

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de Génie
Département de Génie Mécanique

Analyse vibroacoustique de la plaque raidie avec les éléments finis
hiérarchiques trigonométriques.

Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées
Spécialité: génie mécanique

Michel Barrette

Sherbrooke (Québec), CANADA

Février 2000

Résumé

Ce mémoire propose une nouvelle approche pour étudier le comportement acoustique et vibratoire d'une plaque munie de raidisseurs. Les plaques raidies sont à la base de plusieurs structures dans les domaines naval et aéronautique entre autres. La compréhension des phénomènes vibroacoustiques est essentielle. En effet, les vibrations peuvent causer la fatigue et la rupture de composantes. Pour sa part, le bruit est souvent nuisible et il est régi par des lois de plus en plus strictes.

Les vibrations ont traditionnellement été étudiées par des éléments finis classiques. Cependant, ces derniers demandent beaucoup de ressources informatiques et ne peuvent simuler que les quelques premiers modes.

Pour en améliorer l'efficacité, Bardell[1] a proposé l'utilisation d'éléments finis hiérarchiques pour le calcul des vibrations d'une plaque homogène. Plus tard, Beslin[5] a proposé l'utilisation de fonctions d'interpolation trigonométrique simple comme base aux éléments finis hiérarchiques. Ces fonctions se sont avérées plus stables numériquement et convergent mieux que les éléments de Bardell.

Le but de ce mémoire sera d'utiliser les éléments finis hiérarchiques avec les fonctions trigonométriques de Beslin dans le cas d'une plaque finie avec un réseau de raidisseurs. Les plaques utilisées sont rectangulaires et peuvent avoir des conditions limites quelconques. Le modèle de plaque choisi est celui de Love-Kirchhoff qui permet la flexion seulement. Il y aura une description de la méthode d'approximation numérique (Rayleigh-Ritz) et de l'assemblage des éléments de plaque employé. Par la suite, on comparera les performances en termes de modes convergés par rapport aux autres méthodes d'éléments finis. On validera aussi les simulations avec quelques résultats expérimentaux de réponses forcées.

Enfin, on utilisera les fonctions trigonométriques pour le calcul de la matrice d'impédance de rayonnement et des indicateurs vibroacoustiques. Un exemple de plaque entourée d'une baffle rayonnant dans un fluide lourd sera présenté.

Remerciements

J'aimerais remercier mes directeurs de maîtrise, le professeur Alain Berry et le Dr. Olivier Beslin, pour leur soutien, leurs précieux conseils et la patience dont ils ont fait preuve.

Je tiens également à remercier le Dr. André Côté et le Dr. Olivier Foin pour leurs aides de même que tous les membres du GAUS que j'ai cotôyé et qui ont contribué à cette maîtrise.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction	2
1.2	Méthodologie	3
1.3	Structure du document	4
2	Revue de la littérature	5
2.1	Introduction	6
2.2	Méthode statistique	6
2.3	Éléments finis de frontières	6
2.4	Éléments finis hiérarchiques	6
2.4.1	Fonctions polynomiales	7
2.4.2	Fonctions trigonométriques	10
2.5	Plaque raidie	10
2.6	Conclusion	13
3	Énergie des plaques et des raidisseurs	15
3.1	Introduction	16
3.1.1	Théorie classique de l'élasticité	16
3.1.2	Formulation variationnelle	17
3.2	Énergie de la plaque	18
3.2.1	Modèle de Love-Kirchhoff	19
3.2.2	Modèle de Mindlin-Reissner	19
3.2.3	Construction de la fonctionnelle	21

3.3	Énergie du raidisseur	22
4	Méthode de Rayleigh-Ritz	25
4.1	Méthode de Rayleigh-Ritz	26
4.1.1	Fonctions trigonométriques	27
4.1.2	Matrice élémentaire de masse et de raideur	29
4.1.3	Réponse forcée	33
4.2	Continuité à la frontière entre deux plaques	34
4.2.1	Imposition d'une condition	36
5	Résultats : vibration des plaques minces homogènes ou raidies	38
5.1	Introduction	39
5.2	Résultats numériques pour la plaque homogène	40
5.2.1	Convergence de la plaque rectangulaire	40
5.3	Résultats numériques pour la plaque raidie	43
5.3.1	Convergence des fréquences propres	43
5.3.2	Comparaison avec la littérature	45
5.3.3	Comparaison avec les résultats expérimentaux	49
5.4	Conclusion	53
6	Couplage avec un fluide et rayonnement acoustique	59
6.1	Introduction	60
6.2	Problème de la plaque bafflée	60
6.3	Indicateurs vibroacoustiques	62
6.3.1	Vitesse quadratique moyenne	62
6.3.2	Pression rayonnée et directivité du champ	63
6.3.3	Puissance acoustique rayonnée	63
6.3.4	Efficacité de rayonnement de la plaque	63
6.4	Calcul de la matrice d'impédance de rayonnement	64
6.4.1	Impédance de rayonnement avec plus d'un élément	66
6.4.2	Éléments identiques	68

6.5	Conclusion	69
7	Résultats : rayonnement acoustique des plaques	70
7.1	Introduction	71
7.2	Comparaison avec ADNR	71
7.3	Effets du fluide lourd	76
7.4	Conclusion	76
8	Conclusion	78
A	Impédance de rayonnement	80
A.1	Intégration numérique	81
A.2	Calcul des coefficients F_{mp}	82

Liste des tableaux

4.1	Tableau des coefficients (a_m, b_m, c_m, d_m) des fonctions trigonométriques $\phi_m(\xi)$ où $\phi_m(\xi) = \sin(a_m\xi + b_m) \sin(c_m\xi + d_m)$	29
5.1	Résultats pour une plaque homogène simplement appuyée	54
5.2	Résultats pour une plaque raidie. Un calcul avec un maillage 2×1 et 4352 degrés de liberté a été utilisé comme solution "exacte" pour le calcul de l'erreur.	55
5.3	Fréquences propres pour le cas 1	56
5.4	Fréquences propres pour le cas 2	57
5.5	Fréquences propres pour le cas 3	58
5.6	Fréquences propres pour le cas 4	58
A.1	Valeurs de $s_i, \hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i$ pour le calcul de $F_{mp} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 s_i I(\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i)$	83

Table des figures

1.1	La plaque raidie.	3
2.1	Fonctions hiérarchiques utilisées par Bardell[1]	8
2.2	Comparaison entre les fonctions trigonométriques et polynômiales . . .	11
2.3	Convergence des fréquences propres d'une plaque simplement appuyée. Comparaison entre les polynômes(1), fonctions trigonométriques(2) et la solution analytique(3).	12
3.1	Volume élastique en 3 dimensions	16
3.2	Comparaison entre les modèles de Love-Kirchhoff et Mindlin.	19
3.3	Raidisseur	22
4.1	Élément de plaque	26
4.2	Représentation graphique des 8 premières fonctions trigonométriques de même que la valeur de la fonction et sa dérivée aux extrémités.	28
4.3	Élément de plaque avec 2 raidisseurs.	29
4.4	Coordonnées de 2 éléments voisins	34
5.1	Plaque homogène rectangulaire	39
5.2	Maillages utilisés pour la plaque homogène rectangulaire	40
5.3	Convergence pour la plaque homogène. Nombre de modes à moins de 2% d'erreur. Maillage 1×1 (\square). Maillage 2×1 (+). Maillage 2×2 (O). Maillage 4×4 (\triangle).	41
5.4	La plaque en L.	43
5.5	Vitesse quadratique moyenne de la plaque en L	44

5.6	Configuration de la plaque d'acier raidie pour comparaison avec Coté[8]	46
5.7	Vitesse quadratique moyenne de la plaque d'acier raidie. Comparaison avec Coté[8]	47
5.8	Configurations de la plaque raidie utilisée pour comparaison avec Koko et al [12]	48
5.9	Configurations de la plaque raidie expérimentale	50
5.10	Comparaison avec l'expérience pour le cas 1 (1 raidisseur). Ligne pleine : résultat expérimental. Ligne discontinue : résultat numérique	51
5.11	Comparaison avec l'expérience pour le cas 2 (2 raidisseur). Ligne pleine : résultat expérimental. Ligne discontinue : résultat numérique	52
6.1	Problème du rayonnement acoustique de la plaque rectangulaire bafflée	60
6.2	Système de coordonnées pour l'intégration sur des plaques multiples. Les origines sont placées au centre seulement pour schématiser	67
6.3	Domaine d'intégration avec les variables u et v	67
7.1	La plaque d'acier rectangulaire.	72
7.2	Calcul de la vitesse quadratique dans un fluide lourd (trait plein). Comparaison avec ADNR (trait discontinu)	73
7.3	Calcul de la puissance rayonnée dans un fluide lourd (trait plein). Comparaison avec ADNR (trait discontinu)	74
7.4	Calcul de l'efficacité de rayonnement dans un fluide lourd (trait plein). Comparaison avec ADNR (trait discontinu)	75
7.5	Vitesse quadratique pour un fluide léger (trait plein) et un fluid lourd (trait discontinu)	77

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Ce mémoire propose une nouvelle approche pour étudier le comportement acoustique et vibratoire d'une plaque munie de raidisseurs. Les plaques raidies sont à la base de plusieurs structures dans les domaines naval et aéronautique en autres. La compréhension des phénomènes vibroacoustique est essentielle. En effet, les vibrations peuvent causer la fatigue prématurée ou la rupture de certaines composantes. Pour sa part, le bruit est souvent nuisible et il est régi par des lois de plus en plus strictes. L'utilisation de matériaux pour minimiser le bruit entre souvent en contradiction avec d'autres besoins comme la légèreté et la durabilité. Pour ces raisons, la compréhension de la vibroacoustique des structures est essentielle pour nous guider à l'étape de la conception.

Les vibrations ont traditionnellement été étudiées par des éléments finis classiques. Cependant, ces derniers demandent beaucoup de ressources informatiques et ne peuvent simuler que les quelques premiers modes. De plus, l'utilisation de ces outils demande une certaine expertise. D'autres ont utilisé des modèles qualifiés de "semi-analytiques" comme la méthode de Rayleigh-Ritz pour étudier le comportement des structures dans les hautes fréquences. Malheureusement, ces méthodes sont souvent limitées à des cas académiques précis et sont peu applicables à des cas réels. La méthode proposée se veut un mixte de ces méthodes. Elle est basée sur la méthode de Rayleigh-Ritz qui permet une très grande efficacité numérique pour atteindre les moyennes fréquences. En même temps, elle va permettre de modéliser des structures plus complexes avec un assemblage d'éléments inhomogènes et des conditions de frontières quelconques. On retire donc l'avantage de l'efficacité des méthodes semi-analytiques tout en restant assez versatile pour traiter un grand nombre de cas.

Le but de ce mémoire sera d'utiliser les éléments finis hiérarchiques avec les fonctions trigonométriques pour le cas d'une plaque finie munie d'un réseau de raidisseurs. Les plaques utilisées sont rectangulaires et peuvent avoir des conditions limites quelconques. Le modèle de plaque choisi est celui de Love-Kirchhoff qui permet la flexion seulement. Il y aura une description de la méthode d'approximation

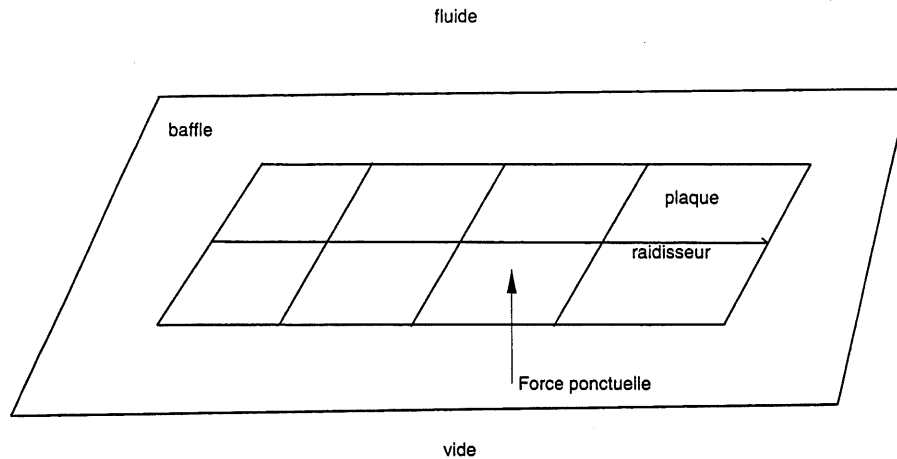


FIG. 1.1 – La plaque raidie.

numérique(Rayleigh-Ritz) et de l'assemblage d'éléments de plaques employé. Par la suite, on comparera les performances en termes de modes convergés par rapport aux autres méthodes d'éléments finis. On validera aussi les simulations avec quelques résultats expérimentaux de réponses forcées.

1.2 Méthodologie

Nous modéliserons une plaque mince tel que montrée à la figure 1.1. Elle aura des éléments disposés de façon quelconque et elle pourra être trouée. Les bords de la plaque pourront être libres, en appuis simples ou encastés. Nous utiliserons le modèle de plaque de Love-Kirchhoff (plaque mince, flexion pure).

Des raidisseurs orthogonaux pourront être attachés à la plaque selon une ligne. Ils seront considérés unidimensionnels et prennent en compte de la flexion et de la torsion. Le modèle sera le même que celui utilisé par Berry[3]. Les raidisseurs seront placés à la frontière des éléments et ils délimiteront ces derniers sur la plaque. Cette façon de placer les raidisseurs devrait améliorer les performances par rapport aux méthodes où un seul élément est utilisé[4].

Une force d'excitation ponctuelle sera placée à un endroit arbitraire de la plaque pour calculer la réponse vibratoire.

Pour les calculs de rayonnement acoustique, la plaque sera entourée d'un baffle rigide.

La performance numérique des fonctions-test choisies[5] doit nous permettre l'étude acoustique de la structure jusqu'aux moyennes fréquences.

1.3 Structure du document

Le document est organisé ainsi. Le chapitre 2 effectue une revue de la littérature sur les outils disponibles en vibroacoustique. Ensuite, on entre plus en détail sur les travaux faits sur les éléments hiérarchiques et l'étude des vibrations de la plaque raidie.

Le chapitre 3 décrit la plaque choisie : le modèle de flexion pure de Love-Kirchhoff. Ce modèle sera comparé au modèle de Mindlin. Les expressions pour l'énergie cinétique et de raideur des plaques et raidisseurs sera également présentée.

Le chapitre 4 présente la méthode d'approximation numérique utilisée : la méthode de Rayleigh-Ritz. Après une description de la méthode, on présente les fonctions trigonométriques utilisées de même que la façon qu'elles permettent d'assembler les éléments et de tenir compte des conditions de frontières.

Le chapitre 5 montre les résultats de la méthode appliquée aux vibrations de plaques raidies. Les performances numériques seront évaluées à l'aide d'une étude de convergence sur les fréquences propres. Des comparaisons avec d'autres méthodes et des résultats expérimentaux seront présentés.

Le chapitre 6 décrit le problème de la plaque bafflée et applique les fonctions trigonométriques au calcul du rayonnement acoustique.

Le chapitre 7 montre les résultats de la plaque bafflée rayonnant dans l'air et dans l'eau. Ils seront validés par une autre méthode numérique appelée ADNR.

Chapitre 2

Revue de la littérature

2.1 Introduction

Ce chapitre présente un survol des outils numériques disponibles pour l'étude vibroacoustique des plaques raidies. Par la suite, on décrira ce qui a été fait pour le calcul des vibrations de plaques avec la méthode d'éléments finis hiérarchiques et les fonctions trigonométriques.

2.2 Méthode statistique

La méthode d'analyse statistique de l'énergie (S.E.A, Statistical Energy Analysis)[18] est souvent utilisée pour analyser les hautes fréquences de structures complexes. Elle comporte plusieurs approximations. L'excitation est aléatoire. La densité modale doit être élevée et distribuée également sur les modes. Cette méthode s'avère utile pour étudier la répartition de l'énergie vibratoire entre les composantes de grandes structures dans les domaines naval et aéronautique. Cependant, nous ne pouvons tirer que peu d'informations sur les vibrations locales. Il est impossible d'obtenir le comportement d'un mode particulier. L'analyse est limitée aux hautes fréquences.

2.3 Éléments finis de frontières

Les méthodes de discrétisations comme les éléments finis de frontières (BEM, "Boundary Element Method") [14](pages 355-406) permettent l'obtention de la réponse et du rayonnement acoustique d'une structure. Elles sont basées sur une version discrétisée des équations exactes de l'élastoacoustique. Elles demandent cependant beaucoup de ressources informatiques pour la résolution des problèmes complexes.

2.4 Éléments finis hiérarchiques

Les éléments finis conventionnels (version- h) sont utilisés depuis plusieurs années dans divers domaines du Génie tels que la statique, la dynamique, le transfert

de chaleur, etc. Même si les éléments finis sont bien connus et éprouvés, l'étude d'un système complexe demande beaucoup de ressources informatiques et se limite aux basses fréquences. De plus, le degré des fonctions d'interpolation étant fixé, la convergence s'obtient en variant le nombre d'éléments. Cela demande un travail de maillage supplémentaire.

Il existe également la version- p [22, 15, 8] des éléments finis. Cette dernière permet d'augmenter l'ordre d'interpolation des éléments. Nous pouvons donc générer le maillage et obtenir la convergence désirée grâce à cette augmentation de l'ordre d'interpolation. Ce moyen est plus simple que la création d'un maillage adaptatif. Une classe particulière des éléments version- p sont les éléments finis hiérarchiques. Ceux-ci ont une particularité : leurs fonctions d'interpolation d'ordre n font partie des fonctions d'interpolation $n+1$. Par conséquent, les matrices de masse et de raideur, calculées à l'ordre n , peuvent servir pour celles calculées à l'ordre $n+1$. Une voie qui apparaît intéressante pour les éléments finis hiérarchiques est l'analyse des vibrations à moyenne fréquence. Atteindre les moyennes fréquences avec des éléments finis classiques est difficile. Cela demande une très grande quantité d'éléments. Avec les éléments finis hiérarchiques, nous pouvons arriver aux mêmes résultats avec un nombre raisonnable d'éléments et de fonctions d'interpolation d'ordre très élevé. Cependant, dès que nous atteignons des ordres élevés avec des fonctions d'interpolation basées sur des polynômes, nous avons rapidement des problèmes d'arrondis numériques dans le calcul de la valeur des fonctions. Nous verrons qu'avec des fonctions trigonométriques simples, nous pouvons atteindre des ordres beaucoup plus élevés, et ce, sans connaître de difficultés numériques. Ces points font l'objet des sections qui suivent.

2.4.1 Fonctions polynomiales

La méthode des éléments finis hiérarchiques, appliqué au calcul de la flexion des plaques, est habituellement basée sur des polynômes de Legendre. Ces polynômes ont été initialement introduits par Zhu[26]. Dernièrement, Bardell[1] a utilisé une variante de ces polynômes comme fonctions-test pour prédire les modes de vibrations d'une plaque mince pour plusieurs conditions de frontières. Ces fonctions sont présentées au

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3$$

$$f_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$f_4(\xi) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3$$

$$f_5(\xi) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^4$$

$$f_6(\xi) = \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi^5$$

$$f_7(\xi) = -\frac{1}{48} + \frac{3}{16}\xi^2 - \frac{5}{16}\xi^4 + \frac{7}{48}\xi^6$$

$$f_8(\xi) = -\frac{3}{48}\xi + \frac{5}{16}\xi^3 - \frac{7}{16}\xi^5 + \frac{9}{48}\xi^7$$

$$f_9(\xi) = \frac{3}{384} - \frac{15}{96}\xi^2 + \frac{35}{64}\xi^4 - \frac{63}{96}\xi^6 + \frac{99}{384}\xi^8$$

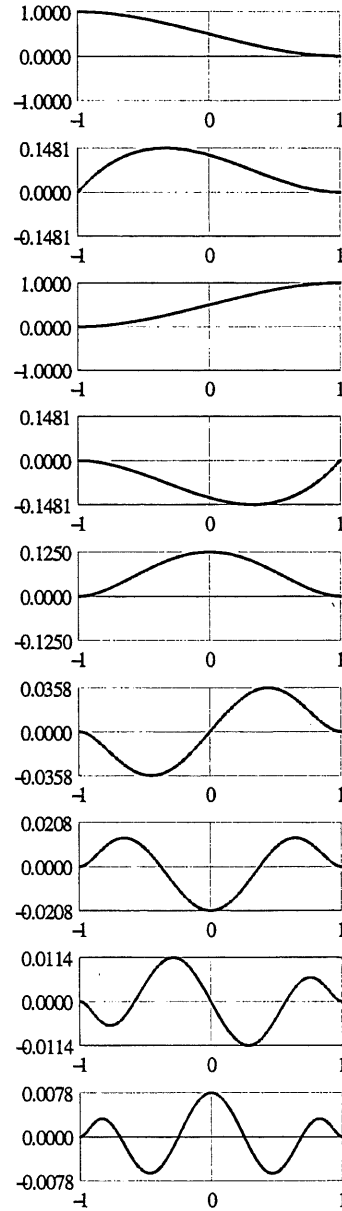


FIG. 2.1 – Fonctions hiérarchiques utilisées par Bardell[1]

tableau 2.1. Les quatre premières fonctions sont bâties à partir des fonctions cubiques de déplacement des éléments finis classiques. Les fonctions d'ordre supérieur à 4 sont données par

$$f_r(\xi) = P_{m=r-1}^{s=2}(\xi) = \sum_{n=0}^{(r-1)/2} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2r-2n-7)!!}{(r-2n-1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (2.1)$$

Avec cette base, Bardell est parvenu à calculer les modes de flexion d'une plaque avec plusieurs conditions de frontières. Il a obtenu les premiers modes avec un seul élément et une dizaine de fonctions polynomiales.

Ce qui rend intéressant ces polynômes est que le déplacement et la pente sont nuls à chaque extrémité des éléments pour des ordres supérieurs à quatre. On peut donc facilement contrôler les conditions de frontières avec les quatre premières fonctions de base. En enlevant la fonction correspondante, nous enlevons la possibilité de déplacement ou de rotation d'une frontière. De cette manière, on peut imposer des conditions d'appui simple ou d'encastrement et cela sur les côtés ou sur les coins. Cette façon simplifie la tâche. Sinon, une méthode comme les multiplicateurs de Lagrange aurait dû être utilisée ce qui alourdit la tâche et augmente inutilement la taille des matrices.

Bien que les polynômes de Bardell comportent certains avantages, ceux-ci peuvent être difficilement utilisés en moyennes et hautes fréquences. D'abord, le calcul d'intégrales de surfaces, nécessaire dans la méthode des éléments finis pour modéliser les plaques, doit être effectué symboliquement. Ces intégrales doivent être stockées dans des tableaux. Dans la littérature, la plupart des calculs, à base de polynômes, ont été faits pour des ordres inférieurs à 15. En poussant plus loin, nous nous apercevons que nous obtenons des erreurs de troncature numérique pour des ordres supérieurs à 45, et ce, lorsque nous travaillons en double précision. Beslin[5] a évalué les limites des calculs avec des polynômes. Il a dû utiliser des nombres à quadruple précision pour des exemples de calculs à des ordres supérieurs (de 45 à 1024).

2.4.2 Fonctions trigonométriques

Pour tenter de contrer les limites des polynômes de Bardell à ordre élevé, Beslin[5] a proposé une nouvelle base de fonctions basées sur des fonctions trigonométriques.. Ces fonctions ont plusieurs similarités avec les polynômes de Bardell (voir comparaison au tableau 2.2) :

- Les 4 premières fonctions permettent de satisfaire les conditions de frontières.
- Toutes les fonctions d'ordre supérieur à 4 ont un déplacement nul et une pente nulle aux extrémités.

Avec les fonctions polynomiales, les exposants d'ordres élevés impliquent que les calculs se font sur plusieurs ordres de grandeur. Cela entraîne des erreurs d'arrondis. Les fonctions trigonométriques, elles, n'ont aucune contrainte de ce côté. Les intégrales de ces fonctions se calculent directement et très rapidement. Les tableaux pré-calculés deviennent donc inutiles. Elles semblent donc être idéales d'un point de vue numérique. Des calculs de comparaison ont été effectués par Beslin[5]. Il a comparé la convergence des modes propres d'une plaque aux cotés en appui simple pour des calculs avec les deux types de fonctions. Nous pouvons remarquer, à la figure 2.3, que pour le même ordre de fonctions, les calculs venant des fonctions trigonométriques convergent mieux pour un même nombre de degré de liberté. Les fonctions trigonométriques sont donc moins sensibles aux erreurs de troncature, demandent moins de temps de calcul pour être générés et convergent mieux que les fonctions polynomiales. Nous verrons aussi que les fonctions trigonométriques faciliteront le calcul du rayonnement acoustique.

2.5 Plaque raidie

Le problème des vibrations de plaques avec raidisseurs a longtemps été étudié à l'aide d'éléments finis classiques. (Wu[24], Laura et al[13], Bhat[6], Gutierrez et al[10]). Les modèles de plaque était originellement basés sur le modèle de Love-Kirchhoff qui ne tient compte que de la flexion de la plaque. Ce modèle est souvent valide dans les cas traités dans la pratique. Cependant, quand nous avons des plaques assez épaisses nous devons inclure l'énergie de la rotation et du cisaillement de la plaque. Des auteurs

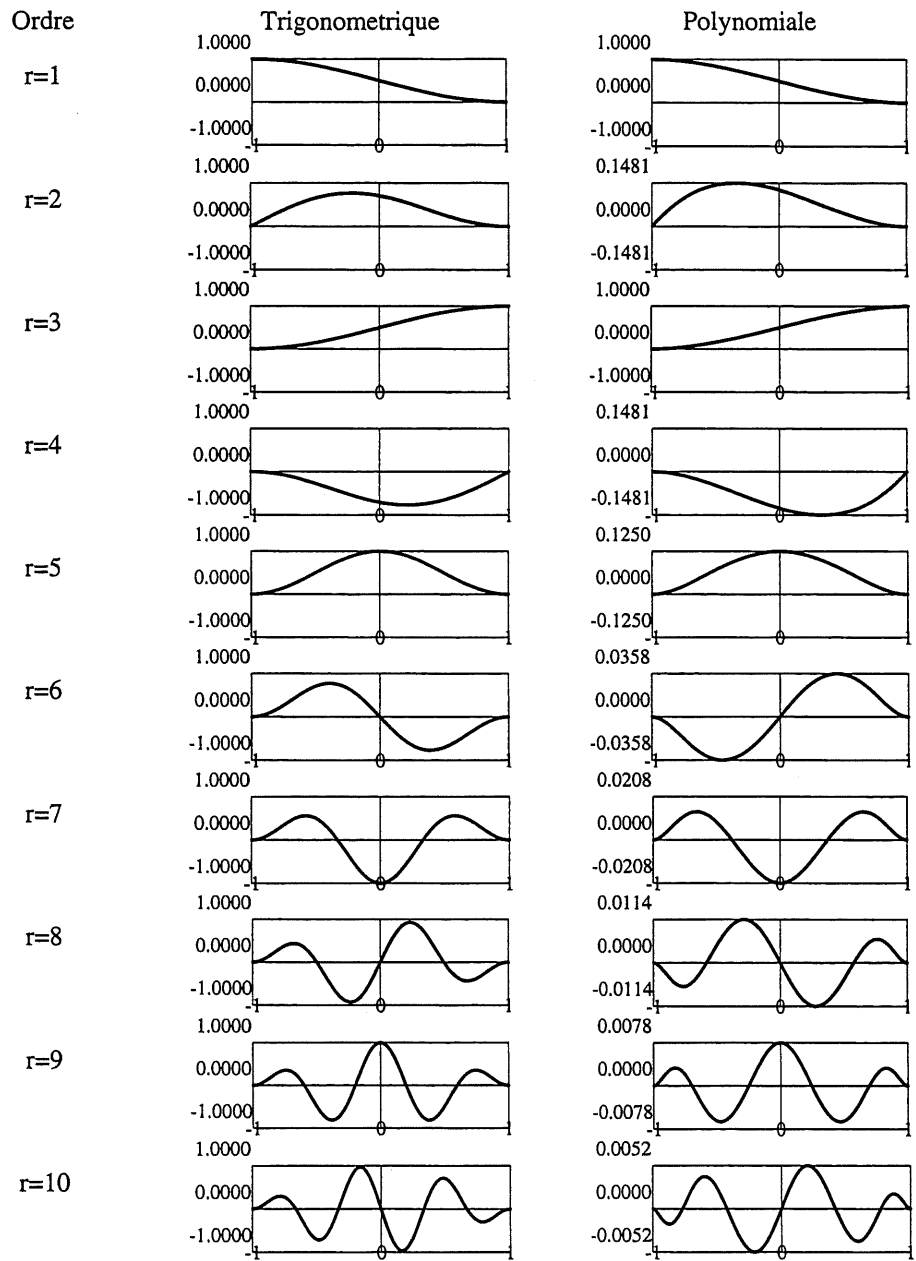


FIG. 2.2 – Comparaison entre les fonctions trigonométriques et polynômiales

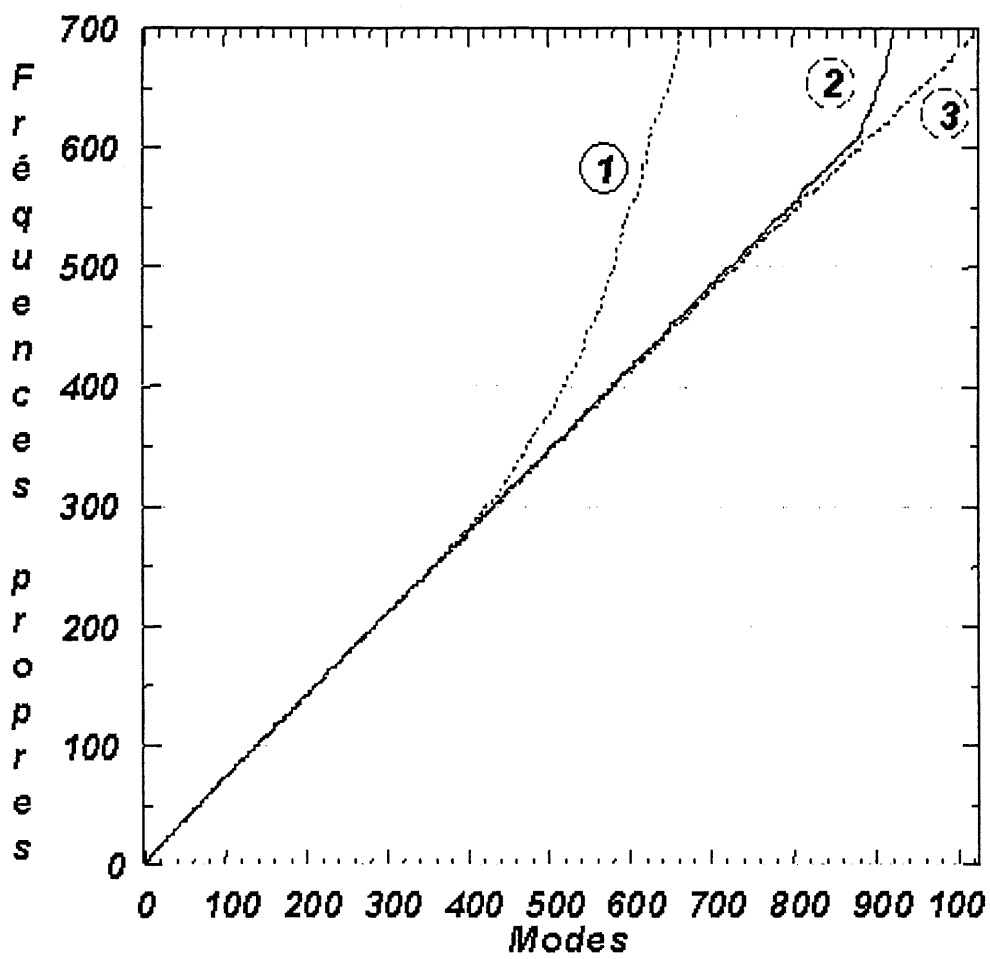


FIG. 2.3 – Convergence des fréquences propres d'une plaque simplement appuyée. Comparaison entre les polynômes(1), fonctions trigonométriques(2) et la solution analytique(3).

(Liew[16, 17] et Xiang[25]) ont par la suite utilisé le modèle de plaque de Mindlin pour introduire ces effets. Berry[4] y a ajouté le mouvement dans le plan et montré les différences qu'il peut engendrer.

Les deux modèles de plaques ont leurs équivalents dans les modèles de poutres pour décrire les raidisseurs. Le modèle poutre de Timoshenko est l'équivalent du modèle de plaque de Mindlin. Pour sa part, le modèle d'Euler-Bernoulli est l'équivalent du modèle de Love-Kirchoff. Nous choisirons le modèle de poutre tel que décrit par Berry[2]. Ce dernier dépend de la flexion de plaque et il tient compte l'énergie de flexion et de torsion du raidisseur.

Du point de vue numérique, des méthodes plus performantes ont été proposées. Koko[12] a, par exemple, utilisé des "super-éléments" comportant 55 variables pour représenter le modèle de plaque. Plusieurs autres auteurs se sont basés sur une variante de la méthode de Rayleigh-Ritz avec des polynômes d'ordres élevés. Côté[8] a, pour sa part, modélisé une plaque raidie finie pour tester une méthode d'éléments p dans les moyennes fréquences.

Le rayonnement acoustique des plaques raidies a été relativement peu étudié. On peut citer les travaux de Mead[19] qui a modélisé des réseaux infinis de raidisseurs orthogonaux et Berry[2, 3, 4] pour une plaque finie avec différents modèles de raidisseurs.

2.6 Conclusion

La revue des connaissances nous permet de constater que les éléments finis hiérarchiques avec fonctions trigonométriques semblent être les plus efficaces pour l'étude exacte des vibrations de plaques jusqu'aux moyennes fréquences. Notre objectif est d'étendre cette méthode au calcul vibroacoustique de la plaque raidie.

L'objectif principal est de permettre l'assemblage des éléments finis hiérarchiques de plaques avec des fonctions trigonométriques. Ces derniers ont été utilisés pour le cas d'un seul élément jusqu'à présent. L'assemblage de plusieurs éléments va permettre d'une part d'augmenter le nombre cas traités. Nous pourrons donc étudier des plaques

en forme de "L" et des plaques trouées. L'autre avantage est l'amélioration de la convergence dans le cas des plaques raidies. En effet, les modèles à un seul élément ont de la difficulté à reconstruire les vibrations locales entre les raidisseurs. Nous croyons qu'un maillage plus judicieux peut améliorer la situation.

Enfin, nous allons proposer une façon d'utiliser les fonctions trigonométriques pour calculer le rayonnement acoustique des plaques.

Chapitre 3

Énergie des plaques et des raidisseurs

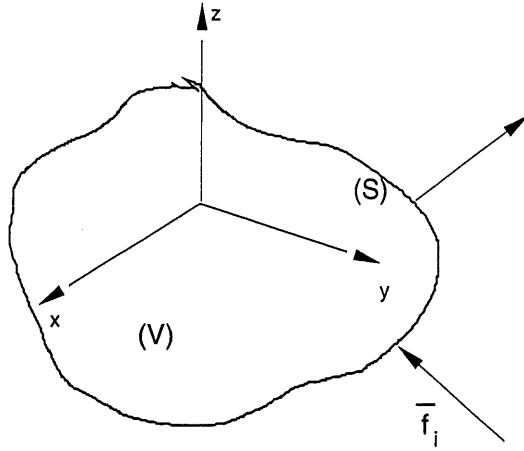


FIG. 3.1 – Volume élastique en 3 dimensions

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons décrire les fonctionnelles d'énergie qui sont utilisées pour représenter la mécanique de la structure. C'est la première étape de notre quête pour décrire le mouvement d'un système.

3.1.1 Théorie classique de l'élasticité

La structure (la plaque et les raidisseurs) sera considérée comme une matière continue élastique. Pour l'instant, aucun couplage avec un fluide extérieur n'est considéré. On utilisera les théories classiques de l'élasticité d'un solide en 3 dimensions (voir la figure 3.1). L'équation du mouvement d'un solide élastique s'écrit (en notation indicielle)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \sigma_{ij,j} \quad (3.1)$$

où ρ est la densité du solide, u est son déplacement, f_i la force volumique et σ_{ij} le tenseur des contraintes. On utilise la convention où les indices latins représentent les 3 dimensions spatiales. Un indice muet représente une sommation. Dans le cas où l'on considère de petites déformations, le tenseur de déformation ε_{ij} s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

Avec un matériau linéaire, la relation contraintes-déformations s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

où C_{ijkl} est la matrice d'élasticité. À l'équation du mouvement, il faut ajouter les conditions limites. Dans les problèmes d'élasticité, ces conditions prennent deux formes : on peut soit imposer un déplacement (conditions de type cinématique) ou bien imposer une contrainte (conditions de type statique). Les conditions dynamiques s'écrivent

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{f}_i \quad \text{sur } (S) \quad (3.4)$$

3.1.2 Formulation variationnelle

Pour trouver l'équation du mouvement, on a recours à la formulation variationnelle. On écrit la fonctionnelle de Hamilton, l'intégrale entre 2 temps arbitraires t_0 et t_1 du Lagrangien du système.

$$H(u) = \int_{t_0}^{t_1} (T - V + W) dt \quad (3.5)$$

où

$$H(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_V \left(\frac{1}{2} \rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + f_i u_i \right) dv + \int_S \bar{f}_i u_i ds \right] dt \quad (3.6)$$

L'énergie cinétique T , de déformation V et le travail des forces externes W apparaissent explicitement. f_i et \bar{f}_i sont respectivement les forces externes de volume et de surface. La formulation variationnelle se manipule facilement du fait que l'on travaille avec des quantités scalaires. Il est très facile de décrire un système complexe et de faire les approximations appropriées. Nous allons utiliser la formulation variationnelle avec le déplacement comme variable indépendante. Il existe des formulations de type mixtes,

comme dans le cas de la formulation de Reissner, où on utilise à la fois les contraintes et les déplacements comme variables indépendantes. Cependant, la formulation en déplacement est habituellement assez précise et elle est la plus couramment utilisée.

La méthode variationnelle est basée sur le théorème de Hamilton qui s'énonce de la manière suivante :

Si la champ de déplacement de la plaque est cinématiquement admissible, c'est à dire s'il vérifie les conditions aux limites cinématiques (déplacement de la structure sur la frontière), et si ce champ de déplacement rend la fonctionnelle de Hamilton extrémale

$$\delta H(u) = 0 \quad (3.7)$$

alors le champ de déplacement vérifie l'équation du mouvement (Éq.(3.1)) du système et les conditions aux limites statiques (Éq.(3.4)).

L'utilisation de la méthode variationnelle pour trouver les équations du mouvement consistera en 2 grandes étapes. La première consiste à faire des approximations "physiques" et à formuler les énergies en fonction de la géométrie de la structure. Cette étape sera faite à la section suivante. La deuxième étape consiste en une approximation "numérique" du champ de déplacement. Nous allons voir au chapitre 4 une application du théorème de Hamilton pour approximer numériquement le comportement de notre système à l'aide de la méthode de Ritz.

3.2 Énergie de la plaque

Pour modéliser une plaque, on peut utiliser le modèle exact d'élasticité linéaire en 3 dimensions. Cependant, pour la modélisation numérique, ce modèle souffre de problèmes d'arrondis lorsque l'épaisseur devient très petite par rapport aux autres dimensions. Dans le cas d'une plaque mince, il est normal de ramener le problème à deux dimensions.

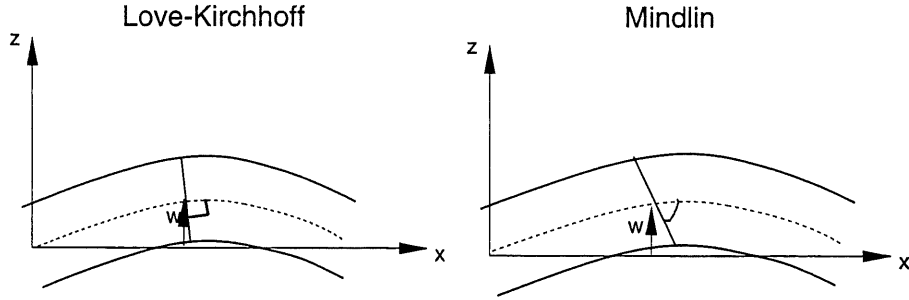


FIG. 3.2 – Comparaison entre les modèles de Love-Kirchhoff et Mindlin.

3.2.1 Modèle de Love-Kirchhoff

Le modèle le plus simple pour décrire le champ de déplacement d'une plaque mince est celui de Love-Kirchhoff. Le déplacement est dépendant d'une seule variable : le déplacement transversal $w(x, y, t)$. On qualifie donc ce modèle de "flexion-pure". Les déplacements $u_i = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Les hypothèses menant au modèle Love-Kirchhoff sont les suivantes :

- Il n'y a aucun mouvement dans le plan de la fibre neutre
- Les sections droites déformées restent normales au plan neutre de la plaque

3.2.2 Modèle de Mindlin-Reissner

Reissner et Mindlin ont proposé une théorie où les sections droites ne sont plus nécessairement normales au plan neutre. La rotation des sections droites est plutôt fonction de 2 variables ψ_x et ψ_y . Cette différence est illustrée à la figure 3.2. Ces variables sont les rotations $\psi_x(x, y, t)$ et $\psi_y(x, y, t)$ des normales à la surface de la plaque par rapport aux axes x et y .

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= -z\psi_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= -z\psi_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Il est également possible d'ajouter les mouvements $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ dans le plan de la plaque.

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z\psi_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z\psi_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Les hypothèses de Reissner-Mindlin prennent en compte le cisaillement transverse de la plaque. Cet effet est négligeable pour la vibration des plaques minces en basse fréquence mais peut devenir important pour les plaques plus épaisses ou dans les hautes fréquences.

Wittrick[23] a montré que, en négligeant les effets aux frontières, l'erreur engendrée par les approximations de Kirchhoff est de l'ordre de (h^2/μ^2) où h est l'épaisseur de la plaque et μ est la demi-longueur d'onde de flexion de la plaque vibrante. En effet, il existe une relation entre les fréquences naturelles d'une plaque de Kirchhoff et celles d'une plaque de Mindlin dans le cas d'une plaque rectangulaire aux cotés simplement appuyés. Avec ω la fréquence d'un mode d'une plaque de Kirchhoff et $\hat{\omega}$ celle de la plaque de Mindlin correspondante, et en négligeant l'énergie de rotation on a

$$\hat{\omega} = \frac{\omega^2}{1 + \frac{\omega h^2}{6(1-\nu)\kappa^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \tag{3.11}$$

où h est l'épaisseur de la plaque, ν le coefficient de Poisson, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ le module de rigidité et κ un facteur de correction pour compenser l'erreur commise dans l'approximation du cisaillement constant sur l'épaisseur de la plaque dans le modèle de Mindlin. Pour une plaque d'acier de 3mm ($h = 3mm$, $E = 200MPa$, $\nu = 0.3$, $\kappa = 5/6$) les effets sont négligables en basse fréquence mais pour une fréquence de 10000Hz un mode sera surestimé d'environ 3Hz dans la plaque de Kirchhoff par rapport à celle de Mindlin. Le modèle de Kirchhoff reste utile pour représenter avec suffisamment de

précision les structures considérées dans le domaine de fréquences acoustiques.

3.2.3 Construction de la fonctionnelle

Avec le champ de déplacement du modèle de Love-Kirchhoff (Éq.(3.8)), on peut construire directement la fonctionnelle (Éq.(3.6)).

Pour l'énergie cinétique T , on s'intéressera au déplacement transverse w tout en négligeant la rotation due aux déplacements u et v .

$$T_p^{(plaque)} = \int_V \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv = \int_S \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (3.12)$$

Pour l'énergie de déformation V , on utilise la loi de comportement de matériau bidimensionnel isotrope. Avec

$$V = \int_t \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dv \quad (3.13)$$

Selon (Éq.(3.2)), les seules composantes non-nulles de la déformation avec les hypothèses de Kirchhoff sont ε_{11} , ε_{21} et ε_{22} .

$$V = \int_V \left(\frac{1}{2} C_{1111} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} C_{2222} \varepsilon_{22}^2 + 2C_{2121} \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11} C_{1122} \varepsilon_{22} \right) dv \quad (3.14)$$

Le tenseur des coefficients élastiques pour un matériau bidimensionnel isotrope est donné par

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ C_{1122} &= C_{1133} = C_{2233} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ C_{2121} &= C_{3131} = C_{3232} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'énergie potentielle est donc

$$V_p^{(plaque)} = \int_S \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.16)$$

Les seules forces externes considérées seront les forces transverses. En notant f_z la force transverse appliquée par unité de surface, on a

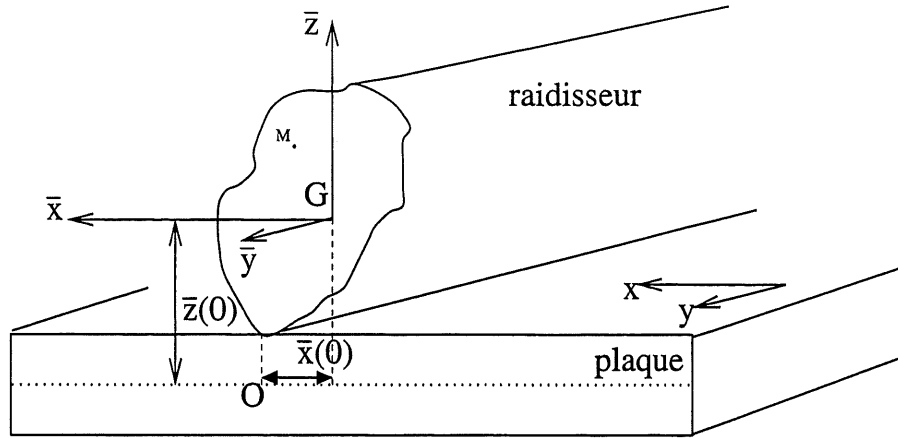


FIG. 3.3 – Raidisseur

$$W = \int_S f_z w dx dy \quad (3.17)$$

La fonctionnelle de Hamilton pour les plaques minces en utilisant les hypothèses de Love-Kirchhoff est donc

$$\begin{aligned}
 H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \int_S \left\{ \frac{1}{2} \rho h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right. \\
 \left. + \int_S f_z w \right\} dx dy \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

3.3 Énergie du raidisseur

Nous allons supposer un raidisseur parallèle à y tel que montré à la figure 3.3. Les axes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ont comme origine le centre de masse G de la section du raidisseur. La jonction entre la plaque et le raidisseur suit une ligne. Le point O est sur le plan moyen de la plaque et vis-à-vis la jonction. L'expression du champ de déplacement $(\bar{u}(M), \bar{v}(M), \bar{w}(M))$ d'un point M dans le raidisseur peut être entièrement déterminé par le déplacement $w(O)$ du plan moyen de la plaque

$$\begin{aligned}
\bar{u}(M) &= -(\bar{z}(M) - \bar{z}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{x}} \\
\bar{v}(M) &= -(\bar{z}(M) - \bar{z}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{y}} \\
\bar{w}(M) &= w(O) + (\bar{x}(M) - \bar{x}(O)) \frac{\partial w(O)}{\partial \bar{x}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Selon cette expression, la section droite est indéformable et reste fixe par rapport au point O de la fibre neutre de la plaque. L'énergie cinétique en fonction du champ de déplacement $\bar{u}_i = (\bar{u}(M), \bar{v}(M), \bar{w}(M))$ est définie par

$$T_y^{(raid)} = \int_V \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dV \tag{3.20}$$

où ρ est la masse volumique du raidisseur et l'intégration est effectuée sur le volume V du raidisseur. Le champ de déplacement (Éq.(3.19)) implique que

$$\begin{aligned}
T_y^{(raid)} &= \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \left[\frac{1}{2} \rho S \bar{z}^2(O) \left[\left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{y} \partial t} \right)^2 \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \rho S \left[\left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial t^2} \right)^2 + \bar{x}^2(O) \left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 - 2 \bar{x}(O) \frac{\partial w(O)}{\partial t} \frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{x} \partial t} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \rho I_{\bar{x}\bar{x}} \left[\left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{y} \partial t} \right)^2 \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \rho I_{\bar{z}\bar{z}} \left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{x} \partial t} \right)^2 \right] d\bar{y}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

où S est l'aire de la section droite du raidisseur. $I_{\bar{x}\bar{x}}$ et $I_{\bar{z}\bar{z}}$ sont les moments d'inertie de la section droite et définis par

$$\begin{aligned}
I_{\bar{x}\bar{x}} &= \int_S \bar{z}^2(M) dM \\
I_{\bar{z}\bar{z}} &= \int_S \bar{x}^2(M) dM
\end{aligned} \tag{3.22}$$

On peut obtenir l'expression pour l'énergie potentielle toujours avec le champ de déplacement (Éq.(3.19)) et utilisant la loi de comportement élastique du matériau isotrope pour le raidisseur.

$$\begin{aligned}
V_y^{(raid)} &= \int_{\bar{y}_{min}}^{\bar{y}_{max}} \left[\frac{1}{2} E \left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 [I_{\bar{x}\bar{x}} + S \bar{z}^2(O)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial^2 w(O)}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right)^2 [I_{\bar{x}\bar{x}} + I_{\bar{z}\bar{z}} + S (\bar{z}^2(O) + \bar{x}^2(O))] \right] d\bar{y}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

On peut remplacer par la constante de St-Venant J_y l'expression suivante :

$$J_y = I_{\bar{x}\bar{x}} + I_{\bar{z}\bar{z}} + S (\bar{z}^2(O) + \bar{x}^2(O)) \tag{3.24}$$

Pour un raidisseur parallèle à l'axe x de la plaque, on n'aura qu'à permuter les x et y dans (Éq.(3.21)) et (Éq.(3.23)).

Du fait que ce modèle de raidisseur est fonction seulement du déplacement w de la plaque, cela en fait le modèle idéal pour être jumelé au modèle de plaque en flexion pure de Love-Kirchhoff. La fonctionnelle de Hamilton d'une plaque p avec un raidisseur y et un raidisseur x sera

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} dt [T_p - V_p + T_y - V_y + T_x - V_x] \quad (3.25)$$

Chapitre 4

Méthode de Rayleigh-Ritz

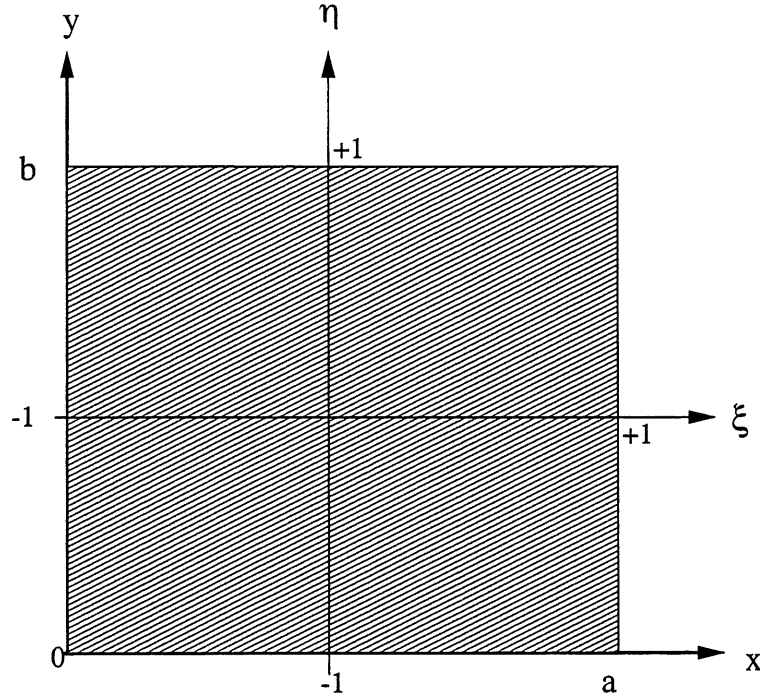


FIG. 4.1 – Élément de plaque

4.1 Méthode de Rayleigh-Ritz

On veut tout d'abord exprimer le déplacement de la fibre neutre de la plaque en fonction des fonctions tests. Pour une plaque rectangulaire de longueur a et de largeur b , on utilise les coordonnées adimensionnelles (ξ, η) où $\xi = \frac{2x}{a} - 1$ et $\eta = \frac{2y}{b} - 1$ tel que montré à la figure 4.1. Le déplacement $w(\xi, \eta, t)$ est alors donné par

$$\tilde{w}(\xi, \eta, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \tilde{q}_{mn}(t) \phi_m(\xi) \phi_n(\eta) \quad (4.1)$$

où $\phi_m(\xi)$ et $\phi_n(\eta)$ sont les fonctions test, M et N sont le nombre de fonctions dans les directions x et y respectivement et $\tilde{q}_{mn}(t)$ sont les coefficients inconnus de la méthode Rayleigh-Ritz.

À partir de la définition des énergies données au chapitre précédant, on peut extrémaliser la fonctionnelle de Hamilton, ce qui s'écrit $\delta H = 0$.

De façon équivalente, on exprime le Lagrangien \mathcal{L} du système

$$\mathcal{L} = T - V \quad (4.2)$$

et on peut trouver les équations du mouvement à l'aide des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{mn}(t)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{mn}(t)} = 0 \quad (4.3)$$

Pour une solution harmonique,

$$\tilde{w}(\xi, \eta, t) = e^{j\omega t} w(\xi, \eta) \quad (4.4)$$

$$w(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn} \phi_m(\xi) \phi_n(\eta) \quad (4.5)$$

Les équations de Lagrange conduisent à un système d'équations linéaires pour le système libre de la forme

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (4.6)$$

où \mathbf{K} et \mathbf{M} sont les matrices de masse et de raideur et \mathbf{q} est le vecteur de coefficients inconnus de Rayleigh-Ritz $\{q_{mn}\}$.

4.1.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions tests que nous utiliserons seront les fonctions trigonométriques utilisées par Beslin [5]. Ces fonctions $\{\phi_m(\xi)\}$ sont définies de la manière suivante :

$$\phi_m(\xi) = \sin(a_m \xi + b_m) \sin(c_m \xi + d_m) \quad (4.7)$$

où les coefficients a_m, b_m, c_m, d_m sont donnés à au tableau 4.1. Les fonctions ϕ_m sont tracées à la figure 4.2.

Ces fonctions permettent d'imposer des conditions libres d'appui simple ou d'encastrement aux frontières. Pour ce faire, il suffit de se référer au tableau et d'enlever les fonctions correspondantes. On peut ainsi empêcher le déplacement et la rotation aux extrémités.

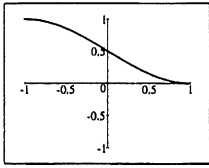
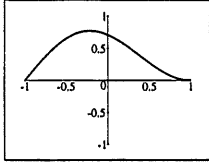
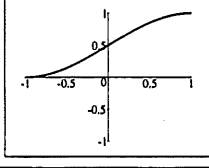
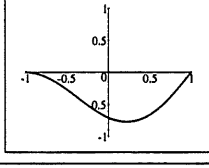
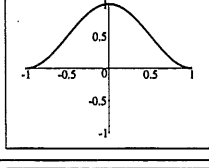
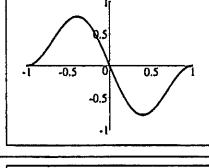
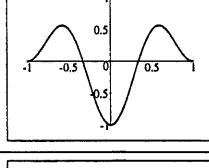
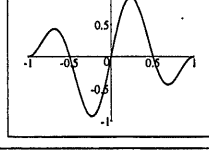
m	w		$w_{,\xi}$		Plot
	$\xi = -1$	$\xi = 1$	$\xi = -1$	$\xi = 1$	
$m = 1$	1	0	0	0	
$m = 2$	0	0	$\pi/2$	0	
$m = 3$	0	1	0	0	
$m = 4$	0	0	0	$\pi/2$	
$m = 5$	0	0	0	0	
$m = 6$	0	0	0	0	
$m = 7$	0	0	0	0	
$m = 8$	0	0	0	0	
$m > 8$	0	0	0	0	

FIG. 4.2 – Représentation graphique des 8 premières fonctions trigonométriques de même que la valeur de la fonction et sa dérivée aux extrémités.

m	a_m	b_m	c_m	d_m
1	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$
2	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/2$
3	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/4$	$-3\pi/4$
4	$\pi/4$	$-3\pi/4$	$\pi/2$	$-3\pi/2$
$m > 4$	$\pi/2(m - 4)$	$\pi/2(m - 4)$	$\pi/2$	$\pi/2$

TAB. 4.1 – Tableau des coefficients (a_m, b_m, c_m, d_m) des fonctions trigonométriques $\phi_m(\xi)$ où $\phi_m(\xi) = \sin(a_m\xi + b_m) \sin(c_m\xi + d_m)$

4.1.2 Matrice élémentaire de masse et de raideur

Nous allons maintenant décrire matrices élémentaires d'un élément de plaque avec ses raidisseurs comme celui montré à la figure 4.3. Ces matrices élémentaires seront basées sur les expressions des plaques seules et pourrons être assemblées pour former les matrices globales. Ces matrices globales représentent un système complexe de plusieurs plaques et de raidisseurs.

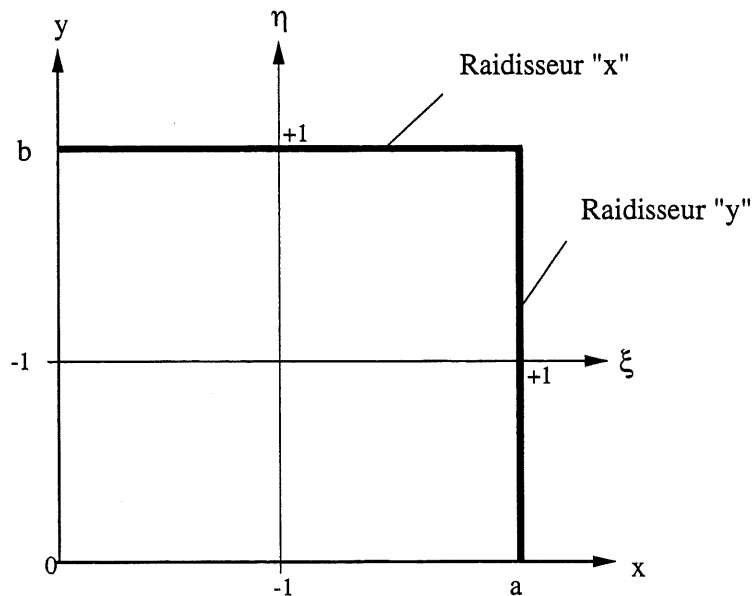


FIG. 4.3 – Élément de plaque avec 2 raidisseurs.

Plaque seule

En substituant (Éq.(4.1)) dans (Éq.(3.12)) l'énergie cinétique de la plaque peut s'écrire

$$T_p = (\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}_p \dot{\mathbf{q}} \quad (4.8)$$

où $\dot{\mathbf{q}} = \{q_{mn,t}\}$ et $\mathbf{q} = \{q_{mn}\}$ sont les vecteurs de coefficients de Rayleigh-Ritz et \mathbf{M}_p est la matrice de masse de la plaque.

$$\mathbf{M}_p = [M_{p\,mnrs}] = \frac{\rho h a b}{4} [I_{mr}^{00} I_{ns}^{00}] \quad (4.9)$$

De façon similaire, l'énergie de déformation de la plaque est donnée par

$$V_p = (\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{q}} \quad (4.10)$$

où \mathbf{K}_p^i est la matrice de raideur de la plaque.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p &= [K_{p\,mnrs}] \\ &= \frac{4Db}{(a)^3} [I_{mn}^{22} I_{ns}^{00} + \left(\frac{a}{b}\right)^4 I_{mr}^{00} I_{ns}^{22} + \nu \left(\frac{a}{b}\right)^2 (I_{mr}^{20} I_{ns}^{02} + I_{mr}^{02} I_{ns}^{20}) \\ &\quad + 2(1 - \nu) \left(\frac{a}{b}\right)^2 I_{mr}^{11} I_{ns}^{11}] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les termes $I_{mr}^{\alpha\beta}$ des équations (Éq.(4.9)) et (Éq.(4.11)) sont définies par l'intégrale suivante :

$$I_{mr}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^{+1} \frac{d^\alpha \phi_m(\xi)}{d\xi^\alpha} \frac{d^\beta \phi_r(\xi)}{d\xi^\beta} d\xi \quad (4.12)$$

Cette intégrale se calcule rapidement de façon symbolique et il n'est pas requis de les enregistrer dans des tableaux pré-calculés.

Raidisseur

L'énergie cinétique d'un raidisseur parallèle à l'axe y est donnée par

$$T_y = (\dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{M}_y \dot{\mathbf{q}} \quad (4.13)$$

où \mathbf{M}_y est la matrice de masse du raidisseur.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y &= [M_{ymnrs}] \\ &= \frac{2\rho_y b}{(a)^2} [S_y((\bar{z})^2 + (\bar{x})^2) + I_{\bar{z}\bar{z}} + I_{\bar{x}\bar{x}}] \phi_{m,\xi}(\xi_y) \phi_{r,\xi}(\xi_y) I_{ns}^{00} \\ &\quad + \frac{2\rho_y}{b} [S_y(\bar{z})^2 + I_{\bar{x}\bar{x}}] \phi_m(\xi_y) \phi_r(\xi_y) I_{ns}^{11} \\ &\quad - \frac{\rho_y S_y \bar{x} b}{a} [\phi_{m,\xi}(\xi_y) \phi_r(\xi_y) + \phi_m(\xi_y) \phi_{r,\xi}(\xi_y)] I_{ns}^{00} \\ &\quad + \frac{\rho_y S_y b}{2} \phi_m(\xi_y) \phi_r(\xi_y) I_{ns}^{00} \end{aligned} \quad (4.14)$$

où ξ_y est le point d'attache du raidisseur sur la plaque. L'énergie de déformation du raidisseur sera donnée par

$$V_y = (\mathbf{q})^T \mathbf{K}_y \mathbf{q} \quad (4.15)$$

où \mathbf{K}_y est la matrice de raideur du raidisseur.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_y &= [K_{ymnrs}] \\ &= \frac{8E_y}{(b)^3} [I_{\bar{x}\bar{x}} + (\bar{z})^2 S_y] \phi_m(\xi_y) \phi_r(\xi_y) I_{ns}^{22} \\ &\quad + \frac{8G_y}{(a)^2 b} J_{\bar{y}} \phi_{m,\xi}(\xi_y) \phi_{r,\xi}(\xi_y) I_{ns}^{11} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Les expressions pour le cas où le raidisseur est parallèle à l'axe x peuvent être obtenues simplement en permutant a et b , x et y de même que ξ et η . Les matrices de masse et de raideur des raidisseurs peuvent elles aussi être évaluées symboliquement.

Élément de plaque et de raidisseur

Nous appellerons "élément de plaque" un morceau de plaque qui a ses propres coefficients de Ritz. L'élément contiendra également les raidisseurs qui sont attachés

sur ce morceau de plaque. Avant l'assemblage, chaque élément k sera complètement exprimé par sa propre série de coefficients q_{mn}^k .

$$w^k(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{M^k} \sum_{n=1}^{N^k} q_{mn}^k \phi_m(\xi) \phi_n(\eta) \quad (4.17)$$

Pour l'élément, nous pourrions utiliser l'expression d'une plaque unique avec ses raidisseurs. Notons T^k et V^k , l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'élément de plaque k avec ses raidisseurs.

$$T^k = \dot{\mathbf{q}}^k T \mathbf{M}^k \dot{\mathbf{q}}^k \quad (4.18)$$

$$V^k = \mathbf{q}^k T \mathbf{K}^k \mathbf{q}^k \quad (4.19)$$

L'énergie de l'élément de plaque sera égale à l'énergie de la plaque et des raidisseurs attachés dessus.

$$T^k = T_p^k + T_x^k + T_y^k \quad (4.20)$$

$$V^k = V_p^k + V_x^k + V_y^k \quad (4.21)$$

Les matrices de masse et de raideur \mathbf{M}^k et \mathbf{V}^k de l'élément k s'expriment en fonction des matrices de plaque et de raidisseur de la section précédente.

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{M}_p^k + \mathbf{M}_x^k + \mathbf{M}_y^k \quad (4.22)$$

$$\mathbf{V}^k = \mathbf{K}_p^k + \mathbf{K}_x^k + \mathbf{K}_y^k \quad (4.23)$$

Matrice globale du système

Les énergies cinétique et potentielle peuvent s'écrire

$$T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.24)$$

$$V = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.25)$$

où $\mathbf{q} = \{q^1; q^2; \dots; q^i; \dots; q^{N_p}\}$ est le vecteur de coefficients de Rayleigh-Ritz pour l'assemblage des N_p éléments de plaque et

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{M}^i & & \\ & & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \mathbf{M}^{N_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{K}^i & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{K}^{N_p} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

sont les matrices globales de masse et de raideur,

$$\mathbf{M}^i = \mathbf{M}_p^i + \mathbf{M}_x^i + \mathbf{M}_y^i \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}^i = \mathbf{K}_p^i + \mathbf{K}_x^i + \mathbf{K}_y^i \quad (4.28)$$

sont leurs matrices élémentaires respectives. L'application du principe variationnel sur la structure globale nous mène au problème aux valeurs propres

$$\mathbf{H}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

où $\mathbf{H} = -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ et ω est la fréquence angulaire

4.1.3 Réponse forcée

Un élément de plaque k peut subir un travail externe W^k ,

$$W^k = \frac{a^k b^k}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f^k(\xi, \eta) w^k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.30)$$

où a^k et b^k sont les dimensions de la plaque et f^k la force associée au travail, on peut écrire

$$W^k = (\mathbf{q}^k)^T \mathbf{f}^k \quad (4.31)$$

avec $\mathbf{f}^k = \{f_{mn}^k\}$ le vecteur de force élémentaire sur l'élément k .

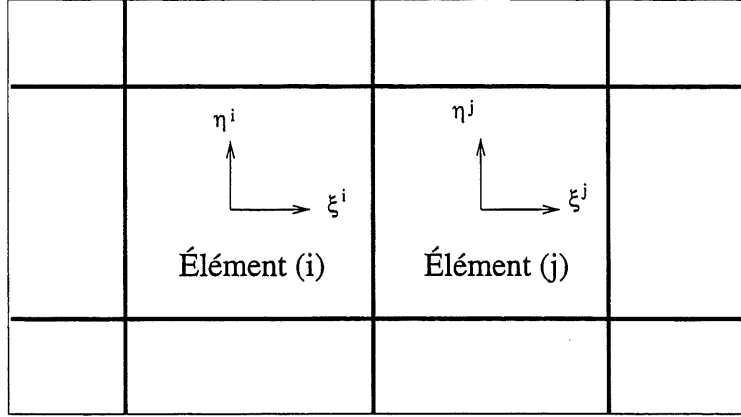


FIG. 4.4 – Coordonnées de 2 éléments voisins

$$f_{mn}^k = \frac{a^k b^k}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f^k(\xi, \eta) \phi_m(\xi) \phi_n(\eta) d\xi d\eta \quad (4.32)$$

$f^k(\xi, \eta)$ représente la force transversale par unité d'aire sur l'élément k . Si l'excitation est une force ponctuelle localisée à (ξ_0^k, η_0^k) , $f^k(\xi, \eta) = f^k \delta(\xi - \xi_0^k) \delta(\eta - \eta_0^k)$ ce qui mène à

$$f_{mn}^k = \frac{a^k b^k}{4} f^k(\xi_0^k, \eta_0^k) \phi_m(\xi_0^k) \phi_n(\eta_0^k) \quad (4.33)$$

Le vecteur de force global sera $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}^1; \mathbf{f}^2; \dots; \mathbf{f}^k; \dots\}$ et la réponse forcée de la structure globale sera la solution du système linéaire

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = \mathbf{f} \quad (4.34)$$

4.2 Continuité à la frontière entre deux plaques

Nous décrirons explicitement l'assemblage entre 2 éléments adjacents i et j tels que montrés à la figure 4.4. Nous allons imposer que le déplacement et la pente à l'interface entre ces 2 éléments soit continue pour $-1 \leq \eta^i = \eta^j \leq +1$,

$$w^i(1, \eta^i) = w^j(-1, \eta^i), \quad \forall \eta^i \quad (4.35)$$

$$\frac{2}{a^i} \frac{dw^i(1, \eta^i)}{d\xi^i} = \frac{2}{a^j} \frac{dw^j(-1, \eta^i)}{d\xi^j}, \quad \forall \eta^i \quad (4.36)$$

En explicitant avec les fonctions tests de Rayleigh-Ritz,

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}^i \phi_m(1) \phi_n(\eta^i) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}^j \phi_m(-1) \phi_n(\eta^i), \quad \forall \eta^i \quad (4.37)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}^i \frac{d\phi_m}{d\xi}(1) \phi_n(\eta^i) = \frac{a^i}{a^{i+1}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mn}^j \frac{d\phi_m}{d\xi}(-1) \phi_n(\eta^i), \quad \forall \eta^i \quad (4.38)$$

En regardant les propriétés des fonctions ϕ_m à la figure 4.2, on note que

$$\phi_m(1) \begin{cases} = 1 \text{ pour } m = 3 \\ = 0 \text{ autrement} \end{cases}, \quad \phi_m(-1) \begin{cases} = 1 \text{ pour } m = 1 \\ = 0 \text{ autrement} \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\frac{d\phi_m}{d\xi}(1) \begin{cases} = \frac{\pi}{2} \text{ pour } m = 4 \\ = 0 \text{ autrement} \end{cases}, \quad \frac{d\phi_m}{d\xi}(-1) \begin{cases} = \frac{\pi}{2} \text{ pour } m = 2 \\ = 0 \text{ autrement} \end{cases} \quad (4.40)$$

Les conditions (Éq.(4.37)) et (Éq.(4.38)) deviennent

$$\sum_{n=1}^N q_{3n}^i \phi_n(\eta^i) = \sum_{n=1}^N q_{1n}^j \phi_n(\eta^i), \quad \forall \eta^i \quad (4.41)$$

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N q_{4n}^i \phi_n(\eta^i) = \frac{\pi}{2} \frac{a^i}{a^j} \sum_{n=1}^N q_{2n}^j \phi_n(\eta^i), \quad \forall \eta^i \quad (4.42)$$

Ces équations doivent être valides pour tout $\phi_n(\eta^i)$, les ϕ_n formant une base de fonctions sur l'intervalle $-1 \leq \eta^i \leq +1$. On a donc

$$q_{3n}^i = q_{1n}^j, \quad \forall n \quad (4.43)$$

$$q_{4n}^i = \frac{a_i}{a_j} q_{2n}^j, \quad \forall n \quad (4.44)$$

pour $1 \leq n \leq N$. De façon semblable, si les éléments i et j avaient une interface parallèle à l'axe x , la continuité du déplacement et de la pente s'écrirait

$$w^i(\xi^i, 1) = w^j(\xi^i, -1), \quad \forall \xi^i \quad (4.45)$$

$$\frac{2}{b^i} \frac{dw^i(\xi^i, 1)}{d\eta^i} = \frac{2}{b^j} \frac{dw^j(\xi^i, -1)}{d\eta^j}, \quad \forall \xi^i \quad (4.46)$$

et on obtiendrait les conditions sur les coefficients

$$q_{m3}^i = q_{m1}^j, \quad \forall m \quad (4.47)$$

$$q_{m4}^i = \frac{b^i}{b^j} q_{m2}^j, \quad \forall m \quad (4.48)$$

pour $1 \leq m \leq M$.

Les conditions de continuité du déplacement et de sa dérivée à la frontière entre les éléments seront suffisantes pour permettre l'assemblage de la structure globale. On voit que ces conditions se traduisent par de simples conditions sur les coefficients de Ritz.

4.2.1 Imposition d'une condition

Il faut pouvoir implémenter une condition entre 2 inconnues du type $q_g = \alpha q_f$, telles qu'elles apparaissent dans les équations (4.43, 4.44, 4.47 et 4.48). Avant l'application des équations de Lagrange on avait l'expression du hamiltonien (Éq.(4.29)) que l'on peut écrire :

$$H = \sum_i \sum_j q_i q_j H_{ij} \quad (4.49)$$

avec $H_{ij} = K_{ij} - \omega^2 M_{ij}$. On peut isoler la partie avec des indices g

$$H = \sum_{i \neq g} \sum_{j \neq g} q_i q_j H_{ij} + \sum_{i \neq g} q_i q_g H_{ig} + \sum_{j \neq g} q_g q_j H_{gj} + q_g q_g H_{gg} \quad (4.50)$$

En appliquant la condition $q_g = \alpha q_f$ on remplace et on a

$$H = \sum_{i \neq g} \sum_{j \neq g} q_i q_j H_{ij} + \sum_{i \neq g} \alpha q_i q_f H_{ig} + \sum_{j \neq g} \alpha q_f q_j H_{gj} + \alpha^2 q_f^2 H_{gg} \quad (4.51)$$

Cette dernière expression peut s'écrire simplement

$$H = \sum_{i \neq g} \sum_{j \neq g} q_i q_j \left[H_{ij} + \delta_{if} \alpha H_{ig} + \delta_{fj} \alpha H_{gj} + \delta_{if} \delta_{fj} \alpha^2 H_{gg} \right] \quad (4.52)$$

où δ_{if} est le delta de Kronecker qui vaut 1 pour $i = f$ et 0 autrement. L'extrémalisation $\delta H = 0$ donne alors

$$\delta H = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i \neq g} \sum_{j \neq g} \left[q_i q_j H_{ij} + \delta_{if} \alpha H_{ig} + \delta_{fj} \alpha H_{gj} + \delta_{if} \delta_{fj} \alpha^2 H_{gg} \right] \delta q_k \quad (4.53)$$

d'où

$$\delta H = \sum_k \sum_{j \neq g} \left[2q_j \left(H_{kj} + \delta_{kf} \alpha H_{ig} + \delta_{fj} \alpha H_{gj} + \delta_{kf} \delta_{fj} \alpha^2 H_{gg} \right) \right] \delta q_k \quad (4.54)$$

Il faut que $\delta H = 0$ pour tout δq_k et on a finalement

$$\sum_{j \neq g} \left[q_j \left(H_{kj} + \delta_{kf} \alpha H_{ig} + \delta_{fj} \alpha H_{gj} + \delta_{kf} \delta_{fj} \alpha^2 H_{gg} \right) \right] = 0 \quad (4.55)$$

On peut schématiser l'opération avec une représentation matricielle. Le système initial avant l'imposition de la condition est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{f1} & \cdots & H_{g1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ H_{1f} & \cdots & H_{ff} & \cdots & H_{gf} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ H_{1g} & \cdots & H_{fg} & \cdots & H_{gg} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ \vdots \\ q_g \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.56)$$

avec la condition $q_g = \alpha q_f$ le système devient

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{f1} + \alpha H_{g1} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ H_{1f} + \alpha H_{1g} & \cdots & H_{ff} + \alpha H_{gf} + \alpha H_{fg} + \alpha^2 H_{gg} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ \vdots \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.57)$$

Les conditions d'interface entre deux éléments reviennent donc à éliminer des coefficients de Ritz et à condenser la matrice globale du système comme c'est fait dans (Éq.(4.57)).

Chapitre 5

Résultats : vibration des plaques
minces homogènes ou raidies

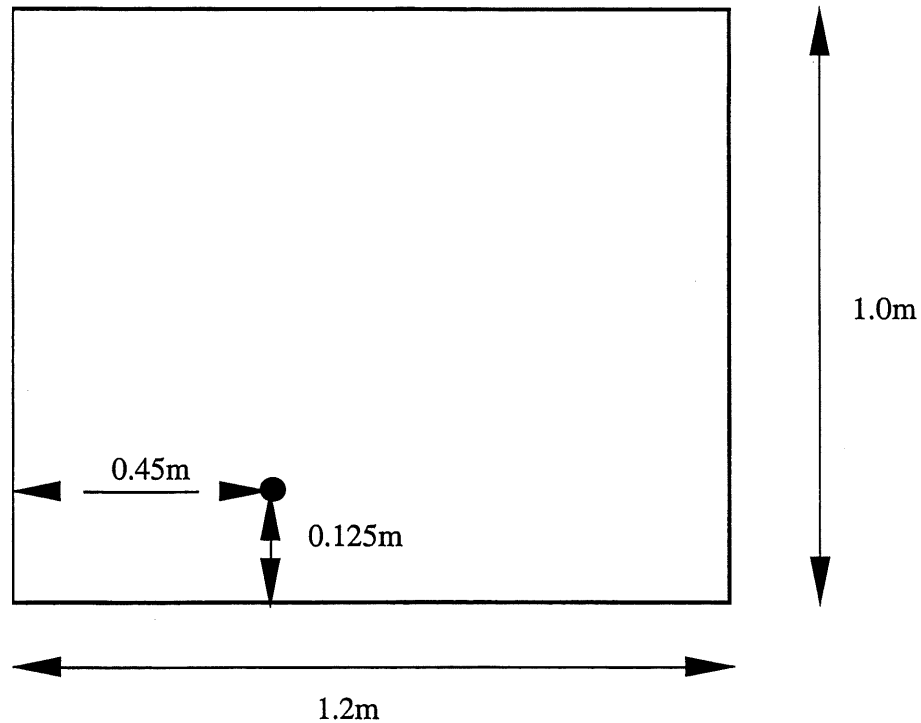


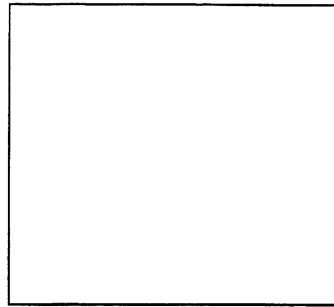
FIG. 5.1 – Plaque homogène rectangulaire

5.1 Introduction

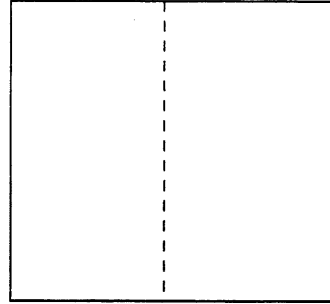
Ce chapitre présente les résultats de la méthode proposée au chapitre précédent. Tout d'abord, une étude de convergence nous permettra d'évaluer la performance numérique des fonctions trigonométriques utilisées. Nous comparerons ensuite les résultats avec d'autres méthodes d'éléments finis et des mesures expérimentales.

L'implémentation a été accomplie par un programme écrit en FORTRAN90 appelé "SINO". Les plupart des résultats présentés ont été exécutés sur un PC-Linux avec 256MB de mémoire vive.

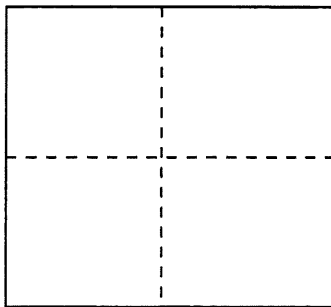
Les tableaux de résultats sont présentés à la fin du chapitre.



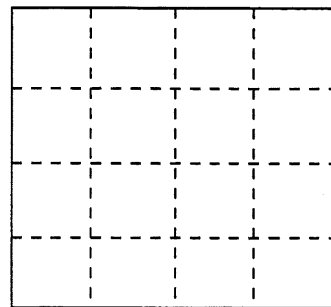
1x1 élément



2x1 éléments



2x2 éléments



4x4 éléments

FIG. 5.2 – Maillages utilisés pour la plaque homogène rectangulaire

5.2 Résultats numériques pour la plaque homogène

5.2.1 Convergence de la plaque rectangulaire

Dans un premier temps, nous allons appliquer la méthode à une plaque rectangulaire homogène (sans raidisseurs) pour vérifier la convergence de notre méthode.

Nous allons utiliser le cas d'une plaque d'acier ($E=200\text{GPa}$, $\rho=7800\text{kg/m}^3$) de dimension $1.2\text{m}\times 1.0\text{m}$ et d'épaisseur $h = 2.5\text{mm}$ comme celle de la figure 5.1. Cette plaque a les frontières simplement appuyées sur chaque côté. Nous pourrions comparer ce cas à la solution exacte. Cette dernière peut être obtenue analytiquement, les fréquences propres f_{ij} de la plaque sont données par

$$f_{ij} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (5.1)$$

Pour le calcul, la plaque est maillée selon plusieurs configurations tel que l'on peut

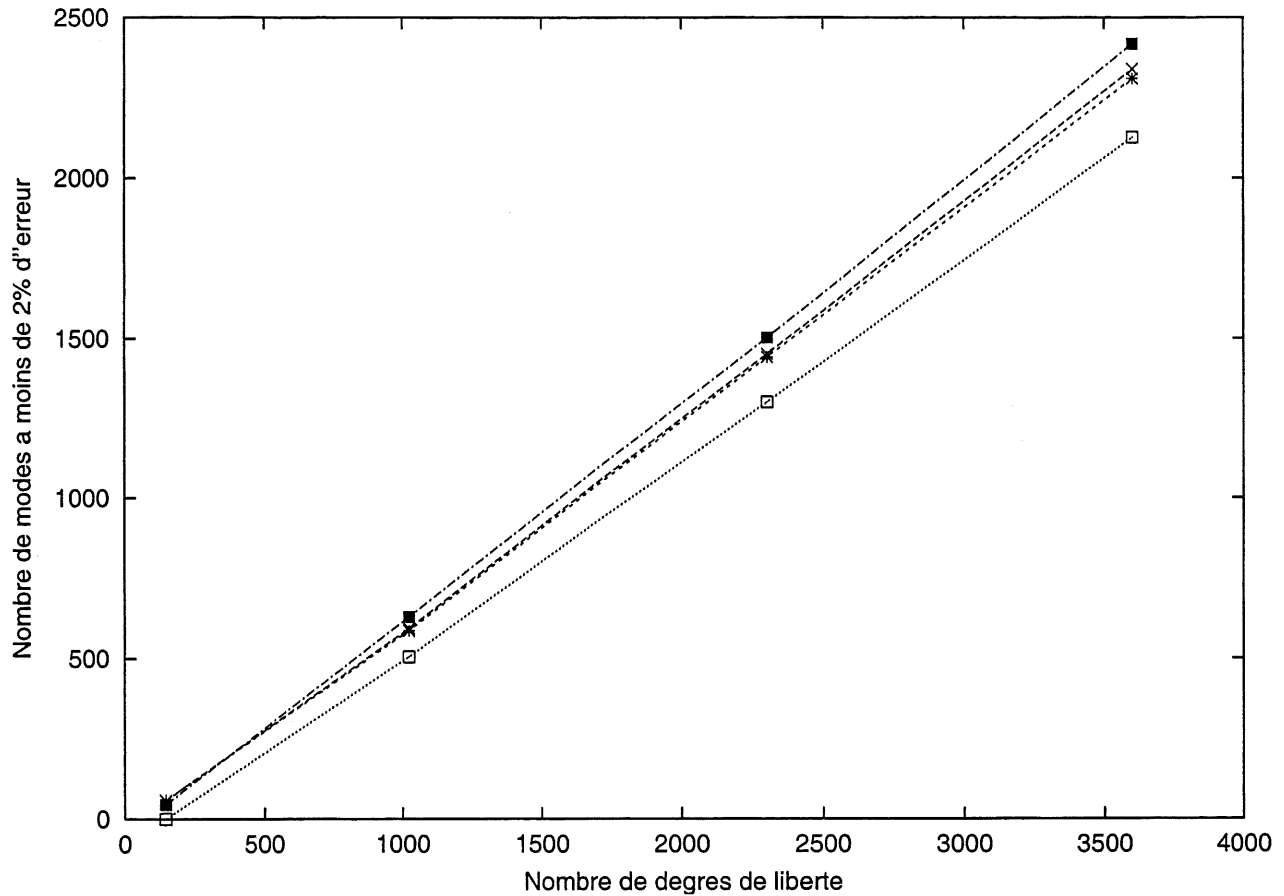


FIG. 5.3 – Convergence pour la plaque homogène. Nombre de modes à moins de 2% d'erreur. Maillage 1x1(□). Maillage 2x1(+). Maillage 2x2 (O). Maillage 4x4 (△).

voir à la figure 5.2. Des maillages de 1x1, 2x1, 2x2 et 4x4 éléments de plaques sont utilisés. Le nombre de fonctions tests de chaque élément est également variable.

Le tableau 5.1 nous montre les résultats obtenus à partir de différentes configurations. La seconde colonne indique le nombre de fonctions tests utilisées par élément et la troisième colonne indique le nombre total de degrés de liberté ("degrees of freedom", dof) utilisés. Les deux dernières colonnes représentent le nombre de modes qui ont convergé respectivement à moins de 1% et 2% de la solution exacte donnée par (Éq.(5.1)). On remarque qu'il vaut mieux avoir peu d'éléments et un nombre de fonctions tests élevé pour optimiser la convergence des modes.

La figure 5.3 représente le nombre de modes à moins de 2% d'erreur en fonction

du nombre de degré de liberté pour 3 différents maillages : 1×1 , 2×1 , 2×2 et 4×4 éléments. Ce graphique montre que pour ce cas, il est préférable d'utiliser un maillage comportant moins d'éléments pour un même nombre de degrés de liberté total. On remarque également que cette courbe suit une tendance linéaire. Cela s'explique par le fait que le nombre de fonctions tests doit être choisi selon la plus petite longueur d'onde structurale observée sur la plaque. On peut définir cette longueur d'onde structurale λ à la fréquence f ,

$$\lambda = \sqrt{2\pi} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} f^{-1/2} \quad (5.2)$$

Le nombre de fonctions tests N^i utilisées dans une direction donnée à une fréquence f doit suivre à une constante près le nombre de longueurs d'ondes $\frac{a}{\lambda}$ observées dans cette direction. On remarque que 3 fonctions testx par longueur d'onde sont généralement suffisantes pour assurer la convergence à moins de 2% d'erreur.

Plaque en forme "L"

Nous allons considérer une plaque en forme de "L" telle que montrée à la figure 5.4. Cette plaque va nous permettre de voir le comportement de notre modèle pour des géométries plus complexes. C'est une plaque d'acier ($E=200\text{Gpa}$, $\rho=7800\text{kg/m}^3$, $\nu=0.3$) avec une épaisseur de $h=2.5\text{mm}$.

On veut comparer les résultats avec le calcul par éléments p d'André Coté[8]. Côté a utilisé un modèle de plaque de Mindlin et des éléments finis de type p . On applique une excitation ponctuelle à $(0.3\text{m}, 0.25\text{m})$ du coin inférieur gauche de la plaque. On utilisera la vitesse quadratique moyenne $\langle \dot{w}^2 \rangle$ pour représenter la réponse vibratoire à l'excitation. Elle est définie par

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{2S} \int_S |\dot{w}(x, y)|^2 dx dy \quad (5.3)$$

La comparaison des 2 calculs est montré à la figure 5.5. Bien que les 2 courbes montrent des tendances générales similaires, la réponse diffère légèrement au-delà de 120Hz. Pour ce cas de la plaque en L, Côté a observé une convergence plus lente avec ses éléments p pour certains modes. Il a alors dû utiliser un maillage raffiné près du coin

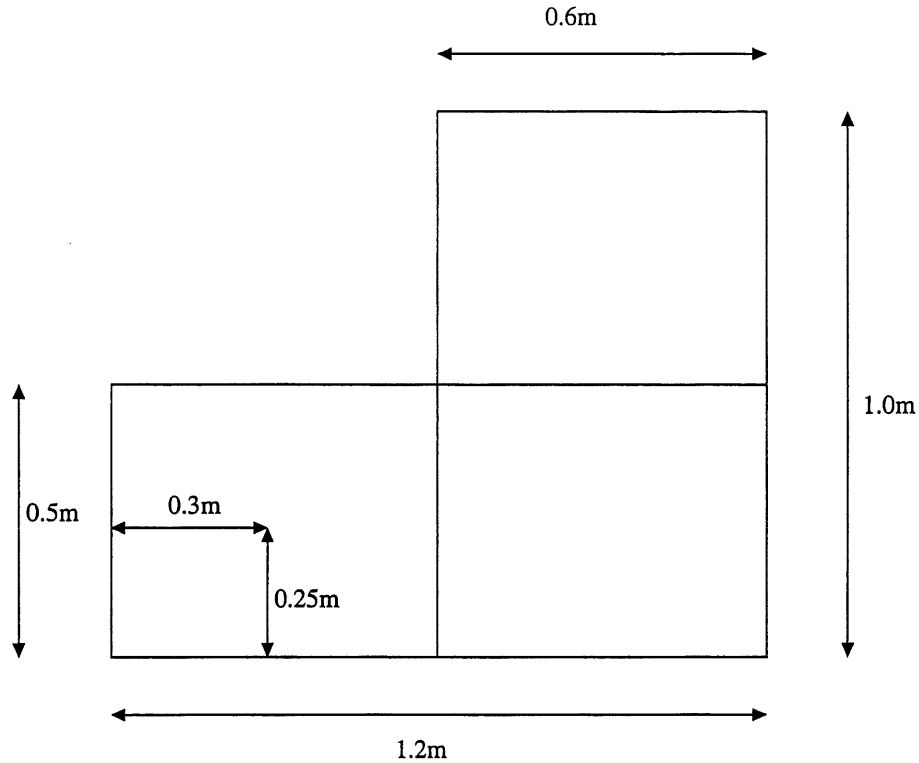


FIG. 5.4 – La plaque en L.

intérieur pour améliorer la vitesse de la convergence. De son côté, notre méthode ne semble souffrir d'aucun problème de convergences mais on obtient des résultats erronés pour les modes problématiques. Ceci est dû au fait que notre modèle de plaque de Love-Kirchhoff ne respecte pas la discontinuité de la contrainte située près du coin intérieur de la plaque.

5.3 Résultats numériques pour la plaque raidie

5.3.1 Convergence des fréquences propres

On reprend la même plaque simplement appuyée de la section 5.2 à laquelle on ajoute un raidisseur tel que représenté à la figure 5.6. Le raidisseur a une section rectangulaire de 20mm de haut et 10mm de large et il est aligné selon l'axe y et passe par le centre de la plaque. Le matériau du raidisseur est de l'acier possédant les mêmes caractéristiques que la plaque. Les différents maillages considérés sont présentés

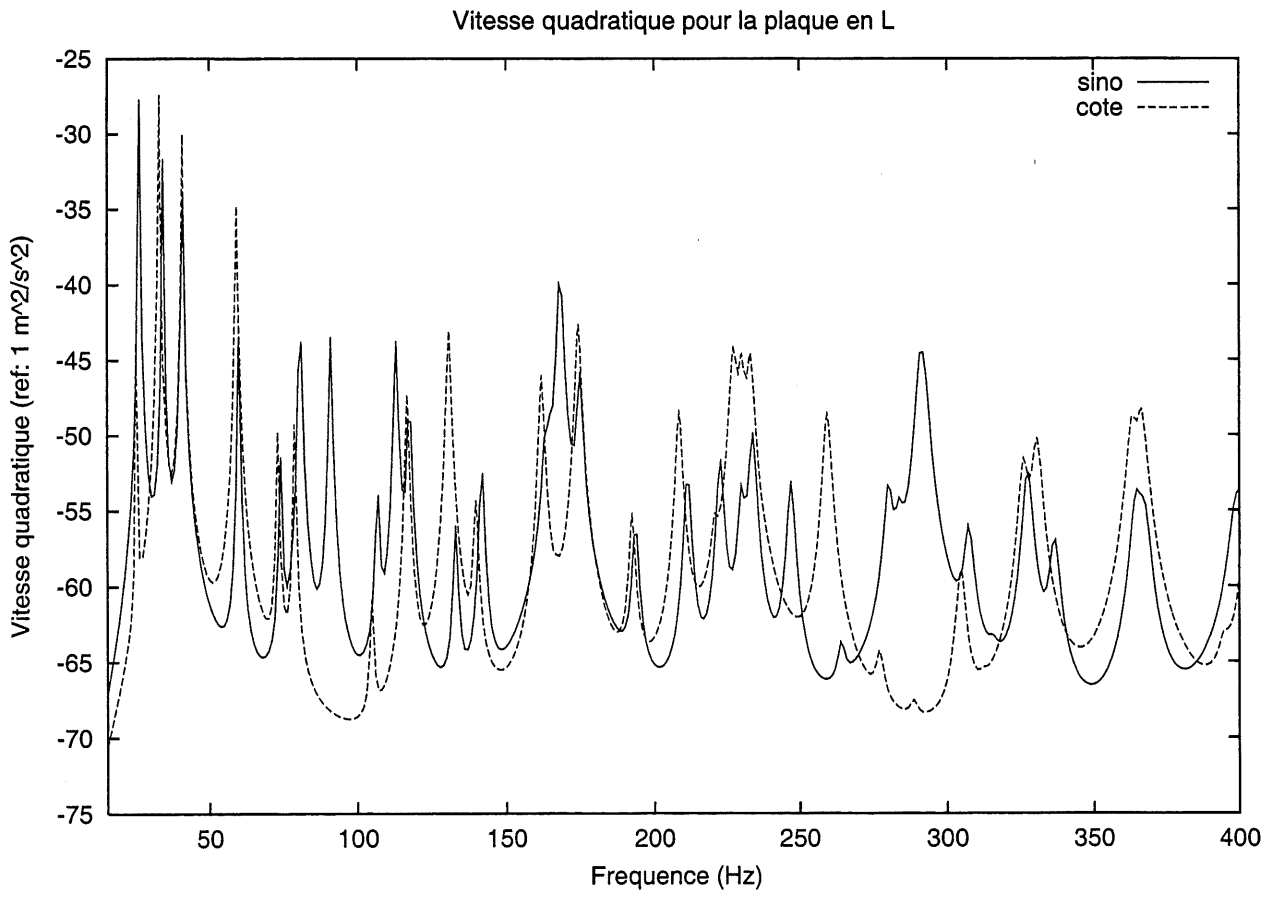


FIG. 5.5 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque en L

à la figure 5.2. Nous étudierons la convergence comme nous l'avons fait à la section précédente en variant le nombre de fonctions tests de chaque élément.

Pour chaque cas, le raidisseur est placé à la frontière d'un élément excepté pour le cas du maillage 1×1 où nous avons placé le raidisseur au centre de l'élément en posant $\xi_y = 0$ dans (4.14) et (4.16). Les résultats numériques sont présentés au tableau 5.2. On remarque que le nombre de modes convergés dans les cas raidis sont comparables au cas non-raidis pour la plupart des configurations. À l'exception du cas 1×1 , il est plus avantageux d'avoir un maillage plus grossier. Les règles pour déterminer le nombre de fonctions tests à utiliser, déterminées à la section 5.2.1, semblent s'appliquer tant au cas raidi qu'au cas non-raidi.

Les problèmes de convergence du cas du maillage 1×1 sont dus à l'inefficacité des fonctions globales à reconstruire les modes locaux d'une plaque raidie. Quand on considère de gros raidisseurs, la plupart des modes sont locaux et le déplacement est petit vis-à-vis le raidisseur. Les fonctions globales ne sont pas nécessairement nulles vis-à-vis les raidisseurs ce qui entraîne une convergence très lente. On peut donc s'assurer que les modes locaux seront plus facilement reconstruits en imposant que les raidisseurs soient à la frontière de 2 éléments.

5.3.2 Comparaison avec la littérature

Il n'y a pas de solutions exactes de fréquences propres d'une plaque rectangulaire finie raidie. Nous allons donc comparer nos résultats avec les méthodes numériques de différents auteurs.

Vitesse quadratique, comparaison avec Coté [8]

On utilise la même plaque qu'à la section 5.3.1 à laquelle on ajoute une excitation ponctuelle à $x = .6m$, $y = .25m$ tel qu'illustré à la figure 5.6. On peut voir la comparaison de la vitesse quadratique entre les méthodes à la figure 5.7. La comparaison est très bonne jusqu'à une fréquence de 120Hz et les 2 courbes montrent les mêmes tendances générales jusqu'à 500Hz. Les différences viennent, cette fois encore, de la différence entre les modèles utilisés. Le modèle de plaque de Love-Kirchhoff surestime la raideur

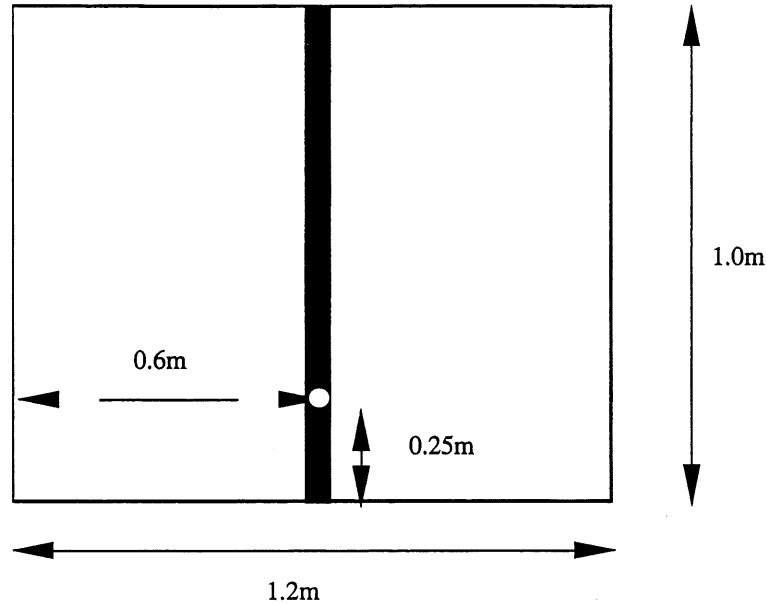


FIG. 5.6 – Configuration de la plaque d’acier raidie pour comparaison avec Coté[8]

du système à hautes fréquences par rapport à celui de Mindlin.

Koko et al[12]

Koko [12] a présenté des simulations de vibrations libres de plaques raidies avec ce qu’il appelle des “super-éléments” de plaques et de raidisseurs. Les super-éléments de la plaque prennent en compte le mouvement dans le plan de même que le déplacement transversal. Chaque élément a 55 variables. Le champ de déplacement est représenté par des fonctions polynomiales et analytiques. Une combinaison de polynômes d’Hermitte cubiques et de fonctions trigonométriques (sinus) constitue les fonctions d’interpolations. Pour leur part, les éléments de poutre ont 18 variables et prennent en considération la flexion, le mouvement dans le plan, la torsion de rotation et la flexion latérale. Le modèle de plaque et de raidisseur utilisé par Koko est plus complet que le modèle de flexion pure que nous utilisons. Cependant, les effets au-delà de la flexion devraient être minimes pour les plaques minces que nous considérons. En général, Koko utilise un seul élément entre les raidisseurs. Il parlera alors de maillage de type I. Dans certain cas, il utilise aussi 2×2 éléments (maillage de type II) entre les raidisseurs.

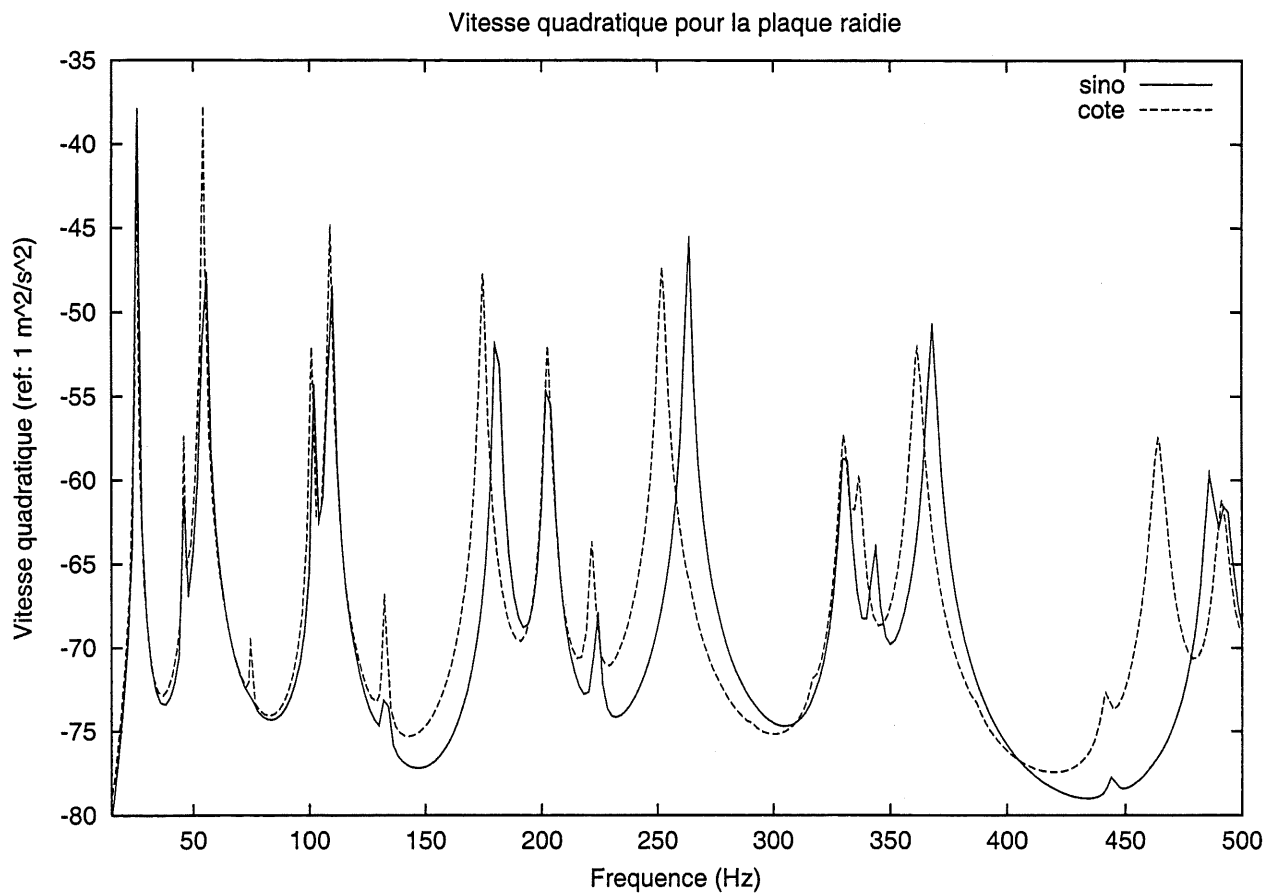


FIG. 5.7 – Vitesse quadratique moyenne de la plaque d'acier raidie. Comparaison avec Coté[8]

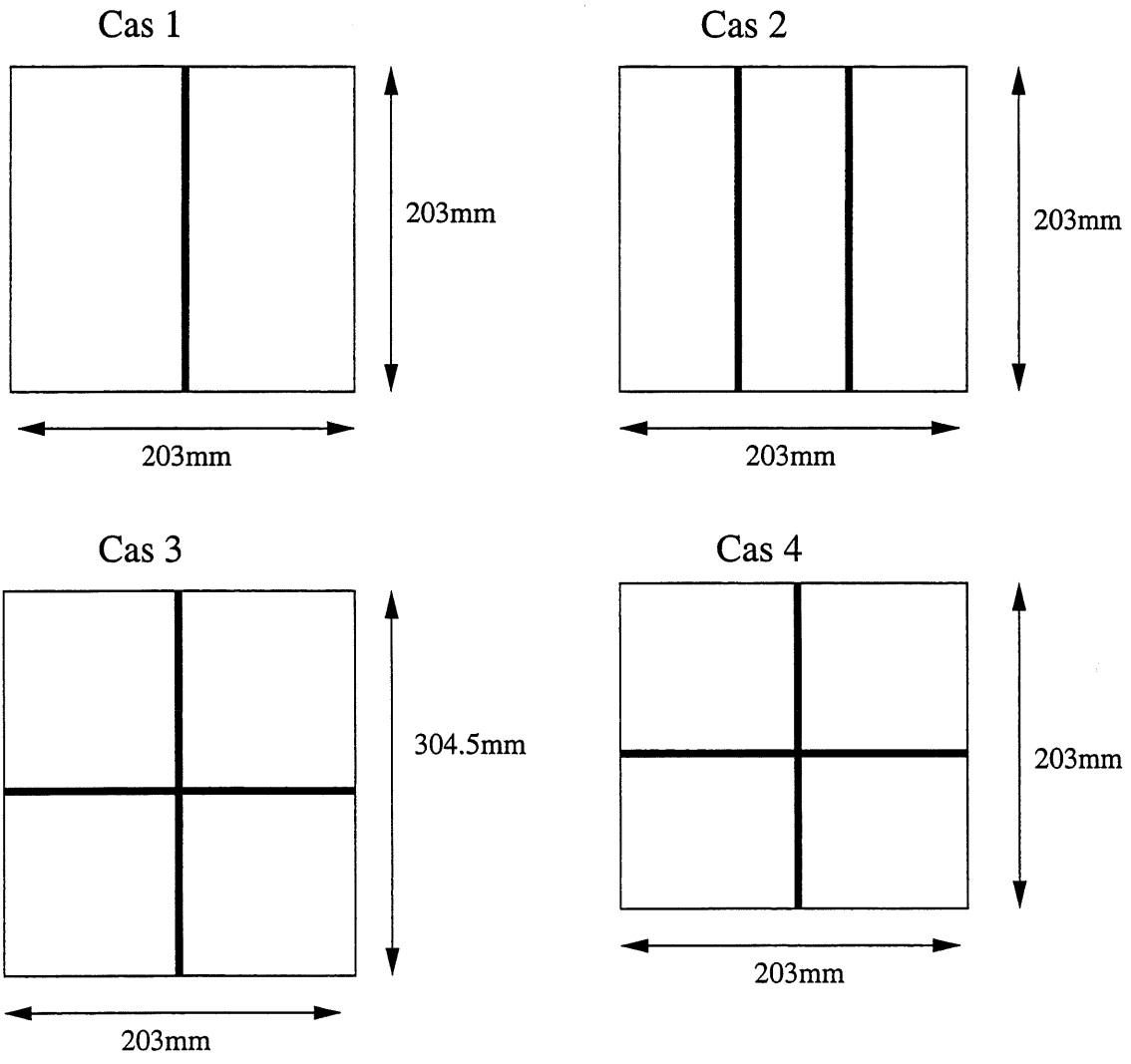


FIG. 5.8 – Configurations de la plaque raidie utilisée pour comparaison avec Koko et al [12]

Les configurations utilisées pour les comparaisons sont présentées à la figure 5.8. Dans tous les cas, la plaque est encastrée sur les quatre cotés.

Pour le cas 1, la plaque a une épaisseur de $h = 1.27\text{mm}$, les caractéristiques du matériau de la plaque et du raidisseur sont $E = 68.9\text{GPa}$, $\rho = 2670\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.3$. Deux raidisseurs différents sont considérés : un "gros" avec une hauteur de 11.33mm et une largeur de 6.35mm et un "petit" avec une hauteur de 8.28mm et une largeur de 4.93mm .

Pour le cas 2, les caractéristiques de la plaque sont les mêmes mais la section des raidisseurs est différente : le "gros" a une hauteur de 16.53mm et une largeur de 2.29mm et le "petit" a une hauteur de 11.43mm et une largeur de 1.85mm .

Dans les cas 3 et 4, la plaque a une épaisseur de 1.37mm , les caractéristiques de matériau de la plaque et du raidisseur sont $E = 71\text{GPa}$, $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ et $\nu = 0.3$. Le raidisseur a une section rectangulaire de 11.3mm de hauteur et 6.25mm de largeur.

Koko a rapporté des calculs de fréquences propres pour ces cas ainsi que des valeurs expérimentales et des résultats obtenus par éléments finis classiques. Les tableaux 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 montrent les comparaisons des fréquences propres avec toutes ces méthodes. Dans la plupart des cas, les résultats semblent en accord pour chacune des méthodes.

5.3.3 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Des expériences ont été menées par Hédi Kaffel[11] pour mesurer la réponse d'une plaque excitée par une force ponctuelle. La configuration utilisée est montrée à la figure 5.9. La plaque est faite d'aluminium ($E = 68.5\text{GPa}$, $\rho = 2680\text{kg/m}^3$, $\nu = 0.33$), a des dimensions de $480\text{mm} \times 420\text{mm}$ et une épaisseur de $h = 3.22\text{mm}$. Les raidisseurs utilisés ont des sections en forme de "T" (voir figure 5.9). Des configurations à 1 et 2 raidisseurs seront utilisés (cas 1 et cas 2). Le matériau des raidisseurs est identique à celui de la plaque.

Les côtés de la plaque sont appuyés sur des lames flexibles d'acier. Ce montage bloque le mouvement transversal de la plaque et semble bien approximer le comportement d'une plaque en appui simple [7]. La plaque est excitée par un pot vibrant qui crée une force ponctuelle sur la plage de fréquence de 0 à 800Hz . Le

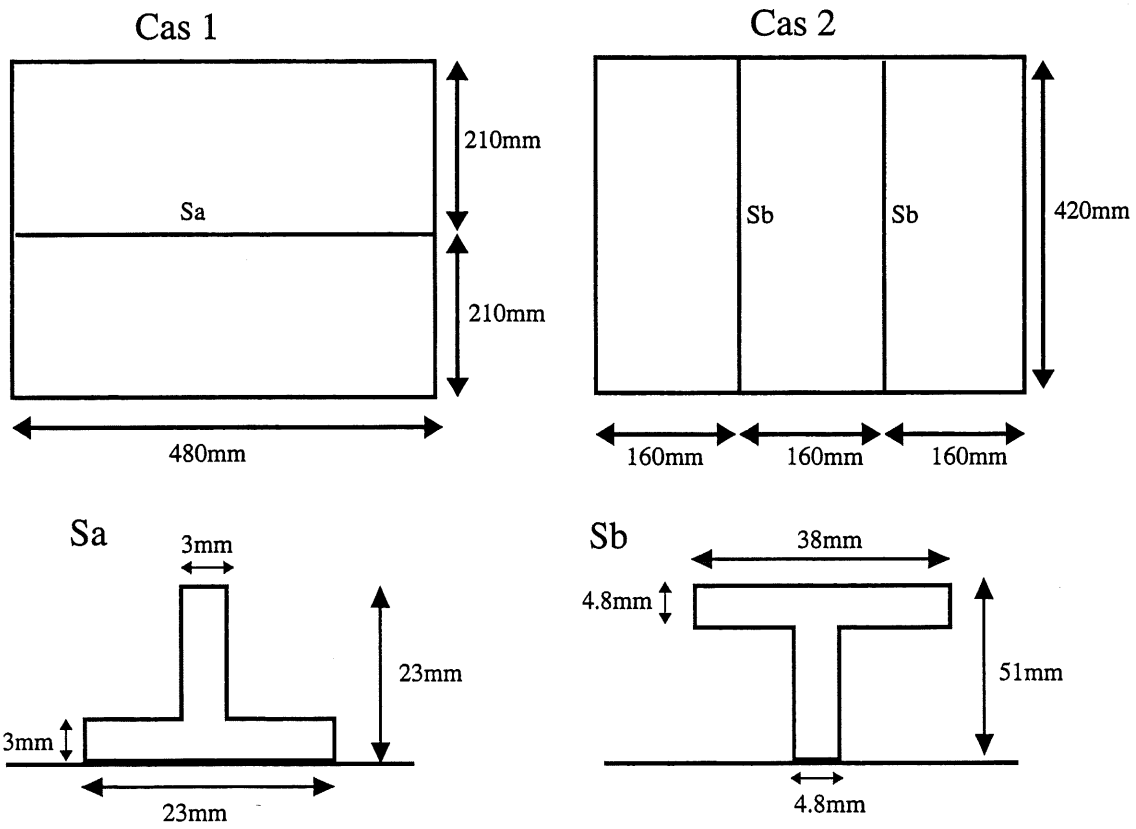


FIG. 5.9 – Configurations de la plaque raidie expérimentale

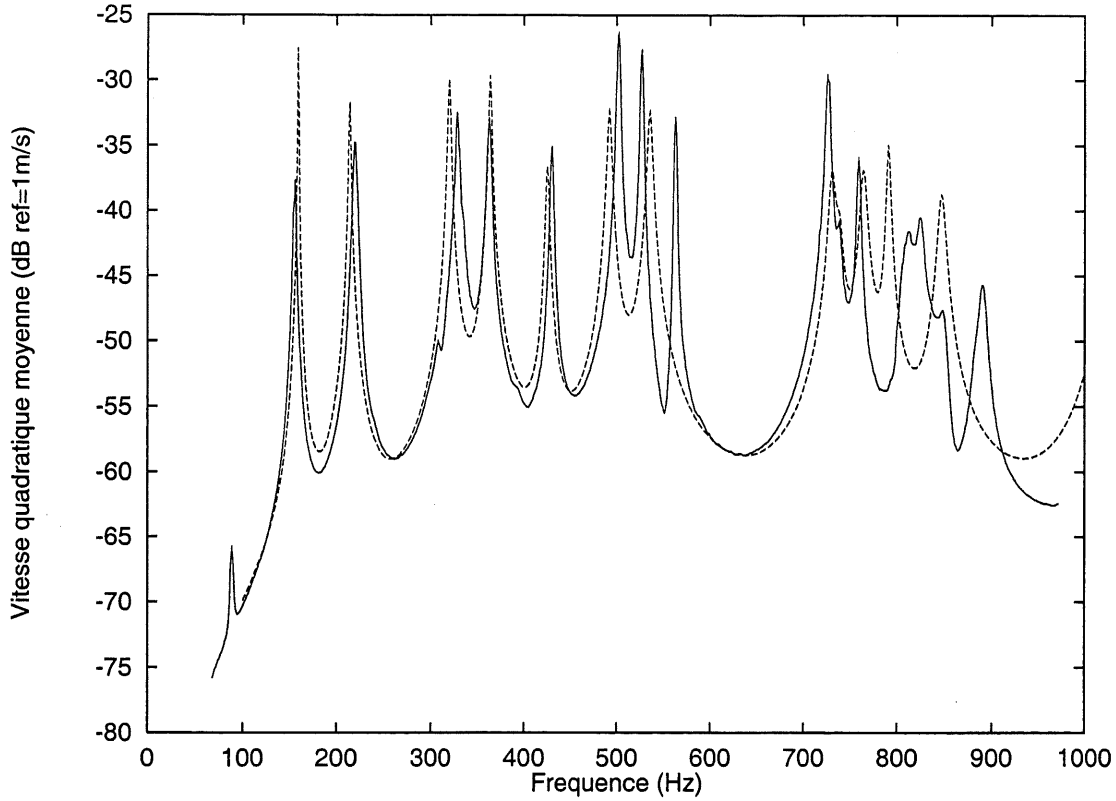


FIG. 5.10 – Comparaison avec l'expérience pour le cas 1 (1 raidisseur). Ligne pleine : résultat expérimental. Ligne discontinue : résultat numérique

point d'excitation est situé à $x=80\text{mm}$, $y=70\text{mm}$ du coin de la plaque pour tous les cas. L'amplitude F de l'excitation est mesurée en même temps que l'amplitude de la vitesse transversale V_i en utilisant un vibromètre laser à effet Doppler. Le panneau est discrétisé en $n=361$ (19×19) points de mesure également espacés sur la surface vibrante. La réponse peut alors être exprimée par l'admittance quadratique moyenne de la structure.

$$10 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^n V_i^2}{2nF^2} \quad (5.4)$$

Les figures 5.10 et 5.11 montrent la comparaison entre l'expérience et la simulation pour les cas 2 premiers cas. Pour les simulations, on a utilisé un élément entre chaque raidisseurs et chacun de ces éléments contenait 20×25 fonctions tests.

Pour le cas 1, la théorie et l'expérience semblent en accord jusqu'à 500Hz. Par contre, la simulation semble avoir plus de difficulté à prédire correctement la réponse

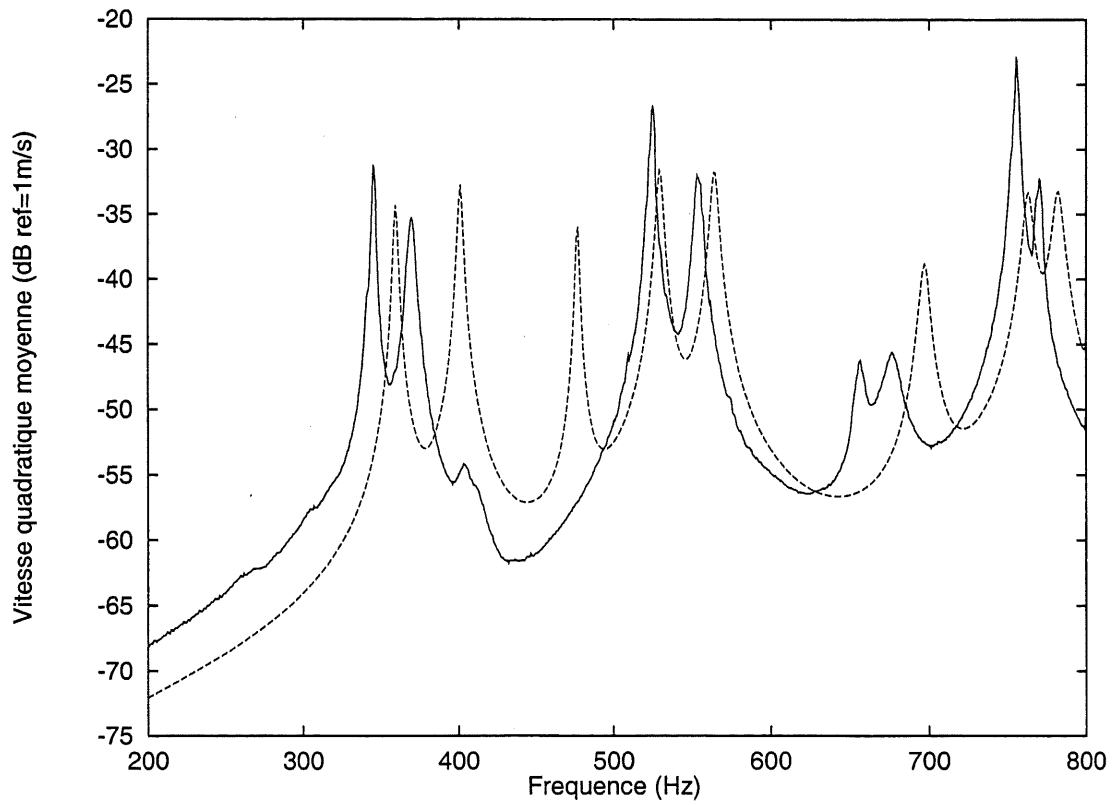


FIG. 5.11 – Comparaison avec l'expérience pour le cas 2 (2 raidisseur). Ligne pleine : résultat expérimental. Ligne discontinue : résultat numérique

forcée du cas 2. On remarque que les fréquences de résonance sont en général surestimées dans la simulation par rapport à l'expérience. La cause peut venir des conditions de jonction entre la plaque et les raidisseurs qui ne sont pas respectées par le modèle théorique (comme la continuité de rotation).

5.4 Conclusion

Nous avons calculé les fréquences propres et la réponse forcée d'une plaque homogène ou raidie à l'aide des éléments hiérarchiques trigonométriques. Les résultats avec des plaques minces et de petits raidisseurs se comparent bien aux autres méthodes numériques et aux résultats expérimentaux. Le cas de la plaque en L nous rappelle que l'on ne peut modéliser une discontinuité de contrainte avec un modèle de Love-Kirchhoff.

Nous avons aussi déterminé des règles simples de maillage s'appliquant tant à la plaque non-raïdie qu'à la plaque raidie.

Maillage	$M_i \times N_i$	dof	Modes convergés à moins de 1% d'erreur	Modes convergés à moins de 2% d'erreur
1×1	14×14	144	45	45
2×1	8×14	144	35	58
2×2	8×8	144	35	58
4×4	5×5	144	0	0
1×1	34×34	1024	527	629
2×1	18×34	1024	439	593
2×2	18×18	1024	430	586
4×4	10×10	1024	249	505
1×1	50×50	2304	1423	1502
2×1	26×50	2304	1369	1451
2×2	26×26	2304	1203	1441
4×4	14×14	2304	953	1300
1×1	62×62	3600	2312	2418
2×1	32×62	3600	2210	2340
2×2	32×32	3600	2210	2311
4×4	17×17	3600	1884	2127

TAB. 5.1 – Résultats pour une plaque homogène simplement appuyée

Maillage	$M_i \times N_i$	dof	Modes à moins de 1% d'erreur	(non-raïdie)	Modes à moins de 2% d'erreur	(non-raïdie)
1×1	14×14	144	1	(45)	2	(45)
2×1	14×8	144	15	(35)	52	(58)
2×2	8×8	144	15	(35)	52	(58)
4×4	5×5	144	0	(0)	0	(0)
1×1	34×34	1024	8	(527)	176	(629)
2×1	34×18	1024	399	(439)	574	(593)
2×2	18×18	1024	399	(430)	574	(586)
4×4	10×10	1024	235	(249)	481	(505)
1×1	50×50	2304	95	(1423)	1406	(1502)
2×1	50×26	2304	1150	(1369)	1424	(1451)
2×2	26×26	2304	1150	(1203)	1424	(1441)
4×4	14×14	2304	835	(953)	1274	(1300)

TAB. 5.2 – Résultats pour une plaque raidie. Un calcul avec une maillage 2×1 et 4352 degrés de liberté a été utilisé comme solution “exacte” pour le calcul de l’erreur.

Raidisseur	fréquence naturelle (Hz)					
"Gros"	Mode	Non-raïdie	Sino	Koko[12]	FE[12]	Expérience[12]
	1	292.8	727.8	736.8	718.1	689.0
	2	597.2	783.2	769.4	751.4	725.0
	3	597.6	1015.5	1019.6	997.4	961.0
	4	881.3	1033.8	1032.3	1007.1	986.0
	5	1071.3	1450.0	1483.7	1419.8	1376.0
	6	1076.6	1457.9	1488.3	1424.3	1413.0
"Petit"	Mode	Non-raïdie	Sino	Koko[12]	FE[12]	Expérience[12]
	1	292.8	671.2	679.1	670.7	627.0
	2	597.2	744.4	716.9	724.0	662.0
	3	597.6	984.6	990.1	977.2	924.0
	4	881.3	1027.2	1022.9	1002.1	953.0
	5	1071.3	1434.4	1469.3	1408.7	1370.0
	6	1076.5	1451.9	1442.3	1414.1	1338.0

TAB. 5.3 – Fréquences propres pour le cas 1

Raidisseur	fréquence naturelle (Hz)					
"Gros"	Mode	Non-raïdie	Sino	Koko[12]	FE[12]	Expérience[12]
	1	271.4	949.3	1072.8	965.3	909.0
	2	553.6	1265.8	1334.2	1272.3	1204.0
	3	554.0	1331.8	1410.3	1364.3	1319.0
	4	816.9	1464.0	1483.2	1418.1	1506.0
	5	993.0	1572.7	1649.2	1602.9	1560.0
	6	997.9	1739.9	1730.5	1757.1	1693.0
"Petit"	Mode	Non-raïdie	Sino	Koko[12]	FE[12]	Expérience[12]
	1	271.4	923.6	938.5	928.6	859.0
	2	553.6	1202.4	1178.6	1205.1	1044.0
	3	554.0	1236.1	1182.4	1229.8	1292.0
	4	816.9	1264.7	1330.4	1274.6	1223.0
	5	993.0	1540.5	1569.8	1557.4	1503.0
	6	997.9	1696.9	1674.5	1714.5	1650.0

TAB. 5.4 – Fréquences propres pour le cas 2

Mode	Non-raïdie	Sino	Koko type I	Koko type II
1	221.8	828.4	846.8	838.2
2	342.5	832.5	846.1	841.6
3	543.0	851.8	849.4	844.2
4	546.4	862.3	862.0	858.4
5	655.4	1298.9	1448.0	1254.3
6	828.2	1336.4		1354.6
7	847.1	1344.0		1347.3
8	1029.1	1352.5		1353.6
9	1118.0	1596.1		1503.0

TAB. 5.5 – Fréquences propres pour le cas 3

Mode	Non-raïdie	Sino	Koko type I	Koko type II
1	295.5	1135.3	1149.6	1141.7
2	602.7	1153.0	1152.5	1148.0
3	602.7	1153.0	1161.9	1157.4
4	888.8	1153.0	1161.9	1157.4
5	1080.7	2021.9	2042.1	1859.8
6	1085.8	2328.1		2348.0
7	1355.3	2328.5		2342.1
8	1355.3	2328.5		2342.1
9	1729.5	2330.0		2390.1

TAB. 5.6 – Fréquences propres pour le cas 4

Chapitre 6

Couplage avec un fluide et rayonnement acoustique

6.1 Introduction

Le rayonnement acoustique des plaques est un problème important. La compréhension de ce phénomène nous permet de nous guider à l'étape de la conception pour réduire le bruit rayonné par plusieurs composantes mécaniques. Peu de cas analytiques du rayonnement sont connus mis à part les cas de plaques et coques infinies ou de plaques finies bafflées avec des géométries particulières. Nous verrons que les fonctions trigonométriques nous permettent d'implémenter, de façon simple et efficace, le calcul du rayonnement des plaques dans un fluide lourd et léger.

Le but de l'étude est l'analyse du comportement acoustique des modes de vibration d'une plaque rectangulaire mince, raidie et bafflée. Avec la réponse vibratoire d'une plaque, nous pourrions déterminer la pression rayonnée en champ lointain et la directivité du rayonnement. Par la suite, nous pourrions nous intéresser aux caractéristiques globales du rayonnement telles que l'efficacité de rayonnement modale et la puissance rayonnée.

6.2 Problème de la plaque bafflée

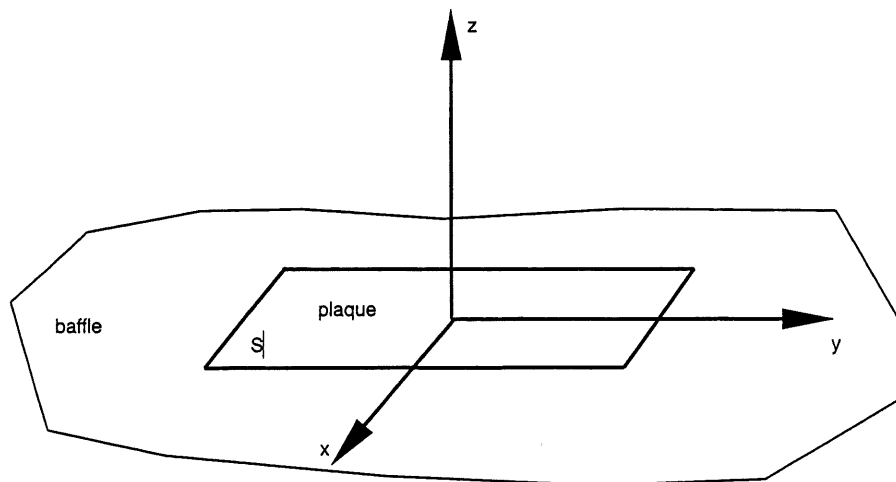


FIG. 6.1 – Problème du rayonnement acoustique de la plaque rectangulaire bafflée

La plaque bafflée consiste en une plaque entourée d'une surface rigide et infinie (le baffle). Nous étudierons le cas où on a le vide d'un côté de la plaque et du fluide dans

la région au-dessus du plan de la baffle (voir la figure 6.1). Le problème de la plaque bafflée est décrit par les équations suivantes :

– Équation d'onde dans le fluide

$$\nabla^2 p(x, y, z) + \frac{\omega^2}{c_0^2} p(x, y, z) = 0 \quad (6.1)$$

– Continuité de la vitesse à la surface de la plaque

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, 0) = \rho_0 \omega^2 w(x, y) \quad (6.2)$$

– Condition de Sommerfeld pour la pression dans (V)

Ce problème peut être résolu grâce à la méthode intégrale. En supposant que nous connaissons le mouvement de la plaque $w(x, y)$, la solution satisfaisant les équations du problème est donnée par l'intégrale de Rayleigh.

$$p(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \int_S G(x, y, z, x', y', 0) w(x', y') dx' dy' \quad (6.3)$$

où

$$G(x, y, z, x', y', 0) = \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} \quad R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (6.4)$$

Le fluide exerce une charge sur la plaque. Cette charge correspond à la pression pariétale $p(x, y, 0)$ venant de la solution de Rayleigh et fournit un travail externe W^{fluide} à la structure.

$$W^{fluide} = - \int_S p(x, y, 0) w(x, y) dx dy \quad (6.5)$$

Ce travail s'ajoute au travail fourni par les excitations externes W^{ext} . Nous pouvons donc l'inclure dans l'expression de l'Hamiltonien.

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} [T^{plaque} + T^{raid} - V^{plaque} - V^{raid} + W^{ext} + W^{fluide}] \quad (6.6)$$

L'application du principe variationnel nous conduit au système linéaire suivant :

$$-\omega^2 [M_{mnpq}] + [K_{mnpq}] + j\omega [Z_{mnpq}] \{q_{mn}\} = \{F_{pq}\} \quad (6.7)$$

M_{mnpq} est la matrice de masse, K_{mnpq} est la matrice de raideur et F_{pq} est le vecteur force. $[Z_{mnpq}]$ est la matrice d'impédance de rayonnement donnée par

$$Z_{mnpq} = \frac{j\rho_0\omega}{2\pi} \int_S \int_S w_{mn}(x, y) \frac{e^{-jkR}}{R} w_{pq}(x', y') dx dy dx' dy' \quad (6.8)$$

où

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (6.9)$$

Le système d'équation (Éq.(6.7)) nous permettra de trouver les coefficients de Ritz q_{mn} . Avec ceux-ci, nous pourrons calculer les indicateurs vibroacoustiques.

6.3 Indicateurs vibroacoustiques

6.3.1 Vitesse quadratique moyenne

La vitesse quadratique moyenne, qui est un indicateur global, nous informe sur le mouvement à la surface de la plaque. Celle-ci est définie par :

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{2S} \int_S |\dot{w}(x, y)|^2 dx dy \quad (6.10)$$

En exprimant la déformée de la plaque sur une base de fonctions $\{\phi_m(x), \phi_n(y)\}$

$$w(x, y) = \sum_{mn} q_{mn} \phi_m(x) \phi_n(y) \quad (6.11)$$

La vitesse quadratique moyenne est donc donnée par :

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2S} \sum_{mn} \sum_{pq} q_{mn} q_{pq}^* \int_S \phi_m(x) \phi_n(y) \phi_p(x) \phi_q(y) dx dy \quad (6.12)$$

En coordonnées adimensionnelles ($\alpha = 2x/a, \beta = 2y/b$), nous avons :

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{\omega^2 ab}{8S} \sum_{mn} \sum_{pq} q_{mn} q_{pq}^* \int_{-1}^1 \phi_m(\alpha) \phi_p(\alpha) d\alpha \int_{-1}^1 \phi_n(\beta) \phi_q(\beta) d\beta \quad (6.13)$$

que nous pouvons donc simplement écrire :

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{\omega^2}{2S\rho h} \{q\}^T [M_{mnpq}] \{q^*\} \quad (6.14)$$

6.3.2 Pression rayonnée et directivité du champ

La pression rayonnée de la plaque bafflée, en fonction des coefficients de Ritz s'écrit

$$p(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \sum_{mn} q_{mn} \int_{S'} \phi_m(x') \phi_n(y') G dx' dy' \quad (6.15)$$

Cette intégrale a une singularité en $R = 0$. Cependant, cette singularité peut être facilement levée et intégrée numériquement par une quadrature de Gauss (voir annexe). Il n'est donc pas requis de faire des approximations en champ lointain. La formulation reste valide en champ proche et lointain.

6.3.3 Puissance acoustique rayonnée

La puissance acoustique rayonnée pourra, dans notre cas, être calculée à partir de l'information sur le champ proche.

$$W = \int_S i_z dx dy \quad (6.16)$$

$i_z(x, y)$ est l'intensité acoustique normale à la surface de la plaque. Cette intensité est exprimée par :

$$i_z(x, y) = \frac{1}{2} \text{Re} [-p(x, y, 0) j \omega w^*(x, y)] \quad (6.17)$$

En remettant la dernière expression dans (6.16), on obtient

$$W = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\rho \omega^3 j \sum_{mnpq} q_{mn} q_{pq}^* \int_S \int_{S'} \phi_m(x') \phi_n(y') G \phi_p(x) \phi_q(y) \right] \quad (6.18)$$

que l'on peut écrire

$$W = \frac{\omega^2}{2} \sum_{mnpq} \text{Re} [q_{mn} q_{pq}^* Z_{mnpq}] \quad (6.19)$$

6.3.4 Efficacité de rayonnement de la plaque

L'efficacité de rayonnement est un indicateur global qui permet de quantifier l'efficacité de la plaque pour transformer les vibrations en rayonnement acoustique.

L'efficacité σ est définie par :

$$\sigma = \frac{W}{\rho_0 c_0 S \langle \dot{w}^2 \rangle} \quad (6.20)$$

Nous n'avons alors qu'à utiliser les calculs de W (6.19) et $\langle \dot{w}^2 \rangle$ (6.14) pour retrouver la valeur de σ .

6.4 Calcul de la matrice d'impédance de rayonnement

La matrice d'impédance de rayonnement est définie de la façon suivante :

$$Z_{mnpq} = \frac{j\rho_0\omega}{2\pi} \int_S \int_S w_{mn}(x, y) \frac{e^{-jkR}}{R} w_{pq}(x', y') dx dy dx' dy' \quad (6.21)$$

où $w_{mn}(x, y)$ est donné par

$$w_{mn} = \sum_{mn} \phi_m \left(2\frac{x}{a} - 1\right) \phi_n \left(2\frac{y}{b} - 1\right) \quad (6.22)$$

On doit faire une intégrale quadruple et singulière qui est lourde à intégrer numériquement. Heureusement, on peut effectuer un changement de variable de sorte que le coefficient $\frac{e^{-jkR}}{R}$ soit fonction de 2 variables seulement. Cette transformation permet d'intégrer symboliquement une partie de l'expression pour laisser une intégrale double à intégrer numériquement. Ce changement de variable est inspiré des travaux de Sandman[21] et utilisé récemment par Nelisse[20].

En coordonnées adimensionnelles ($\alpha = 2x/a, \beta = 2y/b$) on a

$$Z_{mnpq} = \frac{j\rho_0\omega ab^2}{16\pi} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 \phi_m(\alpha-1) \phi_n(\beta-1) \kappa(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \phi_p(\alpha'-1) \phi_q(\beta'-1) d\alpha d\beta d\alpha' d\beta' \quad (6.23)$$

avec

$$\phi_m(\xi) = \sin(a_m \xi + b_m) \sin(c_m \xi + d_m), \quad (6.24)$$

$$\kappa(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = \frac{e^{-jkR}}{\left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{(\beta - \beta')^2}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (6.25)$$

et

$$R = \frac{a}{2} \left[(\alpha - \alpha')^2 + \frac{(\beta - \beta')^2}{r^2} \right]^{1/2}, \quad r = a/b \quad (6.26)$$

En effectuant le changement suivant :

$$\begin{aligned} u &= \alpha - \alpha', & u' &= \beta - \beta' \\ v &= \alpha', & v' &= \beta' \end{aligned} \quad (6.27)$$

le terme κ devient indépendant de v et v'

$$\kappa(u, u') = \frac{e^{-j\frac{ka}{2} \left[u^2 + \frac{u'^2}{r^2} \right]^{1/2}}}{\left[u^2 + \frac{u'^2}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (6.28)$$

Le Jacobien de cette transformation est 1. En ne considérant que la partie en α et α' , l'intégrale subit le changement suivant :

$$\int_0^2 \int_0^2 d\alpha d\alpha' \rightarrow \int_0^2 du \int_0^{2-u} dv + \int_{-2}^0 du \int_{-u}^2 dv \quad (6.29)$$

Cette transformation nous donne

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \int_0^2 d\alpha d\alpha' \phi_m(\alpha) \phi_p(\alpha') \kappa(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \\ & \rightarrow \int_0^2 du \int_0^{2-u} dv \phi_m(u-v-1) \phi_p(v-1) \kappa(u, u') \\ & \quad + \int_{-2}^0 du \int_{-u}^2 dv \phi_m(u-v-1) \phi_p(v-1) \kappa(u, u') \end{aligned} \quad (6.30)$$

dans le second terme du dernier membre, on peut changer u par $-u$ et poser $v \rightarrow v - u$, κ n'est pas modifié et le second terme devient

$$\int_0^2 du \int_0^{2-u} dv \phi_m(v-1) \phi_p(u-v-1) \kappa(u, u') \quad (6.31)$$

et (6.30) devient finalement

$$\int_0^2 du [F_{mp}(u) + F_{pm}(u)] \kappa(u, u') \quad (6.32)$$

où

$$F_{mp} = \int_0^{2-u} \phi_m(u+v-1)\phi_p(v-1)dv \quad (6.33)$$

Ce dernier peut être évalué symboliquement (voir Annexe). En effectuant la même intégration sur u' et v' , l'impédance de rayonnement s'écrit finalement

$$Z_{mnpq} = \frac{j\rho_0\omega ab^2}{16\pi} \int_0^2 \int_0^2 [F_{mp}(u) + F_{pm}(u)] [F_{nq}(u') + F_{qn}(u')] \kappa(u, u') du du' \quad (6.34)$$

Cette intégrale pourra être évaluée numériquement tel que décrit dans l'annexe.

6.4.1 Impédance de rayonnement avec plus d'un élément

Vu que notre maillage est tel que l'on a une plaque à la frontière de 2 raidisseurs, il nous faut modifier la formulation des indicateurs vibroacoustiques et distribuer les intégrales sur chaque élément. Par exemple, pour la matrice d'impédance de rayonnement on a, dans le cas d'un seul élément

$$Z_{mnpq} = j\rho_0\omega \int_S \int_{S'} w(x', y') G(x, y, x', y') dx' dy' dx dy \quad (6.35)$$

On doit séparer le domaine d'intégration en N éléments d'où

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + \dots + S_N \\ S' &= S'_1 + S'_2 + \dots + S'_N \end{aligned} \quad (6.36)$$

L'expression de la matrice d'impédance pour les éléments de plaque k et i sera

$$Z_{mnpq}^{ki} = j\rho_0\omega \int_{S^i} \int_{S^k} w^k(x^k, y^k) G^i(x^i, y^i) dx^i dy^i dx^k dy^k \quad (6.37)$$

que l'on peut écrire explicitement

$$\begin{aligned} Z_{mnpq}^{ki} &= j\rho_0\omega \int_0^{a^k} dx^k \int_0^{b^k} dy^k \int_0^{a^i} dx^i \int_0^{b^i} dy^i \\ &\quad \phi_m \left(2\frac{x^k}{a^k} - 1\right) \phi_n \left(2\frac{y^k}{b^k} - 1\right) \frac{e^{-jk_0 R}}{2\pi R} \phi_p \left(2\frac{x^i}{a^i} - 1\right) \phi_q \left(2\frac{y^i}{b^i} - 1\right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

avec

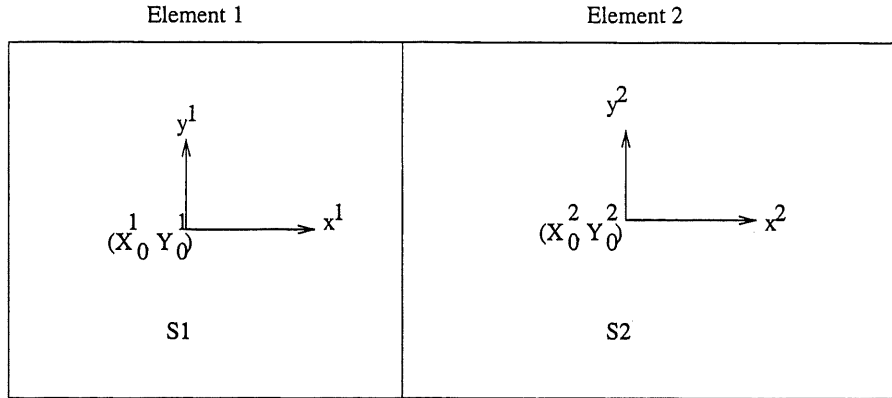


FIG. 6.2 – Système de coordonnées pour l'intégration sur des plaques multiples. Les origines sont placées au centre seulement pour schématiser

$$R = \left\{ \left[(x^k - x^i) + (X_0^k - X_0^i) \right]^2 + \left[(y^k - y^i) + (Y_0^k - Y_0^i) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (6.39)$$

où (X_0^k, Y_0^k) et (X_0^i, Y_0^i) sont les coordonnées des origines des axes des éléments k et i respectivement.

avec le changement de variable

$$\begin{aligned} u &= x^k - x^i, & u' &= y^k - y^i \\ v &= x^i, & v' &= y^i \end{aligned} \quad (6.40)$$

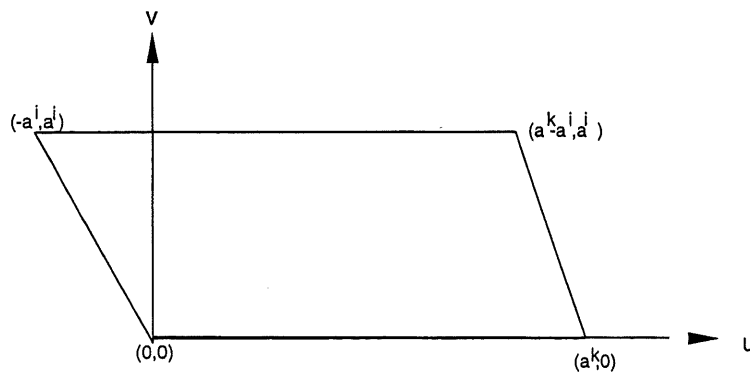


FIG. 6.3 – Domaine d'intégration avec les variables u et v

le Jacobien 1 et les intégrales dans le domaine (u, v) (voir la figure 6.3) se transforment de la façon suivante :

$$\int_0^{a^k} dx^k \int_0^{a^i} dx^i \rightarrow \int_{-a^i}^{a^k} du \int_0^{a^i} dv - \int_{-a^i}^0 du \int_0^{-u} dv - \int_{a^k-a^i}^{a^k} du \int_{-u+a^k}^{a^i} dv \quad (6.41)$$

(Éq.(6.38)) devient alors

$$\begin{aligned} Z_{mnpq}^{ki} = & j\rho_0\omega \left[\int_{-a^i}^{a^k} du \int_0^{a^i} dv - \int_{-a^i}^0 du \int_0^{-u} dv - \int_{a^k-a^i}^{a^k} du \int_{-u+a^k}^{a^i} dv \right] \\ & \cdot \left[\int_{-b^i}^{b^k} du' \int_0^{b^i} dv' - \int_{-b^i}^0 du' \int_0^{-u'} dv' - \int_{b^k-b^i}^{b^k} du' \int_{-u'+b^k}^{b^i} dv' \right] \\ & \cdot \phi_m \left(2\frac{u+v}{a^k} - 1 \right) \phi_n \left(2\frac{u'+v'}{b^k} - 1 \right) \frac{e^{jk_0R}}{2\pi R} \phi_p \left(2\frac{v}{a^i} - 1 \right) \phi_q \left(2\frac{v'}{b^i} - 1 \right) \end{aligned} \quad (6.42)$$

En distribuant les intégrales on obtient 9 expressions de la forme suivante

$$\int_{\alpha}^{\beta} du \int_{\alpha'}^{\beta'} du' G(u, u') \int_{\gamma}^{\epsilon} dv \phi_m \left(2\frac{u+v}{a^k} - 1 \right) \phi_p \left(2\frac{v}{a^i} - 1 \right) \int_{\gamma'}^{\epsilon'} dv' \phi_n \left(2\frac{u'+v'}{b^k} - 1 \right) \phi_q \left(2\frac{v'}{b^i} - 1 \right) \quad (6.43)$$

Les intégrales en v et en v' peuvent être évaluées symboliquement ce qui laisse une intégration numérique double sur u et u' .

6.4.2 Éléments identiques

On étudie d'abord le cas où l'on a des éléments identiques, avec les mêmes dimensions ($a^k = a^i = a, b^k = b^i = b$)

En suivant une procédure semblable au cas à un élément, on utilise les coordonnées adimensionnelles

$$\alpha^k = \frac{2x^k}{a}, \quad \beta^k = \frac{2y^k}{b}, \quad \alpha^i = \frac{2x^i}{a}, \quad \beta^i = \frac{2y^i}{b} \quad (6.44)$$

(Éq.(6.38)) devient

$$Z_{mnpq}^{ki} = \frac{j\rho_0\omega a^2 b^2}{32\pi} \int_0^2 d\alpha^k \int_0^2 d\beta^k \int_0^2 d\alpha^i \int_0^2 d\beta^i \phi_m (\alpha^k - 1) \phi_n (\beta^k - 1) \frac{e^{jk_0R}}{R} \phi_p (\alpha^i - 1) \phi_q (\beta^i - 1) \quad (6.45)$$

on effectue ensuite un changement de variable

$$\begin{aligned} u &= \alpha^k - \alpha^i, & u' &= \beta^k - \beta^i \\ v &= \alpha^i, & v' &= \beta^i \end{aligned} \quad (6.46)$$

pour obtenir

$$Z_{mnpq}^{ki} = \frac{j\rho_0\omega a^2 b^2}{32\pi} \int_0^2 \int_0^2 du du' [F_{mp}(u) + F_{pm}(u)] [F_{nq}(u') + F_{qn}(u')] \kappa(u, u', i, k) \quad (6.47)$$

avec

$$\kappa(u, u', i, k) = \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \quad (6.48)$$

et

$$R = \left[\left(\frac{a}{2}u + X_0^k - X_0^i \right)^2 + \left(\frac{b}{2}u' + Y_0^k - Y_0^i \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.49)$$

6.5 Conclusion

Nous avons utilisé les éléments finis hiérarchiques pour exprimer le rayonnement acoustique d'une plaque bafflée. Nous avons pu obtenir une expression pour la pression locale de même que les indicateurs acoustiques globaux de la plaque dans un fluide léger ou lourd. L'utilisation des fonctions tests trigonométriques nous a permis de calculer une partie de la matrice d'impédance de rayonnement de façon symbolique.

Chapitre 7

Résultats : rayonnement acoustique des plaques

7.1 Introduction

La méthode présentée au chapitre précédent sera appliquée au calcul du rayonnement acoustique dans un fluide quelconque d'une plaque en appui simple sur les côtés. Les résultats seront comparés avec une autre méthode numérique similaire.

7.2 Comparaison avec ADNR

ADNR est un logiciel développé au GAUS (Groupe d'acoustique et vibration et l'Université de Sherbrooke) permettant, en outre, le calcul des indicateurs vibro-acoustique des plaques multi-couches [9]. Ce logiciel utilise le modèle de plaque de Love-Kirchhoff et est basé sur une méthode variationnelle de type Rayleigh-Ritz. Les fonctions tests $w(x, y, t)$ utilisées permettent des calculs avec des plaques aux frontières simplement appuyées.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad (7.1)$$

On va comparer le cas d'une plaque d'acier ($E=200\text{GPa}$, $\rho=7800\text{kg/m}^3$) de dimension $1.2\text{m} \times 1.0\text{m}$ et d'épaisseur $h = 2.5\text{mm}$ tel que présenté à la figure 7.1. Cette plaque est simplement appuyée sur chaque côté. On y applique une force ponctuelle à $(0,45\text{m}, 0,125\text{m})$ du coin inférieur gauche.

Avec un modèle de plaque identique et une méthode numérique très proche, on peut s'attendre à avoir les mêmes résultats. C'est ce que l'on remarque aux figures 7.2, 7.3 et 7.4.

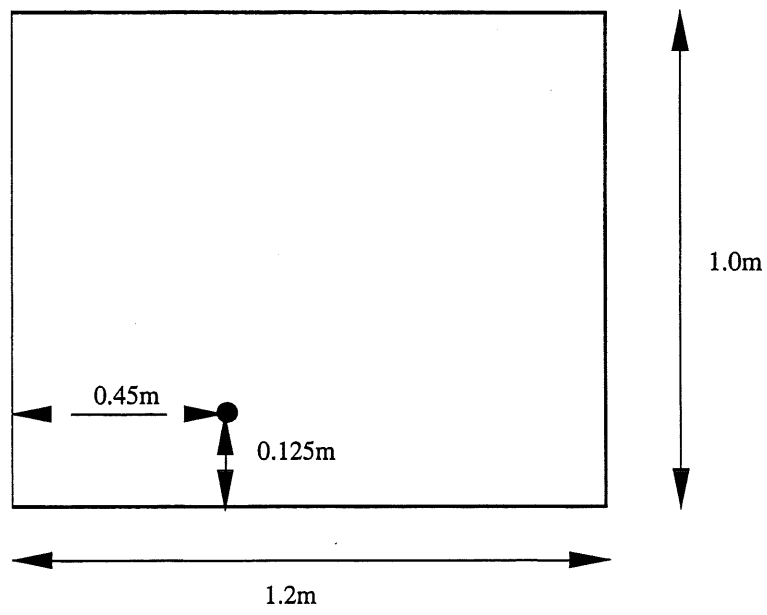


FIG. 7.1 – La plaque d'acier rectangulaire.

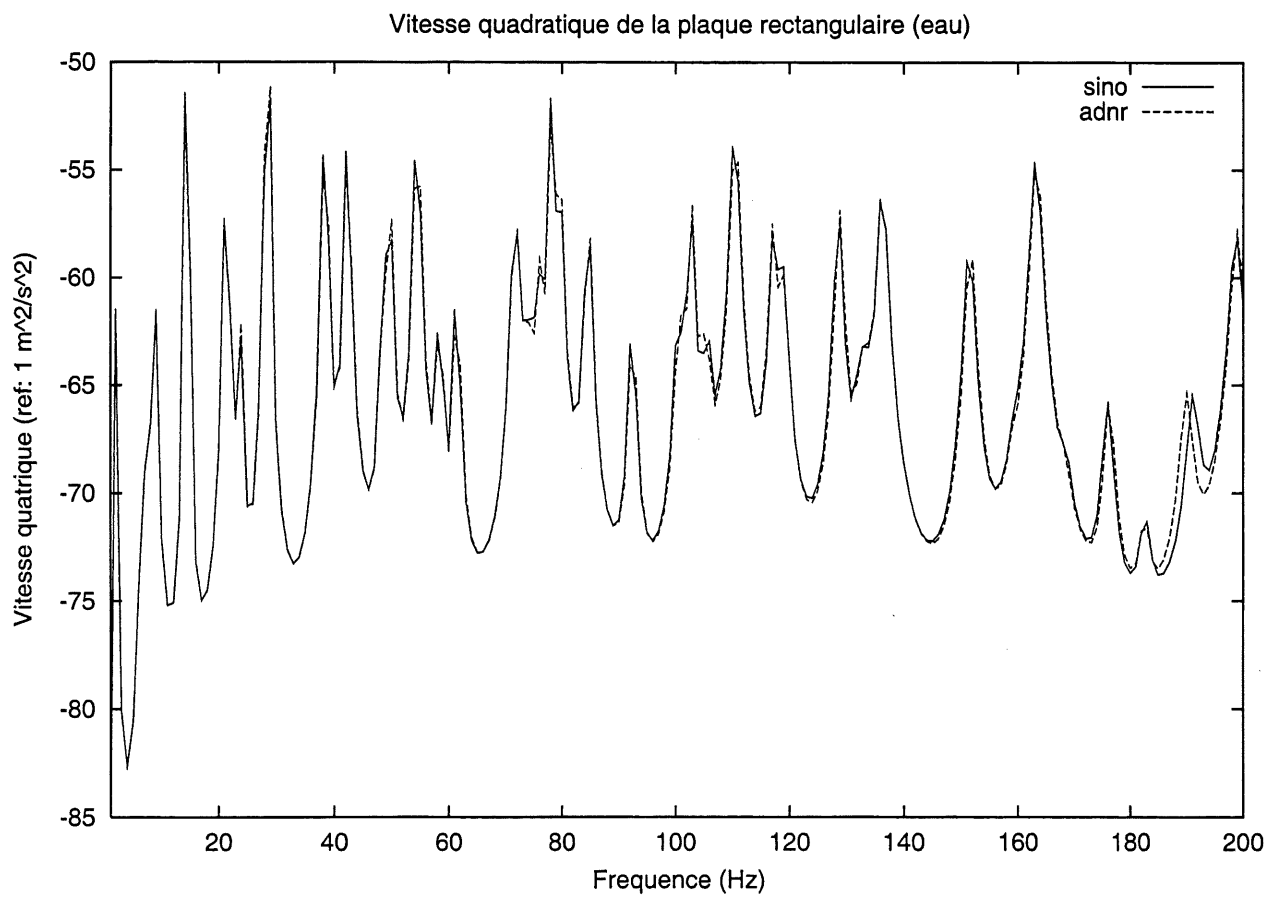


FIG. 7.2 - Calcul de la vitesse quadratique dans un fluide lourd (trait plein).
 Comparaison avec ADNR (trait discontinu)

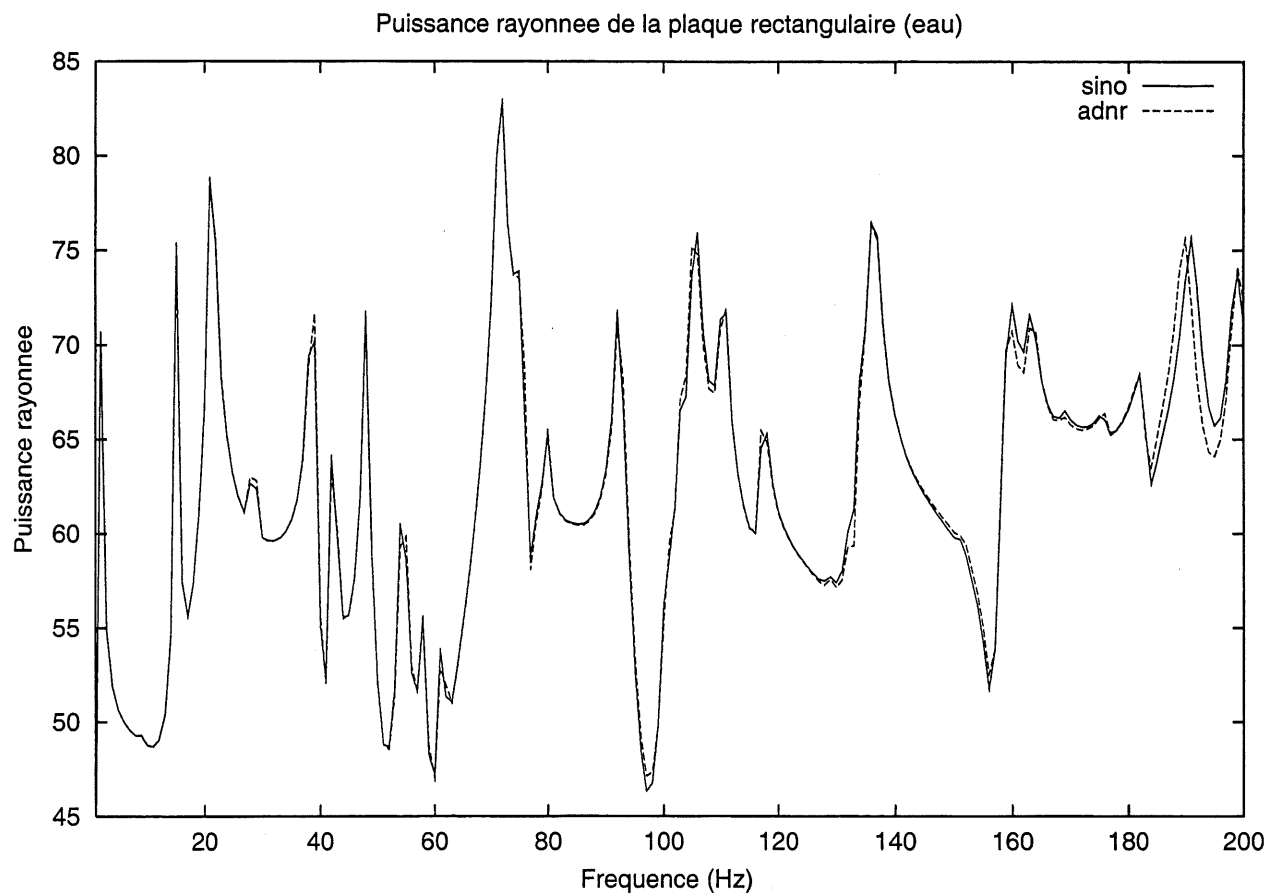


FIG. 7.3 - Calcul de la puissance rayonnée dans un fluide lourd (trait plein).
 Comparaison avec ADNR (trait discontinu)

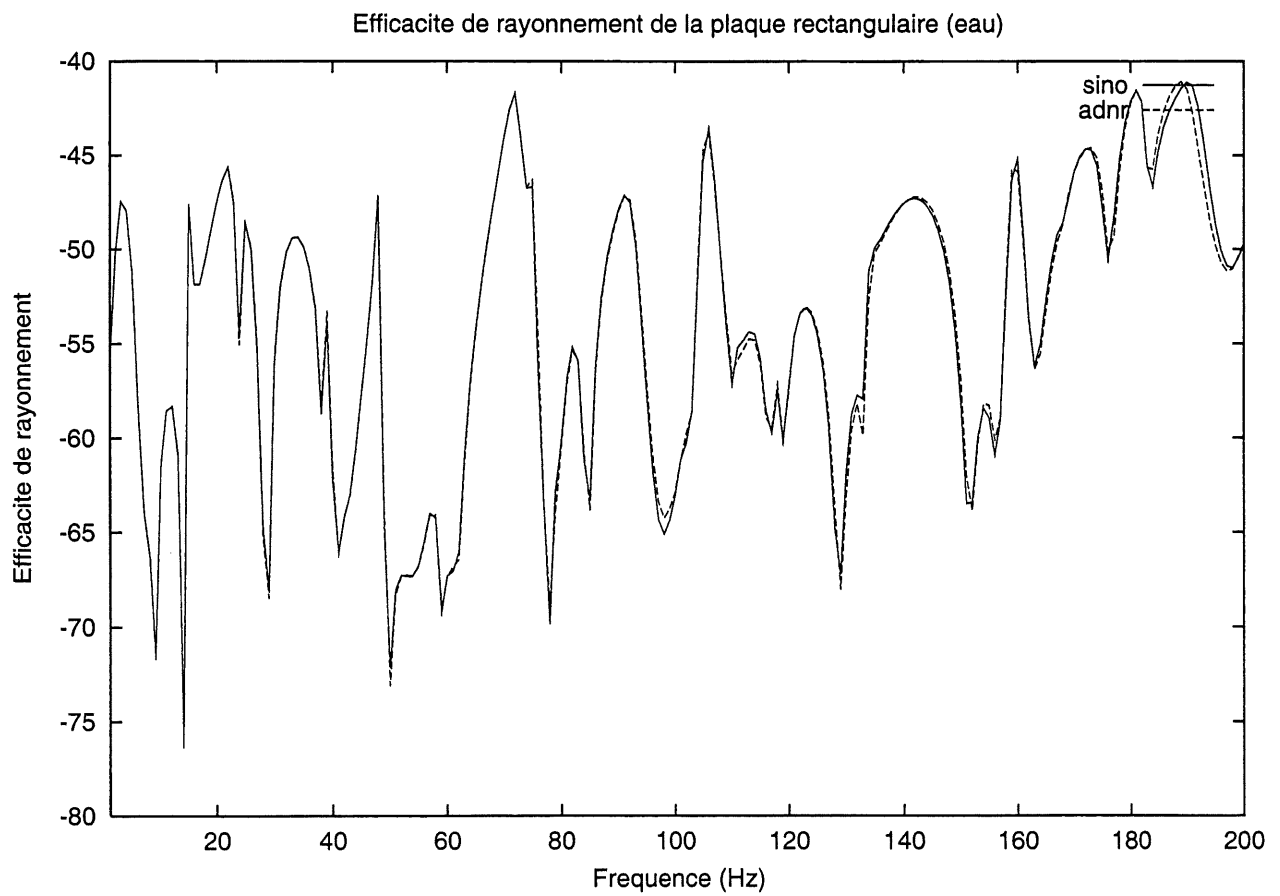


FIG. 7.4 – Calcul de l'efficacité de rayonnement dans un fluide lourd (trait plein).
 Comparaison avec ADNR (trait discontinu)

7.3 Effets du fluide lourd

Quand la plaque entre en contact avec un fluide lourd, deux phénomènes vont modifier les vibrations de la plaque. Il y a l'effet de masse ajoutée due à la charge du fluide qui a tendance à réduire les fréquences propres. Il y a aussi l'amortissement de la structure due au rayonnement qui diminue les niveaux vibratoires aux résonances. Ces 2 effets sont illustrés à la figure 7.5 où l'on compare la vitesse quadratique dans l'air et dans l'eau.

On associe l'amortissement par rayonnement à la résistance modale de rayonnement et la masse rajoutée à la réactance modale.

La tendance générale en basse fréquence indique que l'effet de masse ajoutée est proportionnel à la fréquence. La réactance est très supérieure à la résistance et cette dernière peut être négligée. En haute fréquence par contre, la résistance modale tend vers 1 et la réactance tend vers 0. C'est donc l'effet d'amortissement par rayonnement qui domine en hautes fréquences.

7.4 Conclusion

Il y a quand même certains désavantages dont le temps de calcul de la matrice d'impédance de rayonnement Z_{mnpq} qui reste assez long. C'est cependant un gain important par rapport à l'intégrale quadruple originelle qui est difficile à intégrer numériquement. Il est à noter que la matrice Z_{mnpq} varie doucement sur certaines plages de fréquences et qu'une interpolation pourrait être faite.

La méthode des éléments finis hiérarchiques avec les fonctions trigonométriques permet donc d'avoir le bruit rayonné d'une plaque dans l'eau.

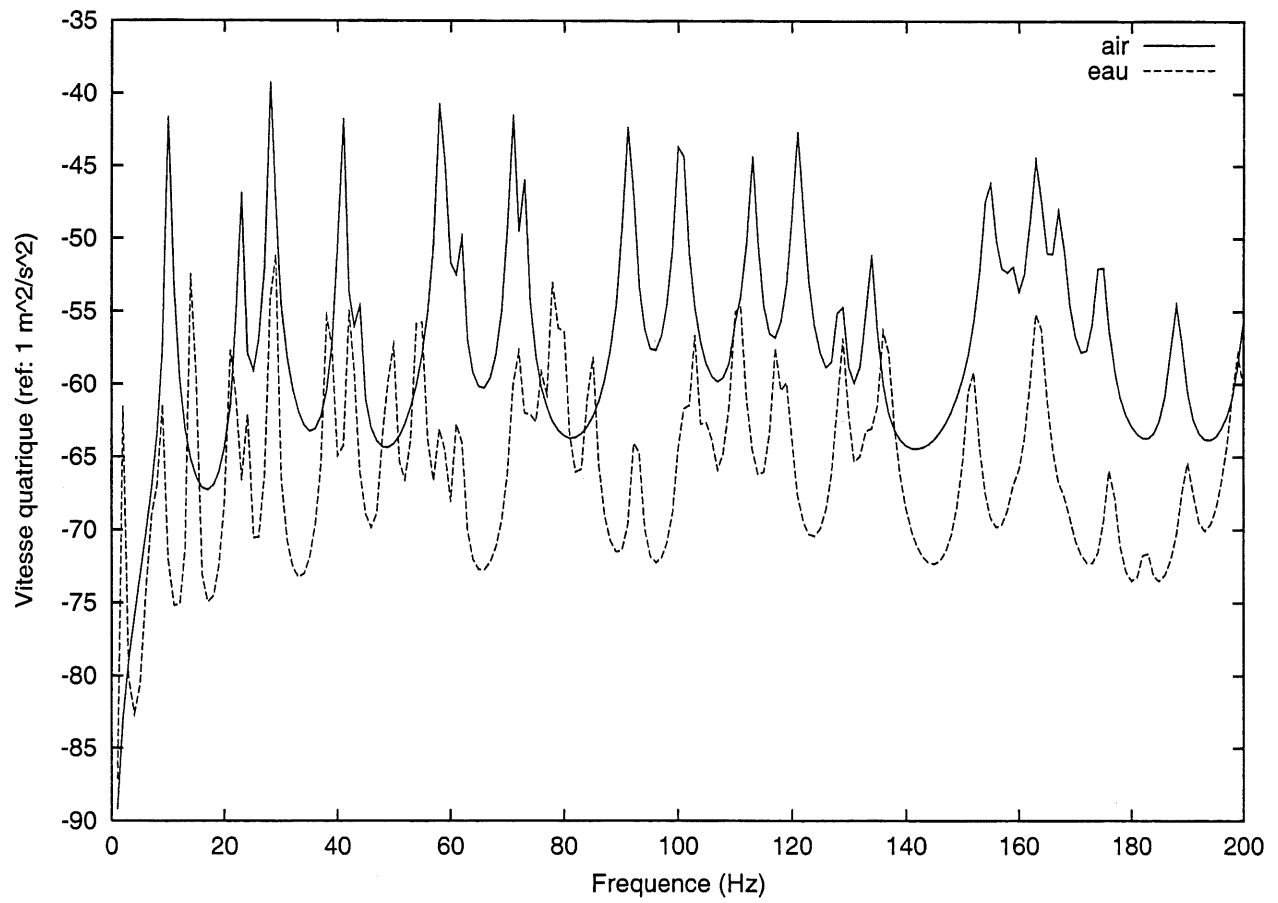


FIG. 7.5 – Vitesse quadratique pour un fluide léger (trait plein) et un fluid lourd (trait discontinu)

Chapitre 8

Conclusion

Résumé

Le travail présenté dans ce mémoire de maîtrise a pu démontrer l'efficacité des éléments finis hiérarchiques trigonométriques pour l'analyse vibroacoustique de la plaque raidie. La performance de ces éléments a permis d'atteindre les moyennes fréquences tout en restant conforme aux résultats expérimentaux et numériques des autres méthodes. Cela s'est fait principalement avec les deux originalités suivantes :

- Développement d'une nouvelle forme de maillage pour y inclure les raidisseurs de manière plus efficace.
- Utilisation des fonctions trigonométriques dans le calcul du rayonnement acoustique.

Perspectives

Nous croyons que les éléments finis hiérarchiques avec fonctions trigonométriques pourraient être utilisés dans plusieurs cas autres que ceux présentés. Voici une liste de suggestions sur les premières améliorations qui pourraient être apportées :

- La structure pourrait être complexifiée avec l'ajout de masses ponctuelles ou de plaques multicouches. Des excitations comme des forces linéiques, de pistons ou des excitations acoustiques pourraient également facilement être modélisées.
- Des améliorations purement numériques peuvent être apportées. Par exemple, l'utilisation de matrices en format creux pour l'analyse modale permettrait de réduire la taille de la mémoire vive requise.
- Une analyse plus poussée pourrait être faite dans l'étude de la jonction entre deux plaques d'épaisseur ou de rigidité différentes. On pourrait également tester d'autres modèles de plaques plus évolués qui modéliseraient les discontinuités de contrainte et le cisaillement des plaques.
- Finalement l'analyse du rayonnement acoustique pourrait s'étendre à des cas plus complexes comme le cas non-bafflé.

Annexe A

Impédance de rayonnement

A.1 Intégration numérique

Pour le calcul de la pression rayonnée et de la matrice d'impédance de rayonnement, nous avons à calculer numériquement une intégrale du type

$$\iint F(x, y) \frac{e^{-jkR}}{R} dx dy \quad (\text{A.1})$$

Cette intégrale peut être évaluée numériquement avec un algorithme de quadrature de Gauss. Cependant, il apparaît une singularité quand R tend vers zéro. On peut vérifier que cette singularité est intégrable en s'assurant que l'intégration sur une petite surface autour de la singularité tend vers 0 quand la surface tend vers 0.

L'intégration sur la petite surface $\epsilon_x \times \epsilon_y$ a la forme suivante en considérant que $F(x, y)$ est constant sur ce domaine

$$I = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_y \rightarrow 0} C \int_0^{\epsilon_x} \int_0^{\epsilon_y} dx dy [x^2 + y^2]^{-1/2} \quad (\text{A.2})$$

En passant en coordonnées polaires et en définissant l'angle θ par $\tan\theta = \epsilon_x/\epsilon_y$, il vient

$$I = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_y \rightarrow 0} C \left\{ \int_0^\theta \int_0^{\frac{\epsilon_x}{\cos\theta}} + \int_\theta^{\pi/2} \int_0^{\frac{\epsilon_y}{\sin\theta}} \right\} dr d\theta \quad (\text{A.3})$$

Ce qui nous donne

$$I = \lim_{\epsilon_x \rightarrow 0} \lim_{\epsilon_y \rightarrow 0} C \left\{ \epsilon_x \ln \left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} \right) + \epsilon_y \ln \left(\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right) \right\} \quad (\text{A.4})$$

Le domaine d'intégration $\epsilon_x \times \epsilon_y$ devrait rester rectangulaire pour une plaque rectangulaire et l'angle θ devrait se maintenir autour de 45° quand ϵ_x et ϵ_y tendent vers 0. Les logarithmes de (A.4) sont donc finis ce qui implique que l'intégrale I tend vers zéro. On pourra alors passer par-dessus cette singularité en choisissant correctement les points de Gauss.

A.2 Calcul des coefficients F_{mp}

Pour le calcul de la matrice d'impédance de rayonnement Z_{mnpq} , on a vu à la section 6.4 que l'on doit évaluer symboliquement le terme suivant :

$$F_{mp} = \int_0^{2-u} \phi_m(u+v-1)\phi_p(v-1)dv \quad (\text{A.5})$$

Sachant que l'on utilise les fonctions hiérarchiques trigonométriques

$$\phi_m(x) = \sin(a_mx + b_m) \sin(c_mx + d_m) \quad (\text{A.6})$$

F_{mp} devient

$$\begin{aligned} F_{mp} &= \int_0^{2-u} \sin(a_mx + b_m) \sin(c_mx + d_m) \sin(a_px + b_p) \sin(c_px + d_p) dv \\ &= \int_0^{2-u} \sin(A) \sin(B) \sin(C) \sin(D) dv \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a_mx + b_m \\ B &= c_mx + d_m \\ C &= a_px + b_p \\ D &= c_px + d_p \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En utilisant les identités trigonométriques on a

$$\begin{aligned} &\sin(A) \sin(B) \sin(C) \sin(D) \\ &= \frac{1}{8} [-\cos(A - B - C - D) + \cos(A + B - C - D) + \cos(A - B + C - D) \\ &\quad - \cos(A + B + C - D) + \cos(A - B - C + D) - \cos(A + B - C + D) \\ &\quad - \cos(A - B + C + D) + \cos(A + B + C + D)] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

L'intégrale du cosinus donne, avec $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ des constantes quelconques

$$\begin{aligned} \int_0^{2-u} \cos(\hat{a}v + \hat{b}u + \hat{c}) &= \frac{1}{\hat{a}} \left(\sin(\hat{a}(2-u) + \hat{b}u + \hat{c}) - \sin(\hat{b}u + \hat{c}) \right) \quad (\text{pour } \hat{a} \neq 0) \\ &= (2-u) \cos(\hat{c} + \hat{b}u) \quad (\text{pour } \hat{a} = 0) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

TAB. A.1 – Valeurs de $s_i, \hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i$ pour le calcul de $F_{mp} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 s_i I(\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i)$

i	s_i	\hat{a}_i	\hat{b}_i	\hat{c}_i
1	-1	$-a_m + a_p + c_m + c_p$	$-a_m + c_m$	$a_m - a_p - b_m + b_p - c_m - c_p + d_m + d_p$
2	1	$a_m + a_p - c_m - c_p$	$a_m - c_m$	$-a_m - a_p + b_m + b_p + c_m + c_p - d_m - d_p$
3	1	$a_m - a_p + c_m - c_p$	$a_m + c_m$	$-a_m + a_p + b_m - b_p - c_m + c_p - d_m - d_p$
4	-1	$-a_m - a_p - c_m + c_p$	$-a_m - c_m$	$a_m + a_p - b_m - b_p + c_m - c_p - d_m + d_p$
5	1	$a_m - a_p - c_m + c_p$	$a_m - c_m$	$-a_m + a_p + b_m - b_p + c_m - c_p - d_m + d_p$
6	-1	$-a_m - a_p + c_m - c_p$	$-a_m + c_m$	$a_m + a_p - b_m - b_p - c_m + c_p + d_m - d_p$
7	-1	$-a_m + a_p - c_m - c_p$	$-a_m - c_m$	$a_m - a_p - b_m + b_p + c_m + c_p - d_m - d_p$
8	1	$a_m + a_p + c_m + c_p$	$a_m + c_m$	$-a_m - a_p + b_m + b_p - c_m - c_p + d_m + d_p$

La valeur de $F_{mp}(u)$ peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$F_{mp} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 s_i I(\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i) \quad (\text{A.11})$$

où $I(\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i)$ est donnée par (Éq.(A.10)) et $s_i, \hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i$ sont données au tableau A.1

Bibliographie

- [1] BARDELL, N. Free vibration analysis of flat plate using the hierarchical finite element method. *Journal of Sound and Vibration* 151, 2 (1991), 263–289.
- [2] BERRY, A. *Vibration et rayonnement acoustique de structures planes complexes immergées dans un fluide léger ou dans un fluide lourd*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, 1991.
- [3] BERRY, A., AND NICOLAS, J. Structural acoustics and vibration behavior of complex panels. *Applied Acoustics* 100, 1 (1994), 185–215.
- [4] BERRY, A., AND NICOLAS, J. Vibration and sound radiation of fluid-loaded stiffened plates with consideration of in-plane deformation. *Journal of Acoustical Societies of America* 100, 1 (1996), 312–319.
- [5] BESLIN, O., AND NICOLAS, J. A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *Journal of Acoustical Societies of America* (1996).
- [6] BHAT, R. Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in rayleigh-ritz methods. *Journal of Sound and Vibration* 102, 4 (1985), 493–499.
- [7] CHAMPOUX, Y., BRUNET, S., AND BERRY, A. On the construction of a simply supported rectangular plate for noise and vibration studies. *Experimental Techniques* 158, 1 (1996), 149–167.
- [8] COTÉ, A. *Modélisation vibroacoustique dans le domaine des moyennes fréquences par éléments finis de type P*. PhD thesis, Université de Sherbrooke, 1998.

- [9] FOIN, O. Etude du comportement vibroacoustique de plaques multicouches. Master's thesis, Université de Sherbrooke, 1995.
- [10] GUTIERREZ, R., AND P.A.A.LAURA. Transverse vibration of rectangular plates elastically restrained against rotation along the edges. *Journal of Sound and Vibration* 101 (1985), 122–124.
- [11] KAFFEL, H. Etude expérimentale du comportement vibratoire des structures rivetées. Master's thesis, Université de Sherbrooke, 1996.
- [12] KOKO, T., AND OLSON, M. Vibration analysis of stiffened plates by super elements. *Journal of Acoustical Societies of America* 158, 1 (1992), 149–167.
- [13] LAURA, P., AND GUTIERREZ, R. A note on transverse vibration vibration of stiffened rectangular plates with edges elastically restrained against rotation. *Journal of Sound and Vibration* 78 (1981), 139–144.
- [14] LESUEUR, C. *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles, 1988.
- [15] LIEW, K., WANG, C., XIAN, Y., AND KITIPORNCHAI, S. *Vibration of Mindlin Plates*. Elsevier, 1998.
- [16] LIEW, K., XIANG, Y., KITIPORNCHAI, S., AND LIM, M. Vibration of the rectangular mindlin plates with intermediate stiffeners. *Journal of Vibration and Acoustic* 166 (1994), 529–535.
- [17] LIEW, K., XIANG, Y., KITIPORNCHAI, S., AND MEEK, J. Formulation of mindlin-engesser model for stiffened plate vibration. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng* 120 (1995), 339–353.
- [18] LYON, R. Statistical energy analysis. *The M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets* (1975).
- [19] MEAD, D. Plates with regular stiffening in acoustic media : Vibration and radiation. *Journal of Acoustical Societies of America* 88, 1 (1990), 391–401.
- [20] NELISSE, H., BESLIN, O., AND NICOLAS, J. A generalized approach for the acoustic radiation from a baffled or unbaffled plate with arbitrary boundary conditions, immersed in a light or heavy fluid. *Journal of Sound and Vibration* (1997).

- [21] SANDMAN, B. Motion of a three-layered elastic-viscoelastic plate under fluid loading. *Journal of Acoustical Societies of America* 57, 5 (1975), 1097–1107.
- [22] SZABÓ, B., AND BABUSKA, I. *Finite Element analysis*. John Wiley and Sons, 1991.
- [23] WITTRICK, W. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *ijss* 23 (1987), 441–464.
- [24] WU, J.-R., AND LIU, W. Vibration of rectangular plates with edge restraints and intermediate stiffeners. *Journal of Sound and Vibration* 123, 1 (1988), 103–113.
- [25] XIANG, Y., KITIPORNCHAI, S., LIEW, K., AND LIM, M. Vibration of stiffened skew mindlin plates. *Acta Mechanica* 112 (1995), 11–18.
- [26] ZHU, D. Development of hierarchical finite element methods at biao. *Proceedings of the International Conference on Computational Mechanics* (1985).