeur initiale au champ de fraction liquide  $\epsilon_l$ , puis résoudre l'équation discrétisée (3.66) pour la variable  $\phi$ . Le champ de  $\phi$  calculé ne serait pas automatiquement consistant avec le champ de fraction liquide, et une mise à jour de celle-ci est nécessaire pour corriger le champ de  $\phi$ . La pierre angulaire de cette méthode est comment mettre à jour cette fraction liquide après chaque itération. Voller (1990) a proposé deux méthodes pour traiter les problèmes de changement de phase isotherme. Elles se résument comme suit:

#### 3.5.3.1 Méthodes de Voller

Ces méthodes sont basées sur la relation (3.41) pour la mise à jour de la fraction liquide après chaque itération. C'est à dire que la nouvelle valeur  $\epsilon_l$  estimée devrait produire des températures nodales égales à la température de fusion, et ce pour tous les noeuds qui subissent le changement de phase  $0 < \epsilon_l < 1$ . Pour ce type de problème (changement de phase isotherme), il serait mieux de prendre  $T_r = T_f$ , et par conséquent  $\phi(T_f) = 0$ . Écrivons l'équation (3.66) aux étapes d'itération  $k$  (actuelle) et  $k+1$  (nouvelle):

$$a_p \phi_p^k = \sum a_{nb} \phi_{nb}^k - \beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \epsilon_{i_p}^k + b \quad (3.77)$$

$$a_p \phi_p^{k+1} = a_p \phi_p(T_f) = 0 = \sum a_{nb} \phi_{nb}^k - \beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \epsilon_{i_p}^{k+1} + b \quad (3.78)$$

En soustrayant l'équation (3.78) de l'équation (3.77), on a:

$$\epsilon_{i_p}^{k+1} = \epsilon_{i_p}^k + \omega \frac{a_p}{\beta_\phi} \frac{\Delta t}{\Delta V} \phi_p^{k_i} \quad (3.79)$$

Le coefficient  $\omega$  est ajouté pour la sous-relaxation. Noter que la variation  $\epsilon_i$  d'un noeud P n'a aucun effet sur les noeuds adjacents (équation 3.78). L'équation (3.79) est appliquée sur tous les points du domaine avec la correction suivante pour les noeuds qui ne subissent pas le changement de phase:

$$\begin{cases} \epsilon_{i_p} = 0 & \text{si } \epsilon_{i_p} < 0 \\ \epsilon_{i_p} = 1 & \text{si } \epsilon_{i_p} > 1 \end{cases} \quad (3.80)$$

La seconde méthode de Voller est basée sur le fait que pour avoir  $\phi^{k+1} = \phi(T_f) = 0$  pour les noeuds subissant le changement de phase ( $0 < \epsilon_i < 1$ ), on devrait affecter une valeur très grande au coefficient  $a_p$  ( $10^{15}$ , par exemple). Après avoir résolu l'équation (3.66) avec cette valeur de  $a_p$ , la fraction liquide est mise à jour par la relation suivante:

$$\epsilon_{i_p}^{k+1} = \epsilon_{i_p}^k + \frac{a_p}{\beta_\phi} \frac{\Delta t}{\Delta V} \phi_p^{k_i} \quad (3.81)$$

Cette méthode ne nécessite pas un coefficient de sous-relaxation ( $\omega$ ), et elle converge très rapidement, 2 à 3 fois la première méthode. Cependant, il arrive que cette méthode ne converge pas, notamment s'il y a une grande discontinuité des conductivités thermiques des deux phases. Noter que les méthodes de Voller ne sont plus valables lorsque  $\epsilon_1 \rightarrow 0$  ou 1, car dans ce cas la température nodale n'est plus égale à la température de fusion.

L'équation (3.79) ou l'équation (3.81) ont deux inconvénients: (1) le coefficient de sous-relaxation ( $\omega$ ) devrait être choisi judicieusement pour accélérer la convergence. Cependant, ce coefficient varie d'un problème à un autre. (2) le coefficient  $a_p$  devrait être stocké en mémoire après chaque résolution de l'équation (3.66), et par conséquent la taille de la mémoire allouée à un code numérique est augmentée. De plus, il n'est pas toujours possible de connaître les coefficients  $a_p$  et  $a_{nb}$  dans les codes commerciaux. Il convient d'ajouter que la formulation enthalpique de Voller mal estime la conductivité thermique nodale d'un volume de contrôle, et par ricochet les conductivités thermiques aux interfaces du volume de contrôle seront mal estimées.

Voller et Swaminathan (1991) ont aussi proposé une méthode pour traiter les problèmes de changement de phase dans une plage de température. La fraction liquide est donnée en fonction de la température. Leur méthode est basée sur une simple linéarisation du terme source pour chaleur latente, comme recommandé par Patankar (1980). En effet, soit  $F(\phi)$  la fonction de dépendance de  $\epsilon_1$  ( $\phi$  ici désigne  $T$ ), en appliquant la série de Taylor à  $\epsilon_1$  entre les étapes d'itération  $k+1$  et  $k$ , on a:

$$\epsilon_1^{k+1} = \epsilon_1^k + \left( \frac{dF}{d\phi} \right)^k [ \phi^{k+1} - F^{-1}(\epsilon_1^k) ] \quad (3.82)$$

En utilisant cette linéarisation, le deuxième terme du membre de droite de l'équation (3.66) devient:

$$-\beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \epsilon_1^{k+1} = S_p \phi^{k+1} + S_c \quad (3.83)$$



avec

$$S_p = -\beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \left( \frac{dF}{d\phi} \right)^k ; \quad S_c = \beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \left\{ \left( \frac{dF}{d\phi} \right)^k F^{-1}(\epsilon_i^k) - \epsilon_i^k \right\} \quad (3.84)$$

et l'équation (3.66) devient équivalente à:

$$(a_p - S_p) \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + S_c \quad (3.85)$$

et la méthode itérative est construite comme suit:

- (1) initialiser le champ de  $\epsilon_1$
- (2) calculer les coefficients de l'équation (3.66), les termes  $S_p$  et  $S_c$  ainsi que la pente  $dF/d\phi$ .
- (3) résoudre l'équation (3.66) pour obtenir le champ de  $\phi$ .
- (4) mettre à jour la fraction liquide par l'équation (3.82)
- (5) revenir à l'étape 2 jusqu'à convergence.

Cette méthode a les avantages et inconvénients suivants (d'après les auteurs):

- Elle n'a pas besoin de relaxation
- Si la fonction  $F(\phi)$  est discontinue en quelques points (par exemple changement de phase isotherme), la pente  $dF/d\phi$  est affectée une grande valeur. Dans ce cas, la convergence de la méthode est comparable à celle de la deuxième méthode de Voller (équation 3.81).
- L'équation (3.82) n'est plus valable pour  $\epsilon_1 = 1$ .
- La méthode ne converge pas lorsque la pente  $dF/d\phi \ll 1$ . Pour qu'elle converge, une sous-relaxation est nécessaire, et la solution présentera des oscillations.

### 3.5.3.2 Méthode proposée

La méthode proposée élimine les inconvénients des méthodes de Voller sus-mentionnés en estimant adéquatement la température nodale d'un volume de contrôle subissant le changement de phase et les conductivités thermiques aux interface de ce dernier. Elle se résume comme suit:

- (1) initialiser le champ de  $\epsilon_1$
- (2) résoudre l'équation discrétisée (3.66).
- (3) mettre à jour la fraction liquide. Les valeurs de  $\phi$  calculées en (2) ne satisfont pas automatiquement l'équation (3.65) et elles nécessitent une correction. Écrivons l'équation (3.66) aux étapes d'itération  $k$  (actuelle) et  $k+1$  (nouvelle):

$$a_p \phi_p^k = \sum a_{nb} \phi_{nb}^k - \beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \epsilon_{i_p}^k + b \quad (3.86)$$

$$a_p \phi_p^{k+1} = \sum a_{nb} \phi_{nb}^{k+1} - \beta_\phi \frac{\Delta V}{\Delta t} \epsilon_{i_p}^{k+1} + b \quad (3.87)$$

En supposant un profil linéaire de  $\phi$  entre deux noeuds consécutifs et en admettant que la pente ne change pas beaucoup d'une itération à l'autre, on aura:

$$(\phi_{nb})^{k+1} = (\phi_p)^{k+1} + \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^k \Delta x_{nb} = (\phi_p)^{k+1} + (\phi_{nb})^k - (\phi_p)^k \quad (3.88)$$

En soustrayant l'équation (3.87) de l'équation (3.86) en tenant compte des équations (3.65), (3.68) et (3.88), on obtient finalement la méthode suivante pour la mise à jour de la fraction liquide:

$$(\epsilon_{i_p})^{k+1} = \left[ \frac{\beta_\phi / \lambda_\phi}{\beta_\phi / \lambda_\phi + b_1} \right] (\epsilon_{i_p})^k + \left[ \frac{(\phi_p)^k - b_0}{\beta_\phi / \lambda_\phi + b_1} \right] \quad (3.89)$$

Équation (3.89) est appliquée à chaque noeud avec la correction (3.80).

- (4) retourner à l'étape (2) jusqu'à convergence. La convergence est déclarée lorsque le résidu de l'équation (3.66) est inférieur à une tolérance spécifiée.

L'équation (3.89) est générale, valable aussi bien pour un changement de phase isotherme que pour un changement de phase dans une plage de température, et elle converge de façon stable aussi bien pour les pentes élevées ( $b_1 \gg 1$ ) que pour les pentes faibles ( $b_1 \ll 1$ ). De plus, cette relation n'implique ni le facteur de relaxation ni le coefficient  $a_p$ . Dans certains cas, cependant, on peut employer un facteur de sur-relaxation (égal à 2) pour accélérer la convergence. Il convient d'ajouter que l'équation (3.89) converge même pour  $C = 0$  ou  $\Delta T = 0$ . Cela signifie que la plage de changement de phase n'a aucun effet sur la convergence alors qu'elle affecte de façon significative la fraction du solide fondue.

### 3.6 VALIDATION DU MODÈLE PROPOSÉ

Dans cette partie, nous comparerons le modèle proposé avec les solutions analytiques disponibles pour des cas simples. Deux cas seront considérés: (1) cas unidimensionnel et (2) cas bidimensionnel. À la fin, on présentera les performances en terme de stabilité et convergence de la méthode proposée. Dans ce qu'il suit, les solutions numériques sont obtenues au moyen d'un code commercial *CONDUCT* adapté aux problèmes transitoires non linéaires. Le critère de convergence est fixé à  $10^{-3}$ .

#### 3.6.1 Cas unidimensionnel: Fusion d'une barre semi-infinie

Considérons la barre telle que montrée dans la figure 3.8. La barre est initialement à une température  $T_0$ , qui peut être différente de la température de fusion  $T_f$ . Au temps  $t = 0$ , le côté gauche de la barre est soumis soudainement à une température  $T_w$ . Par la suite, nous supposons que toutes les propriétés physiques sont constantes, mais elles peuvent être différentes d'une phase à l'autre,

excepté les densités des deux phases qui sont prises égales. Ce problème est régi par les équations de conservation d'énergie suivantes:

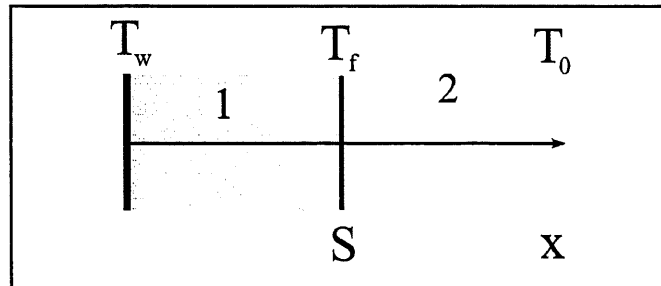


Figure 3.8 Fusion d'une barre semi-infinie

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; \quad (\text{dans la phase 1}) \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}; \quad (\text{dans la phase 2}) \quad (3.91)$$

avec l'équation de mouvement de l'interface:

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} + \Delta H \frac{dS}{dt} \quad (3.92)$$

où  $S$  désigne la position de l'interface et  $\Delta H$  est la chaleur latente de changement de phase de 2 à 1 ( $\Delta H = \rho L$  pour la fusion et  $\Delta H = -\rho L$  pour la solidification). Les équations (3.90) et (3.91) sont assujetties aux conditions initiale et aux limites suivantes:

$$\begin{aligned}
 t = 0 : \quad T_1 = T_2 = T_0 ; \quad x = 0 : \quad T_1 = T_w \\
 x = S : \quad T_1 = T_2 = T_f ; \quad x \rightarrow \infty : \quad T_2 = T_0
 \end{aligned}
 \tag{3.93}$$

Ce problème admet une solution exacte suivante (voir Alexiades et Solomon, 1993):

$$\frac{T_1 - T_w}{T_f - T_w} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)} ; \quad 0 < x < S
 \tag{3.94}$$

$$\frac{T_2 - T_0}{T_f - T_0} = \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right)}{\operatorname{erfc}(v \lambda)} ; \quad S < x < \infty
 \tag{3.95}$$

où  $\operatorname{erf}$  et  $\operatorname{erfc}$  désignent respectivement la fonction erreur et son complémentaire.  $v = (\alpha_1/\alpha_2)^{0.5}$  et le paramètre  $\lambda$  est donné par l'équation transcendante suivante:

$$\frac{\mathcal{S}_1}{e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda)} - \frac{\mathcal{S}_2}{v e^{v^2 \lambda^2} \operatorname{erfc}(v \lambda)} = \lambda \sqrt{\pi}
 \tag{3.96}$$

où  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont les valeurs du nombre de Stefan données par:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{\rho c_1 (T_w - T_f)}{\Delta H} ; \quad \mathcal{S}_2 = \frac{\rho c_2 (T_f - T_0)}{\Delta H}
 \tag{3.97}$$

La position de l'interface est donnée par l'équation suivante:

$$S(t) = 2\lambda \sqrt{\alpha_1 t}
 \tag{3.98}$$

Le but principal de cette étude est de valider: (1) l'hypothèse **H3** (page 36) d'existence d'une marge de changement de phase "numérique" pour les problèmes de changement de phase isotherme, (2) valider la relation de conductivité thermique effective proposée pour une interface mobile et éventuellement déterminer son paramètre  $\sigma$ , et (3) déterminer les performances de la méthode proposée pour le calcul de la fraction liquide vis-à-vis des méthodes existant. A cet effet, considérons le problème de fusion d'un MCP ayant les caractéristiques physiques suivantes:  $T_f = 0^\circ\text{C}$ ,  $k_1 = k_2 = 1 \text{ W/mK}$ ,  $\rho c_1 = \rho c_2 = 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$  et  $\Delta H = 10^8 \text{ J/m}^3$ . Le MCP est initialement à  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  alors que au temps  $t = 0$  la température du côté gauche est élevée à  $T_w = 10^\circ\text{C}$ . Les solutions numérique et exacte ainsi que la solution obtenue par la méthode de Voller sont représentées dans la figure (3.9). Les valeurs numériques sont obtenues avec un maillage de 40 noeuds distribués de manière non uniforme sur une longueur de 1m. Une grille plus fine est concentrée au voisinage de la paroi  $x = 0$ . Le pas de temps employé est fixé à  $\Delta t = 6 \text{ min}$ . La figure montre clairement que les oscillations produites par la méthode de Voller (équation 3.81) sont extrêmement réduites par la méthode proposée, et ce grâce à l'hypothèse **H3**.

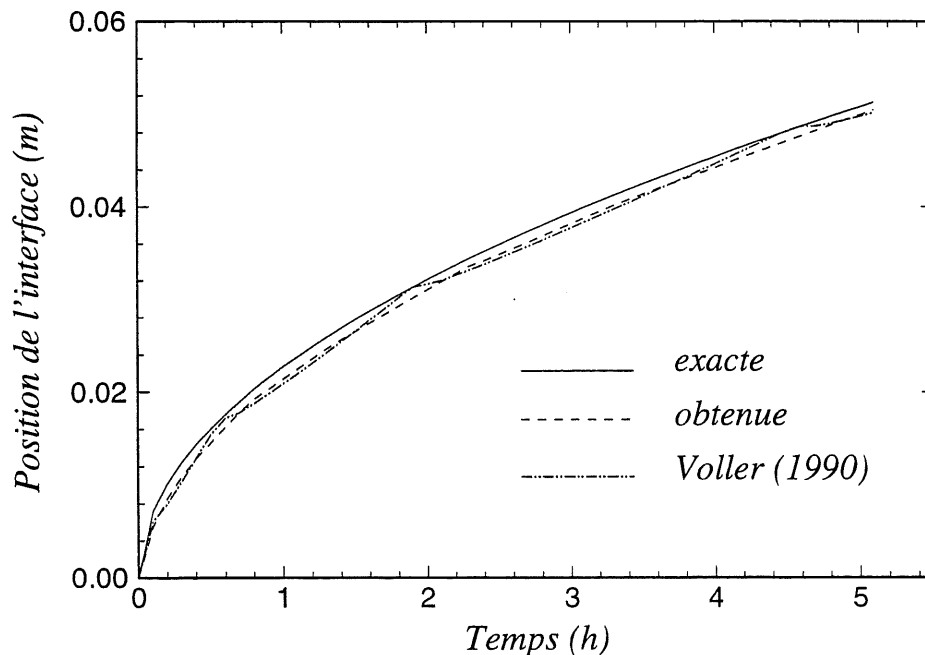


Figure 3.9 Position de l'interface en fonction du temps lors de la fusion d'une barre semi-infinie.

### Propriétés physiques discontinues

Considérons maintenant un problème différent au premier présentant des discontinuités de la conductivité thermique à l'interface. Un exemple concret est la solidification de l'eau ou la fusion de la glace. Les propriétés physiques du système eau-glace sont données par Voller (1990):  $T_f = 0^\circ\text{C}$ ,  $k_l = 0.556 \text{ W/mK}$ ,  $k_s = 2.22 \text{ W/mK}$ ,  $\rho c_l = 4.226 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$ ,  $\rho c_s = 1.762 \times 10^6 \text{ J/m}^3\text{K}$  et  $\rho_l L = 3.38 \times 10^8 \text{ J/m}^3$ . Prenons  $T_0 = 10^\circ\text{C}$  et  $T_w = -10^\circ\text{C}$  pour la solidification de l'eau et  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  et  $T_w = 10^\circ\text{C}$  pour la fusion de la glace. Les simulations numériques sont obtenues avec un maillage non uniforme de 50 noeuds distribués sur une longueur de 1m. Le pas de temps est fixé  $\Delta t = 15 \text{ min}$ .

Les figures 3.10 et 3.11 montrent respectivement la position de l'interface en fonction du temps et le champ thermique dans la barre au cours de la solidification de l'eau (cas  $k_l > k_s$ ). Pour fin de comparaison, la solution exacte (Alexiades et Solomon, 1993) et la solution obtenue par la méthode de Voller ( $k_i = 0$ ) sont ainsi représentées dans ces figures. Il est clairement vu que la méthode de Voller sous-estime la position de l'interface et sur-estime la température aux noeuds adjacents à l'interface. Par conséquent, un maillage plus fin n'améliorera pas de manière significative les résultats. En outre, la méthode de Voller ou toute méthode enthalpique, qui considère un équilibre thermique des phases aux noeuds du domaine, produit des oscillations de période égale au pas d'espace utilisé. Les amplitudes de ces oscillations dépendent de plusieurs paramètres tels que les conditions aux limites, le rapport des conductivités et le maillage employé. Dans ce sens, la méthode de Voller a deux inconvénients majeurs: (1) elle sous-estime les conductivités nodales et, par ricochet, les flux de chaleur à l'interface; la position de l'interface est ainsi sur-estimée. (2) La méthode de Voller pour la mise à jour de la fraction liquide produit des résultats imprécis aux frontières de la fraction liquide ( $\epsilon_l \rightarrow 0$  ou 1) si le maillage n'est pas assez fin, car elle suppose  $T = T_f$  en ces noeuds. Par conséquent, des oscillations résultent dans le champ thermique et dans la prédiction de la position de l'interface. Cependant, la méthode proposée élimine ces inconvénients en estimant adéquatement les conductivités thermiques nodales et en supposant que les deux phases

présentes dans un volume de contrôle ne sont pas en équilibre thermodynamique. Cela a produit des résultats relativement précis et les oscillations sont complètement éliminées.

La figure 3.12 montre la position de l'interface au cours de la fusion de la glace (cas  $k_1 < k_2$ ). Il est clairement vu que la méthode de Voller dans ce cas sur-estime la position de l'interface, car les conductivités nodales sont sur-estimées et ainsi le flux de chaleur aux interfaces du volume de contrôle. Les courbes obtenues avec  $\sigma = 0$  (solide initialement à sa température de fusion) et  $\sigma = 0.35$  (solide initialement sous-refroidi) coïncident bien avec les courbes exactes, et les oscillations sont éliminées.

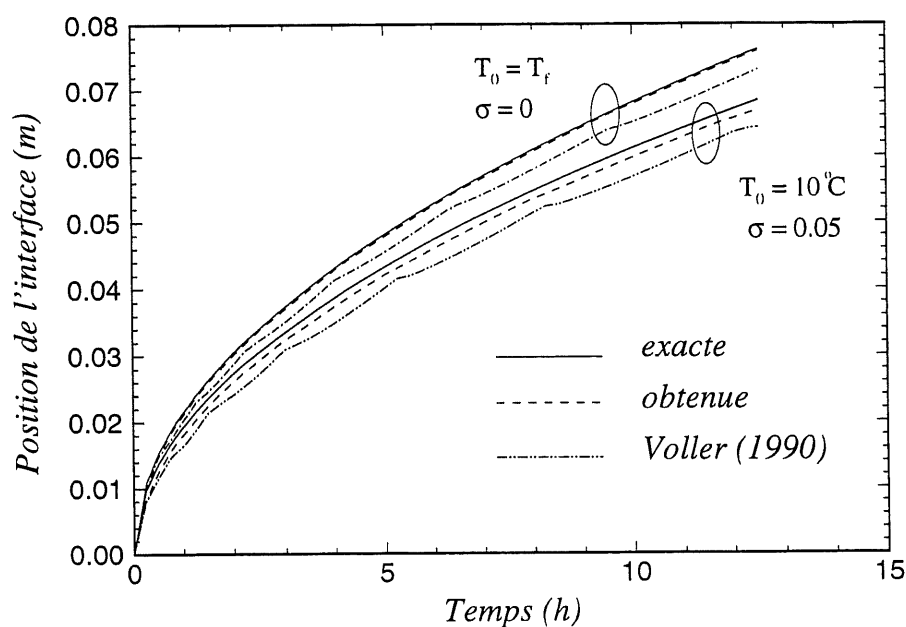


Figure 3.10 Position de l'interface en fonction du temps lors de la solidification de l'eau.



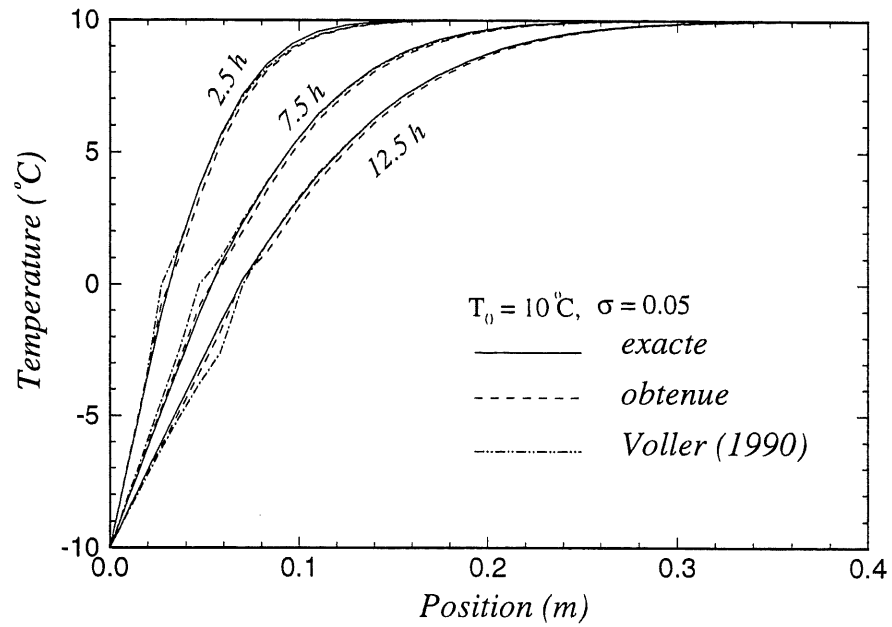


Figure 3.11 Champ de température dans la barre lors de la solidification de l'eau.

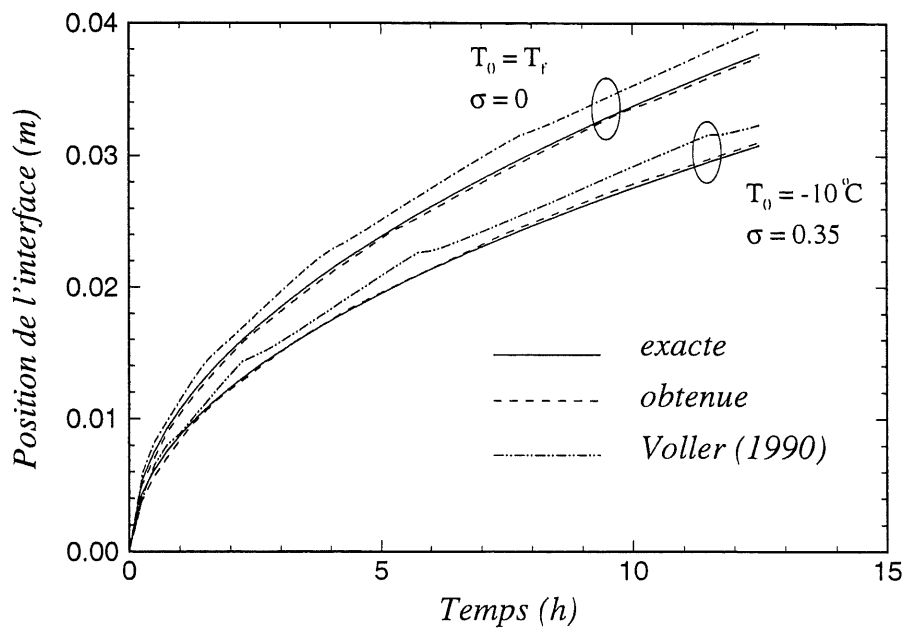


Figure 3.12 Position de l'interface en fonction du temps lors de la fusion de la glace.

### 3.6.2 Cas bidimensionnel: Solidification dans une cavité

Considérons une cavité carrée suffisamment longue, remplie d'eau à une température  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . Au temps  $t = 0$ , les deux côtés,  $x = 0$  et  $y = 0$ , sont refroidis à une température  $T_w = -10^\circ\text{C}$  alors que les autres côtés sont adiabatiques. Un schéma représentatif du problème est montré dans la figure 3.13.

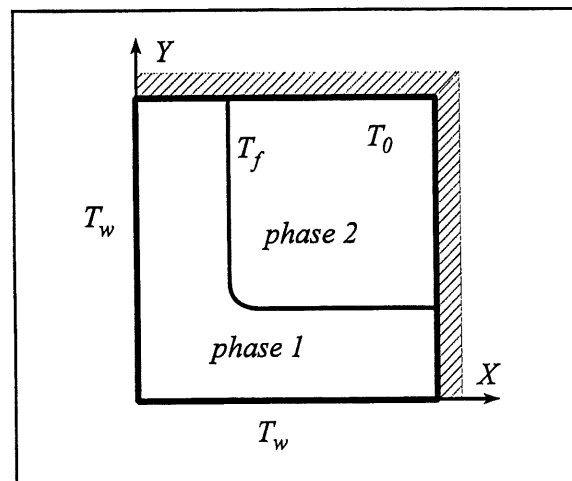


Figure 3.13 Solidification dans une cavité.

Les figures 3.14 et 3.15 présentent respectivement la fraction solidifiée et les isothermes dans une cavité de  $1\text{m} \times 1\text{m}$ . Les résultats sont obtenus avec un maillage non uniforme de  $50 \times 50$  noeuds et un pas de temps  $\Delta t = 15$  min. Pour fin de comparaison, la solution de Voller pour le même maillage et un maillage plus fin de  $80 \times 80$  noeuds, servant comme solution qui s'approche de la solution exacte, sont aussi représentées dans ces figures. On remarque que la solution obtenue est comparable à celle de Voller pour un maillage plus fin. De plus, la solution obtenue pour la fraction solidifiée ne présente pas des oscillations vues dans la solution de Voller. De même, les isothermes sont comparables à celles obtenues par la méthode de Voller pour un maillage plus fin, notamment au voisinage de l'interface.

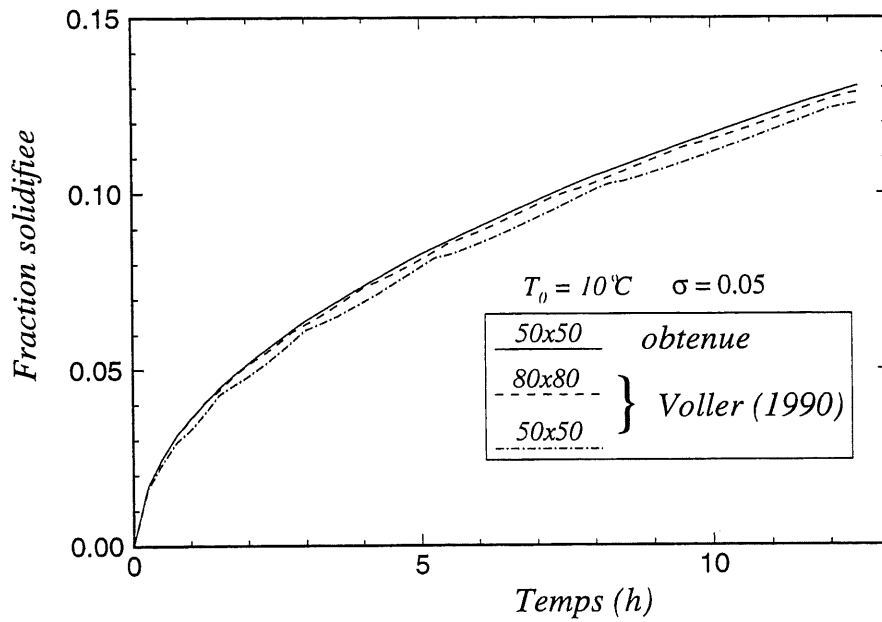


Figure 3.14 Variation de la fraction solidifiée en fonction du temps lors de la solidification de l'eau dans une cavité.

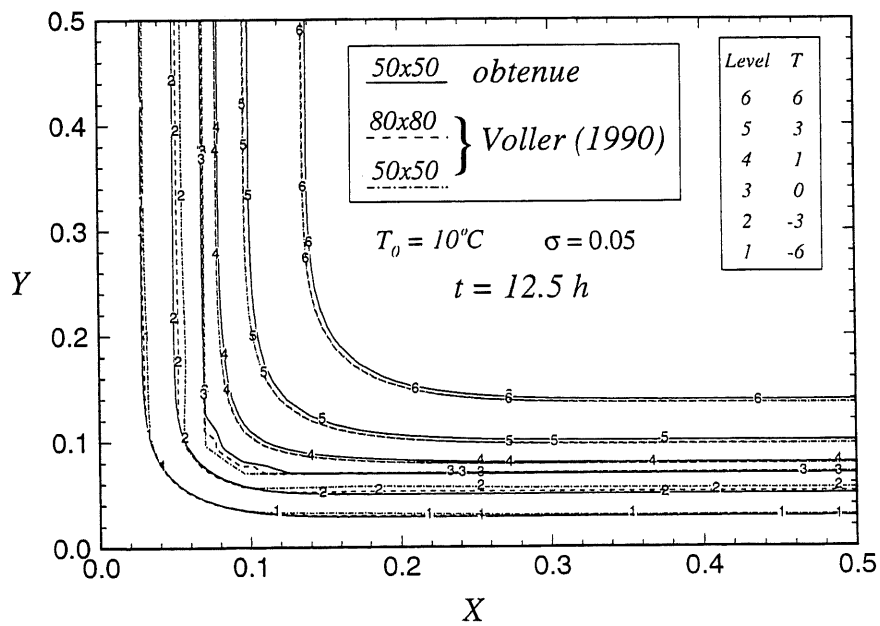


Figure 3.15 Isothermes dans une cavité lors de la solidification de l'eau.

À la lumière de cette démonstration, on conclut que l'hypothèse **H3** considérée auparavant est valable et constitue un moyen de prédire les gradients de température dans un volume de contrôle, et par conséquent estimer la position de l'interface de façon précise. On croit que les oscillations produites par les méthodes enthalpiques sont dues essentiellement à l'ignorance de cette hypothèse. De plus, la mauvaise prédiction de la position de l'interface par les méthodes enthalpiques est due à la mauvaise estimation de la conductivité thermique nodale, et par conséquent mauvaise estimation des flux aux interfaces des volumes de contrôle. L'estimation de la conductivité thermique nodale se manifeste dans la détermination de la constante  $\sigma$  (équation 3.62).

### 3.6.3 Performances de la méthode proposée

Dans plusieurs situations, les performances d'une méthode dépendent du problème considéré, i.e. elles dépendent des propriétés physiques du MCP, si elles sont continues à l'interface ou discontinues, des conditions aux limites (flux ou température imposés) et des conditions initiales si le MCP est sous-refroidi ou surchauffé. Ainsi, la deuxième méthode de Voller (équation 3.81), pour un cas unidimensionnel, converge dans 2 à 3 itérations si les propriétés physiques sont continues alors que ses performances diminuent de plus de 50% si les propriétés physiques sont discontinues et, parfois, elle ne converge pas (cas  $k_1 < k_2$ ).

Pour fin de comparaison, on considère un cas défavorable: la solidification de l'eau initialement surchauffée (figure 3.10). Le tableau 3.2 compare les performances de la méthode proposée avec celles de la méthode de Voller (équation 3.81). Les solutions numériques sont obtenues avec le même critère de convergence ( $10^{-2}$ ). On remarque que la méthode de Voller est moins précise et elle est approximativement deux fois plus rapide que la méthode proposée. Cependant, le nombre d'itérations minimum ne constitue pas un critère exhaustif. La simplicité et la généralité aux différents problèmes de changement de phase que possède la méthode proposée constituent un atout envers les méthodes de Voller.

Méthode exacte		Méthode de Voller		Méthode proposée	
Temps (h)	$S_{\text{exacte}}$ (m)	Itérations	$S_{\text{prédite}}$ (m)	Itérations	$S_{\text{prédite}}$ (m)
1	1.93E-02	18	1.60E-02	40	1.79E-02
2	2.74E-02	11	2.01E-02	45	2.66E-02
3	3.35E-02	15	2.87E-02	27	3.17E-02
4	3.87E-02	11	3.09E-02	23	3.70E-02
5	4.33E-02	12	3.44E-02	33	4.23E-02
6	4.74E-02	12	3.91E-02	23	4.61E-02
7	5.12E-02	13	4.46E-02	24	4.91E-02
8	5.47E-02	12	4.61E-02	23	5.27E-02
9	5.80E-02	12	4.83E-02	20	5.64E-02
10	6.12E-02	12	5.10E-02	26	6.00E-02
11	6.42E-02	13	5.41E-02	36	6.32E-02
12	6.70E-02	12	5.76E-02	24	6.51E-02
13	6.98E-02	12	6.14E-02	24	6.75E-02
14	7.24E-02	13	6.33E-02	24	7.01E-02
15	7.49E-02	12	6.47E-02	22	7.28E-02
16	7.74E-02	12	6.65E-02	18	7.55E-02
17	7.98E-02	13	6.85E-02	20	7.82E-02
18	8.21E-02	13	7.08E-02	28	8.08E-02
19	8.43E-02	13	7.32E-02	31	8.32E-02
20	8.65E-02	12	7.58E-02	22	8.45E-02
21	8.87E-02	11	7.85E-02	23	8.63E-02
22	9.08E-02	11	8.13E-02	23	8.83E-02
23	9.28E-02	11	8.31E-02	23	9.03E-02
24	9.48E-02	12	8.39E-02	22	9.24E-02

Tableau 3.2 Comparaison des performances de la méthode proposée et de celle de Voller.

## **STOCKAGE D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE PAR CHALEUR LATENTE DE FUSION DANS UN ÉLÉMENT PLAN**

### **4.1 INTRODUCTION**

Dans les pays nordiques, la demande de l'énergie électrique pour le chauffage domestique représente un pourcentage très élevé de la consommation totale. Pendant l'hiver, la demande de l'énergie électrique atteint son maximum durant la matinée et durant le soir. Par conséquent, le réseau de distribution devient surchargée et résulte en une interruption du courant électrique s'il n'y a des installations secondaires.

Une méthode pour résoudre ce problème est d'altérer la demande d'énergie électrique des périodes de pointe aux périodes hors la pointe en utilisant des systèmes de stockage d'énergie électrique. Dans ces systèmes, l'énergie électrique est convertie en énergie thermique en faisant circuler un courant électrique dans des résistances placées dans le matériaux de stockage. Cette chaleur est stockée pendant une période de temps, souvent pendant la nuit, puis elle sera restituée pendant le jour suivant. Le courant est automatiquement coupé pendant les heures de pointe et l'unité

de stockage décharge sa chaleur dans le milieu environnant par radiation et/ou par convection forcée ou naturelle. L'unité peut être conçue pour produire assez de chaleur pendant la charge (hors les heures de pointe) afin de maintenir une température confortable dans la pièce et en même temps elle stocke assez de chaleur pour l'utiliser pendant les heures de pointe. Par conséquent, la connaissance du processus de transfert de chaleur dans l'unité est essentielle pour la conception de tels systèmes et pour prédire leurs performances.

L'énergie électrique peut être stockée sous forme de chaleur sensible ou sous forme de chaleur latente de fusion en utilisant un matériau à changement de phase (MCP). Les systèmes qui utilisent le premier type exigent l'utilisation de matériaux à grandes capacités calorifiques. En outre, ils doivent opérer à des températures relativement élevées afin d'augmenter leurs capacités de stockage. De tels matériaux incluent, par exemple, les briques en céramique ou en magnésite, les briques réfractaires et les pierres. La capacité de ces systèmes pour le chauffage domestique varie de 12 à 48 kWh. Leurs inconvénients majeurs résident dans leurs poids et leurs volumes énormes.

Alternativement, le stockage d'énergie par chaleur latente de fusion offre quelques avantages par rapport au premier, tels que une grande capacité de stockage par unité de volume ou de masse, l'isothermie et des faibles plages de température de fonctionnement.

Dans cette partie, une étude expérimentale est réalisée pour prédire les performances thermiques et cycliques d'un système de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion utilisé pour délester la pointe électrique. Le MCP utilisé est une cire de paraffine P116 ayant une température de fusion de  $47^{\circ}\text{C}$ . L'élément de stockage peut être en position verticale (mur) ou en position horizontale (plafond). Un modèle unidimensionnel basé sur la conduction pure est aussi proposé. Cependant, la convection naturelle dans la phase liquide est tenue compte en définissant une conductivité thermique équivalente. Une étude paramétrique est aussi réalisée afin de prédire les performances optimales de l'élément de stockage.

## 4.2 ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

### 4.2.1 Montage expérimental

L'élément de stockage consiste en deux plaques en cuivre parallèles et espacées d'une distance de 20 mm. Les plaques de 1.6 mm d'épaisseur mesurent 300 mm de largeur et 380 mm de longueur. Le matériau à changement de phase (MCP) remplit l'espace entre elles. Afin d'accommoder l'expansion volumique du MCP lors de la fusion, une bouche en forme de v est façonnée sur un côté de l'élément. Cette bouche sert aussi pour le remplissage ou la vidange. Figure 4.1 montre une vue transversale prise au milieu de l'élément en position horizontale. L'élément est chauffé par des éléments électriques placés sur la surface extérieure de la plaque chauffée. Ils consistent en des rubans chauffants en nickel-chrome enroulés et espacés uniformément autour d'une feuille en mica-silicone très mince, qui est elle-même placée entre deux feuilles similaires afin d'assurer une bonne isolation électrique. Ces trois feuilles avec les rubans chauffants forment une plaque chauffante de 1 mm d'épaisseur et de dimensions égales à celles des plaques en cuivre. La plaque chauffée ainsi que les côtés sont isolés thermiquement au moyen d'une couche de fibre de verre de 80 mm d'épaisseur. Par contre, la plaque libre permet l'échange de chaleur avec l'environnement par radiation et par convection naturelle. La surface extérieure de la plaque libre est couverte d'une mince couche de peinture noire matte ayant une émissivité de 0.98. L'élément est supporté par un cadre en bois. En position horizontale, l'élément se repose sur un long support en bois distant de 95 cm du plancher bas et de 200 cm du plancher haut (voir figure 1a de l'annexe). En position verticale, l'élément fait face au mur à une distance de 310 cm. Les températures des parois de l'enceinte et de l'air ambiant sont supposées égales.

La distribution de température dans le MCP est mesurée au moyen des thermocouples déployés en 5 niveaux le long du plan transversal passant par le milieu de l'élément. Les niveaux sont espacés d'une distance de 50 mm. Les positions des thermocouples sont indiquées dans la figure 4.1a et sont désignées par les lettres A, B, C, D et E. Chaque niveau contient six thermocouples déployés



le long de l'épaisseur du MCP et espacés uniformément d'une distance égale à 4 mm, figure 4.1b. Six thermocouples additionnels sont placés sur les côtés extérieurs des deux plaques aux niveaux A, C et E, et un autre thermocouple est utilisé pour la mesure de la température ambiante. Tous les thermocouples sont de type T (Cuivre-Constantan) et sont calibrés avec une précision de l'ordre de  $\pm 0.5^\circ\text{C}$ .

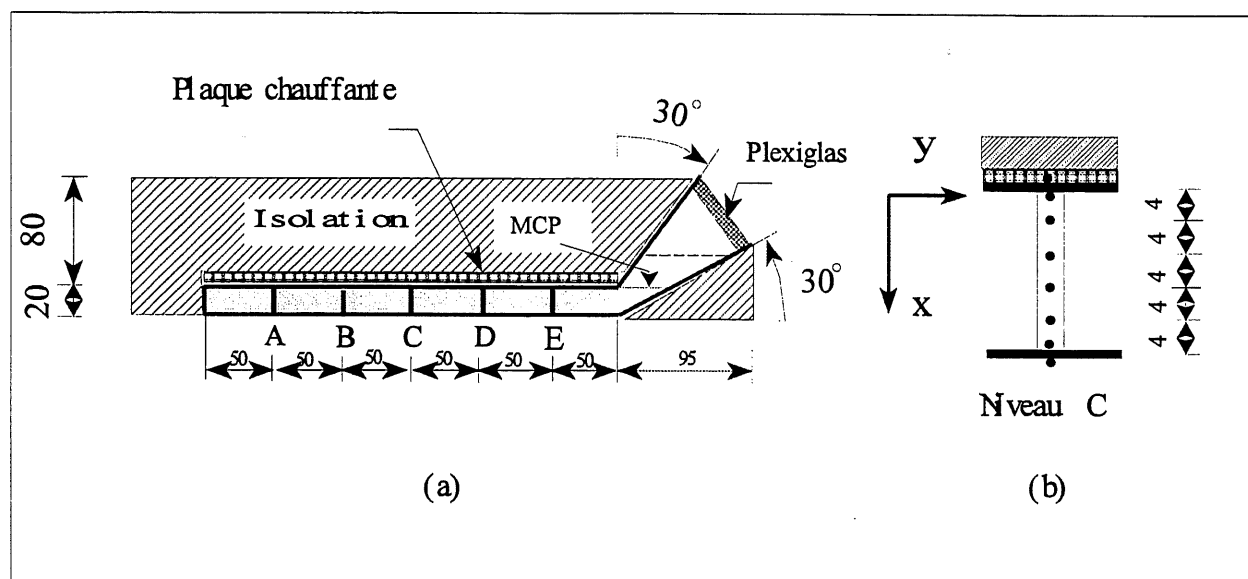


Figure 4.1 Vue transversale prise au milieu de l'élément de stockage.

#### 4.2.2 Acquisition de données

La Figure 4.2 montre l'appareillage expérimental utilisé. Les signaux des thermocouples (voltages) sont collectés à l'aide d'un multiplexeur à entrée analogique (EXP-32) et puis ils sont convertis en températures au moyen d'un convertisseur digital (DAS-8). Le contrôle de l'acquisition est assuré par un logiciel d'acquisition, Labtech Notebook. Un appareil à voltage constant est utilisé afin d'alimenter l'élément de stockage avec une puissance électrique constante. La puissance électrique est mesurée par un wattmètre. Les modes de charge et de décharge sont contrôlés par une

carte de relais mécaniques, qui reçoit des signaux d'une carte à entrée/sortie digitales (DIO12), qui est elle-même contrôlée par le logiciel d'acquisition. L'acquisition se fait à chaque 400 secondes et les résultats sont affichés sur un ordinateur. Le mode de charge commence lorsque la température de la plaque chauffée atteigne une limite inférieure et termine lorsque la température de la plaque libre atteint une limite supérieure; le MCP, initialement en état solide, est alors devenu totalement liquide. Juste après, le mode de décharge commence jusqu'à ce que la température de la plaque chauffée atteigne la limite inférieure, et le MCP en état liquide est devenu totalement solide. De la même manière, les cycles de charge et de décharge subséquents sont répétés. Plusieurs cycles (charge et décharge continus) sont obtenus dans deux jours de simulation expérimentale pour plusieurs valeurs de la puissance électrique.

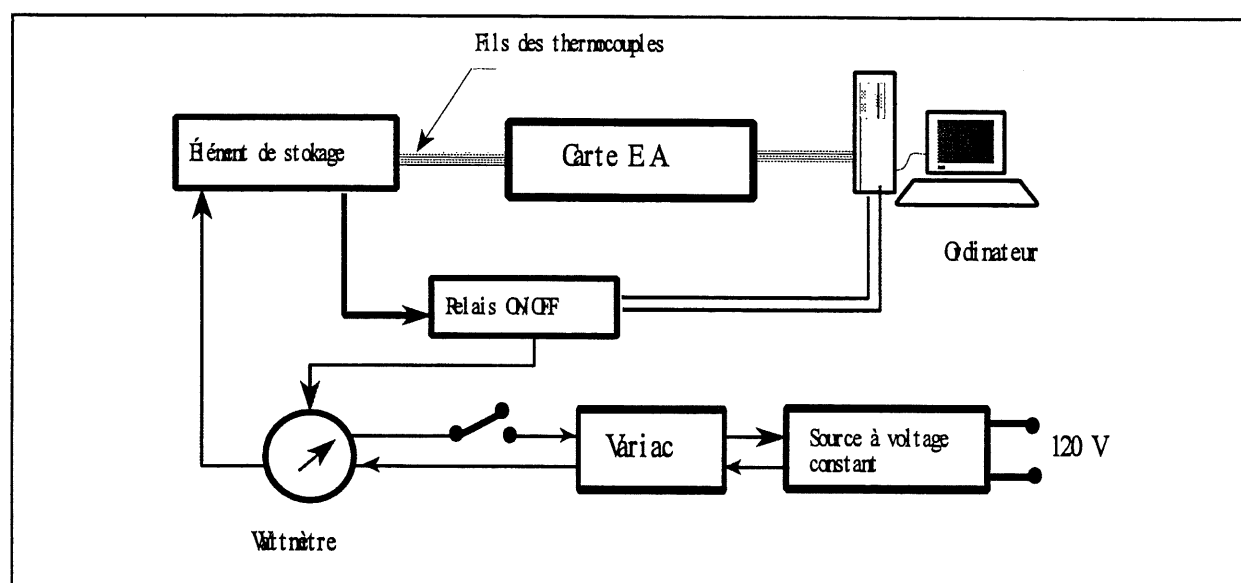


Figure 4.2 Appareillage expérimental.

### 4.2.3 Choix du matériau de stockage

Le matériau de stockage utilisé est une cire de paraffine P116 de la compagnie SUNOCO. Ce matériau est sélectionné sur la base des critères suivants: (1) il possède une chaleur de fusion

relativement élevée; (2) sa température de fusion convient au chauffage domestique; (3) il est disponible avec un coût moins élevé; (4) il n'interagit pas avec le conteneur; (5) ses propriétés physiques sont connues; et (6) il possède un faible taux d'évaporation et par conséquent le risque d'incendie est réduit. Ses propriétés physiques, déterminées par le manufacturier, sont résumées au tableau 4.1.

état	$T_f$ (°C)	L (kJ/kg)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	k (W/mK)	c (kJ/kgK)	$\mu$ (kg/m/s)
solide	47	225	830	0.24	2.4	-
liquide			773	0.24	1.9	$1.9 \times 10^{-3}$

Tableau 4.1 Propriétés physiques de la paraffine P116 (données du manufacturier).

#### 4.2.4 Modèle analytique

Figure 4.3 montre un schéma représentatif de l'élément de stockage. Deux plaques sont disposées parallèlement et espacées par une distance  $l$ , et dont le matériau de stockage remplit l'espace entre elles. La plaque P1 est chauffée par un flux de chaleur constant et isolée de l'extérieure alors que la plaque libre échange de la chaleur avec le milieu ambiant par radiation et par convection naturelle. Vu que l'épaisseur ( $l$ ) du MCP est petite par rapport aux dimensions des plaques, l'écoulement de chaleur peut être considéré comme unidimensionnel. Cependant, la convection naturelle dans la phase liquide peut être prise en compte en définissant une conductivité thermique équivalente du liquide (Farid et Husian, 1990). En outre, on suppose que le changement de phase se déroule dans une plage de température  $\Delta T = T_2 - T_1$  (comme présentent plusieurs paraffines). Suite à ces hypothèses, l'équation de conservation d'énergie est (équation 3.47):

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \delta H \frac{\partial \epsilon_l}{\partial t} \quad (4.1)$$

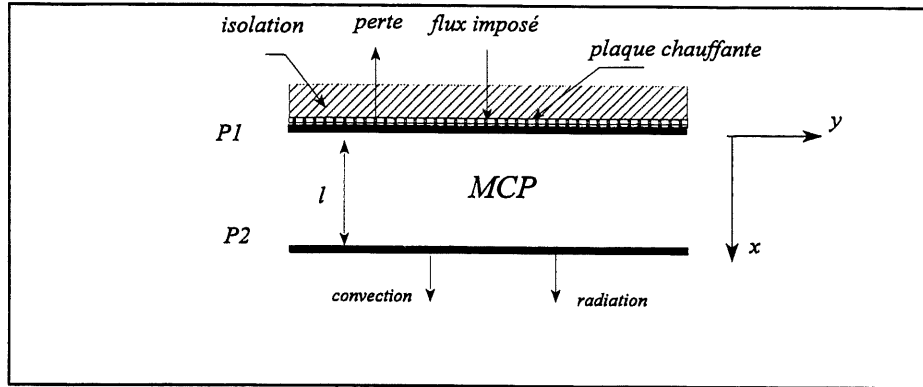


Figure 4.3 Schéma représentatif de l'élément de stockage.

La fraction liquide  $\epsilon_l$  est donnée par l'équation (3.49). Les conditions initiales et aux limites sont:

$$t = 0 : \quad T = T_0 = T_a \quad (4.2)$$

$$x = 0 : \quad -k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{E}{A} - (T - T_a)/R - (CV/A)_{P1} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$x = l : \quad -k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x} = h_e (T - T_a) + (CV/A)_{P2} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.4)$$

où on a considéré que le gradient de température à travers les plaques est négligeable, à cause de leur grande conductivité thermique. Par contre, la chaleur emmagasinée par elles n'est pas nulle à cause de leur grande capacité calorifique.  $h_e$  désigne la somme des coefficients de convection ( $h_c$ ) et de radiation ( $h_r$ ),  $E$  la puissance électrique (W),  $R$  la résistance thermique de l'isolant ( $m^2K/W$ ),  $T_a$  la température ambiante,  $A$  la section de chauffage, et  $C$  et  $V$  sont respectivement la capacité calorifique et le volume (y compris le volume des sections latérales) de la plaque. La chaleur emmagasinée par la plaque chauffante est prise en compte dans la définition de  $(CV/A)_{P1}$ .

La conductivité thermique équivalente du liquide du MCP est estimée par la formule suivante:

$$\frac{k_{eq}}{k_l} = \frac{Nu_{conv}}{Nu_{cond}} = \frac{c_w Ra_l^n}{[l \cdot \partial T / \partial x] / [T_f - T_{pl}]} \quad (4.5)$$

où  $Nu_{conv}$  et  $Nu_{cond}$  sont respectivement le nombre de Nusselt en présence et en absence de la convection naturelle dans la phase liquide; le premier est déterminé par des corrélations impliquant les constantes  $c_w$  et  $n$ .  $T_f = (T_2 + T_1)/2$  est la température de fusion et  $Ra_l$  est le nombre de Rayleigh du liquide donné par:

$$Ra_l = \frac{\rho g \beta (T_{pl} - T_f) l^3}{\alpha \mu} \quad (4.6)$$

Si on suppose que le processus de fusion est quasi stationnaire, le gradient de température dans la phase liquide est  $\partial T / \partial x = (T_f - T_{pl}) / S$ ; où  $S$  est la position de l'interface. L'équation (4.5) devient:

$$\frac{k_{eq}}{k_l} = c_w Ra_l^n \cdot (S/l) \equiv C_w Ra_l^n \cdot (S/l)^m \quad (4.7)$$

où l'exposant  $m$  est ajouté pour tenir compte d'autres facteurs pouvant influencer le processus de fusion. Cette corrélation est similaire en forme à celles donnée par Farid et Kanzawa, 1989 ( $m = 1$ ) et Hirata et Nishida, 1989 ( $m = 1/4$ ).

#### 4.2.5 Bilan thermique de l'élément

Il convient de signaler, au cours du mode de charge, que l'élément perd une partie de la chaleur dans le milieu environnant par radiation et par convection naturelle. Elle en stocke aussi sous forme de chaleur sensible ainsi que sous forme de chaleur latente. Les quantités physiques suivantes,

définies dans un cycle complet de charge-décharge, sont primordiales pour évaluer les performances thermiques et cycliques de l'élément.

**Chaleur sensible cumulative:** Les chaleurs sensibles stockées dans le MCP ( $Q_{MCP}$ ) et dans les plaques ( $Q_p$ ) par unité de surface de chauffage sont:

$$Q_{MCP} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^l \int_{t_n}^t (dH^s) dx dy = \frac{1}{L} \sum_j \sum_i [(H_j^s)^t - (H_j^s)^{t_n}] \Delta x_i \Delta y_j \quad (4.8)$$

$$Q_p = \frac{1}{A} \left\{ [CV]_{p1} (\bar{T}_{p1}^t - \bar{T}_{p1}^{t_n}) + [CV]_{p2} (\bar{T}_{p2}^t - \bar{T}_{p2}^{t_n}) \right\} \quad (4.9)$$

où  $L$  est la longueur de l'élément dans la direction  $y$ , figure 4.1, et  $\bar{T}_{p1}$  et  $\bar{T}_{p2}$  sont respectivement les moyennes des températures des plaques chauffée et libre. La chaleur sensible stockée dans l'élément ( $Q_{sens}$ ) est:

$$Q_{sens} = Q_{MCP} + Q_p \quad (4.10)$$

**Chaleur latente cumulative:** C'est la chaleur latente de fusion/solidification du MCP ( $Q_{lat}$ ):

$$Q_{lat} = \frac{\delta H}{L} \int_0^L \int_0^l \left( \int_{t_n}^t d\epsilon_i \right) dx dy = \frac{\delta H}{L} \sum_j \sum_i (\epsilon_i)^t \Delta x_i \Delta y_j \quad (4.11)$$

**Chaleur échangée cumulative:** C'est la chaleur échangée avec l'environnement par radiation et par convection ( $Q_{ech}$ )

$$Q_{ech} = \int_{t_n}^t h_e (\bar{T}_{p2} - T_a) dt = \sum_k h_e (\bar{T}_{p2}^k - T_a) \Delta t_k \quad (4.12)$$

Le coefficient de radiation est donné par:

$$h_r = \sigma \epsilon_{p2} (\bar{T}_{p2}^2 + T_a^2) (\bar{T}_{p2} + T_a) \quad (4.13)$$

où  $\sigma$  est la constante de radiation de Stefan-Boltzmann et  $\epsilon_{p2}$  est l'émissivité de la surface externe de la plaque P2. Le coefficient de convection naturelle est estimé par la corrélation suivante:

$$h_c L^* / k_{air} = C_h Ra_L^{1/4} \quad (4.14)$$

La constante  $C_h$  est déterminée expérimentalement. La longueur caractéristique ( $L^*$ ) est égale à la hauteur de l'élément lorsqu'il est en position verticale ( $L^* = L$ ) et égale au rapport de la section chauffée sur son périmètre lorsque l'élément est en position horizontale.

**Chaleur fournie cumulative:** C'est la chaleur dissipée sous forme de Joule dans les éléments chauffants ( $Q_e$ ):

$$Q_e = \frac{1}{A} \int_{t_n}^t E dt = e (t - t_n) \quad (4.15)$$

**Chaleur perdue cumulative:** C'est la chaleur perdue à travers l'isolation ( $Q_{pertes}$ ):

$$Q_{pertes} = \int_{t_n}^t \frac{1}{R} (\bar{T}_{p1} - T_a) dt \quad (4.16)$$

Les chaleurs sensible et latente représentent la chaleur stockée dans l'élément. La chaleur fournie cumulative peut être estimée par une autre manière en considérant un bilan thermique global de l'élément:

$$Q_e^* = Q_{sens} + Q_{lat} + Q_{ech} + Q_{pertes} \quad (4.17)$$

Cette équation (4.17) sert à la détermination du coefficient  $C_h$ . Ce coefficient est choisie de sorte que  $Q_e^* \approx Q_e$ .

#### 4.2.6 Analyse des résultats

Les simulations expérimentales sont obtenues pour deux valeurs de la puissance électrique ( $E = 80 \pm 2$  W et  $120 \pm 2$  W) et pour les deux positions horizontale et verticale. Le MCP est chargé et déchargé en alternance dans deux jours consécutifs entre deux limites de température:  $T_{\text{inf}} = 35$  °C et  $T_{\text{sup}} = 50$  °C. La fréquence d'acquisition est fixée à 400 secondes. Les simulations numériques sont obtenues avec un maillage non uniforme de 10 noeuds. La grille est raffinée au voisinage de la plaque chauffante ( $x = 0$ ). Le pas de temps est fixé à  $\Delta t = 6$  min.

##### 4.2.6.1 Élément horizontal

La figure 4.4 présente les isothermes expérimentales dans le MCP correspondant au premier cycle de charge-décharge. La puissance électrique est fixée à: (a)  $E = 80$  W, et (b)  $E = 120$  W. La figure montre que les isothermes sont pratiquement parallèles à la plaque chauffée dans la limite de précision des données expérimentales ( $\Delta T = \pm 0.5$  °C), indiquant que la conduction dans le MCP est unidimensionnelle. Cependant, un échauffement par l'extrémité  $y = 0$  provoque une légère détérioration des isothermes dans cette région, dû au fait que la plaque en cuivre du bout du bas agit comme une ailette isotherme à la température de la plaque chauffée. La fusion du MCP s'achève en premier dans la région inférieure de l'unité, et la convection naturelle dans la phase liquide semble-elle très faible.

Figure 4.5 montre la variation cyclique de température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour une puissance  $E = 80$  W (ou  $e = 702$  W/m<sup>2</sup>). Plusieurs cycles sont obtenus dans deux jours de simulation. La solution numérique (lignes discontinues) est obtenue pour  $C_h = 0.65$ ,  $C_w = 0.05$ ,  $n = 0.25$  et  $m = 0.7$ . Le coefficient  $C_h$  est choisi de sorte que la chaleur fournie



estimée est égale à la chaleur fournie ( $Q_e^* \approx Q_e$ ) alors que le coefficient  $C_w$  est choisi de telle sorte que les valeurs numériques s'approchent des valeurs expérimentales. La figure montre aussi que, durant le cycle de charge, la température de la plaque chauffée augmente plus rapidement alors que, durant le cycle de décharge, elle diminue plus rapidement jusqu'à ce qu'elle atteigne la température de l'interface liquide/zone pâteuse ( $T_2$ ); l'élément est en train de décharger sa chaleur sensible stockée. Toutefois, lorsque l'élément est en train de décharger sa chaleur latente, la température de la plaque chauffée diminue plus lentement dans la plage de solidification. Noter que la plage de fusion/solidification varie de 40 à 45 °C. Le surchauffe du liquide nécessaire pour fusionner toute la masse de paraffine avec cette puissance est de 23°C au-dessus de la température de fusion théorique ( $T_f = 47^\circ\text{C}$ ). Les courbes obtenues numériquement sont en accord raisonnable avec celles obtenues expérimentalement. Cependant, le temps de charge obtenue numériquement est plus court, dû aux plusieurs facteurs qui ne sont pas tenus compte dans la simulation numérique tels que: (1) il y a une certaine quantité d'énergie emmagasinée dans l'isolation et dans le support en bois, et (2) une certaine quantité d'énergie absorbée par la masse de MCP en excès. Il convient de mentionner que le régime périodique pour lequel les cycles de charge-décharge se répètent périodiquement est atteint juste après le premier cycle avec une durée de charge de 3.37 heures et une durée de décharge de 5.32 heures. L'élément peut être chargé et déchargé jusqu'à deux fois par jour.

La figure 4.6 montre aussi la variation cyclique de température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour une puissance  $E = 120 \text{ W}$  (ou  $e = 1053 \text{ W/m}^2$ ). La solution numérique est obtenue pour  $C_h = 0.7$ ,  $C_w = 0.05$ ,  $n = 0.25$  et  $m = 0.6$ . Un accord raisonnable entre les résultats numériques et expérimentaux est obtenu. L'élément peut être chargé jusqu'à trois fois par jour avec une durée de charge de 2.07 heures et une durée de décharge de 5.84 heures. Le surchauffe du liquide augmente avec l'augmentation de la puissance électrique fournie. Pour  $E = 120 \text{ W}$ , le surchauffe du liquide est 29 °C. Le régime périodique est atteint juste après le premier cycle. Il convient de mentionner que les paramètres choisis expérimentalement ( $C_h$ ,  $C_w$ ,  $n$  et  $m$ ) restent pratiquement constants pour l'élément horizontal.

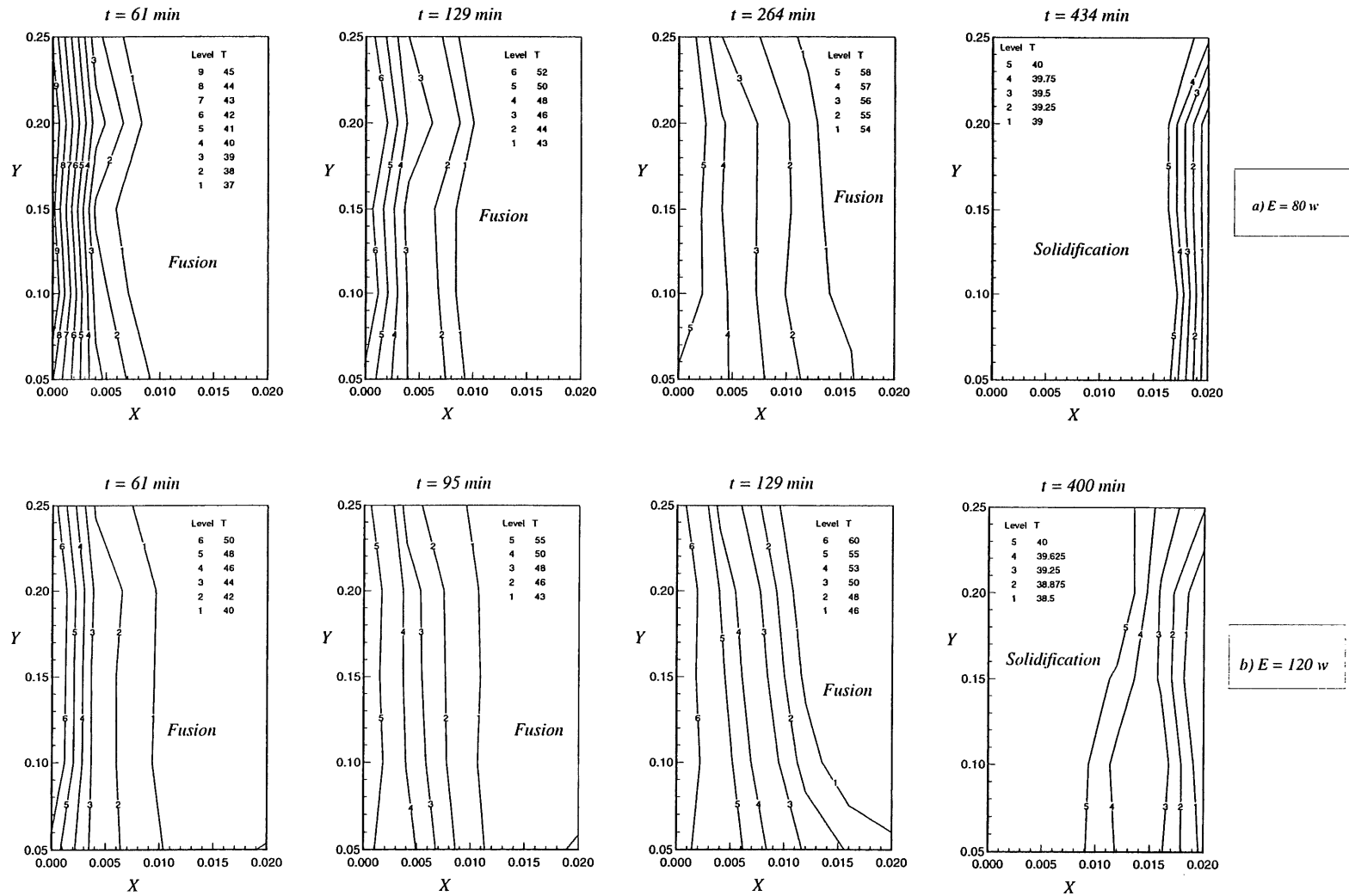


Figure 4.4 Isothermes expérimentales dans le MCP (Élément horizontal)

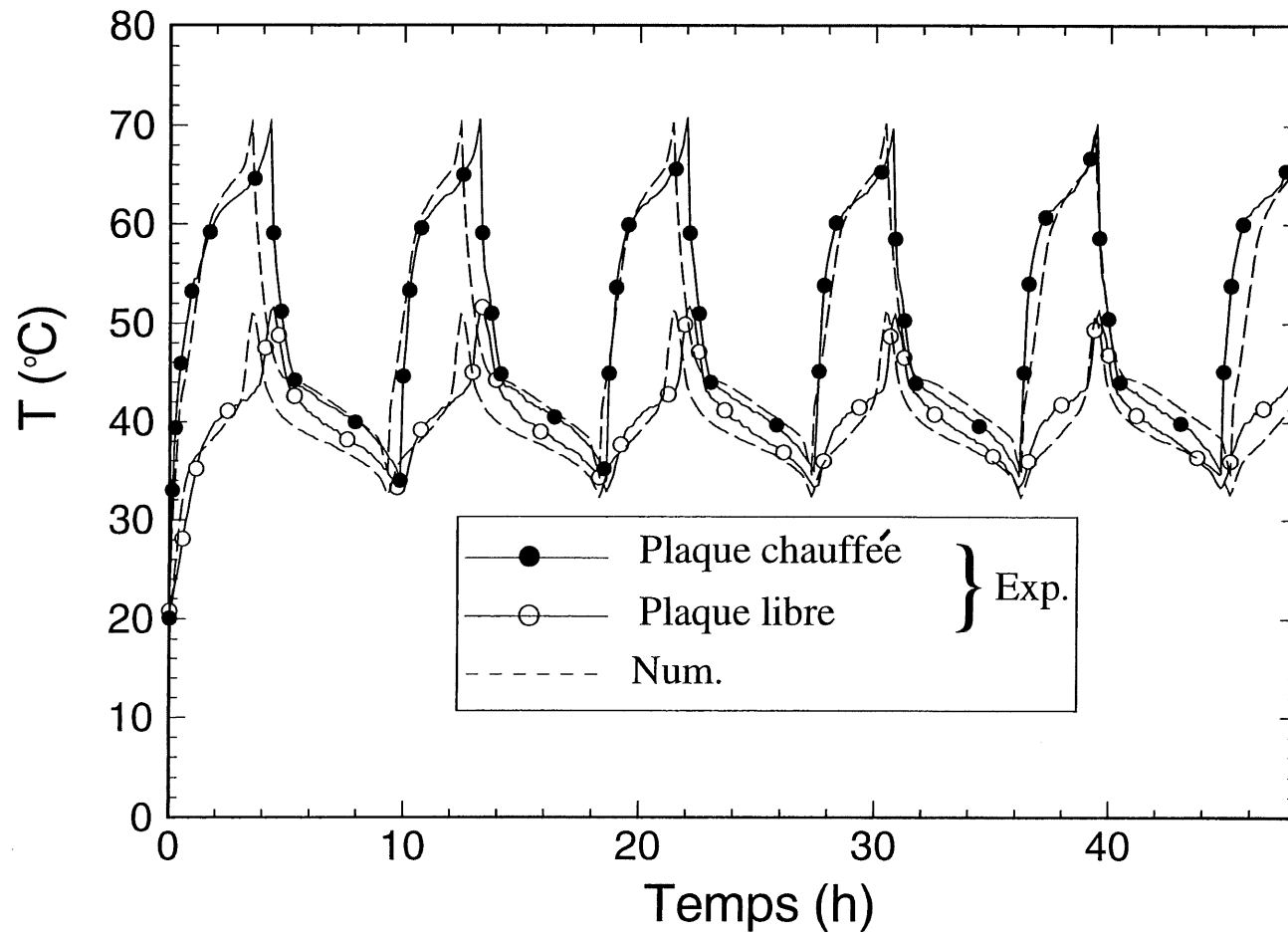


Figure 4.5 Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour  $E = 80 \text{ W}$  et  $T_a = 21.2 \text{ }^\circ\text{C}$  (Élément horizontal).

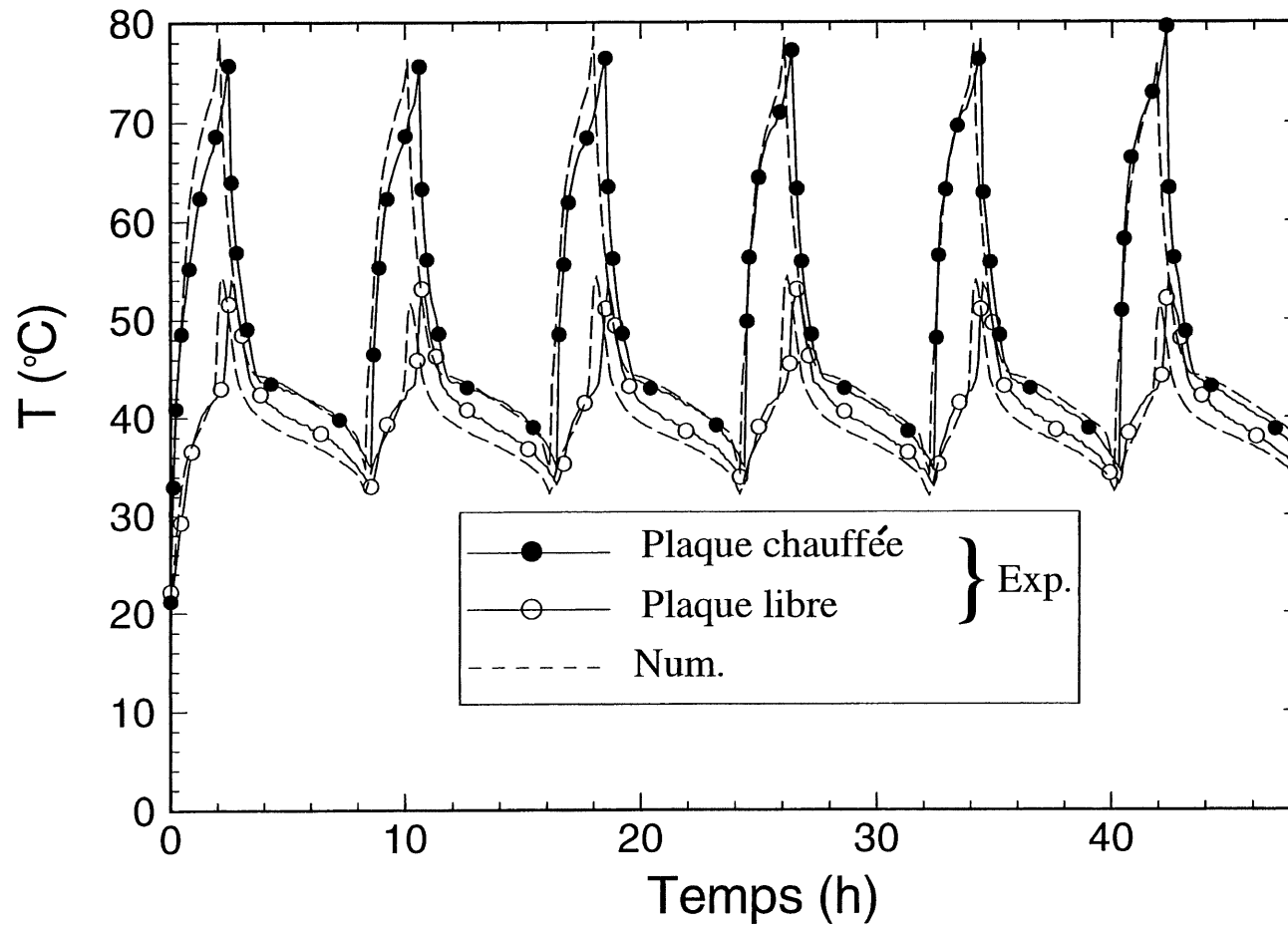


Figure 4.6 Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour  $E = 120 \text{ W}$  et  $T_a = 22.0 \text{ °C}$  (Élément horizontal).

Les figures 4.7 et 4.8 présentent respectivement les chaleurs cumulatives transférées durant les cycles de charge et de décharge pour  $E = 80\text{W}$  et  $E = 120\text{W}$ . Il est clair que le régime périodique est atteint juste après le premier cycle. Cependant, l'énergie fournie ne reste pas la même d'un cycle à un autre dans le régime périodique. Cela est dû au fait que l'instrument ON/OFF de régulation, qui a une marge de température d'opération pour altérer du mode ON au mode OFF, dépend lui-même de la fréquence d'acquisition et du taux d'augmentation de température par rapport au temps. Par conséquent, un comportement oscillatoire autour de la température spécifiée résultera dans le flux de chaleur appliqué sur la plaque chauffée. Durant le premier cycle, i.e lorsque le MCP est initialement à la température ambiante, la chaleur fournie cumulative est plus élevée que celles pour les cycles subséquents. Noter que les valeurs estimées de  $Q_e^*$  sont en bon accord avec les valeurs de  $Q_e$  dans la marge de précision des données expérimentales, excepté pour le premier cycle. Cela est dû au fait que, dans le premier cycle, il y a une certaine quantité d'énergie stockée dans le matériau entourant l'unité (isolation, support et la masse de MCP en excès) durant le cycle de charge. Par contre, cette énergie est récupérée dans les cycles subséquents. L'élément stocke de la chaleur sous forme de chaleur sensible ainsi que sous forme de chaleur latente. La chaleur sensible stockée représente jusqu'à 25% de la chaleur stockée. Au début du cycle de décharge, l'élément décharge sa chaleur sensible dans une durée plus courte (de 0.58 à 1.04 h) en comparaison avec la durée de la chaleur latente (4.8 h). Il convient de signaler que l'unité peut être chargée jusqu'à deux à trois fois par jour avec une durée de charge plus courte que la durée de décharge. Cela est plus pratique, car les périodes de pointe électrique se produisent deux fois par jour, durant la matinée et durant le soir avec une durée de 4 à 7 heures. L'unité peut être alors chargée durant la nuit pour qu'elle soit déchargée le matin et chargée une autre fois durant l'après midi pour qu'elle soit déchargée le soir.

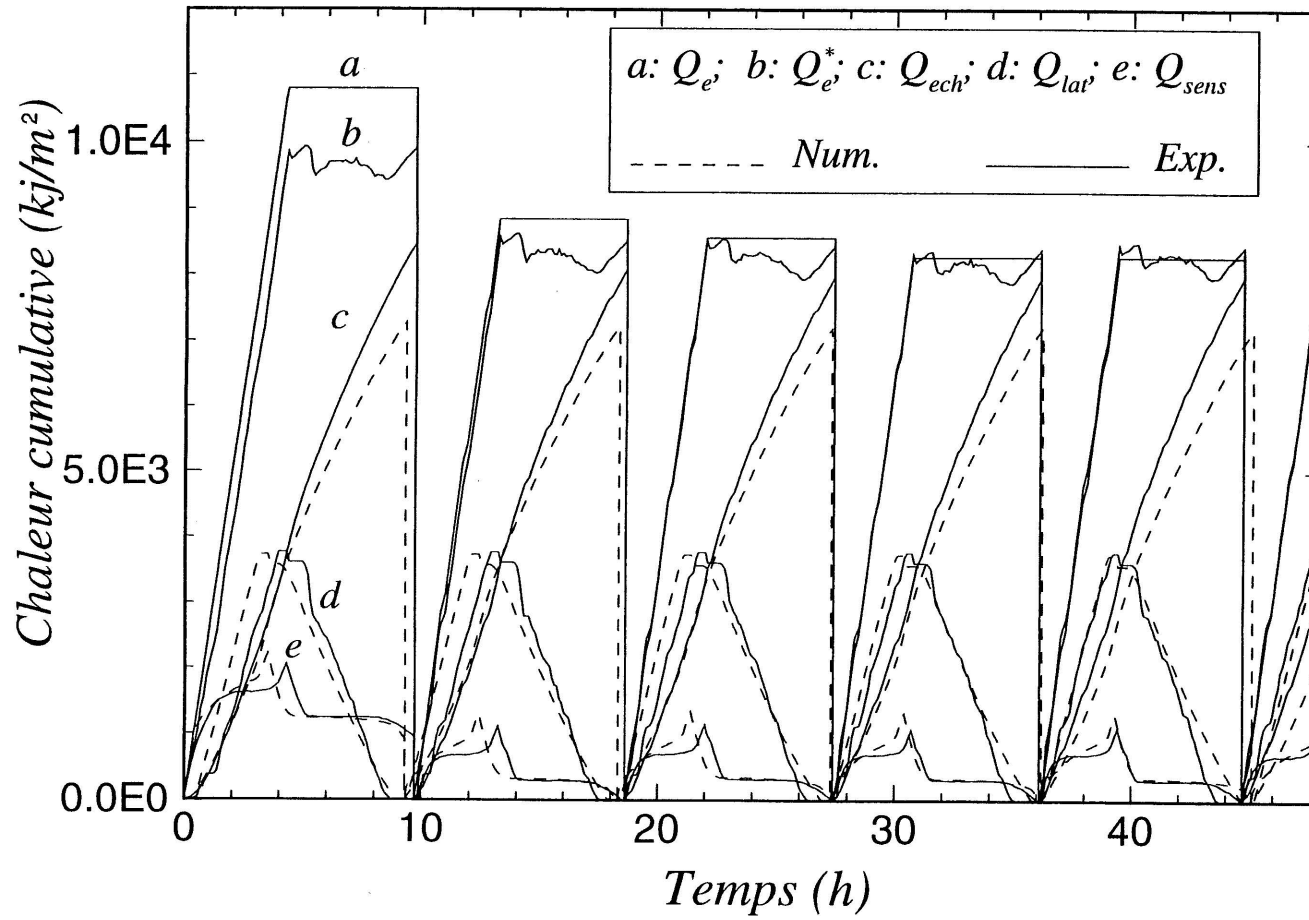


Figure 4.7 Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour  $E = 80 \text{ W}$  (Élément horizontal).

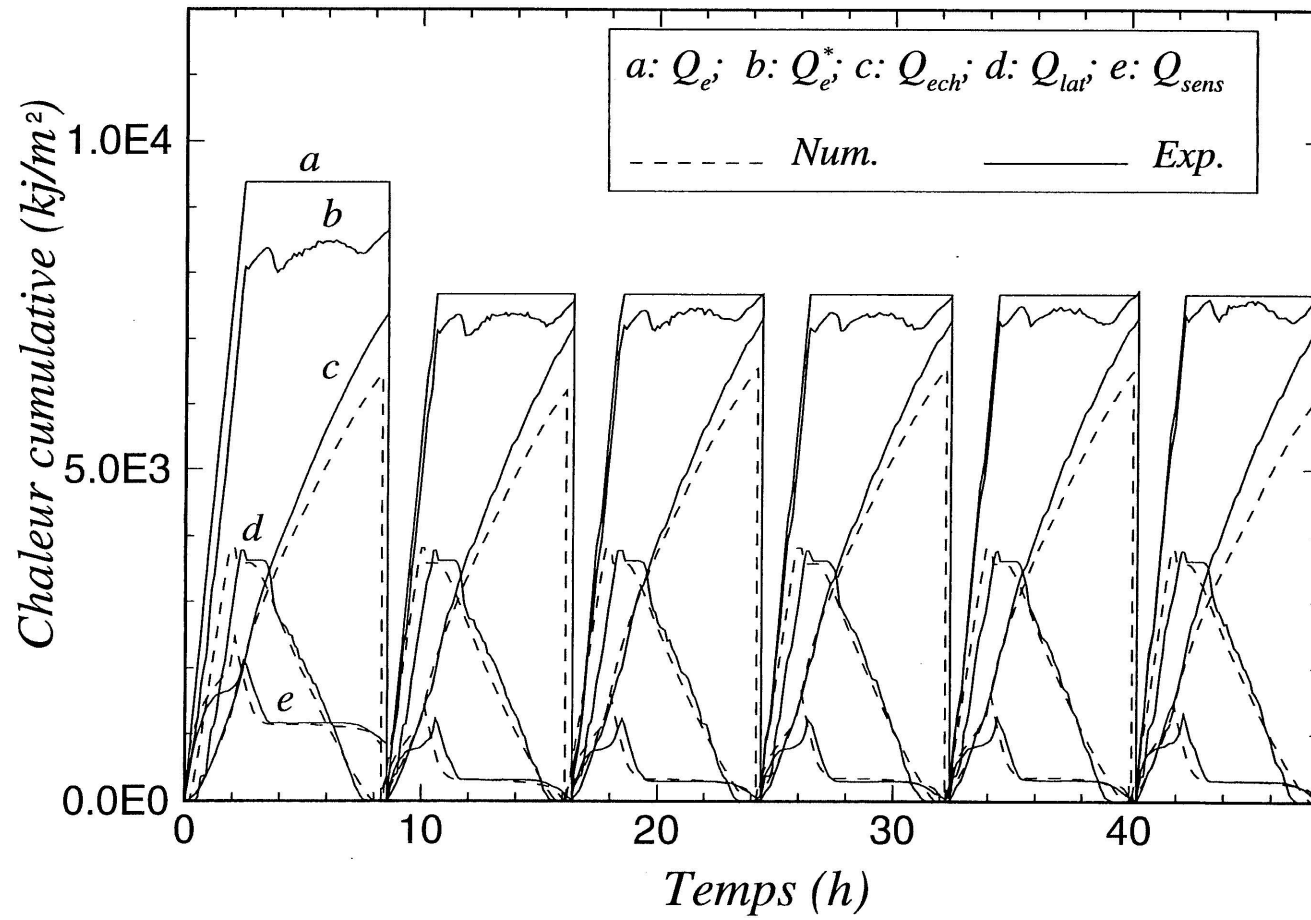


Figure 4.8 Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et la décharge cycliques pour  $E = 120 \text{ W}$  (Élément horizontal).

À la lumière de ces résultats relatifs à l'élément horizontal, on peut conclure que la convection naturelle dans la phase liquide est relativement faible (comme manifestée dans les paramètres  $C_w$ ,  $n$  et  $m$ ), et la fusion et solidification se font essentiellement par conduction. Cependant, la convection naturelle à l'extérieure de l'élément est aussi significative que la radiation émise par la surface libre. Ces dernières contribuent à augmenter la durée de charge et à diminuer la durée de décharge. En outre, la durée de charge diminue lorsque la puissance électrique augmente alors que la durée de décharge reste pratiquement inchangée. En effet, pour  $E = 80 \text{ W}$  et  $120 \text{ W}$ , Les durées de charge sont respectivement  $3.37 \text{ h}$  et  $2.07 \text{ h}$  alors que les durées de décharge varient respectivement de  $5.32 \text{ h}$  à  $5.84 \text{ h}$  (noter que la température ambiante varie d'une expérience à l'autre). De plus, le surchauffe du liquide augmente avec l'augmentation de la puissance électrique, et la chaleur stockée dans l'élément, cependant, n'augmente pas de façon significative.

#### 4.2.6.2 Élément vertical

La figure 4.9 montre les isothermes obtenues expérimentalement dans le MCP correspondant au premier cycle de charge-décharge pour les puissances: (a)  $E = 80 \text{ W}$  et (b)  $E = 120 \text{ W}$ . Il est clairement observé qu'au début du cycle de charge les isothermes sont pratiquement parallèles à la plaque chauffée; le transfert de chaleur dans le MCP est unidimensionnel et se fait par conduction pure. Aussitôt que l'épaisseur du liquide du MCP commence à s'élargir, la convection naturelle dans la phase liquide prend naissance et devient de plus en plus prononcée, notamment dans la partie supérieure de l'unité. Les isothermes dans cette région ne sont plus verticales. Par contre, dans la partie inférieure de l'unité la convection naturelle est réduite et les isothermes sont verticales. La fusion du MCP s'achève en premier dans la partie supérieure de l'unité, et le liquide dans cette région devient stratifié -les isothermes sont horizontales. Ce phénomène de fusion dans une enceinte verticale a été reporté par plusieurs auteurs, parmi eux, Lacroix et Arsenault (1993), Zhang et Bejan (1989), et Okada (1984).



La figure 4.10 présente la variation cyclique de température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour une puissance  $E = 80$  W. La solution numérique est obtenue pour  $C_h = 1.25$ ,  $C_w = 0.13$ ,  $n = 0.25$  et  $m = 0.9$ . Les résultats numériques sont en accord raisonnable avec l'expérience. Toutefois, les courbes numériques obtenues sont en déphasage négatif par rapport aux courbes expérimentales. Ce déphasage est attribué aux différents facteurs cités auparavant et qui n'ont pas été tenus compte dans la modélisation numérique. Contrairement au cas d'un élément horizontal précédent (figure 4.5), durant le cycle de charge la température de la plaque chauffée augmente plus rapidement puis elle s'étale sur un plateau jusqu'à ce que la fusion du MCP est achevée, puis elle croît de nouveau d'une manière rapide. Le surchauffe du liquide est ainsi réduit jusqu'à  $13^\circ\text{C}$ . Trois cycles de charge-décharge sont obtenus dans 26 h de simulation. Le régime périodique est atteint comme d'habitude après le premier cycle avec une durée de charge de 3.50 h et une durée de décharge de 5.12 h. Il est intéressant de signaler que, bien que le problème considéré soit bidimensionnel et non linéaire, le modèle unidimensionnel proposé prédit de manière raisonnable le champ thermique dans le MCP, grâce à l'incorporation de la conductivité thermique équivalente (équation 4.7) dans la modélisation numérique. Le coefficient  $C_w$  et l'exposant  $n$  mesurent l'intensité de la convection naturelle vis-à-vis de la conduction lorsque toute l'enceinte est remplie du liquide alors que l'exposant ( $m$ ) tient compte de l'épaisseur de la couche liquide formée lors de la fusion, et par conséquent l'intensité de la convection naturelle est réduite. L'augmentation des premiers paramètres ( $C_w$  et  $n$ ) provoque une réduction de la température maximale dans le liquide du MCP alors que l'augmentation du paramètre  $m$  provoque une stratification de température maximale durant la fusion.

La figure 4.11 illustre la variation cyclique de température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour une puissance  $E = 120$  W. La solution numérique est obtenue pour  $C_h = 1.3$ ,  $C_w = 0.12$ ,  $n = 0.25$  et  $m = 1.1$ . Un accord excellent entre les deux résultats est observé, bien qu'il y ait une légère déphasage des résultats numériques. Encore une fois, le régime périodique est atteint dès le deuxième cycle, et l'élément peut être chargé jusqu'à sept fois en 48 h avec une durée de charge de 1.69 h et une durée de décharge de 5.12 h. Le surchauffe du liquide est légèrement

augmenté de  $17^{\circ}\text{C}$ . Il convient de noter que les paramètres de l'expérience ( $C_h$ ,  $C_w$ ,  $n$  et  $m$ ) varient légèrement avec la puissance fournie pour l'élément vertical.

Les figures 4.12 et 4.13 présentent respectivement les chaleurs cumulatives transférées durant les cycles de fusion et de solidification pour les puissances  $E = 80\text{W}$  et  $E = 120\text{W}$ . Il est clairement vu que l'énergie fournie reste constante d'un cycle à l'autre dans le régime périodique, contrairement au cas horizontal considéré auparavant. Cela est dû au fait que, durant la fusion la température dans le MCP varie très lentement (figures 4.10 et 4.11) et par conséquent la marge de température de fonctionnement du régulateur ON/OFF est plus réduite. L'augmentation de la puissance fournie provoque une baisse importante de la durée de charge. La durée de décharge reste cependant inchangée. Vu que la température maximale dans le MCP se trouve réduite par la convection naturelle dans le liquide, la chaleur sensible stockée est ainsi réduite jusqu'à 20% de la chaleur stockée.

À la lumière de ces résultats concernant l'élément vertical, on conclut que la fusion du MCP se fait à la fois par conduction et par convection naturelle. Cette dernière provoque une baisse importante du temps de charge et de la température maximale dans le MCP. Le temps de décharge, cependant, reste pratiquement inchangé, car la convection naturelle est restreinte durant la solidification. De plus, l'augmentation de la puissance fournie de 50% provoque une légère surchauffe du liquide et une diminution du temps de charge alors qu'elle n'a aucun effet sur le temps de décharge.

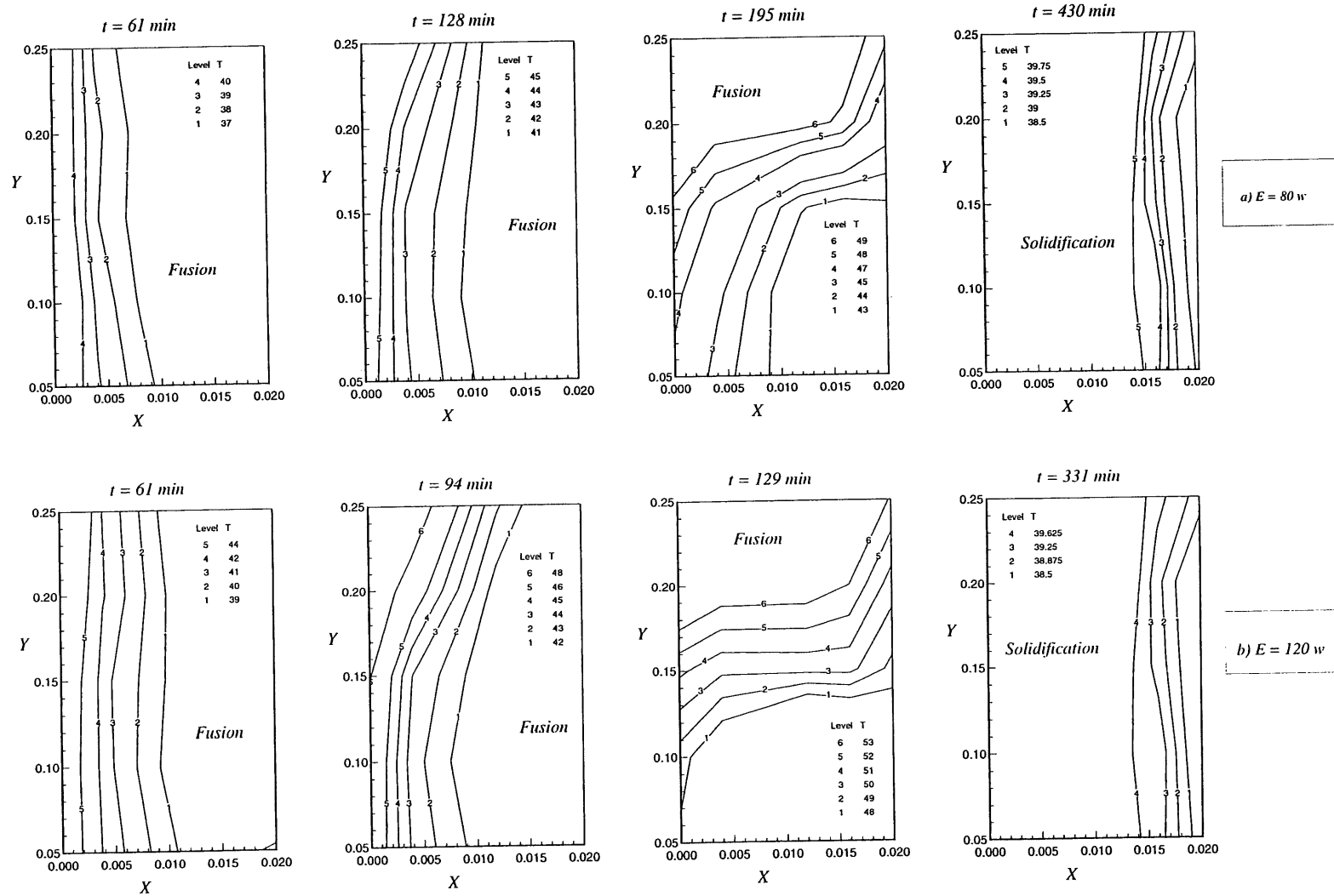


Figure 4.9 Isothermes expérimentales dans le MCP (Élément vertical).

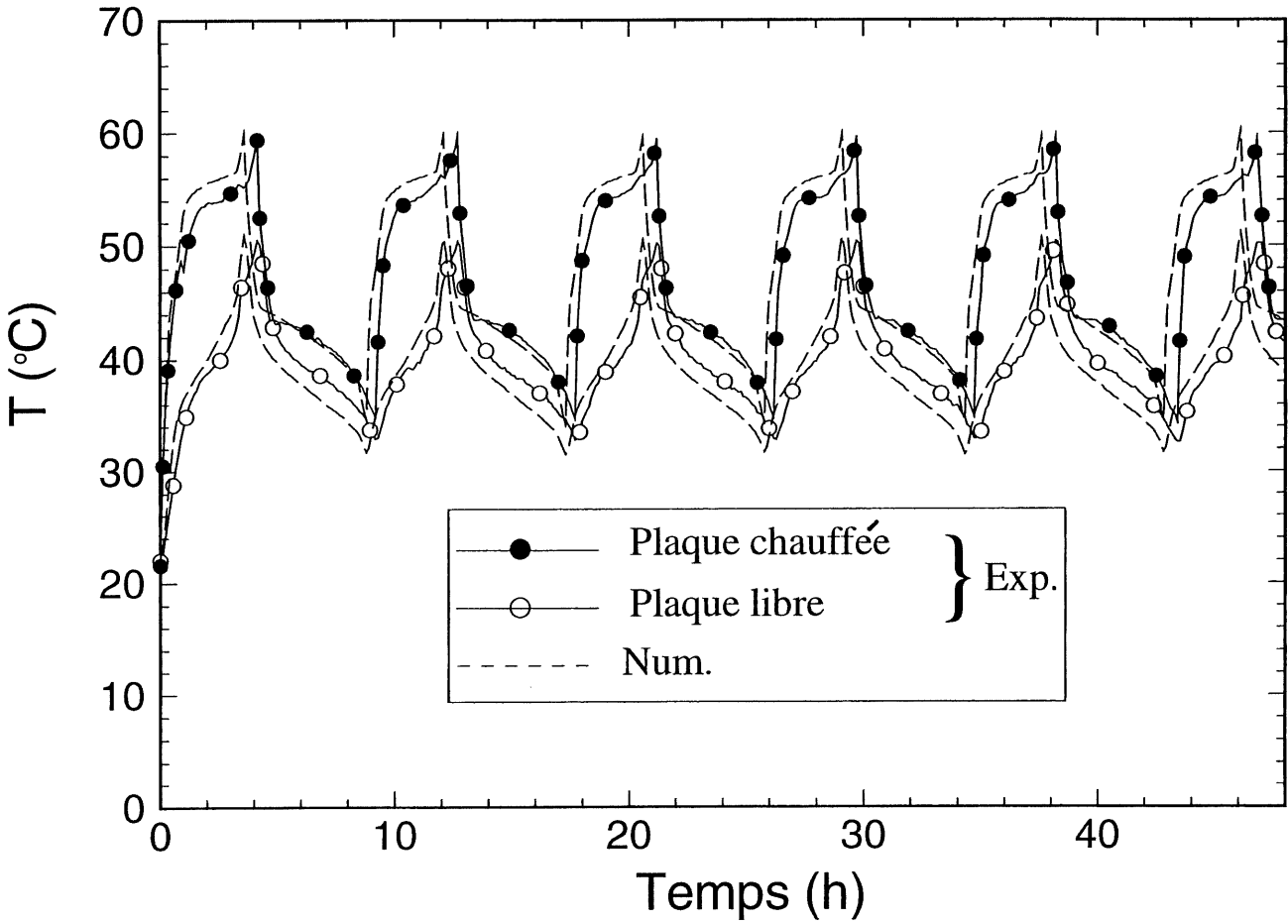


Figure 4.10 Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour  $E = 80 \text{ W}$  et  $T_a = 22.2 \text{ °C}$  (Élément vertical).

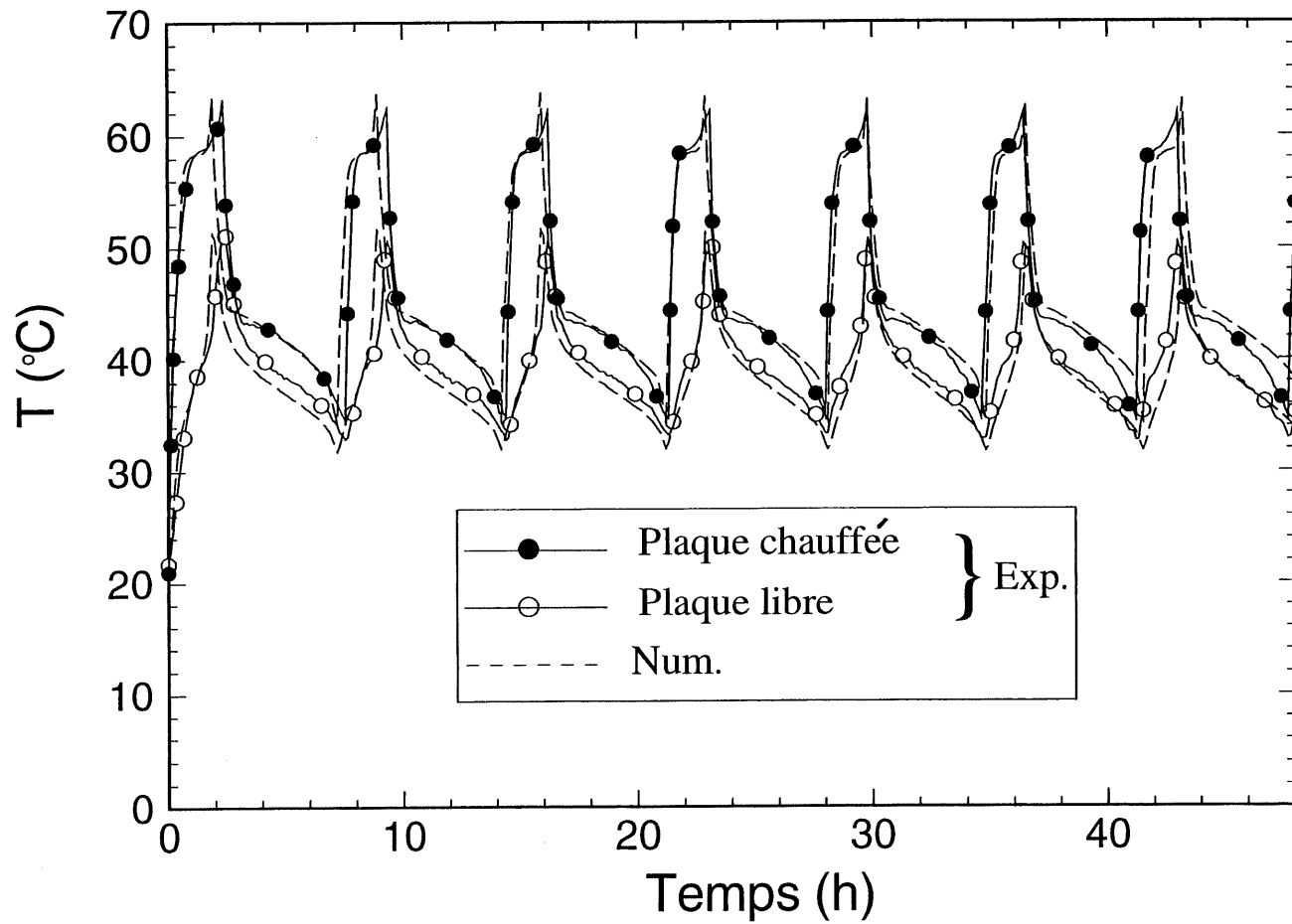


Figure 4.11 Variation cyclique de la température au milieu des surfaces internes des deux plaques (niveau C) pour  $E = 120 \text{ W}$  et  $T_a = 22.1 \text{ }^\circ\text{C}$  (Élément vertical).

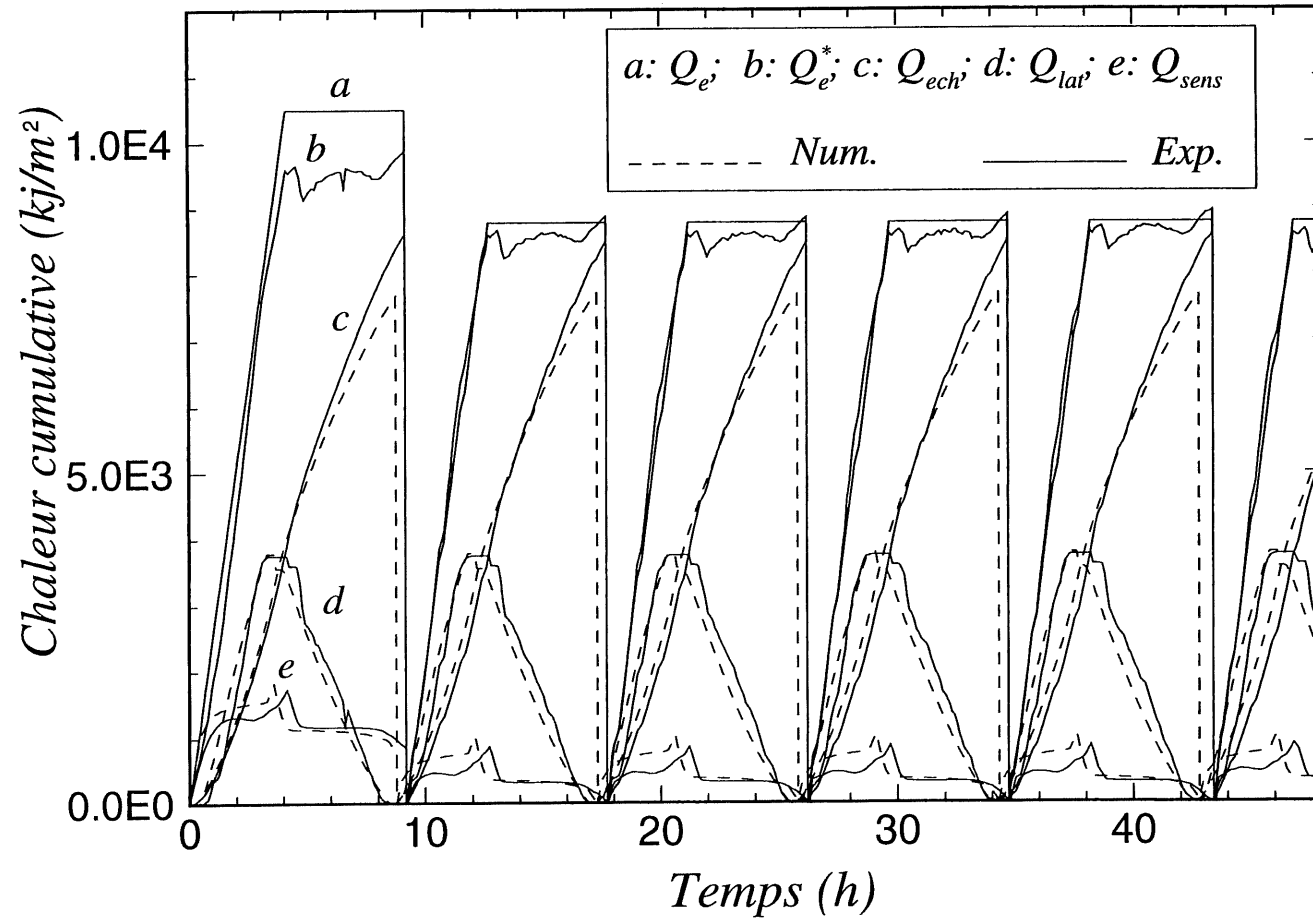


Figure 4.12 Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour  $E = 80 \text{ W}$  (Élément vertical).

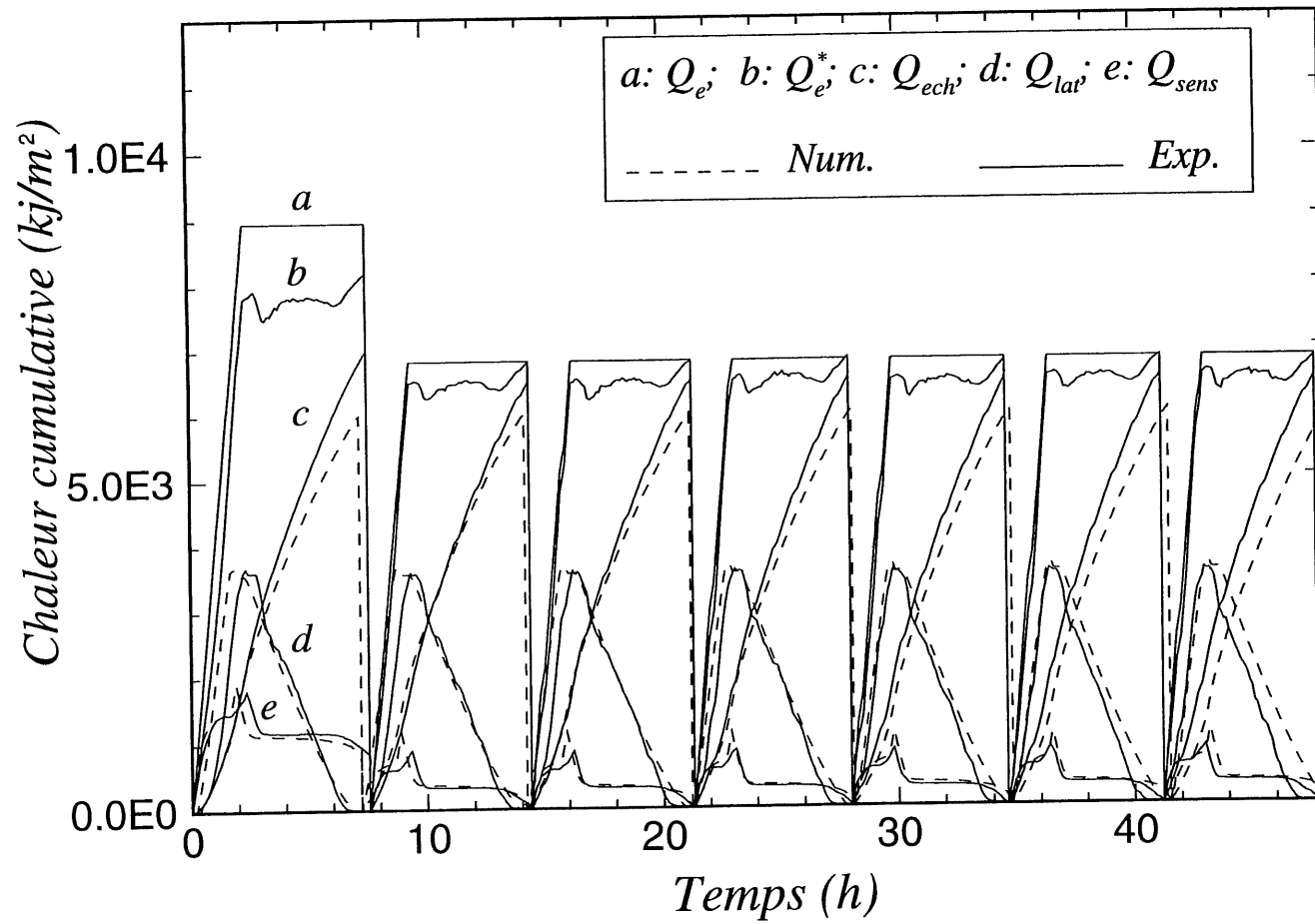


Figure 4.13 Chaleurs cumulatives transférées durant la charge et décharge cycliques pour  $E = 120 \text{ W}$  (Élément vertical).

### 4.2.6.3 Puissance émise par l'élément

Dans le chauffage résidentiel, les besoins thermiques d'un espace et le taux de décharge d'énergie sont primordiaux pour la conception de l'unité de chauffage et pour maintenir une température confortable dans la pièce à chauffer. Le taux de décharge d'énergie pour l'élément de stockage étudié est représenté par la puissance émise par la surface extérieure de la plaque libre. La figure 4.14 illustre la puissance émise par unité de surface d'échange pour une puissance fournie  $E = 120\text{W}$  (ou  $e = 1053\text{ W/m}^2$ ) et pour les deux éléments horizontal et vertical. On remarque que la puissance émise durant le cycle de charge augmente rapidement jusqu'à ce qu'elle atteigne une valeur maximale correspondant à la fin de cycle de charge. Par contre, durant le cycle de décharge, elle diminue rapidement lorsque l'élément est en train de décharger sa chaleur sensible, puis elle décroît lentement lorsque l'élément est en train de décharger sa chaleur latente. Il est également observé que la puissance émise par l'élément vertical est légèrement supérieure à celle émise par l'élément horizontal. Toutefois, l'élément horizontal décharge sa chaleur stockée dans une durée plus longue. Cette variation de puissance en fonction du temps rend difficile de maintenir une température confortable dans la pièce et d'estimer la chaleur fournie par l'élément. Cependant, puisque l'élément de stockage en considération est conçu pour fournir assez de puissance tant pendant la charge que pendant la décharge, il est pratique de considérer les valeurs moyennes de la puissance émise dans un cycle complet. À cet effet, on définit trois sortes de puissances moyennes ou flux moyens: (1) flux moyen de charge ( $P_{\text{moy}}^c$ ), (2) flux moyen de décharge ( $P_{\text{moy}}^d$ ) et (3) flux moyen cyclique ( $P_{\text{moy}}$ ), défini dans un cycle entier de charge-décharge. Pour une puissance fournie  $E = 120\text{W}$  ( $e = 1053\text{W/m}^2$ ), on trouve pour l'élément horizontal les valeurs suivantes:  $P_{\text{moy}}^c = 270\text{ W/m}^2$ ,  $P_{\text{moy}}^d = 250\text{ W/m}^2$ , et  $P_{\text{moy}} = 255\text{ W/m}^2$ . Et pour l'élément vertical, on trouve:  $P_{\text{moy}}^c = 295\text{ W/m}^2$ ,  $P_{\text{moy}}^d = 254\text{ W/m}^2$ , et  $P_{\text{moy}} = 264\text{ W/m}^2$ . Cela veut dire que, pour avoir une puissance de  $1000\text{W}$  (valeur typique pour le chauffage domestique), il nous faut une surface d'échange de  $4\text{ m}^2$ .



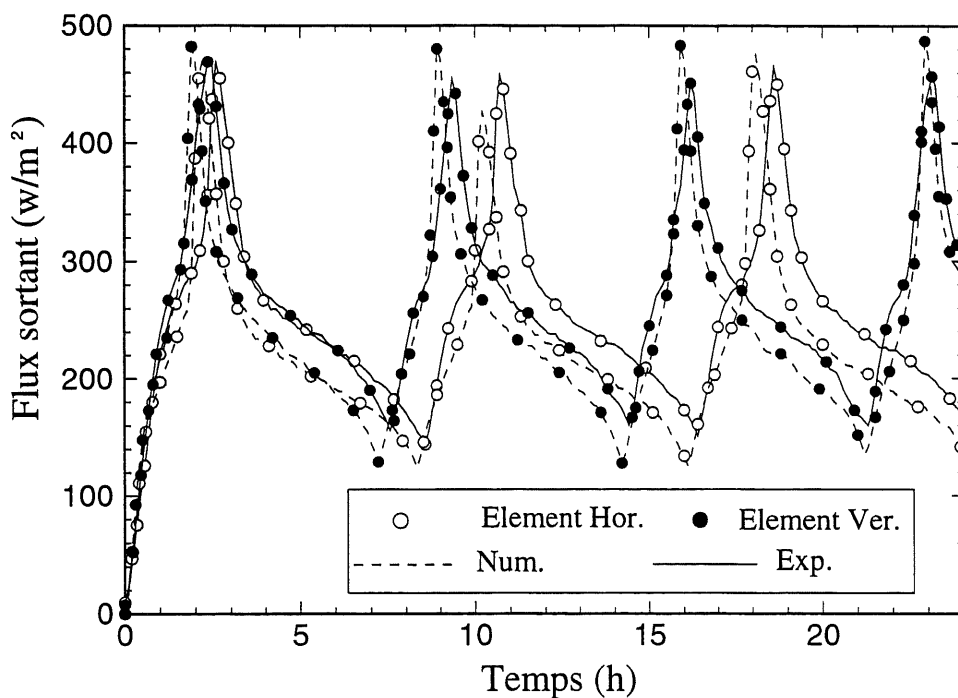


Figure 4.14 Puissance émise par unité de surface pour  $e = 1053 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ .

### 4.3 ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

Cette partie est consacrée principalement à l'étude des effets de l'épaisseur du MCP et de la puissance fournie sur les performances thermiques de l'élément afin de trouver les valeurs optimales de ces paramètres correspondant à un état de fonctionnement donné (durée de la pointe électrique et sa fréquence journalière, qui dépendent d'une région à l'autre). Cette étude sera finalement couronnée par des corrélations pratiques visant à estimer les temps de charge et de décharge en fonction de la puissance fournie et l'épaisseur du MCP sans recours à des simulations numériques. À la fin, on examinera les effets des temps de charge et décharge sur le comportement cyclique de l'élément, qui seront très utiles si le contrôle de fonctionnement de l'élément est basé sur le temps. Par la suite, dans toutes les simulations numériques, on prend la température ambiante égale à  $21^\circ\text{C}$ .

### 4.3.1 Effet de l'épaisseur du MCP

Les figures 4.15 et 4.16 montrent respectivement la variation cyclique des températures des deux plaques pour les deux éléments horizontal et vertical. La puissance fournie est fixée à  $E = 80\text{W}$  ( $e = 702\text{ W/m}^2$ ) et l'épaisseur à  $l = 3\text{ cm}$ . Il est clairement observé qu'une augmentation de l'épaisseur de 50% provoque une augmentation de plus de 50% des temps de charge et de décharge. Pour l'élément horizontal, le temps de charge est de 4.21 h et le temps de décharge est de 8.71 h, formant un cycle de longueur 12.92 h. L'élément peut alors être chargé périodiquement deux fois sur une période de 25.84 h. Par contre, pour l'élément vertical, le temps de charge est de 4.33 h alors que le temps de décharge est de 7.21 h. Un cycle de 11.54 h de longueur est ainsi formé. Il est intéressant de noter que le surchauffe du liquide reste non affecté par l'augmentation de l'épaisseur (comparer les figures 4.5 et 4.10 avec les figures 4.15 et 4.16).

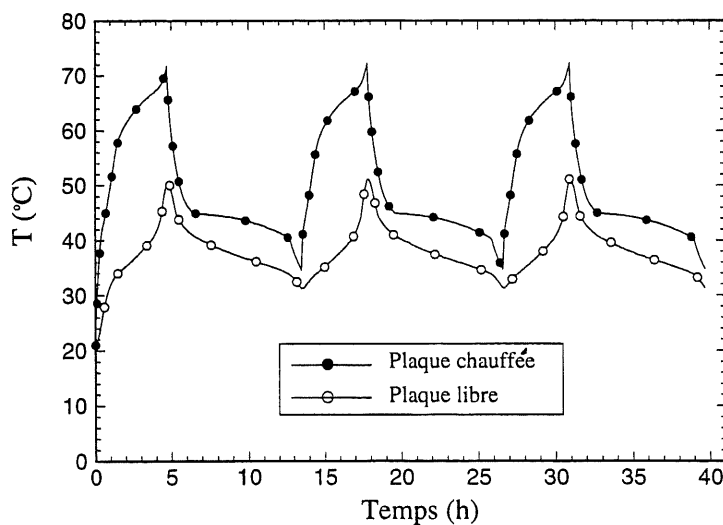


Figure 4.15 Variation cyclique des températures des deux plaques pour  $e = 702\text{ W/m}^2$  et  $l = 3\text{ cm}$  (élément horizontal).

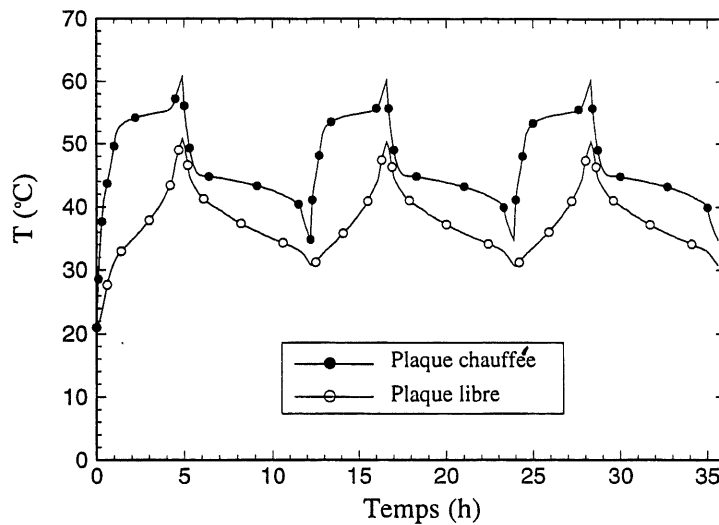


Figure 4.16 Variation cyclique des températures des deux plaques pour  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 3\text{cm}$  (élément vertical).

La figure 4.17 illustre la puissance émise par unité de surface (ou flux sortant) durant la charge et décharge cycliques pour une puissance fournie par unité de surface  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et une épaisseur  $l = 3 \text{ cm}$ . On remarque que la puissance émise par l'élément vertical est plus grande que celle émise par l'élément horizontal. Pour ce dernier, le flux moyen de charge est  $P_{\text{moy}}^c = 211 \text{ W/m}^2$  et celui de décharge est  $P_{\text{moy}}^d = 215 \text{ W/m}^2$ . Pour l'élément vertical, on trouve  $P_{\text{moy}}^c = 253 \text{ W/m}^2$  et  $P_{\text{moy}}^d = 247 \text{ W/m}^2$ . Les flux moyens de charge et de décharge restent pratiquement constants alors qu'ils varient avec la position de l'élément. Les flux moyens cycliques sont respectivement  $P_{\text{moy}} = 214 \text{ W/m}^2$  et  $250 \text{ W/m}^2$  pour les éléments horizontal et vertical. Toutefois, le flux moyen cyclique s'étend sur une période plus longue pour l'élément horizontal.

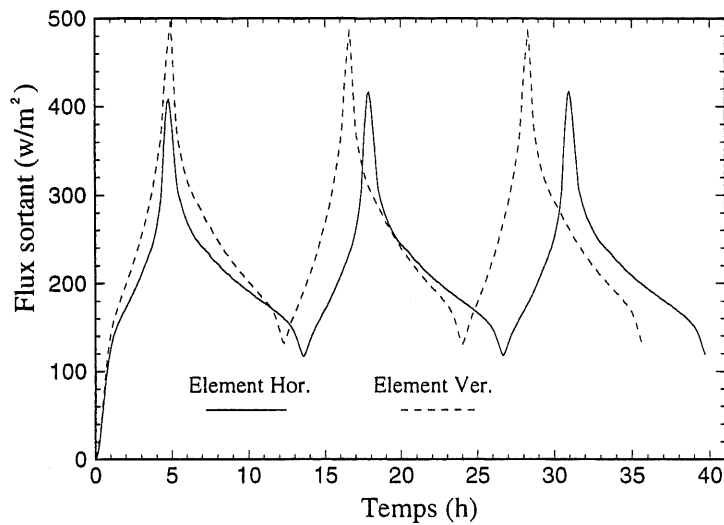


Figure 4.17 Puissance émise par unité de surface pour  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 3 \text{ cm}$ .

La figure 4.18 illustre la variation des temps de charge et de décharge en fonction de l'épaisseur du MCP pour une puissance fournie par unité de surface  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et pour les deux éléments horizontal et vertical. On remarque que le temps de charge pour l'élément vertical est légèrement supérieur à celui pour l'élément horizontal, dû au fait que l'échange de chaleur avec l'extérieur est plus grand pour l'élément vertical que pour l'élément horizontal ( $h_e^{\text{ver}} > h_e^{\text{hor}}$ ). Cependant, la tendance est inversée en ce qui concerne le temps de décharge.

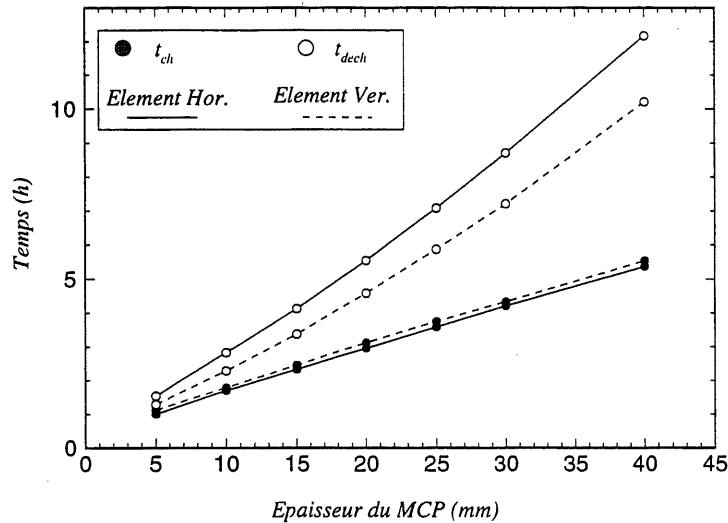


Figure 4.18 Effet de l'épaisseur du MCP sur les temps de charge et de décharge pour  $e = 702\text{W/m}^2$ .

### 4.3.2 EFFET DE LA PUISSANCE FOURNIE

La figure 4.19 illustre l'effet de l'augmentation de la puissance fournie par unité de surface sur les temps de charge et de décharge. L'épaisseur du MCP est fixée à 2 cm. On observe que le temps de décharge est pratiquement non affecté par la puissance fournie, dû au fait que l'augmentation de la puissance fournie affecte légèrement le champ thermique à l'intérieur du MCP et par conséquent la chaleur sensible stockée n'augmentera pas de façon significative. On observe également que le cycle de charge ne peut s'achever que lorsque la puissance fournie excède une certaine limite (noter que les courbes du temps de charge présentent des asymptotes). Cette limite correspond en fait au régime permanent pour lequel l'énergie fournie à l'élément est égale à l'énergie qui en sort, et la température supérieure de la plaque libre tend vers la limite spécifiée  $T_{sup}$ . Cette puissance limite se traduit par l'équation suivante:

$$e_0 = h_e \cdot (T_{sup} - T_a) \quad (4.17)$$

où le coefficient d'échange  $h_e$  est évalué à  $T_{sup}$ . Trois cas s'en émergent:

- ①  $e < e_0$  : le cycle de charge ne s'achèvera jamais ( $[T_{p2}]_{max} < T_{sup}$ );
- ②  $e \rightarrow e_0$  : le cycle de charge s'achève asymptotiquement, et  $[T_{p2}]_{max} \rightarrow T_{sup}$ . Le cycle de décharge ne sera jamais atteint;
- ③  $e > e_0$  : les cycles de charge et de décharge s'achèveront ensemble.

Il convient de noter que la valeur limite  $e_0$  est indépendante de l'épaisseur du MCP utilisé. Elle dépend, cependant, de la température supérieure spécifiée ( $T_{sup}$ ), de la température ambiante ( $T_a$ ) et du coefficient d'échange ( $h_e$ ) évalué à la température  $T_{sup}$ .

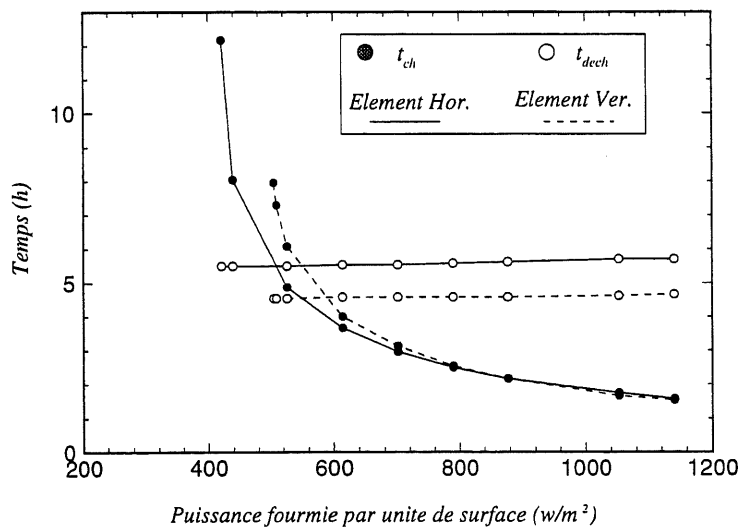


Figure 4.19 Effet de la puissance fournie par unité de surface sur les temps de charge et de décharge pour  $l = 2$  cm.

### 4.3.3 Estimation des temps de charge et de décharge

**Temps de charge:** Comme on a vu auparavant, le temps de charge dépend de l'épaisseur du MCP et de la puissance fournie. En s'inspirant des figures 4.18 et 4.19, on pose:

$$t_{ch} \propto \frac{l^a}{(e - e_0)^b} \quad (4.18)$$

où  $l$  est l'épaisseur du MCP. L'exposant  $a$  peut être déterminé par lissage des données de la figure 4.18. En effet, en utilisant la méthode des moindres carrés, on trouve  $a = 0.82025$ . De même, l'exposant  $b$  peut être déterminé par lissage des données de la figure 4.19. On trouve  $b = 0.55156$ . Pour déterminer la constante de proportionnalité de l'équation (4.18), on examine la variation graphique de la fonction  $t_{ch} = f(l^a e_0^{-b}/[e - e_0]^b)$ . Cette variation est montrée dans la figure 4.20. On voit clairement que tous les points sont pratiquement disposés sur une même droite de pente  $c = 46.71 \times 10^3$ . Le temps de charge est ainsi corrélé par la relation suivante:

$$t_{ch} = c \cdot \frac{e_0^{-b}}{(e - e_0)^b} \cdot l^a = 46.71 \times 10^3 \cdot \frac{e_0^{-0.55158}}{(e - e_0)^{0.55158}} \cdot l^{0.82025} \quad (4.19)$$

Dans l'équation (4.19), l'épaisseur  $l$  est en m,  $e$  en  $W/m^2$  et le temps en heures. La constante  $c$  peut dépendre en général des propriétés physiques du MCP utilisé.

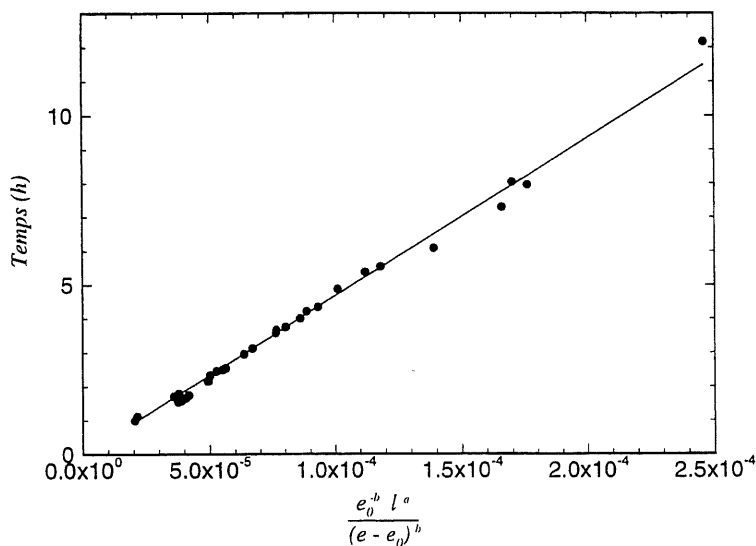


Figure 4.20 Variation du temps de charge en fonction de l'épaisseur du MCP et de la puissance fournie par unité de surface.

**Temps de décharge:** Le temps de décharge dépend essentiellement de l'épaisseur du MCP. Si on néglige la durée de décharge de la chaleur sensible stockée vis-à-vis de celle de la chaleur latente, le temps de décharge peut être évalué par la relation suivante:

$$t_{dech} = \frac{\rho L \cdot l}{h_{moy} \cdot (T_{moy} - T_a)} \quad (4.20)$$

où  $T_{moy}$  et  $h_{moy}$  sont respectivement la température de la plaque libre et le coefficient d'échange moyennés durant le cycle de décharge. On a:

$$T_{moy} = \frac{1}{t_{dech}} \int_0^{t_{dech}} T_{P2} dt \quad (4.21)$$

et

$$h_{moy} = \frac{1}{t_{dech}} \int_0^{t_{dech}} \frac{T_{P2} - T_a}{T_{moy} - T_a} h_e dt \approx h_e(T_{moy}) \quad (4.22)$$

Le temps de décharge varie linéairement avec l'épaisseur. Cependant, la chaleur sensible stockée ne peut être négligée (elle représente environ 25% de la chaleur totale stockée). Par conséquent, l'équation (4.20) ne prédit pas de façon précise le temps de décharge. On peut proposer une correction de la forme suivante:

$$t_{dech} = \frac{c'}{h_{moy}} l^d \quad (4.23)$$

Les paramètres  $c'$  et  $d$  peuvent être déterminés par la méthode des moindres carrés appliquée aux données de la figure 4.18. Si dans l'équation (4.23) le temps est exprimé en heures et l'épaisseur en mètre, on trouve  $c' = 5.23 \times 10^3$  et  $d = 1.093$ . Si l'équation (4.20) avait été utilisée, le coefficient  $c'$  prendrait la valeur suivante:



$$c' = \frac{\rho L / 3600}{T_{moy} - T_a} = \frac{174 \times 10^6 / 3600}{37 - 21} = 3.02 \times 10^3 \quad (4.24)$$

En conclusion, les temps de charge et de décharge d'un élément de stockage plan servant pour le chauffage domestique tant pendant la charge que pendant la décharge sont estimés par des corrélations impliquant des paramètres constants (*a*, *b* et *d*) et des paramètres variables (*c* et *c'*), dépendant du MCP utilisé et des conditions de fonctionnement.

#### 4.3.4 Effets des temps de charge et de décharge

Le contrôle de charge et de décharge peut se faire par trois méthodes:

- (a) **Contrôle basé sur la température:** Dans ce contrôle, la charge continue jusqu'à ce que la température du MCP atteigne une limite supérieure, après laquelle le cycle de décharge commence, et il se termine en atteignant la limite inférieure. Ce contrôle nécessite des thermocouples insérés dans le MCP et un système de régulation ON/OFF. Ce type de contrôle est adopté lorsque on veut atteindre les performances maximales du système tout en gardant des températures maximale et minimale dans le système, et par conséquent les pertes vers l'extérieur sont bien contrôlées.
- (b) **Contrôle basé sur le temps:** Ce contrôle stipule que la charge et la décharge se font dans des intervalles de temps spécifiés, mais qui peuvent être différents. Les performances du système peuvent être considérablement affectées, notamment si les durées de charge ou de décharge sont relativement courtes. Par conséquent, il aura une masse de MCP qui ne subira pas le changement de phase. Les chaleurs stockées ou déstockées sont ainsi réduites. De plus, le régime périodique stationnaire est atteint après quelques cycles de charge et décharge. Contrairement au premier type de contrôle, les températures maximale et minimale dans le MCP ne sont pas contrôlées et peuvent

atteindre des limites hors la marge de fonctionnement désirée, notamment si les durées de charge et de décharge sont relativement élevées.

(c) **Contrôle mixte** Ce contrôle combine les deux premiers. C'est à dire, on charge et on décharge dans des périodes de temps spécifiées tout en restant dans la marge de température de fonctionnement.

Dans cette partie, nous considérons le contrôle mixte afin de prédire les effets des temps de charge et de décharge sur le comportement thermique du système. Pour cela, nous considérons trois cas: (1) charge partielle et décharge complète, (2) charge complète et décharge partielle et (3) charge et décharge partielles. Les températures de fonctionnement inférieure et supérieure sont respectivement  $35^{\circ}\text{C}$  et  $50^{\circ}\text{C}$ .

#### 4.3.4.1 Charge partielle et décharge complète

Les figures 4.21 et 4.22 montrent respectivement les variations cycliques de la fraction fondue du MCP et des températures des deux plaques pour une durée de charge  $t_{ch} = 2\text{h}$ , une puissance fournie  $e = 702\text{ W/m}^2$  et une épaisseur  $l = 2\text{ cm}$ . On observe dans la figure 4.21 que, durant le premier cycle, il y a environ 36% de la masse de MCP qui n'a pas subi le changement de phase (elle reste toujours solide). Par contre, dans les cycles subséquents, la masse qui subit le changement de phase est augmentée et elle représente 78%. Le régime périodique stationnaire est atteint après le premier cycle avec des durées de décharge égale à 4.58h et 3.85h pour les éléments horizontal et vertical respectivement.

Quant à la température, on remarque dans la figure 4.22 que la température maximale de la plaque libre est réduite, et elle varie dans une marge très courte (entre  $32^{\circ}\text{C}$  et  $40^{\circ}\text{C}$ ). Par conséquent, la puissance émise est réduite, et l'élément ne pourra produire assez de chaleur.

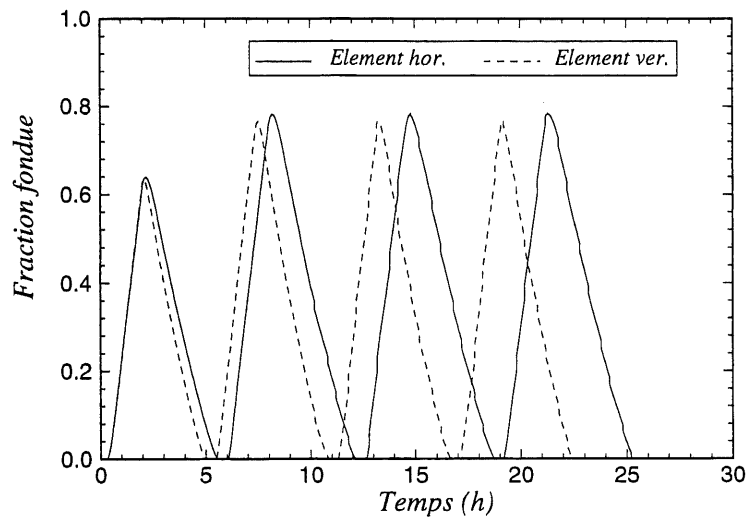


Figure 4.21 Variation cyclique de la fraction fondue du MCP pour  $t_{ch} = 2 h$ ,  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ : charge partielle et décharge complète.

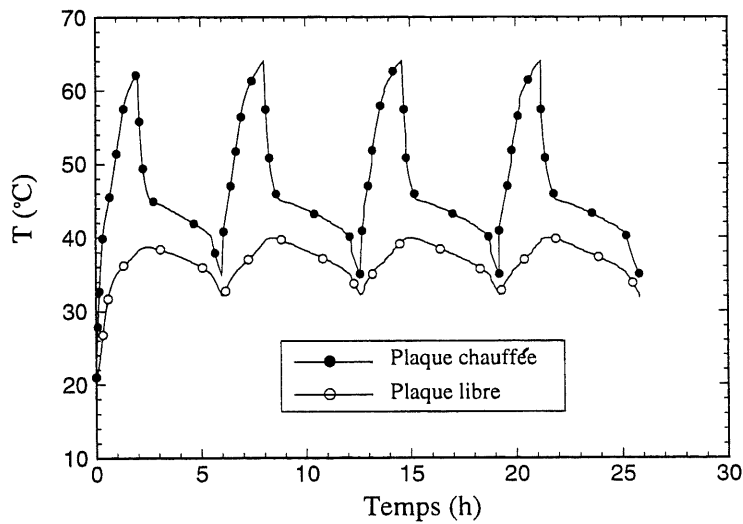


Figure 4.22 Variation cyclique des températures des deux plaques pour  $t_{ch} = 2 h$ ,  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ : charge partielle et décharge complète (élément horizontal).

#### 4.3.4.2 Charge complète et décharge partielle

Les figures 4.23 et 4.24 montrent respectivement les variations cycliques de la fraction fondue du MCP et des températures des deux plaques pour une durée de décharge  $t_{dech} = 4h$ ,  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ . On observe que la masse du liquide qui subit le changement de phase constitue environ 80% pour l'élément horizontal et 96% pour l'élément vertical. Cette différence est attribuée au fait que l'élément vertical décharge sa chaleur plus vite que l'élément horizontal. Le régime périodique stationnaire est atteint après le premier cycle avec des durées de charge de 2.39h et 2.91h pour les éléments horizontal et vertical respectivement. On remarque aussi dans la figure 4.24 que la température de la plaque libre est augmentée et par conséquent la durée de charge nécessaire pour l'élever à la température limite supérieure est plus courte. Cette température varie dans la marge spécifiée (de  $T_{inf}$  à  $T_{sup}$ ). L'élément pourra ainsi fournir assez de puissance durant la décharge.

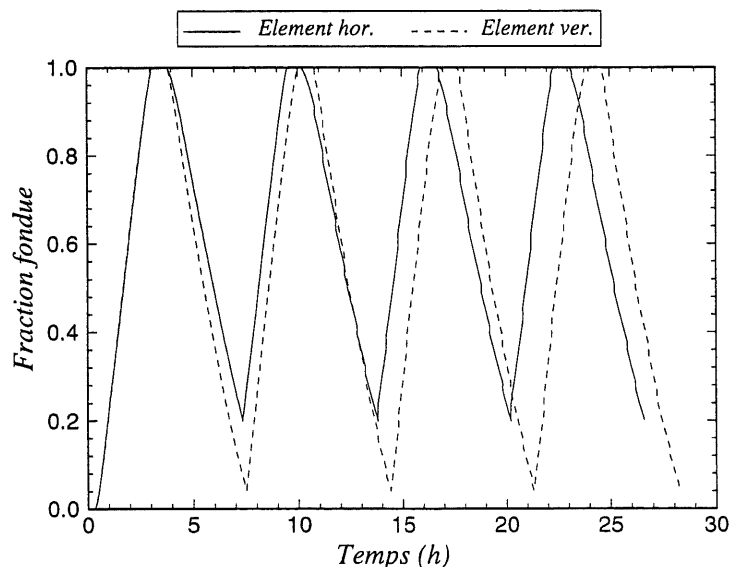


Figure 4.23 Variation cyclique de la fraction fondue du MCP pour  $t_{dech} = 4 \text{ h}$ ,  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ : charge complète et décharge partielle.

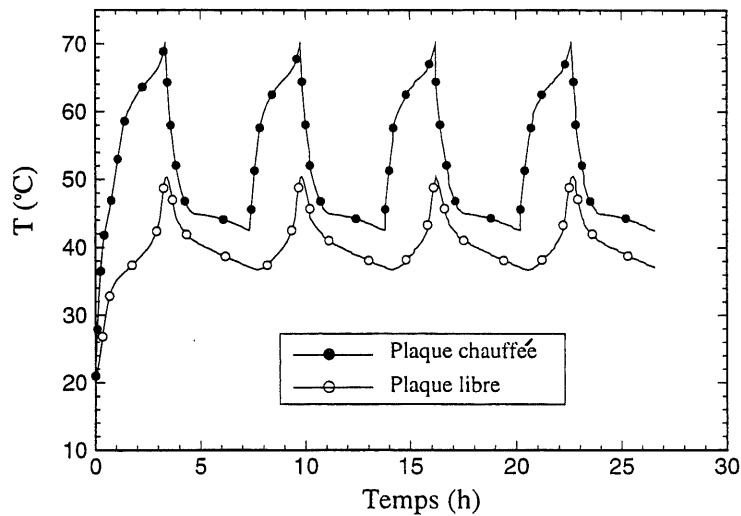


Figure 4.24 Variation cyclique des températures des deux plaques pour  $t_{dech} = 4 \text{ h}$ ,  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ : charge complète et décharge partielle (élément horizontal).

#### 4.3.4.3 Charge et décharge partielles

Les figures 4.25 et 4.26 présentent respectivement les variations cycliques de la fraction fondue du MCP et des températures des deux plaques pour  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ . Pour l'élément horizontal, les durées de charge et de décharge sont fixées respectivement à  $t_{ch} = 2 \text{ h}$  et  $t_{dech} = 4 \text{ h}$  alors que pour l'élément vertical elles sont fixées à  $t_{ch} = 2 \text{ h}$  et  $t_{dech} = 3 \text{ h}$ . On observe dans la figure 4.24 que la masse de MCP qui subit le changement de phase augmente avec le temps jusqu'à ce qu'elle atteigne le régime périodique stationnaire où elle demeure constante d'un cycle à l'autre. Cette masse varie en fonction des durées de charge et de décharge et de la position de l'élément. Durant la charge, il y a cependant une certaine masse liquide proche de la plaque chauffée qui ne subit pas le changement de phase. Par contre, durant le cycle de décharge, il y a une certaine masse solide proche de la plaque libre qui ne subit pas le changement de phase. Il est également observé que le régime périodique stationnaire est atteint après cinq cycles (plus qu'une journée).

Quant à la température, on observe dans la figure 4.26 que les températures maximales des deux plaques augmentent avec le temps jusqu'à ce qu'elles atteignent le régime périodique stationnaire. La température de la plaque libre varie dans une marge très courte proche de la température inférieure spécifiée. Par conséquent, l'élément ne pourra fournir assez de chaleur à l'espace à chauffer, notamment si la durée de charge est petite. La température maximale de la plaque libre n'atteint pas la température de changement de phase.

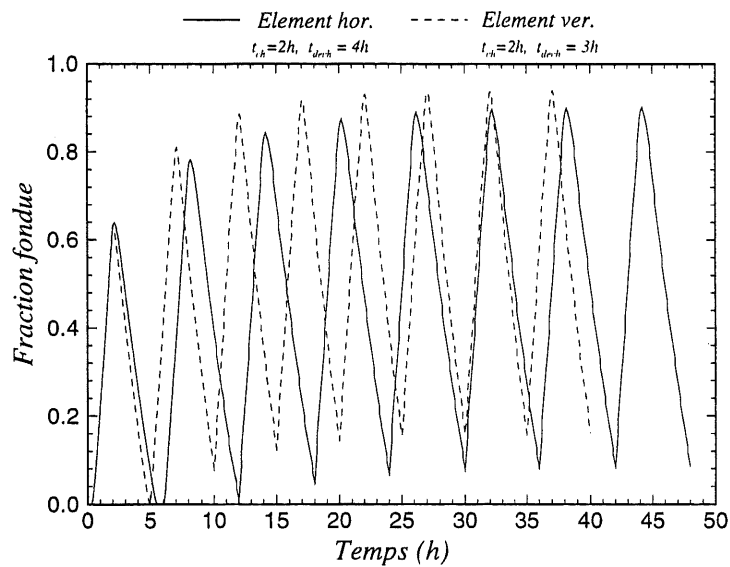


Figure 4.25 Variation cyclique de la fraction fondue du MCP pour  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ : charge et décharge partielles.

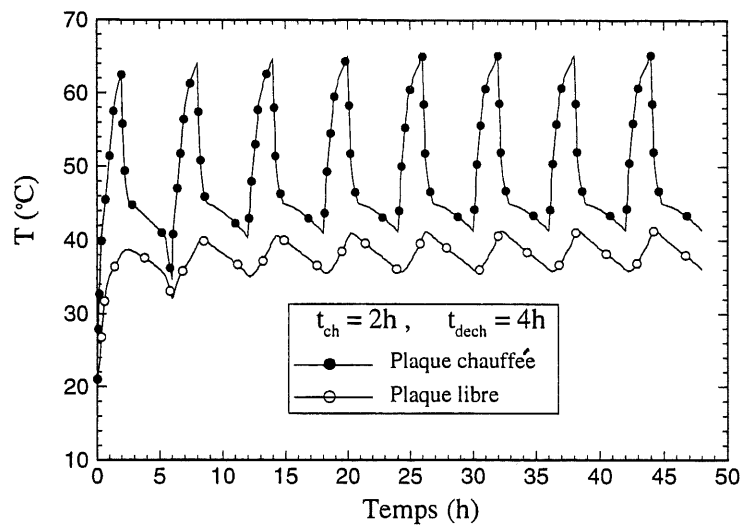


Figure 4.26 Variation cyclique de la température des deux plaques pour  $e = 702 \text{ W/m}^2$  et  $l = 2 \text{ cm}$ : charge et décharge partielles (élément horizontal).

## **SYSTÈME DE STOCKAGE D'ÉNERGIE DÉCHARGEANT SA CHALEUR PAR CONVECTION FORCÉE, PAR CONVECTION NATURELLE ET PAR RADIATION**

### **5.1 INTRODUCTION**

Dans la partie précédente, on a étudié de façon exhaustive un système de stockage d'énergie qui décharge sa chaleur par convection naturelle et par radiation dans le milieu ambiant. La température de la plaque d'échange joue donc un rôle très important dans le taux d'échange de chaleur avec l'extérieur: plus cette dernière est élevée, plus la puissance de décharge est élevée. Cependant, dans certaines situations pratiques, la plaque d'échange devrait être suffisamment éloignée (ou protégée par un grillage) des occupants et sa température devrait être bien contrôlée pour qu'elle ne dépasse pas des limites pouvant nuire au confort dans la pièce à chauffer

Dans cette partie, on présentera une technique pratique et efficace pour régulariser ou contrôler la température de la plaque en contact avec l'air ambiant au moyen d'un espace façonné entre l'élément de stockage et une plaque supplémentaire d'échange de chaleur, où l'air ambiant pourrait passer en écoulement forcé le long de cette plaque. L'élément de stockage décharge ainsi sa chaleur par convection forcée en plus par convection naturelle et par radiation. La température de



la plaque supplémentaire est contrôlée par la vitesse de l'air entrant, selon qu'elle devrait être inférieure ou supérieure à celle de l'air sortant de l'élément de stockage.

## 5.2 DESCRIPTION DU SYSTÈME DE STOCKAGE

La figure 5.1 montre un croquis représentatif du système de stockage déchargeant sa chaleur par les trois modes sus-mentionnés. Il consiste en l'élément de stockage et une plaque supplémentaire placée au-dessous de la plaque libre de l'élément de stockage et espacée d'elle d'une distance  $l_0$ . De l'air ambiant circule en écoulement forcé dans l'espace entre l'élément et la plaque supplémentaire. L'air y entre à une température  $T_{fe} = T_a$  et il en sort à la température  $T_{fs}$ , qui peut être supérieure ou inférieure à celle de la plaque supplémentaire ( $T_{p3}$ ), selon le débit d'air entrant. La plaque libre de l'élément (P2) échange de la chaleur avec l'air entrant par convection forcée alors qu'elle échange de la chaleur par radiation avec la plaque supplémentaire (P3). Cette dernière échange de la chaleur par convection naturelle et par radiation avec le milieu ambiant.

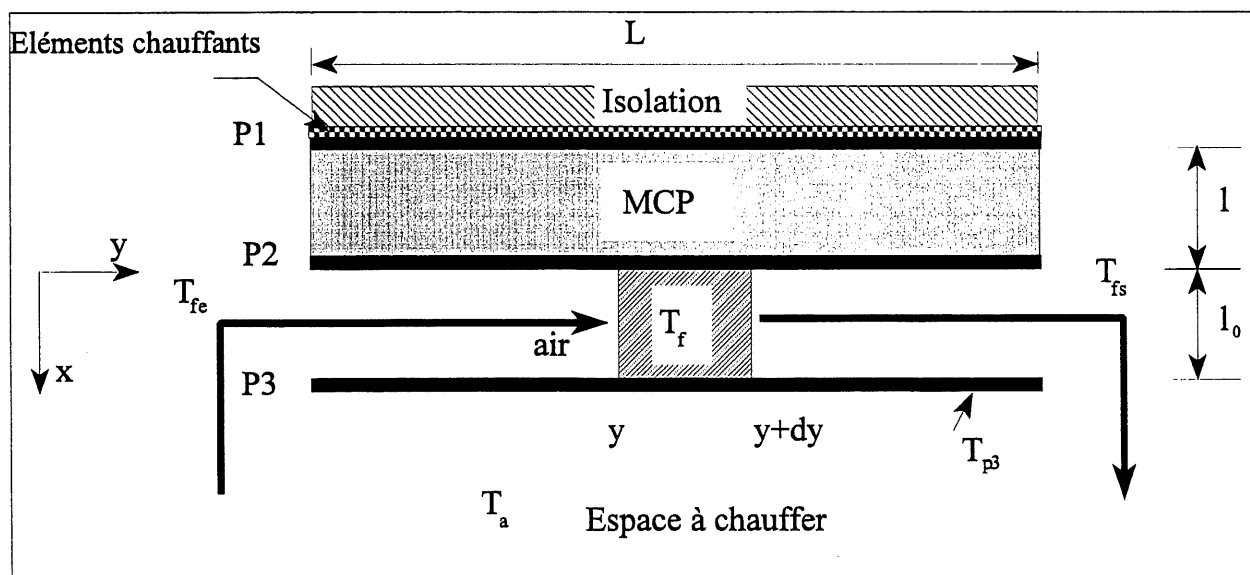


Figure 5.1 Croquis d'un système de stockage déchargeant sa chaleur par convection forcée, par convection naturelle et par radiation dans le milieu ambiant.

### 5.3 ANALYSE DES ÉCHANGES DE CHALEUR

En ce qui concerne l'échange de chaleur dans le MCP, le modèle unidimensionnel proposé dans la partie précédente reste en vigueur, c'est-à-dire que le mécanisme de transfert de chaleur dans le MCP se fait par conduction pure avec une conductivité thermique du liquide variable pour tenir compte de la convection naturelle dans ce dernier. Il en découle que les températures des deux plaques d'échange (P2 et P3) sont uniformes mais différentes. La température de l'air entrant, cependant, varie le long de la plaque. Un bilan thermique sur un volume de contrôle, tel que montré dans la figure 5.1 (espace hachuré compris entre  $y$  et  $y+dy$ ), donne, en négligeant la chaleur emmagasinée par sa masse (à cause de la faible densité de l'air):

$$\dot{m}_a \frac{dT_f}{dy} = 2h_{ci} A/L (\bar{T}_p - T_f) \quad (5.1)$$

où  $\dot{m}$  est le débit massique d'air entrant,  $c_a$  sa chaleur massique,  $h_{ci}$  le coefficient de convection forcée,  $A$  l'aire de la surface d'échange,  $L$  la longueur de la plaque dans la direction  $y$ ,  $T_f$  la température de mélange de l'air dans une section et  $\bar{T}_p = (T_{p2} + T_{p3})/2$ . En intégrant l'équation (5.1), on trouve:

$$T_f^* = \frac{T_f - \bar{T}_p}{T_a - \bar{T}_p} = e^{-NTU(y/L)} \quad (5.2)$$

où  $NTU = 2Ah_{ci}/\dot{m}c_a$  est le nombre d'unité thermique. La température moyenne de l'air sur toute la longueur de la plaque prend la forme suivante:

$$\bar{T}_f^* = \frac{\bar{T}_f - \bar{T}_p}{T_a - \bar{T}_p} = \frac{1}{L} \int_0^L T_f^* dy = \frac{1}{NTU} [1 - e^{-NTU}] \quad (5.3)$$

L'élément de stockage décharge sa chaleur à travers la plaque libre P2. Celle-ci échange de la chaleur par convection forcée avec l'air entrant et par rayonnement avec la plaque supplémentaire P3. La chaleur totale échangée par unité de surface d'échange s'écrit de la façon suivante:

$$q_{p2} = h_{ri} (T_{p2} - T_{p3}) + h_{ci} (T_{p2} - \bar{T}_f) \quad (5.4)$$

avec  $h_{ri}$  le coefficient de radiation donné par:

$$h_{ri} = \frac{\sigma}{1/\epsilon_{p2} + 1/\epsilon_{p3} - 1} (T_{p2}^2 + T_{p3}^2) \cdot (T_{p2} + T_{p3}) \approx \frac{4\sigma}{1/\epsilon_{p2} + 1/\epsilon_{p3} - 1} \bar{T}_p^3 \quad (5.5)$$

où  $\epsilon_{p2}$  est l'émissivité de la surface d'échange de la plaque P2 et  $\epsilon_{p3}$  est celle de la surface interne de la plaque P3. La partie de cette chaleur évacuée par l'air entrant est:

$$q_f = 2 h_{ci} (\bar{T}_p - \bar{T}_f) = \dot{m} c_a / A (T_{fs} - T_a) \quad (5.6)$$

avec  $T_{fs}$  la température de l'air à la sortie. Et celle évacuée par la plaque supplémentaire P3 est:

$$q_{p3} = h_e (\bar{T}_{p3} - T_a) = h_{ci} (\bar{T}_f - T_{p3}) + h_{ri} (T_{p2} - T_{p3}) \quad (5.7)$$

où  $h_e$  est le coefficient total d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. L'équation (5.7) permet de trouver la température de la plaque supplémentaire s'écrivant comme suit, en tenant compte de l'équation (5.3):

$$T_{p3}^* = \frac{T_{p3} - \bar{T}_p}{T_a - \bar{T}_p} = \frac{1}{h_t + h_{ri}} \{ h_e + h_{ci} (1 - e^{-NTU}) / NTU \} \quad (5.8)$$

avec  $h_t = h_{ri} + h_{ci} + h_e$ .

#### 5.4 ÉTATS DE FONCTIONNEMENT DU SYSTÈME

Afin de connaître le taux d'échange de chaleur évacuée par l'air ou par la plaque supplémentaire, on définit les paramètres suivants:

- *taux d'évacuation de chaleur par l'air:*

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{p2}} = \frac{A_0 (1 - e^{-NTU})}{A_1 NTU + A_2 (1 - e^{-NTU})} \quad (5.9)$$

où les constantes  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  sont données par:

$$A_0 = 2h_{ci} (h_t + h_{ri}) ; \quad A_1 = h_e (h_{ci} + 2h_{ri}) ; \quad A_2 = h_{ci} (h_t + h_{ci} + 3h_{ri}) \quad (5.10)$$

- *taux d'évacuation de chaleur par la plaque supplémentaire:*

$$\eta_{p3} = \frac{q_{p3}}{q_{p2}} = 1 - \eta_f \quad (5.11)$$

Il est intéressant de noter que la température de l'air à la sortie et celle de la plaque supplémentaire ainsi que les taux d'évacuation de chaleur respectifs sont fonction du NTU et des coefficients d'échange  $h_{ci}$ ,  $h_{ri}$  et  $h_e$ . Cela permet de bien contrôler le taux de transfert de chaleur et les températures de fonctionnement ( $T_{p3}$  et  $T_{fs}$ ) en agissant sur le débit d'air entrant (ou le nombre NTU), sur la distance entre les deux plaques d'échange  $l_0$  (ou sur le coefficient de convection  $h_{ci}$ ) et finalement sur les émissivités des deux plaques (ou sur le coefficient de rayonnement  $h_{ri}$ ). Selon la valeur du NTU, la température de l'air à la sortie ( $T_{fs}$ ) peut être inférieure ou supérieure à celle de

la plaque supplémentaire ( $T_{p3}$ ). Les variations de ces dernières en fonction du NTU, en ayant comme paramètres les coefficients  $h_{ci}$  et  $h_{ri}$ , sont représentées dans les figures 5.2 et 5.3. Ces figures montrent que la température  $T_{fs}^*$  décroît très vite avec l'augmentation de NTU; elle varie de 1 (NTU = 0) à 0 (NTU  $\rightarrow$   $\infty$ ). Cependant, la température  $T_{p3}^*$  décroît lentement et elle reste bornée entre deux valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} NTU = 0 & : T_{p3}^* = (h_i - h_{ri}) / (h_i + h_{ri}) \\ NTU \rightarrow \infty & : T_{p3}^* \rightarrow h_e / (h_i + h_{ri}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ces courbes interceptent à  $NTU = NTU_0$ , ce qui correspond à résoudre l'équation suivante:

$$(h_i + h_{ri}) \cdot e^{-NTU_0} = h_e + h_{ci}(1 - e^{-NTU_0}) / NTU_0 \quad (5.13)$$

Ce seuil délimite les régimes de fonctionnement suivants:

$NTU < NTU_0$ : l'air sort à une température inférieure à celle de la plaque supplémentaire ( $T_{fs} < T_{p3}$ ), où la chaleur peut être évacuée en grande partie par l'air entrant.

$NTU > NTU_0$ : l'air sort à une température supérieure à celle de la plaque supplémentaire ( $T_{fs} > T_{p3}$ ), où la chaleur, cependant, peut être évacuée en grande partie par la plaque supplémentaire, notamment aux faibles débits d'air.

Il convient de noter que la température adimensionnelle de l'air à la sortie est contrôlée par un seul paramètre adimensionnel NTU alors que celle de la plaque supplémentaire est très sensible aux variations des émissivités des plaques, à la variation de la distance entre elles et à la variation du débit d'air entrant.

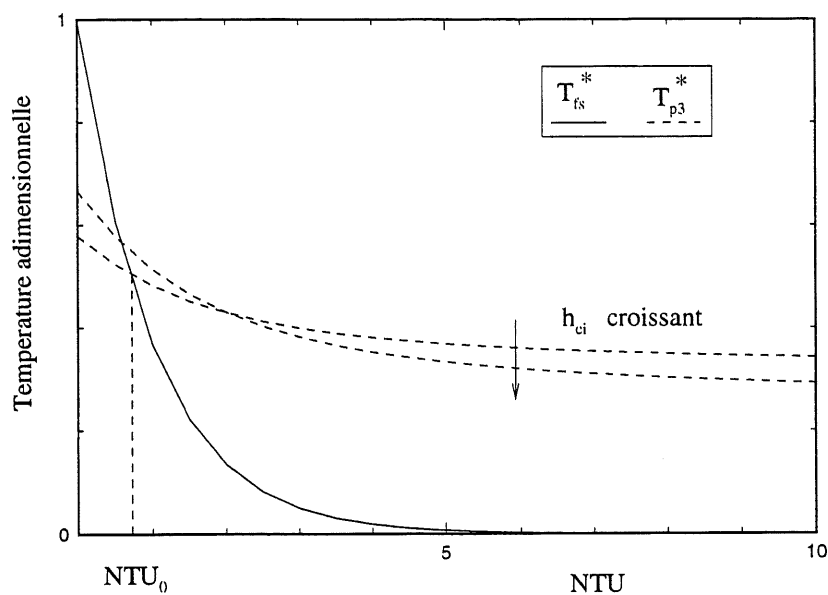


Figure 5.2 Variations des températures adimensionnelles de l'air à la sortie et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec  $h_{ci}$  comme paramètre.

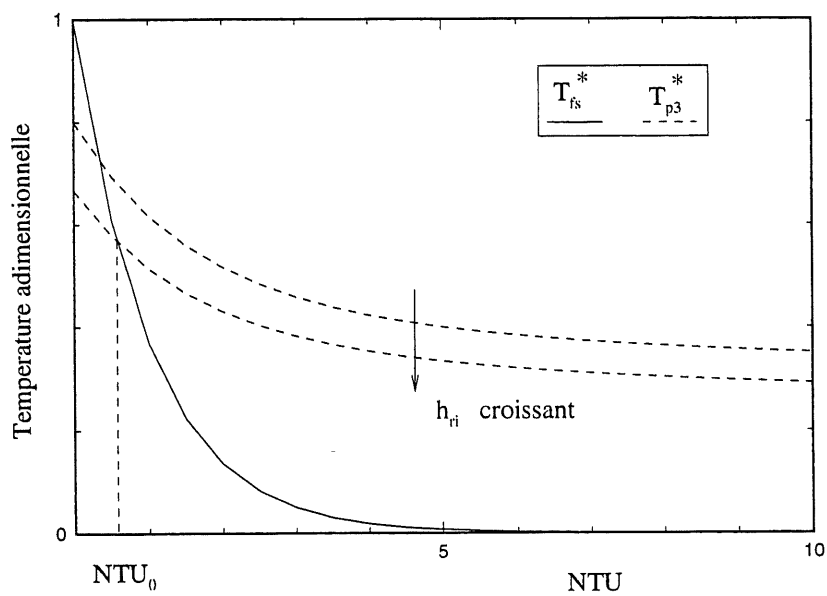


Figure 5.3 Variations des températures adimensionnelles de l'air à la sortie et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec  $h_{fi}$  comme paramètre.

Il est également pratique de connaître les quantités de chaleur évacuées par l'air et par la plaque supplémentaire. Les figures 5.4 et 5.5 illustrent les variations de  $\eta_f$  et de  $\eta_{p3}$  en fonction du NTU, en ayant comme paramètres les coefficients  $h_{ri}$  et  $h_{ci}$ . Il est clairement vu que  $\eta_f$  décroît lorsque le NTU augmente alors que  $\eta_{p3}$  augmente. Pour les valeurs limites du NTU on a:

$$\begin{aligned}
 NTU = 0 : \quad \eta_f &= \frac{2h_{ci}(h_t + h_{ri})}{h_e(h_{ci} + 2h_{ri}) + h_{ci}(h_t + h_{ci} + 3h_{ri})} \\
 \eta_{p3} &= \frac{2h_e h_{ri}}{h_e(h_{ci} + 2h_{ri}) + h_{ci}(h_t + h_{ci} + 3h_{ri})} \quad (5.14) \\
 NTU \rightarrow \infty : \quad \eta_f &\rightarrow 0 \\
 \eta_{p3} &\rightarrow 1
 \end{aligned}$$

Il découle de cette analyse que la chaleur évacuée par l'air entrant est maximale lorsque le coefficient  $h_{ci}$  est maximal alors qu'elle est minimale lorsque ce dernier l'est aussi. La situation est inversée lorsqu'il s'agit de la chaleur évacuée par la plaque supplémentaire. Cependant, l'effet du coefficient de rayonnement  $h_{ri}$  sur les taux d'évacuation de chaleur est moins perceptible. À taux égal d'évacuation ( $\eta_f = \eta_{p3} = 0.5$ ), le nombre  $NTU_1$  correspondant est déterminé en résolvant l'équation suivante:

$$\frac{1 - e^{-NTU_1}}{NTU_1} = \frac{h_e}{h_{ci}} \cdot \frac{2h_{ri} + h_{ci}}{4h_{ri} + 2h_{ci} + 3h_e} \quad (5.15)$$

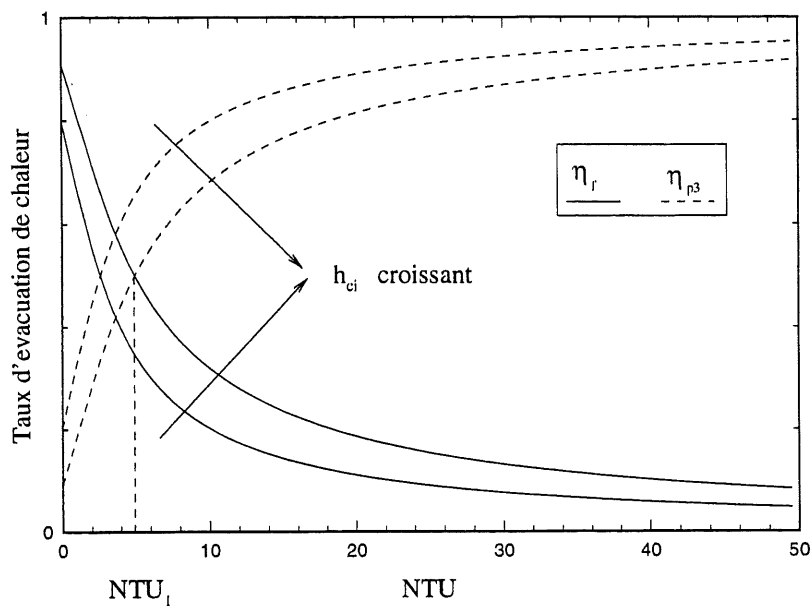


Figure 5.4 Variations des taux d'évacuation de chaleur de l'air et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec  $h_{ci}$  comme paramètre.

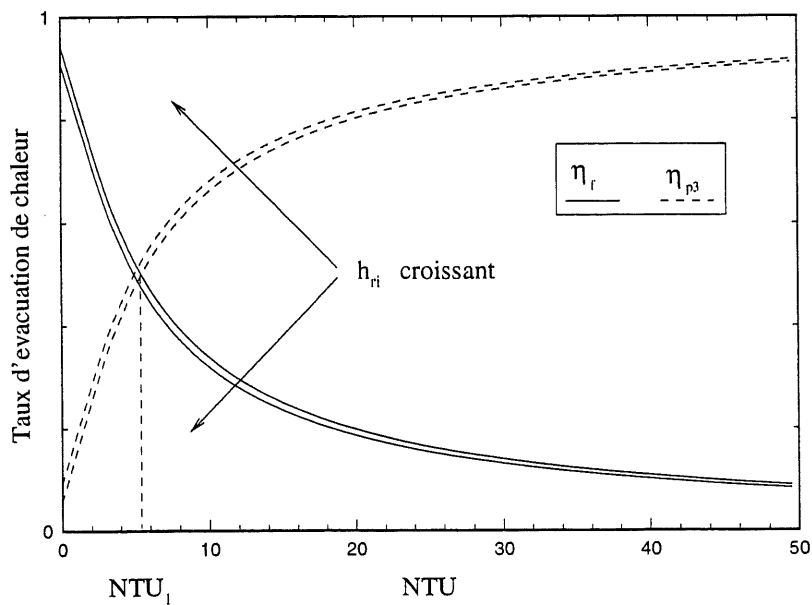


Figure 5.5 Variations des taux d'évacuation de chaleur de l'air et de la plaque supplémentaire en fonction du NTU avec  $h_{ri}$  comme paramètre.



## 5.5 EFFET DU DÉBIT D'AIR

Dans les simulations numériques, on a considéré le système de stockage en position horizontale, le MCP est cyclé entre les températures  $T_{\text{inf}} = 35^\circ\text{C}$  et  $T_{\text{sup}} = 50^\circ\text{C}$ , l'épaisseur du MCP est fixée à  $l = 2 \text{ cm}$ , la puissance électrique fournie est prise égale à  $700 \text{ W/m}^2$  et la température ambiante est fixée à  $21^\circ\text{C}$ . L'écoulement d'air entre les plaques P2 et P3 est supposé développé et le nombre de Nusselt correspondant, tiré de Shah et Bhatti (1987), est  $Nu = h_{ci} D_h / k_a = 4$  (les deux surfaces sont à des températures différentes). Le diamètre hydraulique de la section de passage est  $D_h = 2 l_0$ .

Les paramètres contrôlant le transfert de chaleur du système de stockage vers le milieu ambiant sont notamment le débit d'air (ou le nombre NTU), la distance entre les deux plaques  $l_0$  (ou le coefficient de convection forcée  $h_{ci}$ ), les émissivités des surfaces d'échange (ou le coefficient de rayonnement  $h_{r1}$ ) et le coefficient global du milieu extérieur  $h_e$ . Il serait donc intéressant de connaître les effets de ces derniers sur l'échange de chaleur dans le système de stockage.

L'effet du débit d'air est illustré au moyen du nombre NTU dans les figures 5.6 et 5.7 pour  $l_0 = 1 \text{ cm}$  et  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$ . Les deux figures montrent les variations des températures des plaques P1, P2, et P3 et celle de l'air à la sortie pour deux valeurs du NTU (0.3 et 2) situées de part et d'autre de la valeur  $NTU_0 \approx 0.73$ . On distingue, ainsi, deux régimes de fonctionnement: un régime pour lequel la température de l'air à la sortie est inférieure à celle de la plaque supplémentaire (figure 5.6), et un autre régime où la situation est inversée (figures 5.7). Dans ce dernier régime, la température de l'air à la sortie est approximativement égale à la moyenne des températures des plaques P2 et P3 ( $\bar{T}_p$ ). Par contre, dans le premier régime, la température  $T_{fs}$  est proche à celle de l'ambiance. Il est intéressant de noter que, dans les deux régimes, les températures  $T_{p3}$  et  $T_{fs}$  varient très peu durant les cycles de charge et de décharge et, par conséquent, la puissance fournie par le système à l'espace à chauffer est plus au moins uniforme durant tout le cycle de charge et décharge (excepté, lorsque le liquide du MCP est surchauffé). On note également que, en augmentant le NTU (ou en diminuant

le débit d'air), la durée de charge diminue très peu alors que celle de décharge augmente considérablement. Dans le premier régime, la chaleur est évacuée principalement par l'air ( $\eta_f = 0.66$ ) alors que dans le second régime, elle est évacuée par la plaque supplémentaire ( $\eta_{p3} = 0.55$ ).

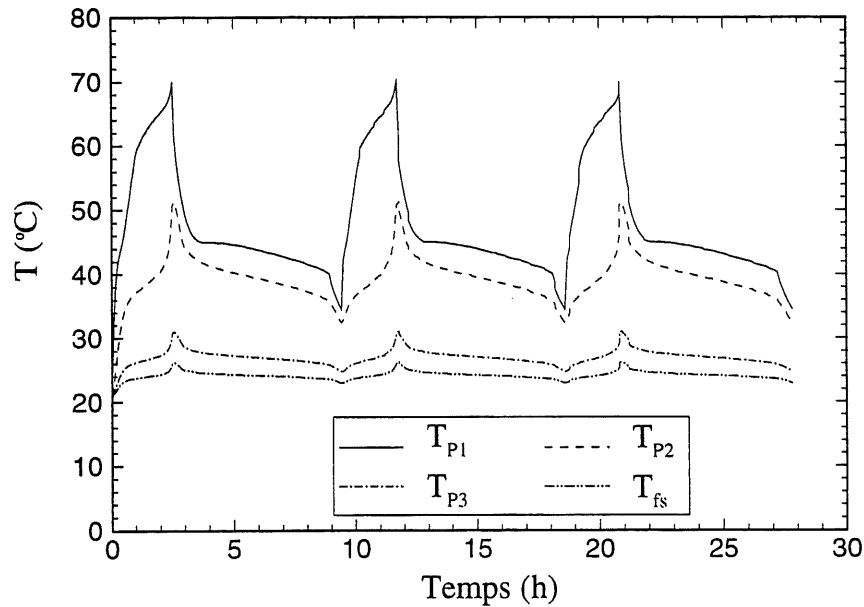


Figure 5.6 Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à la sortie pour  $NTU = 0.3$ ,  $l_0 = 1cm$ ,  $e = 700W/m^2$  et  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$  (élément horizontal).

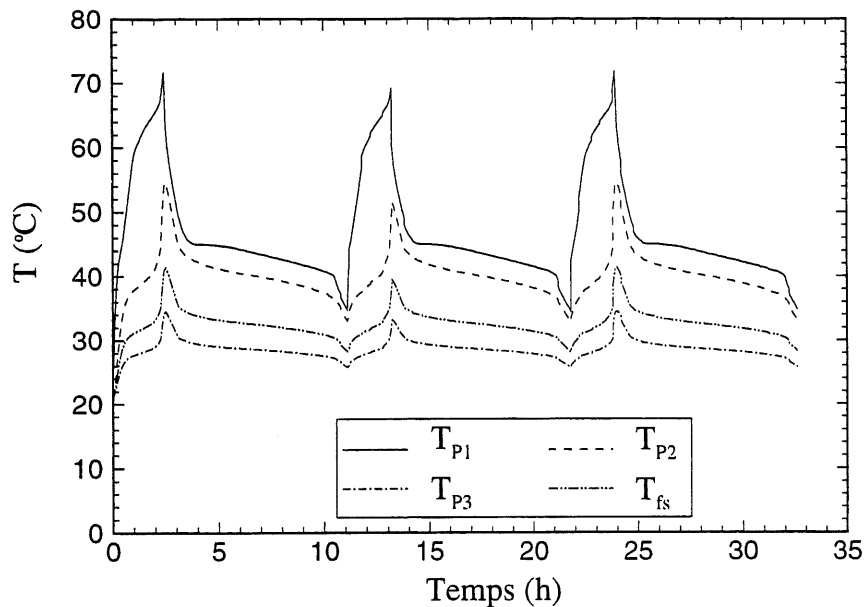


Figure 5.7 Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à la sortie pour  $NTU = 2$ ,  $l_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $e = 700 \text{ W/m}^2$  et  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$  (élément horizontal).

## 5.6 EFFET DE LA HAUTEUR DE PASSAGE D'AIR

L'effet de la distance  $l_0$  entre les plaques P2 et P3 se manifeste dans le coefficient de convection forcée  $h_{ci}$ . Ce dernier est inversement proportionnel à  $l_0$ . La figure 5.8 illustre les variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et celle de l'air à la sortie pour  $l_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$  et  $NTU = 0.3$ . L'effet de la distance  $l_0$  est vu en examinant les figures 5.6 et 5.8. On remarque dans ces figures que l'augmentation de  $l_0$  (ou la diminution de  $h_{ci}$ ) provoque une décharge très lente (la durée de charge varie très peu). La température  $T_{p3}$  ainsi augmente légèrement alors que la température  $T_{fs}$  reste pratiquement inchangée. L'évacuation de chaleur se fait plus par la plaque supplémentaire:  $\eta_{p3} = 0.53$  (figure 5.8) contre  $\eta_{fs} = 0.66$  (figure 5.6).

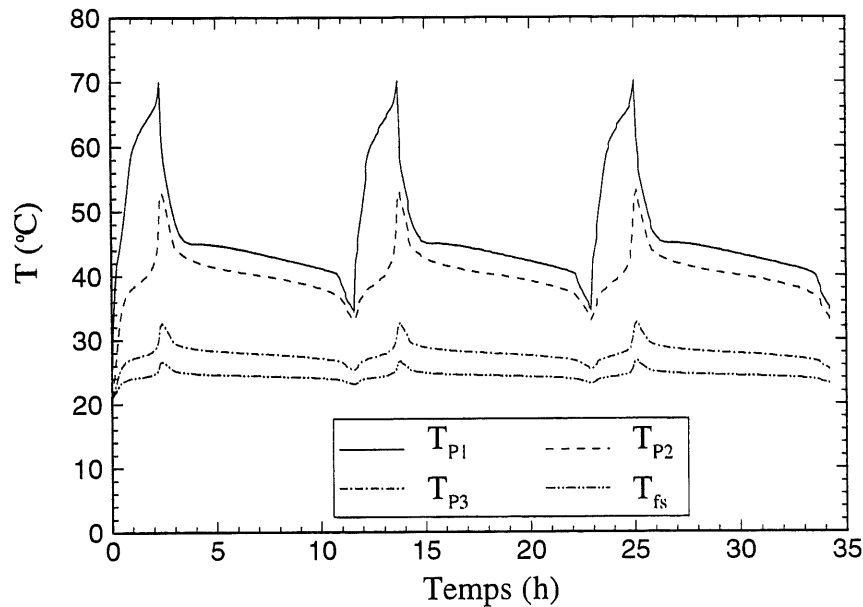


Figure 5.8 Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à la sortie pour  $NTU = 0.3$ ,  $l_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $e = 700 \text{ W/m}^2$  et  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 1$  (élément horizontal).

## 5.7 EFFET DES ÉMISSIVITÉS DES PLAQUES D'ÉCHANGE

La figure 5.9 illustre les variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3 ainsi que celle de l'air à la sortie pour  $l_0 = 1 \text{ cm}$ ,  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 0.5$  et  $NTU = 2$ . Il est clairement vu que la diminution des émissivités des plaques d'échange diminue la chaleur reçue par la plaque supplémentaire et, par conséquent, sa température  $T_{p3}$  décroît et la chaleur évacuée par cette plaque est réduite. La température  $T_{fs}$  ainsi décroît, dû au fait qu'une partie de la chaleur véhiculée par l'air est transmise par convection à la plaque supplémentaire. On remarque également que la diminution des émissivités des plaques d'échange augmente considérablement la durée de décharge (la durée de charge diminue très peu).

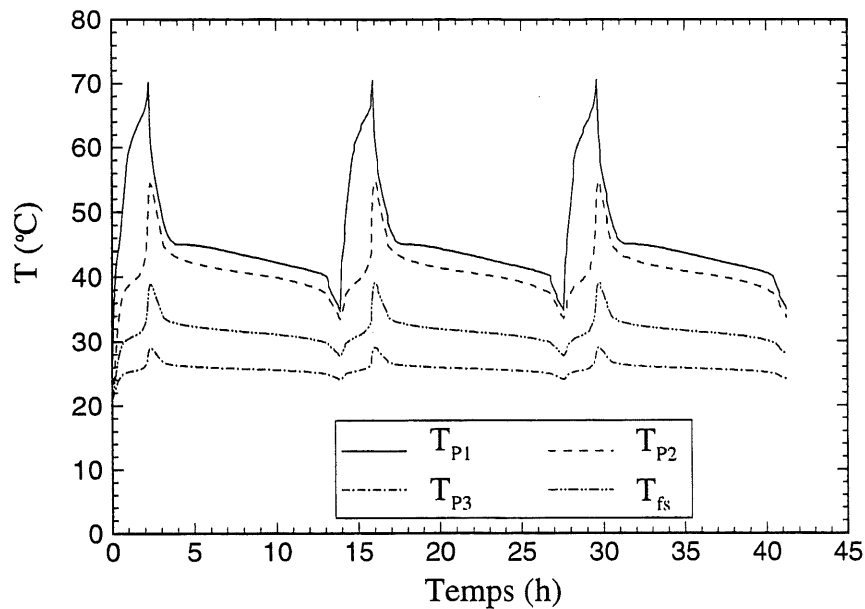


Figure 5.9 Variations cycliques des températures des plaques P1, P2 et P3, et de l'air à la sortie pour  $NTU = 2$ ,  $l_0 = 1\text{ cm}$ ,  $e = 700\text{ W/m}^2$  et  $\epsilon_{p2} = \epsilon_{p3} = 0.5$  (élément horizontal).

## 5.8 VARIATION DES TEMPS DE CHARGE ET DE DÉCHARGE

La figure 5.10 montre les variations des temps de charge et de décharge en fonction du NTU pour différentes valeurs de la distance  $l_0$  et des émissivités des plaques d'échange. Il est clairement vu que la durée de charge reste pratiquement inchangée par l'augmentation du NTU, par l'augmentation de  $l_0$  et par la diminution des émissivités des plaques. Par contre, la durée de décharge augmente de façon considérable. La durée de décharge suit en fait un comportement exponentiel convergent, i.e lorsque  $NTU \rightarrow \infty$ , la durée de décharge tend vers une limite fixe. Pour ce cas, le système de stockage décharge sa chaleur essentiellement par la plaque supplémentaire.

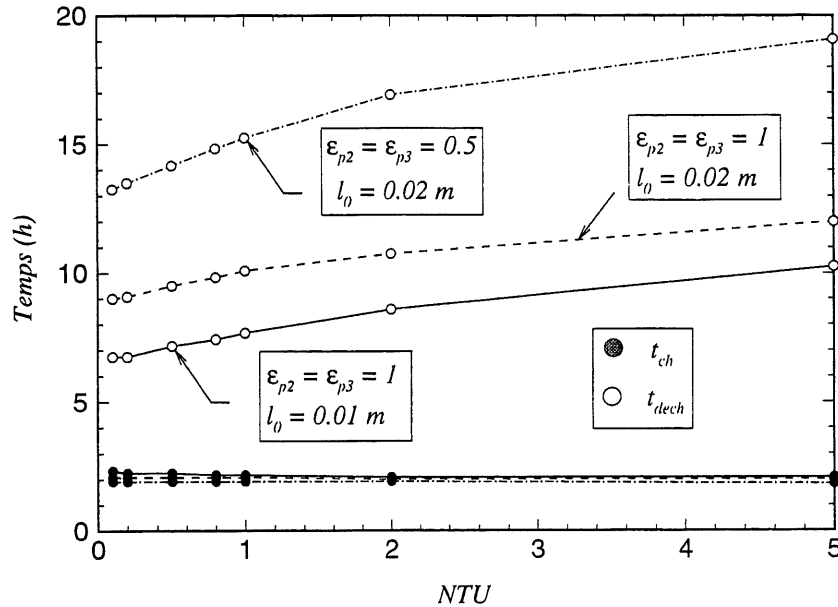


Figure 5.10 Variations des temps de charge et de décharge en fonction du NTU.

## 5.9 Conclusion

En résumé, le transfert de chaleur de l'élément de stockage vers le milieu ambiant est régi par quatre paramètres, à savoir le nombre NTU, le coefficient de convection forcée  $h_{ci}$ , le coefficient de rayonnement  $h_{ri}$  et le coefficient d'échange global du milieu extérieur  $h_e$ . Parmi ces paramètres, le nombre NTU (ou le débit d'air) s'avère le seul paramètre servant pour la régulation et le contrôle continu du système. En effet, selon la valeur de ce paramètre, on distingue deux régimes de fonctionnement. Un régime où la température de l'air à la sortie est supérieure à celle de la plaque supplémentaire, et l'évacuation de chaleur pourrait se faire en grande partie par la plaque supplémentaire, notamment aux faibles valeurs du débit d'air. L'autre régime se distingue par une température de la plaque supplémentaire plus grande que celle de l'air à la sortie, et l'évacuation de chaleur pourrait se faire en grande partie par l'air entrant. Le temps de décharge de l'élément peut être contrôlé en agissant sur les valeurs des paramètres sus-mentionnés tandis que le temps de charge reste sensiblement inchangé en présence ou en absence de la plaque supplémentaire.

## CONCLUSION

Le travail entrepris dans cette étude consistait en deux parties essentielles. Une partie a été consacrée au développement d'un modèle enthalpique pour traiter les problèmes de changement de phase solide-liquide fréquemment rencontrés dans les systèmes de stockage d'énergie par chaleur latente de fusion. La deuxième partie a été dédiée à l'étude d'un système de stockage cyclique d'énergie électrique par chaleur latente de fusion utilisé pour délester le problème de pointe électrique.

Vu la présence d'une interface mobile séparant les deux phases dans le domaine de calcul, un modèle basé sur le principe de "*moyenne volumique*" a été développé pour un milieu à deux phases. Le modèle consiste à moyenniser les équations de conservation locales dans un volume élémentaire représentatif (VER) de telle sorte que les équations résultantes, écrites en terme des variables et constantes (propriétés) moyennes du milieu, sont valables dans tout le domaine. La présence de l'interface est ainsi ignorée et remplacée par une conductivité thermique effective du milieu. L'analyse mathématique a montré que cette dernière varie en fonction des conductivités thermiques de chaque constituant ainsi que leurs fractions volumiques et un coefficient déterminant la morphologie de l'interface et sa nature, si elle est fixe ou mobile. Les zones de conductivité thermique effective correspondant aux interfaces fixe et mobile sont théoriquement déterminées. Le cas d'un milieu à interface fixe est validé en comparant la relation proposée de la conductivité thermique effective avec celles déjà existant pour un milieu poreux. Un accord raisonnable est obtenu. Quant au cas d'un milieu à interface mobile, il est validé en examinant un problème de

fusion/solidification régi par le mode de conduction pure. Les équations de conservation sont reformulées en terme de terme-source latente impliquant deux variables inconnues à déterminer: une variable explicite, qui est la température (ou l'enthalpie sensible), et une variable implicite, qui est la fraction liquide locale. Pour le calcul de cette dernière, les méthodes précédentes se sont basées sur l'hypothèse qu'un volume de contrôle subissant le changement de phase est à la température de fusion. Cette hypothèse a été prouvée imprécise, particulièrement si le volume de contrôle est rempli en totalité du liquide ou du solide. Cette imprécision devient de plus prononcée si les deux phases ont une grande différence de conductivité thermique. Par conséquent, un comportement oscillatoire se présente dans le champ thermique et dans la prédiction de l'interface. Dans le modèle développé, ces oscillations sont complètement éliminées en supposant que les deux phases co-existent dans une marge de température "numérique". Cette marge est estimée pour les problèmes unidimensionnels ainsi que pour les problèmes multidimensionnels. En outre, une méthode générale itérative est proposée pour le calcul de la fraction liquide locale pour les problèmes de changement de phase isothermes ou dans une marge de température. La convergence de cette méthode est stable (ne nécessite pas de relaxation) et rapide, et elle est indépendante de la marge de fusion choisie ou calculée. Le modèle proposé est appliqué à la solidification et fusion du système eau-glace dans une barre semi-infinie, dont on dispose de la solution exacte, et dans une cavité. Les résultats numériques ont montré que, grâce à la relation proposée de la conductivité thermique effective, la méthode proposée produit des résultats relativement précis par rapport aux méthodes enthalpiques précédentes.

En ce qui concerne le stockage cyclique d'énergie électrique par chaleur latente de fusion, un prototype d'un élément de stockage plan pouvant servir aux positions horizontale (plafond) et verticale (mur) a été conçu, fabriqué et testé au laboratoire. L'élément de stockage est constitué de deux plaques parallèles et espacées dont le MCP remplit l'espace entre elles. L'élément de stockage est chargé par des éléments chauffants attachés sur l'une de ses plaques isolée alors qu'il décharge sa chaleur par convection naturelle et par rayonnement dans le milieu ambiant via la plaque libre en contact avec l'air. L'élément de stockage est conçu pour chauffer le milieu aussi bien durant la charge que durant la décharge. Les tests au laboratoire ont porté sur la charge et la décharge cycliques durant



plusieurs jours et pour différentes intensités de la puissance électrique fournie dans le but de déterminer les performances thermiques et cycliques de l'élément.

L'analyse des données expérimentales a montré que le processus de transfert de chaleur dans le matériau de stockage se fait principalement par conduction pure lorsque l'élément est en position horizontale et par le mode combiné de conduction-convection naturelle lorsqu'il est en position verticale. La convection naturelle dans la phase liquide du MCP accélère la fusion, notamment dans la partie supérieure de l'élément, et réduit la température maximale dans le MCP. Par ailleurs, la convection naturelle dans l'air au voisinage de la plaque d'échange est plus importante lorsque l'élément est en position verticale, et elle contribue avec le rayonnement à augmenter le temps de charge et de diminuer le temps de décharge. Il est également vu, suivant la valeur de la puissance électrique fournie, que l'élément peut être chargé et déchargé de deux à trois fois par jour, ce qui est plus pratique, car le problème de pointe électrique se manifeste deux fois par jour, durant la matinée et durant la soirée. L'élément de stockage peut être donc chargé durant la nuit pour se décharger durant la matinée et chargé une autre fois durant l'après midi pour se décharger durant le soir. Le régime cyclique périodique est atteint juste après le premier cycle de charge et décharge. Il convient d'ajouter que l'élément stocke de l'énergie sous forme de chaleur latente et sous forme de chaleur sensible. Cette dernière représente environ 27% de la chaleur totale stockée.

En se basant sur des constatations expérimentales, un modèle réduit, unidimensionnel, basé sur la conduction pure est proposé pour analyser le transfert de chaleur dans le système de stockage. Cependant, la convection naturelle dans la phase liquide du MCP est prise en compte en définissant une conductivité thermique équivalente du liquide. Les paramètres de l'expérience se manifestant dans la conductivité thermique équivalente sont déterminés pour les deux positions de l'élément. Ce modèle est ensuite utilisé pour réaliser une étude paramétrique impliquant les effets de la puissance électrique fournie et l'épaisseur du MCP sur les temps de charge et de décharge. L'analyse a montré que la fusion du MCP ne peut s'achever que si la puissance électrique fournie par unité de surface excède un certain seuil. Ce dernier est fonction de la température ambiante, de la température spécifiée de la plaque libre ( $T_{sup}$ ) et du coefficient global de transfert de chaleur évalué à cette

dernière. Ce seuil est, cependant, indépendant de l'épaisseur du MCP. En augmentant ce dernier, les temps de charge et de décharge augmentent considérablement. Ainsi, le temps de charge diminue avec l'augmentation de la puissance électrique fournie alors que le temps de décharge reste pratiquement inchangé. Ces constatations ont permis de proposer une corrélation des temps de charge et de décharge impliquant les effets simultanés de l'épaisseur du MCP et de la puissance électrique fournie. L'analyse paramétrique a été complétée par l'examen des effets des temps de charge et de décharge sur les performances thermiques de l'élément, qui seront plus utiles si le contrôle thermique de ce dernier se base sur le temps. En effet, si les temps de charge et de décharge sont courts, l'élément de stockage ne pourra fournir assez de puissance au milieu ambiant, et le régime périodique stationnaire est atteint après cinq cycles de charge-décharge consécutives.

Enfin, pour bien contrôler ou régulariser la température de la plaque d'échange de l'élément, qui peut atteindre des valeurs élevées pouvant nuire au confort des occupants, notamment si le MCP utilisé possède une température de fusion élevée, une modification technique est apportée au système de stockage. Cette modification consiste à lui ajouter une plaque supplémentaire placée au-dessous de la plaque d'échange de l'élément dont l'air peut circuler en écoulement forcé dans l'espace entre elles. L'élément décharge ainsi sa chaleur par convection forcée à l'aide de l'air entrant et par rayonnement avec la plaque supplémentaire, qui elle-même échange de la chaleur avec le milieu ambiant par convection naturelle et par rayonnement. L'échange de chaleur entre l'élément et l'environnement est régi par quatre paramètres, à savoir le nombre NTU (ou le débit d'air entrant), le coefficient de convection forcée  $h_{ci}$  (ou la hauteur de passage d'air), le coefficient de rayonnement  $h_{ri}$  (ou les émissivités des plaques d'échange) et le coefficient d'échange global du milieu extérieur  $h_e$ . Selon la valeur du NTU par rapport à un seuil donné ( $NTU_0$ ), la température de la plaque supplémentaire peut être inférieure ou supérieure à celle de l'air entrant à la sortie. De plus, selon les valeurs de  $h_{ci}$  et de  $h_{ri}$ , la chaleur est évacuée en grande partie par l'air entrant ou par la plaque supplémentaire. Il convient d'ajouter que l'augmentation du nombre NTU, ou l'augmentation du coefficient  $h_{ci}$ , ou la diminution du coefficient  $h_{ri}$  provoquent une augmentation considérable du temps de décharge tandis que le temps de charge reste pratiquement inchangé.

## NOMENCLATURE

A	constante (équation 3.50) ou surface de chauffage
$A_{\min}$	minimum de la constante A (équation 3.54)
$A_0, A_1,$	
$A_2$	constantes (équation 5.10)
a	coefficient de discrétisation (équation 3.67) ou exposant
b	constante de discrétisation (équation 3.67) ou exposant
$b_0, b_1$	constantes (Tableau 3.1)
C	marge de fusion "numérique" (équation 3.43) ou capacité thermique
c	chaleur spécifique ou exposant
c'	constante (équation 4.23)
$C_w, c_w$	coefficients de la conductivité thermique équivalente, équation ( 4.7)
$C_h$	constante (équation 4.14)
D	tenseur (équation 3.26)
E	puissance électrique fournie (W)
e	puissance électrique fournie par unité de surface ( $W/m^2$ )
$e_0$	seuil de la puissance électrique fournie par unité de surface ( $W/m^2$ )
F	fonction de la fraction liquide
G	tenseur (équation 3.28)
H	enthalpie volumique
h	enthalpie massique
$h_c$	coefficient de convection
$h_{ci}$	coefficient de convection de l'air entrant
$h_e$	coefficient d'échange global du milieu extérieur ( $h_e = h_r + h_c$ )
$h_r$	coefficient de rayonnement
$h_{ri}$	coefficient de rayonnement entre les plaques P2 et P3
$h_t$	somme des coefficients $h_{ri}, h_{ci}$ et $h_e$
k	conductivité thermique

$k_{eff}$	conductivité thermique effective
$k_{eq}$	conductivité thermique équivalente du liquide du MCP
$k_h$	moyenne harmonique de la conductivité thermique
$k_{max}$	maximum de $k_1$ et $k_2$
$L$	chaleur latente de fusion (J/kg) ou longueur
$L^*$	longueur caractéristique
$l_0$	hauteur de passage d'air
$l$	épaisseur du MCP
$m, n$	exposants de la conductivité thermique équivalente (équation 4.7)
$m$	débit d'air entrant
$NTU$	nombre d'unités thermiques ( $2Ah_{ci}/mc_a$ )
$NTU_0$	seuil correspondant aux différents régimes de fonctionnement (racine de l'équation 5.13)
$NTU_1$	seuil correspondant à taux égal d'évacuation de chaleur (racine de l'équation 5.15)
$\mathbf{n}$	vecteur normal à la surface
$Nu$	nombre de Nusselt
$q$	flux de chaleur
$Q_e$	chaleur fournie cumulative par unité de surface
$Q_e^*$	chaleur fournie cumulative estimée par unité de surface
$Q_{ech}$	chaleur échangée cumulative par unité de surface
$Q_{lat}$	chaleur latente cumulative par unité de surface
$Q_{MCP}$	chaleur sensible cumulative par unité de surface du MCP
$Q_p$	chaleur sensible cumulative par unité de surface des plaques
$Q_{pertes}$	chaleur perdue cumulative par unité de surface
$Q_{sens}$	chaleur sensible cumulative par unité de surface
$R$	résistance thermique ( $m^2 K/W$ )
$Ra_L^*$	nombre de Rayleigh pour l'air ambiant ( $\rho g (\beta \bar{T}_{p2} - T_a) L^{*3} / \alpha \mu$ )
$Ra_l$	nombre de Rayleigh pour le liquide du MCP ( $\rho g \beta (\bar{T}_{p1} - T_p) l^3 / \alpha \mu$ )
$S$	position de l'interface ou surface
$S_c$	terme de source constante

$S_p$	terme de source variable
$S_\phi$	terme de source (Tableau 3.1)
$St$	nombre de Stefan ( $\rho c \Delta T / \Delta H$ )
$T$	température
$T'$	déviation de température par rapport à sa moyenne spatiale
$T^*$	température adimensionnelle
$T_0$	température initiale
$T_1$	température inférieure de la marge de fusion
$T_2$	température supérieure de la marge de fusion ( $\Delta T = T_2 - T_1$ )
$T_a$	température ambiante
$T_f$	température de fusion ou température de l'air entrant
$T_{fe}$	température de l'air à l'entrée
$T_{fs}$	température de l'air à la sortie
$T_r$	température de référence
$T_{inf}$	température inférieure de la plaque P1
$T_{sup}$	température supérieure de la plaque P2
$T_w$	température de la paroi
$\bar{T}_p$	température moyenne de $T_{p2}$ et $T_{p3}$
$t$	temps
$t_{ch}$	temps de charge
$t_{dech}$	temps de décharge
$t_n$	temps de début d'un cycle (n le nombre du cycle)
$u$	énergie interne massique
$V$	volume d'une plaque
$w$	vitesse de déplacement d'une surface
$\mathbf{X}$	vecteur de position associé au volume élémentaire représentatif (VER)
$\mathbf{x}$	vecteur de position d'un point microscopique
$x,y,z$	variables de l'espace

## SYMBOLES GRECS

$\alpha$	diffusivité thermique
$\beta$	coefficient d'expansion thermique
$\beta_\phi$	constante (Tableau 3.1)
$\Gamma_\phi$	constante de diffusion (Tableau 3.1)
$\epsilon$	fraction liquide locale ou émissivité
$\eta$	taux d'évacuation de chaleur
$\lambda$	racine de l'équation (3.96)
$\lambda_\phi$	constante (Tableau 3.1)
$\mu$	viscosité dynamique
$\nu$	viscosité cinématique
$\rho$	densité
$\sigma$	paramètre ( $q_1/q_2$ ) ou constante de radiation de Stefan-Boltzmann
$\Phi$	fonction (équation 3.50)
$\phi$	variable généralisée (T ou $H^*$ )
$\psi$	variable physique intensive
$\omega$	facteur de relaxation
$\Omega$	volume

## EXPOSANTS

—	barre de moyenne spatiale
s	sensible

## INDICES

a	air
f	fluide (air)

i	interface
l	liquide
m	mélange
s	solide
P	nodale
p <sub>1</sub>	plaque P1
p <sub>2</sub>	plaque P2
p <sub>3</sub>	plaque P3
nb	adjacent
1	phase existant après le changement d'état
2	phase existant avant le changement d'état

## RÉFÉRENCES

Abhat A. (1983), Low Temperature Latent Heat Thermal Energy Storage: Heat Storage Materials, Solar Energy, Vol. 30, No. 4, pp. 313-332.

Alexiades A. et Solomon A.D. (1993), Mathematical Modeling of Melting and Freezing Problems, Hemisphere Pub. Corp., Washington.

Bashmat Y. et Beer J. (1986), Macroscopic Modeling of Transport Phenomena in Porous Media-1: The continuum Approach, Transport in Porous Media, Vol. 1, pp. 213-240.

Beckermann C. et Viskanta R. (1988), Natural Convection Solid/Liquid Phase Change in Porous Media, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No. 1, pp. 35-46.

Beer J. et Bashmat Y. (1986), Macroscopic Modeling of Transport Phenomena in Porous Media-2: Applications to Mass, Momentum and Energy Transport, Transport in Porous Media, Vol. 1, pp. 241-269.

Bennon W.D. et Incropera F.P. (1988), Numerical Analysis of Binary Solid-Liquid Phase Change Using a Continuum Model, J. Num. Heat Transfer, Vol. 13, pp. 277-296.

Bennon W.D. et Incropera F.P. (1987a), A Continuum Model for Mass, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change System-I: Model Formulation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, No. 10, pp. 2161-2170.

Bennon W.D. et Incropera F.P. (1987b), A Continuum Model for Mass, Heat and Species Transport in Binary Solid-Liquid Phase Change System-II: Application to Solidification in a Rectangular Cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 30, No. 10, pp. 2171-2187.

Bonacina C, Comini G., Fasano A. et Primicero M. (1973), Numerical Solution of Phase Change Problems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 1825-1832.

Bransier J. (1979), Stockage Périodique par Chaleur Latente, Aspects Fondamentaux Liés à la Cinétique des Transferts, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp. 875-883.

Brent A.D., Voller R.V. et Reid K.J. (1988), Enthalpy-Porosity Technique for Modelling Convection-Diffusion Phase Change: Application to Melting of a Pure Metal, *J. Num. Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 297-318.

Budhia H. et Kreith F. (1973), Heat Transfer with Melting or Freezing in a Wedge, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 16, pp. 195-211.

Cao Y., Faghri A. et Chang W. S. (1989), A Numerical Analysis of Stefan Problems for Generalized Multi-Dimensional Phase Change Structures using the Enthalpy Transforming Model, *Int. J. Heat, Mass Transfer*, Vol. 32, No. 7, pp. 1289-1298.

Chemical Engineering Guide to Heat Transfer (1986), Hemisphere Pub. Corp., McGraw-Hill Chemical Engineering.

Crank J. (1984), *Free and Moving Boundary problems*, Clarendon Press, Oxford.

Douglas J. et Gallie T.M. (1955), On the Numerical Intergation of a Parabolic Differential Equation Subject to a Moving Boundary Condition, *Duke Math. J.*, Vol. 22, pp. 557-570.

Farid M. M., et Husian R. M. (1990), An Electrical Storage Heater Using the Phase Change Method of Heat Storage, *Energy Convers. Mgmt.*, Vol. 30, No. 3, pp. 219-230.

Farid M. M., et Kanzawa A. (1989), Thermal Performance of a Heat Storage Module using PCM's with Different Melting Temperatures: Mathematical Modeling, *ASME J. Solar Energy Eng.*, Vol. 111, pp.152-157.



Farid M. M., Kim Y., et Kanzawa A. (1990), Thermal Performance of a Heat Storage Module using PCM's with Different Melting Temperatures: Experimental, ASME J. Solar Energy Eng., Vol. 112, pp.125-131.

Fath H.E.S. (1991), Heat Exchanger Performance for Latent Heat Thermal Energy Storage System, Energy Conves. Mgmt., Vol. 31, No. 2, pp. 149-155.

Furzeland R.M. (1980), A Comparative Study of Numerical Methods for Moving Boundary Problems, J. inst. math. appl., Vol. 26, pp. 411-429.

Gilmore S.D. et Guceri S.I. (1988), Three-Dimensional Solidification, a Numerical Approach, J. Num. Heat Transfer, Vol. 14, pp. 165-186.

Goodling J.S. et Khader M.S. (1974), Inward Solidification with Radiation-Convective Boundary Condition, ASME J. Heat Transfer, Vol. 96, pp. 114-115.

Goodman T.R. (1958), The Heat Balance Intergral and Its Application to Problems Involving a Phase Change, AMSE J. Heat Transfer, Vol. 89, pp. 335-342.

Gray W.G. (1975), A Derivation of Equations for Multi-Phase Transport, Chem. Eng. Sci., Vol 30, pp. 229-233.

Griffith R. et Nassersharif B. (1990), Comparison of One-Dimensional Interface-Following and Enthalpy Methods for the Numerical Solution of Phase Change, J. Num. Heat Transfer, Part B, Vol. 18, pp. 169-187.

Gupta R.L. et Kumar D. (1983a), Treatment of Solidification Problem Inside and Outside Cylinders By Variable Time Step Methods, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 26, pp. 313-315.

Gupta R.L. et Kumar D. (1983b), Solution of a One-Dimensional Phase Change Problem with Non-Uniform Initial Temperature, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 27, pp. 139-150.

Gupta R.L. et Kumar D. (1983c), Variable Time Step Methods With Coordinate Transformation, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 44, pp. 91-103.

Gupta R.L. et Kumar D. (1981), Variable Time Step Methods for One-Dimensional stefan Problem with Mixed Boundary Condition, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, pp. 251-259.

Gupta R.L. et Kumar D. (1980), A Modified Variable Time Step Method for the One-Dimensional Stefan Problem, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 23, pp. 101-109.

Harding A.S.K. (1982), Computer Aided Solution of Phase Change Problems, Ph.D Thesis, Dept. Mechanical Eng., University of Belaware, Newark.

Hasan M. (1988), Cyclic Phase Change: Energy Storage and Recovery, Ph.D thesis, Dept. Chemical Eng., McGill University, Québec.

Hasan M., Mujumdar A.S. et Weber M.E. (1991), Cyclic Melting and Freezing, Chemical Engineering Science, Vol. 46, No. 7, pp. 1573-1587.

Hashemi H.T. et Sliepcevich C.M. (1973), Effect of Seepage Stream on Artificial Soil Freezing, ASCE Mech. Foundation Div., Vol. 99, pp. 267-289.

Hastaoglu M.A. (1986), A Numerical Solution to Moving Boundary Problems, Application to Melting and Solidification, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 29, pp. 495-499.

Hirata T. et Nishida K. (1989), An Analysis of Heat Transfer using Equivalent Thermal Conductivity of the Liquid Phase during Melting Inside an Isothermally Heated Horizontal Cylinder, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol 32, No 9, pp. 1663-1670.

Hoogendoorn C.J. et Bart G.C.J. (1992), Performance and Modelling of Latent Heat Stores, Solar Energy, Vol. 48, No. 1, pp. 53-58.

Hsiao J.S. (1985), An efficient Algorithm for Finite-Difference Analysis of Heat Transfer with Melting and Solidification, J. Num. Heat Transfer, Vol. 8, p. 653-666.

Hsu C.F., Sparrow E.M. et Patankar S.V. (1981), Numerical Solution of Moving Boundary Problems by Boundary Immobilization and a Control Volume Based Finite Difference Scheme, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 24, No. 8, pp. 1335-1345.

Jariwala V.G., Mujumdar A.S. et Weber M.E. (1987), The Periodic Steady State for Cyclic Energy Storage in Paraffin Wax, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 65, pp. 899-906.

Kalhari B. et Ramadhyani S. (1985), Studies on Heat Transfer From a Vertical Cylinder, with or without Fins, Embedded in a Solid Phase Change Medium, ASME J. Heat Transfer, Vol. 107, pp. 44-51.

Lacroix M. (1993), Numerical Simulation of a Shell-and-Tube Latent Heat Thermal Energy Storage Unit, Solar Energy, Vol. 50, No. 4, pp. 357-367.

Lacroix M. et Arsenault A. (1993), Analysis of Natural Convection Melting Of a Subcooled Metal, *J. Num. Heat Transfer, Part A*, Vol. 23, pp. 21-34.

Lacroix M. et Garon A. (1992), Numerical Solution of Phase Change Problems: An Eulerian-Lagrangian Approach, *J. Num. Heat Transfer, Part B*, Vol. 19, pp. 57-78.

Lacroix M. et Voller R. (1990), Finite Difference Solutions of Solidification Phase Change Problems: Transformed Versus Fixed Grids, *J. Num. Heat Transfer, Part B*, Vol. 17, pp. 25-41.

Landu H.G. (1950), Heat Conduction in a Melting Solid, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 8, pp. 81-94.

Lane, G.A. (1986), *Solar Heat Storage: Latent Heat Materials, Volume II: Technology*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida.

Lazaridis A. (1970), A Numerical Solution of the Multidimensional Solidification (or Melting) Problem, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 13, pp. 1459-1477.

Lee S.L. et Tzong R.Y. (1991), An Enthalpy Formulation for Phase Change Problems With a Large Thermal Diffusivity Jump Across the Interface, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 6, pp. 1491-1502.

Mastanaiah K. (1976), On the Numerical Solution of Phase Change Problems in Transient Non-Linear Heat Conduction, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 10, pp. 833-844.

Morgan K., Lewis R.W. et Zienkiewicz O.C. (1978), an Improved Algorithm for Heat Conduction Problems with Phase Change, *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 12, pp. 1191-1195.

Murray W.D. et Landis F. (1959), Numerical and Machine Solution of Transient Heat Conduction Problems Involving Melting or Freezing, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 81, pp. 106-112.

Neilson D.E. et Incropera F.P. (1993), Three-Dimensional Considerations of Unidirectional Solidification in a Binary Liquid, *J. Num. Heat Transfer, Part A*, Vol. 23, pp. 1-20.

Okada M. (1984), Analysis of Heat Transfer During Melting from a Vertical Wall, *Int. J. Heat, Mass Transfer*, Vol. 27, No. 11, pp. 2057-2066.

Oldenburg C.M. et Spera F.J. (1992), Hybrid Model for Solidification and Convection, *J. Num. Heat Transfer, Part B*, Vol. 21, pp. 217-229.

Oldenburg C.M. et Spera F.J. (1991), Numerical Modeling of Solidification and Convection in a Viscous Pure Binary Eutectic System, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 34, No. 8, pp. 2107-2121.

Patankar S.V. (1980), Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Pub. Corp., Washington.

Pham Q.T. (1985), A Fast, Unconditionally Stable Finite-Difference Scheme for Heat Conduction with Phase Change, *Int. J. Heat, Mass Transfer*, Vol. 28, No. 11, pp. 2079-208.

Poirier D. et Salcudean M. (1988), On Numerical Methods Used in Mathematical Modeling of Phase Change in Liquid Metals, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 562-570.

Rathjen K.A. et Jiji L.M. (1971), Heat Conduction with Melting or Freezing in a Corner, *ASME J. Heat Transfer*, Vol 93, pp. 101-109.

Raw M.J. et Shneider G.E. (1985), A New Implicit Solution Procedure for Multidimensional Finite-Difference Modeling of the Stefan problem, *J. Num. Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 559-571.

Samaraski A.A., Vabishchevich P.N., Iliev O.P. et Churbano A.G. (1993), Numerical Simulation of Convection/Diffusion Phase Change Problems-A Review, *Int. J. Heat, Mass Transfer*, Vol. 36, No. 12, pp. 4095-4106.

Shah R.K. et Bhatti M.S. (1987), Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, éds. KaKac S., Shah R.K. et Aung W., Chapitre 3, John Willey&Sons, New York.

Shamsundar N. et Rooz E. (1988), Numerical Methods for Moving Boundary Problem, Handbook of Numerical Heat Transfer, éds. Minkowycz W.J. et coll., John Wiley&Sons, New York.

Shamsundar N. et Sparrow E.M. (1975), Analysis of Multi-Dimensional Conduction Phase Change Via Enthalpy Model, *J. Heat Transfer*, Vol. 97, pp. 330-340.

Sparrow E.M. et Chuk W. (1984), An Implicit/Explicit Numerical Solution Scheme for Phase-Change Problems, *J. Num. Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 1-16.

Sparrow E.M. et Broadbent J.A. (1982), Inward Melting in a Vertical Tube which Allows Free Expansion of the Phase Change Medium, *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 104, pp. 309-315.

Tien C.L. et Vafai K. (1979), Statistical Bounds for the Effective Thermal Conductivity of Microsphere and Fibrous Insulation, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 65, pp. 135-148.

Van Galen E. et Van Den Brink G.J. (1988), Energy Storage in Phase Change Materials for Solar Applications, *Int. J. of Ambient Energy*, Vol. 7, No. 1, pp. 31-46.

Viskanta R. (1986), Solar Heat Storage: Latent Heat Materials, Volume I: Background and Scientific Principles, éd. Lane G.A., pp. 153-222, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida.

Voller R.V. (1990), Fast Implicit Finite Difference Method for the Analysis of Phase-Change Problems, J. Num. Heat Transfer, Part B, Vol. 17, pp. 155-169.

Voller R.V. et Swaminathan C.R. (1993), Treatment of Discontinuous Thermal Conductivity in Control-Volume Solutions of Phase-Change Problems, J. Num. Heat Transfer, Part B, Vol. 24, pp. 161-180.

Voller R.V. et Swaminathan C.R. (1991), General Source-Based Method for Solidification Phase Change, J. Num. Heat Transfer, Part B, Vol. 19, pp. 175-189.

Voller R. V., Swaminathan C. R., et Thomas B. G. (1990), Fixed Grid Techniques for Phase Change Problems: A Review, Int. J. Num. Methodes in Eng., Vol. 30, pp. 875-898.

Weinberg A.K. (1967), Permeability, Electrical Conductivity, Dielectric Constant, and Thermal Conductivity of a Medium With Spherical and Ellipsoidal Inclusions, Soviet Physics-Doklady, Vol. 11, No. 7, pp. 593-595.

Whitaker S. (1977), Simultaneous Heat, Mass, and Momentum Transfer in Porous Media: a Theory of Drying, Advances in Heat Transfer, éd. J.P. Hautnett et T.F. Irvine, Jr., Vol. 13, pp. 119-203, Academic Press, New York.

Zhang Z. et Bejan A. (1989), Melting in an Enclosure Heated at Constant Rate, Int. J. Heat, Mass Transfer, Vol. 22, No. 6, pp. 1063-1076.

## ANNEXE

La figure 1a montre une coupe longitudinale prise au milieu de l'élément de stockage et les dimensions de l'enceinte dans laquelle il est mis. En position horizontale, l'élément se repose sur un long support en bois distant de 95 cm du plancher bas et de 200 cm du plancher haut. En position verticale, l'élément est placé sur l'extrémité droite du support face au mur à une distance de 310 cm. Les températures des parois de l'enceinte et de l'air ambiant sont supposées égales.

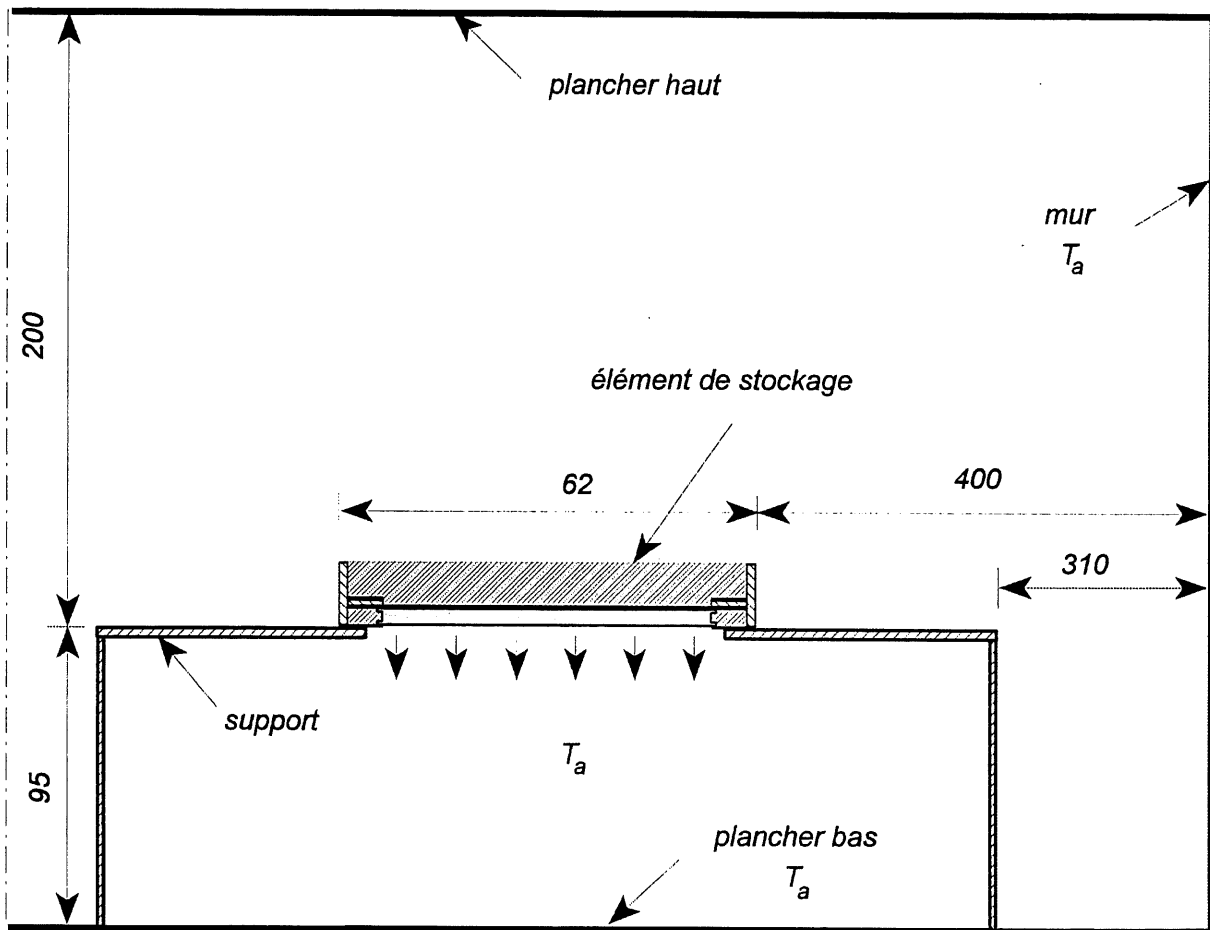


Figure 1a Vue longitudinale prise au milieu de l'élément de stockage et l'enceinte dans laquelle il est mis.