

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIVATES  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU*  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

**POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES DE MATERIAL DIDÁTICO  
PARA EXPLORAR RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

Geovana Luiza Kliemann

Lajeado, janeiro de 2015

Geovana Luiza Kliemann

**POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES DE MATERIAL DIDÁTICO  
PARA EXPLORAR RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Centro Universitário UNIVATES, como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Madalena Dullius

Lajeado, janeiro de 2015

Geovana Luiza Kliemann

**POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES DE MATERIAL DIDÁTICO  
PARA EXPLORAR RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

A Banca Examinadora abaixo aprova a Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, como parte da exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências Exatas, na linha de pesquisa Tecnologias, Metodologias e Recursos Didáticos para o Ensino de Ciências e Matemática.

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Madalena Dullius – orientadora  
Centro Universitário UNIVATES

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ieda Maria Giongo  
Centro Universitário UNIVATES

Prof. Dr. Rogério Schuck  
Centro Universitário UNIVATES

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Nélia Maria Pontes Amado  
Universidade de Algarve

Lajeado, janeiro de 2015

Dedico esta dissertação a três pessoas especiais que são exemplos na minha vida, meu pai Geovani Luiz Kliemann, minha mãe Maria Regani Kliemann e ao meu noivo Fabiano Eloir Delavald, pois tudo que conquistei foi porque vocês estavam ao meu lado oferecendo seu apoio, seu incentivo, passando forças para eu seguir em frente e não desistir nos momentos difíceis.

Geovana Luiza Kliemann

Janeiro/2015

## **AGRADECIMENTOS**

Ao longo desta caminhada de pesquisa, pude contar com o apoio de algumas pessoas que sempre estiveram ao meu lado e que são simplesmente especiais, além de ter a oportunidade de conhecer outras que foram muito significativas, ambas me apoiaram e me incentivaram para eu chegar a alcançar mais um grande objetivo na vida: concluir o mestrado. Agradeço de coração a todos que participaram de alguma forma, desta etapa importante, e que contribuíram para que esse sonho se concretizasse. Não terei como mencionar todas, porém não posso deixar de citar algumas.

Agradeço ao meu noivo Fabiano que esteve ao meu lado sempre, e com palavras tranquilas acalmava o meu coração nos momentos em que o medo de eu não conseguir se aproximava. Obrigada pela parceria, pelo amor incondicional e por ter comemorado comigo cada etapa desta vitória.

Aos meus pais Geovani e Regani e à minha irmã Andréia, que torceram pela minha conquista com orgulho, poupando-me de situações que pudessem trazer preocupação, evitando que eu saísse do foco principal. Pelas orações, conselhos e pela educação proporcionada. Isso me fez acreditar que eu era capaz de ir além.

A todos os familiares que auxiliaram de alguma forma para que esse sonho se concretizasse, em especial, à minha tia Janice Schmitt pelas dicas importantes na finalização da escrita deste trabalho.

Aos professores que fizeram parte da minha caminhada escolar e acadêmica e, em especial à minha orientadora Madalena, pela amizade construída, pelas orientações e oportunidades de compartilhar conhecimentos ao longo desses dois anos de estudo.

Às alunas da graduação e professoras bolsistas do Observatório da Educação pelas contribuições.

Aos professores (as) das seis escolas do Vale do Taquari, parceiras do Programa, por terem disponibilizado espaço e tempo para desenvolver a prática desta pesquisa.

Às colegas de mestrado Ana Paula Krein, Ana Paula Dessoy, Neiva, Giane e Lucy pelo apoio, motivação, risadas, troca de ideias e amizades construídas.

Aos meus colegas de trabalho da escola São Miguel de Linha Sítio, que me apoiaram e compreenderam a importância desta caminhada.

A CAPES e Univates, pela oportunidade e apoio financeiro.

A Deus, pela minha saúde, força e persistência.

## RESUMO

Esta dissertação enfatiza a resolução de problemas como metodologia para o ensino de Matemática. Para aprofundar os conhecimentos acerca do estudo, foi fundamental o apoio teórico de diversos autores, entre os quais destacam-se Carvalho (2012), Diniz (2001) e Krulik e Reys (1997), Onuchic, Polya (1995), Lopes (2009), além dos PCN's. Essa investigação visou diagnosticar como e para que os professores do 1º ano do Ensino Médio de seis escolas estaduais do Vale do Taquari usam os livros didáticos de Matemática e perceber como estes materiais apresentam a resolução de problemas. Além disso, objetivou-se criar um material didático para os professores abordarem Matemática através da resolução de problemas. Para atingir os objetivos propostos, foi realizado um estudo qualitativo em que os pesquisadores estiveram constantemente envolvidos durante o processo. Inicialmente, foi realizada uma entrevista com 10 professores de Matemática para perceber a importância que estes profissionais atribuem aos livros didáticos no planejamento e no desenvolvimento de suas aulas e identificar suas percepções em relação à abordagem da resolução de problemas no contexto atual. Posteriormente, foi realizada uma análise dos livros didáticos da série envolvida, adotados nas escolas contempladas nas entrevistas iniciais. Por fim, foi produzido o material para intervenção pedagógica com intuito de auxiliar os professores a utilizarem esta metodologia de forma diferenciada. O material foi experimentado e problematizado por sete professores e seus respectivos alunos. Como principal instrumento de coleta de dados foram utilizados os relatos, escritos e falados, dos professores de Matemática sujeitos da pesquisa. Esses relatos, após análise, resultaram em diferentes categorias. Como resultados, é possível destacar que os livros didáticos são utilizados pelos professores sob diferentes aspectos e que apresentam algumas inovações, mas os problemas vêm, na maioria das vezes, vinculados a algum conteúdo específico. Percebeu-se que os educadores apresentaram muita capacidade para inovar mostrando, portanto, que o apoio a partir de material concreto pode ser bastante significativo. Concluiu-se, também, que um profissional sozinho apresenta maior dificuldade em diversificar sua prática, porém, com pequenos incentivos é capaz de realizar inovações positivas que beneficiam a aprendizagem de seus alunos. Considera-se, portanto, que esta pesquisa possibilitou reflexões e até mesmo mudanças na percepção dos docentes quanto à metodologia da resolução de problemas.

**Palavras-chave:** Resolução de Problemas. Ensino de Matemática. Livro didático.

## **ABSTRACT**

This thesis emphasizes the problem solving as a methodology to the Mathematics teaching. In order to increase the knowledge about the study, theoretical support of several authors was fundamental, and among those Carvalho (2012), Diniz (2001) and Krulik and Reys (1997), Onuchic, Polya (1995), Lopes (2009) stand out, beyond the PCNs. This research aimed to diagnose how and what for teachers of the 1st year of High School, from six public schools in Vale do Taquari use Mathematics textbooks and to understand how these materials feature the problem solving. In addition, it aimed to create a teaching material for teachers to approach Mathematics through problem solving. In order to achieve the proposed objectives, we conducted a qualitative study in which researchers were continually involved in the process. Initially, an interview was conducted with 10 Mathematics teachers to realize the importance these professionals attribute to textbooks in planning and development of their classes and identify their perceptions of the approach to problem solving in the current context. Subsequently, an analysis of the textbooks of the series involved was held, adopted in schools included in the initial interviews. Finally, the material for educational intervention was produced to help teachers to use this methodology in different ways. The material was tested and questioned by seven teachers and their students. The main data collect instruments were written and spoken reports from the subjects of the research, the Mathematics teachers themselves. These reports, after analysis, resulted in different categories. As a result, it is possible to point out that textbooks are used by teachers under different aspects and that they present some innovations, but the problems are, in most cases, linked to some specific content. It was possible to notice that the teachers had a substantial capacity to innovate by showing, therefore, that the support from factual material can be quite significant. It was also possible to conclude that a professional, working alone, is harder to diversify his practice, but with some incentives he can accomplish positive innovations that benefit the learning of his students. It is considered, therefore, that this research allowed reflections and even changes in the perception of teachers as to methodology of problem solving.

**Keywords:** Problem Solving. Mathematics Teaching. Textbook.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Livro de BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a matemática. 1ª ed. São Paulo, 2010. ....	47
Figura 2 - Organização geral do livro.....	48
Figura 3 - Objetivos do capítulo .....	49
Figura 4 - Situação introdutória à unidade. ....	50
Figura 5 - Exercício resolvido. ....	51
Figura 6 - Situação e atividades de interpretação. ....	52
Figura 7 - Problema e sua abordagem. ....	53
Figura 8 - Questão de vestibular.....	55
Figura 9 - Livro de RIBEIRO, Jackson. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010. ....	58
Figura 10 - Organização geral da obra. ....	58
Figura 11 - Abordagem à metodologia da Resolução de Problemas.....	59
Figura 12 - Sugestões de leitura. ....	61
Figura 13 - Sugestão de leitura. ....	62
Figura 14 - Livro de DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2010. ....	63
Figura 15 - Organização dos conteúdos. ....	64
Figura 16 - Exemplo de exercícios propostos ao longo do capítulo 1.....	65

Figura 17 - Introdução do capítulo 2. ....	66
Figura 18 - Exemplo abordagem seção “Tim-tim por Tim-tim” .....	67
Figura 19 - Questão do Enem. ....	69
Figura 20 - Leitura sugerida. ....	70
Figura 21 - Livro de PAIVA, Manoel. Matemática. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.....	71
Figura 22 - Organização dos conteúdos. ....	71
Figura 23 - Exemplo de problema introdutório. ....	72
Figura 24 - Exemplo de exercício resolvido.....	73
Figura 25 - Exemplo de problema. ....	73
Figura 26 - Ficha de autoavaliação de resolução de problemas. ....	74

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1– Artigos consultados da área de Ensino. ....	27
Quadro 2 - Questões das entrevistas. ....	36
Quadro 3 - Quantidade de problemas e exercícios na seção “Questões de Vestibular” .....	56
Quadro 4 - Quantidade de problemas e exercícios para revisão de conteúdos.....	57
Quadro 5 - Quantidade de problemas e exercícios na seção “Prepare-se” .....	62
Quadro 6 - Categorias de análise. ....	87

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS.....</b>	<b>18</b>
2.1 Livros didáticos.....	18
2.2 Resolução de problemas .....	21
2.3 Pesquisa sobre resolução de problemas e livros didáticos.....	26
<b>3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>31</b>
<b>4 COLETA DE DADOS INICIAL.....</b>	<b>35</b>
4.1 Entrevista com professores .....	35
4.2 Análise de livros didáticos .....	47
<b>5 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA.....</b>	<b>75</b>
5.1 Constituição do grupo de professores envolvidos .....	75
5.2 Descrição do material .....	77
5.3 Análise de dados .....	87
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>100</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>105</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>110</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Diante das constantes mudanças no contexto social e, conseqüentemente educacional, espera-se que estudantes formados no Ensino Médio tenham condições de viver em sociedade de forma a terem autonomia para resolverem seus problemas pessoais. Para tanto, o sistema educacional é alterado constantemente buscando abranger uma formação de maior qualidade para o educando viver com os demais.

Pensando nisso e sabendo do acesso que as escolas têm a diferentes ferramentas para o ensino, tem-se percebido a preocupação dos professores em usarem recursos tecnológicos em sua prática, pois somente o livro didático nas aulas de Matemática caracteriza o docente como tradicional. No entanto, o que distingue o tipo de ensino e de metodologia é a prática do professor e não as ferramentas que ele utiliza. Apesar disso, sua presença nas escolas é visível e, apesar dos avanços tecnológicos na área educacional, o livro didático tem ocupado um papel importante. Ainda assim, ele é mencionado por alguns professores como símbolo de aulas ultrapassadas, tradicionais ou até mesmo um recurso desnecessário no contexto atual, o que contradiz o fato de ver os professores rotineiramente acompanhados de livros didáticos. Quanto a isso, Lopes (2009, p. 35) coloca que “é inegável a importância do livro didático de Matemática na educação brasileira, tanto pelo aspecto histórico no processo ensino-aprendizagem dessa disciplina quanto pelo que ele representa nas aulas, segundo a maioria dos professores”. Porém, o uso do livro didático como um guia para trabalhar nas aulas de Matemática, restringe-a numa ciência linear, evitando que se criem diferentes aplicabilidades à Matemática no contexto social. Considerando que diferentes ferramentas de ensino podem ser valiosas nas mãos de profissionais que têm claro seus objetivos a alcançar no processo de ensino, o uso do livro didático é válido, porém utilizá-lo exclusivamente de forma isolada diminui a possibilidade de diferentes interações entre aluno e professor. O livro não pode

substituir o papel do professor nem ser detentor de conhecimentos acabados, e sim constituir um recurso auxiliar à aprendizagem, não se pode esperar que, por si só, ele garanta o desenvolvimento do conhecimento dos alunos. Na opinião de Machado (1997, p. 112): “Utilizando de modo adequado, o livro mais precário é melhor do que nenhum livro, enquanto o mais sofisticado dos livros pode tornar-se pernicioso, se utilizado de modo catequético”.

Se o sistema educacional vem se modificando, deve-se também ao fato de os alunos serem outros em relação a anos passados. Eles têm outros princípios e valores, e as metodologias de ensino, por sua vez, não podem ser mais as mesmas que foram em outros tempos. É pertinente questionar o que realmente é significativo ensinar atualmente. Isso não significa que o que era feito até então deva ser descartado, e sim, que a partir disso pode-se cada vez fazer melhor. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+) possivelmente não existem livros didáticos e laboratórios didáticos “perfeitamente adequados” ou ideais que possam ser “adotados” para percursos tão variados, capazes de atender a cada realidade escolar nesse contexto de reforma (BRASIL, 2002, p. 136). Isso requer um professor criativo, que utilize diferentes materiais e metodologias para o ensino ser mais significativo ao aluno. Ainda de acordo com os PCN+, “seria altamente recomendável que cada escola produzisse novos materiais, com improvisações, com elementos de baixo custo e, o que é mais fundamental, com a contribuição da comunidade escolar, especialmente dos alunos” (BRASIL, 2002, p. 136).

A educação no nosso País apresenta índices preocupantes no contexto educacional atual. Diante desse fato, é visível a inquietação dos educadores na busca de soluções para melhorar este quadro. Para tanto, é preciso ter clareza do que se espera que os alunos aprendam e, a partir disso, fazer um planejamento de ensino mais adequado. Devido ao baixo desempenho na Matemática, vem sendo desenvolvidas inúmeras pesquisas na área educacional além de altos investimentos dos governos na capacitação de professores, principalmente em formação continuada, visando melhorar a qualidade de ensino. Este assunto é objeto de estudo em muitos países, uma vez que a Matemática é uma das maiores responsáveis pela repetência de alunos da Educação Básica. A Matemática trabalhada de forma rígida, em sala de aula, que é acompanhada de regras prontas, descontextualizada do cotidiano social, pode ser uma das causas desse baixo desempenho. O fato não está na Matemática em si, mas possivelmente relacionada aos programas de ensino, à clareza dos objetivos e à maneira como é abordada com os estudantes.

O sistema educacional brasileiro tem índices que apontam para a qualidade da educação, os quais são obtidos com base nos resultados de avaliações externas que são encaminhadas às escolas de Educação Básica e resolvidas pelos alunos de determinadas séries. A Prova Brasil, o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos) e o ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes), são avaliações utilizadas para fazer esse diagnóstico.

Buscando promover estudos e pesquisas no sentido de qualificar a Educação Básica no Brasil, a CAPES/INEP lançou o Programa Observatório da Educação pelo Edital 038/2010/CAPES/INEP. Este vem sendo desenvolvido, desde 2011, no Centro Universitário UNIVATES, em Lajeado/RS, e é intitulado “Relação entre a formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica e as competências e habilidades necessárias para um bom desempenho nas provas de Matemática do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE”. No âmbito deste programa, a autora desta dissertação está inserida e realizou este estudo visando contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Diante disso, a presente dissertação baseia-se nas investigações iniciadas em 2011, acerca dos sistemas avaliativos externos da Prova Brasil e SAEB, por meio dos quais verificou-se que as provas de Matemática possuem como foco a resolução de problemas, tornando-se esta a temática da proposta. Neste sentido, os PCN+ apontam que “a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (BRASIL, 2002, p. 112). Ainda em relação à resolução de problemas, os PCN+ reforçam que, se apresentarmos ao aluno apenas exercícios de aplicação, ele somente busca em sua memória uma técnica que já conhece e segue esse padrão e, diante de situações diferentes ao que está acostumado, não é garantido que saiba aplicar seus conhecimentos. Portanto, é preciso proporcionar aos alunos problemas desafiadores, diferentes do que estão acostumados para desafiá-los a resolverem os respectivos problemas apoiando-se em seus conhecimentos prévios e não seguindo rigorosamente um único modelo ou um exemplo habitual.

Desse modo, a pesquisa desenvolvida está relacionada à resolução de problemas e a sua presença nos livros didáticos de Matemática, sendo que estes são utilizados pelos professores em suas práticas pedagógicas. Estudos confirmam que o livro didático tem papel significativo na educação escolar e em especial na Matemática, para Lopes (2009) o livro é

elemento de apoio para o professor sua presença é necessária ou mesmo indispensável, gerando “dependência docente”. Tal fato nos remete à preocupação da qualidade do material disponibilizado nos livros adotados pelas escolas. Para Amaral (2006), o livro didático continua sendo o mais importante recurso para a maioria dos professores, apesar da diversidade de recursos, ele ainda é usado como manual completo, como fonte de textos, ilustrações e atividades desenvolvidas de forma cabal e, muitas vezes, conforme sequência proposta pelo autor do livro. Já Costa e Nogueira (2010, p. 122) colocam que o livro didático é o apoio do professor, pois “apresentam, de forma mais ou menos organizada, aquilo que foi definido como saberes a serem ensinados na escola”.

Em virtude da atual relevância dada pelos professores aos livros didáticos, este estudo propõe uma análise de como este material didático utilizado nas escolas de Educação Básica, apresenta a resolução de problemas. Isso pode ser um indicativo de como são abordados e explorados os conteúdos de Matemática, uma vez que acredita-se na resolução de problemas como um meio favorável para o aluno chegar à compreensão de conteúdos, através de estratégias próprias do sujeito. Schroeder e Lester apud Onuchic (1999, p. 207) afirmam que o “Ensino de Matemática através da resolução de problemas não tem sido adotado, quer implicitamente quer explicitamente, por muitos professores, autores de livros e promotores de currículos [...]”.

A partir dessas reflexões, destaca-se como tema desta pesquisa: elaboração de um material didático como apoio a professores, de seis escolas estaduais do Vale do Taquari, para inserção da resolução de problemas nas aulas de Matemática.

As questões norteadoras desta pesquisa são:

- Como a resolução de problemas é abordada em alguns livros didáticos de Matemática do 1º ano do Ensino Médio?
- Quais as potencialidades e limitações de um material didático elaborado para um grupo de professores de Matemática?

O objetivo geral intencionou “Auxiliar professores de Matemática, por meio de material didático, a abordarem resolução de problemas em suas aulas, desvinculado de conteúdos específicos”.

Especificamente pretende-se:



- Investigar como e para que os professores de seis escolas usam os livros didáticos de Matemática;
- Analisar como os livros didáticos de Matemática do 1º ano do Ensino Médio adotados em seis escolas estaduais do Vale do Taquari, RS apresentam a resolução de problemas;
- Criar material auxiliar para os professores abordarem a Matemática através da resolução de problemas sob diferentes aspectos.
- Averiguar por meio de observações e relatos se o material construído favorece a abordagem de resolução de problemas matemáticos.

Diante disso, foram realizadas algumas ações para atingir os objetivos propostos. Primeiramente, fez-se uma entrevista com professores do 1º ano do Ensino Médio de seis escolas estaduais do Vale do Taquari para perceber a importância atribuída ao livro didático no planejamento e desenvolvimento das aulas de Matemática. Posteriormente, analisou-se como a resolução de problemas é apresentada nos livros didáticos adotados nessas escolas para, em seguida, produzir um material de apoio, com foco na resolução de problemas, sem vínculo específico a conteúdos matemáticos. Após, este material foi disponibilizado aos professores para verificarem se o mesmo auxiliou-os no processo de ensino por meio da resolução de problemas.

Esta pesquisa, após sua conclusão, será disponibilizada aos interessados, com o intuito de socializar experiências. A intenção é possibilitar novas reflexões e contribuições aos professores em sua profissão e assim provocar melhorias nos atuais índices educacionais.

O presente estudo está estruturado em seis capítulos, sendo este o primeiro, onde são apontadas as motivações que nos levaram a investigar o tema e a propor a intervenção pedagógica desenvolvida. No segundo capítulo, são apresentados os referenciais teóricos que dão suporte à pesquisa, esses que enfatizam a importância e a necessidade da resolução de problemas matemáticos e a relevância dos livros didáticos no ensino da Matemática. Essas reflexões motivaram à construção de um material didático passível de ser utilizado por professores, diagnosticando suas possíveis potencialidades e limitações para o processo de ensino e aprendizagem. Em seguida, no terceiro capítulo, descrevem-se os procedimentos metodológicos empregados neste estudo qualitativo, para alcançar os objetivos previstos.

No capítulo quatro, é exibida a coleta de dados inicial que contou com a participação de 10 professores que se dispuseram a compartilhar suas concepções, a cerca do tema em estudo, por meio de entrevistas gravadas. Além de uma análise a quatro livros didáticos de Matemática adotados por esses profissionais em suas respectivas escolas. No quinto, é descrito como se constituiu o grupo de professores envolvidos na intervenção pedagógica, detalhando o que foi abordado no material elaborado e a análise de como transcorreu a prática, baseadas na produção escrita dos professores, nas anotações da pesquisadora durante os encontros vivenciados e ainda nas trocas de *emails* entre sujeitos e pesquisadores. Por fim, no sétimo capítulo, tecem-se as considerações a respeito da pesquisa, destacando aspectos relevantes e procurando responder algumas inquietações inicialmente diagnosticadas.

A seguir, apresenta-se o diálogo com os referenciais teóricos utilizados para o desenvolvimento da proposta.

## **2 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS**

Os pressupostos teóricos que norteiam esta investigação estão fundamentados na abordagem da Matemática através da resolução de problemas e de livros didáticos, buscando, pois, uma relação entre ambos. Este capítulo está dividido em três subseções: Livros didáticos; Resolução de problemas e Pesquisa sobre resolução de problemas e livros didáticos.

### **2.1 Livros didáticos**

A Matemática é uma ciência presente no cotidiano do ser humano, constituindo-se, portanto, em uma disciplina do currículo escolar. No entanto, uma e outra poderiam estar mais vinculadas, pois a Matemática escolar vem das necessidades que o homem teve e tem no seu dia a dia. Entretanto, parece não ser assim que ela é apresentada em sala de aula, uma vez que algumas crianças apresentam dificuldades para resolverem problemas matemáticos na escola e se saem muito bem nos problemas da vida. Isso pode estar relacionado ao fato de que “a experiência cotidiana parece enriquecer os números de significado” (CARRAHER, 2001, p. 122) e outros ao contrário têm boas notas na escola e no cotidiano apresentam dificuldades. A autora diz ter observado que “os aprendizes não conseguiam utilizar o conhecimento escolar para solucionar um problema prático” (p. 82). Esta contradição é preocupante já que segundo Carraher (p. 45), “A Matemática é hoje tanto uma ciência como uma habilidade necessária à sobrevivência numa sociedade complexa e industrializada”.

A Matemática é a base para vivermos em sociedade, e conforme os PCN+ (BRASIL, 2002, p. 111) “[...] o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento”. Assim é importante o conhecimento de sua aplicabilidade em diferentes situações.

Atualmente, há nas escolas uma vasta quantidade de materiais ou recursos didáticos voltados ao ensino e à aprendizagem da Matemática, estes possibilitam explorar sob diferentes aspectos a Matemática estudada na escola, permitindo ao aluno visualizar sua importância no contexto social. Dentre as ferramentas de ensino, o livro didático é o material ao qual o aluno tem acesso logo no início do período escolar, podendo fazer uso do mesmo com autonomia, uma vez que é oferecido gratuitamente nas escolas de Educação Básica da rede estadual e municipal. Ao fazer uso do mesmo, o aluno, segundo os PCN+ “pode ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem Matemática [...]” (BRASIL 2002, p. 114). O livro de Matemática tornou-se um material didático que tem gerado polêmicas no contexto educacional, sendo apoiado por alguns e criticado por outros. Apesar desta discordância, é algo fortemente presente no contexto escolar, e é um dos instrumentos auxiliares no ensino. Para Bittencourt (2008), o livro didático é um instrumento de propagação do conhecimento escolar, pois, independentemente da época ou da cultura, em suas folhas ficam registrados as verdades, anseios e descobertas de um determinado tempo e geração.

Desde 1985, o livro didático é de livre escolha do professor, quando foi implantado o Programa Nacional do Livro Didático – PNLDD, objetivando ser um instrumento auxiliar e complementar no ensino de Matemática, que apresenta conhecimentos e ideias já construídos por estudiosos e que podem ser significativos para o aluno dependendo de como isso é abordado nas aulas diante do contexto em que está inserido, uma vez que quem encaminha a aula é o professor e não o livro. Dele deve-se tirar proveito para melhorar a construção de novos conhecimentos. Em relação ao livro didático, Dante (1996, p. 89) menciona que:

Mesmo que o livro didático de matemática tenha qualidades suficientes que o credenciem para o trabalho de sala de aula, o professor é quem conhece e se relaciona diariamente com seus alunos. Dessa forma, o livro didático deve ser um meio e não o fim em si mesmo. Com base no conhecimento do aluno e no contexto social em que está inserida a escola, o professor modifica, complementa, insere novos problemas, atividades e exercícios àqueles do livro didático. É como se ele fosse reescrevendo o livro didático com seus alunos.

A escola atualmente não é privilégio de poucos, como em tempos passados. Pelo contrário, no Brasil é obrigatório para jovens até os 17 anos, o que gerou um crescente número de alunos e a necessidade de mais professores. Esse fator modificou fortemente o contexto escolar, uma vez que inclusive quem não quer, precisa frequentar a escola. Diante disso, o livro didático de Matemática se fortaleceu como um auxiliar nas aulas, e segundo Lopes (2009, p. 56), “O livro didático tem ocupado um espaço significativo na instrução escolar, particularmente na área de Matemática”. Para isso, precisa ser explorado de diferentes maneiras, para abranger o interesse de uma diversificada demanda.

Hoje todos os alunos da Educação Básica de rede estadual no Rio Grande do Sul têm contato com o livro didático de forma gratuita. Molina (1988) chegou a afirmar que muitas vezes, o livro didático está tão presente na sala de aula quanto o professor. Ele tem seu significado no contexto educacional e conforme o autor:

O livro didático adquire especial importância quando se atenta para o fato de que ele pode ser, muitas vezes, o único livro com o qual a criança tem contacto. Considerando-se o fato de que ao deixar a escola, pode ocorrer que jamais tornem a pegar em livros, percebe-se que, para muitos cidadãos, o livro didático termina por ser “o” livro (MOLINA, 1988, p. 18).

Atualmente, com o acesso às novas tecnologias e com a distribuição gratuita dos livros didáticos, não há muita dificuldade ao acesso a esses materiais. No entanto, o professor não deve levar a nenhum dos extremos, ou seja, não desvalorizar nem supervalorizar a importância do livro didático nas aulas, tal qual relata Caimi (2002, p. 33) que observando as disciplinas de Estágio Supervisionado na Universidade, constatou que os estagiários de licenciatura buscam no “livro didático – e tão – somente nele – o apoio necessário para tal empreendimento”. Isso faz com que o livro tenha o papel central no processo de ensino, papel esse que deve ser repensado, uma vez que o próprio Ministério da Educação (MEC), no final da década de 1960, afirma que o livro didático é suporte de um trabalho desenvolvido por professores e alunos não podendo ser um elemento isolado dentro do contexto educacional.

Independente do nível dos alunos, o livro didático de Matemática deve ter uma linguagem clara e precisa, podendo auxiliar no desenvolvimento da leitura, ser um recurso de consulta para obtenção de informações científicas, possibilitar o acesso a diferentes culturas da humanidade, permitir o acesso a determinados conceitos, além de ser objeto de pesquisa, favorecendo, pois, a autonomia.

Apesar das mudanças e avanços constatados na educação, o livro continua tendo papel significativo nas escolas e segundo Neto (1974, p. 228) “O livro escolar continuará a ser uma fonte de conhecimento para os aprendizes [...] e as boas escolas continuarão a suplementar os livros escolares com outros tipos de experiências”. Este relato demonstra que o livro há décadas é algo presente no contexto educacional e que tem um valor significativo, mas somente ele não é o suficiente para garantir uma aprendizagem de qualidade, ainda mais hoje em que se vive num contexto em constantes mudanças.

## 2.2 Resolução de problemas

No currículo escolar, a resolução de problemas matemáticos é discutida, porém ainda há um equívoco quanto ao real significado de trabalhar com este foco, onde muitos a compreendem como o fato de “[...] apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica” (ONUHCIC, 1999, p. 199). Há muito tempo, discute-se a importância de utilizar a resolução de problemas nas aulas de Matemática e seus benefícios para o desenvolvimento dos alunos a partir desse método. Apesar disso, percebe-se que muitos alunos têm dificuldade nessa prática. No entanto, fica por vezes a indagação de como o aluno aprende a resolver problemas matemáticos. Relacionado a isso, Polya expõe que:

A resolução de problemas é uma habilitação prática como, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com suas mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os (1995, p. 3).

Na Matemática, não há apenas uma maneira de resolver um problema, permitindo, portanto, o uso de diferentes possibilidades. Contudo, isso parece ser um empecilho para quem está habituado a sempre seguir uma regra ou um padrão. “Ensinar bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para isso. Não há um caminho único para se ensinar e aprender Matemática” (ONUHCIC; ALLEVATO, 2004, p. 214). Trabalhar nas aulas de Matemática abordando a tendência de resolução de problemas exige do professor um amplo conhecimento da Matemática, além de uma flexibilidade a partir das novas ideias que

vão surgindo por parte dos alunos. Por isso, essa tendência é vista por educadores como complexa e de difícil implantação. Conforme Dante (2009, p. 16):

Ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio e incentivo do professor.

Embora a resolução de problemas exija maior dedicação e capacidade por parte de professores, precisa ser explorada com os alunos para desenvolver neles maior autonomia para resolverem seus problemas pessoais. Desde a década de 70, a resolução de problemas vem ocupando espaço no mundo, e os PCNs “indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática na sala de aula” (1998, p. 59), espera-se que o aluno, sob essa tendência, compreenda o processo do que faz, utilize sua criatividade e desenvolva sua capacidade cognitiva, assim a Matemática não é caracterizada unicamente pela memorização e repetição de conceitos e cálculos. Percebe-se nas escolas, que há fortes indícios de aplicação da Matemática por memorização de conteúdos, porém os PCNs apontam a resolução de problemas como uma possível estratégia para modificar esse cenário.

Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 39 e 40)

Apesar da valorização dada à verdadeira ideia de resolução de problemas em pesquisas e estudos, ainda percebe-se que a mesma é utilizada nas escolas como fixação de conteúdos previamente trabalhados, com valorização de fórmulas, mecanização de procedimentos sem compreensão, o que pode resultar na falta de iniciativa dos alunos. Conforme Onuchic (1999, p. 215), é possível iniciar explorando um problema para chegar a um conteúdo, a uma definição, a uma solução, assim, “o problema passa a ser o ponto de partida e que, através da resolução do problema, os professores devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos”. Dessa forma, o aluno tem a possibilidade de aumentar seus conhecimentos e expandir a visão que tem dos problemas, da Matemática e do mundo, fortalecendo sua autonomia.

A exploração da resolução de problemas ainda não está tão presente nas escolas quanto poderia. Para D’Ambrosio (1989), apesar de já estar em discussão há bastante tempo, a

eficácia dessa tendência para o desenvolvimento dos alunos, ainda hoje, parece permanecer impregnado a tradicional aula de Matemática expositiva, em que o professor passa no quadro aquilo que ele considera importante. O aluno, por sua vez, copia para o seu caderno e em seguida faz exercícios de aplicação, que são uma repetição da aplicação de um modelo de solução demonstrado pelo professor. Essa prática reforça a ilusão de que é possível aprender Matemática através da transmissão, e que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. Essa concepção formal é algo que está fortemente presente tanto na concepção do aluno, quanto na prática do professor.

O aluno que frequenta as aulas de Matemática percebe-se por vezes sábio ao ver que chegou a resposta correta em determinado problema matemático, mesmo que para isso tivesse seguido “passo a passo” regras prontas apresentadas em algum exemplo ou explicação anterior. Problemas desse tipo, Diniz (2001, p. 99) chama de “problema tradicional ou convencional”, ou ainda de “simples exercício de aplicação ou fixação de técnicas ou regra”. Aqueles que não conseguem fazer essa reprodução parecem sentir-se incapazes ou com dificuldade de aprender. Diante disso, os alunos que seguem um padrão de resolução podem vir a ficar entediados, já que Matemática conhecida sob esse aspecto não apresenta novidades, pois conforme a autora, esses exercícios apresentam “ausência de um contexto significativo e de uma linguagem condizente com a utilizada em seu dia-a-dia”. Em vista disso, o aluno pode vir a se desmotivar e fazer apenas o mínimo necessário para aprovar no final do ano letivo, “gerando atitudes inadequadas frente ao que significa aprender e pensar em Matemática”. De acordo com os PCNs:

A prática mais frequente na Resolução de Problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas. Desse modo o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações. (BRASIL, 1998, p. 40).

Esta organização de apresentar inicialmente um conteúdo, seguido de exemplos e por fim atividades relacionadas ao conteúdo são comuns em livros didáticos de Matemática. Apesar disso, Diniz (2001) afirma que não é possível trabalhar todos os problemas que o livro didático apresenta, e sim que o professor faça uma seleção dos “melhores” para serem investigados ao máximo. A resolução de problemas não tem como objetivo chegar à resposta certa e sim, criar caminhos para resolver um problema, utilizando os conhecimentos que o aluno tem construído ao longo da sua vida, entendendo o processo usado para chegar a um



fim. No fim da década de 1970, a Resolução de problemas começou a ter um grande destaque a nível mundial, passando a ser o foco da Matemática escolar em 1980.

Durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material passou a ajudar os professores a fazerem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. Entretanto, não deu o tipo de coerência e a direção necessária a um bom resultado porque havia pouca concordância na forma pela qual esse objetivo era encarado. Essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, pelas grandes diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar” (ONUChic, 1999 p. 206).

Com esta visão translúcida, os livros didáticos começaram a apresentar maior quantidade de “problemas matemáticos” que em sua maioria eram passados aos alunos, gerando aulas monótonas, uma vez que a maioria dos problemas tem o mesmo objetivo, tornando-se algo mecânico para o aluno. Isso, segundo a autora (p. 201) é “caracterizado por um trabalho apoiado na repetição”, portanto não criando vínculo com a sua realidade. Em relação a isso, os PCNs (BRASIL, 1998, p. 19) dizem que “Em nosso país o ensino de Matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão”.

Constantemente implantam-se novas propostas educacionais buscando reverter positivamente o contexto atual da educação. Contudo, as propostas nem sempre são válidas para o contexto geral de educação, uma vez que realidades distintas apresentam suas peculiaridades, sendo que uma mesma proposta pode ser positiva para alguns contextos e para outros não surtir o mesmo efeito. Assim também os livros didáticos quando são escolhidos nas escolas devem ter como um dos critérios para seleção, a essência do público destinatário. Atualmente, diante das novas tendências para o ensino de Matemática pode-se explorar diferentes metodologias, que possibilitam uma maior qualidade na aprendizagem. Onuchic diz que:

Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. Em consequência disso, dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de outras matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas (1999, p. 206).

Neste sentido, quando o aluno se depara com um problema novo, que não está vinculado diretamente a um conteúdo específico que esteja estudando, ele pode ter dificuldade

em resolvê-lo, se não foi ensinado a criar estratégias de resolução, esse por vezes tenta lembrar de mecanismos ou fórmulas que lhe foi passado. Portanto, é importante ensinar o aluno a pensar sozinho, buscar caminhos próprios, criando autonomia para resolver um problema, e não se tornar dependente de memorização, uma vez que a Educação Básica nas escolas estaduais visa, entre outros objetivos, formar cidadãos capazes de entrar para o mercado de trabalho e conviver em sociedade sabendo fazer relações entre os conteúdos aprendidos.

Sob esse aspecto, o livro didático de Matemática é um material que apresenta conteúdos, fornece inúmeros exemplos e atividades para serem resolvidos, porém deve-se ter cuidado para perceber a qualidade desse material e o quanto ele favorece para o desenvolvimento do aluno, sendo que um exercício e um problema se distinguem um do outro e desenvolvem diferentes habilidades.

Dante (2009, p. 48) faz uma distinção entre exercício e problema matemático: “Exercício [...] serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício, extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas”. Esse tipo de atividade é comum ver em livros de Matemática quando se chega de forma rápida à resposta, por meio de caminhos rotineiros. Diferentemente disso, a solução de um problema exige estratégias que oportunizam o aluno a decidir qual é a mais adequada para um determinado problema. Quanto a isso, o autor define que um problema “[...] é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução. [...] exige certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias”. Essas definições devem ficar claras para os educadores, uma vez que os livros didáticos de Matemática trazem ambas as situações que exploram diferentes aspectos, evitando assim que um problema seja apresentado ou explorado como um exercício. Em relação a isso, Pozzo e Echeverría (1998, p. 15) dizem que:

[...] sem compreensão das tarefas os problemas se transformam em pseudoproblemas, em meros exercícios de aplicação de rotinas aprendidas por repetição e automatizadas, sem que o aluno saiba discernir o sentido do que está fazendo e, por conseguinte, sem que possa transferi-lo ou generalizá-lo de forma autônoma a situações novas, sejam cotidianas ou escolares.

Apesar das diferenças entre exercício e problema, ambos possuem, segundo os autores, uma “sutil relação”, “cujos limites nem sempre são fáceis de estabelecer”, mas que o problema “exige algo mais”, fazendo com que, “muitas vezes, os alunos não habituados a resolver problemas se mostram inicialmente reticentes e procuram reduzi-los a exercícios

rotineiros”. Essa realidade reforça ainda mais o papel do professor que, ao apresentar um problema matemático em suas aulas, deve instigar o aluno na busca da solução. Enfatizando isso, Pozo e Angón (1998, p. 164 e 165) afirmam que:

O controle estratégico que os alunos possam exercer sobre sua própria aprendizagem esteja ainda limitado pela idade e eles necessitem de um maior apoio externo, procurar-se-ia induzir neles, gradativamente, atitudes e hábitos dirigidos à solução de problemas. Do contrário, se as atividades práticas são desde o início meros exercício de aplicação, logo será muito difícil modificar esses hábitos adquiridos, de forma que os alunos mostrarão resistência a assumir o controle, a refletir e a tomar decisões sobre como enfrentar o problema, e esperarão sempre que alguém – o professor ou o livro – lhes simplifique a tarefa e a reduza mais uma vez a um simples exercício de aplicação.

Cabe ao professor fazer com que o aluno perceba que a Matemática presente na escola é a Matemática do cotidiano, que ambas não seguem uma linearidade, e para se chegar a resolver um problema matemático não é necessário saber regras, fórmulas e conteúdos específicos. É preciso abrir a mente e criar estratégias que levem à solução do problema. Para isso é importante que o professor faça uma seleção de problemas a serem explorados e propicie rotineiramente espaços para discussão e exploração das ideias, desenvolvendo nos alunos o pensamento matemático e, conseqüentemente, perceber os conteúdos ligados ao problema. Assim o modelo tradicional descrito por Cavalcanti “[...] o trabalho com resolução de problemas se inicia após a introdução de conteúdos matemáticos, ou seja, após as operações serem apresentadas aos alunos” (2001, p. 123), pode ser repensado pelo professor na sua prática com resolução de problemas.

### **2.3 Pesquisa sobre resolução de problemas e livros didáticos**

Procurando conhecer e relacionar outros trabalhos já realizados sobre a temática desenvolvida nesta pesquisa, ou seja, a resolução de problemas e os livros didáticos de Matemática, houve uma busca por artigos, nas edições de 2008 até 2013, em revistas com versão online. Foram selecionados periódicos classificados com qualis A<sub>1</sub> e A<sub>2</sub> pela CAPES na área de Ensino, buscando, nos títulos e palavras-chave dos artigos, os termos “livro didático” e “resolução de problemas”. Nessas condições, foram localizados 58 artigos, em 10 periódicos diferentes, sendo que, nos demais, não foram encontrados trabalhos a partir das palavras-chave definidas. A revisão bibliográfica descrita refere-se a quatro desses artigos,

que foram selecionados por relacionarem as palavras chaves ao foco deste projeto, sendo possível estabelecer relações entre estes estudos e a proposta desenvolvida, conforme apresentados no Quadro 1, abordando o uso do livro didático nas aulas, a importância da resolução de problemas para o ensino e aprendizagem da Matemática e abordagem diferenciada na resolução de problemas.

O objetivo é apresentar uma breve ideia daquilo que vem sendo pesquisado na área da Educação acerca da resolução de problemas e livros didáticos. Após finalizar a busca por artigos, percebeu-se que são poucos os trabalhos que relacionam a temática, o que motivou ainda mais explorar o tema.

Quadro 1– Artigos consultados da área de Ensino.

<b>Nome da revista</b>	<b>Artigo/Autor/Ano</b>
Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências.	Livros didáticos baseados em apostilas: como surgiram e por que foram amplamente adotados. Marcos José Chiquetto e Sonia Krapas (2012).
Bolema	Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Onuchic e Allevato (2011).
Bolema	As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. Onuchic e Allevato (2008).
Lusófona de Educação	A formação de professores e o livro didático. Horikawa e Jardimino (2010).

Fonte: Das autoras<sup>1</sup>, 2013.

Chiquetto e Krapas (2012) apresentam um estudo sobre o ensino de Física no Brasil sendo caracterizado como matematizado e desvinculado da prática, atribuindo ao livro didático tal fato. Comentam que grande parte das pessoas recorda que as disciplinas de Matemática, Física e Química estavam relacionadas a livros didáticos.

Os autores relatam que as apostilas ou livros apostilados estão organizados com foco na conceituação e resolução de exercícios, na aplicação de fórmulas e não para atividades integradas a outras áreas e formas de raciocínio, e as mesmas tiveram grande aceitação dos professores. Este trabalho parte do pressuposto de que, a referência da disciplina de Física no Brasil foram os livros didáticos, e isto se evidencia a partir das ideias de Moreira (2000, p. 95), "muito do ensino de Física em nossas escolas secundárias está, atualmente, (...) referenciado por livros”.

<sup>1</sup> A identificação “Das autoras” se refere à mestranda e a orientadora da pesquisa.

Neste artigo, os autores apresentam resultados da análise de 17 coleções de três volumes e evidenciam que muitos desses livros se assemelham às apostilas dos cursinhos pré-universitários da década de 70, um pouco mais elaborados. A conclusão apresentada pelos autores é algo que nos preocupa, ao mencionar que, “A liderança de mercado do livro didático levou uma porção majoritária desses professores a adotar essas práticas, que foram transmitidas aos alunos, que mais tarde se tornaram professores” (2012, p. 179). A profissionalização do nível médio, a partir da década de 60, gerou um gigantesco déficit de professores qualificados, assim a partir da década de 70, professores de cursinhos que eram médicos e engenheiros passaram a lançar seus livros didáticos com a principal característica de uma abreviada explanação teórica centralizada nos aspectos matemáticos das leis físicas, acompanhada de exercícios resolvidos, seguidos por propostas de exercícios conforme o modelo. Para finalizar, esse material dispunha de exercícios de recapitulação para o aluno fazer em casa.

Ainda segundo os mesmos autores, isso se tornou uma técnica constantemente utilizada para trabalhar com os alunos, evitando imprevistos, pois estavam programados a resolverem determinados tipos de exercícios. Eles afirmam que aboliu-se o "problema" da maneira como é definido por Echeverría e Pozo passando a ser abordado como "meros exercícios de aplicação de rotinas aprendidas por repetição e automatizadas, sem que o aluno saiba discernir o sentido do que está fazendo e, por conseguinte, sem que possa transferi-lo ou generalizá-lo de forma autônoma a situações novas, sejam cotidianas ou escolares", bastando decorar “macetes”.

Onuchic e Allevato (2011) comentam sobre a visão limitada de educadores matemáticos em relação à resolução de problemas. Estes acreditam que ensinar a resolver problemas significa apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo comum à resolução realizada a partir da aplicação de alguma técnica específica. A partir desse olhar, o grupo constituído por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM – UNESP – Rio Claro/SP) realiza pesquisas com foco na Matemática através da resolução de problemas, tendo como objetivo ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, processos e técnicas operatórias necessárias dentro das atividades feitas em cada unidade temática. Materiais foram desenvolvidos na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, visando ao trabalho em sala de aula. Tais materiais contribuíram para que os professores fizessem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho. A partir dessa

metodologia, o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos podem fazer ligação entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

As autoras ainda reforçam que não há formas rígidas de trabalhar através da resolução de problemas, assim em 1998, buscaram auxiliar 45 professores a empregar essa metodologia em suas aulas, quando foi criado um roteiro de atividades que permitia fazer uso dessa metodologia, com a intenção de que os alunos notassem a Matemática com confiança. Constataram nas pesquisas, a partir de experiências com formação de professores, que esses últimos têm muitas dificuldades para trabalhar Matemática com seus alunos devido à falta de conhecimentos prévios; alguns demonstraram aversão aos conteúdos trabalhados ou à forma de ensinar. Concluíram que esta forma de trabalho tem contribuído na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e no aperfeiçoamento da prática docente pelo professor.

Onuchic e Allevato (2008) enfatizam a possibilidade de utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas a partir de problemas geradores para chegar a novos conceitos e conteúdos, abordando assim, número racional e o conceito de proporcionalidade, sendo estes um sério obstáculo no desenvolvimento matemático dos alunos. As autoras afirmam que os estudantes estão se formando com concepções simplistas de números, seguindo estratégias mecânicas para resolverem problemas. É feita menção às ideias de Van de Walle apud Onuchic e Allevato (2008) que apontam como possibilidade que, professores de Matemática devem ter a habilidade de planejar e selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas. As autoras valorizam, ao longo do artigo, aspectos como a escolha e criação de problemas pelos professores, e o uso de diferentes estratégias de resolução para formalizar novos conceitos e conteúdos a partir do problema dado. Para isso, sugerem que esses conceitos sejam trabalhados, em sala de aula, a partir de problemas geradores para que a aprendizagem se torne mais significativa e efetiva pelos alunos uma vez que os números racionais muitas vezes são trabalhados apenas superficialmente em sala de aula. Faltam oportunidades para que os alunos encontrem os diferentes significados dentro de uma variedade de problemas em muitas situações do dia a dia e do mundo.

No trabalho de Horikawa e Jardimino (2010), os autores comentam que os professores têm dificuldades em organizar de forma autônoma sua atividade, focando sua atuação profissional nas atividades propostas pelos autores dos livros didáticos. Isto justifica o

destaque que o livro didático recebe hoje nas escolas e também nas políticas públicas de educação. Frisam ainda que o livro didático é um material organizado por editoras, que estruturam o trabalho do professor, em termos de sequenciação de conteúdos, de atividades didáticas e de sua distribuição segundo o tempo escolar e a seriação. Alertam para o fato de que o livro didático se disseminou amplamente chegando a atingir 70% da produção de livros no país e em muitos outros países. Sua presença no contexto escolar é tão significativa que, segundo Batista (apud HORIKAWA e JARDILINO 2010, p. 155) “transformou-se numa das principais influências do trabalho pedagógico, definindo sua finalidade e seu currículo e cristalizando abordagens metodológicas e quadros conceituais”. Para Britto, atualmente, são os autores dos livros didáticos e não é mais o professor que organiza didaticamente os conteúdos e as atividades escolares. Destaca que antes cabia ao profissional estudar e pesquisar conteúdos e questões relativas à sua área de ensino, selecionar conteúdos e planejar as atividades didáticas, hoje, o professor ficou reduzido à condição de “gerente de aula”. Ainda conforme Britto (apud HORIKAWA e JARDILINO, 2010, p. 155), o professor cuida para que as instruções e orientações constantes no livro didático sejam seguidas pelos alunos.

Segundo essa concepção, os professores passam a ser seguidores de regras e leitores de livros-guias, uma vez que encontram nos livros o que deve ser ensinado, como deve ser desenvolvido o processo de ensino e quais parâmetros devem ser considerados para se avaliá-lo. Os autores relacionam isso à má formação inicial e continuada oferecida aos professores e as suas precárias condições de trabalho, que passam a ver o livro didático como um facilitador de sua prática. Chamam a atenção de que os livros com propostas inovadoras de trabalho didático não são os preferidos pelos professores, devendo-se ao fato de que o professor não está suficientemente capacitado para analisar as articulações teóricas e metodológicas que compõem alguns livros didáticos.

No próximo capítulo apresentamos os pressupostos metodológicos utilizados para abranger os objetivos traçados nesta proposta.

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para atingir os objetivos propostos, realizou-se um estudo qualitativo, em que os pesquisadores estiveram constantemente envolvidos no processo. Para D'Ambrosio (2012, p. 21) pesquisa qualitativa “é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas”. As principais características de uma pesquisa qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1994) são: ser descritiva, os pesquisadores terem interesse e atribuírem significado pelo processo e não apenas pelo resultado da pesquisa, uma análise de forma indutiva, e a fonte de dados ser o ambiente natural do pesquisador é instrumento chave para o desenvolvimento do trabalho.

Considerando os objetivos traçados, a pesquisa caracteriza-se em um estudo de caso, pois se refere a uma análise e exploração de um caso particular, porém considerando o todo. Para Moreira (2011, p. 68), “[...] uma pesquisa do tipo estudo de caso é para entender um caso, para compreender e descobrir como as coisas ocorrem e por que ocorrem”. A pesquisa busca compreender a realidade estudada, e assim, obter informações para descrever um caso real, por meio das técnicas metodológicas propostas neste projeto. Yin (2010) diz que o estudo de caso possibilita aos investigadores encontrarem características holísticas e significativas de situações cotidianas, como por exemplo, no desempenho escolar.

Os sujeitos dessa pesquisa são professores de Matemática que atuam em sala de aula, na disciplina em estudo com alunos do 1º ano do Ensino Médio, de seis escolas do Vale do Taquari, RS. Vale ressaltar que esses professores foram escolhidos por trabalharem nas escolas parceiras do Observatório da Educação, no entanto os mesmos não estão vinculados ao programa, garantindo assim maior legitimidade nas informações coletadas. A série foi escolhida por apresentar no contexto geral, altos índices de evasão e defasagem e por já



possuir uma caminhada de estudos, assim tendo uma base de conhecimentos, o que possibilita a abordagem da resolução de problemas para lembrar, aprofundar e construir novos conhecimentos. Com a abordagem realizada, é possível explorar diferentes meios para chegar a um fim esperado, preparando os alunos para a vida em sociedade e ao mercado de trabalho, onde não existem caminhos prontos para resolver os problemas que surgem constantemente.

Como meio de coleta de dados, utilizou-se inicialmente a técnica de entrevista filmada, cuja escolha foi feita para obtenção de informações que contribuíssem para o desenvolvimento da pesquisa, a partir de um roteiro previamente estruturado. No entanto, a finalidade era uma conversa informal e aberta entre os envolvidos. As entrevistas foram realizadas individualmente de forma presencial em cada uma das seis escolas, sob um roteiro semiestruturado, possibilitando ao entrevistador fazer outros questionamentos não antecipados, a partir das respostas dadas pelos dez professores que participaram desta etapa. Os dados coletados nas filmagens foram posteriormente transcritos para análise, diante da autorização dos participantes por meio do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) disposto no Apêndice A.

As entrevistas padronizadas, de forma semiestruturada (QUADRO 2), serviram para identificar a relevância que estes professores de Matemática atribuem ao livro didático, com que finalidade o usam e o que percebem que pode ser melhorado, ou ainda, o que falta nesse material para ele ser mais adequado em sua prática com vistas a uma aprendizagem voltada à resolução de problemas e, conseqüentemente, mais significativa.

Posteriormente, teve-se acesso aos livros didáticos adotados pelas turmas de 1º ano do Ensino Médio nas seis escolas visitadas, para fazer uma análise a estes e perceber como, e se os mesmos abordam resolução de problemas matemáticos, esta etapa se deu em função da ênfase dada pelos professores entrevistados aos livros didáticos. Teve-se o intuito de verificar como é apresentada essa tendência nessas obras, o que pode ser um indicativo da maneira como é trabalhada a resolução de problemas na sala de aula, já que os professores entrevistados usam esses livros para planejar suas aulas. Nesta etapa, verificou-se como estão dispostos os conteúdos, os problemas e as atividades presentes neste material, constatando se os problemas apresentados têm relação com o cotidiano, se estão vinculados a algum conteúdo específico, se apresentam sugestão de resolução e se priorizam alguma estratégia ao longo dos capítulos. Para Costa e Nogueira (2010, p. 142) “O ensino da Matemática continua – com exceção de algumas experiências pontuais inovadoras e bem sucedidas – seguindo o

mesmo paradigma euclidiano de apresentação de conteúdos matemáticos na escola para reprodução mecanicista por parte dos alunos”. No entanto, este padrão não condiz com a realidade dinâmica e desafiadora atual.

A partir destes dados e reflexões, iniciou-se um estudo para elaborar um material “alternativo” visando auxiliar estes professores, em suas aulas, numa abordagem diferenciada com ênfase na resolução de problemas matemáticos. As questões que compõem o material foram retiradas de diferentes fontes dentre dissertações, avaliações externas, olimpíadas, livros e *sites*, de maneira que favoreçam o uso de diferentes estratégias de resolução. Sob esse aspecto, já em 1980, foi editado nos Estados Unidos, uma publicação do *NCTM-National Council of Teachers of Mathematics – An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980’s*, recomendando como uma de suas ações que deveriam ser desenvolvidas para todos os níveis de escolaridade, materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas.

Os problemas dispostos no material não estão organizados indicando conteúdos específicos, pois não se pretende delimitar possibilidades de resolução tampouco eliminar o conteúdo ou cálculo formal, frequentemente utilizado nas aulas. A intenção é oportunizar aos alunos pensar e criar diferentes estratégias de resolução além de auxiliar professores a perceberem essa metodologia como uma alternativa possível e prazerosa. Seguindo-se como base os requisitos dos PCN+ (2002, p. 129), em que:

A seleção das atividades a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos.

As atividades selecionadas têm como foco a resolução de problemas que segundo os PCN+ é a “perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado” (BRASIL, 2002, p. 129).

Após a seleção dos problemas e a organização desse material com dicas importantes aos professores, esta produção foi entregue pessoalmente aos professores de Matemática, das seis escolas envolvidas, desde o início do desenvolvimento desta pesquisa, para fins de análise e de possível abordagem com aos alunos da referida série. O material também foi

enviado por email para cada professor a fim de facilitar seu manuseio. Após realizarem esta abordagem, os professores avaliaram esse material quanto à relevância percebida para o ensino da Matemática. Além disso, presenciou-se cinco encontros com os professores explorando esse material junto a seus alunos, percebendo-se seu desempenho e reação frente à proposta.

No próximo capítulo apresentamos a coleta de dado inicial em que é descrita a análise das entrevistas feitas com os professores e o diagnóstico dos livros didáticos adotados pelas turmas do 1º ano do Ensino Médio das seis escolas envolvidas na pesquisa. E no capítulo seguinte será apresentada a intervenção pedagógica.

## **4 COLETA DE DADOS INICIAL**

Conforme mencionado anteriormente, a primeira etapa da investigação que compõe a presente dissertação foi realizada com dez professores de Matemática que atuam com turmas do 1º ano do Ensino Médio de seis escolas estaduais do Vale do Taquari, parceiras do Observatório da Educação. Nesta etapa, cada professor foi convidado a participar de uma entrevista individual gravada e esta estava semiestruturada a partir de sete questões norteadoras, com o intuito de conhecer suas concepções em relação aos livros didáticos adotados nas respectivas escolas e, a partir desse diagnóstico, dar sequência a pesquisa.

### **4.1 Entrevista com professores**

As respectivas entrevistas foram previamente agendadas com cada professor de acordo com sua disponibilidade de data, hora e local. Antes de iniciá-las os professores foram informados quanto ao motivo da entrevista e sobre o que se tratava, deixando claro que estava relacionado a uma pesquisa de mestrado. De acordo com isso, os professores assinaram um termo de livre consentimento (APÊNDICE A), autorizando o uso dos dados coletados, os quais foram transcritos para fazer a análise textual discursiva. Esta é uma metodologia que pretende desafiar os pontos de vista do pesquisador a partir de perspectivas de outros sujeitos envolvidos na pesquisa, incluindo autores de produções anteriores sobre o mesmo (MORAES e GALIAZZI, 2013). Estes autores definem que:

Realizar uma análise textual discursiva é pôr-se em movimento das verdades, dos pensamentos. Sendo processo fundado na liberdade e na criatividade, não possibilita que exista nada fixo e previamente definido. Exige desfazer-se de âncoras seguras

para se libertar e navegar em paragens nunca antes navegadas. É criar os caminhos e as rotas enquanto se prossegue, com toda insegurança e incerteza que isso acarreta. (...) em cada ponto há sempre infinitas possibilidades de percursos (p. 166).

Na sequência apresentamos alguns apontamentos relatados pelos professores, bem como uma análise a partir das categorias observadas nas respostas às entrevistas. Para isso, identificou-se os professores, utilizando uma nomenclatura fictícia A1 para designar o professor 1, A2 para o professor 2 e assim sucessivamente. A entrevista foi organizada a partir de sete questões norteadoras, dispostas no Quadro 2.

Cabe salientar que a categorização das respostas apresentadas pelos professores, tanto na coleta de dados inicial, quanto nas demais etapas da pesquisa, basearam-se em nossa experiência como professores-pesquisadores e na interpretação feita a partir dos dados coletados com base no referencial teórico estudado, sendo possíveis outras formas de classificação por outro profissional.

#### Quadro 2 - Questões das entrevistas.

1. Quais aspectos você julga positivo nos livros didáticos de Matemática?
2. Você tem preferência por algum livro didático para trabalhar Matemática? A que você atribui esta preferência? Este livro é o adotado atualmente pelos alunos?
3. Você costuma seguir a sequência dos livros didáticos para organizar os conteúdos a serem trabalhados nas aulas? Tem algum conteúdo presente nos livros didáticos que você não aborda na sala de aula? Tem algum conteúdo que você aborda em sala de aula e que não está presente nos livros didáticos?
4. Você acha que os livros didáticos deixam a desejar em algum aspecto? O que poderia ser melhorado nos livros para contribuírem de forma mais significativa nas aulas de Matemática?
5. Você retira dos livros didáticos atividades e problemas que são explorados em aula? Julga a qualidade, quantidade e organização destes adequada para ser abordada? Estes desafiam os alunos a criarem estratégias para resolução ou o livro indica um caminho a ser seguido para chegar ao resultado?
6. Como você percebe a abordagem de problemas nos livros didáticos? Na sua visão está adequada? Você costuma explorá-los com seus alunos? Em que parte do livro aparecem os problemas? Você considera adequado?
7. Se fosse construído um material alternativo para trabalhar nas aulas de Matemática, e esse fosse disponibilizado aos professores, o que você pensa que teria que conter neste material visando contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática?

Fonte: Das autoras, 2014.

Ao fazer o primeiro questionamento aos professores, surgem relatos semelhantes e distintos entre os sujeitos da pesquisa. Durante as transcrições, percebeu-se também que os profissionais iniciavam a resposta dessa pergunta já respondendo indiretamente outras que viriam na sequência, sem antes ter-lhes apresentado os demais tópicos. A partir disso,

organizou-se as categorias para análise das informações coletadas. Para Moraes e Galiazzi “Na unitarização parece que está tudo desorganizado, no entanto é o caminho para a organização do novo” (2013, p. 173).

Apresentamos na sequência os resultados obtidos nas entrevistas realizadas com os professores, relatando algumas de suas falas, enfatizando por meio de grifos aspectos que foram mais frisados entre os docentes a respeito dos livros didáticos de Matemática, de acordo com quatro categorias destacadas a partir dos dados: A) Uso do livro didático; B) Aspectos positivos, C) Aspectos a melhorar, D) Problemas matemáticos nos livros. Iniciamos analisando o uso do livro didático pelos professores entrevistados.

### **Categoria A - Uso do livro**

Em continuidade, seguem os relatos dos professores que fundamentaram a organização desta categoria. Mesmo sem terem sido questionados, os professores comentaram se usavam ou não o livro para ensinar Matemática. Quanto à forma de uso do livro, alguns apontam não utilizá-lo com rigor, já outros o aproveitam na sequência como estão dispostos os conteúdos, sendo referência principal para organização do plano de estudos da disciplina de Matemática.

*Eu pessoalmente não sou adepto a livro didático, eu não uso. **Uso livro didático sim, mas eu não fico preso a um livro didático**<sup>2</sup>. Eu uso muito, vários livros didáticos, não diretamente, mas eu uso. Nós não seguimos, (o livro), nosso planejamento sempre é em conjunto a gente faz todo o planejamento e nós **não seguimos a sequência do livro literalmente**, eu pego em diversas fontes, uma delas são os livros didáticos né. No primeiro ano a gente trabalha só, **ã, a gente segue como tá no livro**, é função o ano inteiro, a gente não consegue avançar além. (A10)*

***Eu uso bastante** o livro. Esse de agora eu não uso muito, eu já usei ele também. Pela questão das atividades, eu acho que elas são mais fáceis, eles conseguem interpretar elas melhor. Nesse que eles têm agora, tem umas questões complicadas, que até eu acho complicada, tu imagina então eles. Esse de agora é muito bom, mas eles não conseguem. (A9)*

*Bom, esse ano o nosso plano de estudos ele tá organizado conforme a ordem do livro didático, então o nosso plano está conforme a ordem do livro. Então a gente coincidiu que os conteúdos apresentam a mesma organização, a mesma ordem e a mesma sequência. (A8)*

---

<sup>2</sup> As expressões em negrito entre as transcrições são grifos das autoras.

*Nós utilizamos vários (livros), não se prendemos totalmente a eles. A gente ta praticamente seguindo a sequência dos livros, a gente já faz os planos, e nós seguimos então os conteúdos que temos no plano. (A7)*

*Eu ultimamente quando eu planejo aula **tenho que pegar eu torno de 3 a 4 livros pra conseguir contemplar uma aula** com diversas atividades, por exemplo, hoje fiz um plano de aula pro 1º ano, eu peguei um livro da 6ª serie pra ter algumas atividades de potência. (A6)*

*Esse ano, por exemplo, **eu uso muito o livro didático**. Eu uso pela praticidade e depois aqui na escola eles ganham. Então se tu não vai usar depois eles vão dizer, porque tem que carregar esse livro. Então vamos usar. (A5)*

*Eu não analisei muito os livros, o que eu **costumo utilizar deles são os exercícios**, porque eu comecei agora. (A4)*

***Eu uso vários livros**. Eu nunca me baseio só num livro. Só que na verdade **eu não tô seguindo ele a risca**. (A3)*

*O segundo e o terceiro ano os conteúdos não fecham com os do livro, mas a gente também já tá se adaptando, esse ano a gente pode reformular, **o plano de estudo, então a gente já formulou no caso pra adequar e ficar de acordo com os livros e também com as outras escolas**. (A2)*

***Eu não uso livro didático nem no primeiro, nem segundo nem no terceiro. Só uso mais para exercícios**. O que eu faço, eu olho, eu entendo daí eu explico da minha maneira e não como tá no livro. Alguns (livros) são bons, por isso eu digo **um só não da pra seguir**. Mas eu sigo a sequência que nem primeiro ano: funções de primeiro grau, depois as funções do segundo grau, depois... Uma depende da outra, tem certos conteúdos que são pré-requisitos pro outro conteúdo. (A1)*

A partir dos relatos, ficou claro que os professores entrevistados utilizam o livro didático, apesar de alguns docentes terem certo receio de afirmar isso, acabam ao longo dos seus relatos mencionando que aproveitam esse instrumento. Para Costa e Allevato (2010), o livro didático é uma das ferramentas mais utilizadas pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo. Evidenciou-se nas entrevistas que o livro é utilizado por alguns sujeitos da pesquisa como um guia para o ensino da Matemática. Desse modo, Costa e Allevato (2010) dizem que o livro didático deve ser muito bem organizado tanto para o professor, que o utiliza como apoio pedagógico, quanto para os alunos, que poderão utilizá-lo para estudarem sozinhos.

## **Categoria B - Aspectos positivos**

Percebe-se pelos relatos, que todos os professores apontam aspectos positivos em relação aos livros didáticos. Seguem algumas respostas dos professores que nos permitiram elencar tal categoria.

*Parece-me que agora estão começando a fazer eles **mais contextualizados**, antes disso tínhamos outro, era técnico, ele só colocava assim a parte teórica. Ele (livro) já bota um **grau de desafio maior**. Isso é ótimo, porque ele vai além. Ele não dá tudo mastigado, o aluno vai ter que pensar, porque muitas vezes ele dá: Primeiro exemplo, segundo exemplo, terceiro exemplo... Dai tu explica pra eles. Ai tu dá uns exercícios pra eles fazerem, geralmente é assim: cada exercício é de um exemplo. Mais pro final eles botam exercícios que envolve os três exemplos juntos, pode cuidar. Ai eles tem que relacionar os três pra conseguir resolver. (A1)*

*Quando eu iniciei tinha livros onde quase **somente tinha exercícios de fixação** e um e outro que era aplicado em **vestibular**, que daí eram mais problemas, mais complexos. Atualmente eu não diria que eles melhoraram, **estão mais associados com a realidade**, têm questões onde o aluno tem que pensar, questões com resolução de problemas, eles até ensinam os passos da resolução de problemas. Os alunos me questionam: mas isso aqui é matemática professora? Questões relacionadas a física, outros assuntos...seria mais tipo questões de ENEM. A **praticidade** pro professor, é um lugar onde se encontra **exercícios sobre aquele assunto que tu tá trabalhando**, eu acho que essa é uma das comodidades, por tu abrir o livro ali, to trabalhando tal assunto, então eu vou procurar exercícios, atividades sobre aquele assunto. São (livros) um **complemento** na aula do professor, então pra mim é bom. (A2)*

*Assim eles (livros) têm assuntos que são interessantes, que são cobrados no **vestibular**, que eles precisam saber. Eu acho que tem bastante coisa boa. Só que as vezes tu não consegue ficar só num livro, tem que buscar mais autores pra fazer aquele jogo. Normalmente os livros novos, eles trazem alguma **coisa diferente, alguma coisa mais prática**, mais do dia a dia. (A3)*

*Até **contextualizado** eles estão se tornando, pra trazer pra realidade deles. (A4)*

*A gente viu alguns livros que apresentam a matemática com vários **temas de outras disciplinas**, por exemplo, aborda a questão dos gráficos, ã, não com questões matemáticas, trabalha com a questão da água, da poluição, e em cima disso a gente constrói depois os gráficos. Eu acho que essa é uma questão bem interessante nos livros didáticos, nesses novos que estão vindo agora. Eu vejo realmente alguns aspectos bastante positivos no livro didático, muitas vezes essa é **a única ferramenta que os nossos alunos tem de entrar em contato de fato com uma linguagem matemática**, porque eles buscam muito a questão da internet, daí eles buscam questões prontas, com respostas, mas assim o trabalho realmente de fazer uma **leitura** dos ciclos matemáticos, isso a gente encontra muito mais ainda no livro didático.. Os (livros) novos que vem vindo agora, eles já vem nesse sentido, eles já vem pra **desafiar**, pra incomodar o aluno, pra deixar ele desconfortável, pra deixar ele um pouco fora do eixo. (A10)*



*Se a gente olhar os mais atuais, tu vê que eles tentam trazer algo diferente, assim... **diversificado**, não a mesmice. Eu uso muito o livro didático. Porque assim, ele pelo menos dá pro aluno uma ideia de **sequência**. E também esse livro que a gente tá usando agora, trás, muito **problema, situação problema**. E assim, não todos iguais, cada um com um detalhe diferente. E isso eu considero a construção do conhecimento. (A5)*

*Eu acho que positivo deles seria mais **uma sequência** de conteúdo alguma coisa deste tipo, e talvez alguma coisa de **exercício**, porém até os exercícios são um pouco resumidos. (A6)*

*Trabalhamos em cima de situações problema, que eles (livros) trazem assim, **resolução de situação problema**, que ajuda muito eu acho. (A7)*

*O livro que a gente usa esse ano ele é muito bom. Ele traz pro aluno os **objetivos de cada conteúdo**, e isso eu acho bem interessante porque se tu incentiva o aluno “Opa, porque a gente vai aprender isso nesse trimestre?” Ele tem uma **explicação bem, ãh, resumida**, né, claro que a gente sempre aprofunda. (A8)*

*De positivo nos livros didáticos os **exercícios**. (A9)*

A partir dos relatos, evidencia-se que os professores apontam como positivo nos livros, os bons exercícios, a contextualização abordando diferentes temas de outras áreas do conhecimento, o fato do grau de dificuldade das questões ir aumentando, a apresentação de questões de vestibular e ENEM, a sequência dos conteúdos, além de apresentar os objetivos dos conteúdos e explicações resumidas. Os professores consideram os livros uma ferramenta aos alunos e um complemento aos professores.

Percebe-se que os professores veem os livros mais atuais trazendo aspectos diferenciados em relação a edições anteriores, e que o uso de exercícios e problemas se destaca entre os fatores positivos para o ensino da Matemática. Além disso, a leitura matemática no livro é tida como significativa para aprendizagem dos alunos, e aparece mais contextualizada e relacionada a diferentes temas da atualidade. De acordo com Costa e Allevalo (2010, p. 72), “para os alunos (o livro), trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos”.

Destaca-se também a sequência de conteúdos como algo positivo para alguns professores entrevistados, uma vez que a organização das questões está vinculada aos conteúdos dos capítulos, que são indicados aos alunos. Assim, percebe-se que os problemas abordados com os alunos estão vinculados a um determinado conteúdo matemático.

### **Categoria C - Aspectos a melhorar**

Apesar dos professores terem apresentado aspectos positivos nos livros didáticos, foram bastante criteriosos em elencar itens negativos ou a serem melhorados nestes recursos que são de livre acesso aos alunos nas respectivas escolas. Seguem alguns relatos dos professores que fundamentaram esta categoria.

*Eles (livros) têm que trazer mais o cotidiano, **problemas práticos**, pegar mais a realidade. É muito difícil, muitas vezes tu tem que inventar. No livro a **resolução de problemas eu acho que é importante ter, relacionada a todos os conteúdos**. Acho que **o aluno tem que ler, interpretar**. Por isso que eu acho, que Português e Matemática deviam andar juntos. Porque não existe entender Matemática se não entende Português. Porque Matemática tem que ser uma interpretação também. (A1)*

*Olha nem sempre eles (livros) tão dentro da **realidade do aluno**. Às vezes eles tão em **um nível mais elevado que o nível que o aluno está**. Se tu pega um livro do primeiro ano, eles ainda não têm condições de fazer aquele tipo de exercício, então tu tem que selecionar. Eu acho que teriam que ser **problemas mais acessíveis** pro aluno se motivar, seguir um certo nível. Porque tu tem que te colocar no lugar do aluno também, então, mas quanto mais conhecimento tu trazer dentro de um problema melhor pro aluno, o mais importante é **o aluno saber o que fazer, como começar, como iniciar né a resolução dos problemas, como fazer aquela coleta de dados**. (A2)*

*São 28 anos que eu estou em sala de aula neh, então eu vejo que eles (autores) montam os livros e na verdade o **conteúdo não vai mudando**, eles só vão fazendo livros novos, e na verdade vão copiando aquilo que já foi feito e de repente eles acrescentam alguma coisinha. Tu pode pegar quatro ou cinco livros e muitas vezes só muda o autor, **até a colocação dos problemas é parecida**, eu vejo que **tem muita pobreza nesses nossos livros**. Acho que ta faltando coisa (no livro), por exemplo, **coisa prática do dia á dia**, eles se detém muitas vezes em coisa que não tem aplicação, e muitas vezes os alunos dizem: porque apreender isso aqui? Por exemplo, pra que serve a função no 1º ano. Então, as vezes aqui no interior tu tem uma turma de 25 alunos e cinco deles vão fazer um vestibular e os outros 20 vão parar de estudar. (Nos livros) tem muito conteúdo, podiam, sei lá, **pesquisar nas escolas, com professores**, o que é mais viável ser trabalhado, **muitas vezes é uma quantidade muito grande de conteúdo** e tu não consegue vencer, então muitas vezes se tu quer seguir o livro, como ta ali, eu não posso porque dai eu vou de repente deixa um conteúdo que ta mais adiante, que acho que é importante que eles precisam saber e eles não vão ver, então de repente se fizesse uma seleção dos conteúdos, que ate agora com essas mudanças no ensino, tu vai ter que **achar uma outra forma de trabalhar**. (A3)*

*Alguma **coisa prática** a gente tem que sempre buscar fora (do livro). **Problemas para eles pensarem têm pouco ainda** (nos livros), mais é exercício. (A4)*

*Acredito que para melhorar teria que ser **mais diversificado**. Com mais trabalhos diferentes, sugestões de pesquisa que não tem tanto. A teoria vinculada à prática seriam sugestões de aplicabilidade do conteúdo. (A5)*

*Eu acho que ele (livro) **aponta a estratégia** que o aluno deve usar, ele é bastante*

*direto, claro que tem exceções, de algum que da pra fazer, criar alguma outra estratégia, até mostra duas ou três possibilidades, mas eles (livros) são bastante diretos. (A6)*

*Eu acho que os livros deveriam trazer o que nós precisamos realmente conforme o nosso politécnico agora, e não continuar a mesma coisa, porque não adianta mudar o ensino médio a politécnico, porque os alunos tem que sair sabendo a pesquisa, tem que sair buscando tal e tal, sabendo como chegar em um determinado estabelecimento, como se portar, se o livro não tem a pesquisa, aí tu tem que direcionar fora do livro. E o livro não, tá ali oh (aponta para o livro) é isso aí e acabou, **aqui é conteúdo e conteúdo**, não tem nada disso. O que hoje o aluno gosta, tem que partir pra alguma coisa que desperte ele, **alguma coisa que chama a atenção dele**, porque quando tu pede pra ver ou criar uma situação problema, fazer uma tabulação, como você resolveria isso eles fazem e não tá no livro, e eles conseguem fazer, eles criam uma situação problema, como eles poderia resolver isso, colocam a opinião deles, só que assim, por isso que isso aqui (aponta pro livro) é muito restrito eu acho, sabe que pra despertar o interesse deles não pode ser só livro didático, se não a coisa não flui. (A7)*

*Eu acho que o que mais precisa no livro assim, didático são **exercícios, são atividades pra fazer. Poderia ter mais situações problemas e aparecer entre os exercícios né**, não ficar lá pro final talvez. O aluno hoje não consegue mais ler muito para tirar informações. Então o que eles (livros) **precisam, de informações curtas**, as vezes falta um pouco mais trazer para a **linguagem do aluno**, claro que a linguagem matemática ela é precisa (...) com explicações mais sucintas, exemplos práticos de aplicação, principalmente, vários exercícios de diferentes níveis, daquele mais fácil, intermediário ao mais desafiador, para aquele aluno que consegue resolver, né, situações problemas, de provas do Enem e vestibular, porque a gente sabe que as vezes tem conteúdos que são mais contemplados e conteúdos que são menos contemplados. (A8)*

*No livro talvez... as vezes a gente quer **exercícios que levem o aluno a pensar mais né**, que exija uma interpretação, mas que não seja muito complicado sabe, que eles conseguem chegar na resolução, e que não fuja muito e seja óbvio. **Poderia ter mais atividades**, tem determinado conteúdo assim que tem muita pouca atividade. Tem que pegar assim dois, três, quatro livros didáticos pra o que o aluno realmente fixe aquele conteúdo. (A9)*

*O aspecto a melhorar **que eu coloco é da ligação dos conteúdos um com o outro**. Não necessariamente dentro só da nossa disciplina matemática, mas existe um descompasso muito grande entre a matemática trabalha no primeiro ano e a física, há relação de um conteúdo com o outro, tem alguns conteúdos que podiam ser interligados. Uma crítica forte que eu faço ao livro didático é ser **demasiadamente conteudista**, quer dizer, mesmo que já venha com uma proposta nova de fazer eles pensar mas ele ainda é muito focado no algoritmo, ele trabalha mais a atividade montada e só ir lá resolver. O professor coloca a fórmula no quadro e eles só aplica, jogam aqueles dados em cima, e eu acho que nisso a gente perde um pouco. E outra coisa, eu vejo um grande descompasso que nós temos com a nossa realidade aqui. Os livros didáticos são escritos por escritores paulistas, cariocas, ãh, lá de cima. E muito pouco eles utilizam a nossa realidade daqui, mas eu sempre mudo elas. Eu faço elas na hora no quadro, eu uso muito o quadro, eu sou um professor que eu acho que o*

*quadro tá ali pra ser usado e eu uso muito a tecnologia também e sei usar, mas eu prefiro usar aquele carinha ali (quadro), ele é especialmente importante especialmente pro professor de matemática. **Eu acho que nós temos que ter nosso produto próprio.** E eu tenho conquistado o respeito dos meus alunos exatamente por isso, porque eu não utilizo tanto o livro didático, invento meus exercícios, escrevo eles no quadro, e eles começam a te olhar com outro olhar. Eles começam a ver que você domina o conteúdo. Não dá pra você ficar pegando um texto lá e ler pra eles “O que tem de meu nisso aí?”, não tem nada, não tem nada próprio. Eu sempre digo pros meus colegas, e eles reclamam “**Gente quando é que nós professores vamos produzir uma coisa?**”, quem é que é o professor que usa um material próprio? (A10)*

Nessa etapa, foram constatadas algumas contradições nas falas dos professores, mas isso se justifica pelo fato de estarem relatando aspectos de diferentes livros adotados em cada escola. Por exemplo, um professor diz que o livro é muito “enrolado”, contendo muito conteúdo desatualizado e outro ressalta que é muito técnico e algébrico com grau de dificuldade elevado exigindo aplicação de fórmulas. Alguns alegam que faltam práticas e sugestões de pesquisa e que a resolução de problemas deveria estar mais presente para introduzir conteúdos, com problemas mais desafiadores, mas sem excessivo grau de dificuldade para o aluno. Avaliam que seria interessante relacionar diferentes conteúdos e envolver leitura e interpretação possibilitando que Matemática e Português estivessem mais próximos. Também comentam que devia ter uma orientação sobre como o aluno pode começar a resolver os problemas, além de mencionarem que falta o professor produzir seu próprio produto. Vale ressaltar que os professores entrevistados só foram informados da intenção das pesquisadoras em elaborar o material, depois de encerradas as entrevistas e, apesar disso mencionaram isso como sendo uma necessidade.

Os professores, em seus relatos, apontaram inúmeras necessidades ou reflexões do que acreditam que se deva modificar nos livros didáticos e também na sua metodologia de ensino. Isso nos permitiu indícios do que deveria ser contemplado na organização do material didático (APÊNDICE B) que foi disponibilizado aos professores para trabalharem com seus alunos. Enfatizamos que entre as colocações feitas pelos professores a respeito do que deve ser melhorado, está trazer coisas que estão relacionadas ao cotidiano, que façam o aluno pensar, assim, Rodrigues e Magalhães (s/d, p.2) dizem que “a atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas”, podendo ser uma possibilidade de superar o que acreditam ser prioridade no ensino.

## Categoria D - Problemas matemáticos

Destacam-se na sequência, alguns relatos dos professores sobre a definição de problema, sua organização no livro didático e a maneira com que seus alunos resolvem problemas durante as aulas.

*Geralmente os problemas vem assim (nos livros): os exemplos são problemas né, e ai depois vêm exercícios envolvendo aqueles exemplos. Só que ali nos exercícios sempre envolver graus de dificuldades muitas vezes mais além. Tem alguns alunos que seguem o que tu diz. Agora tem outros que procuram outras formas. E eu considero certo. É aquela velha história...pra ir pro centro do município, tem vários caminhos né, como eu vou chegar lá o problema é meu, o importante é que eu chegue lá. As vezes questionam: Ah professora, mas da pra fazer de outro jeito?.- Eu respondo: me mostra o teu jeito. - Ah eu vou fazer assim. Isso é outra maneira de fazer. São poucos, não são muitos, mas temos alguns. (A1)*

*No livro, normalmente tem um situação problema no inicio do capítulo, sem resolução, e depois, através do conteúdo que ele passa a gente consegue resolver o problema. Tu tens que ter toda a base do conteúdo pra depois ir pra parte do problema. A gente tem muita resistência do aluno em trabalhar com problemas, porque na verdade é mais pratico trabalhar com exercícios de fixação onde o professor passa um exemplo e depois uma série de exercícios, naquele mesmo esquema. O problema ele exige mais, exige preparo, exige motivação do aluno, pra ele pesquisar, ir atrás. Trabalho com exemplos e o aluno sempre procura aplicar o exemplo nos exercícios que ele vai fazer então ele (o exemplo) acaba direcionando o aluno né, tem alunos que criam né estratégias, mas são poucos. Tu pode colocar assim, marcar no dedo os alunos que criam estratégias. (A2)*

*Normalmente eles (livros) dão um caminho e eles (alunos) vão ter que seguir por aquilo, eles não tem outras estratégias, pra chegar aquele resultado. Que nem, por exemplo, eu tava antes dando um exercício, dai eu fui elabora um outro problema, dai eu pensei assim, vou elabora de um outro jeito que eles possam resolver de outra maneira neh, porque o livro ta dando de um jeito e normalmente tu procura ir por um caminho pra ficar mais acessível pra eles, porque se tu vai ficar mudando aqui e ali, fazendo varias maneiras de chegar no resultado, tu perde um monte de tempo, então vai pelo caminho mais fácil de chegar e muitas vezes eles não pensam eles vão direto naquilo ali, é uma coisa muito mecânica. (A3)*

*Esse livro deles geralmente inicia de uma contextualização e depois vai pro problema, então o problema é relacionado a aquele contexto, esses vêm mais no final. Se tivesse o problema primeiro ele teria que pensar como resolver, não daria pronto. Os alunos esperam muito isso, o pronto. Não querem muito isso desse negócio de pensar, como resolver, já logo chamam, como que eu faço isso, não sei fazer. E acho que isso se tem que mudar um pouco deles, começar a pensar, criar as estratégias deles, como está eu não considero que seja suficiente. Tem pouco nos livros a resolução de problemas. Se a gente não propor, ele vai sempre ficar naquela de ficar esperando pronto. Acho que está em nós professores que estamos começando a mudar isso. Mas eles gostam também, depois que tu tá com aquilo em prática, é uma coisa diferente, ai eles participam. (A4)*

*Eu percebi nesse livro que os problemas matemáticos são assim, mesclados, com o conteúdo. **Sempre vinculados a um conteúdo.** Então até assim, na função quadrática, inicia, da ideia e da uns problemas. Da uma continuidade e dá outros problemas. Ele deixa os últimos problemas com um gancho para o que tu vai trabalhar posteriormente. Amarra com o próximo assunto. **Na verdade o livro didático tem essa intenção de ir encaminhando, pra aquilo que ele quer abordar.** (A5)*

***Ele (problema) tá mais pra finalizar digamos assim. Depois que aparece tudo daí ele aparece para finalizar.** Não acho adequado porque daí tu não vai desenvolver o teu raciocínio, a forma de tu criar a tua situação problema, teu ver do que tá sendo resolvido. (A6)*

*Abordagem de problemas nos livros didáticos tá muito restrito ainda, dependendo o conteúdo, dependo assim **oh pra criar situações problemas é complicado.** O livro didático traz poucos problemas, traz conteúdo, mas ele não dá assim o problema, como buscar e tal, não ele dá o exercício, tem a introdução, o que é e acabou. Agora situações problemas pro aluno buscar ou desenvolver muito difícil. (A7)*

*São mais exercícios mesmo de fixação de conteúdo, as situações problemas ele (o livro traz no final, **depois que o aluno já tem uma certa compreensão do conteúdo ele traz a resolução de problemas.** Mesmo que são poucos, os que aparecem no livro eles possibilitam para o aluno resolver de várias maneiras. (A8)*

*Vem a explicação e depois os exercícios. **Os problemas estão no fim do conteúdo,** esses já exigem mais deles. Exigem mais conhecimento matemático deles, é um livro muito bom, mas eles não conseguem. (A9)*

***Eu diria que a qualidade (dos problemas) é boa, nós apenas não conseguimos atingir ela né, nós não conseguimos fazer com que o nosso aluno entenda aqueles problemas,** eu acho que esse é um grande problema, isso nos angustia, a gente gostaria de poder usar, tem muitas atividades muito boas que fazem pensar, isso é o essencial na educação, fazer o aluno pensar, não dar o pãozinho na boca dele e ele só engolir, mas as vezes é difícil de a gente conseguir isso. **Eu acho que ele (livro) deixa liberdade do aluno criar, claro que sempre dando as setinhas né. O certo seria iniciar, antes da definição, com o problema, pro aluno pensar já nisso.** (A10)*

Pelas falas apresentadas, percebeu-se que não havia distinção por parte de alguns professores ao usarem as palavras atividades, exercícios e problemas, pois acabavam usando as expressões como se tivessem o mesmo significado matemático. Em relação aos problemas dispostos nos livros, os professores entrevistados apontam que os mesmos estão vinculados aos conteúdos de cada capítulo e que os percebem mais relacionados ao cotidiano. Relatam que determinados capítulos apresentam problemas para introduzir algum conteúdo, mas a maior concentração deles está no fim dos capítulos, após apresentar o conteúdo, vários problemas aparecem resolvidos como exemplo para o aluno se direcionar. Alguns professores dizem ter bastante exercício no livro, mas outros comentam que poderia trazer ainda mais, além de serem atividades antigas, já conhecidas pelos professores há 30 ou 40 anos atrás.

Mencionam que os alunos são resistentes em resolver problemas e que poucos usam diferentes estratégias no momento da resolução.

Fica claro nos relatos apresentados, que poucos alunos têm o hábito de criar diferentes estratégias de resolução, e que apesar dos professores julgarem importante trabalhar com problemas, admitem ser mais fácil trabalhar com exercícios de aplicação. Sob essa visão, Rodrigues e Magalhães (s/d) mencionam ter observado através do Estágio Supervisionado, onde tiveram contato com a prática docente que muitos professores não trabalham com a Metodologia da Resolução de Problemas, e quando propõem problemas aos alunos, estes apresentam muitas dificuldades em resolvê-los.

Os sujeitos dessa pesquisa acreditam que o livro por vezes indica o caminho da resolução ao aluno, limitando seu desenvolvimento, além dos problemas estarem ligados ao conteúdo que está em estudo, aparecendo pra finalizar determinado capítulo. Para Dante (2003), a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula, pois os alunos sabem efetuar mais facilmente algoritmos do que resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Isso deve-se à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados.

Encerradas as entrevistas, os professores foram informados da intenção das pesquisadoras em organizar um material didático de ensino sem vínculo específico a um conteúdo matemático. A partir do interesse demonstrado pelos sujeitos da pesquisa em participar como mediadores, utilizando com seus alunos o material elaborado paralelamente a suas aulas, na medida em que julgassem conveniente, iniciou-se um estudo visando essa finalidade. Para organização deste material, deu-se ênfase aos aspectos a serem melhorados, relatados pelos docentes no decorrer das entrevistas, buscando assim suprir algumas das necessidades relatadas ao se referirem aos livros didáticos de matemática.

De posse da análise dos discursos apresentados pelos professores nesta etapa inicial de coleta de dados, iniciou-se a análise dos livros didáticos adotados pelos professores e alunos do 1º ano do Ensino Médio das respectivas escolas, visando atingir o segundo objetivo pretendido nesta pesquisa e, a partir disso, organizar o planejamento da intervenção pedagógica. No capítulo que segue, buscaremos demonstrar como estão organizados os livros didáticos observados quanto a sua abordagem em resolução de problemas.

## 4.2 Análise de livros didáticos

É no livro didático que o professor busca apoio quando inicia sua prática docente, e nele procura a Matemática que deve ensinar em sala de aula. Assim, estuda no livro didático a Matemática elementar que irá ensinar aos alunos. Sob esta relevância, fez-se uma análise aos livros didáticos de Matemática adotados pelos professores para turmas do 1º ano do Ensino Médio, que estão sendo utilizados em seis escolas estaduais do Vale do Taquari. Destas, obteve-se quatro livros distintos para serem analisados, atendendo a um dos objetivos propostos pela pesquisa. Entre outros aspectos, deu-se ênfase em verificar quais as implicações metodológicas de ensino voltadas à resolução de problemas presentes nestas obras.

Para Lopes (2009, p. 35), “É inegável a importância do livro didático de Matemática na educação brasileira, tanto pelo aspecto histórico no processo ensino-aprendizagem dessa disciplina quanto pelo que ele representa nas escolas, segundo a maioria dos professores”.

Para fazer essa descrição, optou-se por uma análise individual das obras, elencando aspectos considerados positivos e negativos quanto a sua abordagem sobre resolução de problemas. Ambos os livros estudados têm duas partes, a primeira é uma cópia do livro do aluno, acrescida de respostas ou resoluções de atividades e a segunda contém um material de apoio pedagógico, denominado entre outros de “suplemento pedagógico”. O primeiro livro analisado, representado na Figura 1, é adotado em três escolas nas quais foi desenvolvida a pesquisa.

Figura 1 - Livro de BARROSO, Juliane Matsubara. Conexões com a matemática. 1ª ed. São Paulo, 2010.





A partir do quadro representado na Figura 2, é possível perceber que há predomínio do conteúdo de funções, esse que está previsto nos PCN como primeiro tema a ser trabalhado no 1º ano do ensino médio, “a ênfase deve estar no conceito de função e em seu uso para modelar situações contextualizadas e na interpretação de gráficos” (BRASIL, 2002, p. 129).

Figura 2 - Organização geral do livro.

**1ª SÉRIE – 5 unidades - 10 capítulos – 408 pp.**

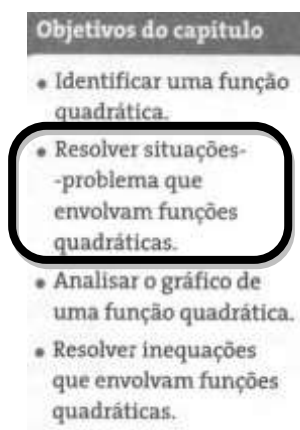
<b>Unidade 1 – Trabalho com a Informação</b>		
1	Coleta, organização e interpretação de dados	28 pp
<b>Unidade 2 – Introdução ao Estudo das Funções</b>		
2	Operações com conjuntos; conjuntos numéricos; intervalos da reta	30 pp
3	Função: conceito, gráfico; função definida por sentenças; função: composta, inversa, par, ímpar	42 pp
<b>Unidade 3 – Funções Polinomiais</b>		
4	Função afim: definição, gráfico, inequações	32 pp
5	Funções quadráticas e modulares: definição, gráfico, inequações	58 pp
<b>Unidade 4 – Outras Funções Importantes e Aplicações</b>		
6	Função exponencial: equações, gráficos, inequações	22 pp
7	Logaritmo: propriedades, mudança de base; funções logarítmicas: gráfico, equações, inequações	30 pp
8	Sequências: definição e exemplos de sequências; progressões aritméticas e geométricas	36 pp
<b>Unidade 5 – Introdução à Trigonometria</b>		
9	Teorema de Tales; semelhança de polígonos; Teorema de Pitágoras	24 pp
10	Trigonometria no triângulo retângulo: seno, cosseno, tangente	24 pp

Fonte: PNLD (Guia de livros didáticos), 2012, p. 54.

A cada novo capítulo, o livro menciona os objetivos previstos a serem atingidos pelos estudantes. Dentre eles, destaca-se o segundo objetivo descrito na Figura 3: resolver situações

problemas, porém vinculados a um conteúdo que esteja em estudo, neste caso relaciona a função quadrática.

Figura 3 - Objetivos do capítulo

- 
- Objetivos do capítulo
- Identificar uma função quadrática.
  - Resolver situações-problema que envolvam funções quadráticas.
  - Analisar o gráfico de uma função quadrática.
  - Resolver inequações que envolvam funções quadráticas.

Fonte: Barroso, 2010, p.142.

A obra inicia as unidades com uma situação problema contextualizada (FIGURA 4), que segundo seu autor visa testar os conhecimentos prévios dos alunos, a mesma está acompanhada da resposta, sem indicar o meio de resolução.

Figura 4 - Situação introdutória à unidade.

**Descobrimo respostas escondidas**

Pichação ou grafite? Embora ambas sejam formas de expressão espontâneas de difícil definição, o senso comum considera a pichação como transgressão e o grafite como arte.

Um dos projetos pedagógicos da Escola Aprender consiste em traçar o perfil de seus alunos, ou seja, conhecer o posicionamento deles diante de várias questões atuais, sendo uma delas a opinião a respeito das pichações. Receia-se, porém, que, nesse quesito, uma **pesquisa direta** resultaria em muitas respostas falsas. Para garantir a confiabilidade da pesquisa e descobrir que respostas eles dariam caso não se sentissem constrangidos pelo senso comum, adotou-se um **processo indireto**.

Cada um dos 1.500 alunos da escola deve retirar, aleatoriamente, um dos cartões reproduzidos abaixo e responder "sim" ou "não" à pergunta.

Cartão 1	Cartão 2	Cartão 3
$1 + 1 = 2?$	Você é a favor da pichação?	$1 + 1 = 3?$

Dessa forma, uma resposta "sim" não denuncia o simpatizante da pichação, pois tanto pode ser resposta do cartão 2 como do cartão 1.

Depois de aplicada a todos os alunos, a pesquisa resultou em 590 respostas "sim".

Considerando-se que, em média, cada cartão tenha sido retirado 500 vezes, é razoável supor que 500 das respostas "sim" referiram-se ao cartão 1 e 90, ao cartão 2. Logo, estimamos que 90 alunos, de um total médio de 500, são favoráveis à pichação, o que equivale a 18 em cada 100, ou ainda a 18% do total de alunos da escola.

**Teste seus conhecimentos prévios**

Suponha que, na pesquisa feita na Escola Aprender, cada cartão tenha sido retirado 500 vezes.

- Quantas respostas "não" foram contadas? 910
- Supondo que 500 das respostas "não" referiam-se ao cartão 3 e nenhuma ao cartão 1, quantas delas referiam-se ao cartão 2? 410
- Das respostas dadas ao cartão 2, qual é a razão entre o número de respostas "não" e o total? Quantas respostas "não" em cada 100? Qual é o percentual estimado de respostas "não"?  $\frac{410}{500}$ ; 82; 82%

No decorrer dos capítulos, o livro traz vários problemas resolvidos por meio de cálculos (FIGURA 5), que servem de modelo para o aluno.

Figura 5 - Exercício resolvido.

**Exercícios resolvidos**

**R1.** Uma videolocadora tinha 1.200 filmes no total. A razão entre o número de filmes nacionais e o número de filmes estrangeiros era  $\frac{1}{6}$ . Neste mês, chegaram 450 novos filmes, e essa razão passou a ser  $\frac{1}{2}$ . Quantos filmes nacionais a videolocadora tem agora?

**Resolução**

Antes deste mês,  $\frac{1}{6}$  do total de filmes dessa videolocadora era nacional, ou seja,  $\frac{1}{6} \cdot 1.200 = 200$ , e  $\frac{5}{6}$  do total eram filmes estrangeiros, ou seja,  $\frac{5}{6} \cdot 1.200 = 1.000$ .

Sendo  $x$  e  $y$  respectivamente o número de filmes nacionais e o número de filmes estrangeiros que chegaram neste mês, temos:

$$x + y = 450 \Rightarrow x = 450 - y \text{ (I)}$$

Como, após a aquisição dos novos filmes, a razão entre o número de filmes nacionais e o número de filmes estrangeiros passou a ser  $\frac{1}{2}$ , temos:

$$\frac{200 + x}{1.000 + y} = \frac{1}{2} \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{200 + (450 - y)}{1.000 + y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{650 - y}{1.000 + y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 100 \text{ e } x = 350$$

Portanto, agora a videolocadora tem 550 (200 + 350) filmes nacionais.

Fonte: Barroso, 2010, p.13.

A obra apresenta entre os capítulos, textos e atividades de interpretação (FIGURA 6), que não estão vinculadas ao conteúdo.

Figura 6 - Situação e atividades de interpretação.

**Números que valem letras**  
Se você conseguir ler as primeiras palavras, decifrá-las automaticamente as outras...

3M D14 D3 V3R40, 3574V4 N4 PR414, 0853RV4ND0 DU45 CR14NC45  
8R1NC4ND0 N4 4R314. 3L45 7R484LH4V4M MU170 CON57RU1ND0 UM  
C4573L0 D3 4R314, COM 70RR35, P4554R3L45 3 P4554G3NS 1N73RN45.  
QU4ND0 3575V4M QU453 4C484ND0, V310 UM4 OND4 3 D357RU1U 7UD0,  
R3DU21ND0 0 C4573L0 4 UM M0N73 D3 4R314 3 35PUM4.  
4CH31 QU3, D3P015 D3 74N70 35F0RC0 3 CU1D4D0, 45 CR14NC45 C41R14M  
N0 CH0R0; CORR3R4M P3L4 PR414, FUG1ND0 D4 4GU4, R1ND0 D3 M405  
D4D45 3 COM3C4R4M 4 CON57RU1R 0U7R0 C4573L0. COMPR33ND1 QU3  
H4V14 4PR3ND1D0 UM4 GR4ND3 L1C40; G4574M05 MU1T0 73MP0 D4 N0554  
V1D4 CON57RU1ND0 4LGUM4 C0154 3, M415 C3D0 0U M415 74RD3, UM4  
OND4 P0D3R4 V1R 3 D357RU1R 7UD0 0 QU3 L3V4M05 74N70 73MP0 P4R4  
CON57RU1R. M45 QU4ND0 1550 4C0NT3C3R, 50M3N73 4QU3L3 QU3 73M 45  
M405 D3 4LGU3M P4R4 53GUR4R, 53R4 C4P42 D3 50RR1R1 50 0 QU3  
P3RM4N3C3 3 4 4M124D3, 0 4M0R 3 0 C4R1NH0.  
0 R3570 3 F3170 D3 4R314.

(4U70R D35C0NH3C1D0)

**Atividades**

- Após a leitura do texto, em grupo, respondam às questões.
  - Em qual ambiente se passa a história desse texto? A história se passa na praia.
  - Do que brincavam as crianças? Brincavam de construir castelo de areia.
  - Quem desmanchou o castelo? Uma onda do mar desmanchou o castelo.
  - Como as crianças reagiram quando o castelo foi desmanchado? As crianças correram pela praia, fugindo da água, rindo de mãos dadas.
  - O que o narrador aprendeu com a cena que observou? Aprendeu que só o que permanece é a amizade, o amor e o carinho. O resto é feito de areia.
- Copiem a tabela no caderno e completem-na com números e letras para explicitar o código usado no texto.
 

Letra	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Número e letra	4	B	C	D	3	F	G	H	1	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	7	U	V	W	X	Y	2
- Com o mesmo código do texto, escrevam sua opinião sobre ele.  
*resposta pessoal*
- Decodifiquem o texto dado, escrevendo-o apenas com letras.  
*Ver resolução no Guia do professor.*
- Atribuem às letras R, F e D, respectivamente, os números 6, 9 e 10. A seguir, construam um único gráfico de colunas (uma coluna para cada letra da frase) para representar a frase "O RESTO É FEITO DE AREIA".  
*Ver resolução no Guia do professor.*

Fonte: Barroso, 2010, p. 34 e 35.

No fim dos capítulos 2, 4, 5, 7, 9 e 10 há uma seção nomeada "Resolução comentada" em que apresenta um problema (FIGURA 7) relacionado ao conteúdo do capítulo, e três estratégias diferentes de resolução, e em seguida, propõe ao aluno que comente sobre uma delas e apresente uma maneira diferente de resolver o mesmo problema. Além de disponibilizar mais dois ou três problemas para serem resolvidos. Segundo Leblanc et al. (1997, p. 158)

Os alunos devem ser estimulados a usar várias estratégias na resolução de um problema particular a fim de ampliar seu repertório de processos de resolução de problemas. Os alunos podem ganhar confiança em sua habilidade de resolver problemas aumentando seu repertório de estratégias e o domínio sobre elas.

Neste sentido, Diniz (2001) menciona que para o aluno ser capaz de resolver um problema de diferentes maneiras e se desapegar de regras prontas, é preciso o estímulo do professor através de espaços de discussão para que reflitam sobre o problema.

Figura 7 - Problema e sua abordagem.

**Modelagem de uma função afim**

### Problema

(Enem-MEC) O excesso de massa pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância, como a maratona (42,2 km), a meia-maratona (21,1 km) ou uma prova de 10 km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de massa, muitos atletas utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico a seguir:

Altura (m)	Massa (kg) ideal para atleta masculino de ossatura grande, corredor de longa distância
1,57	56,9
1,58	57,4
1,59	58,0
1,60	58,5
...	...

**Tempo × massa**  
(Modelo Wilmore e Banke)

Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 63 kg e com altura igual a 1,59 m, que tenha corrido uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de massa ideal, teria melhorado seu tempo na prova em quantos minutos?

### Resolução

Os dados do problema foram apresentados numa tabela e num gráfico.

A tabela relaciona a altura de um atleta, corredor de longa distância, e sua massa ideal. O gráfico apresenta o tempo perdido, em diversas provas, quando o atleta está 1 kg acima da massa ideal.

Antes de responder à pergunta, vamos explorar conceitos matemáticos.

Dizemos que as grandezas  $x$  e  $y$  são diretamente proporcionais quando, ao multiplicar o valor de  $x$  por uma constante  $k > 0$ , o valor de  $y$  correspondente também fica multiplicado por  $k$ , ou seja,  $y = kx$ . Note que essa definição é semelhante à de função linear, em que temos a lei  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $x \in \mathbb{R}$ . Como o gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, cada um dos gráficos representados na questão (maratona, meia-maratona e prova de 10 km) é a representação de uma função do tipo  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $x \in \mathbb{R}_+$ . As funções definidas serão diferenciadas apenas pela constante  $a$ , que é a constante de proporcionalidade  $k$  na relação entre as grandezas massa acima do ideal ( $x$ ) e tempo perdido ( $y$ ).

Podemos resolver esse problema aplicando tanto o conceito de função quanto a ideia de proporcionalidade.

■ **Análise da pergunta e dos dados**

A pergunta pede o tempo desperdiçado por um atleta, com 63 kg de massa e 1,59 m de altura, que tenha corrido uma meia-maratona.

Como o atleta da pergunta tem 1,59 m e iniciou a prova com 63 kg, segundo os dados da tabela, ele excedia em 5 kg (63 kg – 58 kg) a massa ideal. Ou seja, a pergunta do problema pede o tempo perdido por um atleta de meia-maratona quando está com 5 kg acima da massa ideal.

■ Uma das habilidades necessárias para resolver este problema é a leitura e a interpretação de dados apresentados em tabelas e gráficos.

Essa habilidade é muito importante não só para resolver problemas variados, como também para compreender melhor as informações apresentadas no dia a dia.

■ A constante de proporcionalidade direta entre  $x$  e  $y$ , em cada caso representado nos gráficos, é:

- na prova de 10 km: 0,32
- na meia-maratona: 0,67
- na maratona: 1,33

### Resolvendo pelo conceito de função

A lei de formação da função que descreve o gráfico (tempo perdido em relação à massa excedente à massa ideal) é do tipo  $f(x) = ax$ , com  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $x \in \mathbb{R}_+$ .

Em relação à meia-maratona, sabemos que  $f(1) = 0,67$ .

Assim:  $0,67 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 0,67$

Portanto, a lei de formação da função é:  $f(x) = 0,67x$ , sendo  $x$  a massa acima da massa ideal e  $f(x)$  o tempo perdido por um atleta, numa corrida de meia-maratona, devido ao fato de estar  $x$  kg acima da massa ideal.

Como nosso atleta está 5 kg acima da massa ideal, temos:

$$f(5) = 0,67 \cdot 5 = 3,35$$

Portanto, estima-se que o atleta com 63 kg melhoraria seu tempo em 3,35 minutos.

### Resolvendo pela ideia de proporcionalidade

Segundo os dados apresentados no gráfico, se um atleta de meia-maratona estiver 1 kg acima da massa ideal, perderá 0,67 min.

O atleta em questão está com 5 kg acima da massa ideal. Então, melhoraria seu tempo em  $5 \cdot 0,67$  min, ou seja, 3,35 min.

### Conheça um pouco mais: o tempo perdido



A obtenção da lei de formação de uma função é um facilitador na resolução de exercícios. Em casos em que precisamos encontrar o tempo para uma massa fracionária, por exemplo, torna-se mais fácil e rápido obter a informação por meio da lei da função.

Outra forma de resolver o problema é usar a ideia de proporcionalidade de uma regra de três:

Excesso de massa	Tempo perdido
1	0,67
5	$x$

$$x = \frac{5 \cdot 0,67}{1} = 3,35$$

A velocidade média de um atleta no percurso da prova de 10 km é maior que nas provas de maratona e meia-maratona e, por isso, o atleta gasta mais rapidamente sua massa, o que determina que o tempo perdido na prova de 10 km seja menor que nas provas de maratona ou meia-maratona.

### Comparem as resoluções

Escolham uma das resoluções e escrevam no caderno um comentário sobre ela.

Se vocês pensaram em uma forma diferente de resolver esse problema, elaborem a resolução no caderno e façam um comentário a respeito. *resposta pessoal*

### Variações do problema

1. Se o mesmo atleta (com 1,59 m de altura, pesando 63 kg) corresse em uma prova de 10 km, quanto tempo perderia por estar acima da massa ideal? *1,6 minuto*
2. Qual seria o tempo perdido por um atleta de ossatura grande, com 1,58 m e massa igual a 60 kg, em uma maratona? *3,458 minutos*

3. Admitindo que, para alturas superiores a 1,60 m, a variação da massa ideal do atleta (em kg) continue ocorrendo na mesma proporção que a verificada de 1,59 m para 1,60 m, determine qual será o tempo perdido por um atleta de 1,73 m e 71 kg em uma prova de 10 km. *1,92 minuto*

Fonte: Barroso, 2010, p. 140 e 141.

No geral, o livro inicia os capítulos com uma situação cotidiana de forma contextualizada e apresenta um problema, alguns são objetivos e outros mais abrangentes. Segue com a definição dos conteúdos apresentados de forma fragmentada. Entre as atividades propostas no capítulo 1, a maioria delas são problemas e poucos exercícios, ambos relacionados ao conteúdo apresentado no capítulo. A constante das atividades propostas nos

capítulos 2, 3, 4, 5 e 6 são exercícios de aplicação, construção de gráficos e tabelas, poucos problemas são sugeridos.

Os PCNs do Ensino Médio ressaltam que:

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento (BRASIL, 1998, p. 111).

O livro, em determinados capítulos (5 e 7), não introduz com problemas, mas traz definições para iniciar o conteúdo, contextualizando a partir de temas relacionados à Física, à geometria e à Biologia. Ainda, no capítulo 5, mas separadamente, introduz função modular a partir de uma situação do cotidiano, partindo para definições e exercícios resolvidos, sem apresentar nenhum problema, apenas exercícios durante essa abordagem.

O livro ainda define o conteúdo (capítulos 8, 9 e 10) por meio de uma situação, apresentando técnicas. Entretanto, percebe-se um acréscimo de problemas em relação aos demais capítulos, intercalando exercícios e problemas. No fim de cada capítulo, há um resumo do que foi abordado, fazendo um enfoque geral de algumas propriedades, símbolos, representações e técnicas. Após a apresentação de todos os capítulos, o livro sugere, questões de vestibular de múltipla escolha (FIGURA 8), sendo que cada bloco de questões indica a que conteúdo estão vinculadas as questões propostas.

Figura 8 - Questão de vestibular.

**Questões de vestibular**

Leia atentamente as questões a seguir e resolva-as em seu caderno.

**Capítulo 1**

1. (Unicamp-SP) Como se sabe, os *icebergs* são enormes blocos de gelo que se desprendem das geleiras polares e flutuam pelos oceanos. Suponha que a parte submersa de um *iceberg* corresponda a  $\frac{8}{9}$  do seu volume total e que o volume da parte não submersa é de  $135.000 \text{ m}^3$ .

a) Calcule o volume total do *iceberg*.  $1.215.000 \text{ m}^3$

b) Calcule o volume de gelo puro do *iceberg* supondo que 2% de seu volume total é constituído de "impurezas", como matéria orgânica, ar e minerais.  $1.190.700 \text{ m}^3$

Fonte: Barroso, 2010, p. 336.



Observou-se que na seção “Questões de Vestibular”, há uma considerável quantidade de problemas (QUADRO 3), apesar de haver alguns capítulos com predomínio de exercícios, percebe-se um avanço significativo.

Quadro 3 - Quantidade de problemas e exercícios na seção “Questões de Vestibular”.

Capítulo	Quantidade de Problema	Quantidade de Exercício
1	8	0
2	6	4
3	1	10
4	9	1
5	11	11
6	5	6
7	4	15
8	7	8
9	3	5
10	5	2

Fonte: Das autoras, 2014.

O livro também referencia questões do ENEM entre os anos de 1998 a 2009, ambas de múltipla escolha sem indicação do conteúdo abordado, mas, percebe-se que a seleção dessas, objetivava, de certa forma, retomar os estudos feitos durante os capítulos. Das 82 questões disponibilizadas, todas são problemas.

Em seguida, o livro disponibiliza ao professor um guia, em que a parte geral caracteriza o livro, pois fala sobre sua importância, estrutura, comenta sobre avaliação, interdisciplinaridade e formação do professor. Sugere leituras com foco na Matemática, direcionadas aos alunos e aos professores, além de recomendar ao professor, sites de artigos e periódicos tornando este material significativo para o professor.

Na parte específica, traz uma lista de exercícios para revisão do que foi estudado no ensino fundamental. Na sequência, o livro organiza 10 capítulos, um para cada conteúdo já abordado, e faz uma espécie de revisão de todos os conteúdos, através de inúmeros exercícios resolvidos por meio de cálculo e alguns problemas (QUADRO 4), mas não retoma a conceituação.

Quadro 4 - Quantidade de problemas e exercícios para revisão de conteúdos.

Capítulo	Quantidade de Problemas	Quantidade de Exercícios
1	12	0
2	1	13
3	3	23
4	2	9
5	2	17
6	2	8
7	1	13
8	2	10
9	2	9
10	3	5

Fonte: Das autoras, 2014.

Ao analisar os capítulos do livro, percebe-se que trabalha vinculado ao conteúdo, tanto os exercícios quanto os problemas que propõe. Tem grande quantidade de conteúdos e atividades, dá ênfase aos exercícios, mas traz problemas interessantes, exige que o professor faça uma seleção de conteúdos e atividades a serem exploradas. Sugere leituras e questões contextualizadas entre um capítulo e outro, favorecendo a interpretação, que é fundamental para trabalhar com problemas matemáticos. Para Barnett et al. (1997) ao propor às crianças experiências que ajudem a desenvolver habilidades de processamento de linguagem na área matemática, o professor pode contribuir para o aprimoramento na resolução de problemas. De acordo com Brasil (2008, p. 106), “o conhecimento matemático ganha significado, quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução”.

A seção “resoluções comentadas” poderia estar mais no início de cada capítulo, mostrando e estimulando o aluno para o uso de diferentes estratégias e não para encerrar os capítulos. Observou-se a realce das resoluções dos problemas por meio de cálculo. As questões de vestibular dão bastante ênfase a problemas e as do ENEM predominantemente são problemas matemáticos, não havendo nenhum exercício entre as questões listadas nesta obra.

O guia ao professor é um material rico que sugere e disponibiliza fontes de leitura confiáveis com temas relacionados ao ensino e à aprendizagem, mas sem mencionar diretamente a resolução de problemas. Se o professor utilizar o que está sendo sugerido no guia e mesclar entre tudo o que o livro oferece e sugere, poderá fazer um bom trabalho a partir dele, e trabalhar com resolução de problemas. Segundo Allevato e Terto (2009), o livro

didático auxilia e favorece o preparo das aulas, além de ser importante no cotidiano do aluno e do professor, ajudando ambos na organização do ensino, da aprendizagem e das tarefas tanto na sala de aula como fora dela.

O segundo livro analisado (FIGURA 9) é adotado em uma das escolas participantes desta pesquisa. O quadro representado na Figura 10 demonstra que o livro é extenso e concentra-se no estudo de funções.

Figura 9 - Livro de RIBEIRO, Jackson. Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

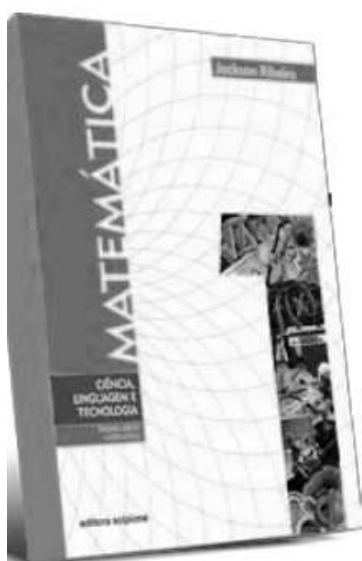


Figura 10 - Organização geral da obra.

**1ª SÉRIE – 10 capítulos – 384 pp.**

1	Conjuntos: conceitos; operações; conjuntos numéricos; intervalos	35 pp.
2	Noções de funções: conceitos; representações	41 pp.
3	Função afim: conceitos; gráficos; inequações	35 pp.
4	Função quadrática: conceitos; gráficos; máximo e mínimo; inequações	41 pp.
5	Função modular: conceitos; equação e inequação modulares	24 pp.
6	Potenciação; notação científica; função exponencial; equações e inequações exponenciais	
7	Função logarítmica: logaritmo; propriedades; função logarítmica; equação e inequação logarítmicas	37 pp.
8	Seqüências: conceitos; progressões aritméticas e geométricas	53 pp.
9	Relações métricas no triângulo retângulo e teorema de Tales	26 pp.
10	Relações trigonométricas no triângulo retângulo; lei dos cossenos e lei dos senos	35 pp.

Fonte: PNLD, 2012, p. 84.

O livro inicia com uma acessória pedagógica ao professor, menciona os objetivos da obra e da Matemática com fundamentação teórica embasada nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais), aborda a resolução de problemas (FIGURA 11) e outros temas atuais.

Figura 11 - Abordagem à metodologia da Resolução de Problemas.

### **Resolução de problemas**

Nas orientações educacionais para o ensino de Matemática, a resolução de problemas tem conquistado um papel de destaque devido aos inúmeros benefícios que ela pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, independentemente do nível de ensino.

Segundo os PCN+ (2002, p. 112-3),

*[...] a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.*

*[...]*

*[No processo de resolução,] o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.*

Diante disso, a resolução de problemas constitui-se em um aspecto importante a ser valorizado nas aulas de Matemática, e, ao engajarem-se nesse processo,

*[...] os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (PCN, 2000, p. 52).*

Tudo isso pode contribuir para que eles deixem de ser apenas espectadores e tornem-se agentes no processo de aprendizagem da Matemática.

Para que o trabalho com a resolução de problemas possa ser viabilizado, é necessário que o professor promova situações em sala de aula que possibilitem aos alunos vivenciarem experiências nas quais estejam presentes, dando a eles a oportunidade de resolverem problemas em contexto prático. Além disso, é preciso oferecer experiências com problemas cujas resoluções não sejam únicas, isto é, problemas que permitem várias respostas.

Nesta coleção, alguns conteúdos são introduzidos por meio de situação-problema, após a qual o professor tem a oportunidade de proporcionar aos alunos alguns dos aspectos apresentados. Além disso, nas seções EXERCÍCIOS PROPOSTOS e PREPARE-SE, são propostas outras situações que possibilitam aos alunos, por exemplo, ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos relacionados à resolução de problemas.

Fonte: Ribeiro, 2010 p. 2.9.

O autor do livro descreve sugestões de leituras para o professor de Matemática em livros pedagógicos de autores renomados, entre eles Polya (FIGURA 12) que aborda a resolução de problemas, além de sites de pesquisa.

Figura 12 - Sugestões de leitura.

► **Sugestões de leitura para o professor**

**Metodologia de ensino de Matemática**

*A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*

POLYA, George. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

O livro apresenta um estudo sobre métodos de resolução de problemas. O autor tenta convencer o leitor de que a Matemática, além de indispensável aos profissionais da Engenharia e ao conhecimento científico, pode ser divertida e descortinar um panorama de atividade mental no mais alto nível.

Fonte: Ribeiro, 2010 p. 2.17.

A organização do livro é exposta por meio de um painel especificando os conteúdos, quantidade de atividades e as competências e habilidades de cada capítulo. Neste, é possível visualizar o grande número de exercícios e conteúdos. O autor sugere como desenvolver algumas das atividades e temas presentes no livro, sendo que cada conteúdo está em um capítulo específico, de forma fragmentada. No entanto, faz conexões com práticas sociais atuais ou com outras disciplinas, permitindo uma abordagem que favorece a interdisciplinaridade.

Os conteúdos são, na maioria das vezes, introduzidos com um problema do cotidiano já resolvido, induzindo o aluno a chegar a uma definição Matemática, fórmula, regra ou teorema que vem disposto na sequência dos capítulos. Alguns capítulos (1 e 10) iniciam direto pela conceituação, outros capítulos (5 e 8) partem de uma notícia atual e questões de interpretação. Posteriormente o livro define o conteúdo a ser trabalhado e segue com problemas resolvidos por meio de cálculos, usando as fórmulas relacionadas a cada conteúdo. Essa é uma particularidade também mencionada por Leblanc et al. (1997) como sendo característica de “problema – modelo de livros didáticos” em que o problema pode ser resolvido através da aplicação direta de algoritmos previamente aprendidos.

O livro ainda apresenta de forma intercalada problemas e exercícios, por vezes um prevalece e por vezes o outro, entre esses há inúmeras atividades resolvidas. Propõe trabalho em grupos e em alguns momentos, sugere o uso da calculadora científica (capítulo 7 e 10). Finaliza cada capítulo com uma seção chamada “Prepare-se” cujas atividades (QUADRO 5) objetivam o aluno testar os conhecimentos construídos.

Quadro 5 - Quantidade de problemas e exercícios na seção “Prepare-se”.

Bloco	Quantidade de Problemas	Quantidade de Exercícios
1º	3	15
2º	3	17
3º	13	2
4º	5	11
5º	2	11
6º	10	4
7º	9	6
8º	15	4
9º	16	1
10º	18	5

Fonte: Das autoras, 2014.

A obra analisada favorece a leitura, traz um pouco da história (capítulo 1, 4, 8 e 9) e finaliza os capítulos com sugestão de leitura (FIGURA 13) com temas relevantes relacionados aos conteúdos.

Figura 13 - Sugestão de leitura.



Fonte: Ribeiro, 2010, p. 116.

Faz o fechamento da obra com sugestões de livros de apoio para alunos e sites para o professor e acompanha com reflexões para o professor por meio de entrevistas de professores universitários que abordam aspectos atuais da educação no ensino médio, como interdisciplinaridade, tecnologia, leitura e avaliação.

Pode ser considerado um bom livro, porém apresenta basicamente problemas para aplicar conteúdos, sempre vinculados a eles. Não apresenta diferentes formas de resolução, dá ênfase ao cálculo e sua assessoria pedagógica é muito rica. O autor colocou parte dessa assessoria no começo do livro para ser visualizada antes de iniciar os conteúdos propostos.

O terceiro livro analisado, representado na Figura 14, é adotado por uma das escolas envolvidas nesta pesquisa.

Figura 14 - Livro de DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2010.



Este livro é mais extenso em relação aos demais e atenta principalmente ao conteúdo de funções (FIGURA 15), sendo que 70% de suas páginas tratam deste tema.



Figura 15 - Organização dos conteúdos.

**1ª SÉRIE – 12 capítulos – 504 pp.**

1	Revisão: produtos notáveis e fatoração	10 pp.
2	Conjuntos: noções, propriedades e operações – conjuntos numéricos: intervalos – plano cartesiano: distância entre pontos, equação da circunferência	52 pp.
3	Funções: noção intuitiva e por meio de conjuntos; expressões algébricas; gráfico. Função: par, ímpar; crescente, decrescente; injetiva, sobrejetiva; composta; inversa - sequências	40 pp.
4	Função afim: definição; propriedades; taxa de variação; gráfico; estudo do sinal; inequações do 1º grau	38 pp.
5	Função quadrática: propriedades; gráfico: parábola; vértice; valor máximo ou mínimo; estudo do sinal; inequações do 2º grau	56 pp.
6	Módulo de número real – função modular; equações e inequações modulares	24 pp.
7	Potenciação – função exponencial - equações e inequações exponenciais; as funções $f(x)=a^x$ e $g(x)=a^{-x}$ ; a função exponencial $e^x$	30 pp.
8	Logaritmo – função logarítmica; equações e inequações logarítmicas	34 pp.
9	Progressões: sequência – progressões aritmética e geométrica	44 pp.
10	Matemática financeira: proporcionalidade; porcentagem; juros e funções	54 pp.
11	Trigonometria no triângulo retângulo: tangente, seno e cosseno	30 pp.
12	Geometria plana: figuras geométricas; propriedades; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo; comprimento da circunferência – áreas	53 pp.

Fonte: PNLD, 2012, p. 62.

Na apresentação do livro, o autor escreve que “Antes de resolver os exercícios propostos, é absolutamente necessário que o aluno estude a teoria e refaça os exemplos” (2010, p.3). Isso nos remete a restrição da criação de estratégias próprias do aluno para resolver os problemas propostos. Para Polya (1995, p. 124):

O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e ao discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém.

Em todos os capítulos, o livro traz inicialmente uma leitura direcionada ao processo histórico ou a uma situação atual e duas ou três perguntas relacionadas com a leitura sugerida, o que possibilita boas reflexões e pesquisas, podendo direcionar ao conteúdo.

No primeiro capítulo faz uma revisão, apresenta um método de resolução por meio de cálculo para cada tipo de operação (adição, subtração, mudando o expoente, fatoração...). Em seguida, traz exercícios (FIGURA16) para serem realizados usando a ideia apresentada pelo

autor, de forma fragmentada, ou seja, depois de cada explicação tem exercícios, logo passa para outra explicação e novamente exercícios, e assim respectivamente. Apesar de ter questões transcritas de vestibulares de diferentes regiões, este capítulo apresenta exclusivamente exercícios.

Figura 16 - Exemplo de exercícios propostos ao longo do capítulo 1.



**Exercício proposto**

9. Fatore completamente:

a)  $x^2 + 16x + 64$   
 b)  $49x^2 - 14x + 1$   
 c)  $9x^2 + 12xy + 4y^2$   
 d)  $a^2 - 2ab + b^2$

Fonte: Dante, 2010, p. 14.

Para os PCN<sub>+</sub>

Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho (BRASIL, 2002, p. 113).

Esse tipo de atividade é importante, mas não o suficiente para o desenvolvimento do aluno. Os demais capítulos iniciam com um ou mais problemas, alguns fictícios e outros relacionados ao cotidiano. A maioria deles encontra-se resolvido e direcionam ao conteúdo que será estudado no capítulo (FIGURA 17), no caso o estudo de funções visa chegar a função, ou modelo. Já para introduzir geometria plana, parte de uma figura para visualizar os ângulos opostos.

De imediato enfatiza a necessidade de conhecer o conteúdo quando propõe um problema, e logo abaixo descreve que para resolvê-lo é preciso conhecer o conteúdo a ser estudado (destaque FIGURA 17).

Figura 17 - Introdução do capítulo 2.

## 1. Introdução

Analise a seguinte situação-problema:

Em uma pesquisa realizada com 50 pessoas para saber que esporte elas apreciam entre futebol, basquete e vôlei, o resultado foi o seguinte: 23 gostam de futebol, 18 de basquete e 14 de vôlei; 10 gostam de futebol e de basquete; 9 de futebol e de vôlei; 8 de basquete e de vôlei e 5 gostam das três modalidades.

- Quantas pessoas não gostam de nenhum desses esportes?
- Quantas gostam somente de futebol?
- Quantas gostam só de basquete?
- Quantas gostam apenas de vôlei?
- Quantas não gostam nem de basquete nem de vôlei?
- Quantas pessoas gostam só de futebol ou só de basquete ou de ambos?



Brasil × França, 1/7/2006.



Brasil × EUA, 23/9/2006.



Brasil × Polônia, 3/12/2006.

Para resolver questões desse tipo, devemos utilizar conhecimentos de *conjuntos*.

Fonte: Dante, 2010, p. 20.

Na sequência da situação problema introdutória, parte para a definição do conteúdo seguido de explicação e atividades. Propõe exercícios e problemas vinculados aos exemplos apresentados fazendo uso de símbolos matemáticos. Leblanc (1997) diz que o uso de símbolos é comum em “problema – modelo de livros didáticos” usados com o propósito do aluno traduzir uma situação do mundo real em símbolos matemáticos, empregando isso para resolver um problema, por meio de um algoritmo já aprendido.

Alguns capítulos dão mais ênfase a exercícios (capítulos 5, 6, 7, 8 e 9) em que os problemas estão principalmente no fim, em outros (capítulo 10, 11 e 12) há problemas no decorrer da proposta. No geral, propõe atividades mesclando problemas e exercícios (capítulos 2, 3 e 4). Apesar disso, a maior concentração de problemas está no fim de cada capítulo com diferentes contextualizações em que relaciona mais de um conteúdo, como por exemplo nos capítulos 3 e 10.

Após as explicações, apresenta em cada capítulo uma seção chamada “Tim-tim por Tim-tim” (FIGURA 18), onde propõe um problema comentado, como tentativa de explorar as etapas da resolução de problemas sugeridas por Polya. No entanto, o autor não deixa claro ao

professor como isso deve ser abordado com os alunos, traz seu raciocínio para a resolução do problema, sendo que por vezes faz uso exclusivo de técnicas relacionadas a um conteúdo específico. Em um dos capítulos apresenta a resolução fazendo uso do *tangram* que é uma ferramenta concreta presente na maioria das escolas. Os problemas apresentados nessa seção são por vezes bem contextualizados e em outras nem tanto.

Neste sentido, Pozo (1998), relaciona a resolução de problemas com a capacidade de aprender a aprender, na intenção de habituar os alunos a encontrarem por si mesmos, respostas às perguntas que os incomodam ou que devem responder, tornando-se esta metodologia um aspecto essencial para a construção do conhecimento. E de acordo com Rabelo (2002, p. 76), “a resolução de problemas deve proporcionar a construção de conceitos e a descoberta de relações de formular e resolver problemas”. Portanto, segundo os autores, a resolução de problemas não deveria ser utilizada apenas como uma fixação de conteúdo estudado em forma de exercícios, mas ser considerada como um conteúdo matemático a ser trabalho na educação básica.

Figura 18 - Exemplo abordagem seção “Tim-tim por Tim-tim”.

**Exemplo:**

(Ibmec-SP) No bolso de uma pessoa havia  $X$  cédulas de  $Y$  reais e  $Y$  cédulas de  $X$  reais. Se esta pessoa colocar neste bolso mais  $X$  cédulas de  $X$  reais e  $Y$  cédulas de  $Y$  reais, então esta pessoa terá no bolso:

a)  $(X + Y)^2$  reais.                      c)  $(X^2 + Y^2)$  reais.                      e)  $(X^2 + Y^2)^2$  reais.  
 b)  $(X - Y)^2$  reais.                      d)  $(X^2 - Y^2)$  reais.

**1. Lendo e compreendendo**

**a) O que é dado no problema?**  
 São dadas as quantidades de cédulas de  $X$  reais e a quantidade de cédulas de  $Y$  reais.

**b) O que se pede?**  
 Pede-se que se estabeleça a quantidade de dinheiro que a pessoa tem no bolso.

**2. Planejando a solução**  
 Como sabemos a quantidade de cédulas de  $X$  e de  $Y$  reais que a pessoa tinha no bolso, basta multiplicar a quantidade de cédulas pelo seu valor para ter o total de dinheiro. Depois, somaremos todos esses valores e, se necessário, manipularemos a expressão obtida para chegar à resposta correta.

**3. Executando o que foi planejado**  
 Antes, havia no bolso  $X$  cédulas de  $Y$  reais, totalizando  $X \cdot Y$  reais;  
 e havia  $Y$  cédulas de  $X$  reais, totalizando mais  $X \cdot Y$  reais.  
 Assim, inicialmente, ela tinha  $XY + XY$ , ou seja,  $2XY$  reais no bolso.  
 Depois, ela colocou mais  $X$  cédulas de  $X$  reais, totalizando  $X \cdot X$ , ou seja,  $X^2$  reais;  
 e colocou também  $Y$  cédulas de  $Y$  reais, totalizando mais  $Y \cdot Y$ , ou seja,  $Y^2$  reais.  
 Assim, ela terá no bolso  $X^2 + 2XY + Y^2$ .

**4. Emitindo a resposta**  
 Para chegar à resposta, é necessário fatorar a expressão inicialmente obtida. Devemos perceber então que se trata de um trinômio quadrado perfeito:  

$$X^2 + 2XY + Y^2 = (X + Y)^2$$
  
 A resposta é o item a.

**5. Ampliando o problema**  
**Discussão em equipe**  
 Troque ideias com seus colegas sobre como alterar o enunciado para que o resultado seja o item b das alternativas.

O livro traz nessa seção (Tim-tim por Tim-tim) um diferencial, sendo uma iniciativa de apoio ao professor para abordar as etapas da resolução de problemas, que se forem aprofundadas e bem interpretadas podem ser significativas para a introdução dessa metodologia de ensino. Essa abordagem das etapas da resolução de problemas fica vaga no capítulo 1, uma vez que ele traz apenas exercícios e nenhum problema para ser resolvido pelo aluno, e também o capítulo 6 é mediado por poucos problemas. Já os demais capítulos trazem mais problemas para os alunos resolverem, nesses, as etapas passam a ter significado e podem ser melhor exploradas.

Mais para o final de cada capítulo traz atividades retiradas de vestibulares, mesclando problemas e atividades. Finaliza os capítulos com um texto que relaciona a Matemática com as práticas sociais, variando a temática seguida por questões de interpretação. Com isso, favorece a leitura e a interpretação o que é significativo para a resolução de problemas, além de mostrar que a Matemática é algo presente em situações reais e não apenas abstratas como acreditam alguns. Alves (2006, p. 104) concluiu que “a maior parte dos erros cometidos está relacionada à compreensão e interpretação dos enunciados dos problemas e não aos cálculos ou conteúdos matemáticos propriamente ditos”. O contexto dos problemas é algo positivo, pois abrange temas relacionados a outras áreas do conhecimento. No entanto, os mesmos podem, em sua maioria, serem resolvidos com mera aplicação de técnicas apresentadas nos capítulos.

Terminados todos os capítulos, o livro traz questões do ENEM (FIGURA 19), entre os anos de 2000 a 2009, que são apresentadas em sua totalidade em forma de problemas, sem indicar a que conteúdo os mesmos estão vinculados, o que é outro fator positivo para o aluno criar autonomia no momento da resolução. Segundo Dante (2003), através da resolução de problemas é possível desenvolver no aluno a iniciativa, o espírito explorador, criatividade, independência e a desenvoltura de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis.

Figura 19 - Questão do Enem.

**ATENÇÃO!**  
ESTAS QUESTÕES FORAM TRANSCRITAS LITERALMENTE,  
EMBORA EM ALGUMAS APAREÇA "ASSINALE",  
"INDIQUE", ETC. **NÃO ESCREVA NO LIVRO.**  
TODAS AS RESPOSTAS DEVEREM SER DADAS NO CADERNO.

**Exame Nacional do Ensino Médio**  
**2000**

1. A tabela abaixo resume alguns dados importantes sobre os satélites de Júpiter:

Nome	Diâmetro (km)	Distância média ao centro de Júpiter (km)	Período orbital (dias terrestres)
Io	3 642	421 800	1,8
Europa	3 138	670 900	3,6
Ganímedes	5 262	1 070 000	7,2
Calisto	4 800	1 880 000	16,7

Ao observar os satélites de Júpiter pela primeira vez, Galileu Galilei fez diversas anotações e tirou importantes conclusões sobre a estrutura de nosso Universo. A figura abaixo reproduz uma anotação de Galileu referente a Júpiter e seus satélites.

De acordo com essa representação e com os dados da tabela, os pontos indicados por 1, 2, 3 e 4 correspondem, respectivamente, a:

- Io, Europa, Ganímedes e Calisto.
- Ganímedes, Io, Europa e Calisto.
- Europa, Calisto, Ganímedes e Io.
- Calisto, Ganímedes, Io e Europa.
- Calisto, Io, Europa e Ganímedes.

Fonte: Dante, 2010, p. 443.

No manual do professor, ao final do livro, o autor aborda tópicos relevantes para o ensino (FIGURA 20), entre eles a resolução de problemas, interdisciplinaridade, ensino médio inovador, ENEM, recursos didáticos auxiliares e sugere leituras complementares.

Figura 20 - Leitura sugerida.

Todo esse material deve ser encarado como *meio* para uma aprendizagem significativa e não como *fim*.

A sala-ambiente e o laboratório de Matemática devem ser o local da escola onde se respire Matemática o tempo todo, um ambiente permanente de busca e descoberta.

## 7. Formulação e resolução de problemas

*"A resolução de problemas é a coluna vertebral da instrução matemática desde o papiro de Rhind,"*

George Polya

*"A razão principal de se estudar Matemática é para aprender como se resolvem problemas,"*

Lester Jr.

Ao ter como prioridade a construção do conhecimento pelo fazer e pensar, o papel da *formulação e resolução de problemas* é fundamental para auxiliar o aluno na apreensão dos significados.

Indicamos a seguir alguns procedimentos para melhor atingir esse objetivo.

### Objetivos

A resolução de problemas deve ter por meta:

- fazer o aluno pensar;
- desenvolver o raciocínio lógico do aluno;
- ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- levar o aluno a conhecer as primeiras aplicações da Matemática;
- tornar as aulas mais interessantes e motivadoras.

### As fases da resolução de um problema

Cinco são as etapas que o aluno deve adotar na resolução de um problema:

- a) compreensão do problema;
- b) elaboração de um plano de solução;
- c) execução do plano;
- d) verificação ou retrospectiva;
- e) emissão da resposta.

Vamos examinar cada fase que o aluno deve seguir:

#### a) Compreensão do problema

- Leitura e interpretação cuidadosa do problema.
- Quais são os dados e as condições do problema? Há dados a mais no problema? Faltam dados?
- O que se pede, o que se pergunta no problema?
- É possível fazer uma figura, um diagrama ou uma tabela?
- É possível estimar uma resposta?

#### b) Elaboração de um plano de solução

- Qual é seu plano para resolver o problema?
- Que estratégias você tentará desenvolver?
- Você se lembra de um problema semelhante mais simples que pode ajudá-lo a resolver este problema?
- Tente organizar os dados em tabelas, gráficos ou diagramas.
- Tente resolver o problema por partes.

#### c) Execução do plano

- Execute o plano elaborado.
- Efetue todos os cálculos indicados no plano.
- Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

#### d) Verificação ou retrospectiva

- Você leu e interpretou corretamente o problema?
- Você elaborou um plano razoável e factível?
- Executou com precisão o que foi planejado? Conferiu todos os cálculos?
- Há alguma maneira de "tirar a prova" para verificar se você acertou?
- A solução está correta?
- Existe outra maneira de resolver o problema?
- É possível usar a estratégia empregada para resolver problemas semelhantes?

#### e) Emissão da resposta

- A resposta é compatível com a pergunta?
- Você escreveu a resposta por extenso, respondendo à pergunta do problema?

Fonte: Dante, 2010, p. 33.

O quarto e último livro analisado (FIGURA 21) é adotado em uma das escolas parceiras desta pesquisa.

Figura 21 - Livro de PAIVA, Manoel. Matemática. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2009.



Neste livro, como nos demais, predomina o conteúdo de funções. Pelo número reduzido de páginas, percebe-se que é um livro sintetizado e objetivo em comparação aos outros já analisados.

Figura 22 - Organização dos conteúdos.

1ª SÉRIE – 11 capítulos – 256 pp.

1	Conjuntos: conceitos primitivos, notação; finitos e infinitos; operações; conjuntos numéricos; o eixo real	34 pp
2	Álgebra: equações, inequações e sistemas de equações polinomiais do 1º grau; equações polinomiais do 2º grau; matemática financeira	18 pp
3	Geometria plana: polígonos; triângulos e suas propriedades, teorema de Tales; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo	22 pp
4	Função: sistema de coordenadas; definição; representações; gráficos	20 pp
5	Função real de variável real; inversa de uma função	16 pp
6	Função polinomial de 1º grau: gráfico, definida por sentenças; inequações produto e quociente	19 pp
7	Função polinomial do 2º grau: gráfico, máximo e mínimo; inequações polinomiais do 2º grau	19 pp
8	Eixo real: distância entre pontos; módulo, equações e inequações modulares; função modular	14 pp
9	Potenciação e radiciação; função exponencial; equações e inequações exponenciais	20 pp
10	Conceito de logaritmo; função logarítmica; equações e inequações logarítmicas	24 pp
11	Sequência; progressões aritméticas e geométricas	28 pp

Fonte: PNLD, 2012, p. 69.



Os capítulos deste livro iniciam com a seção nomeada “Além da teoria” que apresenta um problema contextualizado (FIGURA 23).

Figura 23 - Exemplo de problema introdutório.

**Além da teoria**

Um funcionário do departamento de seleção de pessoal de uma indústria automobilística, analisando o currículo de 47 candidatos, concluiu que apenas 3 deles nunca trabalharam em montagem ou pintura, 32 já trabalharam em montagem, e 17 já trabalharam nos dois setores.

- ▶ De acordo com essas informações, quantos desses candidatos já trabalharam apenas em pintura de automóveis? 12 candidatos
- ▶ Quantos candidatos não têm experiência em pintura de automóveis? 18 candidatos
- ▶ Quantos candidatos não têm experiência em nenhum dos dois setores? 3 candidatos

*Com os conteúdos deste capítulo, você aprenderá o que são conjuntos e como são representados, e poderá resolver problemas como este, que envolvem quantidades de elementos de conjuntos finitos.*

Fonte: Paiva, 2009, p. 6.

Ao longo dos capítulos deste livro, o autor contextualiza com vocabulário claro, relacionando sua escrita com outras áreas do conhecimento, traz exemplos e parte para o conteúdo. Há inúmeros problemas resolvidos, propõe exercícios e problemas a serem solucionados pelos alunos. Finaliza com a sugestão de leitura de um texto relacionado à temática em estudo e ao mesmo tempo algo atual, além de propor atividades relacionadas ao tema estudado. Usa em alguns capítulos recortes de propagandas de revista ou jornal para contextualizar os problemas.

Um dos aspectos que chamam atenção nessa obra é a quantidade de problemas e exercícios resolvidos (FIGURA 24).

Figura 24 - Exemplo de exercício resolvido.

**Exercícios resolvidos**

**R.7** Demonstrar que a soma de dois números pares quaisquer é um número par.

*Resolução*

- Dois números pares quaisquer são da forma  $2n$  e  $2k$ , com  $n$  e  $k$  números inteiros. Assim, temos:
 
$$2n + 2k = 2(\underbrace{n+k}_{\text{inteiro}})$$
- Por P3, a soma  $(n+k)$  é um número inteiro e, portanto,  $2(n+k)$  é par. Fica então demonstrado que a soma de dois números pares quaisquer é um número par.

**R.8** Classificar como verdadeira ou falsa cada sentença a seguir. Em caso de classificação "verdadeira", descrever todas as formas possíveis de leitura da sentença.

a)  $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$                       b)  $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

*Resolução*

O símbolo " $\Rightarrow$ " indica a relação de implicação entre duas proposições. Dizemos que uma proposição  $p$  **implica** uma proposição  $q$  quando o fato de  $p$  ser verdadeira garante, por meio de uma série de argumentos lógicos, que  $q$  também é verdadeira. Assim, temos:

a) Verdadeira, pois, supondo que  $x = 5$  seja verdadeira, concluímos que  $x^2 = 25$  também é verdadeira.

A sentença  $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$  pode ser lida como:

- se  $x = 5$ , então  $x^2 = 25$ ;
- $x = 5$  implica  $x^2 = 25$ ;
- $x = 5$  é condição suficiente para  $x^2 = 25$ ;
- $x^2 = 25$  é condição necessária para  $x = 5$ .

b) Falsa, pois, supondo que  $x^2 = 25$  seja verdadeira, **não** podemos concluir que  $x = 5$  é verdadeira, pois  $x$  pode ser igual a  $-5$ . Em outras palavras, a proposição  $x^2 = 25$  **não** implica  $x = 5$ .

Não foi usada a mesma letra nas expressões dos números par e ímpar para não particularizar a demonstração. Se tivéssemos usado, por exemplo,  $2n$  e  $2n + 1$ , teríamos provado que a soma de um número natural par com seu consecutivo é ímpar.

Fonte: Paiva, 2009, p. 25.

O livro traz problemas (FIGURA 25) no decorrer da exploração dos conteúdos, não deixando isso apenas para o fim de cada capítulo. Não apresenta questões do ENEM, no entanto os problemas propostos são bem interessantes, contextualizados, porém relacionados ao conteúdo em estudo.


Figura 25 - Exemplo de problema.

**3** Uma livraria faz a seguinte promoção:

Agora, responda:

a) Um cliente que possui 23 livros já lidos pretende aproveitar ao máximo essa promoção. Quantos livros novos ele pode ler dessa livraria, sem nenhum custo, supondo que a promoção não termine? 7 livros.

b) Um cliente possui 505 livros já lidos e, em cada troca dessa promoção, ele retira o maior número possível de livros novos. Escreva a sequência  $(a_n)$ , em que  $a_n$  é o número de livros novos retirados na  $n$ -ésima troca. (126, 31, 8, 2, 1)



The illustration shows a bookshelf with several books. A sign on a stand next to it reads: 'Promoção: Todo cliente pode trocar 4 livros já lidos por 1 livro novo, sem nenhum custo.' A person is standing next to the sign, looking at the books on the shelf.

Fonte: Paiva, 2009, p. 216.

O suplemento com orientações ao professor conduz a reflexões interessantes sobre a Matemática no ensino médio, interdisciplinaridade, objetivos da obra e dos conteúdos de cada capítulo, sugestões de leitura para o professor e para o aluno. Não tem um tópico específico abordando resolução de problemas, mas comenta sobre. Traz como diferencial uma ficha de autoavaliação de resolução de problemas (FIGURA 26), bastante relevante, onde os alunos podem autoavaliar seu desempenho.

Figura 26 - Ficha de autoavaliação de resolução de problemas.

Ficha de autoavaliação de resolução de problemas		
Nome do aluno:	Sempre	Às vezes
Leio, compreendo o texto, identifico os dados principais do problema e consigo resolvê-lo.		
Tenho dificuldade para compreender o texto do problema, mas identifico os dados principais e tento resolvê-lo, porém, se não consigo, procuro ajuda.		
Tenho muita dificuldade para compreender o texto e identificar os dados principais do problema. Só consigo resolvê-lo quando peço ajuda.		
Tenho muita dificuldade para compreender o texto e identificar os dados principais do problema e não peço ajuda para resolvê-lo.		
Não compreendo o texto, não identifico os dados principais do problema e não me interesso em pedir ajuda para resolvê-lo.		
Observe quantas vezes você assinalou "Sempre" e "Às vezes". Como você analisa as respostas mais frequentes? O que elas representam para você? Agora, escreva em uma folha avulsa se você está satisfeito com o seu desempenho na resolução de problemas e o que pretende fazer para avançar na aprendizagem.		

Fonte: Paiva, 2009, p. 9.

Concluída a análise dos livros, verificou-se que os relatos dos professores nas entrevistas iniciais coincidiam em parte com os dados encontrados nos livros didáticos, destacamos como potencialidades a contextualização associada à realidade, sequência de conteúdos e problemas relacionados a estes, além de problemas mais desafiadores. Apesar disso, apontam vários aspectos que devem ser mais explorados, como por exemplo, as etapas que o aluno pode seguir para resolver problemas, o foco excessivo nos conteúdos, problemas semelhantes e pouco diversificados além do excesso de exercícios.

A partir das entrevistas em que foi expressa a necessidade dos professores produzirem seus próprios materiais instrucionais e de relatos que apontam para a carência dos problemas presentes nos livros didáticos e considerando as limitações diagnosticadas nos livros analisados, iniciou-se a organização do material didático com foco na resolução de problemas, visando diferentes abordagens, esperando aproximar a metodologia em estudo com a prática de sala de aula, sem vínculo a conteúdos matemáticos específicos.

## **5 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA**

Neste capítulo é descrito como foi feita a organização do material didático seguida da abordagem realizada pelos professores e dos resultados apresentados pelos mesmos a partir da prática com seus alunos.

### **5.1 Constituição do grupo de professores envolvidos**

A organização do material didático (APÊNDICE B) foi finalizada em março de 2014, posteriormente entramos em contato com os professores que participaram das entrevistas iniciais em 2013, e que se mostraram interessados em desenvolver a proposta com seus alunos. No entanto, nem todos os professores ainda trabalhavam nas escolas contatadas ou na turma em que se pretendia desenvolver a proposta, assim, outros professores foram convidados e se incluíram nesta pesquisa. Esta etapa visou atingir o terceiro objetivo proposto nessa pesquisa: Criar material auxiliar para os professores abordarem a Matemática através da resolução de problemas sob diferentes aspectos.

Para apresentar o material aos professores e propor a eles o uso do mesmo com seus alunos do 1º ano do Ensino Médio, houve o contato por meio dos professores da Educação Básica bolsistas do Observatório da Educação, os quais mediarão os encontros em cada escola, estes ocorreram em abril de 2014. Após expor o material aos professores e esclarecer suas dúvidas, este foi entregue impresso e encadernado aos docentes que se propuseram a explorá-lo, além disso, foi disponibilizado para cada professor um caderno para ser usado como um diário de registro dos encontros ministrados, esses foram devolvidos as

pesquisadoras ao finalizarem a prática. Vale ressaltar que os professores foram orientados de que este trabalho não visava substituir suas aulas e sim complementá-las. Para tanto, sugeriu-se fazer uso do material uma vez por semana ou conforme o andamento da turma e a disponibilidade do professor.

Durante esses momentos de apresentação do material e convite pra uso do mesmo, a maioria dos professores comentou o quanto estava difícil nas escolas do estado fazer atividades extras ao que estava previsto no currículo da disciplina, pois o tempo estava bastante restrito para as disciplinas, em função da disciplina de Seminário Integrado que aborda projetos de pesquisa, implantada nas turmas de Ensino Médio das Escolas Estaduais do Rio Grande do Sul. Segundo os professores, esta disciplina acabou tomando os períodos das demais áreas do conhecimento. Diante disso, disseram que fariam o possível para desenvolver esta proposta, uma vez que julgaram-na bastante significativa ao ensino da Matemática, mas não sabiam se conseguiriam trabalhar o material na íntegra.

Alguns professores sugeriram desenvolver a prática em outras turmas que não fosse o 1º ano, pois no geral consideram esta série agitada e com alto índice de evasão, principalmente no noturno. Os docentes foram desafiados a tentar, mediante argumentação de que a proposta pretendida podia ser um diferencial aos alunos. Percebeu-se que tinham preferência por desenvolver a prática com turmas mais tranquilas, pois seria um novo desafio aos professores e alunos, este iria gerar movimento na sala de aula, e temiam perder o controle da situação. Por outro lado, estavam preocupados em conseguir passar os conteúdos programáticos, previstos no plano de estudos da escola.

Do total de seis escolas visitadas e nove professores convidados a integrarem a proposta, sete aderiram a ideia do início ao fim, havendo pelo menos um professor representando cada escola. Os que não participaram solicitaram o material, pois iriam abordá-lo ao longo do ano letivo, porém não se disponibilizaram a dar um retorno da prática realizada, em função do “prazo”. Das seis escolas envolvidas, em cinco delas fui observar alguma aula onde estavam trabalhando com o material, tais observações me mostraram que todo empenho e estudo para por em prática o planejamento foi válido.

## 5.2 Descrição do material

O material (APÊNDICE B) entregue aos professores é composto por uma introdução em que é apresentada a organização do material e destacado os objetivos de cada encontro, enfatizando sugestões de procedimentos metodológicos incluindo as etapas da resolução de problemas de Polya e a exploração de diferentes estratégias, frisado o papel do professor diante desta tendência. Na sequência do material, estão descritos dez encontros envolvendo resolução de problemas, sem vínculo a conteúdos matemáticos específicos, cada um destes com uma proposta diferenciada. Finalizou-se esta organização disponibilizando aos professores as respostas dos problemas, sem apontar meios de resolução. Ainda se destacou as referências que fundamentaram o desenvolvimento desta coletânea.

Vale ressaltar que a abordagem desse material foi feita pelos professores durante o período normal das aulas de Matemática ou da disciplina de Seminário Integrado. Nesta pesquisa, não é sustentado ensinar inicialmente conceitos e procedimentos referente determinado conteúdo para então proporcionar a prática destes, pela resolução de problemas aplicados, que exigirão dos alunos o aprendizado de conteúdos matemáticos específicos, e sim, abordar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino capaz de desenvolver diferentes habilidades.

Na sequência prosseguem os objetivos e a proposta de cada encontro, descrevendo alguns problemas que foram abordados nos dez encontros sugeridos no material. Cabe ressaltar que o material na íntegra é apresentado no Apêndice B.

### 1º encontro

Objetivo: Discutir e explorar com os alunos, as etapas da resolução de problemas para que compreendam a resolução desde seu início chegando ao fim com maior segurança, por meio de diferentes estratégias que podem criar e recriar.

Proposta: Iniciar o encontro com uma discussão junto aos alunos a partir de duas questões norteadoras: “O que é um problema?” e “Como se resolve um problema matemático?”

A intenção era ouvir as diferentes opiniões dos alunos e posteriormente compará-las com autores que abordam esse tema, entre eles Dante e Polya.

Para fomentar as discussões da 1ª questão levantada, Dante (2009, p. 11) diz que:

“Intuitivamente, todos nós temos uma ideia do que seja um problema. De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. O que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro. Por exemplo, se o pneu da bicicleta de Beto nunca furou e ele não sabe o que fazer nessa situação – e quer resolvê-la, pois gosta de andar de bicicleta -, então esse é um problema para ele. Mas sabe que nesse caso deve procurar uma borracharia e que há uma bem próxima dali, a situação não chega a ser um problema, pois não exigirá um processo de reflexão para solucioná-la”.

Quanto à segunda problemática, foi sugerido que os professores abordassem as quatro etapas da resolução de problemas apresentadas por Polya em seus estudos, sendo elas: Compreensão do problema; Estabelecimento de um plano; Execução do plano e Retrospecto.

Após explorar ao máximo as fases da resolução de problemas, sugeriu-se elaborar um cartaz pelos alunos, para expor as etapas estudadas e retomá-las ao longo das aulas conforme necessário. Para por em prática a teoria e esclarecer melhor as fases da resolução de problemas, propôs-se a resolução conjunta do problema descrito na sequência.

1) (Adaptado de DEGUIRE, 1997, p. 100) Ontem à noite, terminei de fazer a lista de convidados para o jantar que vou dar no próximo mês. Como haverá trinta pessoas, vou precisar tomar emprestadas algumas mesas, de tamanho que permita sentar-se uma pessoa de cada lado. E eu quero dispô-las numa longa fileira, encostados umas nas outras. Naturalmente, quero tomar emprestado o mínimo de mesas possível. De quantas mesas vou precisar?

Este problema foi escolhido por possibilitar o uso de diferentes estratégias de resolução que não exigem o cálculo formal, sendo neste caso, esta a estratégia mais difícil para solução do problema, fazendo com que os professores e alunos percebam que a teoria estudada é válida no estudo da Matemática, possibilitando novas reflexões e discussões entre a turma.

## **2º encontro**

Objetivo: Auxiliar os alunos a colocarem em prática as etapas estudadas no primeiro encontro, por meio de problemas com e sem números fazendo-os perceber que a Matemática não envolve apenas cálculos, mas a elaboração de um plano.

Proposta: Para este encontro foram planejados sete problemas para os alunos resolverem, sendo que a maioria deles não continha números, exigindo do aluno interpretação e o uso de alguma estratégia diferente do cálculo formal. Destacamos dois problemas, sendo que no primeiro havia números, e este não tinha uma resposta evidente. O outro não tinha valor numérico, instigando no aluno a idéia de que Matemática nem sempre necessita de números, como muitos acreditam. Foi sugerido aos professores que frisassem novamente as fases da resolução de problemas sugeridas por Polya e, posteriormente, fizessem a socialização das diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

1) (PIBID) Numa certa povoação africana vivem 800 mulheres, 3% das quais usam apenas um brinco. Das demais, a metade usa dois brincos e a outra metade, nenhum. Qual é o número total de brincos dessa povoação?

2) (BARROS, 2003, p.42) Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos, segundas e terças feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: “Amanhã é dia de mentir”. Em que dia da semana foi feita essa afirmação?

### **3º encontro**

Objetivo: Desenvolver a escrita e a criatividade dos alunos de forma coerente, visualizando as partes de um problema por meio da construção de perguntas a partir de enunciados previamente disponibilizados e a elaboração de enunciados baseados em determinada interrogação.

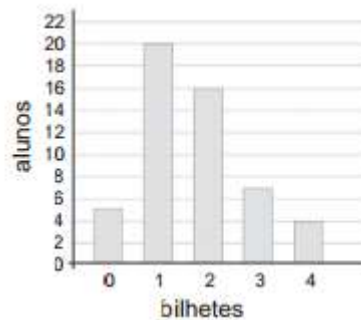
Proposta: Neste encontro os alunos tiveram que criar sete problemas, com duas problemáticas diferentes, destacamos três deles. Inicialmente receberam uma situação inicial (PROBLEMAS 1 e 2) e a partir desta tiveram que criar a pergunta para finalizar o problema e posteriormente resolver. No mesmo encontro, receberam também apenas a pergunta (PROBLEMA 3) e tiveram que elaborar o enunciado que complementasse a mesma, formando um problema. Esse seria posteriormente socializado com os colegas para que pudessem perceber possíveis lacunas em suas próprias criações e que um problema permite diversas perguntas e/ou enunciados, valorizando a criatividade de todos. Segue um exemplo de cada situação



1) (Adaptado de PIBID) Uma florista colheu 49 kg de flores do campo. O quilograma das flores pode ser vendido imediatamente a R\$ 1,25 ou, mais tarde, com as flores desidratadas, a R\$ 3,25. O processo de desidratação faz as flores perderem  $\frac{5}{7}$  de sua massa. (...)?

2) (Adaptado de OBMEP) A turma do Carlos organizou uma rifa. O gráfico mostra quanto alunos compraram um mesmo número de bilhetes; por exemplo, sete alunos compraram três bilhetes cada um. (...)?

- A) 56
- B) 68
- C) 71
- D) 89
- E) 100



3) O valor pago foi R\$ 215,75, qual o total de horas que o veículo ficou no guincho?

#### 4º encontro

**Objetivo:** Interpretar matematicamente imagens do cotidiano para, a partir disso, desenvolver a escrita do aluno e estimular seu protagonismo em aula, promovendo a autonomia em criar a partir de uma figura do seu interesse.

**Proposta:** Para atingir o objetivo deste encontro sugeriu-se levar revistas e jornais de recorte para aula e pedir que cada aluno ou grupo fosse escolher uma imagem, recortá-la e realizar a colagem no caderno. Em seguida possibilitar a socialização dessas imagens para que os alunos apresentassem uma análise Matemática da mesma com mediação do professor, pois isso servirá para a construção de uma história. Na imagem apresentada na sequência, como exemplo, o professor poderá estimular possíveis interpretações a partir de questionamentos como:

- Há mais mulheres ou homens?
- Quem conseguiu pular mais alto?
- Qual o ângulo formado entre as pernas das pessoas?



Fonte: <http://br.stockfresh.com/image/525334/energetic-people>.

Após discussão em grande grupo de algumas imagens, o professor solicita aos alunos que transformem sua história em um problema, elaborando perguntas criativas. Esses problemas devem ser resolvidos e depois serem trocados entre os colegas para sua resolução que posteriormente, podem ser socializadas no grande grupo.

### **5º encontro.**

Objetivo: Explorar a capacidade de reescrever problemas com insuficiência de dados, perceber o excesso de informações nos problemas e dar atenção à pergunta. O encontro visou o trabalho cooperativo além da aproximação com a resolução de problemas, levando o aluno a perceber o significado dos elementos dispostos nos problemas e não utilizando-os de qualquer forma.

Proposta: No quinto encontro foram dispostos cinco problemas, dentre estes destacamos três, cada qual com uma característica distinta. O primeiro representa um problema com excesso de dados; o segundo tem uma pergunta de “negação”; o terceiro possui insuficiência de dados, neste espera-se que o aluno se dê conta da impossibilidade da resolução e reflita sobre suas escritas quando formula algum problema novo.

1) (Adaptado de OBMEP) Em uma pet-shop inaugurado em 2013, existem 5 gaiolas de diferentes tamanhos dispostas uma ao lado da outra, sendo que a maior tem  $1\text{m}^2$  e a menor tem  $300\text{cm}^2$ . Em cada uma destas gaiolas, será colocado apenas um dos seguintes animais: 1 cachorro, 1 gato, 1 rato, 1 periquito e, 1 canário. De quantas maneiras diferentes poderá ser

feita a distribuição destes animais nas gaiolas, de modo que os pássaros fiquem em gaiolas vizinhas?

2) (OBMEP) Ana, Bernardo, Célia e Danilo repararam que Danilo é mais alto que Célia e que a diferença entre as alturas de Célia e Ana é igual à diferença entre as alturas de Ana e Danilo. Observaram também que a soma das alturas dos dois rapazes é igual à soma das alturas das duas garotas. Quais das alternativas a seguir são falsas?

a) Célia é mais alta que Ana.

b) A diferença entre as alturas dos meninos é igual à diferença entre as alturas das meninas.

c) Célia é a mais baixa do grupo.

d) A diferença entre as alturas de Danilo e Célia é igual à diferença entre as alturas de Ana e Bernardo.

e) Ana é a mais alta de todos.

3) (Adaptado do ENEM, 2012, p. 20) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente o remédio a seu filho a cada 8 horas, então responda: Qual a massa corporal dele?

### **6º encontro.**

Objetivo: Estimular os alunos a serem criativos e formularem problemas a partir de diferentes aspectos, fundamentando-se em diferentes situações relacionadas ao cotidiano e à Matemática, contextualizando-os para ganhar significado real ou imaginário.

Proposta: Neste encontro a idéia foi que os alunos criassem problemas a partir de uma resposta, uma operação e anúncio de classificado ou propaganda. Na sequência apresentamos, respectivamente, um exemplo de cada.

Resposta: (Adaptado de BARROS, 2003) O preço de uma dúzia de laranjas mais uma dúzia de bananas é igual ao preço de três melancias.

Operação:  $5 \times 3 + 42 = 57$

Exemplo de propagandas:



Tenis Indoor Masculino Hyper Touch Umbro -  
0010130 - Preto/Branco/Pink  
A Partir de: **R\$ 119,90**  
ou 10x Sem juros de R\$ 11,99



Tenis Running Feminino Adidas Cosmos W  
Ref. G41732

Por: **R\$ 299,90**  
ou 10x Sem juros de R\$ 29,99



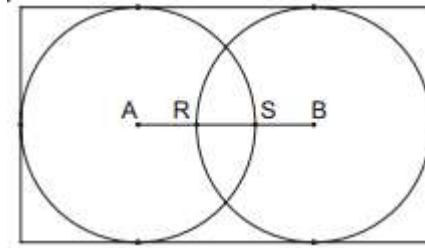
Os problemas elaborados podem ser socializados, e o professor junto aos alunos verificam se estes apresentam coerência, erros de português e sugere possíveis alterações para os alunos, levando-os a perceberem aspectos que podem ser melhorados, tornando o problema mais claro de ser interpretado por quem irá resolvê-lo.

### 7º encontro.

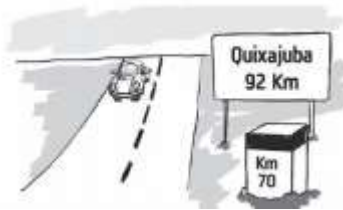
Objetivo: Enfatizar a importância ou não das imagens para resolução de determinados problemas e retomar as etapas sugeridas por Polya, para instigar esta habilidade no decorrer do estudo.

Proposta: No sétimo encontro foram disponibilizados problemas com imagens que por vezes são úteis para efetuar a resolução, essas devem ser observadas e analisadas para chegar ao resultado satisfatório. Em contrapartida, alguns problemas apresentam imagens que são meramente ilustrativas e não interferem diretamente para o processo de resolução do problema. No primeiro problema descrito na sequência, a imagem é indispensável e deve ser interpretada pelo aluno, já o segundo não interfere no método de resolução.

1) (OBMEP) Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?



2) (adaptado OBMEP) A estrada que passa pelas cidade de Quixajuba e Paraqui tem 450 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada há uma placa indicando Quixajuba a 92 Km. No quilômetro 290 há uma placa indicando Paraqui a 87 km. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraqui?



### 8º encontro.

**Objetivo:** Fortalecer a capacidade criadora a partir de uma situação nova e desenvolver a escrita na Matemática com a construção de um quadro de dados e posterior dinâmica para resolução.

**Proposta:** Desenvolver uma dinâmica (Adaptado de CARVALHO, 2012, p. 39 e 40), seguindo os passos descritos.

⇒ Essa atividade deve ser realizada em grupos.

⇒ Cada grupo preenche uma linha do quadro de dados desenhado na lousa (EXEMPLO 1) até completá-lo.

Exemplo 1 - Quadro de dados supostamente preenchido pelos alunos:

Personagens	Objetos	Quantidades	Situações	Perguntas
João, Maria	Blusa	Cinco/dezenove	Comprou/tinha	Quantas ficou?
Luiza, Pedro	Balas	1 dúzia	Terminou/perdeu	Com quantas balas começou?

Rafaela, Camila	Pontos	R\$ 18,35	Recebeu/ deu	Quantos pontos perdeu?
--------------------	--------	-----------	--------------	---------------------------

⇒ Depois do preenchimento do quadro, cada grupo, formula um problema em que conste os dados descritos na linha que completou.

⇒ O grupo que primeiro terminar a formulação deve avisar aos colegas e ditá-la para os demais copiarem e resolverem a formulação.

⇒ O professor confere se o problema construído contempla os dados descritos no quadro.

⇒ O primeiro grupo que terminar de resolvê-lo avisa a todos e vai a lousa mostrar sua resolução.

⇒ O grupo que havia formulado o problema deve comentar a resolução apresentada e dizer se está satisfeito com a resposta. Caso contrário, deve explicar como deveria ser a resolução.

⇒ Terminada a discussão entre os grupos, inicia nova rodada buscando participação de todos.

### **9º encontro.**

Objetivo: Visualizar o erro na resolução de um problema resolvido e propor solução correta pra o mesmo e explorar diferentes estratégias de resolução.

Proposta: Para o nono encontro propôs-se inicialmente uma situação problema resolvida incorretamente para que os alunos fossem desafiados a perceberem o erro presente na resolução propondo uma solução coerente. Também foram disponibilizados alguns problemas para serem resolvidos e socializados.

#### Problema com erro na resolução:

1) (Adaptado de BARROS, 2003, p. 21) Três amigos foram jantar num restaurante. Como a conta ficou em R\$ 30,00, cada um deu R\$ 10,00. Quando o garçom levou o dinheiro até o caixa, o dono do restaurante, para ser gentil com os clientes, resolveu lhes dar um desconto de R\$ 5,00. O garçom devolveu a eles, portanto, cinco moedas de R\$1,00.

Resposta: Ao receber o troco, os amigos decidiram dar R\$ 2,00 de gorjeta ao garçom, e cada um pegou R\$ 1,00 de volta.

Ao final, um deles disse:

- Vejam que coisa estranha. Cada um de nós deu uma nota de R\$ 10,00 e recebeu R\$ 1,00 de volta, ou seja, cada um de nós gastou R\$ 9,00. Portanto nós três juntos gastamos R\$ 27,00. Além disso, demos R\$ R\$ 2,00 ao garçom.

Em seguida, o rapaz, um tanto intrigado, rascunhou o seguinte demonstrativo no guardanapo:

Juntos gastamos: R\$ 27,00

Demos ao garçom: R\$ 2,00

Total: R\$ 29,00

E, bastante confuso com a situação, perguntou aos seus amigos:

- Onde foi parar o outro R\$ 1,00?

Sendo você um dos amigos, explique qual é o problema no raciocínio do rapaz, e explique a ele, uma maneira de resolver esse problema.

### **10º encontro.**

Objetivo: Resolver problemas matemáticos não convencionais.

Proposta: No décimo e último encontro, foram disponibilizados uma quantidade maior de problemas para que os professores pudessem ter um banco de problemas, possibilitando assim, a opção por trabalhar com os quais julgarem mais pertinentes. Seguem dois problemas dentre os 14 descritos neste encontro.

1) (PIBID) Na volta da pescaria, Pedro disse para Carlos “Se você me der um de seus peixes, eu ficarei com o dobro do número de peixes com que você vai ficar”. Carlos respondeu: “E se, em vez disso, eu jogar um dos seus peixes no rio, ficaremos com o mesmo número”. Quantos peixes eles pescaram ao todo?

2) (OBMEP) Seis crianças fizeram uma roda e cada uma, em voz baixa, falou seu número favorito para seus dois vizinhos. Em seguida, cada criança disse em voz alta a soma dos dois números que ouviu; a figura mostra o que Afonso, Camila e Eduardo disseram em voz alta. Qual é o número favorito de Fátima?



Finalizada a abordagem deste material pelos professores, estes nos entregaram por escrito suas avaliações e percepções desta prática. A análise desta abordagem está descrita na sequência.

### 5.3 Análise de dados

Buscando compreender o que essa abordagem representou, no âmbito do ensino da Matemática, para os professores integrantes desta pesquisa, analisamos seus registros escritos nos cadernos que foram seus diários dos encontros, além dos dados enviados por email durante todo processo de intervenção pedagógica em que estivemos em contato, bem como as percepções das pesquisadoras às observações realizadas presencialmente aos encontros acompanhados. Elencamos cinco categorias para análise, conforme Quadro 6.

Quadro 6 - Categorias de análise.

Categorias	Resumo
1. Requer do aluno planejamento para a resolução dos problemas, sendo desafiador e instigando a criatividade.	Nesta categoria incluímos os dados que possuíamos em relação aos dados dos professores referente à avaliação dos problemas propostos. Consideraram que os problemas abordados foram desafiadores, exigiram reflexão e criatividade.
2. Oportuniza, ao professor, verificar o que seus alunos estão aprendendo e onde estão apresentando dificuldades.	Nesta categoria incluímos os dados que tivemos em relação as dificuldades apresentadas pelos alunos diante dos problemas. Com isso os professores conseguiram diagnosticar dificuldades



	apresentadas pelos alunos podendo intervir na aprendizagem.
3. Possibilita ao aluno múltiplas interpretações e o uso de diferentes estratégias de resolução.	Nesta categoria abarcamos os dados que tivemos em relação às possibilidades desenvolvidas pelos alunos diante da proposta. Evidenciou-se que os alunos criaram diferentes estratégias para solucionar os desafios propostos, se desvinculando parcialmente de métodos convencionais.
4. Encoraja o compromisso dos alunos promovendo protagonismo, autonomia e cooperação.	Nesta categoria abrangemos os dados que possuíamos em relação ao envolvimento dos alunos na proposta, esta que foi crescente. Participavam de forma ativa, interagindo nos grupos e expondo suas ideias.
5. Permite que professor e aluno percebam uma abordagem diferenciada da habitual e que esta conecta-se a importantes ideias matemáticas e com o cotidiano.	Foi percebido nesta categoria, pelos alunos e professores, uma abordagem diferente da qual estão habituados no contexto educacional, possibilitando a partir dessa, construir conhecimentos matemáticos de forma diferenciada.

Fonte: Das autoras, 2014.

É importante destacar que nas descrições feitas pelos professores, referente à abordagem do material, ambos apresentam sua percepção em relação à reação dos alunos e raramente expõem sua percepção no desenvolvimento destes encontros.

**Categoria 1: Requer do aluno planejamento para a resolução dos problemas, sendo desafiador e instigando a criatividade.**

Seguem alguns relatos dos docentes que fundamentam esta categoria, seguido da análise das pesquisadoras e de autores que têm estudos relacionados ao tema desta pesquisa.

*Aproveitei para explorar bastante o 1º problema (encontro 1), fazendo variações do original. Percebi meus alunos muito envolvidos “prestando realmente atenção na aula” buscando resolver os desafios. O 3º encontro foi bastante produtivo, a não ser pela dificuldade em atender todos os alunos que solicitavam ajuda. Percebi uma certa insegurança por parte de alguns alunos na realização das atividades propostas, pois estas exigiram criatividade e a busca de conhecimentos matemáticos. No encontro 6, logo começaram a surgir problemas muito criativos. (B1)*

*Estimulou o raciocínio lógico, criatividade e persistência. (B2)*

*Foi bastante polêmico, pois alguns não aceitavam as conclusões encontradas. Ao final, todos gostaram de realizar a atividade, disseram que foi dinâmica e saíram da “zona de conforto”, ou seja, foram obrigados a “pensar”. Acredito que este é o nosso maior desafio em Matemática, fazer nosso aluno pensar. As histórias inventadas, nos problemas sem pergunta e perguntas sem enunciado, foram muito criativas. No sexto encontro todos os alunos se concentraram, e calcularam muito, fazendo comparação de valores com preços reais de mercado, comentaram que estavam cuidando para não haver preços absurdos. Este encontro envolveu: criatividade, comparação, cálculos e todos (alunos) discutiram os problemas. Teve um (problema) que estava deixando eles de cabelo em pé, os palpites e a discussão sobre o problema me chamou a atenção. A persistência dos alunos foi admirável, alguns reclamavam que não conseguiam explicar. Fui conversando com eles e eles sabiam, tinham argumentos para explicar as situações. (B5)*

*No 2º encontro os alunos gostaram e se sentiram desafiados, sendo que um queria chegar ao resultado certo antes que o outro. Foi legal! No terceiro encontro fluiu a criatividade de cada aluno, foi muito interessante e de fácil compreensão para os alunos, sendo que não precisei auxiliá-los muito na interpretação e resolução. Gostaram muito das atividades. Aqui (4º encontro) a criatividade dos alunos foi fundamental na construção de problemas através das imagens e posteriormente sua resolução. Mais uma vez a criatividade dos alunos foi destaque para a resolução dos problemas nesse encontro (6º encontro). Foi preciso ajudá-los na compreensão, depois disso conseguiram. (B6)*

*Estimulou o “criar”, fez com que os mesmos se colocassem na função do professor (protagonistas) por alguns instantes, alguns alunos criaram problemas bem complexos. (B7)*

A partir dos apontamentos feitos pelos professores, ficou claro que um dos aspectos positivos foi o interesse, persistência, empenho e, principalmente, a criatividade dos alunos na busca por solucionarem e elaborarem problemas, nos diferentes contextos apresentados nos encontros. Para Polya (1995, p. v)

O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, a sua marca na mente e no caráter.

O fato dos alunos terem se mostrado atentos, pensativos, fazendo comparações e buscando conhecimentos matemáticos já construídos, mostra o quanto se sentiram desafiados e o quanto são capazes. Segundo Dante (2003), um bom problema deve, entre outras características, ser desafiador ao aluno, assim aumenta sua curiosidade, motivação e o faz pensar para procurar uma solução. Numa escola, me chamou atenção, pois ao dar o sinal para o período seguinte, os alunos, que teriam aula com a mesma professora mudando apenas a

disciplina, pediram pra continuar trabalhando Matemática. Isso demonstrou o quanto essa proposta pode ser envolvente.

**Categoria 2: Oportuniza, ao professor, verificar o que seus alunos estão aprendendo e onde estão apresentando dificuldades.**

Seguem alguns relatos dos professores dos quais emergiu a referida categoria acompanhada da análise das autoras.

*Alguns alunos apresentaram mais dificuldade do que outros para realizarem alguns dos problemas (problema 2 – 2º encontro). Senti a necessidade de ter alguns cubos para os alunos visualizarem a questão 4 do 2º encontro. Alguns alunos não sabiam ou não lembravam como se calculava porcentagem na calculadora. (B1)*

*Com o passar dos encontros foi ficando mais difícil (aos alunos), principalmente nas situações que tinham que formular questionamentos, pois infelizmente nosso aluno quer ler e entender de primeira e não tem paciência, vontade ou persistência para ler duas, três vezes até compreender o problema. Várias vezes eles comentaram que não é só fazer ou resolver um cálculo, primeiro precisa interpretá-lo (problema), entendê-lo e tirar conclusões através de demonstração de desenho, gráfico, tabelas e então o cálculo matemático, conforme abordado no 1º encontro. (B2)*

*Alguns mostraram clara dificuldade em interpretar os problemas. Quando pedi que voltassem a ler as fases de resolução de problemas dizendo que isso poderia facilitar a interpretação, mais uma vez foram resistentes. Matemática, para eles, se resume ao mero algoritmo. Faço, nesse ponto, um questionamento: temos culpa nisso? Precisamos refletir sobre isso. No quarto encontro, (o das imagens), preciso ressaltar que a análise e interpretação das mesmas ficaram única e exclusivamente na visualização pura e simples do pictórico. As imagens, para eles, eram apenas fotos, ou seja, eles não foram capazes de visualizar movimento, tempo, espaço, relações, quantidade, qualidade, hierarquia, natureza, etc. A primeira questão do sétimo encontro, para meu desespero, ninguém acertou. Fica, mais uma vez, evidente que esses alunos (os que participaram desse trabalho pelo menos, uma vez que não podemos generalizar) enxergam a matemática apenas como quantidade. Em nenhum momento eles olharam a posição, tão importante na nossa numeração. Precisamos rever alguns conceitos/conteúdos urgentemente. (B3)*

*Percebi que no início das atividades a turma foi um pouco resistente. Queriam as fórmulas, o caminho para resolver e uma explicação/resposta da professora. Em alguns momentos precisei me controlar para não responder, mas sugerir caminhos e instigá-los a criar estratégias. (B4)*

*Achamos a nº 2 do terceiro encontro mais difícil por conter frações e ser mais difícil de interpretar. As últimas eram mais fáceis, porque abriam mais para as interpretações variadas e a nossa criatividade pôde fluir. Bastante dificuldade naqueles problemas sem números, facilidade em porcentagem, alguns me surpreenderam pela facilidade na lógica. Nossos alunos tem bastante dificuldade em trabalhar com horas, principalmente quando se trata de um problema que ele precisa*

*usar a lógica e a contagem do tempo. Talvez precisamos trabalhar mais em sala de aula, medidas de tempo. Alguns alunos tiveram **dificuldade em relacionar a resposta ao problema que deveriam formular. Parece que quando os alunos se deparam com números conseguem resolver a situação proposta com mais facilidade. É visível que os alunos com dificuldades em algoritmos gostam e são mais “rápidos” no raciocínio lógico.** (B5)*

*Os alunos acharam **mais complicado (5º encontro) pelo excesso de dados que os problemas apresentavam. Eu os auxiliei quase em todos para que houvesse uma compreensão e assim poder retirar do problema só os dados necessários para a resolução. Assim ocorreu com os problemas que apresentavam perguntas de negação e insuficiência de dados. Neste encontro (7º) resolver os problemas foi mais difícil, pois acharam que os mesmos eram mais complicados. Depois de retomado as etapas da resolução e interpretado com eles os problemas, quase todos conseguiram resolvê-los.** (B6)*

*Tiveram **mais dificuldades nas perguntas de negação (5º encontro). Notei que nos últimos encontros tiveram uma melhora significativa no raciocínio lógico. Alguns alunos surpreenderam com sua capacidade de interpretação e lógica. Retomar as etapas da resolução contribuiu para o melhor desempenho dos alunos, com o passar dos encontros apresentaram melhoras visíveis, facilidade em calcular porcentagem, porém o uso da calculadora pra isso não foi trivial para alguns alunos. Ausência de números se mostrou um problema, pois visualizam a matemática apenas como quantidade, questões com excesso de dados, perguntas de negação frações, medidas de tempo, queriam fórmulas prontas para seguir.** (B7)*

Segundo os relatos, fica evidente que os professores conseguiram diagnosticar inúmeras dificuldades e algumas facilidades apresentadas por seus alunos no decorrer dos encontros. Como aspecto positivo enfatiza-se a facilidade de alguns alunos na interpretação e raciocínio lógico, fato que surpreendeu alguns professores. Outro aspecto relevante destacado foi a importância de abordar as etapas da resolução de problemas de Polya para facilitar a interpretação dos problemas. Nos encontros presenciados, os alunos inúmeras vezes retomavam ao cartaz que fazia menção as quatro fases da resolução de problemas que haviam construído. Além disso, foi destacada a facilidade para resolver questões relacionadas ao conteúdo de porcentagem.

Já as dificuldades apresentadas estavam relacionadas à necessidade do uso de material concreto em algumas situações, problemas no uso da calculadora e menor desempenho em questões envolvendo frações e medidas de tempo. Alguns queriam fórmulas, esperavam explicações e caminhos que os levassem à resposta. Outros relacionam a Matemática apenas à quantidade, mero algoritmo, isso dificultou na interpretação de imagens, na resolução de problemas que não apresentavam números, problemas de negação e na relação entre pergunta e resposta. Em relação às dificuldade dos alunos, Tripathi (2009) diz que isso está relacionado

à questão mais profunda de mudança de atitudes e crenças dos alunos, que veem a Matemática como um monte de definições e fórmulas, que existem isoladamente. O problema está com as experiências em sala de aula, pois antes de ensinar os alunos a raciocinar, convém persuadi-los a sentirem necessidade disso. Também foi diagnosticada a falta de persistência de alguns alunos na leitura dos problemas, dificultando a interpretação e sua resolução. Para Dante, (2003, p. 52) “uma das maiores dificuldades do aluno ao resolver um problema é ler e compreender o texto”, fato este que está bastante evidente nas escolas, uma vez que cada vez mais os jovens são imediatistas.

Evidenciou-se em três escolas visitadas, que alguns alunos apresentaram grande facilidade para resolver problemas. Comentando com os professores sobre estes casos específicos, responderam que “quando dou aula no quadro eles não fazem nada” (B4), “no algoritmo eles são os piores alunos” (B3), “só assim mesmo pra fazerem alguma coisa” (B5). Isso mostra as diferentes habilidades dos alunos e permite que o professor avalie outros aspectos.

### **Categoria 3: Possibilita ao aluno múltiplas interpretações e o uso de diferentes estratégias de resolução.**

Para elencar a terceira categoria, como nas demais, descrevemos algumas percepções dos professores em relação a observações aos alunos quanto à resolução dos problemas propostos no material, além da visão das autoras em relação a isso.

*Um grupo escreveu 40 possibilidades numa folha para resolver o problema 1 (5º encontro). Durante o 7º encontro os alunos resolveram com facilidade a maioria dos problemas. Utilizaram diferentes métodos e faziam questão de explicar para os colegas que apresentavam alguma dificuldade como chegaram ao resultado. Na questão 6 um aluno achou um resultado diferente de todos os colegas, e ao verificar percebi que este estava correto. (B1)*

*A visão que eles (alunos) tinham era que para resolver um problema precisava de fórmulas matemáticas, neste projeto se deram conta que não. Tem várias formas de se resolver. (B2)*

*Na resolução do problema um todos fizeram esquemas (desenhos) e chegaram com certa facilidade à solução. Quando os desafiei a encontrarem outras formas de solução se mostraram resistentes usando o seguinte argumento: professor se nós já temos a solução é necessário perder tempo e buscar outra? Mesmo assim, talvez para demonstrar boa vontade, todos buscaram uma segunda solução. Num primeiro momento, pude perceber certa dificuldade para isso. Pedi, então, que revessem as quatro fases de Polya e, mais uma vez, demonstraram muita resistência para fazê-lo. Construimos, em conjunto, uma fórmula para a resposta já encontrada. Com*

*pequenas dicas chegaram com facilidade a  $n = x : 2 - 1$ , pois foi isso que fizeram nos seus esquemas. Para a segunda solução foram se ajudando um ao outro. A fórmula encontrada foi:  $n = (x-6) : 2 + 2$ . Para resolver as questões 3, 6 e 7 do segundo encontro, todos usaram esquemas (desenhos). Interessante lembrar que os alunos que normalmente apresentam maior dificuldade nos algoritmos, foram os que primeiro e melhor resolveram as questões acima mencionadas. Preciso dizer que, por ter sido muito requisitado durante as diversas tentativas de solução dos problemas, me senti verdadeiramente professor, uma vez que não precisei dar a resposta para eles, mas, com pequenas dicas, induzi-los a encontrá-la. No decorrer dos encontros, fui menos requisitado, talvez, por já estarem mais familiarizados com essas atividades. Realizamos uma socialização desse encontro com a presença da professora elaboradora do material que estou aplicando com meus alunos, na qual, para mim, ficou evidente, pelas falas dos alunos, (mesmo que em alguns momentos tenhamos provocado algumas respostas dos alunos, sabemos que provocar é também função do professor), de que quando instigados, nossos alunos são capazes de encontrar soluções que fogem das receitas de bolo comumente encontrados nos livros didáticos. Escrevo isso, pois meus alunos apresentaram variadas formas de resolução dos problemas sem pergunta/enunciado. De forma provocativa, faço outro questionamento: há ainda uma única razão para perguntas que tenham resposta única? Ou de forma ainda mais provocativa: qual o sentido de uma pergunta se sabemos a sua resposta? (B3)*

*Os encontros proporcionaram ao grupo pensar, criar de forma mais livre, valorizando o saber dos discentes e a criatividade na elaboração de estratégias, para resolver um problema. (B4)*

*Descobriram outras soluções para a questão nº 6 do segundo encontro (taça-palito) e estava correto. Pude observar como as interpretações de um mesmo problema pode ter várias saídas. Muitos resolveram os problemas por desenhos, tentativas, lógica. Houve uma chuva de ideias e uma diferente da outra. Com o passar dos encontros, muitos alunos foram deixando de lado os conteúdos matemáticos para buscarem outras estratégias para resolver o que era proposto. (B5)*

Corroborando com os relatos, fica claro a capacidade que os alunos têm de solucionar problemas usando caminhos não convencionais. Além disso, nos encontros presenciados, os alunos chamavam constantemente o professor para participar das discussões dos grupos, pois queriam saber quem tinha solucionado corretamente determinado problema e, se surpreendiam ao perceber que diferentes resoluções levavam a uma solução adequada. Dante (2003) aponta que é interessante propor várias estratégias para resolução de problemas, mostrando que não existe uma única estratégia ideal e infalível.

Tiveram a oportunidade de criar de forma livre, buscando diferentes meios como: esquemas, desenhos, tentativas, lógica, chegando inclusive a definições matemáticas. Para Cavalcanti (2001, p. 125), “Deixar que os alunos criem suas próprias estratégias para resolver problemas favorece um envolvimento maior deles com a situação dada”. Tornando-se assim,

mais responsáveis pela resolução além de aprenderem a expor suas ideias em discussões do grupo. Essa liberdade foi aparecendo mais nitidamente no decorrer dos encontros, quando se familiarizaram com a proposta e conseguiram criar sem usar fórmulas prontas e deixando de lado alguns conteúdos específicos. Em relação a isso Dante (2003) afirma que um bom problema não deve ter a aplicação direta de uma ou mais operações aritméticas e sim possibilitar levantamento de hipóteses e o uso de diferentes estratégias. National Council for Teachers of Mathematics (2000 apud TRIPATHI 2009, p. 169) descreve a resolução de problemas com base em

“problemas interessantes e bem selecionados para lançar nas aulas de matemática e envolver os alunos. Desta forma, novas ideias, técnicas e relações matemáticas surgem e tornam-se o foco da discussão. Bons problemas podem inspirar ideias matemáticas importantes, estimular a persistência e reforçar a necessidade de compreender e utilizar várias estratégias, propriedades e relações matemáticas”.

Assim, a escolha dos problemas a serem explorados também é de fundamental importância para o bom desenvolvimento do trabalho.

#### **Categoria 4: Encoraja o compromisso dos alunos promovendo protagonismo, autonomia e cooperação.**

Seguem alguns relatos dos docentes que motivaram a elaboração desta categoria, acompanhada da percepção das pesquisadoras.

*Durante os encontros ocorreram muitas discussões e trocas de ideias. Durante a correção do problema 3 (apertos de mão) um grupo de alunos fez questão de ir até na frente da sala para demonstrar o resultado encontrado. Houve certa desconforto por parte dos alunos, estavam muito envolvidos na realização das atividades propostas, houve troca de saberes entre os alunos. Percebi os alunos empolgados e fazendo muitas discussões durante a realização das atividades. Durante o 8º encontro os grupos foram muito criativos na formulação dos problemas e também se mostraram dispostos a resolverem os problemas criados pelos colegas fazendo os devidos apontamentos. No decorrer dos encontros pude perceber uma maior independência dos alunos no sentido de buscar conhecimentos matemáticos e montar estratégias para obter resultados satisfatórios. Faziam comparações de resultados e socialização de saberes durante os encontros. Os alunos pareciam resolver os problemas com mais facilidade e segurança de quem já vem desenvolvendo as habilidades necessárias ao longo dos encontros. Esse tipo de atividade, torna o aluno mais crítico e são mais interessantes, pois se discutia mais, eles participavam mais e tentavam explicar as situações problemas da maneira que entendiam o enunciado. (B1)*

*No quinto encontro, nos problemas de excesso de dados e perguntas de negação, houve uma grande troca de ideias entre eles (alunos). Muito raramente vinham pedir minha ajuda, ou seja, se mostraram mais autônomos. (B3)*

*Com o passar do tempo, ficou mais fácil, os alunos se envolveram com a proposta e notei um aumento na autonomia dos alunos, criatividade para resolução e autoestima a cada acerto novo. A realização das atividades nos grupos também gera mais tumulto e conversas, embora a discussão é positiva e sobre o tema de trabalho. As atividades foram boas, desafiadoras e envolveu a turma, proporcionando debates, sobre as diferentes resoluções e acredito que foi bastante significativo, para todos. (B4)*

*Esta atividade envolveu a interação dos grupos, situações criativas e dinâmicas, além da troca de ideias e opiniões e os diferentes pontos de vista de cada grupo. Todos os alunos participaram da atividade proposta. (B5)*

*Quase todos (alunos) opinaram no primeiro encontro e salientaram que é necessário primeiramente a compreensão do problema para posteriormente resolvê-lo. (B6)*

Foi possível observar, pelos relatos, o crescente envolvimento dos alunos e o quanto a proposta favoreceu o trabalho em equipe e possibilitou troca de ideias e opiniões. Essas características favorecem a autonomia, o protagonismo e a autoestima dos sujeitos envolvidos. Para Tripathi (2009), o trabalho em pequenos grupos promove o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. Ao observar alguns encontros, nas diferentes escolas, as características já descritas foram as que mais chamaram atenção, pois os alunos interagem constantemente nos grupos, debatiam e buscavam por soluções coerentes. Essa discussão entre os grupos sobre diferentes idéias possibilita uma integração valiosa (DANTE, 2003). O professor teve papel insubstituível nesse processo, instigando nos alunos a curiosidade por meio de questionamentos e reflexões, encorajando-os a continuarem

Dos encontros presenciados em ambas as escolas, os alunos trabalharam em grupo, onde todos se empenharam no trabalho. Não estranharam minha presença na sala de aula, circulei entre as classes observando comentários e discussões e o foco da conversa entre os alunos eram os desafios que tentavam resolver, tentei me enturmar e isso não foi difícil. Fiz alguns questionamentos e me respondiam com conhecimento de caso, mostrando seu envolvimento. Em ambas as escolas fui solicitada pelos alunos, pois faziam questão de tirar dúvidas e mostrar suas ideias. Diniz (2001) relaciona o envolvimento dos alunos à qualidade dos problemas, ao contexto motivador do material, levando-os a se comunicarem mais, trocar opiniões, argumentar em defesa de suas ideias, refletir sobre suas ações e sentirem-se valorizados.

**Categoria 5: Permite que professor e aluno percebam uma abordagem diferenciada da habitual e que esta conecta-se a importantes ideias matemáticas e com o cotidiano.**



Na última categoria, descrevemos relatos dos professores que demonstram a percepção diferenciada em relação ao material aplicado, seguido da análise crítica das autoras.

*O material estava bem preparado, contribuiu para eu lembrar alguns conhecimentos vistos na faculdade e colocá-los novamente em prática. Alguns conhecimentos matemáticos foram lembrados entre os alunos. (B1)*

*Inicialmente acharam legal (alunos), pois não precisavam seguir regras e fórmulas, uns acharam fácil e outros meio complicado, pois não entendiam a lógica matemática em algumas situações. Chegaram a conclusão que problemas não é só na disciplina de Matemática, que os problemas são nossos desafios diários. (B2)*

*No segundo encontro fui muito requisitado, principalmente nas questões sem números, com o seguinte questionamento: **isso é matemática professor?** No décimo encontro permiti que escolhessem quais queriam fazer. O resultado foi bem superior ao do sétimo encontro. Eles escolheram fazer as questões em que pudessem fazer esquemas. **Será em função da proposta desse trabalho?** Me encantei com o teu projeto, desde o ano passado. **Pena que não tenhamos tempo de realizar projetos diferenciados, como o teu, em todas as escolas que trabalhamos.** Quero fazer uma pequena reflexão contigo: permanecemos, infelizmente, na segunda década do século XXI, quando o assunto é escola, presos aos velhos sistemas explicativos (racionais, abstratos, conceituais, lógicos ...) todos modernistas que, de certa forma, representam o reducionismo atrasado do século XIX. Já ingressamos na pós-modernidade, onde emoção e razão, concreto e abstrato, noção e conceito, imaginação e lógica poderiam ser vistos como processos complementares. A sociedade atual - bem como a escola - é complexa (heterogênea) e não reducionista (homogênea). **Acredito que tornar nossos alunos pensantes e reflexivos passa, necessariamente, por trabalhos como o teu.** No entanto, **esses trabalhos precisam ser divulgados nas escolas e não ter a pretensão de dar mais "X" pontos para um mestrado/doutorado de universidade "Y" e, muito menos, como é comum, para o orientador A, B ou C. (B3)***

*Em algumas questões os alunos comentavam “que louco”, “que viagem”, demonstrando o quanto sentiam-se desafiados com a proposta. Questões desafiadoras também foram trazidas pelos alunos, para resolvermos com o grupo. Os problemas elaborados por eles também foram muito bons, mostrando o envolvimento e a empolgação dos mesmos”. **Ministrar os encontros tornou-se prazeroso, motivador e envolvente. Alguns alunos demonstraram uma habilidade muito boa, para resolver problemas, superando minhas expectativas. O bom desempenho na resolução dos problemas foi observado, nos resultados desta turma, em relação a outras escolas, na OBMEP e na OBM. Possivelmente este trabalho contribuiu para este resultado. Os alunos comentaram que atividades como estas, permitem uma melhor preparação para as avaliações como OBMEP, OBM, ENEM, concursos e vestibular. Gostei do material e de seus resultados em sala de aula. Considerando que o material elaborado está muito bom e temos poucos trabalhos neste sentido direcionado para professores, a iniciativa foi boa. Pretendo dar continuidade as atividades de resolução de problemas, tanto nesta turma, quanto iniciar em outras. Estou iniciando na carreira docente, a aproximadamente meio ano e acredito que metodologias diferenciadas sempre são bem vindas ao nosso trabalho e apreciada por nossos alunos. Embora o ensino tradicional ainda prevaleça, cabe a nós atuais professores inovar e aprimorar a Educação Matemática. (B4)***

*Gostaram (alunos) desta explicação (4fases da resolução de problemas) e usaram o cartaz construído para o conteúdo que estamos tendo em Matemática. Ajudou na interpretação do conteúdo atual. “Eles disseram que olhando o cartaz, o problema fica mais fácil de resolver. A maioria (alunos) relacionou as imagens com o conteúdo que estamos tendo agora em Matemática, que é funções. Houve relações (interdisciplinares) entre o assunto da aula e os encontros desenvolvidos. As histórias matemáticas que eles inventaram a grande maioria estavam relacionadas a funções de 1º grau (função afim). Muitos alunos comentaram gostar de resolver desafios. (B5)*

*Atividades diferentes que estimulam a imaginação e a criatividade dos alunos, sempre são um desafio para eles, mas isso é muito bom para desenvolver o raciocínio lógico. O trabalho desenvolvido com os alunos foi de grande relevância, pois tiveram a oportunidade de observar que há diferentes formas para se criar ou resolver problemas matemáticos. Com esta abordagem os alunos foram criativos, compreenderam o que está sendo trabalhado e perceberam que a Matemática não envolve apenas cálculos. Este trabalho desenvolveu nos alunos a criatividade, o raciocínio lógico, a compreensão através da leitura, diferentes estratégias de resolução, tornou os alunos mais críticos e participativos. (B6)*

*Após as discussões e explicações (1º encontro), entreguei a eles o primeiro problema a ser resolvido e a maioria (alunos) teve muita dificuldade, pois não viam mais problemas desde a 5ª série, após muitos questionamentos sobre o problema, alguns encontraram a resposta, ao final explanei no quadro diferentes maneiras de solucionar”. Seu trabalho está contribuindo muito. Infelizmente o meu tempo está muito apertado aqui na escola, mas tenho certeza que ele está abrindo a mente de muitos alunos. (B7)*

Pelos relatos apresentados fica claro que os alunos perceberam uma abordagem diferenciada, estranhavam problemas sem números e com excesso de dados, alguns não estavam habituados a trabalhar com formulação de problemas, apresentando mais dificuldades que outros. Diniz (2001) ressalta que ao adotarmos apenas problemas convencionais em sala de aula para o trabalho com resolução de problemas, podemos favorecer a insegurança do aluno diante de situações que exijam um desafio maior.

Os alunos buscavam, por vezes, relacionar o que era proposto aos conteúdos que estavam aprendendo, auxiliando na compreensão de conceitos em que apresentavam dificuldades. Vale ressaltar que apesar de não estarem explícitos os conteúdos matemáticos presentes em cada encontro, eles estavam inseridos no contexto deste material, ficando a critério dos professores mediadores explorá-los ou não, durante os encontros. Os discentes perceberam que Matemática tem a ver com desafios diários, que não envolve apenas cálculo, por isso buscaram diferentes caminhos e surpreenderam os professores. Para Dante (2009, p. 19), “Ensinar apenas conceitos, habilidades, procedimentos e atitudes que atualmente são

relevantes parece não ser o caminho, pois eles poderão tornar-se obsoletos daqui a 15 ou 20 anos, quando a criança de hoje estará no auge de sua vida produtiva”.

Os docentes visualizaram uma metodologia diferente da habitual, mencionando que existem poucos trabalhos direcionados aos professores com este foco. Este fato, também foi percebido pelas pesquisadoras no momento da elaboração do material, sendo que poucos problemas puderam ser utilizados na íntegra, pois apesar dos livros sobre resolução de problemas apresentarem inúmeros problemas, a maioria deles está direcionado ao ensino fundamental e, principalmente, às séries iniciais. Além disso, constatou-se que o material buscou apresentar diferentes problematizações quanto à resolução de problemas, utilizando problemas não convencionais e sem soluções evidentes.

A satisfação dos professores é outro fator importante, uma vez que se envolveram e perceberam os alunos engajados na proposta, gerando bons questionamentos e reflexões em relação ao ensino da Matemática. Os profissionais relataram ser prazeroso e desafiador abordar o material, alguns descreveram que pretendem dar continuidade a esta exploração visando inovar e aprimorar suas aulas. Segundo Polya (1995, p. 124)

No ensino da Matemática, podem-se fazer necessários problemas rotineiros, até mesmo muitos deles, mas deixar que os alunos nada mais façam é indesculpável. O ensino que se reduz ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras fica bem abaixo do nível do livro de cozinha, pois as receitas culinárias sempre deixam alguma coisa à imaginação e o discernimento do cozinheiro, mas as receitas matemáticas não deixam nada disso a ninguém.

Durante os encontros presenciados, foi possível observar que o material possibilitou aos sujeitos envolvidos, novos olhares e diferentes abordagens. O professor B1 iniciou o encontro presenciado dizendo, “não é difícil pessoal, só diferente do que vocês estão acostumados”. Já o professor B3 iniciou com uma reflexão sobre a transformação do senso comum para evolução do conhecimento e sobre a importância da leitura e escrita para abordar o encontro proposto. O mesmo buscou intervir o mínimo possível, parecia ter mais conhecimento dessa metodologia. O professor B7 parecia mais inseguro, porém disposto e envolvido com a proposta, talvez por não estar familiarizado com a metodologia, pediu que eu mediasse o encontro e auxiliasse os alunos. Nessa escola a dificuldade dos alunos se destacou em relação às demais.

Em outro encontro presenciado, a professora B4 tinha uma didática interessante, envolveu-se constantemente com os grupos fazendo inúmeros questionamentos a partir das

dúvidas apresentadas pelos alunos. Já a professora B5, tinha bastante tranquilidade para lidar com a proposta, pois ao entrar na sala os alunos já esperavam ansiosos pelos desafios do encontro. Alguns alunos pareciam inseguros no começo, mas em seguida se envolveram e criaram gosto pela ideia. Alguns grupos se destacavam, apresentavam uma lógica surpreendente e finalizavam as atividades antes dos demais.

Merece destaque também a reflexão do professor B3 ao ressaltar a importância de vincular as pesquisas da universidade com a Educação Básica, fato este é reforçado por Onuchic (2012, p. 3), ao questionar: “Como nossa pesquisa acadêmica se relaciona com a nossa educação básica? Há transferência do produto de nossas dissertações e teses para o professor de sala de aula?”. Refletindo sobre isto, acredito que o produto desta dissertação conseguiu de certa forma integrar escola e universidade, através das intervenções nas escolas públicas envolvidas.

Por fim, segue o último capítulo desta dissertação com a descrição das considerações finais levando em conta nossas concepções quanto pesquisadoras, a partir do apoio e mediação dos professores sujeitos deste estudo.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho propôs auxiliar professores de Matemática, por meio do material didático elaborado, para abordarem a resolução de problemas em suas aulas, desvinculado de conteúdos específicos e investigar como os livros didáticos do 1º ano do ensino médio, utilizados em seis escolas estaduais parceiras do programa Observatório da educação, abordam esta metodologia.

Uma das motivações para isso foi a busca por melhor desempenho dos alunos da Educação Básica nas avaliações externas, que tem como foco a resolução de problemas. Esse desempenho pode estar relacionado ao fato dos alunos não estarem habituados a resolver problemas sem saberem o conteúdo matemático ao qual estão vinculadas as questões apresentadas. Além disso, as constantes mudanças no sistema educacional exigem do professor o uso de diferentes metodologias de ensino para abranger um maior número de alunos, preparando-os para a sociedade a fim de serem protagonistas neste contexto. Esse desafio pode ser estimulado com a abordagem proposta, pois exige criatividade, leitura, interpretação, escrita, uso de diferentes estratégias entre outras.

Nos dados coletados inicialmente, evidenciou-se que o livro didático é utilizado pelos professores, alguns destes utilizam-no de forma catequética, outros como um apoio e a minoria diz raramente abordar temas do livro. Os professores aproveitam deste recurso didático, principalmente os exercícios e problemas que estão relacionados aos conteúdos que exploram em suas aulas. Desse modo, mesmo que os livros apresentem iniciativas para se desvincular parcialmente de conteúdos específicos e da estratégia do cálculo para resolução, o professor é quem determina suas aulas e aceita se propor ou não a diferentes métodos de ensino.

Ao analisar os livros didáticos, percebeu-se que há neles uma evolução em relação à abordagem de resolução de problemas. Cada qual com suas peculiaridades procuram inovar com possibilidades para inserir a metodologia em estudo, a qual tem contribuído para modificar o estilo apresentado nos livros didáticos de Matemática. No entanto, destacam-se como principais limitações nos livros observados: a maioria dos problemas estarem vinculados a conteúdos específicos, ou seja, aparecem para introduzir ou aplicar um determinado conteúdo matemático; abordarem basicamente os mesmos tipos de problemas, não exploram problemas sem números, com excesso de dados, insuficiência de dados e perguntas de negação; além de não abordarem a formulação de problemas, situação a qual os alunos envolvidos nesta pesquisa apresentaram dificuldade de desenvolver.

Os estudos realizados mostram que o livro didático auxilia e permite reflexões para o professor realizar uma abordagem voltada à metodologia da resolução de problemas, porém não é o suficiente para prática escolar. Assim, o educador precisa buscar por conhecimentos complementares para promover um ensino mais eficaz aos alunos. Para Lopes (2009), um bom livro, nas mãos de um educador despreparado, pode produzir resultados insatisfatórios, assim como um livro de baixa qualidade, administrado por um professor competente, pode implicar numa aprendizagem significativa, crítica, criativa e participativa. Nessa concepção, o livro didático é importante e deve ser usado como um suporte ao trabalho docente, porém são as ações do professor que determinam o andamento das aulas e as metodologias a serem empregadas.

Cada livro didático analisado apresenta características distintas, porém a proposta de organização dos conteúdos é semelhante e essas têm influência na ordem e na maneira como os conteúdos são abordados em sala de aula ao longo do ano letivo, interferindo no tempo previsto para abordar determinados conteúdos, o tipo de atividades e a metodologia de ensino a ser adotada.

Neste sentido, conclui-se que a metodologia de ensino encontrada nos livros didáticos aponta para o emprego de diferentes tendências, inclusive a resolução de problemas, pois diferentes abordagens são apresentadas nas obras, porém de forma sistematizada. No entanto, os livros ainda enfatizam o ensino tradicional que se caracteriza pela transmissão de conteúdos fragmentados, por meio de conceitos, procedimentos, propriedades e exercícios resolvidos, seguidos de atividades para as quais o aluno deve aplicar o conhecimento que foi exposto (GITIRANA e CARVALHO, 2010). Apesar de o livro didático ter muitos aspectos

do ensino tradicional, percebe-se uma evolução ao mesclar sua metodologia e direcionar para a resolução de problemas.

A prática de analisar livros didáticos contribui, também, para que o professor possa avaliar sua postura em sala de aula, idealizar ações que promovam situações didáticas para possibilitar um ambiente favorável à aprendizagem do educando.

Para organização do material didático, disponibilizado aos docentes, foi necessário rever os dados das entrevistas iniciais realizadas com os professores, visando atingir aspectos que julgaram pertinentes, mas sem perder o foco nos objetivos traçados. Esta etapa foi uma das mais complexas da pesquisa, pois planejar sob a perspectiva da resolução de problemas sem vínculo a conteúdos matemáticos específicos para diferentes realidades, não era algo tão presente na rotina das pesquisadoras. Outro dificultador foi encontrar produções sobre resolução de problemas voltadas ao ensino médio, pois a maioria é focada no ensino fundamental e séries iniciais. No entanto, as leituras de textos escritos por autores que já estudam esta metodologia há mais tempo, possibilitou concluir esta etapa. Apesar de julgar o material didático elaborado relevante para o ensino, este poderia ter sido ainda melhor se planejado em conjunto com os sujeitos envolvidos nesta pesquisa, fato este que não foi possível.

A abordagem deste material, em vista das observações realizadas e descrições dos professores, mexeram com a sala de aula. Vale ressaltar que os principais sujeitos desta pesquisa foram os professores, porém os dados apresentados por estes profissionais estão direcionados principalmente aos alunos, uma vez que foi mais fácil avaliar os alunos do que a si próprios. De qualquer forma, o objetivo é inovar a metodologia para melhorar a aprendizagem. Quanto a isso, ficou evidente que os professores aderiram à proposta do início ao fim, cada um dentro de suas possibilidades. Todos abordaram o material e ficaram satisfeitos com os resultados apresentados pelos alunos, que tiveram, inicialmente, mais dificuldades em relacionar e interpretar os dados, pois buscavam vincular a proposta com conteúdos já aprendidos, mas no decorrer das aulas, perceberam que eles não precisavam de fórmulas prontas porque tinham autonomia e independência para criar e resolver os problemas. Passaram a repensar o significado da Matemática e apresentaram características fundamentais como: criatividade, dinamicidade, reflexão, concentração, comparação, persistência, argumentação, criação, raciocínio lógico, protagonismo, entre outras. Ficou evidente que os alunos que tem maior facilidade no algoritmo apresentam maior dificuldade

na interpretação e resolução de problemas em que não evidenciem o conteúdo e técnicas relacionados.

A intervenção pedagógica realizada pelos sete professores mostrou que os alunos lentamente foram desenvolvendo habilidades para formulação e resolução de problemas, além de demonstrar maior interesse, independência e confiança para resolver o que era proposto. O sucesso dessa proposta está no desenvolvimento de uma cultura em sala de aula onde os alunos sejam livres para opinar, criar, achar soluções diferentes, percorrer caminhos distintos, comparar e debater hipóteses, mudando a si mesmos através de questionamentos e debates.

Para os professores envolvidos, essa proposta pode ter sido o começo de algumas mudanças, possibilitando reflexões em sua prática, e possivelmente, visualizando a resolução de problemas como uma ferramenta metodológica para o ensino da Matemática. Assim, estes professores ao se questionarem, “como ensinar matemática através da resolução de problemas?”, terão uma percepção diferente da qual tinham antes de fazer esta abordagem, uma vez que a mudança começa a partir de pequenas práticas como esta, em que os sujeitos envolvidos transformam suas concepções em relação aos processos de ensino e aprendizagem.

Para Onuchic e Alevatto (2004), a Matemática pode ser melhor ensinada através da resolução de problemas, levando o aluno a “pensar sobre” e apesar de ser mais difícil ao professor, depois que experimentam ensinar desse modo nunca voltam a ensinar de forma tradicional. O estímulo de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos.

Se a reflexão de Onuchic e Alevatto condiz com a realidade, as ações desenvolvidas nesta pesquisa foram significativas para o ensino da Matemática, pois a partir dos aspectos apresentados pelos professores e sua iniciativa de refletirem sobre a prática, eles se dispuseram a inovar o método de ensino junto aos alunos a partir do uso deste material didático, mesmo sabendo que muitas vezes o professor é induzido a utilizar as propostas e os conteúdos já prontos dos livros didáticos. Neste sentido, houve ganhos expressivos aos envolvidos na proposta.

É pertinente reforçar que não há a pretensão de eliminar a resolução de problemas vinculados a conteúdos específicos, apenas mostrar que existem possibilidades dos alunos obterem um bom desempenho em práticas diferenciadas além de disseminar, junto aos professores, novas alternativas de ensino. Tampouco intenciona-se modificar a estrutura dos



livros didáticos, mas promover reflexões que apontem caminhos para melhorar o trabalho escolar. No decorrer da pesquisa, foi possível perceber a positiva influência desta proposta na prática docente, especialmente, no quesito rigidez com que os conteúdos são trabalhados.

Para inserir mais efetivamente a prática da resolução de problemas, seria significativo a produção de materiais didáticos, semelhantes aos utilizados neste trabalho, ser feita de forma conjunta pelos docentes e pesquisadores, como uma estratégia de formação continuada, tornando-os mais ativos, melhorando a qualidade do trabalho dos professores e, por consequência, intensificar a formação de seus alunos.

## REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; TERTO, L. L. Funções quadráticas nos livros didáticos: um estudo sob a ótica da resolução de problemas. In: CURI, E.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). **Pesquisas e práticas em educação: matemática, física e tecnologias computacionais**. São Paulo: Terracota, 2009. p. 33 - 50.

ALVES, Rose Mary Fernandes. **Uma análise da produção escrita de alunos do ensino médio em questões abertas de matemática**. Londrina, 2006. 158 f. Orientador: Regina Luzia de Buriasco, Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Federal de Londrina.

AMARAL, I. A. do. Os fundamentos do ensino de Ciências e o livro didático. In: FRACALANZA, H.; NETO, J. M. (orgs.). **O livro didático de ciências no Brasil**. Campinas: Komedi, 2006. p. 81 – 118.

BARNETT J. C.; SOWDER L.; VOS K. E. Problemas de livros didáticos: complementando-os e entendendo-os. In: Krulik, S. e REYS R. E. (org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 131 - 147.

BARROS, D. M. de. **Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos**. Araçatuba, SP: Novas Conquistas São Paulo Editora, 2003.

BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**. 1 ed. São Paulo. 2010.

BITTENCOURT, C. **Livro didático e saber escolar (1810 - 1910)**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2008.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução: Alvarez, M. J.; Santos, S. B.; Baptista, T. M. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **PCN +: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2013.

BRASIL. **Relatório pedagógico do Exame Nacional do Ensino Médio**. Ministério da Educação. Brasília: MEC/INEP, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BUSCHAW, D.; BELL, M.; POLLAK, H. O.; THOMPSON, M.; USISKIN, Z. **Aplicações da matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

CAIMI, F. E.; MACHADO, I. A. P.; DIEHL, A. A. (org.). **O livro didático e o currículo de história em transição**. 2ª Ed. Rio Grande do Sul, Passo Fundo: UPF, 2002.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero**. 12ª Ed. São Paulo: Cortez, 2001.

CARVALHO, M. **Problemas? Mas que problemas?!** : estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 5 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

CAVALCANTI, C. T. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 121 - 149.

CHIQUETTO M. J.; KRAPAS S. **Livros didáticos baseados em apostilas**: como surgiram e por que foram amplamente adotados. Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências ISSN 1806-5104 / e-ISSN 1984 - 2486. Vol. 12, nº 3, 2012.

COSTA, J. R.; NOGUEIRA, C. M. I. O livro didático de Matemática e o manual do professor. in: BURAK, D.; PACHECO, E. R.; KLÜBER, T. E. (org.). **Educação matemática**: reflexões e ações. 1 Ed. Curitiba: CRV, 2010. p. 121 - 144.

COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, Santa Maria, v. 30, n. 2, p. 71 - 80, jul./dez. 2010.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. p. 15 - 19.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: BORBA M. de C; ARAÚJO J. de L. (org.) **Pesquisa Qualitativa em educação Matemática**. 4. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 11 - 22.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, L. R. **Livro didático de matemática**: uso e abuso?. Em Aberto, Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação. Brasília: MEC/SEM, 1996. 144p.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. 1ª Ed. São Paulo: Ática, 2010.

DEGUIRE, L. J. Polya visita a sala de aula. In: Krulik, S. (org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 99 - 113.

DINIZ, M. I. Os problemas convencionais nos livros didáticos. In: SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 99 - 102.

GITIRANA, V.; CARVALHO, J. B. P. de. A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de Matemática. In: CARVALHO, J. B. P. F. de (org.) **Matemática**: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. p. 31 - 52.

HORIKAWA, A. Y.; JARDILINO, J. L. **A formação de professores e o livro didático**. Revista Lusófona de Educação, nº15, 2010. p. 147 - 162.

LEBLANC, J.F.; Proudfit, L.; PUTT, I.J. Ensinando resolução de problemas na *elementary school*. In: Krulik, S. (org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 148 - 164.

LOPES J. de A. O livro didático, o autor e as tendências em educação Matemática. In: NACARATTO A. M.; LOPES C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação Matemática**. Belo Horizonte: Autentica, 2009. p. 35 - 62.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 1997.

MEC- COLTED (ED.) **O livro didático**: sua utilização em classe. Brasília/ Rio de Janeiro, 1969.

MOLINA, O. **Quem engana quem?** Professor x livro didático. 2ª ed. Campinas, SP: Papirus, 1988.

MORAES, R.; GALIAZZI, C. Metamorfoses Múltiplas: emergências incertas e inseguras no caminho da análise textual discursiva. MORAES, R.; GALIAZZI, C. **Análise textual discursiva**. 2ª ed. Ijuí: Unijuí, 2013, p. 163 - 192.

MOREIRA, M. A. **Metodologia de pesquisa em ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MUSSER, G. L.; SHAUGHNESSY, J. M. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Domingues, H. H. e Corbo, O. São Paulo: Atual, 1997. p. 188 - 201.

NETO, S. P.; ROSAMILHA, N.; DIB, C. Z. **O livro na educação**. Rio de Janeiro: Primor/INL, 1974.

ONUCHIC L. de la R. **A resolução de problemas na educação Matemática**: onde estamos e para onde iremos? Anais da IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática. Passo Fundo. 2012.

ONUCHIC L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. **As Diferentes “Personalidades” do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas.** Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008. p. 79 - 102.

ONUCHIC, L. de La R. Ensino – Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação Matemática: Concepções & Perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 199 - 218.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino – aprendizagem de Matemática através da Resolução de problemas. in: BORBA, M. de C.; BICUDO, M. A. V. (org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento.** São Paulo: Cortez, 2004. p. 213 - 231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, dez. 2011. p. 73 - 98.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

POZZO, J. I.; AGÓN, Y.P. A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica. In: POZO, J.I. (org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 139 - 166.

POZZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M.D.P.P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 13 - 42.

RABELO, E. H. **Textos matemáticos: produção, interpretação e resolução de problemas.** 3 ed. revisado e ampliado. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia.** São Paulo: Scipione, 2010.

RIBEIRO, J; SOARES, E. **Construindo consciências: matemática.** 1ª Ed. São Paulo: Scipione, 2006.

RODRIGUES, A.; MAGALHÃES, S. C. **A resolução de problemas nas aulas de matemática: diagnosticando a prática pedagógica.** p. 1 - 16, s/d. Disponível em: < [http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica\\_artigos/artigo\\_rodrigues\\_magalhaes.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_rodrigues_magalhaes.pdf) > acesso em: 17 de jul. de 2014.

TRIPATHI P. N. **Problem Solving In Mathematics: A Tool for Cognitive Development.** State University of New York, Oswego, USA. 2009, p.168 - 173.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

*Sites consultados*

<http://pibidmatematicaceab.blogspot.com.br/p/matematica-recreativa.html>. Acesso em 28 dez. 2013.

<http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em 06 jan. 2014.

<http://www.oqueeoquee.com/jogos-de-logica>. Acesso em 06 jan. 2014.

[http://www.mathema.com.br/default.asp?url=http://www.mathema.com.br/reflexoes/ap\\_ler\\_p\\_rob.html](http://www.mathema.com.br/default.asp?url=http://www.mathema.com.br/reflexoes/ap_ler_p_rob.html). Acesso em 18 jan. 2013.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Os integrantes do projeto “Relação entre a formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica e as competências e habilidades necessárias para um bom desempenho nas provas de Matemática do SAEB, Prova Brasil, PISA, ENEM e ENADE”; desenvolvido no Centro Universitário UNIVATES, no âmbito do Programa Observatório da Educação elaboram ações de intervenção pedagógica com o intuito de melhorar a qualidade do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Uma dessas ações são entrevistas gravadas que integrarão uma dissertação de Mestrado da aluna Geovana Luiza KLiemann, vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da referida Instituição, visando identificar a relevância que os referidos professores de Matemática atribuem ao livro didático, com que finalidade o usam e o que percebem que poderia ser melhorado, ou ainda, o que falta nesse material para que seja mais adequado em sua prática, com vistas a uma aprendizagem voltada à resolução de problemas e, conseqüentemente, mais significativa.

Para tanto, realizaremos entrevistas com professores de Matemática vinculados às seis escolas que integram o Observatório da Educação visando obter informações a respeito da temática citada. As mesmas serão gravadas em vídeo, para posterior transcrição e análise de discurso.

O conteúdo das gravações, assim como as imagens, serão utilizados somente pelos integrantes da Pesquisa e ficarão sob guarda da coordenadora do projeto, dando-se garantia de manutenção do caráter confidencial e anônimo das informações que, juntamente com os resultados, estarão sempre sob sigilo ético, não sendo mencionados os nomes dos participantes em nenhuma apresentação oral ou trabalho escrito que venha a ser publicado, pois os registros da fala e da imagem são usados unicamente para comprovar os dados relativos ao trabalho desenvolvido.

Pelo presente Termo de Consentimento, o participante autoriza o uso das suas opiniões na referida dissertação, vinculada a essa pesquisa e declara que foi esclarecido, de forma clara e detalhada, livre de qualquer forma de constrangimento ou coerção, dos objetivos, da justificativa e dos procedimentos a que será submetido e autoriza a participação por meio deste questionário.



A pesquisadora responsável é a professora Maria Madalena Dullius, do Centro Universitário UNIVATES de Lajeado, RS, que poderá ser contatada pelo e-mail [madalena@univates.br](mailto:madalena@univates.br) ou pelo telefone (51) 3714-7000 ramal 5413.

Nestas condições, solicita-se a sua colaboração.

Nome: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

## APÊNDICE B - Material didático utilizado na intervenção

### APRESENTAÇÃO

A preocupação com o ensino da Matemática sempre existiu, mas em 1980, educadores e pesquisadores matemáticos propuseram que a resolução de problemas deveria ser a prioridade do ensino da Matemática (ONUChic, 1999). No entanto, ao longo dos anos, muitas mudanças estão ocorrendo no contexto educacional, novas propostas vêm e outras vão. Essas direcionam a diferentes focos e os professores buscam rapidamente adaptá-las da melhor maneira possível, porém o objetivo de ensinar Matemática através da resolução de problemas continua presente na proposta atual de ensino e em documentos oficiais como os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais).

Este material, elaborado para os professores explorarem com alunos do 1º ano do Ensino Médio, apresenta uma proposta para exploração da resolução de problemas sem vínculo a um conteúdo matemático específico. Sabe-se que esses alunos ao longo de sua caminhada escolar ou extraclasse irão se deparar com avaliações externas como, ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), ENADE (Exame Nacional de Desempenho do Estudante) Prova Brasil, SAEB (Sistema Avaliativo da Educação Básica), Olimpíada Matemática, vestibular, concursos entre tantos outros, que exigem maior habilidade na resolução de problemas, uma vez que são essencialmente baseadas nesta metodologia. Além disso, ao concluírem seus estudos na educação básica, os alunos entrarão para o mercado de trabalho, que exige um profissional pensante, com atitude e autonomia cujas características podem ser desenvolvidas através da resolução de problemas.

Na organização deste material, deu-se ênfase a problemas não rotineiros, buscando possibilitar ao professor trabalhar a resolução de problemas sob diferentes aspectos e estimular os alunos a perceberem a Matemática como algo desafiador e agradável. O objetivo desse material é auxiliar os professores a introduzirem, de forma mais efetiva, a prática da resolução de problemas desvinculada de conteúdos específicos, de forma que o professor possa desenvolver junto ao aluno o gosto e a habilidade de resolver e criar problemas matemáticos. Onuschic (1999, p. 215) reforça que “o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória”.

O material está organizado em 10 encontros, com objetivos distintos (QUADRO 1) na forma de roteiro preestabelecido com algumas sugestões de atividades para serem trabalhadas conforme organização temporal de cada professor. Sugere-se que esse seja abordado ao menos uma vez por semana e, que a cada encontro, o professor faça um registro de como se sentiu e o que percebeu de positivo e negativo ao desenvolver as atividades, além da reação dos alunos diante da proposta.

Quadro 1 – Objetivos de cada encontro.

**1º encontro => Etapas da resolução de problemas conforme Polya (1995).**

Este encontro tem como objetivo discutir e explorar com os alunos, as etapas da resolução de problemas para que compreendam a resolução desde seu início chegando ao fim com maior segurança, por meio de diferentes estratégias que os alunos poderão criar e recriar.

**2º encontro => Resolução de problemas com e sem números (individualmente).**

Neste encontro, o objetivo é auxiliar os alunos a colocarem em prática as etapas estudadas, por meio de problemas com e sem números fazendo-os perceber que a Matemática não envolve apenas cálculos, mas a elaboração de um plano.

**3º encontro => Problemas sem perguntas e perguntas sem enunciado.**

Para este encontro, os alunos serão desafiados a construir perguntas a partir de enunciados disponibilizados além de elaborarem enunciados baseados em determinada pergunta.

**4º encontro => Formulação de problemas a partir de uma imagem**

O objetivo é estimular e desenvolver a escrita do aluno e torná-lo protagonista na sala de aula, promovendo a autonomia em criar a partir de uma imagem do seu interesse.

**5º encontro => Resolução de problemas em grupo, com excesso de dados, insuficiência de dados e perguntas de negação.**

Objetiva-se que os alunos trabalhem de forma cooperativa e se familiarizem cada vez mais com a resolução de problemas para que se tornem efetivos na escola e nas aulas de Matemática; que percebam o significado dos dados dispostos no problema e não os utilizem de qualquer forma; que tenham a capacidade de reescrever os problemas com insuficiência de dados e perceber o excesso de dados nos problemas.

**6º encontro => Formulação de problemas a partir de uma resposta, de uma operação e de um anúncio de classificado ou propaganda.**

O objetivo é estimular os alunos a serem criativos e perceberem que a resolução de problemas aborda diferentes aspectos e está fundamentada em diferentes situações relacionadas ao cotidiano e à Matemática, mas para ganhar significado real ou imaginário, a resolução de problemas precisa ser contextualizada.

**7º encontro => Resolução de problemas**

Retomar as etapas da resolução de problemas de forma prática, para instigar a habilidade no decorrer de sua resolução.

**8º encontro => Construção de um quadro de dados e formulação de problemas**

Fortalecer a capacidade criadora a partir de uma situação nova e desenvolver a escrita na Matemática.

**9º encontro => Erro na resolução e resolução de problemas**

Propor uma situação problema resolvida incorretamente e desafiar o aluno a perceber o erro presente na resolução propondo uma solução coerente.

**10º encontro => Resolução de problemas**

No último encontro descrito, disponibilizar-se-á uma quantidade maior de problemas para que os professores possam ter um banco de problemas. Possibilita-se que optem por trabalhar com os quais julgarem mais pertinentes.

Fonte: Das autoras, 2014.

Em cada encontro descrito no quadro 1, o professor poderá estimular e explorar as diferentes estratégias de resolução, oportunizando aos alunos perceberem que a Matemática é dinâmica e não rígida como muitos acreditam. Musser e Shaughnessy (1997, p. 188), citam cinco estratégias de resolução de problemas que julgam pertinentes serem abordadas nas escolas:

- Tentativa-e-erro: aplicação de operações pertinentes às informações dadas.
- Padrões: resolução de casos particulares, encontrando padrões que podem ser generalizados.
- Resolver um problema mais simples: resolução de um caso particular ou um recuo temporário de um problema complicado para uma versão resumida, podendo vir acompanhado do emprego de um padrão.

- Trabalhar em sentido inverso: partindo do resultado, realizar operações que desfazem as originais.
- Simulação: utilizada quando a solução do problema envolve a realização de um experimento e executá-lo não seja prático.

Cavalcanti (2001, p. 127) cita também a utilização do desenho “como recurso de interpretação do problema e como registro da estratégia de solução”, podendo fornecer ao professor, pistas sobre como o estudante pensou e agiu para solucionar o problema.

Durante o processo de resolução de problemas, cabe ao professor auxiliar os alunos, não em demasia a ponto de tirar a autonomia do aprendiz nem tão reduzido, impedindo novos olhares para o aluno dar sequência a seu trabalho. Ao professor compete a missão de encontrar este meio termo, através de questionamentos diante dos problemas que os alunos têm para resolver, tais como: Qual é a incógnita? Quais são os dados disponíveis? Qual a condicionante? Somado a isso, é importante lembrar-se das dificuldades que o professor encontrou para resolver determinado problema, colocando-se no lugar do aluno, para perceber a melhor forma de auxiliá-lo.

O papel do professor é indispensável no trabalho com foco na resolução de problemas, cabendo a ele:

- Verificar se os alunos entenderam o problema;
- Criar um espaço para que o aluno perceba que trabalhar o problema é mais importante que chegar à resposta;
- Estimular os alunos a trabalharem em grupos e de forma dialógica resolverem o problema;
- Conduzir uma discussão pós-solução para que os alunos socializem suas estratégias de resolução.

Os problemas dispostos neste material foram escolhidos objetivando a compreensão dos alunos ingressantes no 1º ano do ensino médio, não muito difíceis que impossibilitem sua resolução nem tão superficiais que não os desafiem. Assim, o professor pode adaptar os problemas conforme ao grau de dificuldade de sua turma, promovendo questionamentos complementares, gerando novas reflexões.

É importante que o aluno reconheça o significado dos termos, para que veja sentido no que é proposto. Por exemplo, ao se deparar com as palavras: “incógnita, condicionante, perpendicular...”.

Ressaltamos que os problemas foram retirados de diversas fontes e adaptados resultando em um material dinâmico e não rotineiro, a fim de ser resolvido pelo aluno, através de diferentes meios que devem ser valorizados e socializados com a turma, estimulando todos a desenvolverem o raciocínio e a criatividade. Por isso, o planejamento das aulas foi organizado, priorizando os possíveis conhecimentos construídos pelos alunos até então e não a série a que eles correspondem.

Salientamos que para resolver um problema é preciso tempo, por isso é necessário esclarecer aos alunos que não se trata de uma competição premiando o melhor e o mais rápido. Para evitar possíveis aflições por parte dos alunos que levam mais tempo, sugere-se levar atividades extras para os alunos mais rápidos ou ampliar a atividade proposta para estes.

Para que o aluno aprenda resolver problemas é preciso que o professor o estimule e organize planejamentos para esse fim. A resolução de problemas não é aprendida rapidamente exige, pois, longo tempo para contemplar essa habilidade. Para Leblanc et al. (1997, p. 154) “Ensinar resolução de problemas é difícil, comparada a ensinar habilidades matemáticas ou conceitos”. Apesar disso, ela permite que o aluno construa sua matemática e não a receba como algo pronto e apenas repita o que foi criado por outros.

Antes de iniciar a aplicação deste material, pode-se sugerir aos alunos que anotem separadamente (em outro caderno, ou em folhas) os problemas trabalhados nas aulas para construir uma “problematoteca”, cujo material poderá ser socializado com outros professores e aplicado a outras turmas nos anos seguintes oportunizando um banco de problemas cada vez mais vasto. Isso pode ser discutido e decidido com os alunos valorizando, deste modo, sua produção.

É importante lembrar o quanto a compreensão do problema é importante para a resolução e para sua elaboração por parte dos alunos. No entanto, sugere-se que quando for proposto um problema ao aluno que seja entregue uma cópia do mesmo para cada um, ou escrito no quadro solicitando que façam primeiro uma leitura individual e, posteriormente, nova leitura nos grupos, caso o trabalho for coletivo. Se a proposta for formular problemas, a releitura do que escreveram é muito significativa, pois quem tentar resolver esse problema terá que conseguir compreender os dados através de uma leitura clara.

## ENCONTROS

### **1º encontro => Explorar as etapas da resolução de problemas conforme Polya.**

Iniciar uma discussão com os alunos a partir das questões: “O que é um problema?” e “Como se resolve um problema Matemático?” Deixar que coloquem sua opinião e depois compará-la com as de autores que abordam esse tema, entre eles Dante e Polya.

Para fomentar as discussões da 1ª questão levantada, Dante (2009, p. 11) diz que:

“Intuitivamente, todos nós temos uma ideia do que seja um problema. De maneira genérica, pode-se dizer que é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo. O que é um problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro. Por exemplo, se o pneu da bicicleta de Beto nunca furou e ele não sabe o que fazer nessa situação – e quer resolvê-la, pois gosta de andar de bicicleta -, então esse é um problema para ele. Mas sabe que nesse caso deve procurar uma borracharia e que há uma bem próxima dali, a situação não chega a ser um problema, pois não exigirá um processo de reflexão para solucioná-la”.

Para Polya, o objetivo principal da Educação Matemática é a resolução de problemas e para resolvê-los é preciso passar por 4 fases, conforme segue:

#### **1ª fase: Compreensão do problema**

É necessário compreender o problema para que o aluno queira resolvê-lo e possa perceber o que precisa fazer. Se bem compreendido, este aluno, tem condições de identificar os dados, a incógnita e a condicionante. Nesta etapa a leitura é fundamental, pois o aluno deve ler o enunciado do problema quantas vezes for preciso para ter clareza. Para auxiliar o aluno nesta etapa o professor pode fazer questionamentos como: Qual é a incógnita? Qual é a condicionante? (Conforme atividade 1 descrita na sequência).

#### **2ª fase: Estabelecimento de um plano**

Para estabelecer o plano, o aluno deve encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. É preciso chegar a um plano para iniciar a resolução. Para isso, o aluno pode pensar em outros problemas similares que já tenham sido resolvidos antes, buscando semelhanças entre ambos usando assim, seus conhecimentos prévios.

#### **3ª fase: Execução do plano**

Nesta etapa deve-se trabalhar sobre o plano estabelecido. Se as etapas anteriores foram bem pensadas, esta será a mais fácil do processo. Para que o aluno obtenha êxito, deve ser

estimulado a realizar cada procedimento com muita atenção, permanecendo atento a cada passo desenvolvido. É importante que o aluno anote todas as etapas da resolução como cálculos, desenhos, esquemas entre outros.

#### **4ª fase: Retrospecto**

Nesta etapa o aluno verifica o resultado retomando o que fez, reflete sobre o processo, confere os procedimentos utilizados, procura simplificá-los ou busca outros caminhos de resolver o problema de forma mais simples desenvolvendo, assim, sua capacidade de resolver problemas e ordenar seus conhecimentos.

Nesta aula sugere-se explorar ao máximo, as fases da resolução de problemas, elaborar um cartaz com os alunos para deixar as fases visíveis e retoma-las sempre que for necessário.

Pensou-se em esclarecer ainda melhor as fases da resolução de problemas a partir da resolução conjunta do problema descrito abaixo, para o qual os alunos terão que seguir as quatro fases/etapas estudadas e socializar com os colegas suas ideias, conforme Polya o resolveu em uma de suas aulas.

1) (Adaptado de DEGUIRE, 1997, p. 100) Ontem à noite, terminei de fazer a lista de convidados para o jantar que vou dar no próximo mês. Como haverá trinta pessoas, vou precisar tomar emprestadas algumas mesas, de tamanho que permita sentar-se uma pessoa de cada lado. E eu quero dispô-las numa longa fileira, encostados umas nas outras. Naturalmente, quero tomar emprestado o mínimo de mesas possível. De quantas mesas vou precisar?

Obs: Deixar uma pausa para os alunos iniciarem. Observar que Polya enunciou o problema em uma pequena história. Trata-se de um recurso para envolver os alunos com o problema. A pausa leva a uma situação aberta que permite aos alunos tentar todas as estratégias ou perguntas de que naturalmente poderiam se valer. Isso possibilita ao professor alguns minutos para ver o que os alunos estão fazendo.

Veja como ele deu sequência a essa aula:



*P:* Vejamos o que conseguimos.

*Comentarista (C):* Lembrem-se de que a primeira etapa da resolução de um problema é compreender o problema.

*Mike:* Você pode esquecer tudo isso porque esse problema é muito simples. Pode colocar quatro pessoas em cada mesa. Assim, você simplesmente divide trinta por quatro e chega a  $7\frac{1}{2}$  — você precisará de  $7\frac{1}{2}$  mesas.

*Pete:* Mike, você não pode colocar quatro em cada mesa!

*Mike:* Por que não?

*Pete:* Porque ele disse que queria colocar as mesas numa fileira, encostadas. Além disso, quem já ouviu falar em meia mesa?

*P:* Sim, Mike, você parece ter se esquecido de alguma informação do problema.

*C:* Mike está nos lembrando de que não paramos para nos certificar de que tínhamos entendido todas as condicionantes do problema. O que nos foi pedido para encontrar? Isto é, qual é a incógnita? É o número de mesas de jogo necessárias. Que informação está no problema?

*Mike:* Trinta pessoas na festa. E as mesas vão ficar encostadas, numa fileira. Assim, suponho que não se possam colocar quatro pessoas em cada mesa.

*C:* Certo, Mike, mas e as meias mesas?

*Pete:* Bem, se você obtém uma fração, como  $7\frac{1}{2}$  mesas, você realmente precisa de 8 mesas.

*C:* Em outras palavras, você usará apenas números inteiros como resposta. O que estávamos fazendo era nos certificar de que compreendemos o problema — de que o que queremos encontrar (a incógnita) é o número de mesas necessárias, de que o que temos são trinta pessoas para se sentar e que as condicionantes são que as mesas serão colocadas de modo a formar uma fileira, encostadas umas nas outras, e que só se pode usar um número inteiro de mesas. Passemos agora a procurar um plano para resolver o problema.

O comentarista está fazendo com que os alunos se lembrem do plano de quatro etapas para a resolução de problemas. Esse duplo papel do pro-

fessor — companheiro na resolução de problemas e comentarista externo ao processo — está no cerne do estilo de ensino de Polya.

*P:* Como poderíamos continuar a resolver este problema?

*Jan:* Tentei desenhar pequenos quadrados para representar as mesas de jogo.

*P:* Excelente idéia, Jan! Que tal ir em frente e ser a nossa artista para esse desenho?

*C:* Desenhar uma figura é uma idéia muito útil na resolução de muitos problemas. Isso geralmente nos ajudará a visualizar nossa informação e a testar possíveis soluções.

*(Jan desenha uma figura como a mostrada na figura 1.)*

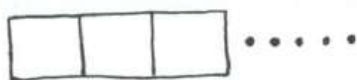


Fig. 1

*Jan:* Mas ainda não sei de que comprimento faço a fileira.

*P:* Bem, como podemos representar o número de mesas?

*Lynn:* Poderíamos usar uma letra.

*P:* Que letra seria uma boa opção, Lynn?

*Lynn:* Poderíamos usar  $m$  para “mesas”.

*Jan:* Ou  $n$  para o “número de mesas”.

*C:* Qualquer dessas letras é uma boa opção para simbolizar nossa incógnita, porque nos fazem lembrar o que ela representa.

*P:* Agora, Jan, você pode usar nossa incógnita para acabar de fazer a figura?

*(Jan aumenta a figura 1, formando a figura 2.)*

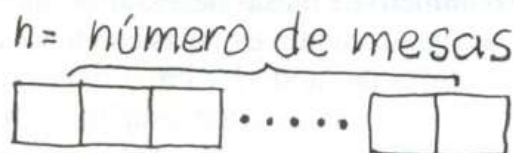


Fig. 2

*C:* Colocando nossa incógnita na figura, estamos fazendo com que ela expresse mais partes do problema. Teria a figura sugerido um plano de solução para alguém?

*Terry:* Sim, você pode simplesmente contar quantas pessoas ficam de cada lado. Assim, serão necessárias quinze mesas.

Terry deu uma solução errada do problema. O professor agora quer levar os alunos a perceber que o número de mesas ainda pode ser reduzido.

*P:* Terry, mostre-nos na figura como você conta as pessoas. (*Terry desenha a figura 3 e conta em voz alta conforme numera os lugares.*)

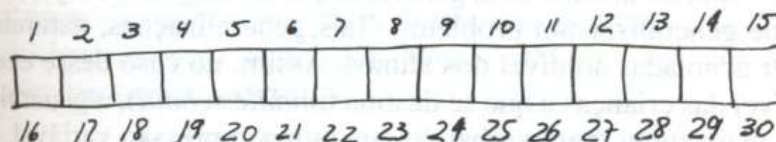


Fig. 3

*C:* Ah! Aparentemente resolvemos o problema. Voltemos para nos certificar de que nossa solução está correta e para ver se poderíamos ter obtido a solução de outro modo.

*P:* Assim, você diz que precisarei de quinze mesas. Esse é o menor número que eu poderia usar?

*Lynn:* Não há ninguém sentado nas extremidades. Poderíamos colocar duas pessoas lá. Mas então não precisaríamos de tantas mesas.

*P:* Precisaríamos de quantas?

*Mike:* Precisaríamos de apenas catorze mesas, porque podemos tirar uma mesa e colocar aquelas duas pessoas nas extremidades, assim. (*Ele triunfantemente apaga uma mesa da figura 3 e renumera-a, conforme mostra a figura 4.*)

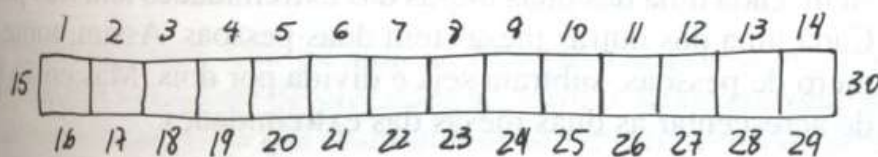


Fig. 4

*P:* Parece que conferir nossa primeira solução foi uma boa idéia. Não tínhamos resolvido o problema corretamente na primeira vez. Mas é certo que agora obtivemos o número mínimo de mesas?

*Terry:* Sim, porque não há mais lugares vazios.

C: Assim, conferimos e corrigimos nossa solução do problema. Mas, certamente, não há nada de particular em termos considerado trinta pessoas!

P: E se eu tivesse convidado 42 pessoas? Ou 100 pessoas? Ou 500 pessoas? Certamente teríamos de desenhar uma batelada de quadradinhos!

O professor está começando a usar o problema para gerar um novo problema, especificamente uma generalização do original. Polya raramente deixa de generalizar um problema. Tais generalizações, naturalmente, devem ser adaptadas ao nível dos alunos. Assim, no caso desse exemplo, dado o nível das crianças a que se destina (*middle school*), a generalização se traduz mais numa regra verbal do que numa expressão variável.

*Pete*: Vamos simplesmente repetir o que já fizemos: esboçar um desenho errado e depois apagar uma mesa para corrigi-lo.

P: Você pode expressar isso em alguma forma de regra ou processo?

*Pete*: Ummm... bem, primeiro você toma o número de pessoas e divide por 2. Depois, simplesmente apaga uma mesa.

*Lynn*: Apagar uma mesa seria exatamente como subtrair uma.

P: Então vamos escrever nossa regra sob a primeira figura, aquela que mostra a incógnita. “Dividir o número de pessoas por 2 e subtrair 1.” Vamos conferir isso para trinta pessoas:  $30 : 2 = 15$  e  $15 - 1 = 14$  mesas.

*Jan*: Eu ia escrever a regra de modo diferente.

P: Vamos ouvir Jan! Isso também pode funcionar.

*Jan*: Bem, cada uma das duas mesas das extremidades tem três pessoas. Cada uma das outras mesas tem duas pessoas. Assim, tome o número de pessoas, subtraia seis e divida por dois. Mas então temos de acrescentar as duas mesas das extremidades.

P: (*Sinceramente surpreso.*) Isso é muito bom! Eu não tinha pensado em fazer dessa maneira. Vamos testar para o nosso caso, em que são 30 as pessoas:  $30 - 6 = 24$ ; então  $24 : 2 = 12$  mesas que têm duas pessoas cada; essas 12 mesas + 2 mesas das extremidades = 14 mesas. Isso funciona! (*Ele escreve a regra no quadro-negro e a intitula: “Regra de Jan”.*)

Freqüentemente os alunos resolvem um problema de uma maneira nova para você. Tal experiência ajuda a ampliar seu próprio estoque de estratégias e soluções e precisa ser lembrada de alguma forma. Polya às vezes sugere a manutenção de um diário de experiências em resolução de problemas. Isso posto, poder-se-ia transformar tal diário num arquivo de problemas com fichas de 3" x 5" ou 5" x 8", com observações de ensino na frente e soluções diversas. A solução de Jan, por exemplo, poderia ser acrescida no verso da ficha pertinente.

C: Assim, já registramos duas regras que parecem funcionar para qualquer número de pessoas. Vamos conferir e ver se elas funcionam para outros números.

*(O professor e a classe conferem as regras para vários números, como 42, 8 e 4.)*

Polya não abandonaria o problema nesse ponto; continuaria a explorá-lo para discutir as estratégias e os métodos usados e para criar problemas relacionados, modificando porém as condicionantes. Eis alguns problemas que ele poderia criar a partir desse primeiro exemplo: Poderia eu dispor as mesas em U ou L, ou de alguma forma semelhante (mas mantendo-as unidas), e assim reduzir o número de mesas? Se eu decidisse fazer duas fileiras de mesas, em vez de uma fileira longa, de quantas mesas precisaria? E se eu fizesse três fileiras? Qual o número mínimo de mesas de que iria necessitar, independentemente de como as dispusesse? Qual é o menor número de mesas de que eu iria precisar se não quisesse deixar nenhum lado vazio? Se eu tivesse um número ímpar de pessoas, como a solução original poderia se alterar? O que aconteceria às respostas dos problemas mencionados se eu tivesse um número ímpar de pessoas?

Esses questionamentos mencionados são possibilidades de explorar ainda mais o problema. No entanto, cabe ao professor saber o momento de parar ou não de trabalhar sobre um determinado problema, e quais questionamentos são relevantes para aprendizagem dos alunos.

## **2º encontro => Resolução de problemas com e sem números (individualmente).**

Enfatizar o uso das fases de resolução sugeridas por Polya e, posteriormente, socializar as diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

- 1) (PIBID) Numa certa povoação africana vivem 800 mulheres, 3% das quais usam apenas um brinco. Das demais, a metade usa dois brincos e a outra metade, nenhum. Qual é o número total de brincos dessa povoação?
- 2) (BARROS, 2003, p. 42) Pedro e Maria formam um estranho casal. Pedro mente às quartas, quintas e sextas-feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Maria mente aos domingos,

segundas e terças feiras, dizendo a verdade no resto da semana. Certo dia, ambos dizem: “Amanhã é dia de mentir”. Em que dia da semana foi feita essa afirmação?

1) (Adaptado de LEBLANC et.al., 1997, p. 150) Havia 8 pessoas numa família. Se cada pessoa apertou a mão de todas as outras, quantos apertos de mão houve no total?

Sugiro que caso não aparecerem diferentes estratégias de resolução que se instigue as três maneiras de resolver, citadas por Leblanc (1997): esboçando um diagrama, encenando o problema, fazendo uma lista. Em conformidade segue:

*Estratégias:*

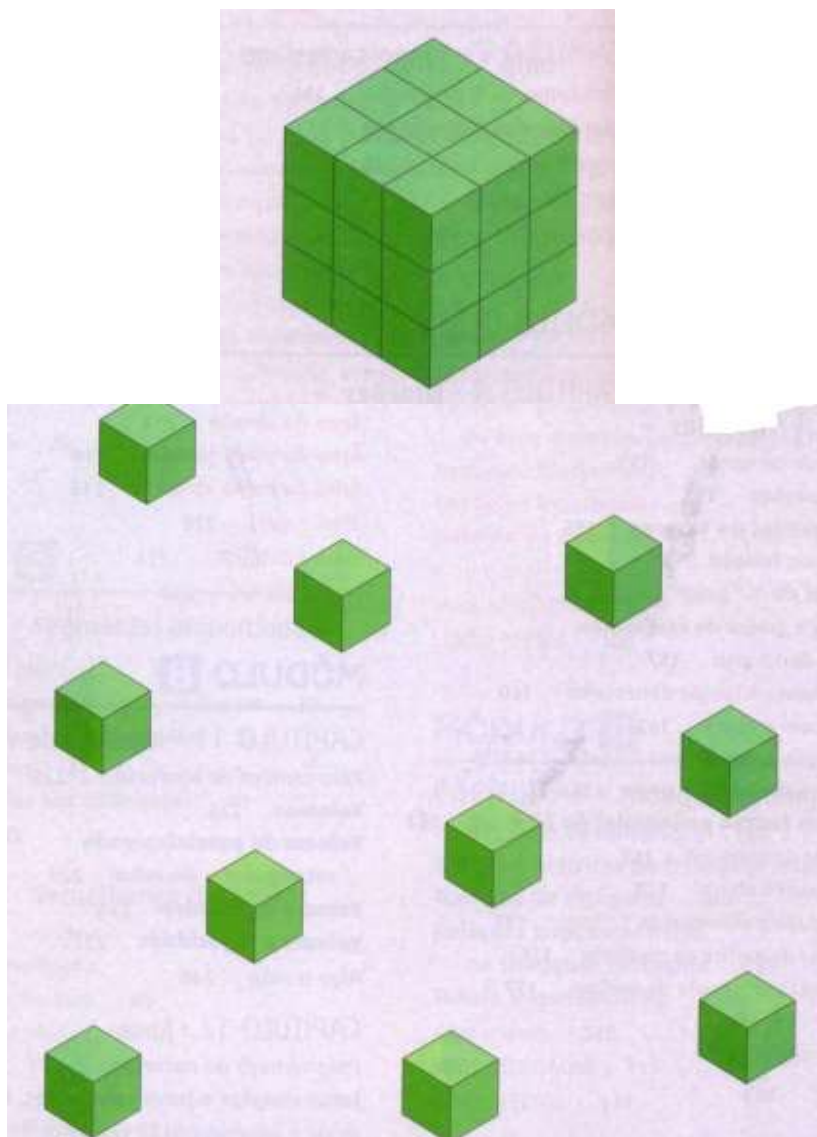
1. Esboçando um diagrama

2. Encenando o problema  
Algumas crianças poderiam optar por fazer com que as oito pessoas trocassem apertos de mão entre si e ir fazendo a contagem à medida que isso fosse acontecendo.

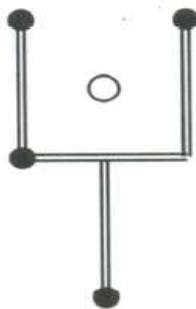
3. Fazendo uma lista  
Outras crianças poderiam dar nomes às oito pessoas e relacionar os apertos de mão; por exemplo:

<u>Steve</u>	<u>Diane</u>	<u>Jeff</u>	<u>Eric</u>	<u>Mary</u>	<u>José</u>	<u>Sally</u>	<u>Susan</u>
Diane	Jeff	Eric	Mary	José	Sally	Susan	
Jeff	Eric	Mary	José	Sally	Susan		
Eric	Mary	José	Sally	Susan			
Mary	José	Sally	Susan				
José	Sally	Susan					
Sally	Susan						
Susan							

2) (Adaptado de RIBEIRO, 2006, p. 8) Para montar o cubo maior, foram utilizados 27 cubinhos iguais aos representados na imagem.



- a) Com os cubinhos que sobraram é possível montar outro cubo?
  - b) Quantos cubinhos serão utilizados para montá-lo?
  - c) Se cada superfície lateral desse cubo tem  $4900 \text{ cm}^2$ , qual a medida do lado da superfície desse cubo?
  - d) Se o cubo tiver ao todo  $125 \text{ cm}^3$  de volume, qual será a medida da aresta desse cubo?
- 3) (Mathema) Quantos cubos de  $1 \text{ cm}^3$  cabem dentro da sua sala de aula?
  - 4) (BARROS, 2003, p.49) A figura abaixo representa uma cereja dentro de uma taça formada por quatro palitos de fósforo. Altere a posição de apenas dois palitos, de modo a continuar com uma taça do mesmo tamanho, porém, com a cereja fora dela.



3) (OBMEP) Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

- Adriano diz: “Bruno é uma preguiça”.
- Bruno diz: “Carlos é um tamanduá”.
- Carlos diz: “Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais”.
- Daniel diz: “Adriano é uma preguiça”.

Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

### 3º encontro => Problemas sem perguntas e perguntas sem enunciado.

Dar aos alunos apenas a situação inicial do problema e pedir para que criem as perguntas e as resolvam. Socializar as perguntas com os colegas para que percebam que um problema permite diversas perguntas, valorizando a criatividade de todos.

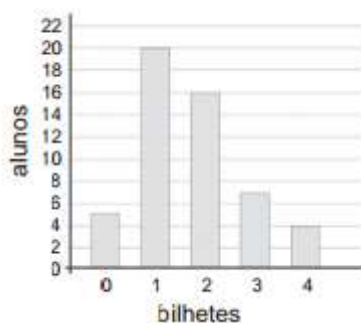
1) (Adaptado de PIBID) Uma escola decidiu organizar uma excursão a Angra do Reis, RJ. Inscreveram-se 140 alunos, que serão acompanhados por 10 professores. A viagem vai ser feita de ônibus. Cada ônibus tem capacidade para 41 passageiros e cobra R\$ 3500,00 para fazer a viagem. (...) ?

2) (Adaptado de PIBID) Uma florista colheu 49 kg de flores do campo. O quilograma das flores pode ser vendido imediatamente a R\$ 1,25 ou, mais tarde, com as flores desidratadas, a R\$ 3,25. O processo de desidratação faz as flores perderem  $\frac{5}{7}$  de seu peso. (...) ?

3) (Adaptado de OBMEP) A turma do Carlos organizou uma rifa. O gráfico mostra quanto alunos compraram um mesmo número de bilhetes; por exemplo, sete alunos compraram três bilhetes cada um. (...) ?



- A) 56
- B) 68
- C) 71
- D) 89
- E) 100



Disponibilizar aos alunos apenas a pergunta e deixá-los elaborarem o contexto inicial do problema.

- 4) Se o número da casa de Pedro é 317, qual é o número da casa de Bruna?
- 5) O valor pago foi R\$ 215,75, qual o total de horas que o veículo ficou no guincho?

#### 4º encontro => Formulação de problemas a partir de uma imagem

Levar revistas e jornais de recorte para aula e pedir que cada aluno escolha uma imagem, recorte-a para ser colada no caderno. Em seguida vem a análise e a interpretação da imagem que servirá para a construção de uma história.

Exemplo:

Figura 1- exemplo de recorte.



Fonte: <http://br.stockfresh.com/image/525334/energetic-people>

Em seguida, pede-se que alguns alunos mostrem suas imagens para interpretá-las matematicamente, com o coletivo de alunos.

- Há mais mulheres ou homens?

- Quem conseguiu pular mais alto?
- Qual o ângulo formado entre as pernas das pessoas?

Após discussão em grande grupo de algumas imagens, o professor solicita aos alunos que transformem sua história em um problema, elaborando perguntas criativas. Esses problemas devem ser resolvidos e depois serem trocados entre os colegas para sua resolução que posteriormente, podem ser socializadas no grande grupo. O professor auxilia os alunos nesta construção, apontando alternativas e estimulando-os a serem criativos.

### **5º encontro => Resolução de problemas em grupo, com excesso de dados, insuficiência de dados e perguntas de negação.**

#### **Excesso de dados.**

1) (Adaptado de OBMEP) Em uma pet-shop inaugurado em 2013, existem 5 gaiolas de diferentes tamanhos dispostas uma ao lado da outra, sendo que a maior tem  $1\text{m}^2$  e a menor tem  $300\text{cm}^2$ . Em cada uma destas gaiolas, será colocado apenas um dos seguintes animais: 1 cachorro, 1 gato, 1 rato, 1 periquito e, 1 canário. De quantas maneiras diferentes poderá ser feita a distribuição destes animais nas gaiolas, de modo que os pássaros fiquem em gaiolas vizinhas?

2) (BUSCHAW et al., 1997, p. 26. ) Deve-se servir pão, fresco e quentinho, no lanche das 2h da tarde. Cada pão é comercializado por R\$ 0,60 e deve ter um tamanho padrão, pesando em torno de 100g. A massa básica necessita de 12h de “tratamento” (descanso para fermentar) e, depois de misturada e amassada, duas horas e meia para crescer. Após ser modelada em forma de pão, a massa ainda deverá ser posta a crescer por mais uma hora e meia, sendo assada a seguir por 45 minutos. A que horas se deveria começar o trabalho para poder retirá-lo do forno exatamente 15 minutos antes de servi-lo? Admita que se gaste um total de 30 minutos para misturar, amassar e modelar a massa dos pães.

#### **Perguntas de “negação”.**

3) (OBMEP) Ana, Bernardo, Célia e Danilo repararam que Danilo é mais alto que Célia e que a diferença entre as alturas de Célia e Ana é igual à diferença entre as alturas de Ana e Danilo. Observaram também que a soma das alturas dos dois rapazes é igual à soma das alturas das duas garotas. Quais das alternativas a seguir são falsas?

- a) Célia é mais alta que Ana.

- b) A diferença entre as alturas dos meninos é igual à diferença entre as alturas das meninas.
- c) Célia é a mais baixa do grupo.
- d) A diferença entre as alturas de Danilo e Célia é igual à diferença entre as alturas de Ana e Bernardo.
- e) Ana é a mais alta de todos.
- 4) (OBMEP) Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2, e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, quantos meninos há nessa classe?

### **Insuficiência de dados.**

5) (Adaptado do ENEM, 2012, p. 20) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente o remédio a seu filho a cada 8 horas, então responda: Qual a massa corporal dele?

Obs. Deixar que os alunos percebam por si só, a falta de um dado nessa questão para que possa ser resolvida. Posteriormente, mencionar que a mãe dava 30 gotas a cada 8 horas para ver se os alunos conseguem resolver o problema.

### **6º encontro => Formulação de problemas a partir de uma resposta, uma operação e anúncio de classificado ou propaganda.**

Neste encontro os problemas elaborados devem ser socializados, e o professor junto aos alunos deve verificar se estes apresentam coerência, erros de português e sugerir possíveis alterações para os alunos perceberem aspectos que podem ser melhorados, tornando o problema mais claro de ser interpretado por quem irá resolvê-lo.

#### **- uma resposta.**

- 1) (Adaptado de BARROS, 2003) O preço de uma dúzia de laranjas mais uma dúzia de bananas é igual ao preço de três melancias.
- 2) (Adaptado de BARROS, 2003) O maior número possível de lavagens completas é 23 e, neste caso, o número de lavagens simples é 3, o que dá um total de 26 clientes atendidos.
- 3) (Adaptado de BARROS, 2003) Portanto, os vestidos de Ana, Julia e Marisa eram, respectivamente, branco, azul e preto.

#### **- uma operação.**

$$5.3 + 42 = 57$$

$$15.x + 21 = 381$$

$$570 - 23 = 547$$

- um anúncio de classificados e propagandas.

Por exemplo:



Tenis Indoor Masculino Hyper Touch Umbro -  
0010130 - Preto/Branco/Pink

A Partir de: **R\$ 119,90**  
ou 10x Sem juros de R\$ 11,99



Tenis Running Feminino Adidas Cosmos W  
Ref. G41732

Por: **R\$ 299,90**  
ou 10x Sem juros de R\$ 29,99

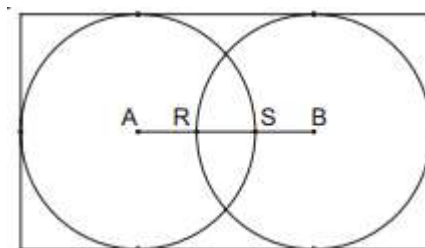


### 7º encontro => Resolução de problemas

1) (*site: oqueeoquee*) A sequência de palavras abaixo segue uma determinada regra:  
Camiseta, acetona, macaco, abacaxi, mágico. Qual é a próxima palavra da sequência?

- a) cavalo
- b) azeite
- c) maionese
- d) basquete
- e) publicação

2) (OBMEP) Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?



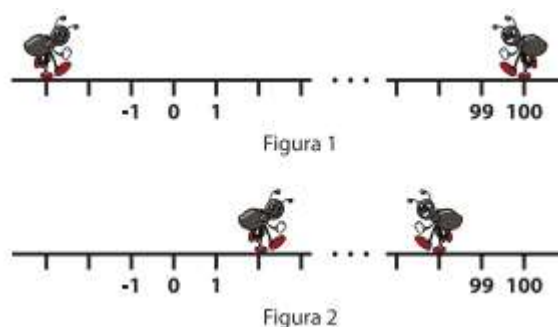
3) (RIBEIRO, 2006, p. 241) Quando as notas de R\$ 1,00 saíram de circulação no mercado, Camila guardou algumas de recordação. Um dia, fez duas pilhas de dinheiro, misturando notas de R\$ 1,00 e R\$ 2,00. Em cada um dos montes a seguir tem certa quantia em reais. Se for retirado R\$ 1,00 do monte A e colocado no monte B, os dois montes ficarão com a mesma quantia. Contudo, se for retirado R\$ 1,00 do monte B e colocado no monte A, um fica com o dobro da quantia do outro. Quantos reais tem em cada um dos montes?



4) (OBMEP) As colegas de sala Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R\$43,00 e Aurora com R\$68,00. Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora?



5) (OBMEP) Duas formigas caminham uma ao encontro da outra sobre a reta numerada. Cada uma delas caminha com velocidade constante. Em um certo instante, elas estavam sobre os pontos indicados na figura 1 e, exatamente um segundo depois, estavam nos pontos indicados na figura 2. Entre quais pontos elas vão se encontrar?



6) (adaptado OBMEP) A estrada que passa pelas cidade de Quixajuba e Paraqui tem 450 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada há uma placa indicando Quixajuba a 92 Km. No quilômetro 290 há uma placa indicando Paraqui a 87 km. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraqui?



**8º encontro => Construção de um quadro de dados e formulação de problemas.**

Atividade 1 (Adaptado de CARVALHO, 2012, p. 39 e 40)

- ⇒ Essa atividade deve ser realizada em grupos;
- ⇒ Os grupos recebem uma folha com um quadro a ser preenchido e colado no caderno e esse mesmo é desenhado na lousa.
- ⇒ Os alunos ditam seus dados para completar o quadro. Conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Organização de dados.

Personagens	Objetos	Quantidades	Situações	Perguntas
João, Maria	Blusa	Cinco/dezenove	Comprou/tinha	Quantas ficou?

Luiza, Pedro	Balas	1 dúzia	Terminou/perdeu	Com quantos pontos começou?
Rafaela, Camila	Pontos	R\$ 18,35	Recebeu/ deu	Quantos pontos perdeu?

- ⇒ Depois do preenchimento do quadro, cada grupo, a partir dos dados, formula um problema.
- ⇒ O grupo que terminar a formulação primeiro deve avisar aos colegas e ditá-la para os demais copiarem e resolverem.
- ⇒ O professor confere se o problema construído contempla os dados do Quadro 1.
- ⇒ O primeiro grupo que terminar de resolvê-lo avisa a todos e vai à lousa mostrar sua resolução.
- ⇒ O grupo que havia formulado o problema deve comentar a resolução apresentada e dizer se está satisfeito com a resposta. Caso contrário, deve explicar como deveria ser a resolução.
- ⇒ Terminada a discussão entre os grupos, inicia nova rodada buscando participação de todos.

### **9º encontro => Resolução de problemas.**

O primeiro problema vem acompanhado de uma resolução errada. Os alunos deverão encontrar o erro e propor uma solução adequada considerando que os demais problemas deverão ser resolvidos pelos alunos.

#### **Erro na resolução.**

1) (Adaptado de BARROS, 2003, p. 21) Três amigos foram jantar num restaurante. Como a conta ficou em R\$ 30,00, cada um deu R\$ 10,00. Quando o garçom levou o dinheiro até o caixa, o dono do restaurante, para ser gentil com os clientes, resolveu lhes dar um desconto de R\$ 5,00. O garçom devolveu a eles, portanto, cinco moedas de R\$1,00.

Ao receber o troco, os amigos decidiram dar R\$ 2,00 de gorjeta ao garçom, e cada um pegou R\$ 1,00 de volta.

Ao final, um deles disse:

- Vejam que coisa estranha. Cada um de nós deu uma nota de R\$ 10,00 e recebeu R\$ 1,00 de volta, ou seja, cada um de nós gastou R\$ 9,00. Portanto nós três juntos gastamos R\$ 27,00. Além disso, demos R\$ R\$ 2,00 ao garçom.

Em seguida, o rapaz, um tanto intrigado, rascunhou o seguinte demonstrativo no guardanapo:

Juntos gastamos: R\$ 27,00

Demos ao garçom: R\$ 2,00

Total: R\$ 29,00

E, bastante confuso com a situação, perguntou aos seus amigos:

- Onde foi parar o outro R\$ 1,00?

Sendo você um dos amigos, explique qual é o problema no raciocínio do rapaz, e explique a ele, uma maneira de resolver esse problema.

### Problemas

2) (PIBID) João precisa transportar sacos, e para isso ele dispõe de burros. Se ele transportar 2 sacos em cada burro, sobram 13 sacos. Se ele transportar 3 sacos em cada burro, ficam 3 burros desocupados. Qual o número total de sacos que João deve transportar?



3) (BUSCHAW, 1997, p. 31) Uma folha de papel padrão tem, nos Estados Unidos,  $8\frac{1}{2}$  x 11.

Um aluno que cursa espanhol deseja fazer fichas, cortando as folhas verticalmente em 4 tiras da mesma largura e cortando então cada tira em peças de 1 de altura.

a) Que largura terá cada ficha?

b) Quantas folhas deverão ser utilizadas para se obterem pelo menos 200 fichas?

4) (OBMEP) Cada quadrinho na figura deve ser preenchido com um sinal de adição (+) ou de multiplicação (x). Qual é o maior valor possível da expressão obtida depois de preenchidos todos os quadrinhos?

$$2 \square 3 \square 0 \square 8 \square 9 \square 1$$



5) (OBMEP) Dois alunos resolvem, cada um por si, um certo problema. Eles anotaram o tempo gasto na resolução. A soma dos dois tempos é 15, e o produto, 36. Calcule o tempo de cada um.

6) (OBMEP) Há alunos em 3 comissões de certa escola. A Comissão de Relações Públicas, 26, e a Comissão de Serviços, 29. 14 alunos pertencem simultaneamente às Comissões Social e de Relações Públicas, 12 às Comissões Social e de Serviços. Nenhum está nas 3 comissões. Quantos alunos diferentes estão nessas comissões?

### **10º encontro => Resolução de problemas**

1) (PIBID) Seu João dono da quitanda, contou para Luciana que recebeu hoje uma remessa de 5 caixas contendo 12 dúzias de ovos cada uma, e que havia pago R\$ 30,00 a caixa. Do total recebido, 120 ovos se quebraram. Por quanto seu João deve vender cada dúzia dos ovos restantes, se ele desejar ter um lucro total igual ao preço de custo?

2) (PIBID) Na volta da pescaria, Pedro disse para Carlos “Se você me der um de seus peixes, eu ficarei com o dobro do número de peixes com que você vai ficar”. Carlos respondeu: “E se, em vez disso, eu jogar um dos seus peixes no rio, ficaremos com o mesmo número”. Quantos peixes eles pescaram ao todo?

3) (PIBID) Um manuscrito antigo do “Pirata Barba Negra” indica que, numa certa ilha do Caribe, há um tesouro enterrado e dá as seguintes dicas da sua localização: Quando se desembarca na ilha, vêem-se duas grandes árvores, que chamarei de A e B. Para localizar o tesouro, caminhe de A para B, contando os passos. Ao chegar em B, vire à direita e caminhe metade do que andou de A para B. Daí caminhe na direção de A, contando os passos. Chegando em A, caminhe, na direção contrária a B, o total de passos que já andou. Nesse ponto X enterrei o tesouro. Se a ilha é plana e a distância entre as duas árvores é de 10m, então a distância de A para X é igual a?

4) (PIBID) Dois casais foram ao centro de convivência de uma Universidade para lanchar. O primeiro casal pagou R\$13,00 por duas latas de refrigerantes e uma porção de batatas fritas. O segundo casal pagou R\$ 22,50 por três latas de refrigerantes e duas batatas fritas. Sendo assim, qual será a diferença entre o preço de uma lata de refrigerante e o preço de uma porção de batatas fritas, nesse local e nesse dia?

5) (PIBID) Um caixa automático de um banco possui notas de 2, 5, 10 e 50 reais para operações de saque e está programado para disponibilizar sempre o menor número possível de

notas para o sacador. Nestas condições, uma pessoa que faz um saque de R\$ 299,00 implicará um total de quantas notas?

6) (OBMEP) João tem duas caixas com o mesmo número de bolas. As bolas podem ser azuis, pesando cinco quilos cada uma, ou amarelas, pesando dois quilos cada uma. Na primeira caixa,  $\frac{1}{15}$  das bolas são azuis. O peso total das bolas da segunda caixa é o dobro do peso total das bolas da primeira caixa. Qual é a fração de bolas azuis na segunda caixa?

7) (OBMEP) Seis crianças fizeram uma roda e cada uma, em voz baixa, falou seu número favorito para seus dois vizinhos. Em seguida, cada criança disse em voz alta a soma dos dois números que ouviu; a figura mostra o que Afonso, Camila e Eduardo disseram em voz alta. Qual é o número favorito de Fátima?



8) (OBMEP) Uma fábrica produz, a cada minuto, um litro de tinta branca e meio litro de tinta roxa. Para fazer oito litros de tinta lilás são necessários cinco litros de tinta branca e três litros de tinta roxa. De quanto tempo a fábrica precisa para produzir tinta suficiente para fazer 600 litros de tinta lilás?

9) (DEGUIRE, 1997) Os Yankees estão em primeiro lugar no campeonato, e os Red Sox em quinto, enquanto os Orioles estão a meio caminho dos dois primeiros. Se os Indians estão à frente dos Red Sox e os Tigers estão imediatamente atrás dos Orioles, dê o nome do time que está em segundo lugar.

10) (DEGUIRE, 1997) Alguns livros de cores diferentes estão empilhados numa das prateleiras de uma biblioteca. O verde está imediatamente abaixo do amarelo e acima do azul. O livro vermelho está acima do marrom, mas não encostado nele. O livro marrom está imediatamente abaixo do livro verde. Desses cinco livros, qual está no topo?

11) (BARROS, 2003) O ano 2002 é palíndromo, ou seja, continua o mesmo se lido da direita para a esquerda.

a) Depois de 2002, quais serão os próximos quatro anos palíndromos?

b) O último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?

12) (BARROS, 2003) De quantos modos se pode colocar na tabela abaixo duas letras, A, duas letras B e duas letras C, uma em cada casa, de modo que não haja duas letras iguais na mesma coluna?


13) (BARROS, 2003) Para fazer 12 bolinhos, preciso exatamente de 100g de açúcar, 50g de manteiga, meio litro de leite e 400g de farinha. Qual é a maior quantidade desses bolinhos que serei capaz de fazer com 500g de açúcar, 300g de manteiga, 4 litros de leite e 5 quilogramas de farinha?

14) (BARROS, 2003) Um fabricante de brinquedos embala bolas de pingue-pongue em dois tipos de caixas. Num dos tipos ele coloca 10 bolas e no outro coloca 24 bolas. Num certo dia foram embaladas 198 bolas e usadas mais de 10 caixas. Quantas caixas foram feitas nesse dia?

### Respostas dos problemas.

#### 2º encontro:

- 1) 800 brincos.
- 2) Terça feira.
- 3) 28 pessoas.
- 4) a) Sim; b) 8; c) 70 cm; d) 5cm.
- 5) Depende do tamanho da sala.
- 6) Empurre o palito horizontal para direita, e mova o palito superior esquerdo para parte inferior direita.
- 7) Três (Bruno, Carlos e Daniel).

#### 5º encontro:

- 1) 48 possibilidades.

- 2) 8h30min da noite que precede o lanche.
- 3) a, b, c, e.
- 4) 11 meninos.
- 5) Inicialmente não tem como resolver o problema. Depois de inserir o dado que faltava, a resposta será 12kg.

**7º encontro:**

- 1) e – publicação.
- 2) 22 cm.
- 3) A=7 reais e B= 5 reais.
- 4) Para Ana R\$ 6,00 e para Aurora R\$ 31,00.
- 5) 70 e 71
- 6) 215 km.

**9º encontro:**

- 1) Dono do restaurante R\$ 25,00, garçom R\$ 2,00, cada amigo R\$ 1,00 totalizando R\$ 3,00. Somando dá R\$ 30,00.
- 2) 57 sacos.
- 3) a)  $2\frac{1}{8}$  ou 2,125”      b) 5 folhas.
- 4)  $2 \times 3 + 0 + 8 \times 9 + 1 = 79$ .
- 5) 3 e 12.
- 6) 50 alunos.

**10º encontro:**

- 1) R\$ 6,00 a dúzia.
- 2) Ao todo 9 peixes.
- 3) 26,18 metros.
- 4) A diferença é de R\$ 2,50.
- 5) 12 notas.
- 6)  $\frac{12}{15}$ .
- 7) Seis.
- 8) 450 min. ou 7h30min.
- 9) Indians.

- 10) Vermelho.  
 11) a) 2112, 2222, 2332, 2442.  
     b) 3003.  
 12) 48 modos.  
 13) 60 bolinhos.  
 14) 17 caixas.

### Referencias utilizadas para elaboração do material

BARROS, D. M. de. **Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos**. Araçatuba, SP: Novas Conquistas São Paulo Editora, 2003.

BUSCHAW, D.; BELL, M.; POLLAK, H. O.; THOMPSON, M.; USISKIN, Z. **Aplicações da matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?! : estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula**. 5 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

CAVALCANTI, C. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 121 -149.

DANTE, L.R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DEGUIRE, L. J. Polya visita a sala de aula. In: Krulik, S. (org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 99 - 113.

LEBLANC, J. F.; Proundfit, L.; PUTT, I. J. Ensinando resolução de problemas na *elementary school*. In: Krulik, S. (org.). **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 148 - 164.

MUSSER, G. L.; SHAUGHNESSY, J. M. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.) **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução de Domingues, H. H.; Corbo, O. São Paulo: Atual, 1997. p. 188 - 201.

ONUCHIC, L. de La R. Ensino - Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO Maria A. V. (org.) **Pesquisa em educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199 - 218.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

RIBEIRO, J.; SOARES, E. **Construindo consciências: matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Sipione, 2006.

*Sites consultados*

<http://pibidmatematicaceab.blogspot.com.br/p/matematica-recreativa.html>. Acesso em 28 dez. 2013.

<http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em 06 jan. 2014.

<http://www.oqueeoquee.com/jogos-de-logica>. Acesso em 06 jan. 2014.

[http://www.mathema.com.br/default.asp?url=http://www.mathema.com.br/reflexoes/ap\\_ler\\_p rob.html](http://www.mathema.com.br/default.asp?url=http://www.mathema.com.br/reflexoes/ap_ler_p rob.html). Acesso em 18 jan.2013.