

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté des sciences appliquées
Département de génie mécanique
Groupe d'acoustique et vibrations

MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DE PLAQUES
MULTICOUCHES AUX PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES,
VISCOÉLASTIQUES ET PIÉZOÉLECTRIQUES.

Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées
Spécialité : génie mécanique

Louis Guertin

Sherbrooke (Québec), CANADA

Septembre 1998

Résumé

Les structures spatiales se doivent d'être de plus en plus légères à cause du coût de transport pour les mettre en orbite. Étant donné les exigences au niveau de leur positionnement et de leur amplitude de vibration, il est nécessaire d'avoir des structures spatiales rigides et précises. Dans plusieurs cas, réduire le poids résulte à augmenter la flexibilité. Ceci cause des instabilités structurales, telles que des amplitudes de vibration indésirables. De plus, ces problèmes réduisent la précision et l'exactitude des mouvements. Par conséquent, il est essentiel de contrôler et de stabiliser les structures durant leur utilisation. L'utilisation de structures intelligentes intégrant des capteurs et des actionneurs piézoélectriques est un moyen efficace. De plus, en intégrant des couches viscoélastiques à l'intérieur des structures intelligentes, leur efficacité s'accroît significativement.

Afin de concevoir, évaluer et sélectionner des structures intelligentes efficaces, il est important de connaître précisément leur comportement statique et dynamique. Par conséquent, des méthodes d'analyse et d'optimisation pour des structures intelligentes doivent être développées.

Le but de cette étude était de développer une formulation de plaque multicouche par la méthode des éléments finis intégrant des couches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. La formulation tient compte à la fois de la masse, de la rigidité et de l'amortissement de chacune des couches. Une théorie de plaque discrète et linéaire ainsi que le principe de Hamilton sont utilisés pour la développer les équations de mouvement de la plaque. La

continuité des contraintes de cisaillement et des déplacements est imposée aux interfaces des couches. Sept degrés de liberté par noeud sont nécessaires pour décrire correctement le mouvement de la plaque. Un élément fini de plaque quadratique à 8 noeuds possédant 56 degrés de liberté a été développé. Les déformations membrane, de flexion et de cisaillement sont incluses dans la formulation. Un degré de liberté électrique supplémentaire par élément est nécessaire pour chaque couche piézoélectrique. Cette formulation par la méthode des éléments finis peut être utilisée pour obtenir la réponse statique ou dynamique d'une plaque isotrope multicouche soumise à des excitations mécaniques et/ou électriques.

Des études de plaques intégrant des couches viscoélastiques et des composantes piézoélectriques (capteurs et/ou senseurs) ont été réalisées pour valider la formulation. Des conditions limites libres, simplement appuyées et encastrées ont été utilisées. Des comparaisons avec des résultats analytiques et numériques ont été réalisées. Ces comparaisons ont permis de démontrer la qualité des résultats obtenus. Cet élément fini de plaque multicouche est sans aucun doute un outil performant pour faire l'étude de plaques intégrant des couches viscoélastiques et des composantes piézoélectriques.

Remerciements

Ce mémoire de maîtrise a été rendu possible grâce à la participation de plusieurs personnes que je tiens à remercier grandement :

- Les professeurs François Charron et Alain Berry, directeurs de thèse, pour leurs innombrables conseils, leur disponibilité, la confiance qu'ils m'ont démontré et l'intérêt constant porté aux travaux ;
- le professeur Nouredine Atalla et Michel Tournour, pour le temps qu'ils ont consacré à intégrer cet élément fini à l'intérieur du programme GAUSEF ainsi que pour leurs supports et leurs nombreux conseils ;
- le professeur Jean Nicolas, directeur du GAUS, pour m'avoir accepté au sein de son équipe de recherche ;
- le chercheur Wanping Zheng du département de Technologie Spatiale de l'Agence Spatiale Canadienne pour m'avoir accueilli pour un stage de 2 mois à Saint-Hubert ;
- ma conjointe Marie-Hélène, pour son soutien moral et son amour ;
- mes parents, pour leur soutien financier et leurs encouragements depuis le tout début

de mes études ;

- tous les autres membres de ma famille, pour leurs encouragements ;

- Jean Tardif, pour son amitié et son intérêt porté aux travaux ; et

- tous les membres du GAUS, plus particulièrement André Côté, Olivier Foin, Sylvie Gorog, Pierre Marcotte, Patrice Masson, Philippe Micheau, Raymond Panneton, Yann Pasco, Benoit Patry et Alain Ratle avec qui j'ai eu l'occasion d'avoir des discussions enrichissantes tant au niveau scientifique que personnel.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Méthodologie retenue	3
1.2	Structure du document	4
2	État des connaissances	5
2.1	Introduction	5
2.2	Modélisation de plaques multicouches	7
2.2.1	Modélisation analytique	7
2.2.2	Modélisation par éléments finis	11
2.3	Modélisation de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques	15
2.3.1	Modélisation analytique	15
2.3.2	Modélisation par éléments finis	18
2.4	Conclusion	22
3	Théorie des matériaux élastiques	24
3.1	Introduction	24
3.2	Approche locale – théorie de l'élasticité linéaire	24
3.2.1	Équations de mouvement	25
3.2.2	Lois de comportement	26

3.2.3	Relations déformation–déplacement	27
3.2.4	Conditions aux limites mécaniques	28
3.3	Approche locale – théorie de plaque élastique	29
3.3.1	Champ de déplacement	29
3.3.2	Lois de comportement	32
3.3.3	Relations déformation–déplacement	34
3.4	Approche globale – principe de Hamilton	38
3.4.1	Fonctionnelle de Hamilton	38
3.4.2	Énergie cinétique T	39
3.4.3	Énergie potentielle V	41
3.4.4	Travail W	44
3.5	Conclusion	45
4	Théorie des matériaux piézoélectriques	46
4.1	Introduction	46
4.2	Approche locale – théorie de la piézoélectricité linéaire	47
4.2.1	Équations de mouvement	47
4.2.2	Lois de comportement	48
4.2.3	Relations champ–potentiel électrique	50
4.2.4	Conditions aux limites électriques	50
4.3	Approche locale – théorie de plaque piézoélectrique	51
4.3.1	Champ de potentiel électrique	51
4.3.2	Lois de comportement	52
4.3.3	Relations champ–potentiel électrique	53
4.4	Approche globale – principe de Hamilton	54

4.4.1	Fonctionnelle de Hamilton	55
4.4.2	Énergie cinétique T	55
4.4.3	Énergie potentielle V	56
4.4.4	Travail W	59
4.5	Conclusion	60
5	Théorie des matériaux multicouches	61
5.1	Introduction	61
5.2	Approche locale – théorie de plaque élastique multicouche	62
5.2.1	Champ de déplacement	62
5.2.2	Relations déformation–déplacement	65
5.2.3	Conditions de continuité	68
5.3	Approche locale – théorie de plaque piézoélectrique multicouche	75
5.3.1	Champ de potentiel électrique	75
5.3.2	Relations champ–potentiel électrique	76
5.4	Approche globale – principe de Hamilton	76
5.4.1	Fonctionnelle de Hamilton	77
5.4.2	Énergie cinétique T	77
5.4.3	Énergie potentielle V	79
5.4.4	Travail W	84
5.5	Conclusion	86
6	Élément fini de plaque multicouche	87
6.1	Introduction	87
6.2	Discrétisation de la géométrie	88
6.2.1	Fonctions d’interpolation	88

6.2.2	Discrétisation des variables du problème	91
6.3	Approximation de la solution	92
6.3.1	Énergie cinétique T	92
6.3.2	Énergie potentielle V	93
6.3.3	Travail W	98
6.4	Calcul des matrices élémentaires	100
6.4.1	Matrice de masse élémentaire	100
6.4.2	Matrice de rigidité élémentaire	101
6.4.3	Vecteur de force élémentaire	104
6.5	Conclusion	107
7	Analyse de plaques multicouches par la méthode des éléments finis	108
7.1	Introduction	108
7.2	Analyse d'une plaque élastique et viscoélastique	109
7.2.1	Analyse modale	109
7.2.2	Analyse dynamique	114
7.3	Analyse d'une plaque piézoélectrique	118
7.3.1	Analyse modale	118
7.3.2	Analyse dynamique	122
7.4	Conclusion	125
8	Validation de l'élément fini multicouche	126
8.1	Introduction	126
8.2	Validation de la composante élastique	127
8.2.1	Plaque monocouche	127
8.2.2	Plaque multicouche	130

8.3	Validation de la composante viscoélastique	133
8.3.1	Recouvrement complet	134
8.3.2	Recouvrement partiel	139
8.4	Validation de la composante piézoélectrique	145
8.4.1	Actionneur	145
8.4.2	Capteur	147
8.5	Conclusion	150
Conclusion		152
A Discrétisation des variables nodales		155
A.1	Interpolation nodale des variables de déplacement de la 1 ^{ère} couche	156
A.2	Interpolation nodale des variables de déplacement de la i^e couche	157
A.3	Interpolation nodale des variables potentiels électriques	158
B Calcul des matrices différentielles		159
B.1	Matrice différentielle de la composante membrane de la 1 ^{ère} couche $[B_{um}^{c1}]$.	160
B.2	Matrice différentielle de la composante membrane de la i^e couche $[B_{um}^{ci}]$. .	161
B.3	Matrice différentielle de la composante de flexion de la 1 ^{ère} couche $[B_{uf}^{c1}]$.	162
B.4	Matrice différentielle de la composante de flexion de la i^e couche $[B_{uf}^{ci}]$. .	163
B.5	Matrice différentielle de la composante de cisaillement de la 1 ^{ère} couche $[B_{uc}^{c1}]$	164
B.6	Matrice différentielle de la composante de cisaillement de la i^e couche $[B_{uc}^{ci}]$	165
B.7	Matrice différentielle du potentiel électrique de la i^e couche $[B_{\phi}^{ci}]$	166
C Déformées modales d'une plaque recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte		167

C.1	Conditions aux limites libres	168
C.2	Conditions aux limites simplement appuyées	169
C.3	Conditions aux limites encastrées	172
D	Déformées modales d'une plaque recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	175
D.1	Conditions aux limites libres	176
D.2	Conditions aux limites simplement appuyées	177
D.3	Conditions aux limites encastrées	180

Table des figures

1.1	Différentes approches pour le contrôle du bruit	2
2.1	Résumé schématique de la modélisation de plaques multicouches	11
3.1	État de contrainte en un point d'un corps élastique.	25
3.2	Corps avant et après déformation	27
3.3	Schéma d'une plaque élastique.	30
3.4	Déformation d'une section de plaque élastique.	30
5.1	Schéma d'une plaque élastique multicouche	63
5.2	Déformation d'une section de plaque élastique multicouche.	63
5.3	Condition de continuité des déplacements aux interfaces des couches.	70
6.1	Élément bidimensionnel à 8 noeuds.	89
6.2	Degrés de liberté de chacun des noeuds de l'élément.	89
8.1	Schéma d'une plaque monocouche	128
8.2	Vitesse quadratique moyenne d'une plaque monocouche aux conditions aux limites simplement appuyées	131
8.3	Vitesse quadratique moyenne d'une plaque scindée en plusieurs couches aux conditions aux limites simplement appuyées	133

8.4	Schéma d'une plaque recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	134
8.5	Vitesse quadratique moyenne d'une plaque aux conditions aux limites simple- ment appuyées recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	139
8.6	Schéma d'une plaque recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	140
8.7	Vitesse quadratique moyenne d'une plaque aux conditions aux limites simple- ment appuyées recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	144
8.8	Schéma d'une plaque excitée par un actionneur piézoélectrique	145
8.9	Vitesse quadratique moyenne d'une plaque simplement appuyée et excitée par un actionneur piézoélectrique.	147
8.10	Schéma d'une plaque recouverte complètement d'un capteur piézoélectrique	148
8.11	Tension moyenne à la surface d'un capteur piézoélectrique recouvrant com- plètement la surface d'une plaque simplement appuyée.	149
8.12	Schéma d'une plaque recouverte partiellement d'un capteur piézoélectrique	150
8.13	Tension moyenne à la surface d'un capteur piézoélectrique recouvrant par- tiellement la surface d'une plaque simplement appuyée.	151

Liste des tableaux

4.1	Analogie entre les variables mécaniques et électriques	47
8.1	Propriétés mécaniques d'une plaque monocouche	128
8.2	Fréquences propres de vibration d'une plaque monocouche aux conditions aux limites libres	128
8.3	Fréquences propres de vibration d'une plaque monocouche aux conditions aux limites simplement appuyées	129
8.4	Fréquences propres de vibration d'une plaque monocouche aux conditions aux limites encastrees	129
8.5	Fréquences propres de vibration d'une plaque scindée en plusieurs couches aux conditions aux limites simplement appuyées	132
8.6	Propriétés mécaniques d'une plaque recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	134
8.7	Fréquences propres de vibration d'une plaque aux conditions aux limites libres recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	135
8.8	Fréquences propres de vibration d'une plaque aux conditions aux limites simplement appuyées recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	135
8.9	Fréquences propres de vibration d'une plaque aux conditions aux limites encastrees recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	136
8.10	Amortissements modaux d'une plaque aux conditions aux limites libres recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	136
8.11	Amortissements modaux d'une plaque aux conditions aux limites simplement appuyées recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	137

8.12 Amortissements modaux d'une plaque aux conditions aux limites encastées recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte	137
8.13 Propriétés mécaniques d'une plaque recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	140
8.14 Fréquences propres de vibration d'une plaque aux conditions aux limites libres recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	141
8.15 Fréquences propres de vibration d'une plaque aux conditions aux limites simplement appuyées recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	141
8.16 Fréquences propres de vibration d'une plaque aux conditions aux limites encastées recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	142
8.17 Amortissements modaux d'une plaque aux conditions aux limites libres recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	142
8.18 Amortissements modaux d'une plaque aux conditions aux limites simplement appuyées recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	143
8.19 Amortissements modaux d'une plaque aux conditions aux limites encastées recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte	143
8.20 Propriétés mécaniques et électriques d'une plaque excitée par un actionneur piézoélectrique	146
8.21 Propriétés mécaniques et électriques d'une plaque recouverte complètement d'un capteur piézoélectrique	148
8.22 Propriétés mécaniques et électriques d'une plaque recouverte partiellement d'un capteur piézoélectrique	150

Nomenclature

Lettres arabes

d	Constante diélectrique	C/m
e	Constante piézoélectrique	C/m^2
f	Force surfacique	N/m^2
h	Épaisseur	m
n	Vecteur normal unitaire	
q	Charge	C
q	Opérateur local de continuité	
t	Force de traction	N/m^2
t	Temps	sec
u	Déplacement dans la direction x	m
v	Déplacement dans la direction y	m
w	Déplacement dans la direction z	m
x	Coordonnée cartésienne (espace réel)	
y	Coordonnée cartésienne (espace réel)	
z	Coordonnée cartésienne (espace réel)	
C	Constante électrique	N/m^2
D	Déplacement électrique	C/m^2
D	Opérateur différentiel	
E	Champ électrique	V/m
E	Module de Young	N/m^2
F	Force volumique	N/m^3
G	Module de rigidité en cisaillement	N/m^2
H	Fonctionnelle de Hamilton	
J	Jacobien	
K	Rigidité	
M	Masse	kg
N	Polynôme d'interpolation	
P	Force ponctuelle	N
Q	Opérateur global de continuité	

S	Surface	m^2
T	Opérateur de localisation	
T	Énergie cinétique	J
U	Déplacements nodaux	m
V	Énergie potentielle/déformation	J
W	Travail des efforts externes	J

Lettres grecques

σ	Contraintes / Contrainte normale	N/m^2
τ	Contrainte de cisaillement	N/m^2
ε	Déformations / Déformation normale	—
γ	Déformation de cisaillement	—
β	Déformations dues à l'effet membrane	—
χ	Déformations dues à la flexion	—
γ	Déformations dues au cisaillement	—
ρ	Densité	kg/m^3
ν	Coefficient de Poisson	—
η	Amortissement	—
φ	Rotation de cisaillement	rad
θ	Rotation totale	rad
ϕ	Potentiel électrique	V
Φ	Potentiels électriques nodaux	V
ξ	Coordonnée cartésienne réduite (espace parent)	
η	Coordonnée cartésienne réduite (espace parent)	
ω	Pulsation	rad/sec

Indices

c	Cisaillement
f	Flexion
f	Force
m	Membrane
q	Charge
r	Rotation
t	Translation
u	Déplacements
x	Projection sur l'axe x du repère cartésien

y	Projection sur l'axe y du repère cartésien
z	Projection sur l'axe z du repère cartésien
I	Imaginaire
R	Réel
ϕ	Potentiel électrique
0	Plan $z = 0$

Exposants

c	Couche
f	DDL fixé
l	DDL libre
n	Numéro n
$(n + 1)$	Numéro $(n + 1)$
i	Numéro i
t	Transpose
$*$	Nombre complexe

Parenthèses

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[]$	Matrice

Chapitre 1

Introduction

Dans plusieurs applications rencontrées en ingénierie, le bruit et les vibrations sont des problèmes importants. Les méthodes conventionnelles pour traiter ces problèmes consistent soit à utiliser des techniques d'amortissement passif, en ajoutant une ou plusieurs couches de matériaux viscoélastiques sur les surfaces vibrantes, soit à reconcevoir le système. Les principaux désavantages sont que la première méthode est peu efficace à basses fréquences alors que la deuxième est généralement très coûteuse. Ces dernières années, le contrôle actif du bruit et des vibrations est apparu comme une technologie viable et capable de combler les lacunes dans le domaine des basses fréquences. Les récents développements ont été facilités par la croissance technologique rapide dans le domaine des processeurs de traitement de signaux et des transducteurs de contrôle. Présentement, deux approches de contrôle peuvent être utilisées pour réduire activement le bruit généré par des structures vibrantes. Il s'agit des approches ANC ("Active Noise Control") et ASAC ("Active Structural Acoustic Control"). Ce qui différencie ces deux approches est le genre d'actionneurs utilisés pour effectuer le contrôle. Dans le premier cas, des actionneurs de contrôle acoustiques sont utilisés alors que dans le deuxième cas, des actionneurs de contrôle mécaniques sont utilisés (voir figure 1.1).

La communauté scientifique s'intéresse de plus en plus au concept de structures intelli-

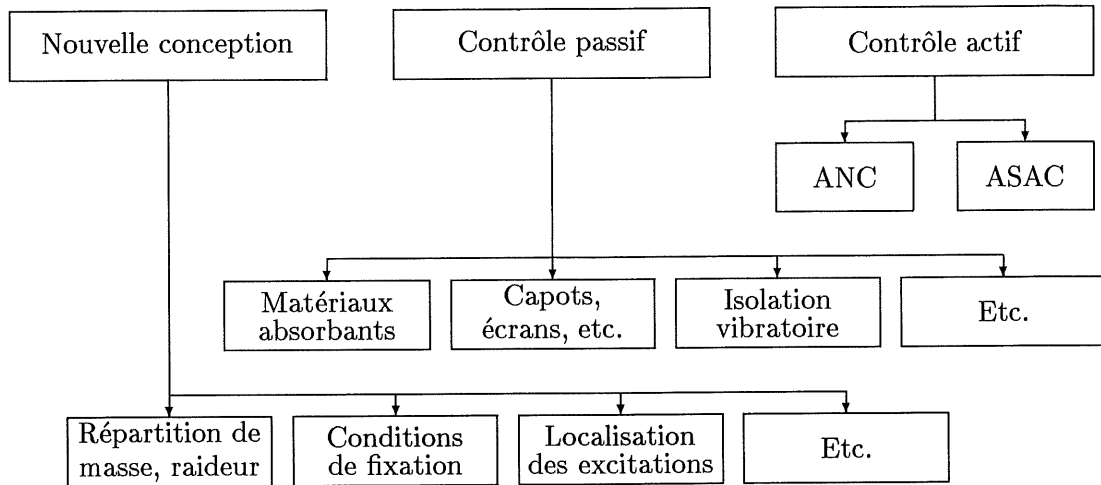


Figure 1.1: Différentes approches pour le contrôle du bruit [6]

gentes. Ces dernières sont constituées d'un système de capteurs qui détecte le déplacement, la vitesse, l'accélération ou la déformation interne causée par des vibrations, des variations de température ou des pressions externes. Cette information est introduite dans un algorithme de contrôle programmé à l'intérieur d'un microprocesseur qui, par la suite, active un système d'actionneurs. Ces derniers peuvent changer la forme de la structure de manière à atténuer sa réponse statique ou dynamique. Ces systèmes intelligents ont des applications dans le domaine des grandes structures spatiales et des satellites, des structures d'avion et d'hélicoptère, des automobiles et des automates programmables.

Le Groupe d'Acoustique et de vibrations de l'Université de Sherbrooke (GAUS) réalise des recherches dans le domaine du contrôle actif du bruit. L'objectif principal du groupe en matière de contrôle actif est de développer et mettre en oeuvre de nouvelles stratégies de contrôle actif du bruit, que ce soit à l'intérieur du champ acoustique (contrôle actif acoustique - approche ANC) ou à la source même du bruit (contrôle vibratoire de rayonnement acoustique - approche ASAC). Ces différentes stratégies s'appuient sur une connaissance des capteurs et des actionneurs mis en oeuvre ainsi que sur une maîtrise des algorithmes de contrôle utilisés. Les compétences ainsi acquises au sein du groupe ont été éprouvées dans le cadre d'applications industrielles.

L'objectif de la recherche en contrôle actif vibratoire de rayonnement acoustique au GAUS est d'arriver à créer, à plus ou moins long terme, des matériaux intelligents, c'est-à-dire intégrant des capteurs et des actionneurs au sein même d'une structure. La maîtrise des différents types de capteurs et d'actionneurs compte pour une part importante de la recherche dans ce domaine.

1.1 Méthodologie retenue

Ce projet de recherche porte sur la modélisation par éléments finis de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques. Cette modélisation se fait à partir d'une plaque multicouche dont certaines couches peuvent être composées d'un matériau piézoélectrique. Par ailleurs, certaines de ces couches peuvent être constituées de matériaux viscoélastiques afin de pouvoir faire l'étude de l'amortissement actif. Cet outil de recherche permettra de prédire le comportement vibratoire d'une plaque intégrant des capteurs et des actionneurs piézoélectriques. Cette prédiction pourra se faire autant au niveau des valeurs des variables mécaniques que de celles des variables électriques.

Le modèle développé est consistant, c'est-à-dire que les actionneurs et les capteurs sont considérés comme des couches de la plaque laminée. Ceci permet de tenir compte de la masse et de la rigidité des couches piézoélectriques. La formulation variationnelle est basée sur le principe de Hamilton. L'énergie potentielle de la plaque est constituée de trois composantes : l'énergie élastique, l'énergie piézoélectrique et l'énergie diélectrique.

Les champs de déplacement et de potentiel électrique sont linéaires et discrets. La continuité des déplacements et des contraintes en cisaillement est imposée aux interfaces des couches. Ces conditions, physiquement admissibles, permettent de réduire le nombre de degrés de liberté élastiques par noeud à 7 ($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \partial w/\partial x$ et $\partial w/\partial y$) indépendamment du nombre de couches à l'intérieur de la plaque laminée. Un seul degré de liberté électrique (ϕ) par couche piézoélectrique est nécessaire. Un élément isoparamétrique de plaque à 8 noeuds est

utilisé pour discrétiser le milieu. L'élément tient compte à la fois de l'effet membrane, de flexion et du cisaillement transversal. Une partie complexe de la rigidité est introduite pour modéliser l'amortissement des matériaux viscoélastiques.

1.2 Structure du document

Ce mémoire a été rédigé de manière à bien faire ressortir l'analogie existant entre le comportement élastique et piézoélectrique des matériaux. Les chapitres 3 et 4 font un rappel sur la théorie des matériaux élastiques et piézoélectriques respectivement. La structure de ces deux chapitres étant la même, l'analogie entre les deux comportements est clairement illustrée.

Le chapitre 5 fait un rappel sur la théorie des matériaux multicouches. Les notions présentées aux chapitres 3 et 4 seront reprises et combinées à l'intérieur du chapitre 5. Encore une fois, les sections de ce chapitre ont été structurées de manière à bien faire ressortir l'analogie entre les comportements élastiques et piézoélectriques.

La formulation de l'élément fini est présentée au chapitre 6. Les relations de l'approche globale du chapitre 5 sont reprises et discrétisées afin d'obtenir les expressions des matrices de masse et de rigidité élémentaires ainsi que l'expression du vecteur de force élémentaire. Par la suite, les matrices et les vecteurs élémentaires sont assemblés et analysés à partir des équations de mouvement présentées au chapitre 7.

Finalement, le chapitre 8 présente les résultats obtenus lors de la validation de l'élément fini multicouche. Ce chapitre est divisé en trois sections : validation de la composante élastique, viscoélastique et piézoélectrique. Chacune des composantes a été validée séparément de façon à s'assurer qu'elle se comporte correctement.

Chapitre 2

État des connaissances

2.1 Introduction

La technologie des structures intelligentes utilisant un réseau de capteurs et d'actionneurs aura un impact important au niveau de la conception, du développement et de la fabrication de la prochaine génération de produits. L'idée d'appliquer les matériaux intelligents aux systèmes mécaniques a été étudiée par des chercheurs de différentes disciplines. Présentement, plusieurs matériaux ayant un comportement adaptable sont utilisables comme capteurs ou actionneurs. Ces matériaux comprennent les polymères et les céramiques piézoélectriques, les alliages à mémoire de forme, les fluides électro-rhéologiques et les fibres optiques. La modélisation et la simulation de ces matériaux joueront un rôle clé dans la conception de structures intelligentes.

Les matériaux piézoélectriques possèdent certaines propriétés facilitant leur utilisation comme élément de contrôle des structures. Premièrement, ils se déforment lorsqu'on leur applique un champ électrique. Cette propriété, effet inverse de la piézoélectricité, permet de les utiliser comme actionneur. Deuxièmement, ils produisent une tension électrique lorsqu'on les déforme. Cette propriété, effet direct de la piézoélectricité, permet de les utiliser comme

capteur. Les équations suivantes présentent respectivement l'effet direct et inverse de la piézoélectricité.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^t\{E\} \quad (2.1)$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [d]^t\{E\} \quad (2.2)$$

où

- $\{\sigma\}$ Vecteur des contraintes
- $\{D\}$ Vecteur des déplacements électriques
- $\{\varepsilon\}$ Vecteur des déformations
- $\{E\}$ Vecteur des champs électriques
- $[C]$ Matrice des constantes élastiques à champ électrique constant
- $[e]$ Matrice des constantes piézoélectriques en déformation
- $[d]^t$ Matrice de permittivité diélectrique à déformation constante

De façon générale, les matériaux piézoélectriques ont l'habileté de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique et vice-versa.

On attribue essentiellement l'efficacité des structures intelligentes à leurs propriétés de légèreté, de force et de faible consommation électrique des actionneurs piézoélectriques. Ces caractéristiques rendent cette classe d'actionneurs intéressante pour le contrôle actif des vibrations structurales.

Le concept de base du contrôle actif du bruit date de 1930. Le brevet déposé par Lueg [33] a toutes les caractéristiques d'un système de contrôle actif dans les conduits. Ce brevet utilise le principe de superposition et stipule que les variations de pression, causées par une onde plane qui se propage dans un conduit rigide, peuvent être éliminées si une deuxième onde d'amplitude égale mais déphasée de 180 degrés est générée.

Il y a eu peu de développement entre 1934, l'année où Lueg a déposé son brevet, et le milieu des années 1980. Le manque de contrôleurs numériques en est la raison principale. Ces derniers sont nécessaires pour déterminer l'amplitude et la phase de l'onde secondaire qu'il

faut générer ainsi que pour l'identification et l'adaptation de différents filtres numériques.

À la fin des années 1980, l'intérêt du comportement mécanique et électrique des plaques multicouches avec couches piézoélectriques est réapparu dans le domaine des structures intelligentes. Étant donné la plus grande demande pour ces structures, une meilleure connaissance du couplage des champs mécanique et électrique était requise comparativement aux modèles simples déjà développés dans le passé. De plus, les solutions exactes ou analytiques n'étaient connues que pour des géométries très simples. Par conséquent, les méthodes approximatives, telle la méthode des éléments finis, se révélaient un outil précis et puissant pour concevoir et analyser les structures intelligentes.

Afin de faire une synthèse sur la modélisation de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques, une revue de la littérature a été effectuée. La première partie porte sur la modélisation analytique et approximative des plaques multicouches. Sachant que les structures intelligentes sont modélisées à partir d'une plaque laminée comportant des couches piézoélectriques, il est essentiel de bien connaître les travaux déjà réalisés jusqu'à maintenant dans ce domaine. La deuxième partie porte sur la modélisation analytique et approximative des composantes piézoélectriques. Ces notions sont à la base des travaux effectués dans le cadre de ce projet de maîtrise.

2.2 Modélisation de plaques multicouches

2.2.1 Modélisation analytique

La modélisation de plaques multicouches repose sur l'expression d'un champ de déplacement que l'on suppose initialement. Le champ peut être supposé pour l'ensemble de l'épaisseur de la plaque (champ de déplacement global) ou pour chacune des couches constituant la plaque laminée (champ de déplacement discret). La modélisation la plus simple est de supposer un champ de déplacement global linéaire. Cependant, la précision des résultats obtenus est moindre. Pour améliorer la précision, on utilise des champs de déplacement d'ordre

supérieur ou discrets. Malheureusement, cette approche augmente le nombre de degrés de liberté (DDL). Il est donc nécessaire de faire un compromis entre la précision des résultats désirée et la lourdeur des calculs à effectuer [34, 37].

Champ de déplacement global

Une façon de modéliser le comportement d'une plaque laminée est de la remplacer par une plaque monocouche de rigidité et de masse équivalente et de définir un champ de déplacement dans la direction de l'épaisseur. Dans ce cas, on parlera d'un champ de déplacement global. Plusieurs théories de plaque laminée utilisent un champ de déplacement global. Cependant, le champ de déplacement diffère selon les théories.

Les théories de premier ordre définissent un champ de déplacement linéaire dans la direction de l'épaisseur et modélisent la plaque laminée à partir d'une plaque simple équivalente. On divise ces théories en deux grandes familles : les théories classiques (CLPT : "Classical Laminated Plate Theory") et les théories de cisaillement (FSDT : "First-order Shear Deformation Theory") [55]. En fait, les théories classiques sont une extension de la théorie de plaque de Love-Kirchhoff alors que les théories en cisaillement sont une extension de la théorie de plaque de Reissner-Mindlin. Contrairement aux théories en cisaillement (FSDT), les théories classiques (CLPT) ignorent les 2 composantes de déformation du cisaillement transversal. Par conséquent, les CLPT sont inadéquates pour modéliser des plaques relativement épaisses. Quant aux FSDT, il est nécessaire d'appliquer un facteur de correction à la rigidité de cisaillement étant donné que le champ de déplacement utilisé prédit une distribution linéaire du cisaillement. Les FSDT permettent de modéliser des plaques relativement épaisses et leur précision dépendra de la validité du facteur de correction utilisé. Le principal avantage d'utiliser les théories de premier ordre est que leur champ de déplacement global peut être défini à partir de seulement 3 (CLPT) ou 5 (FSDT) DDL. Ceci allège considérablement les calculs. Ces théories sont adéquates pour prédire le comportement global d'une plaque mince (CLPT) ou épaisse (FSDT). Par contre, elles ne satisfont pas aux conditions de continuité des contraintes de cisaillement entre les couches de la plaque laminée.

Par conséquent, ces théories sont inadéquates pour prédire le comportement local d'une plaque laminée. Dans le cas d'une plaque d'épaisseur considérable, ces théories deviennent imprécises, même pour prédire le comportement global.

Les théories d'ordre supérieur définissent un champ de déplacement global non-linéaire dans la direction de l'épaisseur de la plaque. Ce champ de déplacement est généralement défini à partir d'un polynôme du troisième ordre. L'avantage d'utiliser ces théories est qu'elles prédisent correctement le comportement global d'une plaque laminée. En ce qui concerne le comportement local, les résultats varient selon la sévérité des changements des propriétés mécaniques entre les couches. De plus, ces théories ne nécessitent pas l'utilisation d'un facteur de correction en cisaillement étant donné que la distribution de la contrainte de cisaillement n'est pas linéaire. Finalement, le nombre de DDL de déplacement à résoudre ne dépend pas du nombre de couches. Malheureusement, le nombre de DDL nécessaires pour définir le champ de déplacement est malgré tout considérable (11 DDL) [31, 32]. De plus, la précision des résultats diminue lorsque le nombre de couches augmente et lorsque les propriétés mécaniques diffèrent considérablement entre les couches. Finalement, la continuité des déplacements et des contraintes entre les couches n'est pas satisfaite.

Afin de réduire le nombre de DDL dans la théorie d'ordre supérieur, il est possible d'imposer certaines conditions au champ de déplacement telle l'annulation des contraintes de cisaillement aux surfaces externes de la plaque [42]. Ce nouveau champ de déplacement ne possède que 5 DDL, soit le même nombre que pour une théorie de premier ordre. Par ailleurs, aucun facteur de correction en cisaillement n'est utilisé dans cette théorie. On obtient alors une théorie simple d'ordre supérieur [42, 44, 45]. Le principal avantage des théories simples d'ordre supérieur est que le nombre d'inconnues à résoudre ne dépend pas du nombre de couches dont est constituée la plaque laminée et que ce nombre peut, pour certaines théories, être le même que pour une théorie de premier ordre. Il est donc possible de modéliser des plaques ayant plusieurs couches sans augmenter la lourdeur des calculs. L'inconvénient majeur est que ces théories ne respectent pas nécessairement toutes les conditions de continuité des contraintes et des déplacements entre les couches. Par conséquent,

la prédiction du comportement local d'une plaque laminée est imprécise.

Certaines théories superposent une fonction linéaire de type zig-zag (fonction linéaire par morceaux) à un champ de déplacement global de premier ordre afin d'obtenir plus de précision [8, 9]. L'avantage d'utiliser la théorie zig-zag de premier ordre est que son champ de déplacement est défini à partir de seulement 5 DDL. De plus, cette théorie permet de prédire le comportement global et local d'une plaque avec une très bonne précision à partir d'une simple théorie de premier ordre. Malheureusement, cette théorie n'est applicable que dans le cas d'une plaque laminée symétrique. Cette condition restreint donc considérablement l'utilisation de cette théorie.

Champ de déplacement discret

Pour obtenir des résultats très précis, il est nécessaire de définir un champ de déplacement pour chacune des couches. Dans ce cas, nous faisons appel à un champ de déplacement discret [46, 48, 50]. Le coût associé à cette grande précision est que le nombre de DDL de déplacement inconnus est fonction du nombre de couches. En effet, pour une plaque laminée possédant N couches, le nombre d'inconnues est égal à $2N+3$ [50]. Cette théorie devient donc rapidement lourde à utiliser lorsque le nombre de couches augmente. Certaines conditions de continuité doivent être satisfaites aux interfaces des couches. Ces conditions auront comme conséquence d'assurer la continuité de certaines composantes du champ de déplacement des couches. Selon le type de conditions imposées, nous obtiendrons différentes théories de plaque laminée. L'avantage des théories discrètes est qu'elles prédisent avec exactitude le comportement global et local d'une plaque laminée peu importe ses caractéristiques. Cependant, le nombre d'inconnues est dépendant du nombre de couches. Il est toutefois possible de réduire ce nombre à 5, indépendamment du nombre de couches, en imposant des conditions de continuité adéquates (continuité des déplacements et continuité des contraintes de cisaillement) [48]. Les résultats obtenus semblent être du même ordre de précision que ceux obtenus avant l'imposition des conditions de continuité. Dans ce cas, il est très avantageux d'utiliser ces théories.

La figure 2.1 résume schématiquement les différentes théories utilisées pour modéliser les plaques multicouches.

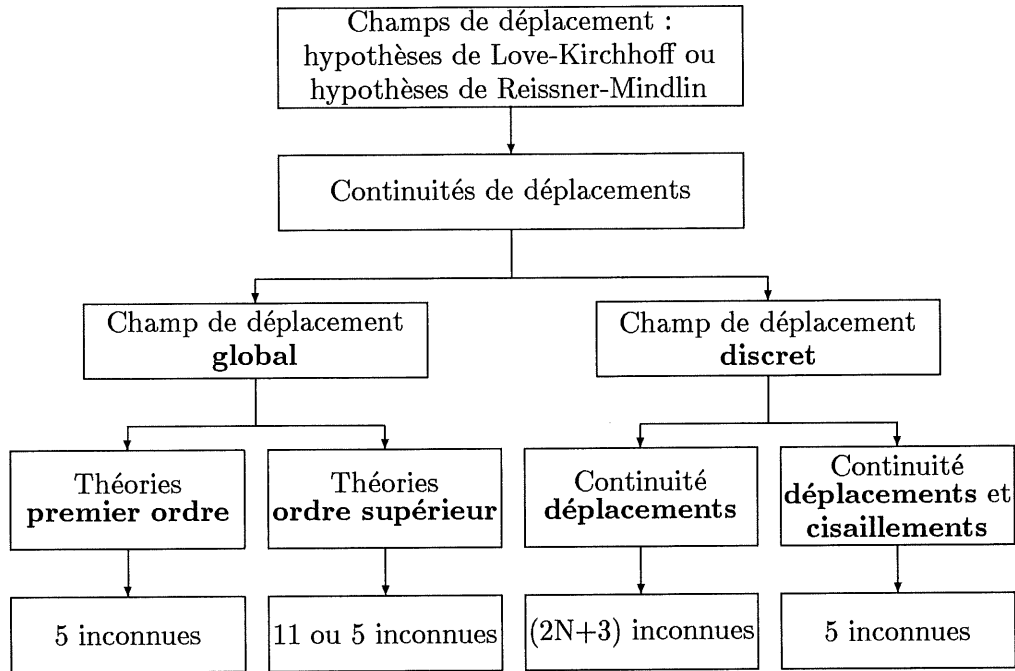


Figure 2.1: Résumé schématique de la modélisation de plaques multicouches [12]

2.2.2 Modélisation par éléments finis

La modélisation de plaques multicouches peut se faire à partir des théories tridimensionnelles (éléments solides) ou bidimensionnelles (éléments de plaque) de l'élasticité. L'avantage d'utiliser les théories tridimensionnelles est qu'elles procurent des résultats très précis étant donné qu'aucune hypothèse sur le champ de déplacement dans la direction z n'est imposée. Cependant, le nombre de DDL nécessaire pour leur mise en oeuvre réduit considérablement leur champ d'application et des problèmes numériques peuvent survenir dans le cas de structures minces. Les théories bidimensionnelles, pour leur part, utilisent des hypothèses compatibles avec les phénomènes physiques afin de simplifier la formulation du problème. C'est sur ces théories que reposent les modèles présentés dans la suite de cette section.

Les théories bidimensionnelles sont fondées sur une approche variationnelle analogue à celle présentée pour la modélisation analytique des plaques multicouches. Par conséquent, on peut diviser les modèles d'éléments finis en 2 grandes classes : champ de déplacement global et champ de déplacement discret.

Champ de déplacement global

Une des premières analyses par éléments finis de plaques multicouches fût réalisée par Pryor et Barker [39]. L'élément fini rectangulaire utilisé possédait 28 degrés de liberté et incluait l'effet membrane, de flexion et de cisaillement transversal. Leur modèle était cependant limité uniquement à l'analyse statique des plaques laminées.

Plus tard, Pillasch, Majerus et Zak [38] ont développé un modèle par éléments finis pour l'analyse dynamique des plaques laminées épaisses. L'objectif de leurs travaux était de développer un modèle capable de prédire les contraintes inter-laminaires ainsi que le changement d'épaisseur de la plaque. Par conséquent, leur modèle était basé sur des éléments solides (3D). Certaines hypothèses de plaque, comme par exemple la grandeur du déplacement w comparativement aux déplacements u et v , ont été utilisées afin de réduire quelque peu le nombre de degrés de liberté .

Un modèle général de plaque laminée a été présenté par Reddy, Barbero et Teply [43]. Leur modèle utilisait des éléments quadrilatéraux isoparamétriques. Le champ de déplacement défini permettait d'utiliser un nombre de degrés de liberté par noeud (minimum 5) adapté à la précision désirée ("Generalized Laminate Plate Theory"). De même, on pouvait modéliser un élément de la structure multicouche en utilisant un nombre d'éléments inférieur, égal ou supérieur au nombre de couches suivant la précision désirée. Il faut cependant souligner qu'à chaque fois qu'on ajoutait un élément supplémentaire pour mieux définir l'aspect multicouche, on ajoutait autant de degrés de liberté que ceux précédemment sélectionnés. Avec ce type d'élément, la continuité des contraintes de cisaillement et des déplacements aux interfaces de même que l'annulation des contraintes sur les faces externes de l'élément sont

assurées.

Ghosh et Dey [22] ont développé un modèle par éléments finis basé sur un modèle en déplacement quadratique. Ceci permettait de modéliser adéquatement la distribution du cisaillement transversal. Un élément de plaque standard à 4 noeuds avec 7 degrés de liberté par noeud a été utilisé pour discrétiser le milieu. Plusieurs types de plaques ont été analysés et les résultats obtenus concordent avec les solutions analytiques déjà existantes.

Un élément triangulaire de plaque en flexion basé sur une théorie de plaque d'ordre supérieur a été développé par Cho et Parmerter [9] pour analyser les plaques laminées symétriques. Cet élément possédait 5 degrés de liberté par noeud. Une analyse dynamique a été réalisée et les résultats obtenus ont été comparés avec la théorie tridimensionnelle de l'élasticité afin de vérifier la précision de l'élément. Malheureusement, cet élément est limité à l'analyse de plaques laminées symétriques.

Une formulation par la méthode des éléments finis pour l'analyse de plaques laminées basée sur une théorie d'ordre supérieur a été présentée par Verijenko, Adali et Piskunov [54]. Différents types d'éléments tenant compte de la déformation axiale et de la déformation en cisaillement ont été développés. Le nombre de degrés de liberté par élément est indépendant du nombre de couches de la plaque. Les auteurs ont démontré la précision de leur élément en comparant leurs résultats à ceux obtenus à partir d'éléments solides. Pour un même ordre de précision, leur modèle nécessitait moins de degrés de liberté que les modèles d'éléments solides.

Cho et Parmerter [10] ont développé une méthode par éléments finis post-priori à l'intérieur d'un programme utilisant un élément de Mindlin standard à 4 noeuds. Leur méthode utilise les solutions de la théorie en cisaillement de premier ordre. Pour obtenir des déformations et des contraintes plus précises, un champ de déplacement d'ordre supérieur est utilisé à l'intérieur de leur programme. En égalant les énergies de déformation des deux théories, ils améliorent la précision des contraintes et des déformations obtenues. Présentement, les auteurs travaillent sur le développement d'un élément fini n'utilisant pas des polynômes

orthogonaux afin de pouvoir appliquer leur méthode à des plaques de forme plus générale.

Champ de déplacement discret

Un élément de plaque multicouche incluant l'effet de cisaillement a été développé par DiSciuva [17]. L'élément est de forme rectangulaire et possède 32 degrés de liberté comprenant les déformations membranes, de flexion et de cisaillement. La formulation est basée sur une théorie améliorée de cisaillement de plaque qui définit un champ de déplacement linéaire et discret pour chaque couche. De plus, les conditions de continuité des déplacements aux interfaces des couches sont satisfaites. L'auteur a démontré l'efficacité du modèle à prédire la réponse de plaques minces et épaisses soumises à une charge statique.

Dans une autre étude, DiSciuva [18] a fait l'évaluation de différents types d'éléments de plaque multicouches à partir de sa théorie de plaque et une théorie de cisaillement de premier ordre (FSDT). Pour permettre d'évaluer les éléments entre eux, l'auteur a présenté les résultats de la réponse statique et dynamique d'une plaque carrée laminée symétriquement (3 couches). Des conclusions intéressantes ressortent de cette étude. Entre autre, une convergence rapide de la réponse globale de la plaque vers la solution analytique est obtenue pour tous les types d'éléments étudiés (T6, Q8 et RQ4) sauf ceux dont les fonctions d'interpolation sont linéaires (T3, Q4).

À l'intérieur du GAUS, Cournoyer [12] a développé un élément fini de plaque multicouche dans le cadre de son projet de maîtrise pour faire l'étude du traitement viscoélastique de disques encastrés-libres. Cette théorie inclut les effets membrane, de flexion et de cisaillement. L'élément fini quadrilatère développé possède 9 noeuds et 7 DDL/noeud. La continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement est imposée à l'interface de chacune des couches. Une comparaison entre ses résultats et des résultats analytiques a été réalisée.

2.3 Modélisation de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques

Ces dernières années, le domaine de l'aérospatiale s'est intéressé de plus en plus au développement des structures intelligentes. Ces dernières sont généralement faites de matériaux composites afin d'avoir un rapport rigidité-poids très élevé. De plus, ces structures sont constituées en partie de matériaux piézoélectriques qui servent comme capteurs et actionneurs. Lorsque ces structures sont jumelées à un bon algorithme de contrôle, elles possèdent la capacité de contrôler leur réponse dynamique par elles-mêmes.

Pour étudier l'efficacité des algorithmes de contrôle et optimiser la géométrie et le positionnement des capteurs et des actionneurs, une bonne modélisation de l'interaction électro-élastique des capteurs et des actionneurs piézoélectriques avec le milieu élastique est nécessaire. Les solutions exactes pour l'analyse de ces structures sont limitées aux géométries et conditions aux limites très simples. Lorsque la géométrie ou les conditions aux limites deviennent complexes, des difficultés surviennent dans les modèles analytiques. Par conséquent, le développement des éléments finis est très important.

2.3.1 Modélisation analytique

Solution exacte

La théorie linéaire de la piézoélectricité des plaques a été principalement développée par Tiersten [49]. Il fallut attendre le début des années 1980 avant que les analyses statiques et dynamiques des structures intelligentes débutent. Les travaux de Bailey et Hubbard [2] et de Crawley et de Luis [14] ont permis de démontrer l'efficacité des systèmes de contrôle actif sur des éléments structuraux simples en utilisant des capteurs ou des actionneurs piézoélectriques. Leurs travaux portaient sur l'étude analytique et expérimentale du comportement statique et dynamique d'une poutre de type structure intelligente.

Bailey et Hubbard [2] ont développé et appliqué trois algorithmes de contrôle différents sur un système de poutre piézoélectrique pour contrôler les vibrations transitoires d'une poutre encastrée. Les algorithmes ont été testés expérimentalement et le contrôle simultané des trois premiers modes de vibrations a été démontré.

Une des premières études faites sur la réponse d'une structure élastique à un actionneur piézoélectrique est celle de Crawley et de Luis [14]. Ils ont fait le développement analytique et expérimental d'actionneurs piézoélectriques comme éléments d'une structure intelligente. Ils ont considéré le cas d'une excitation symétrique produite par deux plaquettes piézoélectriques collées ou insérées symétriquement en vis-à-vis sur une poutre élastique encastrée. Les deux plaquettes piézoélectriques pouvaient être actionnées en phase pour induire une déformation axiale ou en opposition de phase pour induire une déformation de flexion pure. À partir d'une analyse statique, les intensités de la force axiale et du moment fléchissant dues aux plaquettes piézoélectriques ont été déterminées. Les résultats ont démontré que lorsque les plaquettes piézoélectriques étaient liées parfaitement à la poutre, le transfert des déformations se faisait aux extrémités des plaquettes. Ces résultats ont par la suite été utilisés pour une analyse dynamique en supposant que la rigidité et la masse des plaquettes étaient négligeables et que leurs fréquences de résonance ne se situaient pas dans la zone fréquentielle étudiée.

Les modèles de structures intelligentes existant jusqu'alors étaient limités aux systèmes unidimensionnels (poutres). Une extension des travaux de Crawley et de Luis [14] a été faite par Dimitriadis, Fuller et Rogers [19] pour traiter le cas des systèmes bidimensionnels (plaques). Ils ont fait l'analyse statique et dynamique d'une plaque élastique, simplement appuyée, excitée par des plaquettes piézoélectriques parfaitement liées et positionnées selon trois configurations différentes. Leur analyse a démontré que la déformation induite dans une plaque par deux plaquettes piézoélectriques en opposition de phase est équivalente à un moment fléchissant appliqué aux extrémités des plaquettes.

Afin de vérifier l'exactitude des hypothèses de modélisation utilisées dans les études précédentes, Ray, Rao et Samanta [41] ont déterminé la solution exacte (3D) des équations de

mouvement régissant le comportement d'une plaque piézoélectrique soumise à un effort de flexion. Leurs résultats ont démontré que pour une plaque piézoélectrique ayant un allongement (rapport longueur sur épaisseur) supérieur à 6, les déformations, les contraintes et le potentiel électrique varient linéairement dans la direction de l'épaisseur. Pour les plaques plus épaisses, une variation d'ordre supérieur est nécessaire.

Par la suite, Ray, Battacharya et Samanta [40] ont fait l'étude d'une plaque laminée de type structure intelligente (avec couches piézoélectriques). En supposant que les couches piézoélectriques étaient parfaitement liées à la couche élastique principale, ils ont déterminé la solution exacte des équations de mouvement pour le cas d'une plaque rectangulaire simplement appuyée. Leurs résultats ont démontré que l'efficacité d'un actionneur piézoélectrique à induire une déformation dans la structure augmente significativement lorsque l'allongement de la couche élastique principale diminue. Ce phénomène s'explique par le fait que l'efficacité de l'actionneur augmente proportionnellement à son éloignement de l'axe neutre.

Les solutions analytiques des équations de mouvement des poutres et des plaques de type structures intelligentes sont limitées aux géométries et conditions aux limites simples. Pour les cas plus complexes, aucune solution analytique n'existe. Dans ce cas, il est nécessaire de faire appel à des méthodes de résolution approximatives, comme la méthode de Rayleigh-Ritz.

Solution approximative (Rayleigh-Ritz)

En se basant sur les travaux de Crawley et de Luis [14], Crawley et Lazarus [13] ont développé un modèle de plaque, avec couches piézoélectriques, pour faire une analyse plus approfondie. En solutionnant à partir de la méthode de Rayleigh-Ritz, leur modèle permet de traiter des cas de plaques laminées plus généraux. Les conditions aux limites, la géométrie et les efforts externes peuvent être de diverses formes. Leur modèle a été vérifié expérimentalement. Leurs solutions ont démontré, entre autres, que la déformation et la courbure induites dans les actionneurs piézoélectriques dépendaient de plusieurs facteurs

tels la déformation de l'actionneur, le rapport des rigidités et la géométrie du système.

Un modèle variationnel pour l'analyse dynamique d'une plaque soumise à une excitation de plaquettes piézoélectriques a été présenté par Charette [7]. Contrairement à la plupart des autres modèles déjà existants, sa formulation tient compte du couplage dynamique (masse et rigidité) existant entre les plaquettes piézoélectriques et la plaque élastique. Un champ de déplacement discret, linéaire et sans cisaillement (Kirchhoff) a été utilisé pour définir le mouvement de la plaque et des plaquettes. La solution de l'équation de mouvement a été approximée à partir de la méthode de Rayleigh-Ritz. Leurs résultats ont démontré que les plaquettes piézoélectriques liées à la plaque élastique modifiaient légèrement les déformées modales de la plaque.

Bien que la méthode approximative de Rayleigh-Ritz permette d'étudier des modèles ayant des géométries et des conditions aux limites plus générales et sans solution analytique, la méthode des éléments finis est indispensable pour concevoir et analyser des structures intelligentes complexes. La principale difficulté lors de l'utilisation de la technique de Rayleigh-Ritz est la définition des fonctions-essais pour des cas de géométries complexes.

2.3.2 Modélisation par éléments finis

La modélisation par éléments finis de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques se divise en deux grandes classes : les théories tridimensionnelles et les théories bidimensionnelles.

Éléments finis solides (3D)

Le premier principe variationnel énoncé pour modéliser le comportement des matériaux piézoélectriques a été publié par Holland et Eernisse [26]. Ce principe servait de base aux méthodes de résolution approximatives telle la méthode de Rayleigh-Ritz. Même si ces développements permettaient d'étudier une large classe de problèmes, ils n'étaient pas suffisamment généraux pour être utilisés d'une façon générale dans l'analyse des matériaux

piézoélectriques.

Le développement d'éléments finis piézoélectriques solides a débuté avec les travaux de Allik et Hughes [1]. Ils développèrent un élément fini tétraèdre pour l'appliquer à des problèmes électro-élastiques tridimensionnels. Leur formulation était basée sur le principe variationnel énoncé par Holland et Eernisse [26]. Leur élément était utilisé pour l'étude de la physique des cristaux piézoélectriques et la technologie des transducteurs. Par la suite, Naillon, Coursant et Besnier [36] présentèrent leur formulation. Leur modèle était utilisé pour l'étude de la résonance des structures piézoélectriques utilisées dans les sondes échographiques. Leurs champs d'applications étaient relativement limités.

Le principal désavantage d'utiliser des éléments solides (hexaèdre et tétraèdre) conventionnels pour des applications de plaques laminées est qu'ils sont trop épais. Lorsque leur épaisseur devient trop petite comparativement à la longueur de l'élément, l'énergie de déformation en cisaillement s'accumule dans la direction de l'épaisseur (blocage en cisaillement). Ceci a pour effet de fournir des résultats peu précis. De plus, le nombre de DDL nécessaire pour modéliser une plaque à partir d'éléments finis tridimensionnels est très élevé. Une technique utilisée pour améliorer la précision des éléments solides dans l'analyse de plaques est d'introduire 3 degrés de liberté incompatibles à l'intérieur de l'élément comme l'ont fait Tzou et Tseng [51, 53] à partir des travaux de Allik et Hughes [1]. Toutefois, le modèle engendré possède encore plus de degrés de liberté et est donc plus lourd à traiter.

Un des premiers travaux sur les modèles de matériaux composites laminés contenant des céramiques piézoélectriques fût publié par Ha, Keilers et Chang [23, 24]. Leur modèle permettait d'obtenir la réponse statique et dynamique d'un composite laminé soumis à une charge mécanique et électrique. Ils ont développé une formulation par éléments finis à partir du principe variationnel en considérant l'énergie potentielle de la structure de même que l'énergie potentielle électrique des piézocéramiques. Un élément solide tridimensionnel à 8 noeuds fût utilisé pour l'analyse. Chaque noeud possédait 4 degrés de liberté, soit 3 degrés de liberté mécaniques (déplacements) et 1 degré de liberté électrique représentant la tension dans la direction perpendiculaire aux électrodes. Pour tenir compte du comportement global

de flexion résultant de la déformation locale des piézocéramiques, des modes incompatibles tridimensionnels ont été introduits.

L'utilisation d'éléments solides isoparamétriques pour modéliser des plaques, des capteurs et des actionneurs piézoélectriques génère de gros modèles qui nécessitent l'utilisation de techniques spéciales comme la réduction de Guyan pour réduire le nombre total de degrés de liberté. De plus, des problèmes associés au blocage en cisaillement surviennent. En ajoutant 3 degrés de liberté internes, on limite ces problèmes, mais on fait face à un modèle plus gros et plus complexe. Une façon plus efficace de modéliser des plaques laminées est d'utiliser des éléments finis bidimensionnels (plaque).

Éléments finis de plaque (2D)

Une formulation par éléments finis plus efficace a été présentée par Hwang, Park et Hwang [27, 28] pour l'analyse du contrôle des vibrations de plaques laminées contenant des capteurs et des actionneurs piézoélectriques. Les équations de mouvement ont été formulées à partir de la théorie classique des plaques laminées et du principe de Hamilton. La discrétisation s'est faite avec un élément de plaque en flexion de 4 noeuds (12 DDL) avec 1 degré de liberté électrique supplémentaire par élément. Notons que la modélisation est faite de façon que les capteurs et les actionneurs doivent être obligatoirement opposés sur la plaque. Les auteurs ont modélisé à la fois le comportement statique et dynamique de la plaque laminée.

Pour modéliser des plaques épaisses, il est nécessaire de tenir compte de l'effet du cisaillement transversal. Chandrashekhara et Agarwal [5] ont présenté une formulation par éléments finis de plaques laminées utilisant des couches piézoélectriques à partir d'une théorie de déformation en cisaillement de premier ordre. Leur modèle est valide pour des éléments piézoélectriques continus ou segmentés pouvant être internes ou externes à la plaque laminée. La particularité de leur modèle est que la tension électrique n'introduit pas de degré de liberté supplémentaire. La charge générée par le capteur et la réponse de la plaque à une tension imposée à l'actionneur peuvent être calculées indépendamment. Leurs

résultats ont démontré que la masse et la rigidité des plaquettes piézocéramiques avaient une influence notable sur la réponse transitoire du système.

Un modèle semblable à celui de Hwang, Park et Hwang [27, 28] mais plus versatile a été présenté par Detwiler, Shen et Venkayya [16]. En effet, ce modèle possède 2 DDL en déplacement de plus par noeud afin de tenir compte de l'effet membrane et du couplage membrane-flexion. De plus, les capteurs et les actionneurs sont modélisés comme des couches supplémentaires et leur position n'est pas limitée. Les équations de mouvement sont dérivées à partir du principe variationnel en tenant compte à la fois de l'énergie potentielle élastique et électrique. Ces équations sont discrétisées en éléments finis bidimensionnels en utilisant la théorie classique des plaques laminées (CLPT).

Les modèles par éléments finis proposés jusqu'à maintenant pour analyser les structures intelligentes étaient principalement limités aux poutres et aux plaques minces à cause du type de champ de déplacement utilisé (CLPT ou FSDT). Les modèles d'éléments finis basés sur la théorie classique des laminés (CLPT) ou la théorie de déformation en cisaillement de premier ordre (FSDT) prédisent correctement le comportement global des plaques laminées pour les premiers modes de vibration. Cependant, ces modèles souffrent de problèmes de rigidité en cisaillement et de modes de déformation qui nécessitent une attention particulière. Pour obtenir des résultats plus précis dans le cas de poutres ou de plaques épaisses, il est nécessaire d'utiliser une théorie discrète ou d'ordre supérieur. Afin d'améliorer la précision, Samanta, Ray et Bhattacharyya [47] ont présenté une formulation par éléments finis basée sur une théorie d'ordre supérieur de plaques laminées (HSDT). Un élément quadratique bidimensionnel à 8 noeuds a été utilisé pour discrétiser la géométrie. Leur modèle permet donc de traiter à la fois les plaques minces et épaisses.

Un modèle d'éléments finis de plaque basé sur une théorie discrète a été présenté par Heyliger et Ramirez [25] pour l'analyse de plaques contenant des couches piézoélectriques. Un champ de déplacement permettant d'avoir une discontinuité C^1 (pente - première dérivée) aux interfaces des couches représente plus fidèlement le comportement théorique et physique d'une plaque multicouche. Dans cette étude, deux modèles différents ont été considérés. Le premier

modèle permet une déformation de la plaque dans la direction de l'épaisseur contrairement au deuxième modèle. Le problème considéré permet de déterminer le comportement des champs élastique et électrique dans la direction de l'épaisseur d'une plaque laminée composée de couches purement élastiques, piézoélectriques ou de matériaux conducteurs. Les excitations peuvent être introduites soit par une force mécanique ou électrique. Les résultats présentés permettent de conclure que l'hypothèse de déformation nulle dans la direction de l'épaisseur d'une plaque multicouche doit être utilisée avec précaution car des erreurs significatives pour être obtenues pour certaines conditions de charge.

2.4 Conclusion

À partir de l'analyse de l'état des connaissances, on constate que la modélisation de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques peut se faire à partir de plaques multicouches. Les capteurs et les actionneurs sont représentés par des couches piézoélectriques à l'intérieur de la plaque laminée.

La plupart des théories développées pour analyser les composites piézoélectriques incluent des limitations qui peuvent fausser le comportement pour certaines applications. Par exemple, lors de l'analyse de laminés épais, l'hypothèse de Love-Kirchhoff conduit souvent à des résultats peu précis. De plus, certaines études utilisent une représentation de force équivalente pour induire des déformations d'actionneurs dans le laminé. Ces approches ne solutionnent pas les équations de couplage piézoélectrique mais essaient de les simuler indirectement.

Une nouvelle modélisation par éléments finis de plaques laminées piézoélectriques capable de modéliser la variation d'épaisseur des couches, la lamination, la réponse des capteurs et des actionneurs et la réponse locale et globale de la plaque est nécessaire. Pour analyser des laminés épais, un raffinement des modèles déjà existants est indispensable. Dans cette présente étude, un champ de déplacement et de potentiel électrique linéaires et discrets

seront utilisés pour modéliser le comportement d'une plaque laminée dans la direction de son épaisseur. Notre formulation permettra d'étudier la contribution structurale des actionneurs et des capteurs ainsi que leur couplage avec l'effet piézoélectrique. De plus, l'amortissement sera pris en compte par la modélisation de couches viscoélastiques à l'intérieur de la plaque laminée.

Le développement d'un tel élément permettra de faire des études d'optimisation sur la position des capteurs et des actionneurs piézoélectriques, sur l'amortissement actif et sur l'isolation active. L'originalité de ce travail réside dans l'application d'une théorie discrète de champs de déplacement et du potentiel électrique à des plaques multicouches à la fois élastiques, piézoélectriques et viscoélastiques.

Chapitre 3

Théorie des matériaux élastiques

3.1 Introduction

Ce chapitre fait un rappel sur la théorie de l'élasticité linéaire applicable pour des matériaux homogènes et isotropes, théorie qui sera utilisée dans le reste de ce document. Il s'agit principalement d'exposer les équations régissant le comportement d'un corps élastique. Dans un premier temps, une approche locale sera utilisée pour caractériser le comportement d'un corps élastique tridimensionnel. Par la suite, à partir d'hypothèses classiques, le comportement local d'une plaque élastique épaisse sera présenté. Finalement, les relations locales obtenues seront utilisées pour caractériser le comportement global d'une plaque épaisse élastique. Les relations ainsi obtenues seront utilisées ultérieurement lors de l'élaboration de la formulation variationnelle d'une plaque multicouche.

3.2 Approche locale – théorie de l'élasticité linéaire

Dans cette section, les équations de la théorie de l'élasticité linéaire seront présentées. Ces équations permettent de caractériser localement le comportement d'un corps élastique et

d'évaluer les 15 variables fondamentales d'un problème d'élasticité : 3 déplacements (u, v, w), 6 contraintes ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$) 6 déformations ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$). Un rappel sera donc fait sur les équations de mouvement, les lois de comportement, les relations déformation-déplacement et les conditions aux limites.

3.2.1 Équations de mouvement

La figure 3.1 montre l'état de contrainte en un point d'un corps élastique sollicité par un système de forces volumiques externes F_x, F_y et F_z . Les équations de mouvement d'un corps élastique sont obtenues en faisant l'équilibre des forces internes et externes agissant selon les 3 directions principales x, y et z [35]. Nous trouvons alors

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = \rho \ddot{u} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = \rho \ddot{v} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = \rho \ddot{w} \quad (3.3)$$

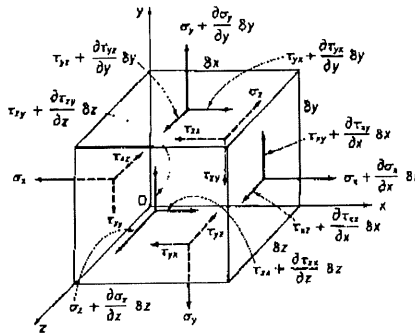


Figure 3.1: État de contrainte en un point d'un corps élastique.

où ρ est la densité du corps élastique. Ce bilan mécanique, correspondant à l'équilibre des forces, s'exprime par l'équation de Newton pour les milieux continus.

3.2.2 Lois de comportement

Les lois de comportement expriment la relation qui existe entre les contraintes et les déformations d'un corps élastique (loi de Hooke). Ces relations ont été obtenues à la suite de nombreuses observations expérimentales [4]. Pour un corps isotrope se déformant linéairement, les lois de comportement sont

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x(1-\nu) + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad (3.4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_y(1-\nu) + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] \quad (3.5)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_z(1-\nu) + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] \quad (3.6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3.7)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (3.8)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (3.9)$$

Sous forme matricielle, les lois de comportement s'expriment comme suit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

soit

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (3.11)$$

où

- $\{\sigma\}$ Vecteur des contraintes
- $\{\varepsilon\}$ Vecteur des déformations
- $[C]$ Matrice des constantes élastiques

3.2.3 Relations déformation–déplacement

La figure 3.2 représente un corps ayant subi une déformation normale et de cisaillement.

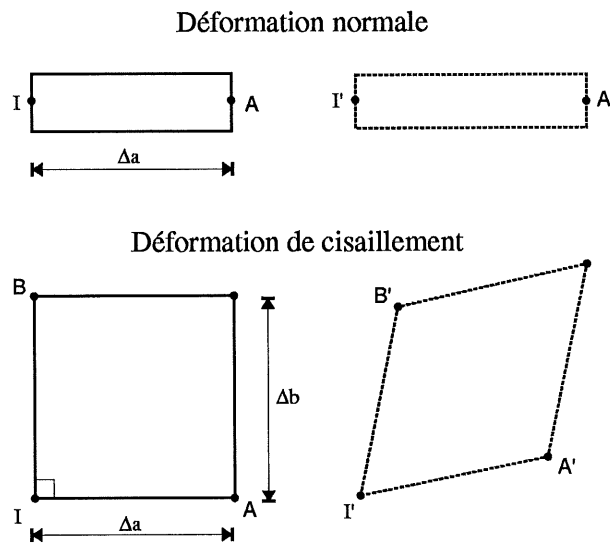


Figure 3.2: Corps avant et après déformation

La déformation normale ε et la déformation de cisaillement γ sont définies comme suit [35].

$$\varepsilon = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{I'A' - IA}{IA} \quad (3.12)$$

$$\gamma = \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta b \rightarrow 0}} \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A'I'B'} \right) \quad (3.13)$$

À partir de ces définitions et en faisant l'hypothèse que les déformations du corps élastique sont faibles (i.e. élasticité linéaire), nous arrivons à exprimer les relations déformation–déplacement comme suit [35] :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.17)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.18)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.19)$$

où u , v et w représentent les déplacements du corps dans les directions x , y et z respectivement.

3.2.4 Conditions aux limites mécaniques

Aux équations précédentes, il faut associer des conditions aux limites de déplacements et de forces sur la frontière du corps élastique.

Conditions cinématiques (déplacements)

Sur une partie S_u de la frontière, des déplacements \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} peuvent être imposés [15].

$$\begin{aligned} u(x_u, y_u, z_u) &= \bar{u} \\ v(x_u, y_u, z_u) &= \bar{v} \quad \text{où } (x_u, y_u, z_u) \in S_u \\ w(x_u, y_u, z_u) &= \bar{w} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ces relations sont parfois appelés conditions aux limites essentielles.

Conditions d'équilibre (forces)

Sur une partie S_f de la frontière, des forces par unité de surface (contraintes) f_x , f_y et f_z peuvent être imposées [35].

$$\begin{aligned}t_x(x_f, y_f, z_f) &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = f_x \\t_y(x_f, y_f, z_f) &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = f_y \quad \text{où } (x_f, y_f, z_f) \in S_f \\t_z(x_f, y_f, z_f) &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = f_z\end{aligned} \quad (3.21)$$

où n_x , n_y et n_z représentent des vecteurs unitaires dans les directions x , y et z respectivement. Ces relations sont parfois appelées conditions aux limites naturelles.

3.3 Approche locale – théorie de plaque élastique

Afin de traiter des problèmes de plaques élastiques épaisses, des hypothèses doivent être imposées afin de simplifier les équations générales de l'élasticité linéaire. L'hypothèse classique de plaque de Mindlin permet de traiter le cas de plaques épaisses en tenant compte de l'effet du cisaillement transversal. Cette section traitera donc du cas bidimensionnel de la théorie de l'élasticité. Les hypothèses de Mindlin seront utilisées pour simplifier les équations présentées à la section précédente.

3.3.1 Champ de déplacement

Nous savons que les plaques multicouches ont généralement une épaisseur considérable ($h/L > 0.1$). Par conséquent, l'effet du cisaillement transversal est non négligeable et la théorie de plaque la plus adéquate à utiliser est celle de Mindlin. Cette théorie fait l'hypothèse que les sections droites avant déformation restent droites après déformation. Contrairement à la théorie de plaque de Kirchhoff, les sections droites ne forment pas

nécessairement un angle droit avec le plan neutre de la plaque après déformation [11].

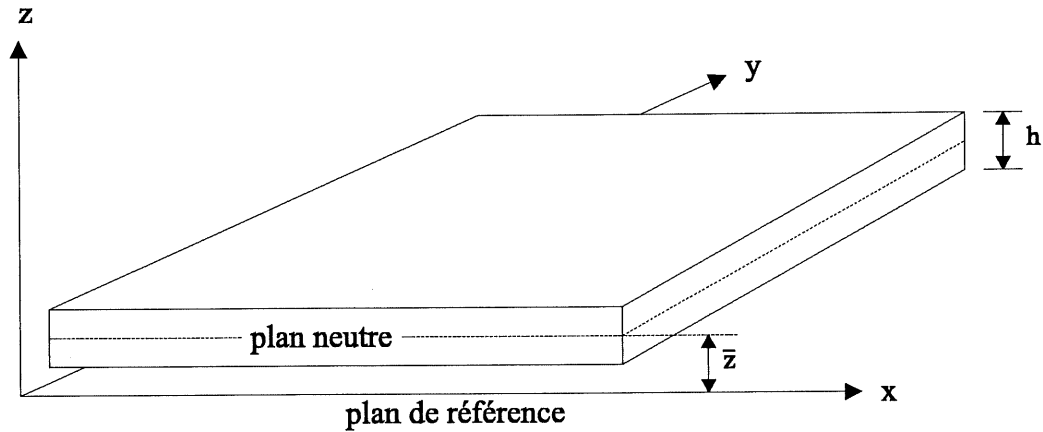


Figure 3.3: Schéma d'une plaque élastique.

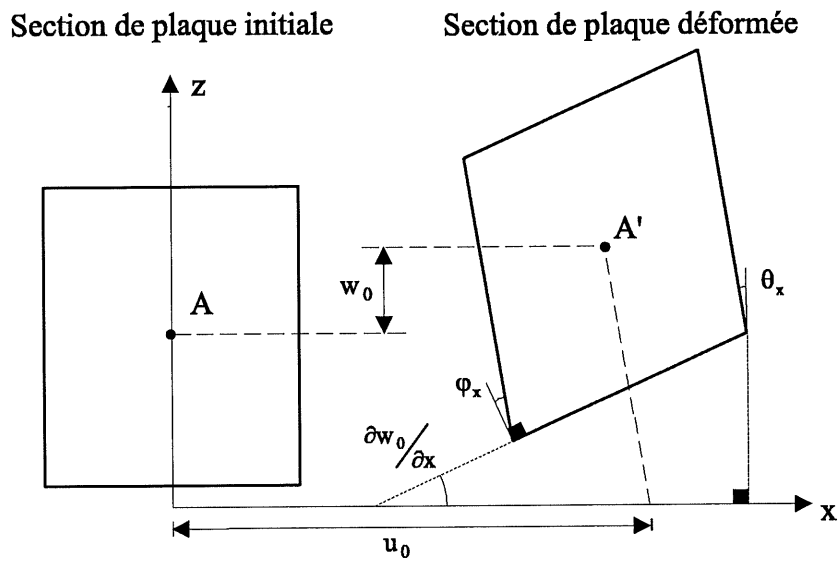


Figure 3.4: Déformation d'une section de plaque élastique.

Supposons qu'une plaque élastique (voir figure 3.3) est soumise à une charge quelconque. Selon la théorie de plaque de Mindlin, la section de la plaque se déformera comme l'illustre la figure 3.4. Le champ de déplacement correspondant est le suivant

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} - \varphi_x(x, y, t) \right) = u_0(x, y, t) - z\theta_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \left(\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} - \varphi_y(x, y, t) \right) = v_0(x, y, t) - z\theta_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned}$$

où

$u_0(x, y, t)$	Déplacement membrane dans la direction x
$v_0(x, y, t)$	Déplacement membrane dans la direction y
$w_0(x, y, t)$	Déplacement transversal
$\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}$	Rotation de flexion des sections normales à l'axe x
$\frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}$	Rotation de flexion des sections normales à l'axe y
$\varphi_x(x, y, t)$	Rotation de cisaillement des sections normales à l'axe x
$\varphi_y(x, y, t)$	Rotation de cisaillement des sections normales à l'axe y
$\theta_x(x, y, t)$	Rotation totale des sections normales à l'axe x
$\theta_y(x, y, t)$	Rotation totale des sections normales à l'axe y

Ce champ de déplacement est linéaire dans la direction de l'épaisseur de la plaque et il tient compte à la fois de l'effet membrane, de l'effet de flexion et de l'effet du cisaillement transversal. Sous forme matricielle, il s'exprime comme suit

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

soit

$$\{U\} = [T_t]\{u\} - z[T_r]\{u\}$$

où

$[T_t]$ Opérateur de localisation des variables de translation

$[T_r]$ Opérateur de localisation des variables de rotation

Notons que les variables de rotation de flexion $\partial w_0/\partial x$ et $\partial w_0/\partial y$ sont redondantes et inutiles pour l'instant. Nous verrons leur utilité au chapitre traitant des matériaux multicouches.

3.3.2 Lois de comportement

Afin de simplifier le problème tridimensionnel d'élasticité en un problème bidimensionnel, une hypothèse doit être adoptée : l'hypothèse de contrainte plane ($\sigma_z = 0$) ou l'hypothèse de déformation plane ($\varepsilon_z = 0$) [35]. Dans notre cas, une hypothèse de contrainte plane sera adoptée étant donné que la contrainte dans la direction de l'épaisseur de la plaque est très faible comparativement aux contraintes dans les deux autres directions $\sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y$. Par conséquent, la contrainte dans la direction de l'épaisseur de la plaque sera supposée nulle.

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [\varepsilon_z(1 - \nu) + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] = 0 \quad (3.23)$$

alors,

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.24)$$

Dans ce cas, les lois de comportement deviennent

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \quad (3.25)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \quad (3.26)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (3.27)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (3.28)$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \quad (3.29)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \quad (3.30)$$

La forme matricielle des lois de comportement devient alors

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

soit

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (3.32)$$

Notons qu'étant donné le champ de déplacement utilisé, la déflexion transversale de la plaque est constante dans la direction de l'épaisseur ($\frac{\partial w}{\partial z} = 0$). Par conséquent, la déformation transversale est nulle ($\varepsilon_z = 0$) malgré l'hypothèse de contrainte plane imposée.

Il est possible de séparer les lois de comportement en deux composantes : une composante membrane-flexion et une composante cisaillement. La composante membrane flexion représente les contraintes et les déformations causées par l'effet membrane et l'effet de flexion

alors que la composante de cisaillement représente les contraintes et les déformations causées par l'effet du cisaillement [29]. L'équation (3.31) devient alors

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ & & & 0 \\ & & & & \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

soit

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma_{mf}\} \\ \{\sigma_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{mf}] & 0 \\ 0 & [C_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_{mf}\} \\ \{\varepsilon_c\} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

où

- $\{\sigma_{mf}\}$ Vecteur des contraintes dues aux effets membrane et flexion
- $\{\sigma_c\}$ Vecteur des contraintes dues au cisaillement
- $\{\varepsilon_{mf}\}$ Vecteur des déformations dues aux effets membrane et flexion
- $\{\varepsilon_c\}$ Vecteur des déformations dues au cisaillement
- $[C_{mf}]$ Matrice des constantes élastiques pour les effets membrane et flexion
- $[C_c]$ Matrice des constantes élastiques pour le cisaillement

3.3.3 Relations déformation–déplacement

Nous avons vu à la section 3.2.3 les relations déformation–déplacement de la théorie bidimensionnelle de l'élasticité linéaire. En appliquant ces relations au champ de déplacement défini à la section précédente, nous obtenons

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (3.37)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (3.38)$$

$$\gamma_{xz} = \left(-\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (3.39)$$

$$\gamma_{yz} = \left(-\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3.40)$$

Sous forme matricielle, les relations déformation-déplacement d'une plaque de Mindlin s'expriment comme suit

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

soit

$$\{\varepsilon\} = [D_u] \{u\}$$

où

- $\{\varepsilon\}$ Vecteur des déformations
- $\{u\}$ Vecteur des déplacements
- $[D_u]$ Opérateur différentiel des déplacements

Le vecteur des déformations peut être divisé en 3 parties, soit :

Déformations dues à l'effet membrane

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

soit

$$\{\beta\} = [D_{um}]\{u\}$$

où

- $\{\beta\}$ Vecteur des déformations dues à l'effet membrane
- $[D_{um}]$ Opérateur différentiel des déplacements dus à l'effet membrane

Déformations dues à la flexion

$$\{\chi\} = -z\{\tilde{\chi}\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

soit

$$\{\chi\} = [D_{uf}]\{u\}$$

où

$\{\chi\}$ Vecteur des déformations dues à la flexion
 $[D_{uf}]$ Opérateur différentiel des déplacements dus à la flexion

Déformations dues au cisaillement

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

soit

$$\{\gamma\} = [D_{uc}]\{u\}$$

où

$\{\gamma\}$ Vecteur des déformations dues au cisaillement
 $[D_{uc}]$ Opérateur différentiel des déplacements dus au cisaillement

3.4 Approche globale – principe de Hamilton

Maintenant que les équations régissant le comportement local d'une plaque épaisse élastique sont bien posées, utilisons les pour caractériser son comportement global. Pour ce faire, le principe variationnel de Hamilton sera utilisé. Ce principe est basé sur une approche énergétique. Ce principe n'est en somme qu'une forme intégrée dans le temps du principe des travaux virtuels. Nous devons donc définir les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et du travail des efforts externes d'une plaque. L'approche énergétique est à la base de la méthode des éléments finis.

3.4.1 Fonctionnelle de Hamilton

Soit la fonctionnelle de Hamilton H suivante [21]

$$H = \int_{t_0}^t (T - V + W) dt \quad (3.45)$$

où

T Énergie cinétique
 V Énergie potentielle
 W Travail des efforts externes

Selon le principe de Hamilton, le mouvement réel d'une plaque est celui qui rend stationnaire la fonctionnelle de Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^t (T - V + W) dt = 0 \quad (3.46)$$

par rapport à toute variation arbitraire de déplacement compatible entre deux instants t_1 et t_2 , mais s'annulant toutefois aux extrémités de l'intervalle.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (3.47)$$

Les expressions de l'énergie cinétique T et potentielle V ainsi que le travail fait par les efforts externes W sont données aux sections suivantes.

3.4.2 Énergie cinétique T

Pour un milieu continu élastique, l'énergie cinétique T est définie comme suit

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV \quad (3.48)$$

Sous forme matricielle, l'énergie cinétique s'exprime comme suit

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \{ \dot{U} \}^t \{ \dot{U} \} dV \quad (3.49)$$

où $\{U\}$ est le vecteur des déplacements u , v et w . En substituant l'expression matricielle du champ de déplacement (3.22), nous obtenons

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\rho \int_V \{\dot{u}\}^t ([T_t]^t - z [T_r]^t) ([T_t] - z [T_r]) \{\dot{u}\} dV \\
&= \frac{1}{2}\rho \int_V \{\dot{u}\}^t [[T_t]^t [T_t] - z ([T_r]^t [T_t] + [T_t]^t [T_r]) + z^2 [T_r]^t [T_r]] \{\dot{u}\} dV \quad (3.50)
\end{aligned}$$

En intégrant l'énergie cinétique dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z} - h/2, \bar{z} + h/2]$, nous obtenons

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_S \{\dot{u}\}^t \left[h [T_t]^t [T_t] - \bar{z}h ([T_r]^t [T_t] + [T_t]^t [T_r]) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{z}^2 h \right) [T_r]^t [T_r] \right] \{\dot{u}\} dS$$

soit

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_S \{\dot{u}\}^t [M_e] \{\dot{u}\} dS \quad (3.51)$$

où

$$[M_e] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & -\bar{z}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & -\bar{z}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z}h & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} + \bar{z}^2 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z}h & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} + \bar{z}^2 h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

où \bar{z} représente la position du plan neutre de la plaque par rapport au plan de référence. Remarquons que lorsque le plan neutre de la plaque se situe à la position du plan de référence ($\bar{z} = 0$), les termes de couplage membrane-flexion disparaissent à l'intérieur de la matrice $[M_e]$.

3.4.3 Énergie potentielle V

Pour un milieu continu élastique, l'énergie potentielle V correspond à l'énergie de déformation qui est définie comme suit

$$V = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i \varepsilon_i dV \quad (3.53)$$

~~où~~ $i = 1, 2, \dots, 6$. À partir de la loi de comportement d'un matériau élastique (3.33), l'expression de l'énergie de déformation s'écrit comme suit sous forme matricielle

$$V = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\} dV \quad (3.54)$$

Pour le cas d'une plaque de Mindlin tenant compte de l'effet membrane, l'énergie de déformation peut être divisée en quatre composantes : l'énergie de déformation due à l'effet membrane, à la flexion, au couplage membrane-flexion et au cisaillement.

$$V = V_{\text{membrane}} + V_{\text{flexion}} + V_{\text{membrane-flexion}} + V_{\text{cisaillement}} \quad (3.55)$$

Énergie de déformation due à l'effet membrane

À partir du vecteur des déformations dues à l'effet membrane (3.42) et des lois de comportement (3.33), nous définissons l'énergie de déformation due à l'effet membrane comme suit

$$V_{\text{membrane}} = \frac{1}{2} \int_V \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dV \quad (3.56)$$

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}-h/2, \bar{z}+h/2]$, nous obtenons

$$V_{membrane} = \frac{1}{2}h \int_S \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dS \quad (3.57)$$

Énergie de déformation due à la flexion

À partir du vecteur des déformations dues à la flexion (3.43) et des lois de comportement (3.33), nous définissons l'énergie de déformation due à la flexion comme suit

$$V_{flexion} = \frac{1}{2} \int_V \{\chi\}^t [C_{mf}] \{\chi\} dV \quad (3.58)$$

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}-h/2, \bar{z}+h/2]$, nous obtenons

$$V_{flexion} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^3}{12} + \bar{z}^2 h \right) \int_S \{\tilde{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\tilde{\chi}\} dS \quad (3.59)$$

Énergie de déformation due au couplage membrane-flexion

À partir des vecteurs des déformations dues à l'effet membrane (3.42), à la flexion (3.43) et des lois de comportement (3.33), nous définissons l'énergie de déformation due au couplage membrane-flexion comme suit

$$V_{membrane-flexion} = \frac{1}{2} \int_V \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\chi\} + \{\chi\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dV \quad (3.60)$$

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}-h/2, \bar{z}+h/2]$, nous obtenons

$$V_{\text{membrane-flexion}} = -\frac{1}{2}\bar{z}h \int_S \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\tilde{\chi}\} + \{\tilde{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dS \quad (3.61)$$

Énergie de déformation due au cisaillement

À partir du vecteur des déformations dues au cisaillement (3.44) et des lois de comportement (3.33), nous définissons l'énergie de déformation due au cisaillement comme suit

$$V_{\text{cisaillement}} = \frac{1}{2}k \int_V \{\gamma\}^t [C_c] \{\gamma\} dV \quad (3.62)$$

Un facteur de correction en cisaillement k est introduit pour tenir compte du fait que la distribution de la contrainte de cisaillement découlant du champ de déplacement de Mindlin est linéaire alors qu'elle devrait être parabolique. Afin que l'énergie de déformation en cisaillement de la distribution linéaire (Mindlin) soit égale à celle de la distribution parabolique (réelle), un facteur de correction en cisaillement de 5/6 doit être appliqué [29]. Notons que cette valeur est exacte uniquement pour un cas de plaque monocouche.

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}-h/2, \bar{z}+h/2]$ et en supposant que la composante volumique est constante dans cette direction, nous obtenons

$$V_{\text{cisaillement}} = \frac{1}{2}kh \int_S \{\gamma\}^t [C_c] \{\gamma\} dS \quad (3.63)$$

Finalement, nous obtenons l'expression de l'énergie de déformation de la plaque de Mindlin

$$\begin{aligned}
V = \frac{1}{2} \int_S & \underbrace{h \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\beta\}}_{\text{membrane}} + \underbrace{\left(\frac{h^3}{12} + \bar{z}^2 h \right) \{\tilde{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\tilde{\chi}\}}_{\text{flexion}} \\
& - \underbrace{\bar{z} h (\{\beta\}^t [C_{mf}] \{\tilde{\chi}\} + \{\tilde{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\beta\})}_{\text{membrane-flexion}} \\
& + \underbrace{kh \{\gamma\}^t [C_c] \{\gamma\}}_{\text{cisaillement}} dS
\end{aligned} \tag{3.64}$$

3.4.4 Travail W

Pour un milieu continu élastique, le travail fait par les efforts externes W est défini comme suit

$$W = \int_V \{u\}^t \{F\} dV + \int_S \{u\}^t \{f\} dS + \{u\}^t \{P\} \tag{3.65}$$

où

- $\{F\}$ Force volumique
- $\{f\}$ Force surfacique
- $\{P\}$ Force ponctuelle

En intégrant la composante volumique du travail fait par les efforts externes dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z} - h/2, \bar{z} + h/2]$ et en supposant que la composante volumique est constante dans cette direction, nous obtenons

$$W = \int_S (h \{u\}^t \{F\} + \{u\}^t \{f\}) dS + \{u\}^t \{P\} \tag{3.66}$$

3.5 Conclusion

Un rappel sur la théorie des matériaux élastiques a été fait pour pouvoir modéliser le comportement des couches élastiques à l'intérieur d'une plaque multicouche. La théorie de plaque utilisée tient compte de l'effet du cisaillement (théorie de Mindlin). Les relations obtenues seront reprises lors du développement de la formulation variationnelle d'une plaque multicouche aux propriétés élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques.

Chapitre 4

Théorie des matériaux piézoélectriques

4.1 Introduction

Ce chapitre fait un rappel sur la théorie de la piézoélectricité linéaire. Rappelons que nous sommes intéressés à modéliser une plaque multicouche contenant des couches de matériaux élastiques et des couches de matériaux piézoélectriques. Les couches piézoélectriques agissent soit comme capteurs ou actionneurs. Tout comme pour le cas des matériaux élastiques (chapitre 3), nous modéliserons le comportement d'un corps piézoélectrique tridimensionnel et bidimensionnel selon une approche locale. Finalement, une approche globale sera utilisée pour formuler le comportement d'une plaque piézoélectrique. Les relations ainsi obtenues seront utilisées ultérieurement lors de l'élaboration de la formulation variationnelle d'une plaque multicouche.

Afin de faciliter la compréhension des phénomènes électriques à l'intérieur d'un corps piézoélectrique, une analogie peut être faite entre les comportements mécanique et électrique. Le tableau 4.1 présente l'analogie entre les différentes variables mécaniques et élec-

TABLEAU 4.1: ANALOGIE ENTRE LES VARIABLES MÉCANIQUES ET ÉLECTRIQUES

Mécanique		Électrique	
Variables	Unités	Variables	Unités
Déplacement	mètre	Potentiel	volt
Force	newton	Charge	coulomb
Contrainte	newton/mètre ²	Déplacement	coulomb/mètre ²
Déformation	mètre/mètre	Champ électrique	volt/mètre
Rigidité	newton/mètre	Capacité	coulomb/volt
Module de rigidité	newton/mètre ²	Module diélectrique	coulomb/volt·mètre

triques.

4.2 Approche locale – théorie de la piézoélectricité linéaire

Dans cette section, les équations de la piézoélectricité linéaire 3D seront présentées. Ces équations permettent de caractériser localement le comportement d'un corps piézoélectrique et d'évaluer les 7 variables électriques fondamentales d'un problème de piézoélectricité : 1 potentiel électrique ϕ , 3 déplacements électriques (D_x, D_y, D_z) et 3 champs électriques (E_x, E_y, E_z). Un rappel sera donc fait sur les équations de mouvement, les lois de comportement, les relations champ-potentiel électrique et les conditions aux limites.

4.2.1 Équations de mouvement

Les équations de mouvement électriques d'un corps piézoélectrique sont obtenues en faisant l'équilibre des charges électriques à l'intérieur de son volume [49]. Nous supposons que le matériau piézoélectrique ne permet pas l'accumulation de charges. Nous trouvons alors

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

Ce bilan électrique, correspondant à l'équilibre des charges électriques, s'exprime par le théorème de Gauss (ou équation de charge de l'électrostatique).

4.2.2 Lois de comportement

Les lois de comportement d'un matériau piézoélectrique expriment la relation qui existe entre les déplacements et les champs électriques ainsi que le couplage entre les déplacements électriques et les déformations mécaniques et entre les contraintes mécaniques et les champs électriques. Ces lois de comportement sont présentées dans l'ouvrage de Tiersten [49]. Notons que le phénomène de piézoélectricité est réversible et qu'il comporte un effet direct et inverse. Pour un matériau piézoélectrique polarisé dans la direction de l'épaisseur (z), les lois de comportement sont :

Effet direct de la piézoélectricité

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

soit

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [d]^t\{E\} \quad (4.3)$$

où

- $\{D\}$ Vecteur des déplacements électriques
- $\{\varepsilon\}$ Vecteur des déformations
- $\{E\}$ Vecteur des champs électriques
- $[e]$ Matrice des constantes piézoélectriques en déformation
- $[d]^t$ Matrice de permittivité diélectrique à déformation constante

Effet inverse de la piézoélectricité

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

soit

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^t\{E\} \quad (4.5)$$

où

- $\{\sigma\}$ Vecteur des contraintes
- $\{\varepsilon\}$ Vecteur des déformations
- $\{E\}$ Vecteur des champs électriques
- $[C]$ Matrice des constantes élastiques à champ électrique constant
- $[e]$ Matrice des constantes piézoélectriques en déformation

Les matériaux piézoélectriques couplent les équations mécaniques aux équations électriques. Le terme de couplage est représenté par la matrice des constantes électriques $[e]$ qui relie les déplacements électriques aux déformations mécaniques et les contraintes mécaniques aux champs électriques.

4.2.3 Relations champ–potentiel électrique

Les relations entre le champ électrique E et le potentiel électrique ϕ sont définies comme suit [52] :

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (4.7)$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (4.8)$$

Le champ électrique est donc simplement l'opposé du gradient du potentiel électrique.

4.2.4 Conditions aux limites électriques

Aux équations précédentes, il faut associer des conditions aux limites de potentiels et de charges électriques. [52]

Conditions cinématiques (potentiel)

Sur une partie S_ϕ de la frontière, des potentiels électriques $\bar{\phi}$ peuvent être imposés.

$$\phi(x_\phi, y_\phi, z_\phi) = \bar{\phi} \quad \text{où} \quad (x_\phi, y_\phi, z_\phi) \in S_\phi \quad (4.9)$$

Ces relations sont parfois appelés conditions aux limites essentielles.

Conditions d'équilibre (charges)

Sur une partie S_q de la frontière, des charges électriques par unité de surface (déplacements électriques) D_x , D_y et D_z peuvent être imposées.

$$\begin{aligned}q_x(x_q, y_q, z_q) &= D_x \cdot n_x \\q_y(x_q, y_q, z_q) &= D_y \cdot n_y \quad \text{où } (x_q, y_q, z_q) \in S_q \\q_z(x_q, y_q, z_q) &= D_z \cdot n_z\end{aligned}\tag{4.10}$$

où n_x , n_y et n_z représentent des vecteurs unitaires dans les directions x , y et z respectivement. Ces relations sont parfois appelées conditions aux limites naturelles.

4.3 Approche locale – théorie de plaque piézoélectrique

Afin de traiter des problèmes de plaques piézoélectriques, des hypothèses doivent être imposées afin de simplifier les équations tridimensionnelles de la piézoélectricité linéaire. En plus de l'hypothèse de plaque de Mindlin pour la composante élastique, une hypothèse de champ électrique unidirectionnel ($E_x = E_y = 0$) sera imposée pour la composante électrique. Cette section traitera donc du cas bidimensionnel de la théorie de la piézoélectricité. L'hypothèse de champ potentiel unidirectionnel sera utilisée pour simplifier les équations présentées à la section précédente.

4.3.1 Champ de potentiel électrique

Le potentiel électrique ϕ est défini linéaire dans la direction de l'épaisseur et constant sur le plan $x - y$ de la couche piézoélectrique. Cette hypothèse est valide étant donné que l'épaisseur des couches piézoélectriques est faible comparativement à l'épaisseur des autres couches.

$$\phi(x, y, z, t) = (z - \bar{z}) \frac{\phi_0(t)}{h} \quad (4.11)$$

où

- ϕ_0 Potentiel électrique
- h Épaisseur de la plaque
- \bar{z} Position du plan neutre de la plaque

4.3.2 Lois de comportement

Il est possible de séparer les lois de comportement en deux composantes : une composante membrane-flexion et une composante cisaillement. Dans ce cas, l'équation de l'effet direct de la piézoélectricité s'écrit

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

et devient,

$$\{D\} = [e_{m,f}]\{\varepsilon_{m,f}\} + [e_c]\{\varepsilon_c\} + [d]^t\{E\} \quad (4.13)$$

De même, l'équation de l'effet inverse de la piézoélectricité s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} c_{44} & 0 \\ 0 & c_{44} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

et devient

$$\begin{aligned}
\{\sigma_{mf}\} &= [C_{mf}]\{\varepsilon_{mf}\} - [e_{mf}]^t\{E\} \\
\{\sigma_c\} &= [C_c]\{\varepsilon_c\} - [e_c]^t\{E\}
\end{aligned}$$

où

- $\{\sigma_{mf}\}$ Vecteur des contraintes (membrane et flexion)
- $\{\varepsilon_{mf}\}$ Vecteur des déformations (membrane et flexion)
- $[C_{mf}]$ Matrice des constantes élastiques à champ électrique constant (membrane et flexion)
- $[e_{mf}]$ Matrice des constantes piézoélectriques en déformation (membrane et flexion)
- $\{\sigma_c\}$ Vecteur des contraintes (cisaillement)
- $\{\varepsilon_c\}$ Vecteur des déformations (cisaillement)
- $[C_c]$ Matrice des constantes élastiques (cisaillement)
- $[e_c]$ Matrice des constantes piézoélectriques en déformation (cisaillement)
- $[d]^t$ Matrice de permittivité diélectrique à déformation constante
- $\{E\}$ Vecteur des potentiels électriques

4.3.3 Relations champ-potentiel électrique

Nous avons vu à la section 4.2.3 les relations champ-potentiel électrique de la théorie de la piézoélectricité. En appliquant ces relations au champ de potentiel électrique défini à la section 4.3.1, nous obtenons

$$E_z = -\frac{\phi_0}{h} \quad (4.15)$$

$$E_x = E_y = 0 \quad (4.16)$$

Notons que le champ électrique résultant est constant dans tout le volume de la plaque. Sous forme matricielle, nous obtenons

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{h} \end{bmatrix} \{\phi_0\} \quad (4.17)$$

soit

$$\{E\} = [D_\phi]\{\phi\} \quad (4.18)$$

où

- $\{E\}$ Vecteur du champ électrique
- $\{\phi\}$ Vecteur du potentiel électrique
- $[D_\phi]$ Opérateur différentiel du potentiel électrique

Étant donné que la valeur de la tension est constante sur la surface de chacune des électrodes (capteur ou actionneur), un seul degré de liberté électrique par couche est suffisant pour modéliser le potentiel électrique.

4.4 Approche globale – principe de Hamilton

Maintenant que les équations régissant le comportement local d'une plaque piézoélectrique sont bien posées, utilisons les pour caractériser son comportement global. Tout comme pour

le cas d'une plaque élastique, le principe de Hamilton sera utilisé. Nous devons donc définir les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du travail fait par les efforts externes.

4.4.1 Fonctionnelle de Hamilton

Nous avons vu à la section 3.4.1 que le principe variationnel de Hamilton s'exprime comme suit

$$\delta \int_{t_0}^t (T - V + W) dt = 0 \quad (4.19)$$

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

où

T Énergie cinétique
 V Énergie potentielle
 W Travail des efforts externes

Les sections suivantes présenteront les expressions de l'énergie cinétique T et potentielle V ainsi que le travail W pour le cas d'une plaque piézoélectrique.

4.4.2 Énergie cinétique T

La composante électrique d'un matériau piézoélectrique ne contribue pas à l'énergie cinétique. Par conséquent, l'expression de l'énergie cinétique T est la même que celle présentée à la section 3.4.2, soit

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_S \{\dot{u}\}^t [M_e] \{\dot{u}\} dS \quad (4.20)$$

où

$$[M_e] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & -\bar{z}h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & -\bar{z}h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z}h & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} + \bar{z}^2h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z}h & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} + \bar{z}^2h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.4.3 Énergie potentielle V

Pour un milieu continu piézoélectrique, l'énergie potentielle V comporte deux composantes : une composante élastique et une composante électrique. Nous définissons alors l'énergie potentielle comme suit

$$V = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV}_{\text{élastique}} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_V DE dV}_{\text{électrique}} \quad (4.22)$$

Notons que l'énergie potentielle électrique est négative.

À partir des lois de comportement d'un matériau piézoélectrique 4.3 et 4.5, l'expression de l'énergie potentielle s'écrit sous forme matricielle comme suit

$$V = \frac{1}{2} \int_V \underbrace{\{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\}}_{\text{élastique}} - \underbrace{\{\varepsilon\}^t [e]^t \{E\} - \{E\}^t [e] \{\varepsilon\}}_{\text{piézoélectrique}} - \underbrace{\{E\}^t [d]^t \{E\}}_{\text{diélectrique}} dV \quad (4.23)$$

soit

$$V = V_{\text{élastique}} + V_{\text{piézoélectrique}} + V_{\text{diélectrique}} \quad (4.24)$$

En introduisant les lois de comportement à l'expression de l'énergie potentielle, les composantes élastique et électrique se sont couplées pour finalement former trois composantes : les composantes élastique, piézoélectrique et diélectrique.

Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique est définie comme suit

$$V_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t [C] \{\varepsilon\} dV \quad (4.25)$$

En utilisant les vecteurs de déformation due à l'effet membrane, à la flexion, au couplage flexion-membrane et au cisaillement (voir section 3.4.3), nous pouvons détailler l'expression de l'énergie potentielle élastique

$$\begin{aligned} V_{\text{élastique}} = & \frac{1}{2} h \int_S \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dS + \frac{1}{2} \left(\frac{h^3}{12} + \bar{z}^2 h \right) \int_S \{\tilde{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\tilde{\chi}\} dS \\ & - \frac{1}{2} \bar{z} h \int_S \{\beta\}^t [C_{mf}] \{\tilde{\chi}\} + \{\tilde{\chi}\}^t [C_{mf}] \{\beta\} dS + \frac{1}{2} k h \int_S \{\gamma\}^t [C_c] \{\gamma\} dS \end{aligned} \quad (4.26)$$

Énergie potentielle piézoélectrique

L'énergie potentielle piézoélectrique est définie comme suit

$$V_{\text{piézoélectrique}} = -\frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^t [e]^t \{E\} + \{E\}^t [e] \{\varepsilon\} dV \quad (4.27)$$

En utilisant les vecteurs de déformation due à l'effet membrane, à la flexion et au cisaillement, nous pouvons détailler l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique.

$$V_{piézoélectrique} = -\frac{1}{2} \int_V \left\{ \begin{aligned} &\{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{\chi\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{\gamma\}^t [e_c]^t \{E\} \\ &+ \{E\}^t [e_{mf}] \{\beta\} + \{E\}^t [e_{mf}] \{\chi\} + \{E\}^t [e_c] \{\gamma\} \end{aligned} \right\} dV \quad (4.28)$$

Sachant que l'énergie potentielle piézoélectrique due au cisaillement est nulle étant donné que $E_x = 0$, l'expression se réduit donc à

$$V_{piézoélectrique} = -\frac{1}{2} \int_V \left\{ \begin{aligned} &\{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \{\chi\}^t [e_{mf}]^t \{E\} \\ &+ \{E\}^t [e_{mf}] \{\beta\} + \{E\}^t [e_{mf}] \{\chi\} \end{aligned} \right\} dV \quad (4.29)$$

En intégrant l'énergie potentielle piézoélectrique dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z} - h/2, \bar{z} + h/2]$, nous obtenons

$$V_{piézoélectrique} = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \begin{aligned} &h \{\beta\}^t [e_{mf}]^t \{E\} + \bar{z}h \{\chi\}^t [e_{mf}]^t \{E\} \\ &+ h \{E\}^t [e_{mf}] \{\beta\} + \bar{z}h \{E\}^t [e_{mf}] \{\chi\} \end{aligned} \right\} dS \quad (4.30)$$

Énergie potentielle diélectrique

L'énergie potentielle diélectrique est définie comme suit

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2} \int_V \{E\}^t [d]^t \{E\} dV \quad (4.31)$$

En intégrant l'énergie potentielle piézoélectrique dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z} - h/2, \bar{z} + h/2]$, nous obtenons

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2}h \int_S \{E\}^t [d]^t \{E\} dS \quad (4.32)$$

4.4.4 Travail W

Le travail fait par les efforts externes fait sur une plaque piézoélectrique peut être de nature mécanique, s'il est fait par une force mécanique, et/ou de nature électrique, s'il est fait par une charge électrique.

$$W = W_{méc} + W_{élec} \quad (4.33)$$

Travail mécanique $W_{méc}$

Pour un milieu continu piézoélectrique, le travail mécanique $W_{méc}$ est défini comme suit

$$W_{méc} = \int_V \{u\}^t \{F\} dV + \int_S \{u\}^t \{f\} dS + \{u\}^t \{P\} \quad (4.34)$$

En intégrant la composante volumique du travail mécanique dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z} - h/2, \bar{z} + h/2]$, nous obtenons

$$W_{méc} = \int_S (h \{u\}^t \{F\} + \{u\}^t \{f\}) dS + \{u\}^t \{P\} \quad (4.35)$$

où

- $\{u\}$ Déplacement
- $\{F\}$ Force volumique
- $\{f\}$ Force surfacique
- $\{P\}$ Force ponctuelle

Travail électrique W_{elec}

Pour un milieu continu piézoélectrique, le travail électrique W_{elec} est défini comme suit

$$W_{elec} = - \int_S \{\phi\}^t \{D\} dS \quad (4.36)$$

où

- $\{\phi\}$ Potentiel électrique
- $\{D\}$ Charge électrique surfacique (déplacement électrique)

4.5 Conclusion

Un rappel sur la théorie des matériaux piézoélectriques a été fait pour pouvoir modéliser le comportement des couches piézoélectriques à l'intérieur d'une plaque multicouche épaisse (théorie de Mindlin). Ces relations seront reprises lors du développement de la formulation variationnelle d'une plaque multicouche aux propriétés élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques.

Chapitre 5

Théorie des matériaux multicouches

5.1 Introduction

Ce chapitre fait un rappel sur la théorie des matériaux multicouches. Maintenant que les théories des matériaux élastiques, viscoélastiques (chapitre 3) et piézoélectriques (chapitre 4) ont été introduites, la théorie des matériaux multicouches nous permettra de joindre ces deux dernières théories. Dans un premier temps, une approche locale sera utilisée pour caractériser le comportement d'une plaque multicouche élastique et piézoélectrique respectivement. Finalement, les relations locales obtenues seront utilisées pour caractériser le comportement global. Ces relations globales pourront être utilisées ultérieurement lors de la formulation d'un élément fini multicouche.

5.2 Approche locale – théorie de plaque élastique multicouche

Dans cette section, une théorie discrète de plaques élastiques laminées sera introduite. Ceci signifie qu'un champ de déplacement linéaire sera défini pour chacune des couches. Nous développerons donc les relations de la théorie des plaques élastiques pour traiter les plaques élastiques multicouches. Pour réduire la taille du problème, nous imposerons des conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement à l'interface de chacune des couches. Les relations ainsi obtenues seront utilisées pour développer la formulation variationnelle.

5.2.1 Champ de déplacement

Nous avons vu à la section 3.3 que la théorie la plus adéquate pour modéliser des plaques multicouches considérablement épaisses est celle de Mindlin. De plus, la modélisation la plus générale d'une plaque multicouche est de définir un champ de déplacement indépendant pour chacune des couches [48].

Supposons qu'une plaque laminée composée de N couches élastiques (voir figure 5.1) est soumise à une charge quelconque. Selon la théorie de plaque de Mindlin, la section de la plaque se déformera comme l'illustre la figure 5.2.

En superposant une série de champs de déplacement respectant les hypothèses de la théorie de Mindlin, nous obtenons le champ de déplacement discret correspondant

$$\begin{aligned}u^{cn}(x, y, z, t) &= u_0^{cn}(x, y, t) - z \left(\frac{\partial w_0^{cn}(x, y, t)}{\partial x} - \varphi_x^{cn}(x, y, t) \right) = u_0^{cn}(x, y, t) - z\theta_x^{cn}(x, y, t) \\v^{cn}(x, y, z, t) &= v_0^{cn}(x, y, t) - z \left(\frac{\partial w_0^{cn}(x, y, t)}{\partial y} - \varphi_y^{cn}(x, y, t) \right) = v_0^{cn}(x, y, t) - z\theta_y^{cn}(x, y, t) \\w^{cn}(x, y, z, t) &= w_0^{cn}(x, y, t)\end{aligned}$$

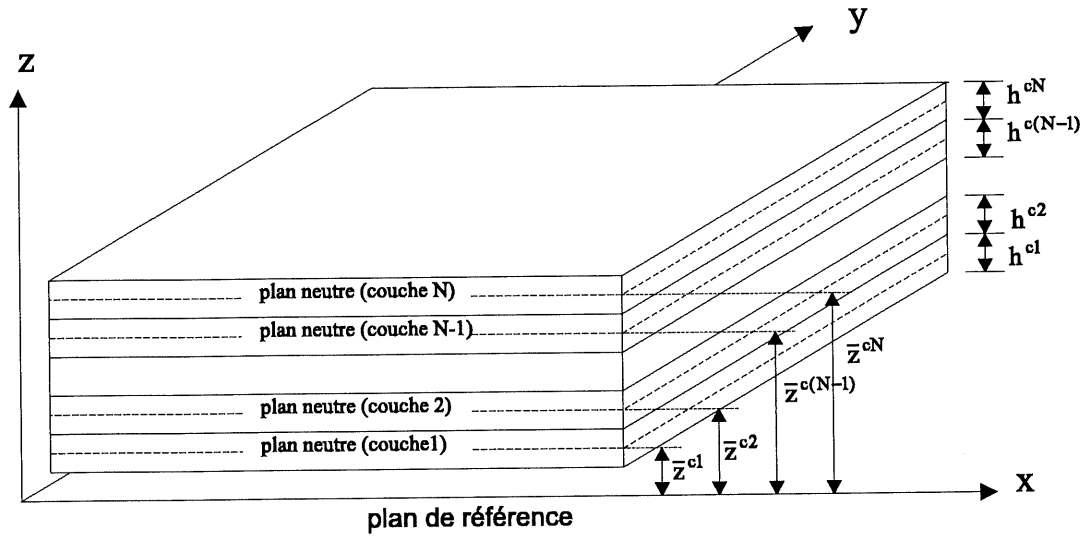


Figure 5.1: Schéma d'une plaque élastique multicouche

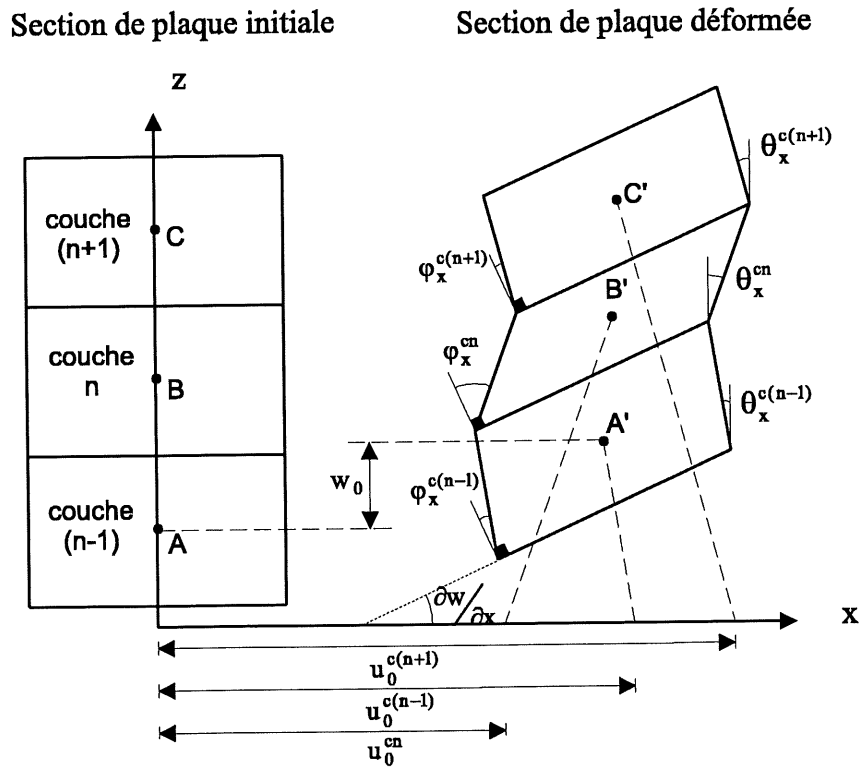


Figure 5.2: Déformation d'une section de plaque élastique multicouche.

où

$u_0^{cn}(x, y, t)$	Déplacement membrane dans la direction x de la n^e couche
$v_0^{cn}(x, y, t)$	Déplacement membrane dans la direction y de la n^e couche
$w_0^{cn}(x, y, t)$	Déplacement transversal de la n^e couche
$\frac{\partial w_0^{cn}(x, y, t)}{\partial x}$	Rotation de flexion des sections normales à l'axe x de la n^e couche
$\frac{\partial w_0^{cn}(x, y, t)}{\partial y}$	Rotation de flexion des sections normales à l'axe y de la n^e couche
$\varphi_x^{cn}(x, y, t)$	Rotation de cisaillement des sections normales à l'axe x de la n^e couche
$\varphi_y^{cn}(x, y, t)$	Rotation de cisaillement des sections normales à l'axe y de la n^e couche
$\theta_x^{cn}(x, y, t)$	Rotation totale des sections normales à l'axe x de la n^e couche
$\theta_y^{cn}(x, y, t)$	Rotation totale des sections normales à l'axe y de la n^e couche
\bar{z}^{cn}	Position z par rapport au plan de référence de la n^e couche

Notons que la déflexion transversale w_0^{cn} de la plaque laminée est la même pour toutes les couches. Ce champ de déplacement tient compte à la fois de l'effet membrane, de l'effet de flexion et du cisaillement transversal. Sous forme matricielle, il s'exprime comme suit

$$\begin{Bmatrix} u^{cn} \\ v^{cn} \\ w^{cn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{Bmatrix} - z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

soit

$$\{U^{cn}\} = [T_t]\{u^{cn}\} - z[T_r]\{u^{cn}\}$$

5.2.2 Relations déformation–déplacement

Nous avons vu à la section 3.2.3 les relations déformation–déplacement de la théorie de l'élasticité. En appliquant ces relations au champ de déplacement défini à la section (5.2.1), nous obtenons les relations suivantes

$$\varepsilon_x^{cn} = \frac{\partial u_0^{cn}}{\partial x} - z \frac{\partial \theta_x^{cn}}{\partial x} \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_y^{cn} = \frac{\partial v_0^{cn}}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y^{cn}}{\partial y} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_z^{cn} = 0 \quad (5.4)$$

$$\gamma_{xy}^{cn} = \left(\frac{\partial u_0^{cn}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{cn}}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial \theta_x^{cn}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{cn}}{\partial x} \right) \quad (5.5)$$

$$\gamma_{xz}^{cn} = \left(-\theta_x^{cn} + \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \right) \quad (5.6)$$

$$\gamma_{yz}^{cn} = \left(-\theta_y^{cn} + \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \right) \quad (5.7)$$

Sous forme matricielle, les relations déformation–déplacement d'une plaque multicouche s'expriment comme suit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^{cn} \\ \varepsilon_y^{cn} \\ \varepsilon_z^{cn} \\ \gamma_{xy}^{cn} \\ \gamma_{xz}^{cn} \\ \gamma_{yz}^{cn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial}{\partial y} & -z \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

soit

$$\{\varepsilon^{cn}\} = [D_u]\{u^{cn}\}$$

où

- $\{\varepsilon^{cn}\}$ Vecteur des déformations de la n^e couche
- $\{u^{cn}\}$ Vecteur des déplacements de la n^e couche
- $[D_u]$ Opérateur différentiel des déplacements

Comme à la section 3.3.3, nous pouvons séparer les déformations en trois composantes.

Déformations dues à l'effet membrane

$$\{\beta^{cn}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0^{cn}}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial u_0^{cn}}{\partial y} + \frac{\partial v_0^{cn}}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

soit

$$\{\beta^{cn}\} = [D_{um}]\{u^{cn}\}$$

où

- $\{\beta^{cn}\}$ Vecteur des déformations de la n^e couche dues à l'effet membrane
- $[D_{um}]$ Opérateur différentiel des déplacements dus à l'effet membrane

Déformations dues à la flexion

$$\{\chi^{cn}\} = -z\{\tilde{\chi}^{cn}\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y^{cn}}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x^{cn}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{cn}}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

soit

$$\{\chi^{cn}\} = [D_{uf}]\{u^{cn}\}$$

où

$\{\chi^{cn}\}$ Vecteur des déformations de la n^e couche dues à la flexion
 $[D_{uf}]$ Opérateur différentiel des déplacements dus à la flexion

Déformations dues au cisaillement

$$\{\gamma^{cn}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} - \theta_x^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} - \theta_y^{cn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

soit

$$\{\gamma^{cn}\} = [D_{uc}]\{u^{cn}\}$$

où

$\{\gamma^{cn}\}$ Vecteur des déformations de la n^e couche dues au cisaillement
 $[D_{uc}]$ Opérateur différentiel des déplacements dus au cisaillement

5.2.3 Conditions de continuité

Afin de réduire le nombre d'inconnues du problème, nous pouvons imposer certaines conditions de continuité entre les couches. Ces conditions ont comme conséquence de limiter le mouvement de certaines variables du champ de déplacement des couches. La continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement sera imposée à l'interface de 2 couches successives [48]. Nous verrons qu'à partir de ces conditions de continuité, les variables du champ de déplacement des couches supérieures peuvent être exprimées à partir de celles de la première couche [12]. Ceci permet d'avoir un nombre de variables inconnues constant peu importe le nombre de couches de la plaque.

Continuité des déplacements aux interfaces des couches

La continuité des déplacements aux interfaces des couches (aucun glissement) s'exprime mathématiquement comme suit

$$u^{cn}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) = u^{c(n+1)}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) \quad (5.12)$$

$$v^{cn}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) = v^{c(n+1)}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) \quad (5.13)$$

$$w^{cn}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) = w^{c(n+1)}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) \quad (5.14)$$

En substituant les expressions du champ de déplacement, nous obtenons

$$u_0^{cn} - \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2} \right) \theta_x^{cn} = u_0^{c(n+1)} - \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2} \right) \theta_x^{c(n+1)} \quad (5.15)$$

$$v_0^{cn} - \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2} \right) \theta_y^{cn} = v_0^{c(n+1)} - \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2} \right) \theta_y^{c(n+1)} \quad (5.16)$$

$$w_0^{cn} = w_0^{c(n+1)} \quad (5.17)$$

Finalement, nous arrivons à l'expression des variables de déplacement de la $(n+1)^e$ couche

$$u_0^{c(n+1)} = u_0^{cn} - \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2} \right) \left(\theta_x^{cn} - \theta_x^{c(n+1)} \right) \quad (5.18)$$

$$v_0^{c(n+1)} = v_0^{cn} - \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2} \right) \left(\theta_y^{cn} - \theta_y^{c(n+1)} \right) \quad (5.19)$$

$$w_0^{c(n+1)} = w_0^{cn} \quad (5.20)$$

La figure 5.3 illustre graphiquement la condition de continuité des déplacements aux interfaces des couches.

Continuité des contraintes de cisaillement transversales aux interfaces des couches

Pour assurer la continuité de la contrainte de cisaillement aux interfaces, nous écrivons

$$\tau_{xz}^{cn}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) = \tau_{xz}^{c(n+1)}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) \quad (5.21)$$

$$\tau_{yz}^{cn}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) = \tau_{yz}^{c(n+1)}(x, y, z = \bar{z}^{cn} + h^{cn}/2) \quad (5.22)$$

où G^{cn} représente le module de rigidité en cisaillement de la n^e couche. Connaissant la loi de comportement d'un corps élastique isotrope, nous pouvons écrire

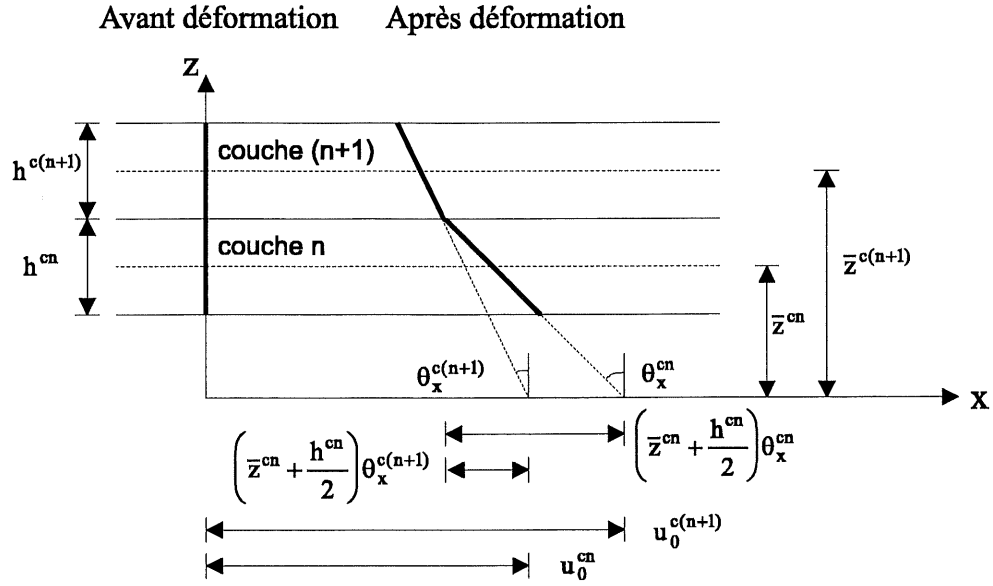


Figure 5.3: Condition de continuité des déplacements aux interfaces des couches.

$$\tau_{xz}^{cn} = G^{cn} \gamma_{xz}^{cn} = G^{cn} \left(-\theta_x^{cn} + \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \right) = G^{cn} \varphi_x^{cn} \quad (5.23)$$

$$\tau_{yz}^{cn} = G^{cn} \gamma_{yz}^{cn} = G^{cn} \left(-\theta_y^{cn} + \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \right) = G^{cn} \varphi_y^{cn} \quad (5.24)$$

Notons à partir des équations précédentes que la contrainte de cisaillement est constante dans la direction de l'épaisseur de la plaque. En substituant dans les expressions précédentes, nous obtenons

$$G^{cn} \left(-\theta_x^{cn} + \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \right) = G^{c(n+1)} \left(-\theta_x^{c(n+1)} + \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial x} \right) \quad (5.25)$$

$$G^{cn} \left(-\theta_y^{cn} + \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \right) = G^{c(n+1)} \left(-\theta_y^{c(n+1)} + \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial y} \right) \quad (5.26)$$

ou

$$G^{cn} \varphi_x^{cn} = G^{c(n+1)} \varphi_x^{c(n+1)} \quad (5.27)$$

$$G^{cn} \varphi_y^{cn} = G^{c(n+1)} \varphi_y^{c(n+1)} \quad (5.28)$$

Après manipulation

$$\theta_x^{c(n+1)} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \left(\theta_x^{cn} - \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial x} \quad (5.29)$$

$$\theta_y^{c(n+1)} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \left(\theta_y^{cn} - \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \right) + \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial y} \quad (5.30)$$

ou

$$\varphi_x^{c(n+1)} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \varphi_x^{cn} \quad (5.31)$$

$$\varphi_y^{c(n+1)} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \varphi_y^{cn} \quad (5.32)$$

Sachant que la déflexion w de la plaque est constante dans la direction de l'épaisseur, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial x} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} = \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial y} \quad (5.34)$$

Finalement, nous arrivons à l'expression des variables de rotation de la $(n+1)^e$ couche en fonction des variables de la n^e couche

$$\theta_x^{c(n+1)} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \theta_x^{cn} + \left(1 - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}}\right) \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} = \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \varphi_x^{cn} \quad (5.35)$$

$$\theta_y^{c(n+1)} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \theta_y^{cn} + \left(1 - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}}\right) \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} = \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \varphi_y^{cn} \quad (5.36)$$

Nous voyons donc qu'il est possible d'exprimer les variables de déplacement de la $(n+1)^e$ couche à partir des variables de déplacement de la n^e couche. À partir des équations (5.18) (5.19) (5.20) (5.33) (5.34) (5.35) (5.36) et en posant

$$\tau_1^{(n+1)n} = \left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2}\right) \left(1 - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}}\right) \quad (5.37)$$

$$\tau_2^{(n+1)n} = -\left(\bar{z}^{cn} + \frac{h^{cn}}{2}\right) \left(1 - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}}\right) \quad (5.38)$$

$$\tau_3^{(n+1)n} = 1 - \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \quad (5.39)$$

$$\tau_4^{(n+1)n} = \frac{G^{cn}}{G^{c(n+1)}} \quad (5.40)$$

nous pouvons exprimer la continuité des variables de déplacement sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} u_0^{c(n+1)} \\ v_0^{c(n+1)} \\ w_0^{c(n+1)} \\ \theta_x^{c(n+1)} \\ \theta_y^{c(n+1)} \\ \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{c(n+1)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau_2^{(n+1)n} & 0 & \tau_1^{(n+1)n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tau_2^{(n+1)n} & 0 & \tau_1^{(n+1)n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4^{(n+1)n} & 0 & \tau_3^{(n+1)n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_4^{(n+1)n} & 0 & \tau_3^{(n+1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{cn} \\ v_0^{cn} \\ w_0^{cn} \\ \theta_x^{cn} \\ \theta_y^{cn} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{cn}}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

soit

$$\{u^{c(n+1)}\} = [q^{(n+1)n}]\{u^{cn}\} \quad (5.42)$$

où

- $\{u^{c(n+1)}\}$ Vecteur des variables de déplacement de la $(n+1)^e$ couche
- $\{u^{cn}\}$ Vecteur des variables de déplacement de la n^e couche
- $[q^{(n+1)n}]$ Matrice de continuité entre la n^e et la $(n+1)^e$ couche

En examinant l'équation (5.41), nous remarquons qu'il y a des termes dans les colonnes 6 et 7 de la matrice $[q^{(n+1)n}]$. Nous voyons alors l'utilité des variables de rotation de flexion $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$. Ces dernières nous permettent d'imposer les conditions de continuité entre les couches. Nous pouvons utiliser la dernière expression pour exprimer les variables des déplacements de toutes les couches en fonction des variables de la première couche.

$$\{u^{cn}\} = [q^{n(n-1)}][q^{(n-1)(n-2)}] \dots [q^{32}][q^{21}]\{u^{c1}\} \quad (5.43)$$

$$\{u^{cn}\} = [Q^n]\{u^{c1}\} \quad (5.44)$$

où

- $\{u^{cn}\}$ Vecteur des variables de déplacement de la n^e couche
- $\{u^{c1}\}$ Vecteur des variables de déplacement de la 1^{ère} couche
- $[Q^n]$ Matrice de continuité entre la n^e et la 1^{ère} couche

En développant, nous trouvons que

$$[Q^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

et

$$[Q^n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad n = 2, 3, \dots, N \quad (5.46)$$

où

$$T_1 = \tau_1^{21} + \sum_{i=3}^n \sum_{j=2}^{i-1} \left\{ \tau_1^{i(i-1)} + \tau_2^{i(i-1)} \left(\tau_3^{j(j-1)} \prod_{k=j+1}^{i-1} \tau_4^{k(k-1)} \right) \right\} \quad (5.47)$$

$$T_2 = \sum_{i=2}^n \left\{ \tau_2^{i(i-1)} \prod_{k=2}^{i-1} \tau_4^{k(k-1)} \right\} \quad (5.48)$$

$$T_3 = \sum_{i=2}^n \left\{ \tau_3^{i(i-1)} \prod_{k=i+1}^n \tau_4^{k(k-1)} \right\} = \left(1 - \frac{G^{c1}}{G^{cn}} \right) \quad (5.49)$$

$$T_4 = \prod_{k=2}^n \tau_4^{k(k-1)} = \frac{G^{c1}}{G^{cn}} \quad (5.50)$$

5.3 Approche locale – théorie de plaque piézoélectrique multicouche

Dans cette section, une théorie discrète de plaques piézoélectriques laminées sera introduite. Ceci signifie qu'un champ de potentiel électrique linéaire sera défini pour chaque couche piézoélectrique. Nous développerons donc les relations de la théorie des plaques piézoélectriques pour traiter les plaques piézoélectriques multicouches. Contrairement au cas de la plaque élastique multicouche, aucune condition de continuité électrique ne sera imposée à l'interface des couches piézoélectriques. Les couches de la plaque n'étant pas toutes piézoélectriques, un champ de potentiel électrique sera défini uniquement pour les couches piézoélectriques. Il serait donc impossible de définir des conditions de continuité électriques entre une couche élastique et piézoélectrique. Les relations obtenues seront utilisées pour développer la formulation variationnelle de l'élément fini de plaque multicouche.

5.3.1 Champ de potentiel électrique

Soit une plaque laminée composée de N_p couches piézoélectriques. En superposant une série de champs de potentiel électrique linéaires, nous obtenons le champ électrique discret suivant

$$\phi^{cn}(x, y, z, t) = (z - \bar{z}^{cn}) \frac{\phi_0^{cn}(t)}{h^{cn}} \quad (5.51)$$

où

- $\phi_0^{cn}(t)$ Potentiel électrique de la n^e couche
- h^{cn} Épaisseur de la n^e couche
- \bar{z}^{cn} Position z par rapport au plan de référence de la n^e couche

5.3.2 Relations champ-potential électrique

À partir des relations champ-potential électrique définies à la section 4.2.3, nous déterminons l'expression des champs électriques

$$E_z^{cn} = -\frac{\phi_0^{cn}}{h^{cn}} \quad (5.52)$$

$$E_x^{cn} = E_y^{cn} = 0 \quad (5.53)$$

Notons que le champ électrique résultant est constant dans tout le volume de la couche. Sous forme matricielle, les relations champ-potential électrique s'expriment comme suit

$$\begin{Bmatrix} E_x^{cn} \\ E_y^{cn} \\ E_z^{cn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{h^{cn}} \end{bmatrix} \{\phi_0^{cn}\} \quad (5.54)$$

soit

$$\{E^{cn}\} = [D_\phi]\{\phi^{cn}\} \quad (5.55)$$

5.4 Approche globale – principe de Hamilton

Maintenant que les équations régissant le comportement local d'une plaque multicouche élastique et piézoélectrique sont bien posées, utilisons les pour caractériser son comportement global. Tout comme pour le cas des plaques monocouches, le principe de Hamilton sera utilisé. Nous devons donc définir les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du travail fait par les efforts externes.

5.4.1 Fonctionnelle de Hamilton

Nous avons vu à la section 3.4.1 que le principe variationnel de Hamilton s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^t (T - V + W) dt &= 0 \\ \delta q(t_1) = \delta q(t_2) &= 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

où

T Énergie cinétique
 V Énergie potentielle
 W Travail

Les sections suivantes présenteront les expressions de l'énergie cinétique T et potentielle V ainsi que le travail W pour le cas d'une plaque multicouche possédant des couches élastiques et piézoélectriques.

5.4.2 Énergie cinétique T

L'énergie cinétique d'une plaque multicouche est définie comme étant la somme des énergies cinétiques de chacune des couches [48].

$$T = \sum_{i=1}^N T_i \quad (5.57)$$

En substituant l'expression de l'énergie cinétique de chacune des couches (section 3.4.2), nous obtenons

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{V_i} \left\{ \dot{U}^{ci} \right\}^t \left\{ \dot{U}^{ci} \right\} dV_i \quad (5.58)$$

En substituant l'expression matricielle du champ de déplacement (section 5.2.1), nous obtenons

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{V_i} \left\{ \dot{u}^{ci} \right\}^t ([T_t]^t - z [T_r]^t) ([T_t] - z [T_r]) \left\{ \dot{u}^{ci} \right\} dV_i \quad (5.59)$$

Tenant compte des conditions de continuité (section 5.2.3), l'expression de l'énergie cinétique devient

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{V_i} \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t ([T_t]^t - z [T_r]^t) ([T_t] - z [T_r]) [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} dV_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{V_i} \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t [T_t]^t [T_t] [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} \\ &\quad - z \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t ([T_r]^t [T_t] + [T_t]^t [T_r]) [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} \\ &\quad + z^2 \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t [T_r]^t [T_r] [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} dV_i \end{aligned} \quad (5.60)$$

En intégrant l'énergie cinétique dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}^{ci} - h^{ci}/2, \bar{z}^{ci} + h^{ci}/2]$ sur chacune des couches, nous obtenons

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{S_i} h^{ci} \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t [T_t]^t [T_t] [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} \\ &\quad - \bar{z}^{ci} h^{ci} \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t ([T_r]^t [T_t] + [T_t]^t [T_r]) [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{h^{ci3}}{12} + \bar{z}^{ci2} h^{ci} \right) \left\{ \dot{u}^{c1} \right\}^t [Q^i]^t [T_r]^t [T_r] [Q^i] \left\{ \dot{u}^{c1} \right\} dS_i \end{aligned} \quad (5.61)$$

soit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{S_i} \{\dot{u}^{c1}\}^t [Q^i]^t [M_e^{ci}] [Q^i] \{\dot{u}^{c1}\} dS_i \quad (5.62)$$

où

$$[M_e^{ci}] = \begin{bmatrix} h^{ci} & 0 & 0 & -\bar{z}^{ci} h^{ci} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{ci} & 0 & 0 & -\bar{z}^{ci} h^{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h^{ci} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z}^{ci} h^{ci} & 0 & 0 & \frac{h^{ci3}}{12} + \bar{z}^{ci2} h^{ci} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{z}^{ci} h^{ci} & 0 & 0 & \frac{h^{ci3}}{12} + \bar{z}^{ci2} h^{ci} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

5.4.3 Énergie potentielle V

L'énergie potentielle d'une plaque multicouche est définie comme étant la somme des énergies potentielles de chacune des couches [48].

$$V = \sum_{i=1}^N V_i \quad (5.64)$$

Nous avons vu à la section 4.4.3 que l'énergie potentielle de chacune des couches comporte trois composantes

$$V_i = V_{\text{élastique}_i} + V_{\text{piézoélectrique}_i} + V_{\text{diélectrique}_i} \quad (5.65)$$

Énergie potentielle élastique

En substituant l'expression de l'énergie potentielle élastique de chacune des couches (section 3.4.3), nous obtenons

$$V_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{\varepsilon^{ci}\}^t [C^{ci}] \{\varepsilon^{ci}\} dV_i \quad (5.66)$$

En utilisant les vecteurs de déformation due à l'effet membrane, à la flexion, au couplage membrane-flexion et au cisaillement (section 3.3.3), nous pouvons détailler l'expression de l'énergie potentielle élastique

$$\begin{aligned} V_{\text{élastique}} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \underbrace{\{\beta^{ci}\}^t [C_{mf}^{ci}] \{\beta^{ci}\}}_{\text{membrane}} + \underbrace{\{\chi^{ci}\}^t [C_{mf}^{ci}] \{\chi^{ci}\}}_{\text{flexion}} \\ & - \underbrace{\{\beta^{ci}\}^t [C_{mf}^{ci}] \{\chi^{ci}\} - \{\chi^{ci}\}^t [C_{mf}^{ci}] \{\beta^{ci}\}}_{\text{membrane-flexion}} \\ & + k \underbrace{\{\gamma^{ci}\}^t [C_c^{ci}] \{\gamma^{ci}\}}_{\text{cisaillement}} dV_i \end{aligned} \quad (5.67)$$

En substituant l'expression des vecteurs de déformation de chacune des couches (section 3.3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} V_{\text{élastique}} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{u^{ci}\}^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] * [D_{um}] \{u^{ci}\} \\ & + \{u^{ci}\}^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] \{u^{ci}\} \\ & - \{u^{ci}\}^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] \{u^{ci}\} \\ & - \{u^{ci}\}^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] \{u^{ci}\} \\ & + k \{u^{ci}\}^t [D_{uc}]^t [C_c^{ci}] [D_{uc}] \{u^{ci}\} dV_i \end{aligned} \quad (5.68)$$

Tenant compte des conditions de continuité (section 5.2.3), l'expression de l'énergie potentielle devient

$$\begin{aligned}
V_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} & \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] * [D_{um}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& - \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& - \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& + k \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uc}]^t [C_c^{ci}] [D_{uc}] [Q^i] \{u^{c1}\} dV_i \quad (5.69)
\end{aligned}$$

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}^{ci} - h^{ci}/2, \bar{z}^{ci} + h^{ci}/2]$ sur chacune des couches, nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} & h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& + \left(\frac{h^{ci^3}}{12} + \bar{z}^{ci^2} h^{ci} \right) \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& + k h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uc}]^t [C_c^{ci}] [D_{uc}] [Q^i] \{u^{c1}\} dS_i \quad (5.70)
\end{aligned}$$

Énergie potentielle piézoélectrique

En substituant l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique de chacune des couches (section 4.4.3), nous obtenons

$$V_{\text{piézoélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{\varepsilon^{ci}\}^t [e^{ci}]^t \{E^{ci}\} + \{E^{ci}\}^t [e^{ci}] \{\varepsilon^{ci}\} dV_i \quad (5.71)$$

En utilisant les vecteurs de déformation due à l'effet membrane et à la flexion (section 3.3.3), nous pouvons détailler l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique

$$V_{\text{piézoélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \left\{ \beta^{ci} \right\}^t [e_{mf}^{ci}]^t \{E^{ci}\} + \{ \chi^{ci} \}^t [e_{mf}^{ci}]^t \{E^{ci}\} + \{E^{ci}\}^t [e_{mf}^{ci}] \{ \beta^{ci} \} + \{E^{ci}\}^t [e_{mf}^{ci}] \{ \chi^{ci} \} dV_i \quad (5.72)$$

Rappelons que l'énergie potentielle due au cisaillement est nulle étant donné que $E_x = 0$. En substituant l'expression des vecteurs de déformation et du vecteur potentiel électrique de chacune des couches (section 3.3.3 et 4.3.3), nous obtenons

$$V_{\text{piézoélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \left\{ u^{ci} \right\}^t [D_{um}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_{\phi}^{ci}] \{ \phi^{ci} \} + \left\{ u^{ci} \right\}^t [D_{uf}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_{\phi}^{ci}] \{ \phi^{ci} \} + \{ \phi^{ci} \}^t [D_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] \{ u^{ci} \} + \{ \phi^{ci} \}^t [D_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] \{ u^{ci} \} dV_i \quad (5.73)$$

Tenant compte des conditions de continuité (section 5.2.3), l'expression de l'énergie potentielle devient

$$V_{\text{piézoélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \left\{ u^{c1} \right\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_{\phi}^{ci}] \{ \phi^{ci} \} + \left\{ u^{c1} \right\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_{\phi}^{ci}] \{ \phi^{ci} \} + \{ \phi^{ci} \}^t [D_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{ u^{c1} \} + \{ \phi^{ci} \}^t [D_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{ u^{c1} \} dV_i \quad (5.74)$$

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}^{ci} - h^{ci}/2, \bar{z}^{ci} + h^{ci}/2]$ sur chacune des couches, nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_{\text{piézoélectrique}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \quad \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} \\
& -\bar{z}^{ci} h^{ci} \quad \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} \\
& +h^{ci} \quad \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& -\bar{z}^{ci} h^{ci} \quad \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{u^{c1}\} dS_i \quad (5.75)
\end{aligned}$$

Notons que l'énergie potentielle piézoélectrique due au cisaillement est nulle.

Énergie potentielle diélectrique

En substituant l'expression de l'énergie potentielle diélectrique de chacune des couches (section 4.4.3), nous obtenons

$$V_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{E^{ci}\}^t [d^{ci}]^t \{E^{ci}\} dV_i \quad (5.76)$$

En substituant l'expression du vecteur potentiel électrique de chacune des couches (section 4.3.3), nous obtenons

$$V_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [d^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} dV_i \quad (5.77)$$

En intégrant l'énergie potentielle dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}^{ci} - h^{ci}/2, \bar{z}^{ci} + h^{ci}/2]$ sur chacune des couches, nous obtenons

$$V_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [d^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} dS_i \quad (5.78)$$

5.4.4 Travail W

Le travail fait sur une plaque multicouche est définie comme étant la somme des travaux faits sur chacune des couches. Ce travail peut être de nature mécanique, s'il est fait par une force mécanique, et/ou de nature électrique, s'il est fait par une charge électrique.

$$W = \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=1}^N (W_{méc_i} + W_{élec_i}) \quad (5.79)$$

Travail mécanique $W_{méc}$

En sommant l'expression du travail mécanique fait sur chacune des couches (section 4.4.4), nous obtenons

$$W_{méc} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{u^{ci}\}^t \{F^{ci}\} dV_i + \int_{S_i} \{u^{ci}\}^t \{f^{ci}\} dS_i + \{u^{ci}\}^t \{P^{ci}\} \quad (5.80)$$

où

- $\{F^{ci}\}$ Force volumique appliquée sur la i^e couche
- $\{f^{ci}\}$ Force surfacique appliquée sur la i^e couche
- $\{P^{ci}\}$ Force ponctuelle appliquée sur la i^e couche

Tenant compte des conditions de continuité (section 5.2.3), l'expression du travail mécanique devient

$$W_{méc} = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} dV_i + \int_{S_i} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} dS_i + \{u^{ci}\}^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (5.81)$$

En intégrant la composante volumique du travail mécanique dans la direction z à l'intérieur des bornes $[\bar{z}^{ci} - h^{ci}/2, \bar{z}^{ci} + h^{ci}/2]$ sur chacune des couches, nous obtenons

$$W_{méc} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \left(h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} \right) dS_i + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (5.82)$$

Travail électrique $W_{élec}$

En sommant l'expression du travail électrique fait sur chacune des couches (section 4.4.4), nous obtenons

$$W_{élec} = - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \{\phi^{ci}\}^t \{D^{ci}\} dS_i \quad (5.83)$$

où

$\{D^{ci}\}$ Charge surfacique (déplacement électrique) appliquée sur la i^e couche

Finalement, en combinant les expressions du travail mécanique et électrique, nous obtenons l'expression complète du travail fait sur une plaque multicouche.

$$W = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} - \{\phi^{ci}\}^t \{D^{ci}\} dS_i + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (5.84)$$

5.5 Conclusion

Un rappel sur la théorie des plaques multicouches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques a été fait pour pouvoir modéliser le comportement d'une plaque multicouche. Ces relations seront reprises au chapitre suivant pour développer la formulation variationnelle d'un élément fini de plaque multicouche aux propriétés élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques.

Chapitre 6

Élément fini de plaque multicouche

6.1 Introduction

Ce chapitre traite du développement d'un élément fini de plaque multicouche contenant des couches élastiques, viscoélastiques et piézoélectriques. Maintenant que la formulation variationnelle du problème de plaque multicouche est développée, il ne reste plus qu'à discrétiser les expressions contenues dans la fonctionnelle de Hamilton et à résoudre. Un élément fini quadrilatère à 8 noeuds sera développé. Dans un premier temps, les fonctions d'interpolation utilisées pour discrétiser le milieu seront présentées. Par la suite, les expressions des termes énergétiques contenus dans le principe de Hamilton seront approximées à partir des fonctions d'interpolation. Finalement, les expressions des matrices élémentaires, soit la matrice de masse, de rigidité et le vecteur des forces nodales seront obtenues.

6.2 Discrétisation de la géométrie

6.2.1 Fonctions d'interpolation

Un élément de plaque quadrilatère isoparamétrique à 8 noeuds (QUAD8) a été développé pour discrétiser la plaque de telle sorte que les variables du problème peuvent être exprimées selon l'approximation nodale suivante :

$$u_0^{c1} = \sum_{i=1}^8 N_i u_{0i}^{c1} \quad (6.1)$$

$$v_0^{c1} = \sum_{i=1}^8 N_i v_{0i}^{c1} \quad (6.2)$$

$$w_0^{c1} = \sum_{i=1}^8 N_i w_{0i}^{c1} \quad (6.3)$$

$$\theta_x^{c1} = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{xi}^{c1} \quad (6.4)$$

$$\theta_y^{c1} = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{yi}^{c1} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial w_0^{c1}}{\partial x} = \sum_{i=1}^8 N_i \frac{\partial w_{0i}^{c1}}{\partial x} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial w_0^{c1}}{\partial y} = \sum_{i=1}^8 N_i \frac{\partial w_{0i}^{c1}}{\partial y} \quad (6.7)$$

$$\phi_0^{ci} = \phi_0^{ci} \quad (6.8)$$

Notons que les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement aux interfaces des couches nécessitent l'utilisation des rotations de flexion $\partial w/\partial x$ et $\partial w/\partial y$. La figure 6.1 montre le schéma d'un élément bidimensionnel à 8 noeuds alors que la figure 6.2 montre les degrés de libertés de chacun des noeuds.

Afin d'éliminer autant que possible les désavantages associés à la présence de nombreux noeuds intérieurs, les éléments de la famille polynômiale de Serendip ont été développés.

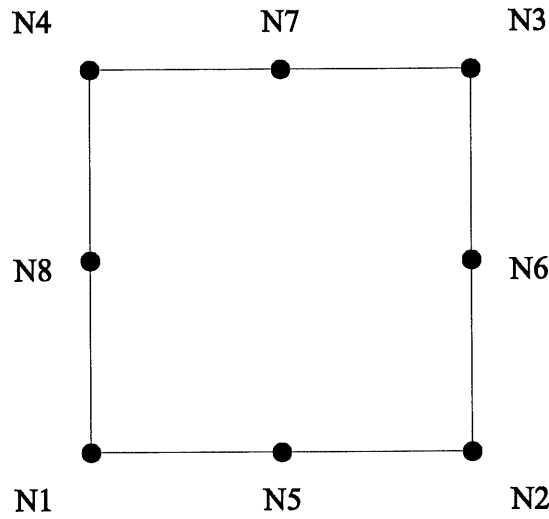


Figure 6.1: Élément bidimensionnel à 8 noeuds.

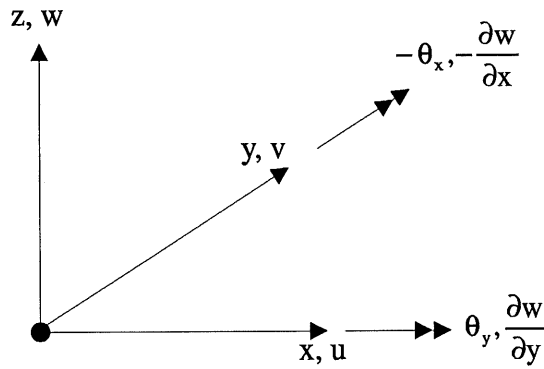


Figure 6.2: Degrés de liberté de chacun des noeuds de l'élément.

Pour un élément 2D à 8 noeuds, les polynômes d'interpolation de la famille de Serendip sont les suivants [3]

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2) - \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (6.9)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (6.10)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (6.11)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta) - \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (6.12)$$

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \quad (6.13)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \quad (6.14)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \quad (6.15)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \quad (6.16)$$

où $-1 < \xi < 1$ et $-1 < \eta < 1$. Ces fonctions d'interpolation contiennent un polynôme complet du 2^e ordre plus les termes $\xi^2\eta$ et $\xi\eta^2$. Notons que le polynôme d'interpolation du potentiel électrique est 1 étant donné que le potentiel est constant sur la surface des couches piézoélectriques.

La relation permettant d'obtenir les dérivées d'une fonction quelconque u par rapport aux coordonnées de l'espace vrai (x, y) en fonction des dérivées par rapport aux coordonnées réduites (ξ, η) est la suivante

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

soit

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} = J \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} \quad (6.18)$$

d'où

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\} = J^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \right\}$$

où J est le Jacobien de la transformation $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ tandis que $\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\right\}$ et $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ désignent les opérateurs dérivées premières par rapport, respectivement, aux coordonnées réduites et aux coordonnées de l'espace vrai.

L'utilisation de coordonnées réduites (ξ, η) simplifie le domaine sur lequel les intégrales sont définies. Cependant, les éléments de surface doivent être exprimés en fonction des coordonnées réduites (espace parent). Si dS est un élément de surface dans l'espace vrai (x, y) , dS est évalué en fonction de (ξ, η) de la façon suivante

$$dS = dx dy = |J| d\xi d\eta$$

Afin de simplifier les expressions discrétisées des énergies, les transformations de gradients ne seront pas tenu en compte dans le reste de cet ouvrage. Il est cependant important de ne pas les omettre lors de l'intégration des énergies.

6.2.2 Discrétisation des variables du problème

Connaissant les fonctions d'interpolation des variables nodales, nous pouvons approximer les variables du problème.

$$\{u^{c1}\} = [N_u] \{U\} \quad (6.19)$$

$$\{\phi^{ci}\} = [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} \quad (6.20)$$

où

$\{u^{c1}\}$	Vecteur des déplacements
$\{U\}$	Vecteur des déplacements nodaux
$[N_u]$	Matrice d'interpolation des déplacements
$\{\phi^{ci}\}$	Vecteur des potentiels électriques
$\{\Phi^{ci}\}$	Vecteur des potentiels électriques nodaux
$[N_\phi]$	Matrice d'interpolation des potentiels électriques

La forme détaillée des équations d'interpolation nodale est donnée à l'annexe A.

6.3 Approximation de la solution

Nous avons introduit à la section 4.4 le principe variationnel de Hamilton pour le cas d'une plaque multicouche piézoélectrique. Dans cette section, nous ne ferons que reprendre les expressions de chacune des composantes énergétiques de ce principe et nous y introduirons les expressions d'interpolation nodale. De cette manière, nous obtiendrons des expressions énergétiques approximatives et discrètes.

6.3.1 Énergie cinétique T

Nous avons obtenu à la section 4.4.2 l'expression de l'énergie cinétique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu continu

$$T = \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{S_i} \{\dot{u}^{c1}\}^t [Q^i]^t [M_e^{ci}] [Q^i] \{\dot{u}^{c1}\} dS_i \quad (6.21)$$

Nous pouvons exprimer le vecteur vitesse des variables de déplacement à partir de l'approximation nodale de la section 6.2.2

$$\{\dot{u}^{c1}\} = [N_u] \{\dot{U}\} \quad (6.22)$$

En substituant cette expression dans l'expression de l'énergie cinétique, nous obtenons une expression discrète de l'énergie cinétique.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{S_i} \{ \dot{U} \}^t [N_u]^t [Q^i]^t [M_e^{ci}] [Q^i] [N_u] \{ \dot{U} \} dS_i \quad (6.23)$$

6.3.2 Énergie potentielle V

Nous avons vu à la section 5.4.3 que l'énergie potentielle d'une plaque multicouche piézoélectrique comporte trois composantes : l'énergie potentielle élastique, piézoélectrique et diélectrique.

$$V = V_{\text{élastique}} + V_{\text{piézoélectrique}} + V_{\text{diélectrique}} \quad (6.24)$$

Énergie potentielle élastique

Nous avons obtenu à la section 5.4.3 l'expression de l'énergie potentielle élastique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu continu

$$\begin{aligned} V_{\text{élastique}} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{ u^{c1} \}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{ u^{c1} \} \\ & + \left(\bar{z}^{ci^2} h^{ci} + \frac{h^{ci^3}}{12} \right) \{ u^{c1} \}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{ u^{c1} \} \\ & - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{ u^{c1} \}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{ u^{c1} \} \\ & - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{ u^{c1} \}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{ u^{c1} \} \\ & + kh^{ci} \{ u^{c1} \}^t [Q^i]^t [D_{uc}]^t [C_c^{ci}] [D_{uc}] [Q^i] \{ u^{c1} \} dS_i \quad (6.25) \end{aligned}$$

Nous pouvons exprimer le vecteur des variables de déplacement à partir de l'approximation nodale de la section 6.2.2

$$\{u^{c1}\} = [N_u] \{U\} \quad (6.26)$$

En substituant cette expression dans l'expression de l'énergie potentielle élastique, nous obtenons son expression discrète.

$$\begin{aligned} V_{élastique} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] [N_u] \{U\} \\ & + \left(\bar{z}^{ci^2} h^{ci} + \frac{h^{ci^3}}{12} \right) \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] [N_u] \{U\} \\ & - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] [N_u] \{U\} \\ & - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [C_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] [N_u] \{U\} \\ & + kh^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{uc}]^t [C_c^{ci}] [D_{uc}] [Q^i] [N_u] \{U\} dS_i \quad (6.27) \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} [B_{um}^{ci}] &= [D_{um}] [Q^i] [N_u] \\ [B_{uf}^{ci}] &= [D_{uf}] [Q^i] [N_u] \\ [B_{uc}^{ci}] &= [D_{uc}] [Q^i] [N_u] \end{aligned}$$

l'expression discrète de l'énergie potentielle élastique se réduit à

$$\begin{aligned}
V_{\text{élastique}} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \{U\} \\
& + \left(\bar{z}^{ci^2} h^{ci} + \frac{h^{ci^3}}{12} \right) \{U\}^t [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \{U\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \{U\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \{U\} \\
& + kh^{ci} \{U\}^t [B_{uc}^{ci}]^t [C_c^{ci}] [B_{uc}^{ci}] \{U\} dS_i \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Notons que l'expression détaillée des matrices différentielles $[B_u]$ est présentée à l'annexe B.

Énergie potentielle piézoélectrique

Nous avons obtenu à la section 5.4.3 l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu continu

$$\begin{aligned}
V_{\text{piézoélectrique}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} \\
& + h^{ci} \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] \{u^{c1}\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] \{u^{c1}\} dS_i \quad (6.29)
\end{aligned}$$

Nous pouvons exprimer le vecteur des variables de déplacement et de potentiel électrique à partir des approximation nodales de la section 6.2.2

$$\{u^{c1}\} = [N_u] \{U\} \quad (6.30)$$

$$\{\phi^{ci}\} = [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} \quad (6.31)$$

En substituant ces expressions dans l'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique, nous obtenons son expression discrète.

$$\begin{aligned}
V_{\text{piézoélectrique}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \quad \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{um}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} \\
& -\bar{z}^{ci} h^{ci} \quad \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [D_{uf}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} \\
& +h^{ci} \quad \{\Phi^{ci}\}^t [N_\phi]^t [D_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{um}] [Q^i] [N_u] \{U\} \quad (6.32) \\
& -\bar{z}^{ci} h^{ci} \quad \{\Phi^{ci}\}^t [N_\phi]^t [D_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [D_{uf}] [Q^i] [N_u] \{U\} dS_i
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
[B_{um}^{ci}] &= [D_{um}] [Q^i] [N_u] \\
[B_{uf}^{ci}] &= [D_{uf}] [Q^i] [N_u] \\
[B_\phi^{ci}] &= [D_\phi^{ci}] [N_\phi]
\end{aligned}$$

l'expression discrète de l'énergie potentielle piézoélectrique se réduit à

$$\begin{aligned}
V_{\text{piézoélectrique}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \quad \{U\}^t [B_{um}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [B_\phi^{ci}] \{\Phi^{ci}\} \\
& -\bar{z}^{ci} h^{ci} \quad \{U\}^t [B_{uf}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [B_\phi^{ci}] \{\Phi^{ci}\} \\
& +h^{ci} \quad \{\Phi^{ci}\}^t [B_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \{U\} \\
& -\bar{z}^{ci} h^{ci} \quad \{\Phi^{ci}\}^t [B_\phi^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \{U\} dS_i \quad (6.33)
\end{aligned}$$

Notons que les expressions détaillées des matrices différentielles $[B_u]$ et $[B_\phi]$ sont présentées à l'annexe B.

Énergie potentielle diélectrique

Nous avons obtenu à la section 5.4.3 l'expression de l'énergie potentielle diélectrique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu continu

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{\phi^{ci}\}^t [D_\phi^{ci}]^t [d^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] \{\phi^{ci}\} dS_i \quad (6.34)$$

Nous pouvons exprimer le vecteur du potentiel électrique à partir de l'approximation nodale de la section 6.2.2

$$\{\phi^{ci}\} = [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} \quad (6.35)$$

En substituant cette expression dans l'expression de l'énergie potentielle diélectrique, nous obtenons son expression discrète.

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{\Phi^{ci}\}^t [N_\phi]^t [D_\phi^{ci}]^t [d^{ci}]^t [D_\phi^{ci}] [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} dS_i \quad (6.36)$$

En posant

$$[B_\phi^{ci}] = [D_\phi^{ci}] [N_\phi]$$

l'expression discrète de l'énergie potentielle diélectrique se réduit à

$$V_{diélectrique} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{\Phi^{ci}\}^t [B_\phi^{ci}]^t [d^{ci}]^t [B_\phi^{ci}] \{\Phi^{ci}\} dS_i \quad (6.37)$$

6.3.3 Travail W

Nous avons vu à la section 5.4.3 que le travail fait sur une plaque multicouche piézoélectrique peut être de nature mécanique et/ou électrique.

Travail mécanique $W_{méc}$

L'expression du travail mécanique fait sur une plaque multicouche piézoélectrique (section 5.4.4) pour un milieu continu est

$$W_{méc} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} dS_i + \{u^{c1}\}^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (6.38)$$

Nous pouvons exprimer le vecteur des variables de déplacement à partir de l'approximation nodale de la section 6.2.2

$$\{u^{c1}\} = [N_u] \{U\} \quad (6.39)$$

En substituant cette expression dans l'expression du travail mécanique, nous obtenons son expression discrète.

$$W_{méc} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} dS_i + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (6.40)$$

où

- $\{F^{ci}\}$ Force volumique appliquée sur les DDLs de la i^e couche
- $\{f^{ci}\}$ Force surfacique appliquée sur les DDLs de la i^e couche
- $\{P^{ci}\}$ Force ponctuelle appliquée sur les DDLs de la i^e couche

Travail électrique W_{elec}

L'expression du travail électrique fait sur une plaque multicouche piézoélectrique (section 5.4.4) pour un milieu continu est

$$W_{elec} = - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \{\phi^{ci}\}^t \{D^{ci}\} dS_i \quad (6.41)$$

Nous pouvons exprimer le vecteur des variables de potentiel électrique à partir de l'approximation nodale de la section 6.2.2

$$\{\phi^{ci}\} = [N_\phi] \{\Phi^{ci}\} \quad (6.42)$$

En substituant cette expression dans l'expression du travail électrique, nous obtenons son expression discrète.

$$W_{elec} = - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \{\Phi^{ci}\}^t [N_\phi]^t \{D^{ci}\} dS_i \quad (6.43)$$

Finalement, en combinant les expressions du travail mécanique et électrique, nous obtenons l'expression discrète complète du travail fait sur une plaque multicouche.

$$W = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} - \{\Phi^{ci}\}^t [N_\phi]^t \{D^{ci}\} dS_i + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (6.44)$$

6.4 Calcul des matrices élémentaires

Dans cette section, nous reprendrons les expressions discrètes des énergies cinétique et potentielles et du travail fait par les efforts externes pour déterminer l'expression des matrices de masse et de rigidité et du vecteur des efforts externes.

6.4.1 Matrice de masse élémentaire

L'expression de l'énergie cinétique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu discret est donnée par (voir section 6.3.1)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{S_i} \{\dot{U}\}^t [N_u]^t [Q^i]^t [M_e^{ci}] [Q^i] [N_u] \{\dot{U}\} dS_i \quad (6.45)$$

soit

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^t [M] \{\dot{U}\} \quad (6.46)$$

où

$$[M] = \sum_{i=1}^N \rho^{ci} \int_{S_i} [N_u]^t [Q^i]^t [M_e^{ci}] [Q^i] [N_u] dS_i \quad (6.47)$$

est l'expression de la matrice de masse élémentaire du problème.

6.4.2 Matrice de rigidité élémentaire

Rigidité élastique

L'expression de l'énergie potentielle élastique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu discret est donnée par (voir section 6.3.2)

$$\begin{aligned}
 V_{\text{élastique}} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \{U\} \\
 & + \left(\bar{z}^{ci^2} h^{ci} + \frac{h^{ci^3}}{12} \right) \{U\}^t [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \{U\} \\
 & - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \{U\} \\
 & - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \{U\} \\
 & + k h^{ci} \{U\}^t [B_{uc}^{ci}]^t [C_c^{ci}] [B_{uc}^{ci}] \{U\} dS_i
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

soit

$$V_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \{U\}^t [K_{uu}] \{U\} \tag{6.49}$$

où

$$\begin{aligned}
 [K_{uu}] = & \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \\
 & + \left(\bar{z}^{ci^2} h^{ci} + \frac{h^{ci^3}}{12} \right) [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \\
 & - \bar{z}^{ci} h^{ci} [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \\
 & - \bar{z}^{ci} h^{ci} [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \\
 & + k h^{ci} [B_{uc}^{ci}]^t [C_c^{ci}] [B_{uc}^{ci}] dS_i
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

est l'expression de la composante de la matrice de rigidité élémentaire due à l'élasticité.

Afin de modéliser l'amortissement structural des couches viscoélastiques à l'intérieur de la plaque multicouche, un facteur de perte η (ou coefficient d'amortissement structural) est ajouté au module de rigidité à l'intérieur des matrices des constantes élastiques $[C]$.

$$E = E(1 + j\eta) \quad (6.51)$$

La composante réelle (E) représente la rigidité structurale alors que la composante imaginaire ($j\eta E$) représente l'amortissement structural. Notons que ce modèle d'amortissement convient seulement en régime harmonique. Dans ce cas, l'expression de la composante de la matrice de rigidité élémentaire due à l'élasticité devient complexe

$$\begin{aligned} [K_{uu}]^* &= \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} & [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}]^* [B_{um}^{ci}] \\ &+ \left(\bar{z}^{ci^2} h^{ci} + \frac{h^{ci^3}}{12} \right) & [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}]^* [B_{uf}^{ci}] \\ &- \bar{z}^{ci} h^{ci} & [B_{um}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}]^* [B_{uf}^{ci}] \\ &- \bar{z}^{ci} h^{ci} & [B_{uf}^{ci}]^t [C_{mf}^{ci}]^* [B_{um}^{ci}] \\ &+ kh^{ci} & [B_{uc}^{ci}]^t [C_c^{ci}]^* [B_{uc}^{ci}] dS_i \end{aligned} \quad (6.52)$$

où l'exposant * fait référence à une quantité complexe.

Rigidité piézoélectrique

L'expression de l'énergie potentielle piézoélectrique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu discret est donnée par (voir section 6.3.2)

$$\begin{aligned}
V_{\text{piézoélectrique}} = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [B_{um}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [B_{\phi}^{ci}] \{\Phi^{ci}\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{U\}^t [B_{uf}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [B_{\phi}^{ci}] \{\Phi^{ci}\} \\
& + h^{ci} \{\Phi^{ci}\}^t [B_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] \{U\} \\
& - \bar{z}^{ci} h^{ci} \{\Phi^{ci}\}^t [B_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] \{U\} dS_i \quad (6.53)
\end{aligned}$$

soit

$$V_{\text{piézoélectrique}} = \frac{1}{2} \{U\}^t [K_{u\phi}] \{\Phi^{ci}\} + \frac{1}{2} \{\Phi^{ci}\}^t [K_{\phi u}] \{U\} \quad (6.54)$$

où

$$\begin{aligned}
[K_{u\phi}] &= -\sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} [B_{um}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [B_{\phi}^{ci}] - \bar{z}^{ci} h^{ci} [B_{uf}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}]^t [B_{\phi}^{ci}] dS_i \\
[K_{\phi u}] &= -\sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} [B_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [B_{um}^{ci}] - \bar{z}^{ci} h^{ci} [B_{\phi}^{ci}]^t [e_{mf}^{ci}] [B_{uf}^{ci}] dS_i \quad (6.55)
\end{aligned}$$

sont les expressions de la composante des matrices de rigidité élémentaires dues à la piézoélectricité.

Rigidité diélectrique

L'expression de l'énergie potentielle diélectrique d'une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu discret est donnée par (voir section 6.3.2)

$$V_{\text{diélectrique}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{\Phi^{ci}\}^t [B_{\phi}^{ci}]^t [d^{ci}]^t [B_{\phi}^{ci}] \{\Phi^{ci}\} dS_i \quad (6.56)$$

soit

$$V_{diélectrique} = \frac{1}{2} \{\Phi^{ci}\}^t [K_{\phi\phi}] \{\Phi^{ci}\} \quad (6.57)$$

où

$$[K_{\phi\phi}] = - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} [B_{\phi}^{ci}]^t [d^{ci}]^t [B_{\phi}^{ci}] dS_i \quad (6.58)$$

est l'expression de la composante de la matrice de rigidité élémentaire due à la diélectricité.

Finalement, en combinant chacune des composantes de la matrice de rigidité, nous obtenons une matrice de rigidité élémentaire construite de la façon suivante

$$[K]^* = \begin{bmatrix} K_{uu}^* & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Le terme K_{uu}^* caractérise la composante élastique de la structure alors que le terme $K_{\phi\phi}$ caractérise la composante électrique. Le couplage entre les deux composantes est caractérisé par les termes $K_{u\phi}$ et $K_{\phi u}$.

6.4.3 Vecteur de force élémentaire

Force mécanique

L'expression du travail mécanique fait sur une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu discret est donnée par (voir section 6.3.3)

$$W_{méc} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} dS_i + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (6.60)$$

soit

$$W_{méc} = \{U\}^t \{F\} \quad (6.61)$$

où

$$\{F\} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} h^{ci} [N_u]^t [Q^i]^t \{F^{ci}\} + [N_u]^t [Q^i]^t \{f^{ci}\} dS_i + \{U\}^t [N_u]^t [Q^i]^t \{P^{ci}\} \quad (6.62)$$

est l'expression de la composante mécanique du vecteur force élémentaire

Force électrique

L'expression du travail électrique fait sur une plaque multicouche piézoélectrique pour un milieu discret est donnée par (voir section 6.3.3)

$$W_{élec} = - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \{\Phi^{ci}\}^t [N_\phi]^t \{D^{ci}\} dS_i \quad (6.63)$$

soit

$$W_{élec} = \{\Phi^{ci}\}^t \{Q\} \quad (6.64)$$

où

$$\{Q\} = - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} [N_\phi]^t \{D^{ci}\} dS_i \quad (6.65)$$

est l'expression de la composante électrique du vecteur force élémentaire

Finalement, en combinant chacune des composantes du vecteur de force, nous obtenons un vecteur de force globale construit de la façon suivante

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (6.66)$$

Les vecteurs et les matrices élémentaires sont donnés par des intégrales qui doivent être évaluées numériquement dans la majorité des cas. En fait, chaque terme du vecteur ou de la matrice fait l'objet d'une intégration numérique ou quadrature. La quadrature de Gauss est un moyen efficace d'évaluer l'intégration d'une fonction dont les valeurs sont connues en des points équidistants. Le nombre minimal de points de Gauss nécessaires pour l'intégration numérique exacte d'un polynôme dépend de l'ordre de ce polynôme. Pour intégrer exactement un polynôme d'ordre $(2n - 1)$ en ξ et d'ordre $(2m - 1)$ en η , au moins $n \times m$ points de Gauss sont nécessaires. Trois par trois points de Gauss sont donc nécessaires pour intégrer exactement les polynômes de la famille de Serendip d'un élément de plaque à 8 noeuds. On parle d'intégration réduite lorsqu'on utilise un nombre de points d'intégration inférieur à celui qui conduit à une quadrature exacte. La composante de cisaillement de la matrice de rigidité élastique a été sous-intégrée (seulement 2×2 points de Gauss) afin de prévenir le phénomène de blocage en cisaillement.

6.5 Conclusion

Les expressions des matrices élémentaires, soit les matrices de masse, de rigidité et le vecteur des forces ont été développées. Une fois les matrices et les vecteurs élémentaires obtenus, il est possible de les assembler pour former des matrices et des vecteurs globaux représentant des structures de géométrie quelconque. Par la suite, il est possible d'en faire une analyse modale, statique ou dynamique. Ces notions sont présentées au chapitre suivant.

Chapitre 7

Analyse de plaques multicouches par la méthode des éléments finis

7.1 Introduction

Ce chapitre présente les équations de mouvement régissant le comportement modal et dynamique de structures à plusieurs degrés de liberté. Ce chapitre est divisé en deux sections : analyse d'une plaque élastique et analyse d'une plaque piézoélectrique. Les expressions des matrices et des vecteurs élémentaires ont été développées au chapitre précédent. Pour construire les matrices et les vecteurs globaux, on procède à l'assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires. La technique d'assemblage des matrices est très courante et ne sera pas traitée dans ce document. Le lecteur peut retrouver cette information dans la plupart des ouvrages de base en éléments finis. À partir des équations de mouvement présentées dans ce chapitre, nous serons en mesure d'obtenir la réponse modale et dynamique d'une structure composée de plusieurs éléments de plaque multicouche.

7.2 Analyse d'une plaque élastique et viscoélastique

Cette section présente les équations de mouvement régissant le comportement modal et dynamique d'une plaque élastique et viscoélastique. La méthode de l'énergie de déformation modale MSE ("Modal Strain Energy method") sera introduite comme outil de calcul de l'amortissement modal équivalent. Finalement, la vitesse quadratique moyenne sera introduite comme variable caractéristique du comportement dynamique d'une plaque multicouche.

7.2.1 Analyse modale

L'analyse modale caractérise la vibration libre d'une structure. Elle permet de déterminer les fréquences de vibration (valeurs propres) et les déformées modales (vecteurs propres) de la structure.

Équation de mouvement

La vibration libre d'une structure est obtenue lorsqu'aucune force n'est appliquée sur celle-ci. La forme discrétisée de l'équation différentielle décrivant la vibration libre d'une plaque multicouche (ou autre structure) est :

$$[M] \{\ddot{u}^*(t)\} + [K_{uu}^*] \{u^*(t)\} = \{0\} \quad (7.1)$$

où la matrice de rigidité $[K_{uu}^*]$ et le vecteur des déplacements $\{u^*(t)\}$ sont complexes si la plaque multicouche possède des couches amortissantes (viscoélastiques). Il est possible de transformer cette dernière équation en un problème aux valeurs propres en supposant une solution de la forme suivante :

$$\{u^*(t)\} = \{\Psi^{*(r)}\} e^{j\hat{\omega}^{*(r)}t} \quad (7.2)$$

où $\{\Psi^{*(r)}\}$ et $\hat{\omega}^{*(r)}$ représentent les r^e vecteurs propres et valeurs propres complexes que l'on peut exprimer comme suit :

$$\{\Psi^{*(r)}\} = \{\Psi_R^{(r)}\} + j \{\Psi_I^{(r)}\} \quad (7.3)$$

$$\hat{\omega}^{*(r)} = \hat{\omega}_R^{(r)} \sqrt{1 + j\eta^{(r)}} \quad (7.4)$$

Notons que cette approche utilisant des valeurs complexes pour les valeurs propres et les vecteurs propres n'est pas habituelle. En général, nous nous intéressons uniquement à la valeur réelle des valeurs propres et des vecteurs propres. Cette approche a été préférée dans le cadre de cet ouvrage pour faciliter l'introduction de la méthode MSE à la section suivante.

En substituant la forme complexe de la solution du vecteur $\{u^*(t)\}$ à l'intérieur de l'équation de mouvement, nous obtenons le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left([K_{uu}^*] - \hat{\omega}^{*(r)2} [M] \right) \{\Psi^{*(r)}\} e^{j\hat{\omega}^{*(r)}t} = \{0\} \quad (7.5)$$

soit

$$\left([K_{uu}^*] - \hat{\omega}^{*(r)2} [M] \right) \{\Psi^{*(r)}\} = \{0\} \quad (7.6)$$

Nous savons que le nombre de solutions possibles à cette équation est égal à la dimension des matrices $[K_{uu}^*]$ et $[M]$. Chacune de ces solutions représente les valeurs propres $\hat{\omega}^{*(r)}$ et les vecteurs propres $\{\Psi^{*(r)}\}$ de la structure. Notons que la résolution d'un problème aux

valeurs propres complexes est très coûteuse numériquement. Le temps de calcul nécessaire peut être jusqu'à 3 fois celui de la même structure sans amortissement [30]. Si on néglige l'effet de l'amortissement, le problème aux valeurs propres se réduit à :

$$([K_{uu}] - \hat{\omega}^{(r)2} [M]) \{\Psi^{(r)}\} = \{0\} \quad (7.7)$$

Méthode de l'énergie de déformation modale (MSE)

La méthode MSE ("Modal Strain Energy method") est une approche permettant d'exprimer la réponse d'une structure à partir de ses modes de vibration réels si des facteurs d'amortissement modaux appropriés sont introduits dans l'équation de mouvement découplée de la structure. [30]

En négligeant la composante imaginaire de la matrice de rigidité $[K_{uu}^*]$, les valeurs propres $\hat{\omega}^{(r)}$ et les vecteurs propres $\{\Psi^{(r)}\}$ seront réels et respecteront la relation suivante :

$$\hat{\omega}^{(r)2} = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_{uu}] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^t [M] \{\Psi^{(r)}\}} \quad (7.8)$$

Les indices * ont été supprimés étant donné que les quantités sont réelles.

Ne négligeant pas la composante imaginaire de la matrice de rigidité $[K_{uu}^*]$, les valeurs propres $\hat{\omega}^{*(r)}$ et les vecteurs propres $\{\Psi^{*(r)}\}$ seront complexes. En exprimant le matrice de rigidité de la façon suivante

$$[K_{uu}^*] = [K_R] + j [K_I] \quad (7.9)$$

où les indices R et I font référence à la composante réelle et imaginaire respectivement, la relation entre les valeurs propres et les vecteurs propres devient

$$\hat{\omega}_R^{(r)2} (1 + j\eta^{(r)}) = \frac{\{\Psi^{*(r)}\}^t [K_R] \{\Psi^{*(r)}\}}{\{\Psi^{*(r)}\}^t [M] \{\Psi^{*(r)}\}} + j \frac{\{\Psi^{*(r)}\}^t [K_I] \{\Psi^{*(r)}\}}{\{\Psi^{*(r)}\}^t [M] \{\Psi^{*(r)}\}} \quad (7.10)$$

Une approximation de la valeur des facteurs d'amortissements modaux peut être obtenue en approximant les déformées modales complexes $\{\Psi^{*(r)}\}$ par les déformées modales réelles $\{\Psi^{(r)}\}$ qui sont obtenues en solutionnant le problème aux valeurs propres uniquement avec la composante réelle de la matrice de rigidité. Cette approximation suppose un amortissement faible à l'intérieur de la structure. Suite à cette approximation, nous pouvons écrire

$$\hat{\omega}_R^{(r)2} (1 + j\eta^{(r)}) = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_R] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^t [M] \{\Psi^{(r)}\}} + j \frac{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_I] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^t [M] \{\Psi^{(r)}\}} \quad (7.11)$$

En séparant les composantes réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\hat{\omega}^{(r)2} = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_R] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^t [M] \{\Psi^{(r)}\}} \quad (7.12)$$

$$\eta^{(r)} \hat{\omega}^{(r)2} = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_I] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^t [M] \{\Psi^{(r)}\}} \quad (7.13)$$

Finalement, nous obtenons

$$\eta^{(r)} = \frac{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_I] \{\Psi^{(r)}\}}{\{\Psi^{(r)}\}^t [K_R] \{\Psi^{(r)}\}} \quad (7.14)$$

Cette équation nous permet de calculer rapidement les amortissements modaux équivalents. Essayons maintenant de comprendre la signification de cette équation.

Soit une plaque multicouche contenant N couches. La rigidité de chacune des couches s'exprime comme suit

$$[K_{uu}^{cn*}] = [K_R^{cn}] + j [K_I^{cn}] \quad (7.15)$$

$$= [K_R^{cn}] (1 + j\eta^{cn}) \quad (7.16)$$

où l'indice cn fait référence à la n^e couche. La rigidité de la plaque multicouche est simplement la somme des rigidités de chacune des couches

$$[K_{uu}^*] = \sum_{n=1}^N ([K_R^{cn}] (1 + j\eta^{cn})) \quad (7.17)$$

Par conséquent,

$$[K_R] = \sum_{n=1}^N [K_R^{cn}] \quad (7.18)$$

$$[K_I] = \sum_{n=1}^N (\eta^{cn} [K_R^{cn}]) \quad (7.19)$$

L'énergie totale de déformation d'une plaque multicouche élastique associée à une déformée modale est donnée par

$$V^{(r)} = \sum_{n=1}^N \left(\{ \Psi^{(r)} \}^t [K_R^{cn}] \{ \Psi^{(r)} \} \right) \quad (7.20)$$

$$= \{ \Psi^{(r)} \}^t [K_R] \{ \Psi^{(r)} \} \quad (7.21)$$

L'énergie de déformation attribuable à chacune des couches est donnée par

$$V_{cn}^{(r)} = \{ \Psi^{(r)} \}^t [K_R^{cn}] \{ \Psi^{(r)} \} \quad (7.22)$$

En combinant les 3 dernières équations, nous pouvons exprimer les facteurs d'amortissements modaux (7.14) en fonction des énergies de déformation de chacune des couches

$$\eta^{(r)} = \sum_{n=1}^N \eta^{cn} \frac{V_{cn}^{(r)}}{V^{(r)}} \quad (7.23)$$

où η_{cn} est le facteur d'amortissement modal de la n^e couche alors que $\frac{V_{cn}^{(r)}}{V^{(r)}}$ est la portion d'énergie de déformation modale attribuable à la n^e couche lorsque la plaque multicouche se déforme selon son r^e mode de vibration. Nous pouvons donc conclure que le facteur d'amortissement modal équivalent d'une plaque multicouche est fonction des facteurs d'amortissement et de la portion d'énergie de déformation modale de chacune des couches. Par conséquent, pour obtenir un amortissement élevé à l'intérieur d'une plaque multicouche, il est nécessaire d'avoir une couche ayant un facteur d'amortissement élevé et se déformant considérablement comparativement aux autres couches.

7.2.2 Analyse dynamique

L'analyse dynamique d'une plaque multicouche permet de déterminer sa réponse lorsqu'elle est excitée par une force externe. Il s'agit donc de faire l'étude de la réponse forcée d'une structure.

Équation de mouvement

Pour déterminer la réponse dynamique d'une plaque multicouche, l'équation de mouvement suivante doit être résolue :

$$[M] \{\ddot{u}^*(t)\} + [K_{uu}^*] \{u^*(t)\} = \{F^*(t)\} \quad (7.24)$$

où l'exposant * fait référence à une quantité complexe.

Décomposition modale

Afin de réduire la dimension du problème, il est courant d'utiliser la décomposition modale pour faire l'analyse dynamique d'une structure. Le principe de la décomposition modale est d'exprimer la réponse de la structure en une somme linéaire et pondérée de ses vecteurs propres. Par conséquent, en projetant les matrices de dimension $N \times N$ sur la base modale des n premiers modes de vibration d'une structure, la dimension du problème à résoudre devient $n \times n$.

Soit $[\Psi_n^*]$, une matrice contenant les n premiers modes de la structure. La solution $\{u^*(t)\}$ de la structure peut être exprimée en une somme linéaire et pondérée de ses vecteurs propres

$$\{u^*(t)\} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (1 + j\eta^{(1)}) \Psi_1 & (1 + j\eta^{(2)}) \Psi_2 & \dots & (1 + j\eta^{(n)}) \Psi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q}_1(t) \\ \hat{q}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{q}_n(t) \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

$$\{u^*(t)\} = [\Psi_n^*] \{\hat{q}(t)\} \quad (7.26)$$

où $\{\hat{q}(t)\}$ est le vecteur des coordonnées généralisées. En projetant l'équation de mouvement dynamique de la plaque multicouche (7.24) sur la base de ses n premiers modes de vibration, nous obtenons

$$[\Psi_n^*]^t [M] [\Psi_n^*] \{\ddot{\hat{q}}(t)\} + [\Psi_n^*]^t [K_{uu}^*] [\Psi_n^*] \{\hat{q}(t)\} = [\Psi_n^*]^t \{F^*(t)\} \quad (7.27)$$

En utilisant des vecteurs propres normalisés par rapport à la matrice de masse de la plaque multicouche, les simplifications suivantes peuvent être faites

$$\begin{aligned}
[\Psi_n^*]^t \{F^*(t)\} &= \begin{Bmatrix} (1 + j\eta^{(1)})F_{G_1}(t) \\ \vdots \\ (1 + j\eta^{(i)})F_{G_i}(t) \\ \vdots \\ (1 + j\eta^{(n)})F_{G_n}(t) \end{Bmatrix} = [F_G^*(t)] \\
[\Psi_n^*]^t [M] [\Psi_n^*] &= \begin{bmatrix} 1 + j\eta^{(1)} & & \dots & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & \vdots & & 1 + j\eta^{(i)} & \vdots \\ & & & & \ddots \\ 0 & & \dots & & 1 + j\eta^{(n)} \end{bmatrix} = [I^*] \\
[\Psi_n^*]^t [K_{uu}^*] [\Psi_n^*] &= \begin{bmatrix} \hat{\omega}_R^{(1)^2} (1 + j\eta^{(1)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \hat{\omega}_R^{(n)^2} (1 + j\eta^{(n)}) \end{bmatrix} = [K_{uu_G}^*]
\end{aligned}$$

et, l'équation de mouvement dynamique devient

$$[I^*] \{\ddot{\hat{q}}(t)\} + [K_{uu_G}^*] \{\hat{q}(t)\} = \{F_G^*\} \quad (7.28)$$

Ainsi, le problème de dimension initiale $N \times N$ a été réduit à n équations linéaires découplées

$$(1 + j\eta^{(i)}) \ddot{\hat{q}}_i(t) + (1 + j\eta^{(i)}) \hat{\omega}_R^{(i)^2} \hat{q}_i(t) = (1 + j\eta^{(i)}) F_{G_i}(t) \quad i = 1, n \quad (7.29)$$

soit

$$\ddot{\hat{q}}_i(t) + \hat{\omega}_R^{(i)^2} \hat{q}_i(t) = F_{G_i}(t) \quad i = 1, n \quad (7.30)$$

L'équation précédente est l'équation de mouvement d'un système à 1 DDL. En solutionnant $\hat{q}_i(t)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, nous pouvons retrouver très rapidement la réponse dynamique de la plaque multicouche. Notons que pour résoudre les coordonnées généralisées, la base réelle sans amortissement uniquement est nécessaire. De plus, la méthode de décomposition modale n'est possible que si l'on assume une valeur constante du coefficient d'amortissement η de chacune des couches (matrice de rigidité constante). Par conséquent, pour faire l'analyse d'une plaque possédant une couche viscoélastique dont l'amortissement varie avec la fréquence, une autre méthode de résolution devra être adoptée.

Vitesse quadratique moyenne

Par définition, l'expression de la vitesse quadratique moyenne d'une plaque est

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{2A} \int_A |\dot{w}^2| dA \quad (7.31)$$

où A est la surface vibrante de la plaque. Sachant que la vitesse transverse $\{\dot{w}\}$ d'une plaque multicouche s'exprime comme suit

$$\{\dot{w}^*\} = j\omega^* \{w^*\} e^{j\omega^* t} \quad (7.32)$$

nous pouvons exprimer la vitesse quadratique moyenne à la surface d'une plaque multicouche sous forme matricielle comme suit

$$\langle \dot{w}^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^{*2} \int_A [w^*]^t [w^*] dA \quad (7.33)$$

Notons que pour des mouvements de plaque en flexion, la vitesse quadratique moyenne peut être approximée par l'énergie cinétique (à une constante de masse près). En effet,

dans ce cas, les vitesses dans le plan de la plaque et les effets de rotation sont négligeables comparativement aux vitesses transverses.

7.3 Analyse d'une plaque piézoélectrique

Cette section présente les équations de mouvement régissant le comportement modale et dynamique d'une plaque piézoélectrique. Nous verrons qu'il existe deux familles de résonances piézoélectriques correspondant aux deux types de conditions aux limites électriques. La vitesse quadratique moyenne sera introduite comme variable mécanique caractéristique du comportement dynamique de la plaque piézoélectrique alors que la tension surfacique moyenne sera introduite comme variable électrique caractéristique.

7.3.1 Analyse modale

L'analyse modale caractérise la vibration libre d'une structure. Elle permet de déterminer les fréquences de vibration (valeurs propres) et les déformées modales (vecteurs propres) de la structure.

Équation de mouvement

Pour déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres d'une structure piézoélectrique, l'équation suivante doit être résolue :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^*(t) \\ \ddot{\phi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}^* & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^*(t) \\ \phi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

Notons que les efforts externes sont nuls lors d'une analyse modale. Pour transformer l'équation de mouvement en un problème aux valeurs propres, il suffit de substituer les

formes de solution suivantes

$$\{u^*(t)\} = \{\Psi^{*(r)}\} e^{j\hat{\omega}^{*(r)}t} \quad (7.35)$$

$$\{\Phi(t)\} = \{\hat{\Phi}^{(r)}\} e^{j\hat{\omega}^{*(r)}t} \quad (7.36)$$

Alors, nous obtenons

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu}^* & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \hat{\omega}^{*(r)2} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi^{*(r)} \\ \hat{\Phi}^{(r)} \end{Bmatrix} e^{j\hat{\omega}^{*(r)}t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$

Le nombre de solutions possibles à cette équation est égal à la dimension des matrices de rigidité et de masse. Chacune des ces solutions représente les vecteurs propres $\{\Psi^{*(r)}\}$ et $\{\hat{\Phi}^{(r)}\}$ et les valeurs propres $\hat{\omega}^{*(r)}$. Les matrices de rigidités $[K]$ et de masse $[M]$ ont été assemblées sans tenir compte des conditions aux limites. Dans l'analyse d'une structure piézoélectrique, nous avons des conditions aux limites essentielles (imposition des déplacements et/ou des potentiels électriques) et des conditions aux limites naturelles (imposition des forces et/ou des charges électriques). Les conditions aux limites naturelles sont tenues en compte lors de l'évaluation du vecteur des efforts externes. Cependant, les conditions aux limites essentielles doivent être tenues en compte suite à l'assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires. Supposons que l'équation de mouvement du système d'éléments finis avant l'imposition des conditions aux limites essentielles est

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu}^{ff*} & K_{uu}^{fl*} & K_{u\phi}^{fl} & K_{u\phi}^{ff} \\ K_{uu}^{lf*} & K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} & K_{u\phi}^{lf} \\ K_{\phi u}^{lf} & K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} & K_{\phi\phi}^{lf} \\ K_{\phi u}^{ff} & K_{\phi u}^{fl} & K_{\phi\phi}^{fl} & K_{\phi\phi}^{ff} \end{bmatrix} - \omega^{*(r)2} \begin{bmatrix} M^{ff} & M^{fl} & 0 & 0 \\ M^{lf} & M^{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi^{f*(r)} \\ \Psi^{l*(r)} \\ \hat{\Phi}^{l(r)} \\ \hat{\Phi}^{f(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

où l'exposant f désigne les DDLs fixés (connus) alors que l'exposant l désigne les DDLs libres. En fixant les DDLs $\{\Psi^{f^{*(r)}}\}$ et $\{\hat{\Phi}^{f^{*(r)}}\}$ à 0, l'équation de mouvement précédente devient :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} \\ K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix} - \hat{\omega}^{*(r)2} \begin{bmatrix} M^{ll} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi^{l^{*(r)}} \\ \hat{\Phi}^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

L'équation de mouvement précédente peut être séparée en deux équations distinctes (équations élastique et électrique).

$$\begin{bmatrix} K_{uu}^{ll*} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{u\phi}^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Phi}^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} - \hat{\omega}^{*(r)2} \begin{bmatrix} M^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (7.40)$$

$$\begin{bmatrix} K_{\phi u}^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\Phi}^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (7.41)$$

Pour diminuer la taille du système à résoudre lors de l'analyse modale, nous pouvons condenser les potentiels électriques libres $\{\hat{\Phi}^{l^{*(r)}}\}$ à l'intérieur de l'équation élastique sachant que

$$\begin{Bmatrix} \hat{\Phi}^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u}^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} \quad (7.42)$$

L'équation du mouvement modale se réduit donc à

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{K}^{ll*} \end{bmatrix} - \hat{\omega}^{*(r)2} \begin{bmatrix} M^{ll} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi^{l^{*(r)}} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (7.43)$$

où

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}^{ll*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu}^{ll*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{u\phi}^{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{\phi u}^{ll} \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

Il existe deux familles de résonances piézoélectriques correspondant aux deux types de conditions aux limites électriques. En effet, nous pouvons laisser le potentiel électrique libre $\{\Phi^{l(r)}\}$ ou le forcer à être nul $\{\Phi^{l(r)}\} = 0$. Nous verrons qu'une famille de résonances sera obtenue lorsque les électrodes de la structure seront en circuit ouvert (potentiel électrique libre) tandis que l'autre famille sera obtenue lorsque les électrodes seront court-circuitées (potentiel électrique nul).

Solution électrodes ouvertes

Pour obtenir la solution modale d'une plaque piézoélectrique à électrodes ouvertes, nous devons laisser le potentiel électrique libre. Dans ce cas, le problème aux valeurs propres suivant doit être résolu :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} \\ K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix} - \hat{\omega}^{*(r)2} \begin{bmatrix} M^{ll} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Psi^{l*(r)} \\ \hat{\Phi}^{l(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.45)$$

ou l'équivalent

$$\left([\tilde{K}^{ll*}] - \hat{\omega}^{*(r)2} [M^{ll}] \right) \{\Psi^{l*(r)}\} = 0 \quad (7.46)$$

Les vecteurs propres et les fréquences propres peuvent donc être obtenus en résolvant l'une des deux équations précédentes à l'aide d'un algorithme de calcul de valeurs propres et vecteurs propres approprié.

Solution électrodes fermées

Une plaque piézoélectrique à électrodes fermées est obtenue en court-circuitant les deux surfaces de la plaque. Dans ce cas, nous annulons la valeur du potentiel électrique dans

la direction de l'épaisseur de la plaque ($\{\Phi^{l(r)}\} = 0$). Par conséquent, le comportement de la plaque piézoélectrique devient identique à celui d'une plaque purement élastique et le problème aux valeurs propres de la section précédente se réduit à

$$\left([K_{uu}^{l*}] - \hat{\omega}^{*(r)^2} [M^{ll}] \right) \{ \Psi^{l*(r)} \} = \{ 0 \} \quad (7.47)$$

Notons qu'une plaque purement élastique est moins rigide qu'une plaque piézoélectrique. Par conséquent, les valeurs propres d'une plaque piézoélectrique à électrodes fermées seront plus faibles que celles d'une plaque piézoélectrique à électrodes ouvertes.

7.3.2 Analyse dynamique

L'analyse dynamique permet d'étudier la vibration d'une structure sous l'effet d'une excitation externe en déterminant sa réponse. Pour le cas d'une plaque piézoélectrique, nous nous intéresserons à l'excitation induite par un actionneur et à la réponse fournie par un capteur. La vitesse quadratique moyenne sera utilisée comme indicateur de vibration induite par l'actionneur piézoélectrique alors que la tension moyenne sera utilisée comme indicateur de la réponse fournie par le capteur piézoélectrique.

Équation de mouvement

Pour déterminer la réponse dynamique d'une plaque multicouche piézoélectrique, l'équation suivante doit être résolue :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^*(t) \\ \ddot{\phi}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}^* & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^*(t) \\ \phi(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^*(t) \\ Q(t) \end{Bmatrix} \quad (7.48)$$

où l'exposant * fait référence à une quantité complexe. Nous avons vu lors de l'analyse modale que les matrices de rigidité $[K]$ et de masse $[M]$ ainsi que les vecteurs de force $\{F(t)\}$ et $\{Q(t)\}$ ont été assemblés sans tenir compte des conditions limites. Les éléments piézoélectriques peuvent être utilisés soit comme capteur, via l'effet direct de la piézoélectricité, ou soit comme actionneur, via l'effet inverse de la piézoélectricité. Dépendant de leur utilisation, les conditions aux limites électriques imposées varieront d'une composante piézoélectrique à une autre. Supposons que l'équation de mouvement du système d'éléments finis avant l'imposition des conditions aux limites essentielles est

$$\begin{bmatrix} M^{ff} & M^{fl} & 0 & 0 \\ M^{lf} & M^{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^{f*}(t) \\ \ddot{u}^{l*}(t) \\ \ddot{\Phi}^l(t) \\ \ddot{\Phi}^f(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}^{ff*} & K_{uu}^{fl*} & K_{u\phi}^{fl} & K_{u\phi}^{ff} \\ K_{uu}^{lf*} & K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} & K_{u\phi}^{lf} \\ K_{\phi u}^{lf} & K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} & K_{\phi\phi}^{lf} \\ K_{\phi u}^{ff} & K_{\phi u}^{fl} & K_{\phi\phi}^{fl} & K_{\phi\phi}^{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{f*}(t) \\ u^{l*}(t) \\ \Phi^l(t) \\ \Phi^f(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{f*}(t) \\ F^{l*}(t) \\ Q^l(t) \\ Q^f(t) \end{Bmatrix} \quad (7.49)$$

où l'exposant f désigne les DDLs fixés (connus) alors que l'exposant l désigne les DDLs libres. En résolvant pour les DDLs libres $\{u^{l*}(t)\}$ et $\{\Phi^l(t)\}$, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} M^{lf} & M^{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^{f*}(t) \\ \ddot{u}^{l*}(t) \\ \ddot{\Phi}^l(t) \\ \ddot{\Phi}^f(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}^{lf*} & K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} & K_{u\phi}^{lf} \\ K_{\phi u}^{lf} & K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} & K_{\phi\phi}^{lf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{f*}(t) \\ u^{l*}(t) \\ \Phi^l(t) \\ \Phi^f(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{l*}(t) \\ Q^l(t) \end{Bmatrix} \quad (7.50)$$

Connaissant la valeur des DDLs imposés $\{u^{f*}(t)\}$ et $\{\Phi^f(t)\}$, nous pouvons les isoler et les transférer du même côté que le vecteur force

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} M^{ll} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^{l*}(t) \\ \ddot{\Phi}^l(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} \\ K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{l*}(t) \\ \Phi^l(t) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F^{l*}(t) \\ Q^l(t) \end{Bmatrix} \\
- \begin{Bmatrix} [M^{lf}] \{ \ddot{u}^{f*}(t) \} + [K_{uu}^{lf*}] \{ u^{f*}(t) \} + [K_{u\phi}^{lf}] \{ \Phi^f(t) \} \\ [K_{\phi u}^{lf}] \{ u^{f*}(t) \} + [K_{\phi\phi}^{lf}] \{ \Phi^f(t) \} \end{Bmatrix} &
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Remarquons que l'imposition de la valeur de certains DDLs revient à modifier le vecteur des forces externes. En fait, le nouveau vecteur de force obtenu est celui qui permet de déformer la structure de manière à obtenir les valeurs des DDL imposés. Notons par ailleurs que le vecteur des potentiels électriques imposés $\{\Phi^f(t)\}$ représente les tensions appliquées aux bornes des actionneurs piézoélectriques. Quant aux capteurs piézoélectriques, leurs tensions électriques sont obtenues en solutionnant le vecteur des tensions électriques libres $\{\Phi^l(t)\}$.

Excitation par un actionneur piézoélectrique

Supposons une plaque élastique ne possédant aucun capteur piézoélectrique excitée par des actionneurs piézoélectriques. Dans ce cas, la dimension du vecteur des potentiels électriques libres $\{\Phi^l(t)\}$ est nulle étant donné qu'aucun capteur n'est intégré à la structure. De plus, supposons qu'aucun déplacement n'est imposé à la structure. Par conséquent, la deuxième ligne de l'équation (7.51) disparaît et l'équation de mouvement de la plaque devient

$$[M^{ll}] \{ \ddot{u}^{l*}(t) \} + [K_{uu}^{ll*}] \{ u^{l*}(t) \} = \{ F^{l*}(t) \} - [K_{u\phi}^{lf}] \{ \Phi^f(t) \} \tag{7.52}$$

Nous voyons donc que l'excitation d'une plaque à partir d'actionneurs piézoélectriques revient à modifier le vecteur force de l'équation de mouvement. La valeur des tensions imposées aux bornes des actionneurs sont stockées à l'intérieur du vecteur des potentiels électriques forcés $\{\Phi^f\}$. La dimension de ce vecteur est égale au nombre de tensions imposées à l'intérieur de la structure. En solutionnant l'équation précédente, nous pouvons facilement déterminer la vitesse quadratique de la plaque à partir de l'équation (7.33).

Réponse d'un capteur piézoélectrique

Supposons maintenant une plaque élastique possédant uniquement des capteurs piézoélectriques. Dans ce cas, la dimension du vecteur des potentiels électriques forcés $\{\Phi^f\}$ est nulle étant donné qu'aucun actionneur n'est intégré à la structure. De plus, supposons qu'aucun déplacement n'est imposé à la structure. Par conséquent, le vecteur force ne comporte que des efforts d'excitation mécaniques. De plus, aucune charge n'est accumulée sur les capteurs piézoélectriques ($\{Q^l\} = 0$). L'équation de mouvement de la plaque (7.51) devient alors

$$\begin{bmatrix} M^{ll} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}^{l*}(t) \\ \ddot{\Phi}^l(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}^{ll*} & K_{u\phi}^{ll} \\ K_{\phi u}^{ll} & K_{\phi\phi}^{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{l*}(t) \\ \Phi^l(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{l*}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.53)$$

La valeur des tensions obtenues aux bornes des capteurs piézoélectriques $\{\Phi^l(t)\}$ sont obtenues en résolvant l'équation précédente. La dimension du vecteur $\{\Phi^l(t)\}$ est égale au nombre de tensions lues à l'intérieur de la structure. En calculant la moyenne des tensions aux bornes d'un même capteur, nous obtenons la tension moyenne à la surface de ce capteur.

7.4 Conclusion

Une revue des équations de mouvement pour l'analyse modale et dynamique d'une plaque multicouche élastique, viscoélastique et piézoélectrique a été faite. De plus, la méthode MSE a été introduite pour déterminer l'amortissement modal équivalent de plaques multicouches amorties par des couches amortissantes. Finalement, les équations de mouvement des actionneurs et des capteurs piézoélectriques été présentées. Toutes ces équations seront utilisées au chapitre suivant pour valider chacune des composantes de l'élément multicouche développé.

Chapitre 8

Validation de l'élément fini multicouche

8.1 Introduction

À partir des notions présentées aux chapitres précédents, un programme d'éléments finis a été développé afin de valider l'exactitude de la formulation. Ce chapitre traite de la validation de l'élément fini multicouche. Le but de ce chapitre est de démontrer que l'élément fini développé se comporte correctement. La procédure de validation se divise en trois étapes : validation de la composante élastique, de la composante viscoélastique et de la composante piézoélectrique. Pour chacune des étapes, une comparaison sera faite entre les résultats de modèles analytiques et/ou d'éléments finis et notre modèle. Ces résultats seront obtenus suite à une analyse modale et dynamique pour des conditions aux limites libres, simplement appuyées et encastées.

8.2 Validation de la composante élastique

Cette section présente les résultats de la validation de la composante élastique de l'élément fini de plaque multicouche. Premièrement, des analyses modale et dynamique ont été réalisées pour un modèle de plaque simple aux conditions aux limites libres, simplement appuyées et encastées. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus à partir d'un modèle d'éléments finis solides (MSC/NASTRAN). Finalement, notre modèle de plaque a été scindé en plusieurs couches (3 et 5) d'épaisseur totale identique à celle du modèle initial. Les résultats de l'analyse modale et dynamique ont été comparés entre eux. Ceci a permis de valider les conditions de continuité aux interfaces de chacune des couches.

8.2.1 Plaque monocouche

Le modèle de plaque monocouche utilisé pour valider la composante élastique est représenté à la figure 8.1 alors que les propriétés mécaniques du modèle sont présentées au tableau 8.1. Le maillage de la plaque était constitué de 8×8 éléments de plaque quadratiques à 8 noeuds. Un maillage tridimensionnel composé de $8 \times 8 \times 2$ éléments solides quadratiques à 20 noeuds (CHEXA) a été construit et analysé à l'aide du programme MSC/NASTRAN pour valider les résultats. Les éléments finis solides n'imposent aucune hypothèse sur le mouvement des corps élastiques. Ils sont basés sur la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. Par conséquent, les éléments finis solides sont les éléments les plus naturels et les plus représentatifs du comportement des corps élastiques. C'est pour cette raison que nous les avons utilisé comme outil de comparaison.

Analyse modale

Une analyse modale a été réalisée à la fois avec les modèles d'éléments finis bidimensionnel et tridimensionnel pour différentes conditions aux limites sur le contour de la plaque. Les 10 premières fréquences de vibration ont été déterminées (voir tableaux 8.2, 8.3 et 8.4). Pour

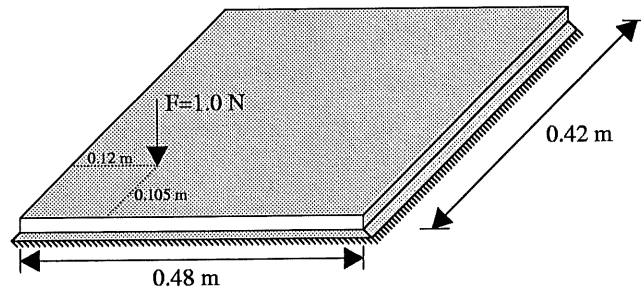


Figure 8.1: Schéma d'une plaque monocouche

TABLEAU 8.1: PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES D'UNE PLAQUE MONOCOUCHE

Propriétés mécaniques	Valeurs
E : Module Young	68.5 <i>GPa</i>
ρ : Densité	2680.0 <i>kg/m³</i>
h : Épaisseur	3.22 <i>mm</i>
\bar{z} : Position plan neutre	0.00 <i>mm</i>
ν : Coefficient Poisson	0.33 (--)
η : Amortissement	0.005 (--)

l'analyse de la plaque aux conditions aux limites simplement appuyées, un deuxième modèle de validation a été utilisé. Ce modèle analytique a été développé et validé expérimentalement à l'intérieur du GAUS [20].

TABLEAU 8.2: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE MONOCOUCHE AUX CONDITIONS AUX LIMITES LIBRES

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	0.018	0.000	N/A
2	0.015	0.000	N/A
3	0.014	0.000	N/A
4	0.012	0.000	N/A
5	0.007	0.000	N/A
6	0.006	0.000	N/A
7	51.261	51.725	0.90
8	69.882	71.181	1.86
9	100.052	101.985	1.93
10	125.842	128.260	1.92

TABLEAU 8.3: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE MONO-COUCHE AUX CONDITIONS AUX LIMITES SIMPLEMENT APPUYÉES

Mode	Analytique (Hz)	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	78.270	77.930	77.931	0.00
2	180.092	179.635	179.747	0.06
3	211.262	210.793	210.950	0.07
4	313.083	312.812	313.213	0.13
5	349.794	349.166	350.263	0.31
6	432.914	432.036	433.585	0.36
7	482.785	484.742	486.536	0.37
8	534.735	535.617	538.003	0.45
9	587.377	587.791	593.129	0.91
10	704.437	718.897	723.670	0.66

TABLEAU 8.4: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE MONO-COUCHE AUX CONDITIONS AUX LIMITES ENCASTRÉES

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	147.670	144.431	-2.19
2	278.906	272.859	-2.17
3	326.117	319.234	-2.11
4	460.926	450.416	-2.28
5	488.985	480.102	-1.82
6	600.169	590.313	-1.64
7	689.826	675.378	-2.09
8	750.455	736.767	-1.82
9	773.332	766.858	-0.84
10	964.898	960.515	-0.45

Les résultats obtenus témoignent de la précision et de la validité de la composante élastique de l'élément fini multicouche développé. L'erreur représente l'écart entre les résultats de la MEF-2D et ceux de la MEF-3D. Remarquons que, pour le cas de la plaque libre et simplement appuyée, la valeur des fréquences de vibration obtenues par le modèle tridimensionnel sont légèrement inférieures à celles obtenues par le modèle bidimensionnel. Ceci s'explique facilement étant donné que le modèle tridimensionnel est moins restrictif sur le mouvement de la plaque et par conséquent, moins rigide. Cependant, pour le cas de la plaque encastree,

les fréquences de vibration obtenues par le modèle 3D sont légèrement supérieures à celles du modèle 2D. Ceci est probablement dû à une légère différence de rigidité au niveau de l'imposition des conditions aux limites (encastrement). En ce qui concerne le modèle analytique, les fréquences de vibrations obtenues sont supérieures à celles obtenues par les modèles d'éléments finis. Ceci s'explique par le fait que le modèle analytique ne tient pas compte de l'effet du cisaillement (théorie de Kirchoff). Notons que pour la plaque aux conditions aux limites libres, les 6 premières fréquences de vibration sont nulles et représentent les 6 modes rigides de la plaque.

Analyse dynamique

Une analyse dynamique a été réalisée à la fois avec le modèle d'éléments finis bidimensionnel et le modèle analytique avec des conditions aux limites simplement appuyées. Une force unitaire a été appliquée à une position quelconque de la plaque afin d'exciter le plus de modes possibles. La vitesse quadratique de la plaque a été utilisée comme résultat de comparaison. La figure 8.2 présente la vitesse quadratique de la plaque obtenue par les deux modèles de plaque sur la plage fréquentielle de 0-500 Hertz. Les 10 premiers modes de vibration de la plaque ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale.

Rappelons que le maillage de la plaque est constitué de 8 x 8 éléments de plaque quadratiques. Ce raffinement du maillage nous permet d'obtenir une bonne précision pour tous les modes dont le nombre de demi-longueurs d'onde est inférieur ou égal à 3.

8.2.2 Plaque multicouche

Afin de valider les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement à l'interface de chacune des couches, nous avons scindé la plaque élastique de la section précédente en plusieurs couches (3 et 5 couches). L'épaisseur totale et les propriétés

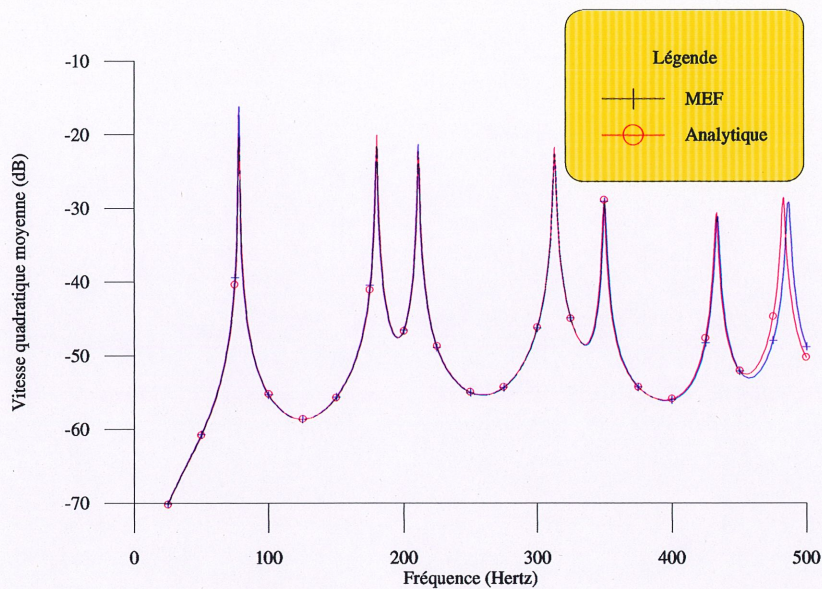


Figure 8.2: Vitesse quadratique moyenne d'une plaque monocouche aux conditions aux limites simplement appuyées

mécaniques de chacune des plaques scindées ont été gardées constantes. Par conséquent, chacune des plaques scindées devait avoir les mêmes propriétés modales et dynamiques afin de valider les conditions de continuité. Le maillage utilisé comportait le même nombre d'éléments que celui de la section précédente, soit 8 x 8 éléments.

Analyse modale

Une analyse modale a été réalisée avec les deux modèles de plaques multicouches aux conditions aux limites simplement appuyées. Les 10 premières fréquences de vibration ont été déterminées et comparées entre elles (voir tableau 8.5).

Les fréquences de vibration obtenues sont exactement les mêmes pour les trois modèles de plaque (1, 3 et 5 couches). Ces résultats démontrent que la continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement est bien imposée aux interfaces de chacune des couches.

TABLEAU 8.5: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE SCINDÉE EN PLUSIEURS COUCHES AUX CONDITIONS AUX LIMITES SIMPLEMENT APPUYÉES

Mode	MEF-1 couche (Hz)	MEF-3 couches (Hz)	MEF-5 couches (Hz)
1	77.931	77.931	77.931
2	179.747	179.746	179.747
3	210.950	210.949	210.950
4	313.213	313.212	313.213
5	350.263	350.261	350.263
6	433.585	433.584	433.585
7	486.536	486.534	486.536
8	538.003	538.001	538.003
9	593.129	593.127	593.129
10	723.670	723.668	723.670

Analyse dynamique

Afin de s'assurer de la validité des conditions de continuité à l'intérieur de notre formulation, une analyse dynamique des plaques multicouches a été réalisée avec les 3 modèles. La plaque a été excitée par une force unitaire au même endroit que celui de la plaque de la section précédente. La vitesse quadratique de la plaque a été utilisée comme résultat de comparaison. La figure 8.3 présente la vitesse quadratique obtenue par les trois modèles de la plaque simplement appuyée sur la plage fréquentielle de 0-500 Hertz. Les 10 premiers modes de vibration de la plaque ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale.

Nous voyons encore une fois que les trois modèles de plaque se comportent exactement de la même manière. Ceci semble évident étant donné que les trois modèles de plaque ont les mêmes propriétés mécaniques et les mêmes dimensions. Cependant, ces résultats ne peuvent être obtenus que si les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement sont bien imposées aux interfaces des couches.

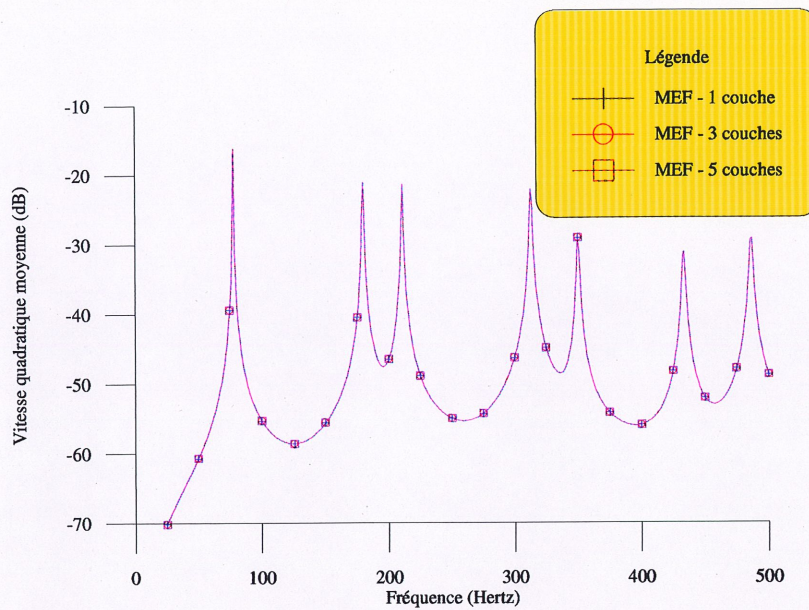


Figure 8.3: Vitesse quadratique moyenne d'une plaque scindée en plusieurs couches aux conditions aux limites simplement appuyées

8.3 Validation de la composante viscoélastique

Cette section présente les résultats de la validation de la composante viscoélastique de l'élément fini de plaque multicouche. Premièrement, des analyses modale et dynamique ont été réalisées pour un modèle de plaque avec un recouvrement complet de matériau viscoélastique contraint aux conditions aux limites libres, simplement appuyées et encastées. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus à partir d'un modèle d'éléments finis solides (MSC/NASTRAN). Le modèle d'amortissement utilisé dans par le programme MSC/NASTRAN est le même que celui utilisé dans la présente formulation (amortissement structural). Finalement, un modèle de plaque avec un recouvrement partiel de matériau viscoélastique contraint aux conditions aux limites libres, simplement appuyées et encastées a été étudié. Notons que les propriétés du matériau viscoélastique ont été considérées constantes en fréquence. Cette condition est essentielle pour pouvoir appliquer la méthode de l'amortissement modal et la décomposition modale.

8.3.1 Recouvrement complet

Le modèle de plaque recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte utilisé pour valider la composante viscoélastique est représenté à la figure 8.4 alors que les propriétés mécaniques du modèle sont présentées au tableau 8.6. Le maillage de la plaque était constitué de 8×8 éléments de plaque quadratiques à 8 noeuds. Un maillage tridimensionnel composé de $8 \times 8 \times 2$ éléments solides quadratiques à 20 noeuds (CHEXA) par couche a été construit et analysé à l'aide du programme MSC/NASTRAN pour valider les résultats.

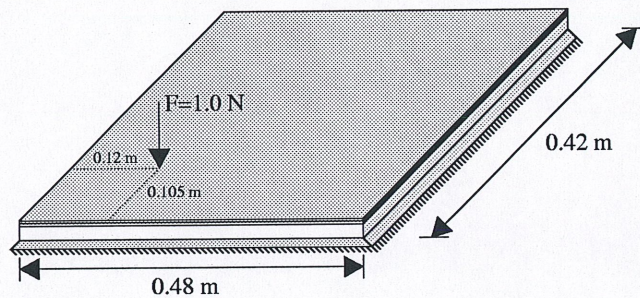


Figure 8.4: Schéma d'une plaque recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte

TABLEAU 8.6: PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES D'UNE PLAQUE RECOUVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Propriétés mécaniques	Couche 1 : Aluminium	Couche 2 : Viscoélastique	Couche 3 : Aluminium
E : Module Young	68.5 <i>GPa</i>	5.2 <i>MPa</i>	68.5 <i>GPa</i>
ρ : Densité	2680.0 <i>kg/m³</i>	1015.0 <i>kg/m³</i>	2782.0 <i>kg/m³</i>
h : Épaisseur	3.22 <i>mm</i>	0.254 <i>mm</i>	0.508 <i>mm</i>
\bar{z} : Position plan neutre	0.00 <i>mm</i>	1.737 <i>mm</i>	2.118 <i>mm</i>
ν : Coefficient Poisson	0.33 (---)	0.3 (---)	0.3 (---)
η : Amortissement	0.005 (---)	1.0 (---)	0.005 (---)

Analyse modale

Une analyse modale a été réalisée à la fois avec le modèle d'éléments finis bidimensionnel et tridimensionnel pour différentes conditions aux limites sur le contour de la plaque. Les 10

premières fréquences de vibration ont été déterminées (voir tableaux 8.7, 8.8 et 8.9) ainsi que les 10 premiers modes de vibration (voir annexe C). Pour l'analyse de la plaque aux conditions aux limites simplement appuyées, un deuxième modèle de validation a été utilisé. Ce modèle analytique est le même que celui utilisé à la section précédente [20].

TABLEAU 8.7: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES LIBRES RECOVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	0.014	0.000	N/A
2	0.009	0.000	N/A
3	0.003	0.000	N/A
4	0.023	0.000	N/A
5	0.029	0.008	N/A
6	0.042	0.010	N/A
7	58.075	58.260	0.32
8	81.217	82.255	1.28
9	113.746	115.064	1.16
10	138.413	139.764	0.98

TABLEAU 8.8: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES SIMPLEMENT APPUYÉES RECOVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	Analytique (Hz)	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	89.531	86.446	85.653	-0.92
2	197.016	190.417	188.458	-1.03
3	228.573	221.630	219.302	-1.05
4	328.964	320.366	317.452	-0.91
5	364.442	356.159	353.400	-0.77
6	—	419.457	—	N/A
7	443.856	435.297	432.334	-0.68
8	—	439.206	—	N/A
9	—	446.816	—	N/A
10	—	449.964	—	N/A

Une fois l'analyse modale réalisée, la méthode d'analyse MSE ("Modal Strain Energy

TABLEAU 8.9: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES ENCASTRÉES RECOUVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	154.540	149.841	-3.04
2	282.945	274.587	-2.95
3	327.678	318.258	-2.87
4	456.783	443.502	-2.91
5	482.990	471.124	-2.46
6	586.629	573.561	-2.23
7	672.831	655.769	-2.54
8	728.797	712.341	-2.26
9	748.940	739.162	-1.31
10	925.660	917.810	-0.85

method”) a été utilisée pour comparer les amortissement modaux équivalents obtenus par les deux modèles. Les résultats sont présentés dans les tableaux 8.10, 8.11 et 8.12.

TABLEAU 8.10: AMORTISSEMENTS MODAUX D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES LIBRES RECOUVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D	MEF-2D	Erreur (%)
1	—	—	N/A
2	—	—	N/A
3	—	—	N/A
4	—	—	N/A
5	—	—	N/A
6	—	—	N/A
7	0.068	0.073	7.35
8	0.057	0.064	12.28
9	0.078	0.087	11.54
10	0.099	0.105	6.06

Les résultats obtenus témoignent de la précision et de la validité de la composante viscoélastique de l'élément fini multicouche développé. L'erreur représente l'écart entre les résultats de la MEF-2D et ceux de la MEF-3D. Remarquons que les valeurs des fréquences

TABLEAU 8.11: AMORTISSEMENTS MODAUX D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES SIMPLEMENT APPUYÉES RECOUVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D	MEF-2D	Erreur (%)
1	0.105	0.111	5.71
2	0.126	0.128	1.58
3	0.130	0.130	0.00
4	0.124	0.121	-2.42
5	0.128	0.123	-3.91
6	1.000	—	N/A
7	0.124	0.117	-5.65
8	1.000	—	N/A
9	1.000	—	N/A
10	1.000	—	N/A

TABLEAU 8.12: AMORTISSEMENTS MODAUX D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES ENCASTRÉES RECOUVERTE COMPLÈTEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	0.126	0.127	0.79
2	0.119	0.116	- 2.52
3	0.115	0.111	- 3.48
4	0.100	0.096	- 4.00
5	0.102	0.097	- 4.90
6	0.095	0.089	- 4.21
7	0.081	0.077	- 6.32
8	0.079	0.075	- 5.06
9	0.084	0.078	- 7.14
10	0.075	0.069	- 8.00

de vibration obtenues par le modèle tridimensionnel sont légèrement inférieures à celles obtenues par le modèle bidimensionnel pour le cas de la plaque libre seulement. De plus, nous pouvons noter l'apparition de modes de vibration locaux à l'intérieur du modèle tridimensionnel de la plaque simplement appuyée (voir déformées à l'annexe C). Ces modes locaux ne peuvent être prédits par les modèles de plaque (analytique et MEF) étant donné les restrictions de mouvement imposées par le champ de déplacement utilisé (w constant

dans la direction z). La présence de la couche viscoélastique de faible rigidité est la cause de l'apparition des modes locaux. Ces modes locaux apparaîtront à plus hautes fréquences pour le cas de la plaque encastree étant donné la plus grande rigidité de cette plaque. Remarquons que les amortissements modaux équivalents des modes locaux sont égaux à 1, soit la valeur de l'amortissement modal de la couche viscoélastique. Ceci signifie que l'énergie de déformation modale provient uniquement de la déformation de la couche viscoélastique. En d'autres mots, la couche viscoélastique est la seule à se déformer aux modes locaux.

Analyse dynamique

Une analyse dynamique a été réalisée à la fois avec les modèles d'éléments finis bidimensionnel et tridimensionnel et le modèle analytique aux conditions aux limites simplement appuyées. Une force unitaire a été appliquée à un point quelconque de la plaque afin d'exciter le plus de modes de vibration possibles. La vitesse quadratique de la plaque a été utilisée comme résultat de comparaison. La figure 8.5 présente la vitesse quadratique de la plaque obtenue par les trois modèles de plaque sur la plage fréquentielle de 0-500 Hertz. Tous les modes de vibration de la plaque dont la fréquence est inférieure à 700 Hertz ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale.

Encore une fois, les résultats obtenus témoignent de la précision et de la validité de la composante viscoélastique de l'élément fini multicouche développé. Notons que la force utilisée pour exciter la plaque ne permet pas d'exciter les modes locaux du modèle tridimensionnel. Par conséquent, les modes locaux n'apparaissent pas sur le graphique de la vitesse quadratique moyenne de la plaque viscoélastique contrainte. Notons que le modèle analytique ne tient pas compte du cisaillement dans les couches d'aluminium. Ceci pourrait être la raison pour laquelle le modèle analytique sous-estime l'amortissement par rapport aux modèles d'éléments finis.

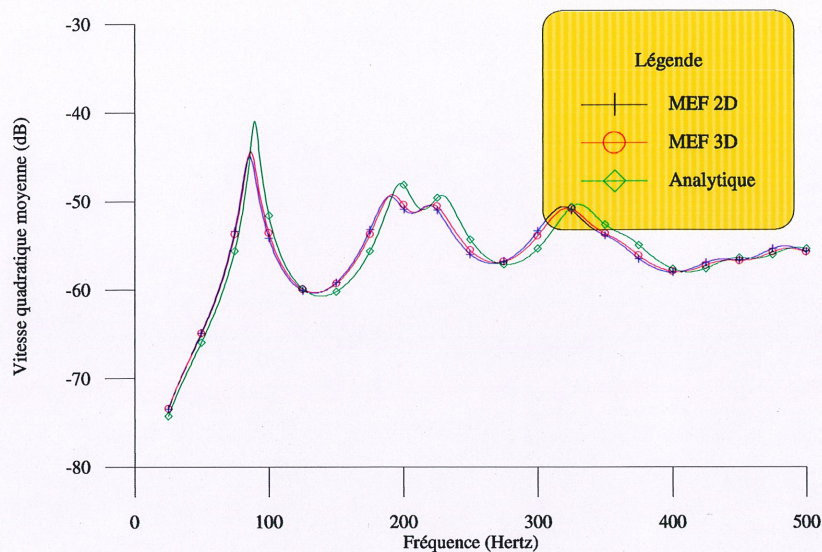


Figure 8.5: Vitesse quadratique moyenne d'une plaque aux conditions aux limites simplement appuyées recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte

8.3.2 Recouvrement partiel

Le modèle de la plaque recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte utilisé pour valider la composante viscoélastique est représenté à la figure 8.6 alors que les propriétés mécaniques du modèle sont présentées au tableau 8.13. Le maillage de la plaque était constitué de 8×8 éléments de plaque quadratiques à 8 noeuds. Notons que les zones surfaciques monocouche et multicouche de la plaque ont été modélisées avec l'élément fini multicouche. Un maillage tridimensionnel composé de $8 \times 8 \times 2$ éléments solides quadratiques à 20 noeuds (CHEXA) par couche a été construit et analysé à l'aide du programme MSC/NASTRAN pour valider les résultats.

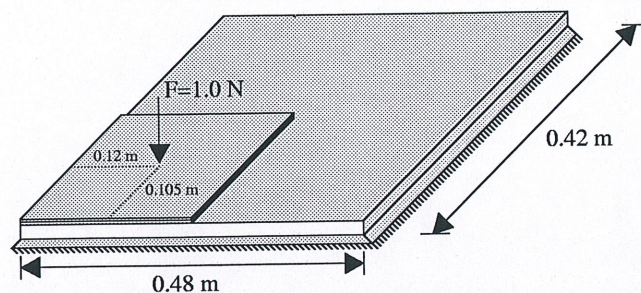


Figure 8.6: Schéma d'une plaque recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte

TABLEAU 8.13: PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES D'UNE PLAQUE RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Propriétés mécaniques	Couche 1 : Aluminium		Couche 2 : Viscoélastique		Couche 3 : Aluminium	
E : Module Young	68.5	GPa	5.2	MPa	68.5	GPa
ρ : Densité	2680.0	kg/m^3	1015.0	kg/m^3	2782.0	kg/m^3
h : Épaisseur	3.22	mm	0.254	mm	0.508	mm
\bar{z} : Position axe neutre	0.00	mm	1.737	mm	2.118	mm
ν : Coefficient Poisson	0.33	(--)	0.3	(--)	0.3	(--)
η : Amortissement	0.005	(--)	1.0	(--)	0.005	(--)

Analyse modale

Une analyse modale a été réalisée à la fois avec les modèles d'éléments finis bidimensionnel et tridimensionnel pour différentes conditions aux limites sur le contour de la plaque. Les 10 premières fréquences de vibration ont été déterminées (voir tableaux 8.14, 8.15 et 8.16) ainsi que les 10 premiers modes de vibration (voir annexe D).

Une fois l'analyse modale réalisée, la méthode d'analyse MSE ("Modal Strain Energy method") a été utilisée pour comparer les amortissements modaux obtenus par les deux modèles. Les résultats sont présentés dans les tableaux 8.17, 8.18 et 8.19.

Les résultats obtenus témoignent de la précision et de la validité de la composante vis-

TABLEAU 8.14: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES LIBRES RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	0.007	0.003	N/A
2	0.012	0.000	N/A
3	0.013	0.000	N/A
4	0.016	0.000	N/A
5	0.018	0.004	N/A
6	0.022	0.005	N/A
7	52.090	52.445	0.68
8	70.790	71.912	1.58
9	100.268	101.967	1.69
10	127.140	129.288	1.69

TABLEAU 8.15: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES SIMPLEMENT APPUYÉES RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	78.579	78.381	-0.25
2	181.833	181.425	-0.22
3	213.298	212.844	-0.21
4	314.618	314.237	-0.12
5	349.268	349.541	0.07
6	418.878	—	N/A
7	430.996	431.571	0.13
8	442.005	—	N/A
9	448.985	—	N/A
10	478.891	—	N/A

coélastique de l'élément fini multicouche développé. L'erreur représente l'écart entre les résultats de la MEF-2D et ceux de la MEF-3D. Remarquons encore un fois que les fréquences de vibration obtenues par le modèle tridimensionnel sont légèrement inférieures à celles obtenues par le modèle bidimensionnel uniquement pour le modèle libre, le seul n'ayant aucune condition aux limites d'appliquée. Ceci concorde avec le fait que les conditions aux limites à l'intérieur des modèles multicouches 3D sont probablement plus rigides que celles

TABLEAU 8.16: FRÉQUENCES PROPRES DE VIBRATION D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES ENCASTRÉES RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	148.456	143.245	-3.51
2	279.456	271.812	-2.74
3	326.282	318.153	-2.49
4	459.673	448.063	-2.53
5	485.531	475.738	-2.02
6	594.369	583.646	-1.80
7	683.855	668.736	-2.21
8	743.305	729.061	-1.92
9	766.767	759.434	-0.96
10	954.118	948.847	-0.55

TABLEAU 8.17: AMORTISSEMENTS MODAUX D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES LIBRES RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	—	—	N/A
2	—	—	N/A
3	—	—	N/A
4	—	—	N/A
5	—	—	N/A
6	—	—	N/A
7	0.030	0.030	0.00
8	0.030	0.031	3.33
9	0.028	0.028	0.00
10	0.028	0.028	0.00

des modèles multicouches 2D. De plus, des modes locaux apparaissent à hautes fréquences dans le modèles d'éléments finis 3D (voir déformées à l'annexe D). Notons que les résultats du tableau 8.19 présentent des erreurs significatives. Les amortissements modaux de la MEF-3D sont, en général, plus élevés que ceux de la MEF-2D. Considérant les résultats du modèle 3D comme référence, les résultats laissent croire que la couche viscoélastique du modèle 2D devrait se déformer davantage afin d'augmenter la valeur des amortissements modaux. Cette différence est probablement due à des effets de bord induits par les conditions

TABLEAU 8.18: AMORTISSEMENTS MODAUX D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES SIMPLEMENT APPUYÉES RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	0.033	0.034	3.03
2	0.037	0.037	0.00
3	0.038	0.037	- 2.63
4	0.034	0.032	- 5.88
5	0.032	0.032	0.00
6	1.000	—	N/A
7	0.031	0.029	- 6.45
8	1.000	—	N/A
9	1.000	—	N/A
10	1.000	—	N/A

TABLEAU 8.19: AMORTISSEMENTS MODAUX D'UNE PLAQUE AUX CONDITIONS AUX LIMITES ENCASTRÉES RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UNE COUCHE VISCOÉLASTIQUE CONTRAINTE

Mode	MEF-3D (Hz)	MEF-2D (Hz)	Erreur (%)
1	0.032	0.024	-25.00
2	0.034	0.028	-17.65
3	0.032	0.026	-25.00
4	0.029	0.024	-18.75
5	0.025	0.021	-16.00
6	0.024	0.021	-12.50
7	0.023	0.020	-13.04
8	0.021	0.018	-14.29
9	0.017	0.022	29.41
10	0.024	0.021	-12.50

aux limites.

Analyse dynamique

Une analyse dynamique a été réalisée à la fois avec le modèle d'éléments finis bidimensionnel et le modèle analytique aux conditions aux limites simplement appuyées. Une force unitaire a été appliquée à un point quelconque de la plaque afin d'exciter le plus de modes de vibration

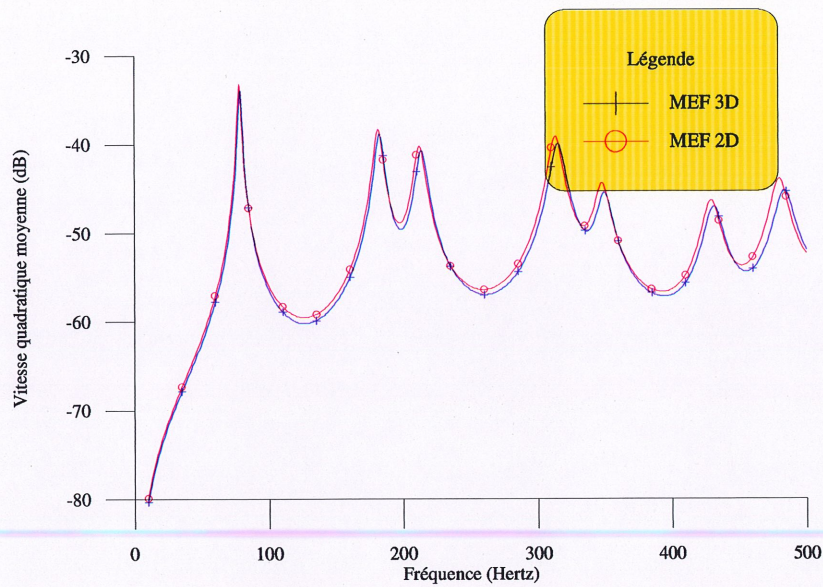


Figure 8.7: Vitesse quadratique moyenne d'une plaque aux conditions aux limites simplement appuyées recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte

possibles. La vitesse quadratique de la plaque a été utilisée comme résultat de comparaison. La figure 8.7 présente la vitesse quadratique de la plaque obtenue par les deux modèles de plaque sur la plage fréquentielle de 0-500 Hertz. Tous les modes de vibration de la plaque dont la fréquence est inférieure à 700 Hertz ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale.

Encore une fois, les résultats obtenus témoignent de la précision et de la validité de la composante viscoélastique de l'élément fini multicouche développé. Notons que la force utilisée pour exciter la plaque ne permet pas d'exciter les modes locaux du modèle tridimensionnel. Par conséquent, les modes locaux n'apparaissent pas sur le graphique de la vitesse quadratique moyenne de la plaque viscoélastique contrainte.

8.4 Validation de la composante piézoélectrique

Cette section présente les résultats de la validation de la composante piézoélectrique de l'élément fini de plaque multicouche. Premièrement, la validation de l'effet inverse d'une plaque piézoélectrique (actionneur) a été effectuée. La plaque élastique a été excitée à partir d'un actionneur piézoélectrique en appliquant un potentiel électrique sur celui-ci. Par la suite, la validation de l'effet direct d'une plaque piézoélectrique (capteur) a été effectuée. Pour ce faire, une plaquette piézoélectrique a été ajoutée sur la surface de la plaque élastique étudiée précédemment. En excitant la plaque à l'aide d'une force mécanique, nous avons déterminé la tension électrique à la surface du capteur piézoélectrique. Les résultats ont été comparés à ceux obtenus à partir d'un programme analytique développé à l'intérieur du GAUS [6].

8.4.1 Actionneur

Le modèle de plaque utilisé pour valider l'effet inverse de la piézoélectricité (actionneur) est représenté à la figure 8.8 alors que les propriétés mécaniques et électriques du modèle sont présentées au tableau 8.20. Le maillage de la plaque était constitué de 16×16 éléments de plaque quadratiques à 8 noeuds. La plaquette piézoélectrique couvrait 4×4 éléments de plaque multicouche. Notons que tous les autres éléments ont été modélisés aussi par l'élément de plaque multicouche dont une seule couche a été définie.

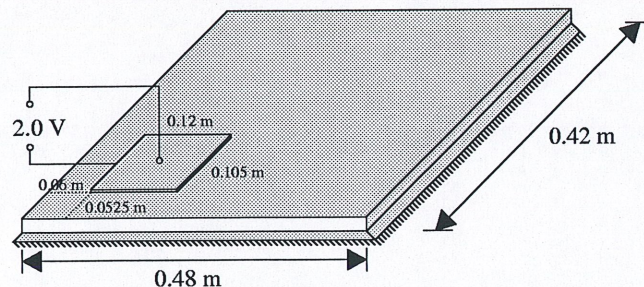


Figure 8.8: Schéma d'une plaque excitée par un actionneur piézoélectrique

TABLEAU 8.20: PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES ET ÉLECTRIQUES D'UNE PLAQUE EXCITÉE PAR UN ACTIONNEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

Propriétés mécaniques/électriques	Couche 1 : Aluminium	Couche 2 : PZT
E : Module Young	68.5 <i>GPa</i>	63.0 <i>GPa</i>
ρ : Densité	2680.0 <i>kg/m³</i>	7750.0 <i>kg/m³</i>
h : Épaisseur	3.22 <i>mm</i>	0.254 <i>mm</i>
\bar{z} : Position axe neutre	0.00 <i>mm</i>	1.737 <i>mm</i>
ν : Coefficient Poisson	0.33 (---)	0.33 (---)
η : Amortissement	0.005 (---)	0.001 (---)
e : Constante piézoélectrique	--- (---)	14.0 <i>C/m²</i>
d : Constante diélectrique	--- (---)	0.210×10^{-9} <i>F/m</i>

Seulement une analyse dynamique a été réalisée pour valider l'effet piézoélectrique inverse de l'élément fini multicouche. Une tension de 2 Volts a été appliquée aux bornes de la plaquette piézoélectrique du modèle d'éléments finis afin d'exciter la plaque. Notons que l'actionneur du modèle analytique est modélisé à partir de deux plaquettes piézoélectriques collées symétriquement en vis-à-vis. Par conséquent, une tension de 1 Volt a été appliquée sur chacune des plaquettes piézoélectriques dans le modèle analytique.

La figure 8.9 présente la vitesse quadratique moyenne de la plaque sur la plage fréquentielle de 0-1500 Hertz avec un pas fréquentiel de 1 Hertz. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par un programme analytique développé au GAUS [6]. Les 16 premiers modes de vibration de la plaque ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale. Notons que les modes "électrodes fermées" ont été utilisés comme base modale.

La qualité des résultats démontre la validité de l'effet piézoélectrique inverse de l'élément de plaque. Remarquons que le modèle d'éléments finis est plus souple que le modèle analytique. Ceci devient de plus en plus notable lorsque la fréquence d'excitation augmente. Ceci est principalement dû au fait que le modèle analytique néglige l'effet du cisaillement transversal contrairement au modèle d'éléments finis.

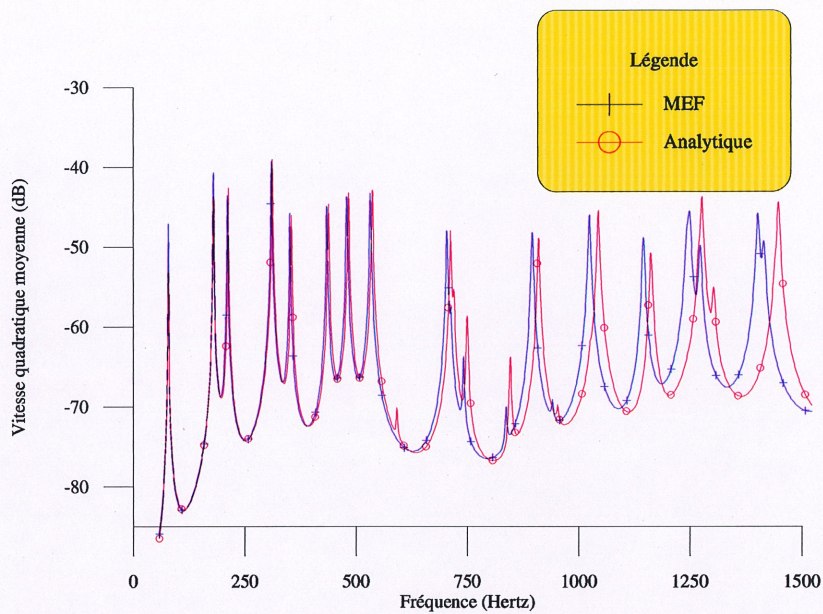


Figure 8.9: Vitesse quadratique moyenne d'une plaque simplement appuyée et excitée par un actionneur piézoélectrique.

8.4.2 Capteur

Cette section présente les résultats de la validation de l'effet piézoélectrique direct de l'élément de plaque multicouche. Premièrement, une analyse dynamique a été réalisée pour un modèle de plaque avec un recouvrement complet de matériau piézoélectrique aux conditions aux limites simplement appuyées. Par la suite, un modèle de plaque avec un recouvrement partiel de matériau piézoélectrique ayant les mêmes conditions aux limites a été analysé.

Recouvrement complet

Le modèle de la plaque recouverte complètement d'un capteur piézoélectrique utilisé pour valider l'effet direct de la piézoélectricité (capteur) est représenté à la figure 8.10 alors que les propriétés mécaniques et électriques du modèle sont présentées au tableau 8.21. Le maillage

de la plaque était constitué de 12×12 éléments de plaque quadratiques à 8 noeuds.

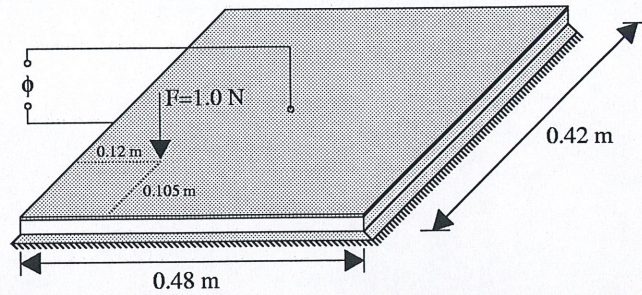


Figure 8.10: Schéma d'une plaque recouverte complètement d'un capteur piézoélectrique

TABLEAU 8.21: PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES ET ÉLECTRIQUES D'UNE PLAQUE RECOUVERTE COMPLÈTEMENT D'UN CAPTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

Propriétés mécaniques/électriques	Couche 1 : Aluminium	Couche 2 : PVDF
E : Module Young	68.5 <i>GPa</i>	2.0 <i>GPa</i>
ρ : Densité	2680.0 <i>kg/m³</i>	1800.0 <i>kg/m³</i>
h : Épaisseur	3.22 <i>mm</i>	0.1 <i>mm</i>
\bar{z} : Position axe neutre	0.00 <i>mm</i>	1.66 <i>mm</i>
ν : Coefficient Poisson	0.33 (--)	0.29 (--)
η : Amortissement	0.005 (--)	0.001 (--)
e : Constante piézoélectrique	-- (--)	0.046 <i>C/m²</i>
d : Constante diélectrique	-- (--)	0.1062×10^{-9} <i>F/m</i>

La figure 8.11 présente la tension moyenne du capteur sur la plage fréquentielle de 0-1500 Hertz avec un pas fréquentiel de 1 Hertz. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par un programme analytique développé au GAUS [6]. Les 50 premiers modes de vibration de la plaque ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale. Notons que le nombre de modes utilisés peut affecter considérablement la position des anti-résonances. En effet, le PVDF mesure une déformation (intégrée spatialement) qui représente la première la différence des premières dérivées spatiales du déplacement aux extrémités du capteur. La convergence est donc moins rapide que lors du calcul de la vitesse quadratique. Avec seulement 10 modes de vibration, l'anti-résonance située à 209 Hertz était située à 191 Hertz. Il est donc nécessaire d'avoir un grand nombre de modes lors

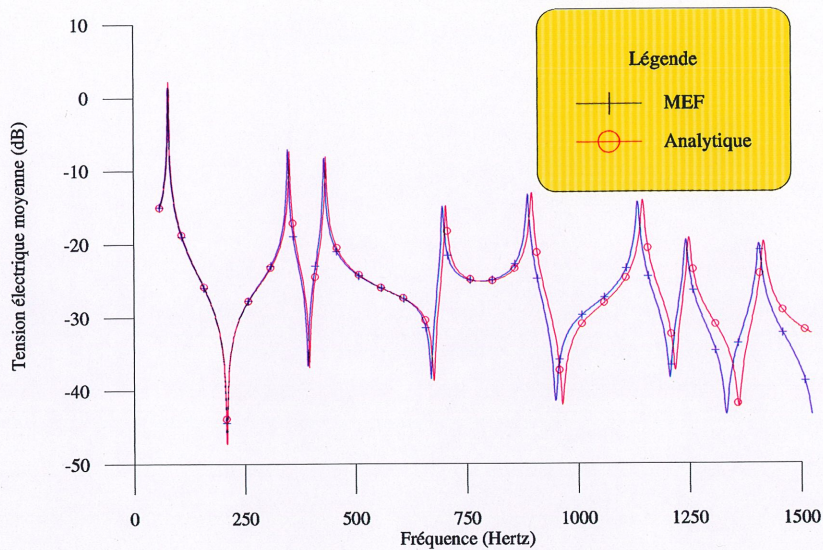


Figure 8.11: Tension moyenne à la surface d'un capteur piézoélectrique recouvrant complètement la surface d'une plaque simplement appuyée.

de la décomposition modale pour avoir une bonne convergence des anti-résonances.

Les résultats obtenus permettent, encore une fois, de valider la composante piézoélectrique de l'élément fini multicouche.

Recouvrement partiel

Le modèle de la plaque recouverte partiellement d'un capteur piézoélectrique utilisé pour valider l'effet direct de la piézoélectricité (capteur) est représenté à la figure 8.12 alors que les propriétés mécaniques et électriques du modèle sont présentées au tableau 8.22. Le maillage de la plaque était constitué de 16×16 éléments de plaque quadratique à 8 noeuds.

La figure 8.13 présente la tension moyenne à la surface du capteur sur la plage fréquentielle de 0-1500 Hertz avec un pas fréquentiel de 1 Hertz. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par un programme analytique développé au GAUS [6]. Les 50 premiers modes de

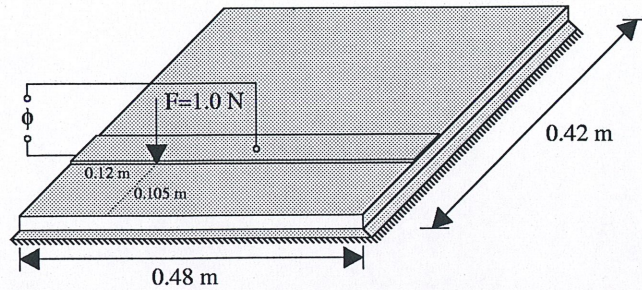


Figure 8.12: Schéma d'une plaque recouverte partiellement d'un capteur piézoélectrique

TABLEAU 8.22: PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES ET ÉLECTRIQUES D'UNE PLAQUE RECOUVERTE PARTIELLEMENT D'UN CAPTEUR PIÉZOÉLECTRIQUE

Propriétés mécaniques/électriques	Couche 1 : Aluminium	Couche 2 : PVDF
E : Module Young	68.5 <i>GPa</i>	2.0 <i>GPa</i>
ρ : Densité	2680.0 <i>kg/m³</i>	1800.0 <i>kg/m³</i>
h : Épaisseur	3.22 <i>mm</i>	0.1 <i>mm</i>
\bar{z} : Position axe neutre	0.00 <i>mm</i>	1.66 <i>mm</i>
ν : Coefficient Poisson	0.33 (---)	0.29 (---)
η : Amortissement	0.005 (---)	0.001 (---)
e : Constante piézoélectrique	--- (---)	0.046 <i>C/m²</i>
d : Constante diélectrique	--- (---)	0.1062×10^{-9} <i>F/m</i>

vibration de la plaque ont été utilisés pour décomposer la réponse dynamique de la plaque sur sa base modale. Notons que les résultats obtenus par la MEF prédisent d'autres modes de vibration que ceux prédits par le programme analytique (par exemple à 180 hertz et à 315 hertz).

8.5 Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre nous ont permis de démontrer la validité de l'élément fini de plaque multicouche développée. Le nombre et la variété des modèles utilisés ont démontré la polyvalence et la précision de cet élément.

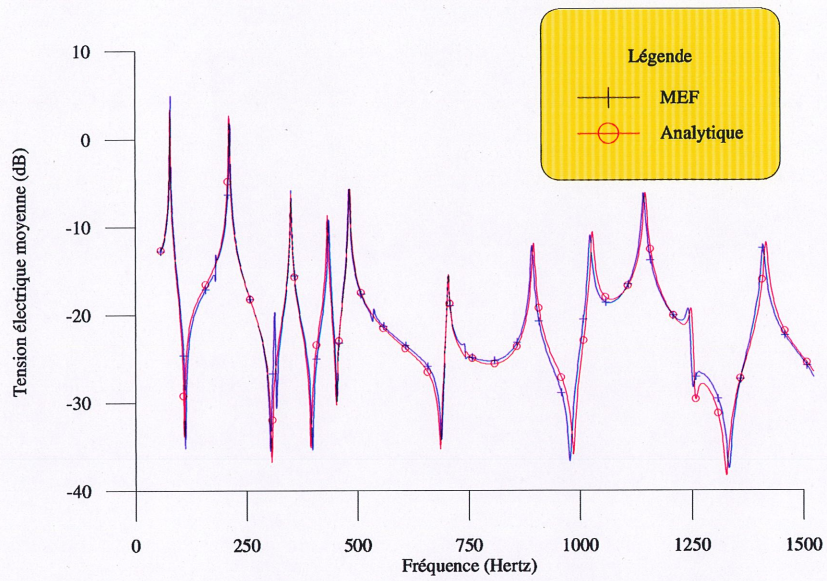


Figure 8.13: Tension moyenne à la surface d'un capteur piézoélectrique recouvrant partiellement la surface d'une plaque simplement appuyée.

Conclusion

Ce mémoire présente la formulation, par la méthode des éléments finis, d'une plaque multicouche intégrant les effets élastique, viscoélastique et piézoélectrique. Ce modèle tient compte des effets de masse, d'amortissement et de raideur pour chacune des couches du laminé. Les déplacements dans la direction transversale de la plaque sont modélisés selon une théorie discrète pour chacune des couches et le principe de Hamilton est utilisé pour définir les équations de mouvement de la plaque laminée. Les continuités de contraintes de cisaillement et de déplacements sont imposées à chacune des interfaces. L'élément fini est un quadrilatère défini par un total de 8 noeuds avec 7 degrés de liberté (DDL) par noeud. Tous les effets d'extension, de flexion et de cisaillement transversal sont inclus dans la formulation. Un DDL électrique supplémentaire par couche piézoélectrique est ajouté dans le modèle. Cet élément fini peut être utilisé pour réaliser des analyses statique et dynamique de plaques multicouches assujetties à des excitations mécaniques et électriques.

La validation de ce modèle d'éléments finis fut effectuée en plusieurs parties. Premièrement, la composante élastique ainsi que les conditions de continuité des déplacements et des contraintes de cisaillement ont été validées. Des analyses modales et dynamiques ont été effectuées et les fréquences de vibration ainsi que la vitesse quadratique moyenne ont été utilisés comme variables de comparaison. Deuxièmement, la composante viscoélastique a été validée en utilisant, entre autre, le facteur d'amortissement modal équivalent (méthode MSE) comme variable de comparaison. Finalement, la validation de la composante piézoélectrique a été effectuée. La tension électrique moyenne a été utilisée comme variable de

comparaison pour valider l'effet direct (capteur) alors que la vitesse quadratique moyenne a été utilisée pour valider l'effet inverse (actionneur) de la composante piézoélectrique. Les résultats présentés lors de la validation ont démontré l'efficacité et le bon comportement de cet élément. Cet élément peut être utilisé, à la fois, comme capteur et/ou actionneur piézoélectrique combiné à des couches élastiques et/ou viscoélastiques.

Originalité scientifique

Les travaux présentés dans ce mémoire ont mené à l'originalité scientifique suivante :

- Développement d'une formulation de plaque multicouche par la méthode des éléments finis basée sur un champ de déplacement discret et intégrant, à la fois, des couches au comportement élastique, viscoélastique et piézoélectrique.

Perspectives

Les travaux présentés ici sont une première étape pour l'obtention d'un outil numérique efficace pour l'analyse de structures multicouches intégrant des matériaux amortissants et des composantes piézoélectriques. Ils restent plusieurs points à approfondir et développer. En voici quelques uns :

- Permettre la transposition cet élément fini dans l'espace pour modéliser des structures non-planes (tridimensionnelles).
- Intégrer cet élément fini parmi la banque d'éléments du GAUS de manière à ce qu'il puisse être utilisé par tous. De plus, cette intégration permettra d'utiliser cet élément avec d'autres éléments de la banque.
- Faire l'analyse de structures complexes connues afin d'évaluer les limites de cet élément fini, principalement en ce qui concerne les hypothèses de modélisation des variables

électriques.

- Développer un algorithme de calcul pour pouvoir permettre aux propriétés des couches amortissantes de varier en fréquence.
- Programmer un algorithme de contrôle actif entre les composantes piézoélectriques (capteurs et actionneurs) pour permettre de faire l'étude du contrôle actif, de l'amortissement actif et de l'isolation active de structures multicouches. De plus, cet élément fini pourra être utilisé comme base pour une étude déjà en cours au GAUS sur l'optimisation de la position de capteurs et d'actionneurs piézoélectriques à l'intérieur d'une structure.
- Compléter l'étude de convergence pour valider la technique de résolution modale.

Annexe A

Discrétisation des variables nodales

A.1 Interpolation nodale des variables de déplacement de la 1^{ère} couche

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^{c1} \\ v_0^{c1} \\ w_0^{c1} \\ \theta_x^{c1} \\ \theta_y^{c1} \\ \frac{\partial w_0^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{c1}}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{cccccccc} N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{01}^{c1} \\ v_{01}^{c1} \\ w_{01}^{c1} \\ \theta_{x1}^{c1} \\ \theta_{y1}^{c1} \\ \frac{\partial w_{01}^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{01}^{c1}}{\partial y} \\ \vdots \\ u_{08}^{c1} \\ v_{08}^{c1} \\ w_{08}^{c1} \\ \theta_{x8}^{c1} \\ \theta_{y8}^{c1} \\ \frac{\partial w_{08}^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{08}^{c1}}{\partial y} \end{array} \right\}$$

A.2 Interpolation nodale des variables de déplacement de la i^e couche

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^{ci} \\ v_0^{ci} \\ w_0^{ci} \\ \theta_x^{ci} \\ \theta_y^{ci} \\ \frac{\partial w_0^{ci}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{ci}}{\partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{cccccccc} N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{01}^{c1} \\ v_{01}^{c1} \\ w_{01}^{c1} \\ \theta_{x1}^{c1} \\ \theta_{y1}^{c1} \\ \frac{\partial w_{01}^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{01}^{c1}}{\partial y} \\ \vdots \\ u_{08}^{c1} \\ v_{08}^{c1} \\ w_{08}^{c1} \\ \theta_{x8}^{c1} \\ \theta_{y8}^{c1} \\ \frac{\partial w_{08}^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{08}^{c1}}{\partial y} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^{c1} \\ v_0^{c1} \\ w_0^{c1} \\ \theta_x^{c1} \\ \theta_y^{c1} \\ \frac{\partial w_0^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0^{c1}}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} N_1 & 0 & 0 & T_2 N_1 & 0 & T_1 N_1 & 0 & & N_8 & 0 & 0 & T_2 N_8 & 0 & T_1 N_8 & 0 & & \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & T_2 N_1 & 0 & T_1 N_1 & & 0 & N_8 & 0 & 0 & T_2 N_8 & 0 & T_1 N_8 & & \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & T_4 N_1 & 0 & T_3 N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & T_4 N_8 & 0 & T_3 N_8 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 N_1 & 0 & T_3 N_1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 N_8 & 0 & T_3 N_8 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_{01}^{c1} \\ v_{01}^{c1} \\ w_{01}^{c1} \\ \theta_{x1}^{c1} \\ \theta_{y1}^{c1} \\ \frac{\partial w_{01}^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{01}^{c1}}{\partial y} \\ \vdots \\ u_{08}^{c1} \\ v_{08}^{c1} \\ w_{08}^{c1} \\ \theta_{x8}^{c1} \\ \theta_{y8}^{c1} \\ \frac{\partial w_{08}^{c1}}{\partial x} \\ \frac{\partial w_{08}^{c1}}{\partial y} \end{array} \right\}$$

A.3 Interpolation nodale des variables potentiels électriques

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{c1} \\ \vdots \\ \phi^{ci} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \phi^{c1} \\ \vdots \\ \phi^{ci} \end{array} \right\}$$

Annexe B

Calcul des matrices différentielles

B.1 Matrice différentielle de la composante membrane de la 1^{ère} couche $[B_{um}^{c1}]$

$$\begin{aligned}
 [B_{um}^{c1}] &= [D_{um}][N_u] \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

B.2 Matrice différentielle de la composante membrane de la i^e couche $[B_{um}^{ci}]$

$$\begin{aligned}
 [B_{um}^{ci}] &= [D_{um}] [Q^i] [N_u] \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & T_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & T_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 & T_2 \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & T_1 \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & T_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & T_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & 0 & T_2 \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & T_1 \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & T_2 \frac{\partial N_1}{\partial y} & T_2 \frac{\partial N_1}{\partial x} & T_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} & T_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & T_2 \frac{\partial N_8}{\partial y} & T_2 \frac{\partial N_8}{\partial x} & T_1 \frac{\partial N_8}{\partial y} & T_1 \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

B.3 Matrice différentielle de la composante de flexion de la 1^{ère} couche $[B_{uf}^{c1}]$

$$\begin{aligned}
 [B_{uf}^{c1}] &= [D_{uf}][N_u] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

B.4 Matrice différentielle de la composante de flexion de la i^e couche $[B_{uf}^{ci}]$

$$\begin{aligned}
 [B_{uf}^{ci}] &= [D_{uf}] [Q^i] [N_u] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & T_4 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & T_4 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & T_3 \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & T_3 \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & T_3 \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 \frac{\partial N_1}{\partial y} & T_4 \frac{\partial N_1}{\partial x} & T_3 \frac{\partial N_1}{\partial y} & T_3 \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & T_4 \frac{\partial N_8}{\partial y} & T_4 \frac{\partial N_8}{\partial x} & T_3 \frac{\partial N_8}{\partial y} & T_3 \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

B.5 Matrice différentielle de la composante de cisaillement de la 1^{ère} couche $[B_{uc}^{cl}]$

$$\begin{aligned}
 [B_{uc}^{cl}] &= [D_{uc}][N_u] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & -N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & -N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & -N_8 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

B.6 Matrice différentielle de la composante de cisaillement de la i^e couche $[B_{uc}^{ci}]$

$$\begin{aligned}
 [B_{uc}^{ci}] &= [D_{uc}] [Q^i] [N_u] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T_2 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 & T_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & -T_4 N_1 & 0 & -T_3 N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & -T_4 N_8 & 0 & -T_3 N_8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -T_4 N_1 & 0 & -T_3 N_1 & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 & -T_4 N_8 & 0 & -T_3 N_8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

B.7 Matrice différentielle du potentiel électrique de la i^e couche $[B_\phi^{ci}]$

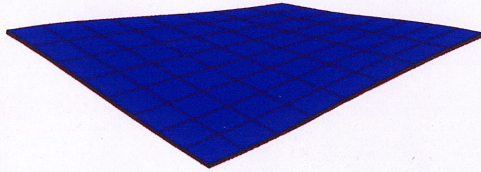
$$\begin{aligned} [B_\phi^{ci}] &= [D_\phi^{ci}] [N_\phi] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{h^{ci}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{h^{ci}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Annexe C

Déformées modales d'une plaque recouverte complètement d'une couche viscoélastique contrainte

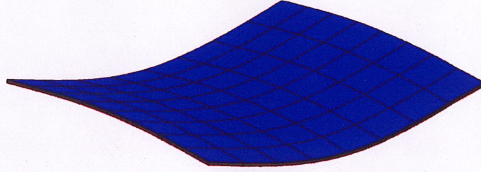
C.1 Conditions aux limites libres

Mode 7, 5.873e+021 Hz
Déplacement



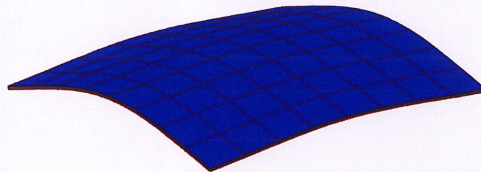
(a) Mode 7

Mode 8, 6.112e+021 Hz
Déplacement



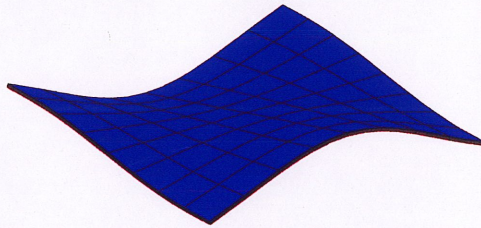
(b) Mode 8

Mode 9, 1.117e+022 Hz
Déplacement



(c) Mode 9

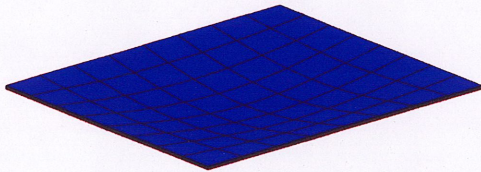
Mode 10, 1.134e+022 Hz
Déplacement



(d) Mode 10

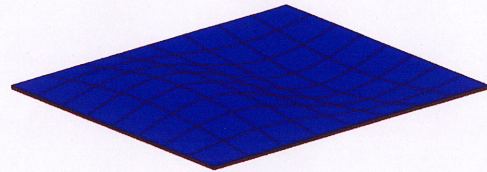
C.2 Conditions aux limites simplement appuyées

Mode 1, 4.65e+001Hz
Déplacements



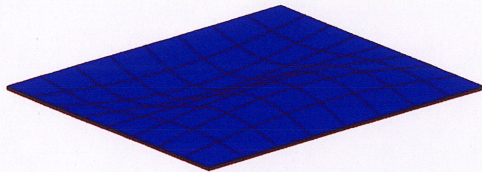
(a) Mode 1

Mode 2, 1.90e+002Hz
Déplacements



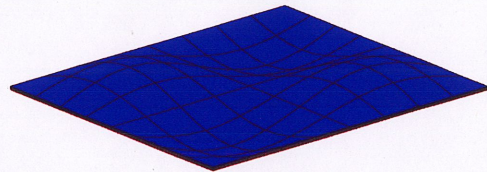
(b) Mode 2

Mode 3, 3.31e+002Hz
Déplacements



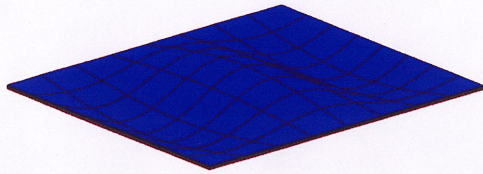
(c) Mode 3

Mode 4, 3.25e+002Hz
Déplacements



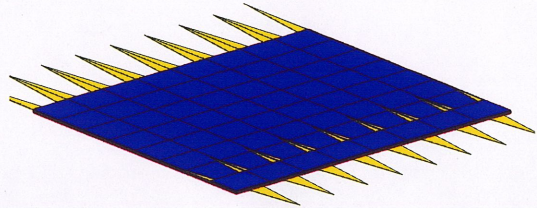
(d) Mode 4

Mode 5, 3.54e+001 Hz
Displacement



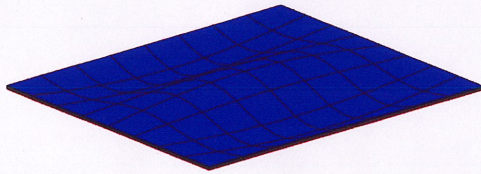
(e) Mode 5

Mode 6, 4.19e+001 Hz
Displacement



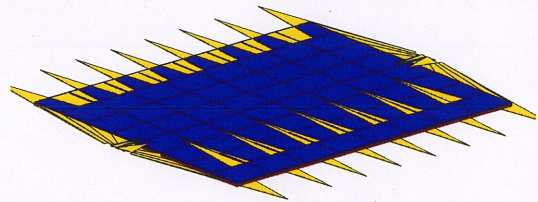
(f) Mode 6

Mode 7, 4.32e+001 Hz
Displacement



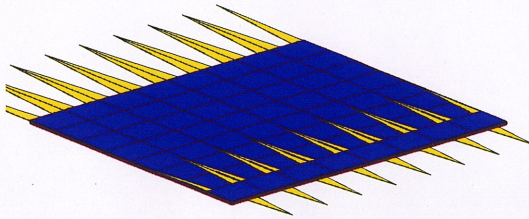
(g) Mode 7

Mode 8, 4.37e+001 Hz
Displacement



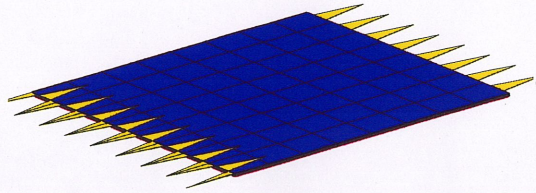
(h) Mode 8

Mode 9, 4.448e+021s
Displacement



(i) Mode 9

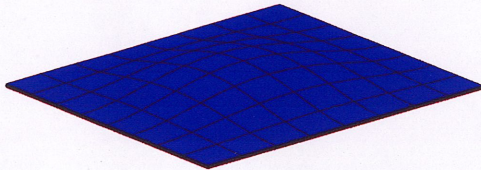
Mode 10, 4.590e+021s
Displacement



(j) Mode 10

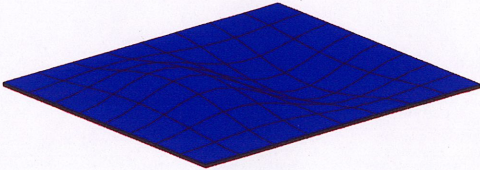
C.3 Conditions aux limites encastrées

Mode 1, 1.50e+021s
Déplacement



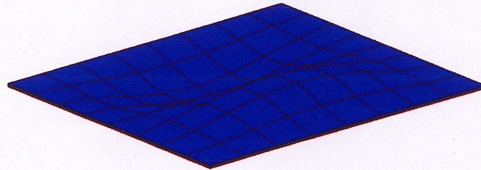
(a) Mode 1

Mode 2, 1.879e+021s
Déplacement



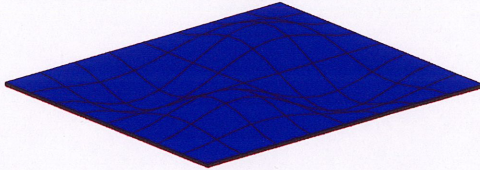
(b) Mode 2

Mode 3, 3.377e+021s
Déplacement



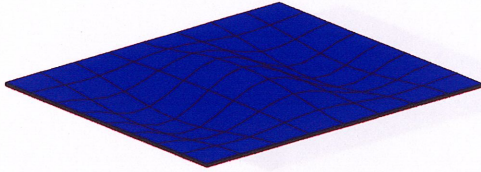
(c) Mode 3

Mode 4, 4.558e+021s
Déplacement



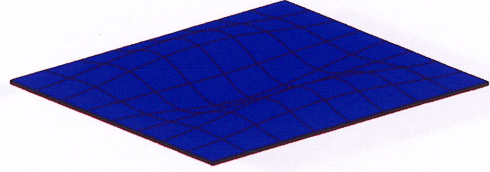
(d) Mode 4

Mode 5, 4.830e+021 Hz
Displacement



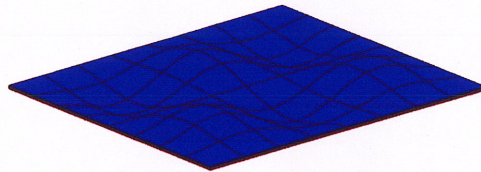
(e) Mode 5

Mode 6, 5.966e+021 Hz
Displacement



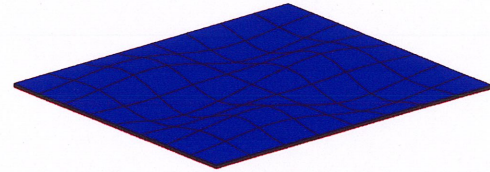
(f) Mode 6

Mode 7, 6.728e+021 Hz
Displacement



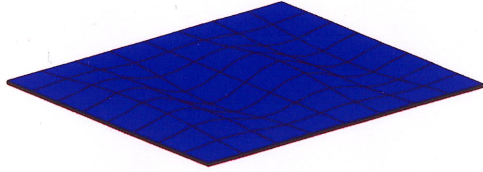
(g) Mode 7

Mode 8, 7.138e+021 Hz
Displacement



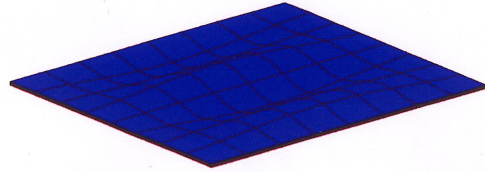
(h) Mode 8

Mode 9, 7.403e+0021s
Displacements



(i) Mode 9

Mode 10, 8.527e+0021s
Displacements



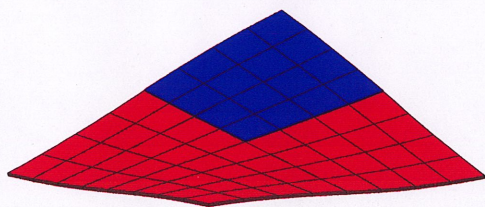
(j) Mode 10

Annexe D

Déformées modales d'une plaque recouverte partiellement d'une couche viscoélastique contrainte

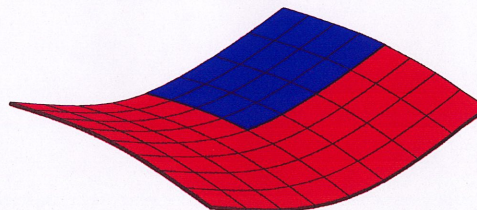
D.1 Conditions aux limites libres

Mode 7, $5.209\text{e}+001\text{Hz}$



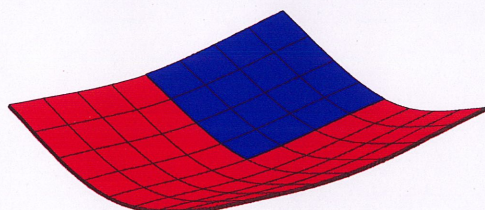
(a) Mode 7

Mode 8, $7.079\text{e}+001\text{Hz}$



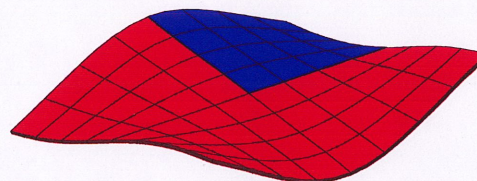
(b) Mode 8

Mode 9, $1.003\text{e}+002\text{Hz}$



(c) Mode 9

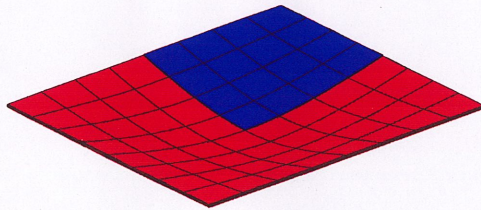
Mode 10, $1.271\text{e}+002\text{Hz}$



(d) Mode 10

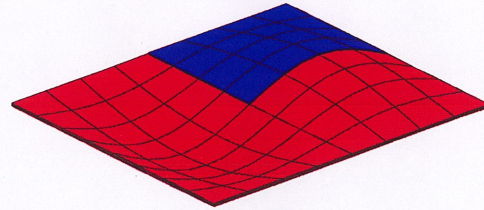
D.2 Conditions aux limites simplement appuyées

Mode 1, 7.838e+001Hz



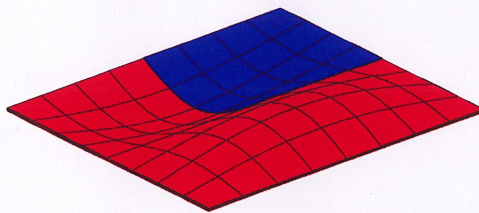
(a) Mode 1

Mode 2, 1.818e+002Hz



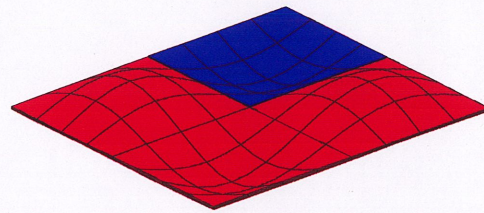
(b) Mode 2

Mode 3, 2.133e+002Hz



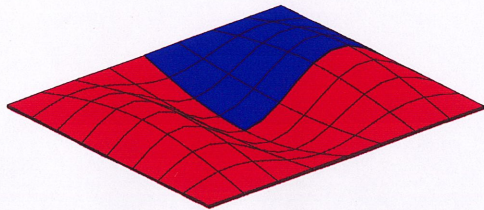
(c) Mode 3

Mode 4, 3.146e+002Hz



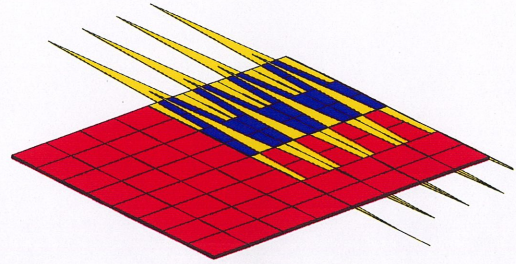
(d) Mode 4

Mode 5, 3.493e+002Hz



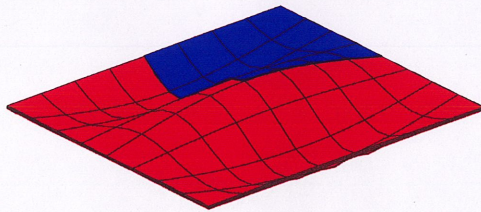
(e) Mode 5

Mode 6, 4.182e+002Hz



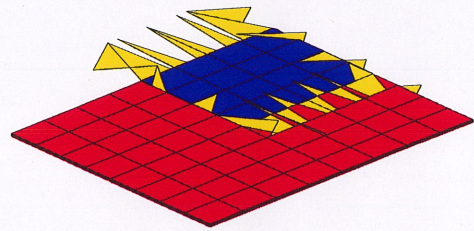
(f) Mode 6

Mode 7, 4.310e+002Hz



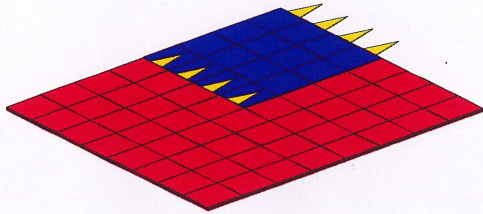
(g) Mode 7

Mode 8, 4.420e+002Hz



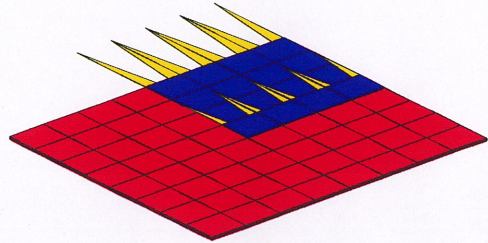
(h) Mode 8

Mode 9, 4.490e+002Hz



(i) Mode 9

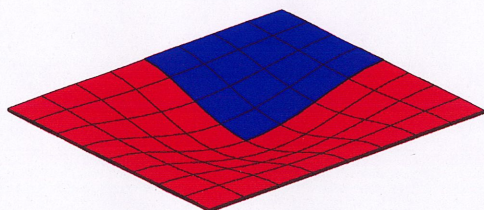
Mode 10, 4.789e+002Hz



(j) Mode 10

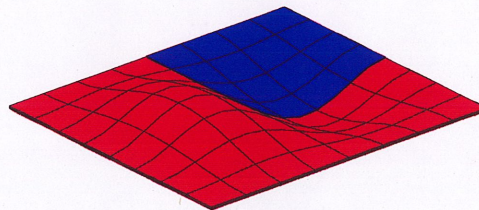
D.3 Conditions aux limites encastrées

Mode 1, 1.485e+002Hz



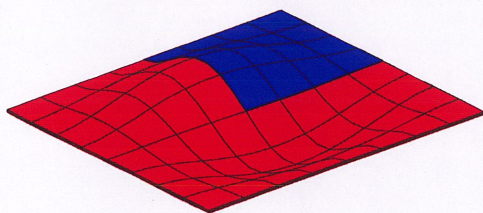
(a) Mode 1

Mode 2, 2.794e+002Hz



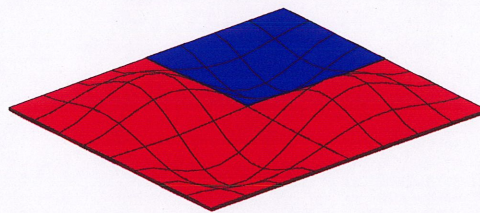
(b) Mode 2

Mode 3, 3.263e+002Hz



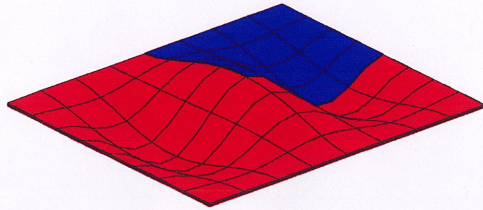
(c) Mode 3

Mode 4, 4.597e+002Hz



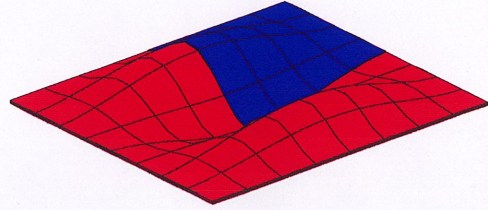
(d) Mode 4

Mode 5, 4.855e+002Hz



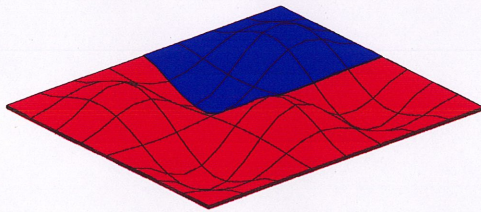
(e) Mode 5

Mode 6, 5.944e+002Hz



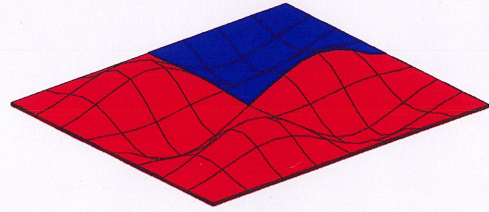
(f) Mode 6

Mode 7, 6.839e+002Hz



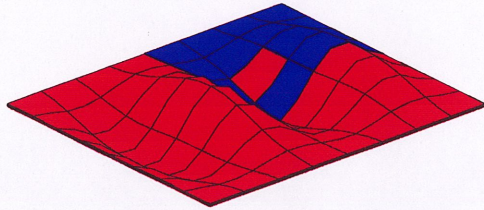
(g) Mode 7

Mode 8, 7.433e+002Hz



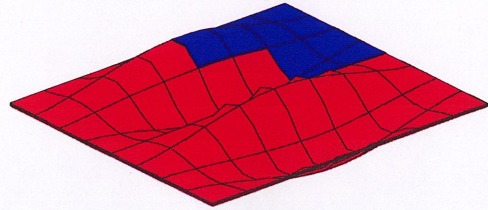
(h) Mode 8

Mode 9, 7.668e+002Hz



(i) Mode 9

Mode 10, 9.541e+002Hz



(j) Mode 10

Bibliographie

- [1] ALLIK, H., HUGHES, T. J. R. (1970) *Finite Element Method for Piezoelectric Vibration*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, 151–157.
- [2] BAILEY, T., HUBBARD, JR., J. E. (1985) *Distributed Piezoelectric-Polymer Active Control of a Cantilever Beam*, Journal of Guidance Control and Dynamics, 8, 5, 605–610.
- [3] BATHE, K.-J. (1996) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.
- [4] BAZERGUI, A., BUI-QUOC, T., BIRON, A., MCINTYRE, G., LABERGE, C. (1987) *Résistance des matériaux*, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal.
- [5] CHANDRASHEKHARA, K., AGARWAL, A. N. (1993) *Active Vibration Control of Laminated Composite Plates Using Piezoelectric Devices : A Finite Element Approach*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 4, 496–508.
- [6] CHARETTE, F. (1996) *Contrôle Actif du Déplacement Volumique des Structures Planes à l'Aide de Transducteurs Piézoélectriques*, Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke.
- [7] CHARETTE, F., BERRY, A., GUIGOU, C. (1996) *A Variational Model of an Elastic Plate-Piezoelectric Actuator System*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Soumis le 03/04/96.
- [8] CHO, M., KIM, J.-H. (1996) *Postprocess Method Using Displacement Field of Higher Order Laminated Composite Plate Theory*, AIAA Journal, 34, 2, 362–368.
- [9] CHO, M., PARMERTER, R. R. (1992) *An Efficient Higher-Order Plate Theory for Laminated Composites*, Composite Structures, 20, 113–123.
- [10] CHO, M., PARMERTER, R. R. (1994) *Finite Element for Composite Plate Bending Based on Efficient Higher Order Theory*, AIAA Journal, 32, 11, 2241–2248.
- [11] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. (1989) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons.
- [12] COURNOYER, B. (1995) *Modélisation Analytique et Numérique de Plaques Multicouches ; Application au Traitement Viscoélastique des Disques Encastrés-libres*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- [13] CRAWLEY, E. F., DE LUIS, J. (1987) *Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures*, AIAA Journal, 25, 10, 1373–1385.

- [14] CRAWLEY, E. F., LAZARUS, K. B. (1991) *Induced Strain Actuation of Isotropic and Anisotropic Plates*, AIAA Journal, 29, 6, 944–951.
- [15] DAWE, D. (1984) *Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures*, Oxford University Press.
- [16] DETWILER, D. T., SHEN, M.-H. H., VENKAYYA, V. B. (1995) *Finite Element Analysis of Laminated Composite Structures Containing Distributed Piezoelectric Actuators and Sensors*, Finite Elements in Analysis and Design, 20, 87–100.
- [17] DI SCIUVA, M. (1986) *Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Multilayered Orthotropic Plates : An Evaluation of a New Displacement Model*, Journal of Sound and Vibration, 105, 3, 425–442.
- [18] DI SCIUVA, M. (1986) *Evaluation of Some Multilayered, Shear-Deformable Plate Elements*, Computers & Structures, 24, 6, 845–854.
- [19] DIMITRIADIS, E. K., FULLER, C. R., ROGERS, C. A. (1991) *Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates*, Journal of Vibration and Acoustics, 113, 100–107.
- [20] FOIN, O. (1995) *Étude du comportement vibro-acoustique de plaques multicouches*, Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke.
- [21] GÉRADIN, M., RIXEN, D. (1993) *Théorie des vibrations – Application à la dynamique des structures*, Masson.
- [22] GHOSH, A. K., DEY, S. S. (1992) *A Simple Finite Element for the Analysis of Laminated Plates*, Computers & Structures, 44, 3, 585–596.
- [23] HA, S.-K., KEILERS, C., CHANG, F.-K. (1991) *Analysis of Laminated Composites Containing Distributed Piezoelectric Ceramics*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2, 59–71.
- [24] HA, S. K., KEILERS, C., CHANG, F.-K. (1992) *Finite Element Analysis of Composite Structures Containing Distributed Piezoceramic Sensors and Actuators*, AIAA Journal, 30, 3, 772–780.
- [25] HEYLIGER, P. R., RAMIREZ, G., SARAVANOS, D. A. (1994) *Coupled Discrete-Layer Finite Elements for Laminated Piezoelectric Plates*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 10, 971–981.
- [26] HOLLAND, R., EERNISSE, E. P. (1968) *Variational Evaluation of Admittances of Multielectroded Three-dimensional Piezoelectric Structures*, IEEE Trans. Sonics Ultrasonics, 15, 199–132.
- [27] HWANG, W.-S., PARK, H. C. (1993) *Finite Element Modeling of Piezoelectric Sensors and Actuators*, AIAA Journal, 31, 5, 930–937.
- [28] HWANG, W.-S., PARK, H. C., HWANG, W. (1993) *Vibration Control of a Laminated Plate with Piezoelectric Sensor/Actuator : Finite Element Formulation and Modal Analysis*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 4, 317–329.
- [29] IMBERT, J. (1991) *Analyse des structures par éléments finis*, Éditions Cepudues.

- [30] JOHNSON, C. D., KIENHOLZ, D. A. (1982) *Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers*, AIAA Journal, 20, 9, 1284–1290.
- [31] LO, K. H., CHRISTENSEN, R. M., WU, E. M. (1977) *A High-Order Theory of Plate Deformation Part 1 : Homogeneous Plates*, Journal of Applied Mechanics, 44, 4, 663–668.
- [32] LO, K. H., CHRISTENSEN, R. M., WU, E. M. (1977) *A High-Order Theory of Plate Deformation Part 2 : Laminated Plates*, Journal of Applied Mechanics, 44, 4, 669–676.
- [33] LUEG, P. (1936), *Process of Silencing Sound Oscillations*, US Patent No. 2 043 416.
- [34] MALLIKARJUNA, KANT, T. (1993) *A Critical Review and Some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches*, Composite Structures, 23, 293–312.
- [35] MEGSON, T. (1990) *Aircraft Structures for engineering students*, Halsted Press.
- [36] NAILLON, M., COURSAINT, R. H., BESNIER, F. (1983) *Analysis of Piezoelectric Structures by a Finite Element Method*, ACTA Electronica, 25, 4, 341–362.
- [37] NOOR, A. K., BURTON, W. S. (1989) *Assessment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates*, Applied Mechanic Review, 42, 1, 1–13.
- [38] PILLASCH, D. W., MAJERUS, J. N., ZAK, A. R. (1983) *Dynamic Finite Element Model for Laminated Structures*, Computers & Structures, 16, 1-4, 449–455.
- [39] PRYOR, JR., C. W., BARKER, R. M. (1971) *A Finite Element Analysis Including Transverse Shear Effects for Applications to Laminated Plates*, AIAA Journal, 9, 5, 912–917.
- [40] RAY, M. C., BHATTACHARYA, R., SAMANTA, B. (1993) *Exact Solutions for Static Analysis of Intelligent Structures*, AIAA Journal, 31, 9, 1684–1691.
- [41] RAY, M. C., RAO, K. M., SAMANTA, B. (1992) *Exact Analysis of Coupled Electroelastic Behaviour of a Piezoelectric Plate under Cylindrical Bending*, Computers & Structures, 45, 4, 667–677.
- [42] REDDY, J. N. (1984) *A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates*, Journal of Applied Mechanics, 51, 745–752.
- [43] REDDY, J. N., BARBERO, E. J., TEPLY, J. L. (1989) *A Plate Bending Element Based on a Generalized Laminate Plate Theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 2275–2292.
- [44] REHFELD, L. W., VALISETTY, R. R. (1983) *A Comprehensive Theory for Planar Bending of Composite Laminates*, Computers & Structures, 16, 1–4, 441–447.
- [45] REN, J. G. (1986) *A New Theory of Laminated Plate*, Composites Science and Technology, 26, 225–239.
- [46] ROBBINS, JR., D. H., REDDY, J. N. (1993) *Modelling of Thick Composites Using a Layerwise Laminate Theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, 655–677.
- [47] SAMANTA, B., RAY, M. C., BHATTACHARYYA, R. (1996) *Finite Element Model for Active Control of Intelligent Structures*, AIAA Journal, 34, 9, 1885–1893.

- [48] SUN, C.-T., WITHNEY, J. M. (1973) *Theories for the Dynamic Response of Laminated Plates*, AIAA Journal, 11, 2, 149–160.
- [49] TIERSTEN, H. F. (1969) *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press.
- [50] TOLEDANO, A., MUKARAMI, H. (1987) *A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminated Configurations*, Journal of Applied Mechanics, 54, 1, 181–189.
- [51] TZOU, H. S. (1991) *Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Shells : Theory and Experiment*, Mechanical Systems and Signal Processing, 5, 3, 199–214.
- [52] TZOU, H. S. (1993) *Piezoelectric Shells : Distributed Sensing and Control of Continua*, Kluwer Academic Publishers.
- [53] TZOU, H. S., TSENG, C. I. (1991) *Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems : Finite Element Formulation and Applications*, Mechanical Systems and Signal Processing, 5, 3, 215–231.
- [54] VERIJENKO, V. E., ADALI, S., PISKUNOV, V. G. (1995) *Finite Element Based on Shear Normal Deformation Theory for the Analysis of Laminated Composite Plates*, Computers & Structures, 54, 5, 789–807.
- [55] WITHNEY, J. M., PAGANO, N. J. (1970) *Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates*, Journal of Applied Mechanics, 37, 4, 1031–1036.