

**UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

Faculté de sciences appliquées  
Département de génie mécanique

**CONTRÔLE ACTIF  
DU BRUIT ET DES VIBRATIONS  
DANS UNE CABINE D'HELICOPTÈRE**

Maîtrise ès sciences appliquées  
Spécialité : génie mécanique

*Version censurée en raison d'une entente de confidentialité*

---

Julien MONET DESCOMBEY

Sherbrooke (Québec), Canada

Juillet 2005

Cette thèse a été caviardée par l'auteur.



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-37910-3*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-37910-3*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

## RÉSUMÉ

Le mémoire ci-présent s'inscrit dans le cadre d'un projet conduit en collaboration entre le Groupe d'Acoustique de l'Université de Sherbrooke et [REDACTED] par l'intermédiaire du Consortium de Recherche et d'Innovation en Aérospatiale au Québec et dont l'un des objectifs est la réduction du bruit structural et des vibrations ressenties en cabine par contrôle actif de ces vibrations au niveau des attaches de la boîte de transmission principale au plafond de la cabine. Au cours de cette maîtrise, un modèle analytique permettant de reconstruire le schéma modal plan d'une structure 2D composée de poutres minces dans lesquelles se propagent des ondes de flexion et d'extension a été développé. Le modèle analytique se base sur l'approche variationnelle selon laquelle l'énergie du système entier est minimisée par les équations de Lagrange. Les hypothèses de Love-Kirchhoff sont utilisées pour construire le champ de déplacement de la structure et la résolution du problème se base sur la méthode de Rayleigh-Ritz avec des fonctions de forme polynomiales ou hyperboliques. Le couplage des poutres de la structure est réalisé soit par continuité des déplacements et des rotations, soit par des ressorts virtuels de grande raideur. Le modèle a été employé pour représenter la membrure de la boîte de transmission principale d'un hélicoptère [REDACTED]. Enfin, il a servi d'outil de conception préliminaire pour le contrôle actif optimal. Il est possible de minimiser un critère global (vitesse quadratique moyenne sur une partie de la structure) ou local (accélérations ponctuelles) au moyen de forces de contrôle (axiale, en flexion ou moment) en réponse à des efforts de perturbation.

## REMERCIEMENTS

*Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de recherche, Alain Berry, professeur au département de Génie Mécanique de l'Université de Sherbrooke qui a supervisé mes travaux durant ces deux années. Merci Alain pour ta patience, tes conseils avisés, ta disponibilité et pour ne pas m'avoir coupé les ailes, quand il me prenait l'envie de visiter ce grand pays où j'ai finalement séjourné trois ans. Ce fut un plaisir de travailler avec toi et d'apprendre de toi toute cette science qui m'était jusqu'alors inconnue et dont certains aspects sont si passionnants. Je remercie également [REDACTED] et le CRIAQ sans qui ce projet n'aurait pu exister.*

*J'ai aussi eu la chance de travailler avec Yves St-Amant, trop peu de temps hélas, car tu as préféré nous "abandonner" sur le projet pour une place bien méritée de professeur à l'Université Laval. Heureusement que Pierre Bélanger est vite arrivé, car sans toi, Pierre, mon mémoire n'aurait certainement plus rien à voir avec celui-ci.*

*Mes remerciements s'adressent également à Lise Morency, Christian Clavet, Brian Driscoll, et tous ceux qui ont permis une ambiance agréable grâce à leur aide et leur encadrement. Bien entendu, je n'oublie pas tous les étudiants du Groupe d'Acoustique, en commençant par les plus anciens, Matthieu et Virginie, Franck et Karine, Sébastien, Paulin, Camille, Philippe-Aubert, Guy, Simon, JP, Magella, Guillaume, Jérôme, Patrice, Dany, Pierre L, Anthony ... et j'en oublie sûrement !*

*Mais de toutes ces personnes, je garderai un souvenir indélébile d'un autre globe-trotter, Olivier, qui m'aura fait faire des choses totalement incroyables durant la majeure partie de cette maîtrise. Mon "kouhai", je te remercie de ton amitié et je te promets que ce n'est pas le fait que tu sois en Chine avec ta douce Yilai qui m'empêchera de nous revoir. Comme on dit dans ta nouvelle langue d'adoption : 谢谢你*

*Me voici déjà en bas de la traditionnelle page de remerciements. Je suis désolé, mais une page ne peut suffire à remercier tous ceux qui ont contribué plus ou moins directement à un travail de deux ans, aussi je me permettrai cette petite entorse.*

*Car il existe des personnes qui peuvent avoir une influence inattendue sur les destins de ceux qui les entourent et il est hors de question de les négliger dans la seule partie vraiment personnelle d'un mémoire. Je tiens à présent à remercier particulièrement Bérangère, Emeline et Gérald car si je ne vous avais pas rencontré, je ne serais jamais revenu à Sherbrooke faire cette maîtrise (je n'oublie pas non plus le reste de la "gang" des anciens de Sherbrooke). Non seulement vous êtes toujours restés en contact malgré la distance mais nous avons même pu ou failli nous revoir aux quatre coins du globe. On dit souvent "loin des yeux, loin du cœur", et bien il semblerait que vous ne soyez pas encore assez loin de moi. Olivier, ceci est aussi valable pour toi.*

*Finally, je remercie toute ma famille pour m'avoir soutenu, encouragé et pour ne pas m'avoir retenu, alors que je sais que je vous ai beaucoup manqué durant ces deux ans de l'autre côté de l'océan.*

*Pour moi, cette maîtrise aura été en premier lieu une aventure humaine incroyable. J'aurai passé deux ans dans un pays grandiose et accueillant, à travailler au sein d'un des laboratoires les plus réputés dans son domaine et auprès de spécialistes dont la renommée dépasse les frontières du Canada. J'aurai côtoyé des personnes venant d'horizons totalement différents, mis le pied dans des endroits que je n'aurai jamais pensé traverser un jour et vu en vrai ce que beaucoup admirent seulement dans des livres. Encore merci Alain de m'avoir dit oui une matinée d'avril en 2002.*

## SOMMAIRE

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1.1 L'hélicoptère ██████████	1
1.1.1 Caractéristiques générales	2
1.1.2 Du moteur aux rotors	3
1.1.3 La boîte de transmission principale	5
1.2 Le projet CRIAQ 2.2	6
1.2.1 Problématique	7
1.2.2 Objectifs	11
CHAPITRE 2 - REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	14
2.1 Le contrôle passif du bruit et des vibrations	14
2.2.1 Isolation passive et contrôle large bande	15
2.2.2 Contrôle tonal	16
2.2 Le contrôle actif du bruit et des vibrations	17
2.2.1 Contrôle actif par haut-parleurs	17
2.2.2 Contrôle actif structural de la réponse acoustique et vibratoire	19
2.2.3 Active Struts (membres ou poutres actives)	22
2.3 Reconception de la source	29
2.3.1 Engrenages silencieux	30
2.3.2 Redéfinitions des éléments de la BTP	31
2.4 Bilan	31
CHAPITRE 3 - SCHÉMA MODAL D'UNE STRUCTURE PLANE COMPOSÉE DE POUTRES DROITES DANS LAQUELLE SE PROPAGENT DES ONDES DE FLEXION ET D'EXTENSION	33
3.1 Rappels théoriques	34
3.1.1 Formulation variationnelle d'un problème de vibrations de milieux continus	34
3.1.2 Fonctionnelles de Hamilton de poutres droites minces	34
3.1.3 Équations du mouvement découplées	35
3.1.4 Conditions aux limites	39
3.1.5 Méthode de Rayleigh-Ritz	39
3.2 Couplage de poutres	41
3.2.1 Formulation du couplage par continuité des déplacements et des rotations	42

3.2.2	Travaux antérieurs utilisant des ressorts virtuels de couplage	48
3.2.3	Représentation de conditions aux limites par des ressorts virtuels	53
3.2.4	Formulation du couplage par ressorts virtuels	54
3.2.5	Comparaison d'un point de vue théorique	56
3.2.6	Matrices de masse et de raideur selon la méthode des ressorts virtuels	57
3.3	Fonctions de formes	61
3.3.1	Modes propres des poutres hors couplage utilisés comme fonctions de forme	62
3.3.2	Fonctions de forme polynomiales	71
3.4	Bilan	79
<b>CHAPITRE 4 – COMPARAISONS DES MÉTHODES DE COUPLAGE SUR DES CAS SIMPLES EN VUE D'UNE APPLICATION SUR UNE STRUCTURE SIMPLIFIÉE DU MONTANT DE LA BOITE DE TRANSMISSION DU [REDACTED]</b>		<b>81</b>
4.1	Étude d'une structure en T avec la méthode de couplage par continuité	82
4.1.1	Structure en T avec deux poutres	82
4.1.2	Structure en T avec trois poutres	87
4.1.3	Bilan	92
4.2	Comparaison de la méthode de couplage par continuité et de la méthode de couplage par ressorts	93
4.2.1	Choix des raideurs des ressorts virtuels pour une structure en T à trois poutres	93
4.2.2	Schéma modal de la structure en T modélisée par trois poutres	98
4.2.3	Application à une structure à cinq poutres	101
4.2.4	Bilan	105
4.3	Application à la membrure de la boîte de transmission de l'hélicoptère [REDACTED]	106
4.3.1	Modélisation de la membrure	106
4.3.2	Comparaison du schéma modal avec le modèle NASTRAN	108
4.4	Limitations du modèle analytique	111
4.4.1	Importance de l'hypothèse des poutres minces	112
4.4.2	Limites de l'outil de calcul	116
4.4.3	Bilan	117
4.5	Un modèle destiné au contrôle actif : le modèle à six poutres	117
4.5.1	Application du modèle analytique à des structures de démonstration	118
4.5.2	Structure à six poutres pour le contrôle actif	119
4.6	Conclusions	126

CHAPITRE 5 – UTILISATION DU MODÈLE ANALYTIQUE EN TANT QU'OUTIL POUR LE CONTRÔLE ACTIF OPTIMAL DES VIBRATIONS	127
5.1 Réponse forcée à une excitation harmonique	127
5.1.1 Conventions sur la saisie des forces et des moments	128
5.1.2 Ajout de forces primaires ponctuelles sur le modèle à six poutres	128
5.1.3 Vitesse quadratique moyenne	131
5.1.4 Comparaison avec ANSYS 8.1	133
5.1.5 Réponses forcées aux six forces primaires	135
5.2 Contrôle actif optimal de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice	136
5.2.1 Minimisation de la vitesse quadratique moyenne	136
5.2.2 Contrôle actif avec une force de contrôle	137
5.2.3 Contrôle actif avec plusieurs forces de contrôle	141
5.2.4 Stratégies de contrôle	144
5.3 Critère de minimisation local	148
5.3.1 Expression générale du critère à minimiser	148
5.3.2 Applications	151
5.4 Bilan	154
CONCLUSION GÉNÉRALE	155
BIBLIOGRAPHIE	157
ANNEXE A - RAPPELS THÉORIQUES	164
A.1 Lois de comportement d'un matériau élastique homogène isotrope d'une poutre	164
A.2 Équations d'Euler pour l'extrémalisation de fonctionnelle	167
ANNEXE B - SCHÉMA MODAL D'UNE POUTRE	169
B.1 Poutre en extension	169
B.2 Poutre en flexion	170
B.3 Poutre en torsion	173
B.4 Produits scalaires	173
ANNEXE C - PRODUITS SCALAIRES DES FONCTIONS DE FORME UTILISÉES DANS LE MODÈLE	175
C.1 Définitions	175
C.2 Cas de l'extension	176
C.3 Cas de la flexion	177
ANNEXE D - NOTICE ANSYS 8.1 DE L'ÉLÉMENT SOLID45	181
ANNEXE E - INFLUENCE DE L'ANGLE ENTRE DEUX POUTRES SUR LE SCHÉMA MODAL	185



## TABLE DES FIGURES

### CHAPITRE 1

<b>Figure 1.1</b>	Le [REDACTED]	2
<b>Figure 1.2</b>	Présentations des différents éléments du [REDACTED]	3
<b>Figure 1.3</b>	Schéma simplifié du moteur (vue de coupe)	4
<b>Figure 1.4</b>	Chaînes d'engrenages du réducteur du moteur	4
<b>Figure 1.5</b>	Schéma simplifié de la boîte de transmission principale du [REDACTED]	5
<b>Figure 1.6</b>	Boîte de transmission principale fournie par [REDACTED]	6
<b>Figure 1.7</b>	Emplacements d'un accéléromètre et d'un microphone lors des tests de Mars 2004	9
<b>Figure 1.8</b>	Mesure de la pression acoustique en cabine passager et d'accélération sur la membrure avant droite de la transmission	10
<b>Figure 1.9</b>	Montage du laboratoire et mesures de déformations par vibrométrie laser	12
<b>Figure 1.10</b>	Échéancier du projet et travail accompli au bout de quatre trimestres	13

### CHAPITRE 2

<b>Figure 2.1</b>	Actionneur SIFG destiné au UH-60	19
<b>Figure 2.2</b>	Plot actif du Westland 30	21
<b>Figure 2.3</b>	Différents types de poutres actives	23
<b>Figure 2.4</b>	Présentation du système TVR sur un BK117	24
<b>Figure 2.5</b>	Poutres actives hydrauliques pour un hélicoptère BK117	25
<b>Figure 2.6</b>	Isolation active de la BTP d'un S-76	26
<b>Figure 2.7</b>	Application de poutres actives hydrauliques sur un EH-101	27
<b>Figure 2.8</b>	Poutres actives piézoélectriques	28
<b>Figure 2.9</b>	Contrôle actif d'une poutre par actionneurs magnétostrictifs	29

### CHAPITRE 3

<b>Figure 3.1</b>	Poutre, repère associé et type de vibrations	36
<b>Figure 3.2</b>	Exemple de structure avec les conventions sur les repères et les angles	43
<b>Figure 3.3</b>	Couplage entre les poutres 1 et 2	46
<b>Figure 3.4</b>	Exemples d'utilisation de ressorts pour représenter du couplage entre structures ou des conditions aux limites	50
<b>Figure 3.5</b>	Exemples d'utilisation de ressorts pour représenter des cas de couplage élaborés	51
<b>Figure 3.6</b>	Conditions aux limites avec des ressorts	53
<b>Figure 3.7</b>	Couplage par ressorts	54
<b>Figure 3.8</b>	Disposition de la matrice représentant le couplage par ressort pour un point de couplage	60
<b>Figure 3.9</b>	Poutre encastree-encastree	63
<b>Figure 3.10</b>	Huit premiers modes de flexion d'une poutre encastree-encastree de longueur $L=1$	64

<b>Figure 3.11</b>	Douze premières déformées modales d'une poutre encastrée-encastrée de longueur unitaire	67
<b>Figure 3.12</b>	Quatre premiers modes propres d'une poutre libre-libre de longueur unitaire en flexion	68
<b>Figure 3.13</b>	Évolution du rapport entre la plus grande et la plus petite valeur des matrices de masse et de raideur d'une poutre libre-libre et encastrée-encastrée en flexion en fonction du nombre et du type de fonctions de forme	71
<b>Figure 3.14</b>	Valeurs des produits scalaires d'ordre 0 et 2 pour différentes valeurs du paramètre $\alpha$	78

#### CHAPITRE 4

<b>Figure 4.1</b>	Structure en T à deux poutres	82
<b>Figure 4.2</b>	Déformées modales des modes 1 à 12 de la structure en T modélisée par deux poutres avec la méthode de couplage par continuité	85
<b>Figure 4.3</b>	Structure en T à trois poutres	87
<b>Figure 4.4</b>	Déformées modales des modes 1 à 6 de la structure en T modélisée par trois poutres avec la méthode de couplage par continuité	89
<b>Figure 4.5</b>	Déformées modales des modes 7 à 16 de la structure en T modélisée par trois poutres avec la méthode de couplage par continuité	90
<b>Figure 4.6</b>	Influence du choix des raideurs sur le schéma modal de la structure en T modélisée par trois poutres	95
<b>Figure 4.7</b>	Influence des raideurs $K$ et $C$ et du nombre de fonctions de forme par type de déplacement et par poutres sur la fréquence naturelle des cinq premiers modes de la structure en T	96
<b>Figure 4.8</b>	Déformées modales des modes 1 à 12 de la structure en T modélisée par trois poutres avec la méthode de couplage par ressorts virtuels	100
<b>Figure 4.9</b>	Description de la structure à cinq poutres	102
<b>Figure 4.10</b>	Déformées modales des modes 1 à 8 de la structure à cinq poutres	103
<b>Figure 4.11</b>	Déformées modales des modes 9 à 16 de la structure à cinq poutres	104
<b>Figure 4.12</b>	Modélisation de la membrure comme une structure à trois poutres	107
<b>Figure 4.13</b>	Déformées modales de la membrure d'après le modèle analytique	109
<b>Figure 4.14</b>	Comparaison des déformées obtenues avec le modèle analytique et le modèle simplifié sous NASTRAN	110
<b>Figure 4.15</b>	Structure en T à trois poutres	112
<b>Figure 4.16</b>	Erreur relative entre les fréquences naturelles des cinq premiers modes obtenues avec le modèle et ANSYS 8.1 en fonction du rapport $L/e$	113
<b>Figure 4.17</b>	Déformées modales des trois premiers modes plans obtenus avec le modèle analytique et ANSYS 8.1 pour des rapports $L/e$ différents	114
<b>Figure 4.18</b>	Déformées modales des modes 4 et 5 obtenus avec le modèle analytique et ANSYS 8.1 pour des rapports $L/e$ différents	115
<b>Figure 4.19</b>	Exemples de structures de démonstration	118
<b>Figure 4.20</b>	Déformées modales et fréquences naturelles pour deux modes de quelques unes des structures de démonstration	119
<b>Figure 4.21</b>	Modèle à six poutres	120
<b>Figure 4.22</b>	Comparaison des schémas modaux obtenus avec ANSYS 8.1 et le modèle à six poutres à section constante	122
<b>Figure 4.23</b>	Schéma modal de la structure à six poutres à sections non constantes	124
<b>Figure 4.24</b>	Cinq premiers modes du modèle NASTRAN présentant un comportement plan des membrures	125

CHAPITRE 5

<b>Figure 5.1</b>	Conventions sur les forces et les moments	128
<b>Figure 5.2</b>	Modèle à six poutres, repères, désignations et forces primaires	129
<b>Figure 5.3</b>	Excitation simple de la structure à six poutres par une force de flexion	134
<b>Figure 5.4</b>	Vitesses quadratiques moyennes en extension et en flexion obtenues en réponse forcée par ANSYS 8.1 et le modèle	134
<b>Figure 5.5</b>	Réponse forcée du modèle à six poutres à une excitation en $x_{21}$	135
<b>Figure 5.6</b>	Réponse forcée du modèle à six poutres à une excitation en $x_{22}$	136
<b>Figure 5.7</b>	Contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice par une force de contrôle en flexion appliquée au milieu de la poutre 3, la structure étant excitée par une force de flexion unitaire au point $x_{21}$	138
<b>Figure 5.8</b>	Exemple de contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice par une force de contrôle en flexion unitaire sur la poutre 3	139
<b>Figure 5.9</b>	Réduction globale de la vitesse quadratique moyenne en fonction de sa position sur la poutre	140
<b>Figure 5.10</b>	Contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice par trois efforts de contrôle, la structure étant excitée par une force de flexion au point $x_{21}$	141
<b>Figure 5.11</b>	Exemple de contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice par trois efforts de contrôle	143
<b>Figure 5.12</b>	Points d'application des forces de contrôle sur le modèle à six poutres	144
<b>Figure 5.13</b>	Efficacité des combinaisons à deux paires d'effort de contrôle	146
<b>Figure 5.14</b>	Présentation des quatre plus efficaces combinaisons de contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne avec deux paires d'efforts de contrôle	147
<b>Figure 5.15</b>	Évolution de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice et des amplitudes des efforts de contrôle pour les configurations 4, 8, 10 et 12	147
<b>Figure 5.16</b>	Illustration des accélérations des points choisis dans l'équation 5.21	149
<b>Figure 5.17</b>	Emplacements des accéléromètres sur la structure à six poutres	151
<b>Figure 5.18</b>	Résultats des six configurations d'accéléromètres pour deux forces de contrôle en flexion et deux forces axiales de contrôle au milieu des poutres 1 et 3	153
<b>Figure 5.19</b>	Minimisation des accélérations de la configuration 2 et comparaison de VQM avec la valeur optimale	153

## INDEX DES TABLEAUX

### CHAPITRE 3

<b>Tableau 3.1</b>	Choix des raideurs pour représenter une condition aux limites	53
<b>Tableau 3.2</b>	Paramètres $\lambda_k$ et $\sigma_k$ pour une poutre encastrée-encastrée	64
<b>Tableau 3.3</b>	Calcul de $\sigma$ par Matlab 7.0	66
<b>Tableau 3.4</b>	Fonctions de forme polynomiales pour l'extension	72
<b>Tableau 3.5</b>	Fonctions de forme polynomiales pour la flexion	73

### CHAPITRE 4

<b>Tableau 4.1</b>	Caractéristiques de la structure en T à deux poutres	82
<b>Tableau 4.2</b>	Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les quatorze premiers modes de la structure en T modélisée par deux poutres et des fonctions de forme différentes	86
<b>Tableau 4.3</b>	Caractéristiques de la structure en T à trois poutres	87
<b>Tableau 4.4</b>	Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les vingt premiers modes de la structure en T modélisée par trois poutres et des fonctions de forme différentes	91
<b>Tableau 4.5</b>	Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les quatorze premiers modes de la structure en T modélisée par trois poutres et des fonctions de forme différentes	99
<b>Tableau 4.6</b>	Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les seize premiers modes de la structure à cinq poutres	105
<b>Tableau 4.7</b>	Caractéristiques de la structure en T à trois poutres	112
<b>Tableau 4.8</b>	Caractéristiques des poutres du modèle à six poutres	120
<b>Tableau 4.9</b>	Valeurs des angles entre les poutres du modèle à six poutres	121
<b>Tableau 4.10</b>	Fonctions de forme utilisées pour le modèle à six poutres	121

### CHAPITRE 5

<b>Tableau 5.1</b>	Nature des quinze combinaisons à deux paires d'efforts de contrôle	145
<b>Tableau 5.2</b>	Configurations d'accéléromètres sur la structure	152

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION GÉNÉRALE

Afin qu'un lecteur n'ayant que peu de connaissances sur les hélicoptères en général et sur le [REDACTED] en particulier puisse consulter ce mémoire sans trop de difficultés, une présentation rapide de cet hélicoptère et du fonctionnement de ses principaux organes est nécessaire et constitue la première partie de ce chapitre. Ceci assurera une meilleure compréhension du problème de réduction du bruit et des vibrations qui sera exposé dans la deuxième partie. Les objectifs du projet, tels que définis par le CRIAQ (Consortium de Recherche et d'Innovation en Aérospatiale au Québec), y seront également présentés.

[REDACTED]

#### 1.1 L'hélicoptère [REDACTED]

[REDACTED]

1.1.1 Caractéristiques générales

Le [REDACTED], présenté à la Figure 1.1, est un hélicoptère léger pouvant emporter cinq passagers en plus d'un pilote et d'un copilote optionnel. [REDACTED]

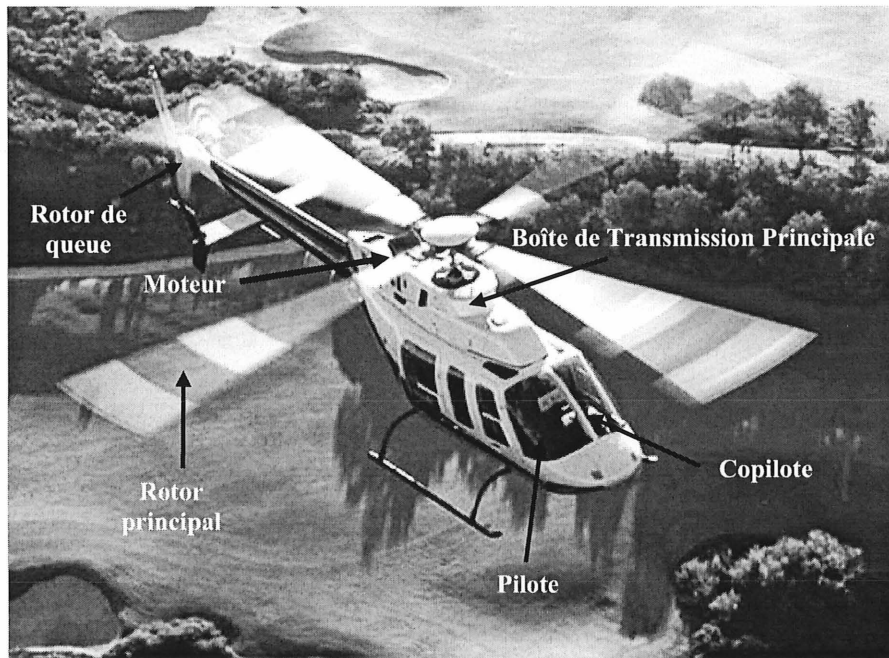


Figure 1.1 : Le [REDACTED]  
Photo disponible sur le site [REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED]

1.1.2 Du moteur aux rotors

La Figure 1.2 présente la disposition des différentes parties du [REDACTED].

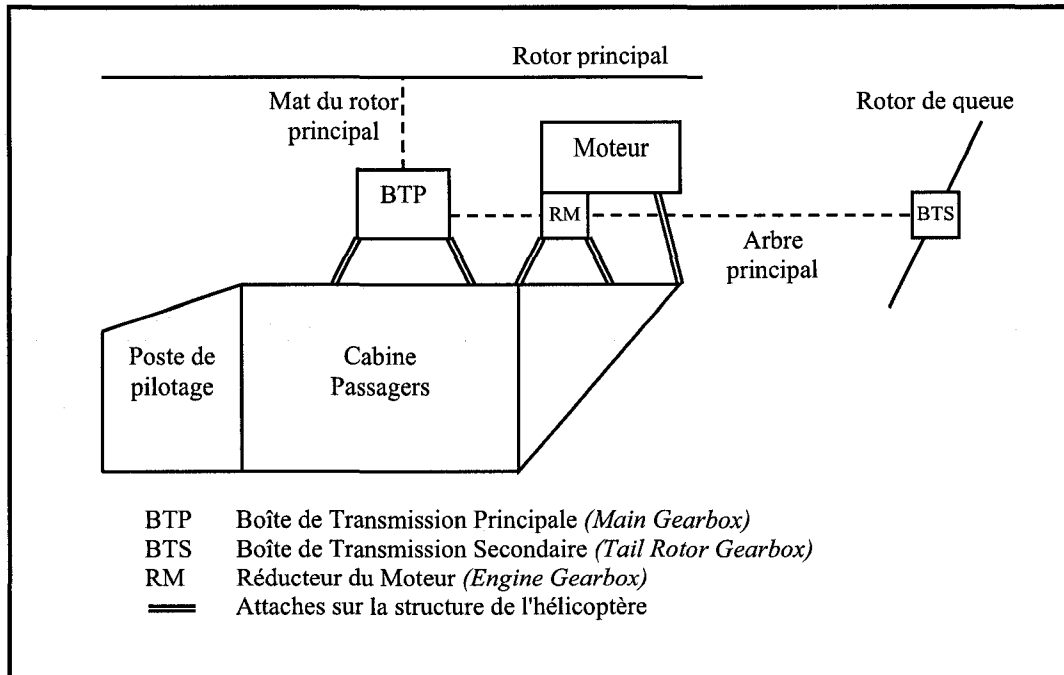


Figure 1.2 : Présentation des différents éléments du [REDACTED]

La puissance nécessaire à la propulsion de l'hélicoptère est produite par le moteur, fabriqué par Rolls Royce. Celui-ci, schématisé à la Figure 1.3, est constitué d'un compresseur centrifuge, amenant l'air à la pression adéquate dans la chambre de combustion. Le mélange gazeux résultant de la combustion est recueilli par la turbine à gaz qui entraîne le compresseur centrifuge et par la turbine de puissance, directement reliée au réducteur du moteur. En effet, cette turbine tournant à une vitesse bien supérieure à celle pour laquelle sont conçues les boîtes de transmission principales et secondaires, le réducteur de moteur, Figure 1.4, intercalé entre le moteur et l'arbre principal, permet d'assurer une vitesse de l'arbre principal de 6300 tr/min. L'arbre du compresseur est également relié à une chaîne d'engrenage actionnant la pompe à huile du moteur et est entraîné par cette même chaîne par la turbine de démarrage lors de la mise en marche du moteur.

Dans le cas du [REDACTED], la boîte de transmission secondaire est seulement constituée d'un renvoi d'angle permettant d'actionner le rotor de queue.

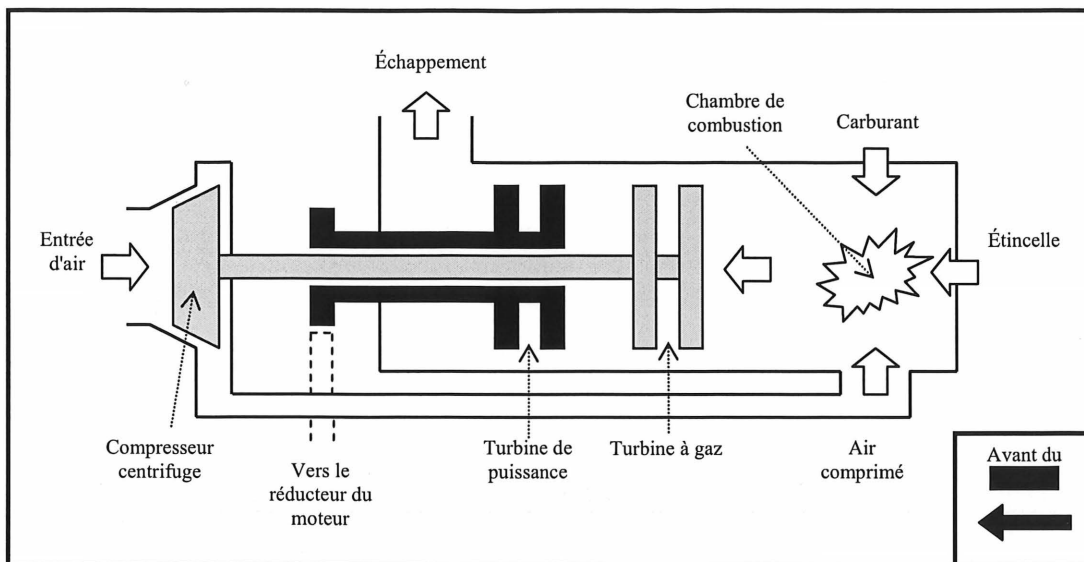


Figure 1.3 : Schéma simplifié du moteur (vue de coupe)

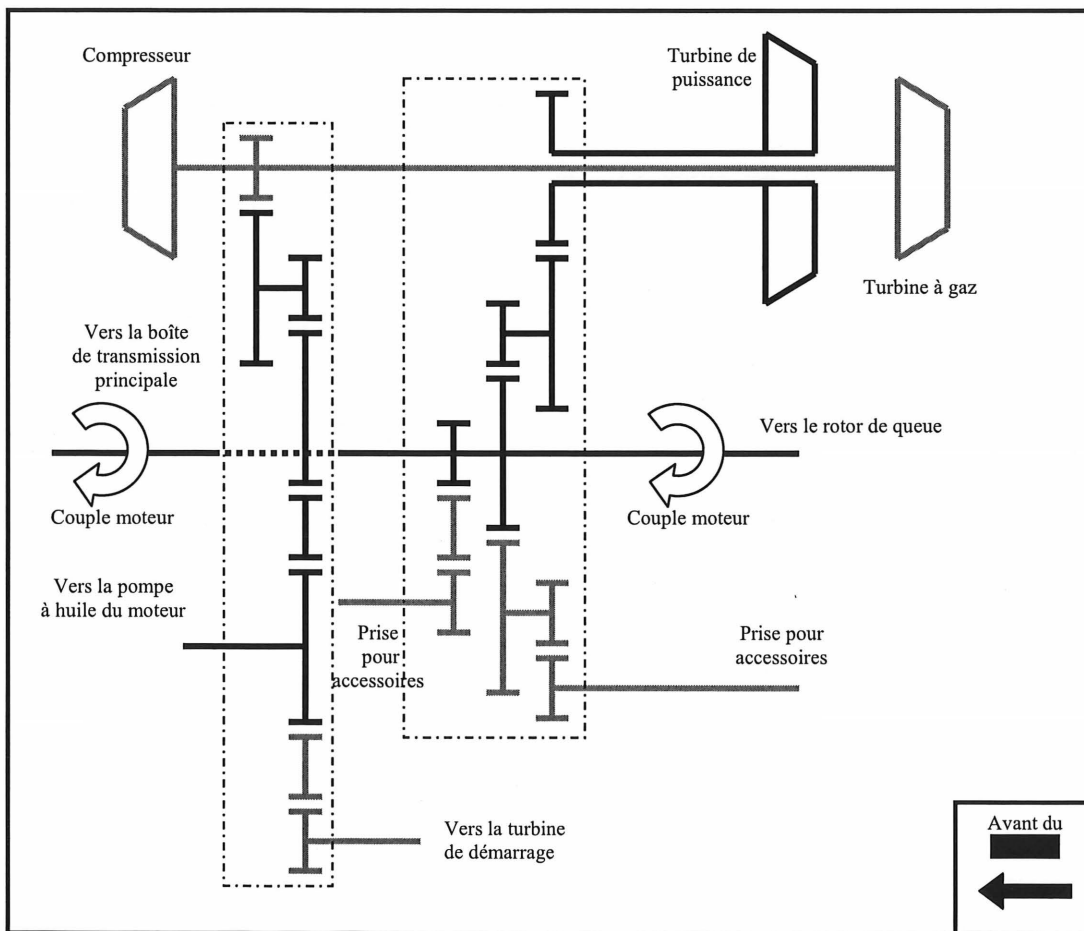


Figure 1.4 : Chaînes d'engrenages du réducteur du moteur  
Chaque chaîne est délimitée par un trait mixte fin



### 1.1.3 La boîte de transmission principale

Comme le montre la Figure 1.5, la boîte de transmission principale (BTP) est constituée d'un renvoi d'angle à engrenages hélicoïdaux et d'un train épicycloïdal avec cinq planétaires. Son rôle premier est de faire tourner le rotor principal à [REDACTED] en réduisant d'un facteur 15.3 la vitesse reçue en entrée par l'arbre principal. Elle possède et actionne elle-même mécaniquement sa propre pompe à huile.

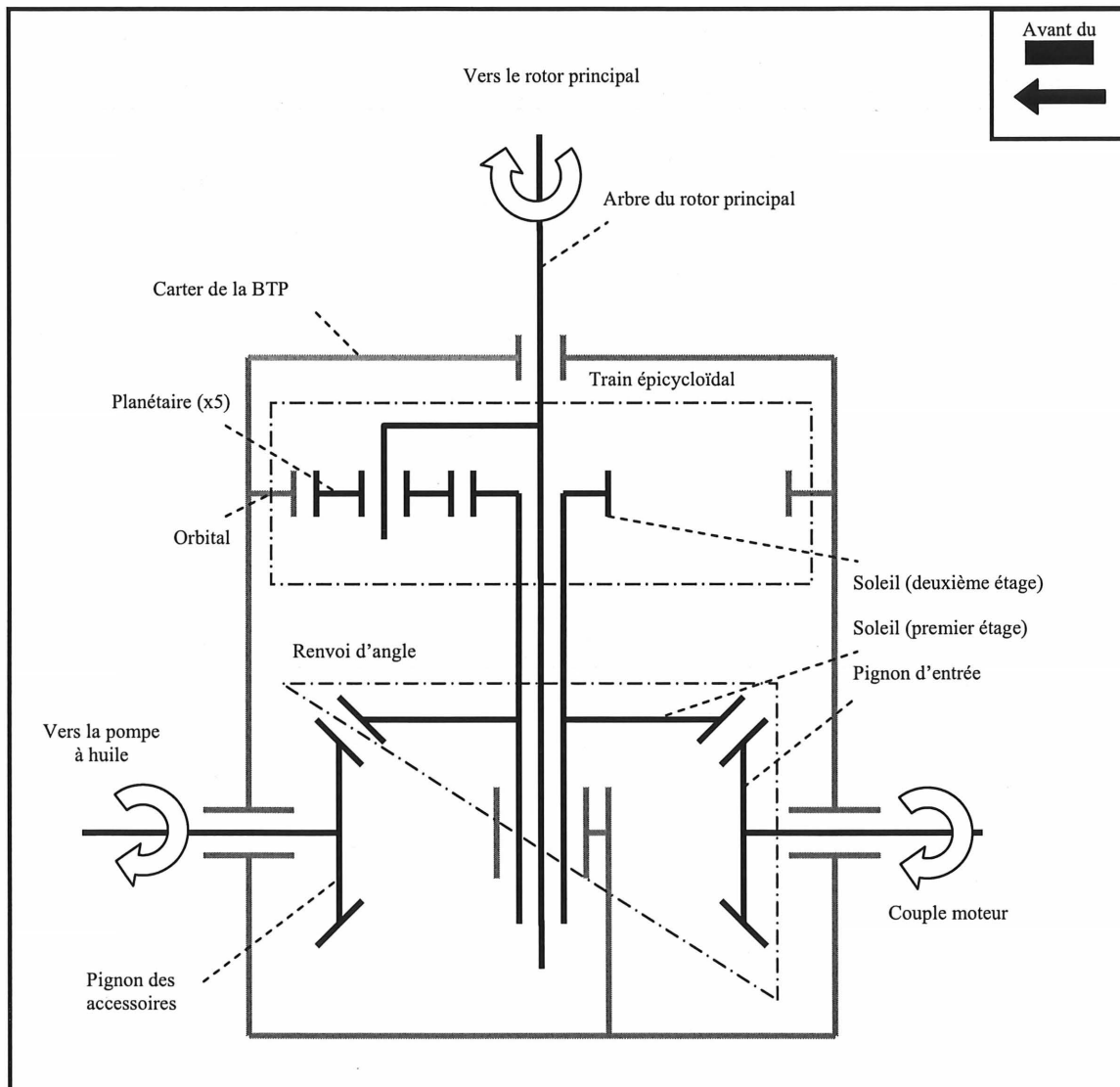


Figure 1.5 : Schéma simplifié de la boîte de transmission principale du [REDACTED]

La boîte de transmission principale est attachée à la structure de l'hélicoptère par l'intermédiaire de deux membrures en aluminium. Il existe entre ces membrures et la BTP des plots antivibratiles destinés à réduire les vibrations correspondantes aux harmoniques de la fréquence de passage des pales du rotor principal. Ces éléments sont visibles à la Figure 1.6, photo de la BTP lors de sa livraison au laboratoire du GAUS.

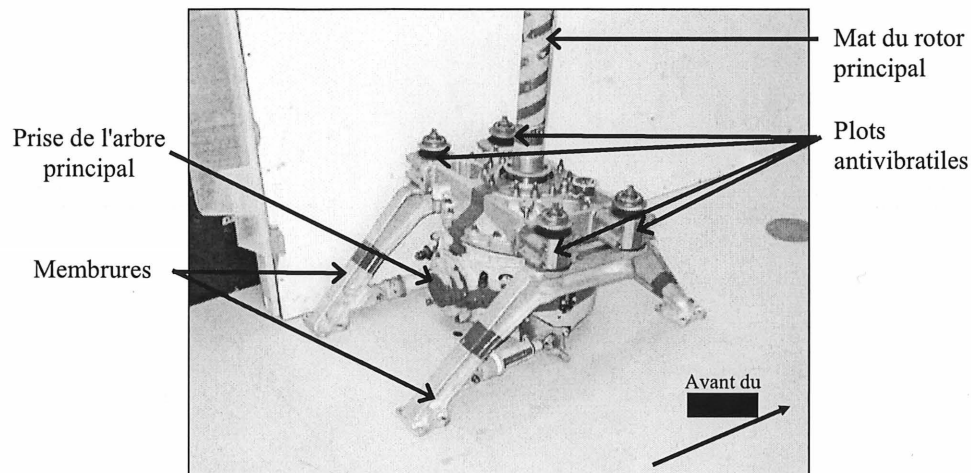


Figure 1.6 : Boîte de transmission principale fournie par [REDACTED]

Précisons que la BTP qui a été fournie par [REDACTED] ne contient aucun engrenage. Il n'est donc pas possible de la faire fonctionner.

## 1.2 Le projet CRIAQ 2.2

Ce projet est l'un des tous premiers à être commencé dans le cadre du CRIAQ. En réalité, il est constitué de deux parties distinctes, l'une concernant l'optimisation de l'isolation acoustique par des moyens passifs grâce à un logiciel utilisant la méthode SEA (Statistical Energy Analysis) et l'autre, celui présenté dans ce mémoire. Tous les deux ont pour objectifs la diminution du bruit et des vibrations dans la cabine d'un hélicoptère. Le feu vert a été donné fin janvier 2004.

### 1.2.1 Problématique

La réduction des vibrations et du bruit qu'elles induisent, est un axe de recherche très important de l'industrie aéronautique, tant au niveau des avions que des hélicoptères. Pour les hélicoptères, ce problème est d'autant plus crucial qu'il explique grandement la préférence des passagers pour l'avion, son principal concurrent, tant le niveau de confort acoustique et vibratoire y est supérieur. Les bénéfices attendus sont très importants et touchent plusieurs domaines à forte valeur commerciale, en plus du confort de l'équipage et des passagers, comme la durée de vie et la fiabilité des équipements embarqués et de l'hélicoptère même. Pour des missions militaires, où l'équipage doit rester longtemps à son poste dans la cabine, ou pour le transport d'urgence de blessés graves, qui nécessite de grandes précautions [TORRES et TOURNIER, 1997] et [DE TEMMERMAN, 1980], le bruit et les vibrations en cabine sont deux phénomènes à limiter autant que possible.

Les trois sources de bruit et de vibrations les plus importantes dans la cabine sont les rotors, le moteur et la boîte de transmission principale. Dans le cas du rotor principal, des recherches quant à l'application du contrôle actif à des fins de réduction des vibrations existent depuis plusieurs années et ont donné naissance à de nombreuses stratégies [TEVES, NIESL et coll., 1995] : le HHC (*Higher Harmonic Control*) qui contrôle l'aérodynamique du rotor principal avec des actionneurs solidaires de la structure agissant sur l'ensemble du rotor [YEN, 1980],[Wood, Powers et coll., 1983] et [NGUYEN et CHOPRA, 1990], le IBC (*Individual Blade Control*) où un actionneur modifie l'angle d'attaque de chaque pale en agissant au niveau de l'attache de la pale sur le mât du rotor [KUNZE, ARNOLD et WAASKE, 1999] ou des "pales intelligentes" équipées de volets ou se déformant, par exemple grâce à des éléments piézoélectriques [CHEN et CHOPRA, 1997] et [BERNHARD et CHOPRA, 1998], afin de modifier le flux d'air de façon à contrer la perturbation. Le problème du moteur est laissé au fournisseur; la concurrence dans ce domaine obligeant les principaux leaders du marché à développer des moteurs toujours plus silencieux pour satisfaire leurs clients. Il est livré avec son réducteur.

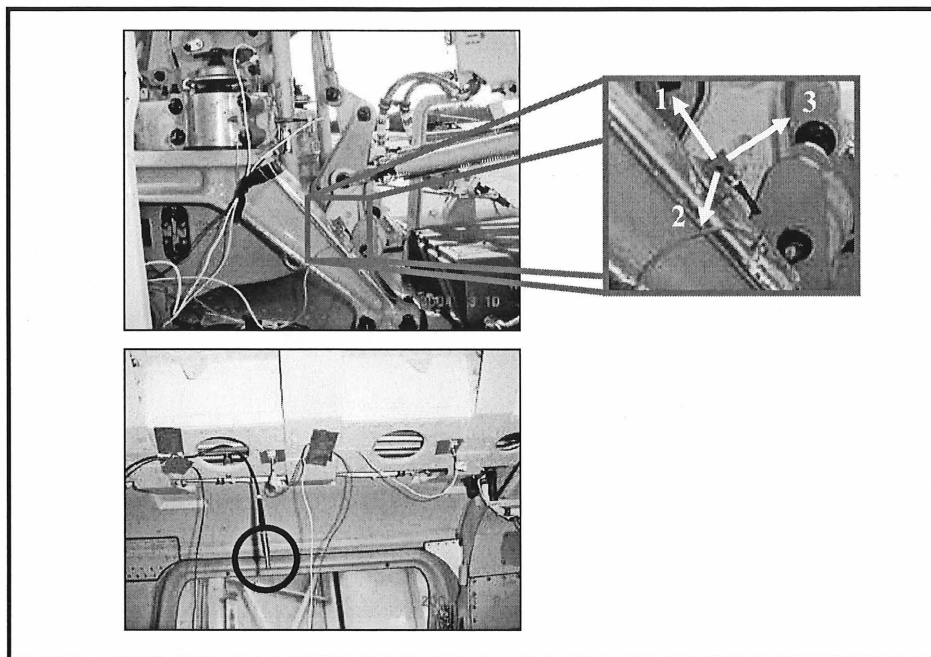
La fréquence de passage des pales des deux rotors est très basse, typiquement entre 10 et 30 Hertz pour le rotor principal et moins de 100 Hz pour le rotor de queue ou secondaire. Elles sont très énergétiques, ce qui signifie qu'à ces fréquences, le niveau de bruit est bien

plus élevé et que graphiquement on note la présence d'un pic. Mais elles sont aussi naturellement atténuées par l'oreille et artificiellement par plusieurs dispositifs intégrés dans l'hélicoptère, comme les plots antivibratiles du [REDACTED]. Le moteur possède des éléments en rotation à très grande vitesse (compresseur et turbines) dont les fréquences d'excitation vont être très élevées, entre 10 et 20 kHz. Leur effet est généralement réduit efficacement par le traitement acoustique de l'hélicoptère. Par contre, les fréquences d'engrènement des engrenages du réducteur du moteur sont plus basses, entre 4 et 20 kHz pour le [REDACTED], selon les données fournies par [REDACTED].

Les fréquences d'engrènement des pignons de la boîte de transmission principale sont dans une gamme de fréquence intermédiaire, entre 700 et 2000 Hz. Elles sont trop hautes en fréquence pour être réduites par des technologies de contrôle actif utilisant des vérins, comme le HHC, et pas assez élevées pour être réduites efficacement par le revêtement de la cabine. De plus, cette gamme de fréquence se situe dans la plage sensible de l'oreille. Ces fréquences sont donc une nuisance au confort des passagers, des équipages et ont une influence néfaste sur la durée de vie des équipements, d'autant plus qu'il n'y a pas vraiment de moyen simple pour les contrer.

En mars 2004, des mesures du bruit dans la cabine d'un [REDACTED] ainsi que d'accélération sur la BTP et le plafond de la cabine ont été réalisées par le GAUS à l'usine de [REDACTED] à Mirabel. Il s'agissait d'un hélicoptère "green", ce qui signifie qu'il était apte au vol mais qu'il ne comportait aucun habillage dans la cabine passager : pas de sièges, ni de revêtements d'aucune sorte. Ceci explique les mesures de bruit en cabine comportent une très grande quantité de pics. Cet hélicoptère provenait de la chaîne de production ; ce n'était pas un hélicoptère d'essai de la compagnie. La Figure 1.7 présente un accéléromètre tri axe monté sur une des membrures de la transmission ainsi que le microphone en cabine passager. Un aperçu des enregistrements de ces deux capteurs est disponible à la Figure 1.8 et il est possible d'y reconnaître des fréquences correspondant aux organes présentés précédemment, dont la BTP. Durant cette campagne de mesures, des mesures d'accélération ont été prises sur une trentaine de points de la structure (BTP, membrure et plafond). Les enregistrements présentés ont été faits au sol, avec le moteur fonctionnant à 100% de son régime. D'autres ont été fait en vol dans différentes conditions ou au sol avec un régime moteur de 60%.

Les fréquences d'engrènement de la BTP et leurs premiers harmoniques sont facilement repérables. Elles sont très énergétiques et rayonnent beaucoup de bruit, notamment la fréquence d'engrènement du renvoi d'angle (■ Hz) et son premier harmonique et celle entre le planétaire et l'orbital du train épicycloïdal (■ Hz) et ses deux premiers harmoniques. La fréquence d'engrènement entre le soleil et le planétaire du train épicycloïdal (■ Hz) est moins marquée.



**Figure 1.7 :** Emplacements d'un accéléromètre et d'un microphone lors des test de Mars 2004  
Le cercle bleu indique le microphone dans la cabine passage. Le carré rouge sur la membrure un accéléromètre triaxial dont les axes de mesures sont indiqués en jaune sur la vignette à droite

On constate que les harmoniques des rotors sont à basse fréquence. La fondamentale du passage des pales du rotor principal est à ■ Hz et celle du rotor de queue à ■ Hz. Elles sont les plus importantes en terme de niveau de pression acoustique, mais les accélérations relevées sont assez faibles, ce qui tend à montrer que soit les plots antivibratiles font leur travail, soit cette perturbation est essentiellement acoustique.

Les fréquences d'engrènement du réducteur du moteur sont plus élevées que celles de la BTP. Elles contribuent au bruit dans la cabine de façon non négligeable pourtant elles ne sont quasiment pas visibles sur les relevés d'accélérations. On peut en conclure que l'essentiel des vibrations du réducteur du moteur passe directement par les attaches du moteur, en non

par la BTP via l'arbre principal, avant de rayonner du bruit dans la cabine. Ainsi toute stratégie de contrôle sur la BTP n'atténuera pas ces pics.

**FIGURE SOUMISE  
A UNE ENTENTE DE CONFIDENTIALITE**

**Figure 1.8 :** *Mesure de la pression acoustique (en dB) en cabine passager et d'accélération (en g) sur la membrure avant droite de la transmission.*

*Les axes correspondent à ceux de l'accéléromètre présenté à la Figure 1.7*

Les fréquences d'excitation du compresseur et des turbines du moteur ne sont pas visibles. D'après les données fournies par [REDACTED], il est possible de les évaluer entre [REDACTED] et [REDACTED] kHz. De plus, comme remarqué précédemment, les vibrations qu'elles engendrent n'atteindront la cabine directement par les attaches du moteur que via la BTP. Ainsi, réussir à les atténuer, voire à les annuler, lorsqu'elles se propagent dans les membrures et avant qu'elles atteignent le plafond, serait la meilleure solution possible et c'est l'objectif du contrôle actif sur les membrures.

Ces mesures ont donc confirmé la présence de fréquences dérangeantes dans une gamme de fréquence où les stratégies de contrôle conventionnelles perdent en efficacité.

### 1.2.2 Objectifs

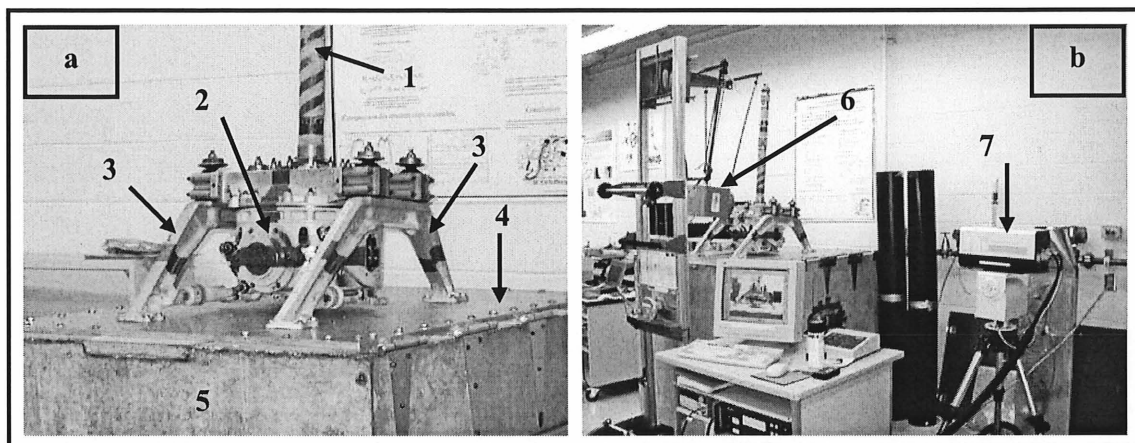
La partie du projet CRIAQ 2.2 concernant le contrôle actif du bruit et des vibrations s'étale sur trois ans, depuis son commencement officiel fin janvier 2004. Au cours de cette première année, cinq points devaient être à l'étude. Néanmoins, l'arrivée d'un second étudiant en maîtrise, Pierre Bélanger, dès juin 2004 a permis d'accélérer le travail en se partageant ces objectifs.

Le premier objectif de ce projet (*Task 1*) consiste à collecter et synthétiser le plus d'informations possibles (articles, conférences, brevets, ...) concernant le contrôle actif du bruit et des vibrations dans les cabines d'aéronefs, en particulier des hélicoptères, et au niveau des assemblages entre la BTP et la structure de l'appareil. Cette revue bibliographique, commencée dès les premiers mois de 2003, a permis de rassembler un grand nombre de documents. Cette tâche va très prochainement revenir à Pierre Bélanger.

Le second objectif (*Task 2*) consiste à caractériser la source de vibration et les chemins de transmission. Pour cela, des mesures ont été effectuées sur un hélicoptère [REDACTED] en février 2004 (tests d'impact au sol) et en mars 2004 (mesures de pression acoustique et d'accélération au sol et en vol). Leur dépouillement est à cette date toujours en cours. Néanmoins, une partie des fréquences de la BTP et d'autres organes du [REDACTED] ont pu être identifiées.

La mise en place d'une plate-forme d'étude au GAUS, en installant sur une cavité une BTP fournie par [REDACTED], Figure 1.9a, est un objectif atteint (*Task 3*). Plusieurs mesures de bruit dans la cavité, d'accéléérations sur l'assemblage ont pu être faites lorsqu'elle est soumise à une perturbation pseudo-aléatoire. Les déformations des membrures ont également été mesurées par vibrométrie laser Figure 1.9b. Cette plate-forme d'étude est maintenant prête pour tester des stratégies de contrôle actif.

Le quatrième objectif (*Task 4*) concerne la création et le développement d'un modèle par éléments finis sous MSC-NASTRAN représentant la structure du laboratoire (sans la cavité) afin d'en réaliser l'analyse modale. Cet objectif a été laissé dans sa totalité à Pierre Bélanger.



**Figure 1.9 :** Montage du laboratoire (a) et mesures de déformations par vibrométrie laser (b)  
1- Mat, 2- BTP, 3- Membrane, 4- Plaque, 5- Cavité  
6- Pot vibrant de 50 lbs, 7- Vibromètre laser

Finalement, le dernier objectif (*Task 6*) a pour but l'étude des stratégies de contrôle actif applicables à la structure du laboratoire. Un modèle analytique des membrures a alors été développé, et c'est sur ce modèle que les stratégies de contrôle actif sont testées. Il est possible d'y vérifier l'influence des actionneurs de contrôle, des capteurs d'erreur et du critère de minimisation ; le rôle de ce modèle étant de pouvoir fournir des configurations de contrôle actif prometteuse avant de les mettre en œuvre sur la vraie structure.



La Figure 1.10 présente le calendrier de l'avancement des tâches à la fin de la première année.

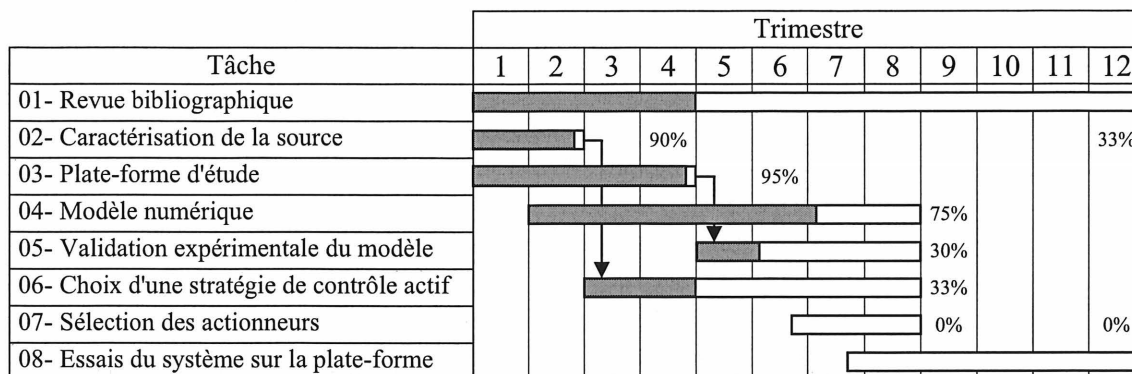


Figure 1.10 : Échéancier du projet et travail accompli au bout de quatre trimestres

Grâce à l'arrivée prématurée de Pierre Bélanger et au travail sur les objectifs précédents de Yves St-Amant, en post-doctorat sur le projet de janvier à août 2004, il a été possible de perfectionner le modèle analytique sans prendre de retard. Ce modèle est le fruit de seize mois de travail et c'est ce qui est présenté dans ce mémoire.

L'objectif principal de cette maîtrise fut donc de développer un modèle analytique capable de simuler du contrôle actif sur une structure représentative de la membrure de la BTP. Cette objectif comprend deux phases : dans un premier temps, reconstituer le schéma modal de la membrure, représentée comme une structure 2D composée de poutres où se propagent des ondes d'extension et de flexion dans le plan de ladite structure (Chapitre 3, théorique, et Chapitre 4, applicatif) et ensuite, réduire la transmission des vibrations du corps de la BTP vers le plafond (ou son équivalent dans le modèle) par des stratégies de contrôle actif optimal (Chapitre 5)

En parallèle, la collecte et la synthèse de toutes les informations recueillies pour la revue bibliographique (Chapitre 2) ont constitué un objectif secondaire non négligeable de la maîtrise, fournissant un aperçu des études en cours et des avancées réalisées par les constructeurs et les centres de recherche.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LITTERATURE

Ce chapitre constitue une rapide présentation des travaux des constructeurs aéronautiques et des laboratoires de recherche sur le problème du bruit intérieur et des vibrations principalement dans les hélicoptères. Il apparaît que les trois constructeurs les plus avancés au niveau du contrôle actif dans ce domaine sont Sikorsky aux États-Unis et Eurocopter et Westland/Agusta en Europe, cependant, même si chacun de ces groupes a déjà développé des systèmes qui ont prouvé leur efficacité, ceux-ci n'équipent aucun appareil de série.

Actuellement, il existe plusieurs méthodes pour réduire le bruit en cabine [GEMBLER, SCHWEITZER et coll., 1999], [PEARSON, GOODALL et LYNDON, 1994], [LAUDIEN et NIESL, 1990 et 1994]. Certaines sont déjà commercialisées et appliquées dans les hélicoptères, d'autres sont encore au stade du développement. Il est possible de dégager trois tendances : le contrôle passif, le contrôle actif et la reconception de la source. Si les contrôles passif et actif ciblent la transmission du bruit et des vibrations, les bureaux d'études n'hésitent pas à redéfinir les éléments bruyants pour les rendre plus silencieux.

Cette revue de littérature ne se veut pas exhaustive, mais elle constitue une bonne vision de ce qui existe déjà du point de vue contrôle actif, tout en présentant quelques possibilités n'entrant pas dans ce domaine.

#### **2.1 Le contrôle passif du bruit et des vibrations**

Le contrôle passif du son et des vibrations englobe toutes les techniques où les matériaux acoustiques et l'amortissement des vibrations sont optimisés. Celles-ci ne sont pas adaptatives ; elles seront efficaces pour une bande de fréquences de largeur prédéfinie lors de

la mise en place de la solution choisie. Le contrôle passif permet un excellent contrôle à haute fréquence, mais devient pénalisant à basse fréquence en raison du surplus de poids qu'il engendre.

### 2.2.1 Isolation passive et contrôle large bande

L'isolation passive englobe plusieurs méthodes. Elle peut être obtenue par l'augmentation de l'amortissement ou de l'épaisseur de la structure, en ajoutant localement de la masse ou en améliorant l'absorption acoustique des matériaux. Bien que basiques, ces solutions sont efficaces si l'on considère le champ acoustique total dans la cabine, car la réduction du bruit n'est pas la même pour toutes les fréquences.

Afin de mettre sur le marché une version haut de gamme du Sea King pour le transport de personnalités, Westland Helicopter est parvenu à atténuer le niveau de bruit en cabine de 0 dB à basses fréquences (inférieure à 31.5 Hz) jusqu'à 15-20 dB à hautes fréquences (jusqu'à 8000 Hz) [POLLARD et LEVERTON, 1976]. Un tel gain dans l'isolation de la cabine a entraîné un surpoids de 500 lbs.

Eurocopter a mené une campagne de mesure de l'indice d'affaiblissement pour des panneaux représentatifs de la structure d'un hélicoptère suite à une décision de faire ces panneaux en matériaux composites plutôt qu'en aluminium afin de gagner du poids [LAUDIEN et NIESL, 1990], [NIESL, FAULHABER et coll., 1995].

Encore récemment, Sikorsky a breveté un nouveau type de traitement acoustique pour la cabine de S-76 [YEORKIE JR et WADEY, 2001], utilisant une combinaison de mousses acoustiques et plusieurs couches de vinyle. Ceci a permis un gain de poids de 50 lbs et en plus d'une réduction globale de 2.2 dBA sur le niveau de bruit en cabine, en comparaison avec le traitement habituel. Le poids total de ce traitement passif est de 46 lbs.

L'isolation passive provoquant une augmentation conséquente du poids de l'hélicoptère, il n'est donc pas possible d'obtenir une insonorisation complète de la cabine de

cette manière. Toutefois, une isolation passive minimale est requise à l'intérieur de chaque appareil et les constructeurs tentent encore aujourd'hui d'en augmenter l'efficacité et la légèreté. Il est difficile d'introduire des plots anti-vibratoires entre la BTP et la structure de l'hélicoptère car les efforts statiques passent justement par les points d'attache entre la BTP et la structure.

### 2.2.2 Contrôle tonal

Contrairement au contrôle large bande, le contrôle tonal affecte seulement une seule fréquence. Les dispositifs les plus courants sont les absorbeurs dynamiques, dont le point fort réside dans leur capacité à minimiser des vibrations à une fréquence donnée de manière locale. Ce sont des systèmes (de type masse - ressort par exemple) dont l'objectif est de transférer et dissiper l'énergie de vibration. Cependant, ils sont habituellement lourds et encombrants. De plus, ils ne sont efficaces qu'à la fréquence pour laquelle ils ont été dimensionnés. Ainsi, l'utilisation de ces absorbeurs est limitée à du contrôle tonal et devient inefficace lorsque la fréquence qu'ils doivent annuler varie. Cependant, dans un hélicoptère en vol, le moteur tourne toujours à plein régime ce qui implique que les fréquences d'engrènement ou de passage des pales resteront constantes. Ces systèmes sont donc utilisés dans les hélicoptères pour réduire les vibrations du rotor ou de la BTP, notamment dans les appareils de Bell Helicopter, [GAFFEY et BALKE, 1976] ou [LEDBETTER, STAMPS et coll., 2002] lorsqu'il s'agit de réduire des vibrations à des fréquences bien déterminées et peuvent se retrouver partout dans l'appareil, comme entre la structure et les panneaux de la cabine [WADEY et YEORKIE JR, 2000] ou entre la BTP et la structure [CERTAIN, 2000a et 2000b] ou [ZOPPITELLI et GIRARD, 1998].

Un autre type d'absorbeur de vibration, par couplage fluide structure, est le résonateur de Helmholtz qui permet une utilisation intéressante des structures en nids d'abeille des panneaux de la cabine. Les alvéoles peuvent facilement être converties en résonateurs de Helmholtz en perçant la couche de matériau enveloppant le nid d'abeille : le diamètre du trou définit la fréquence qui sera contrôlée. Le meilleur résultat est obtenu pour une transformation de 25% des alvéoles en résonateurs : le coefficient d'absorption d'un panneau ainsi traité

pouvant atteindre 0.98 pour la fréquence ciblée, ici 1900 Hz. Si ce pourcentage augmente, le panneau est sur amorti et le coefficient d'absorption chute [LAUDIEN et NIESL, 1990]. Le résonateur de Helmholtz est un absorbeur de vibration ayant l'avantage d'éviter un rajout de poids ; seul le diamètre du trou demande de la précision. Il est aussi possible d'en placer dans les têtes des sièges de l'hélicoptère afin d'obtenir une réduction locale du niveau de bruit, de 5 dB (600 Hz) et 7 dB (1900 Hz) [LAUDIEN et NIESL, 1990] et comme elles sont déterminées par rapport au diamètre du trou, cette solution est valable à haute fréquence.

## **2.2 Le contrôle actif du bruit et des vibrations**

L'idée principale du contrôle actif est d'adjoindre au système une source de bruit ou de vibration supplémentaire qui va générer un signal de contrôle afin d'annuler les vibrations ou le bruit dans la cabine causées par la BTP et le rotor principal et de queue. Il est possible d'agir dans la cabine, sur les panneaux de la cabine ou sur les poutres de support de la BTP. L'utilisation de techniques de contrôle actif dans des hélicoptères est devenue possible grâce aux avancées récentes en matière d'efficacité et de miniaturisation des actionneurs, des capteurs et des calculateurs. Contrairement au contrôle passif, le contrôle actif est surtout efficace aux basses et moyennes fréquences, pour une perturbation tonale ou large bande : une isolation globale de la cabine doit donc posséder une combinaison d'éléments de contrôle actif et passif pour être optimale.

### **2.2.1 Contrôle actif par haut-parleurs**

L'objectif de cette méthode est d'obtenir une réduction du champ de pression acoustique en utilisant des haut-parleurs. Ces derniers ont pour fonction de générer un second champ de pression destiné à annuler celui causé par le rayonnement de la structure et des panneaux de la cabine. Avec cette technique, il est possible d'obtenir des résultats jamais égalés avec du contrôle passif aux basses fréquences.

En 1990, l'ISVR (*Institute of Sound and Vibration Research*) de l'Université de Southampton en Angleterre expérimente le contrôle actif du bruit par une série de haut-parleurs dans la cabine d'un avion BAe 748 pour le compte du constructeur British

Aerospace [ELLIOTT, NELSON et coll., 1990]. Il s'agit de réduire le bruit généré par le passage des pales des deux turbopropulseurs de l'avion. Avec seize haut-parleurs et trente-deux microphones, des atténuations du niveau de pression acoustique de 13 dB, 9 dB et 6 dB à la fréquence fondamentale des turbopropulseurs à leurs deux premiers harmoniques (88 Hz, 176 Hz et 264 Hz) ont pu être relevées. Une atténuation globale de 7 dB a été enregistrée au niveau des têtes des passagers dans la cabine.

Fort de cette expérience et dans le cadre du programme européen RHINO (*Reduction of Helicopter Interior Noise*), l'ISVR publie six ans plus tard les résultats sur le contrôle actif du bruit causé par le passage des pales des rotors principaux et de queue de l'hélicoptère EH101 développé par Agusta et Westland Helicopters [BOUCHER, ELLIOTT et BAEK, 1996]. Des mesures en vol, avec un système composé de seize haut-parleurs et trente-deux microphones ciblant la fondamentale (17.5 Hz) et les deux premiers harmoniques (35 et 52.5 Hz) du rotor principal et la fondamentale (63.4 Hz) du rotor de queue, des atténuations du niveau de pression acoustique de 3 dB à 12 dB furent enregistrées.

En disposant quatre haut-parleurs au-dessus des sièges et onze microphones servant soit de capteurs d'erreur, soit de capteurs de référence, pour un contrôleur de type *feedforward*, une réduction du bruit au niveau de la tête des passagers de 3 dB à 13 dB a pu être obtenue de 40 Hz à 200 Hz [JOLLY, NORRIS et coll., 1994] lors d'une étude menée par Lord Corporation sur un fuselage d'hélicoptère.

Il est donc possible d'atténuer du bruit à basses fréquences au moyen de haut-parleurs disséminés dans la cabine, ce qui n'était pas envisageable avec du contrôle passif en raison des contraintes de poids et d'encombrement qu'exige la conception d'un hélicoptère. Néanmoins, le contrôle actif par haut-parleurs se limite à 300 Hz [GEMBLER, SCHWEITZER et coll., 1999] en raison de l'apparition d'un trop grand nombre de modes acoustiques à contrôler dans la cabine : il est donc possible de couvrir les fréquences du rotor principal, mais pas celles engendrées par la BTP, comprises dans une plage allant de 500 Hz à 4000 Hz.

## 2.2.2 Contrôle actif structural de la réponse acoustique et vibratoire

Tandis que le contrôle par haut-parleurs agit sur le bruit rayonné par la structure, le contrôle actif de la réponse structurale (ou contrôle des vibrations par des éléments actifs) a pour objectif d'empêcher la structure de rayonner en imposant une déformation des panneaux de la cabine (ou du moins du plafond de la cabine) de manière à annuler les vibrations venant de la BTP. Les stratégies de contrôle se basant sur les montants de la BTP seront présentées au paragraphe suivant. L'un des avantages évident provient du fait que la densité modale du système à contrôler est moindre que dans le cas acoustique. De nombreuses recherches ont été menées, dont voici quelques résultats.

Sikorsky a testé le contrôle actif de la réponse structurale sur trois de ses hélicoptères. Le UH-60 a été la première plate-forme de test du procédé [WELSH, FREDRICKSON et coll., 1995] qui visait la réduction de la fréquence fondamentale du passage des pales du rotor principal à 17 Hz. Dix accéléromètres, situés du nez de l'appareil jusqu'en arrière de la cabine passager, sont utilisés pour mesurer les vibrations de la structure et servent de capteurs d'erreur pour le contrôle en *feedback*. Les forces de contrôle sont générées par deux unités dénommées SIFG (*Servo Inertial Force Generators*) et sont constituées de systèmes masse-ressort, qui permettent un contrôle passif des vibrations, déjà l'objet d'un brevet [MARSHALL II, 1980]. Comme le montre la Figure 2.1, l'un des ressorts est aussi relié à un actionneur hydraulique et lorsque celui-ci est piloté par un servo contrôleur, le système est capable de générer des forces de contrôle.

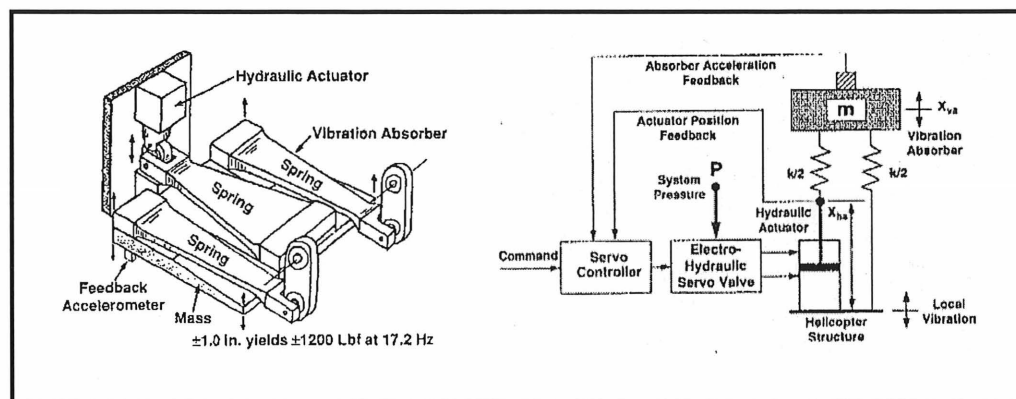


Figure 2.1 : Actionneur SIFG destiné au UH-60, croquis (à gauche) et principe (à droite)  
[WELSH, FREDRICKSON et coll., 1995]

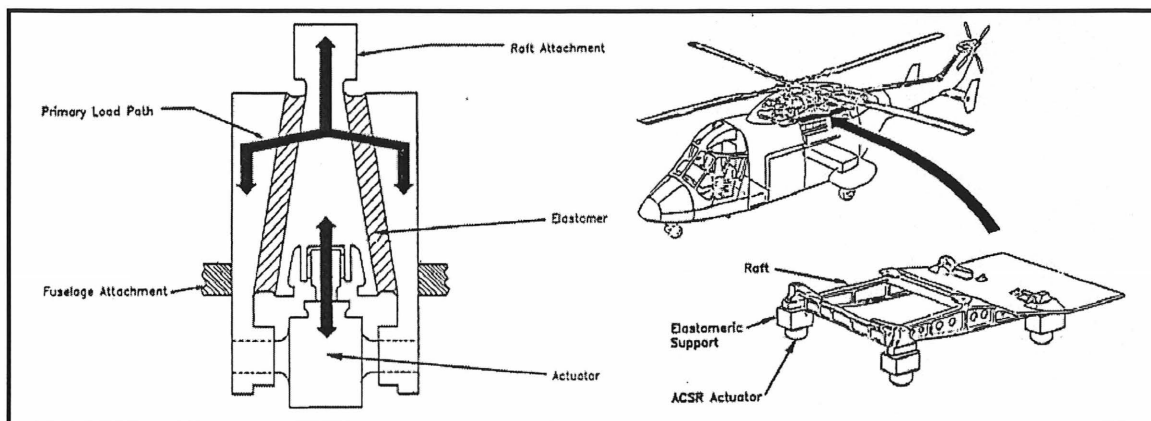
Dans le poste de pilotage, les niveaux de vibration passent de 0.8 g à 0.4 g avec le mode "passif" et atteint les 0.15 g en mode "actif". En mode "actif", tous les points de mesures donnent des niveaux de vibration de 0.15 g au maximum. Ces résultats ont été obtenus lors d'essais en vol. Le système est destiné au contrôle d'une seule fréquence, puisqu'il a été conçu pour être résonnant à la fondamentale du passage des pâles à 17 Hz. Ceci permet d'utiliser un minimum de puissance hydraulique au niveau du vérin, mais rend le système plus lent à réagir face à une variation des vibrations.

Pour le S-76, des actionneurs de force inertielle d'un autre type (non précisé) ont été placés sur la structure même, au plus proche des liaisons avec la BTP [YEORKIE JR, WELSH et SHEEHY, 1994] et [MILLOTT, WELSH et coll., 1998] En effet, sur cet appareil, la BTP est directement rivetée à la structure, il n'y a pas de membrures. Ce sont trente-six microphones placés dans les parties pilote et passagers de la cabine qui assurent le rôle de capteurs d'erreur. Le contrôle est effectué en *feedback* est vise à atténuer un bruit d'engrènement à 800 Hz. Au sol, une réduction de la pression acoustique dans la cabine de 20dB a été obtenue, tandis qu'en vol stationnaire au niveau du sol et à vitesse de croisière en vol normal, des réductions de 18dB et de 8dB ont été enregistrées.

Le même type d'actionneur a été disposé sur la structure du S-92 [GOODMAN et MILLOTT, 2000] avec en plus un absorbeur passif au niveau de la tête du rotor principal dont la fréquence de passage des pales est visée. Les capteurs d'erreur sont des accéléromètres répartis dans la cabine qui ont enregistré lors des tests en vol des accélérations de 0.02 g à 0.12 g lorsque le système est en marche contre 0.06 g à 0.35 g sans contrôle. Ces systèmes font l'objet de brevets [WELSH et YEORKIE, 2000a et 2000b]

Westland Helicopter a mis au point un plot actif, présenté à la Figure 2.2, et destiné au Westland 30. Il est placé au niveau des points d'ancrage de la BTP sur la structure et est utilisé pour contrôler la fondamentale de passage des pales à 17 Hz. Sa géométrie particulière fait qu'il reste sûr en cas de bris. Les capteurs d'erreurs sont constitués de vingt-quatre accéléromètres placés en cabine, dans le cockpit, au niveau du moteur et près du rotor de queue. Les essais au sol et en vol ont montré que ce plot actif permettait d'atteindre entre 0.1 g et 0.2 g d'accélérations sur tous les points de mesures, excepté ceux près du moteur, qui n'étaient pas suffisamment réduits par le système [KING et STAPLE, 1986], [STAPLE, 1989].





**Figure 2.2 :** *Plot actif du Westland 30* [KING et STAPLE, 1986], [STAPLE, 1989]  
*A gauche, schéma du plot. A droite, intégration dans le Westland 30*

L'implantation dans le plafond d'un hélicoptère MD900 de 48 actionneurs piézoélectriques a été réalisée pour le compte de Boeing [O'CONNELL, MATHUR et coll., 2001]. Les capteurs d'erreurs sont huit microphones répartis dans la cabine. Une réduction globale du niveau de bruit de 4 dB a été obtenue en vitesse de croisière pour des fréquences allant jusqu'à 1000 Hz. Au-delà, la réduction est locale. Ce système est en cours de développement ; l'algorithme de contrôle n'est pas assez rapide pour réagir aux changements de régime de l'hélicoptère et cible difficilement les fréquences importantes à contrôler.

A l'ONERA (Office Nationale d'Étude et de Recherche Aérospatiale), le contrôle actif a été appliqué à une plaque représentative d'un plafond d'hélicoptère couplé à une cavité. Cette plaque est faite en matériaux composites et fut soumise à des excitations, similaires à celles produites par une BTP et produites par des pots vibrants, qui sont contrôlées par quatre actionneurs piézoélectriques associés à quatre accéléromètres (capteurs d'erreurs) et des microphones [SIMON et PAUZIN, 2000]. Le champ de pression acoustique rayonné par la plaque subit alors une réduction globale de 6 dB pour une bande de fréquences s'étalant de 500 Hz à 3000 Hz. Le contrôle actif d'un panneau d'hélicoptère en nids d'abeille y a également été étudié en utilisant huit actionneurs piézoélectriques de type PZT et huit capteurs piézoélectriques de type PVDF [COSTES et LEGRAIN-NAUDIN, 1999]. Pour une bande de fréquence allant jusqu'à 1000 Hz, une réduction du niveau de vibrations dans le panneau de 25% à 45% est obtenue.

Eurocopter a également fait des études sur le contrôle actif d'un panneau d'hélicoptère par trois actionneurs piézoélectriques [NIESL, FAULHABER et coll., 1995]. Des réductions du niveau de pression rayonnée par le panneau seul pouvant atteindre 18 dB ont pu être observées pour des fréquences allant de 100 Hz à 200 Hz.

Le contrôle actif de la réponse structurale a pris son essor lorsque les constructeurs d'hélicoptères ont décidé de remplacer les panneaux de la cabine, habituellement constitués d'une plaque d'aluminium, par des composites afin de gagner du poids. Cette perte de poids a engendré une diminution de l'indice d'affaiblissement des panneaux [NIESL, FAULHABER et coll., 1995], [SIMON et PAUZIN, 2000] et l'utilisation de matériaux absorbants est à présent nécessaire. Comme ces matériaux ont de nombreux inconvénients (poids, épaisseur, efficacité limitée à basse fréquence), il a fallu leur adjoindre un contrôle actif des vibrations.

Cette technique de contrôle s'avère très efficace pour des fréquences restant inférieures à 1000 Hz, ce qui constitue la limite basse de la gamme de fréquences des vibrations causées par la BTP. Les résultats obtenus pour des fréquences plus élevées [SIMON et PAUZIN, 2000] sont le fruit d'expérimentations simples et non dans le cadre d'essais dans un hélicoptère.

### 2.2.3 Active Struts (membres ou poutres actives)

Il s'agit de réduire les vibrations issues de la BTP avant même qu'elles n'atteignent les panneaux de la cabine. Pour cela, le contrôle actif a lieu sur les poutres reliant la BTP au panneau du toit de la cabine, en sachant que par ces poutres, des ondes longitudinales, de flexion et de torsion sont transmises. Trois types différents de membres actifs ont été étudiés ; une illustration de chaque type par un modèle existant, est donnée à la Figure 2.3.

Une poutre active hydraulique ne peut exercer qu'une force de contrôle longitudinale. Il en faut donc au moins deux pour contrôler de la flexion. De plus, elle possède une bande passante limitée. Une poutre active magnétostrictive génère des vibrations en faisant osciller les masses auxquelles sont reliés les actionneurs magnétostrictifs. Pour une poutre active piézoélectrique, les vibrations de contrôle sont produites par les déformations des

piezocéramiques. Le concept de poutre active a fait l'objet de plusieurs études dont voici quelques résultats.

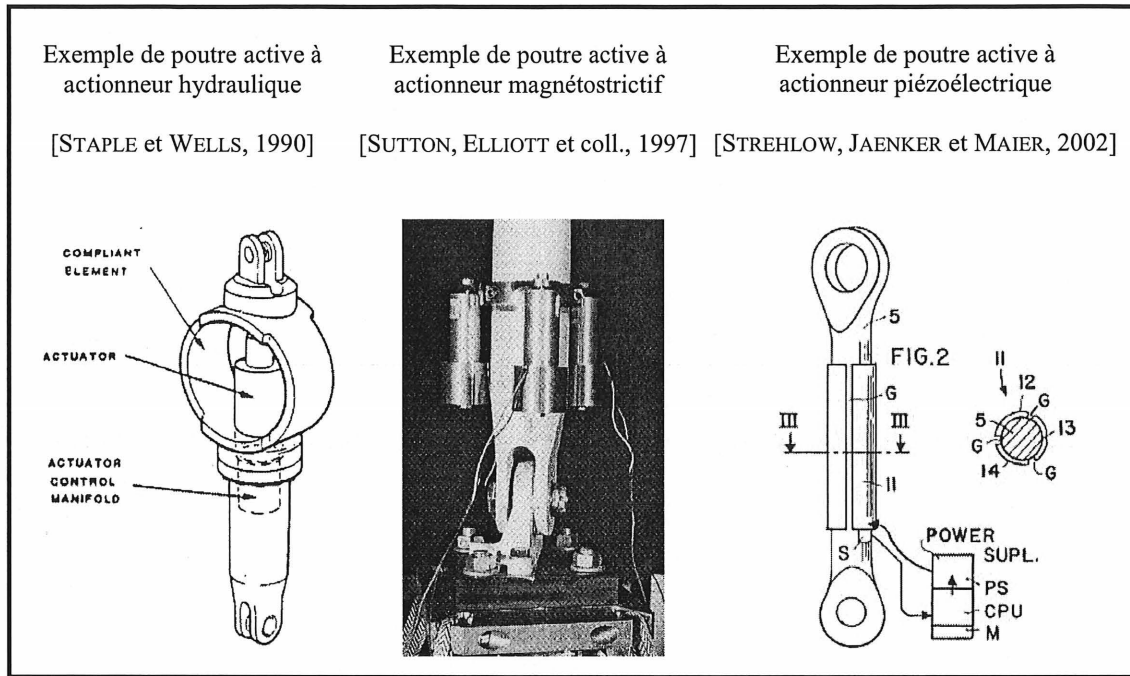
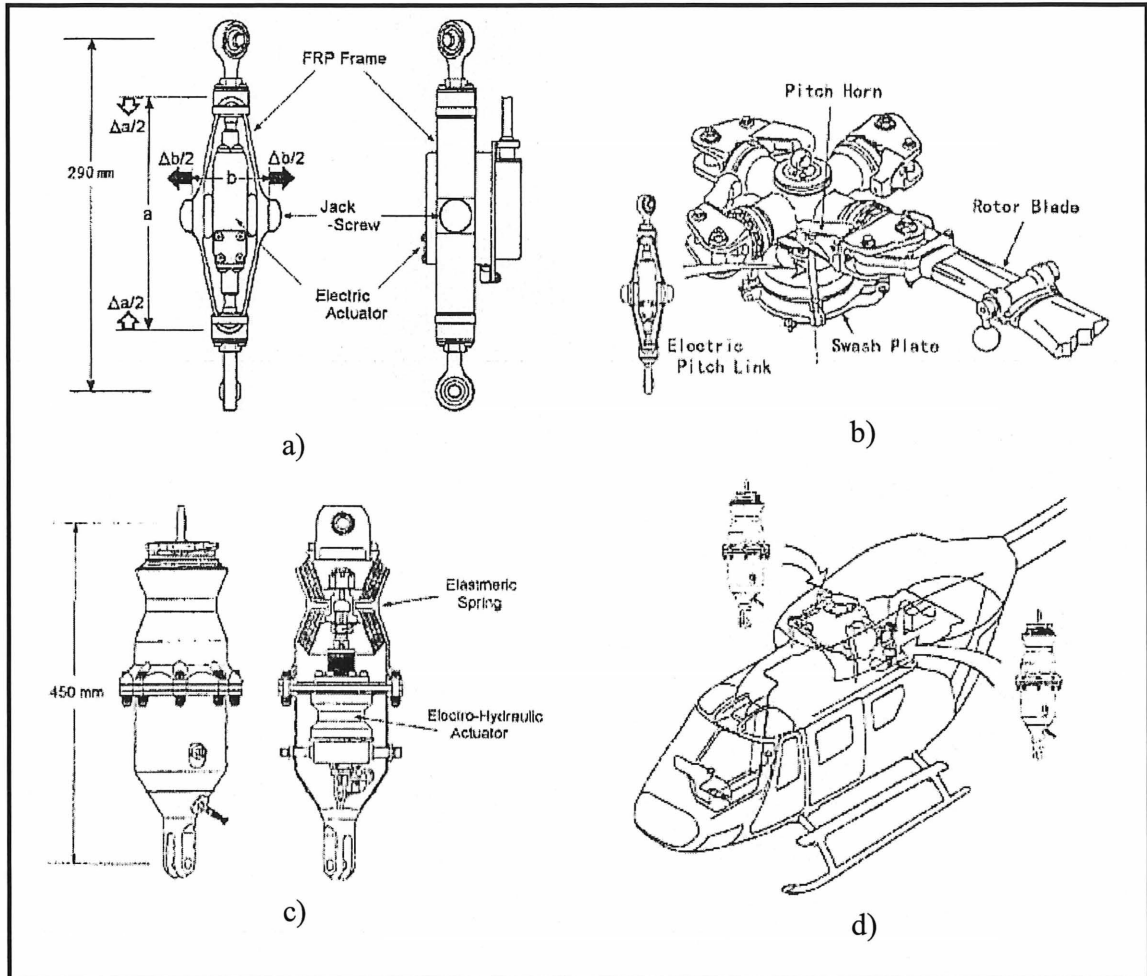


Figure 2.3 : Différents types de poutres actives

Kawasaki Heavy Industries a développé sur l'hélicoptère BK117 un double système de contrôle actif, présenté à la Figure 2.4, afin de réduire les vibrations induites par le rotor principal [ASO et BANDO, 1999]. Ce système, nommé TVR (*Total Vibration Reduction*) est composé d'un premier élément actif AAPL (*Automatic Adjustable Pitch Link*) monté en parallèle entre la pale du rotor et son mât. Cet élément est constitué d'un actionneur électrique déformant une structure souple reliant la pale au rotor. Le BK117 ayant quatre pales, il est équipé de quatre AAPL. Il est conçu pour travailler à la fréquence de passage des pales 1/rev uniquement. Le second élément actif du TVR est un actionneur hydraulique, dénommé AVR (*Active Vibration Reduction*), remplaçant deux des quatre montants entre la BTP et le plafond et destiné à réduire les harmoniques 4/rev et 8/rev du rotor. Les capteurs d'erreurs sont des accéléromètres dans les deux cas. Le TVR a été testé en vol. Les résultats semblent prometteurs puisque dans toute l'enveloppe de vol, le niveau d'accélération aux capteurs d'erreur est maintenant inférieur à 0.01 g pour 1/rev et 0.1 g pour 4/rev et 8/rev. A l'époque de

l'article, Kawasaki parlait d'une production en série du système TVR. Pour information, le BK117 est la version japonaise du EC134 développé conjointement avec Eurocopter.

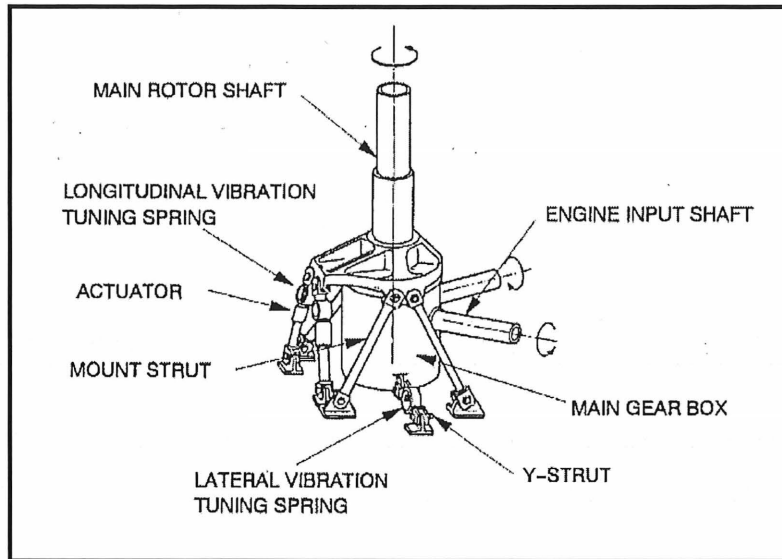


**Figure 2.4 :** Présentation du système TVR sur un BK117 [ASO et BANDO, 1999]

- a) actionneur actif AAPL    b) Emplacement sur le rotor principal  
c) actionneur actif AVR    d) Emplacement dans l'hélicoptère

Les résultats précédents sont le fruit d'une première tentative de contrôle actif, de la part de Kawasaki, utilisant des actionneurs hydrauliques [NIWA et KATAYAMA, 1994] présentés à la Figure 2.5. Il avait été montré lors de tests en laboratoire avec un vrai BK117 excité de manière réaliste que ce système est capable de faire baisser les accélérations dans la cabine en dessous des 0.1 g.

Cette étude avait été poursuivie [KAWAGUCHI, BANDO et NIWA, 1996] avec un actionneur plus évolué, le futur AVR, qui avait démontré ses capacités lors d'essais en vol.



**Figure 2.5 :** *Poutres actives hydrauliques pour un hélicoptère BK117*  
[NIWA et KATAYAMA, 1994]

Dès le milieu des années quatre-vingt, Sikorsky pensait à utiliser des actionneurs hydrauliques pour isoler activement la BTP de la cellule de l'hélicoptère tel que présenté à la Figure 2.6. Cette méthode a été testée sur un vrai S-76 excité artificiellement. L'objectif était de contrôler la fondamentale du rotor (5 Hz) et son troisième, quatrième (qui correspond aussi à la fréquence fondamentale de passage des pales) et huitième harmonique [WELSH, VON HARDENBERG et coll., 1990]. Les capteurs d'erreurs sont seize accéléromètres mono axes ou tri axes placés sur tout l'appareil. Au niveau du pilote et du copilote, les accélérations enregistrées étaient inférieures à 0.05 g lorsque le système fonctionnait.

Récemment, un équipementier de Sikorsky a breveté un nouveau type d'actionneur hydraulique, mais son efficacité n'a pas encore fait l'objet de publication. [TERPAY et ZIPFEL, 2003a et 2003b], [WELSH, 2002]

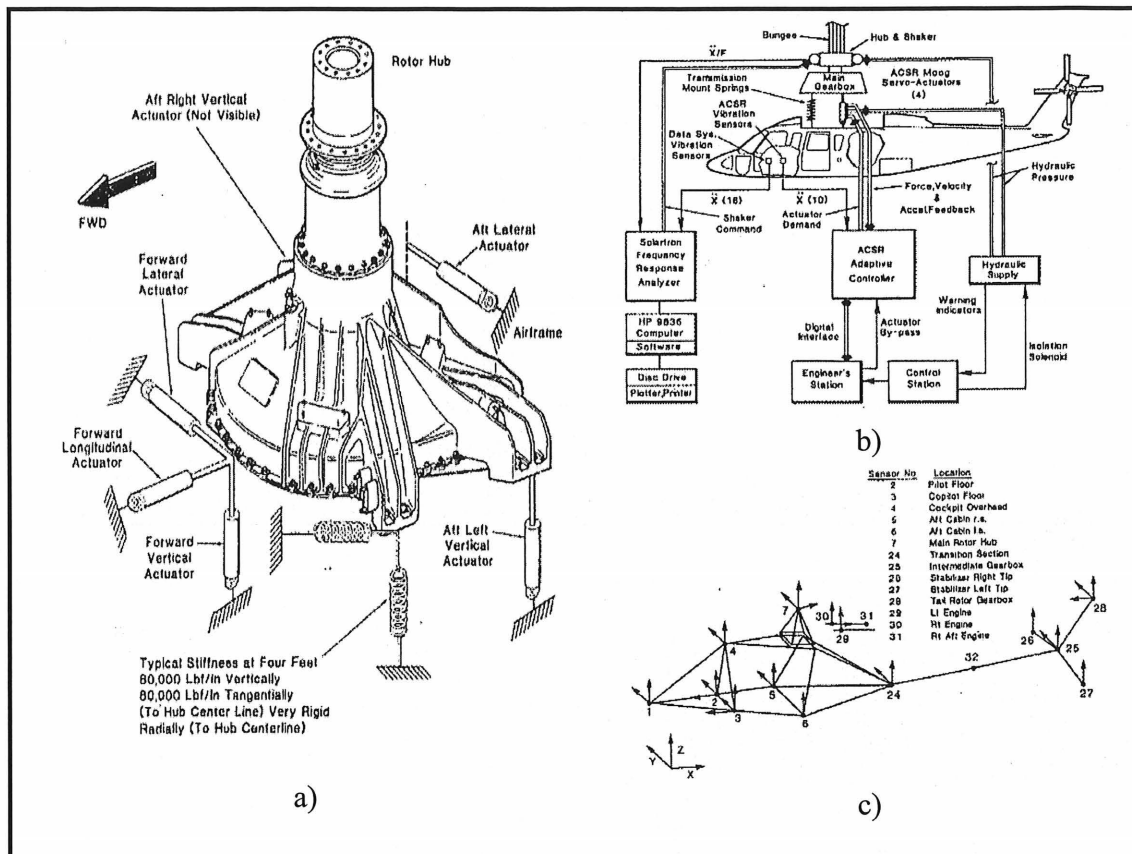
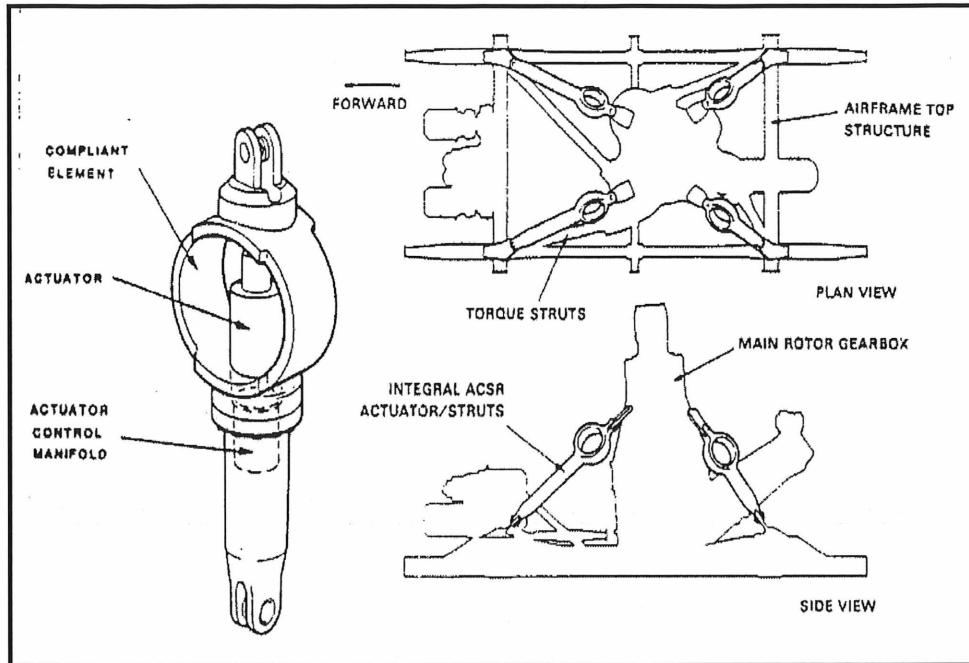


Figure 2.6 : Isolation active de la BTP d'un S-76 [WELSH, VON HARDENBERG et coll., 1990]  
 a) Croquis du système b) Principe c) Emplacement et axes des accéléromètres d'erreur

L'utilisation de poutres actives hydrauliques, Figure 2.7, par Westland Helicopter dans un EH 101 [STAPLE et WELLS, 1990] a permis de réduire de 90% les vibrations en cabine et de 75% dans tout l'appareil pour la fréquence de passage des pales du rotor principal.

Des études ont été menées sur l'optimisation du poids des actionneurs et des capteurs, sur l'efficacité du système en cas de perte d'un des actionneurs et sur la réduction des premiers harmoniques du passage des pales, ainsi que des problèmes de production et de certification [HACKETT, 1995].

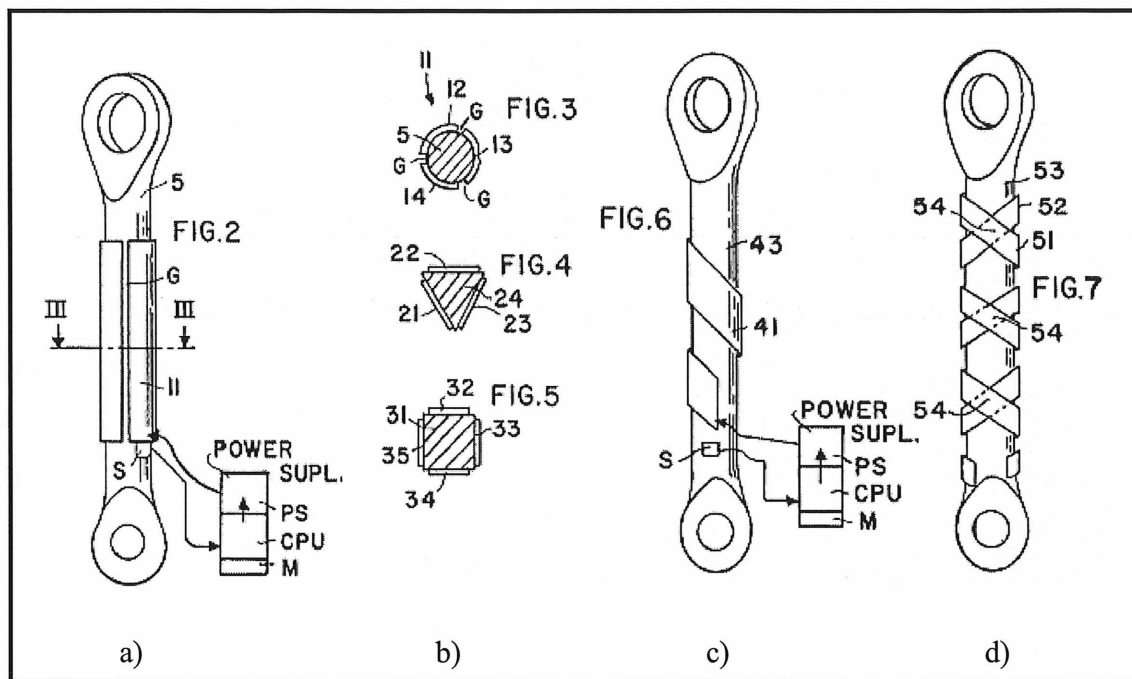


**Figure 2.7 :** Application de poutres actives hydrauliques sur un EH-101 [STAPLE et WELLS, 1990]  
*A gauche, une poutre active, à droite, leur intégration sur la BTP*

L'utilisation de poutres actives piézoélectriques est actuellement développée par Eurocopter pour le BK117 et le EC135 [GEMBLER, SCHWEITZER et coll., 1998 et 1999]. Des tests en laboratoires sur une cellule de EC135 ont mis en évidence une réduction du niveau de pression acoustique en tous points de la cabine de 8 à 12 dB pour une gamme de fréquences s'étalant de 700 Hz à 2000 Hz. Des mesures au sol dans un BK117 ont montré une réduction de la pression acoustique de 5 dB dans la cabine et de 8 dB à la fréquence de 1900 Hz qui était un des pics à réduire. La Figure 2.8 présente les différents types de poutres piézoélectriques étudiées et brevetées par Eurocopter.

Cette structure a été conçue de façon à supporter des charges allant de  $-10\text{kN}$  à  $30\text{kN}$  ; pour cela les poutres sont portées à  $120^\circ\text{C}$  et les segments piezocéramiques sont électriquement comprimés par un voltage de  $1500\text{V}$  pour être collés. Ces articles sont parus alors que les essais en vol n'avaient pas encore débuté.

Deux types de stratégies de contrôle ont été développés en parallèle. La première est du *feedforward* avec un contrôleur x-LMS, utilisé lors des tests en laboratoire et le second est du *feedback* avec contrôleur avec rejet de la perturbation, actuellement utilisé pour le contrôle actif des pales du rotor.



**Figure 2.8 :** *Poutres actives piézoélectriques* [STREHLOW, JAENKER et MAIER, 2002]

a) *Poutre pouvant travailler en flexion ou en extension*

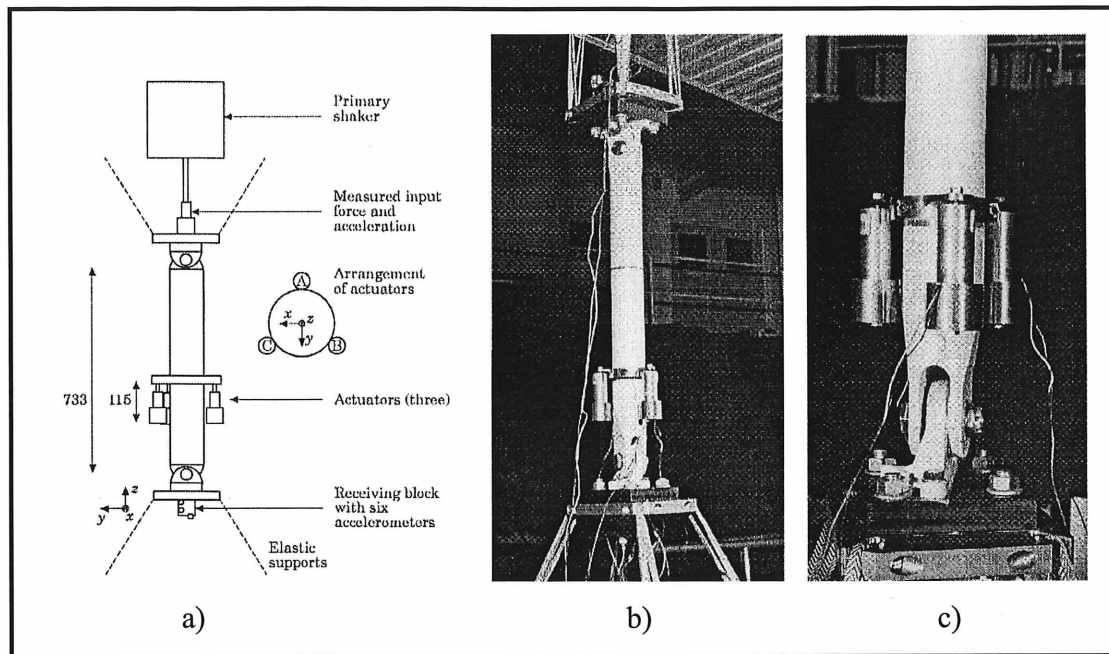
b) *Configurations possibles sur trois types de section*

c) *Poutre pouvant travailler en torsion uniquement*

d) *Poutre pouvant travailler en flexion, en extension ou en torsion*

L'ISVR de l'Université de Southampton a aussi étudié les poutres actives magnétostrictives, Figure 2.9, en laboratoire dans l'optique d'une application aux hélicoptères [SUTTON, ELLIOTT et coll., 1997]. Une atténuation du niveau d'énergie cinétique dans la partie réceptrice de 30 dB à 40 dB a été mesurée pour des fréquences allant de 250 Hz à 1250 Hz. Les auteurs suggèrent l'installation d'un quatrième actionneur afin de contrôler plus efficacement les vibrations de torsion.





**Figure 2.9 :** *Contrôle actif d'une poutre par actionneurs magnétostrictifs* [SUTTON, ELLIOTT et coll., 1997]  
 a) Schéma du montage    b) Photo d'ensemble    c) Détail sur les actionneurs

Les poutres actives permettent d'obtenir de bons résultats pour une gamme de fréquences correspondant à celle des vibrations produites par la BTP ou par le rotor principal. Des trois concepts présentés, la poutre active piézoélectrique est la plus intéressante car elle peut vibrer en flexion et en extension, son installation ne nécessite pas beaucoup d'espace et n'alourdit pas significativement la structure. De plus, il serait possible de convertir d'autres modèles en leur ajoutant des éléments piezocéramiques au lieu de refaire la conception d'une poutre entière. Cependant la charge qu'elles doivent reprendre (le poids de l'hélicoptère pondéré du nombre de g auquel il est soumis) est un facteur très contraignant à ne pas négliger.

### 2.3 Reconception de la source

Outre l'utilisation de contrôle passif et actif, les bureaux d'étude travaillent aussi sur la BTP elle-même en cherchant à la rendre plus silencieuse. Cette politique de reconception a fait l'objet d'un important projet aux États-Unis au début des années 1990, dénommé ART (*Advanced Rotorcraft Transmission*) auquel ont participé Bell Helicopter, Sikorsky, Boeing et

McDonnell Douglas. Chaque constructeur devait choisir un de ses hélicoptères et lui concevoir une nouvelle BTP possédant des caractéristiques améliorées. Au niveau du bruit rayonné, la nouvelle BTP devait être de 10 dB plus silencieuse. Des rapports du programme ART sont accessibles aux références [LENSKI et VALCO, 1991], [KRANTZ, 1994], [HENRY, 1995], [LENSKI, 1995] et [KISH, 1993]

### 2.3.1 Engrenages silencieux

Une BTP est un ensemble d'engrenages : un train épicycloïdal servant de réducteur et des pignons coniques servant de renvoi d'angle. La transmission par engrenage se fait par choc et ce sont ces chocs qui sont à l'origine des vibrations de la BTP [BARTHOD, TEBEC et GIZARD, 2003], [RIGAUD, MAYEUX et coll., 2003]. Diminuer l'intensité de ces chocs, c'est-à-dire rendre l'engrenage "silencieux", est donc une manière d'atténuer les vibrations de la BTP.

En utilisant un profil de denture plus "silencieux", il a été possible de réduire le bruit rayonné par une BTP d'hélicoptère, fonctionnant à un régime réaliste, de 9 dB à 12 dB par rapport aux pignons coniques d'origine, comme l'indique une étude menée par la NASA et Bell Helicopter Textron [LEWICKI, HANSCHUH et coll., 1994 et 2000].

Il est même envisagé par Sikorsky d'appliquer un contrôle passif au niveau de l'engrenage au moyen d'une couche contrainte de matériau viscoélastique [KISH, 1993] ou de reconcevoir une partie des pignons de la BTP de façon à limiter la transmission des vibrations d'un pignon à l'autre [SAMMATARO, KISH et ISABELLE, 1998], [GMIRYA et KISH, 2003] en plus d'améliorer l'engrènement en tenant compte des problèmes de désalignement des dents causé par la dilatation thermique des engrenages lors du fonctionnement de la BTP [HAYDUK et JACOBS, 1993].

De plus, dans un souci de réduction du bruit, maintenant que les constructeurs ont un peu plus d'expérience, le train épicycloïdal pourrait être remplacé par un système de pignons coniques à deux étages [RIECH, 1996] qui est moins lourd et génère moins de chocs. Cette

nouvelle BTP a été exposée en 2003 à la vingt-neuvième édition de l'European Rotorcraft Forum.

### 2.3.2 Redéfinition des éléments de la BTP

Une redéfinition des différents éléments de la BTP n'est pas à exclure. Dans le secteur automobile, une étude du bruit de la pompe à huile par Renault et PSA (Peugeot Société Automobile) a conduit à une reconception de la géométrie de cette pompe pour obtenir une diminution de 10 dB du bruit rayonné par la pompe pour des vitesses d'utilisation normale de la voiture [TAHLA, BARRAND et coll., 2000]. Le même travail pourrait être effectué sur la pompe à huile de la BTP qui est une source de bruit importante au même titre que les engrenages [O'CONNELL, MATHUR et coll., 2001].

Des travaux sur le carter de la BTP ont également été réalisés. Une étude faite par l'Université de Tohoku (Japon) et la NASA porte sur l'optimisation de la surface du carter pour diminuer le bruit rayonné [INOUE, TOWNSEND et COY, 1992]. Une diminution de l'énergie de vibrations sur les faces de la BTP d'un facteur 10 a été mesurée. Une autre étude de l'université de Tohoku et de Mitsubishi portant sur la rigidité optimale des faces de la BTP [INOUE, YAMANAKA et KIHARA, 2002] montre une diminution de 2 dB à 3 dB du bruit rayonné pour une gamme de fréquence de 500 Hz à 1500 Hz.

Enfin, la disposition même des injecteurs d'huile dans la BTP a été étudiée afin de contrôler la dilatation des engrenages et les problèmes de désalignement des dents qui provoquent bruit et vibrations. [CHORY, 1993]

## 2.4 Bilan

Il existe donc plusieurs façons de réduire le bruit et les vibrations engendrées par la BTP. L'étude commandée au GAUS consiste à évaluer la possibilité d'atteindre ce but en appliquant des stratégies de contrôle actif au niveau de la BTP, de ses membrures ou à proximité des attaches de celles-ci sur le plafond. Reconcevoir la BTP et la structure la fixant

à l'hélicoptère ou utiliser des techniques de contrôle passif n'est pas une solution envisageable dans le cadre de ce projet, conformément à la demande de [REDACTED], bien que les exemples précédents donnent des résultats intéressants.

La mise en œuvre pratique d'un dispositif permettant de réaliser du contrôle actif en temps réel sur la BTP dont le GAUS dispose, est une entreprise longue et complexe, comme le montre les travaux exposés dans ce chapitre. L'emplacement et le nombre d'actionneurs de contrôle et des capteurs d'erreur sont des éléments importants de ce dispositif et nécessite une attention particulière afin de minimiser leur nombre tout en maximisant leurs performances. Utiliser pour cela le montage du laboratoire ou un modèle éléments finis de celui-ci afin de déterminer ces paramètres "en aveugle" serait très coûteux en temps et en moyens.

Il a donc été décidé de créer un modèle simplifié d'une partie de la structure avec lequel il serait possible d'évaluer différentes stratégies de contrôle actif simplement et rapidement. Comme annoncé à la fin du Chapitre 1, ce modèle simplifié est devenu de plus en plus élaboré, au point d'y consacrer l'intégralité de ce mémoire.

## CHAPITRE 3

# SCHÉMA MODAL D'UNE STRUCTURE PLANE COMPOSÉE DE POUTRES DROITES DANS LAQUELLE SE PROPAGENT DES ONDES DE FLEXION ET D'EXTENSION

Ce chapitre détaille la théorie sous-jacente aux différents modèles 2D développés tout au long de cette maîtrise et destinés à déterminer initialement les schémas modaux des systèmes auxquels ils se rattachent. Leur utilisation dans le cadre d'une réponse forcée ou à des fins de contrôle actif sera abordée ultérieurement. Ces modèles semi-analytiques sont basés sur la formulation variationnelle et utilisent la méthode de Rayleigh-Ritz pour reconstituer les déplacements. Leur rôle est de représenter une version simplifiée de l'ensemble constitué d'une membrure et du plafond du [REDACTED] (modélisé par une poutre) en tenant compte de l'extension et de la flexion afin de reconstruire les modes plans de la structure.

La présentation de la formulation variationnelle d'un problème de vibrations en milieu continu et de la méthode de Rayleigh-Ritz constitue la première partie de ce chapitre. La seconde partie est consacrée aux méthodes utilisées pour représenter le couplage entre les différentes poutres composant le système pour les modèles 2D afin de reconstituer les modes plans de la structure. Une troisième partie concerne les fonctions d'essai qui constituent le point le plus important de la méthode de Rayleigh-Ritz.

Ce travail est la continuation d'un projet débuté pendant l'un des cours suivis lors de cette maîtrise et durant lequel cette approche avait été utilisée [BERRY, 1993]. A l'époque, la géométrie réelle de la structure du [REDACTED] était encore inconnue, aussi, les hypothèses concernant les différentes parties de la structure semblaient réalistes. Le bien-fondé et les conséquences de ces hypothèses seront discutés au Chapitre 4. D'autres approches auraient pu être examinées comme l'utilisation d'un modèle éléments finis avec des éléments de poutres ou d'autres capable de passer outre les hypothèses initiales. Ceci n'a pas été considéré, puisque

le modèle analytique, tel que formulé dans ce chapitre, a donné des résultats plus que satisfaisants tout au long de son développement, ce qui a permis d'étendre ses capacités.

### 3.1 Rappels théoriques

Ces rappels ont pour objectif de sensibiliser un lecteur n'étant pas habitué à utiliser la formulation variationnelle ou la méthode de Rayleigh-Ritz, sur lesquelles se base tout le travail de cette partie.

#### 3.1.1 Formulation variationnelle d'un problème de vibrations de milieux continus

La formulation variationnelle est une méthode systématique utilisée pour déterminer les équations qui décrivent le mouvement d'un système mécanique continu soumis à des vibrations. Elle s'inspire des principes de d'Alembert et des travaux virtuels, des équations de Lagrange, des théorèmes de Hamilton et de Reissner. Elle remplace la notion d'équilibre des forces, inhérente à la formulation Newtonienne, par la notion de travail virtuel autour d'une position d'équilibre. [BERRY, 1993]

La formulation variationnelle d'un système consiste à rendre extrémale une fonctionnelle  $H_{sys}$  constituée de l'énergie cinétique  $T_{sys}$  et de l'énergie potentielle (ou de déformation)  $V_{sys}$  dudit système ainsi que du travail  $W_{sys}$  des forces extérieures s'y appliquant entre deux instants de temps  $\tau_0$  et  $\tau_1$ . Il en découle l'expression 3.1 :

$$H_{sys} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \tilde{H}_{sys} dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (T_{sys} - V_{sys} + W_{sys}) dt \quad 3.1$$

Il est possible d'exprimer les termes de l'équation 3.1 en fonction du champ de déplacement  $\tilde{u}$ , des caractéristiques du matériau constituant le système (masse volumique  $\rho$  et tenseur élastique  $\tilde{C}$ ), du tenseur des déformations  $\tilde{\epsilon}$  et des efforts extérieurs volumiques  $\tilde{F}$  et  $\tilde{M}$  :

$$T_{sys} = \int_V \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \right)^2 dV \quad 3.2a$$

$$V_{sys} = \int_V \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} dV \quad 3.2b$$

$$W_{sys} = \int_V \tilde{F}_i \tilde{u}_i + \tilde{M}_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} dV \quad 3.2c$$

Il est à noter que, pour les expressions 3.2,  $V$  correspond au volume de système. Comme détaillé à l'Annexe A, il est possible d'exprimer le tenseur des déformations  $\tilde{\varepsilon}$  en fonction du champ de déplacement  $\tilde{u}$ . La fonctionnelle  $H_{sys}$  est donc fonction uniquement de  $\tilde{u}$ ; il s'agit donc de la fonctionnelle de Hamilton du système par opposition à la fonctionnelle de Reissner qui prend également en compte le champ de contrainte dans le système.

L'extrémalisation de la fonctionnelle de Hamilton, par la dérivation au sens de Gâteaux ou, dans ce mémoire, par les équations d'Euler, rappelées à l'Annexe A, permet d'obtenir l'équation du mouvement et les conditions aux limites du système. Ce résultat découle de l'application du théorème de Hamilton : si un champ de déplacement donné extrémalise la fonctionnelle de Hamilton et est cinématiquement admissible (il respecte les conditions aux limites en déplacement) alors il vérifie l'équation du mouvement et les conditions aux limites en contraintes.

### 3.1.2 Fonctionnelles de Hamilton de poutres droites minces

Une poutre est un milieu continu possédant une dimension très grande par rapport aux autres. Il est alors possible de définir une abscisse curviligne suivant cette dimension et telle que toutes les propriétés physiques de la poutre ne varient que selon cette abscisse. Une poutre est droite si cette dimension privilégiée peut être portée par un axe d'un repère cartésien, désigné comme étant l'axe de la poutre. Une poutre est mince si la longueur de la poutre suivant sa dimension privilégiée est très supérieure à la plus grande dimension de sa section, prise dans un plan orthogonal à l'axe de la poutre. Pratiquement, le "très supérieur" correspond à un ordre de grandeur. [BERRY, 1993], [BLEVINS, 1979], [GRAFF, 1975]

A partir de maintenant, et durant tout ce mémoire, la dénomination poutre sera réservée aux poutres droites et minces afin de simplifier la lecture. De plus, toutes les représentations de poutres seront des parallélépipèdes rectangles par commodité, mais en règle générale, dans cette partie, les expressions rencontrées seront valables pour toute poutre droite et mince sauf indications contraires. Enfin, un effort sera fait pour que l'axe neutre de la poutre corresponde à l'axe  $x$  du repère cartésien qui lui est attaché.

Une poutre, notée 1, peut être soumise à trois types de vibrations différentes : extension, flexion et torsion. La Figure 3.1 présente une poutre et son repère associé ; les conditions aux limites sont pour l'instant quelconques. L'extension correspond à un déplacement d'ensemble  $u_1$  selon l'axe neutre  $x_1$  de la poutre, la flexion  $v_1$  ou  $w_1$  à un déplacement selon un des deux autres axes  $y_1$  ou  $z_1$  tandis que la torsion  $\alpha_1$  représente une rotation des sections droites de la poutre autour de l'axe neutre  $x_1$ . La nature des vibrations à étudier va donc influencer sur la fonctionnelle de Hamilton de la poutre. Il est donc nécessaire de différencier les cas.

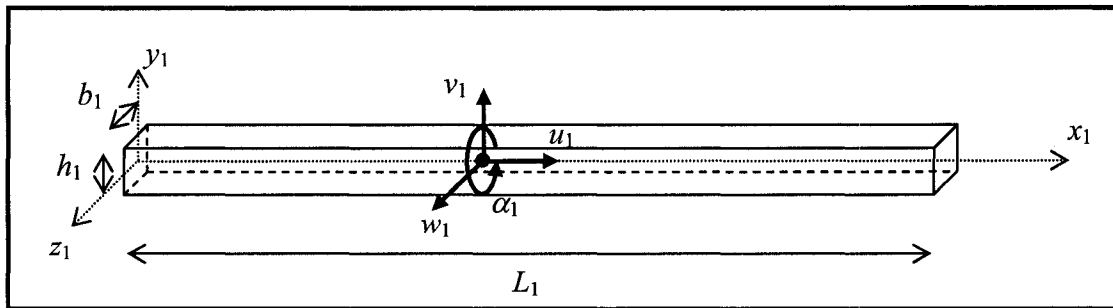


Figure 3.1 : Poutre, repère associé et types de vibrations

Pour des vibrations longitudinales, le champ de déplacement  $\tilde{u}$  s'écrit, en négligeant l'effet de Poisson (contraction de la section droite consécutive à la déformation axiale) :

$$\begin{cases} \tilde{u}_x(x_1, y_1, z_1, t) = u_1(x_1, t) \\ \tilde{u}_y(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \\ \tilde{u}_z(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \end{cases} \quad 3.3$$

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope et en considérant le champ de déplacement exprimé en 3.5, la fonctionnelle de Hamilton devient, en notant  $E_1$  et  $\rho_1$  le



module d'Young, la masse volumique du matériau constituant la poutre 1 et  $S_1$  la surface d'une section orthogonale à  $x_1$  :

$$H_1(u_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E_1 S_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dt \quad 3.4$$

Pour des vibrations en flexion, le champ de déplacement  $\tilde{u}$  s'écrit, selon les hypothèses de Bernoulli (les sections droites restent perpendiculaires à l'axe neutre ce qui revient à négliger le cisaillement transversal de ces sections) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_x(x_1, y_1, z_1, t) = -y_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1, t) \\ \tilde{u}_y(x_1, y_1, z_1, t) = v_1(x_1, t) \\ \tilde{u}_z(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \end{array} \right. \quad 3.5a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_x(x_1, y_1, z_1, t) = -z_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(x_1, t) \\ \tilde{u}_y(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \\ \tilde{u}_z(x_1, y_1, z_1, t) = w_1(x_1, t) \end{array} \right. \quad 3.5b$$

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope et en considérant les champs de déplacement exprimés en 3.5, la fonctionnelle de Hamilton devient, en notant  $I_{Y1}$  et  $I_{Z1}$  les moments d'inertie surfacique selon les axes  $y_1$  et  $z_1$  :

$$H_1(v_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 I_{Z1} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E_1 I_{Z1} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 dt \quad 3.6a$$

$$H_1(w_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 I_{Y1} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1 \partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E_1 I_{Y1} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 dt \quad 3.6b$$

Généralement, on néglige l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites, ce qui donne :

$$H_1(v_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E_1 I_{z1} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 dt \quad 3.7a$$

$$H_1(w_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E_1 I_{y1} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 dt \quad 3.7b$$

Pour des vibrations de torsion, le champ de déplacement  $\tilde{u}$  s'écrit selon les hypothèses de St-Venant :

$$\begin{cases} \tilde{u}_x(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \\ \tilde{u}_y(x_1, y_1, z_1, t) = -z_1 \alpha_1(x_1, t) \\ \tilde{u}_z(x_1, y_1, z_1, t) = y_1 \alpha_1(x_1, t) \end{cases} \quad 3.8$$

Dans le cas d'un matériau homogène isotrope et en considérant le champ de déplacement exprimé en 3.8, la fonctionnelle de Hamilton devient, en notant  $I_{x1}$ ,  $G_1$  et  $C_{T1}$  le moment polaire d'inertie selon  $x_1$ , le module de cisaillement du matériau constituant la poutre 1 et son coefficient de torsion :

$$H_1(\alpha_1) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^{L_1} \frac{1}{2} \rho_1 I_{x1} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} G_1 C_{T1} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 dt \quad 3.9$$

On peut à présent écrire la fonctionnelle de Hamilton de la poutre au complet ; celle-ci étant la somme des fonctionnelles exprimées en 3.4, 3.7 et 3.9. Physiquement, ce résultat est lié au fait que la formulation variationnelle repose sur des considérations énergétiques. C'est l'additivité des énergies qui permet d'écrire la relation 3.10a :

$$H_{sys}(u_1, v_1, w_1, \alpha_1) = H_1(u_1) + H_1(v_1) + H_1(w_1) + H_1(\alpha_1) \quad 3.10a$$

L'expression 3.10a met en évidence que ces quatre fonctionnelles sont indépendantes les unes des autres : les modes d'extension, de flexion et de torsion sont découplés pour une poutre simple. Ainsi, il n'est pas nécessaire de minimiser la fonctionnelle de Hamilton du système complet si seuls les modes d'extensions sont recherchés.

Dorénavant, seuls les modes plans vont être étudiés. Ainsi, les contributions de la flexion hors plan et de la torsion ne seront plus considérées. L'équation 3.10 a devient 3.10b :

$$H_{\text{sys}}(u_1, v_1) = H_1(u_1) + H_1(v_1) \quad 3.10b$$

### 3.1.3 Équations du mouvement découplées

En l'absence de toute force ou moment extérieur, les équations du mouvement pour de l'extension et de la flexion sont les suivantes :

$$\rho_1 S_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = 0 \quad 3.11a$$

$$\rho_1 S_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( E_1 I_{Z1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) = 0 \quad 3.11b$$

La formulation des équations 3.11 permet de considérer des sections variables selon l'axe  $x_1$ .

### 3.1.4 Conditions aux limites

Le théorème de Hamilton permet d'obtenir les conditions aux limites que doit respecter le champ de déplacement. Pour une poutre, ces conditions ne s'appliquent qu'aux extrémités, en  $x_1 = 0$  ou en  $x_1 = L_1$  et, chaque extrémité possède une condition en déplacement ou en contrainte.

Dans le cas de l'extension, chaque extrémité  $x_1^0$  doit vérifier la condition 3.12a ou la condition 3.12b, qui représentent respectivement une condition en déplacement et en contrainte.

$$u_1(x_1^0, t) = 0 \quad 3.12a$$

$$E_1 S_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1^0, t) = 0 \quad 3.12b$$

Une extrémité encastree respectera la condition 3.12a (déplacement nul) tandis qu'une extrémité libre respectera la condition 3.12b (contrainte nulle)

Dans le cas de la flexion selon  $y_1$ , chaque extrémité  $x_1^0$  doit vérifier l'une des conditions en 3.13 (conditions en déplacement) ou l'une des conditions 3.13b (conditions en contrainte).

$$v_1(x_1^0, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1^0, t) = 0 \quad 3.13$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( E_1 I_{z1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}(x_1^0, t) \right) = 0 \quad \text{ou} \quad E_1 I_{z1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}(x_1^0, t) = 0 \quad 3.14$$

Les conditions 3.13 représentent une condition en translation et en rotation ; celles en 3.14 représentent une condition en effort tranchant et en moment de flexion. Une extrémité encastree respectera les deux conditions en 3.13 (déplacement et rotation nuls) tandis qu'une extrémité libre respectera les deux conditions 3.14 (effort tranchant et moment de flexion nuls). Les autres types de conditions possibles (appuyée et glissant) respecteront à la fois une condition en contrainte et une en déplacement.

### 3.1.5 Méthode de Rayleigh-Ritz

La méthode de Rayleigh-Ritz est utilisée pour reconstituer le déplacement du système en l'approchant par une combinaison linéaire de fonctions de forme, aussi appelées fonctions d'essai, qui sont linéairement indépendantes et cinématiquement admissibles. Une fonction est cinématiquement admissible si elle respecte les conditions aux limites en déplacement identifiées par les équations 3.12a et 3.13. Si une extrémité ne possède pas de conditions en

déplacement, alors toute fonction est admissible, du moment qu'elle soit suffisamment dérivable.

Notons  $U$  et  $V$  les fonctions de forme destinées à reconstituer l'extension et la flexion selon  $y$  (dans le plan de la structure) ainsi que  $q^e$  et  $q^y$  les coefficients de pondérations en extension et en flexion. Les équations 3.3 et 3.5 montrant que le champ de déplacement  $\tilde{u}$  est fonction de l'abscisse de la poutre  $x_1$  et du temps  $t$ , on pourra séparer les variables.

Pour un problème 2D, on exprimera l'extension  $u_1$  et la flexion  $v_1$  de la poutre 1 par les expressions suivantes ;  $Nu_1$  et  $Nv_1$  étant respectivement le nombre de fonctions de forme considéré pour approcher l'extension et la flexion.

$$u_1(x_1, t) = \sum_{k=1}^{Nu_1} q_{1,k}^e(t) U_{1,k}(x_1) \quad 3.15a$$

$$v_1(x_1, t) = \sum_{k=1}^{Nv_1} q_{1,k}^y(t) V_{1,k}(x_1) \quad 3.15b$$

Il ne reste plus qu'à remplacer ces expressions dans les fonctionnelles de Hamilton correspondantes. Ainsi, en gardant l'exemple d'une poutre simple dans l'espace, la méthode de Rayleigh-Ritz modifie le problème d'extrémalisation de la fonctionnelle, puisque les inconnues ne sont plus des déplacements (fonctions de  $x_p$ ) mais des coefficients. Le résultat sera donc la valeur de ces coefficients, qui permettront de reconstituer le champ de déplacement.

Il n'est pas nécessaire pour l'instant d'identifier précisément les fonctions de forme à employer. Il est possible d'expliquer le principe des méthodes de couplage de façon générale. Les fonctions de forme ne seront traitées qu'à la fin de ce chapitre, afin de ne pas faire de cas particulier.

### **3.2 Couplage de poutres**

Déterminer le schéma modal d'une poutre seule requiert l'utilisation d'outils aussi puissants que la formulation variationnelle seulement lorsque les propriétés ou la géométrie

des sections ne sont pas uniformes le long de la poutre. Sinon, les expressions des modes propres et des fréquences naturelles, disponibles à l'Annexe B, peuvent être retrouvées facilement dans la littérature, et cela, quel que soit le type de conditions aux limites, et aussi bien pour de l'extension ou de la flexion, comme par exemple dans [BLÉVINS, 1979]

Pour introduire ce paragraphe, considérons une échelle. Chaque barreau, de même que les deux montants peuvent être considérés comme des poutres, cependant s'il suffit de simplement additionner les fonctionnelles de Hamilton des montants et des barreaux pour obtenir celle de l'échelle, il est nécessaire de rajouter des conditions pour que les barreaux et les montants forment un système solidaire. Ce qui manque, c'est le fait que chaque barreau soit relié solidement aux montants et exprimer cette liaison va créer un couplage entre les poutres représentant l'échelle, et donc un couplage entre les déplacements de chaque poutre.

La formulation de ce couplage est le point le plus important de la modélisation d'un assemblage. Deux méthodes vont être présentées pour une application à un problème 2D où seule l'extension et la flexion dans le plan peuvent coexister. La première considère la continuité des déplacements et des rotations pour assurer le couplage entre les structures tandis que la seconde utilise des ressorts virtuels pour coupler les différentes parties du système.

### 3.2.1 Formulation du couplage par continuité des déplacements et des rotations

On considère un système décomposable en  $n_p$  poutres reliées entre elles en  $n_C$  points, comme à la Figure 3.2 (où  $n_p$  et  $n_C$  valent 5 et 4). Les repères directs locaux  $(x,y,z)$  de chaque poutre sont définis de façon à ce que l'axe  $x$  soit l'axe neutre de la poutre et tous les axes  $z$  soient dans la même direction ; le modèle supposant en effet que toutes les poutres ont leur axe neutre dans un même plan. Les angles entre les poutres utilisent la convention montrée à la Figure 3.2. Il est possible d'utiliser un des repères locaux comme repère global, ce qui facilitera la reconstruction graphique des déformées modales (Cf. Chapitre 4 et 5). Dans ce repère global, les mouvements des différentes poutres sont additionnés afin de reconstituer la déformation globale de la structure.

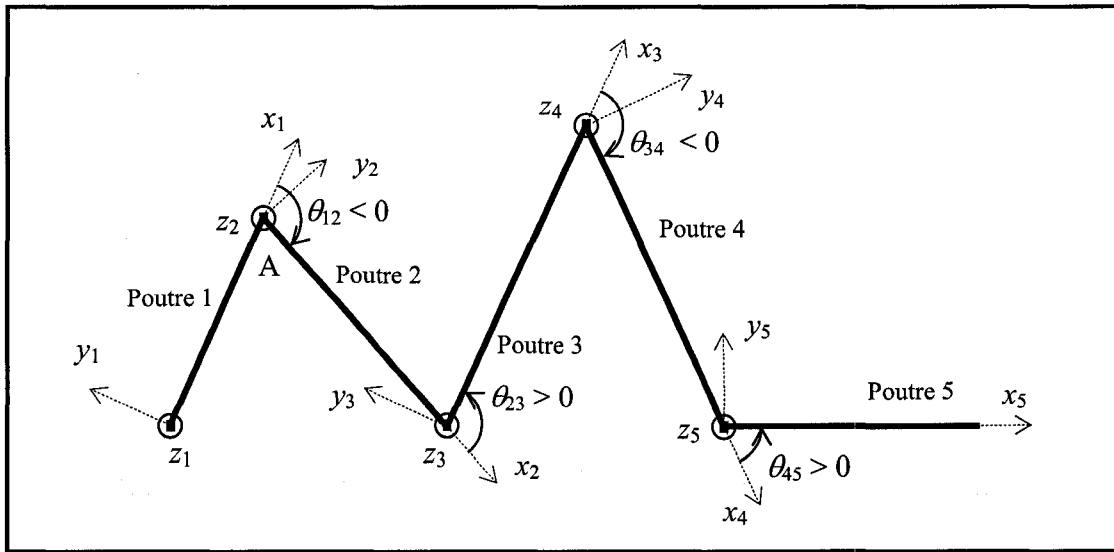


Figure 3.2 : Exemple de structure avec les conventions sur les repères et les angles

Pour chaque poutre, les déplacements en extension et en flexion peuvent être reconstitués selon la méthode de Rayleigh-Ritz par les expressions 3.15 puis remplacés dans les fonctionnelles de Hamilton données en 3.3 et 3.5a. On obtient alors les relations 3.16 suivantes pour la poutre 1.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(u_1) = & \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \sum_{k=1}^{N_{u_1}} \sum_{j=1}^{N_{u_1}} \dot{q}_{1,k}^e \dot{q}_{1,j}^e \langle U_{1,k}, U_{1,j} \rangle_0 \\ & - \frac{1}{2} E_1 S_1 \sum_{k=1}^{N_{u_1}} \sum_{j=1}^{N_{u_1}} q_{1,k}^e q_{1,j}^e \langle U_{1,k}, U_{1,j} \rangle_1 \end{aligned} \quad 3.16a$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(v_1) = & \frac{1}{2} \rho_1 S_1 \sum_{k=1}^{N_{v_1}} \sum_{j=1}^{N_{v_1}} \dot{q}_{1,k}^y \dot{q}_{1,j}^y \langle V_{1,k}, V_{1,j} \rangle_0 \\ & - \frac{1}{2} E_1 I_{z1} \sum_{k=1}^{N_{v_1}} \sum_{j=1}^{N_{v_1}} q_{1,k}^y q_{1,j}^y \langle V_{1,k}, V_{1,j} \rangle_2 \end{aligned} \quad 3.16b$$

En notant les produits scalaires de deux fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de la manière suivante :

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_0 = \int_0^L \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx \quad 3.17a$$

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_1 = \int_0^L \frac{d\Phi_1}{dx}(x) \frac{d\Phi_2}{dx}(x) dx \quad 3.17b$$

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_2 = \int_0^L \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}(x) \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}(x) dx \quad 3.17c$$

Il est à noter que si les grandeurs  $S$ ,  $I_z$ ,  $\rho$  et  $E$  dépendaient de  $x$ , elles seraient à prendre dans l'intégrale permettant de calculer le produit scalaire. Les résultats présentés dans cette partie sont valables pour un matériau homogène et une section droite uniforme.

On construit ensuite les quantités  $\tilde{H}^M$  et  $\tilde{H}^K$  qui représentent les parties de la fonctionnelle de Hamilton de l'assemblage qui vont constituer plus tard les matrices de masse et de raideur en identifiant les termes de masse et de raideur dans les expressions 3.16.

$$\tilde{H}_{sys} = \tilde{H}_{sys}^M + \tilde{H}_{sys}^K \quad 3.18a$$

avec

$$\tilde{H}_{sys}^M = \sum_{h=1}^{n_p} \tilde{H}_h^M \quad \text{et} \quad \tilde{H}_{sys}^K = \sum_{h=1}^{n_p} \tilde{H}_h^K \quad 3.18b$$

et

$$\tilde{H}_h^M = \frac{1}{2} \rho_h S_h \sum_{k=1}^{Nu_h} \sum_{j=1}^{Nu_h} \dot{q}_{h,k}^e \dot{q}_{h,j}^e \langle U_{h,k}, U_{h,j} \rangle_0 + \frac{1}{2} \rho_h S_h \sum_{k=1}^{Nv_h} \sum_{j=1}^{Nv_h} \dot{q}_{h,k}^y \dot{q}_{h,j}^y \langle V_{h,k}, V_{h,j} \rangle_0 \quad 3.18c$$

$$\tilde{H}_h^K = -\frac{1}{2} E_h S_h \sum_{k=1}^{Nu_h} \sum_{j=1}^{Nu_h} q_{h,k}^e q_{h,j}^e \langle U_{h,k}, U_{h,j} \rangle_1 - \frac{1}{2} E_h I_{zh} \sum_{k=1}^{Nv_h} \sum_{j=1}^{Nv_h} q_{h,k}^y q_{h,j}^y \langle V_{h,k}, V_{h,j} \rangle_2 \quad 3.18d$$

Cette écriture permet d'exprimer plus facilement les Lagrangiens de la fonctionnelle de Hamilton du système. En effet,



$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \right) (\tilde{H}_{sys}) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{H}_{sys}^M}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{H}_{sys}^K}{\partial q} \quad 3.19$$

Notons  $n_T$  le nombre total de coefficients de pondération. On obtient

$$n_T = \sum_{h=1}^{n_p} [Nu_h + Nv_h] \quad 3.20$$

A ce niveau, les poutres sont encore découplées. Les équations 3.18a font intervenir tous les coefficients de pondérations  $q$ . Lorsque les Lagrangiens de ces équations sont constitués, l'équation 3.19 est donc écrite pour tous les  $n_T$  coefficients  $q$  et comme chaque Lagrangien va donner une combinaison linéaire des coefficients  $q$ , un système matriciel de  $n_T$  équations à  $n_T$  inconnues va être mis en évidence.

Pour un point de couplage, il faut prendre en compte trois conditions en déplacement ; deux en translations et une en rotation. En effet, les seuls mouvements autorisés dans le plan sont des translations selon  $x$  et  $y$  et une rotation selon  $z$ .

Comme il y a  $n_C$  points de couplage, cela va rajouter  $3n_C$  équations supplémentaires, ce qui réduit le système de  $n_T$  à  $n_T - 3n_C$  inconnues. Il va donc falloir exprimer  $3n_C$  des  $n_T$  coefficients de pondérations  $q$ . On choisit donc  $3n_C$  coefficients de pondérations qui vont être exprimés en fonction des autres. Généralement, ce choix dépend des fonctions de forme et on évitera celle qui s'annule au point de couplage. On réalise donc une partition de ces coefficients en notant  $X^{NL}$  les  $3n_C$  coefficients  $q$  qui vont être exprimés en fonction des  $n_T - 3n_C$  coefficients  $q$  restants, notés  $X^L$  pour les différencier.

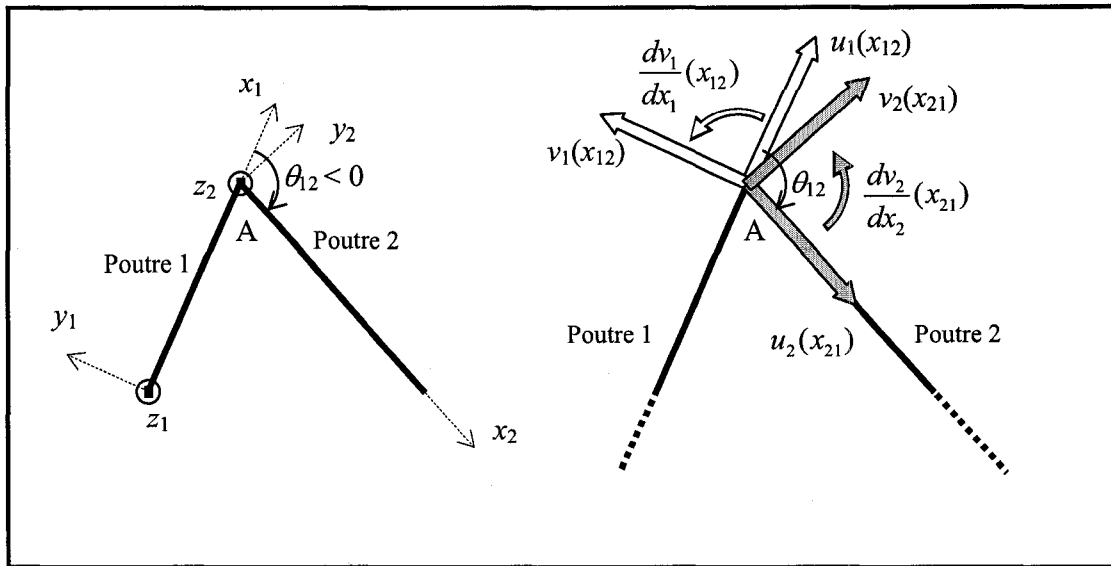


Figure 3.3 : Couplage entre les poutres 1 et 2

Chaque point de couplage représente le couplage entre deux poutres en un point commun. Ainsi, les poutres 1 et 2 de la Figure 3.3 sont couplées au niveau du point A. Notons  $x_{12}$  la position du point A dans le repère de la poutre 1 et  $x_{21}$  celle dans le repère de la poutre 2. Il est alors possible d'écrire les conditions de couplage de la manière selon les équations 3.22 qui représentent respectivement l'égalité des déplacements projetés sur l'axe  $x_1$ , l'égalité des déplacements projetés sur l'axe  $y_1$  et l'égalité des rotations autour de l'axe  $z_1$ .

$$u_1(x_{12}) = \cos \theta_{12} u_2(x_{21}) - \sin \theta_{12} v_2(x_{21}) \quad 3.22a$$

$$v_1(x_{12}) = \sin \theta_{12} u_2(x_{21}) + \cos \theta_{12} v_2(x_{21}) \quad 3.22b$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_{12}) = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_{21}) \quad 3.22c$$

En remplaçant dans les équations 3.22 les valeurs de  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  et  $v_2$  par leurs expressions selon la méthode de Rayleigh-Ritz, on obtient l'expression du couplage entre les poutres 1 et 2 dans la base de Ritz :

$$\sum_{k=1}^{Nu_1} q_{1,k}^e U_{1,k}(x_{12}) = \cos \theta_{12} \sum_{k=1}^{Nu_2} q_{2,k}^e U_{2,k}(x_{21}) - \sin \theta_{12} \sum_{k=1}^{Nv_2} q_{2,k}^y V_{2,k}(x_{21}) \quad 3.23a$$

$$\sum_{k=1}^{Nv_1} q_{1,k}^y V_{1,k}(x_{12}) = \sin \theta_{12} \sum_{k=1}^{Nu_2} q_{2,k}^e U_{2,k}(x_{21}) + \cos \theta_{12} \sum_{k=1}^{Nv_2} q_{2,k}^y V_{2,k}(x_{21}) \quad 3.23b$$

$$\sum_{k=1}^{Nv_1} q_{1,k}^y \frac{dV_{1,k}}{dx_1}(x_{12}) = \sum_{k=1}^{Nv_2} q_{2,k}^y \frac{dV_{2,k}}{dx_2}(x_{21}) \quad 3.23c$$

Parmi les coefficients  $q$  des équations 3.23, il peut y avoir des coefficients  $X^{NL}$ . Il sera donc toujours possible de trouver des coefficients  $M_{i,j}^{NL}$  et  $M_{i,j}^L$  tels que :

$$\sum_{k=1}^{3N_c} M_{1,k}^{NL} X_k^{NL} = \sum_{p=1}^{N_T-3N_c} M_{1,p}^L X_p^L \quad 3.24a$$

$$\sum_{k=1}^{3N_c} M_{2,k}^{NL} X_k^{NL} = \sum_{p=1}^{N_T-3N_c} M_{2,p}^L X_p^L \quad 3.24b$$

$$\sum_{k=1}^{3N_c} M_{3,k}^{NL} X_k^{NL} = \sum_{p=1}^{N_T-3N_c} M_{3,p}^L X_p^L \quad 3.24c$$

Les équations 3.24 sont les contraintes que doivent respecter les coefficients  $X^{NL}$  pour assurer le couplage entre les poutres 1 et 2.

On forme donc le système suivant de  $3n_c$  équations à  $3n_c$  inconnues en généralisant les équations 3.24 à tous les points de couplage de l'assemblage :

$$\underline{\underline{M}}^{NL} \underline{\underline{X}}^{NL} = \underline{\underline{M}}^L \underline{\underline{X}}^L \quad 3.25$$

De l'équation 3.25, les  $X^{NL}$  sont exprimés en fonction des coefficients  $X^L$  :

$$\underline{\underline{X}}^{NL} = \left( \underline{\underline{M}}^{NL^{-1}} \underline{\underline{M}}^L \right) \underline{\underline{X}}^L \quad 3.26$$

On remplace alors dans les expressions de  $\tilde{H}^M$  et  $\tilde{H}^K$  données en 3.18 les coefficients  $X^{NL}$  par leur expression en fonction de  $X^L$ . On peut à présent construire les matrices de masse  $\underline{M}$  et de raideur  $\underline{K}$  à l'aide du résultat de l'équation 3.19 :

$$M_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}_j^L} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{H}^M}{\partial \dot{X}_i^L} \right) \right) \quad 3.27a$$

$$K_{i,j} = - \frac{\partial}{\partial X_j^L} \left( \frac{\partial \tilde{H}^K}{\partial X_i^L} \right) \quad 3.27b$$

Et on se retrouve face au système suivant dont la résolution permet l'obtention du schéma modal de la structure.

$$\left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right] \underline{X}^L = \underline{0} \quad 3.28$$

Il ne reste alors plus qu'une dernière étape pour reconstituer complètement les déplacements modaux, c'est de calculer les coefficients  $X^{NL}$  avec la relation 3.25.

### 3.2.2 Travaux antérieurs utilisant des ressorts virtuels de couplage

L'emploi de ressorts virtuels est un moyen simple d'imposer des conditions en déplacement sur une structure (conditions aux limites) ou entre deux structures (conditions de couplage) lorsque la méthode de calcul choisie est basée sur la formulation variationnelle. En effet, il suffit juste de sommer les fonctionnelles de Hamilton des ressorts à celle du système libre. Les premières utilisations de ressorts étaient destinées à modéliser des conditions aux limites, selon le principe qu'un ressort de raideur nulle permet à un point de ne pas être contraint selon la direction du ressort tandis qu'un ressort de raideur infinie (ou en pratique "très grande") empêche le déplacement de ce point selon cette même direction. Passer d'un problème de conditions aux limites à un problème de couplage entre structures a été naturel ; une condition aux limites pouvant être vue comme une condition de couplage entre une structure et un corps de référence indéformable.

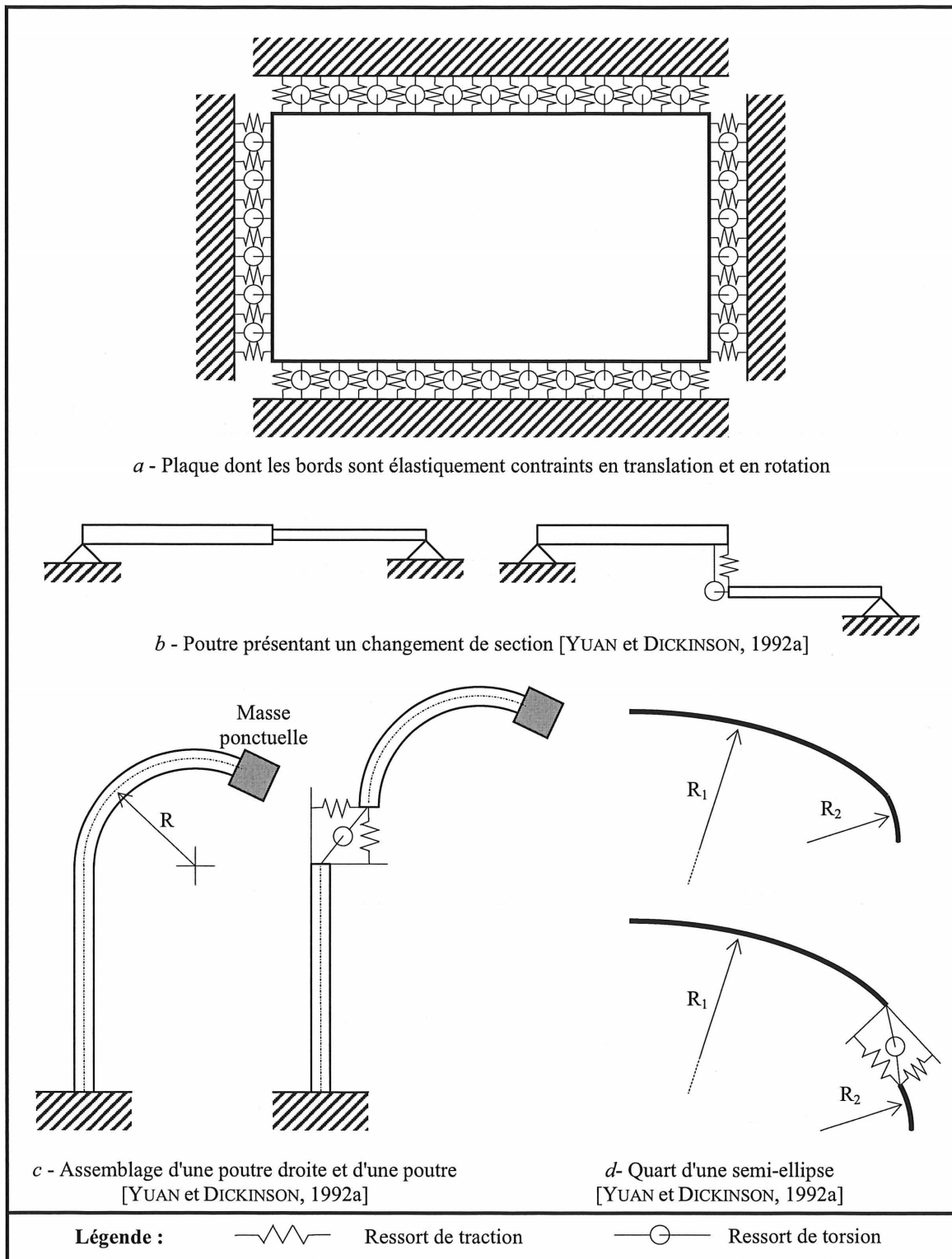
Il est fréquent de trouver dans la littérature des exemples de structures dont les conditions aux limites sont représentées par des ressorts de raideur appropriée ; cette approche permettant de changer simplement la géométrie d'un problème puisque le problème du choix

de fonctions de forme cinématiquement admissibles ne se pose plus. Considérons une plaque dont chaque bord est élastiquement contraint par des ressorts axiaux (agissant sur la flèche de la plaque) et de torsion (agissant sur la pente de la flèche) comme illustrée à la Figure 3.4a. Selon les raideurs des ressorts, chaque bord de la plaque peut être libre, appuyé, glissant ou encastré, et donc avec un seul modèle, il est possible de représenter une plaque quelles que soient ces conditions aux limites [LAURA et GROSSI, 1978 et 1981], [WARBURTON et EDNEY, 1984], [GORMAN, 1989]. De plus, l'utilisation de ressorts virtuels n'est pas juste un artifice pour modéliser plus facilement le comportement libre d'une plaque, comme l'ont réalisé les auteurs cités ci-dessus. Par exemple, [BERRY, GUYADER et NICOLAS, 1990] sont parvenus à obtenir une formulation du rayonnement acoustique généré par une plaque bafflée selon différentes conditions aux limites, ce qui démontre bien la robustesse de la méthode.

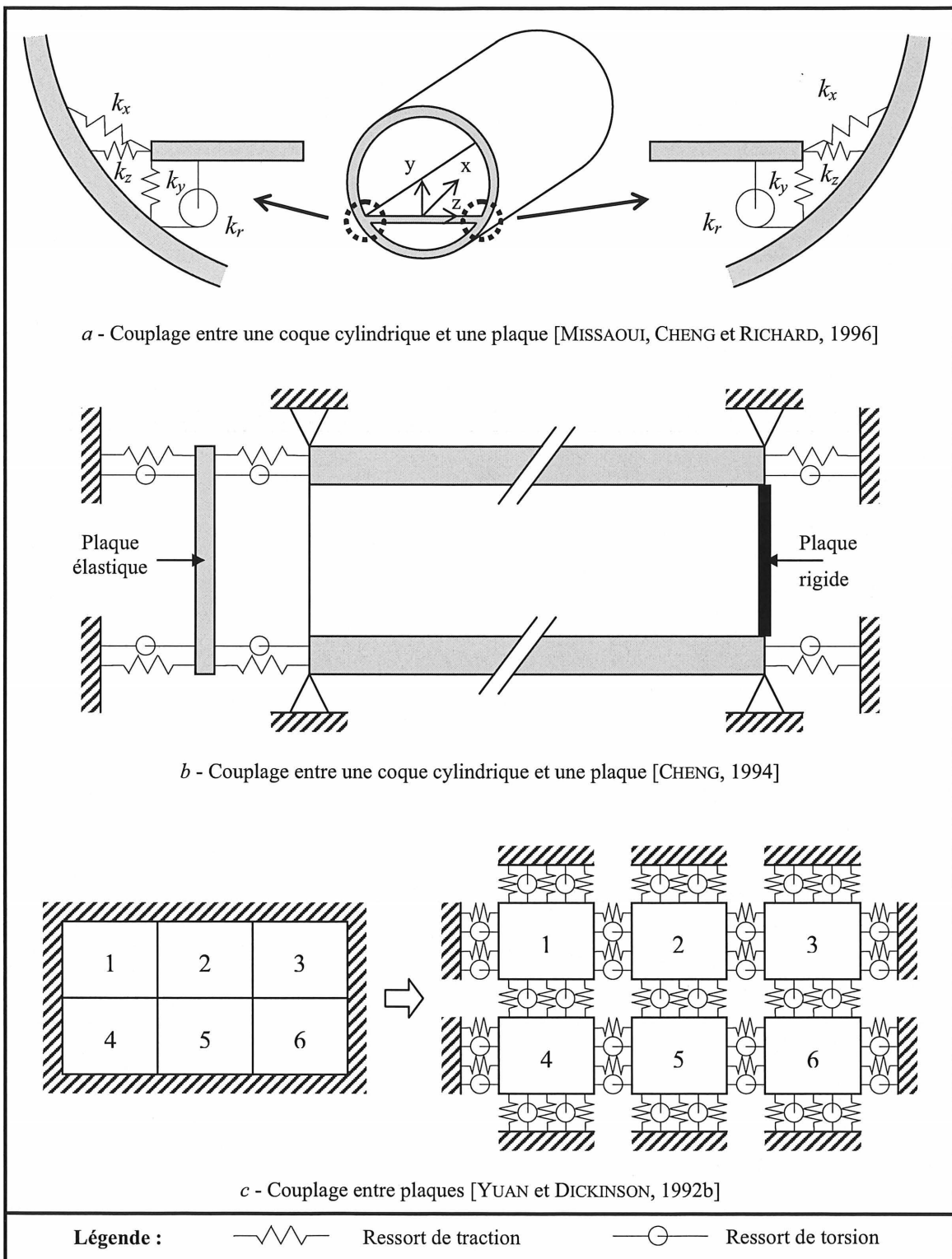
[YUAN et DICKINSON, 1992a] se sont intéressés à des couplages simples entre deux poutres, droites ou non. Un premier exemple, une poutre présentant un changement de section discontinu, est représenté à la Figure 3.4b par deux poutres couplées au niveau de la discontinuité. Seul le comportement en flexion est étudié, ce qui explique l'absence de ressort couplant axialement les deux poutres. Les résultats obtenus sont comparés à la formulation exacte de ce problème calculée par une autre référence. La seconde structure étudiée, reproduite à la Figure 3.4c, est un exemple de couplage entre une poutre droite et une poutre courbe. Là encore, les résultats sont comparés avec les travaux d'un autre auteur. La dernière structure considérée par Yuan et Dickinson modélise une poutre dont la fibre neutre décrit un quart d'ellipse, approchée ici par deux poutres suivant des arcs de cercles de rayons différents comme à la Figure 3.4d.

Cette fois, les résultats sont comparés aux travaux d'un autre auteur sur une vraie ellipse et à leurs propres travaux selon une méthode plus conventionnelle. Dans tous les cas, les conclusions se sont portées sur les fréquences naturelles des structures et non sur les déformées modales. De plus, ces deux auteurs ont mis en avant l'influence de la raideur des ressorts sur l'erreur entre la solution considérée comme exacte et leur modèle.

Il est également possible de coupler de cette manière des structures de comportement différent comme une plaque et une coque. La Figure 3.5a présente l'assemblage étudié par [MISSAOUI, CHENG et RICHARD, 1996] représentant un tronçon d'avion. Le fuselage est modélisé par une coque cylindrique et le plancher par une plaque, couplé par des ressorts selon les trois



**Figure 3.4 :** Exemples d'utilisation de ressorts pour représenter du couplage entre structures ou des conditions aux limites  
 Les raideurs doivent être infinie pour représenter un couplage parfait, nulles pour l'annuler



**Figure 3.5 :** Exemples d'utilisation de ressorts pour représenter des cas de couplage élaborés  
 Les raideurs doivent être infinie pour représenter un couplage parfait, nulles pour l'annuler

directions de translation et par des ressorts de torsion selon un seul axe. Le schéma modal de l'assemblage obtenu par cette méthode a été comparé avec succès aux travaux d'autres chercheurs. Une validation par I-DEAS, un logiciel d'éléments finis, a aussi été entreprise. Ensuite, l'effet des valeurs de raideur a constitué un autre point important de cet article. Une visualisation du premier et troisième modes de l'assemblage pour diverses valeurs de raideur montre à quel point ce paramètre est important. Le dernier point décrit par Missaoui et ses collaborateurs a été la réponse forcée de l'assemblage à une excitation harmonique sur la coque. Il a été mis en évidence qu'en deçà de 1000 Hz, les vibrations du plancher étaient du même ordre que celles de la coque, ce qui implique qu'il doit être un élément important à modéliser lors des études sur le bruit en cabine.

Un autre type de couplage entre une plaque et une coque est représenté à la Figure 3.5b et correspond à une coque cylindrique fermée par une plaque circulaire élastique à une extrémité et rigide à la seconde. Les travaux de [CHENG et NICOLAS, 1992] ont porté sur les vibrations libres de cet assemblage. Le schéma modal a été comparé à celui généré par ANSYS 4.4 un logiciel d'éléments finis. Cet article regroupe également une étude sur la raideur des ressorts et les résultats obtenus avec des conditions aux limites différentes.

Enfin, cette revue succincte d'exemples de structures couplées à des ressorts virtuels se clôture avec un article de [YUAN et DICKINSON, 1992b] sur le couplage entre plusieurs plaques constituant une même grande plaque ; un exemple étant visible à la Figure 3.5c. Il est alors possible de considérer des changements d'épaisseur ou de matériau sur une ou plusieurs sous-plaque ; l'article décrit par exemple le comportement d'un assemblage où l'épaisseur des plaques 1 et 4 de la Figure 3.5c est différente de celle des autres plaques. De plus, en annulant les raideurs des ressorts entre les plaques deux et cinq, il est possible de modéliser une plaque fissurée. Les conditions aux limites de l'assemblage peuvent aussi être modifiées. Les auteurs ont également modélisé une boîte, composée de six plaques. En fait, seul un coin de la boîte, assemblage 3D de trois plaques, a été étudié pour des raisons de symétrie. Les résultats ont tous été comparés avec les travaux d'autres chercheurs.

Dans tous les cas décrits dans ce paragraphe, les résultats ont toujours été très bons. Le couplage par ressorts virtuels apparaît donc comme très prometteur et facilement programmable, comme cela va être expliqué au paragraphe suivant.



## 3.2.3 Représentation de conditions aux limites par des ressorts virtuels

Comme il a été présenté au paragraphe précédent, il est possible d'utiliser des ressorts virtuels pour représenter des conditions aux limites. Pour cela, il suffit d'utiliser des fonctions de forme d'une poutre libre-libre, qui ne contraignent aucun déplacement ni rotation et d'y adjoindre des ressorts pour bloquer les déplacements ou rotations que l'on souhaite éliminer.

La Figure 3.6 illustre la représentation générale d'une modélisation de conditions aux limites par des ressorts dans le cas d'un problème plan. Trois ressorts, deux axiaux et un de torsion, sont nécessaires pour représenter toutes les conditions aux limites, qu'elles soient libres, appuyées, encastrées ou mêmes glissantes. C'est la raideur de ces ressorts qui vont les déterminer, comme indiqué au Tableau 3.1. Ceci est valable pour chaque extrémité et même n'importe où sur la poutre : il est possible de modéliser un appui simple en milieu de poutre par exemple.

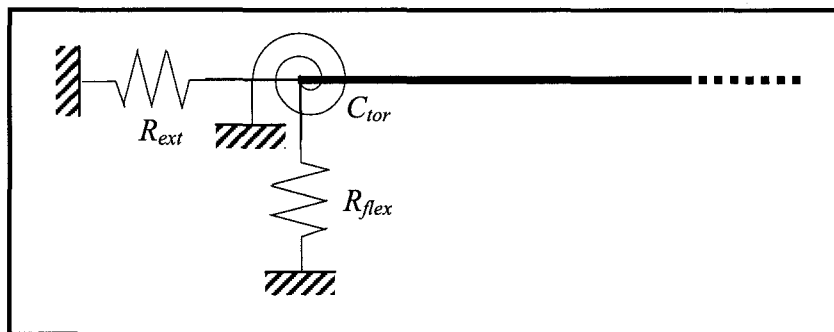


Figure 3.6 : Conditions aux limites avec des ressorts

Condition	$R_{ext}$	$R_{flex}$	$C_{tor}$
Libre	0	0	0
Appuyée	$\infty$	$\infty$	0
Encastrée	$\infty$	$\infty$	$\infty$

**Tableau 3.1 :** Choix des raideurs pour représenter une condition aux limites  
Une raideur infinie en théorie correspond à une "très grande" raideur en pratique

## 3.2.4 Formulation du couplage par ressorts virtuels

Comme au paragraphe 3.2.1, la fonctionnelle de Hamilton du système non couplé est construite de façon à se retrouver avec les relations 3.18, qui représentent le point du raisonnement où les deux méthodes divergent.

Le principe de cette seconde méthode est de représenter, pour un problème 2D, le couplage entre deux poutres 1 et 2 par trois ressorts (deux de traction et un de torsion), comme présenté à la Figure 3.7

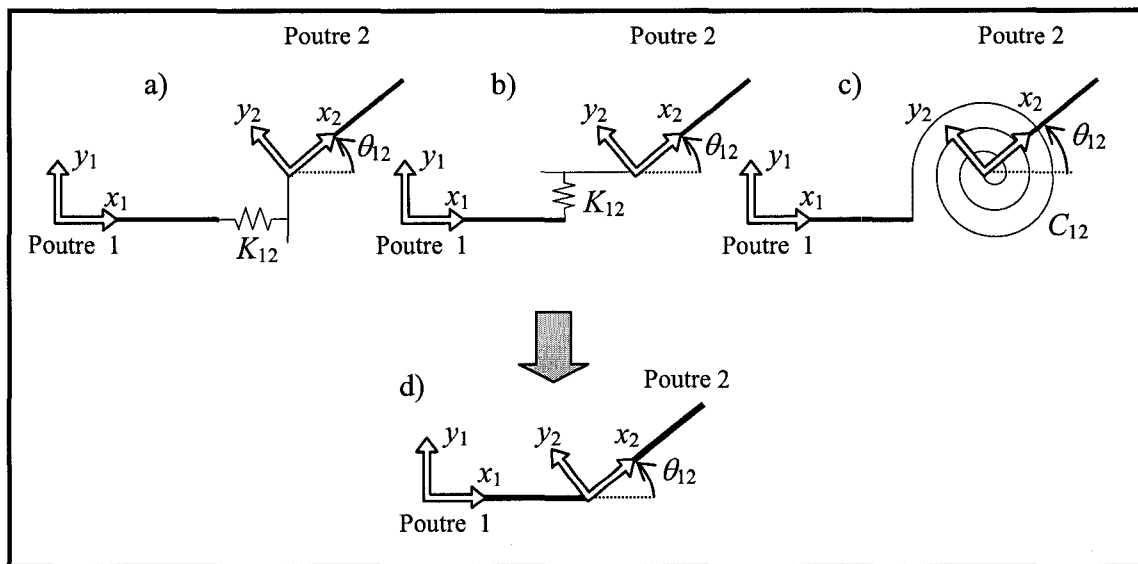


Figure 3.7 : Couplage par ressorts

- a) L'extension de la poutre 1 est couplée par un ressort à l'extension et à la flexion de la poutre 2  
 b) La flexion de la poutre 1 est couplée par un ressort à l'extension et à la flexion de la poutre 2  
 c) La rotation due à la flexion 1 de la poutre est couplée par un ressort de torsion à la celle de la poutre 2  
 d) est la superposition des poutres a), b) et c)

On notera  $K_{12}$  la constante de raideur des ressorts de traction sur les deux axes et  $C_{12}$  celle des ressorts de torsion entre les poutres 1 et 2. Le choix des raideurs est une question qui sera traitée au Chapitre 4 afin d'en illustrer les conséquences. Les ressorts agissent comme des forces externes sur les poutres 1 et 2 de la Figure 3.6. Par convention, on se basera toujours sur le repère de la poutre 1. On parlera donc maintenant des déplacements  $\bar{u}_2$  et  $\bar{v}_2$ ,

expression des déplacements  $u_2$  et  $v_2$  dans le système d'axe de la poutre 1. On obtient alors les expressions 3.30 qui ne sont pas sans rappeler les expressions 3.22a et 3.22b.

$$\bar{u}_2(x_{21}) = \cos \theta_{12} u_2(x_{21}) - \sin \theta_{12} v_2(x_{21}) \quad 3.30a$$

$$\bar{v}_2(x_{21}) = \sin \theta_{12} u_2(x_{21}) + \cos \theta_{12} v_2(x_{21}) \quad 3.30b$$

Concernant les rotations, elles ne nécessitent pas ce changement de repère puisque la rotation d'une poutre est la même dans les deux repères.

La fonctionnelle de Hamilton du système se voit donc ajouter des termes supplémentaires, identifiés à l'expression 3.31 :

$$\tilde{H}_{\text{sys}} = \underbrace{\sum_{h=1}^{n_p} \tilde{H}_h(u_h, v_h)}_{\text{Fonctionnelles de Hamilton des poutres non couplées}} + \underbrace{[\tilde{H}_{x_{12}}(u_1, \bar{u}_2) + \tilde{H}_{y_{12}}(v_1, \bar{v}_2) + \tilde{H}_{c_{12}}(v_1, v_2)]}_{\text{Fonctionnelles de Hamilton des ressorts de couplage}} \quad 3.31$$

Ainsi, le couplage entre les poutres 1 et 2 rajoute à la fonctionnelle du système entier les termes 3.32 correspondants aux fonctionnelles des ressorts.

$$\tilde{H}_{x_{12}}(u_1, \bar{u}_2) = -\frac{1}{2} K_{12} [u_1(x_{12}) - \bar{u}_2(x_{21})]^2 \quad 3.32a$$

$$\tilde{H}_{y_{12}}(v_1, \bar{v}_2) = -\frac{1}{2} K_{12} [v_1(x_{12}) - \bar{v}_2(x_{21})]^2 \quad 3.32b$$

$$\tilde{H}_{c_{12}}(v_1, v_2) = -\frac{1}{2} C_{12} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_{12}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_{21}) \right]^2 \quad 3.32c$$

Ces termes ne contiennent que des termes en  $q$  et non en  $\dot{q}$ . Ils ne se retrouveront pas dans la matrice de masse mais que dans la matrice de raideur. On peut donc maintenant séparer dans la fonctionnelle de Hamilton les termes qui constitueront la matrice de masse de ceux de la matrice de raideur. En utilisant les expressions 3.18 et 3.26 et en y ajoutant la contribution des ressorts de couplage telle que définie en 3.32, on obtient les relations 3.33 :

$$\tilde{H}^M = \sum_{h=1}^{n_p} \tilde{H}_h^M \quad 3.33a$$

$$\tilde{H}^K = \sum_{h=1}^{n_p} \tilde{H}_h^K + [\tilde{H}_X + \tilde{H}_Y + \tilde{H}_C] \quad 3.33b$$

Avec  $\tilde{H}_X$ ,  $\tilde{H}_Y$  et  $\tilde{H}_C$  les fonctionnelles de Hamilton de tous les ressorts dans l'axe, hors axe et de torsion respectivement.

On peut à présent construire les matrices de masse et de raideur sur le même principe que précédemment :

$$M_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \tilde{H}^M}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \quad 3.34a$$

$$K_{i,j} = -\frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial \tilde{H}^K}{\partial q_i} \right) \quad 3.34b$$

Et on se retrouve face au système 3.35 dont la résolution permet l'obtention du schéma modal de la structure.

$$[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] \underline{q} = \underline{0} \quad 3.35$$

### 3.2.5 Comparaison d'un point de vue théorique

Pour la première méthode, pour un nombre  $n_T$  de fonctions d'essai utilisé, on ne peut calculer que  $n_T - 3n_C$  modes. Ainsi, plus la structure présente de points de couplage, plus le nombre total de fonctions d'essai doit être important. Pour la seconde méthode, à aucun moment de nouvelles équations ont été rajoutées. Seul le nombre de termes dans la fonctionnelle de Hamilton a augmenté. Pour  $n_T$  fonctions d'essai utilisées, on peut donc calculer  $n_T$  modes.

De plus, la première méthode nécessite une inversion de matrice pour exprimer les coefficients  $X^{NL}$  en fonction des coefficients  $X^L$ . Or cette matrice peut se retrouver

singulière selon la géométrie (par exemple, des simulations passées ont montré qu'un angle droit ou plat dans l'assemblage de poutres pouvait rendre la matrice  $\underline{M}^{NL}$  singulière). La seconde méthode utilise tous les coefficients, il n'y a donc pas de matrice à inverser autre que la matrice de masse ce qui rend possible la construction analytique des matrices de masse et de raideur du système au complet. La seconde méthode introduit par contre des paramètres supplémentaires que sont les coefficients de raideur des ressorts dont les valeurs peuvent avoir une influence sur le calcul : trop faibles, les poutres ne sont plus solidaires et trop fortes, la matrice de raideur pose des problèmes de conditionnement. Au Chapitre 4, il sera montré que le choix des raideurs des ressorts est lié à la structure ainsi qu'au nombre de fonctions de forme utilisé.

### 3.2.6 Matrices de masse et de raideur selon la méthode des ressorts virtuels

Les matrices de masse et de raideur du système correspondent à la superposition de celles définies par l'extension et la flexion des poutres hors couplage et de celles définies par la prise en compte de ressorts de couplage.

Dans un premier temps, les matrices de masse et de raideur du système non couplé peuvent être construites. Ce sont des matrices diagonales par bloc. Un bloc sur deux correspond à l'extension ou à la flexion. Le nombre de blocs vaut deux fois le nombre de poutres. En notant  $\underline{M}^{u_p}$ ,  $\underline{K}^{u_p}$ ,  $\underline{M}^{v_p}$  et  $\underline{K}^{v_p}$  les matrices blocs contenant la contribution en extension et en flexion d'une poutre  $p$  du système, on obtient :

$$\begin{cases} M_{i,j}^{u_p} = \rho_p S_p \langle U_{p,i}, U_{p,j} \rangle_0 \\ K_{i,j}^{u_p} = E_p S_p \langle U_{p,i}, U_{p,j} \rangle_1 \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq Nu_p \quad 3.36a$$

$$\begin{cases} M_{i,j}^{v_p} = \rho_p S_p \langle V_{p,i}, V_{p,j} \rangle_0 \\ K_{i,j}^{v_p} = E_p I_{z_p} \langle V_{p,i}, V_{p,j} \rangle_2 \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq Nv_p \quad 3.36b$$

Les matrices de masse et de raideur du système non couplé présentent l'allure suivante

$$M^{non\ couplé} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M^{u_1}}} & & & & \\ & \underline{\underline{M^{v_1}}} & & \underline{\underline{0}} & \\ & & \ddots & & \\ & \underline{\underline{0}} & & \underline{\underline{M^{u_{n_p}}}} & \\ & & & & \underline{\underline{M^{v_{n_p}}}} \end{bmatrix} \quad 3.37a$$

$$K^{non\ couplé} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K^{u_1}}} & & & & \\ & \underline{\underline{K^{v_1}}} & & \underline{\underline{0}} & \\ & & \ddots & & \\ & \underline{\underline{0}} & & \underline{\underline{K^{u_{n_p}}}} & \\ & & & & \underline{\underline{K^{v_{n_p}}}} \end{bmatrix} \quad 3.37b$$

Pour chaque point de couplage, douze nouvelles matrices blocs vont être créées pour représenter les interactions entre chacune des poutres en ce qui concerne les ressorts axiaux et trois autres pour le ressort de torsion. Il est maintenant possible de définir les matrices blocs instaurant le couplage entre deux poutres  $p$  et  $q$  formant un angle  $\theta$  et  $x_0$  désignera le point de couplage.

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_{X,i,j}^{u_p u_p} = K U_{p,i}(x_0) U_{p,j}(x_0) & 1 \leq i, j \leq Nu_p \\ R_{X,i,j}^{u_q u_q} = K \cos^2 \theta U_{q,i}(x_0) U_{q,j}(x_0) & 1 \leq i, j \leq Nu_q \\ R_{X,i,j}^{v_q v_q} = K \sin^2 \theta V_{q,i}(x_0) V_{q,j}(x_0) & 1 \leq i, j \leq Nv_q \\ R_{X,i,j}^{u_p u_q} = -K \cos \theta U_{p,i}(x_0) U_{q,j}(x_0) & 1 \leq i \leq Nu_p \text{ et } 1 \leq j \leq Nu_q \\ R_{X,i,j}^{u_p v_q} = K \sin \theta U_{p,i}(x_0) V_{q,j}(x_0) & 1 \leq i \leq Nu_p \text{ et } 1 \leq j \leq Nv_q \\ R_{X,i,j}^{u_q v_q} = K \sin \theta \cos \theta U_{q,i}(x_0) V_{q,j}(x_0) & 1 \leq i \leq Nu_q \text{ et } 1 \leq j \leq Nv_q \end{array} \right. \quad 3.38a$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 R_{Y,i,j}^{v_p v_p} = K V_{p,i}(x_0) V_{p,j}(x_0) & 1 \leq i, j \leq Nv_p \\
 R_{Y,i,j}^{u_q u_q} = K \sin^2 \theta U_{q,i}(x_0) U_{q,j}(x_0) & 1 \leq i, j \leq Nu_q \\
 R_{Y,i,j}^{v_q v_q} = K \cos^2 \theta V_{q,i}(x_0) V_{q,j}(x_0) & 1 \leq i, j \leq Nv_q \\
 R_{Y,i,j}^{v_p u_q} = -K \sin \theta V_{p,i}(x_0) U_{q,j}(x_0) & 1 \leq i \leq Nv_p \text{ et } 1 \leq j \leq Nu_q \\
 R_{Y,i,j}^{v_p v_q} = -K \cos \theta V_{p,i}(x_0) V_{q,j}(x_0) & 1 \leq i \leq Nv_p \text{ et } 1 \leq j \leq Nv_q \\
 R_{Y,i,j}^{u_q v_q} = -K \sin \theta \cos \theta U_{q,i}(x_0) V_{q,j}(x_0) & 1 \leq i \leq Nu_q \text{ et } 1 \leq j \leq Nv_q
 \end{array} \right. \quad 3.38b$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 C_{i,j}^{v_p v_p} = C \frac{dV_{p,i}(x_0)}{dx_p} \frac{dV_{p,j}(x_0)}{dx_p} & 1 \leq i, j \leq Nv_p \\
 C_{i,j}^{v_q v_q} = C \frac{dV_{q,i}(x_0)}{dx_q} \frac{dV_{q,j}(x_0)}{dx_q} & 1 \leq i, j \leq Nv_q \\
 C_{i,j}^{v_p v_q} = -C \frac{dV_{p,i}(x_0)}{dx_p} \frac{dV_{q,j}(x_0)}{dx_q} & 1 \leq i \leq Nv_p \text{ et } 1 \leq j \leq Nv_q
 \end{array} \right. \quad 3.38c$$

On notera que  $R_X^{u_q v_q} + R_Y^{u_q v_q} = 0$ . Pour un point de couplage, il est possible de construire les matrices  $K^{ressort}$  comme il est montré à la Figure 3.8 en utilisant les quinze matrices définies aux expressions 3.38

Les matrices de masse et de raideur sont finalement obtenues de la manière suivante :

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^{non\ couplé} \quad 3.39a$$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{non\ couplé} + \sum_{k=1}^{n_c} K_k^{ressort} \quad 3.39b$$

Le couplage par ressort revient à seulement modifier la matrice de raideur puisque, comme montré précédemment aux équations 3.33a et 3.33b, seuls des termes de raideur ont été ajoutés à la fonctionnelle de Hamilton du système.

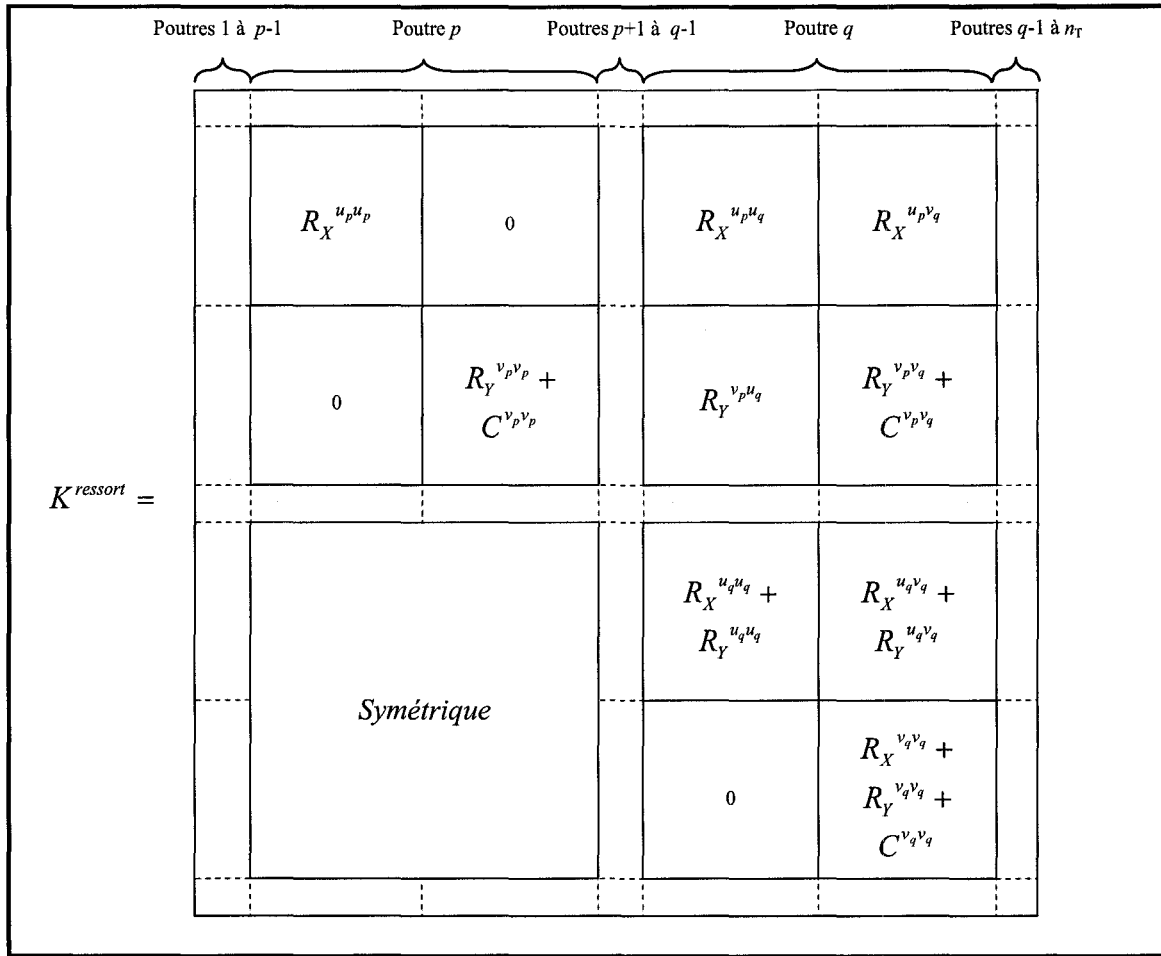


Figure 3.8 : Disposition de la matrice représentant le couplage par ressorts pour un point de couplage  
 Cette disposition est symétrique

Illustrons la construction des matrices de masse et de raideur par un exemple. Soit une quelconque structure à trois poutres telle que les poutres 1 et 2 soient couplées ainsi que les poutres 1 et 3, par exemple, une structure en H, en Z ou en F. On obtiendrait alors

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}^{noncouplé} = \begin{bmatrix} M^{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^{v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^{u_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M^{v_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^{u_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M^{v_3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^{noncouplé} + \underline{\underline{K}}_1^{ressort} + \underline{\underline{K}}_2^{ressort}$$



$$\text{avec } \underline{\underline{K}}^{\text{noncouplé}} = \begin{bmatrix} K^{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^{v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K^{u_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K^{v_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^{u_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K^{v_3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_1^{\text{ressort}} = \begin{bmatrix} R_X^{u_1 u_1} & 0 & R_X^{u_1 u_2} & R_X^{u_1 v_2} & 0 & 0 \\ & R_Y^{v_1 v_1} + C^{v_1 v_1} & R_Y^{v_1 u_2} & R_Y^{v_1 v_2} + C^{v_1 v_2} & 0 & 0 \\ & & R_X^{u_2 u_2} + R_Y^{u_2 u_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & R_X^{v_2 v_2} + R_Y^{v_2 v_2} + C^{v_2 v_2} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}_2^{\text{ressort}} = \begin{bmatrix} R_X^{u_1 u_1} & 0 & 0 & 0 & R_X^{u_1 u_3} & R_X^{u_1 v_3} \\ & R_Y^{v_1 v_1} + C^{v_1 v_1} & 0 & 0 & R_Y^{v_1 u_3} & R_Y^{v_1 v_3} + C^{v_1 v_3} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & R_X^{u_3 u_3} + R_Y^{u_3 u_3} & 0 & 0 \\ & & & & R_X^{v_3 v_3} + R_Y^{v_3 v_3} + C^{v_3 v_3} & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.3 Fonctions de Formes

Jusqu'à présent, les fonctions de formes ont été volontairement laissées dans l'ombre, afin d'être le plus général possible et les seules informations qui s'y rattachaient se rapportaient à leur définition, au paragraphe 3.1.5, en tant qu'ensemble de fonctions linéairement indépendantes et cinématiquement admissibles au problème. Il est donc temps d'accorder à ces fonctions, véritable ossature de la modélisation, un peu plus d'attention car un mauvais choix pourrait avoir de lourdes conséquences sur l'obtention des matrices de masse et de raideur du système. Au cours de l'élaboration des modèles analytiques, deux familles distinctes de fonctions de formes ont été utilisées et dont les avantages et les limites ont été révélés.

### 3.3.1 Modes propres des poutres hors couplage utilisés comme fonctions de forme

Il s'agit de considérer comme fonctions de forme les déformées des poutres telles que définies par la théorie et accessibles à l'Annexe B. Pour un assemblage de poutres, la plupart des éléments seront des poutres libre-libre. Cette famille de fonctions est linéairement indépendante, puisque les modes propres d'une poutre le sont, cinématiquement admissible, car les modes représentent la déformation de la poutre et donc respectent les conditions aux limites en déplacement du système, et, qui plus est, orthogonale, propriété intrinsèque aux modes propres. Cette dernière propriété, l'orthogonalité, est très intéressante puisque les produits scalaires, définis à l'équation 3.17, deviennent [BLÉVINS, 1979] :

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_0 = \int_0^L \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ N_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad 3.43a$$

La valeur de la norme modale  $N_i$  dans l'expression 3.43 est constante et dépend des conditions aux limites des poutres, tel que rappelées à l'Annexe B. De plus, il apparaît que les dérivées premières ou secondes des déformées modales en extension ou en flexion sont également orthogonales [BLÉVINS, 1979]. Ainsi, on peut écrire que

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_1 = \int_0^L \frac{d\Phi_1}{dx}(x) \frac{d\Phi_2}{dx}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ N_i^{(1)} & \text{si } i = j \end{cases} \quad 3.43b$$

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_2 = \int_0^L \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}(x) \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ N_i^{(2)} & \text{si } i = j \end{cases} \quad 3.43c$$

Dans la partie 3.2.6, les expressions 3.36 laissent apparaître que les matrices de masse et de raideur du système non couplé sont dépendantes des termes ci-dessus. En y appliquant les expressions 3.43, ces matrices deviennent cette fois diagonales. Ainsi, on peut voir les matrices de masse et de raideur d'une poutre de longueur  $L$  encastree-encastree en flexion hors couplage aux expressions 3.44 pour quatre modes.

$$\underline{\underline{M}} = \rho S L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.44a$$

$$\underline{\underline{K}} = EI \frac{\pi^4}{16L^3} \begin{bmatrix} 3^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^4 \end{bmatrix} \quad 3.44b$$

La prise en compte du couplage va rendre la matrice de raideur non diagonale, même par bloc, mais pas la matrice de masse. Or les expressions 3.28 (méthode de calcul par continuité) et 3.35 (méthode de calcul par ressorts virtuels) montrent qu'il est nécessaire d'inverser la matrice de masse afin de résoudre le problème aux valeurs propres qui détermine le schéma modal du système. Et le fait d'inverser une matrice diagonale est beaucoup plus simple que d'inverser une matrice diagonale par bloc. Pour des raisons qui seront expliquées plus loin dans ce mémoire, le nombre de fonctions de forme utilisées pour reconstituer un type de déplacement dans une poutre n'est pas très important (typiquement entre cinq et huit). Ainsi, faciliter l'inversion de la matrice de masse n'a pas pour objectif un gain de temps, mais plutôt de diminuer les problèmes de mauvais conditionnement.

Les modes propres en extension et en torsion sont des familles de fonctions trigonométriques dont l'utilisation ne pose aucun problème. Il n'en est pas de même pour les modes propres en flexion qui sont une combinaison de fonctions trigonométriques et hyperboliques.

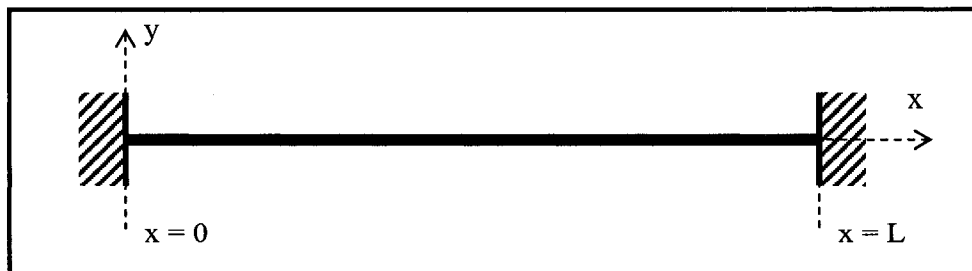


Figure 3.9 : Poutre encastrée-encastrée

Considérons la poutre encastree-encastree de longueur  $L$  de la Figure 3.9. Les déformées modales de cette poutre sont :

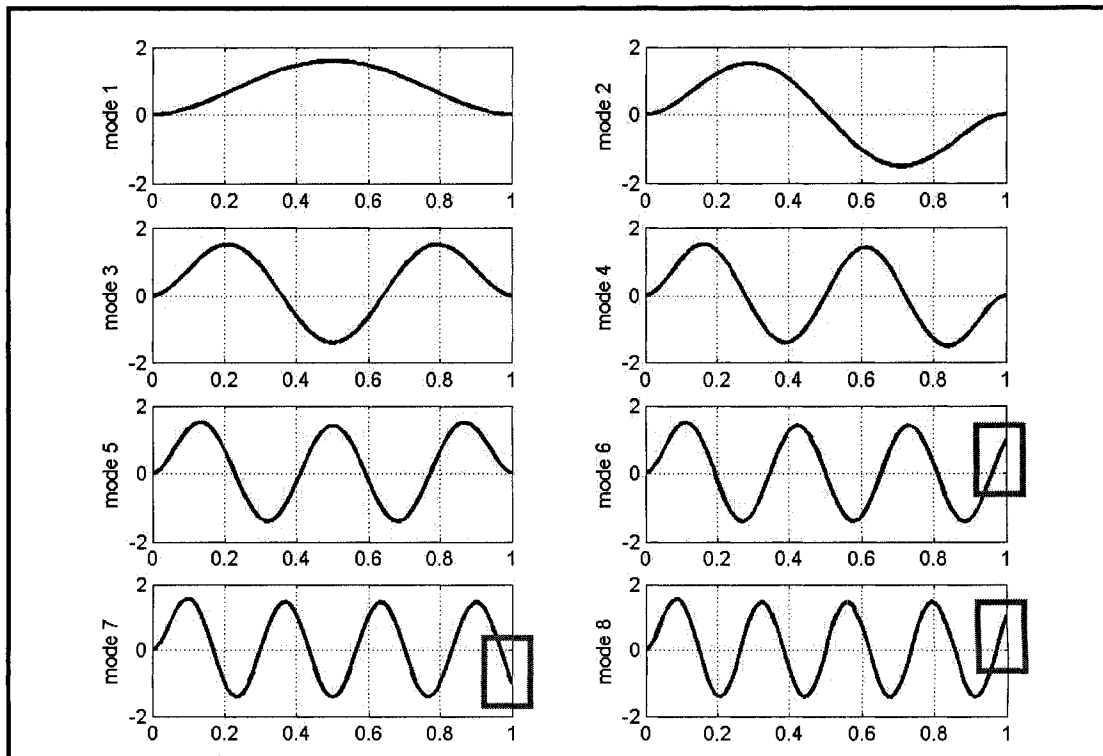
$$\Phi_{flex,k}(x) = \cosh\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) - \sigma_k \left[ \sinh\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) \right] \quad 3.45$$

L'expression 3.45 comporte deux paramètres importants :  $\lambda_k$  et  $\sigma_k$ , qui sont présentés au Tableau 3.2 :

k	$\lambda_k$	$\sigma_k$
1	4.73004074	0.982502215
2	7.85320462	1.000777312
3	10.9956079	0.999966450
4	14.1371655	1.000001450
5	17.2787597	0.999999937
$k > 5$	$(2k + 1) \frac{\pi}{2}$	1

**Tableau 3.2 :** Paramètres  $\lambda_k$  et  $\sigma_k$  pour une poutre encastree-encastree [BLÉVINS, 1979]

A l'aide du Tableau 3.2, les huit premières fonctions propres ont été calculées et représentées à la Figure 3.10.



**Figure 3.10 :** Huit premiers modes propres de flexion d'une poutre encastree-encastree de longueur  $L = 1$  selon le Tableau 3.2

Au-delà des cinq premiers modes, on ne retrouve plus, numériquement, à partir du tableau 3.1, les conditions de l'encastrement en  $L$ , ni en déplacement (le déplacement en  $L$  des modes 6, 7 et 8 n'est pas nul), ni en pente (pas de tangente horizontale en  $L$  sur les déformées des modes 6, 7 et 8). Ces observations ont nécessité d'apporter une plus grande attention aux paramètres  $\lambda$  et  $\sigma$  de l'équation 3.45.

Le premier paramètre,  $\lambda$ , concerne les fréquences propres de la poutre, selon la relation 3.46. Cette expression, qui permet de calculer la fréquence naturelle du mode  $k$ , est valable pour toute poutre en flexion, quelles que soient ses conditions aux limites.

$$f_k = \frac{\lambda_k^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad 3.46$$

Dans le cas d'une poutre encastree-encastree, il est déterminé comme étant l'ensemble des racines strictement positives de l'équation 3.47 :

$$\cos(\lambda)\cosh(\lambda) = 1 \quad 3.47$$

La fonction cosinus étant périodique, cette équation admet une infinité de solutions que sont les  $\lambda_k$ . La solution  $\lambda = 0$  est exclue puisque, physiquement, une poutre encastree-encastree ne possède pas de modes rigides. Pour des ordres supérieurs à cinq, la valeur approchée de  $\lambda$  est  $\lambda_k = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ . En effet, la relation pour déterminer  $\lambda$  peut s'écrire  $\cos(\lambda) = 1/\cosh(\lambda)$ , or, pour  $\lambda$  grand,  $1/\cosh(\lambda) \approx 0$  donc  $\lambda$  devient solution de  $\cos(\lambda) = 0$ .

Ainsi, l'approximation faite sur  $\lambda$  n'a pas beaucoup d'influence sur les résultats. En pratique, pour  $k = 6$ , l'erreur entre la valeur théorique de  $\lambda$  et sa valeur approchée  $\lambda_k = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$  est de l'ordre de  $3 \times 10^{-9}$ , et elle diminue d'autant plus que  $k$  augmente.

Le paramètre  $\sigma$  correspond à la prise en compte du couplage. Pour une poutre encastree-encastree, il est calculé de façon à respecter la condition d'encastrement en  $L$ , puisqu'en 0 elle est respectée quel que soit  $\sigma$ , et s'exprime ainsi :

$$\sigma_k = \frac{\cosh(\lambda_k) - \cos(\lambda_k)}{\sinh(\lambda_k) - \sin(\lambda_k)} \quad 3.48$$

Pour  $k$  grand, ce qui rend les termes en cosinus et sinus négligeables devant leurs homologues hyperboliques, il est possible d'exprimer simplement  $\sigma$  en fonction de  $\lambda$  et inversement :

$$|1 - \sigma_k| e^{\lambda_k} = \sigma_k \quad 3.49a$$

$$\sigma_k = \frac{e^{\lambda_k}}{1 + e^{\lambda_k}} \quad 3.49b$$

On pourrait donc considérer que l'approximation  $\sigma = 1$  est correcte, puisque pour  $k$  élevé, l'expression 3.49b tend vers 1. Seulement, pratiquement, prendre  $\sigma = 1$  annule l'encastrement en  $L$  d'après l'équation 3.45 et la Figure 3.10.

Pour utiliser les modes propres de la poutre comme fonctions de forme, il faut nécessairement calculer de manière rigoureuse les paramètres  $\sigma$ . Au Tableau 3.3 se trouvent les 14 premières valeurs de  $\sigma$  calculées par Matlab 7.0 avec quinze chiffres significatifs.

k	$\sigma_k$
1	0.982 502 214 576 238
2	1.000 777 311 907 27
3	0.999 966 450 125 409
4	1.000 001 449 897 66
5	0.999 999 937 344 383
6	1.000 000 002 707 6
7	0.999 999 999 882 994
8	1.000 000 000 005 06
9	0.999 999 999 999 782
10	1.000 000 000 000 01
11	0.999 999 999 999 999
12	1
13	1
14	1

Tableau 3.3 : Calcul de  $\sigma$  par Matlab 7.0

On se rend donc compte que Matlab 7.0 manque de précision pour calculer le douzième mode et ceux qui suivent, puisque l'on obtient  $\sigma$  exactement égal à un. Il n'est donc pas possible de considérer plus de onze modes. De plus, l'information importante sur le

onzième étant très proche de la valeur d'exactitude de Matlab 7.0, il paraît plus prudent de se restreindre à l'ordre dix.

La Figure 3.11 représente le tracé des déformées des douze premiers modes (et non pas les dix premiers comme expliqué précédemment.) On constate que la fin des déformées des modes onze et douze est corrompue, ce qui est très problématique puisque dans un problème de couplage les valeurs des fonctions de forme aux extrémités est très important. Il semblerait que le calcul dépasse les capacités de Matlab 7.0. Il ne faut pas oublier que pour ces modes, le point crucial du calcul concerne des fonctions exponentielles, dont chacune donne des valeurs de plus en plus élevées, et dont la différence doit être très proche de un. Ainsi, même s'il était possible d'augmenter la précision de Matlab, ce qui nous permettrait de calculer  $\sigma$  pour des modes d'ordre supérieur à dix, la reconstitution de ces modes serait toujours problématique. L'application de ces fonctions en tant que fonctions de forme est donc restreinte à l'ordre dix sur une poutre.

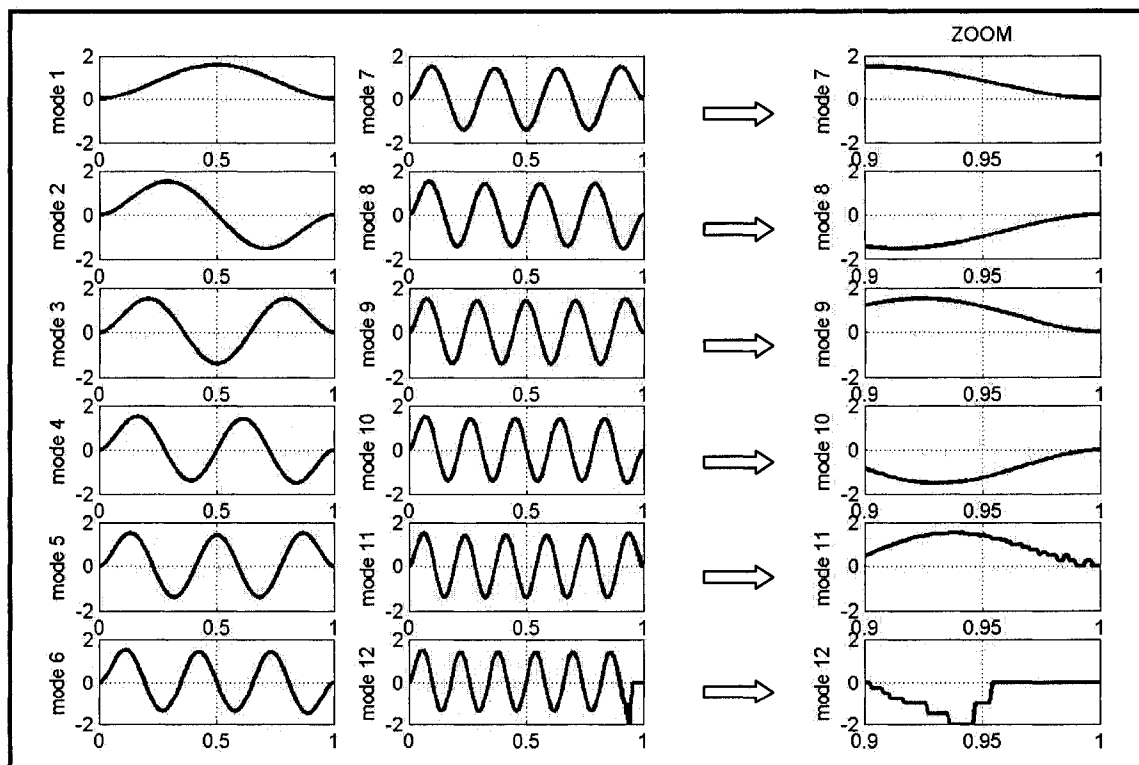


Figure 3.11 : Douze premières déformées modales d'une poutre encadrée-encadrée de longueur unitaire. Colonne de droite, zoom sur l'extrémité encadrée en 1 des modes 7 à 12.

Mais ce n'est pas le seul défaut de ces fonctions de forme. Considérons à présent une poutre libre-libre de longueur  $L$ . Une telle poutre possède six modes rigides : un en extension, un en torsion, deux en flexion selon l'axe  $y$  et deux en flexion selon l'autre axe  $z$ . Les deux modes rigides en flexion correspondant à une translation et à une rotation.

Une résolution du problème avec des fonctions de forme polynomiales donne les déformées de la Figure 3.12. La famille de polynômes choisie est  $P_k(x) = \left(x/L - \frac{1}{2}\right)^{k-1}$  avec la même convention sur le repère qu'à la Figure 3.8.

On voit nettement apparaître les deux premiers modes rigides, dont les fréquences propres sont naturellement 0 Hz. Pour une poutre libre-libre, les déformées des modes souples sont déterminées par l'expression 3.50. Les valeurs des coefficients  $\sigma$  et  $\lambda$  (ce dernier étant strictement positif) sont disponibles à l'Annexe B.

$$\Phi_{flex,k}(x) = \cosh\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) - \sigma_k \left[ \sinh\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right) \right] \quad 3.50$$

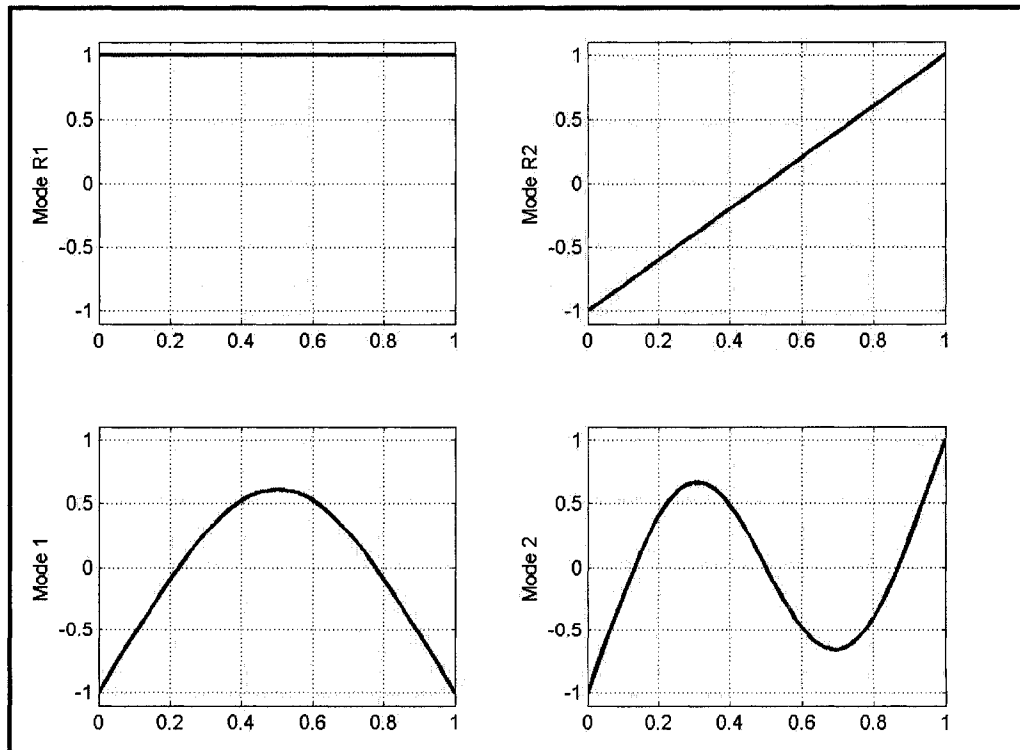


Figure 3.12 : Quatre premiers modes propres d'une poutre libre-libre de longueur unitaire en flexion. En haut, les deux modes rigides et en bas, les deux premiers modes souples.



Cette expression ne peut pas être étendue aux modes rigides. Il manque donc deux fonctions pour prendre en compte ces modes et rendre la base des fonctions de forme complète.

Pour représenter le mode rigide en translation, une constante suffit, puisqu'une translation n'est rien d'autre qu'un déplacement égal de tous les points de la poutre dans une même direction. On pourrait donc prendre  $\Phi_T(x) = 1$ , ce qui donne  $\langle \Phi_T, \Phi_T \rangle_0 = L$

Pour celui en rotation, c'est un peu plus problématique. En utilisant des polynômes, on se rend compte que ce mode correspond à une droite. Il faut donc chercher une fonction affine telle que  $\langle \Phi_T, \Phi_R \rangle_0 = 0$  et  $\langle \Phi_R, \Phi_R \rangle_0 = L$

$$\text{Ainsi, on peut prendre } \Phi_R(x) = \sqrt{3} \left( 1 - \frac{2x}{L} \right)$$

En combinant ces deux fonctions aux modes souples, la famille des fonctions de forme constitue une famille libre qui est complète puisque du premier mode rigide au dernier mode souple considéré, tous sont représentés.

Pour une poutre libre-appuyée, le mode rigide de rotation est différent. Il a pu être calculé grâce au calcul des quantités  $\langle 1, \Phi_{flex,k} \rangle_0$  et  $\langle x, \Phi_{flex,k} \rangle_0$  dans [BLEVINS, 1979].

$$\text{On obtient alors } \Phi_R(x) = \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \text{ pour une poutre libre-appuyée.}$$

On peut voir les matrices de masse et de raideur d'une poutre libre-libre (3.51a et 3.51b) et libre-appuyée (3.51c et 3.51d) en flexion hors couplage pour six modes.

$$\underline{\underline{M}}^{\text{libre-libre}} = \rho S L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.51a$$

$$\underline{\underline{K}}^{\text{libre-libre}} = E I \frac{\pi^4}{16L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9^4 \end{bmatrix} \quad 3.51b$$

$$\underline{\underline{M}}^{\text{libre-appuyée}} = \rho S L \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.51c$$

$$\underline{\underline{K}}^{\text{libre-appuyée}} = E I \frac{\pi^4}{16L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11^4 \end{bmatrix} \quad 3.51d$$

Il s'avère donc que l'utilisation des fonctions modales soulève deux difficultés. Le premier concerne leur utilisation limitée à l'ordre dix pour des problèmes de calcul numérique. Ensuite, toujours pour des problèmes de calcul, les expressions exactes de  $\lambda$  doivent être remplacées par leurs valeurs approchées ce qui a pour effet l'obtention de fonctions qui ne sont plus réellement orthogonales.

Enfin, pour certaines conditions aux limites, la présence de modes rigides nécessite quelques précautions, lorsque ces modes ne sont pas exprimables selon les modes souples, car premièrement leur expression est à déterminer et, deuxièmement, leur introduction dans la

base des fonctions de forme peut rendre cette base non orthogonale. Ceci est valable pour les conditions libre-libre (modes rigides en translation et en rotation), libre-appuyé (mode rigide en rotation) et libre-glissant (mode rigide en translation). Par contre, la condition glissant-glissant (mode rigide en translation) n'est pas concernée car le mode rigide peut s'exprimer comme étant le mode souple d'ordre 0.

Il apparaît donc qu'utiliser les modes propres des poutres en tant que fonctions de forme donne des résultats limités. Le fait de devoir se limiter à dix modes montre que le choix de cette famille est mauvais. Devant ces difficultés, il est nécessaire de se doter d'une autre famille de fonctions de forme.

### 3.3.2 Fonctions de forme polynomiales

En premier lieu, il faut se définir une base de fonctions polynomiales. Le nombre de fonctions de cette base dépendant du nombre de mode  $n_m$  que l'on souhaite utiliser pour reconstituer le déplacement dans une poutre, cette base doit être une base de l'espace vectoriel engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n_m - 1$ . On sait donc que cette base aura exactement  $n_m$  fonctions. Il existe une très grande variété de bases utilisables, allant de la simple base de monômes, à celle des polynômes de Newton ou de Legendre. Il est également possible de créer une base de polynômes qui soient orthogonaux entre eux pour une norme donnée. Il faut cependant garder à l'esprit que quelle que soit la base choisie, elle n'aura pas d'influence sur le résultat puisque chaque fonction d'une base est une combinaison linéaire des fonctions d'une autre base. La différence se situera au niveau du conditionnement des matrices et du temps de calcul.

Dans ce mémoire, deux bases de polynôme ont été utilisées et sont définies par les expressions 3.52. La première base,  $B_N$ , est composée de polynôme de type binôme de Newton, dont le second terme,  $a$ , est constant. Le seconde base,  $B_M$ , est composée d'un monôme d'ordre variable et d'une constante, pour éviter que toutes les fonctions de cette base

s'annulent en 0. Pour toutes ces expressions, le repère est tel que 0 et  $L$  soient les extrémités de la poutre (cf. Figure 3.8).

$$\forall x \in [0, L], \forall k \in [0, n_m], B_{N,k}(x) = \left(\frac{x}{L} - a\right)^k \quad 3.52a$$

$$\forall x \in [0, L], \forall k \in [0, n_m], B_{M,k}(x) = 1 + \left(\frac{x}{L}\right)^k \quad 3.52b$$

A présent, il faut transformer cette base de référence en base de fonctions cinématiquement admissibles. Il faut donc envisager les différentes conditions aux limites possibles. Pour une poutre en flexion, une condition libre en n'importe quelle extrémité de la poutre ne pose aucun problème puisqu'elle n'impose aucune condition cinématique. Une condition d'appui simple impose un déplacement nul donc 0 ou  $L$  doit être une racine d'ordre 1 des fonctions de la base tandis qu'une condition d'encastrement impose que 0 ou  $L$  doit être racine d'ordre 2 puisque le déplacement et la flèche sont nuls. L'extension n'impose que des conditions sur le déplacement et non sur la dérivée du déplacement. Un encastrement sera donc vu comme une racine d'ordre 1 des fonctions de la base en 0 ou  $L$ .

Il est maintenant possible de modifier très simplement la base de référence pour en faire une base cinématiquement admissible telle que montré aux Tableaux 3.4 et 3.5. On notera que ces expressions sont en fonction de  $B$  afin que le lecteur puisse adapter sa propre base de polynôme. Rappelons que pour un assemblage, le cas libre est le plus important.

$\Phi_k(x)$		Condition en $L$	
		Libre	Encastree
Condition en 0	Libre	$B_k(x)$	$\left(\frac{x}{L} - 1\right)B_k(x)$
	Encastree	$\frac{x}{L}B_k(x)$	$\frac{x}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)B_k(x)$

**Tableau 3.4 :** *Fonctions de forme polynomiales pour l'extension*

$\Phi_k(x)$		Condition en $L$		
		Libre	Appuyée	Encastrée
Condition en 0	Libre	$B_k(x)$	$\left(\frac{x}{L}-1\right)B_k(x)$	$\left(\frac{x}{L}-1\right)^2 B_k(x)$
	Appuyée	$\frac{x}{L}B_k(x)$	$\frac{x}{L}\left(\frac{x}{L}-1\right)B_k(x)$	$\frac{x}{L}\left(\frac{x}{L}-1\right)^2 B_k(x)$
	Encastrée	$\frac{x^2}{L^2}B_k(x)$	$\frac{x^2}{L^2}\left(\frac{x}{L}-1\right)B_k(x)$	$\frac{x^2}{L^2}\left(\frac{x}{L}-1\right)^2 B_k(x)$

Tableau 3.5 : Fonctions de forme polynomiales pour la flexion

On peut déjà constater que si  $n_m$  modes sont utilisés pour reconstruire le déplacement d'une poutre, les conditions aux limites vont avoir un impact important puisque pour une poutre encastree-encastree, cela reviendra à utiliser des polynômes de degré 4 à  $n_m + 4$ . Il est donc possible que pour une même poutre, le fait de changer de conditions aux limites puisse avoir un effet sur la convergence du calcul, car il y a plus de chances d'avoir une matrice dont la différence d'ordre de grandeur des coefficients soit plus importante avec une poutre encastree-encastree qu'avec une poutre libre-libre. Par exemple, pour des polynômes  $B_N$  avec  $a$  valant  $\frac{1}{2}$ , on obtient les matrices de masse et de raideur pour une poutre libre-libre (3.53a et 3.53b) et encastree-encastree (3.53c et 3.53d) en flexion pour six fonctions de formes, ce qui est suffisant pour constater la grande dynamique des coefficients :

$$\underline{\underline{M}}^{libre-libre} = \rho S L \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 8333 & 0 & 1250 & 0 \\ & 8333 & 0 & 1250 & 0 & 223 \\ & & 1250 & 0 & 223 & 0 \\ & & & 223 & 0 & 43 \\ & T & & & 43 & 0 \\ & & & & & 9 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \quad 3.53a$$

$$\underline{\underline{K}}^{libre-libre} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 2 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 1.5 \\ & T & & & 1.8 & 0 \\ & & & & & 0.9 \end{bmatrix} \quad 3.53b$$

$$\underline{\underline{M}}^{encastrée-encastrée} = \rho S L \begin{bmatrix} 15873 & 0 & 361 & 0 & 20.81 & 0 \\ & 361 & 0 & 20.81 & 0 & 1.734 \\ & & 20.81 & 0 & 1.734 & 0 \\ & & & 1.734 & 0 & 0.178 \\ & T & & & 0.178 & 0 \\ & & & & & 0.021 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \quad 3.53c$$

$$\underline{\underline{K}}^{encastrée-encastrée} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 800 & 0 & 285.7 & 0 & 23.8 & 0 \\ & 142.9 & 0 & 119 & 0 & 13.5 \\ & & 214.3 & 0 & 28.7 & 0 \\ & & & 35.2 & 0 & 5.9 \\ & T & & & 6.7 & 0 \\ & & & & & 1.4 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad 3.53d$$

Pour des polynômes  $B_N$  avec  $a$  valant  $\frac{1}{2}$ , les matrices de masse et de raideur ont un terme sur deux qui est nul. Ceci est dû à la valeur de  $a$ . En règle générale, ces matrices sont pleines et ne présente pas un damier de 0.

Avec des polynômes  $B_M$ , on obtient les matrices de masse et de raideur pour une poutre libre-libre (3.54a et 3.54b) et encastrée-encastrée (3.54c et 3.54d) en flexion pour six fonctions de formes, ce qui est suffisant pour constater que la dynamique des coefficients s'est énormément réduite :

$$\underline{\underline{M}}^{libre-libre} = \rho S L \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2.67 & 2.5 & 2.4 & 2.33 \\ & 2.33 & 2.08 & 1.95 & 1.87 & 1.81 \\ & & 1.87 & 1.75 & 1.67 & 1.62 \\ & & & 1.64 & 1.57 & 1.53 \\ & T & & & 1.51 & 1.47 \\ & & & & & 1.42 \end{bmatrix} \quad 3.54a$$

$$\underline{\underline{K}}^{\text{libre-libre}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 6 & 8 & 10 \\ & & & 12 & 18 & 24 \\ T & & & & 28.8 & 40 \\ & & & & & 57.1 \end{bmatrix} \quad 3.54b$$

$$\underline{\underline{M}}^{\text{encastrée-encastrée}} = \rho S L \begin{bmatrix} 63 & 48 & 40 & 37 & 35 & 34 \\ & 36 & 31 & 28 & 26 & 25 \\ & & 26 & 24 & 22 & 22 \\ & & & 22 & 20 & 20 \\ T & & & & 19 & 19 \\ & & & & & 18 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad 3.54c$$

$$\underline{\underline{K}}^{\text{encastrée-encastrée}} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3.2 & 2.4 & 2.06 & 1.88 & 1.79 & 1.73 \\ & 1.94 & 1.69 & 1.53 & 1.44 & 1.37 \\ & & 1.49 & 1.36 & 1.28 & 1.22 \\ & & & 1.26 & 1.19 & 1.14 \\ T & & & & 1.13 & 1.09 \\ & & & & & 1.05 \end{bmatrix} \quad 3.54d$$

La grande dynamique des coefficients d'une matrice apparaît lorsque les différences d'ordre de grandeur des termes de la matrice deviennent grandes. Ces termes sont proportionnels aux produits scalaires des fonctions de formes. La Figure 3.13 présente l'évolution du rapport entre le plus grand terme non nul des matrices  $M$  et  $K$  et le plus petit non nul en fonction du type et du nombre de fonctions de forme choisi dans le cas d'une poutre libre-libre ou encastrée-encastrée en flexion. On constate que les fonctions  $B_M$  sont très efficaces et que les fonctions  $B_N$  avec  $a$  valant 0 ou 1 sont les meilleurs parmi le type  $B_N$ .

Pour la matrice de masse d'une poutre encastrée-encastrée en flexion, les produits scalaires d'ordre 0 des fonctions de forme  $B_N$  sont déterminés par :

$$\langle \Phi_k, \Phi_p \rangle_0 = \int_0^L \frac{x^4}{L^4} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^4 B_{N,k}(x) B_{N,p}(x) dx = \int_0^L \frac{x^4}{L^4} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^4 \left( \frac{x}{L} - a \right)^{k+p} dx \quad 3.55$$

Soit

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k, \Phi_p \rangle_0 &= \int_0^L \left( \frac{x^8}{L^8} - 4 \frac{x^7}{L^7} + 6 \frac{x^6}{L^6} - 4 \frac{x^5}{L^5} + \frac{x^4}{L^4} \right) \left( \frac{x}{L} - a \right)^{k+p} dx \\ &= \sum_{q=1}^5 (-1)^{q+1} \frac{4!}{(4-q)!q!} \int_0^L \frac{x^{q+3}}{L^{q+3}} \left( \frac{x}{L} - a \right)^{k+p} dx \end{aligned} \quad 3.56$$

L'équation 3.56 est juste une version de l'équation 3.55 où l'intégrande est un peu plus développée. Cependant, elle met en relief que le produit scalaire d'ordre 0 est une combinaison linéaire d'intégrales élémentaires dont l'expression générale est donnée à l'équation 3.57.

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{x^q}{L^q} \left( \frac{x}{L} - a \right)^{k+p} dx &= (-1)^q \frac{q! h! L}{(k+p+q+1)!} \left[ (1-a)^{k+p+q+1} - (-a)^{k+p+q+1} \right] \\ &+ \sum_{r=1}^q (-1)^{r+1} \frac{q!}{(q-r+1)!} \frac{(k+p)! L}{(k+p+r)!} (1-a)^{k+p+r} \end{aligned} \quad 3.57$$

Des équations 3.56 et 3.57, on se rend compte qu'il est possible de mettre un terme en  $a^{k+p+1}$  en facteur dans l'expression du produit scalaire. Si  $a$  est différent de 1 et de 0, alors on aura soit une augmentation des produits scalaires au fur et à mesure que l'ordre des fonctions de forme augmente, soit une diminution. La Figure 3.14 présente les normes modales d'ordre 0 (utilisées pour la matrice de masse) et d'ordre 2 (pour la matrice de raideur) en valeur absolue, correspondant à la flexion d'une poutre libre-libre et d'une poutre encastree-encastree pour différentes valeurs du paramètre  $a$ . L'axe des ordonnées correspond au valeur des produits scalaires et celui des abscisses à  $k+p$ . Le nombre total de fonction de forme choisi est douze et a été choisi aussi élevé pour bien marquer les tendances à observer. Pour information, l'inversion de chaque matrice provoque en plus un message de mauvais conditionnement de la part de Matlab 7.0.



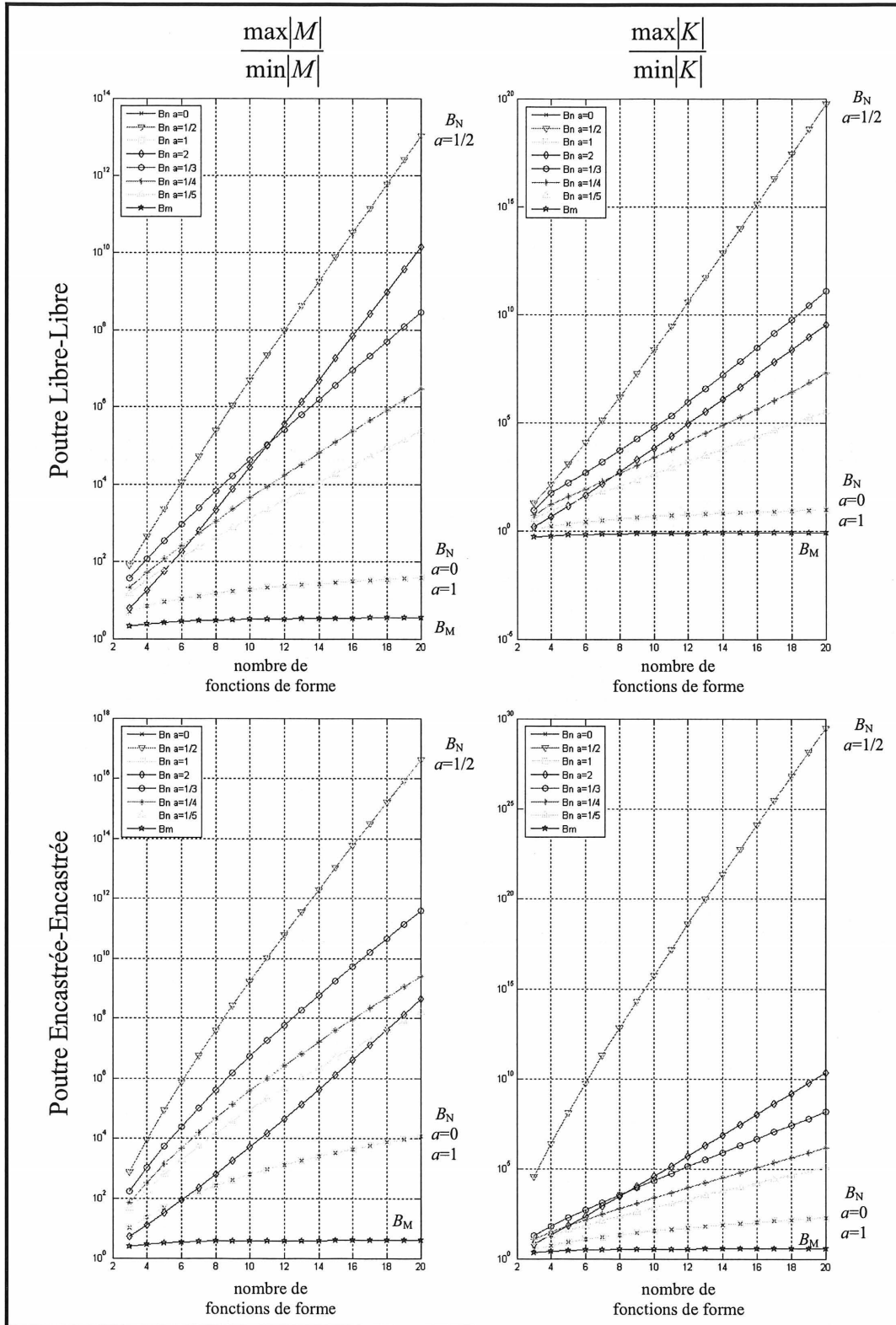


Figure 3.13 : Évolution du rapport entre la plus grande et la plus petite valeur des matrices de masse et de raideur d'une poutre libre-libre et encastree-encastree en flexion en fonction du nombre et du type de fonctions de forme

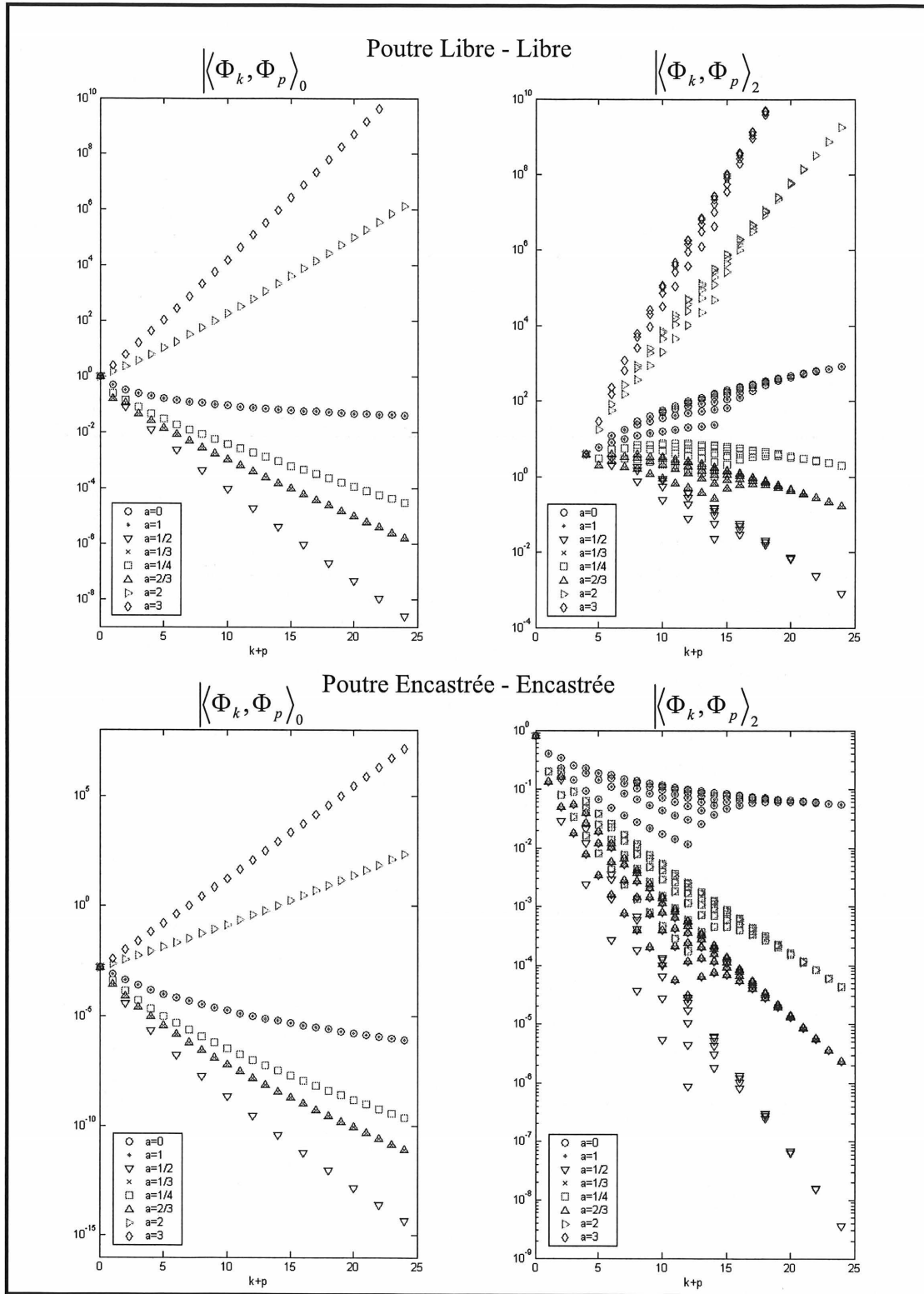


Figure 3.14 : Valeurs des produits scalaires d'ordre 0 et 2 pour différentes valeurs du paramètre  $a$   
 En haut, poutre libre-libre en flexion. A gauche, ordre 0 et à droite, ordre 2  
 En bas, poutre encastée-encastée en flexion. A gauche, ordre 0 et à droite, ordre 2

On retrouve bien les tendances expliquées plus haut. Afin de minimiser la dynamique des coefficients, le paramètre  $\alpha$  optimal est 0 ou 1. Les courbes affichent les mêmes résultats en raison de la valeur absolue, mais en réalité, il existe un facteur  $(-1)^{k+p}$  entre les deux.

Il apparaît clairement que sauf exception, le choix d'un paramètre  $\alpha$  égal à zéro ou à un, est le meilleur possible quand on s'intéresse à la fois aux matrices de masse et de raideur avec des fonctions de forme de type  $B_N$ . Pratiquement, le fait de prendre  $\alpha$  égal à 0 au lieu de  $\alpha$  égal à un demi dans un cas concret a permis de rajouter une fonction de forme pour chaque déplacement de chaque poutre d'un système en comprenant six sans que la grande dynamique des coefficients des matrices de masse et de raideur donne des résultats aberrants.

Pour information, l'Annexe C détaille les produits scalaires d'ordre 0, 1 et 2 de fonctions de forme polynomiales de type  $B_N$  avec un paramètre  $\alpha$  égal à 0 et 1 pour toutes les combinaisons aux limites possibles libre, appuyée et encastree.

Au final, il apparaît que les fonctions les plus intéressantes sont de type  $B_M$  et  $B_N$  avec  $\alpha$  égal à 0 ou 1. Dans les chapitres suivants, les fonctions de forme utilisées appartiendront à une de ces trois familles.

### **3.4 Bilan**

Cette partie expose les bases sur lesquelles s'appuie le modèle semi-analytique. Il a été développé de manière à construire les matrices de masse et de raideur du système qu'il représente selon une méthodologie dérivée de la formulation variationnelle, présentée dans ce chapitre. Une attention particulière a été portée au choix de fonctions de forme, puisque cet aspect de la modélisation a posé un certain nombre de problèmes lors du développement du modèle. Les fonctions de forme décrites ne constituent pas une liste exhaustive des fonctions de forme admissibles. Par exemple, il pourrait être intéressant d'utiliser comme fonctions de forme les fonctions hiérarchiques trigonométriques [BESLIN, 1997]

Dans l'ensemble, le modèle repose sur des bases relativement simples mais qui nécessite une certaine rigueur lors de leur prise en compte dans le programme. Il est temps à présent de montrer ce dont le modèle est capable, en terme de reconstitution de schémas modaux, ce qui va être présenté au chapitre qui suit.

## CHAPITRE 4

# COMPARAISONS DES METHODES DE COUPLAGE SUR DES CAS SIMPLES EN VUE D'UNE APPLICATION SUR UNE STRUCTURE SIMPLIFIÉE DE LA MEMBRURE DE LA BOITE DE TRANSMISSION DU [REDACTED]

Ce chapitre présente les capacités du modèle analytique à reconstituer le schéma modal dans le plan d'une structure 2D composée de plusieurs poutres. Les résultats qu'il fournira seront comparés à ceux du logiciel d'éléments finis ANSYS 8.1, tant au niveau des fréquences naturelles que des déformées modales de la structure. Il ne s'agit pas de créer un modèle analytique aussi performant qu'un code éléments finis commercial mais de développer un support pouvant mettre en œuvre des stratégies de contrôle actif de structure.

Les deux premières parties de ce quatrième chapitre constituent une étape de transition avec le précédent puisqu'il y sera discuté de l'influence du type des fonctions de forme et du choix de la méthode de couplage sur l'obtention du schéma modal. La troisième partie consistera en la mise en œuvre du modèle, en tenant compte des observations des premières parties, sur une structure représentative du problème réel, qui sera confronté aux résultats obtenus avec le modèle numérique de la structure réelle de l'hélicoptère réalisé avec NASTRAN, un autre logiciel d'éléments finis, par Pierre Bélanger [BERRY, BÉLANGER et MONET DESCOMBEY, 2005]. Les questions soulevées dans cette partie seront étudiées dans la quatrième partie qui exposera les limites du modèle analytique. La cinquième et dernière partie définit une structure, représentative du montage utilisé au laboratoire du GAUS, et modélisant une membrure sur une poutre réceptrice, sur laquelle seront testées au Chapitre 5 des stratégies de contrôle actif.

#### 4.1 Étude d'une structure en T avec la méthode de couplage par continuité

La méthode de couplage par continuité a été la première méthode de couplage utilisée par le modèle analytique. A l'époque, elle était testée sur une structure de démonstration qui était un simple assemblage en T de deux poutres ; il était alors possible de travailler avec des conditions de couplage relativement simples et la symétrie de cette structure était un élément de vérification très apprécié. Il s'agissait de la première étape du développement d'un modèle représentant le couplage entre une poutre représentant le plafond de la cabine passager et une partie de la membrure de la boîte de transmission. De nombreux enseignements ont été tirés de l'étude de cette structure minimaliste, notamment sur l'importance du choix des fonctions de forme. Tous les calculs de cette partie ont été réalisés sur le même ordinateur (Pentium® 4 3GHz - 1.5Go RAM), afin que les temps de calculs ne dépendent que du code et non du système informatique utilisé.

##### 4.1.1 Structure en T avec deux poutres

Dans ce paragraphe, la structure considérée est un assemblage de deux poutres en aluminium, tel que montré à la Figure 4.1. La poutre 1 est encadrée-encadrée. L'une des extrémités de la poutre 2 est reliée au milieu de la poutre 1, l'autre est libre. Les propriétés mécaniques et géométriques des deux poutres sont répertoriées au Tableau 4.1.

Caractéristiques	Poutre 1	Poutre 2
Module d'Young	70 GPa	70 GPa
Masse volumique	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>
Section	0.01x0.01 m <sup>2</sup>	0.01x0.01 m <sup>2</sup>
Inertie	8.33x10 <sup>-10</sup> m <sup>4</sup>	8.33x10 <sup>-10</sup> m <sup>4</sup>
Longueur	1 m	0.7 m

Tableau 4.1 : Caractéristiques de la structure en T à deux poutres

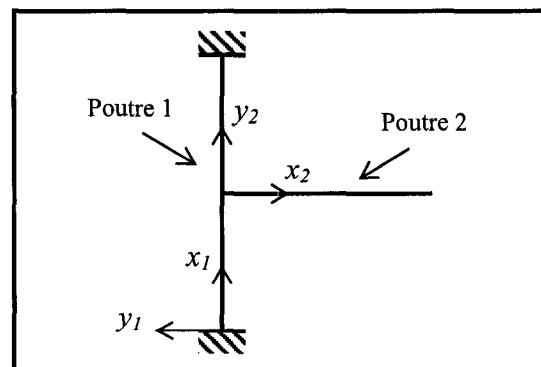


Figure 4.1 : Structure en T à deux poutres

Le schéma modal de cette structure a été dans un premier temps calculé avec ANSYS 8.1 à l'aide d'éléments solides quadratiques (référence SOLID45, voir Annexe D). Les éléments solides ont été préférés afin de ne pas considérer toutes les hypothèses inhérentes aux éléments de poutres. Avec ces éléments, les résultats de la modélisation sous ANSYS 8.1 seront les plus représentatifs de la réalité. De cette manière, si le modèle analytique est validé par le modèle numérique, il est fort probable que le modèle analytique sera représentatif du comportement d'une structure réelle. Inversement, les limites géométriques du modèle analytique (section, longueur des poutres, angle entre les poutres, ...) pourront être repérées lorsque les résultats des deux modèles divergeront.

La structure était maillée avec un peu plus de 10000 éléments et plusieurs tests préliminaires ont été effectués pour s'assurer de la convergence des résultats sur le domaine d'étude. Les fréquences naturelles de la structure ainsi qu'une représentation des déformées modales a pu être recueillies, pour être comparées à celles obtenues avec le modèle analytique.

Deux calculs ont été effectués avec le modèle, l'un prenant en compte des fonctions de forme de type mode propre et l'autre des fonctions polynomiales. Les axes des repères de chaque poutre sont ceux de la Figure 4.1 ; ces derniers ont été choisis de façon à respecter les conventions adoptées au paragraphe 3.2.1.

Les fonctions de forme de type mode propre utilisées pour les poutres 1 et 2 sont respectivement les sept premières d'une poutre encastree-encastree et les sept premières d'une poutre libre-libre (incluant les modes rigides), telles que définies à l'Annexe B.

Les fonctions de forme de type polynomial utilisées sont rappelées aux équations 4.1. Plusieurs tentatives ont été nécessaires avant de trouver ces fonctions qui donnent les meilleurs résultats. On peut constater que la configuration la plus intéressante a été obtenue en prenant une combinaison des deux types de fonctions polynomiales  $B_M$  et  $B_N$  avec un paramètre  $a$  égal à 1 ;  $L_1$  et  $L_2$  désignant les longueurs de poutres 1 et 2.

$$U_{1,k}(x_1) = \frac{x_1}{L_1} \left( \frac{x_1}{L_1} - 1 \right) \left( 1 + \frac{x_1^{k-1}}{L_1^{k-1}} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq 8 \quad 4.1a$$

$$V_{1,k}(x_1) = \left( \frac{x_1}{L_1} \right)^2 \left( \frac{x_1}{L_1} - 1 \right)^2 \left( 1 + \frac{x_1^{k-1}}{L_1^{k-1}} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq 9 \quad 4.1b$$

$$U_{2,k}(x_2) = \left( \frac{x_2}{L_2} - 1 \right)^{k-1} \text{ avec } 1 \leq k \leq 8 \quad 4.1c$$

$$V_{2,k}(x_2) = \left( \frac{x_2}{L_2} - 1 \right)^{k-1} \text{ avec } 1 \leq k \leq 9 \quad 4.1d$$

Huit fonctions de forme ont été utilisées pour reconstituer le déplacement en extension et neuf pour celui en flexion dans chaque poutre pour des fonctions de forme polynomiales. Ne pouvant utiliser neuf fonctions partout, la flexion a été privilégiée puisque l'extension est faiblement présente sur les premiers modes. Pour cette structure et ces choix de fonctions de forme, il n'est pas possible de monter plus haut, Matlab 7.0 annonçant un problème d'intégration lors de la construction des matrices de masse et de raideur avec des fonctions de forme de type mode propre tandis qu'avec des fonctions de forme polynomiales, ceci est dû à des problèmes numériques causé par la grande dynamique des coefficients des matrices de masse et de raideur de la structure.

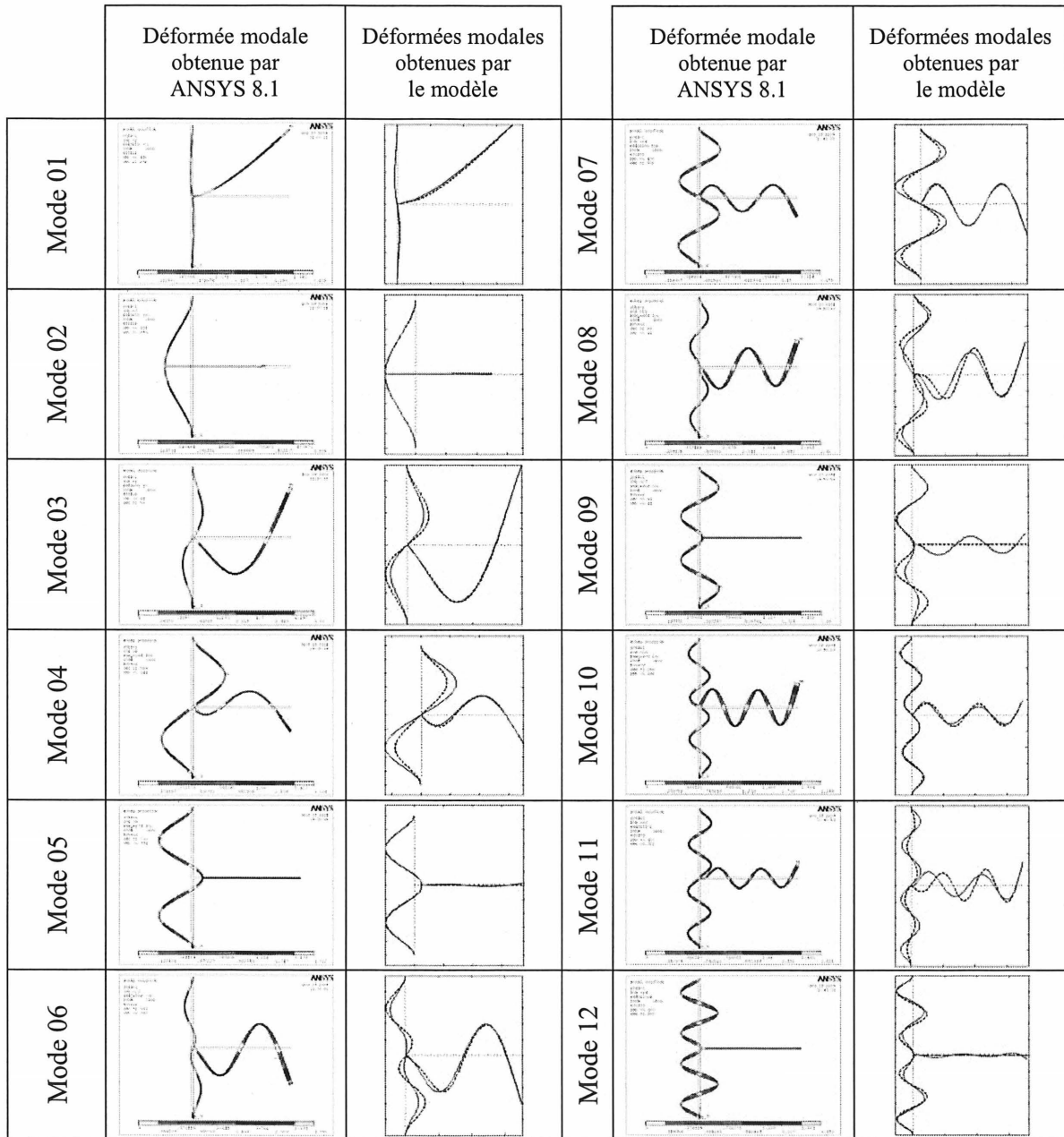
Les déformées modales obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle sont présentées à la Figures 4.2. Les déformées d'ANSYS 8.1 ont volontairement été amplifiées afin de pouvoir être comparées plus simplement.

Les déformées modales calculées par le modèle ont été normées de façon à ce que soit la poutre 1, soit la poutre 2, présente le même maximum d'amplitude. Puis elles ont été à leur tour amplifiées par le même facteur. Il est donc possible de voir l'influence d'une reconstitution des déformées par des fonctions de forme polynomiales ou de type mode propre et de faire la comparaison avec ANSYS 8.1.

Dans l'ensemble, les déformées obtenues avec les modèles présentent les mêmes comportements que celles d'ANSYS 8.1. On remarque toutefois que l'utilisation de fonctions de forme polynomiales permet une moins bonne reconstruction du comportement de la poutre 2 sur les modes 5, 9 (où une perte non expliquée de la symétrie de la poutre 1 peut être



constatée) et 12 tandis que celles de type mode propre sont plus éloignées de celles d'ANSYS 8.1 sur les modes 4, 6, 8 et 11 quand on regarde les amplitudes d'un ventre à l'autre.



**Figure 4.2 :** Déformées modales des modes 1 à 12 de la structure en T modélisée par deux poutres avec la méthode de couplage par continuité  
 A gauche, résultats d'ANSYS 8.1 (structure non déformée et déformée) et à droite, ceux du modèle (structure non déformée en pointillés, fonctions de forme de type mode propre en tiret et polynômes en trait plein)

Sur les déformées modales de la Figure 4.2, on constate que la flexion est prépondérante. Cependant l'extension est aussi présente, ne serait-ce que pour assurer la continuité entre les poutres. Elle n'est donc pas à négliger au profit des fonctions de forme et il est conseillé que le nombre de fonctions de forme en extension et en flexion soient aussi proches que possible.

Les fréquences naturelles des quatorze premiers modes de la structure en T sont présentées au Tableau 4.2. Pour chaque simulation avec le modèle analytique, l'écart entre les deux fréquences ainsi que l'erreur relative avec les résultats obtenus avec ANSYS 8.1 y sont répertoriés. Sur les cinq premiers modes, la différence moyenne entre ANSYS 8.1 et les modèles est d'environ 3 Hz avec des fonctions de forme de type mode propre et de 2 Hz avec celles qui sont polynomiales. Sur les huit premiers modes, cette différence moyenne passe à 9 Hz et 4 Hz. Au-delà du huitième mode, cette différence augmente sensiblement lorsque des fonctions de forme de type mode propre sont utilisées ; à partir du neuvième mode, il est alors possible d'affirmer que le modèle commence à diverger. Le fait d'utiliser des fonctions de forme polynomiales donne de bons résultats jusqu'au neuvième mode ; les modes 10 à 11 représentent la limite de convergence du modèle analytique.

Mode	ANSYS 8.1 Fréquence	Modèle Analytique Fonctions de forme de type modes propre			Modèle Analytique Fonctions de forme polynomial		
		Fréquence	Écart	Erreur rel.	Fréquence	Écart	Erreur rel.
01	15.07 Hz	16.52 Hz	1.45 Hz	9.6 %	14.97 Hz	0.10 Hz	0.7 %
02	31.68 Hz	30.84 Hz	0.84 Hz	2.7 %	31.18 Hz	0.50 Hz	1.6 %
03	94.58 Hz	95.97 Hz	1.39 Hz	1.5%	92.38 Hz	2.20 Hz	2.3 %
04	166.4 Hz	176.8 Hz	10.4 Hz	6.2 %	167.9 Hz	1.5 Hz	0.9 %
05	230.0 Hz	228.7 Hz	1.3 Hz	0.6 %	230.0 Hz	0.0 Hz	0.0 %
06	292.2 Hz	314.8 Hz	22.6 Hz	7.7 %	290.9 Hz	1.3 Hz	0.4 %
07	482.4 Hz	483.5 Hz	1.1 Hz	0.2 %	478.2 Hz	4.2 Hz	0.9 %
08	597.5 Hz	603.0 Hz	5.5 Hz	0.9 %	600.6 Hz	3.1 Hz	0.5 %
09	599.4 Hz	690.4 Hz	91.0 Hz	15.2 %	608.1 Hz	8.7 Hz	1.5 %
10	921.0 Hz	915.1 Hz	5.9 Hz	0.6 %	975.0 Hz	54.0 Hz	5.9 %
11	1055 Hz	1171 Hz	116 Hz	11.0 %	1137 Hz	82 Hz	7.8 %
12	1146 Hz	1243 Hz	97 Hz	8.5 %	1274 Hz	128 Hz	11.2 %
13	1424 Hz	2363 Hz	939 Hz	66.0 %	1712 Hz	288 Hz	20.2 %
14	1711 Hz	3178 Hz	1467 Hz	85.7 %	2483 Hz	772 Hz	45.1 %

**Tableau 4.2 :** Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les quatorze premiers modes de la structure en T modélisée par deux poutres et des fonctions de formes différentes

Le calcul a pris 384 secondes avec des fonctions de formes de type mode propre pour calculer 25 modes et 85 secondes avec leurs concurrentes polynomiales pour en obtenir 31.

#### 4.1.2 Structure en T avec trois poutres

A présent, la structure considérée est un assemblage de trois poutres en aluminium, tel que montré à la Figure 4.3. La modélisation de cette structure est la même qu'au paragraphe 4.1.1 excepté que la poutre encastree-encastree précédente a été scindée en deux poutres considérée comme étant encastree-libre et libre-encastree. Les propriétés mécaniques et géométriques de ces trois poutres sont répertoriées au Tableau 4.3.

Caractéristiques	Poutres 1 et 3	Poutre 2
Module d'Young	70 GPa	70 GPa
Masse volumique	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>
Section	0.01x0.01 m <sup>2</sup>	0.01x0.01 m <sup>2</sup>
Inertie	8.33x10 <sup>-10</sup> m <sup>4</sup>	8.33x10 <sup>-10</sup> m <sup>4</sup>
Longueur	0.5 m	0.7 m

Tableau 4.3 : Caractéristiques de la structure en T à trois poutres

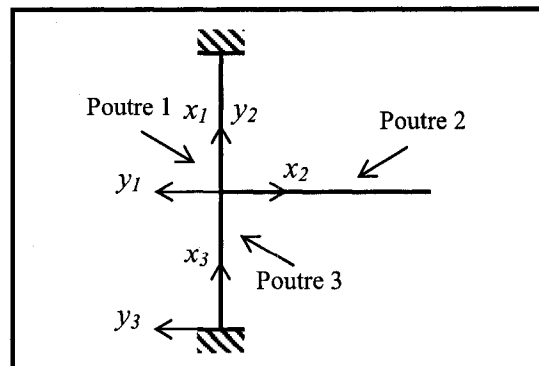


Figure 4.3 : Structure en T à trois poutres

Comme précédemment, deux calculs ont été effectués avec le modèle, l'un prenant en compte des fonctions de type mode propre et l'autre des fonctions polynomiales, pour être comparés aux résultats obtenus avec ANSYS 8.1. Les axes des repères de chaque poutre sont ceux de la Figure 4.3.

Les fonctions de forme de type mode propre utilisées pour les poutres 1, 2 et 3 sont respectivement les sept premières d'une poutre libre-encastree, les sept premières d'une poutre libre-libre (incluant les modes rigides) et les sept premières d'une poutre encastree-libre, telles que définies à l'Annexe B. On constate que le nombre de fonctions de forme de type mode propre pouvant être utilisés est limité à sept que ce soit pour une structure à deux ou à trois poutres, cette limite étant causée par un problème de calcul lors de l'intégration des produits

scalaires des fonctions de forme de rang élevé, le nombre de poutre ne semble donc pas être un paramètre restrictif du modèle, du moins en théorie.

Les fonctions de forme de type polynomial utilisées sont rappelées aux équations 4.2. Plusieurs tentatives ont été nécessaires avant de trouver ces fonctions qui donnent les meilleurs résultats. On peut constater que la configuration la plus intéressante a été obtenue en prenant une combinaison des deux types de fonctions polynomiales  $B_M$  et  $B_N$  avec un paramètre  $a$  égal à 1.

$$U_{1,k}(x_1) = \left( \frac{x_1}{L_1} - 1 \right) \left( 1 + \frac{x_1^{k-1}}{L_1^{k-1}} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq 9 \quad 4.2a$$

$$V_{1,k}(x_1) = \left( \frac{x_1}{L_1} - 1 \right)^2 \left( 1 + \frac{x_1^{k-1}}{L_1^{k-1}} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq 10 \quad 4.2b$$

$$U_{2,k}(x_2) = \left( \frac{x_2}{L_2} - 1 \right)^{k-1} \text{ avec } 1 \leq k \leq 9 \quad 4.2c$$

$$V_{2,k}(x_2) = \left( \frac{x_2}{L_2} - 1 \right)^{k-1} \text{ avec } 1 \leq k \leq 10 \quad 4.2d$$

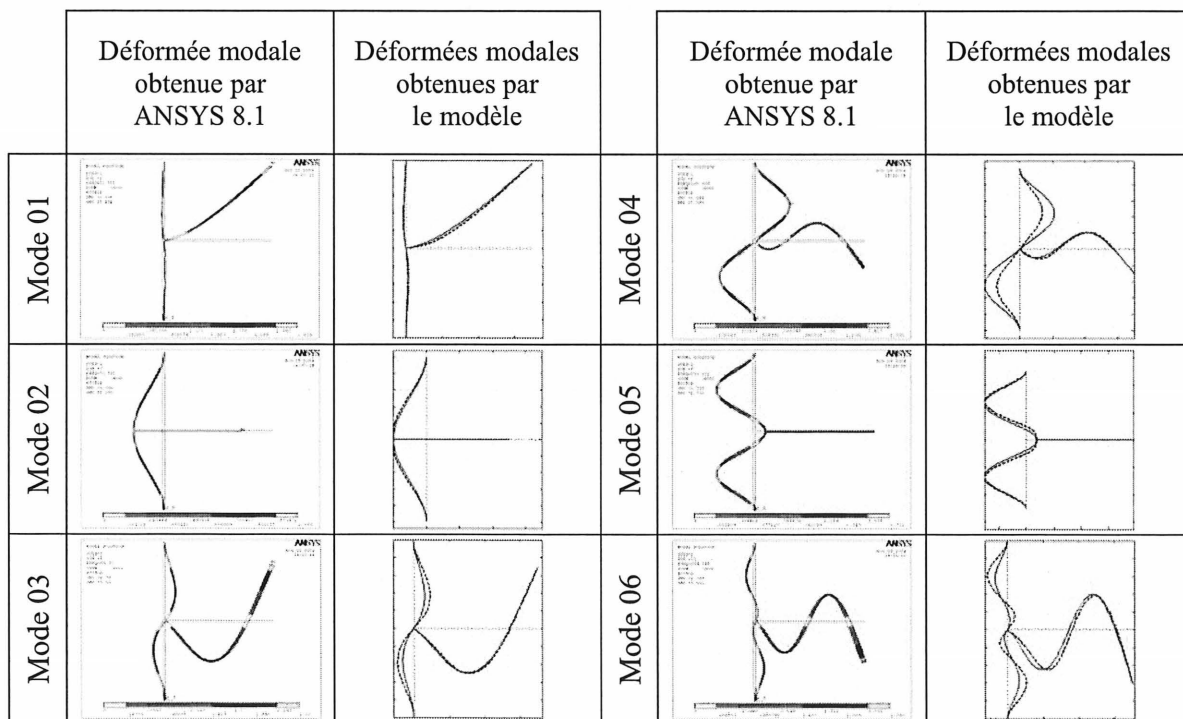
$$U_{3,k}(x_3) = \frac{x_3}{L_3} \left( 1 + \frac{x_3^{k-1}}{L_3^{k-1}} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq 9 \quad 4.2e$$

$$V_{3,k}(x_3) = \left( \frac{x_3}{L_3} \right)^2 \left( 1 + \frac{x_3^{k-1}}{L_3^{k-1}} \right) \text{ avec } 1 \leq k \leq 10 \quad 4.2f$$

Neuf fonctions de forme polynomiales ont été utilisées pour reconstituer le déplacement en extension et dix pour celui en flexion dans chaque poutre. Ces nombres de fonctions de forme constituent la limite du modèle pour cette géométrie. Au-delà, il diverge. Pour les mêmes raisons que précédemment la flexion a été préférée à l'extension. Le lecteur a très certainement remarqué un élément paradoxal : il y a une poutre supplémentaire pourtant il est possible d'utiliser une fonction de forme en plus par type de déplacement et par poutre. A ce point précis, il est juste possible de dire qu'en considérant la partie encastree-encastree comme deux poutres et non une seule, le comportement réel de la structure est mieux approché.

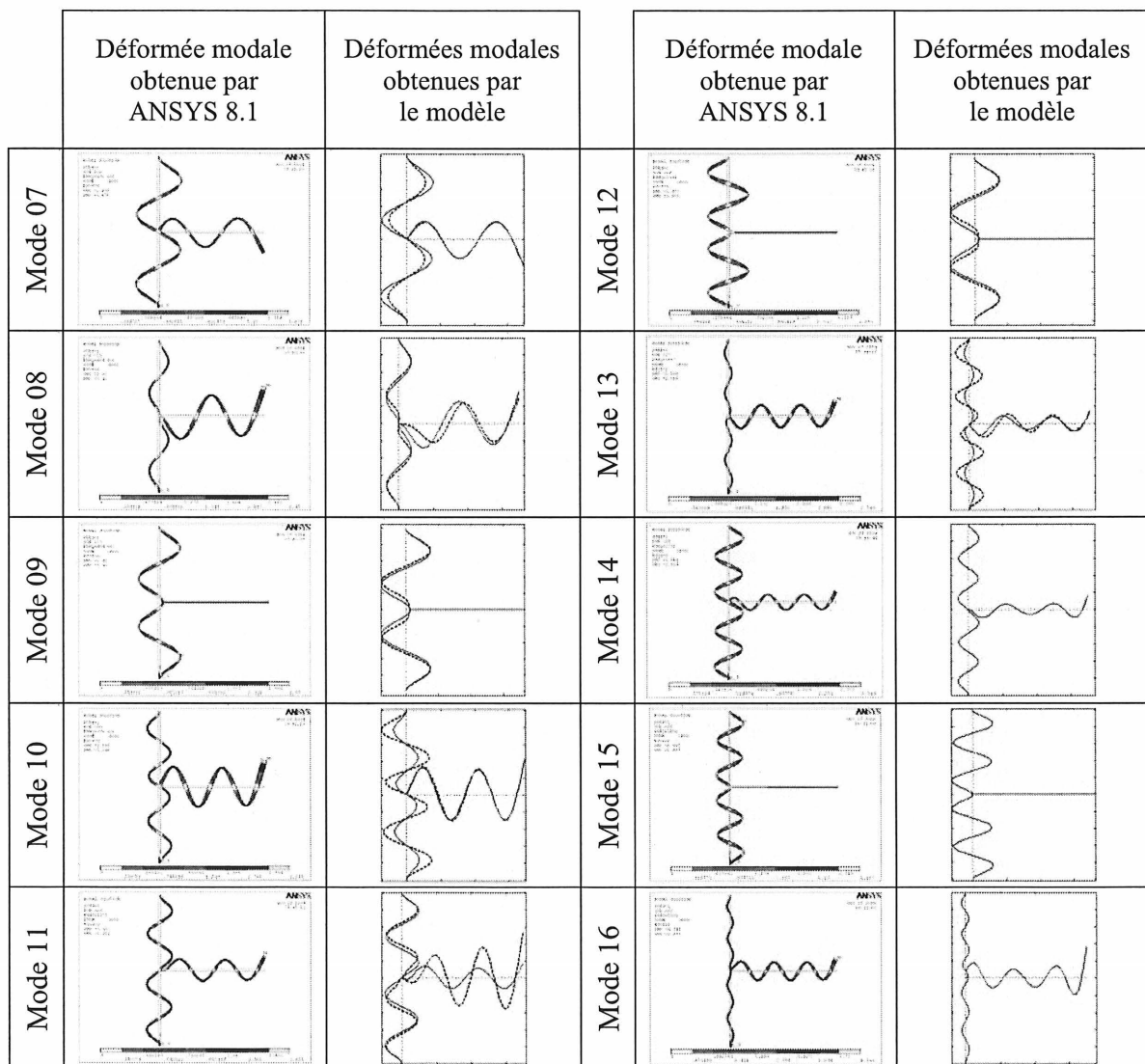
Les déformées modales obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle sont présentées aux Figures 4.4 et 4.5. Le traitement des déformées modales est le même que précédemment. Il est donc toujours possible de voir l'influence d'une reconstitution des déformées par des fonctions de forme polynomiales ou de type mode propre et de faire la comparaison avec ANSYS 8.1.

Dans l'ensemble, les déformées obtenues avec les modèles présentent les mêmes comportements que celles d'ANSYS 8.1. Cette fois l'utilisation de fonctions de forme polynomiales n'entraîne plus de problème de reconstruction du comportement de la poutre 2 sur les modes 5, 9 et 12 comme remarqué précédemment. Seuls les modes 14 et 16 présentent une mauvaise reconstruction ; les déformées de la poutre 2 présentant une nette différence d'amplitude par rapport à ANSYS 8.1 (celle du quatorzième mode présente le même nombre de ventre, celui étant le plus proche du point de couplage ayant une bien plus faible amplitude que celui visible avec ANSYS 8.1).



**Figure 4.4 :** Déformées modales des modes 1 à 6 de la structure en T modélisée par trois poutres avec la méthode de couplage par continuité  
 A gauche, résultats d'ANSYS 8.1 (structure non déformée et déformée) et à droite, ceux du modèle (structure non déformée en pointillés, fonctions de forme de type mode propre en tiret et polynomiales en trait plein)

Les fonctions de forme de type mode propre montrent leurs limites dès le huitième mode, où les déformées des deux poutres au niveau du point de couplage sont assez éloignées de celles d'ANSYS 8.1. Au onzième mode, les amplitudes des ventres augmentent sensiblement à mesure que l'on s'éloigne du point de couplage au lieu de rester quasiment constante et au treizième, les déformations de la poutre 1 sont visiblement bien plus importantes que prévu.



**Figure 4.5 :** Déformées modales des modes 7 à 16 de la structure en T modélisée par trois poutres pour la méthode de couplage par continuité  
 A gauche, résultats d'ANSYS 8.1 (structure non déformée et déformée) et à droite, ceux du modèle (structure non déformée en pointillés, fonctions de forme de type mode propre en tiret et polynomiales en trait plein)

Les fréquences naturelles des vingt premiers modes de la structure en T sont présentées au Tableau 4.4. Pour chaque simulation avec le modèle analytique, l'écart en fréquence et l'erreur relative par rapport aux résultats d'ANSYS 8.1 y est répertorié. Cette fois on constate que l'erreur relative entre ANSYS 8.1 et le modèle est bien plus élevée pour des fonctions de forme de type mode propre que pour leurs homologues polynomiales : sur les sept premiers modes, elle est respectivement de 6.7 % et 2.4 % et sur les douze premiers modes, de 8.6 % et 2.0%. Dans l'ensemble, les écarts et les erreurs relatives sur les fréquences naturelles obtenues avec des fonctions de forme de type mode propre sont bien plus important qu'avec des fonctions de forme polynomiales. La limite des fonctions de forme de type mode propre semble être atteinte au huitième mode, tandis que pour leurs rivales polynomiales, elle se situe au niveau du douzième mode.

Mode	ANSYS 8.1 Fréquence	Modèle Analytique Fonctions de forme de type modes propre			Modèle Analytique Fonctions de forme polynomial		
		Fréquence	Écart	Erreur rel.	Fréquence	Écart	Erreur rel.
01	15.07 Hz	16.60 Hz	1.53 Hz	10.2 %	14.38 Hz	0.69 Hz	4.6 %
02	31.68 Hz	35.22 Hz	3.54 Hz	11.2 %	31.25 Hz	0.43 Hz	1.4 %
03	94.58 Hz	96.54 Hz	1.96 Hz	2.1 %	90.83 Hz	3.75 Hz	4.0 %
04	166.4 Hz	175.1 Hz	8.7 Hz	5.2 %	164.7 Hz	1.7 Hz	1.0 %
05	230.0 Hz	255.2 Hz	25.2 Hz	11.0 %	228.5 Hz	1.5 Hz	0.7 %
06	292.2 Hz	313.8 Hz	21.6 Hz	7.4 %	280.2 Hz	12.0 Hz	4.1 %
07	482.4 Hz	482.9 Hz	0.5 Hz	0.1 %	478.0 Hz	4.4 Hz	0.9 %
08	597.5 Hz	678.1 Hz	80.6 Hz	13.5 %	577.3 Hz	20.2 Hz	3.4 %
09	599.4 Hz	679.1 Hz	79.7 Hz	13.3 %	597.7 Hz	1.6 Hz	0.3 %
10	921.0 Hz	920.4 Hz	0.6 Hz	0.1 %	899.8 Hz	21.2 Hz	2.3 %
11	1055 Hz	1204 Hz	149 Hz	14.1 %	1047 Hz	8 Hz	0.8 %
12	1146 Hz	1318 Hz	172 Hz	15.0 %	1147 Hz	1 Hz	0.1 %
13	1424 Hz	1529 Hz	105 Hz	7.4 %	1550 Hz	126 Hz	8.8 %
14	1711 Hz	2172 Hz	461 Hz	26.9 %	1784 Hz	73 Hz	4.3 %
15	1856 Hz	2230 Hz	374 Hz	20.2 %	1869 Hz	13 Hz	0.7 %
16	2005 Hz	2509 Hz	504 Hz	25.1 %	2322 Hz	317 Hz	15.8 %
17	2449 Hz	3030 Hz	581 Hz	23.7 %	2557 Hz	108 Hz	4.4 %
18	2540 Hz	3428 Hz	888 Hz	35.0 %	2747 Hz	207 Hz	8.1 %
19	2694 Hz	3463 Hz	769 Hz	28.5 %	2774 Hz	80 Hz	3.0 %
20	2786 Hz	5244 Hz	2458 Hz	88.2 %	3396 Hz	610 Hz	21.9 %

**Tableau 4.4 :** Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les vingt premiers modes de la structure en T modélisée par trois poutres et des fonctions de forme différentes

Le calcul a pris 895 secondes avec des fonctions de formes de type mode propre pour calculer 39 modes et 293 secondes avec leurs concurrentes polynomiales pour en obtenir 54.

Globalement, la subdivision en trois poutres au lieu de deux donne de meilleurs résultats, même si, au niveau des fréquences propres, le gain se porte davantage sur les modes élevés au détriment des premiers modes

#### 4.1.3 Bilan

Les deux paragraphes précédents ont présenté l'application de la méthode de couplage par continuité à deux modélisations différentes d'une même structure. Chaque modélisation, à deux et à trois poutres, a utilisé les deux types de fonctions de forme présentée au Chapitre 3 et quatre paramètres ont été pris en compte pour tirer des conclusions : le nombre maximal de fonctions de forme utilisable, le temps de calcul, la comparaison des déformées modales et des fréquences naturelles entre le modèle et le logiciel d'éléments finis ANSYS 8.1 utilisé comme référence.

Quelque soit le nombre de poutres, l'utilisation de fonctions de forme polynomiales permet de calculer plus de modes et plus rapidement qu'avec des fonctions de forme de type mode propre. Ainsi, pour cette géométrie, avec un modèle à trois poutres et des fonctions de forme polynomiales, ce domaine englobe les douze premiers modes et le schéma modal peut être considéré comme acceptable de 0 à 1200 Hz.

De plus, utiliser un modèle à trois poutres plutôt qu'à deux poutres, a eu pour conséquence une augmentation de l'erreur relative et de l'écart sur les fréquences naturelles. Par contre, ceci a permis le calcul d'un plus grand nombre de modes, ce qui a augmenté le domaine de validité. Considérer la poutre encastree-encastree (modèle à deux poutres) comme deux poutres encastree-libre (modèle à trois poutres) a permis une meilleure reconstitution des déformées modales et ce, pour un plus grand nombre de modes.

Ainsi, en raison des problèmes vus au Chapitre 3 que pose la mise en œuvre des fonctions de forme de type mode propre, du temps de calcul, du fait que le nombre de fonction de forme par type de déplacement soit plus limité, il a été décidé d'abandonner leur utilisation. Dorénavant, les fonctions de forme utilisées seront polynomiales.



## 4.2 Comparaison de la méthode de couplage par continuité et de la méthode de couplage par ressorts

L'objectif de cette partie est de déterminer laquelle des deux méthodes de couplage, exposées au Chapitre 3, est la plus performante. Pour cela, le schéma modal de la structure en T va maintenant être calculé en appliquant la méthode de couplage par ressorts virtuels pour ensuite être comparé aux résultats du paragraphe 4.1.2. D'après les remarques de la partie précédente, la structure en T sera modélisée par un assemblage de trois poutres, qui donne de meilleurs résultats qu'un assemblage de deux poutres. De plus, les fonctions de formes seront exclusivement polynomiales. Cependant, l'utilisation de ressorts virtuels nécessite de choisir les raideurs de ces ressorts, ce qui est une étape obligatoire avant de commencer le traitement des résultats.

### 4.2.1 Choix des raideurs des ressorts virtuels pour une structure en T à trois poutres

La géométrie du problème est la même que présentée à la Figure 4.3 et au Tableau 4.3. Les fonctions de forme utilisées seront différentes. Cette fois, ce sont les fonctions décrites par les expressions 4.3 qui permettent d'obtenir le plus grand nombre de modes correctement reconstruits (fréquences naturelles et déformées modales).

$$U_{1,k}(x_1) = \left( \frac{x_1}{L_1} - 1 \right) \left( \frac{x_1}{L_1} \right)^{k-1} \quad \text{avec } 1 \leq k \quad 4.3a$$

$$V_{1,k}(x_1) = \left( \frac{x_1}{L_1} - 1 \right)^2 \left( \frac{x_1}{L_1} \right)^{k-1} \quad \text{avec } 1 \leq k \quad 4.3b$$

$$U_{2,k}(x_2) = \left( \frac{x_2}{L_2} - 1 \right)^{k-1} \quad \text{avec } 1 \leq k \quad 4.3c$$

$$V_{2,k}(x_2) = \left( \frac{x_2}{L_2} - 1 \right)^{k-1} \quad \text{avec } 1 \leq k \quad 4.3d$$

$$U_{3,k}(x_3) = \frac{x_3}{L_3} \left( \frac{x_3}{L_3} \right)^{k-1} \quad \text{avec } 1 \leq k \quad 4.3e$$

$$V_{3,k}(x_3) = \left(\frac{x_3}{L_3}\right)^2 \left(\frac{x_3}{L_3}\right)^{k-1} \quad \text{avec } 1 \leq k \quad 4.3f$$

Le choix des raideurs  $K$  et raideurs de torsion  $C$  est un élément important du calcul. Si le découplage est relativement aisé à représenter en annulant ces paramètres, le couplage demande en théorie une raideur infinie, ce qui n'est pas possible en pratique. Ainsi, si la raideur choisie est trop faible, il n'y aura pas couplage. Si elle est trop importante, c'est un autre problème qui se pose. Il a été vu précédemment (équations 3.32, 3.33b et 3.34b) que la matrice de raideur du système peut être considérée comme la somme de la matrice de raideur du système hors couplage et de la matrice décrivant la contribution des ressorts. Chaque terme de cette dernière matrice étant relié à  $K$  ou  $C$ . Ainsi, si les raideurs sont trop importantes, les raideurs des poutres vont être noyées parmi les termes de raideur des limites et les résultats seront biaisés. La Figure 4.6 présente les déformées modales d'une structure en T pour différentes valeurs de  $K$  et  $C$ .

On constate que lorsque  $K$  est trop faible (ici  $10^3$  N/m) les poutres ne sont plus reliées entre elles, tandis qu'un  $C$  trop faible (ici  $10^2$  Nm) annule la condition d'angle droit entre les poutres 2 et les deux autres et l'angle plat entre les poutres 1 et 3 (non visible sur le quatrième mode). Des raideurs trop importantes, à partir de  $10^{13}$  N/m pour  $K$  et  $10^7$  Nm pour  $C$  entraînent l'apparition de fréquences naturelles complexes, non justifiées car l'amortissement est nul. Il est alors difficile de différencier les modes. Pour  $K$  et  $C$  nul, on retrouve le schéma modal des poutres non couplées : les trois modes rigides de la poutre 2, les premiers modes souples en flexion des poutres 1, 2 et 3 (respectivement 32.9 Hz, 106.8 Hz et 32.9 Hz d'après les formules théoriques de l'Annexe B). Pour  $C$  nul et une valeur acceptable de  $K$ , le point de couplage n'est plus un encastrement mais une rotule. Ainsi, le premier mode correspond à un mode rigide. En effet, les poutres 1 et 3 étant encastrees, cette partie ne peut plus bouger et la poutre 2 retrouve alors le même comportement qu'une poutre appuyée-libre, d'où la présence de ce mode rigide. Ensuite, il est possible de voir se déformer les poutres 1 et 3 sans avoir d'influence sur la poutre 2 : pour le quatrième mode, le point de couplage se retrouve être un ventre de l'ensemble {poutre 1, poutre 3}. D'ailleurs, la fréquence du second mode d'une poutre encastree-encastree d'un mètre de longueur vaut 144.2 Hz.

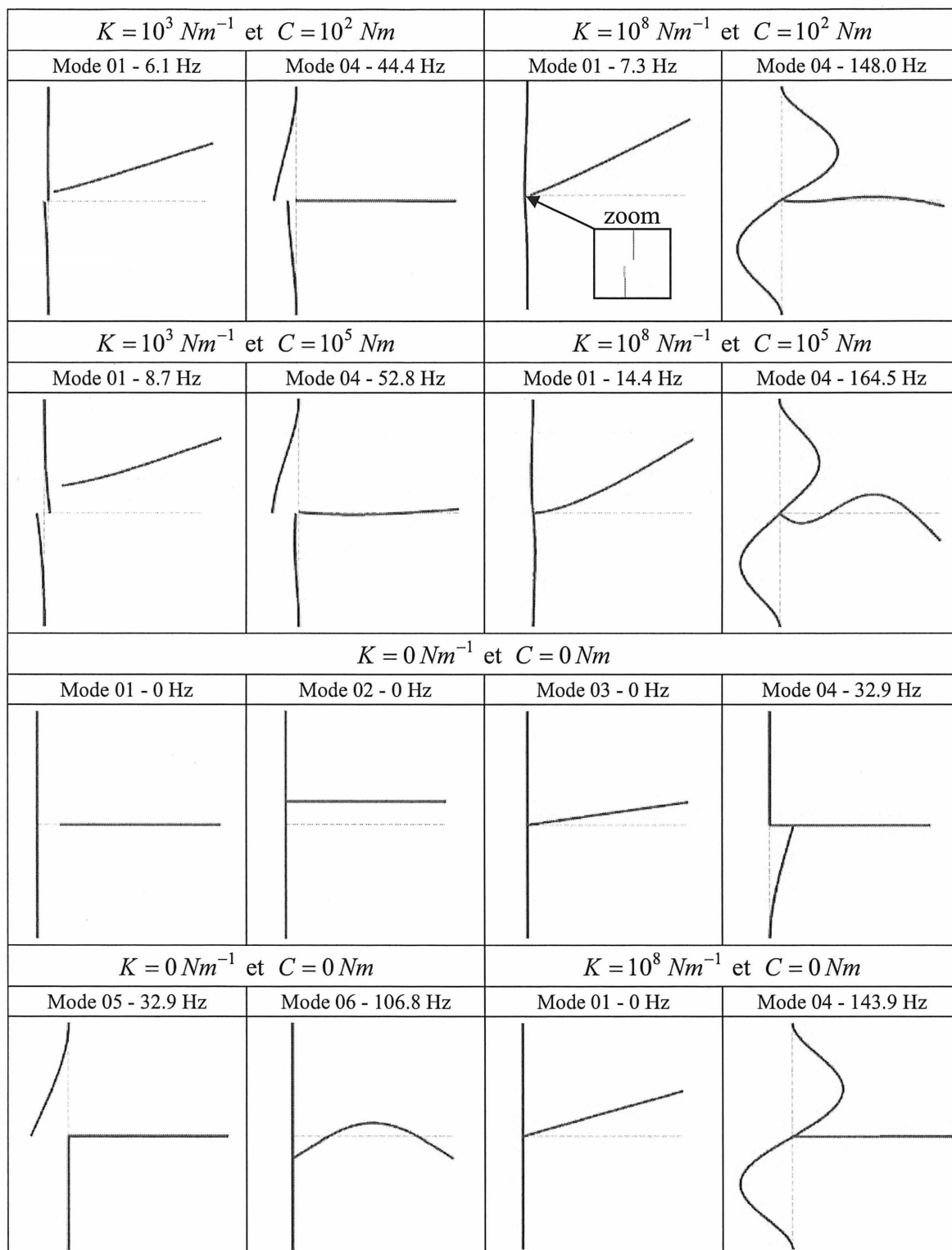
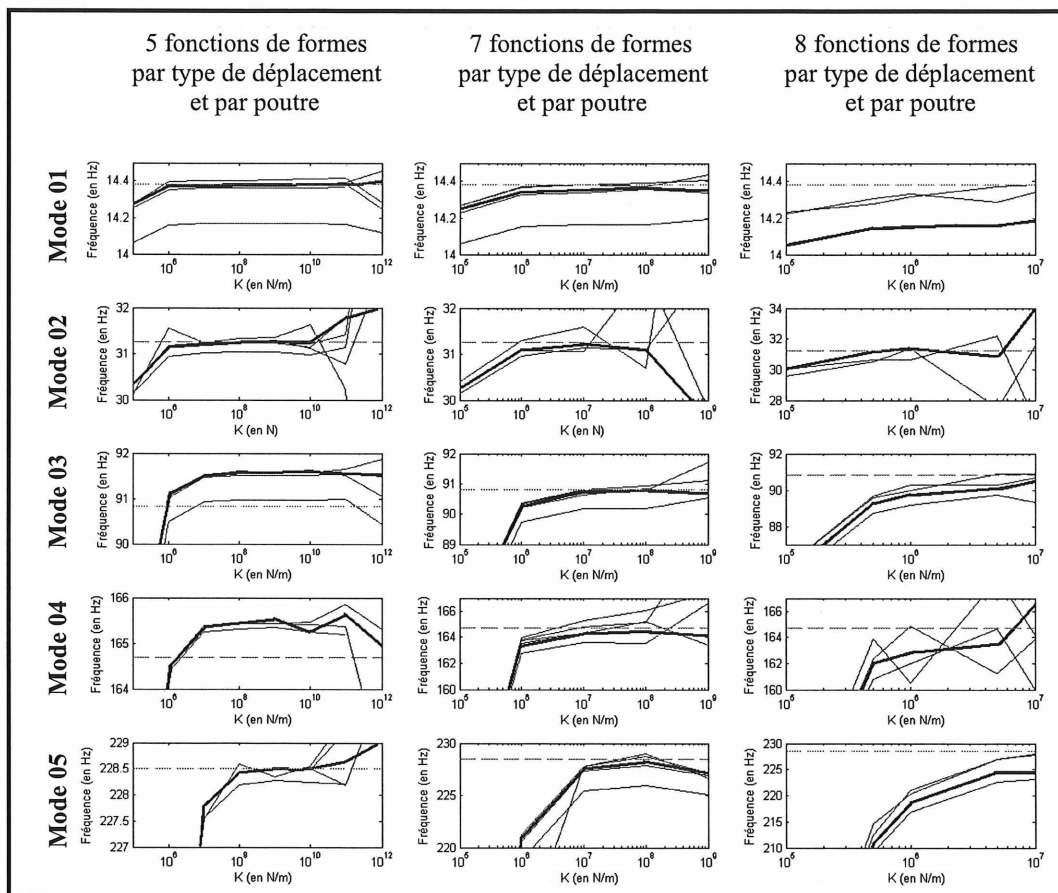


Figure 4.6 : Influence du choix des raideurs sur le schéma modal de la structure en T modélisée par trois poutres

Les simulations avec ANSYS 8.1 et la méthode de couplage par continuité de la partie 4.1 vont être utilisées comme référence lors du choix des raideurs aux limites. Il n'y a pas vraiment de règle précise et il apparaît que ces choix sont dépendants de nombreux facteurs comme les produits  $ES$  et  $EI_z$  des poutres à coupler, le nombre de fonctions de forme en flexion et en extension utilisées ou encore le type même des fonctions de forme.

Ainsi, pour toute structure, il convient de réaliser une étude paramétrique en faisant varier  $K$  et  $C$  pour un nombre de fonctions de forme donnée. La Figure 4.7 présente cette étude paramétrique pour trois différents nombres de fonctions de forme et pour les cinq premiers modes de la structure en T modélisée par trois poutres.



**Figure 4.7 :** Influence des raideurs  $K$  et  $C$  et du nombre de fonctions de forme par type de déplacement et par poutre sur la fréquence naturelle des cinq premiers modes de la structure en T. En trait plein, les lignes iso- $C$  et en tiret, la fréquence naturelle évaluée avec le modèle utilisant la méthode de couplage par continuité et des fonctions de formes polynomiales (paragraphe 4.1.2). L'iso- $C$  choisie est en trait épais et vaut  $10^7$  Nm pour 5 fonctions,  $10^5$  Nm pour 7 et  $10^4$  Nm pour 8. Les iso- $C$  varient entre  $10^4$  et  $10^9$  Nm pour 5 fonctions de forme, entre  $10^4$  et  $10^6$  Nm pour 7 et entre  $10^3$  et  $10^5$  Nm pour 8. Sur une iso- $C$ , la valeur de  $C$  est constante.

On devine à chaque fois l'existence d'un palier, plus ou moins grands, au niveau des fréquences des modes en fonction des raideurs des ressorts. C'est ce palier qui permet d'obtenir la fréquence de convergence des raideurs  $K$  et  $C$ . En dehors de ce palier, les raideurs sont soit trop faibles, soit trop élevées. On remarque également que la raideur dépend du nombre de fonctions de forme :  $K$  valant  $10^8$ - $10^9$  N/m et  $C$   $10^6$ - $10^7$  Nm pour cinq fonctions de formes,  $10^7$  N/m et  $10^5$  Nm pour sept ou  $10^6$  N/m et  $10^4$  Nm pour huit.

Le fait que les raideurs diminuent lorsque le nombre de fonctions de forme augmente peut s'expliquer puisque plus ce dernier augmente plus les produits scalaires correspondant aux fonctions de forme rajoutées va être petit (pour les fonctions choisies en 4.3a à 4.3f) et donc, pour ne pas négliger la valeur de ces termes, la raideur maximale devra diminuer.

De plus, il est nécessaire de ne pas s'en tenir qu'à un seul mode lorsque vient le moment de choisir les raideurs des ressorts. En effet, la Figure 4.7 montre qu'il est possible de trouver des combinaisons de  $K$  et  $C$  qui sont très proches de la valeur théorique pour un mode donné (que ce soit celle, comme ici, donnée par un autre modèle, ou celle d'un logiciel d'éléments finis) sans pour autant qu'elles donnent de bons résultats pour les autres modes. Par exemple, la fréquence naturelle du second mode plan de la structure en T vaut 31.68 Hz d'après ANSYS 8.1. Avec cinq fonctions de forme par poutres, on constate qu'il serait possible de trouver des valeurs de  $K$  et  $C$  qui correspondent puisque pour  $K > 10^{11}$  N/m, le faisceau de courbes est proche de cette fréquence. Néanmoins, pour les modes 4 et 5, une telle valeur de  $K$  n'est pas vraiment un bon choix. Dans le contexte de cette étude du choix des raideurs des ressorts, seuls les cinq premiers modes ont été étudiés, car pour cinq fonctions de formes par poutre, on peut estimer que le modèle ne donne un bon résultat que pour les cinq premiers modes. Lorsque huit fonctions de forme par poutre sont utilisées, on peut constater que le cinquième mode est mal approché sauf aux environs de la plus grande valeur de  $K$  possible qui ne fasse pas diverger le modèle. Une telle valeur n'est cependant pas admissible pour les modes 2 et 4. Il faut donc garder à l'esprit que le choix des raideurs des ressorts virtuels est avant tout un travail de compromis. Concernant  $C$ , il faut prendre celui dont le palier de la courbe iso- $C$  reste le plus proche du faisceau d'iso- $C$  pour tous les modes considérés, quand celui-ci existe. Ce palier peut-être différent de la fréquence théorique, cela représente l'erreur

entre le modèle et ANSYS 8.1, erreur qui peut-être accentuée par les choix sur  $K$  et  $C$ . Pour finir, tout ceci montre qu'il n'y a pas de recommandations finales à faire sur le choix des raideurs des ressorts ; il faut donc faire plusieurs simulations pour décider lesquelles prendre.

Le choix des valeurs des raideurs  $K$  et  $C$  peut également se poser comme un problème d'identification de paramètres à partir de mesures expérimentales. Il serait donc possible de recalibrer la structure réelle avec le modèle analytique en se basant sur les fréquences naturelles de la structure, par exemple, pour déterminer les raideurs des ressorts virtuels. Ainsi, le modèle analytique pourrait prendre en compte des ajouts de matière ou de raideur inhérents à des discontinuités potentielles au niveau des points de couplage, comme des cordons de soudure ou des boulons.

Parallèlement à cette étude sur les coefficients de raideurs des ressorts virtuels, il faut aussi savoir comment coupler les poutres. La structure en T pose le problème du couplage de trois poutres au même point. Il s'avère que la prise en compte de trois combinaisons de couplage (couplage entre les poutres 1 et 2, couplage entre 2 et 3 et couplage entre 1 et 3) entraîne des résultats erronés au niveau des fréquences naturelles qu'au niveau des déformées modales. Si la poutre 1 est couplée avec la poutre 2 et si la poutre 2 est couplée avec la poutre 3 alors implicitement, la poutre 1 est couplée avec la poutre 3. Coupler physiquement la poutre 1 et la poutre 3 entraînerait une contrainte supplémentaire. Lorsque seulement deux combinaisons sont appliquées, le calcul se fait sans problème. Les trois combinaisons ont été testées et les résultats sont quasiment les mêmes : on obtient une erreur relative de 0.01% sur les fréquences naturelles et il n'y a pas de différences visibles sur les déformées modales. Pour information, tous les résultats sur la structure en T présentés dans cette partie ont été obtenus avec un couplage entre les poutres 1 et 2 et entre les poutres 1 et 3.

#### 4.2.2 Schéma modal de la structure en T modélisée par trois poutres

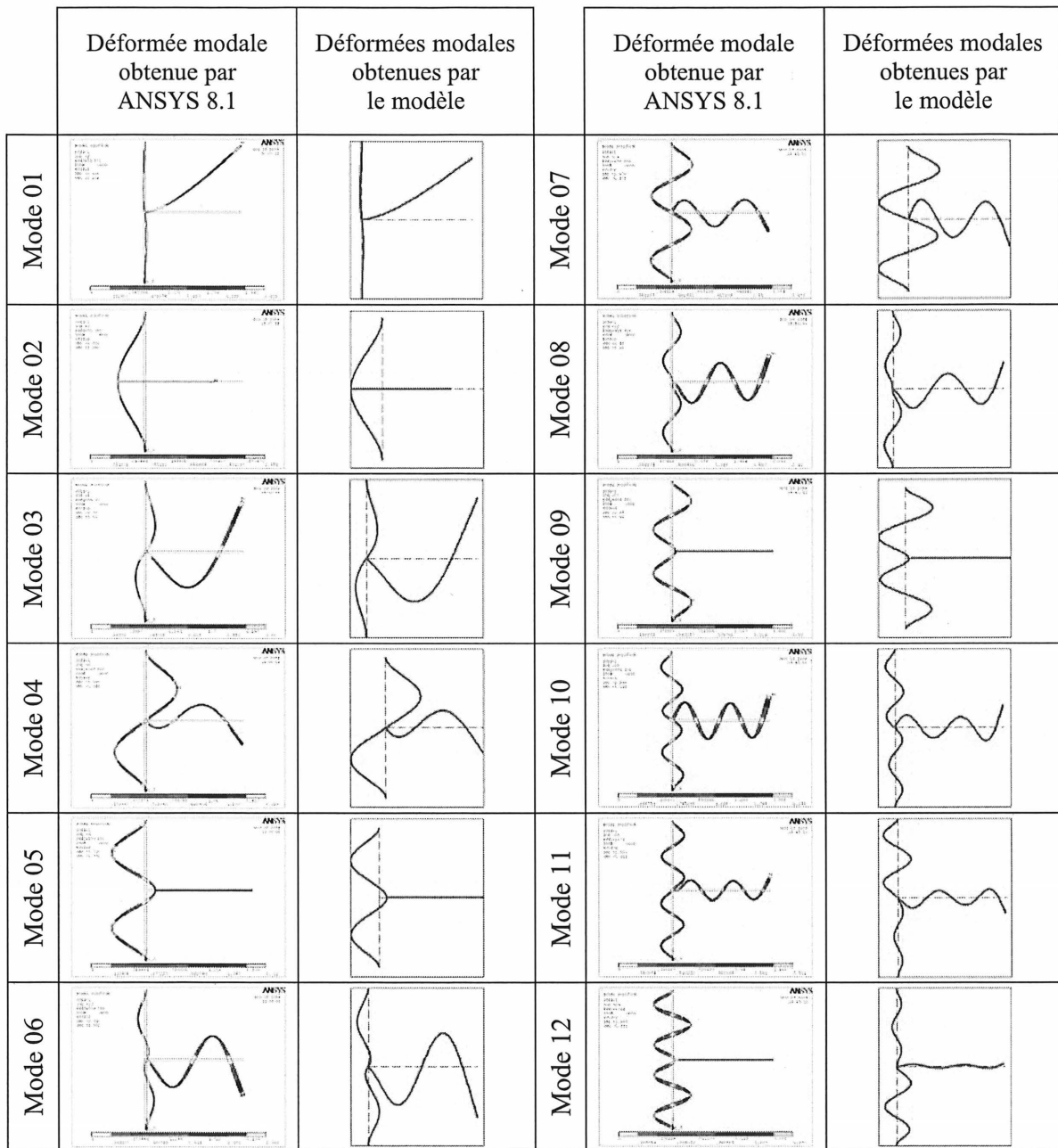
Utiliser huit fonctions de formes par type de déplacement et par poutre implique des valeurs de  $K$  et de  $C$  relativement faibles ( $10^6$  N/m et  $10^4$  Nm), comme il a été vu précédemment. De tels choix de raideurs donnent encore de bons résultats en terme de

fréquences naturelles, mais la mauvaise qualité du couplage se devine sur les tracés des déformées modales. Utiliser sept fonctions de formes permet de converger sur les 7-8 premiers modes. Afin de pousser le modèle dans ses limites, il a été décidé d'utiliser sept fonctions de formes en flexion et en extension dans les poutres 1 et 3 et huit dans la poutre 2. Après une rapide étude paramétrique en prenant en considérations les résultats précédents, les raideurs  $K$  et  $C$  utilisées ont été prises égales à  $10^7$  N/m et  $10^5$  Nm. Il est alors possible d'avoir une bonne concordance avec ANSYS 8.1 sur les neuf premiers modes, comme le montrent le Tableau 4.5 et la Figure 4.8.

Les déformées sont correctement reconstituées jusqu'au dixième mode. Au-delà, il faudrait augmenter le nombre de fonctions de forme. De plus, à partir du neuvième mode, on commence à deviner que les raideurs utilisées sont trop faibles. Ce calcul a pris 46 secondes pour calculer 44 modes.

Mode	ANSYS 8.1	Modèle (Couplage par ressorts virtuels)			Modèle (Couplage par continuité)		
	Fréquence	Fréquence	Écart	Erreur rel.	Fréquence	Écart	Erreur rel.
01	15.07 Hz	14.36 Hz	0.71 Hz	4.7 %	14.38 Hz	0.69 Hz	4.6 %
02	31.68 Hz	31.23 Hz	0.45 Hz	1.4 %	31.25 Hz	0.43 Hz	1.4 %
03	94.58 Hz	90.71 Hz	3.87 Hz	4.1 %	90.83 Hz	3.75 Hz	4.0 %
04	166.4 Hz	164.3 Hz	2.1 Hz	1.3 %	164.7 Hz	1.7 Hz	1.0 %
05	230.0 Hz	227.6 Hz	2.4 Hz	1.0 %	228.5 Hz	1.5 Hz	0.7 %
06	292.2 Hz	279.3 Hz	12.9 Hz	4.4 %	280.2 Hz	12.0 Hz	4.1 %
07	482.4 Hz	479.9 Hz	2.5 Hz	0.5 %	478.0 Hz	4.4 Hz	0.9 %
08	597.5 Hz	588.9 Hz	8.1 Hz	1.4 %	577.3 Hz	20.2 Hz	3.4 %
09	599.4 Hz	597.5 Hz	1.8 Hz	0.3 %	597.7 Hz	1.6 Hz	0.3 %
10	921.0 Hz	961.2 Hz	40.2 Hz	4.4 %	899.8 Hz	21.2 Hz	2.3 %
11	1055 Hz	1084 Hz	29 Hz	2.7 %	1047 Hz	8 Hz	0.8 %
12	1146 Hz	1158 Hz	12 Hz	1.0 %	1147 Hz	1 Hz	0.1 %
13	1424 Hz	1809 Hz	385 Hz	27.0 %	1550 Hz	126 Hz	8.8 %
14	1711 Hz	1893 Hz	182 Hz	10.6 %	1784 Hz	73 Hz	4.3 %

**Tableau 4.5 :** Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les quatorze premiers modes de la structure en T modélisée par trois poutres et des méthodes de couplage différentes



**Figure 4.8 :** Déformées modales des modes 1 à 12 de la structure en T modélisée par trois poutres avec la méthode de couplage par ressorts virtuels  
 A gauche, résultats d'ANSYS 8.1 (structure non déformée et déformée) et à droite, ceux du modèle (structure non déformée en pointillés, fonctions de forme de type polynomiales en trait plein)



Pour cet exemple, c'est la méthode de couplage par continuité qui donne les meilleurs résultats puisque ces résultats sont valides pour les douze premiers modes en terme de déformées modales et de fréquences naturelles. De plus, le temps de calcul, environ cinq secondes par mode, est tout à fait acceptable même si avec la méthode de couplage par ressorts virtuels, il est d'une seconde par mode. Ainsi, pour un problème présentant deux points de couplage, il est plus intéressant d'utiliser la méthode de couplage par continuité.

#### 4.2.3 Application à une structure à cinq poutres

Il ne faut cependant pas oublier que le nombre de points de couplage est d'une grande conséquence sur la méthode de couplage par continuité. Pour quatre points de couplage par exemple, le système matriciel 3.25 servant à exprimer les coefficients de pondérations à éliminer  $X^{NL}$  en fonction de ceux qui ne seront pas touchés  $X^L$  devient un système 12x12 à résoudre plutôt qu'un système 3x3 pour la structure en T modélisée par deux poutres ou 6x6 si elle est modélisée par trois poutres. Pour la méthode de couplage par ressorts virtuels, l'augmentation du nombre de points de couplage n'entraîne rien d'autre qu'une augmentation du nombre de ressorts de trois par points de couplage supplémentaire et le calcul des composantes de la fonctionnelle de Hamilton d'un ressort est une chose facile à gérer.

Afin de vérifier ce dernier point en pratique, les deux méthodes vont être testées sur une structure présentant quatre points de couplage, unissant cinq poutres. Il s'agit d'une version déjà représentative d'une membrure de la boîte de transmission principale du ██████████ posé sur deux poutres, 4 et 5, de longueur représentative du montage au laboratoire. Seules les sections des poutres ne sont pas représentatives de la structure réelle ; elles sont carrées d'un centimètre de côté. Les caractéristiques de cette structure sont disponibles à la Figure 4.9. Les déformées modales obtenues avec les deux méthodes de couplage sont visibles à la Figure 4.10. Pour la méthode de couplage par ressorts virtuels, les raideurs utilisées sont  $K = 10^8$  N/m et  $C = 10^6$  Nm.

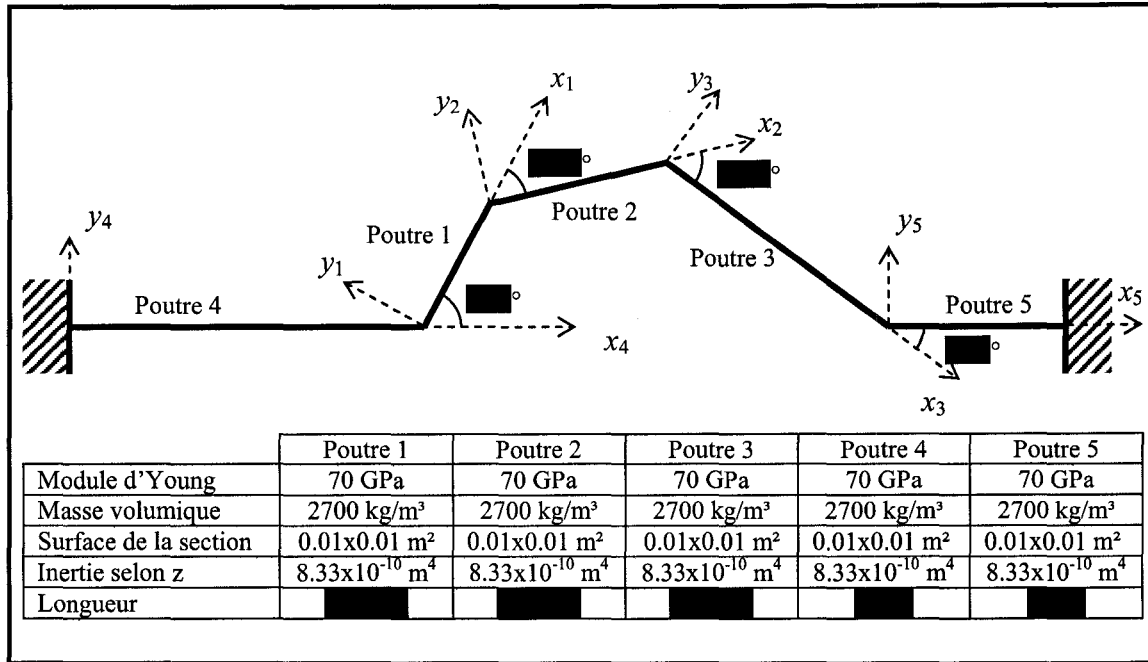
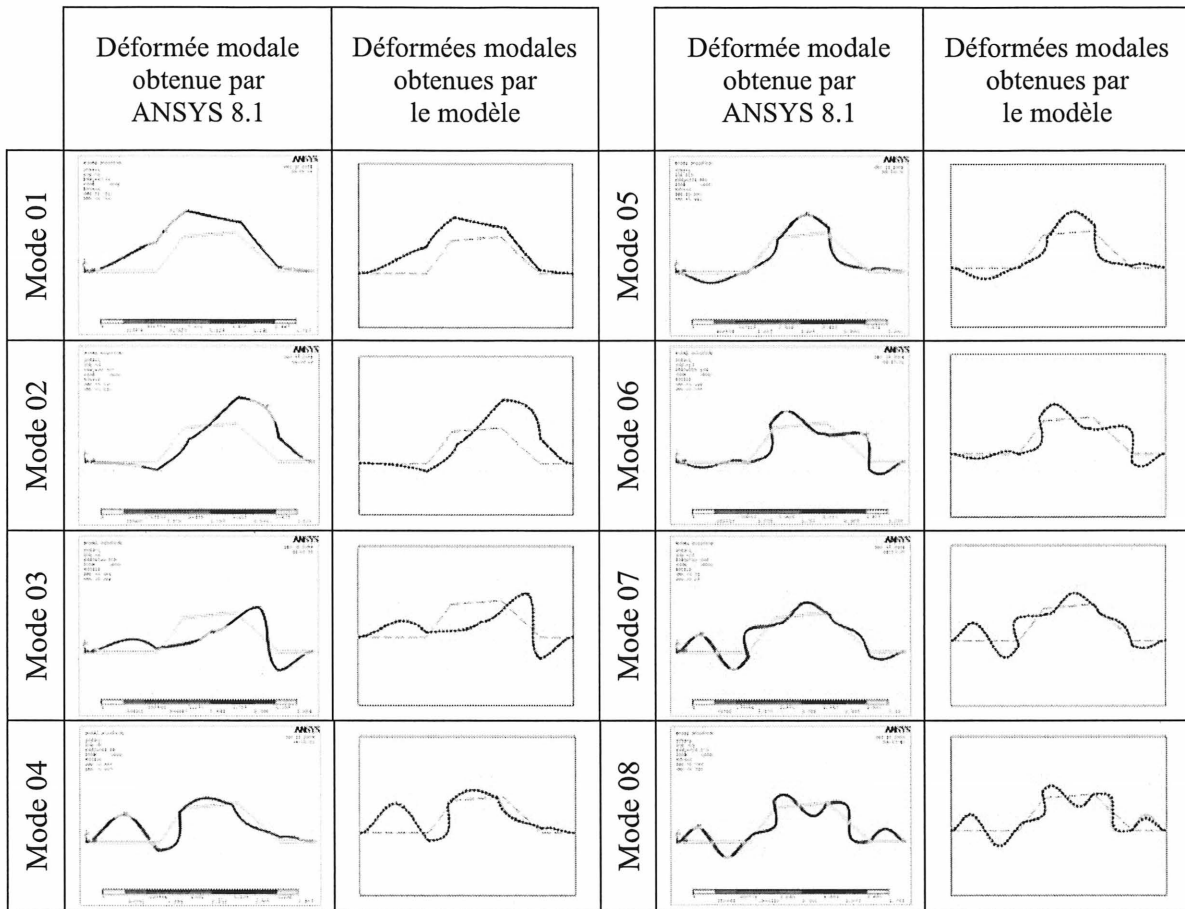


Figure 4.9 : Description de la structure à cinq poutres

Le modèle utilisant la méthode de couplage par continuité a mis 958 secondes pour calculer 44 modes. Six fonctions de forme par poutre et par type de déplacement étaient utilisées dans les poutres 1, 2 et 3 et cinq dans les poutres 4 et 5. Au-delà, le modèle divergeait. Avec la méthode de couplage par ressorts virtuels, il a fallu 118 secondes pour calculer 70 modes. Cette fois, sept fonctions de forme par poutre et par type de déplacement étaient utilisées.

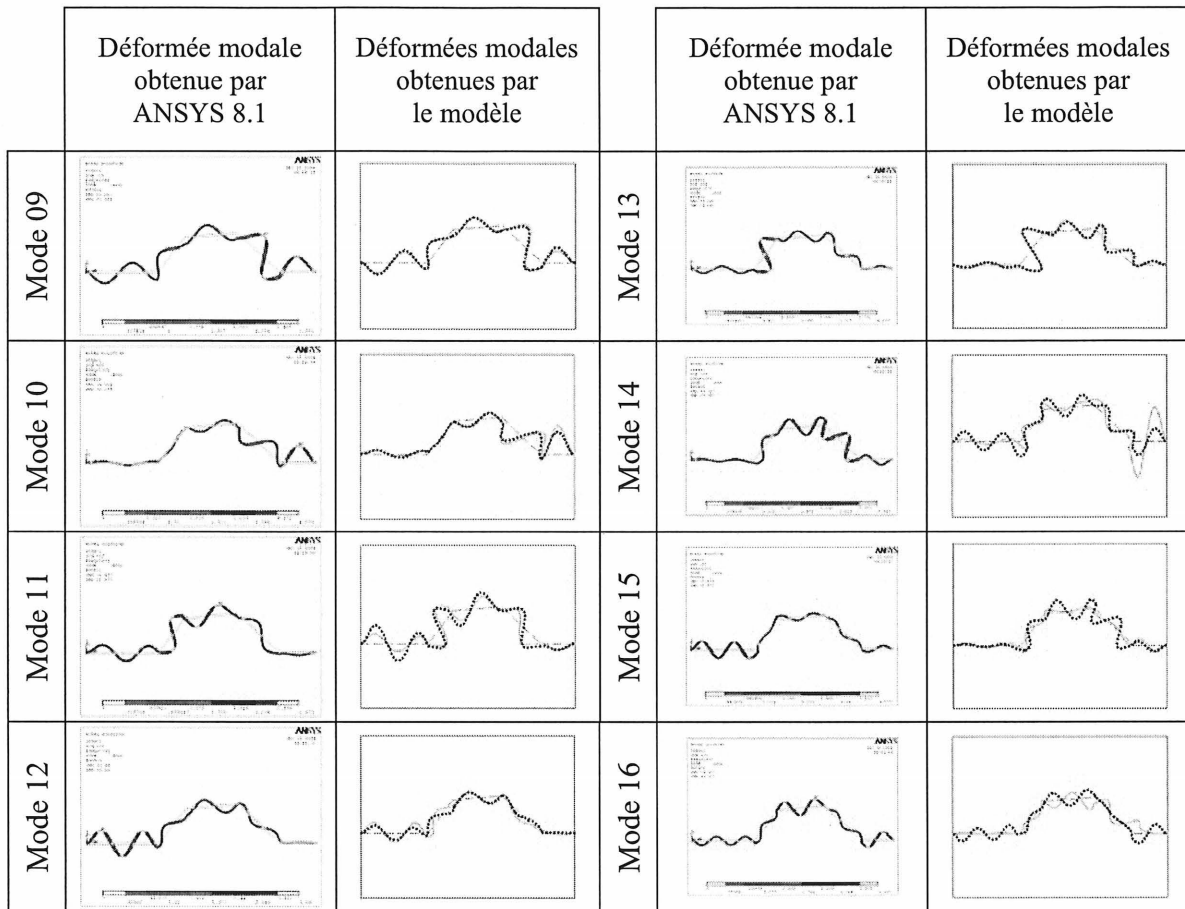
Même si par rapport au nombre de modes la méthode de couplage par continuité semble la plus intéressante (sauf peut-être au niveau du temps de calcul), c'est avec la méthode de couplage par ressorts virtuels qu'il est possible de reconstruire correctement le plus grand nombre de modes.



**Figure 4.10 :** Déformées modales des modes 1 à 8 de la structure à cinq poutres  
A gauche, résultats d'ANSYS 8.1 (structure non déformée et déformée) et à droite, ceux du modèle (structure non déformée en tirets fins, méthode de couplage par continuité en trait plein et par ressorts virtuels en pointillés)

Jusqu'au septième mode, on ne fait aucune différence entre les méthodes de couplage. Du neuvième au douzième mode, une comparaison attentive laisse apparaître que la méthode de couplage par ressorts virtuels reconstruit au mieux la déformée modale de la structure.

La méthode de couplage par ressorts virtuels donne encore de bons résultats pour le treizième mode. Néanmoins, il semble que ce soit la limite pour ce calcul. Au quatorzième mode, les déformées des poutres 4 et 5 sont trop importantes ; au quinzième mode, il n'y a plus de correspondance alors qu'au seizième mode, la déformée de la poutre 3 et le mouvement du point de couplage entre les poutres 4 et 1 sont mal reconstitués.



**Figure 4.11 :** Déformées modales des modes 9 à 16 de la structure à cinq poutres  
A gauche, résultats d'ANSYS 8.1 (structure non déformée et déformée) et à droite, ceux du modèle (structure non déformée en tirets fins, méthode de couplage par continuité en trait plein et par ressorts virtuels en pointillés)

Le Tableau 4.6 regroupe les fréquences naturelles obtenues. Il est clair que le calcul avec la méthode de couplage par continuité atteint ses limites vers le onzième ou treizième mode, puisque l'erreur relative commence à augmenter sensiblement. Pour celle par ressorts virtuels, il semble qu'elle commence à diverger vers le quinzième mode, puisque l'on commence à atteindre la centaine de hertz de différence. Comme avec les déformées modales, il est possible de monter plus haut en ordre avec la méthode de couplage par ressorts virtuels. Cependant, il est à noter que la méthode de couplage par continuité approche beaucoup mieux les fréquences naturelles. Ceci est un effet du choix des raideurs  $K$  et  $C$  dans la méthode de couplage par ressorts. En effet, il a été vu précédemment que ce choix avait une influence sur les fréquences naturelles.

Mode	ANSYS 8.1	Modèle (Couplage par continuité)			Modèle (Couplage par ressorts virtuels)		
	Fréquence	Fréquence	Écart	Erreur rel.	Fréquence	Écart	Erreur rel.
01				0.1 %			1.3 %
02				0.6 %			2.3 %
03				0.9 %			2.1 %
04				0.9 %			1.3 %
05				0.5 %			1.8 %
06				0.3 %			1.7 %
07				0.7 %			1.5 %
08				1.7 %			0.8 %
09				1.7 %			1.6 %
10				1.3 %			1.8 %
11				4.3 %			3.1 %
12				5.7 %			4.0 %
13				5.5 %			1.1 %
14				24.7 %			1.2 %
15				17.4 %			4.3 %
16				30.4 %			2.5 %

**Tableau 4.6 :** Comparatif des fréquences naturelles obtenues par ANSYS 8.1 et par le modèle pour les seize premiers modes de la structure à cinq poutres

#### 4.2.4 Bilan

Avec des fonctions de forme polynomiales, les deux méthodes de couplage sont assez efficaces, tant au niveau de la reconstitution des déformées modales que des fréquences naturelles.

La méthode de couplage par continuité a l'avantage d'assez bien approcher les fréquences naturelles mais nécessite plus de temps de calcul à mesure que le nombre de points de couplage augmente et est plus limitée en nombre de fonctions de forme utilisables.

La méthode de couplage par ressorts virtuels soulève toujours une incertitude sur les fréquences naturelles puisqu'elles fluctuent à cause des raideurs des ressorts. Néanmoins, elle a l'avantage d'être rapide et de ne pas être sensible au nombre de points de couplage. De plus,

comme indiqué au Chapitre 3, il est possible de construire facilement les matrices de masse et de raideur.

Dans toute la suite de ce mémoire, la méthode de couplage par ressorts virtuels sera préférée et choisie par défaut, pour sa facilité d'utilisation et sa rapidité de calcul.

### **4.3 Application à la membrure de la boîte de transmission de l'hélicoptère [REDACTED]**

Comme vu au paragraphe 4.2.2, il est possible de représenter une des membrures de la boîte de transmission du [REDACTED] sous la forme d'un système de trois poutres. Cependant dans la réalité, deux des trois poutres n'ont pas une section constante et cette partie débutera donc avec la modélisation de la membrure. On considérera encastrees les extrémités de la membrure attachées sur le toit de la cabine. Les tiges filetées insérées dans la membrure et le reliant à la transmission par l'intermédiaire des plots antivibratiles ne seront pas prises en compte. Dans la suite de ce chapitre, les efforts appliqués par la transmission sur la membrure seront représentés par des efforts ponctuels à la base des tiges filetées. Ensuite, le schéma modal de la membrure sera comparé aux résultats obtenus par Pierre Bélanger et son modèle numérique de la membrure sous NASTRAN [BERRY, BÉLANGER et MONET DESCOMBEY, 2005].

#### **4.3.1 Modélisation de la membrure**

La Figure 4.12 présente une photographie de la membrure seule, ainsi que la géométrie des trois poutres qui le représenteront. Deux des trois poutres n'ont pas une section constante. La section de poutre avant diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'encastrement avec le toit. La poutre arrière est constituée de deux parties : l'une possède une section constante et l'autre varie linéairement.

Pour les trois poutres du modèle analytique, on considère qu'elles sont parfaitement planes, que l'épaisseur des poutres est constante et que seule la hauteur varie dans les parties à

section non constante. On néglige aussi l'effet des renforts près des attaches avec le toit et les inserts en aciers dans lesquels sont prises les tiges filetées.

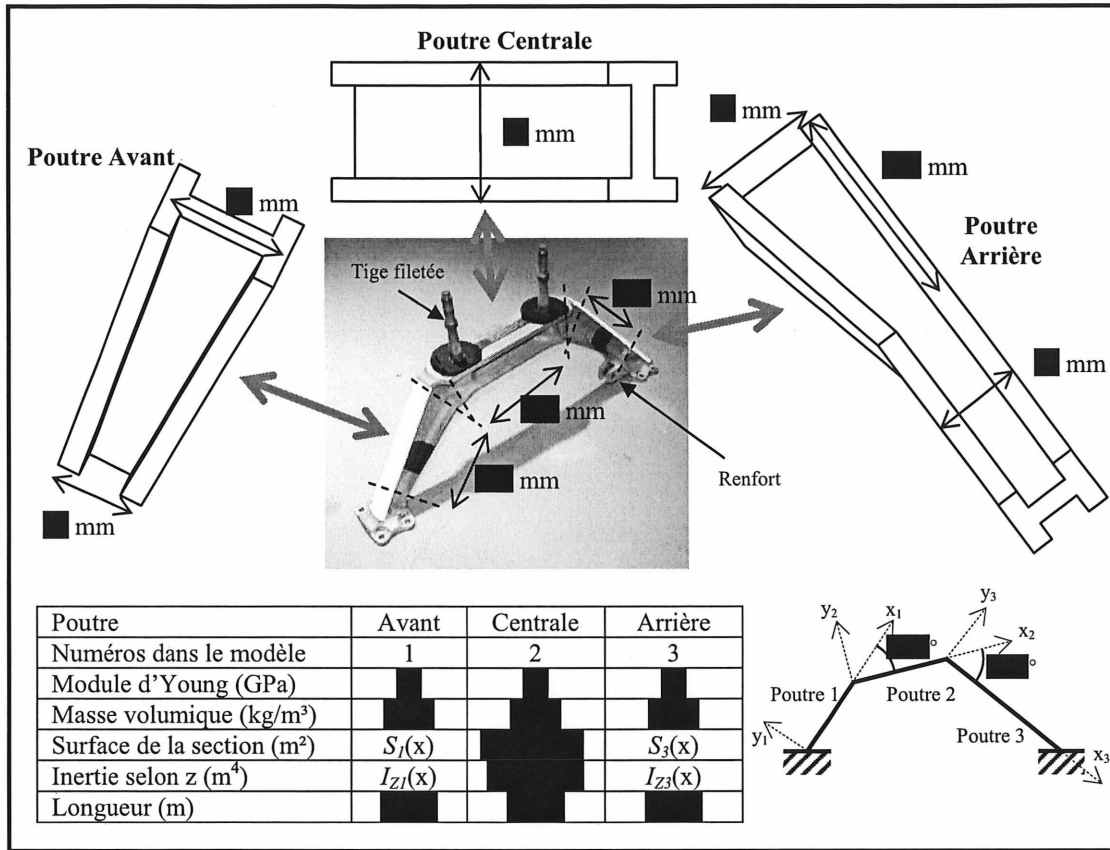


Figure 4.12 : Modélisation de la membrure comme une structure à trois poutres

Pour la poutre 1 (poutre avant), la surface  $S_1$  de la section et le moment d'inertie  $I_{z1}$  selon  $z_1$  sont donnés par les formules 4.4.

Ces formules donnent des résultats en m<sup>2</sup> (pour les surfaces) et en m<sup>4</sup> (pour les moments d'inertie).

4.4a

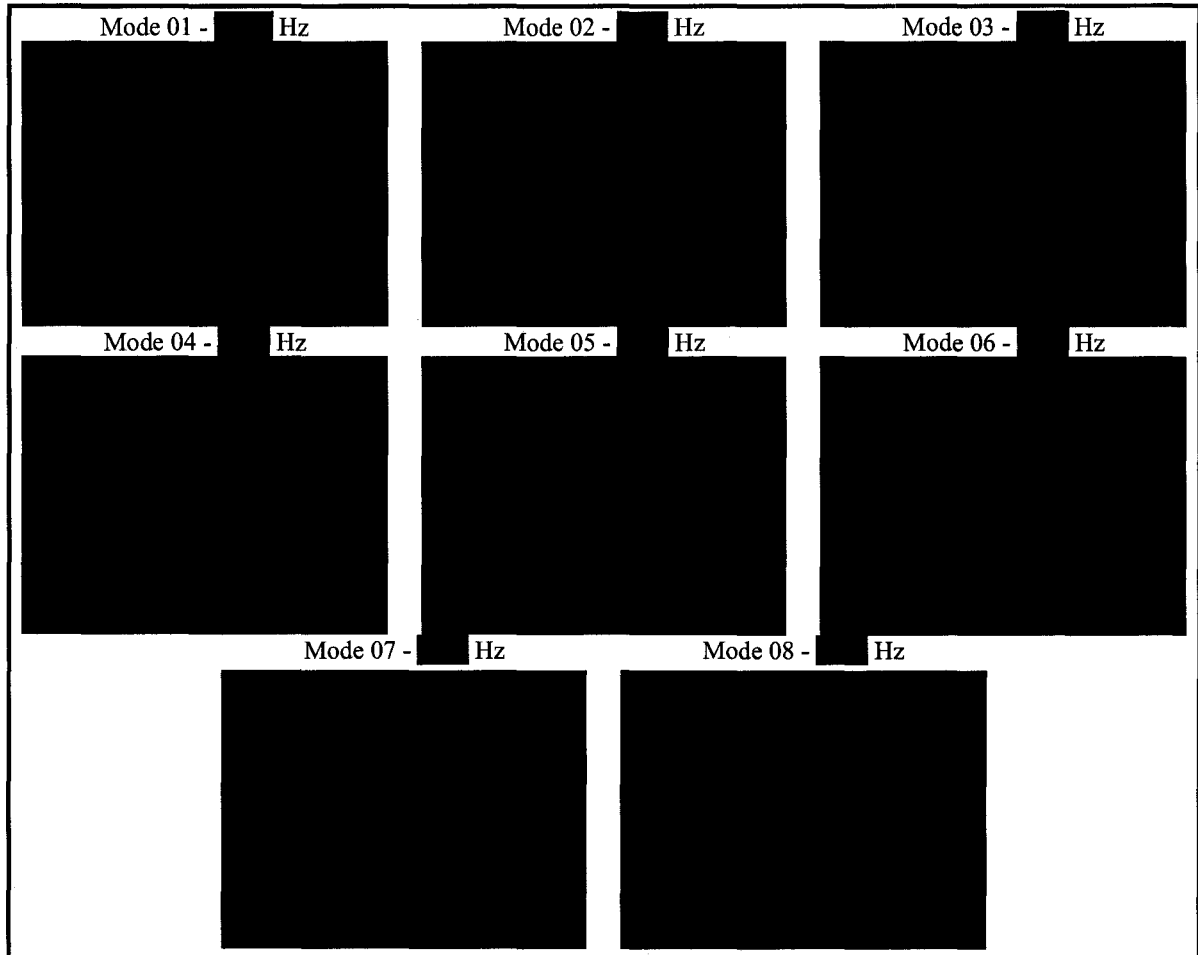
4.4b

4.4c




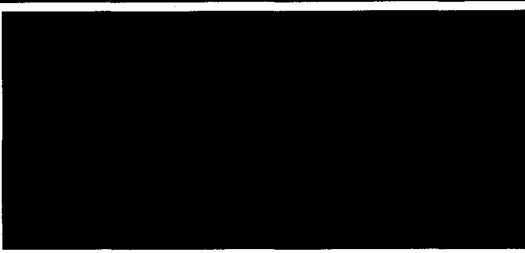








Les déformées modales obtenues sont présentées à la Figure 4.13. Seules les huit premiers modes y sont représentés. Il est inutile de montrer les modes d'ordre supérieur puisque leurs fréquences naturelles sont déjà bien au-delà de notre plage d'étude.



**Figure 4.13 :** Déformées modales de la membrure d'après le modèle analytique  
En pointillés, la structure non déformée, en trait plein, la déformée modale

La comparaison avec le modèle NASTRAN, comprenant environ 41000 éléments solides tétraédriques à dix nœuds, est faite à la Figure 4.14. Les quatre modes NASTRAN présentés sont les quatre premiers modes plans obtenus ; le modèle NASTRAN, qui tient compte de la géométrie complexe des membrures, calcule les modes plans et les modes hors plans, ce qui explique la différence de notation entre les modèles analytiques et numériques.

Modèle Analytique	MSC-NASTRAN
 Mode 01 : ■ Hz	 Mode 03 : ■ Hz
 Mode 02 : ■ Hz	 Mode 05 : ■ Hz
 Mode 05 : ■ Hz	 Mode 11 : ■ Hz
 Mode 06 : ■ Hz	 Mode 16 : ■ Hz

**Figure 4.14 :** Comparaison entre les déformées obtenues avec le modèle analytique (à gauche) et le modèle simplifié sous NASTRAN (à droite)

Les déformées modales des modes 01, 02, 05 et 06 calculées par le modèle analytiques correspondent très bien aux quatre premières de NASTRAN. Par contre, il y a un gros écart au niveau des fréquences naturelles. Plusieurs essais ont été réalisés avec le modèle analytique pour vérifier s'il avait convergé (raideurs différentes, nombre de fonctions de forme différent) mais ils ont montré qu'il n'était pas possible d'obtenir mieux sur les valeurs des fréquences naturelles. On notera que les trois premiers modes calculés avec NASTRAN sont dans la plage de fréquence du bruit de transmission étudié dans le projet.

Il est peu probable que le problème vienne du modèle NASTRAN puisque ses résultats concordent avec les tests effectués en laboratoires [BERRY, BÉLANGER et MONET DESCOMBEY, 2005]. Quant au modèle analytique, compte tenu des exemples précédents sur lesquels il a été appliqué avec beaucoup de succès, il semble nécessaire de chercher plus en profondeur quelles peuvent en être les limites.

Le modèle analytique est dans l'incapacité du modèle à fournir les fréquences naturelles d'une membrure de la boîte de transmission du [REDACTED], alors qu'il n'y avait pas eu de problèmes pour les structures de démonstration en T et à cinq poutres. Le modèle analytique ayant été développé à partir d'hypothèses précises, il s'agit maintenant de vérifier dans quelle mesure elles doivent être respectées, ce qui constituera le domaine de validité du domaine.

#### **4.4 Limitations du modèle analytique**

Les limites du modèle ont deux origines principales : l'hypothèse de poutres minces et l'outil de calcul. Leur influence sur l'obtention du schéma modal va être discuté tout au long de cette partie.

Comme précédemment, les résultats du modèle sont comparés à ceux obtenus avec ANSYS 8.1.

#### 4.4.1 Importance de l'hypothèse des poutres minces

Dans la partie 3.1, les fonctionnelles de Hamilton des poutres sont exprimées en tenant compte de cette hypothèse, qui permet une simplification majeure du champ de déplacement. Sans cela, les expressions 3.4, 3.7 (et 3.9) seraient plus complexes et demanderaient des moyens plus importants pour les utiliser.

Afin de vérifier l'importance de l'hypothèse des poutres minces, la structure présentée à la Figure 4.15 sera utilisée. Ses caractéristiques sont regroupées au Tableau 4.7 et seule l'épaisseur des poutres de longueur  $L$  et de section carrée de côté  $e$  sera variable de façon à regarder l'influence du rapport  $L/e$  ; une poutre étant mince si  $L \gg e$ .

Caractéristiques	Poutres 1, 2 et 3
Module d'Young	70 GPa
Masse volumique	2700 kg/m <sup>3</sup>
Section	$e^2$ (m <sup>2</sup> )
Inertie	$e^4/12$ (m <sup>4</sup> )
Longueur	0.5 m

Tableau 4.7 : Caractéristiques de la structure en T à trois poutres

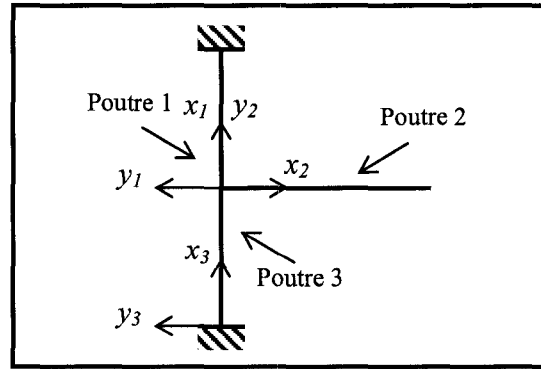
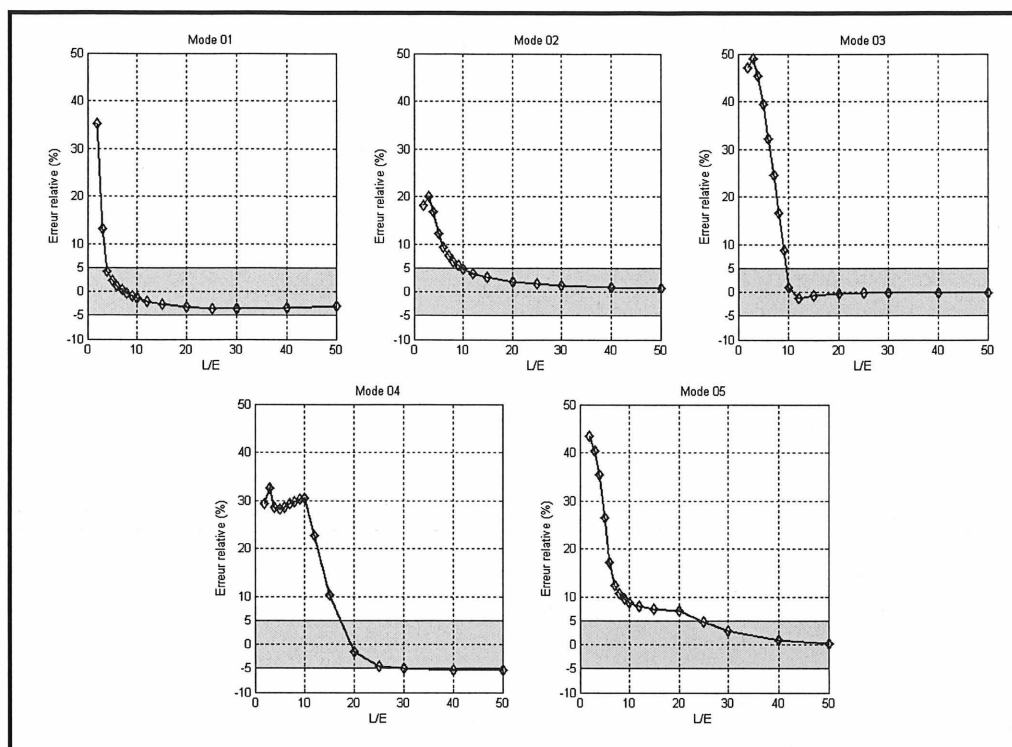


Figure 4.15 : Structure en T à trois poutres

La méthode de couplage par continuité a été choisie pour des raisons pratiques. En effet, les poutres vont devenir de plus en plus rigide à mesure que l'épaisseur va augmenter. Ainsi, avec la méthode de couplage par ressorts, il aurait fallu déterminer pour chaque cas une raideur.

Le calcul s'effectue avec sept fonctions de forme dans chaque poutre et pour reconstituer la flexion et l'extension. Dans les poutres 1 et 3, les fonctions sont des polynômes de type  $B_M$  et dans la poutre 2, de type  $B_N$  avec  $a$  valant 1. Ce sont les mêmes qu'aux expressions 4.2.

On peut alors tracer l'erreur relative entre les fréquences naturelles des cinq premiers modes obtenues avec le modèle et ANSYS 8.1 en fonction du rapport  $L/e$ , comme présenté à la Figure 4.16.



**Figure 4.16 :** Erreur relative entre les fréquences naturelles des cinq premiers modes obtenues avec le modèle et ANSYS 8.1 en fonction du rapport  $L/e$   
 En gris, la marge d'erreur à 5%. Une erreur négative signifie que la fréquence calculée par le modèle est supérieure à celle obtenue avec ANSYS 8.1

On peut nettement voir l'influence de l'épaisseur des poutres. Lorsqu'elle est grande ( $L/e$  petit) l'erreur relative devient importante dans tous les cas. Inversement, l'erreur marque un plateau, dans la marge des 5% lorsque l'épaisseur diminue. Il est habituellement conseillé de prendre un rapport  $L/e$  au moins égal à dix pour respecter l'hypothèse des poutres minces. Néanmoins, on constate qu'une valeur minimale de vingt serait plus appropriée. On constate aussi que lorsque le rapport  $L/e$  est petit, le modèle sous estime la fréquence naturelle du mode.

Ce dernier point est des plus ennuyeux puisque sur la membrure de la transmission du [REDACTED], les trois parties (avant, milieu et arrière) présentent respectivement des rapports  $L/e$  évalués à 3, 4 et 6. Ainsi, l'énorme écart entre les fréquences naturelles du modèle analytique et du modèle numérique par éléments finis présenté en 4.3.2 est maintenant compréhensible.

Les Figures 4.17 et 4.18 présentent les déformées modales des cinq premiers modes plans obtenues avec le modèle analytique et ANSYS 8.1 pour des rapports  $L/e$  différents.

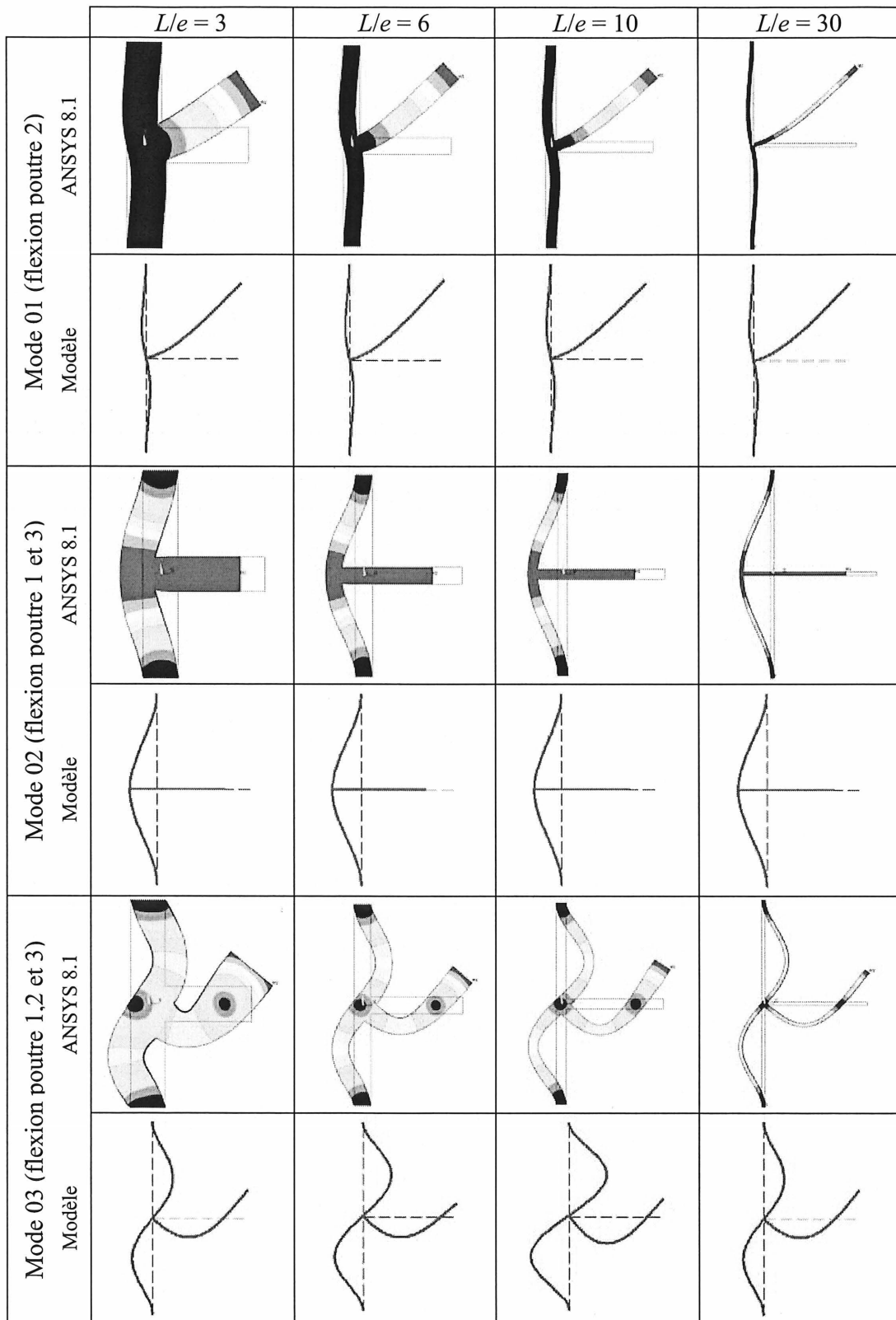


Figure 4.17 : Déformées modales des trois premiers modes plans obtenues avec le modèle analytique et ANSYS 8.1 pour des rapports  $L/e$  différents

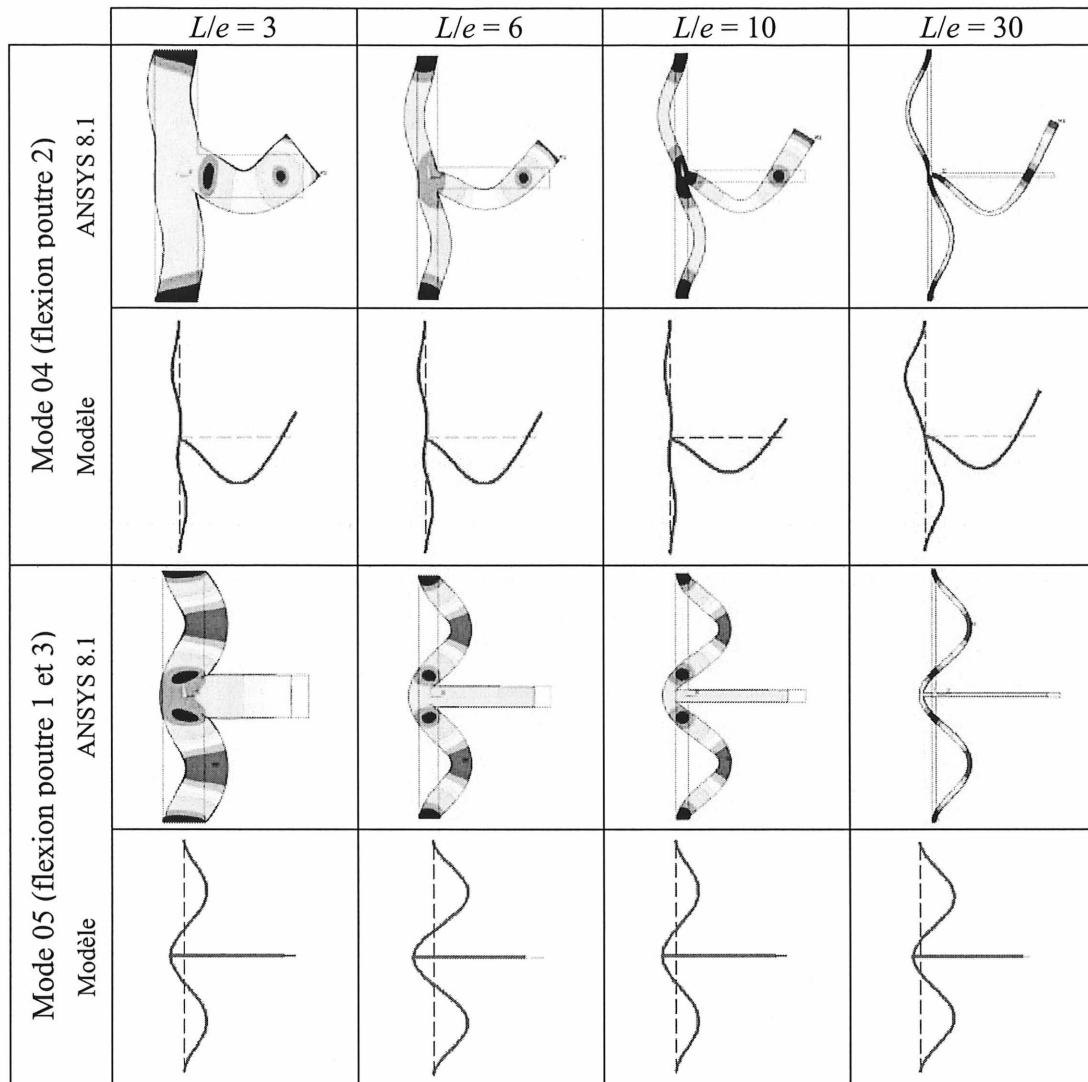


Figure 4.18 : Déformées modales des modes 4 et 5 obtenues avec le modèle analytique et ANSYS 8.1 pour des rapports  $L/e$  différents

On constate que dans l'ensemble, les allures des déformées sont assez proches malgré l'épaisseur des poutres et l'influence du coefficient de Poisson, pris en compte par ANSYS 8.1. Les résultats relativement proches entre ANSYS 8.1 et le modèle analytique sur les déformées propres est rassurant car les futurs résultats de contrôle actif seront certainement reliés aux déformées modales.

Une autre remarque concerne l'ordre des modes. Si pour un rapport  $L/e$  de 30, les modes 1, 2, 3, 4 et 5 du modèle correspondent bien aux modes 1, 2, 3, 4 et 5 d'ANSYS 8.1, il n'en est plus de même pour des rapports plus faibles (comme 10 par exemple) puisque les effets de l'inertie rotationnelle et le cisaillement transverse dans les poutres deviennent

prépondérants et font soit alterner ces modes, soit apparaître des modes qui sont habituellement à plus haute fréquence. C'est pourquoi, aux Figure 4.3 et 4.4, les modes 1 à 5 sont numérotés par rapport à des conditions idéales de poutres minces mais sont aussi décrits afin de pouvoir être repérés lorsque l'on s'éloigne de ces conditions. Il en allait de même pour les résultats de la Figure 4.2, ce qui explique les tendances observées.

Ainsi, il est évident que le respect de l'hypothèse de poutres minces est une condition *sine qua non* pour l'obtention du schéma modal. En effet, son influence est très grande sur les fréquences naturelles lorsque le rapport  $L/e$  est en deçà de dix ou vingt. Quant aux déformées modales, il apparaît qu'elles peuvent être encore assez bien approchées pour des rapports  $L/e$  correspondant à ceux des poutres constituant la membrure de la transmission. Ainsi, si l'information sur les fréquences est définitivement impossible à obtenir avec le modèle dans le cas de cette membrure, il semble qu'il puisse toujours être utilisé pour déterminer des tendances sur le comportement de la membrure, ce qui sera important lors de la partie de contrôle actif au chapitre suivant.

La valeur de l'angle entre les poutres a aussi des effets que le modèle analytique ne prend pas en compte. Étant donné que les angles entre les poutres de l'assemblage sont ni trop obtus, ni trop aigus, ce point sera seulement abordé à l'Annexe E.

#### 4.4.2 Limites de l'outil de calcul

Cet aspect est déjà apparu de lui-même plus tôt dans ce chapitre. Il a pour conséquence de limiter le nombre de fonctions de forme utilisable et, pour la méthode de couplage par ressorts virtuels, d'instaurer une limite "haute" aux valeurs des raideurs des ressorts.

Il existe des solutions pour repousser cette limite : optimisation du programme, utilisation d'algorithmes plus évolués pour les étapes délicates (inversions de matrices, problèmes aux valeurs propres, ...) mais il n'est pas encore nécessaire d'y accorder de l'attention. En effet, tel quel, le modèle est capable de donner des résultats intéressants dans le domaine fréquentiel (0-1600 Hz) où l'on souhaite utiliser le contrôle actif sur une structure représentative de la réalité, comme il sera vu un peu plus loin.



#### 4.4.3 Bilan

Sans tenir compte de la limite due à l'outil de calcul, il s'avère que le problème de la membrure de la transmission soit en dehors du domaine de validité du modèle analytique. Il est évident que la décomposition de la membrure en une structure à trois poutres ne respecte absolument pas les hypothèses de poutres minces puisque les rapports  $L/e$ ,  $e$  étant dans ce cas la plus grande dimension de la section des poutres, valent environ trois, quatre et six, alors qu'il a été mis en évidence que ce rapport doit être au moins de vingt pour rester dans une limite de 5% d'erreur par rapport à la réalité (on considère ici que les résultats d'ANSYS 8.1 sont représentatifs de la réalité).

Le peu d'espoir restant provient des déformées propres. En effet, il a pu être observé, que le modèle analytique suivait correctement ANSYS 8.1 à ce sujet. S'il n'est donc pas possible de pouvoir approximer correctement les fréquences naturelles de la vraie structure, le modèle est capable de se déformer de la même manière. Grâce à ce résultat, l'utilisation du modèle à des fins de plate-forme d'étude pour le contrôle actif reste faisable. Le modèle analytique, dans son application sur la structure du [REDACTED], n'est alors plus un instrument capable d'approcher le comportement du problème réel, mais devient au mieux un indicateur de tendances et un outil de conception préliminaire pour le contrôle actif.

#### 4.5 Un modèle destiné au contrôle actif : le modèle à six poutres

Le modèle à six poutres modélise la membrure, composée de trois poutres, reposant sur une poutre dite réceptrice, elle aussi décomposée en trois poutres. Lors du contrôle actif, le comportement de cette poutre réceptrice sera utilisé pour déterminer l'efficacité des stratégies de contrôle. Elle a été décomposée en trois poutres car une seule n'était pas suffisante pour obtenir un schéma modal satisfaisant du point de vue du nombre de modes correctement reconstitués. Mais avant de créer ce modèle à six poutres, et pour être sûr que le modèle analytique, une fois les hypothèses de poutres minces respectées, ne révélerait pas d'autres problèmes, il a été testé sur plusieurs types de structures présentant certaines particularités.

#### 4.5.1 Application du modèle analytique à des structures de démonstration

Tout au long du développement du modèle analytique, il a été appliqué à plusieurs types de structure, de géométries diverses. La Figure 4.19 présente quelques unes de ces structures de démonstration, le plus souvent en conditions libres. Chacune présente un rapport  $L/e$  au moins égal à 40.

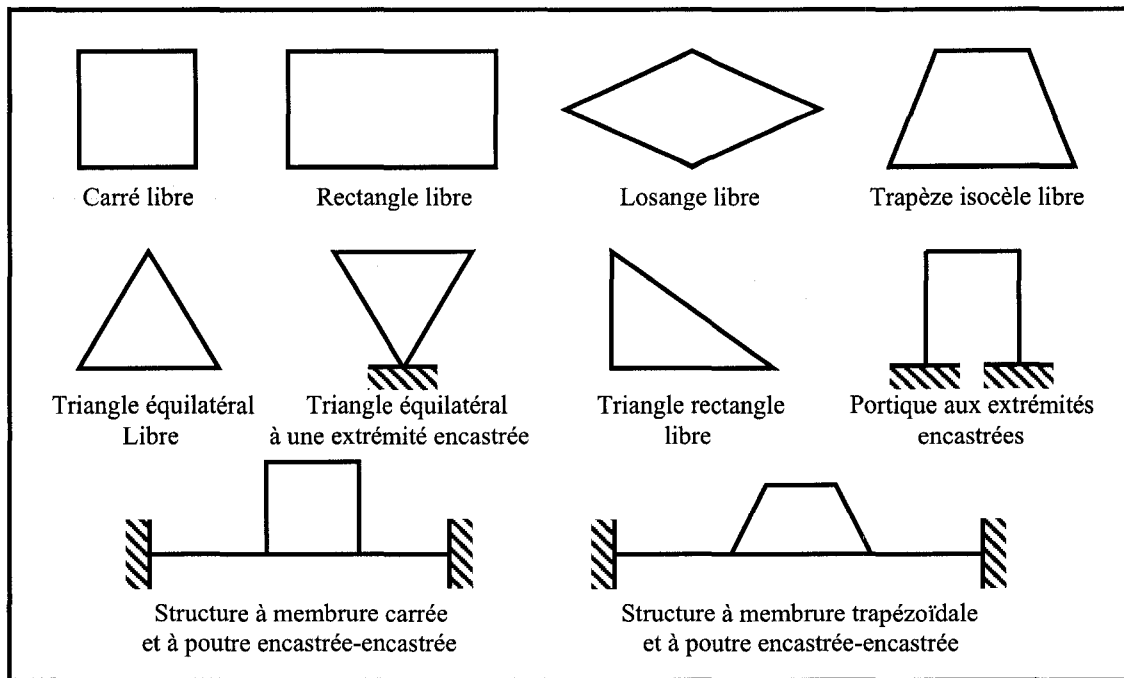


Figure 4.19 : Exemples de structures de démonstration

Ces essais servaient à étudier si certaines particularités géométriques comme les angles droits, les symétries, les égalités de longueurs ou les contours fermés pouvaient entraîner des singularités dans le modèle. Il s'avère que la méthode de couplage par continuité y est assez sensible et demande des précautions sur certaines géométries, contrairement à la méthode de couplage par ressorts virtuels qui fournis le schéma modal de toutes ses structures de démonstration sans aucun problème. Tous ces résultats ont été comparés à ceux fourni par ANSYS 8.1 pour des configurations similaires. Le premier mode plan symétrique du portail a même pu être comparé à une seconde source [BLEVINS, 1979]. Ces comparaisons, montrées à la Figure 4.20 pour les deux premiers modes souples parlent d'elles-mêmes.

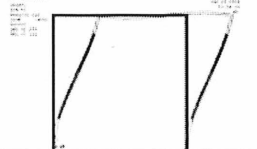
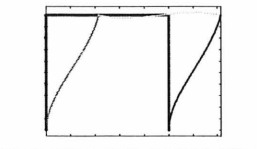
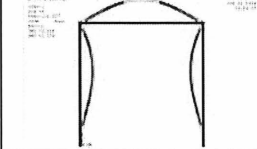
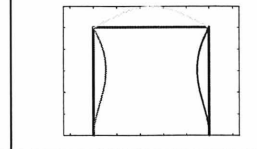
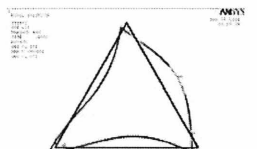
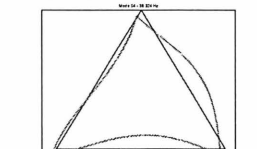
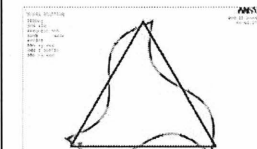
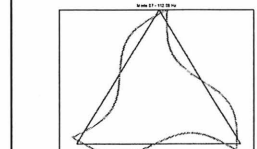
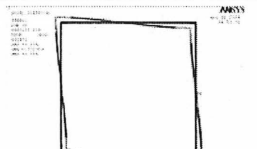

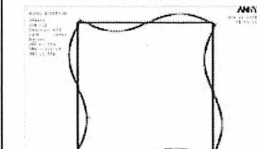
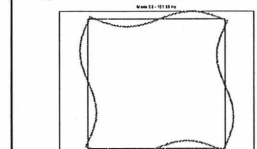
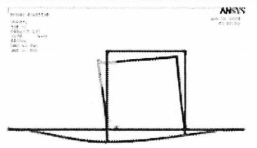
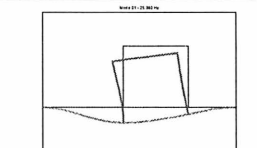
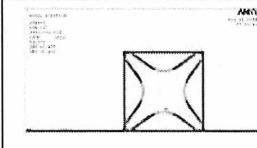
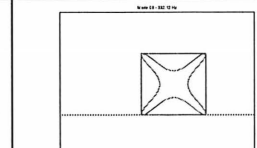
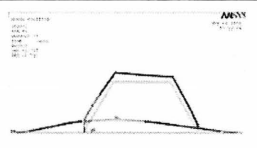
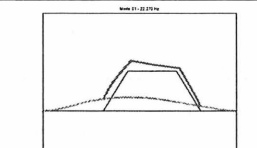
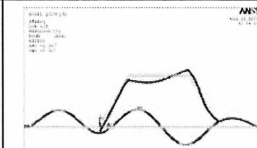
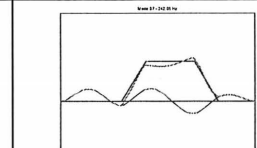
	ANSYS 8.1	Modèle	ANSYS 8.1	Modèle
Portique	Mode 01 - 30.54 Hz 	Mode 01 - 30.41 Hz 	Mode 02 - 120.03 Hz * 	Mode 02 - 119.99 Hz * 
	Mode 01 - 39.49 Hz 	Mode 01 - 38.32 Hz 	Mode 04 - 111.93 Hz 	Mode 04 - 112.06 Hz 
Carré	Mode 01 - 13.53 Hz 	Mode 01 - 13.47 Hz 	Mode 06 - 101.59 Hz 	Mode 06 - 101.68 Hz 
	Mode 01 - 25.21 Hz 	Mode 01 - 25.00 Hz 	Mode 08 - 336 Hz 	Mode 08 - 332 Hz 
Structure Trapèze	Mode 01 - 20.79 Hz 	Mode 01 - 20.64 Hz 	Mode 08 - 240 Hz 	Mode 08 - 242 Hz 

Figure 4.20 : Déformées modales et fréquences naturelles pour deux modes de quelques unes des structures de démonstration

\* pour ce mode, on obtient 120.03 Hz avec les formules de [BLEVINS, 1979]

#### 4.5.2 Structure à six poutres pour le contrôle actif

La Figure 4.21 présente une structure nommée structure à six poutres. Pour modéliser la membrure, il faut trois poutres. Cette membrure est excitée en deux points sur la poutre 2 qui correspondent aux attaches entre la boîte de transmission principale et la membrure par l'intermédiaire des plots antivibratoires. Afin de contrôler activement les vibrations se

propageant dans la membrure, il est nécessaire d'y adjoindre une structure réceptrice. Ici, elle prendra la forme d'une poutre encastrée-encastrée, car elle symbolise la plaque du montage du laboratoire, visible au Chapitre 1 à la Figure 1.9, qui est une plaque boulonnée sur une cavité en béton. Pour améliorer la modélisation cette poutre réceptrice a été subdivisée en trois poutres. Ce qui fait un total de six poutres, quatre étant libres-libres et deux libres-encastrées.

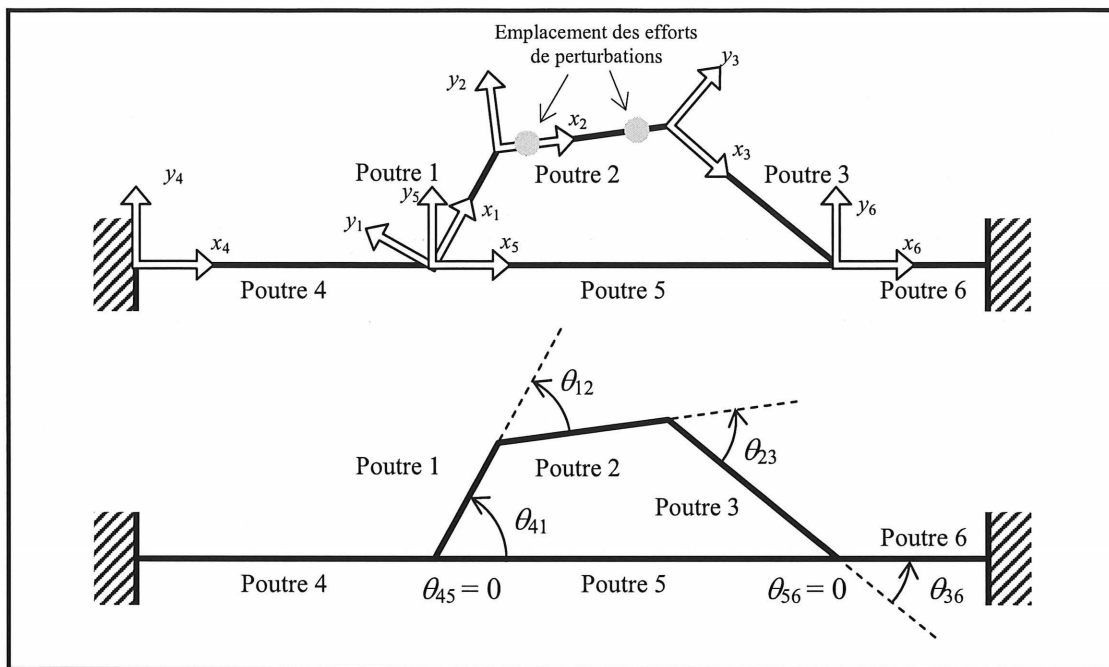


Figure 4.21 : Modèle à six poutres  
Repères, désignations et angles

Les caractéristiques des six poutres du modèle sont données au Tableau 4.8. Les valeurs des angles sont regroupées au Tableau 4.9. Ces derniers respectent les conventions présentées au Chapitre 3, d'où la présence de valeurs négatives.

Caractéristiques	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5	Poutre 6
Module d'Young	70 GPa	70 GPa	70 GPa	70 GPa	70 GPa	70 GPa
Masse volumique	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>	2700 kg/m <sup>3</sup>
Section	$S_1(x)$	████████	$S_3(x)$	$5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	$5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	$5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Inertie	$I_{z1}(x)$	████████	$I_{z3}(x)$	$6.51 \times 10^{-9} \text{ m}^4$	$6.51 \times 10^{-9} \text{ m}^4$	$6.51 \times 10^{-9} \text{ m}^4$
Longueur	████████	████████	████████	████████	████████	████████

Tableau 4.8 : Caractéristiques des poutres du modèle à six poutres

Pour les poutres 1 et 3, les surfaces et inerties correspondent à celles définies aux équations 4.4 et 4.5. Les poutres 4, 5 et 6 représentent la structure réceptrice. Au laboratoire, la boîte de transmission est montée sur une plaque en aluminium d'une épaisseur d'un demi pouce (12.5 mm). Il a donc été décidé que la poutre réceptrice représenterait une "tranche" de cette plaque, de largeur des parties de la membrure en contact avec la plaque, c'est-à-dire 40 mm. Les poutres 4, 5 et 6 ont donc la même section et le même moment d'inertie. Leurs longueurs correspondent à celles du montage au laboratoire.

$\theta_{41}$	$\theta_{45}$	$\theta_{12}$	$\theta_{23}$	$\theta_{56}$	$\theta_{36}$
■	■	■	■	■	■

**Tableau 4.9 :** Valeurs des angles entre les poutres du modèle à six poutres

Il existe aussi une version de ce modèle conforme à la théorie des poutres minces et destinée à être comparée à ANSYS 8.1. La géométrie reste la même, excepté que les six poutres sont à section carrée de 10 mm de côté, ce qui permet d'avoir un rapport  $L/e$  entre 20 et 67 pour l'ensemble des poutres. La Figure 4.22 présente les schémas modaux de cette structure comparée à ANSYS 8.1. Six fonctions de forme ont été utilisées par type de déplacement et par poutre, sauf pour les poutres 4 et 5, les plus grandes, où sept fonctions ont été considérées pour reconstituer la flexion. Les expressions des fonctions de forme sont regroupées au Tableau 4.10. La méthode de couplage par ressorts virtuels a été utilisée, avec des raideurs  $K$  et  $C$  valant  $10^7$  N/m et  $10^5$  Nm.

	Poutres 1, 2, 3 et 5 libre-libre	Poutre 4 encastrée-libre	Poutre 6 libre-encastrée
Extension $U_{i,k}(x_i)$	$\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^{k-1}$	$\left(\frac{x_4}{L_4}\right)\left(1 + \left(\frac{x_4}{L_4}\right)^{k-1}\right)$	$\left(\frac{x_6}{L_6} - 1\right)\left(1 + \left(\frac{x_6}{L_6}\right)^{k-1}\right)$
Flexion $V_{i,k}(x_i)$	$\left(\frac{x_i}{L_i}\right)^{k-1}$	$\left(\frac{x_4}{L_4}\right)^2\left(1 + \left(\frac{x_4}{L_4}\right)^{k-1}\right)$	$\left(\frac{x_6}{L_6} - 1\right)^2\left(1 + \left(\frac{x_6}{L_6}\right)^{k-1}\right)$

**Tableau 4.10 :** Fonctions de forme utilisées pour le modèle à six poutres  
L'indice  $i$  correspond au numéro de la poutre, l'indice  $k$  représente l'ordre de la fonction de forme

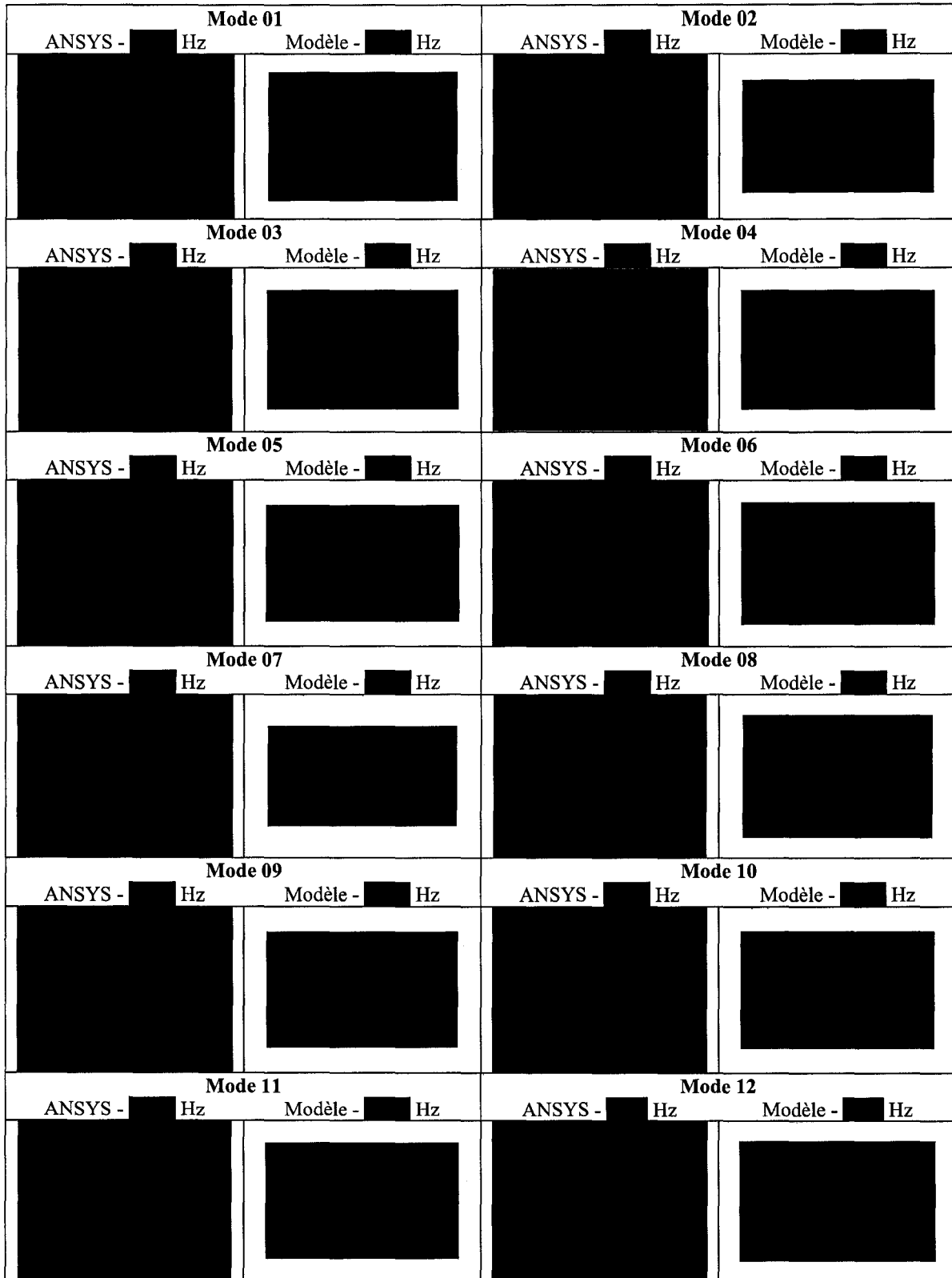


Figure 4.22 : Comparaison des schémas modaux obtenus avec ANSYS 8.1 et le modèle à six poutres à section constante

D'après la Figure 4.22, on observe que le modèle reconstitue correctement les déformées modales des neuf premiers modes ; le dixième présentant quelques imperfections.

Le modèle à six poutres avec les sections représentatives de la réalité n'a pas été comparé à ANSYS 8.1, puisque dans le cadre du projet il existait déjà un modèle sous NASTRAN représentant une membrure seule (celle de la Figure 4.14) et un autre représentant la BTP sur ses deux membrures et attachée à une plaque (le montage du laboratoire) ; ces deux modèles représentant à chaque fois les membrures dans leurs moindres détails.

On assume donc qu'il aura le même comportement que son homologue à sections constantes, bien que les fréquences naturelles ne soient pas les bonnes. On obtient alors les dix premiers modes, présentés à la Figure 4.23.

Le nombre et le type de fonctions de forme restent les mêmes que précédemment. Les valeurs des raideurs des ressorts  $K$  et  $C$  valent à présent  $10^8$  N/m et  $10^6$  Nm, ce qui représente la prise en compte de l'augmentation de la rigidité, principalement au niveau de la membrure.

On constate que la membrure est bien plus rigide que la poutre réceptrice car celle-ci se déforme très peu en comparaison de la membrure. De plus, on remarque que les fréquences naturelles des dix premiers modes s'étalent jusqu'à 1500 Hz. Or, on a vu que pour une structure ne respectant plus l'hypothèse de poutres minces, le modèle sous estime les fréquences naturelles. Ainsi, il y a de bonnes raisons de penser que les résultats observés avec le modèle analytique vont être valides sur la plage d'étude du projet, c'est-à-dire jusqu'à 2 ou même 3 kHz.

A partir de maintenant et sauf indication contraire, toute utilisation du modèle analytique à six poutres se fera sur celui à sections non constantes présenté dans ce paragraphe, c'est-à-dire le modèle le plus représentatif de la géométrie de la membrure.

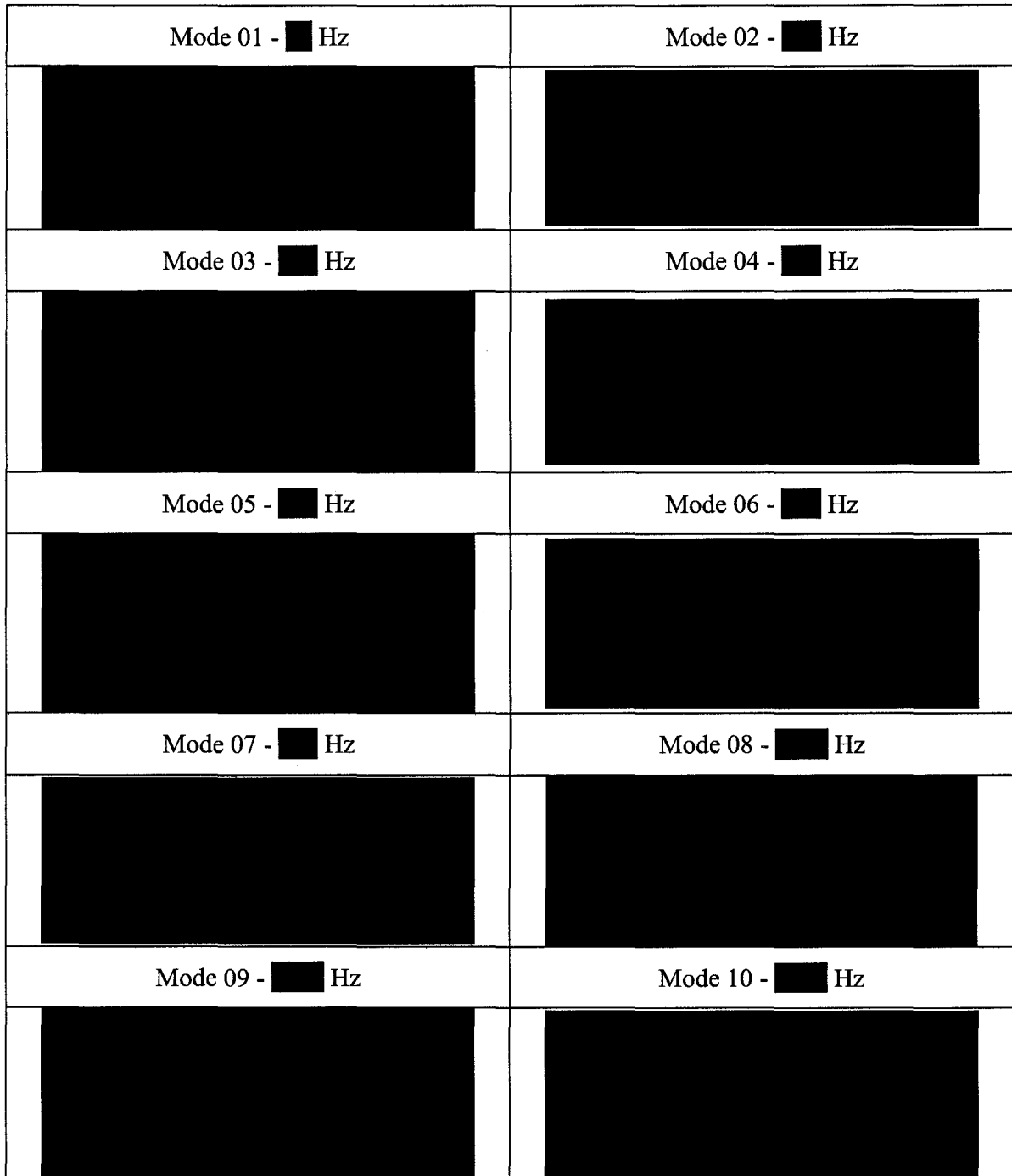


Figure 4.23 : Schéma modal de la structure à six poutres à sections non constantes

Ne disposant pas d'un modèle numérique représentant une membrure sur une poutre, le modèle NASTRAN [BERRY, BÉLANGER et MONET DESCOMBEY, 2005] représentatif du



montage du laboratoire a été utilisé. Ce modèle comprend les deux membrures, maillées par 100000 éléments solides tétraédriques à dix nœuds, et la plaque du montage, maillée par 2500 éléments de plaque triangulaires à six nœuds. Les cinq premiers modes semblant présenter un comportement plan des membrures, sont présentés à la Figure 4.24.






	Vue de Face	Vue de Profil
Mode 02 -  Hz		
Mode 04 -  Hz		
Mode 06 -  Hz		
Mode 09 -  Hz		
Mode 11 -  Hz		

Figure 4.24 : Cinq premiers modes du modèle NASTRAN présentant un comportement plan des membrures

On constate quelques ressemblances de comportement entre les déformées de la Figure 4.23 et celles de la Figure 4.22. Ainsi, le mode 02 du modèle NASTRAN présente le même comportement que le mode 01 du modèle analytique. De même le mode 06 du modèle NASTRAN est assez proche du mode 03 du modèle analytique ; il y a même correspondance au niveau de la fréquence, bien que cela semble vraisemblablement être un hasard, compte tenu de la nature des deux modèles. On notera que le premier mode sous NASTRAN présentant une déformation nette de la membrure apparaît très tôt (mode 04 à 105 Hz) alors que pour le modèle, le premier semble être le neuvième puisqu'il est impossible de dire à première vue si la membrure se déforme ou si elle suit la déformée de la poutre.

#### **4.6 Conclusions**

Le modèle analytique possède ses limites, dont la plus importante est le respect des hypothèses de la théorie des poutres. Sans cela, les fréquences naturelles de la structure modélisée sont très mal évaluées. Par contre, il s'avère que les déformées modales sont relativement bien reconstituées, ce qui est un point crucial pour une bonne implantation des stratégies de contrôle actif.

Lorsque la structure représentée grâce au modèle analytique respecte la théorie des poutres minces, l'ensemble du schéma modal est en accord avec celui obtenu avec un logiciel d'éléments finis. Ainsi, le modèle analytique est capable de fournir le schéma modal plan d'une structure 2D d'une manière tout à fait satisfaisante.

La membrure de la boîte de transmission du [REDACTED] n'est malheureusement pas une structure susceptible de respecter la théorie des poutres minces. Même si les comparaisons avec les modèles NASTRAN laisse apparaître un certain nombre de comportements communs, seules les expérimentations de contrôle actif au laboratoire permettront de finalement juger si le modèle analytique a pu être un outil utile au projet.

## CHAPITRE 5

# UTILISATION DU MODÈLE ANALYTIQUE EN TANT QU'OUTIL POUR LE CONTRÔLE ACTIF OPTIMAL DES VIBRATIONS

Les chapitres précédents ont présenté les capacités et les limites du modèle analytique à fournir le schéma modal plan d'une structure 2D composée de poutres dans laquelle se propagent des ondes d'extension et de flexion plane. Ce dernier chapitre propose une utilisation plus poussée du modèle.

Dans un premier temps, le modèle analytique via le modèle à six poutres va être utilisé pour déterminer la réponse forcée de la structure à une excitation harmonique. Une fois ceci établi, le contrôle actif optimal est entrepris de manière à minimiser les effets de cette perturbation dans la poutre réceptrice par des efforts de contrôle s'appliquant sur les membrures. Dans un premier temps, cette minimisation se fait sur un critère global qui est la vitesse quadratique moyenne dans toute la poutre réceptrice. Puis, un second critère, l'accélération en quelques points de la structure, permet de faire un pas de plus vers la mise en œuvre pratique sur une vraie structure, puisque ceci permet de modéliser l'information que fournirait de vrais accéléromètres sur la structure.

### 5.1 Réponse forcée à une excitation harmonique

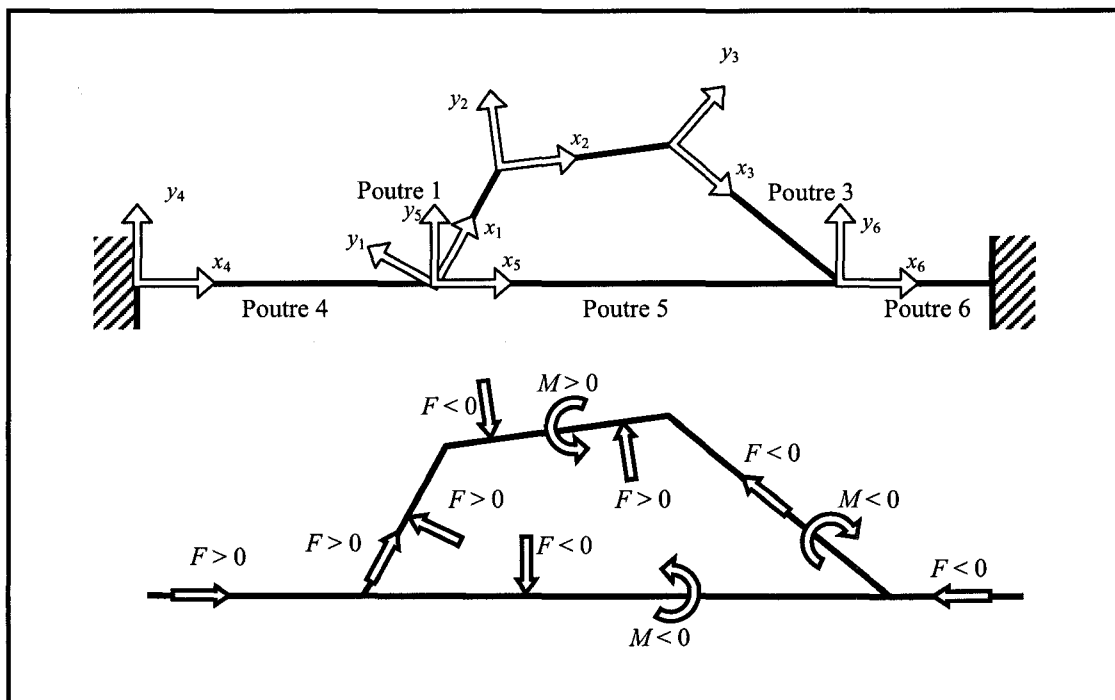
Il s'agit dans cette partie de savoir comment réagit la structure à une excitation harmonique en un point donné ; la réaction de la structure étant ici quantifiée par la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice.

### 5.1.1 Conventions concernant les forces et les moments

Dans le modèle analytique, les forces et les moments sont toujours exprimés dans le repère de la poutre sur laquelle ils s'appliquent. Le signe des forces et des moments dépendra de l'orientation du repère de la poutre.

Une force axiale est positive si elle s'exerce dans le sens des  $x$  croissants et inversement. Une force de flexion est positive si elle s'exerce dans le sens des  $y$  croissants et inversement. Un moment est positif s'il tourne dans le sens trigonométrique et inversement.

La Figure 5.1 présente ces conventions sur le modèle à six poutres.

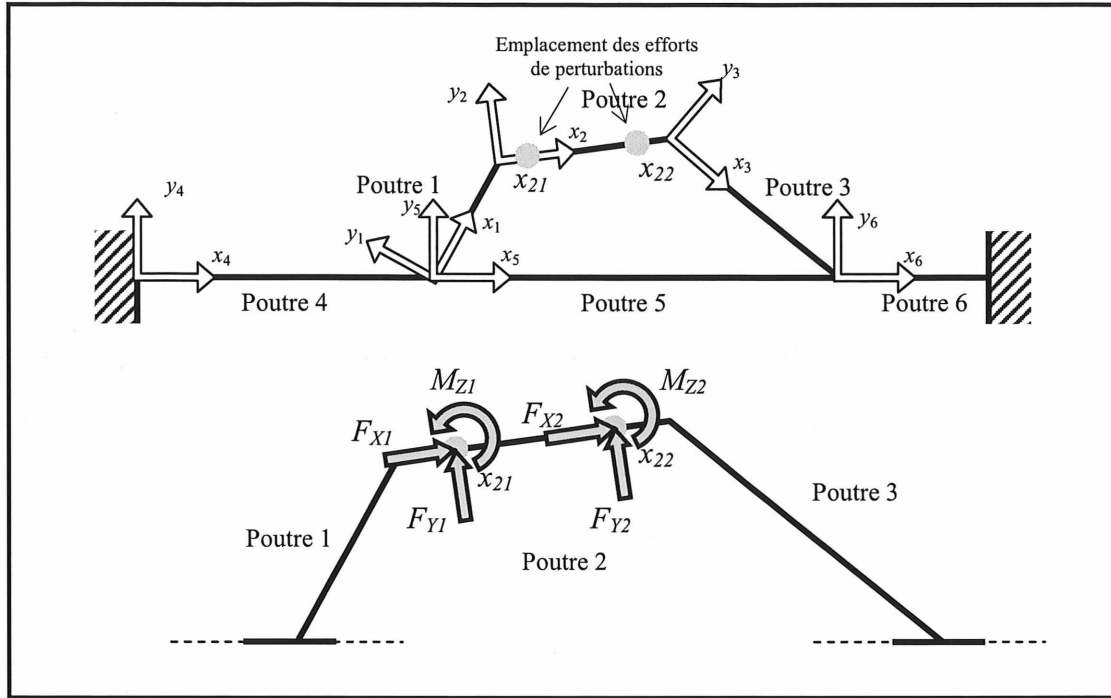


**Figure 5.1 :** Conventions sur les forces et les moments  
Exemples sur la structure à six poutres

### 5.1.2 Ajout de forces primaires ponctuelles sur le modèle à six poutres

Sur le modèle à six poutres, pour respecter les données du problème réel, les forces primaires ou excitatrices, sont placées en deux points, comme le rappelle la Figure 5.2. Ces deux points  $x_{21}$  et  $x_{22}$  valent 0.05 m et  $\blacksquare$  m dans le repère de la poutre 2 d'après les

mesures faites sur le vrai montant et correspondent aux emplacements des plots sur la vraie structure.



**Figure 5.2 : Modèle à six poutres**  
Repères, désignations et forces primaires

Ainsi, si les efforts primaires sont ponctuels, la fonctionnelle de Hamilton en extension et en flexion de la poutre 2 vont devenir celle des expressions 5.1, afin de prendre en compte les efforts axiaux  $F_{X1}$  et  $F_{X2}$ , les efforts de flexions  $F_{Y1}$  et  $F_{Y2}$  et les moments  $M_{Z1}$  et  $M_{Z2}$

$$H_2(u_2) = \underbrace{H_2(u_2)}_{\text{équation 3.4}} + F_{X1}u_2(x_{21}) + F_{X2}u_2(x_{22}) \quad 5.1a$$

$$H_2(v_2) = \underbrace{H_2(v_2)}_{\text{équation 3.7}} + F_{Y1}v_2(x_{21}) + F_{Y2}v_2(x_{22}) + M_{Z1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_{21}) + M_{Z2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_{22}) \quad 5.1b$$

Auparavant, les coefficients de pondération  $q$  étaient calculés en résolvant un problème aux valeurs propres (équation 3.35). Mais ici, la présence de ce terme supplémentaire fait que ces coefficients sont à présent les solutions du système présenté par l'expression 5.2. Les fonctions  $U$  et  $V$  sont respectivement les fonctions de forme choisies pour reconstituer l'extension et la flexion

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & 0 & 0 & D_{34} & 0 & 0 \\ 0 & D_{42} & D_{43} & 0 & D_{45} & D_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ M_{Z1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \\ M_{Z2} \end{Bmatrix} \quad 5.2a$$

$$\text{avec } q_1^e = \begin{Bmatrix} q_{1,1}^e \\ \vdots \\ q_{1,nv_1}^e \end{Bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad D_{31} = \begin{Bmatrix} U_{2,1}(x_{21}) \\ \vdots \\ U_{2,nv_2}(x_{21}) \end{Bmatrix} \quad D_{42} = \begin{Bmatrix} V_{2,1}(x_{21}) \\ \vdots \\ V_{2,nv_2}(x_{21}) \end{Bmatrix} \quad 5.2b$$

$$D_{43} = \begin{Bmatrix} \frac{dV_{2,1}}{dx_2}(x_{21}) \\ \vdots \\ \frac{dV_{2,nv_2}}{dx_2}(x_{21}) \end{Bmatrix} \quad D_{34} = \begin{Bmatrix} U_{2,1}(x_{22}) \\ \vdots \\ U_{2,nv_2}(x_{22}) \end{Bmatrix} \quad D_{45} = \begin{Bmatrix} V_{2,1}(x_{22}) \\ \vdots \\ V_{2,nv_2}(x_{22}) \end{Bmatrix} \quad D_{46} = \begin{Bmatrix} \frac{dV_{2,1}}{dx_2}(x_{22}) \\ \vdots \\ \frac{dV_{2,nv_2}}{dx_2}(x_{22}) \end{Bmatrix}$$

Pour simplifier, on écrira

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \underline{q} = \underline{D}_F \underline{F}_F \quad 5.3$$

Grâce à l'équation 5.3, à chaque fréquence, la déformée de la structure peut être reconstituée puisqu'il est possible de connaître les coefficients  $q$  en fonction des efforts primaires.

### 5.1.3 Vitesse quadratique moyenne

La vitesse quadratique moyenne ou plus précisément vitesse quadratique spatialement moyennée est donnée pour la poutre 1 par les expressions 5.4a (dans le cas de l'extension) et 5.4b (dans le cas de la flexion). La notation \* indiquant le conjugué.

$$\langle \dot{u}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^* dx_1 \quad 5.4a$$

$$\langle \dot{v}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^* dx_1 \quad 5.4b$$

En remplaçant dans ces expressions les valeurs de  $u_1$  et  $v_1$  par leur expression selon Rayleigh Ritz (3.15), on obtient les expressions 5.5

$$\langle \dot{u}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{L_1} \sum_{k=1}^{nu_1} \sum_{h=1}^{nu_1} \dot{q}_{1,k}^e (\dot{q}_{1,h}^e)^* \langle U_{1,k}, U_{1,h} \rangle_0 \quad 5.5a$$

$$\langle \dot{v}_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{L_1} \sum_{k=1}^{nv_1} \sum_{h=1}^{nv_1} \dot{q}_{1,k}^y (\dot{q}_{1,h}^y)^* \langle V_{1,k}, V_{1,h} \rangle_0 \quad 5.5b$$

En écrivant les coefficients  $q$  sous la forme  $q(t) = q e^{j\omega t}$ , on obtient

$$\langle \dot{u}_1^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2L_1} \sum_{k=1}^{nu_1} \sum_{h=1}^{nu_1} q_{1,k}^e (q_{1,h}^e)^* \langle U_{1,k}, U_{1,h} \rangle_0 \quad 5.6a$$

$$\langle \dot{v}_1^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2L_1} \sum_{k=1}^{nv_1} \sum_{h=1}^{nv_1} q_{1,k}^y (q_{1,h}^y)^* \langle V_{1,k}, V_{1,h} \rangle_0 \quad 5.6b$$

Ainsi, il est possible d'écrire la vitesse quadratique moyenne en extension dans la poutre 1 par l'expression matricielle 5.7. L'indice  $H$  représentant la transposition complexe conjuguée :  $A^H = conj(A^T)$

$$\langle \dot{u}_1^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix}^H \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix} \quad 5.7a$$

$$\text{avec } S_1 = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} \langle U_{1,1}, U_{1,1} \rangle_0 & \dots & \langle U_{1,1}, U_{1,m_1} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle U_{1,m_1}, U_{1,1} \rangle_0 & \dots & \langle U_{1,m_1}, U_{1,m_1} \rangle_0 \end{bmatrix} \text{ et } 0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad 5.7b$$

On cherche à obtenir la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice en flexion et en extension, c'est-à-dire

$$J = \langle \dot{u}_4^2 \rangle + \langle \dot{v}_4^2 \rangle + \langle \dot{u}_5^2 \rangle + \langle \dot{v}_5^2 \rangle + \langle \dot{u}_6^2 \rangle + \langle \dot{v}_6^2 \rangle \quad 5.8a$$

$$J = \frac{\omega^2}{2} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix}^H \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix} \quad 5.8b$$



avec

$$\begin{aligned}
 S_7 &= \frac{1}{L_4} \begin{bmatrix} \langle U_{4,1}, U_{4,1} \rangle_0 & \cdots & \langle U_{4,1}, U_{4,mu_4} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle U_{4,mu_4}, U_{4,1} \rangle_0 & \cdots & \langle U_{4,mu_4}, U_{4,mu_4} \rangle_0 \end{bmatrix} & S_8 &= \frac{1}{L_4} \begin{bmatrix} \langle V_{4,1}, V_{4,1} \rangle_0 & \cdots & \langle V_{4,1}, V_{4,mv_4} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V_{4,mv_4}, V_{4,1} \rangle_0 & \cdots & \langle V_{4,mv_4}, V_{4,mv_4} \rangle_0 \end{bmatrix} \\
 S_9 &= \frac{1}{L_5} \begin{bmatrix} \langle U_{5,1}, U_{5,1} \rangle_0 & \cdots & \langle U_{5,1}, U_{5,mu_5} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle U_{5,mu_5}, U_{5,1} \rangle_0 & \cdots & \langle U_{5,mu_5}, U_{5,mu_5} \rangle_0 \end{bmatrix} & S_{10} &= \frac{1}{L_5} \begin{bmatrix} \langle V_{5,1}, V_{5,1} \rangle_0 & \cdots & \langle V_{5,1}, V_{5,mv_5} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V_{5,mv_5}, V_{5,1} \rangle_0 & \cdots & \langle V_{5,mv_5}, V_{5,mv_5} \rangle_0 \end{bmatrix} \\
 S_{11} &= \frac{1}{L_6} \begin{bmatrix} \langle U_{6,1}, U_{6,1} \rangle_0 & \cdots & \langle U_{6,1}, U_{6,mu_6} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle U_{6,mu_6}, U_{6,1} \rangle_0 & \cdots & \langle U_{6,mu_6}, U_{6,mu_6} \rangle_0 \end{bmatrix} \\
 S_{12} &= \frac{1}{L_6} \begin{bmatrix} \langle V_{6,1}, V_{6,1} \rangle_0 & \cdots & \langle V_{6,1}, V_{6,mv_6} \rangle_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle V_{6,mv_6}, V_{6,1} \rangle_0 & \cdots & \langle V_{6,mv_6}, V_{6,mv_6} \rangle_0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.8c}$$

On obtient donc

$$J = \frac{\omega^2}{2} \underline{q}^H \underline{S} \underline{q} \tag{5.9}$$

Et d'après l'équation 5.3, on obtient

$$J = \frac{\omega^2}{2} \underline{F}_P^H \underline{D}_P^H \left( \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \right)^H \underline{S} \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \underline{D}_P \underline{F}_P \tag{5.10}$$

Si dans la matrice  $S$  on annule les sous matrices  $S_7$ ,  $S_9$  et  $S_{11}$ , on obtient  $J_Y$  la vitesse quadratique moyenne en flexion dans la poutre réceptrice. Réciproquement, si on annule les matrices  $S_8$ ,  $S_{10}$  et  $S_{12}$ , on obtient  $J_X$  la vitesse quadratique moyenne en extension dans la poutre réceptrice.

#### 5.1.4 Comparaison avec ANSYS 8.1

On considère le problème de la Figure 5.3 où un effort de flexion unitaire est appliqué en  $x_{2l}$ . Le modèle à six poutres à section constante, décrit en 5.2.2, est utilisé et on calcule les vitesses quadratiques moyennes  $J_X$  et  $J_Y$  de la poutre réceptrice à l'aide des matrices de masse et de raideur obtenues et de l'expression 5.10.

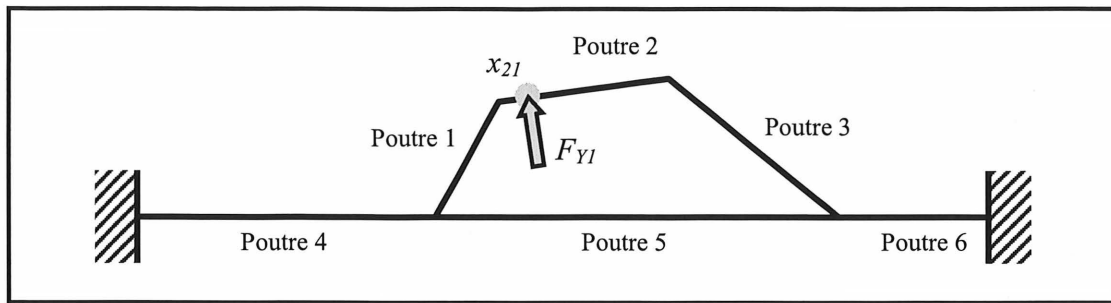


Figure 5.3 : Excitation simple de la structure à six poutres par une force de flexion

Avec ANSYS 8.1, on récupère la valeur de la vitesse sur la fibre neutre de la poutre réceptrice. De cette manière, on calcule simplement la vitesse quadratique moyenne en flexion et en extension.

La Figure 5.4 présente la vitesse quadratique moyenne en extension et en flexion dans la poutre réceptrice, calculées par ANSYS 8.1 et le modèle analytique.

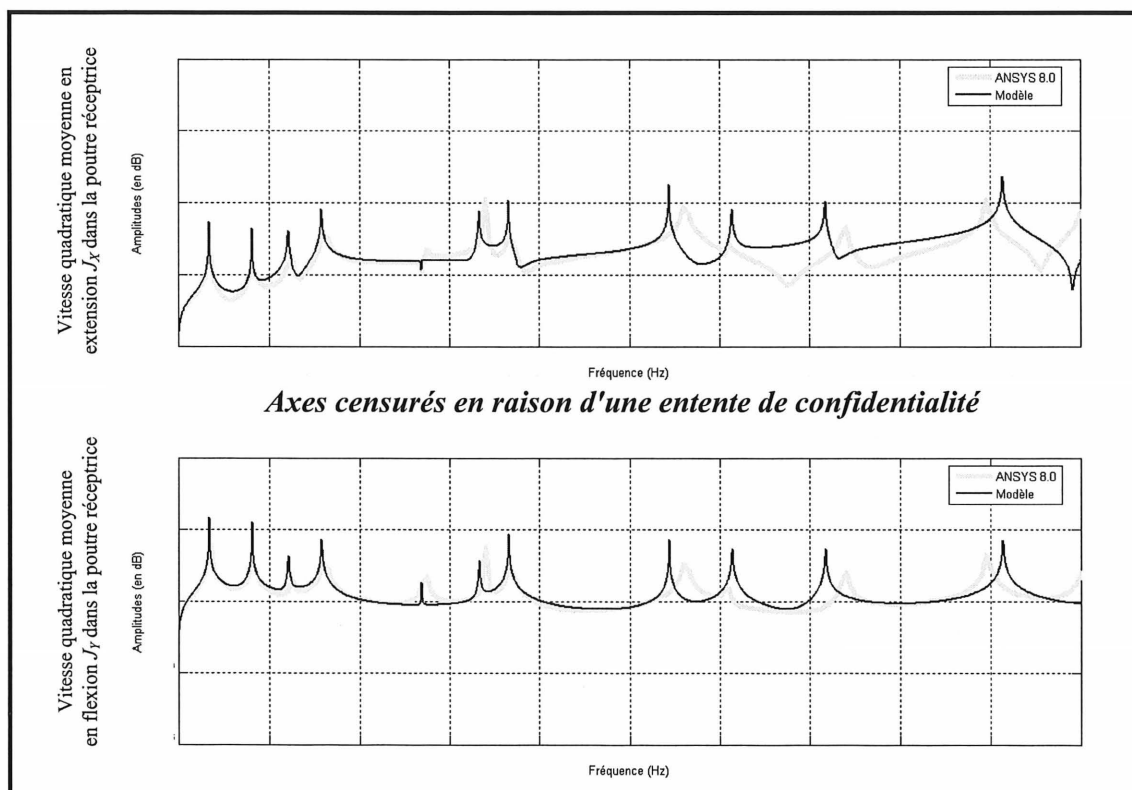


Figure 5.4 : Vitesses quadratiques moyennes en extension (en haut) et en flexion (en bas) obtenues en réponse forcée par ANSYS 8.1 (vert/épais) et le modèle (bleu/fine)

Il apparaît que le modèle donne des résultats très proches de ceux d'ANSYS 8.1. En effet, jusqu'à [REDACTED] Hz, les courbes sont presque superposées. Au-delà, on constate que pour le tracé de la vitesse quadratique en flexion, seules les positions des pics sont différentes, tandis que pour celle en extension, passé [REDACTED] Hz, les résultats du modèle sont plus médiocres. Ceci peut s'expliquer par le fait que la flexion dans la poutre réceptrice est reconstruite avec une fonction de forme de plus que l'extension (sept contre six). Au-delà de [REDACTED] Hz, le modèle analytique ne recoupe plus les résultats d'ANSYS 8.1, ce qui est normal puisque le onzième mode du modèle à [REDACTED] Hz est déjà mal reconstitué par rapport à celui d'ANSYS 8.1 (Figure 4.22). Cette simulation a été faite avec un amortissement structural nul (module d'Young réel). Les différences d'amplitudes observées au niveau des pics de résonance provient de l'échantillonnage : un point tous les 5 Hz pour ANSYS 8.1 et un points tous les 1 Hz pour le modèle.

### 5.1.5 Réponses forcées aux six forces primaires

Pour chaque force primaire  $F_{X1}$ ,  $F_{X2}$ ,  $F_{Y1}$ ,  $F_{Y2}$ ,  $M_{Z1}$  et  $M_{Z2}$  la réponse forcée du modèle à six poutres représentatif de la membrure va être présenté aux Figures 5.5 et 5.6.

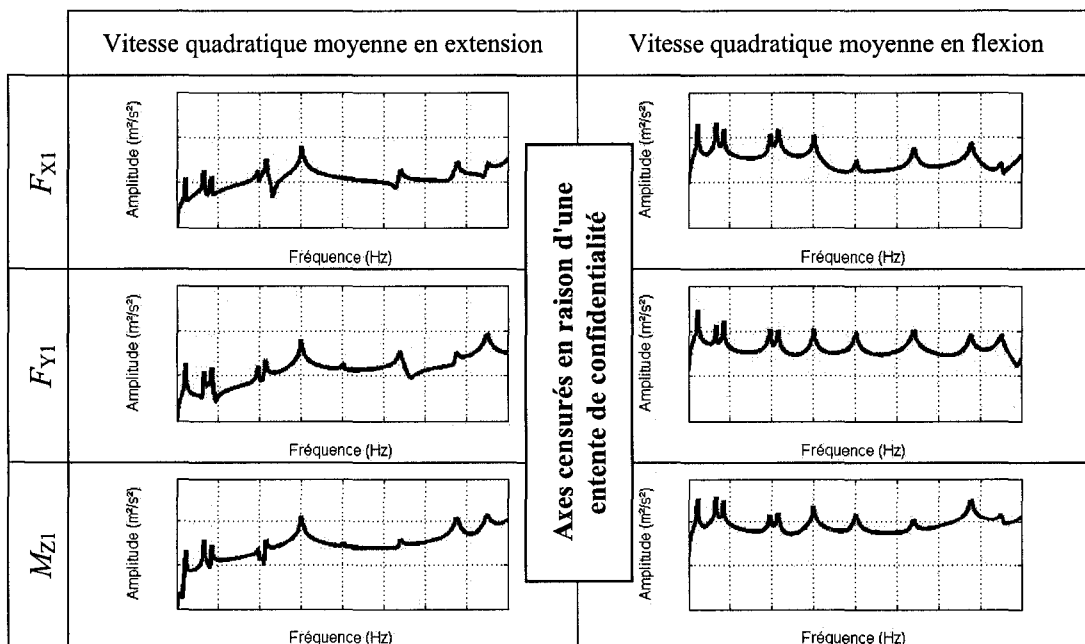
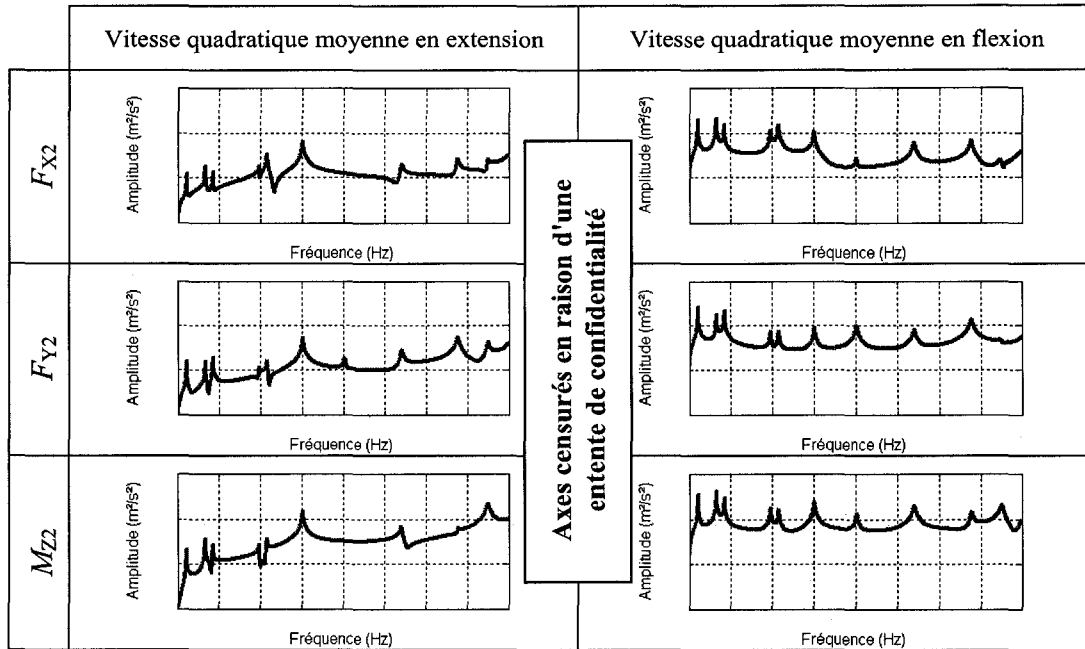


Figure 5.5 : Réponse forcée du modèle à six poutres à une excitation en  $x_{21}$   
Vitesse quadratiques moyennes en extension et en flexion dans la poutre réceptrice



**Figure 5.6 :** Réponse forcée du modèle à six poutres à une excitation en  $x_{22}$   
Vitesse quadratiques moyennes en extension et en flexion dans la poutre réceptrice

Ces simulations ont été réalisées avec un effort unitaire et un amortissement structural  $\eta$  de 0.01 (on considère donc un module d'Young complexe  $\tilde{E} = (1 + j\eta)E$  pour toutes les poutres de la structure). On constate que la flexion domine, surtout à basse fréquence.

## 5.2 Contrôle actif optimal de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice

A présent que le comportement de la structure, lorsqu'elle est soumise à un effort excitateur en  $x_{21}$  ou  $x_{22}$ , est connu, le travail de contrôle peut commencer.

### 5.2.1 Minimisation de la vitesse quadratique moyenne

Le comportement d'une structure lorsqu'elle est soumise à un ou plusieurs efforts primaires ponctuels est déterminé par l'équation 5.3. Afin de contrôler ces efforts primaires, des efforts secondaires sont appliqués sur la structure. L'équation 5.3 devient l'équation 5.11,

le terme  $\underline{D}_S \underline{F}_S$  représentant les efforts secondaires de la même façon que  $\underline{D}_P \underline{F}_P$  représentait les efforts primaires.

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \underline{q} = \underline{D}_P \underline{F}_P + \underline{D}_S \underline{F}_S \quad 5.11$$

Si le critère à minimiser  $J_{VQM}$  est une vitesse quadratique moyenne, l'expression 5.10 devient à présent

$$J_{VQM} = \frac{\omega^2}{2} \left( \underline{F}_P^H \underline{D}_P^H + \underline{F}_S^H \underline{D}_S^H \right) \left( [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \right)^H \underline{S} [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \left( \underline{D}_P \underline{F}_P + \underline{D}_S \underline{F}_S \right) \quad 5.12$$

Il est alors possible de récrire le système 5.12 pour faire apparaître une forme quadratique Hermitienne.

$$J_{VQM} = \underline{F}_S^H \underline{A} \underline{F}_S + \underline{B}^H \underline{F}_S + \underline{F}_S^H \underline{B} + C \quad 5.13a$$

avec 
$$A = \frac{\omega^2}{2} \underline{D}_S^H \left( [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \right)^H \underline{S} [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \underline{D}_S \quad 5.13b$$

$$B = \frac{\omega^2}{2} \underline{D}_S^H \left( [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \right)^H \underline{S} [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \underline{D}_P \underline{F}_P \quad 5.13c$$

$$C = \frac{\omega^2}{2} \underline{F}_P^H \underline{D}_P^H \left( [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \right)^H \underline{S} [\underline{K} - \omega^2 \underline{M}]^{-1} \underline{D}_P \underline{F}_P \quad 5.13d$$

Il existe un effort de contrôle optimal  $X_0$  qui rend  $J$  minimale. Il est défini par

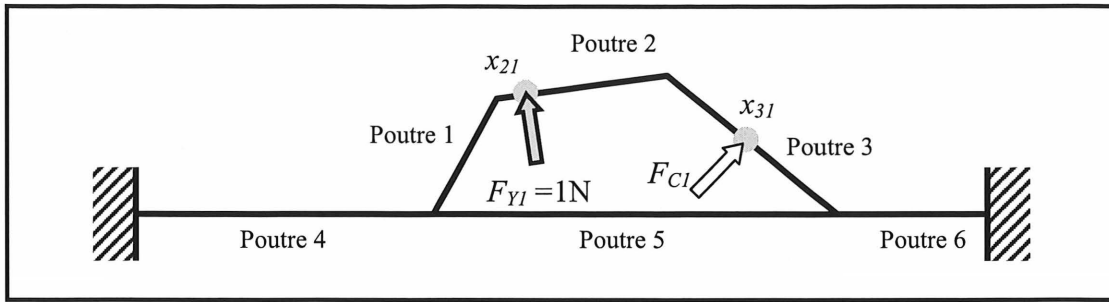
$$X_0 = -A^{-1}B \quad 5.14$$

et  $J_{VQM}$  vaut alors

$$J_{VQM} = \underline{X}_0^H \underline{A} \underline{X}_0 + \underline{B}^H \underline{X}_0 + \underline{X}_0^H \underline{B} + C = C - \underline{B}^H \underline{A}^{-1} \underline{B} \quad 5.15$$

### 5.2.2 Contrôle actif avec une force de contrôle

On se propose de contrôler une force excitatrice avec une force de contrôle. Dans l'exemple de la Figure 5.7, la force primaire est une force de flexion en  $x_{2l}$  et une force secondaire de flexion placée sur la poutre 3 en  $x_{3l} = L_3/2$  aura pour but de minimiser la vitesse quadratique moyenne totale  $J$  dans la poutre réceptrice.



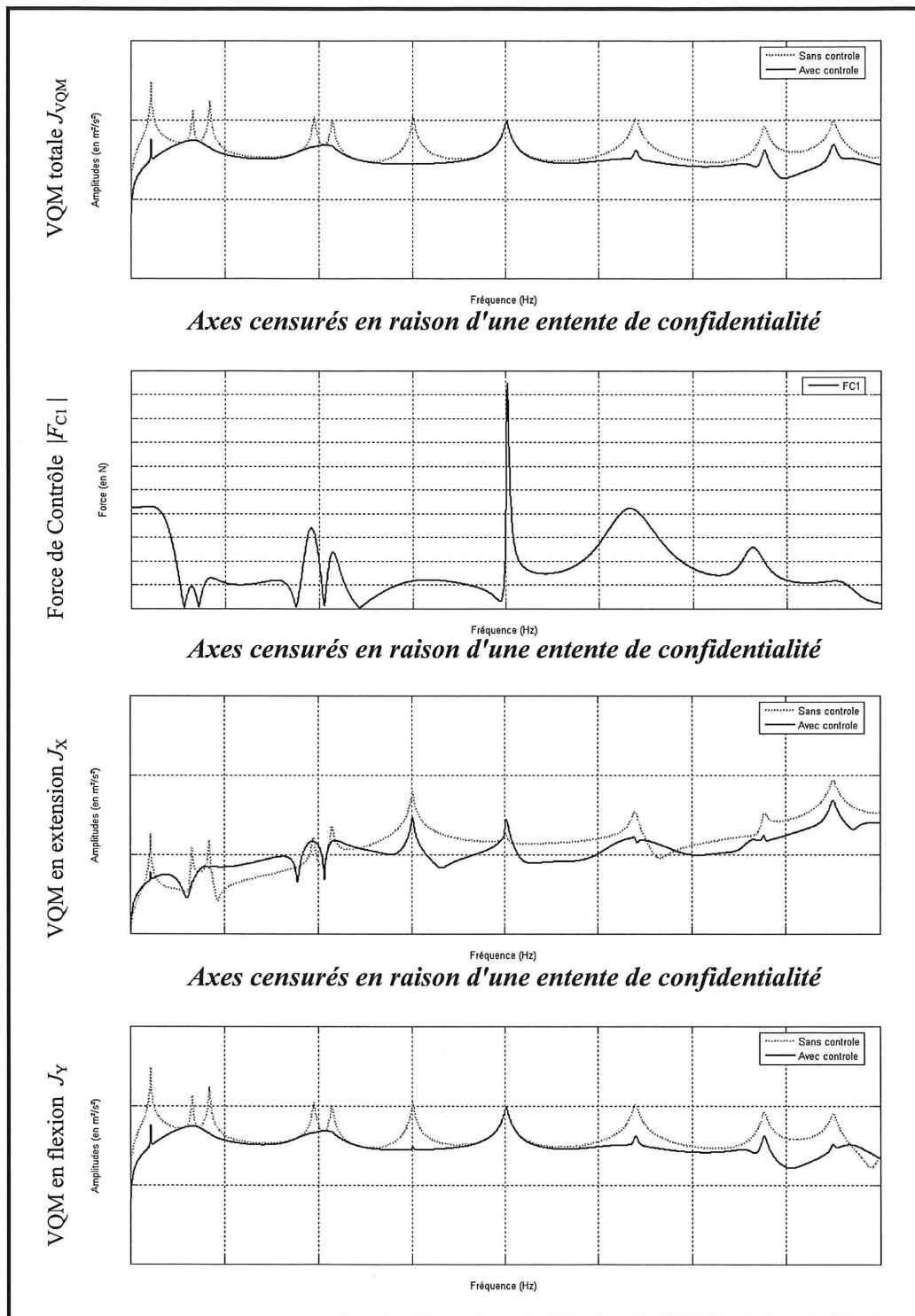
**Figure 5.7 :** Contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice par une force de contrôle en flexion appliquée au milieu de la poutre 3, la structure étant excitée par une force de flexion unitaire au point  $x_{21}$

De l'équation 5.11, on obtient le système matriciel suivant

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix} = \underline{D}_P \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{Y1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + d_{61} F_{C1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 5.16a$$

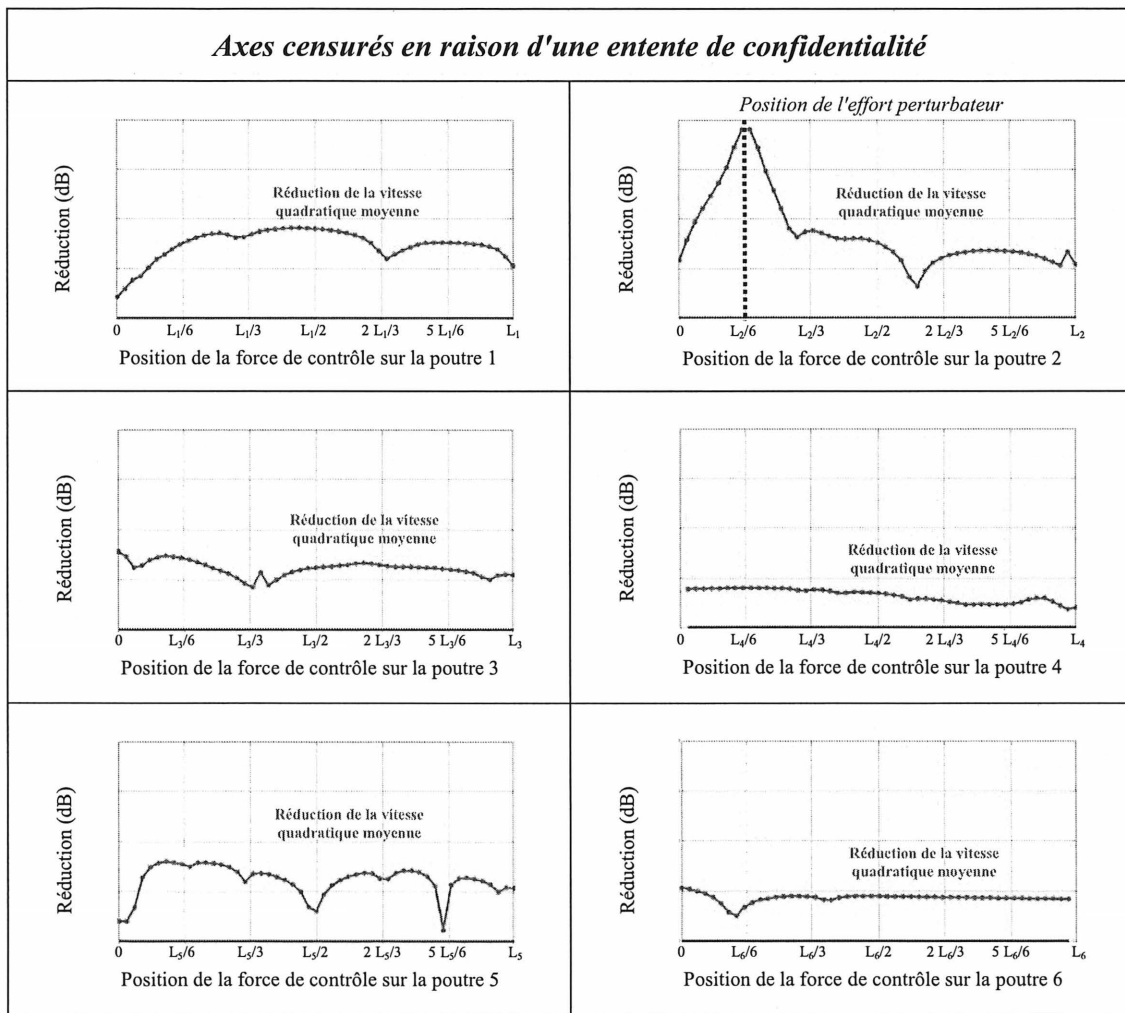
$$\text{avec } q_1^e = \begin{Bmatrix} q_{1,1}^e \\ \vdots \\ q_{1,m_1}^e \end{Bmatrix} \quad 0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad d_{61} = \begin{Bmatrix} V_{3,1}(x_{31}) \\ \vdots \\ V_{3,m_3}(x_{31}) \end{Bmatrix} \quad 5.16b$$

En utilisant la méthodologie du paragraphe 5.2.1, on obtient l'amplitude optimale  $X_0$  de la force de contrôle  $F_{C1}$  à utiliser. Il est alors possible de tracer la vitesse quadratique moyenne en flexion et en extension dans la poutre réceptrice avec le contrôle actif ainsi que l'amplitude de la force de contrôle en fonction de la fréquence, ce qui est présenté à la Figure 5.8. Le dixième mode du modèle à six poutres étant à [ ] Hz (dernier mode correctement reconstitué), il est possible de choisir une plage d'étude de 0 à [ ] Hz.



**Figure 5.8 :** Exemple de contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne (VQM) dans la poutre réceptrice par une force de contrôle en flexion unitaire sur la poutre 3. De haut en bas, VQM totale (flexion et extension), module de l'amplitude de la force de contrôle, VQM en extension seulement et VQM en flexion seulement

Pour cet exemple, le niveau de réduction global de 0 à [ ] Hz est de [ ] dB sur la vitesse quadratique moyenne totale  $J$  dans la poutre réceptrice (somme de celle en flexion  $J_Y$  et en extension  $J_X$ ). On constate qu'avec contrôle  $J_X$  atteint à plusieurs moments des niveaux supérieurs à ceux sans contrôle. En fait, l'extension de la poutre réceptrice est peu sollicitée par rapport à la flexion et donc contrôler  $J$  revient à contrôler  $J_Y$ . Pour un seul effort de contrôle, le modèle analytique est capable de déterminer sa position optimale. La Figure 5.9 présente la réduction globale obtenue par une force de contrôle en flexion sur les six poutres du modèle.



**Figure 5.9 :** Réduction globale de la vitesse quadratique moyenne en fonction de sa position sur la poutre  
 En haut à gauche, sur la poutre 1, en haut à droite, poutre 2, au centre à gauche, poutre 3  
 Au centre à droite, poutre 4, en bas à gauche, poutre 5, en bas à droite, poutre 6

*L'effort perturbateur est une force de flexion de 1N agissant en  $x_{21}$  sur la poutre 2*



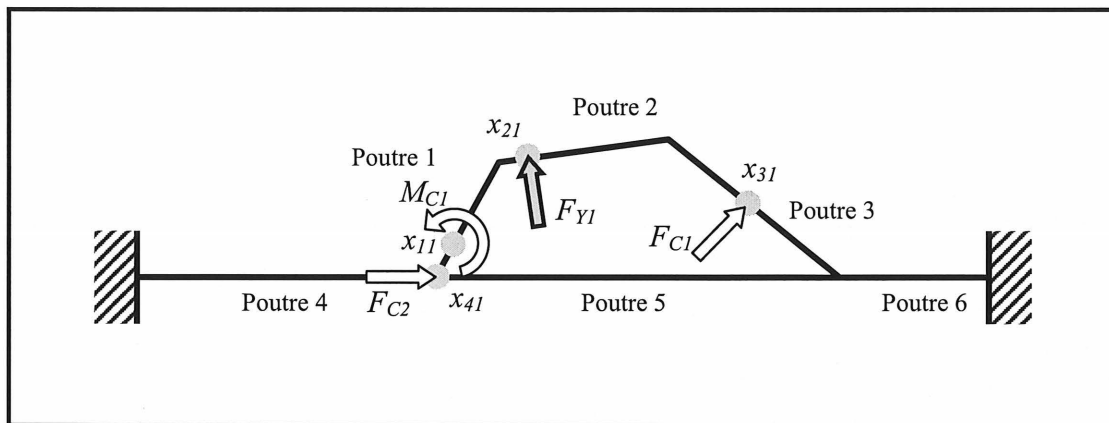
On vérifie bien que la meilleure position pour une force de contrôle  $F_{C1}$  est d'être sur la poutre 2 à l'endroit où la force primaire  $F_{Y1}$  s'applique ; la réduction du critère  $y$  est de loin la meilleure.

### 5.2.3 Contrôle actif avec plusieurs forces de contrôle

Dans ce cas le problème change un peu. Dans l'exemple de la Figure 5.10, la force primaire est toujours une force de flexion en  $x_{21}$  mais on utilise trois efforts secondaires :

- une force de flexion  $F_{C1}$  de 1 N placée sur la poutre 3 en  $x_{31} = L_3/2$ ,
- une force axiale  $F_{C2}$  de 1 N sur la poutre 4 en  $x_{41} = L_4$
- un moment  $M_{C1}$  de 1 Nm sur la poutre 1 en  $x_{31} = L_1/3$ .

Cet exemple a pour seul but d'illustrer simplement la prise en compte des trois types d'efforts. La minimisation la vitesse quadratique moyenne totale  $J$  dans la poutre réceptrice reste l'objectif.



**Figure 5.10 :** Contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice par trois efforts de contrôle, la structure étant excitée par une force de flexion au point  $x_{21}$

De l'équation 5.11, on obtient le système matriciel suivant

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix} = \underline{D}_p \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{Y1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{C1} \\ F_{C2} \\ M_{C1} \end{Bmatrix} \quad 5.17a$$

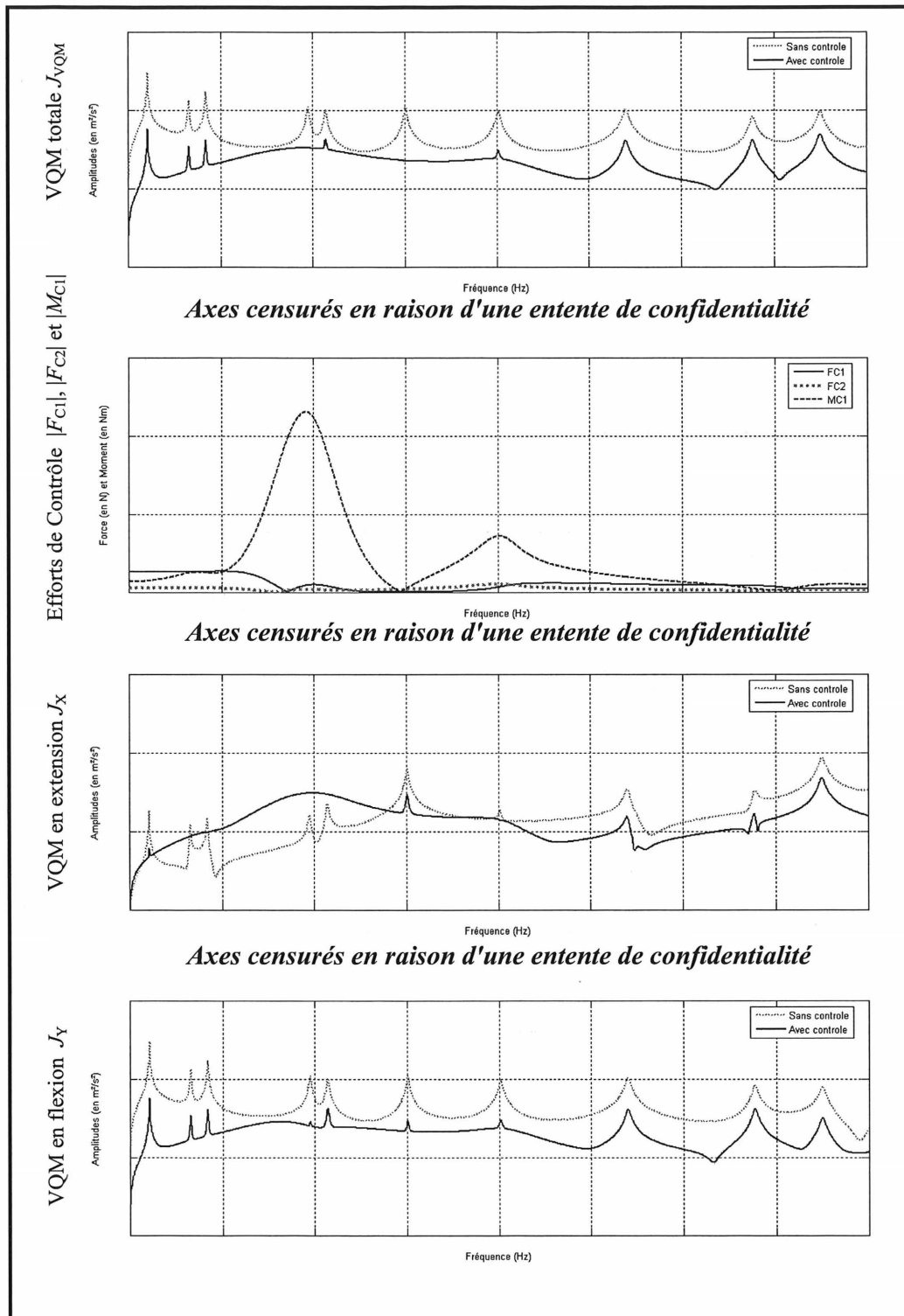
$$\text{avec } d_{61} = \begin{Bmatrix} V_{3,1}(x_{31}) \\ \vdots \\ V_{3,nv_3}(x_{31}) \end{Bmatrix} \quad d_{72} = \begin{Bmatrix} U_{4,1}(x_{41}) \\ \vdots \\ U_{4,nu_4}(x_{41}) \end{Bmatrix} \quad d_{23} = \begin{Bmatrix} \frac{dV_{1,1}}{dx_1}(x_{11}) \\ \vdots \\ \frac{dV_{1,mv_1}}{dx_1}(x_{11}) \end{Bmatrix} \quad 5.17b$$

Cette fois  $X_0$  sera un vecteur colonne à trois lignes.

$$X_0 = \begin{Bmatrix} F_{C1}^{optimal} \\ F_{C2}^{optimal} \\ M_{C1}^{optimal} \end{Bmatrix} \quad 5.18$$

Comme précédemment, il est possible de tracer la vitesse quadratique moyenne totale  $J$  ainsi que l'amplitude des efforts de contrôle. Ceci est présenté à la Figure 5.11.

La réduction globale est cette fois de ■ dB. On constate que l'effort de contrôle axial  $F_{C2}$  nécessite une amplitude importante autour de ■ Hz, ce qui est normal puisque les déformées présentent un nœud pour l'extension vers cette fréquence.



**Figure 5.11 :** Exemple de contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne (VQM) dans la poutre réceptrice par trois efforts de contrôle. De haut en bas, VQM totale (flexion et extension), module des amplitudes des efforts de contrôle, VQM en extension seulement et VQM en flexion seulement

## 5.2.4 Stratégies de contrôle

Les exemples précédents s'appliquaient certes sur le modèle à six poutres mais ils étaient surtout employés pour illustrer le contrôle actif. Dans ce paragraphe les configurations les plus à même d'être utilisées sur le montage du laboratoire vont être présentées.

Placer des efforts de contrôle sur les poutres 4, 5 ou 6 n'est pas vraiment intéressant, puisque les résultats obtenus avec le modèle seront difficilement transposables sur le montage du laboratoire, où la structure réceptrice est une plaque et non une poutre.

Les poutres 1 et 3 sont des chemins obligatoires pour la transmission des vibrations jusque dans la cabine. Aussi y appliquer des efforts de contrôle est naturel. La poutre 2 par contre est d'une part la plus rigide de la membrure et d'autre part les points d'application des efforts excitateurs sont de part et d'autres de la poutre, aussi est-elle moins intéressante pour recevoir des efforts de contrôle. Un autre emplacement intéressant est le point d'ancrage entre les poutres 1 et 3 et la structure réceptrice.

Dans la bande de fréquence de validité du modèle (0-████ Hz), les déformations en flexions des poutres 1 et 3 sont très simples et ne présentent pas de nœuds ce qui va permettre plus de flexibilité sur l'emplacement des efforts de contrôle.

Quatre positions sur la structure ont été choisies pour y appliquer les efforts de contrôles unitaires (1 N ou 1 Nm). Comme le présente la Figure 5.12, ce sont les milieux des poutres 1 et 3 et les extrémités non encastrées des poutres 4 et 6.

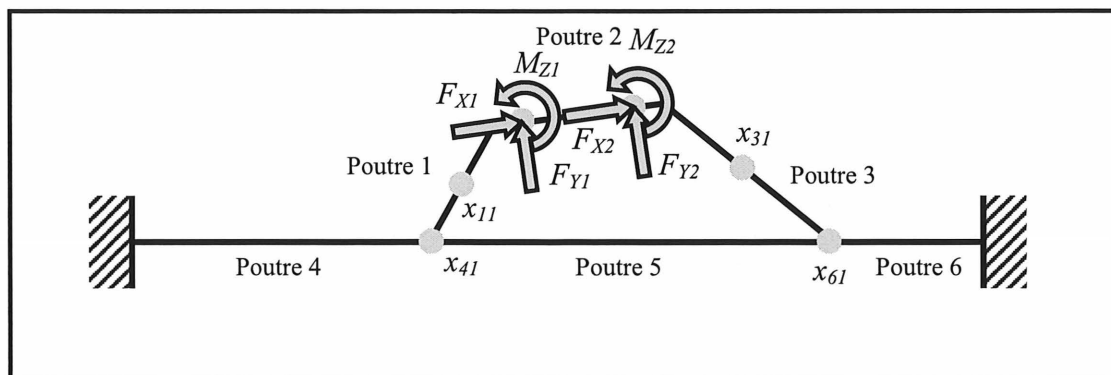


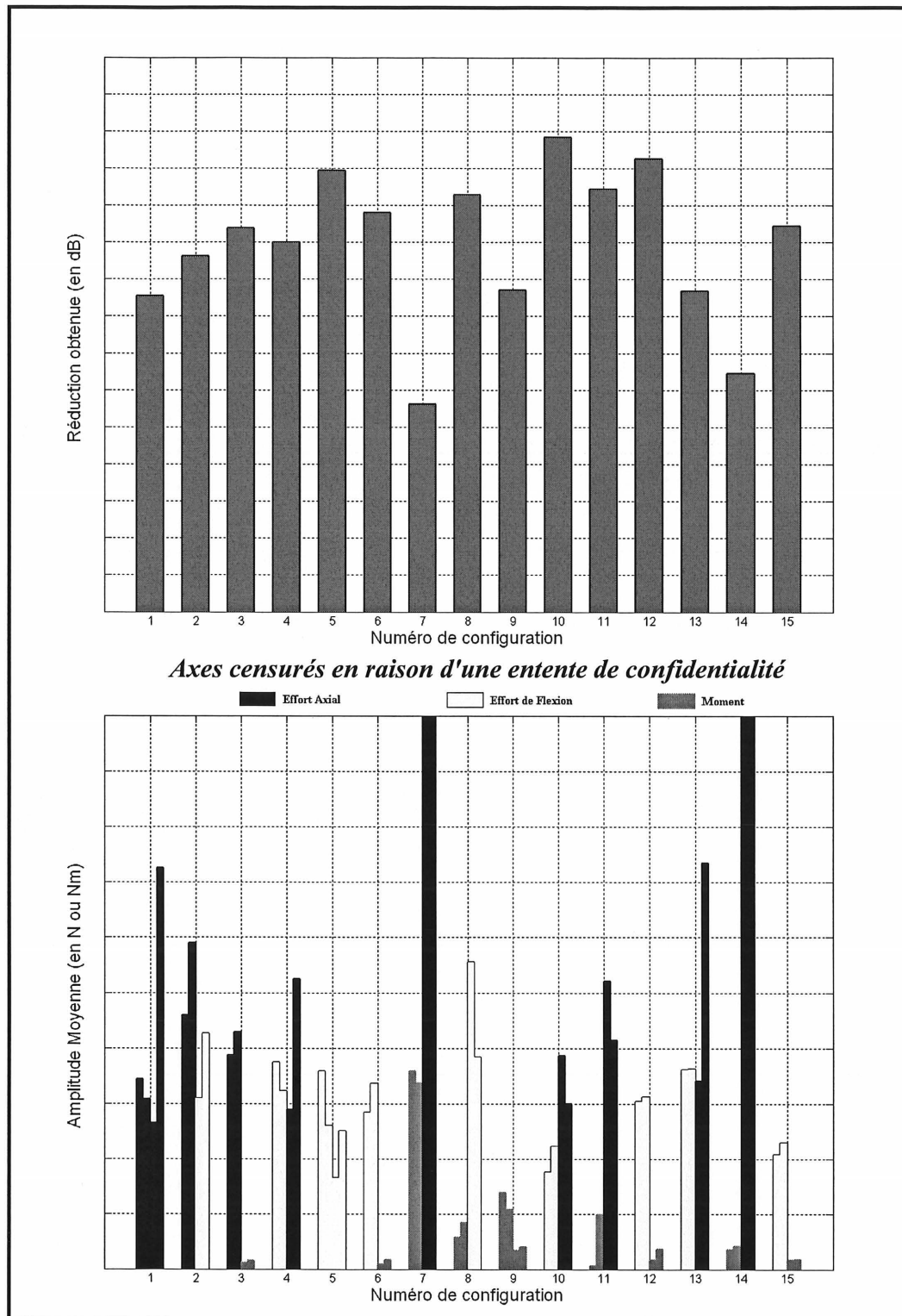
Figure 5.12 : Points d'application des forces de contrôle sur le modèle à six poutres

Les efforts de contrôle vont être appliqués par paire : s'il y a un effort en  $x_{11}$  il y en aura un de même nature en  $x_{31}$ . De même pour  $x_{41}$  et  $x_{61}$ . Une paire appliquera un contrôle soit sur les poutres du montant soit à leurs attaches. Les efforts perturbateurs appliqués sur la poutre 2 sont transmis dans la poutre réceptrice en se propageant par les poutres 1 et 3. Appliquer les efforts par paire permet d'influer simultanément sur les deux chemins de transmission des vibrations. On se propose de déterminer la combinaison de deux paires la plus efficace. Il y a quinze combinaisons possibles, regroupées au Tableau 5.1.

Numéro de la combinaison	Effort de contrôle en	
	$x_{11}$ et $x_{31}$	$x_{41}$ et $x_{61}$
1	Extension	Extension
2	Moment	Moment
3	Flexion	Flexion
4	Extension	Moment
5	Moment	Extension
6	Extension	Flexion
7	Flexion	Extension
8	Flexion	Moment
9	Moment	Flexion
10	Flex/Ext	-
11	Mom/Ext	-
12	Flex/Mom	-
13	-	Flex/Ext
14	-	Mom/Ext
15	-	Flex/Mom

**Tableau 5.1** : Nature des quinze combinaisons à deux paires d'efforts de contrôle

La Figure 5.13 présente la réduction moyenne entre 0 et [ ] Hz obtenue en employant chaque combinaison ainsi que l'amplitude moyenne de chaque effort de contrôle de chaque combinaison. Huit des quinze combinaisons assurent une réduction d'au moins [ ] dB, mais une seule se démarque réellement, la configuration 10 assurant [ ] dB de réduction. Il semble que placer les forces de contrôle sur les poutres 1 et 3 soit le choix le plus judicieux puisque les configurations 10, 11 et 12 entraînent des réductions de [ ], [ ] et [ ] dB alors que les configurations 13, 14 et 15 dont les forces de contrôles sont sur les attaches sont moins efficaces. L'étude des amplitudes des efforts n'est probante que pour éliminer les configurations 7 et 14. La combinaison 10, la plus intéressante est décrite à la Figure 5.14.



**Figure 5.13 :** Efficacité des combinaisons à deux paires d'effort de contrôle.  
 En haut, réduction moyenne de la vitesse quadratique moyenne  
 En bas, amplitudes moyennes des efforts de contrôle

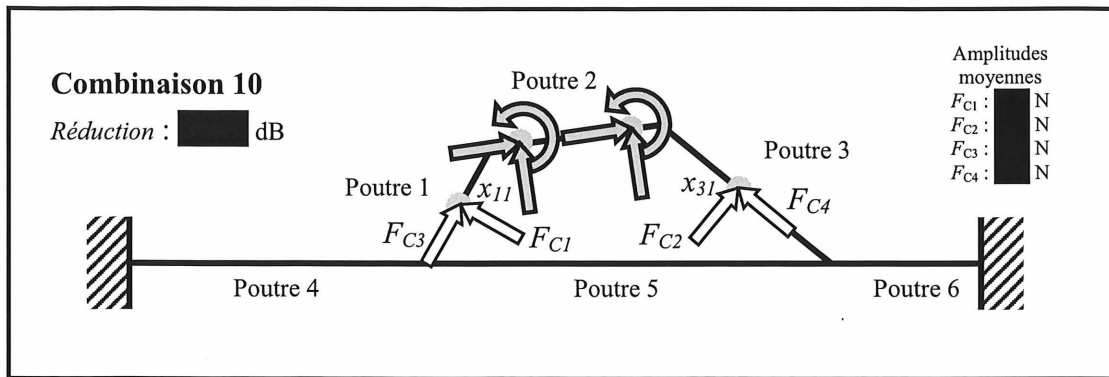


Figure 5.14 : Présentation de la plus efficace combinaison de contrôle actif de la vitesse quadratique moyenne avec deux paires d'efforts de contrôle

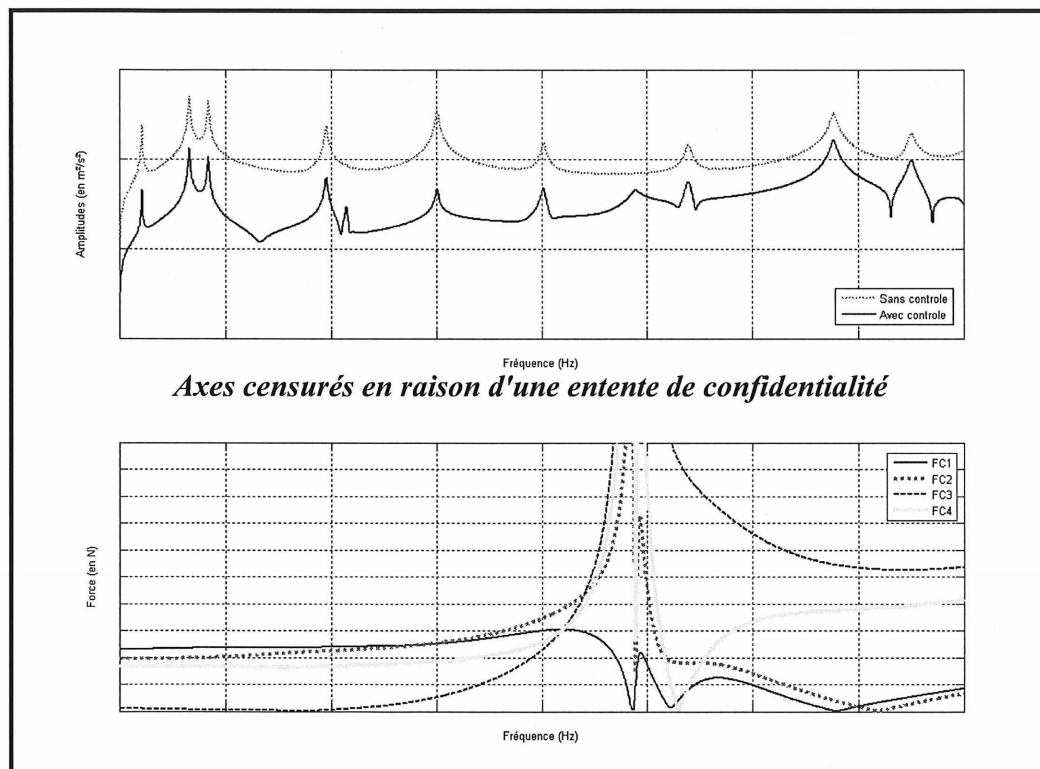


Figure 5.15 : Évolution de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice et des amplitudes des efforts de contrôle pour la configuration 10

Sur la Figure 5.15, où sont regroupés la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice et les amplitudes des efforts de contrôles, on constate que vers ■■■ Hz l'un des actionneurs doit se trouver sur un nœud modal, ce qui exige plus de force à injecter. Jusqu'à ■■■ Hz, on constate que les efforts de contrôle évoluent lentement en fonction de la fréquence.

### 5.3 Critère de minimisation local

Jusqu'à présent, le critère de minimisation, la vitesse quadratique moyenne, était global dans le sens où ce critère balayait toute la poutre réceptrice. Dans la réalité, il n'est pas facile en pratique de pouvoir obtenir ce genre d'information. Cette partie présente la manière d'intégrer dans le modèle un critère donnant une information locale, comme une accélération en un point précis de la structure.

#### 5.3.1 Expression générale du critère à minimiser

On se propose donc d'utiliser une accélération locale comme critère de minimisation. En réalité, le module au carré de l'accélération sera employé, afin de pouvoir construire une forme quadratique Hermitienne. L'accélération quadratique dans l'axe de la poutre en un point  $x_{11}$  s'écrit

$$\begin{aligned} |\ddot{u}_1(x_{11})|^2 &= \left( \sum_{k=1}^{n_u} \ddot{q}_{1,k}^e U_{1,k}(x_{11}) \right) \left( \sum_{h=1}^{n_u} \ddot{q}_{1,h}^e U_{1,h}(x_{11}) \right)^* \\ &= \omega^4 \sum_{k=1}^{n_u} \sum_{h=1}^{n_u} q_{1,k}^e (q_{1,k}^e)^* U_{1,k}(x_{11}) U_{1,h}(x_{11}) \end{aligned} \quad 5.19$$

De la même manière, on calculerait l'accélération quadratique normale à l'axe de la poutre  $|\ddot{v}_1(x_{11})|^2$  ou même l'accélération quadratique en rotation  $\left| \frac{d\dot{v}_1}{dx_1}(x_{11}) \right|^2$



$$|\ddot{u}_1(x_{11})|^2 = \omega^4 \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{Bmatrix} \quad 5.20a$$

$$\text{avec } \Gamma_{11} = \begin{bmatrix} U_{1,1}(x_{11})U_{1,1}(x_{11}) & \cdots & U_{1,1}(x_{11})U_{1,m_1}(x_{11}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{1,m_1}(x_{11})U_{1,1}(x_{11}) & \cdots & U_{1,m_1}(x_{11})U_{1,m_1}(x_{11}) \end{bmatrix} \text{ et } 0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad 5.20b$$

De la même manière que pour la vitesse quadratique moyenne, on peut considérer plusieurs accélérations quadratiques. Par exemple, si on veut calculer la somme des accélérations relevées par les accéléromètres disposés comme à la Figure 5.16,

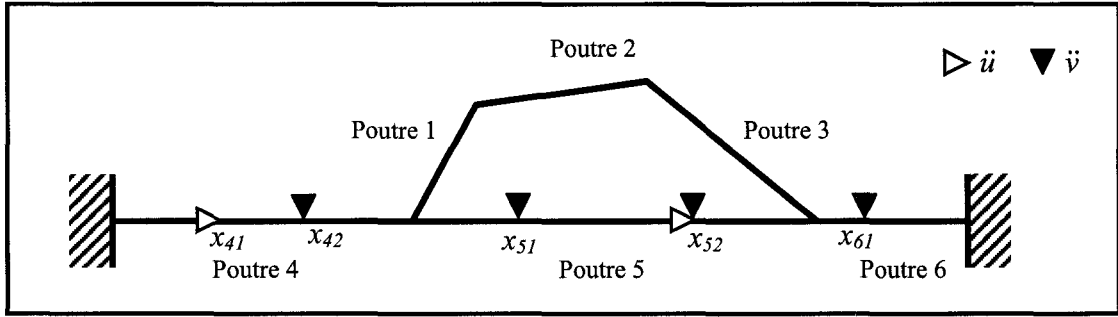


Figure 5.16 : Illustration des accélérations aux points choisis pour l'équation 5.21

Il suffit de constituer la quantité \$J\_{acc}\$ telle que

$$J_{acc} = |\ddot{u}_4(x_{41})|^2 + |\dot{v}_4(x_{42})|^2 + |\ddot{u}_5(x_{51})|^2 + |\dot{v}_5(x_{51})|^2 + |\dot{v}_5(x_{52})|^2 + |\dot{v}_6(x_{61})|^2 \quad 5.21$$

On se retrouve alors avec le système matriciel suivant

$$J_{acc} = \omega^4 \begin{pmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{pmatrix}^H \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{91} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{101} + \Gamma_{102} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{121} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1^e \\ q_1^y \\ q_2^e \\ q_2^y \\ q_3^e \\ q_3^y \\ q_4^e \\ q_4^y \\ q_5^e \\ q_5^y \\ q_6^e \\ q_6^y \end{pmatrix} \quad 5.22a$$

avec, entre autres,

$$\begin{aligned} \Gamma_{71} &= \begin{bmatrix} U_{4,1}(x_{41})U_{4,1}(x_{41}) & \cdots & U_{4,1}(x_{41})U_{4,m_4}(x_{41}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{4,m_4}(x_{41})U_{4,1}(x_{41}) & \cdots & U_{4,m_4}(x_{41})U_{4,m_4}(x_{41}) \end{bmatrix} \\ \Gamma_{81} &= \begin{bmatrix} V_{4,1}(x_{42})V_{4,1}(x_{42}) & \cdots & V_{4,1}(x_{42})V_{4,m_4}(x_{42}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{4,m_4}(x_{42})V_{4,1}(x_{42}) & \cdots & V_{4,m_4}(x_{42})V_{4,m_4}(x_{42}) \end{bmatrix} \\ \Gamma_{91} &= \begin{bmatrix} U_{5,1}(x_{51})U_{5,1}(x_{51}) & \cdots & U_{5,1}(x_{51})U_{5,m_5}(x_{51}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{5,m_5}(x_{51})U_{5,1}(x_{51}) & \cdots & U_{5,m_5}(x_{51})U_{5,m_5}(x_{51}) \end{bmatrix} \\ \Gamma_{101} &= \begin{bmatrix} V_{5,1}(x_{51})V_{5,1}(x_{51}) & \cdots & V_{5,1}(x_{51})V_{5,m_5}(x_{51}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{5,m_5}(x_{51})V_{5,1}(x_{51}) & \cdots & V_{5,m_5}(x_{51})V_{5,m_5}(x_{51}) \end{bmatrix} \\ \Gamma_{102} &= \begin{bmatrix} V_{5,1}(x_{52})V_{5,1}(x_{52}) & \cdots & V_{5,1}(x_{52})V_{5,m_5}(x_{52}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{5,m_5}(x_{52})V_{5,1}(x_{52}) & \cdots & V_{5,m_5}(x_{52})V_{5,m_5}(x_{52}) \end{bmatrix} \\ \Gamma_{121} &= \begin{bmatrix} V_{6,1}(x_{61})V_{6,1}(x_{61}) & \cdots & V_{6,1}(x_{61})V_{6,m_6}(x_{61}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{6,m_6}(x_{61})V_{6,1}(x_{61}) & \cdots & V_{6,m_6}(x_{61})V_{6,m_6}(x_{61}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 5.22b$$

On obtient donc

$$J_{acc} = \omega^4 \underline{q}^H \underline{\Gamma} \underline{q} \quad 5.23$$

Le critère à minimiser  $J$  devient simplement

$$J_{acc} = \omega^4 \left( \underline{F}_P^H \underline{D}_P^H + \underline{F}_S^H \underline{D}_S^H \right) \left( \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \right)^H \underline{\Gamma} \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \left( \underline{D}_P \underline{F}_P + \underline{D}_S \underline{F}_S \right) \quad 5.24$$

Et la forme quadratique Hermitienne reste

$$J_{acc} = \underline{F}_S^H \underline{A}_\Gamma \underline{F}_S + \underline{B}_\Gamma^H \underline{F}_S + \underline{F}_S^H \underline{B}_\Gamma + C_\Gamma \quad 5.25a$$

avec 
$$\underline{A}_\Gamma = \omega^4 \underline{D}_S^H \left( \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \right)^H \underline{\Gamma} \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \underline{D}_S \quad 5.26b$$

$$\underline{B}_\Gamma = \omega^4 \underline{D}_S^H \left( \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \right)^H \underline{\Gamma} \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \underline{D}_P \underline{F}_P \quad 5.26c$$

$$C_\Gamma = \omega^4 \underline{F}_P^H \underline{D}_P^H \left( \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \right)^H \underline{\Gamma} \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \underline{D}_P \underline{F}_P \quad 5.26d$$

### 5.3.2 Applications

En se basant sur la configuration 10 du 5.2.4, on va minimiser l'accélération en certaines des positions de la Figure 5.17.

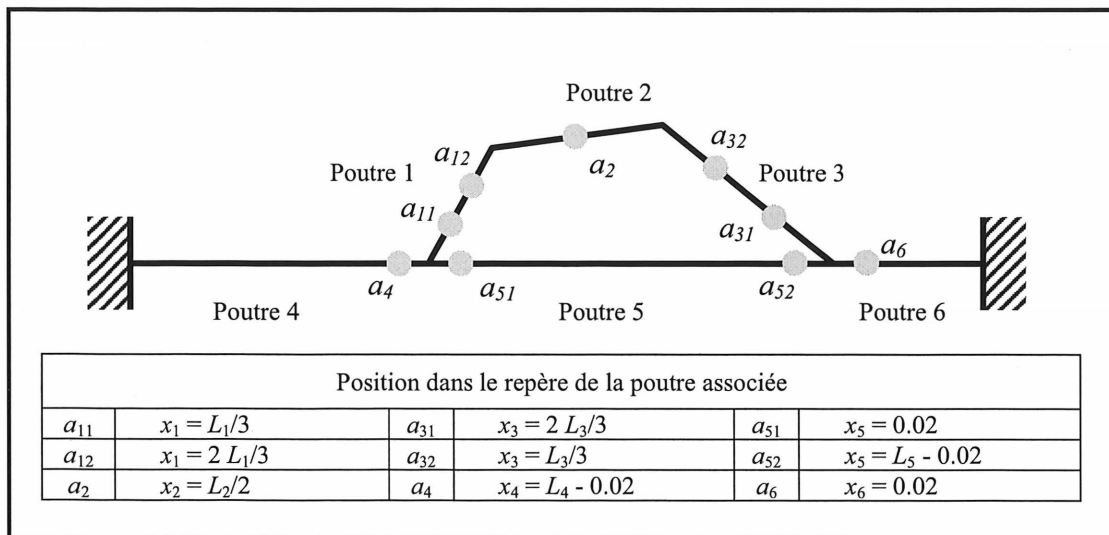


Figure 5.17 : Emplacements des accéléromètres sur la structure à six poutres

On obtient alors l'amplitude optimale  $X_0$  des forces de contrôle telles que le critère en accélération  $J_{acc}$  soit minimisé par la relation

$$J_{acc} = \underline{X}_0^H \underline{A}_\Gamma \underline{X}_0 + \underline{B}_\Gamma^H \underline{X}_0 + \underline{X}_0^H \underline{B}_\Gamma + C_\Gamma \quad 5.27$$

Il est possible de calculer la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice avec l'expression de  $X_0$ .

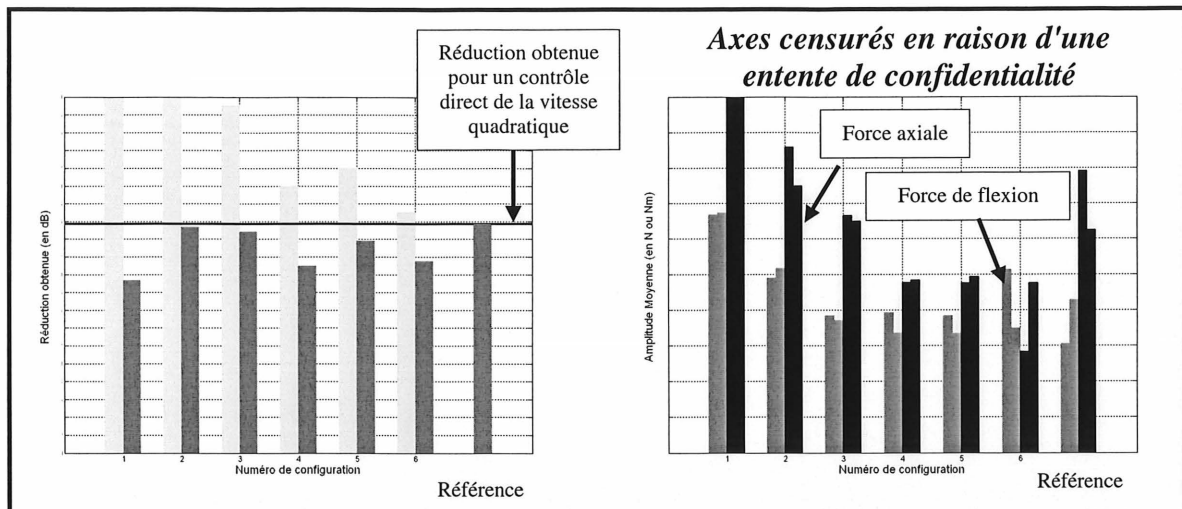
$$J_{VQM/acc} = \frac{\omega^2}{2} \left( \underline{F}_p^H \underline{D}_p^H + \underline{X}_0^H \underline{D}_s^H \right) \left( \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \right)^H \underline{S} \left[ \underline{K} - \omega^2 \underline{M} \right]^{-1} \left( \underline{D}_p \underline{F}_p + \underline{D}_s \underline{X}_0 \right) \quad 5.28$$

Il est intéressant de savoir si, en contrôlant l'accélération en quelques points de la structure, il est possible de retrouver les niveaux de réduction de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice calculés avec la configuration 10. Pour cela, six configurations d'accéléromètres, décrites au Tableau 5.2 vont être testées.

Numéro de la combinaison	Type d'accéléromètre								
	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_2$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_4$	$a_{51}$	$a_{52}$	$a_6$
1	X/Y	-	-	X/Y	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	Y	Y	Y	Y
3	X/Y	-	-	X/Y	-	Y	Y	Y	Y
4	X/Y	X/Y	-	X/Y	X/Y	-	-	-	-
5	X/Y	X/Y	-	X/Y	X/Y	Y	Y	Y	Y
6	X/Y	-	X/Y	X/Y	-	Y	Y	Y	Y

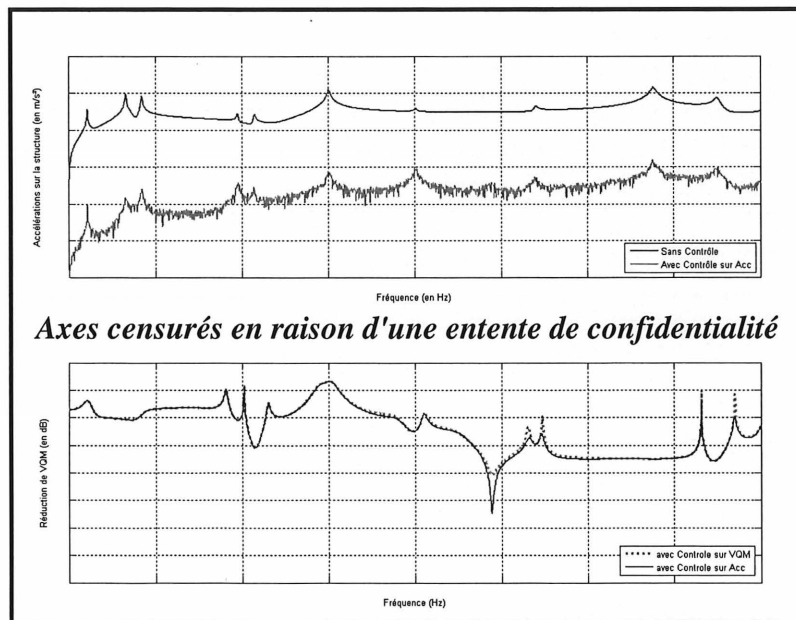
**Tableau 5.2 :** Configurations d'accéléromètres sur la structure  
 X : mesure l'accélération selon l'axe x de la poutre sur laquelle il est situé  
 Y : mesure l'accélération selon l'axe y de la poutre sur laquelle il est situé

Pour chaque configuration, la réduction moyenne de l'accélération aux points de mesures  $J_{acc}$  ainsi que celle de la vitesse quadratique moyenne  $J_{VQM/acc}$  dans la poutre réceptrice calculée avec les amplitudes des forces de contrôle donnant  $J_{acc}$  sont calculées et présentées à la Figure 5.18. L'amplitude moyenne des forces de contrôle y est également visible.



**Figure 5.18 :** Résultats des six configurations d'accéléromètres pour deux forces de contrôle en flexion et deux forces axiales de contrôle au milieu des poutres 1 et 3  
 A gauche, réduction de l'accélération (jaune/gris clair) et de la VQM (rouge/gris foncé)  
 A droite, amplitude des forces axiales de contrôle (noir) et des forces de flexion de contrôle (rouge/gris)  
 La barre référence donne les valeurs de la combinaison 10 avec un contrôle de VQM

Pour les configurations 1 et 2, il y a autant de capteurs d'erreur (4) que de forces de contrôle (4). Les réductions d'accélération obtenues localement au niveau des capteurs d'erreur sont très importantes (respectivement  $\blacksquare$  dB et  $\blacksquare$  dB). En théorie, on devrait obtenir 0, en fait on se retrouve dans le bruit numérique de Matlab, visible à la Figure 5.19.



**Figure 5.19 :** Minimisation des accélérations de la configuration 2 et comparaison de VQM avec la valeur optimale

On remarque que les meilleurs résultats sont obtenus avec des accéléromètres près des attaches sur la poutre réceptrice. La configuration 2 permet même d'obtenir ■■■ dB de réduction en ne contrôlant l'accélération qu'en seulement quatre points. Cette configuration est très intéressante puisqu'elle rend possible un contrôle global avec des données locales.

#### **5.4 Bilan**

Les possibilités qu'offre le modèle analytique en tant que plate-forme pour le contrôle actif sont très intéressantes. A ce jour, le modèle peut contrôler des forces primaires ponctuelles (axial, flexion, moment) par des forces de contrôle ponctuelles (axial, flexion, moment) de façon à minimiser des critères globaux (vitesse quadratique moyenne) ou locaux (accélérations).

Les applications de contrôle actif sur le modèle à six poutres ont montré qu'il était possible d'obtenir des réductions conséquentes du comportement vibratoire de la poutre réceptrice à l'aide de capteurs d'erreur locaux.

## CONCLUSION

Un modèle analytique permettant de reconstruire le schéma modal plan d'une structure 2D composées de poutres minces dans lesquelles se propagent des ondes de flexion et d'extension et d'y incorporer des stratégies de contrôle actif est à présent disponible. Il a été montré que lorsqu'il est appliqué à une structure où chaque poutre respecte scrupuleusement la théorie des poutres minces, ses résultats sont excellents, autant concernant la reconstitution des premiers modes du schéma modal qu'au niveau de la réponse forcée.

Cependant, la structure sur laquelle est appliqué le modèle analytique ne respecte pas ces hypothèses. Il a été remarqué qu'au niveau des fréquences naturelles, les résultats du modèle ne correspondent absolument pas à ceux obtenus avec le modèle NASTRAN ou lors des mesures aux laboratoires du GAUS sur la boîte de transmission principale d'un [REDACTED]. Néanmoins, les correspondances observées entre les déformées propres laissent à penser que le modèle analytique arrive quand même à approcher convenablement le comportement de la structure. Ainsi, il y a de bonnes chances que les tendances relevées lors des essais de contrôle actif avec le modèle analytique soient correctes et applicables sur la vraie structure.

Concernant l'obtention du schéma modal du modèle à six poutres, le nombre de fonctions de forme utilisé est limité à six (sept pour la flexion dans la poutre réceptrice). Ainsi, la plage d'étude se limite à [REDACTED] Hz, ce qui correspond à la fréquence du dernier mode correctement reconstitué. Une piste intéressante pour tenter d'augmenter le nombre de modes serait d'utiliser d'autres types de fonctions de forme. Par exemple, une base polynomiale dont tous les termes sur la diagonale des matrices de masse ou de raideur seraient normés à un pourrait permettre l'augmentation des raideurs des ressorts virtuels sans risquer de perdre l'information sur le comportement des poutres. Une autre option serait d'essayer une nouvelle base de fonctions comme les fonctions hiérarchiques trigonométriques [BESLIN, 1997] qui donnent d'excellents résultats et jusqu'à des ordres bien plus élevés que ceux rencontrés à présent dans le modèle. Enfin, en gardant la méthode de couplage par continuité, l'utilisation

de la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour construire les matrices de masse et de raideur pourrait donner de meilleurs résultats.

Il n'est pas prévu de développer un modèle utilisant des poutres épaisses. Cependant, il y a peut être un moyen d'améliorer les résultats. Au Chapitre 3, l'équation 3.6 décrit la fonctionnelle de Hamilton d'une poutre avec un terme qui est négligé tout de suite après en raison des hypothèses de poutres minces. Ce terme, l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites, pourrait permettre une meilleure reconstitution du schéma modal.

Enfin, pour l'instant, le modèle calcule le schéma modal d'une structure 2D et contrôle activement les déformations planes de ce modèle. Il serait un peu exagéré de chercher à obtenir un modèle capable de donner le schéma modal 3D d'une structure non plane. Cependant, reconstituer le schéma modal hors plan d'une structure 2D pourrait être réalisable. En effet, l'une des caractéristiques d'une structure 2D est que l'extension et la flexion dans le plan sont découplées de la torsion et de la flexion hors plan. Il serait alors possible de calculer les matrices de masse et de raideur dans le cas plan et hors plan de manière indépendante puis de les assembler pour faire du contrôle actif en 3D.

En parlant de contrôle actif, il reste beaucoup de choses intéressantes que l'on pourrait étudier avec le modèle. Le fait de pouvoir modéliser des accéléromètres dans le modèle rend possible le contrôle actif des ondes de flexion et d'extension transmises dans les poutres de la membrure, de la manière décrite par [FULLER, ELLIOTT et NELSON, 1996]. Le contrôle de l'intensité structurale pourrait également être abordé et pour départager les configurations de contrôle actif, l'étude de la puissance injectée pourrait être un indicateur au même titre que la réduction de la vitesse quadratique moyenne dans la poutre réceptrice et que l'amplitude des forces de contrôle. Enfin, en intégrant dans le modèle des accéléromètres, on se rapproche des conditions réelles de contrôle actif puisqu'ils feront indéniablement partis des capteurs d'erreur utilisés sur le montage du laboratoire. Il ne reste qu'à représenter les actionneurs piézoélectriques. Ceux-ci sont plus complexes à représenter qu'une force de contrôle ponctuelle car une céramique PZT produit à la fois un moment et une force axiale.

Pour finir, une étude expérimentale du modèle sur une structure répondant aux hypothèses de la théorie des poutres serait intéressante afin de valider le module de contrôle actif du modèle analytique.



## BIBLIOGRAPHIE

ASO, M., BANDO, S. (Mai 1999) *The Development of the Total Vibration Reduction (TVR) System*, American Helicopter Society 55<sup>th</sup> Annual Forum, Montréal, Québec, Canada, p. 202 à 208.

BARTHOD, M., TEBEC, J.L., GIZARD, M. (2003) *Étude du Bruit dit de Graillonnement dans les Boîtes de Vitesses Automobiles*, Mécaniques & Industries, vol. 4, p. 99 à 106.

BERNHARD, A.P.F., CHOPRA, I. (Décembre 1998) *Hover Testing of Active Rotor Blade-Tips Using a Piezo-Induced Bending-Torsion Coupled Beam*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 9, n°12, pp. 963 à 974.

BERRY, A., GUYADER, J.L., NICOLAS, J. (Décembre 1990) *A General Formulation for the Sound Radiation from Rectangular Baffled Plates with Arbitrary Boundary Conditions*, Journal of the Acoustical Society of America, n°88, vol. 6, p. 2792 à 2802.

BERRY, A. (1993) *Rayonnement Acoustique des Structures*, cours gradué GMC 721, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, 362 p.

BERRY, A., BÉLANGER, P., MONET DESCOMBEY, J. (Janvier 2005) *Improving the Acoustic Environment of Fixed and Rotary Wing Aircraft - Annual Progress Report - Appendix A*, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec, Canada, 75 p.

BESLIN, O., NICOLAS, J. (1997) *A Hierarchical Functions Set for Predicting Very High Order Plate Bending Modes with Any Boundary*, Journal of Sound and Vibration, n°202, vol. 5, p. 633 à 655.

BLEVINS, R.D. (1979) *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, 3<sup>e</sup> édition, New York, Krieger Publishing Company, 492 p.

BOUCHER, C.C., ELLIOTT, S.J., BAEK, K.H. (1996) *Active Control of Helicopter Rotor Tones*, Proceedings of Internoise 96, Liverpool, Royaume-Uni, p. 1179 à 1182.

CERTAIN, N. (Décembre 2000) *Simplified Anti-Vibration Suspension Device for a Helicopter*, US Patent 6.164.915, Eurocopter France, France.

CERTAIN, N. (Novembre 2000) *Simplified Anti-Vibration Suspension Device with Top Dampers for a Helicopter*, US Patent 6.145.785, Eurocopter France, France.

CHEN, P.C., CHOPRA, I. (Mai 1997) *Wind Tunnel Test of a Smart Rotor Model with Individual Blade Twist Control*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 8, n°5, p. 414 à 425.

CHENG, L., NICOLAS, J. (1992) *Free Vibration Analysis of a Cylindrical Shell - Circular Plate System with General Coupling and Various Boundary Conditions*, Journal of Sound and Vibration, n°155, vol. 2, p. 231 à 247.

CHORY, A.G. (Mars 1993) *System and Method for Transmission Gearbox Noise Control Utilizing Localized Oil Cooling/Heating*, US Patent 5.189.929, United Technologies Corporation, Hartford, Connecticut, États-Unis.

COSTES, J.J., LEGRAIN-NAUDIN, I. (Septembre 1999) *Design of a Feedback Active Control Regulator for Reduction of Vibrations or Noise in a Helicopter Cabin*, 25<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Rome, Italie, vol. 1, p. B4-1 à B4-12.

DE TEMMERMAN, P. (1980) *La Cellule d'Hélicoptère : ses Contraintes en Utilisation Médicale*, La Revue des SAMU, vol. 3, n°2, p. 94 à 100.

ELLIOTT, S.J., NELSON, P.A., STOTHERS, I.M., BOUCHER, C.C. (1990) *In-Flight Experiments on the Active Control of Propeller-Induced Cabin Noise*, Journal of Sound and Vibration, p. 219 à 238.

FULLER, C.R., ELLIOTT, S.J., NELSON, P.A. (1996) *Active Control of Vibration*, 2<sup>nd</sup> Impression, Academic Press, 332 p.

GAFFEY, T.M., BALKE, R.W. (Décembre 1976) *Isolation of Rotor Induced Vibration with the Bell Focal Pylon-Nodal Beam System*, Aerospace Engineering and Manufacturing Meeting, San Diego, Californie, Etats-Unis, 10 p.

GEMBLER, W., SCHWEITZER, H., MAIER, R., PUCHER, M. (Mai 1998) *Helicopter Interior Noise Reduction by Active Gearbox Struts*, American Helicopter Society 54<sup>th</sup> Annual Forum, Washington, DC, Etats-Unis, p. 216 à 229.

GEMBLER, W., SCHWEITZER, H., MAIER, R., PUCHER, M., JÄNKER, P., HERMLE, F. (Septembre 1999) *Smarts Struts – The Solution for Helicopter Interior Noise Problems*, 25<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Rome, Italie, vol. 1, p. B8-1 à B8-11.

GMIRYA, Y., KISH, J.G. (Décembre 2003) *Flexible Bearing Arrangement for Double Helical Pignon*, US Patent 6.666.102, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis

GOODMANN, R.K., MILLOTT, T.A. (Mai 2000) *Design, Development and Flight Testing of the Active Vibration Control System for the Sikorsky S-92*, American Helicopter Society 56<sup>th</sup> Annual Forum, Virginia Beach, Virginia, Etats-Unis, p. 764 à 771.

GORMAN, D.J. (Décembre 1989) *A Comprehensive Study of the Free Vibration of Rectangular Plates Resting on Symmetrically Distributed Uniform Elastic Edge Supports*, Journal of Applied Mechanics, vol. 56, p. 893 à 899.

GRAFF, K.F. (1975) *Wave Motion in Elastic Solids*, 2<sup>e</sup> édition, New York, Dover Publications Inc., 649 p.

HACKETT, N. (Novembre 1995) *EH101 Active Control of Structural Response Development, Productionisation and Certification*, Proceedings of the EH101 Avionics- Civil and Military Conference, Londres, Royaume-Uni, pp. 5.1-5.10.

HAYDUK, M.T., JACOBS, E.W. (Décembre 1993) *Helicopter Noise Reduction Through Gearing Modifications*, US Patent 5.271.288, United Technologies Corporation, Hartford, Connecticut, États-Unis.

HENRY, Z.S. (Juin 1995) *Bell Helicopter Advanced Rotorcraft Transmission (ART) Program*, NASA Contractor Report 195479, ARL Contractor Report ARL-CR-238, 221 p.

INOUE, K., YAMANAKA, M., KIHARA, M. (Septembre 2002) *Optimum Stiffener Layout for the Reduction of Vibration and Noise of Gearbox Housing*, Journal of Mechanical Design, vol. 124, p. 518 à 523.

INOUE, K., TOWNSEND, D.P., COY, J.J. (1992) *Optimum Design of a Gearbox for Low Vibration*, Journal of Mechanical Design, 6 p.

JOLLY, M.R., NORRIS, M.A., ROSSETTI, D.J., POTTER, J.L., WARNER, J.V., DELFOSSE, K.F. (Octobre 1994) *A Demonstration of Active Control for Helicopter Cabin Noise Reduction*, 20<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Amsterdam, Pays-Bas, vol. 1, p. 8-1 à 8-14.

KAWAGUCHI, H., BANDO, S., NIWA, Y. (Juin 1996) *The Test Results of AVR (Active Vibration Reduction) System*, American Helicopter Society 52<sup>nd</sup> Annual Forum, Washington, DC, Etats-Unis, p. 123 à 136.

KING, S.P., STAPLE, A.E. (1986) *Minimisation of Helicopter Vibration Through Active Control of Structural Response*, AGARD Conference, Rotorcraft Design for Operations, p. 14-1 à 14-13.

KISH, J.G. (Mars 1993) *Sikorsky Aircraft Advanced Rotorcraft Transmission (ART) Program Final Report*, NASA Contractor Report 191079, ARL Contractor Report ARL-CR-49, 209 p.

KUNZE, O., ARNOLD, U., WAASKE, S. (Mai 1999) *Development and Design of an Individual Blade Control System for the Sikorsky CH-53G Helicopter*, American Helicopter Society 55<sup>th</sup> Annual Forum, Montreal, Québec, Canada, vol. 2, p. 2272 à 2281.

KRANTZ, T.L. (Mai 1994) *NASA/Army Rotorcraft Transmission Research, A Review of Recent Significant Accomplishments*, NASA Technical Memorandum 106508, ARL Memorandum Report ARL-MR-138, prepared for the American Helicopter Society 50<sup>th</sup> Annual Forum, Washington, DC, États-Unis, 18 p.

LAUDIEN, E., NIESL, G. (Septembre 1990) *Noise Level Reduction inside Helicopter Cabins*, 16<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Glasgow, Royaume-Uni, p. II.3.1.1 à II.3.1.11.

LAUDIEN, E., NIESL, G. (Mai 1994) *Helicopter Internal Noise*, 78<sup>th</sup> Meeting of the AGARD Structural and Material Panel – "Impact of Acoustic Loads on Aircraft Structures" Symposium, Lillehammer, Norvège, p. 2-1 à 2-12.

LAURA, P.A.A., GROSSI, R. (1978) *Transverse Vibration of a Rectangular Plate Elastically Restrained against Rotation Along Three Edges and Free on the Fourth Edge*, Journal of Sound and Vibration, n°59, vol. 3, p. 355 à 368.

LAURA, P.A.A., GROSSI, R. (1981) *Transverse Vibration of Rectangular Plates with Edges Elastically Restrained against Translation and Rotation*, Journal of Sound and Vibration, n°75, vol. 1, p. 101 à 107.

LEDBETTER, T.K., STAMPS, B., POPELKA, D., BOTHWELL, C.M., SMITH, M.R. (Septembre 2002) *Compact Vibration Cancellation Device*, US Patent 6.443.273, Bell Helicopter Textron, Fort Worth, Texas, États-Unis.

LENSKI, J.W. JR, VALCO, M.J. (Juin 1991) *Advanced Rotorcraft Transmission (ART) Program - Boeing Helicopters Status Report*, NASA Technical Memorandum 104474, AVSCOM Technical Report 91-C-032, prepared for the 27<sup>th</sup> Joint Propulsion Conference, Sacramento, Californie, États-Unis, 26 p.

LENSKI, J.W. (Avril 1995) *Advanced Rotorcraft Transmission Program (ART) Final Report*, NASA Contractor Report 195461, ARL Contractor Report ARL-CR-224, 556 p.

LEWICKI, D.G., HANDSCHUH, R.F., HENRY, Z.S., LITVIN, F.L. (Mai 1994) *Low-Noise, High-Strength, Spiral-Bevel Gears for Helicopter Transmissions*, Journal of Propulsion and Power, vol. 10, n°3, p. 356 à 361.

LEWICKI, D.G., HANDSCHUH, R.F., HEATH, G.F., SHETH, V. (Avril 2000) *Evaluation of Carburized and Ground Face Gears*, Journal of American Helicopter Society, vol. 45, n°2, p. 118 à 124.

MARSHALL II, J. (Octobre 1980) *Tuned Spring-Mass Vibration Absorber*, United Technologies Corporation, Hartford, Connecticut, États-Unis.

- MILLOTT, T.A., WELSH, W.A., YOERKIE, C.A. JR, McMARTIN, D.G., DAVIS, M.W (Mai 1998) *Flight Test of Active Gear-Mesh Noise Control on the S-76 Aircraft*, American Helicopter Society 54<sup>th</sup> Annual Forum, Washington, DC, États-Unis, 9 p.
- MISSAOUI, J., CHENG, L., RICHARD, M.J. (1996) *Free and Forced Vibration of a Cylindrical Shell with a Floor Partition*, Journal of Sound and Vibration, n°190, vol. 1, p. 21 à 40.
- NGUYEN, K., CHOPRA, I. (1990) *Application of Higher Harmonic Control to Rotors Operating at High Speed and Thrust*, Journal of the American Helicopter Society, vol. 35, n°3, p. 78 à 89.
- NIELS, G., FAULHABER, P., GRÜNEWALD, M., LAUDIEN, E., MAIER, R. (Septembre 1995) *Interior Noise Reduction in Composite Airframe Structures*, 21<sup>st</sup> European Rotorcraft Forum, St-Petersburg, Russia, vol. 1, p. I.4-1 à I.4-11.
- NIWA, Y., KATAYAMA, N. (Octobre 1994) *The Test Results of AVR (Active Vibration Reduction) System*, 20<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Amsterdam, Pays-Bas, vol. 3, p. 70-01 à 70-14.
- O'CONNELL, J., MATHUR, G., JANAKIRAM, R., JOHNSON, M., ROSSETTI, D.J. (Mai 2001) *Helicopter Cabin Noise Reduction Using Active Structural Acoustic Control*, American Helicopter Society 57<sup>th</sup> Annual Forum, Washington DC, États-Unis, 8 p.
- PEARSON, J.T., GOODALL, R.M., LYNDON, I. (Décembre 1994) *Active Control of Helicopter Vibration*, Computing and Control Engineering Journal, p. 277-284.
- POLLARD, J.S., LEVERTON, J.W. (Septembre 1976) *Cabin Noise Reduction – Use of Isolated Inner Cabin*, 2<sup>nd</sup> European Rotorcraft and Powered Lift Aircraft Forum, Bückeburg, Allemagne, p. 19-1 à 19-10.
- RIECH, J. (Septembre 1996) *Advanced Helicopter Transmission Technology for a 5 Ton Utility Helicopter*, 22<sup>nd</sup> European Rotorcraft Forum, Brighton, Royaume-Uni, vol. 1, p. 5-1 à 5-5
- RIGAUD, E., MAYEUX, F., DRIOT, N., PERRET-LIAUDET, J., MEVEL, B. (2003) *Variabilité des Régimes Critiques d'une Boîte de Vitesses : Influence des Précharges des Roulements*, Mécanique & Industries, vol. 4, p. 107 à 112.
- SAMMATARO, S.R., KISH, J.G., ISABELLE, C.J. (Aout 1998) *Method of Making an Isolated Ring Gear for Planetary Gear Drive Systems*, US Patent 5.797.185, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis.
- SIMON, F., PAUZIN, S. (Septembre 2000) *Adaptive Active Experiment to Reduce Multi-Tonal Noise in a Generic Composite Helicopter Cabin*, 26<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, La Haye, Pays-Bas, p. 35-1 à 35-8.

STAPLE, A.E. (Septembre 1989) *An Evaluation of Active Control of Structural Response as a Means of Reducing Helicopter Vibration*, 15<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Amsterdam, Pays-Bas, p. 51-01 à 51-18.

STAPLE, A.E., WELLS, D.M. (Septembre 1990) *The Development and Testing of an Active Control of Structural Response System for the EH101 Helicopter*, 16<sup>th</sup> European Rotorcraft Forum, Glasgow, Royaume-Uni, p. III.6.1-1 à III.6.1-12.

STREHLOW, H., JAENKER, P., MAIER, R. (Novembre 2002) *Apparatus for Suppressing Structure Borne Noises*, US Patent 6.480.609, Eurocopter Deutschland GmbH, Munich, Allemagne.

SUTTON, T.J., ELLIOTT, S.J., BRENNAN, M.J., HERON, K.H., JESSOP, D.A.C. (1997) *Active Isolation of Multiple Structural Waves on a Helicopter Gearbox Support Strut*, Journal of Sound and Vibration, p. 81 à 101.

TAHLA, A., BARRAND, J.P., NEYRAT, S., AUBRET, P., JONQUET, D. (2001) *Étude Expérimentale de Réduction du Bruit d'une Pompe à Engrenages de Boîte de Vitesses Automatique*, Mécanique & Industries, vol. 2, p. 149 à 156.

TERPAY, G.W., ZIPFEL, G.G. (Novembre 2003) *Compact Actuator with Hydraulic Seal*, US Patent 6.651.988, General Dynamics Advanced Information Systems Inc., Greensboro, North Carolina, États-Unis.

TERPAY, G.W., ZIPFEL, G.G., WELSH, W. (Novembre 2003) *Active System and Method for Vibration and Noise Reduction*, US Patent 6.644.590, General Dynamics Advanced Information Systems Inc., Greensboro, North Carolina, États-Unis.

TEVES, D., NIESL, G., BLAAS, A., JACKLIN, S. (Septembre 1995) *The Role of Rotor Active Control in Future Rotorcraft*, 21<sup>st</sup> European Rotorcraft Forum, St-Petersburg, Russie, p. III.10.1 à III.10.17.

TORRES, E., TOURNIER, J-L. (1997) *Problèmes Posés par le Transport Hélicopté des Malades et des Blessés Graves*, Urgence Pratique, vol. 21, p. 15 à 19.

WADEY, B.T., YEORKIE JR, C.A. (Décembre 2000) *Cabin Interior Panel System for Reducing Noise Transmission in an Aircraft*, US Patent 6.158.690, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis.

WARBURTON, G.B., EDNEY, S.L. (1984) *Vibrations of Rectangular Plates with Elastically Restrained Edges*, Journal of Sound and Vibration, n°95, vol. 4, p. 537 à 552.

WELSH, W.A., VON HARDENBERG, P.C., VON HARDENBERG, P.W. (Mai 1990) *Test and Evaluation of Fuselage Vibration Utilizing Active Control of Structural Response (ACSR) Optimized to ADS-27*, American Helicopter Society Forum, Washington DC, États-Unis, p. 21 à 37.

WELSH, W.A., FREDRICKSON, C., RAUCH, C., LYNDON, I. (Mai 1995) *Flight Test of an Active Vibration Control System on the UH-60 Black Hawk Helicopter*, American Helicopter Society 51st Annual Forum, Fort Worth, Texas, États-Unis, p. 393 à 402.

WELSH, W.A., YEORKIE JR, C.A. (Aout 2000) *Active Noise Control System for a Helicopter Gearbox Mount*, US Patent 6.105.900, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis.

WELSH, W.A., YEORKIE JR, C.A. (Octobre 2000) *Active Noise Control System for a Defined Volume*, US Patent 6.138.947, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis.

WELSH, W.A. (Juillet 2002) *Actuator for an Active Transmission Mount Isolation System*, US Patent 6.416.016, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis

WOOD, E.R., POWERS, R.W., CLINE, J.H., HAMMOND, C.E. (Mai 1983) *Developing and Flight Testing a Higher Harmonic Control System*, American Helicopter Society 39<sup>th</sup> Annual Forum, St-Louis, Montana, États-Unis, 17 p.

YEN, J.G. (Mai 1980) *Higher Harmonic Control for Helicopters with Two-Bladed and Four-Bladed Rotors*, AIAA/ASCE/AHS 21<sup>st</sup> Structures, Structures Dynamics and Materials Conference, Seattle, Washington, 6 p.

YEORKIE JR, C.A., WELSH, W.A., SHEEHY, T.W. (Mai 1994) *Helicopter Active Noise Control System*, US Patent n°5,310,137, United Technologies Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis.

YEORKIE JR, C.A., WADEY, B.T. (Juillet 2001) *Aircraft Cabin Interior Noise Treatment*, US Patent 6.260.660, Sikorsky Aircraft Corporation, Stratford, Connecticut, États-Unis

YUAN, J., DICKINSON, S.M. (1992) *On the Use of Artificial Springs in the Study of the Free Vibrations of Systems Comprised of Straight and Curved Beams*, Journal of Sound and Vibration, n°153, vol. 2, p. 203 à 216.

YUAN, J., DICKINSON, S.M. (1992) *The Flexural Vibration of Rectangular Plate Systems Approached by Using Artificial Springs in the Rayleigh-Ritz Method*, Journal of Sound and Vibration, n°159, vol. 1, p. 39 à 55.

ZOPPITELLI, E., GIRARD, L.J.D. (Septembre 1998) *Suspension Device for a Transmission Box of a Rotary-Wing Aircraft*, US Patent 5.813.626, Eurocopter France, Marignane, France.

## ANNEXE A

## RAPPELS THÉORIQUES

Cette annexe revient sur des points étudiés dans le corps du mémoire. Les éléments rapportés dans ces pages proviennent du cours [BERRY, 1993]

## A.1 Lois de comportement d'un matériau élastique homogène isotrope d'une poutre

On considère un corps élastique de volume  $V$  et de surface  $S$  de la Figure A.1. On choisit le repère cartésien  $R$  d'origine  $O$  comme système de repérage.

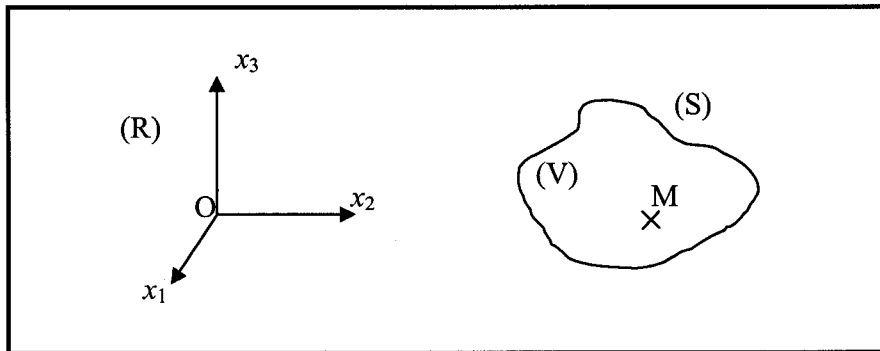


Figure A.1 : Système d'étude

Soient  $u_i$  les déplacements d'un point  $M$  à l'instant  $t$ . Le tenseur des déformations au point  $M$  est défini par

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ & & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad a.1$$



Les termes sur la diagonale du tenseur des déformations indiquant une dilatation ou une compression du corps selon l'axe  $x_i$  tandis que les termes hors diagonaux indiquent un cisaillement du corps dans le plan  $x_i x_j$ .

Dans les hypothèses de l'élasticité linéaire, les forces internes générées par les déplacements (contraintes) sont proportionnelles aux déformations. Le tenseur des déformations est noté  $\underline{\underline{\sigma}}$  et chaque composante  $\sigma_{ij}$  est la composante sur l'axe  $x_i$  de la force interne exercée sur une surface unitaire perpendiculaire à l'axe  $x_j$ . La relation contrainte-déformation au point M est donc du type

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad a.2$$

Les coefficients  $C$  sont les constantes élastiques du matériau et forment le tenseur élastique. Pour un matériau homogène, ces coefficients ne dépendent pas du point M considéré.

Quelque soit le matériau, les tenseurs des déformations, des contraintes et le tenseur élastiques sont symétriques. D'où les relations

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ et } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ et } C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad a.3$$

On peut donc écrire l'expression a.2 sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad a.3$$

Pour un matériau quelconque, il y a vingt et un coefficients indépendants dans le tenseur élastique. Mais dans le cas d'un matériau isotrope, ils ne sont plus que deux.

Pour un milieu élastique homogène isotrope unidimensionnel (car on s'intéresse aux poutres), la relation contrainte-déformation s'écrit en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \nu E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & \nu E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad a.4a$$

$$\text{avec le module de cisaillement } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad a.4b$$

L'énergie potentielle (ou de déformation)  $V_{sys}$  est définie au Chapitre 3 par

$$V_{sys} = \int \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} dV \quad 3.2b$$

En extension, le champ de déplacement utilisé est, en reprenant les notations  $x_1 x_2 x_3$  pour le repère R

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_1(x_1, t) \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \\ \tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad 3.3$$

Ainsi, on obtient

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \begin{matrix} \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E & \nu E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & \nu E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} = E \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \quad a.5$$

Et donc

$$V_{sys} = \int \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} dV = \int_0^L \frac{1}{2} ES \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \quad 3.2b$$

Pour la flexion, le champ de déplacement utilisé est, en reprenant les notations  $x_1x_2x_3$  pour le repère R

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(x_1, x_2, x_3, t) = -x_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1, t) \\ \tilde{u}_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_1(x_1, t) \\ \tilde{u}_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{cases} \quad 3.5a$$

On obtient alors

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -y_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a.6a$$

$$\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \begin{matrix} T \\ \left[ \begin{matrix} -x_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \begin{bmatrix} E & \nu E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & \nu E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \left[ \begin{matrix} -x_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = E x_2^2 \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right)^2 \quad a.6b$$

Et donc

$$V_{sys} = \int \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} dV = \underbrace{\int_S x_2^2 dx_2 dx_3}_{I_z} \int_0^L \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 = \int_0^L \frac{1}{2} EI_z \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right)^2 dx_1 \quad a.7$$

## A.2 Équations d'Euler pour l'extrémalisation de fonctionnelle

Soit une fonctionnelle à une fonction  $u$  du temps à une variable d'espace.

$$H(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^L \tilde{H}\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) dx dt \quad a.8$$

Cette fonctionnelle est extremum si

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)} = 0 \quad a.9$$

Dans le cas de l'extension, la fonctionnelle de Hamilton est

$$H(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^L \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt \quad a.10$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un poutre en extension

$$-\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + E S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad a.11$$

Dans le cas de la flexion, la fonctionnelle de Hamilton est

$$H(v) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_0^L \frac{1}{2} \rho S \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} E I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \quad a.12$$

On obtient alors l'équation du mouvement d'un poutre en extension

$$-\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + E S \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad a.13$$

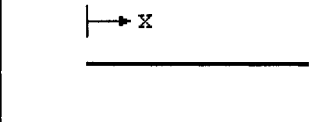
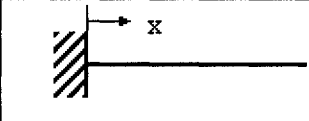
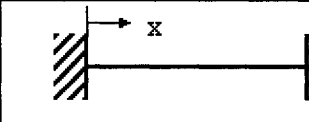
## ANNEXE B

## SCHEMA MODAL D'UNE POUTRE

Cette Annexe présente l'ensemble des résultats concernant le schéma d'une poutre droite mince soumise à des vibrations d'extension, de flexion et de torsion. Ces résultats sont tirés de l'excellent ouvrage *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape* de Robert D. Blevins, abondamment cité tout au long du Chapitre 3 de ce mémoire.

## B.1 Poutre en extension

On note  $x$  l'abscisse de la poutre,  $L$  la longueur de la poutre,  $E$  et  $\rho$  respectivement le module d'Young et la masse volumique du matériau constituant la poutre.


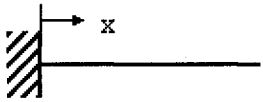
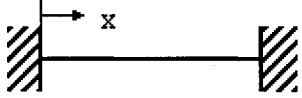
Description	Paramètre $\lambda_k$	Mode Propre $\Phi_k$
	$\lambda_k = k\pi$ $k \geq 0$ (a)	$\Phi_k(x) = \cos\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right)$ (a)
	$\lambda_k = \frac{2k-1}{2}\pi$ $k \geq 1$	$\Phi_k(x) = \sin\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right)$
	$\lambda_k = k\pi$ $k \geq 1$	$\Phi_k(x) = \sin\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right)$

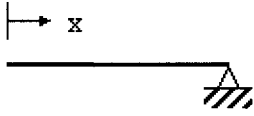
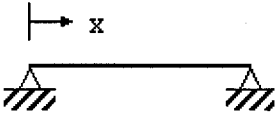
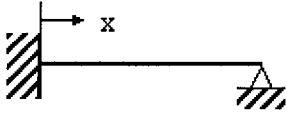
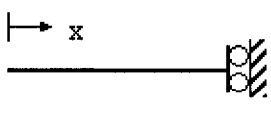
Les fréquences naturelles en extension valent  $f_k = \frac{\lambda_k}{2\pi L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

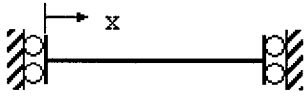
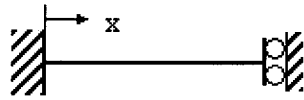
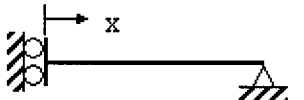
(a) Cette expression prend en compte le mode rigide de translation suivant l'axe  $x$

## B.2 Poutre en flexion

On note  $x$  l'abscisse de la poutre,  $L$  la longueur de la poutre,  $S$  et  $I$  respectivement la surface et le moment d'inertie selon l'axe neutre de la section de la poutre,  $E$  et  $\rho$  respectivement le module d'Young et la masse volumique du matériau constituant la poutre.

Libre – Libre (a)	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 4.73004074$ $\lambda_2 = 7.85320462$ $\lambda_3 = 10.9956078$ $\lambda_4 = 14.1371655$ $\lambda_5 = 17.2787597$ $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 0.982502215$ $\sigma_2 = 1.000777312$ $\sigma_3 = 0.999966450$ $\sigma_4 = 1.000001450$ $\sigma_5 = 0.999999937$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\cos \lambda_k \cosh \lambda_k = 1$ Équation donnant $\sigma_k^{th}$ $\sigma_k = \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}$
	$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} + \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} + \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$		
Encastrée - Libre	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 1.87510407$ $\lambda_2 = 4.69409113$ $\lambda_3 = 7.85475744$ $\lambda_4 = 10.99554073$ $\lambda_5 = 14.13716839$ $\frac{1}{2}(2k-1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 0.734095514$ $\sigma_2 = 1.018467319$ $\sigma_3 = 0.999224497$ $\sigma_4 = 1.000033553$ $\sigma_5 = 0.999998550$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\cos \lambda_k \cosh \lambda_k = -1$ Équation donnant $\sigma_k^{th}$ $\sigma_k = \frac{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}{\cosh \lambda_k + \cos \lambda_k}$
	$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} - \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} - \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$		
Encastrée - Encastrée	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 4.73004074$ $\lambda_2 = 7.85320462$ $\lambda_3 = 10.9956078$ $\lambda_4 = 14.1371655$ $\lambda_5 = 17.2787597$ $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 0.982502215$ $\sigma_2 = 1.000777312$ $\sigma_3 = 0.999966450$ $\sigma_4 = 1.000001450$ $\sigma_5 = 0.999999937$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\cos \lambda_k \cosh \lambda_k = 1$ Équation donnant $\sigma_k^{th}$ $\sigma_k = \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}$
	$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} - \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} - \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$		

Libre – Appuyée (a)	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 3.92660231$ $\lambda_2 = 7.06858275$ $\lambda_3 = 10.21017612$ $\lambda_4 = 13.35176878$ $\lambda_5 = 16.49336143$ $\frac{1}{4}(4k+1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 1.000777304$ $\sigma_2 = 1.000001445$ $\sigma_3 = 1.000000000$ $\sigma_4 = 1.000000000$ $\sigma_5 = 1.000000000$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\tan \lambda_k = \tanh \lambda_k$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			$\sigma_k = \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}$
$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} + \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} + \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$			
Appuyée – Appuyée	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$k\pi$	--	$\sin \lambda_k = 0$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			--
$\Phi_k(x) = \sin \frac{\lambda_k x}{L}$			
Encastrée – Appuyée	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 3.92660231$ $\lambda_2 = 7.06858275$ $\lambda_3 = 10.21017612$ $\lambda_4 = 13.35176878$ $\lambda_5 = 16.49336143$ $\frac{1}{4}(4k+1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 1.000777304$ $\sigma_2 = 1.000001445$ $\sigma_3 = 1.000000000$ $\sigma_4 = 1.000000000$ $\sigma_5 = 1.000000000$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\tan \lambda_k = \tanh \lambda_k$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			$\sigma_k = \frac{\cosh \lambda_k - \cos \lambda_k}{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}$
$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} - \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} - \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$			
Libre – Glissant (a)	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 2.36502037$ $\lambda_2 = 5.49780392$ $\lambda_3 = 8.63937983$ $\lambda_4 = 11.78097245$ $\lambda_5 = 14.92256510$ $\frac{1}{4}(4k-1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 0.982502207$ $\sigma_2 = 0.999966450$ $\sigma_3 = 0.999999933$ $\sigma_4 = 0.999999993$ $\sigma_5 = 0.999999993$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\tan \lambda_k = -\tanh \lambda_k$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			$\sigma_k = \frac{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}{\cosh \lambda_k + \cos \lambda_k}$
$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} + \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} + \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$			

Glissant – Glissant (b)	$\lambda_k$ pour $k \geq 0$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$k\pi$	--	$\sin \lambda_k = 0$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			--
$\Phi_k(x) = \cos \frac{\lambda_k x}{L}$			
Encastrée - Glissant	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\lambda_1 = 2.36502037$ $\lambda_2 = 5.49780392$ $\lambda_3 = 8.63937983$ $\lambda_4 = 11.78097245$ $\lambda_5 = 14.92256510$ $\frac{1}{4}(4k-1)\pi$ si $k > 5$	$\sigma_1 = 0.982502207$ $\sigma_2 = 0.999966450$ $\sigma_3 = 0.999999933$ $\sigma_4 = 0.999999993$ $\sigma_5 = 0.999999993$ $\approx 1$ si $k > 5$ (c)	$\tan \lambda_k = -\tanh \lambda_k$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			$\sigma_k = \frac{\sinh \lambda_k - \sin \lambda_k}{\cosh \lambda_k + \cos \lambda_k}$
$\Phi_k(x) = \cosh \frac{\lambda_k x}{L} - \cos \frac{\lambda_k x}{L} - \sigma_k \left( \sinh \frac{\lambda_k x}{L} - \sin \frac{\lambda_k x}{L} \right)$			
Glissant - Appuyée	$\lambda_k$ pour $k \geq 1$	$\sigma_k$ pour $k \geq 1$	Équation donnant $\lambda_k^{th}$
	$\frac{1}{2}(2k-1)\pi$	--	$\cos \lambda_k = 0$
			Équation donnant $\sigma_k^{th}$
			--
$\Phi_k(x) = \cos \frac{\lambda_k x}{L}$			

Les fréquences naturelles en extension valent  $f_k = \frac{\lambda_k^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$

(a) Modes souples uniquement


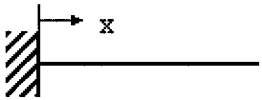
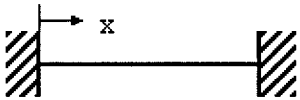
(b) Tous les modes. Le mode rigide correspondant est obtenu pour  $k = 0$

(c) Voir le paragraphe 3.3.1 du chapitre 3 pour les précautions à prendre sur la valeur de  $\sigma_k$



### B.3 Poutre en torsion

On note  $x$  l'abscisse de la poutre,  $L$  la longueur de la poutre,  $C$  et  $I$  respectivement la constante de torsion et le moment polaire d'inertie de la section de la poutre,  $E$ ,  $\nu$  et  $\rho$  respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique du matériau constituant la poutre.

Description	Paramètre $\lambda_k$	Mode Propre $\Phi_k$
	$\lambda_k = k\pi$ $k \geq 0$ (a)	$\Phi_k(x) = \cos\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right)$ (a)
	$\lambda_k = \frac{2k-1}{2}\pi$ $k \geq 1$	$\Phi_k(x) = \sin\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right)$
	$\lambda_k = k\pi$ $k \geq 1$	$\Phi_k(x) = \sin\left(\frac{\lambda_k x}{L}\right)$

Les fréquences naturelles en extension valent  $f_k = \frac{\lambda_k}{2\pi L} \sqrt{\frac{CE}{2(1+\nu)\rho I}}$

(a) Cette expression prend en compte le mode rigide de rotation autour de l'axe  $x$

### B.4 Produits scalaires (voir expressions 3.17)

#### Poutre en extension

Condition Libre – Libre	
$\langle U_i, U_j \rangle_0 = \begin{cases} L & \text{si } i = j = 0 \\ L/2 & \text{si } i = j \neq 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	$\langle U_i, U_j \rangle_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j = 0 \\ \lambda_i^2 / 2L & \text{si } i = j \neq 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
Condition Encastrée - Libre ou Encastrée - Encastrée	
$\langle U_i, U_j \rangle_0 = \begin{cases} L/2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	$\langle U_i, U_j \rangle_1 = \begin{cases} \lambda_i^2 / 2L & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

*Poutre en flexion*

Condition Libre – Libre, Encastrée – Libre, Encastrée – Encastrée, Libre – Appuyée, Encastrée – Appuyée ou Encastrée – Glissant (a)	
$\langle V_i, V_j \rangle_0 = \begin{cases} L & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	$\langle V_i, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \lambda_i^4 / L^3 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
Condition Appuyée – Appuyée ou Glissant – Appuyée (a)	
$\langle V_i, V_j \rangle_0 = \begin{cases} L/2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	$\langle V_i, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \lambda_i^4 / 2L^3 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
Condition Glissant – Glissant (b)	
$\langle V_i, V_j \rangle_0 = \begin{cases} L & \text{si } i = j = 0 \\ L/2 & \text{si } i = j \neq 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$	$\langle V_i, V_j \rangle_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j = 0 \\ \lambda_i^4 / 2L^3 & \text{si } i = j \neq 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

(a) Produits scalaires des modes souples uniquement

(b) Tous les modes. Le mode rigide correspondant est obtenu pour  $i = 0$  ou  $j = 0$

Les fonctions de forme à utiliser pour représenter les modes rigides d'une poutre libre-libre ou libre-appuyée sont explicitées au Chapitre 3.

## ANNEXE C

### PRODUITS SCALAIRES DES FONCTIONS DE FORME UTILISÉES DANS LE MODÈLE

Cette Annexe présente les expressions des produits scalaires des fonctions de forme utilisées dans le modèle numérique pour des conditions aux limites libres, appuyées et encastées. Comme expliqué dans la partie 3.3, les fonctions de forme choisies sont des fonctions polynomiales  $B_M$  et  $B_N$  avec un paramètre  $a$  égal à 0 ou 1. Dans le paragraphe 3.2.5, il a été constaté que les matrices de masse et de raideur étaient construites à partir des normes modales d'ordre 0 et 1 pour l'extension (et la torsion) et d'ordre 0 et 2 pour la flexion. Le fait d'utiliser des fonctions polynomiales permet de calculer assez facilement ces quantités sans avoir à utiliser le calcul symbolique de Matlab 7.0 pour intégrer le produit des fonctions de forme ou de leur dérivées. Pour les fonctions polynomiales  $B_N$  avec un paramètre  $a$  égal à 1, il suffit de reprendre les expressions du cas  $a$  égal à 0 et de les multiplier par  $(-1)^{k+j}$ . Le calcul des produits scalaires basé sur les fonctions polynomiales  $B_M$  devient rapidement peu utilisable et il est alors plus rapide de les calculer avec Matlab 7.0 et d'utiliser ces résultats.

#### C.1 Définitions

Les produits scalaires d'ordre 1,2 et 3 sont déterminées dans le cas d'une poutre de longueur  $L$  par

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_0 = \int_0^L \Phi_1(x) \Phi_2(x) dx$$

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_1 = \int_0^L \frac{d\Phi_1}{dx}(x) \frac{d\Phi_2}{dx}(x) dx$$

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_2 = \int_0^L \frac{d^2\Phi_1}{dx^2}(x) \frac{d^2\Phi_2}{dx^2}(x) dx$$

Telles que définies au paragraphe 3.3.2, les fonctions de forme  $\Phi$  sont telles que  $\Phi_k(x) = f(x)B_k(x)$ , avec  $B_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^k$  et  $f$  une fonction rendant cinématiquement admissible les fonctions de la base  $B$ .

On notera  $U$  et  $V$  les fonctions de formes utilisées pour reconstruire l'extension et la flexion.

## C.2 Cas de l'extension

### Poutre Libre-Libre

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, U_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{k-1}$

$$\langle U_k, U_j \rangle_0 = \frac{L}{(k+j-1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle U_k, U_j \rangle_1 = \begin{cases} \frac{(k-1)(j-1)}{(k+j-3)L} & k > 1 \text{ et } j > 1 \\ 0 & k = 1 \text{ ou } j = 1 \end{cases}$$

### Poutre Encastrée-Libre

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, U_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^k$

$$\langle U_k, U_j \rangle_0 = \frac{L}{(k+j+1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle U_k, U_j \rangle_1 = \frac{kj}{(k+j-1)L} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

Poutre Libre-Encastrée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, U_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L}\right)^{k-1}$

$$\langle U_k, U_j \rangle_0 = \frac{2L}{(k+j+1)(k+j)(k+j-1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle U_k, U_j \rangle_1 = \begin{cases} \frac{2(k-1)(j-1)}{(k+j-1)(k+j-2)(k+j-3)} \frac{1}{L} & k > 1 \text{ et } j > 1 \\ \frac{1}{L} & k = j = 1 \\ 0 & (k=1 \text{ et } j > 1) \text{ ou } (j=1 \text{ et } k > 1) \end{cases}$$

Poutre Encastrée-Encastrée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, U_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L}\right)^k$

$$\langle U_k, U_j \rangle_0 = \frac{2L}{(k+j+3)(k+j+2)(k+j+1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle U_k, U_j \rangle_1 = \frac{2kj}{(k+j+1)(k+j)(k+j-1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

**C.3 Cas de la flexion**

Poutre Libre-Libre

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{k-1}$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{L}{(k+j-1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \frac{(k-1)(k-2)(j-1)(j-2)}{(k+j-5)L^3} & k > 2 \text{ et } j > 2 \\ 0 & k \leq 2 \text{ ou } j \leq 2 \end{cases}$$

Poutre Appuyée-Libre

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^k$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{L}{(k+j+1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \frac{k(k-1)j(j-2)}{(k+j-3)L^3} & k > 1 \text{ et } j > 1 \\ 0 & k = 1 \text{ ou } j = 1 \end{cases}$$

Poutre Encastrée-Libre

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^{k+1}$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{L}{(k+j+3)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \frac{k(k+1)j(j+1)}{(k+j-1)L^3} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

Poutre Libre-Appuyée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L}\right)^{k-1}$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{2L}{(k+j+1)(k+j)(k+j-1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

En posant

$$P_1(k, j) = 2kj((k+j)^2 - 12(k+j) + 25 + kj) - 2((k+j)^2 - 12(k+j) + 35)(k+j) + 48$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \frac{P_1(k, j)}{(k+j-3)(k+j-4)(k+j-5)L^3} & k+j > 5 \\ \frac{4}{L^3} & k=j=2 \\ \frac{2}{L^3} & (k, j) \in \{(3,2); (2,3)\} \\ 0 & k=1 \text{ ou } j=1 \end{cases}$$

Poutre Libre-Encastrée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^{k-1}$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{24L}{(k+j+3)(k+j+2)(k+j+1)(k+j)(k+j-1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \frac{24(k-1)(j-1)(k-2)(j-2)}{(k+j-1)(k+j-2)(k+j-3)(k+j-4)(k+j-5)} \frac{1}{L^3} & k+j > 5 \\ \frac{4}{L^3} & (k,j) \in \{(1,1);(2,2)\} \\ -\frac{2}{L^3} & (k,j) \in \{(1,2);(2,1)\} \\ 0 & (k=1 \text{ et } j > 2) \text{ ou } (j=1 \text{ et } k > 2) \end{cases}$$

Poutre Appuyée-Appuyée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L}\right)^k$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{2L}{(k+j+3)(k+j+2)(k+j+1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \frac{2kj(kj+(k+j)^2-6(k+j)+7)}{(k+j-1)(k+j-2)(k+j-3)} \frac{1}{L^3} & k+j > 3 \\ \frac{4}{L^3} & k=j=1 \\ \frac{2}{L^3} & (k,j) \in \{(1,2);(2,1)\} \end{cases}$$

Poutre Appuyée-Encastrée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^k$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{24L}{(k+j+5)(k+j+4)(k+j+3)(k+j+2)(k+j+1)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \begin{cases} \frac{24kj(k-1)(j-1)}{(k+j+1)(k+j)(k+j-1)(k+j-2)(k+j-3)} \frac{1}{L^3} & k+j > 5 \\ \frac{4}{L^3} & k=j=1 \\ 0 & (k=1 \text{ et } j > 2) \text{ ou } (j=1 \text{ et } k > 2) \end{cases}$$

Poutre Encastrée-Appuyée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L}\right)^{k+1}$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{2L}{(k+j+5)(k+j+4)(k+j+3)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \frac{2kj(kj+(k+j)^2+1)+2(k+j)((k+j)^2-1)}{(k+j-1)(k+j-2)(k+j-3)} \frac{1}{L^3} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

Poutre Encastrée-Encastrée

Fonction de forme :  $\forall k \geq 1, V_k(x) = \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^{k+1}$

$$\langle V_k, V_j \rangle_0 = \frac{24L}{(k+j+7)(k+j+6)(k+j+5)(k+j+4)(k+j+3)} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$

$$\langle V_k, V_j \rangle_2 = \frac{24kj(k+1)(j+1)}{(k+j+3)(k+j+2)(k+j+1)(k+j)(k+j-1)} \frac{1}{L^3} \quad \forall k \geq 1, \forall j \geq 1.$$



## ANNEXE D

## NOTICE ANSYS 8.1 DE L'ÉLÉMENT SOLID45

SOLID45: 3-D Structural Solid  
**MP ME ST <> <> PR <> <> <> PP ED**

**Element Description**

SOLID45 is used for the three-dimensional modeling of solid structures. The element is defined by eight nodes having three degrees of freedom at each node: translations in the nodal x, y, and z directions.

The element has plasticity, creep, swelling, stress stiffening, large deflection, and large strain capabilities. A reduced integration option with hourglass control is available. See the *ANSYS 8.0, Inc. Theory Reference* for more details about this element. A similar element with anisotropic properties is SOLID64. A higher-order version of the SOLID45 element is SOLID95.

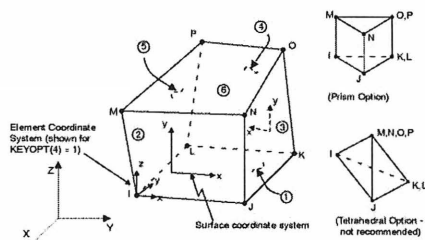


Figure 45.1. SOLID45 3-D Structural Solid  
 Input Data

The geometry, node locations, and the coordinate system for this element are shown in *SOLID45*. The element is defined by eight nodes and the orthotropic material properties. Orthotropic material directions correspond to the element coordinate directions. The element coordinate system orientation is as described in *Coordinate Systems*.

Element loads are described in *Node and Element Loads*. Pressures may be input as surface loads on the element faces as shown by the circled numbers on *SOLID45*. Positive pressures act into the element. Temperatures and fluences may be input as element body loads at the nodes. The node I temperature T(I) defaults to TUNIF. If all other temperatures are unspecified, they default to T(I). For any other input temperature pattern, unspecified temperatures default to TUNIF. Similar defaults occurs for fluence except that zero is used instead of TUNIF.

KEYOPT(1) is used to include or suppress the extra displacement shapes. KEYOPT(5) and KEYOPT(6) provide various element printout options (see *Element Solution*).

This element also supports uniform reduced (1 point) integration with hourglass control when KEYOPT(2) = 1. Using uniform reduced integration provides the following advantages when running a nonlinear analysis:

Less CPU time is required for element stiffness formation and stress/strain calculations to achieve a comparable accuracy to the FULL integration option.

The length of the element history saved record (.ESAV and .OSAV) is about 1/7th as much as when the full integration (2 X 2 X 2) is used for the same number of elements.

Nonlinear convergence characteristic of the option is generally far superior to the default full integration with extra displacement shape; that is, KEYOPT(1) = 0, KEYOPT(2) = 0.

The analysis will not suffer from volumetric locking which can be caused by plasticity or other incompressible material properties.

An analysis using uniform reduced integration can have the following disadvantages:

The analysis is not as accurate as the full integration method, which is apparent in the linear analysis for the same mesh.

The analysis cannot capture the bending behavior with a single layer of elements, for example, in the case of a fixed-end cantilever with a lateral point load, modeled by one layer of elements laterally. Instead, four elements are usually recommended.

When the uniform reduced integration option is used (KEYOPT(2) = 1 - this option is the same as SOLID185 with KEYOPT(2) = 1), you can check the accuracy of the solution by comparing the total energy (SENE label in **ETABLE**) and the artificial energy (AENE label in **ETABLE**) introduced by hourglass control. If the ratio of:

the solution is generally acceptable. If the ratio exceeds 5%, refine the mesh. The total energy and artificial energy can also be monitored by using the **OUTPR**, **VENG** command in the solution phase. For more details, see the *ANSYS 8.0, Inc. Theory Reference*.

KEYOPT(9)=1 is used to read initial stress data from a user subroutine. For details about these user subroutines, see the *ANSYS 8.0 Guide to User Programmable Features*.

You can include the effects of pressure load stiffness in a geometric nonlinear analysis using **SOLCONTROL,,,INCP**. Pressure load stiffness effects are included in linear eigenvalue buckling automatically. If an unsymmetric matrix is needed for pressure load stiffness effects, use **NROPT,UNSYM**.

A summary of the element input is given in *Input Summary*. A general description of element input is given in *Element Input*.

**SOLID45 Input Summary**

Element Name  
 SOLID45  
 Nodes  
 I, J, K, L, M, N, O, P  
 Degrees of Freedom

UX, UY, UZ

Real Constants

Hourglass control factor needed only when KEYOPT(2) = 1.

**Note**

The valid value for this real constant is any positive number; default = 1.0. We recommend that you use a value between 1 and 10.

Material Properties

Surface Loads

Pressures --

face 1 (J-I-L-K), face 2 (I-J-N-M), face 3 (J-K-O-N), face 4 (K-L-P-O), face 5 (L-I-M-P), face 6 (M-N-O-P)

Body Loads

Temperatures --

T(I), T(J), T(K), T(L), T(M), T(N), T(O), T(P)

Fluences --

FL(I), FL(J), FL(K), FL(L), FL(M), FL(N), FL(O), FL(P)

Special Features

Plasticity, Creep, Swelling, Stress stiffening, Large deflection,

Large strain, Birth and death, Adaptive descent

KEYOPT(1)

0 --

Include extra displacement shapes

1 --

Suppress extra displacement shapes

KEYOPT(2)

0 --

Full integration with or without extra displacement shapes, depending on the setting of KEYOPT(1)

1 --

Uniform reduced integration with hourglass control; suppress extra displacement shapes (KEYOPT(1) is automatically set to 1).

KEYOPT(4)

0 --

Element coordinate system is parallel to the global coordinate system

1 --

Element coordinate system is based on the element I-J side

KEYOPT(5)

0 --

Basic element solution

1 --

Repeat basic solution for all integration points

2 --

Nodal Stress Solution

KEYOPT(6)

0 --

Basic element solution

1 --

Surface solution for face I-J-N-M also

2 --

Surface solution for face I-J-N-M and face K-L-P-O (Surface solution available for linear materials only)

3 --

Nonlinear solution at each integration point also

4 --

Surface solution for faces with nonzero pressure

KEYOPT(9)

0 --

No user subroutine to provide initial stress (default)

1 --

Read initial stress data from user subroutine USTRESS

**Note**

See the *ANSYS 8.0 Guide to User Programmable Features* for user written subroutines

**Output Data**

The solution output associated with the element is in two forms: nodal displacements included in the overall nodal solution

additional element output as shown in [Element Output Definitions](#)

Several items are illustrated in [Stress output](#). The element stress EX, EY, EZ, (PRXY, PRYZ, PRXZ or NUXY, NUYZ, NUXZ), ALPX, ALPY, ALPZ, DENS, GXY, GYZ, GXZ, DAMP directions are parallel to the element coordinate system. The surface stress outputs are in the surface coordinate systems and are available for any face (KEYOPT(6)). The coordinate systems for faces IJNM and KLPO are shown in [SOLID45](#). The other surface coordinate systems follow similar orientations as indicated by the pressure face node description. Surface stress printout is valid only if the conditions described in [Element Solution](#) are met. A general description of solution output is given in [Solution Output](#). See the *ANSYS 8.0 Basic Analysis Guide* for ways to view results.

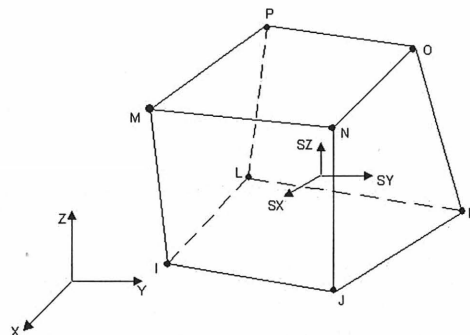


Figure 45.2. SOLID45 Stress Output

Stress directions shown are for KEYOPT(4) = 0

When KEYOPT(2) = 1 (the element is using uniform reduced integration), all the outputs for the element integration points are output in the same style as the full integration outputs. The number of points for full integration is used for consistency of output within the same element type.

The Element Output Definitions table uses the following notation:

A colon (:) in the Name column indicates the item can be accessed by the Component Name method [ETABLE, ESOL]. The O column indicates the availability of the items in the file Jobname.OUT. The R column indicates the availability of the items in the results file.

In either the O or R columns, Y indicates that the item is *always* available, a number refers to a table footnote that describes when the item is *conditionally* available, and a - indicates that the item is *not* available.

Table 45.1. SOLID45 Element Output Definitions

Name	Definition	O	R
EL	Element Number	Y	Y
NODES	Nodes - I, J, K, L, M, N, O, P	Y	Y
MAT	Material number	Y	Y
VOLU:	Volume	Y	Y
XC, YC, ZC	Location where results are reported	Y	3
PRES	Pressures P1 at nodes J, I, L, K; P2 at I, J, N, M; P3 at J, K, O, N; P4 at K, L, P, O; P5 at L, I, M, P; P6 at M, N, O, P	Y	Y

TEMP	Temperatures T(I), T(J), T(K), T(L), T(M), T(N), T(O), T(P)	Y	Y
FLUEN	Fluences FL(I), FL(J), FL(K), FL(L), FL(M), FL(N), FL(O), FL(P)	Y	Y
S: X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Stresses	Y	Y
S: 1, 2, 3	Principal stresses	Y	Y
S: INT	Stress intensity	Y	Y
S: EQV	Equivalent stress	Y	Y
EPEL: X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Elastic strains	Y	Y
EPEL: 1, 2, 3	Principal elastic strains	Y	-
EPEL: EQV	Equivalent elastic strain [4]	Y	Y
EPTH: X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Average thermal strains	1	1
EPTH: EQV	Equivalent thermal strain [4]	1	1
EPPL: X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Average plastic strains	1	1
EPPL: EQV	Equivalent plastic strain [4]	1	1
EPCR: X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Average creep strains	1	1
EPCR: EQV	Equivalent creep strain [4]	1	1
EPSW:	Average swelling strain	1	1
NL:EPEQ	Average equivalent plastic strain	1	1
NL:SRAT	Ratio of trial stress to stress on yield surface	1	1
NL:SEPL	Average equivalent stress from stress-strain curve	1	1
NL:HPRES	Hydrostatic pressure	-	1
FACE	Face label	2	2
AREA	Face area	2	2
TEMP	Surface average temperature	2	2
EPEL	Surface elastic strains (X, Y, XY)	2	2
PRESS	Surface pressure	2	2
S(X, Y, XY)	Surface stresses (X-axis parallel to line defined by first two nodes which define the face)	2	2
S(1, 2, 3)	Surface principal stresses	2	2
SINT	Surface stress intensity	2	2
SEQV	Surface equivalent stress	2	2
LOCI: X, Y, Z	Integration point locations	-	Y

Nonlinear solution, output only if the element has a nonlinear material  
 Surface output (if KEYOPT(6) is 1, 2, or 4)  
 Available only at centroid as a \*Get item  
 The equivalent strains use an effective Poisson's ratio: for elastic and thermal this value is set by the user (MP,PRXY); for plastic and creep this value is set at 0.5.

Table 45.2. SOLID45 Miscellaneous Element Output

Description	Names of Items Output	O	R
Nonlinear Integration Pt. Solution	EPPL, EPEQ, SRAT, SEPL, HPRES, EPCR, EPSW	1	-
Integration Point Stress Solution	TEMP, S(X, Y, Z, XY, YZ, XZ), SINT, SEQV, EPEL	2	-
Nodal Stress Solution	TEMP, S(X, Y, Z, XY, YZ, XZ), SINT, SEQV, EPEL	3	-

Output at each of eight integration points, if the element has a nonlinear material and KEYOPT(6) = 3  
 Output at each integration point, if KEYOPT(5) = 1  
 Output at each node, if KEYOPT(5) = 2  
 Item and Sequence Numbers for ETABLE and ESOL lists output available through the ETABLE command using the Sequence Number method. See The General Postprocessor (POST1) in the ANSYS 8.0 Basic Analysis Guide and The Item and Sequence Number Table of this manual for more information. The following notation is used in Item and Sequence Numbers for ETABLE and ESOL:  
 Name  
 output quantity as defined in the Element Output Definitions  
 Item  
 predetermined Item label for ETABLE command  
 I,J,...,P -  
 sequence number for data at nodes I,J,...,P

Table 45.3. SOLID45 Item and Sequence Numbers for the ETABLE and ESOL Commands

Name	Item	I	J	K	L
P1	SMISC	2	1	4	3
P2	SMISC	5	6	-	-
P3	SMISC	-	9	10	-
P4	SMISC	-	-	13	14
P5	SMISC	18	-	-	17
P6	SMISC	-	-	-	-
S:1	NMISC	1	6	11	16
S:2	NMISC	2	7	12	17
S:3	NMISC	3	8	13	18
S:INT	NMISC	4	9	14	19
S:EQV	NMISC	5	10	15	20
FLUEN	NMISC	41	42	43	44

Name	Item	M	N	O	P
P1	SMISC	-	-	-	-
P2	SMISC	8	7	-	-
P3	SMISC	-	12	11	-
P4	SMISC	-	-	16	15
P5	SMISC	19	-	-	20
P6	SMISC	21	22	23	24
S:1	NMISC	21	26	31	36

Name	Item	M	N	O	P
S:2	NMIS C	22	27	32	37
S:3	NMIS C	23	28	33	38
S:INT	NMIS C	24	29	34	39
S:EQV	NMIS C	25	30	35	40
FLUEN	NMIS C	45	46	47	48

See [Surface Solution Index](#) in this manual for the item and sequence numbers for surface output for the **ETABLE** command.

**Assumptions and Restrictions**

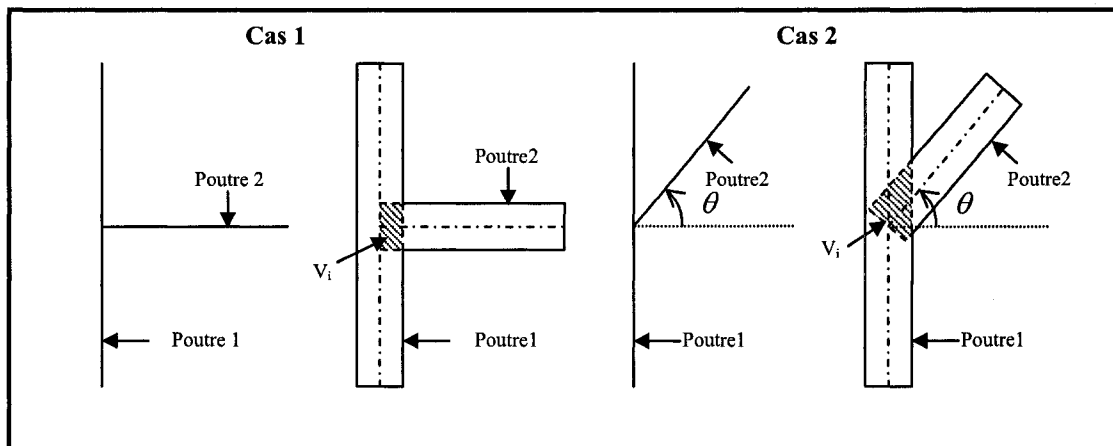
Zero volume elements are not allowed. Elements may be numbered either as shown in [SOLID45](#) or may have the planes IJKL and MNOP interchanged. Also, the element may not be twisted such that the element has two separate volumes. This occurs most frequently when the elements are not numbered properly.

All elements must have eight nodes. A prism-shaped element may be formed by defining duplicate K and L and duplicate O and P node numbers (see [Triangle, Prism and Tetrahedral Elements](#)). A tetrahedron shape is also available. The extra shapes are automatically deleted for tetrahedron elements.

## ANNEXE E

## INFLUENCE DE L'ANGLE ENTRE DEUX POUTRES SUR LE SCHEMA MODAL - COMPARAISON ENTRE ANSYS 8.1 ET LE MODELE ANALYTIQUE

Le problème de l'angle vient d'une simple constatation : le modèle ne tient pas compte des effets de l'épaisseur. La Figure E.1 présente ce problème.



**Figure E.1 :** Effet de l'angle sur une structure d'épaisseur non nulle  
Cas 1 :  $\theta$  nul, Cas 2 :  $\theta$  non nul

Pour le modèle, les Cas 1 et 2 de la Figure E.1 sont deux structures de même masse, égale aux volumes  $V_1$  et  $V_2$  des poutres 1 et 2 multipliés par la masse volumique  $\rho$  du matériau les constituants. Dans la réalité, et pour ANSYS 8.1, les structures des Cas 1 et 2 ont leur masse calculées par

$$M_{structure} = \rho V_1 + \rho V_2 + \frac{1}{2} \rho V_i \quad \text{e.1}$$

Avec  $V_i$  le volume de l'intersection entre les deux poutres, ce dernier n'étant dépendant que de l'épaisseur et de l'angle  $\theta$  entre les deux poutres par la relation e.2.

$$V_i = \frac{e^3}{\cos \theta} \quad \text{e.2}$$

Ainsi, pour des poutres 1 et 2 de longueur 1 m et 0.5 m et d'épaisseur 1 cm en aluminium, passer de 0° à 30° entraîne une perte de 3 g sur 400 g soit 0.75%. Si l'épaisseur est de 5 cm, c'est une perte d'environ 0.4 kg sur 10 kg soit 4 %. Cette petite application numérique met en avant un phénomène a priori négligeable qui peut prendre des proportions importantes selon l'angle entre les poutres et l'épaisseur de celles-ci. Car bien que l'hypothèse des poutres minces puisse repousser le problème, celui-ci existera toujours. Bien entendu, il n'y a pas qu'un effet de masse qui vienne perturber le modèle, il est facile à concevoir que la structure va devenir plus rigide au niveau du point de couplage, ce qui ne sera pas non plus pris en compte par le modèle.

Afin de vérifier l'effet de l'angle et de l'épaisseur, la structure présentée à la Figure E.2 sera utilisée. Ses caractéristiques sont regroupées au Tableau E.1. L'épaisseur des poutres de longueur  $L$  et de section carrée de côté  $e$  correspondra à des rapports  $L/e$  de 10, 20 et 30. L'angle  $\theta$  sera variable.

Caractéristiques	Poutres 1, 2 et 3
Module d'Young	70 GPa
Masse volumique	2700 kg/m <sup>3</sup>
Section	$e^2$ (m <sup>2</sup> )
Inertie	$e^4/12$ (m <sup>4</sup> )
Longueur	0.5 m

Tableau E.1 : Caractéristiques de la structure en T à trois poutres

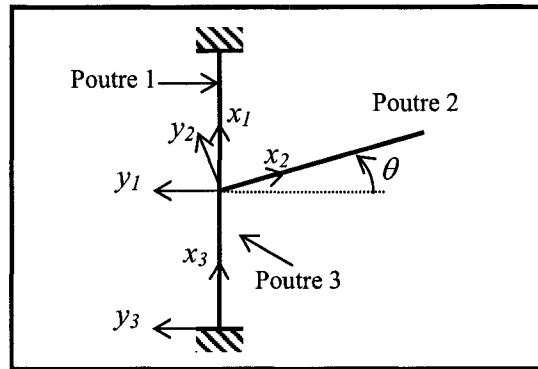


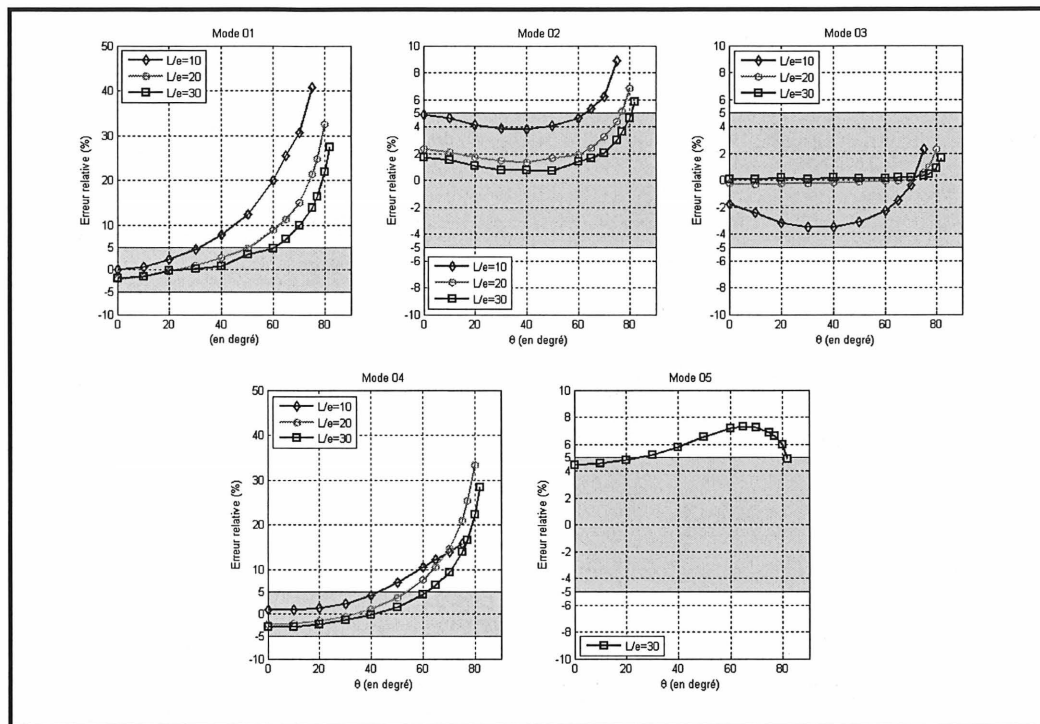
Figure E.2 : Structure en T à trois poutres

La méthode de couplage par ressorts virtuels a été choisie pour des raisons pratiques. En effet, les poutres vont rester les mêmes, malgré l'évolution de l'angle. Seules les conditions de couplage vont différer. La méthode de couplage par continuité aurait été tout aussi efficace.

Le calcul s'effectue avec sept fonctions de forme dans chaque poutre et pour reconstituer la flexion et l'extension. Dans les poutres 1 et 3, les fonctions sont des polynômes

de type  $B_M$  et dans la poutre 2, de type  $B_N$  avec  $a$  valant 1. Ce sont les mêmes qu'aux expressions 4.2.

On peut alors tracer l'erreur relative entre les fréquences naturelles des cinq premiers modes obtenus avec le modèle et ANSYS 8.1 en fonction de l'angle  $\theta$ , comme présenté à la Figure E.3.

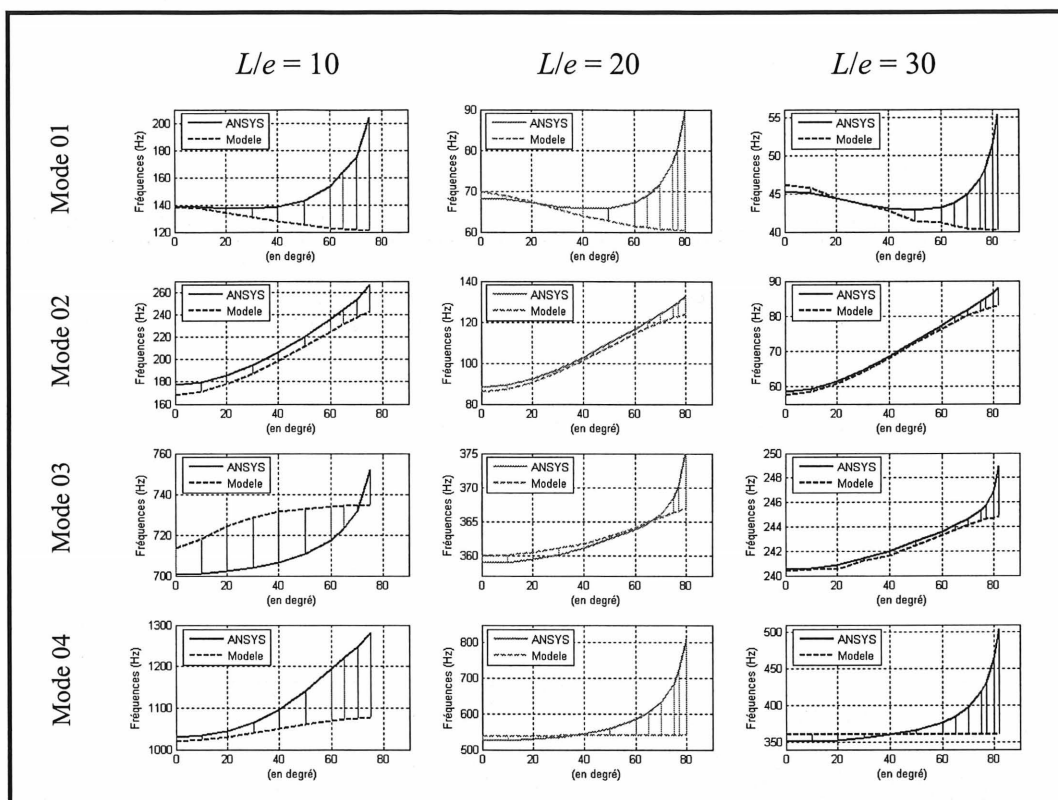


**Figure E.3 :** Erreur relative entre les fréquences naturelles des cinq premiers modes obtenus avec le modèle et ANSYS 8.0 en fonction de l'angle  $\theta$  entre les deux poutres pour différents rapports  $L/e$ . En gris, la marge d'erreur à 5%. Une erreur négative signifie que la fréquence calculée par le modèle est supérieure à celle obtenue avec ANSYS 8.1

On constate que plus l'angle devient important plus on s'éloigne des résultats d'ANSYS 8.1. Ceci est encore plus flagrant lorsque le rapport  $L/e$  devient petit. Néanmoins, il apparaît que certains modes y soient moins sensibles comme les modes 3 et 4. Pour le mode 5, seuls les résultats avec un rapport  $L/e$  de 30 sont présentés à titre d'informations ; il n'était pas évident de l'identifier avec certitude sur les déformées d'ANSYS 8.1 ou du modèle.

Il apparaît aussi que le modèle sous estime les fréquences naturelles lorsque l'angle devient grand.

A la Figure E.4, les fréquences naturelles calculées par ANSYS 8.1 et le modèle sont présentées pour les quatre premiers modes. On observe que le modèle ne réagit pas à l'augmentation de rigidité au point de couplage ou à la perte de masse totale découlant de l'augmentation de l'angle, car les fréquences naturelles du modèle n'augmenteront pas pour un angle important contrairement à celles d'ANSYS 8.1.



**Figure E.4 :** Évolution des fréquences naturelles des quatre premiers modes obtenues avec le modèle et ANSYS 8.1 en fonction de l'angle  $\theta$  entre les deux poutres pour différents rapports  $L/e$

Si on note de grandes différences sur les fréquences naturelles entre le modèle et ANSYS 8.1 au fur et à mesure que l'angle augmente, elles sont moins visibles sur les déformées modales, comme il avait été remarqué dans la partie 4.1.1, lorsque celles obtenues avec le modèle était comparées avec ANSYS 8.1 pour différents rapports  $L/e$ . Il en est de même ici.

Rappelons enfin que le modèle par éléments finis utilisé sous ANSYS 8.1 en tant que référence est basé sur des éléments solides (type SOLID45, voir Annexe D pour plus de précisions). Ces éléments prennent en compte plus de phénomènes que le modèle, ce qui



explique les différences entre le modèle analytique et le modèle numérique lorsque l'angle entre les poutres est trop important ou que les hypothèses de poutres minces ne sont plus respectées.

De plus, cette étude s'est limitée à un rapport  $L/e$  de dix, afin d'éviter de confondre les déformées modales pour des valeurs plus faibles de ce rapport. On constate néanmoins que pour un rapport de dix, un angle entre  $30^\circ$  et  $40^\circ$  constitue une limite. Pour des rapports plus faibles, il y a de bonnes raisons de penser que cet angle limite sera encore plus petit. Sur la membrure, les angles entre les poutres sont de  $48^\circ$  (tels que définis à la Figure 4.12) ce qui correspond à un  $\theta$  de  $42^\circ$  pour pouvoir se référer aux Figures E.3 et E.4 (puisque l'on y considère l'angle complémentaire) et avoir une idée de l'erreur minimale.