# OPERÁCIÓKUTATÁS PÉLDATÁR

**Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat**

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

MTA-ELTE

Egerváry Kutatócsoport

# OPERÁCIÓKUTATÁS PÉLDATÁR

**Eötvös Loránd Tudományegyetem**
**Természettudományi Kar**

**Typotex**

**2013**

Szerkesztő: Bérczi Kristóf, Frank András, Kaszanitzky Viktória,
Király Csaba, Király Tamás, Kovács Erika Renáta, Pap Gyula, Pap Júlia

Lektorálta: Tóth Ágnes



ISBN 978 963 279 233 0
Készült a Typotex Kiadó (http://www.typotex.hu) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Könyv Művek Bt.

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: Operációkutatás, lineáris programozás, algoritmus, folyam, áram, párosítás, legrövidebb utak, potenciál, Farkas-lemma, dualitás tétel, TU mátrix, konvex optimalizálás.

ÖSSZEFOGLALÁS: Az Operációkutatási példatár az Operációkutatás jegyzet témáihoz kapcsolódó feladatok rendszerezett gyűjteménye. A feladatok legtöbbjéhez segítség vagy megoldás is tartozik, a feladatok közti kapcsolatok megértését pedig tárgymutató és hiperhivatkozások segítik. A példatár célja kettős: egyrészt elősegíti a diákok számára a tananyag elsajátítását, másrészt kitér olyan, a tananyagon túlmutató kérdésekre is, amik a legjobb diákok érdeklődését hivatottak felkelteni. A példatár a következő témakörökből tartalmaz feladatokat: Bevezető kombinatorikai feladatok, Optimális utak, Párosítások, Áramok és folyamok, Lineáris algebra és poliéderek, Lineáris programozás és alkalmazásai, Teljesen unimoduláris mátrixok és alkalmazásaik, Egészértékű programozás, Konvex programozás.

# Tartalomjegyzék

# Bevezető

A Példatár az ELTE matematikus és alkalmazott matematikus szak másodéves Operációkutatás tárgyának oktatása során összegyűjtött feladatokat tartalmazza. Szeretnénk köszönetet mondani Bernáth Attilának, Fekete Zsoltnak, Jüttner Alpárnak, Makai Mártonnak, Szabó Jácintnak, Szegő Lászlónak, Végh Lászlónak, és mindenki másnak, aki akár gyakorlatvezetőként, akár az EGRES csoport tagjaként részt vett a feladatok gyűjtésében és kiötlésében. Külön köszönet Maróti Gábornak, aki annak idején a feladatgyűjtemény első változatát összeállította és gondozta; az ő munkája alapozta meg a mostani példatárat.

Budapest, 2013. január.

A szerkesztők: *Bérczi Kristóf*, *Frank András*, *Kaszanitzky Viktória*, *Király Csaba*, *Király Tamás*, *Kovács Erika Renáta*, *Pap Gyula*, *Pap Júlia*

# Jelölések

- ✐: könnyű példa, *: nehéz példa, **: kegyetlen nehéz példa.
- $\mathbb{R}_+$ jelöli a nemnegatív valós számok halmazát, $\mathbb{Z}_+$ a nemnegatív egész számokét.
- Egy $n \in \mathbb{Z}_+$ számra $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.
- A „0” jelenthet számot is és nullvektort is; az azonosan 1 vektor jelölése $\mathbf{1}$.
- Vektorok szövegkörnyezettől függően lehetnek sor- vagy oszlopvektorok.
- $\chi_S$ az $S$ halmaz karakterisztikus vektora (másnéven incidencia-vektora).
- Az $A$ mátrix sorait ill. oszlopait rendszerint ${}_ia$ ill. $a_j$ jelöli.
- Az $x$, $y$ vektorokra:
  - $x \leq y$, ha $x_i \leq y_i$ minden koordinátában;
  - $x < y$, ha $x \leq y$ és $x \neq y$;
  - $x \ll y$, ha $x_i < y_i$ minden koordinátában.
- Egy irányítatlan gráfban egy $v$ csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük
- Egy gráfban egy $v$ csúcs szomszédainak halmazát $N(v)$-vel jelöljük
- Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az $X \subseteq S$ és $Y \subseteq T$ halmazok szomszédainak halmazát $\Gamma(X)$-szel illetve $\Gamma(Y)$-nal jelöljük.
- $D = (V, A)$ irányított gráfban $U \subseteq V$ halmazra $\varrho_D(U)$ az $U$-ba belépő élek száma, $\delta_D(U)$ az $U$-ból kilépő élek száma. Ha nem okoz félreértést, a gráf jelét elhagyjuk; egy $v$ csúcs esetén $\varrho(v)$ ill. $\delta(v)$ a $v$-be belépő illetve $v$-ből kilépő élek száma.
- $D = (V, A)$ irányított gráfra, $x : A \to \mathbb{R}$ függvényre és $U \subseteq V$ halmazra

$$\begin{aligned}
\varrho_x(U) &= \sum\{x(a) : a \in A \text{ belép } U\text{-ba}\},\\
\delta_x(U) &= \sum\{x(a) : a \in A \text{ kilép } U\text{-ból}\},\\
i_x(U) &= \sum\{x(a) : a \in A \text{ mindkét végpontja } U\text{-ban van}\},\\
e_x(U) &= \sum\{x(a) : a \in A \text{ legalább egy végpontja } U\text{-ban van}\}.
\end{aligned}$$

- $G = (V, E)$ irányítatlan gráfra, $x : E \to \mathbb{R}$ függvényre és $U \subseteq V$ halmazra

$$\begin{aligned}
d_x(U) &= \sum\{x(e) : e \in E \text{ pontosan egy végpontja van } U\text{-ban}\},\\
i_x(U) &= \sum\{x(e) : e \in E \text{ mindkét végpontja } U\text{-ban van}\},\\
e_x(U) &= \sum\{x(e) : e \in E \text{ legalább egy végpontja } U\text{-ban van}\}.
\end{aligned}$$

- $G$ gráfra $G[U]$ az $U$ csúcshalmaz által feszített részgráf.
- Egy $S$ alaphalmaz $X$ és $Y$ részhalmazaira $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, a két halmaz szimmetrikus differenciája.

# I. rész

# Feladatok

# 1. fejezet

# Bevezető feladatok

## 1.1. Skatulya-elv

**1.** Bizonyítsuk be, hogy egy 100 fős társaságban mindig van legalább kilenc ember, aki ugyanabban a hónapban született! (Megoldás)

**2.** Az 1, 2,. . . , 2012 számok közül kiválasztottunk 1007-et. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, melyek összege osztható 2013-mal. (Megoldás)

**3.** Egy négyzet alakú 3x3-as táblázat minden mezőjébe beírjuk a 7,8,9 számok valamelyikét. Kitölthető-e a táblázat úgy, hogy minden sorban és oszlopban és a két átlóban is csupa különböző eredményt adjon a beírt számok összege? (Megoldás)

**4.** Egy sakktáblán elhelyezünk 33 bástyát. Igazoljuk, hogy ki lehet választani 5-öt úgy, hogy páronként nem ütik egymást! (Megoldás)

**5.*** Adott 100 (nem feltétlenül különböző) egész szám, $a_1, ..., a_{100}$. Mutassuk meg, hogy kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük osztható 100-zal! (Megoldás)

**6.*** Bejárható egy $7 \times 7$-es sakktábla egy lóval úgy, hogy ugyanarra a mezőre érünk vissza, ahonnan indultunk, és minden mezőt pontosan egyszer érintettünk? (Megoldás)

**7.*** Igazoljuk, hogy egy $nm + 1$ tagból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növő, vagy $m+1$ tagú monoton fogyó részsorozata! (Megoldás)

## 1.2. Alapozó feladatok

Egy irányítatlan $G$ gráfot **összefüggőnek** nevezünk, ha pontjainak bármely kétrészes partíciójára létezik él a partíciórészek között. Egy irányított $D$ gráf **erősen összefüggő**, ha pontjainak bármely kétrészes partíciójára mindkét irányban létezik él a partíciórészek között. A továbbiakban irányított gráfokra időnként a rövidebb **digráf** elnevezést használjuk.

Azt mondjuk, hogy a $G$ irányítatlan gráf $k$**-élösszefüggő**, ha bármely két pontja között létezik $k$ élidegen út. Ha $G$-nek legalább $k + 1$ pontja van, és bármely két pontja között létezik $k$ belsőleg pontidegen út, akkor $G$-t $k$**-pontösszefüggőnek**, vagy röviden $k$-összefüggőnek nevezzük.

Egy irányított $D$ gráf $k$**-élösszefüggő**, ha bármely két pontja között létezik mindkét irányban $k$ élidegen út, és $k$**-pontösszefüggő**, ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely két pontja között vezet mindkét irányban $k$ belsőleg pontidegen út.

**8.** Létezik-e gráf a következő fokszámokkal: 1,1,1,2,4,5,6,6,7? (Megoldás)

**9.** Legyen $G$ egy irányítatlan gráf. Igaz-e, hogy vagy $G$, vagy a komplementere biztosan összefüggő? (Megoldás)

**10.** Igazoljuk, hogy egy összefüggő gráfnak mindig létezik olyan pontja, melyet elhagyva a gráf összefüggő marad! (Megoldás)

**11.** Mutassuk meg, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráf minden pontjának foka legalább $n$, akkor a gráf összefüggő! (Megoldás)

**12.** Igazoljuk, hogy bármely, legalább öt pontú gráfban vagy a komplementerében van kör! (Megoldás)

**13.** Az alább felsorolt gráftulajdonságoknál tudunk-e könnyen ellenőrizhető bizonyítékot adni arra, hogy egy gráf rendelkezik az adott tulajdonsággal? És arra, hogy nem rendelkezik? Tudunk-e gyors algoritmust adni, ami ellenőrzi, hogy a gráf rendelkezik-e a tulajdonsággal?

a) A $G$ gráf összefüggő.

b) $D$ irányított gráf aciklikus.

c) $G$ gráfban van Hamilton-kör (azaz olyan kör, ami az összes csúcson átmegy).
d) $G$ gráf páros (azaz 2 színnel színezhető).
e) $G$ gráf háromszögmentes.
f) $D$ nemnegatív élköltséges irányított gráfban a legolcsóbb $s - t$ út legfeljebb $k$ hosszú ($k$ része az inputnak).
g) $D$ irányított gráfban a leghosszabb $s-t$ út legfeljebb $k$ hosszú ($k$ része az inputnak).

**14.** Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $k$ pozitív egész szám és egy $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Adjunk algoritmust, mely eldönti, hogy a gráf ponthalmaza partícionálható-e $k$ részre úgy, hogy a részek között menő minden él súlya legalább $\alpha$! (Megoldás)

**15.** Igazoljuk, hogy ha egy irányítatlan gráfban az $a$ és $b$ élek egy körön vannak, továbbá a $b$ és $c$ élek is egy körön vannak, akkor az $a$ és $c$ élek is egy körön vannak. (Megoldás)

**16.** Egy $D = (V, A)$ digráf minden élét megszíneztük piros és/vagy kék színnel úgy, hogy minden pontpárra legalább az egyik irányban vezet egyszínű út. Mutassuk meg, hogy létezik olyan pontja a digráfnak, ahonnan minden pontba vezet egyszínű út.

**17.*** Legyen $\mathcal{I}$ nem-elfajuló, kompakt intervallumok egy véges rendszere. Definiáljuk az $\mathcal{I}$ csúcshalmazú $G$ gráfot az alábbi módon: két intervallumot éllel kötünk össze, ha
a) van közös pontjuk;
b) diszjunktak;
c) egyik tartalmazza a másikat;
d) egyik sem tartalmazza a másikat. Igazoljuk, hogy $G$-nek egyik esetben sem lehet feszített részgráfja legalább 5 hosszú kör. Melyik esetben lehet a 4 hosszú kör feszített részgráf? (Megoldás)

**18.*** Egy $n \times n$-es négyzetrács minden mezője egy négyzet alakú telek. A telkek közül $n - 1$ darab gazos, és sajnos a gaz tovaterjed, ha egy telek oldalszomszédjai közül legalább kettő gazos, akkor ő is gazos lesz. Igazoljuk, hogy nem gyomosodhat el mind az $n^2$ telek. (Megoldás)

## 1.3. Fák, fenyők

Egy olyan irányított $F = (S, E)$ fát, amelynek minden pontja elérhető irányított úton az $s$ csúcsból, **$s$-fenyőnek** nevezünk. Egy $D$ digráfot **gyökeresen összefüggőnek** nevezünk, ha létezik olyan $v$ csúcsa, melyből minden pont elérhető irányított úton. **Fenyves** alatt pontdiszjunkt fenyők unióját értjük.

**19.** Hány mérkőzést játszanak egy $n$ résztvevős kieséses ping-pong versenyen? (Megoldás)

**20.** Hány összehasonlítással lehet megtalálni $n$ elem közül a legkisebbet? (Megoldás)

**21.** Egy $n$ pontú fában jelölje $B$ azon pontok halmazát, melyek foka legalább 2 (nem levelek). Igazoljuk, hogy ekkor $\sum_{v \in B} d(v) = n - 2 + |B|$.

**22.*** Adott egy $G$ gráf és az élein egy súlyozás, mely minden élhez különböző értéket rendel. Igazoljuk, hogy ekkor a legolcsóbb feszítőfa egyértelmű! (Megoldás)

**23.** Mutassuk meg, hogy egy irányított fa akkor és csak akkor $s$-fenyő, ha az $s$ csúcs befoka nulla, a többi csúcs befoka pedig egy.

**24.** Mutassuk meg, hogy egy $s$-et tartalmazó digráf akkor és csak akkor $s$-fenyő, ha az $s$ pontból kiindulva elő lehet úgy állítani irányított élek egyenkénti hozzávételével, hogy az aktuálisan hozzáadott él hegye új pont, míg a töve már meglévő.

**25.** Jelölje $S$ a $D = (V, A)$ digráfban azon csúcsok halmazát, amelyek az $s$ csúcsából elérhetők. Mutassuk meg, hogy $S$ minden valódi, $s$-et tartalmazó $S'$ részhalmazából vezet ki él, de $S$-ből nem. Igazoljuk továbbá, hogy létezik $S$-et feszítő $s$-fenyő.

**26.** Vegyünk egy irányítatlan gráfban egy $s$ gyökerű mélységi fát, irányítsuk az éleit $s$-től kifelé, a nem-fa éleket pedig $s$ felé. Igazoljuk, hogy ha a gráf 2-élösszefüggő, akkor az így kapott irányítás erősen összefüggő. (Megoldás)

**27.** Legyen $c$ a $D$ gyökeresen összefüggő digráf élhalmazán adott nemnegatív költségfüggvény, és legyen $C$ egy olyan irányított köre $D$-nek, amelynek minden éle 0 költségű. Mutassuk meg, hogy a $C$ összehúzásával keletkező

$D'$ digráfban a legolcsóbb $s$-gyökerű feszítő fenyő költsége ugyanannyi, mint $D$-ben. (Megoldás)

**28.** Készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy mikor lehet egy digráf éleinek egy adott $F$ részhalmazát $s$-gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni a gráf éleit használva. Fogalmazzuk meg a kiegészíthetőség szükséges és elegendő feltételét. (Megoldás)

**29.** Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráfban van $s$ gyökerű feszítő fenyő és $s$-be nem lép él. Igazoljuk, hogy a digráf egy $(V, B)$ fenyvese akkor és csak akkor egészíthető ki $s$ gyökerű feszítő fenyővé, ha nincsen olyan $Z \subseteq V - s$ részhalmaz, amelybe $B$-beli él nem lép be és minden $Z$-be lépő $uv \in A$ élre $v$-be lép $B$-beli él.

**30.** Legyen $c$ a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf élhalmazán egy költségfüggvény. Készítsünk polinomiális algoritmust, amely egy olyan $D' = (V, A')$ erősen összefüggő részgráfját adja $D$-nek, amelynek összköltsége legfeljebb kétszerese a legolcsóbb ilyen részgráf költségének. (A legolcsóbb erősen összefüggő részgráf meghatározása már az azonosan 1 költségre nézve is NP-teljes). (Megoldás)

**31.** Igazoljuk, hogy ha egy $n$ pontú digráfban van $n-1$ élidegen feszítő $s$-fenyő, akkor van tarka fenyő, azaz olyan, amelynek semelyik két éle nem tartozik az $n-1$ közül ugyanahhoz. (Megoldás)

**32.*** Egy digráfban $T_1$ és $T_2$ két adott $r$ gyökerű feszítő fenyő. Igazoljuk, hogy el lehet jutni $T_1$-ből $T_2$-be úgy, hogy az aktuális $T_1'$ egy $T_2$-ben nem szereplő élének helyére beveszünk egy alkalmas $T_2 - T_1'$-beli élt. (Megoldás)

**33.** Egy $D = (V, A)$ digráf bizonyos élei pirosak. Igazoljuk, hogy ha van $k$ piros élt tartalmazó adott gyökerű feszítő fenyő és van $k+2$ piros élt tartalmazó, akkor van $k+1$ piros élt tartalmazó is. (Megoldás)

**34.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráfban van $k$ élidegen feszítő fa, akkor van úgy is, hogy egy előre megadott $k$ elemű $F \subseteq E$ élhalmaz elemei különböző fákban vannak. (Megoldás)

**35.*** Egy digráfban az $s$ gyökérponton kívül adott a csúcsoknak néhány $s$-et nem tartalmazó részhalmaza. Hogyan lehet algoritmikusan eldönteni, hogy létezik-e olyan $s$ gyökerű feszítő fenyő, amely mindegyik kijelölt halmazba pontosan egyszer lép be? (Megoldás)

**36.*** Egy gráf éleinek színezését anti-tarkának nevezzük, ha nincs olyan kör a gráfban, melynek minden éle különböző színű. Igazoljuk, hogy egy $n$ pontú összefüggő gráfnak létezik $n-1$ színt használó anti-tarka színezése, de $n$ színű már nem.

## 1.4. Vágások

Egy $G$ (irányított vagy irányítatlan) gráf csúcsait két részre osztva, a részek között menő élek halmazát **vágásnak** nevezzük. Egy tartalmazásra nézve minimális vágást **elemi vágásnak** nevezünk. Egy elemi vágás **partjain** a pontok azon kétrészes partíciójának az elemeit értjük, melyek a vágást meghatározzák.

A $D$ digráf egy köre illetve vágása **kiegyensúlyozott**, ha mindkét irányban ugyanannyi él megy. Egy digráf **irányított vágásán** olyan vágást értünk, melyhez tartozó komponensek mindegyikére vagy kizárólag ki, vagy kizárólag belépő vágásbeli élek vannak.

Egy irányított vagy irányítatlan gráf $F$ feszítő fáját véve az $e \notin F$ él $F$-re vonatkozó **alapköre** az $F + e$ gráfban keletkező egyértelmű kör.

**37.** Igazoljuk, hogy a $G$ összefüggő gráf egy vágása akkor és csak akkor elemi, ha mindkét partja összefüggő részgráfot feszít.

**38.** Mutassuk meg, hogy minden vágás felbontható elemi vágásokra.

**39.** Mutassuk meg, hogy egy irányítatlan gráfban élidegen vágások uniója vágás.

**40.** Igazoljuk, hogy páros gráf egy vágását összehúzva páros gráfot kapunk.

**41.** Igazoljuk, hogy páros gráfban vágás komplementere vágás.

**42.** Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráf vágása egyértelműen meghatározza a két partját.

**43.** Bizonyítsuk be, hogy egy összefüggő gráf akkor és csak akkor páros, ha egy $F$ feszítő fájához tartozó alapkörök mindegyike páros. (Megoldás)

**44.*** Legyen $D$ irányított gráf. Adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy $D$ minden köre kiegyensúlyozott-e (egy kör kiegyensúlyozott, ha mindkét irányba ugyanannyi él mutat rajta).

**45.*** Bizonyítsuk be, hogy egy $D$ irányított gráfban akkor és csak akkor kiegyensúlyozott minden kör, ha $D$ egy $G = (S, T; E)$ páros gráf irányításával keletkezik oly módon, hogy először minden élt $T$ felé irányítunk, majd $G$ egy vágásának éleit megfordítjuk.

## 1.5. Séták, Utak

Egy irányított vagy irányítatlan gráfban **sétának** nevezzük élek egy

$$v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$$

sorozatát. Ha $v_i \neq v_j$ $(i < j)$ is teljesül, akkor a sétát **útnak** nevezzük. Ha $v_1 = v_n$, akkor **körsétáról** beszélünk. Egy olyan körséta, melyben $v_i \neq v_j$ ha $i < j$ és $i \neq 1$ vagy $j \neq n$, akkor a körsétát **körnek** (irányított esetben **irányított körnek** )nevezzük.

**46.** Igazoljuk, hogy ha egy gráfban létezik az $s$ csúcsból a $t$ csúcsba séta, akkor létezik út is. (Megoldás)

**47.** Mutassuk meg, hogy egy séta egyszerűsítésével kapott út függhet a redukcióban használt körök választásától.

**48.** Igazoljuk, hogy minden körséta tartalmaz kört. (Megoldás)

**49.** Igazoljuk, hogy irányítatlan gráfban a távolságfüggvény kielégíti a háromszög egyenlőtlenséget.

**50.** Legyen $S$ és $T$ a $D$ digráf pontjainak két részhalmaza. Miként lehet algoritmikusan eldönteni, hogy létezik-e út $S$-ből $T$-be? (Megoldás)

**51.** Igazoljuk, hogy a szélességi keresés (BFS algoritmus) helyesen határozza meg az kiindulási ponttól való távolságot. (Megoldás)

**52.** Legyen $D$ $k$-élösszefüggő digráf. Igazoljuk, hogy bárhogy is adunk meg (nem feltétlenül különböző) $s_1, \dots, s_k$ és $t_1, \dots, t_k$ pontokat, létezik $k$ élidegen út úgy, hogy az $i$-edik $s_i$-ből $t_i$-be vezet. (Megoldás)

**53.** Legyen $A$ egy egyszerű, irányítatlan gráf adjacencia-mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor igaz, hogy $A$ bármely két különböző sorának a skaláris szorzata legfeljebb egy, ha a gráf nem tartalmaz 4-hosszú kört! (Megoldás)

**54.** Legyen $G$ egy $n$ pontú, irányítatlan, egyszerű, összefüggő gráf, és jelölje $A$ a $G$ adjacencia-mátrixát. Bizonyítsuk be, hogy minden $1 \leq i, j \leq n$ számpárhoz található olyan $1 \leq k \leq n$ szám, hogy az $A^k$ mátrix $i$-edik sorának $j$-edik eleme nem nulla. (Megoldás)

**55.** Igaz-e, hogy ha a $G$ gráf adjacencia-mátrixának 5. hatványában a főátló nem minden eleme 0, akkor van a gráfban 5 hosszú kör? (Megoldás)

**56.** Lássuk be, hogy egy egyszerű, irányítatlan gráf akkor és csak akkor páros, hogyha az adjacencia-mátrixának minden páratlan kitevőjű hatványában minden diagonális elem zérus!

**57.** A $G$ irányítatlan gráf adjacencia-mátrixát jelölje $A$. Tudjuk, hogy $G$-ben nincs hurokél, továbbá azt, hogy $A^3$ főátlóbeli elemeinek összege 120. Hány háromszög van $G$-ben? (Megoldás)

**58.*** Legyen $A$ az $n$ csúcsú, egyszerű, összefüggő $G$ gráf adjacencia-mátrixa. Mi a $G$ gráf, ha tudjuk, hogy az $A + A^2$ mátrix minden eleme azonos? (Megoldás)

**59.** Egy digráfban adott két csúcs, $s$ és $t$, valamint a gráf csúcsainak egy $M$ halmazrendszere, melynek minden tagjára teljesül, hogy $s$-et nem tartalmazza, de $t$-t igen. Adjunk algoritmust olyan $s - t$ út megkeresésére, amely $M$ minden tagjába pontosan egyszer lép be.

## 1.6. Euler-gráfok

Egy $G$ irányítatlan gráf **Euler**, ha minden pont foka páros. Irányított esetben a pontok fokának paritására tett feltétel helyett azt követeljük meg, hogy minden pont befoka megegyezzen a kifokával. Egy irányítatlan gráf **Euler-irányításán** az élek olyan irányítását értjük, mely irányított Euler-gráfot eredményez.

**Euler-sétán** egy olyan sétát értünk, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza. Zárt Euler-sétáról beszélünk, ha a séta kezdő- és végpontja megegyezik. Irányított esetben csak irányított sétákat tekintünk.

**60.** Igazoljuk, hogy egy $G$ gráfnak (akár irányított, akár irányítatlan) akkor és csak akkor van zárt Euler-sétája, ha összefüggő és Euler. (Megoldás)

**61.** Igazoljuk, hogy egy irányítatlan Euler-gráf felbomlik élidegen körök uniójára. (Megoldás)

**62.** Legyen G egy összefüggő Euler-gráf. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta? (Megoldás)

**63.** Legyen $G = (V, E)$ az a gráf, melyre $V = \{1,2,...,100\}$, és $a$ és $b$ pont között pontosan akkor fut él, ha $a - b$ osztható 4-gyel. Van-e a G gráfnak Euler-körsétája? (Megoldás)

**64.** Igazoljuk, hogy

a) irányítatlan Euler-gráfnak létezik Euler-irányítása;

b) tetszőleges irányítatlan gráfnak létezik sima (=közel Euler, azaz tetszőleges pont befoka és kifoka legfeljebb eggyel tér el egymástól) irányítása. (Megoldás)

**65.** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan kétszer megyünk át. (Megoldás)

**66.** Igazoljuk, hogy egy hurokmentes 4-reguláris összefüggő gráf éleinek létezik egyenletes 2-színezése, vagyis az éleket lehet pirossal és kékkel színezni úgy, hogy minden csúcsban az élek fele piros, fele kék legyen. (Megoldás)

**67.** Igazoljuk, hogy egy páros Euler-gráf éleit lehet pirossal és kékkel színezni úgy, hogy minden csúcsban az élek fele piros, fele kék legyen. (Megoldás)

**68.** Igazoljuk, hogy egy összefüggő hurokmentes Euler-gráf éleit akkor és csak akkor lehet egyenletesen 2-színezni, ha az élek száma páros. (Megoldás)

**69.** Legyen az összefüggő $G$ gráf minden pontjának foka páros. Bizonyítsuk be, hogy ekkor megszámozhatóak az élek 1-től $m$-ig úgy ($m$ = élek száma), hogy minden pontban az oda befutó élekre írt számok legnagyobb közös osztója 1. Adjunk példát olyan nem összefüggő gráfra, melyre az állítás nem igaz! (Megoldás)

**70.** Igazoljuk, hogy egy 100-reguláris gráf felbomlik két 50-reguláris részgráfra! (Megoldás)

**71.** Igazoljuk, hogy egy 100-reguláris gráf élei megirányíthatóak úgy, hogy minden pont befoka pontosan 50 legyen! (Megoldás)

**72.** Melyik igaz az alábbi állítások közül?

a) Minden 100-reguláris gráf felbontható két 50-regulárisra.

b) Minden 50-reguláris gráf felbontható két 25-regulárisra.

c) Minden 100-reguláris gráf felbontható négy 25-regulárisra. (Megoldás)

**73.** (*Fleury*) Legyen $G$ összefüggő irányítatlan Euler-gráf. Adott $s$ pontjából kiindulva úgy haladunk, hogy mindig csak addig még nem használt élen megyünk tovább, azzal a megkötéssel, hogy ha egy $v$-pontnál tartva ott még több nem használt él létezik, akkor olyanon haladunk tovább, amely a használatlan élek $G'$ részgráfjában nem elvágó él. Igazoljuk, hogy a $v$ pontnál nem lehet a $G'$-nek egynél több elvágó éle, és hogy az algoritmus végül egy zárt Euler-sétát ad. (Megoldás)

**74.** Legyen $D$ irányított Euler-gráf és $F$ egy $s$ gyökerű fordított fenyő $D$-ben (azaz $F$ egy olyan irányított fa, amelyben minden kifok egy, kivéve az $s$ ponté, amelynek 0). Igazoljuk, hogy a következő algoritmus $D$-nek egy irányított zárt Euler-sétáját adja: induljunk ki $s$-ből egy tetszőleges élen, és egy általános lépésben mindig egy addig még nem használt élen menjünk tovább, $F$ élét csak akkor használva, ha nincs már más lehetőség. (Megoldás)

**75.** Egy $D = (V, A)$ digráf $s$ pontjába nem lép be él, $t$ pontjából nem lép ki él, míg az összes többi pont befoka megegyezik a kifokával. Igazoljuk, hogy minden $S$ $s\bar{t}$–-halmazra $\delta(S) - \varrho(S) = \delta(s)$ ($s\bar{t}$–-halmazon egy $s$-et tartalmazó, $t$-t nem tartalmazó halmazt értünk). (Megoldás)

**76.** Egy $D = (V, A)$ digráf $s$ pontjába nem lép be él, $t$ pontjából nem lép ki él, míg az összes többi pont befoka megegyezik a kifokával. Igazoljuk, hogy $D$-ben létezik $\delta(s)$ élidegen $st$-út. (Megoldás)

**77.** Igazoljuk, hogy egy $G$ irányítatlan gráf $D$ és $D'$ irányítására a következők ekvivalensek.

a) $D'$ megkapható a $D$-ből élidegen ($D$-beli) egyirányú körök megfordításával.

b) $D'$ megkapható a $D$-ből kiindulva aktuális egyirányú körök egymás utáni megfordításával.

c) $\varrho_D(v) = \varrho_{D'}(v)$ fennáll minden $v \in V$ csúcsra. (Megoldás)

**78.** Igazoljuk, hogy

a) egy irányítatlan gráf akkor és csak akkor Euler, ha csúcsainak egy adott sorrendjére minden kezdőszelet páros fokú, azaz minden kezdőszeletből páros sok él lép ki;

b) egy irányított gráf akkor és csak akkor Euler, ha csúcsainak egy adott sorrendjére minden kezdőszelet befoka egyenlő a kifokával.

**79.*** Legyen $G = (V, E)$ összefüggő síkbarajzolt gráf és jelölje $G^* = (V^*, E^*)$ a duális síkgráfot. A $G$ éleinek egy $F \subseteq E$ részhalmazára jelölje $F^* \subseteq E^*$ a $D^*$ megfelelő éleinek részhalmazát.

a) Igazoljuk, hogy $F$ akkor és csak akkor kör $G$-ben, ha $F^*$ elemi vágás $G^*$-ban.

b) Igazoljuk, hogy $F$ akkor és csak akkor elemi vágás $G$-ben, ha $F^*$ kör $G^*$-ban.

c) Igazoljuk, hogy $F$ akkor és csak akkor feszítő fa $G$-ben, ha $E^* - F^*$ feszítő fa $D^*$-ban.

**80.*** Vezessük le az Euler-formulát, miszerint összefüggő síkgráfban a csúcsok száma plusz a tartományok száma egyenlő az élek száma mínusz kettővel. (Megoldás)

**81.*** Igazoljuk, hogy egy összefüggő síkgráf pontosan akkor Euler, ha a duálisa páros gráf.

**82.*** Adott egy $D$ irányított síkgráf, melynek irányítatlan alapgráfja 2-összefüggő. A $D$ gráf egy ablakán egy korlátos tartományát határoló (nem feltétlenül egyirányú) körét értjük. Igazoljuk, hogy az élidegen egyirányú ablakok maximális száma egyenlő az egyirányú ablakokat lefogó élek minimális számával.

**83.**** Egy téglalapot kisebb téglalapokra bontunk, melyek oldalai párhuzamosak az eredeti téglalap oldalaival. Igazoljuk, hogy ha a felbontásban szereplő minden téglalap legalább egyik oldalhossza egész szám, akkor az eredeti téglalap valamelyik oldala is egész hosszúságú.

## 1.7. Párosítások

**84.** Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, amelyben az $S$ minden $X$ nemüres részhalmazának legalább $d(X) - |X| + 1$ szomszédja van $T$-ben. Mutassuk meg, hogy ekkor $G$ erdő.

**85.** Legyen a $G = (S, T; E)$ páros gráf erdő. Igazoljuk, hogy ekkor az $S$ minden nemüres $X$ részhalmazának legalább $d(X) - |X| + 1$ szomszédja van.

**86.** Igazoljuk, hogy két párosítás uniója pontdiszjunkt utakra és körökre bomlik. (Megoldás)

**87.** Egy páros gráf élei pirossal és kékkel vannak színezve. Fejlesszünk ki algoritmust annak meghatározására, hogy a gráf két megadott pontja között létezik-e alternáló piros-kék út. (Megoldás)

## 1.8. Irányított gráfok

A $D(V, A)$ irányított gráf pontjainak egy sorbarendezését **topologikus sorrendnek** nevezzük, ha minden él kisebb sorszámú pontból nagyobb sorszámú pontba fut. Egy irányított gráf **aciklikus**, ha nem tartalmaz irányított kört.

**88.** Igazoljuk, hogy egy digráf pontosan akkor aciklikus, ha pontjainak létezik topologikus sorrendje. (Megoldás)

**89.** Igazoljuk, hogy minden digráf felbontható két aciklikus digráfra. (Megoldás)

**90.** Dolgozzunk ki algoritmust annak eldöntésére, hogy két közös csúcshalmazon lévő digráfnak létezik-e közös topologikus sorrendje. (Megoldás)

**91.** Igazoljuk, hogy aciklikus digráf elhagyási sorrendje topologikus sorrendet ad (elhagyási sorrendnek nevezzük a pontok egy olyan sorbarendezését, amilyen sorrendben egy mélységi keresés során a pontok átvizsgálttá válnak).

**92.** Adott egy gyökeresen összefüggő digráf az $r$ gyökérponttal. Adjunk algoritmust minimális számú él törlésére, mely elrontja a gyökeres összefüggőséget.

## 1.9. Mohó algoritmusok

**93.** (*Boruvka-algoritmus*) Bizonyítsuk be, hogy összefüggő irányítatlan gráfban a következő algoritmus minimális költségű feszítőfát talál, ha az élek költsége különböző. Míg legalább két pontból áll a gráf, minden ponthoz vegyük a rá illeszkedő legolcsóbb élt. Egyrészt a kapott élhalmazt vegyük hozzá az épülő fához, másrészt a most bevett élekből álló részgráfban az összefüggőségi komponenseket húzzuk össze. Ismételjük a lépést.

**94.** (*McNaughton*) Szeretnénk $n$ darab munkát elvégezni $m$ darab azonos típusú, párhuzamosan működő gépen. Minden munkához adott a $p_j$ megmunkálási idő. Egy munka feldolgozását bármikor megszakíthatjuk, és bármikor újrakezdhetjük, esetleg egy másik gépen; a kikötés csak annyi, hogy egy gépen egyszerre csak egy munkát végezhetünk, és egy munka egyszerre csak egy gépen futhat.

a) Igazoljuk hogy $T := \max\left\{\max p_j, \frac{1}{m}\sum p_j\right\}$-nél kisebb határidőig biztosan nem végezhető el az összes munka.

b) Adjunk erősen polinomiális algoritmust, amellyel ütemezve pontosan a fenti időpontra befejezhető az összes munka. (Megoldás)

**95.** Tegyük fel, hogy 1 gépre szeretnénk $n$ darab, rendre $p_j$ ideig tartó munkát felrakni, egyszerre csak egy munka lehet a gépen, a munkáknak megszakítás nélkül kell elvégződniük. A befejezési időket $C_j$-vel jelölve a célunk $\sum_{j=1}^{n} C_j$ minimalizálása. Adjunk algoritmust az optimális megoldás megtalálására. (Megoldás)

**96.** A 95. feladat módosításaként tegyük fel, hogy 2 gép van, minden $j$ munka 2 részfeladatból áll, az egyiket az első gépen kell elvégezni, ez $a_j$ ideig tart, a másikat a másodikon, ez $b_j$ ideig, s minden munkánál először az első gépre eső részt kell megcsinálni. Mutassuk meg, hogy akár $\max C_j$ minimalizálása, akár $\sum_{j=1}^{n} C_j$ minimalizálása a cél, mindig van olyan optimális megoldás, ahol a két gépen ugyanolyan sorrendben végezzük a munkákat. ($C_j$ azt jelöli, amikor a második gépen befejeződik a munka.) (Megoldás)

## 1.10. Áramok, tenziók

Az alábbiakban $D = (V, A)$ irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő. A csúcsok száma $n$, az éleké $m$. Általában nem teszünk különbséget az egyelemű halmaz illetve annak egyetlen eleme között. (Az egyetlen kivétel, amikor egy $v$ csúcsnál lévő hurokélek a $v$ csúcs befokába beszámítanak, míg a $\{v\}$ egyelemű csúcshalmaz befokába nem.) A pontoknak egy $Z \subseteq V$ részhalmazára a $Z$ és $V - Z$ között vezető élek halmazát a digráf egy vágásának nevezzük. Ha ezen élek mind $Z$-be lépnek (vagy abból ki) **egyirányú** vágásról beszélünk. Egy vágás **indikátor-vektora** $+1$ a $Z$-be lépő éleken, $-1$ a $Z$-ből kilépő éleken és nulla különben.

Legyen $x : A \to \mathbb{R}$ az élek halmazán egy függvény. A $Z \subset V$ által meghatározott vágás illetve maga a $Z$ halmaz $x$-re nézve **semleges**, ha

$$\varrho_x(Z) = \delta_x(Z),$$

ahol $\varrho_x(Z)$ jelöli a $Z$-be lépő éleken az $x$-értékek összegét, míg $\delta_x(Z)$ a $Z$-ből kilépő éleken az $x$-összeg. Az $x$ függvény **áram**, ha minden pont semleges.

A digráf egy $C = (U, F)$ **köre** egy olyan részgráf, amelyben a pontok befoka es kifoka is 1 és amely irányítatlan értelemben összefüggő. Minden legalább 3 élű körnek kétféle bejárása van. Ezek egyikére úgy hivatkozunk, hogy óra szerinti, a másikra pedig órával ellentétes. Az óra szerinti élek **előre élek**, az órával ellentétesek pedig **hátra élek**. Ha mindegyik él előre él vagy mindegyik él hátra él, akkor egyirányú körről beszélünk. Egy kör **indikátor vektora** a kör előre élein $+1$, hátra élein $-1$, a többi élen pedig 0.

A $C$ kör $x$-re nézve **semleges**, ha

$$\varphi_x(C) = \beta_x(C),$$

ahol $\varphi_x(Z)$ jelöli a kör előre élein az $x$-értékek összegét, míg $\beta_x(Z)$ a hátra éleken vett $x$-összeg. (Itt a $\varphi$ betű a *forward* szóra utal, míg a $\beta$ a *backward*-ra.)

Egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvényt **tenzió**nak nevezünk, ha minden kör semleges.

Egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy **potenciál-különbség**, ha létezik a csúcsokon egy olyan $\pi : V \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $x(uv) = \pi(v) - \pi(u)$ minden $uv \in A$ élre. Adott $\pi : V \to \mathbb{R}$-re $\Delta_\pi : A \to \mathbb{R}$ jelölje azt a függvényt az éleken, melyre

$$\Delta_\pi(uv) := \pi(v) - \pi(u).$$

Az áram megadott definíciójának hátránya, hogy (1) segítségével nem tudjuk polinom időben eldönteni, hogy egy $x$ függvény áram-e és (2) nem tudjuk hogyan lehet áramot gyártani. Ugyanez a probléma a tenzió definíciójával.

**97.** Igazoljuk, hogy $x$ akkor és csak akkor áram, ha minden vágás semleges.

**98.** Bizonyítsuk be, hogy a tenzió semleges, azaz minden $st$ út költsége ugyanaz. (Megoldás)

**99.** (*nehezebb változat*) Adott egy $c : A \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény a $D = (V, A)$ digráf élhalmazán. Adjunk algoritmust, amely eldönti, hogy $c$ tenzió-e. Fogalmazzunk meg az algoritmus alapján egy *jó karakterizációt* arra, hogy $c$ tenzió. (Megoldás)

**100.** (*könnyített változat*) Egy $x$ függvény akkor és csak akkor tenzió, ha potenciál-különbség. (Megoldás)

**101.** Ha $c$ egy egészértékű tenzió, akkor előáll $c(uv) = \pi(v) - \pi(u)$ alakban egy egészértékű $\pi$-re. (Megoldás)

**102.** Melyek azok a digráfok, amelyek élhalmazán létezik $\{+1, -1\}$-értékű tenzió?

**103.** Egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor tenzió, ha egy rögzített feszítőfa minden alapköre semleges. (Megoldás)

**104.** Ha egy $Z$ halmaz pontjai semlegesek, akkor $Z$ maga is az. Igaz-e a megfordítás?

**105.** Ha egy $n$ pontú digráfban $n-1$ pont semleges, akkor az $n$-edik is az.

**106.** Az $x : A \to \mathbb{R}$ függvényre a következők ekvivalensek.

(i) $x$ áram.

(ii) Minden csúcsra $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$.

(iii) Egy rögzített feszítőfa minden alapvágása semleges.

(iv) A csúcsok egy rögzített sorrendjére a kezdőszeletek semlegesek.

(Megoldás)

**107.** Aciklikus digráfban az $x : A \to \mathbb{R}$ függvényre a következők ekvivalensek.

(i) $x$ áram.

(ii) Minden egyirányú vágás semleges.

(iii) Egy rögzített topologikus sorrend kezdőszeletei semlegesek.

(Megoldás)

**108.** Adott egy $D = (V, A)$ digráf, és egy $F \subseteq A$ élhalmaz. Mutassuk meg, hogy a következők ekvivalensek:

(i) $F$ karakterisztikus vektora tenzió,

(ii) $F$ éldiszjunkt irányított vágások uniója,

(iii) $F$ minden körön ugyanannyi élt tartalmaz mindkét irányban.

(Megoldás)

**109.** Tegyük fel, hogy $D$ irányítatlan értelemben 2-összefüggő síkbarajzolt gráf. Igazoljuk, hogy egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor tenzió, ha a duális irányított síkgráfban áram.

**110.** Legyen $D$ irányított síkgráf, amelyben irányítatlan értelemben 2-összefüggő.

a) $D$ élein adott egy $x$ függvény. Igazoljuk, hogy $x$ akkor és csak akkor tenzió, ha minden lap határoló köre semleges.

b) Igaz-e az állítás, ha csak a korlátos lapokra követeljük meg a semlegességet?

**111.** Erősen összefüggő digráfban egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor tenzió, ha minden egyirányú kör semleges.

**112.** Igazoljuk, hogy az áramok altere és a tenziók altere egymás ortogonális kiegészítő alterei az $A \to \mathbb{R}$ függvények terében.

**113.** Tetszőleges $x$ áram előáll legfeljebb $m-n+1$ kör indikátor vektorainak lineáris kombinációjaként. Egészértékű $x$ áram előáll legfeljebb $m-n+1$ kör indikátor vektorának egész kombinációjaként.

**114.*** Erősen összefüggő digráfban egy $x \geq 0$ áram előáll legfeljebb $m-n+1$ egyirányú kör karakterisztikus vektorának pozítív lineáris kombinációjaként. Egészértékű $x \geq 0$ áram előáll legfeljebb $m-n+1$ egyirányú kör karakterisztikus vektorának pozitív egész kombinációjaként. (Megoldás)

**115.** Tetszőleges $x$ tenzió előáll legfeljebb $n-1$ vágás indikátor vektorának lineáris kombinációjaként. Egészértékű $x$ tenzió előáll legfeljebb $n-1$ vágás indikátor vektorának egész kombinációjaként.

**116.** Aciklikus digráfban egy $x \geq 0$ tenzió előáll legfeljebb $n-1$ egyirányú vágás karakterisztikus vektorának pozitív kombinációjaként. Egészértékű $x \geq$

0 tenzió előáll legfeljebb $n-1$ egyirányú vágás karakterisztikus vektorának pozitív egész kombinációjaként. (Megoldás)

# 2. fejezet

# Optimális utak

## 2.1. Nemnegatív költségek, Dijkstra algoritmusa

**117.** Keressünk olyan életből vett problémákat, melyek visszavezethetők legrövidebb út keresésére! (Megoldás)

**118.** Adott egy $G = (V, E)$ gráf élein egy tetszőleges $c$ költségfüggvény.

a) Adjunk algoritmust olyan $s - t$-út keresésére, amely mentén vett legnagyobb súly a lehető legkisebb.

b) Igazoljuk, hogy $\min\big\{\max\{c(e) : e \in P\} : P \text{ egy } s - t\text{-út}\big\} =$
$$\max\big\{\min\{c(e) : e \in F\} : \ F \text{ egy } s - t\text{-vágás}\big\}$$
($s - t$-út: $\{s = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = t\}$ rendezett halmaz, melyben $v_0, \dots, v_k$ különböző pontok és $e_0, \dots e_k$ különböző élek, melyekre $e_i = v_{i-1}v_i$; $s - t$-vágás: valamely $s \in X, t \notin X$ halmazra az $X$ és $V - X$ között futó élek halmaza). (Megoldás)

**119.** Egy $D = (V, A)$ digráf élei pirossal és kékkel színnel vannak színezve. Döntsük el, hogy létezik-e olyan $s - t$-út, mely mindkét színből legfeljebb $k$ db-ot tartalmaz. (Megoldás)

**120.** Igaz-e, hogy Dijkstra algoritmusa aciklikus digráf esetén tetszőleges költségfüggvényre a legolcsóbb utat szolgáltatja? (Megoldás)

**121.** A Dijkstra-algoritmus helyességének bizonyításakor hol használjuk ki, hogy a költségfüggvény nemnegatív? (Megoldás)

**122.** Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, és egy $c : A \to \mathbb{R}$ költségfüggvény, mely negatív értékeket is felvehet. Egy megfelelő konstanssal minden élen megnöveljük $c$-t úgy, hogy a kapott $c'$ nemnegatív legyen. Igaz-e, hogy ekkor $c'$-re alkalmazva a Dijkstra-algoritmust az eredeti $c$ költségfüggvény szerint is legrövidebb utat kapunk? A költségfüggvény milyen módosítása nem változtat a legrövidebb utak halmazán? (Megoldás)

## 2.2. Legrövidebb utak konzervatív súlyozásra nézve, potenciálok

### 2.2.1. Megengedett potenciál létezése, konzervatív súlyozás

**Potenciál:** gráf csúcsain értelmezett függvény. **Megengedett potenciál** (egy $c : E \to \mathbb{R}$ élköltségre nézve) olyan $\pi\colon V \to \mathbb{R}$ potenciál, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ minden $uv$ élre. **Konzervatív súlyfüggvény:** élek olyan súlyozása, melyre nem létezik negatív költségű egyirányú kör.

**123.** Mikor megengedett potenciál a csupa 0? (Megoldás)

**124.** Mutassuk meg, hogy ha létezik megengedett potenciál, akkor létezik nempozitív megengedett potenciál is. (Megoldás)

**125.** Legyen $P$ egy legolcsóbb $st$ út valamely $c$ élsúlyozásra nézve.

a) Igaz-e, hogy $P$ minden részútja a két végpontja közötti legolcsóbb út?

b) Mi a válasz, ha feltesszük, hogy $c$ konzervatív?

**126.** Legyen $c$ egy konzervatív súlyfüggvény egy $D = (V, A)$ irányított gráfon. Igazoljuk, hogy az alábbi két potenciál megengedett a $c$-re nézve:

a) legyen $s \in V$ rögzített. $\pi_1(v)$ legyen a legrövidebb $sv$ út hossza;

b) $\pi_2(v)$ legyen a legrövidebb $v$-ben végződő út hossza. (Megoldás)

**127.** Adott egy $D = (V, A)$ digráf, egy $c : A \to \mathbb{R}$ konzervatív súlyfüggvény és $\pi_1, \pi_2$ megengedett potenciálok. Igazoljuk, hogy

a) $\pi_1 + 5$ is megengedett potenciál;

b) $\frac{\pi_1+\pi_2}{2}$ is megengedett potenciál, sőt $\frac{3\pi_1+4\pi_2}{7}$ is az;

c) $\min(\pi_1, \pi_2)$ is megengedett potenciál. Mi a helyzet, ha min helyett max-ot írunk?

d) $\lfloor \pi_1 \rfloor$ is megengedett potenciál, ha $c$ egészértékű. Igaz ez felső egészrésszel is? (Megoldás)

**128.** Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, és a $c : A \to \mathbb{Z}$ konzervatív súlyozásra nézve két megengedett potenciál $\pi_1$ és $\pi_2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\left\lfloor \frac{\pi_1 + \pi_2}{2} \right\rfloor \text{ és } \left\lceil \frac{\pi_1 + \pi_2}{2} \right\rceil$$

is megengedett potenciál. (Megoldás)

**129.** Egy digráfban egy $c$ konzervatív költségfüggvényre nézve legrövidebb $s - t$-utat szeretnénk keresni, de csak a Dijkstra-algoritmust ismerjük, ami negatív élköltség esetén nem ad optimális utat. Jön egy orákulum, és mond nekünk egy $c$-re nézve megengedett potenciált. Mit tegyünk? (Megoldás)

**130.** (*Gallai-tétel, 1. változat*) Bizonyítsuk be, hogy egy $D = (V, A)$ irányított gráfban a $c \colon A \to \mathbb{R}$ költségfüggvényre nézve pontosan akkor nem létezik negatív összköltségű egyirányú kör, ha létezik $\pi \colon V \to \mathbb{R}$ megengedett potenciál. Sőt, ha $c$ egész, akkor $\pi$ is választható egésznek! (Megoldás)

**131.** (*Gallai-tétel, 2. változat*) Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c : A \to \mathbb{R}$ költségfüggvény. Legyen tetszőleges $v \in V$-re $\pi(v)$ a $v$-ben végződő séták minimális költsége (a séta egy élen többször is áthaladhat). Mikor létezik ez a minimum? Bizonyítsuk be, hogy ha minden pontra létezik, akkor minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$, azaz $\pi$ megengedett potenciál. (Megoldás)

**132.** (*Gallai-tétel, 3. változat*) Adjunk a Gallai-tételre alternatív bizonyítást, amely pontszám szerinti indukciót használ az alábbi vázlat alapján. Válasszunk ki egy tetszőleges $z$ pontot, minden $uz$ és $zv$ élpárra vegyünk egy új élt $u$-ból $v$-be, amelynek költsége legyen $c(uz) + c(zv)$, majd töröljük a $z$ pontot. A keletkező kisebb pontszámú gráfra alkalmazzunk indukciót. (Megoldás)

**133.** Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $s \in V$, és tegyük fel, hogy $s$-ből minden pont elérhető irányított úton. Adjunk olyan konzervatív élsúlyozást, amivel minden $v \in V - s$ pont $s$ -től vett (súlyozott) távolsága

a) azonos (nem azonosan nulla súlyozás mellett);
b) különböző;
c) előírt $\pi(v)$ valós érték. (Megoldás)

**134.** Adott egy konzervatív költségfüggvény egy digráf élein.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy nulla költségű egyirányú kör éleit megfordítjuk és a költségeket negáljuk, akkor konzervatív költségfüggvényt kapunk.
b) Legyen $P$ legolcsóbb út az $s$ és $t$ pontok között. Bizonyítsuk be, hogy ha a $P$ út éleit megfordítjuk és költségeiket negáljuk, akkor ismét konzervatív költségfüggvényt kapunk. (Megoldás)

**135.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy digráf minden csúcsába vezet negatív költségű séta, akkor a súlyozás nem lehet konzervatív. (Megoldás)

**136.*** Adott egy konzervatív költségfüggvény egy digráf élein, és tegyük fel hogy az $s$ csúcsból minden csúcs elérhető. Jelölje $\Pi_s$ azon megengedett potenciálok halmazát, melyek értéke $s$-en 0. Mutassuk meg, hogy van olyan $\pi \in \Pi_s$, mely minden más $v$ csúcson legalább akkora, mint bármely más $\Pi_s$-beli potenciál. (Megoldás)

**137.*** Adott egy konzervatív költségfüggvény egy erősen összefüggő digráf élein. Keressünk polinom időben olyan megengedett potenciált, melyre a potenciál legnagyobb és legkisebb értéke közti különbség maximális! (Megoldás)

**138.*** Keressünk olyan megengedett potenciált egy konzervatív költségfüggvényre nézve, melyre a potenciál legnagyobb és legkisebb értéke közti különbség minimális! (Megoldás)

**139.*** Adott egy irányított gráf konzervatív súlyozással. Jelölje $\pi(v)$ a $v$-ben végződő séták hosszának minimumát. Bizonyítsuk be, hogy $\pi$

a) nempozitív megengedett potenciál;
b) az ilyenek között pontonként maximális. (Megoldás)

**140.**** Adott egy konzervatív költségfüggvény egy digráf élein és minden ponton egy alsó és egy felső korlát. Hogyan lehet eldönteni, hogy létezik-e megengedett potenciál a megadott korlátok között?

**141.** Általánosítsuk Gallai tételét! Adott két költségfüggvény ($c$ és $d$) egy digráf élein. Hogyan lehet eldönteni, hogy létezik-e $\pi$ potenciál, melyre $d(uv) \leq \pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$?

### 2.2.2. A Bellman-Ford algoritmus

**142.** Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf egy $c$ konzervatív költségfüggvénnyel. Tekintsük az alábbi $D'$ segédgráfot: vegyük $V$-nek $n$ példányát: $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Az élek halmaza legyen $u_i v_{i+1}, 1 \leq i < n, uv \in A$. Bizonyítsuk be, hogy az aciklikus gráfokra tanult legrövidebb út algoritmus futása $D'$-n megfeleltethető a Bellman-Fordnak $D$-n.

**143.** Hogyan lehet egy $s$ pontból induló legolcsóbb legfeljebb $i$ élű $sv$-sétákat kiszámító algoritmust arra használni, hogy a $v$ pontban végződő legolcsóbb legfeljebb $j$ élű sétákat kiszámítsuk? Hogyan lehet a $v$ pontban végződő legolcsóbb legfeljebb $j$ élű sétákat kiszámító algoritmust arra használni, hogy egy $s$ pontból induló legolcsóbb legfeljebb $i$ élű $sv$-sétákat kiszámítsuk?

**144.** Adott egy konzervatívan súlyozott $D = (V, A)$ digráf, benne egy $s$ pont, melyből minden más pont elérhető irányított úton. Igazoljuk, hogy ekkor létezik legolcsóbb utak fenyője, azaz egy olyan $s$ gyökerű feszítő fenyő, melyben minden $v \in V$-re az $sv$-út minimális $D$-ben.

**145.** (*1. változat, nehezebb*) Adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy

a) egy digráf súlyozása konzervatív-e;

b) ha konzervatív, létezik-e nulla súlyú kör.

**146.** (*2. változat, könnyebb*) Adott egy $D = (V, A)$ digráf és egy $c\colon A \to \mathbb{R}$ költségfüggvény, legyen $n = |V|$. Jelölje $v \in V$-re $\pi_j(v)$ a $v$-ben végződő, legfeljebb $j$ élű séták minimális költségét. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik negatív költségű kör, ha létezik $v \in V$, amire $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$.

**147.** Adott egy irányított gráf egy (nem feltétlenül konzervatív) költségfüggvénnyel. Adjunk algoritmust minimális összhosszú *pontosan* $k$ élből álló *séta* kiszámítására. (Megoldás)

**148.** Egy digráfban adott egy *nem* konzervatív költségfüggvény. Adjunk algoritmust minimális átlagú kör keresésére. (Megoldás)

**149.** Tekintsük a a 146. feladatban definiált $\pi^{(i)}$ potenciált. Nevezzünk egy pontot hibásnak, ha

$$\pi^{(n)}(v) < \pi^{(n-1)}(v).$$

a) Mutassuk meg, hogy ha nincs hibás pont, akkor $c$ konzervatív.

b) Ha $t$ hibás, akkor a legolcsóbb $W^{(n)}(t)$ legfeljebb $n$ élű $t$-ben végződő séta tartalmaz egy $K$ negatív egyirányú kört. (Igaz-e az állítás megfordítása, azaz igaz-e, hogy ha $v$ nem hibás, akkor $W^{(n)}(v)$ nem tartalmaz negatív egyirányú kört?)

c) Minden él költségét egységesen $|\widetilde{c}(K)|/|K|$-val megemelve, a keletkező $c'$ költségfüggvényre nézve $t$ már nem hibás, továbbá ha egy pont hibás, akkor $c$-re nézve is az volt.

**150.*** Adjunk algoritmust legrövidebb $s-t$-út keresésére vegyes gráfban tetszőleges költségfüggvény mellett, ha tudjuk, hogy nem létezik egyirányú kör (azaz olyan kör, melyben az irányított élek egyirányúak). Adjunk a feladatra lineáris idejű algoritmust. (Megoldás)

**151.** Egy vegyes gráf olyan, hogy az irányítatlan élek halmaza erdő és ezek komponenseit összehúzva aciklikus digráfot kapunk. Dolgozzunk ki algoritmust, amely tetszőleges költségfüggvény esetén kiszámít egy legolcsóbb egyirányú $s-t$-utat, ahol az egyirányúság azt jelenti, hogy az úton $s$-ből indulva minden irányított él előre mutat. Itt is igaz, hogy van egy legolcsóbb utak részgráfja?

**152.** Egy bankban többféle devizával kereskednek. Bármely két pénznemre adott az átváltási arány. Adjunk algoritmust annak eldöntésére, van-e hiba az árazásban, azaz olyan átváltási sorozat, melynek kezdeti devizája megegyezik a végsővel, de több van belőle, mint az elején? Ha nincs hiba, keressünk legjobb átváltási módot adott pénznemről egy másikra. (Megoldás)

**153.** Adott egy $D = (V, E)$ digráf, és egy $F \subseteq E$ élhalmaz. Adjunk polinomiális eljárást annak eldöntésére, hogy van-e $D$-ben kör, amiben a két irányba menő $F$-beli élek száma különböző. (Megoldás)

**154.*** Adott egy $D = (V, E)$ digráf és egy $0 < \lambda < 1/2$ szám. Döntsük el polinom időben, hogy van-e kör, amiben az egyik irányba a kör éleinek kevesebb, mint $\lambda$ hányada megy. (Megoldás)

### 2.2.3. Pontos élek és alkalmazásaik, Duffin-tétel

Egy $D = (V, A)$ digráf megengedett potenciáljára nézve $uv \in A$ **pontos él**, ha $\pi(v) - \pi(u) = c(uv)$. Legyen $c_\pi(uv) = c(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$.

**155.** Adott egy konzervatív költségfüggvény egy digráf élein és egy megengedett potenciál. Igazoljuk, hogy ha $P$ olyan $s-t$-út, amely csupa pontos élből áll, akkor $P$ legolcsóbb $s-t$-út. Létezhet olyan legolcsóbb $s-t$-út, ami nem csupa pontos élből áll?

**156.** Mutassuk meg, hogy ha egy digráfban egy $s-t$-út minden éle benne van egy konzervatív költségfüggvényre nézve legolcsóbb $s-t$-útban, akkor az út maga is legolcsóbb. Adjunk példát olyan gráfra és súlyozásra, amikor ez nem teljesül.

**157.** Legyen adott egy $c$ konzervatív költségfüggvény a $D$ irányított gráf élhalmazán. Igazoljuk, hogy ha a $K$ egyirányú kör minden éle benne van 0-költségű egyirányú körben, akkor $\widetilde{c}(K) = 0$. (Megoldás)

**158.** Tegyük fel, hogy egy digráf $s$ pontjából minden más pontba adott egy út. Ha ezen utak költségei megengedett potenciált alkotnak, akkor ezen utak mindegyike legolcsóbb út. (Megoldás)

**159.** Legyen $D$ gyökeresen összefüggő $s$-ből és $c$ egy konzervatív költségfüggvény. Ekkor $\pi \leq \mu_c$ fennáll minden olyan $\pi$ megengedett potenciálra, melyre $\pi(s) = 0$, ahol $\mu_c(v)$ a legolcsóbb $sv$-út költsége. (Megoldás)

**160.** Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, az élein $c_1$ és $c_2$ nemnegatív távolságfüggvények, és két pont $s, t \in V$. Keressünk olyan irányított, $s$-ből $t$-be menő, $c_1$ szerint legrövidebb utat $D$-ben, ami a $c_1$ szerint legrövidebb utak között $c_2$ szerint legrövidebb.

**161.** Keressünk egy digráf adott $s$ és $t$ pontja között olyan utat, ami a $c_1$ súlyfüggvényre nézve minimális, és ezen belül minimális a $c_2$ súlyfüggvényre is. (Feltesszük, hogy $c_1$ és $c_2$ konzervatív.) (Megoldás)

**162.** Adott egy irányított gráf, rajta egy $c_1$ pozitív- és egy $c_2$ valósértékű súlyozás. Adjunk algoritmust olyan $s-t$-út keresésére, mely $c_1$ szerint *minimális*, és az ilyen utakon belül $c_2$ szerint *maximális*. (Megoldás)

**163.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy konzervatívan élsúlyozott digráf bármely élét elhagyva nem nő a legövidebb $s-t$-út hossza, akkor létezik két éldiszjunkt legrövidebb $s-t$-út. (Megoldás)

## 2.3. Leghosszabb utak, részben rendezett halmazok

Egy részbenrendezett halmaz részhalmaza **lánc**, ha bármely két eleme relációban áll, és **antilánc**, ha semelyik kettő sem.

**164.** Adjunk min-max tételt aciklikus gráfban leghosszabb $s-t$-út hosszára a Duffin-tétel segítségével.

**165.** Bizonyítsuk be, hogy egy aciklikus gráf élei feloszthatók pontokkal úgy, hogy adott $s, t$ pontpárra minden $s-t$-út ugyanannyi élből álljon! (Megoldás)

**166.** (*Poláris Dilworth-tétel*) Igazoljuk algoritmikusan, hogy egy $P$ részbenrendezett halmazban a leghosszabb lánc elemszáma egyenlő a $P$-t fedő antiláncok minimális számával! Fogalmazzuk meg és igazoljuk a megfelelő tételt maximális súlyú láncokról, ha $P$ elemei súlyozva vannak. (Megoldás)

**167.** Készítsünk algoritmust egy véges $a_1, \ldots, a_n$ számsorozat egy leghosszabb monoton növekedő részsorozatának megtalálására. (Megoldás)

**168.** Igazoljuk, hogy egy $nm+1$ különböző tagból álló $a_1, \ldots, a_{nm+1}$ számsorozatnak van vagy $n+1$ tagú monoton növő, vagy $m+1$ monoton fogyó részsorozata. Létezhet-e mind a két fajta részsorozat? (Megoldás)

**169.** Bizonyítsuk be, hogy egy aciklikus gráf csúcsainak van topologikus sorrendje (azaz olyan, amelyben minden él előre mutat).

**170.** Bizonyítsuk be, hogy

a) egy aciklikus gráf tekintehtő részbenrendezett halmaznak az elérhetőségi relációra nézve;

b) egy részbenrendezett halmaz tekinthető aciklikus gráfnak is, azaz nem lehetséges, hogy $a_1, \ldots, a_k$ különböző elemekre $a_i \leq a_{i+1} \forall i = 1 \ldots k$, $a_{k+1} = a_1$. Hogyan definiálnád a gráf élhalmazát?

**171.** Legyen $D = (V, A)$ aciklikus irányított gráf, $s, t \in V$ kijelölt csúcsok, és $c : A \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Adjunk polinomiális algoritmust, ami eldönti, hogy van-e $s - t$ út, amin az élsúlyok átlaga ($a$) legfeljebb 10, ($b$) legalább 10.

**172.** Egy tervütemezési feladatnál ismerjük az egyes munkafázisok időszükségletét és a megelőzési feltételeket. Adott továbbá minden munkafázishoz egy legkorábbi kezdési feltétel is. Keressünk optimális ütemezést. (Megoldás)

**173.** Készítsünk hagymás rántottát. A megpucolt és felvágott hagymát forró olajban megpároljuk, hozzáadjuk a felvert tojást, megsütjük. Kenyérrel és pirospaprikával tálaljuk. Az egyes műveletek (időigényeik): hagymapucolás (2 perc), a hagyma felvágása (4), olaj felmelegítése (2), hagyma párolása (2), tojások feltörése (1), tojás felverése (2), tojás sütése (7), kenyérszeletelés (2), terítés (2), paprika megkeresése (2). Minimálisan mennyi idő alatt készíthető el a rántotta? Adjuk meg az optimális ütemezést, és az optimalitást igazoló kritikus utat is.

**174.** Bizonyítsuk be, hogy egy PERT módszerrel kapott ütemezés minden egyes részmunkát is a lehető leghamarabb végez el.

**175.** Adott két véges betűsorozat. Keressünk meg egy leghosszabb közös részsorozatot. A betűk adott súlyozása esetén keressünk legnagyobb összsúlyú közös részsorozatot. (Megoldás)

**176.** Adott egy páros gráf, mindkét osztályában $n$ ponttal: $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$. Adjunk algoritmus maximális méretű olyan párosítás keresésére, ami nem tartalmaz „keresztező” éleket, azaz olyan $a_j b_k$ és $a_l b_m$ éleket, hogy $j < l$ és $m < k$.

**177.** Adott egy út bizonyos részútjainak $\mathcal{F}$ rendszere. Válasszuk ki $\mathcal{F}$-nek éldiszjunkt tagjait úgy, hogy összhosszuk maximális legyen. (Megoldás)

**178.** Dolgozzunk ki algoritmust pontsúlyozott részbenrendezett halmaz maximális súlyú láncának megkeresésére.

**179.** Balatoni nyaralónkat szeretnénk kiadni a nyáron. A sikeres marketingnek köszönhetően már annyi foglalásunk van, hogy nem tudjuk mindet elfogadni, válogatni kell közöttük. Minden foglalásnál adott, hogy mikor jönnének, és mennyit fizetnének. Adjunk algoritmust, mely megadja, hogyan kereshetünk legtöbbet. És ha két nyaralónk is van? (Megoldás)

**180.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számsorozatot konvexnek mondjuk, ha

$$a_1 - a_2 \geq a_2 - a_3 \geq \cdots \geq a_{k-1} - a_k.$$

Dolgozzunk ki polinomiális algoritmust, amely egy $b_1, \ldots, b_n$ számsorozat maximális konvex részsorozatát választja ki.

**181.** Adott $n$ darab tárgy és $k$ darab (tetszőleges nagy mélységű) verem. A tárgyakat adott sorrendben beletesszük valamelyik verembe, ezt követően sorban kivesszük a tárgyakat a vermekből. A tárgyak mely permutációit kaphatjuk meg a leírt módon? (Megoldás)

**182.** Adott egy egyenesen véges sok zárt intervallum. Akkor és csak akkor létezik közöttük $k$ páronként diszjunkt, ha nem lehet az összes szakaszt $k$-nál kevesebb ponttal lefogni. Adjunk meg egy algoritmust, amely kiválaszt maximális számú diszjunkt intervallumot és meghatároz egy minimális elemszámú lefogó pontrendszert.

**183.** Adott egy egyenesen véges sok zárt intervallum. Ha az egyenes minden pontja legfeljebb $k$ szakaszban van, akkor a szakaszok $k$ diszjunkt szakaszokból álló osztályba sorolhatók.

**184.** Adott egy egyenesen véges sok zárt intervallum. Igazoljuk, hogy a szakaszokat meg lehet úgy színezni pirossal és kékkel úgy, hogy az egyenes minden pontja lényegében ugyanannyi piros szakaszban van, mint kékben (az eltérés legfeljebb egy lehet). Igazoljuk, hogy 2-nél nagyobb $k$-ra is mindig létezik egyenletes $k$-színezés.

**185.** Három házaspár mindegyik tagja meglátogat egy beteget. Mind a három férj találkozik két feleséggel. Ekkor az egyik férj találkozik a saját feleségével is.

**186.** Az $A$ zárt szakasz az $A_i$ zárt szakaszok egyesítése. Ekkor ki lehet választani az $A_i$ szakaszok közül néhány diszjunktat úgy, hogy az összhosszúságuk legalább $A$ hosszának a fele.

# 3. fejezet

# Párosítások

## 3.1. Súlyozatlan gráfok párosításai

**187.** Adott egy $G = (V, E)$ gráf, és benne egy $M$ párosítás. Lássuk be, hogy az $M$ párosítás akkor és csak akkor nem maximális méretű, ha létezik olyan alternáló út $M$-re nézve, amelynek első és utolsó éle nem $M$-beli.
(Megoldás)

**188.** (*1.változat*) Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol a játékosok felváltva jelölnek ki egy-egy élt a gráfból úgy, hogy a kijelölt élek egy utat alkossanak. A játékot az a játékos nyeri, aki utoljára tud választani megfelelő élt. Mutassuk meg, hogy ha a gráfban van egy teljes párosítás, akkor a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. (Megoldás)

**189.** (*2.változat*) Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol a játékosok felváltva jelölnek ki ismétlés nélkül egy-egy csúcsot a gráfból úgy, hogy az $i$-edik lépésben kijelölt $v_i$ csúcsra $v_{i-1}v_i \in E$ (ha $i \geq 2$). Az veszít, aki nem tud lépni. Mutassuk meg, hogy az első játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha $G$-ben nincs teljes párosítás. (Megoldás)

**190.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges gráfban egy nem-bővíthető párosítás elemszáma legalább fele a maximális méretű párosítás elemszámának.
(Megoldás)

**191.*** Igazoljuk, hogy ha egy irányítatlan gráf minden pontjának foka páros, akkor a teljes párosítások száma is páros. (Megoldás)

**192.*** (*1. változat*) Legyen $M$ a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf egy teljes párosítása. Adjunk polinomiális futásidejű algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e olyan lefogó ponthalmaz, amely minden $M$-beli élnek pont egy végpontját tartalmazza. (Megoldás)

**193.*** (*2. változat*) Legyen $M$ a $G$ irányítatlan gráf egy teljes párosítása. Adjunk polinomiális futásidejű algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e olyan stabil ponthalmaz, amely minden $M$-beli élnek pontosan egy végpontját tartalmazza. (Megoldás)

### 3.1.1. Páros gráfok párosításai

**194.** (*Mendelson-Dulmage-tétel*) Bizonyítsuk be, hogy ha egy

$$G = (S, T; E)$$

páros gráfban létezik az $A \subseteq S$ ponthalmazt fedő $M_1$ és a $B \subseteq T$ ponthalmazt fedő $M_2$ párosítás, akkor van olyan $M$ párosítás is, amelyik fedi $A \cup B$-t. (Megoldás)

**195.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy

$$G = (S, T; E)$$

páros gráfban létezik az $X \subseteq S \cup T$ ponthalmazt fedő párosítás, akkor a maximális elemszámú párosítások között is van olyan, amelyik fedi $X$-et. (Megoldás)

**196.** Mutassuk meg, hogy egy $k$-reguláris

$$G = (S, T; E)$$

páros gráfban ($k \geq 1$) létezik teljes párosítás. (Megoldás)

**197.** Mutassuk meg, hogy egy $k$-reguláris

$$G = (S, T; E)$$

páros gráf élhalmaza felbomlik $k$ teljes párosítás uniójára. (Megoldás)

**198.** Mutassuk meg, hogy páros gráfban van a maximális fokú csúcsokat fedő párosítás. (Megoldás)

**199.** Legyen a
$$G = (S, T; E)$$
páros gráfban a maximális fokszám $k$. Mutassuk meg, hogy ekkor $E$-t meg lehet színezni úgy $k$ színnel, hogy minden $v$ csúcsra és mindegyik $j$ színre a $v$-be menő $d(v)$ darab él közül maximum egy darab színe $j$. (Azaz egy páros gráf élhalmaza felbomlik maximális fokszámnyi diszjunkt -nem feltétlenül teljes-párosítás uniójára. (Megoldás)

**200.** Van egy 32 lapos magyarkártya-csomagunk. Keverés után a lapokat 8 darab egyenlő kupacra osztjuk (minden kupacban tehát 4 lap van). Igaz-e, hogy ki lehet választani minden kupacból egy-egy lapot, hogy a kapott 8 lap között legyen minden értékből (7, 8, 9, 10, alsó, felső, király, ász)? (Megoldás)

**201.** Egy $n \times n$-es táblázatot *latin négyzet*nek nevezünk, ha úgy írtuk be a mezőkbe 1-től $n$-ig a számokat, hogy minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám pontosan egyszer fordul elő. $m < n$ esetén egy $n \times m$-es táblázatot *latin téglalap*nak nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban mindegyik szám legfeljebb egyszer szerepel (természetesen itt is 1 és $n$ közötti egész számok vannak a mezőkbe írva). Bizonyítsuk be, hogy minden latin téglalap kiegészíthető latin négyzetté! (Megoldás)

**202.*** (*Schweitzer-verseny 2012*) Bizonyítsuk be, hogy egy $G$ $k$-kromatikus gráf éleit tetszőlegesen két színnel színezve van olyan $k$ pontú részfa, melynek élei ugyanolyan színűek. (Megoldás)

**203.** Egy sakktáblán áll 33 bástya. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük öt, mely páronként nem ütik egymást. (Megoldás)

**204.** (*Birkhoff-Neumann tétel*) Egy $M$ négyzetes, nemnegatív elemekből álló mátrixot *duplán sztochasztikusnak* nevezünk, ha minden sor- és oszlop-összeg 1. Egy duplán sztochasztikus mátrix *permutációmátrix*, ha minden sorban és oszlopban 1 db. 1-es szerepel. Mutassuk meg, hogy minden duplán sztochasztikus mátrix előáll, mint permutációmátrixok konvex kombinációja. (Megoldás)

**205.*** Legyen $H$ a $G$ véges csoport részcsoportja, $k$ pedig $H$-nak a $G$-beli indexe. Ekkor létezik $x_1, \ldots, x_k \in G$, amely egyszerre jobboldali és baloldali reprezentáns-rendszere $H$-nak, azaz $Hx_1, \ldots, Hx_k$ az összes jobboldali, $x_1H, \ldots, x_kH$ pedig az összes baloldali $H$ szerinti mellékosztály. (Megoldás)

**206.** Adott egy $n$ pontú páros gráf, amiben nincs izolált pont. Mutassuk meg, hogy a lefogó élhalmazok minimális elemszámának és a párosítások maximális elemszámának összege $n$, és adjunk algoritmust minimális elemszámú lefogó élhalmaz megtalálására. Igaz-e az egyenlőség nem-páros gráfban? (Megoldás)

**207.** Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf. Készítsük el hozzá a következő $G$ páros gráfot: a ponthalmaza a $V$ két diszjunkt példányát tartalmazza ($V'$ és $V''$) és $u' \in V'$ és $v'' \in V''$ között akkor megy egy él, ha $uv \in A$. Bizonyítsuk be, hogy $V$ pontosan akkor fedhető le pontdiszjunkt $D$-beli irányított körökkel, ha $G$-ben van teljes párosítás. (Megoldás)

**208.** Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (S, T; E)$ legalább 3 pontú páros gráfra a következő három állítás ekvivalens:

(i) $G$ összefüggő és minden élét tartalmazza teljes párosítás;

(ii) Minden $u \in S$ és $v \in T$ esetén $G - u - v$-ben van teljes párosítás;

(iii) $|S| = |T|$, és minden $\emptyset \neq X \subsetneq S$ esetén $|\Gamma(X)| > |X|$.

(Megoldás)

**209.**** Mutassuk meg, hogy ha egy $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráfban van teljes párosítás, és minden $v \in S$ fokszáma legalább $k$, akkor $G$-ben legalább $k!$ teljes párosítás van.

**210.** Mutassuk meg, hogy egy $G = (S, T; E)$ páros gráf minimális lefogó csúcshalmaza mindig $\Gamma(X) \cup (S - X)$ alakú valamilyen $X \subseteq S$-re. (Megoldás)

**211.** Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf és egy $M$ párosítás $G$-ben. Legyen $R_S$ az $M$ által nem fedett csúcsok halmaza $S$-ben. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $X \subseteq S$-re $|R_S| \geq |X| - |\Gamma(X)|$, és csak akkor lehetséges egyenlőség, ha $M$ maximális méretű párosítás. (Megoldás)

**212.*** (*Nehezített változat*) Mutassuk meg, hogy az alternáló utas algoritmus mindig ugyanazt a maximális hiányú halmazt adja eredményül. (Megoldás)

**213.** (*Könnyített változat*) Mutassuk meg, hogy az alternáló utas algoritmus mindig az egyértelmű legszűkebb maximális hiányú halmazt adja eredményül. (Megoldás)

**214.** Hogyan lehet az alternáló utas algoritmus segítségével az egyértelmű legbővebb maximális hiányú halmazt megtalálni? (Megoldás)

**215.*** Legyen $G$ egy tetszőleges gráf, $X$ és $Y$ maximális méretű stabil csúcshalmazok. Mutassuk meg, hogy $G[X\Delta Y]$ gráfnak van teljes párosítása. (Megoldás)

**216.*** (*Dilworth*) Igazoljuk algoritmikusan, hogy egy $P$ részbenrendezett halmazban a leghosszabb antilánc elemszáma egyenlő a $P$-t fedő láncok minimális számával. (Megoldás)

**217.** A Nemzeti Sport szerkesztősége elhatározta, hogy a Rióban megrendezésre kerülő olimpia valamennyi eseményére saját tudósítót küld. Rendelkezésre áll az események pontos kezdési időpontja, időtartama és helyszíne. A gondos szervezők készítettek ezenkívül egy táblázatot, amiben feltüntették, mennyi idő alatt lehet eljutni egy helyszínről egy másikra. Adjunk (erősen polinomiális) eljárást a kiküldendő újságírók minimális számának meghatározására. (Megoldás)

## 3.2. Súlyozott párosítások

**218.*** Bizonyítsuk be, hogy ha egy élsúlyozott $G = (S, T; E)$ páros gráfban léteznek olyan maximális súlyú $M_1$ és $M_2$ párosítások, melyek az $A \subseteq S$ ponthalmazt illetve a $B \subseteq T$ ponthalmazt fedik, akkor van olyan maximális súlyú $M$ párosítás is, amely fedi $A \cup B$-t. (Megoldás)

**219.*** (*Egerváry-tétel*) Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (S, T; E)$ egy páros gráf, és $c\colon E \to \mathbb{R}$, akkor a maximális súlyú párosítás súlya megegyezik a $\min\{\sum \pi(v)\colon \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)\ \forall uv \in E\}$ értékkel. Amennyiben $c$ egészértékű, úgy a minimális $\pi$ is választható annak. Amennyiben $c$ nemnegatív és $G$ teljes páros gráf, $\pi$ is választható nemnegatívnak. (Megoldás)

**220.*** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges élsúlyozott gráfban a mohó algoritmus olyan $P_{mo}$ párosítást talál, amely legalább fele súlyú, mint a maximális súlyú párosítás. (Megoldás)

**221.*** Mutassunk példát olyan élsúlyozott páros gráfra, ahol az élsúlyok egészek, de Egerváry eredeti algoritmusa nem polinomiális futásidejű. (Megoldás)

**222.**** Mutassunk példát olyan élsúlyozott páros gráfra, ahol Egerváry eredeti algoritmusa nem találja meg véges sok lépésben az optimális megoldást. (Megoldás)

**223.** Igazoljuk, hogy a súlyozott lefogások konvex halmazt alkotnak. (Megoldás)

**224.** Bástyaelhelyezésen bástyák egy olyan elrendezését értjük, melyben a bástyák páronként nem ütik egymást. Tekintsük az alábbi súlyozott mátrixot. Adjunk meg egy maximális súlyú bástyaelhelyezést, és egy minimális nemnegatív egész súlyozott lefogást is. Melyik maximális súlyú teljes párosítás keresési feladattal ekvivalens ez a probléma? Mit jelent itt egy súlyozott lefogás?

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 \\ 5 & 2 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(Megoldás)

**225.** Adott egy $G = (S, T; E)$ páros gráf, $c : E \to \mathbb{R}$ élsúlyok, és egy minimális súlyozott lefogás: $\pi : S \cup T \to \mathbb{R}$. Lássuk be, hogy egy $M$ teljes párosítás pontosan akkor maximális súlyú, ha minden $uv \in M$ élre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$. (Megoldás)

**226.** Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, $M$ egy teljes párosítás. Irányítsuk $M$ éleit $T$ felé, a többi élt pedig $S$ felé; legyen az így kapott irányított gráf $D$. Bizonyítsuk be, hogy egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyozásra nézve $M$ pontosan akkor maximális súlyú teljes párosítás, ha $M$ éleire $c$-t, a többi élre pedig $-c$-t írva konzervatív súlyozást kapunk $D$-ben. (Megoldás)

**227.*** Bizonyítsuk be az *Egerváry-tételt* (219. feladat) a 226. feladat és a *Gallai-tétel* (130. feladat) segítségével. (Megoldás)

**228.** Mutassunk példát olyan élsúlyozott $G = (S, T; E)$ teljes páros gráfra, ahol $|S| = |T|$ és minden minimális $\pi$ súlyozott lefogásban van olyan $v$ pont, amire $\pi(v) < 0$. (Megoldás)

**229.** Egy *teljes* páros $(S,T;E)$ gráfon, melyre $|S|=|T|$, adott egy *nemnegatív* élsúlyozás valamint egy $\pi$ súlyozott lefogás. Adjunk ennek segítségével $\pi$-vel azonos összértékű, *nemnegatív* súlyozott lefogást. (Megoldás)

**230.** Mutassunk példát olyan $G=(S,T;E)$ páros gráfra nemnegatív élsúlyokkal, ahol van teljes párosítás, és minden minimális $\pi$ súlyozott lefogásban van olyan $v$ pont, amire $\pi(v)<0$. Van-e olyan példa ahol $G$ teljes páros gráf? (Megoldás)

**231.** Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami egy páros gráfban tud keresni egy maximális súlyú teljes párosítást. Adott egy $G=(S,T;E)$ páros gráf, és egy $c$ valós (akár negatív) értékű súlyfüggvény. Adjunk maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosítást kereső algoritmust! (Megoldás)

**232.** Legyen $G=(S,T;E)$ olyan páros gráf, amiben létezik teljes párosítás. Mutassunk példát, amikor a maximális súlyú teljes párosítás súlya kisebb, mint a maximális súlyú párosítás súlya. (Megoldás)

**233.** Bizonyítsuk be, hogy a maximális súlyú teljes párosítás súlya pontosan akkor egyenlő a maximális párosításéval, ha létezik nemnegatív minimális súlyozott lefogás. (Megoldás)

**234.*** Igaz-e a következő állítás: ha egy páros gráfban nincs teljes párosítás, akkor a súlyozott lefogások súlyának nem létezik minimuma semmilyen élsúlyozásra sem? (Megoldás)

**235.** Legyen $G=(S,T;E)$ egy páros gráf, $c:E\to\mathbb{R}$ egy súlyfüggvény, és $\pi: S\cup T\to\mathbb{R}$ egy minimális összértékű súlyozott lefogás. Jelölje $G_\pi=(S,T;E_\pi)$ a pontos élek gráfját, azaz

$$E_\pi=\{uv\in E:\ \pi(u)+\pi(v)=c(uv)\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $G$-nek egy $M$ teljes párosítása akkor és csak akkor maximális súlyú, ha $M\subseteq E_\pi$. (Megoldás)

**236.** Igaz-e, hogy ha egy élsúlyozott páros gráf minden éle benne van egy maximális súlyú teljes párosításban, akkor minden kör páratlanadik éleinek összsúlya megegyezik a párosadik éleinek összsúlyával? Igaz-e az állítás megfordítása? (Megoldás)

**237.*** Legyen $G = (S, T; E)$ olyan páros gráf, amiben létezik teljes párosítás, és legyenek $c_1, c_2 : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvények. Adjunk algoritmust azon maximális $c_1$-súlyú teljes párosítás megtalálására, mely a $c_2$-re nézve is maximális. (Megoldás)

**238.*** Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf és $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Adjunk algoritmust azon maximális súlyú párosítás megtalálására, melynek az élszáma minimális. (Megoldás)

**239.** Adott egy páros gráf, és az élein egy súlyozás. Az alábbi három állítás közül melyik(ek) igaz(ak)? Indokoljuk is a választ.

a) Ha egy $M$ teljes párosításnak minden maximális súlyú teljes párosítással van közös éle, akkor $M$ is maximális súlyú teljes párosítás.

b) Ha egy $M$ teljes párosítás minden éle benne van valamilyen maximális súlyú teljes párosításban, akkor $M$ is maximális súlyú teljes párosítás.

c) Mi mondható a fenti két kérdésről, ha a gráf nem feltétlenül páros? (Megoldás)

**240.** (*Könnyített változat*) Tekintsük a következő gráfot: két diszjunkt háromszög és közöttük három él, melyek párosítást alkotnak. Adjuk meg az élek egy olyan súlyozását, melyre nem igaz, hogy ha egy teljes párosítás minden éle benne van maximális súlyú teljes párosításban, akkor maga is maximális súlyú. (Megoldás)

**241.*** (*Nehezített változat*) Adjunk példát olyan nem páros gráfra és élsúlyozásra, melyre nem igaz, hogy ha egy teljes párosítás minden éle benne van maximális súlyú teljes párosításban, akkor maga is maximális súlyú. (Megoldás)

## Alkalmazások

**242.** Adott $m$ darab munka és $k$ darab gép. Egy munkát bármelyik gépen végezhetünk, és bármelyiken egységnyi idő alatt készül el. Egy gépen egyszerre csak egy munkát végezhetünk, és azt nem szakíthatjuk meg. Ha a $j$-edik munkát a $t$ időpontban fejezzük be, annak költsége $c_j(t)$, ahol $c_j$ monoton növő függvény. Célunk az összköltség minimalizálása. Mutassuk meg, hogy ez a feladat megoldható a magyar módszerrel. (Megoldás)

**243.** Egy teniszklub tagjai vegyes párokba szeretnének rendeződni egy közelgő tenisztornára (feltesszük, hogy ugyanannyi nő és férfi játszik a klubban). Minden egyes nő-férfi $(n, f)$ párhoz adott egy nemnegatív $nyer(n, f)$ szám, ami a várható nyereményt jelenti a páros indulása esetén. A tagok egy párokba osztására akkor mondjuk, hogy *stabil*, ha minden pár meg tud állapodni a várható nyeremény egy olyan kettéosztásában, hogy semelyik két embernek se érje meg új párt alkotni, azaz, ha $oszt(n)$ és $oszt(f)$ jelöli a női ill. férfi játékos részesedését a páros nyereményéből, akkor egyrészt a beosztott párokra $nyer(n, f) = oszt(n) + oszt(f)$, másrészt minden egyéb párra $oszt(n) + oszt(f) \geq nyer(n, f)$. Bizonyítsuk be, hogy van stabil párokba osztás!

# 4. fejezet

# Áramok, folyamok

Jelöljön $D = (V, A)$ egy irányított gráfot. Valamely $x : A \to \mathbb{R}$ függvényre és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) = \sum[x(uv) : uv \in A, uv$ belép S-be] és legyen $\delta_x(S) = \varrho_x(V - S)$. Azt mondjuk, hogy $x$ **áram**, ha teljesül rá a megmaradási szabály, azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v \in V$ csúcsra. (Áramokkal kapcsolatos alapozó feladatok a Az 1.10. fejezetben is szerepelnek.)

Legyen $f : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Azt mondjuk hogy az $x$ áram **megengedett**, ha $f \leq x \leq g$.

Jelöljük ki $D$-nek egy $s$ forráspontját és egy $t$ nyelőpontját. A továbbiakban, amikor folyamokról lesz szó, végig feltesszük, hogy $s$-be nem lép be él és $t$-ből nem lép ki él. **Folyamon** egy olyan nemnegatív $x : A \to \mathbb{R}_+$ függvényt értünk, amely minden, $s$-től és $t$-től különböző pontra teljesíti a megmaradási szabályt, azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra. Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül egy adott $g : A \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvényre, **megengedett folyamról** beszélünk. Az $x(uv)$ szám az $x$ **folyam értéke** az $uv \in A$ élen. Az $x$ **folyam nagysága** a $\mathrm{val}(x) := \delta_x(s)$ érték.

Egy {0,1}-értékű folyamot **fonatnak** nevezünk. Az $x$ fonat azonosítható azon élek által alkotott részgráffal, melyeken az $x$ értéke 1. Egy $k$ nagyságú fonatot röviden $k$-fonatnak nevezünk.

Egy $s$-et tartalmazó, de $t$-t nem tartalmazó halmazt $s\bar{t}$**-halmaznak** nevezünk. Ha $C$ $s\bar{t}$-halmaz, akkor a $C$-ből ki- és $C$-be belépő élek egy $st$**-vágást** alkotnak. Folyamfeladatoknál, ha $g$ a kapacitásfüggvény az éleken, akkor a vágás **nagyságán** vagy **kapacitásán** a $\delta_g(C)$ számot értjük (csak a kilépő éleken összegzünk!).

Valamely $c : A \to \mathbb{R}$ költségfüggvényre vonatkozólag a $cx$ skalárszorzatot nevezzük az $x$ áram/folyam **költségének**.

## 4.1. Alapozó feladatok

**244.** Igazoljuk az alábbi állításokat!

a) $x$ akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ fennáll minden $v$ csúcsra;

b) Ha $x$ áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ halmazra fennáll;

c) $x$ pontosan akkor áram, ha tetszőleges $Z \subseteq V$ részhalmazra $\varrho_x(Z) \leq \delta_x(Z)$. (Megoldás)

**245.** Igazoljuk, hogy

a) minden $0-1$ áram éldiszjunkt irányított körök incidencia-vektorainak összege;

b) minden nemnegatív áram irányított körök incidencia-vektorainak nemnegatív lineáris kombinációja;

c) minden áram irányítatlan körök $0, \pm 1$-incidencia-vektorainak lineáris kombinációja. (Megoldás)

**246.** Igazoljuk, hogy egy digráfban pontosan akkor van olyan $x$ áram, amelyre $x(e) \leq g(e)$ minden $e$ élre, ha nincs negatív $g$-nagyságú irányított vágás.

**247.** Mutassuk meg, hogy minden $x$ folyamra és minden $Z$ $s\bar{t}$-halmazra $\mathrm{val}(x) = \delta_x(Z) - \varrho_x(Z)$. (Megoldás)

**248.** Igazoljuk, hogy minden $x$ folyam előáll mint egy nemnegatív áram és $st$-utak nemnegatív kombinációja. (Megoldás)

**249.** Tekintsük a maximális folyam-probléma azon változatát, melynél a pontoknak is van kapacitása. Vagyis a $g$ kapacitás-függvényen kívül legyen adott egy $g_V : V \to \mathbb{R} \cup +\infty$ függvény, melyre nézve az $x$ folyam akkor lesz megengedett, ha $\varrho_x(v) \leq g_V(v)$ minden $v \in V$ esetén. Fogalmazzuk át ezt a változatot egy alkalmas segédgráfon értelmezett folyam-feladattá.
(Megoldás)

**250.** Igazoljuk, hogy két minimális kifokú $s\bar{t}$-halmaz metszete és uniója is minimális kifokú $s\bar{t}$-halmaz. (Megoldás)

**251.** Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf, $g : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ két kijelölt pont. Lássuk be, hogy pontosan akkor létezik tetszőlegesen nagy értékű $st$-folyam, ha létezik egy irányított út $s$-ből $t$-be melynek minden éle $+\infty$ kapacitású! (Egy folyamban az éleken mindig véges értékek vannak!) (Megoldás)

**252.** Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $\alpha, \beta \colon V \to \mathbb{Z}$, $\alpha \leq \beta$. Mikor létezik $G$-nek olyan irányítása, amelyre minden $v \in V$ esetén $\alpha(v) \leq \varrho(v) \leq \beta(v)$? (Megoldás)

**253.** Tekintsük az alábbi

$$D = (V, A)$$

irányított gráfot: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $v_i$-ből $v_j$-be pontosan akkor van él, ha $i < j$. Legyen ez esetben $g(v_i v_j) = j - i$. Adjunk meg $v_1$ és $v_n$ között egy maximális folyamot és egy minimális vágást! (Megoldás)

**254.** Vezessük le a Maximális Folyam Minimális Vágás (röviden MFMC) tételből

a) Menger tételének irányított éldiszjunkt változatát (azaz egy irányított gráfban akkor és csak akkor létezik $k$ darab éldiszjunkt út $s$-ből $t$-be, ha minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $k$ él lép ki);
b) a Hall-tételt (páros gráf egyik osztályát fedő párosításról);
c) Kőnig tételét (páros gráf maximális párosításának elemszáma egyenlő a minimális lefogó ponthalmaz elemszámával).
d) egy tételt arra vonatkozóan, hogy mikor létezik egy páros gráfnak előírt fokú részgráfja. (Megoldás)

**255.** Bizonyítsuk be Hoffman tételét az MFMC tétel segítségével, ha $f$ és $g$ véges értékű. Vezessük le az általános esetet is, vagyis amikor $f$ felvehet $-\infty$, $g$ pedig $+\infty$ értéket is. (Megoldás)

**256.** Vezessük le Hoffman tételéből az MFMC-tételt. (Megoldás)

## 4.2. Maximális folyam algoritmusok

**257.** Adott egy hálózat és benne egy maximális folyam. Keressünk minimális vágást $O(m)$ időben!

**258.** Egy $x$ adott folyamhoz keressünk algoritmikusan olyan javító utat, ami legtöbbel növeli a folyam nagyságát. (Megoldás)

Jelölje $\mathcal{C}$ azon $s\bar{t}$-halmazok osztályát, amelyek minimális vágást határoznak meg egy $D$ digráfban egy adott $g$ kapacitásfüggvényre nézve. Egy minimális vágást akkor nevezünk **legszűkebbnek**, ha az őt definiáló $C_0$ $s\bar{t}$-halmazra igaz, hogy $C_0 = \cap_{C \in \mathcal{C}} C$. Egy minimális vágás pedig akkor **legbővebb**, ha az őt definiáló $C_1$ $s\bar{t}$-halmazra igaz $C_1 = \cup_{C \in \mathcal{C}} C$.

**259.** Bizonyítsuk be, hogy a javítóutas algoritmus a legszűkebb minimális vágást találja meg.

**260.** Hogyan találhatjuk meg a legbővebb minimális vágást? (Megoldás)

**261.** Legyen $D = (V, A)$ egy digráf, melynek élhalmazán adott a $g$ nemnegatív kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be algoritmikusan, hogy létezik egy olyan $D' = (V, A')$ digráf, amelyben egy $S$ $s\bar{t}$-halmaz kifoka pontosan akkor 0, ha $\delta_g(S)$ minimális. (Megoldás)

**262.** Egy maximális folyamot kereső algoritmus segítségével döntsük el, hogy egy digráfban adott alsó és feslő korlátokra létezik-e megengedett áram.

**263.** Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy algoritmus megengedett áram megkeresésére az olyan esetekre, amikor az éleken csak alsó korlát adott. Erre támaszkodva készítsünk eljárást az általános esetre, amikor alsó és felső korlátok is adottak. (Megoldás)

**264.** Adott egy hálózat és $g_1, g_2, \ldots, g_t$ kapacitásfüggvények az éleken. Döntsük el algoritmikusan, hogy van-e olyan $st$-vágás, ami mindegyik $g_i$-re minimális! (Megoldás)

**265.** Egészértékű $g$ kapacitásfüggvény esetén keressünk olyan minimális kapacitású $st$-vágást, melyben a kilépő élek száma minimális. (Megoldás)

**266.*** Tetszőleges $g$ kapacitásfüggvény esetén keressünk olyan minimális kapacitású $st$-vágást, melyben a kilépő élek száma minimális. (Megoldás)

**267.*** Adott egy hálózat és $g_1$ és $g_2$ kapacitásfüggvények. Keressünk olyan $st$-vágást, ami $g_1$-re minimális és ezek közül $g_2$-re minimális.

**268.*** Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráfban a $g \geq 0$ kapacitásfüggvényre nézve nem létezik $K$ nagyságú megengedett $st$-folyam. Adjunk algoritmust, amely meghatározza, hogy legkevesebb mennyivel kell egységesen a $g$ értékeit növelni, hogy már létezzék? (Megoldás)

**269.*** Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf valamint egy $c : A \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény.

a) Adjunk polinomiális algoritmust, mely eldönti, létezik-e a gráfban negatív összsúlyú irányított vágás.

b) Tegyük fel, hogy a gráfban nem létezik negatív súlyú irányított vágás. Mutassuk meg, hogy ha egy irányított vágás minden éle benne van nulla összsúlyú irányított vágásban, akkor ő maga is nulla súlyú. (Megoldás)

**270.**** Egy $D = (V, A)$ digráf élhalmazán adott egy $g$ függvény, amelyre nem létezik $x \leq g$ áram. Legkevesebb mennyivel kell egységesen a $g$ értékeit növelni, hogy már létezzék?

## 4.3. Minimális költségű áramok, folyamok

**271.** Igazoljuk, hogy nemnegatív $c$ költségfüggvény esetén mindig létezik olyan minimális költségű $x$ maximális folyam, amely $st$-utak kombinációja. (Megoldás)

**272.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $c$ költségfüggvényre van olyan $x$ minimális költségű áram, amire azok az $e$ élek, ahol $x(e) \neq f(e)$ és $x(e) \neq g(e)$, erdőt alkotnak. (Megoldás)

**273.** Ha a költségfüggvény potenciálkülönbség, hogyan találhatunk polinomiális időben minimális költségű maximális folyamot? (Megoldás)

**274.** Legyen $D = (V, E)$ egy digráf, $f$ és $g$ alsó illetve felső korlátok az éleken és $c : E \to \mathbb{R}$ költségfüggvény. Egy $x$ megengedett áramra definiáljuk a $D_x = (V, E_x)$ digráfot és a $c_x : E_x \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

– $uv \in E_x$ „előre-él”, ha $uv \in E$ és $x(uv) < g(uv)$, ekkor legyen $c_x(uv) = c(uv)$,

– $uv \in E_x$ „hátra-él”, ha $vu \in E$ és $x(vu) > f(vu)$, és ekkor $c_x(uv) = -c(vu)$.

Mutassuk meg, hogy egy $x$ megengedett áram akkor és csak akkor minimális költségű, ha $D_x$-ben $c_x$ konzervatív.

**275.** Hogyan lehet élsúlyozott aciklikus digráfban maximális összsúlyú $k$-fonatot keresni? (Megoldás)

**276.** Tegyük fel, hogy ismeretes egy minimális költségű folyam megkeresésére szolgáló algoritmus nemnegatív $c$ költségfüggvény esetére. Adjunk ennek felhasználásával algoritmust

a) minimális költségű áram keresésére, véges kapacitások és $c \geq 0$ esetén;

b) minimális költségű áram keresésére, véges kapacitások és tetszőleges $c$ esetén;

c) minimális költségű maximális folyam keresésére, véges kapacitások és tetszőleges $c$ esetén. (Megoldás)

**277.** Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf, egy $g : E \to \mathbb{R}_+$ kapacitásfüggvény és $s, t, v \in V$ pontok. Adjunk polinomiális algoritmust, ami eldönti, hogy létezik-e olyan maximális $st$-folyam, ami a $v$ pontot

a) használja;

b) nem használja. (Megoldás)

**278.** Adjunk olyan polinomiális eljárást, amely eldönti, hogy egy folyamfeladatban van-e olyan maximális folyam, amely egy adott élt

a) telít;

b) nem telít. (Megoldás)

**279.** Egy adott élről döntsük el, hogy minden maximális folyam telíti-e.

## 4.4. Alkalmazások és rokon feladatok

### 4.4.1. Rokon feladatok

Egy $m : V \to \mathbb{R}$ függvény esetén az $x : A \to \mathbb{R}$ függvényt $m$-**áramnak** hívunk, ha $\varrho_x(v) - \delta_x(v) = m(v)$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra.

**280.** Legyen $m$ a $D = (V, A)$ digráf ponthalmazán értelmezett függvény, amelyre $\sum_{v \in V} m(v) = 0$. Adott $f \leq g$ korlátok esetén mi a megengedett $m$-áram létezésének szükséges és elégséges feltétele? (Megoldás)

**281.** Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy algoritmus annak eldöntésére, hogy létezik-e nemnegatív $m$-áram. Ezt szubrutinként használva készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy adott $f$ és $g$ korlátok esetén létezik-e megengedett áram. (Megoldás)

**282.** Adott egy $D = (V, E)$ irányított gráf, egy $b : V \to \mathbb{Z}$ igényfüggvény, egy $g : E \to \mathbb{Z}_+$ kapacitásfüggvény, és egy $c : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \max cx &: \\ 0 \leq x(e) \leq g(e) & \quad \text{minden } e \in E\text{-re}, \\ \varrho_x(v) - \delta_x(v) = b(v) & \quad \text{minden } v \in V\text{-re}. \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy ez visszavezethető a kapacitás nélküli változatra! (Megoldás)

**283.** Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $g : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $p, b : V \to \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy pontosan akkor létezik

$$\begin{gathered} x \colon E \to \mathbb{R}, \\ p(v) \leq \varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq b(v) \ \forall v \in V, \\ f \leq x \leq g \end{gathered}$$

általánosított áram, ha

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \leq \min\{b(Z), -p(V - Z)\} \ \forall Z \subseteq V.$$

(Megoldás)

Egy $\mathcal{L}$ halmazrendszert akkor nevezünk **laminárisnak**, ha bármely két $X, Y \in \mathcal{L}$ esetén $X \cap Y = \emptyset$ vagy $X$ és $Y$ közül egyik a részhalmaza a másiknak.

**284.** Legyen $D = (V, A)$ digráf, $\mathcal{F}$ a pontoknak egy lamináris részhalmazrendszere. Egy $x : A \to \mathbb{R}$ függvényre azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$-áram, ha $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \in \mathcal{F}$ esetén. Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy létezzen megengedett (azaz adott $f$ és $g$ közti) $\mathcal{F}$-áram. Készítsünk algoritmust megengedett $\mathcal{F}$-áram keresésére. (Megoldás)

**285.*** Egy $0-1$-értékű $k \times k$-as mátrix minden eleméhez adott a 0-ról 1-re vagy fordítva történő átfordításának költsége. Változtassuk meg minimális költséggel a mátrixot, hogy a sorok és az oszlopok összege adott előírt érték legyen. (Megoldás)

**286.** Szeretnénk egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nemnegatív valós mátrixot készíteni, amiben az $i$-edik sor összege egy előírt $p_i$ szám ($i = 1, \dots, m$), a $j$-edik oszlop összege egy előírt $q_j$ szám ($j = 1, \dots, n$), és

$$\max\{c_{ij} a_{ij} : i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n\} \le \lambda,$$

ahol $c_{ij}$ ($i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$) és $\lambda$ adott nemnegatív számok. Adjunk polinom idejű algoritmust, ami eldönti, hogy van-e ilyen $A$ mátrix!

### 4.4.2. Gráfelméleti alkalmazások

**287.*** Legyen $G = (V, E)$ digráf, $c\colon V \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény. Keressünk maximális súlyú részhalmazát $V$-nek, amelyből nem vezet ki él. (Megoldás)

**288.*** Egy digráfban adott $s, t \in V$, keressünk diszjunkt $s\bar{t}$- és $t\bar{s}$-halmazokat, melyek befokainak összege minimális.

**289.** Határozzuk meg egy irányított gráf élösszefüggőségét úgy, hogy szubrutinként meghívhatunk egy maximális folyamot kereső algoritmust, de legfeljebb $n$-szer, ahol $n$ a gráf csúcsszáma. (Megoldás)

**290.** Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf és $H = (V, \mathcal{F})$ hipergráf. Adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e $V$-nek olyan $X$ nemüres részhalmaza, amelynek $D$-beli $\varrho_D(X)$ befoka szigorúan kisebb, mint az $X$-től diszjunkt $H$-beli hiperélek száma.

**291.** Legyen $G = (V, E)$ irányított gráf és $s, t \in V$. Hogyan lehet polinomiális algoritmussal két $s$-ből $t$-be menő

a) éldiszjunkt utat;

b) (végpontjaiktól eltekintve) pontdiszjunkt utat keresni? (Megoldás)

**292.** Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, $c : E \to \mathbb{R}_+$ nemnegatív költségfüggvény és $s, t \in V$ pontok. Keressünk két

a) éldiszjunkt $st$-utat minimális összköltséggel;

b) pontdiszjunkt $st$-utat minimális összköltséggel. (Megoldás)

**293.** Készítsünk algoritmust, amely eldönti, hogy létezik-e $k$ éldiszjunkt $st$-út, melyek mindegyike egy adott konzervatív költségfüggvényre nézve legolcsóbb $st$-út! (Megoldás)

**294.** Adott egy élsúlyozott páros gráf. Keressünk minimális súlyú $k$ élből álló párosítást a $k$-fonat algoritmussal.

**295.** Élsúlyozott digráfban keressünk minimális súlyú olyan élhalmazt, amely minden $st$-utat lefog. (Megoldás)

**296.** Pontsúlyozott $G = (S, T; E)$ páros gráfban keressünk

a) minimális súlyú lefogó ponthalmazt;

b) minimális súlyú minimális elemszámú lefogó ponthalmazt. (Megoldás)

**297.*** Adott egy részbenrendezett halmaz alaphalmazán egy súlyfüggvény. Keressünk

a) maximális súlyú antiláncot;

b) maximális súlyú maximális elemszámú antiláncot.

**298.*** Adott egy részbenrendezett halmaz alaphalmazán egy súlyfüggvény. Keressünk maximális súlyú ideált. ($P$ ideál, ha $x \in P$, $y < x$-ből következik, hogy $y \in P$.) (Megoldás)

**299.** Adott egy $D = (V, E)$ digráf és egy $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ élmegfordítási költség. Egy digráfot Euler-gráfnak nevezünk, ha minden csúcs befoka megegyezik a kifokával. Adjunk polinomiális algoritmust, amely bizonyos élek megfordításával Euler-gráfot csinál $D$-ből (ha lehet) úgy, hogy a megfordítások összköltsége minimális legyen. (Megoldás)

### 4.4.3. Modellezési feladatok

**300.** Néhány család közös vacsorát szervez. A közösségi hangulatot elősegítendő elhatározzák, olyan ülésrendet alakítanak ki, hogy egy asztalnál minden családból legfeljebb egy ember üljön. A családok száma $k$, az asztaloké $\ell$, $a_i$ az $i$-dik család tagjainak, $b_j$ pedig a $j$-dik asztal ülőhelyeinek száma. Adjunk (erősen polinomiális) algoritmust, ami eldönti, hogy létezik-e ilyen ültetés, és megad egy ilyet, ha lehetséges. (Megoldás)

**301.** Egy bányatársaság geológusai a leendő külszíni fejtés területét 3 dimenziós részekre osztották. Ezen részek között vannak olyanok, amelyek egymás fölött helyezkednek el, ezeket természetesen csak szép sorban lehet kibányászni, más részek között esetleg nincs kapcsolat. A geológusok megmondták, melyik részhez mely más részek eltávolítása után férhetünk hozzá. Ismert továbbá minden egyes rész kibányászási költsége (feltéve, hogy a fölötte levőket már kibányászták), és a részből nyerhető érc mennyisége. Ha egy résznek nekifogunk, akkor teljes egészében el kell hordanunk. Döntsük el algoritmikusan, mely részeket érdemes kibányászni a profit maximalizálásához. (Megoldás)

**302.** Adott egy $G = (V, A)$ irányítatlan gráf. Egy kijelölt $s \in V$ pontjában ül a parancsnok, $s \notin B \subset V$ halmaz pontjaiban ülnek a beosztottjai. Egymással a gráf élein keresztül kommunikálhatnak. Minden élre adott az él átvágásának költsége. Hogyan kereshetünk meg egy minimális költségű élhalmazt, amelynek átvágásával megszüntethetünk minden kommunikációt a parancsnok és a beosztottjai között?

**303.** Egy városban az $R_1, \dots, R_r$ emberek élnek, és mindegyikükről tudjuk, hogy a $C_1, \dots, C_q$ klubok közül melyeknek a tagja. A $P_1, \dots, P_p$ pártokról pedig azt tudjuk, hogy melyiknek ki tagja (egy ember legfeljebb egy pártban lehet tag). Minden klubnak delegálnia kell egy tagját az önkormányzati testületbe úgy, hogy testületbe a $P_i$ pártból legfeljebb $u_i$ ember kerüljön be. Egy ember csak egy klubot képviselhet azok közül, amelyekben tag. Keressünk eljárást a delegátusok kijelölésére.

**304.** Egy faipari cégnek $n$ erdőterülete van, és meg akarja határozni a következő $k$ év mindegyikében, hogy melyik területről mennyi fát termeljen ki. Az $i$-edik területről összesen $a_i$ tonna fa termelhető ki, ebből a $j$-edik évben legfeljebb $a_{ij}$. Azonban csak az elég idős fák termelhetők ki: az $i$-edik területen a $j$-edik évben $b_{ij}$ tonnányi fa elég idős a kitermeléshez (persze ha egy fát egy évben kivágtunk, azt a következő évben nem vághatjuk ki újra!). A $j$-edik évben összesen legfeljebb $c_j$ tonna fát szabad kitermelni. Adjunk polinomiális algoritmust, amik kiszámolja a maximálisan kitermelhető famennyiséget.

**305.** Egy földrengés $n$ települést érintett, az $i$-edik településen $a_i$ sérült van, ezek közül $b_i$ súlyos. Szeretnénk a sérülteket fél órán belül kórházba szállítani. Összesen $k$ kórház van, mindegyiknél adott, hogy melyik településekről érhető el fél óra alatt. A $j$-edik kórház $c_j$ sérültet tud ellátni, ezek közül maximum $d_j$

lehet súlyos. Adjunk polinomiális algoritmust, ami eldönti, hogy megoldható-e a feladat!

**306.** Adott $m$ darab lakókörzet és $n$ darab iskola; az $i$-dik lakókörzet és a $j$-dik iskola távolsága $d_{ij}$. Az $i$-dik lakókörzetben $f_i$ fiú és $\ell_i$ lány lakik. A $j$-dik iskolába legfeljebb $p_j$ gyerek járhat, ebből legalább $q_j$, de legfeljebb $r_j$ lehet lány. Adjunk a gyerekek számában polinomiális algoritmust, ami minden gyereket elhelyez egy iskolában úgy, hogy az utazási távolságok összege minimális legyen. (Megoldás)

**307.** Szeretnénk $n$ darab munkát elvégezni $m$ darab azonos típusú, párhuzamosan működő gépen. Minden munkához adott a feldolgozási idő, a legkorábbi kezdési idő, és a legkésőbbi befejezési idő. Egy munka feldolgozását bármikor megszakíthatjuk, és bármikor újrakezdhetjük, esetleg egy másik gépen; a kikötés csak annyi, hogy egy gépen egyszerre csak egy munkát végezhetünk, és egy munka egy időben csak egy gépen futhat. Adjunk erősen polinomiális algoritmust, ami eldönti, hogy az $n$ munka feldolgozása elvégezhető-e, és ha igen, megad egy jó ütemezést.

**308.** Modellezzük és oldjuk meg $m$-árammal az alábbi feladatokat!

a) Adott néhány bank, valamint hitelek egy listája. Egy hitelben az szerepel, hogy melyik bank tartozik melyiknek és mennyivel (előfordulhat, hogy két bank egymásnak tartozik). Egy napon elhatározzák, hogy egyszerre kiegyenlítik tartozásaikat (feltehető, hogy erre a célra minden banknak elég nagy összeg áll rendelkezésére). Adjunk algoritmust egy átutalási-lista meghatározására, mely a lehető legkevesebb pénzt mozgat (utalás $A$-ból $B$-be majd $B$-ből $A$-ba kétszer számít).

b) Középföldén a tartományok egymással és Középföldén kívüli helyekkel is kereskedhetnek. Bizonyítsuk be, hogy ha minden tartomány több cikket exportál, mint importál, akkor ez egész Középföldére is igaz.

**309.** Egy $n$ periódusból álló időszakban kell tárolókapacitásokat lefoglalnunk. A $j$-edik periódusban legalább $d_j$ tárolókapacitásra van szükség. Tárolókapacitást azonban nem csak külön-külön az egyes periódusokra foglalhatunk, hanem hosszabb időszakokra is, és a költség függhet az időszak hosszától. Azaz minden $1 \leq i \leq j \leq n$ egész számpárra adott egy $c_{ij}$ érték, ami egységnyi tárolókapacitás lefoglalásának költsége az $i, i+1, \ldots, j$ periódusokra. A cél úgy lefoglalni a tárolókapacitásokat az igényeknek megfelelően, hogy az összköltség minimális legyen. Modellezzük ezt hálózati feladatként.

**310.** Egy hajó útja során $n$ városban áll meg. Az $i$-edik városból a $j$-edik városba $d_{ij}$ ember szeretne utazni, a jegy ára pedig $c_{ij}$ A hajón $k$ darab férőhely van. A hajótársaság meg akarja határozni minden $1 \leq i < j \leq n$-re, hogy mennyi $i$-ből $j$-be szóló jegyet adjon el, hogy a jegybevétele maximális legyen. Természetesen legfeljebb $d_i j$ darab $i$-ből $j$-be szóló jegy adható el, és semelyik útszakaszon nem utazhat a hajón $k$-nál több ember. Írjuk fel ezt hálózati feladatként. (Megoldás)

## 4.5. Szintező algoritmusok

Alapfeladat: adott egy $D = (V, A)$ digráf, csúcsain egy $b : V \to \mathbb{Z}$ előírás, élein $\ell \leq u$ alsó- és felső korlátok. Keressünk $\ell \leq x \leq u$ élfüggvényt, melyre $\varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq b_v$. Az alábbi feladatokhoz tekintsük a problémára tanult szintező algoritmust.

**311.** Hogyan lehetne hatékonyabban inicializálni az algoritmust?

**312.** Bizonyítsuk be, hogy ha tetszőlegesen választjuk a következő aktív csúcsot (és nem mindig a legmagasabbat), a futási idő akkor is polinomiális marad.

**313.** Hogyan lehetne a szintező algoritmust használni arra az általánosabb feladatra, amikor minden csúcsra egy $b(v)$ érték helyett alsó- és felső korlát egyszerre adott? (Megoldás)

**314.** Adott egy irányítatlan gráf és a csúcsokon egy befokelőírás. Keressünk szintező algoritmussal megfelelő irányítást (vagy mutassunk bizonyítékot arra, hogy nem létezik).

**315.** Keressünk páros gráfban az egyik pontosztályt fedő párosítást szintező algoritmussal úgy, hogy csak az egyik pontosztály pontjait szintezzük. (Mindkét pontosztállyal lehetséges.)

**316.** Oldjuk meg a maximális folyam feladatot szintező algoritmussal.

**317.*** Szintező algoritmussal keressünk egy gráfban két éldiszjunkt feszítő fát. (Segítség: szintezzük az éleket úgy, hogy minden fabeli élhez tartozó vágás egyéb élei legfeljebb egy szinttel legyenek lejjebb.)

# 5. fejezet

# Lineáris algebra és poliéderek

## 5.1. Lineáris algebra

Az alábbiakban áttekintjük a $V$ Euklideszi vektortér néhány alaptulajdonságát. Az alaptest mindig a valós ($\mathbb{R}$) vagy a racionális ($\mathbb{Q}$) számok teste. Amikor Euklideszi vektortérről beszélünk, a valós szám $n$-esek $\mathbb{R}^n$ terére (vagy a racionális szám $n$-esek $\mathbb{Q}^n$ terére) gondolunk. A jelölésben nem teszünk különbséget a 0 szám és a vektortér nulleleme között. A vektortér elemeit néha vektoroknak, néha pontoknak tekintjük.

Legyen $x$ és $y$ két azonos dimenziós vektor. Azt mondjuk, hogy $x \geq y$, ha $x$ minden komponense nagyobb vagy egyenlő $y$ megfelelő komponensénél. Amennyiben $x \leq y$ és $x \neq y$, úgy az $x < y$ jelölést használjuk. Amikor $x$ minden komponense szigorúan kisebb az $y$ megfelelő komponensénél, az $x \ll y$ jelölést használjuk.

Adott $x_1, \dots, x_k$ vektorok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számok esetén a $b := \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ vektort az $x_1, \dots, x_k$ vektorok egy **lineáris kombinációjá**nak nevezzük. Ha a $\lambda_i$ számok összege 1, **affin kombináció**ról beszélünk, míg ha valamennyi $\lambda_i$ nem-negatív, úgy **nem-negatív kombináció**ról van szó. Egy nem-negatív, affin kombinációt **konvex kombináció**nak mondunk. Véges sok vektor lineáris kombinációinak halmazát a vektorok **lineáris burká**nak nevezzük. Véges sok pont affin (konvex) kombinációinak halmazát a pontok **affin** (**konvex**) **burká**nak hívjuk.

Amennyiben a $b \neq 0$ elem előáll az $x_1, \dots, x_k$ elemek lineáris kombinációjaként, úgy azt mondjuk, hogy $b$ **lineárisan függ** az $x_1, \dots, x_k$ elemektől. Ha $b$-nek nincs ilyen előállítása, akkor $b$ **lineárisan független** az $x_1, \dots, x_k$ elemektől. A lineáris kombináció **triviális**, ha mindegyik $\lambda_i$ együttható 0.

Ha legalább az egyikük nem-nulla, **nem-triviális lineáris kombináció**ról beszélünk. Azt mondjuk, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **lineárisan összefüggnek**, ha a vektortér nulleleme előáll nem-triviális lineáris kombinációjukként. Ha nincs ilyen előállítás, úgy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorokat **lineárisan függetlenek**nek mondjuk. Az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **kör**t alkotnak, ha lineárisan összefüggnek, de bármely valódi részük már lineárisan független.

Legyen $X$ és $Y$ két vektor-halmaz $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor a **vektor-összeg**ükön vagy **Minkowski összeg**ükön (röviden, **összegükön**) az $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ halmazt értjük. A különbségük analóg módon definiálható.

A $V$ vektortér $A$ **altere** egy olyan nemüres részhalmaza $V$-nek, amelyre fennáll, hogy

(i) $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra,

(ii) $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$.

Nyilván az egyetlen nulla elemből álló halmaz altér, az ún. **triviális altér**. Maga az egész $V$ is altér. A definícióból következik, hogy a vektortér 0 eleme minden altérben benne van. Továbbá az altér véges sok elemének bármilyen lineáris kombinációja is az altérben van. Érvényes, hogy alterek metszete is altér. Könnyen ellenőrizhető, hogy két altér összege is altér, éspedig a mindkettőt magában foglaló legszűkebb altér. Egy altér **dimenziója** az altérből kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma. Speciálisan a triviális altér dimenziója 0.

Két $n$-dimenziós $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vektor **skalárszorzata** az $ab := a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ szám. Természetesen $ab = ba$. Azt mondjuk, hogy $a$ és $b$ **ortogonális** (vagy **merőleges**), ha skalárszorzatuk 0. Az $A, B \subseteq V$ halmazokról azt mondjuk, hogy egymásra **ortogonálisak** (vagy **merőlegesek**), ha $A$ mindegyik eleme ortogonális $B$ mindegyik elemére.

A definícióból rögtön adódik, hogy ha $x_1, \ldots, x_k$ a $V$ vektortér véges sok eleme, akkor a lineáris burkuk (vagyis a lineáris kombinációjukként előálló elemek halmaza) alteret alkot, amit az $x_1, \ldots, x_k$ elemek által **generált altér**nek is nevezünk. Ez nem más, mint az $X := \{x_1, \ldots, x_k\}$ halmazt tartalmazó alterek metszete, vagyis a legszűkebb $X$-t magában foglaló altér. Egy $A$ mátrix $r(A)$ **rangján** az oszlopai által generált altér dimenzióját értjük.

Altereket más módon is előállíthatunk. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ nem-nulla vektor. Az $a$-ra ortogonális elemek $\{x \in \mathbb{R}^n : ax = 0\}$ halmazát, másszóval az $ax = 0$ lineáris egyenlet megoldás-halmazát **origón átmenő** vagy **homogén hipersík**nak nevezzük, melynek (egyik) **normálisa** vagy **normál vektora** $a$. Amennyiben $a$ az $i$-dik egységvektor, úgy az $a$-ra merőleges vektorok halmazát **koordináta-hipersík**nak hívjuk. Ez tehát mindazon vektorokból áll, amelyek $i$-dik koordinátája 0. Könnyen látszik, hogy egy homogén hipersík alteret alkot. Ebből adódik, hogy homogén hipersíkok metszete is altér. Másszóval, adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikére ortogonális vektorok halmaza alteret alkot, melyet az $x_1, \ldots, x_k$ **ortogonális kiegészítő alterének,** más néven **nullteré**nek nevezünk. Ha az $x_i$ vektorok mindegyike valamelyik $(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ alakú egységvektor, úgy ezek ortogonális kiegészítő alterét **koordináta-altér**nek hívjuk. Ez tehát koordináta-hipersíkok metszete, vagyis mindazon vektorok halmaza, amelyeknek $k$ előre adott komponense 0. Egy $x$ pontnak az $x_j$ **koordináta** (vagy **tengely**) **menti vetületé**t úgy kapjuk, hogy $x$ $j$-dik komponensét 0-re állítjuk. Valójában ez a **belső** vetület, megkülönböztetendő a **külső** vetülettől, amelyet úgy kapunk, hogy az $x$ vektor $j$-dik komponensét eltöröljük. (A tengelymenti belső vetítés tehát a vektorteret egy alterére képezi le, míg a külső vetítés egy másik vektortérre).

Legyenek $U$ és $V$ vektorterek. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : U \to V$ leképezés **lineáris transzformáció** (vagy **leképezés)**, ha

(i) $x \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ és

(ii) $x, y \in U$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $U$ azon elemeinek halmaza, amelyek a $V$ nulla elemébe képződnek le, az $U$-nak alterét alkotják, amely alteret a $\varphi$ leképezés **magteré**nek neveznek. Hasonlóképpen egyszerű azt belátni, hogy $V$ azon elemei, amelyek valamely $U$-beli elem képeként állnak elő (azaz a $\{\varphi(u) : u \in U\}$ halmaz elemei), a $V$-nek alterét alkotják, amely alteret a $\varphi$ leképezés **képteré**nek neveznek.

Legyen $A$ $m \times n$-es mátrix, azaz $A$-nak $m$ sora és $n$ oszlopa van. A mátrix $i$-dik oszlopát $a_i$-vel jelöljük, a $j$-dik sorát pedig ${}_ja$-val. Az $A$ **sorteré**n az $\mathbb{R}^n$-nek az $A$ sorai által generált alterét értjük, amelynek jele $\mathcal{S}(A)$ vagy $\mathbb{R}^m A$. A sortér tehát az $\{y^t A : y \in \mathbb{R}^m\}$ halmaz. Az $A$ mátrix **nulltere** az $A$ sorainak ortogonális kiegészítő altere, melynek jele $\mathcal{N}(A)$. A nulltér tehát az $Ax = 0$ egyenletrendszer $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ megoldás-halmaza. Az $A$ oszlopai által generált altér az $A$ **oszloptere**, jelölésben $\mathcal{O}(A)$ vagy $A\mathbb{R}^n$, míg az oszlopainak merőleges altere a mátrix **bal nulltere**. Ennek jele $\mathcal{BN}(A)$.

Mostantól azzal a jelölési egyszerűsítéssel élünk, hogy nem különböztetjük meg az oszlop és sor vektorokat. Ennek megfelelően, ha az $Az$ szorzatot tekintjük, akkor a $z$-t oszlopvektornak képzeljük, míg az $yA$ szorzat esetén az $y$-t sorvektornak. Hasonlóképp, két vektor skalárszorzata esetén sem tesszük ki a transzponálási jelet, vagyis az $a$ és $b$ $n$-dimenziós vektorok skalárszorzatát $ab$-vel vagy $ba$-val jelöljük. (Ez az egyszerűsítési megállapodás zavart okozhatna, ha az $a$ vektort $n \times 1$-es mátrixként, a $b$ vektort pedig $1 \times n$-es mátrixként tekintenénk, mert akkor az $ab$ mátrix szorzat egy $n \times n$-es mátrixot jelöl. Szerencsére az $a, b$ vektorok ilyen típusú szorzatára az alábbiakban nem lesz szükségünk, így az említett zavar sem fordulhat elő.)

**Affin altér**en vagy **eltolt altér**en (vagy **affin halmaz**on) egy altér eltoltját értjük. Vagyis $C$ affin altér, ha létezik olyan $A$ altér és $a$ vektor, amelyekre

$C = \{x : x = z + a$ valamilyen $z \in A$ vektorra$\}$, vagyis $C = A + \{a\}$. Ilyenkor könnyen látható, hogy $C$ bármely $c$ elemére $C - \{c\} = A$, vagyis az altér, amelynek eltolásából a $C$ keletkezik, egyértelműen meghatározott. A $C$ affin altér **dimenzió**ján a definiáló $A$ altér dimenzióját értjük.

Amennyiben $a \in \mathbb{R}^n$ nem-nulla vektor, $\beta$ tetszőleges szám, az $ax = \beta$ lineáris egyenlet megoldás-halmazát **hipersík**nak nevezzük. Ez az $\{x \in \mathbb{R}^n : ax = 0\}$ homogén hipersík eltoltja. A fentiek alapján a hipersík dimenziója $n - 1$ (innen az elnevezés). Következik, hogy az affin altér hipersíkok metszetének tekinthető. Az $\{ax \leq \beta\}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmazát, vagyis az $\{x : ax \leq \beta\}$ halmazt (zárt) **féltér**nek hívjuk, melynek $\{x : ax = b\}$ a **határoló síkja**, és amelynek normálisa $a$. (Ha szigorú egyenlőtlenség van, **nyílt féltér**ről beszélünk). A $\beta = 0$ esetben azt mondjuk, hogy a féltér **homogén**.

Az $Ax \leq b$ rendszernek az $ax \leq \beta$ egyenlőtlenség **logikai következménye**, ha minden olyan $x$-re, amire $Ax \leq b$ teljesül, $ax \leq \beta$ is fennáll. **Lineáris következménye**, ha $\exists y \geq 0$, amire $yA = a$ és $yb \leq \beta$.

**318.** Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $A$ mátrix minden eleme 0 és 9 közé eső egész szám, továbbá hogy a mátrix sorait mint $n$ jegyű, tizes számrendszerbeli számokat kiolvasva csupa 2013-mal osztható számot kapunk. Igaz-e, hogy ekkor a mátrix determinánsa osztható 2013-mal? (Megoldás)

**319.** Igazoljuk, hogy affin alterek nemüres metszete illetve összege is affin altér. (Megoldás)

**320.** Lássuk be, hogy a legfeljebb másodfokú polinomok vektorteret alkotnak a valós számok felett! Hány dimenziós ez a tér? Lássuk be, hogy a deriválás egy lineáris transzformáció! Invertálható-e ez a transzformáció? Mi a determinánsa? (Megoldás)

**321.** Lássuk be, hogy az $\alpha \sin x + \beta \cos x$ alakú függvények vektorteret alkotnak a valós számok felett! Hány dimenziós ez a tér? Lássuk be, hogy a deriválás egy lineáris transzformáció! Invertálható-e ez a transzformáció? Mi a determinánsa? (Megoldás)

**322.** Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bázis egy vektortérben, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ és $1 \leq j \leq n$. Vezessük be a következő jelöléseket: $v'_i := v_i$ minden $i \neq j$ esetén és $v'_j := u$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor:

$$v'_1, v'_2, \ldots, v'_n \text{ bázis} \iff \alpha_j \neq 0.$$

**323.** Milyen egyenlőtlenség mondható egy 0,1-mátrix $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, ill. $GF(2)$ feletti rangjáról? (Megoldás)

**324.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B$ összeszorozható mátrixokra $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$. (Megoldás)

**325.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $A$ valós mátrixra $r(AA^\intercal) = r(A)$. Adjunk példát komplex mátrixra, melyre az állítás nem igaz. (Megoldás)

**326.** Igazoljuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} = (a-b)^{n-1}\big(a+(n-1)b\big).$$

(Megoldás)

**327.** Ha a $z \in \mathbb{R}^n$ nem-nulla vektor ortogonális az $A$ mindegyik sorára *(azaz benne van A nullterében, vagyis* $Az = 0$*)*, akkor $z$ lineárisan független az $A$ soraitól, *(azaz z nincs benne az A sorterében)*. (Megoldás)

**328.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$ és jelöljük az $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ mátrixot $C$-vel. Tegyük fel, hogy $r(A) = r(C)$, és hogy $A$ utolsó oszlopa lineárisan függ $A$ első $n-1$ oszlopától. Lássuk be, hogy ekkor $C$ utolsó oszlopa lineárisan függ $C$ első $n-1$ oszlopától! (Megoldás)

**329.** Határozzunk meg $v_1, \dots, v_k$ minimális számú vektort úgy, hogy egy adott $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza $v_1, \dots, v_k$ vektorok által kifeszített affin altér legyen. (Megoldás)

**330.** Adjunk meg egy megfelelő méretű $A$ mátrixot és $b$ vektort úgy, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza adott $v_1, \dots, v_k$ vektorok által kifeszített affin altér legyen. (Megoldás)

**331.** Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrix magtere és sortere ortogonális kiegészítő alterek. (Megoldás)

**332.** Legyen $A$ $m \times n$-es mátrix, ahol $1 \leq m < n$. Igazoljuk, hogy ekkor az $Az = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása. (Megoldás)

**333.** Igazoljuk, hogy ha egy mátrix oszlopai és sorai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes. (Megoldás)

**334.** Mutassuk meg, hogy ha az $A'$ mátrixból lineárisan függetlenül kiválasztható sorok maximális száma kisebb, mint az oszlopok száma, akkor az $A'z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása. (Megoldás)

**335.** Tegyük fel, hogy az $A$ mátrixban az első $r$ oszlop lineárisan független és a többi oszlop lineárisan függ ezektől. Hasonlóképp legyen az első $s$ sor lineárisan független és a többi sor lineárisan függjön ezektől. Ekkor az első $r$ oszlop és az első $s$ sor által meghatározott $A_1$ részmátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek. (Megoldás)

**336.** Mutassuk meg, hogy egy mátrix rangja nem változik, ha hozzáveszünk egy új oszlopot, amely lineárisan függ az oszlopoktól, vagy ha elhagyunk egy meglévő oszlopot, amely lineárisan függ a többi oszloptól. Analóg állítás érvényes sorokra. (Megoldás)

**337.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy mátrix rangja legalább 5, akkor tetszőleges 5 független sorához van 5 független oszlop, melyekkel vett metszet rangja is 5. (Megoldás)

**338.** Igaz-e, hogy tetszőleges mátrix néhány lineárisan független sorát és ugyanennyi lineárisan független oszlopát kiválasztva az ezek által meghatározott négyzetes részmátrix reguláris? Mi a helyzet, ha rangnyi számú sort illetve oszlopot tekintünk? (Megoldás)

**339.** Bizonyítsuk be, hogy egy $A$ mátrix lineárisan független oszlopainak maximális száma egyenlő a lineárisan független sorok maximális számával. (Megoldás)

**340.** Igazoljuk, hogy ha egy $m \times n$-es $A$ mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor tetszőleges $m$-dimenziós $b$ vektorra az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása. Mutassuk meg, hogy $m = n$ esetén a megoldás egyértelmű.

**341.*** Adott véges sok vektor $v_1, \ldots, v_n$, melyek közül kiválasztunk maximálisan sok lineárisan függetlent, legyenek ezek $v_1, \ldots, v_r$. Igazoljuk, hogy be tudjuk osztani a vektorokat úgy $r$ csoportba, hogy $v_i$ benne van az $i$-edik csoportban ($1 \leq i \leq r$), és bárhogy választok ki egy-egy vektort a csoportokból, azok független rendszert alkotnak.

**342.** Igazoljuk, hogy a következők ekvivalensek.

(i) Az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása.

(ii) $r(A) = r([A, b])$, ahol $[A, b]$ az a mátrix, amely $A$-ból áll elő a $b$ oszlop hozzávételével.

(iii) Nem létezik olyan $y$, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$.

**343.** Igaz-e, hogy az $Ax = 0$ egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik seholsem nulla megoldása, ha $A$ minden oszlopa lineárisan függ a többitől? (Megoldás)

**344.** Egy $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első $m$ sora által alkotott részmátrixot jelölje $A_1$, míg a maradékot $A_2$. Tegyük fel, hogy $A_1$ minden sora ortogonális $A_2$ minden sorára. Mutassuk meg, hogy ekkor $A_1$ sortere éppen $A_2$ nulltere. (Megoldás)

**345.** Legyen $A_1$ olyan $m \times n$-es mátrix, melynek sorai lineárisan függetlenek és $m < n$. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $(n - m) \times n$ méretű $A_2$ mátrix, amelynek sorai ortogonálisak az $A_1$ soraira és amely az $A_1$-gyel együtt egy $n \times n$-es nem-szinguláris mátrixot alkot. Igazoljuk, hogy $A_1$ sortere épp $A_2$ nulltere, és fordítva. (Megoldás)

**346.** Legyen $A_1 := (I_m, B)$ alakú, ahol $I_m$ az $m \times m$-es egységmátrix, $B$ pedig tetszőleges $m \times (n - m)$-es mátrix. Mutassuk meg, hogy ekkor $A_2 := (B^\mathsf{T}, -I_{n-m})$ sortere $A_1$ sorterének ortogonális kiegészítő altere. (Megoldás)

**347.** Igazoljuk a következőket:

a) Minden generált altér előáll nulltérként és minden nulltér előáll generált altérként.

b) Egy $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer megoldás-halmaza előáll véges sok vektor lineáris burkaként.

c) Véges sok vektor lineáris kombinációinak halmaza előáll egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldás-hal-mazaként. (Megoldás)

**348.** Igazoljuk a következőket:

a) Legyen az $Ax = b$ egyenletrendszernek $x_0$ egy megoldása. Ekkora a megoldások $M = \{x : \ Ax = b\}$ halmaza az $\mathbb{R}^n$ tér affin altere, nevezetesen az $A$ nullterének $x_0$-lal való eltoltja.

b) Minden affin altér előáll egy lineáris egyenletrendszer megoldás-halmazaként.

**349.** Igazoljuk, hogy ha az $Ax = b$ egyenletrendszernek $x_0$ egy megoldása, akkor a megoldások halmaza előáll véges sok vektor lineáris burkának $x_0$-lal történő eltolásaként, azaz $\{yB + x_0 : y \in \mathbb{R}^n\}$ alakban valamely $B$ mátrixra.

**350.** Mutassuk meg, hogy amennyiben az $Ax = b$ egyenletrendszernek van megoldása, úgy az $M$ megoldáshalmaz dimenziója $n - r(A)$, ahol $n$ az oszlopok száma.

**351.** Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ rendszer megoldható. Legyen $A'$ az $A$ maximálisan sok lineárisan független sorából alkotott részmátrix és $b'$ a $b$ ennek megfelelő része. Mutassuk meg, hogy ekkor az $A'x = b'$ tetszőleges $x^*$ megoldására $Ax^* = b$ is teljesül. (Megoldás)

**352.** Igazoljuk, hogy $ax = \beta$ akkor és csak akkor lineáris következmény az $Ax = b$ egyenletrendszernek, ha logikai következmény.

**353.** Igaz-e, hogy ha a négyzetes $A$ mátrixra $Ax_k$ konvergens, akkor $x_k$ is konvergens, továbbá $\lim Ax_k$ előáll $Ax$ alakban? Mit mondhatunk, ha $A$ oszlopai lineárisan függetlenek? (Megoldás)

**354.** Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$-ben véges sok pont konvex burka zárt.

**355.*** (*Cauchy-Binet formula*) Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ahol $m \le n$. Jelölje az $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ oszlopok alkotta részmátrixot $A_S$ ill. $B_S$. Igazoljuk, hogy

$$\det AB^{\mathsf{T}} = \sum_{|S|=m} \det A_S \cdot \det B_S.$$

**356.** Legyen a $G = (V, E)$ irányított gráf irányított értelemben vett incidencia-mátrixa $A$. $E_0 \subseteq E$ esetén az $A$-nak $E_0$-hoz tartozó oszlopaiból képzett mátrix legyen $A(E_0)$. Igazoljuk, hogy $E_0$ pontosan akkor (irányítatlan értelemben) körmentes, ha $A(E_0)$ oszlopai lineárisan függetlenek. Mekkora $A$ rangja? (Megoldás)

**357.*** Igazoljuk, hogy nemnegatív súlyfüggvény esetén egy véges vektorrendszer maximális súlyú lineárisan független részhalmaza megkapható a mohó algoritmus segítségével. (Megoldás)

**358.** Legyen $P$ egy $n \times n$-es nemnegatív mátrix, melynek minden oszlopában az elemek összege 1. Ekkor létezik olyan $x \geq 0$ $n$-dimenziós vektor, melynek komponens-összege 1 és $x = Px$.

**359.** Igazoljuk, hogy ha egy $A$ mátrix sorai lineárisan függetlenek, és az oszlopok összege 0, akkor az $Ax = b, x \geq 0$ rendszernek van megoldása.

## 5.2. Konvexitás

**360.** Igazoljuk, hogy ha $z$ a $z_1, \ldots, z_k$ pontok konvex kombinációja és mindegyik $z_i$ a $v_1, \ldots, v_l$ pontok konvex kombinációja, akkor $z$ a $v_1, \ldots, v_l$ pontoknak is konvex kombinációja. (Megoldás)

**361.** Mutassuk meg, hogy egy halmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely két elemének bármely konvex kombinációja a halmazhoz tartozik. (Megoldás)

**362.** Mutassuk meg, hogy egy zárt halmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely két eleme által meghatározott szakasz felezőpontja is a halmazhoz tartozik. Adjunk példát, mely mutatja, hogy a zártsági feltétel nem hagyható el. (Megoldás)

**363.** Mutassuk meg, hogy konvex halmazok metszete is konvex. (Megoldás)

**364.** Mutassuk meg, hogy egy $\mathrm{konv}(C)$ halmaz ($C$ elemeinek konvex burka, azaz a $C$-t tartalmazó legszűkebb konvex halmaz) nem más, mint a $C$ elemeinek felhasználásával készült konvex kombinációk halmaza. (Megoldás)

**365.** Mutassuk meg, hogy egy $A$ korlátos és zárt halmazra az $f : c \mapsto \max_{x \in A} cx$ függvény konvex. (Megoldás)

**366.** Milyen logikai kapcsolatban állnak zárt $K \subseteq \mathbb{R}^n$ esetén az alábbi állítások?

(i) $K + K = 2K$;

(ii) $\alpha K + \beta K = (\alpha + \beta)K$, ahol $\alpha, \beta \geq 0$;

(iii) $K$ konvex.

(Megoldás)

**367.** Hány zárt félsík metszeteként állítható elő egy zárt körlap? (Megoldás)

**368.** Hány nyílt félsík metszeteként állítható elő egy nyílt körlap? (Megoldás)

**369.** Igaz-e, hogy ha két zárt háromszöglapnak van közös pontja, akkor valamelyik háromszög köréírt köre (mint zárt körlap) tartalmazza a másik valamely csúcsát? (Megoldás)

**370.** Igazoljuk, hogy ha a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, zárt halmaz tartalmaz valamely pontjából kiinduló, $c$ irányú félegyenest, akkor bármelyik pontjából kiindulót is. (Megoldás)

**371.*** Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $\inf\{dx + d_0 : x \in K\} > 0$, és tegyük fel, hogy az $f(x) = \frac{cx+c_0}{dx+d_0}$ lineáris törtfüggvény felveszi a szuprémumát a $K$ halmazon. Ekkor $\{z \in K : f(z) = \sup f(x)\}$ is konvex.

**372.** Mutassuk meg, hogy a $K$ konvex halmaz egy pontja pontosan akkor extremális (azaz nem áll elő $K$ más pontjai konvex kombinációjaként), ha nem felezőpontja egyetlen $K$-beli szakasznak sem. (Megoldás)

**373.** Mutassuk meg, hogy a $K$ konvex halmaz egy $v$ pontja pontosan akkor extremális, ha $K \setminus \{v\}$ konvex. (Megoldás)

## 5.3. Poliéderek

Vektorok egy nemüres $C$ halmazát **kúp**nak nevezzük, ha $C$ zárt nemnegatív számmal történő szorzásra nézve, vagyis ha $C$ bármely elemének nem-negatív számszorosa is $C$-hez tartozik. Ebből adódik, hogy az origó mindig a kúpban van. A kúp **triviális**, ha egyetlen pontja van (az origó). Amennyiben a kúp még az összeadásra is zárt, **konvex kúp**ról beszélünk. Ez könnyen látható-an valóban konvex. Miután a továbbiakban csak konvex kúpokról lesz szó, kúpon automatikusan konvex kúpot fogunk érteni. Egy altér például mindig kúp. (A kúp ezen definíciója egyrészt általánosabb annál, mint amit szokásos geometriai kúp fogalmunk diktálna, hiszen megenged olyan alakzatokat is, melyeket síkok határolnak. Például a síkban a nemnegatív síknegyed kúp. Másrészt szűkebb, mert kúp eltoltja nem kúp). Két tipikus példa kúpra:

**Végesen generált kúp** (röviden, **generált kúp**): Véges sok $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ vektor nemnegatív lineáris kombinációinak halmaza.
Jelölése: kúp$(a_1, \dots, a_n) := \{z : z = \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\}$. Amennyiben $A$ egy olyan $m \times n$-es mátrix, melynek oszlopai az $a_i$ vektorok, úgy az $a_i$ vektorok kúpja $\{Ax : x \geq 0\} = A\mathbb{R}^n_+$. Az $A$ mátrix sorvektorai $\mathbb{R}^n$-ben az $\{yA : y \geq 0\} = \mathbb{R}^m_+ A$ kúpot generálják, melyet $G_A$-val jelölünk.

**Metszetkúp** (más néven **poliéder-kúp**): Véges sok homogén féltér metszete; $R := \{x : b_1 x \leq 0, \dots, b_m x \leq 0\}$, ahol $b_i \in \mathbb{R}^n$. Amennyiben $B$ egy olyan $m \times n$-es mátrix, melynek sorai a $b_i$ vektorok, úgy $R = \{x : Bx \leq 0\}$. A $B$ oszlopvektorai $\mathbb{R}^m$-ben az $\{y : yB \leq 0\}$ metszetkúpot definiálják.

Megjegyzendő, hogy ha $\{p_1, p_2, \dots, p_t, a_1, \dots, a_n\}$ vektorok esetén a $\{z : z = \sum_j \mu_j p_j + \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\}$ halmaz generált kúp (vagyis ha csak bizonyos együtthatókra követelünk meg nemnegativitást), éspedig a $\{p_1, -p_1, \dots, p_t, -p_t, a_1, \dots, a_n\}$ vektorok által generált kúp. Speciálisan, a $p_1, \dots, p_t$ vektorok által generált altér is generált kúp. A generált kúp tehát a generált altér általánosítása.

Hasonlóképp, $\{q_1, \dots, q_t, b_1, \dots, b_m\}$ vektorok esetén az

$$\{x : q_1 x = 0, \dots, q_t x = 0, b_1 x \leq 0, \dots, b_m x \leq 0\}$$

halmaz metszetkúp, éspedig $\{x : q_1 x \leq 0, -q_1 x \leq 0, \dots, q_t x \leq 0, -q_t x \leq 0, b_1 x \leq 0, \dots, b_m x \leq 0\}$. Speciálisan, a $q_1, \dots, q_t$ vektorok nulltere (másnéven kiegészítő altere) metszetkúp. A metszetkúp tehát a nulltér általánosítása.

Egy $q$ nemnulla vektor esetén a $\{\lambda q : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ generált kúpot **végtelen irány**nak vagy röviden **irány**nak vagy másként **sugár**nak mondjuk és $\vec{q}$-val jelöljük. A $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_k$ irányok egy **nemnegatív kombináció**ján a $q_1, \dots, q_k$ vektorok egy nemnagatív kombinációjához tartozó irányt értjük.

A generált kúp tekinthető véges sok irány nemnegatív kombinációi halmazának. Egy $z$ pontból induló $\vec{q}$ irányú **félegyenes**en a $z + \vec{q} := \{x : x = z + \lambda q, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ halmazt értjük, ahol $q \neq 0$. Tehát az irány egy origóból kiinduló félegyenes, és a félegyenes egy eltolt irány.

Adott $K$ kúphoz hozzárendelhetjük a $K^* := \{x : xz \leq 0$ minden $z \in K$ elemre$\}$ halmazt, és ezt a $K$ **polárisá**nak nevezzük. Könnyen látszik, hogy $K^*$ maga is kúp, és az is, hogy a $K$ kúp polárisának polárisa magában foglalja $K$-t, azaz $K \subseteq (K^*)^*$. Itt nem szükségképpen áll egyenlőség, hiszen bármely kúp polárisa könnyen ellenőrizhetően zárt, vagyis nem zárt $K$ esetén $K \neq$

$(K^*)^*$. Igazolható ugyanakkor, hogy a $K$ lezártja (vagyis a $K$-t tartalmazó zárt halmazok metszete) éppen $(K^*)^*$. Speciálisan, zárt $K$-ra $K = (K^*)^*$.

**Poliéder**: Véges sok féltér metszete: $R := \{x : Qx \leq b\}$, ahol $Q$ egy $m \times n$-es mátrix, $b$ $m$-dimenziós vektor. Másszóval a poliéder egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmaza. Figyeljük meg, hogy a definícióból adódóan egy poliéder mindig konvex, hiszen ha néhány vektor kielégít egy lineáris egyenlőtlenséget, akkor konvex kombinációjuk is. A háromdimenziós térgeometriában megszokott (konvex) poliéderek megadhatók félterek metszeteként, vagyis kielégítik a fenti definíciót, ugyanakkor ez utóbbi megenged nem korlátos poliédereket is. Például egy metszetkúp vagy egy affin altér poliéder.

A formailag általánosabb, egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket egyaránt tartalmazó $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ rendszer megoldás-halmaza is poliéder, hiszen egy $px = \beta$ egyenlet megoldás-halmaza felfogható mint a $px \leq \beta$ és a $-px \leq -\beta$ egyenlőtlenségek közös megoldás-halmaza. Nyilván az $\{x : Qx \geq b\}$ halmaz is poliéder éppúgy, mint a $Q$ oszlopterében lévő $\{y : yQ \leq c\}$ halmaz. Ez is jelzi, hogy egy poliéder többféle módon is megadható mátrixszal. Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ egyenlőtlenség-rendszerről azt mondjuk, hogy **standard** alakú, vagyis ha egy olyan egyenletrendszerről van szó, amelynek változóira nemnegativitási kikötés van. Az $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ poliéder **standard alak**ban van adva. Egy standard alakban adott poliéder tehát egy affin altér és a nem-negatív térszöglet metszete.

Az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ poliéder egy $z$ elemére nézve a definiáló $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix egy sorát valamint a sor által meghatározott egyenlőtlenséget $z$**-aktív**nak vagy röviden csak aktívnak nevezzük, ha $z$ egyenlőséggel teljesíti. A $P$ sorai automatikusan aktívak. A $z$-re nézve aktív sorok részmátrixát az $M$ $z$**-aktív részmátrixá**nak nevezzük és $M_z^=$-vel jelöljük. A $z$ által szigorú egyenlőtlenséggel teljesülő sorok mátrixát $Q_z^<$ jelöli.

**Politóp**: Véges sok pont konvex burka. (Az üres halmazt is politópnak tekintjük, mint nulla darab pont konvex burka.) Azt mondjuk, hogy a politópot a szóbanforgó pontok generálják. Ezek szerint egyetlen pont is politópot alkot. Két pont által generált politóp neve **szakasz**.

Egy poliédert akkor nevezünk **korlátos**nak, ha létezik olyan $K$ pozitív szám, amelyre $|x(i)| \leq K$ a poliéder minden $x$ pontjának mindegyik $x(i)$ komponensére. Egy poliéder (**külső**) **dimenzió**ján, (röviden dimenzióján) az őt tartalmazó legszűkebb affin altér dimenzióját értjük. A poliéder **belső dimenziója** a benne fekvő affin alterek dimenziójának a maximuma. Például, ha a poliéder egyetlen pontból áll, akkor külső és belső dimenziója is nulla. Általában egy affin altérnek, mint poliédernek a külső és belső dimenziója megegyezik az affin altér korábban már bevezetett dimenziójával, speciálisan $\mathbb{R}^n$ egy hipersíkjának külső és belső dimenziója is $n-1$. A síkban a nemnegatív síknegyed belső dimenziója 0, külső dimenziója 2. Az $n$-dimenziós térben egy féltér, belső dimenziója $n-1$, külső dimenziója $n$.

Egy $q$ vektorról azt mondjuk, hogy a $z \in R$ elem **mozgásvektor**a, ha létezik kicsiny $\lambda > 0$ szám, amelyre mind $z + \lambda q$, mind $z - \lambda q$ $R$-ben van. A 0-vektor mindig ilyen, míg ha $q \neq 0$, nem-triviális mozgásvektorról beszélünk. Azt mondjuk, hogy $z$ a poliéder **relatív belső pont**ja, ha létezik nem-triviális mozgásvektora. Ha nem létezik, akkor $z$ **extrém**. Ha minden vektor mozgásvektor, akkor $z$ **belső** pontja $R$-nek. A definícióból közvetlenül kiolvasható, hogy egy $z \in R$ elem mozgásvektorai alteret alkotnak, melynek neve a $z$ **mozgástere**. Ennek dimenziója a $z$ elem $\varphi(z)$ **szabadsági foka** vagy röviden **foka**. Extrém pont foka ezek szerint 0. A 2-dimenziós térben egy szakasz olyan poliéder, amelynek nincs belső pontja. Egy 3-dimenziós kocka belső pontjainak foka 3, egy lapjának belső pontja 2 fokú, míg egy élének belső pontja 1 fokú.

Egy $\{z + \lambda q : \lambda \in \mathbb{R}\}$ alakú egyenest $q$ irányú egyenesnek nevezünk, ahol $q \neq 0$. Legyen $R = \{x : Qx \leq b\}$ nem-üres poliéder. Egy $q$ vektorról azt mondjuk, hogy $R$ **eltolási** vektora, ha $R$ minden $z$ pontjára és minden $\lambda$ számra $z + \lambda q \in R$. Másszóval, az $R$ bármely pontján átmenő $q$ irányú egyenes $R$-ben van. (Néha használják a karakterisztikus vektor elnevezést, de ez nem túl szerencsés, mert ez a név már foglalt egy halmaz karakterisztikus vektorára). Rögtön látszik, hogy az eltolási vektorok alteret alkotnak, a poliéder **eltolási alterét**.

Ha egy poliéder nem tartalmaz teljes egyenest (félegyenest) akkor azt mondjuk, hogy **egyenes-mentes** (**félegyenes-mentes**). A $\vec{q}$ irányt az $R$ **poliéder egy irányá**nak nevezzük, ha $z + \lambda q \in R$ fennáll az $R$ minden $z$ elemére és minden pozitív $\lambda$-ra.

A poliéder irányainak kúpját a poliéder **irány-** (néha **recessziós**) **kúpjá**nak nevezzük. Az $R$ poliéder egy iránya **extrém**, ha nem állítható elő tőle különböző $R$-beli irányok nemnegatív kombinációjaként. Egy altérnek például nincs extrém iránya.

A poliédert **csúcsos**nak mondjuk, ha van csúcsa. Nem minden poliédernek van csúcsa, például az affin altereknek bizonyosan nincs.

**374.** Igazoljuk az alábbi állításokat.

a) Poliéder eltoltja is poliéder.

b) Két poliéder metszete poliéder.

c) Két politóp Minkowski-összege politóp.

d) Két metszetkúp metszete metszetkúp.

e) Két generált kúp Minkowski-összege generált kúp.

**375.** Legyen $C = \text{kúp}(a_i)$ végesen generált kúp. Igazoljuk, hogy $C$ pontosan akkor csúcsos, ha $\exists b : bx > 0\ \forall x \in C \setminus \{0\}$. (V.ö. 400.)

**376.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Tekintsük az $A$ oszlopai által generált kúpot: $C = \{Ax \in \mathbb{R}^k : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$. Tegyük fel, hogy $A$ egyik oszlopa sem nulla.

a) Lássuk be, hogy $C$ akkor és csak akkor tartalmaz egyenest, ha $\exists x > 0$ melyre $Ax = 0$

b) Lássuk be, hogy $C$ akkor és csak akkor tartalmaz egyenest, ha nem létezik $F \subseteq \mathbb{R}^k$ zárt féltér, melyre $C - \{0\} \subseteq \text{int}F$ (ahol $\text{int}F$ az $F$ halmaz belseje, azaz azon pontjainak halmaza, melyek egy kis sugarú környezete teljesen $F$-ben fekszik) és a 0 az $F$ féltér határán van.

**377.** Tegyük fel, hogy $P = \{Ax \leq b\} \neq \emptyset$. Igazoljuk, hogy ekkor $P = \mathbb{R}^n \iff r(A) = 0$ (azaz $A$ minden eleme 0) és $b \geq 0$.

**378.** Igazoljuk, hogy ha az $R$ poliéder kúp, akkor metszetkúp. (Megoldás)

**379.** Igazoljuk, hogy egy $z \in R$ pont akkor és csak akkor relatív belső pont, ha előáll más $R$-beli pontok konvex kombinációjaként.

**380.** Mutassuk meg, hogy az $R = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq b\}$ poliéder egy $z$ elemének mozgástere a $Q_z^=$ mátrix nulltere. Más szóval a $q$ vektor akkor és csak akkor mozgásvektora $z$-nek, ha $Q_z^= q = 0$. (Megoldás)

**381.** Az $R$ poliéder irányainak nemnegatív kombinációi is az $R$ irányai, azaz a poliéder irányai kúpot alkotnak. (Megoldás)

**382.** A poliéder egy iránya akkor és csak akkor extrém, ha nem állítható elő két tőle különböző $R$-beli irány nemnegatív kombinációjaként. (Megoldás)

**383.** Igazoljuk, hogy az $R$ poliéder egy $z$ pontjára a következők ekvivalensek.

(i) $z$ extrém,

(ii) $z$ nincs $R$-hez tartozó szakasz belsejében,

(iii) nincs olyan $x' \neq 0$ vektor, amelyre $z + x'$ és $z - x'$ is $R$-ben van.

(Megoldás)

**384.** Írjuk fel két adott pont által meghatározott szakaszt poliéderként. (Megoldás)

**385.** Tekintsük $\mathbb{R}^n$-ben a $Q = \operatorname{conv}\big(e_1, e_2, \ldots, e_n, -e_1, -e_2, \ldots, -e_n\big)$ politópot, ahol $\operatorname{conv}\big(\big)$ a konvex burkot jelöli. Írjuk fel $Q$-t poliéderként! ($e_i$ az $i$. egységvektor.) (Megoldás)

**386.*** Tetszőleges $K$ kúpra definiáljuk a $K^* := \{x : xy \leq 0 \ \forall y \in K\}$ poláris kúpot. Igazoljuk, hogy

a) $K^*$ zárt konvex kúp, $K \cap K^* = \{0\}$, $(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$, $\{0\}^* = \mathbb{R}^n$;

b) $K_1 \subseteq K_2 \implies K_1^* \supseteq K_2^*$;

c) $K^{**} \supseteq K$;

d) $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$;

e) Ha $K = \{Ax : x \geq 0\}$ (azaz végesen generált kúp), akkor $K^{**} = K$;

f) végesen generált kúpra $K + K^* = \mathbb{R}^n$. (Megoldás)

**387.** (1. változat) Legyen $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_t \in \mathbb{R}^n_+$. Ekkor

$$\operatorname{conv}\big(\{c_1 \ldots, c_m\}\big) + \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : d_j x \geq 1,\ j = 1, \ldots, t\}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\operatorname{conv}\big(\{d_1 \ldots, d_t\}\big) + \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : c_i x \geq 1,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

**388.** (2. változat) Legyen $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_t \in \mathbb{R}^n_+$. Ekkor

$$\operatorname{conv}\big(\{c_1 \ldots, c_m\}\big) + \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : d_j x \geq 1,\ j = 1, \ldots, t\}$$

pontosan akkor teljesül, ha

(i) $c_i d_j \geq 1$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, t$-re, és

(ii) $\min\{\ell c_1, \ldots, \ell c_m\} \cdot \min\{w d_1, \ldots, w d_t\} \leq \ell w$, $\forall \ell, w \in \mathbb{R}^n_+$.

**389.** Legyen $C = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$. Állítsuk elő $C$-t metszetkúpként és generált kúpként. (Megoldás)

**390.** Tekintsük a

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 12 \\ x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & -6 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel leírt poliédert. Határozzuk meg az eltolási alterét és iránykúpját, továbbá adjunk meg olyan $c$ vektort (ha létezik), hogy $cx$ ne legyen felülről korlátos a poliéderen. (Megoldás)

**391.** Tekintsük a

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel leírt poliédert. Határozzuk meg a csúcsait, az eltolási alterét és iránykúpját, továbbá adjunk meg olyan $c$ vektort (ha létezik), hogy $cx$ ne legyen felülről korlátos a poliéderen.

**392.** Tekintsük a

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel leírt poliédert. Határozzuk meg a csúcsait, az eltolási alterét és iránykúpját, továbbá adjunk meg olyan $c$ vektort (ha létezik), hogy $cx$ ne legyen felülről korlátos a poliéderen.

**393.** Tekintsük a

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & \leq & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\ -x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel leírt poliédert. Határozzuk meg a csúcsait, az eltolási alterét és iránykúpját, továbbá adjunk meg olyan $c$ vektort (ha létezik), hogy $cx$ ne legyen felülről korlátos a poliéderen.

**394.** Adjunk ($\alpha$-ra és $\beta$-ra vonatkozó) szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a

$$\max(x_1 + x_2)$$
$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

lineáris programnak

a) legyen optimális megoldása;

b) ne legyen megengedett megoldása;

c) legyen megengedett, de ne legyen optimális megoldása. (Megoldás)

**395.*** Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Igaz-e, hogy a $K = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0\}$ generált kúp és az $A = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$ affin altér metszete a $P = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$ politóp? Mit mondhatunk, ha a vektorok függetlenek? Igazoljuk, hogy pontosan akkor egyenlő a metszet és a politóp, ha $0 \notin A$. (Megoldás)

**396.** Igaz-e, hogy ha $Ax \leq b, x \geq 0, \max cx$ nemkorlátos, akkor van olyan koordináta-egységvektor, hogy $Ax \leq b, x \geq 0, \max e_k x$ sem korlátos?

**397.** Az $Ax \leq b$ rendszer sorainak egy részhalmaza élesíthető, ha ezeken szigorú egyenlőtlenséget megkövetelve is van megoldás. Igazoljuk, hogy élesíthető halmazok uniója is élesíthető. (Megoldás)

**398.*** Definiáljuk a korlátos $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz szélességét:

$$w(H) := \inf_{||c||=1} \{\sup_{x \in H} cx - \inf_{x \in H} cx\}.$$

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $P = \{x : Ax \leq b\}$ nemüres, korlátos poliéder, és $w_i := \sup\{t : \text{az } Ax \leq b, {}_i a x \leq b_i - t||_i a|| \text{ rendszer megoldható}\}$, $i = 1, \ldots, m$.

a) Igazoljuk, hogy $w(P) \leq \min w_i$.

b) Mutassunk olyan poliédert, ahol $w(P) < \min w_i$.

c) Bizonyítsuk be, hogy $P$ tartalmaz $\frac{w(P)}{m}$ sugarú gömböt.

d) Bizonyítsuk be, hogy $P$ tartalmaz $\frac{w(P)}{n+1}$ sugarú gömböt. (Megoldás)

**399.** Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos, zárt, konvex halmaz, $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $K$ tartalmaz $\frac{w(K)-\varepsilon}{n+1}$ sugarú gömböt ($w$ definícióját lásd a 398. feladatnál). (Megoldás)

**400.** Legyen $C = \{x : Ax \leq 0\}$ metszetkúp. Igazoljuk, hogy $C$ pontosan akkor csúcsos, ha $\exists b : bx > 0\ \forall x \in C \setminus \{0\}$. (V.ö. 375.) (Megoldás)

**401.**** Mutassunk olyan poliédert, amely egész pontjainak konvex burka nem poliéder. (Megoldás)

**402.** Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\} \ne 0$ egy korlátos poliéder. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan legfeljebb $2n$ sorból álló $A'x \le b'$ részrendszer, amely által meghatározott poliéder korlátos! (Megoldás)

**403.** Egy $n$-dimenziós gömb felszíne le van fedve néhány nyílt félgömbjével. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük legfeljebb $2n$ darab, melyek önmagukban fedik a felszínt.

**404.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}, b \in \mathbb{R}^k$ és $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$. Tegyük fel, hogy a $P$ poliéder kúp is (azaz $x, y \in P, \mu, \nu \ge 0$ esetén $\mu x + \nu y \in P$). Lássuk be, hogy $P$ metszetkúp, azaz valamely $A' \in \mathbb{R}^{l \times n}$ mátrixra $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \le 0\}$!

**405.*** Legyen $\mathcal{M}$ azon poliéderek halmaza, amelyek leírhatók $Ax \le \mathbf{1}, x \ge 0$ rendszerrel, ahol $A$ elemei nemnegatívak, és minden oszlopban van pozitív elem. Legyen $\mathcal{A}(P) = \{y : y \ge 0, yx \le 1 \ \forall x \in P\}$. Igazoljuk, hogy $P \in \mathcal{M}$ esetén

a) $\mathcal{A}(P) \in \mathcal{M}$;

b) $P = \mathcal{A}(\mathcal{A}(P))$. (Megoldás)

**406.*** Egy poliédert teljes dimenziósnak nevezünk, ha nincs olyan hipersík, mely tartalmazná. Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\} \ne 0$ egy teljes dimenziós poliéder. Lássuk be, hogy ekkor az őt leíró minimális rendszer egyértelmű.

**407.** Írjuk fel az $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x \le \mathbf{1}\}$ halmazt politópként. (Megoldás)

**408.** Írjuk fel az $\{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0, \sum x_i \le 1\}$ halmazt politópként. (Megoldás)

**409.** Írjuk fel az $\{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0, 1 \le \sum x_i \le 2\}$ halmazt politópként.

**410.** Bizonyítsuk be, hogy bármely $n$ oszlopú mátrixra az $A\mathbb{R}^n_+ = \{Ax \colon x \in \mathbb{R}^n, x \ge 0\}$ halmaz zárt.

**411.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$ és $x_0 \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$. Lássuk be, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda > 0, \text{ melyre } x_0 + \lambda x \in P\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^{=}_{x_0} x \le 0\}.$$

**412.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$ és $x_0 \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$. Lássuk be, hogy

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall\lambda > 0 \text{ esetén } x_0 + \lambda x \in P\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le 0\}.$$

**413.** Legyen $x_0 \in R = \{x\colon A_0x = b_0,\ A_1x \le b_1\}$, $A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy

$$\{x :\ \text{minden } \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén } x_0 + \lambda x \in R\} = V^{\perp},$$

ahol $V$ az $A$ sortere. (Megoldás)

**414.** Legyen $x_0 \in R = \{x\colon A_0x = b_0,\ A_1x \le b_1\}$, $A := \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy

$$\{x :\ \text{létezik } \lambda > 0 \text{ hogy } x_0 + \lambda x \in R \text{ és } x_0 - \lambda x \in R\} = U^{\perp},$$

ahol $U$ az $A^{=}_{x_0}$ sortere.

**415.** Tekintsük az alábbi 20 feladatot. Melyek triviálisak, melyek nehezek?

a) $x \in$ poliéder/politóp/metszetkúp/generált kúp?
b) Poliéder/politóp/metszetkúp/generált kúp üres-e?
c) Poliéder/politóp/metszetkúp/generált kúpon korlátos-e egy célfüggvény?
d) Poliéder/politóp/metszetkúp/generált kúp $\subseteq$ féltér?
e) Optimális-e egy célfüggvény poliéder/politóp/metszetkúp/generált kúp adott $x$ pontjában?

## 5.4. Bázismegoldások

**416.** Tekintsük az $R = \{x :\ Qx \le b\}$ poliédert. Valamely $q \ne 0$ vektorra a következők ekvivalensek:

(i) $Qq = 0$.

(ii) $q$ eltolási vektora $R$-nek.

(iii) $R$-nek van olyan $z$ pontja, amelyre $z + \lambda q$ minden valós $\lambda$-ra $R$-ben van.

(Megoldás)

**417.** Az $R := \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq b\}$ poliéder eltolási altere a $Q$ mátrix nulltere. (Megoldás)

**418.** Az $R$ poliéder egy $z$ pontját tartalmazó legbővebb, $R$-ben fekvő affin altér az $R$ eltolási alterének $z$-vel való eltoltja.

**419.** Egy $R := \{x : Qx \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ poliéder dimenziója $n - r(Q)$.

**420.** Tegyük fel, hogy az $R$ poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. Ekkor $Q$ és $Q'$ sortere megegyezik. Tetszőleges $z \in R$ esetén $Q_z^=$ és ${Q'}_z^=$ sortere megegyezik. (Megoldás)

Az $R = \{x : \ Qx \leq b\}$ poliéder egy $z$ elemének szintjén a $\sigma(z) := r(Q) - r(Q_z^=)$ számot értjük. Egy $z \in R$ elemet **bázismegoldás**nak nevezünk, ha a $z$-aktív $Q_z^=$ részmátrix rangja $r(Q)$, más szóval a 0 szintű elemek a bázismegoldások. Egy bázismegoldás **erős bázismegoldás**, ha a nem nulla komponenseihez tartozó $Q$-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

**421.** Az $R$ poliéder egy $z$ elemének szintje csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszer konkrét alakjától. Speciálisan, a bázismegoldás fogalma is csak a poliédertől függ. (Megoldás)

**422.** Minden nemüres poliédernek létezik bázismegoldása, nevezetesen bármely minimális szintű elem bázismegoldás. (Megoldás)

**423.** Igazoljuk a következő állításokat:

a) Egy $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ nem-nulla mátrix esetén a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1$$

lineáris rendszernek egy $z$ megoldása akkor bázismegoldás, ha $r(M) = r(M_z^=)$.

b) Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ egy $z$ megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó $A$-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

c) Az $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ rendszer egy $y_0$ megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha az $A$-ból lineárisan függetlenül kiválasztható, az $y_0$-ra merőleges oszlopok maximális száma $r(A, b) - 1$, ahol $r(A, b)$ jelöli az $A$ mátrix $b$ oszloppal történő bővítésével kapott mátrix rangját. (Megoldás)

**424.** Igazoljuk, hogy a 423. feladat (a) részében $z$ szintje $r(M) - r(M_z^=)$.

**425.** Igazoljuk, hogy a $Px_0 + Ax_1 = b, x_1 \geq 0$ rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha az $x_1$ nem-nulla elemeihez tartozó $P$-beli oszlopokat az $A$-ból kiválasztott maximálisan sok lineárisan független oszloppal kiegészítve még mindig lineárisan független rendszert kapunk.

**426.** Igazoljuk, hogy a $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ rendszer egy $z$ megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha a $B$ valamely $B'$ nemszinguláris négyzetes részmátrixára $z$ a $B'x' = b'$ egyértelmű megoldásából áll elő nullák hozzávételével.

**427.** Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy $z$ elemére a következők ekvivalensek:

(i) $Q$ oszlopai lineárisan függetlenek és $z$ bázismegoldás (azaz $Q_z^=$ oszlopai lineárisan függetlenek, vagyis $Q$-nak van $n$ darab lineárisan független $z$-aktív sora).

(ii) $z$ csúcs.

(iii) $z$ extrém pont.

(Megoldás)

**428.** Egy poliédernek véges sok csúcsa van. (Megoldás)

**429.** Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéderre a következők ekvivalensek:

(i) $Q$ oszlopai lineárisan függetlenek.

(ii) $R$ egyenes-mentes.

(iii) $R$ eltolási altere triviális.

(iv) $R$ csúcsos.

(Megoldás)

**430.** Minden $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder előáll, mint egy $A$ altér és egy $R'$ csúcsos poliéder összege. Nevezetesen, $A$ az $R$ eltolási altere *(azaz $Q$ nulltere)*, míg $R' = R \cap A^\perp$, ahol $A^\perp$ az $A$ altér ortogonális kiegészítője *(vagyis $Q$ sortere)*. (Megoldás)

**431.** Egy $R := \{x : Mx \leq 0\}$ metszetkúp az $A := \{x : Mx = 0\}$ eltolási altér *(ami speciális metszetkúp)* és az $R' := R \cap A^{\perp}$ csúcsos metszetkúp vektor-összege. (Megoldás)

**432.** Tekintsük az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliédert. Valamely nemnulla $q$ vektorra a következők ekvivalensek:

(i) $Qq \leq 0$.

(ii) $\vec{q}$ a poliéder iránya.

(iii) $R$-nek van olyan $z$ pontja, amelyre a $\{z + \lambda q : \lambda \geq 0\}$ félegyenes $R$-ben van.

(Megoldás)

**433.** Az $R := \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq b\}$ poliéder iránykúpja a $Q$ mátrix $M_Q = \{x : Qx \leq 0\}$ metszetkúpja.

**434.** Igazoljuk, hogy egy $\{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ alakban adott nemüres poliéder iránykúpja $\{x : Px = 0, Qx \leq 0\}$.

**435.** Egy poliédernek és iránykúpjának extrém irányai ugyanazok.

**436.** Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéderre a következők ekvivalensek:

(i) $R$ nem tartalmaz félegyenest.

(ii) $R$-nek véges sok csúcsa van, melyek konvex burka $R$.

(iii) $R$ korlátos.

(iv) $R$ iránykúpja triviális.

(Megoldás)

**437.*** Minden $R \neq \emptyset$ egyenes-mentes *(azaz csúcsos)* poliéder előáll, mint a csúcsai által feszített $R_K$ politóp valamint a poliéder $C$ iránykúpjának a vektor-összege.

**438.*** Legyen a $C := \{x : Qx \leq 0\}$ nemtriviális kúp egyenes-mentes (=csúcsos), és legyen $Z := \{x : Qx \leq 0, cx = -1\}$ poliéder, ahol $c$ a $Q$ sorainak az összege. Ekkor tetszőleges $z \in Z$ esetén $\vec{z}$ a kúp iránya, és a kúp tetszőleges $\vec{q}$ iránya egyetlen $z$ pontban metszi $Z$-t. Továbbá $Z$ korlátos és egy $z \in Z$ pont akkor és csak akkor csúcsa $Z$-nek, ha $\vec{z}$ extrém iránya $C$-nek.

**439.** $C$ egyenes-mentes nemtriviális metszetkúpnak véges sok extrém iránya van, és $C$ ezen irányok generált kúpja.

**440.** A $C = \{x : Qx \leq 0\}$ egyenes-mentes kúp egy $z$ nemnulla eleme által meghatározott $\vec{z}$ irány akkor és csak akkor extrém iránya $C$-nek, ha $z$ merőleges a $Q$ mátrix $r(Q) - 1(= n - 1)$ lineárisan független sorára, azaz ha $r(Q_z^=) = n - 2$.

**441.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}, b \in \mathbb{R}^k$, valamint legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ a következő $f(x) := (x, b - Ax)$. (Ekkor tudjuk, hogy minden $x_0 \in R^n$ esetén: $x_0$ megoldása az $Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ rendszernek $\iff f(x_0)$ megoldása az $Ax + Iz = b, (x, z) \geq 0, (x, z) \in \mathbb{R}^{n+k}$ rendszernek.) Lássuk be, hogy minden $x_0 \in R^n$ esetén: $x_0$ bázismegoldása az $Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ rendszernek $\iff f(x_0)$ bázismegoldása az $Ax + Iz = b, (x, z) \geq 0, (x, z) \in \mathbb{R}^{n+k}$ rendszernek.

**442.** Lehet-e az $Ax \leq b$ poliéder erős bázismegoldásainak nemtriviális konvex kombinációja erős bázismegoldás?

**443.*** Tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_t \in \{-1,0,1\}^n$ vektorokhoz létezik olyan $c$, hogy minden $i$-re $cx_{i+1} \leq \frac{1}{2}cx_i$ és $cx_t > 0$. Igazoljuk, hogy $t = O(n \log n)$.
(Megoldás)

**444.** Legyen $P = \{x : A_1x = b_1, A_2x \leq b_2\}$ poliéder, $x \in P$, $s(x) := r\binom{A_1}{A_2} - r(A^=)$, ahol $A^=$ azon sorok alkotta mátrix, amelyeket $x$ egyenlőséggel teljesít. Ha a $P$ poliéder valamely $x$ pontjára $s(x)$ legalább 2, akkor létezik olyan $z \neq 0$ vektor (irány), hogy $\{x + \lambda z : \lambda \in \mathbb{R}\} \cap P$ korlátos. (Megoldás)

**445.** Az $\{x : Ax \leq b\}$ csúcsos poliéder egy $x_0$ pontjának definiáljuk a szintjét a 444. feladat szerint.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $s(x_0) \geq 2$, akkor $x_0$ rajta van egy olyan szakaszon, amelynek minden belső pontja azonos szintű $x_0$-lal, és mindkét végpontjának kisebb a szintje, mint $x_0$-nak.

b) Mutassuk meg, hogy olyan szakasz is van, amire a fentieken túl az is teljesül, hogy mindkét végpont szintje pontosan eggyel kisebb $x_0$ szintjénél.

**446.** Igazoljuk, hogy az $A_0x = b_0$, $A_1x \leq b_1$ rendszer bázismegoldásai csak a poliédertől függenek, a rendszertől nem. Sőt, a bázismegoldások halmaza független a koordinátarendszer választásától.

**447.** Igazoljuk, hogy az $A_1x = b_1$, $A_2x \leq b_2$ ill. az $A_1x \leq b_1$, $-A_1x \leq -b_1$, $A_2x \leq b_2$ rendszerek bázismegoldásai ugyanazok.

**448.** Igazoljuk, hogy az $Ax = b, x \geq 0$ rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó $A$-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

**449.** Legyen $f \ll g$, ahol $f, g \in \mathbb{R}^n$. Igazoljuk, hogy az $Ax = b$, $f \leq x \leq g$ rendszer egy $z$ megoldása pontosan akkor bázismegoldás, ha az $A$ azon $a_i$ oszlopai, amelyekre $f(i) < z(i) < g(i)$, lineárisan függetlenek. Mik lesznek az erős bázismegoldások? Mik lesznek az (erős) bázismegoldások, ha $f \ll g$ helyett csak $f \leq g$-t tesszük fel?

**450.** Bázismegoldása-e az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ rendszernek $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$? (Megoldás)

**451.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^m$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliéder $x^*$ és $z^*$ bázismegoldásait összekötő nyílt szakaszon van harmadik bázismegoldás, akkor $A^=_{x^*} = A^=_{z^*}$ (azaz $x^*$ ugyanazokat az egyenlőtlenségeket teljesíti egyenlőséggel, mint $z^*$).

## 5.5. Fourier-Motzkin elimináció

Legyen $A$ olyan $m \times n$-es mátrix ($m \geq 1, n \geq 2$), amelynek első, $a_1$-gyel jelölt oszlopa $0, \pm 1$ értékű. Jelölje rendre $I, J, K$ a sorok azon indexhalmazait, melyekre az $a_1(i)$ értéke $+1, -1$ illetve 0. Készítsük el az $A^{[1]}$ mátrixot a következőképpen. A $K$-nak megfelelő sorok változatlanul kerüljenek be $A^{[1]}$-be. Ezen kívül minden $i \in I$, $j \in J$ választásra legyen ${}_ia + {}_ja$ az $A^{[1]}$ egy sora, melyet jelöljünk ${}_{[ij]}a$-val. Ez azt jelenti, hogy ha $I$ vagy $J$ üres, akkor $A^{[1]}$ egyszerűen az $A$ mátrix $K$-nak megfelelő részmátrixa. Általában $A^{[1]}$-nek $m - (|I| + |J|) + |I||J|$ sora van. Figyeljük meg, hogy $A^{[1]}$ első oszlopa csupa nullából áll. Hasonlóképp, tegyük fel, hogy a $Q$ mátrix első oszlopa $0, \pm 1$ értékű, és rendeljük a

$$Qx' \leq b \tag{5.1}$$

egyenlőtlenség-rendszerhez a

$$Q^{[1]}x' \leq b^{[1]} \tag{5.2}$$

rendszert, ahol $b^{[1]}$ az $A := (Q, b)$ mátrixhoz tartozó $A^{[1]}$ mátrix utolsó oszlopa.

**452.**

a) Az

$$Ax \leq 0 \tag{5.3}$$

egyenlőtlenség-rendszernek bármely megoldása az

$$A^{[1]}x \leq 0 \tag{5.4}$$

rendszernek is megoldása, és az (5.4) bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva az (5.3) egy megoldását kapjuk.

b) Az (5.1) bármely megoldása az (5.2) rendszernek is megoldása, és az (5.2) bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva az (5.1) egy megoldását kapjuk.

**453.** Fourier-Motzkin elimiináció segítségével oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ill.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Megoldás)

**454.** Mit csinál a Fourier-Motzkin elimináció, ha annak segítségével akarjuk megoldani az $Ax = b$ egyenletrendszert, azaz, ha az

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$$

egyenlőtlenségrendszer megoldására használjuk?

**455.** Legyen $n := 2^p + p + 2$. Tekintsük a

$$\pm x_{i_1} \pm x_{i_2} \pm x_{i_3} \leq c_{i_1 i_2 i_3},\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$$

rendszert. Hogyan alakul a sorok száma a Fourier-Motzkin elimináció során?
(Megoldás)

**456.** Adott $k$ darab pont az $n$ dimenziós térben. A Fourier-Motzkin elimináció segítségével állapítsuk meg, hogy a 0 pont benne van-e a $k$ darab pont konvex burkában. Mit csinál az eljárás szemléletesen?

**457.** Írjuk fel az $\{x \in \mathbb{R}^3 : Qx \le b\}$ poliéder $x_1$ tengelymenti vetületét, ha

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**458.** Bizonyítsuk be, hogy az $\{x : Qx \le b\}$ poliéder lineáris képe, azaz $\{Ax : Qx \le b\}$ is poliéder ($A$ egy mátrix). (Megoldás)

**459.** Mutassuk meg, hogy metszetkúp tengelymenti *(külső vagy belső)* vetülete metszetkúp, illetve poliéder tengelymenti vetülete poliéder. (Megoldás)

**460.** Egy politóp és egy generált kúp összege poliéder. Speciálisan, minden politóp korlátos poliéder és minden generált kúp előáll metszetkúpként. (Megoldás)

**461.** (*Farkas-lemma, geometriai alak*) Ha egy $C \subseteq \mathbb{R}^k$ generált kúp nem tartalmaz valamely $b \in \mathbb{R}^k$ elemet, akkor létezik olyan (zárt) homogén féltér, amely magában foglalja $C$-t, de nem tartalmazza $b$-t. Ha egy $P$ politóp nem tartalmazza $b$-t, akkor létezik olyan féltér, amely magában foglalja $P$-t, de nem tartalmazza $b$-t. (Megoldás)

**462.** Legyen az $A$ mátrix sorai által generált kúp $G_A$, míg az $\{x : Ax \le 0\}$ metszetkúpot jelölje $M_A$. Vezessünk be hasonló jelöléseket a $B$ mátrixra is. Igazoljuk a következőket:

a) Ha $G_A \supseteq M_B$, akkor $M_A \subseteq G_B$.

b) Ha $G_A \subseteq M_B$, akkor $M_A \supseteq G_B$.

c) $G_A = M_B$ akkor és csak akkor ha $M_A = G_B$. (Megoldás)

**463.** Minden metszetkúp előáll generált kúpként. (Megoldás)

**464.*** Minden nemüres poliéder előáll mint egy politóp és egy generált kúp összege. Speciálisan, minden korlátos poliéder politóp.

**465.** Minden generált kúp a polárisának polárisa, azaz $(K^*)^* = K$.

**466.** Tekintsük négy változóban az $x_i \geq 0$, $x_i + x_j = 1$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ rendszert. Döntsük el a Fourier-Motzkin eliminációval, hogy van-e megoldása és van-e egész megoldása.

Egy sorvektort nevezzünk **szimplának**, ha vagy egyetlen nemnulla eleme van vagy kettő, de mindkettő abszolútértéke egy. Egy mátrixot szimplának nevezünk, ha sorai szimplák.

**467.** Bizonyítsuk be, hogy a Fourier-Motzkin elimináció szimpla mátrixból szimplát képez. Mondjunk példát „természetben előforduló" szimpla mátrixokra!

**468.** Lássuk be, hogy szimpla mátrixokon a Fourier-Motzkin elimináció polinomiális.

**469.** Legyen $A$ egy irányított gráf él-pont incidencia-mátrixa. Hogyan lehetne ábrázolni a gráfon a Fourier-Motzkin elimináció lépéseit?

**470.** Legyen a $G = (V, E)$ irányított gráf incidencia-mátrixa $A$. $c\colon E \to \mathbb{R}$, egy $\pi A \leq c$ megengedett potenciált keresünk. Hogyan követhető végig a Fourier-Motzkin elimináció?

**471.** Igazoljuk FM eliminációval, hogy egy élsúlyozott irányított gráfban akkor és csak akkor van negatív össz-súlyú irányított kör, ha nincsen olyan $\pi := V \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ fennáll minden $uv$ élre. Továbbá, ha a $c$ súlyfüggvény egészértékű, akkor $\pi$ is választható annak.
(Megoldás)

**472.** Határozzunk meg egy megengedett potenciált egy tetszőleges gráfban a Fourier-Motzkin eljárással.

**473.** Legyen a $G = (V, E)$ irányított gráf incidencia-mátrixa $A$. $c\colon E \to \mathbb{R}$, egy $\pi A \leq c$ megengedett potenciált keresünk. Hogyan követhető végig a Fourier-Motzkin elimináció?

## 5.6. Oldalak

Egy háromdimenziós poliédert lapok, élek illetve csúcsok határolnak. Ezeket a fogalmakat szeretnénk magasabb dimenzióra kiterjeszteni. Egy $R \subseteq \mathbb{R}^n$

nemüres poliéder $F$ **oldala** (face) $R$-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{5.6}$$

alakú nemüres részhalmaza, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely $cx$ lineáris célfüggvényre, melyre a maximum létezik. A $c \equiv 0$ célfüggvényre a definíció azt adja, hogy $R$ maga is oldal. **Valódi oldal**on (proper face) olyan oldalt értünk, amely nem az egész poliéder. A poliéder valódi oldala tehát az optimum helyek halmaza valamely nemnulla lineáris célfüggvényre nézve, másként szólva a poliédernek az a része, amely egy hipersíkkal érintkezik, amikor azt kívülről a poliéderhez toljuk. Amennyiben az oldal egyetlen pontból áll, úgy ezt a pontot a poliéder **csúcsá**nak nevezzük. Tehát egy $z \in R$ pont akkor csúcs, ha létezik olyan $c$ vektor, amelyre a $cz > cx$ minden $x \in R - z$-re. A $c \neq 0$ esetben a $H = \{x : cx = \delta\}$ hipersíkot a poliéder egy **támaszsíkjá**nak nevezzük.

A definícióból látszik, hogy egy poliéder oldala maga is poliéder. Egy affin altér például olyan poliéder, amelynek nincs valódi oldala. Poliéder **minimális oldalá**n egy tartalmazásra nézve minimális oldalt értünk. Egy tartalmazásra nézve maximális valódi oldalt **lap**nak (facet) nevezünk.

A poliédert **csúcsos**nak mondjuk, ha van csúcsa. Nem minden poliédernek van csúcsa, például az affin altereknek bizonyosan nincs.

Tekintsük az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres poliédert. Az alábbiakban megvizsgáljuk az $R$ néhány tulajdonságát a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{5.7}$$

leíró rendszer függvényében.

A $Qx \leq b$ rendszer egy $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségéről azt mondjuk, hogy **implicit egyenlőség**, ha $R$ minden eleme egyenlőséggel teljesíti (azaz, ha a fordított $qx \geq \beta$ egyenlőtlenség logikai következménye az $R$-t meghatározó rendszernek. Geometrialilag ez azt jelenti, hogy az $R$ poliéder teljesen az $\{x : \ qx = \beta\}$ hipersíkban fekszik.) Az implicit egyenlőségek által alkotott egyenlőség-rendszert $Q^{=}x = b^{=}$-vel jelöljük. Egy nem implicit egyenlőtlenséget **valódinak** mondunk, és az általuk alkotott rendszert $Q^{<}x \leq b_1^{<}$-vel jelöljük. (Az explicit $Px = b_1$ egyenlőség-rendszer tagjait automatikusan implicit egyenlőségeknek tekintjük.)

A $Qx \leq b_1$ egyenlőtlenség-rendszer egyik $qx \leq \beta$ tagját **feleslegesnek** nevezzük (az (5.7)-re nézve), ha az elhagyásával keletkező rendszer ugyanazt a poliédert definiálja. (Másszóval, $qx \leq \beta$ logikai következménye annak a rendszernek, amelyet az (5.7)-ből kapunk $qx \leq \beta$ kihagyásával.) Egy nem felesleges egyenlőtlenség neve **lényeges**. Hasonlóképpen beszélhetünk arról, hogy egy $Px = b_0$-beli egyenlőség **lényeges** vagy **felesleges** annak megfelelően, hogy kihagyása $R$-nél bővebb poliédert eredményez-e vagy $R$-t változatlanul hagyja.

Egy poliéder leírásából egymás után kihagyva az (aktuálisan) felesleges egyenlőtlenségeket és egyenlőségeket olyan leírást kapunk, amelyben már minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges. A kapott rendszer persze függhet az elhagyás sorrendjétől, hiszen egy eredetileg felesleges egyenlőtlenség egy másik elhagyásakor lényegessé válhat. Például, ha a poliéder a három dimenziós tér egy $e$ egyenese, amely három (különböző) $e$-t tartalmazó sík metszeteként van adva, akkor $e$ ezek közül bármelyik kettő metszeteként is megadható. Azt is feltehetjük, hogy minden szereplő $qx \leq \beta$ egyenlőtlenség valódi, mert különben helyettesíthetjük az $qx = \beta$ explicit egyenlőséggel. Nevezzük az $R$ poliéder (5.7) alakú leírását **minimálisnak**, ha minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges és minden egyenlőtlenség valódi. Látjuk tehát, hogy létezik minimális leírás.

**474.** Lehet-e egy konvex (3 dimenziós) poliédernek kevesebb lapja, mint egy síkra való vetülete éleinek száma? (Megoldás)

**475.** Konstruáljunk olyan $n$-dimenziós poliédert, amelynek $O(n)$ hiperlapja és legalább $2^n$ csúcsa van. (Megoldás)

**476.** Létezik-e olyan (3 dimenziós) poliéder, amelynek mind a 6 lapja valódi trapéz, azaz pontosan az egyik oldalpárja párhuzamos, és minden él a két hozzátartozó lap közül pontosan az egyikben tagja párhuzamos élpárnak? És ha a második feltételt elfelejtjük?

**477.*** Mutassuk meg, hogy az oldalak alábbi kétféle definíciója ekvivalens az $\{Ax \leq b\}$ poliéderre:

(i) bizonyos egyenlőtlenségeket egyenlőséggel kötünk meg (feltéve, hogy az így kapott megoldáshalmaz nem üres);

(ii) valamely $c$ vektorra vesszük a $\{z : Az \leq b, cz = \max\{cx : Ax \leq b\}$ halmazt (feltéve hogy a maximum létezik).

(Megoldás)

**478.** Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres $F$ részhalmaza akkor és csak akkor oldala $R$-nek, ha létezik a $Q$ bizonyos soraiból álló olyan $Q'$ részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol $b'$ a $Q'$ sorainak megfelelő részvektora $b$-nek.

**479.** Adjunk minden $n$-re olyan nemüres poliédert $\mathbb{R}^n$-ben, mely nem tartalmazza az origót, és nincs valódi oldala.

**480.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges nemüres $R$ poliédernek van olyan eleme, amely minden valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesít. (Megoldás)

**481.** Mutassuk meg, hogy az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliédert tartalmazó legszűkebb affin altér $Z_R := \{x : Q^= x = b^=\}$ , ahol $Q^=$ jelöli az implicit egyenlőségeknek megfelelő részmátrixot. Igazoljuk, hogy a poliéder dimenziója $n - r(Q^=)$. (Megoldás)

**482.** Mutassuk meg, hogy az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy $F$ oldalát tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Q^=_F x = b^=_F\}$. Igazoljuk, hogy az $F$ oldal dimenziója $n - r(Q^=_F)$, illetve egy minimális oldal dimenziója $n - r(Q)$.

Egy $c$ vektort illetve az általa meghatározott $cx$ célfüggvényt akkor mondjuk **semlegesnek** (vagy neutrálisnak) az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéderre nézve, ha $R$ minden $x$ elemére $cx$ értéke ugyanannyi. A semleges vektorok nyilván alteret alkotnak, melyet jelöljünk $S_R$-rel.

**483.** Bizonyítsuk a következő állításokat.

a) A semleges vektorok $S_R$ altere éppen a $R$-et tartalmazó legszűkebb $Z_R$ affin altér $A_R$ karakterisztikus alterének ortogonális kiegészítője.

b) Egy $c$ vektor akkor és csak akkor semleges, ha benne van $Q^=$ sorterében. (Megoldás)

**484.** Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ csúcsos poliéder $u$ és $v$ csúcsaira a következők ekvivalensek.

(i) $u$ és $v$ szomszédosak.

(ii) A $Q$ azon soraiból alkotott $Q^=_{uv}$ részmátrix, melyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket mind $u$, mind $v$ egyenlőséggel teljesíti, $n - 1$ rangú.

(iii) Léteznek $Q$-nak olyan $Q_u$ és $Q_v$ $n \times n$-es nemszinguláris részmátrixai, amelyekre $u$ a $Q_u x = b_u$ rendszer, míg $v$ a $Q_v x = b_v$ rendszer egyértelmű megoldása, és amelyeknek $n - 1$ soruk közös.

**485.** Tegyük fel, hogy a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer minimális, és hogy az $R$ megoldás halmaz nemüres. Ekkor az $R$-t tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Px = b_0\}$. Továbbá egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn az $R$ lapjai és a $Qx \leq b_0$ egyenlőtlenségei között, azaz $\{x \in R :\ {}_iqx = b_1(i)\}$ lapot alkot, és minden lap előáll ilyen alakban.

**486.** Igazoljuk, hogy minden valódi oldal lapok metszete. (Megoldás)

**487.** Tegyük fel, hogy mind a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer, mind a $\{P'x = b'_0,\ Q'x \leq b'_1\}$ rendszer minimális. Igazoljuk, hogy az ezek által definiált nemüres $R$ és $R'$ poliéderek akkor és csak akkor egyenlők, ha a $(P, b_0)$ és $(P', b'_0)$ mátrixok sortere ugyanaz, továbbá a $Qx \leq b_1$ és $Q'x \leq b'_1$ rendszer egyenlőtlenségei között egy-egy értelmű kapcsolat van, amelyben az egymásnak megfelelő $qx \leq \beta$ és $q'x \leq \beta'$ egyenlőtlenségekre fennáll, hogy a $(q, \beta) - (q', \beta')$ vektor benne van a $(P, b_0)$ mátrix sorterében (ami ugyanaz, mint a $(P', b'_0)$ mátrix sortere).

**488.** Igazoljuk, hogy egy poliéder minden lapjának dimenziója eggyel kisebb, mint a poliéder dimenziója.

**489.** Legyen $\{x : Ax \leq b\}$ a $P$ poliéder egy minimális leírása. Mutassuk meg, hogy $P$ pontosan akkor affin altér, ha $A = A^=$. (Megoldás)

**490.** Igazoljuk, hogy ha egy nemüres poliéder minimális leírásában lévő $px = \beta$ egyenlőséget helyettesítjük a $px \leq \beta, -px \leq -\beta$ egyenlőtlenségekkel, akkor ezek lényegesek (irredundánsak).

**491.** Az $m$-sorú $A$ mátrix sorai lineárisan függetlenek. Legyen $u$ és $v$ a $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ poliéder két csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy $u$ és $v$ pontosan akkor szomszédos, ha léteznek $A$-nak $A_1, A_2$ $m \times m$-es részmátrixai, hogy $m - 1$ közös oszlopuk van, továbbá $A_1x = b$ ill. $A_2x = b$ egyértelmű megoldása nullákkal kiegészítve éppen $u$ ill. $v$.

**492.** Legyen $P$ egy egyenlőtlenségekkel megadott csúcsos poliéder. Hogyan dönthetjük el algoritmikusan egy $x$ pontról, hogy belső pontja-e $P$ valamely két szomszédos csúcsát összekötő szakasznak?

**493.** Ha $qx \leq \beta$ valódi és lényeges egyenlőtlensége (5.7)+nak, akkor $R$-nek van olyan $z$ pontja, amelyre $qz = \beta$. (Megoldás)

**494.*** Tegyük fel, hogy az $R$ poliéder egy minimális (5.7) alakú rendszerrel van adva. A következő állítások ekvivalensek.

(i) $R$ affin altér.

(ii) $R$-nek nincs valódi oldala.

(iii) Minden lényeges egyenlőtlenség implicit egyenlőség (azaz $Q$ üres).

(Megoldás)

**495.** Mutassuk meg, hogy minden minimális oldal affin altér. (Megoldás)

**496.** Bizonyítsuk be, hogy egy poliéder minimális oldalainak dimenziója megegyezik. (Megoldás)

**497.*** Tegyük fel, hogy (5.7) minimális leírása $R$-nek. Az $R$ akkor és csak akkor van benne egy $H := \{x : ax = \beta\}$ hipersíkban (másszóval $ax = \beta$ akkor és csak akkor logikai következménye (5.7)+nak), ha létezik olyan $y_0$, amelyre $y_0 P = a$ és $y_0 b_0 = \beta$ (azaz, $ax = \beta$ lineáris következménye $Px = b_0$-nak.)

**498.** Tegyük fel, hogy $R$ egy minimális (5.7) rendszerrel van megadva. Legyen $F$ az $R$-nek egy oldala. Legyen $Q'$ a $Q$-nak egy $m' \times n$-es részmátrixa. A $Q'$ által meghatározott $F' := \{x \in R : Q'x = b_1'\}$ oldal akkor és csak akkor ugyanaz mint $F$, ha $Q'$ része $Q_F^=$-nek és $r(Q') = r(Q_F^=)$.

**499.** A $Qx \le b$ egyenlőtlenség-rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázismegoldás, ha eleme az $R = \{x : Qx \le b\}$ poliéder egy minimális oldalának.

**500.** Ha a $P$ poliédernek van két csúcsa, akkor minden $x \in P$-hez van olyan $z \neq 0$ vektor, hogy $\{x + \lambda z : \lambda \in \mathbb{R}\} \cap P$ korlátos. (Megoldás)

**501.** Adott egy egész csúcsos poliéder, és egy pontja. Keressünk polinom időben egész pontot a poliéderben! (Megoldás)

**502.*** Adott egy egész poliéder, és egy pontja. Keressünk polinom időben egész pontot a poliéderben!

# 6. fejezet

# Lineáris programozás

## 6.1. A Farkas-lemma alakjai

**503.** Írjuk fel az alábbi egyenlőtlenség-rendszer megoldhatóságának feltételét (Farkas-lemma):

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 + 4x_2 &= -1, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\geq 0, \\ x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(Megoldás)

**504.** Legyen $A_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{j\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^k$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$, $b_3 \in \mathbb{R}^j$, $a$, $b_4 \in \mathbb{R}^n$. Írjuk fel a Farkas-lemmát az alábbi rendszerre.

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n : A_1x_1 \leq b_1, A_2x_2 \leq b_2, A_3x_3 \geq$$
$$\geq b_3, x_1 + x_2 + x_3 = b_4, a^\mathsf{T} x_2 = \sqrt{17}, x_1 \geq 0.$$

**505.** Tekintsük a következő alakú egyenlőtlenségrendszereket:

$$1.\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \qquad 2.\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}, \qquad 3.\begin{cases} Ax \leq b \end{cases}, \qquad 4.\begin{cases} Ax = a \\ Bx \leq b \end{cases}$$

a) Vezessünk vissza egy 1. alakú rendszert egy 2. alakúra és fordítva is!

b) Vezessünk vissza egy 2. alakú rendszert egy 3. alakúra és fordítva is!

c) Vezessünk vissza egy 3. alakú rendszert egy 4. alakúra és fordítva is!

d) Írjuk fel mind a négy rendszerre a Farkas-lemmát, és igazoljuk a Farkas-lemma különböző alakjainak ekvivalenciáját a fenti visszavezetések segítségével! (Megoldás)

**506.*** Igazoljuk a Farkas-lemma következő sortérbeli jelentését: bármely altér és az ortogonális kiegészítője közül pontosan az egyikben van olyan nemnegatív vektor, aminek az utolsó koordinátája pozitív.

**507.** Tekintsük az $Ax_1+Bx_2 = b, x_2 \geq 0$ rendszert. Írjuk fel a Farkas-lemma szerinti duálisának olyan ekvivalens alakját, amely a primál rendszerrel megegyező alakú. Alkalmazzuk a kapott rendszerre a Farkas-lemmát. Mutassuk meg, hogy az eredetivel ekvivalens rendszerhez jutottunk.

**508.** Bizonyítsuk be, hogy egy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixra és egy $b \in \mathbb{R}^n$ vektorra, ha $\nexists x : Ax \leq b$, akkor van $m+1$ sor, hogy az ezek által kijelölt $A'$ részmátrixra és $b'$ részvektorra $\nexists x : A'x \leq b'$. (Megoldás)

**509.** Bizonyítsuk be, hogy két diszjunkt poliéder erősen szétválasztható, azaz létezik két párhuzamos elválasztó hipersík: létezik $c$ vektor és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hogy $\sup_{x\in P_1} cx < \alpha < \beta < \inf_{x\in P_2} cx$. Igaz-e hasonló állítás poliéderek helyett konvex, zárt halmazokra? (Megoldás)

**510.** Bizonyítsuk be, hogy két diszjunkt konvex poligon valamelyikének van olyan oldalegyenese, amelyik elválasztja őket. Igaz-e hasonló állítás magasabb dimenzióban (lapsíkokkal, lap-hipersíkokkal)? (Megoldás)

**511.** Mutassuk meg, hogy ha $f \leq g$, akkor

$$\exists x : \; Ax \leq b, \; f \leq x \leq g \iff$$

$$\nexists y \geq 0 : \; yb + \sum_{i: ya_i < 0} (-ya_i g_i) - \sum_{i: ya_i > 0} ya_i f_i < 0.$$

(Megoldás)

**512.** Igazoljuk, hogy egy rendszernek egy egyenlőtlenség pontosan akkor logikai következménye, ha lineáris következménye. Bizonyítsuk ezt a Gauss-elimináció segítségével is. A feladat állításából bizonyítsuk be a dualitástételt. (Megoldás)

**513.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k, a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$ és $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq 0$. Tegyük fel hogy az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszernek $ax \leq \beta$ lineáris ($\Leftrightarrow$ logikai) következménye. Lássuk be, hogy $Ax \leq b$-nek van egy legfeljebb $n+1$ sorból álló $A'x \leq b'$ részrendszere, melynek következménye az $ax \leq \beta$ egyenlőtlenség.

**514.** Legyen $P = \{x : Ax \leq b\} \neq \emptyset$. Lássuk be, hogy az első egyenlőtlenség pontosan akkor *implicit egyenlőség* (azaz minden megoldás egyenlőséggel teljesíti), ha $\exists y \geq 0 : yA = 0, yb \leq 0, y_1 > 0$. (Megoldás)

## 6.2. Lineáris programok, szimplex módszer

### 6.2.1. Bázistranszformációk, bázistáblák

**515.** Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bázis egy vektortérben, $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ és $1 \leq j \leq n$. Vezessük be a következő jelöléseket: $v'_i := v_i$ minden $i \neq j$ esetén és $v'_j := u$. Tegyük fel, hogy $\alpha_j \neq 0$. Mik a $w$ vektor koordinátái a $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ bázisban?

**516.** Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, v_3$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban, $u = 2v_1 + v_2 - 4v_3$ és $w = 3v_1 + 5v_2 + v_3$. Mik a $w$ vektor koordinátái a $v_1, u, v_3$ bázisban?

**517.** Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, v_3$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban, $u = 2v_2 - v_3$ és $w = v_1 + 3v_2 - 2v_3$. Mik az $u, w, v_1, v_2, v_3$ vektorok koordinátái az $v_1, v_2, v_3$ bázisban? Mik a koordinátáik a $v_1, v_2, u$ bázisban?

**518.** Tegyük fel, hogy $v_1, v_2, v_3$ bázis $\mathbb{R}^3$-ban, $u = v_1 - v_3$ és $w = 2v_1 - 4v_3$. Mik az $u, w, v_1, v_2, v_3$ vektorok koordinátái az $v_1, v_2, v_3$ bázisban? Mik a koordinátáik a $u, v_2, v_3$ bázisban?

Legyenek $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok, amelyekre

$$n = \dim\langle v_1, \ldots, v_k\rangle.$$

Legyen a $v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}$ ($1 \leq j_i \leq k$, $i = 1, \ldots, n$ esetén) vektorrendszer a $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ altér egy bázisa, és az $m_{ij}$ ($i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$) együtthatók olyanok, hogy $v_j = m_{1j}v_{j_1} + m_{2j}v_{j_2} + \cdots + m_{nj}v_{j_n}$ ($j = 1, \ldots, k$). Jelöljük $M$-mel azt az $n \times k$-es mátrixot melynek $i$-dik sorának $j$-dik oszlopában $m_{ij}$ áll. Ezt az $M$-et a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer $v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}$ bázisához tartozó *bázistáblának* nevezzük.

**519.** Legyen $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$. Lássuk be, hogy $(\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}\} - \{v_{j_i}\}) \cup \{v_j\}$ bázis $\Longleftrightarrow m_{ij} \neq 0$.

**520.** Legyen $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$-ra $m_{ij} \neq 0$. Legyen $j'_i = j$ és $j'_l = j_l$ minden $1 \leq l \leq n$, $l \neq i$ esetén. Jelölje $M' = (m'_{ij})$ a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer $v_{j'_1}, \ldots, v_{j'_n}$ bázisához tartozó bázistáblát. Lássuk be, hogy $m'_{\nu\mu} = m_{\nu\mu} - m_{i\mu}\frac{m_{\nu j}}{m_{ij}}$ minden $1 \leq \nu \leq n, \nu \neq i$,$1 \leq \mu \leq k$ esetén és $m'_{i\mu} = -\frac{m_{i\mu}}{m_{ij}}$ minden $1 \leq \mu \leq k$ esetén.

**521.** Jelöljük $N$-nel a $v_1, \ldots, v_k$ oszlopvektorokból álló $n \times k$-as mátrixot, $B$-vel pedig a $v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}$ oszlopvektorokból álló $n \times n$-es mátrixot. Lássuk be, hogy $M = B^{-1}N$.

**522.** Tegyük fel, hogy valamely $j'_1, \ldots, j'_n$ indexekre $v_{j'_1} = e_1, \ldots, v_{j'_n} = e_n$, ahol $e_i$ az $i$-edik egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben. Jelöljük $C$-vel $M$-nek azt a részmátrixát mely $M$ $j'_1, \ldots, j'_n$-edik oszlopaiból áll, pontosabban legyen $C$ $l$-edik oszlopa $M$-nek $j'_l$-edik oszlopa. Lássuk be, hogy $B^{-1} = C$.

**523.** Készítsünk az előző feladatok alapján egy olyan algoritmust, ami invertál egy adott $A$ mátrixot vagy kideríti ha nem invertálható, és ad egy összefüggést $A$ oszlopai között! (Megoldás)

**524.** Készítsünk az előző feladatok alapján egy olyan algoritmust, ami megold egy adott $Ax = b$ egyenletrendszert, vagy ha nem megoldható, akkor ad egy $yA = 0, yb \neq 0$ duális megoldást! (Megoldás)

**525.** $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$, $e_1, e_2, e_3, e_4$ az $\mathbb{R}^4$ egységvektorai, $a_3, a_4, e_3, e_4$ egy bázis $\mathbb{R}^4$-ben és az alábbi táblázat egy érvényes bázistábla (az egységmátrix nélkül).

| | $a_1$ | $a_2$ | $e_1$ | $e_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_3$ | 0 | 3 | 1 | 1 |
| $a_4$ | 2 | 2 | 1 | 3 |
| $e_3$ | 0 | 2 | 2 | 0 |
| $e_4$ | 1 | 0 | 1 | 3 |

a) Lássuk be, hogy $a_2, a_3, a_4, e_3$ lineárisan függő vektorok, és adjunk meg egy nemtriviális lineáris kombinációt, mely a 0-t adja!

b) Adjunk meg egy olyan $y \in \mathbb{R}^4$ vektort, melyre $ya_1 = 0$, $ya_2 = 2$, $ya_3 = 0$, $ya_4 = 0$!

c) Jelöljük $A$-val azt a $4 \times 4$-es mátrixot, melynek oszlopai $a_1, a_2, a_3, a_4$. Invertálható-e $A$? Ha igen, adjuk meg $A^{-1}$-et, ha nem, adjunk egy lineáris összefüggést $A$ oszlopai között!

d) Határozzuk meg $a_1$-et!

**526.** Invertáljuk a következő mátrixokat:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

**527.** Odjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, illetve ha nincs megoldásuk, adjunk egy duális megoldást!

a)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 \quad -x_3 &= 10 \\ -x_1 \qquad\quad +3x_3 &= -7 \\ 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad +x_3 &= 2 \\ 6x_1 - 4x_2 \quad -2x_3 &= -2 \\ 9x_1 - 2x_2 \quad +2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1{+}2x_2{+} \quad 3x_3 &= 1 \\ x_2 \qquad -x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**528.** Oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot szimplex-módszerrel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 12 \\ x_1 + x_3 + x_6 &= 14 \\ x &\geq 0 \\ \max\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3&. \end{aligned}$$

### 6.2.2. Végesség, elméleti kérdések

**529.** Készítsünk olyan példát, melyre a megengedettségi szimplex-módszer Bland-szabály nélkül ciklizál. (Megoldás)

**530.*** (*Charnes-Cooper-módszer*) Legyen $P = \{Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ korlátos, és tegyük fel, hogy minden $x \in P$-re $dx + d_0 > 0$. Keressük az alábbi feladat optimális megoldását:

$$\max \frac{cx + c_0}{dx + d_0}, x \in P.$$

(Megoldás)

**531.** Bizonyítsuk be a szimplex módszerrel illetve a szimplex módszerre hivatkozás nélkül is, hogy ha egy $P$ poliédernek $\overline{x}$ egy olyan csúcsa, amire $cx$ nem maximális, akkor $\overline{x}$-ból indul olyan él, ami mentén $cx$ nő.

**532.** Adott egy $P$ csúcsos poliéder. Bizonyítsuk be, hogy bármely csúcsból bármelyikbe eljuthatunk a poliéder élein (1 dimenziós oldalain) haladva.
(Megoldás)

Az $A$-nak egy $m \times m$-es nemszinguláris részmátrixát **bázis**nak nevezzük. Formálisan ebbe beleértjük, hogy a részmátrix oszlopainak egy sorrendje is adott. Rögzített $B$ bázis esetén egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektort $x = (x_B, x_N)$ alakban írhatunk, ahol $x_B$-vel jelöljük a bázishoz tartozó koordinátákat, $x_N$-nel pedig a többit. A $B$-hez tartozó primál vektor: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0$. Ha $B^{-1}b \geq 0$, akkor $\bar{x}$ primál megoldás, azaz a $B$ bázis **primál megengedett**. A $B$ bázishoz tartozó szimplex-tábla $\bar{A} = B^{-1}A$, a jobboldal pedig $\bar{b} = B^{-1}b$.

A $B$ bázishoz tartozó duális vektor: $\bar{y} = c_B B^{-1}$, ahol $c_B$ a $c$ célfüggvény $B$ bázishoz tartozó része. A $B$ bázishoz tartozó **redukált költség**: $\bar{c} = \bar{y}A - c$. A bázis **duál megengedett**, ha $\bar{c} \geq 0$, és **optimális**, ha primál és duál megengedett.

**533.** Adott egy optimális bázis.

a) Ha egy változó célfüggvény együtthatóját $\delta$-val növeljük, milyen $\delta$ értékek esetén marad a bázis duál megengedett?

b) Most legyen $w \in \mathbb{Q}^n$ adott, és nézzük a következő célfüggvény-módosítást: $c' = c + \delta w$. Milyen $\delta$ értékek esetén marad a bázis duál megengedett?

**534.** Milyen $\delta$ értékek esetén marad az optimális bázis primál megengedett, ha a jobboldal egyik együtthatóját növeljük $\delta$-val? Hogy változik a célfüggvény értéke? (Megoldás)

**535.** Legyen $d \in \mathbb{Q}^n$ adott, és nézzük a következő jobboldal-módosítást: $b' = b + \delta d$. Milyen $\delta$ értékek esetén marad a bázis primál megengedett?

**536.** Bizonyítsuk be a szimplex módszerre hivatkozás nélkül, hogy ha a $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ feladat célfüggvényértéke nem korlátos, akkor van olyan növelő irány, aminek legfeljebb $m + 1$ koordinátája pozitív, ahol $m$ az $A$ sorainak a száma (és a rangja).

**537.** Adott egy $P \subseteq \mathbb{Q}^n$ korlátos poliéder, $c \in \mathbb{Q}^n$, és egy $x \in P$, ami nem csúcs. Adjunk polinomiális algoritmust, ami talál egy $\overline{x}$ csúcsot amire $c\overline{x} \geq cx$.

**538.** Tegyük fel, hogy egy feladatnál az optimális bázis nem degenerált. Hogyan lehet a szimplex táblából kiolvasni, hogy a feladatnak végtelen sok optimális megoldása van? Mi a helyzet degeneráció esetén?

**539.** Tekintsük a $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ feladatot, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (-2, 0, -3, -1, 0{,}0).$$

Mutassuk meg, hogy csak egy optimális megoldás van. Mi az, és mi az optimális bázis? Minden egyes $1 \leq j \leq 5$-re mondjuk meg, hogy milyen értékek között változtathatjuk $c_j$-t ($c$ többi komponensét nem változtatva) úgy, hogy ez a bázis optimális maradjon.

## 6.3. Dualitás-tétel

**540.** Írjuk fel a következő feladat duálisát:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min\ 2x_1 + 3x_3. \end{aligned}$$

**541.** Mennyi $\min(2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4)$ a következő feltételek mellett:

$$x_1 + 2x_3 - x_4 \geq 1$$
$$x_2 - x_3 + x_4 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Használjunk grafikus megoldási módszert. Adjunk meg egy optimális $x$ vektort.

**542.** Határozzuk meg az alábbi feladat duálisának egy optimális megoldását!

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \leq & 1, \\ x_1 + x_2 & \leq & 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 3, \\ & \vdots & \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & \leq & n, \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0,$$

$$\max(nx_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n).$$

**543.** Legyen $A_1 \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{j \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^k$, $b_2 \in \mathbb{R}^l$, $b_3 \in \mathbb{R}^j$, $a$, $b_4$, $c_1$, $c_2$, $c_3 \in \mathbb{R}^n$! Írjuk fel a dualitás-tételt az alábbi rendszerre!

$$\max(c_1 x_1 + c_2 x_2 - c_3 x_3): \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n,$$
$$A_1 x_1 \leq b_1, A_2 x_2 \leq b_2, A_3 x_3 \geq b_3, x_1 + x_2 + x_3 = b_4, a^\mathsf{T} x_2 = \sqrt{17}, x_1 \geq 0$$

**544.** Mi az alábbi feladat optimumértéke a különböző célfüggvények esetén? Mi a duális feladat optimális megoldása? Használhatunk grafikus megoldási módszert. Mikor optimális megoldása a $(\frac{2}{7}; 0; \frac{3}{7}; 0)$ vektor a feladatnak?

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 1$$
$$-x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_1, \ldots, x_4 \geq 0$$

a) $\max 4x_1 - 20x_2 + 9x_3 - 5x_4$

b) $\max 3x_1 - 20x_2 + 8x_3 - 5x_4$

c) $\max 4x_1 - 20x_2 + 9x_3 - 5x_4$ (Megoldás)

**545.** Mi az alábbi feladat optimumértéke? Mi(k) a duális feladat optimális megoldása(i)?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &\le 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \\ \max 4x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 & \end{aligned}$$

Használhatunk grafikus megoldási módszert.

**546.** Tekintsük az $Ax = b, x \ge 0, x \in \mathbb{R}^n$ rendszert. Az $i \in \{1, \dots, n\}$ indexet akkor nevezzük *lényegesnek*, ha létezik olyan $x$ megoldás, amire $x_i > 0$. Bizonyítsuk be, hogy $i$ pontosan akkor lényeges, ha nem létezik olyan $y$ vektor, hogy $yA \ge 0, yb = 0$ és $ya_i > 0$. (Megoldás)

**547.** Lehetséges-e, hogy az $\{x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$ primál és az $\{y : yA \ge c,\ y \ge 0\}$ duál poliéder egyaránt üres? (Megoldás)

**548.** Lehetséges-e, hogy az $\{x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$ és az $\{y : yA \ge c,\ y \ge 0\}$ poliéderek mindegyike nemüres és korlátos? (Megoldás)

**549.** Lássuk be, hogy ha az $\{x : Ax \le b,\ x \ge 0\}$ primál poliéder üres, akkor az $\{y : yA \ge c,\ y \ge 0\}$ duál poliéderen (ha nem üres,) a $by$ célfüggvény alulról nem korlátos! (Megoldás)

**550.** A következő 9 eset közül melyik fordulhat elő?
A primál poliéder: üres / nemüres és a célfüggvény korlátos / nemüres és a célfüggvény nem korlátos;
A duál poliéder: üres / nemüres és a célfüggvény korlátos / nemüres és a célfüggvény nem korlátos.

**551.** Írjunk fel olyan nemtriviális lineáris programot, ami önmaga duálisa.

**552.** Igazoljuk a dualitás-tételt az alábbi úton. Tegyük fel, hogy $Ax \le b, x \ge 0$ és $yA \ge c, y \ge 0$ is megoldható. Vizsgáljuk az $Ax \le b$, $A^\mathsf{T} y \ge c$, $by - cx \le 0$, $x$, $y \ge 0$ rendszer megoldhatóságát.

**553.** Vezessük le a dualitás-tételből a Farkas-lemma azon alakját, hogy az $Ax = b, x \ge 0$ ill. $yA \ge 0, yb < 0$ rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. (Megoldás)

**554.*** Legyenek $P_1$ és $P_2$ poliéderek, $x_0 \in P_1 \cap P_2$ és $c$ olyan, hogy $x_0$ maximalizálja $cx$-et $P_1 \cap P_2$-n. Bizonyítsuk be, hogy létezik $c = c_1 + c_2$ felbontás, hogy $x_0$ maximalizálja $c_1x$-et $P_1$-en és $c_2x$-et $P_2$-n. (Megoldás)

**555.** A $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ poliéderhez adottak a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ célfüggvények. A szimplex módszert szubrutinként alkalmazva adjunk algoritmust olyan $P$-beli megoldás keresésére, mely $c_1$-re nézve optimális, és az ilyenek között $c_2$-re is az. (Megoldás)

**556.*** (*Neumann*) Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixra legyen $\mathcal{O}_A = \{Ax : x \geq 0, \mathbf{1}x = 1\}$ és $\mathcal{S}_A = \{yA : y \geq 0, \mathbf{1}y = 1\}$ (azaz $\mathcal{O}_A$ az $A$ oszlopainak, $\mathcal{S}_A$ pedig az $A$ sorainak konvex burka). Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\min_{x\in\mathcal{O}_A} \max_i x_i = \max_{y\in\mathcal{S}_A} \min_j y_j.$$

(Megoldás)

**557.** Legyen $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$. A $c$ vektort *neutrálisnak* nevezzük, ha $cx$ konstans függvény $P$-n. $c_1 \sim c_2$, ha $c_1 - c_2$ neutrális. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.

a) Tetszőleges $y$ esetén $yA$ neutrális.

b) Ha $c \geq 0, x_0 \in P, cx_0 = 0$, akkor $x_0$ minimális $c$-re.

c) Ha $x_0$ minimális $c$-re, akkor $\exists c' \geq 0, c' \sim c$, hogy $c'x_0 = 0$.

d) Adjunk példát olyan neutrális vektorra, ami nem áll elő $yA$ alakban.

e) Tegyük fel, hogy $P$ minden $x$ elemére $x_{k+1}, \ldots, x_m = 0$, de az első $k$ koordináta néha pozitív. Ekkor

$$\{\text{neutrális vektorok}\} = \left\{ \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i e_i + yA : \lambda_i \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

(Megoldás)

**558.** Tekintsük a $\min\{cx \colon Ax = b,\ x \geq 0\}$ lineáris programot. Az $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexet akkor nevezzük *lényegesnek*, ha létezik olyan $x$ megoldás, amire $x_i > 0$. Legyen $A'$ az $A$ lényeges oszlopai által alkotott részmátrix, és jelölje $c'$ a $c$ megfelelő részét. Igazoljuk, hogy $c$ akkor és csak akkor neutrális, ha létezik olyan $y$, amelyre $yA' = c'$.

## 6.4. Szigorú egyenlőtlenségek

**559.** Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ \max cx& \end{aligned}$$

feladat optimuma véges. Ekkor létezik $x^*$ primál és $y^*$ duál optimális megoldás, hogy

$$\begin{aligned} b - Ax^* + y^* &\gg 0, \\ y^*A - c + x^* &\gg 0. \end{aligned}$$

(Megoldás)

**560.** Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik olyan $z$ megoldása, amelynek első komponense negatív, a többi nemnegatív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ekvivalensek az alábbi állítások:

(i) $\exists x \geq 0 : Ax = b$;

(ii) $\exists y \geq 0 : A_1 y = b$, ahol $A_1$ az $A$ mátrixból keletkezik az első oszlop törlésével.

(Megoldás)

**561.** (*Gordan tétele*) Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik $x$ amire $Ax \ll 0$ (azaz $Ax$ minden koordinátája negatív), ha nem létezik $y \neq 0$, amire $yA = 0$ és $y \geq 0$. (Megoldás)

**562.** Mutassuk meg, hogy az $Ax \leq 0$ rendszernek akkor és csak akkor van nemnulla megoldása, ha van olyan $c$ vektor, amire az $yA = c,\ y \geq 0$ rendszer nem megoldható. (Megoldás)

**563.*** Legyen $C$ egy ferdén szimmetrikus mátrix, azaz $C^\top = -C$. Bizonyítsuk be, hogy

a) vagy létezik $x \geq 0$, hogy $Cx \geq 0$ és $x$ első komponense pozitív, vagy létezik $x \geq 0$, hogy $Cx \geq 0$ és $Cx$ első komponense pozitív;

b) $\exists x \geq 0 : Cx \geq 0,\ Cx + x \gg 0$. (Megoldás)

**564.*** (*Tucker*) Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli altérből és az ortogonális komlementeréből kiválasztható egy-egy nemnegatív vektor, hogy az összegük minden komponensben szigorúan pozitív. (Megoldás)

**565.** Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

a) *(Gordan)* $\exists x : Ax \ll 0 \iff \nexists y \neq 0, yA = 0, y \geq 0$.

b) *(Stiemke)* $\exists x : Ax = 0, x \gg 0 \iff \nexists y : yA > 0$.

c) *(Ville)* $\exists x : Ax \ll 0, x \geq 0 \iff \nexists y > 0, yA \geq 0$.

d) *(Tucker)* $\exists x : Ax \geq 0, x \geq 0, x_k > 0 \iff \nexists y \geq 0, yA \leq 0, (yA)_k < 0$. (Megoldás)

**566.*** Legyen $A$ maximális sorrangú. Ekkor ekvivalensek:

(i) $\{Ax = b, x \geq 0\}$ korlátos;

(ii) Sor($A$)-ban létezik pozitív vektor (minden koordinátája pozitív);

(iii) Null($A$)-ban $\nexists x \geq 0, x \neq 0$ vektor.

**567.** Legyen $A$ maximális sorrangú. Ekkor ekvivalensek:

(i) $\{yA \geq c\}$ korlátos;

(ii) Null($A$)-ban létezik pozitív vektor (minden koordinátája pozitív);

(iii) Sor($A$)-ban $\nexists x \geq 0, x \neq 0$ vektor.

**568.** Bizonyítsuk be, hogy $\nexists x : A_1x \ll b, A_2x \leq 0 \iff \exists y_1, y_2 : y_1A_1 + y_2A_2 = 0, y_1b \leq 0, y_1 > 0, y_2 \geq 0$.

**569.** (*Tucker*) Tetszőleges $A$ mátrix esetén $\exists x, y : Ax \geq 0,\ x \geq 0,\ yA \leq 0,\ y \leq 0,\ x - A^Ty \gg 0,\ y + Ax \gg 0$. (Megoldás)

**570.** Bizonyítsuk be, hogy

a) $\exists x : Ax = b, x \gg 0 \iff yA \geq 0, by \leq 0$ esetén $yA = 0$ és $yb = 0$.

b) $\exists x : Ax \ll b \iff yA = 0, yb \leq 0, y \geq 0$ esetén $y = 0$. (Megoldás)

**571.** Bizonyítsuk be, hogy ekvivalensek:

(i) létezik $x$, hogy $x \geq 0, Ax = b, x_1 > 0$ ($x_1$ az $x$ első komponense);

(ii) minden $y$-ra, ha $yA \geq 0, yb \leq 0$, akkor $yb = 0, ya_1 = 0$ ($a_1$ az $A$ mátrix első oszlopa).

(Megoldás)

**572.** Bizonyítsuk be, hogy $\exists x : A_1x \ll b_1, A_2x \leq b_2 \iff y_1, y_2 \geq 0, y_1A_1 + y_2A_2 = 0, y_1b_1 + y_2b_2 \leq 0$ esetén $y_1 = 0$ és $y_1b_1 + y_2b_2 = 0$.

**573.** Bizonyítsuk be, hogy $\exists x : A_1x \ll b_1, \; A_2x \leq b_2 \iff \nexists y_1, y_2 \geq 0, y_1A_1 + y_2A_2 = 0, y_1b_1 + y_2b_2 \leq 0, y_1(b_1 - \mathbf{1}) + y_2b_2 < 0$.

## 6.5. Algoritmikus visszavezetések

**574.** Van egy szubrutin, amely megtalálja egy $\{Bx = 0, \mathbf{1}x = 1, x \geq 0\}$ típusú rendszer egy megoldását, ha létezik. Ennek felhasználásával készítsünk algoritmust, amely megtalálja egy $\{Ax = b, x \geq 0\}$ típusú rendszer egy megoldását, ha létezik.

**575.** Adott egy szubrutin, ami egy olyan $Q$ mátrixra, amelynek legfeljebb $n$ sora és $m$ oszlopa van, a $Qx = d$, $x \geq 0$ rendszernek megadja egy megoldását, ha létezik. Ezen szubrutin segítségével oldjuk meg minél gyorsabban a $Px_0 + Ax_1 = b$, $x_1 \geq 0$ rendszert, ahol $P$-nek $n$ sora van, valamint $P$-nek és $A$-nak együtt $m$ oszlopa van. (Megoldás)

**576.** Adott egy orákulum, amely $A, b, c, x_0, y_0$ input esetén ha $Ax_0 \leq b$ és $y_0A = c, y \geq 0$ teljesül, akkor megadja a $\max cx$, $Ax \leq b$ lineáris program optimumértékét (ami az $y_0$ miatt véges). Adjunk polinomiális algoritmust ennek felhasználásával valamely egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságának eldöntésére.

**577.** Rendelkezésre áll egy eljárás, amely tetszőleges $A$ mátrixra és $b$ vektorra eldönti, hogy $Ax = b, x \geq 0$ megoldható-e, és ha igen, akkor megad egy megoldást. Adjunk ezen szubrutin felhasználásával polinomiális eljárást, amely maximalizálja a $cx$ célfüggvényt az $\{x : A'x \leq b', x \geq 0\}$ poliéderen. (Megoldás)

**578.** Adott egy orákulum, amely egy egyenlőtlenség-rendszerről eldönti, van-e megoldása. Ezt felhasználva adjunk polinomiális algoritmust az

$$Ax = b,\ x \geq 0$$

rendszer egy megoldásának meghatározására. (Megoldás)

**579.** Adott egy szubrutin, amely egy nemüres $P$ poliéderre és egy $c$ vektorra kiszámítja $\max\{cx\colon x \in P\}$ értékét, ami $\infty$ is lehet. Ezen szubrutin segítségével döntsd el adott nemüres $P_1$, $P_2$ poliéderekről, hogy $P_1 \subseteq P_2$ teljesül-e! (Megoldás)

**580.** Adott egy orákulum, amely $A, b, c, x_0$, input esetén ha $Ax_0 \leq b$, akkor megadja a $\max cx$, $Ax \leq b$ lineáris program optimumértékét, vagy azt, hogy a célfüggvény nem korlátos. Adjunk polinomiális algoritmust ennek felhasználásával valamely egyenlőtlenség-rendszer megoldhatóságának eldöntésére. (Megoldás)

**581.** Adott egy szubrutin $Ax = b, x \geq 0$ egy bázismegoldásának meghatározására. Mutassunk olyan polinomiális eljárást, ami a szubrutin segítségével megadja $A'x' \leq b', x' \geq 0$ egy bázismegoldását.

**582.** Adott egy eljárás, amely eldönti, hogy egy tetszőleges $k \times n$-es $A$ mátrixra és $b$ $k$-dimenziós vektorra van-e megoldása az $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$ rendszernek. Adjunk polinomiális eljárást, amely ennek felhasználásával eldönti, hogy van-e megoldása az $\{A_1 x \leq b\}$ rendszernek, ahol $A_1$ egy adott $k \times (n-1)$-es mátrix. (Megoldás)

**583.** Adott egy eljárás, amely eldönti, hogy egy tetszőleges $Ax \leq b$ egyenlőtlenség-rendszernek, amiről tudjuk, hogy van megoldása, egy tetszőlegesen kiválasztott sora redundáns-e. Adjunk polinomiális eljárást, amely ennek felhasználásával eldönti, hogy van-e megoldása egy adott egyenlőtlenség-rendszernek. (Megoldás)

## 6.6. Duál szimplex módszer

**584.** Mutassuk meg, hogy a duál szimplex módszer egy lépése után a bázis duál megengedett marad.

**585.** Mutassuk meg, hogy a duál szimplex módszer egy lépése során a célfüggvény-érték nem nő.

**586.** Adjunk módszert egy kezdeti duál megengedett bázis megtalálására.

**587.** Adott egy $G = (V_1, V_2, E)$ összefüggő páros gráf. Szerepelt, hogy a gráf $A$ incidencia-mátrixa TU, tehát az $Ax = \mathbf{1}, x \geq 0$ rendszer pontosan akkor megoldható, ha van teljes párosítás. Mi az $A$ mátrix rangja? Ha teljes sorrangúvá tesszük, mi egy bázis? Mikor primál illetve duál megengedett egy bázis?

**588.** Mit csinál az előző feladatban szereplő rendszerre a duál szimplex módszer a $c \equiv 0$ célfüggvényre?

# 7. fejezet

# Teljesen unimoduláris mátrixok

Valamely $A$ mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy $-1$. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat $-1$-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk.

TU mátrixok egy speciális fajtája a **hálózati mátrix**. Legyen $D$ olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen $F$ egy feszítő fa. A $H_F$ mátrix sorai az $F$ éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az $F$-en kívüli éleknek. Minden $e = uv$ nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem feltétlenül irányított) út vezet $v$-ből $u$-ba. Ennek egy $f$ elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha $f$ iránya megegyezik az útéval és $-1$-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

**589.** Milyen $A$ TU mátrix esetén lesz $\begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$ TU? (Megoldás)

**590.** Mutassuk meg, hogy ha $A$ TU mátrix, akkor $\begin{pmatrix} -A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$ is TU! (Megoldás)

**591.** Mutassuk meg, hogy ha $A$ TU mátrix, akkor $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ is TU! (Megoldás)

**592.** Legyenek $A$ és $B$ TU-mátrixok. Igaz-e, hogy ekkor $(A, I)$, $(A, -A)$, $(A, B)$ is TU? (Megoldás)

**593.** Mutassuk meg, hogy ha $A$ hálózati mátrix, akkor $(A, A)$, $(A, I)$ $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ is hálózati mátrix. (Megoldás)

**594.** Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyek lesznek teljesen unimodulárisak, ill. hálózati mátrixok:

a) páros gráf incidencia-mátrixa;

b) irányított gráf incidencia-mátrixa;

c) olyan $0-1$ mátrix, amelynek oszlopaiban az 1-esek folytonosan helyezkednek el. (Megoldás)

**595.** Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf incidencia-mátrixához hozzáveszünk egy csupa 1 sort, akkor hálózati mátrixot kapunk. (Megoldás)

**596.** Bizonyítsuk be, hogy a következő mátrix nem hálózati mátrix, de teljesen unimoduláris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Megoldás)

**597.** Bizonyítsuk be, hogy a következő mátrix teljesen unimoduláris, de nem hálózati mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**598.** Mutassunk példát olyan hálózati mátrixra, amelynek transzponáltja nem hálózati mátrix. (Megoldás)

**599.** Legyen $V$ egy (véges) alaphalmaz, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subseteq 2^V$, és az

$$A \in \mathbb{R}^{(|\mathcal{H}_1|+|\mathcal{H}_2|)\times|V|}$$

mátrix a $\mathcal{H}_1$ és a $\mathcal{H}_2$ (multiplicitással vett) uniójának incidencia-mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy a következő esetekben $A$ TU:

a) ha $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ egy-egy partíciója $V$-nek,

b) ha $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ egy-egy lánc (azaz $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_i$ esetén $H_1 \subseteq H_2$ vagy $H_2 \subseteq H_1$).

**600.** Egy halmazrendszer *lamináris*, ha bármely két eleme vagy diszjunkt vagy egyik tartalmazza a másikat. Legyen $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ két lamináris halmazrendszer ugyanazon az $S$ alaphalmazon. Legyen $A$ az a mátrix, aminek sorai az $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-beli halmazok karakterisztikus vektorai. Mutassuk meg, hogy $A$ hálózati mátrix.

**601.** Legyen $A$ TU mátrix, $b$ egész vektor, és az $x_1, x_2 \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ egész vektorok olyanok, hogy $0 \leq x_1 \leq 2 \cdot \mathbf{1}$ és $2 \cdot \mathbf{1} \leq x_2 \leq 4 \cdot \mathbf{1}$. Lássuk be, hogy létezik olyan *egész* $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, amelyre $\mathbf{1} \leq x_0 \leq 3 \cdot \mathbf{1}$. (Megoldás)

**602.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljesen unimoduláris, $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}^m$, $P_1 = \{x : Ax \leq b_1\}$, $P_2 = \{x : Ax \leq b_2\}$ és $z \in P_1 + P_2$ egész. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $z$ előáll egy $P_1$-beli és egy $P_2$-beli egész vektor összegeként.

**603.** Legyen $A$ TU-mátrix, $b$ egész, $x_0 \in \{x : Ax \leq b\}$, $c$ tetszőleges vektor. Az $x_0$ vektor *kerekítésének* azt nevezzük, hogy minden koordinátáját helyettesítjük annak alsó vagy felső egészrészével. Igazoljuk, hogy $x_0$ kerekíthető úgy, hogy a $cx$ célfüggvény értéke ne csökkenjen. (Megoldás)

**604.** Legyen az $A$ TU mátrix, $b$ egész vektor és $a$ egész vektor, $\alpha$ egész szám. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszernek van megoldása és neki lineáris következménye az $ax \leq \alpha$ egyenlőtlenség. Lássuk be, hogy egész együtthatókkal is lineáris következménye, azaz létezik olyan $y \geq 0$ egész vektor melyre $yA = a$ és $yb \leq \alpha$.

**605.** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ valós sorozat elemeinek van olyan $z_1, \ldots, z_n$ kerekítése, hogy minden $1 \leq i < j \leq n$-re a $z_i + \cdots + z_j$ összeg kerekítése az $x_i + \cdots + x_j$ összegnek.

**606.** Adottak $0 \le a_i < b_i \le 1$ valós számok ($i = 1, \dots, m$), és adott egy $k$ pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $[a_i, b_i]$ intervallumok beoszthatók $k$ csoportra úgy, hogy tetszőleges $x \in [0,1]$-re az $x$-et tartalmazó intervallumok száma a különböző csoportokban majdnem ugyanannyi (legfeljebb 1-gyel térhet el).

**607.** Adottak $a_{kl}$ és $b_{kl}$ egész számok ($1 \le k \le l \le n$). Egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektort nevezzünk *jónak*, ha

$$a_{kl} \le \sum_{i=k}^{l} (-1)^i x_i \le b_{kl} \quad \text{minden } 1 \le k \le l \le n \text{ számpárra.}$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan jó vektor, aminek minden komponense 0, 1 vagy 2, és olyan jó vektor is, aminek minden komponense 2, 3 vagy 4. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan jó vektor, aminek minden komponense 1, 2 vagy 3.

**608.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy TU mátrix minden sorában és minden oszlopában páros sok nem nulla elem van, akkor a mátrix elemeinek összege osztható 4-gyel. (Megoldás)

**609.**

a) Mutassuk meg, hogy egy $m \times n$-es valós mátrix elemei kerekíthetők úgy, hogy minden sorösszeg és oszlopösszeg kevesebb, mint 1-gyel változzon.

b) Lássuk be, hogy ez még úgy is megtehető, hogy tetszőleges $1 \le i \le m$-re az első $i$ sor elemeinek összege is kevesebb, mint 1-gyel változik, és tetszőleges $1 \le j \le n$-re az első $j$ oszlop elemeinek összege is kevesebb, mint 1-gyel változik.

**610.** Mutassunk olyan $P$ egész poliédert, $k$ pozitív egész számot, és $z \in kP$ egész vektort, ahol $z$ nem áll elő $k$ darab $P$-beli egész vektor összegeként. (Megoldás)

**611.** Egy hipergráf TU, ha incidencia-mátrixa TU. Bizonyítsuk be, hogy TU hipergráf független éleinek maximális száma megegyezik az éleket lefogó pontok minimális számával. Mutassuk meg azt is, hogy ha a hiperélek minden pontot fednek, úgy a pontokat fedő élek minimális száma megegyezik az olyan pontok maximális számával, amelyek közül minden él legfeljebb egyet tartalmaz.

**612.** Bizonyítsuk be, hogy egy lamináris halmazrendszer incidencia-mátrixa TU.

**613.** Igazoljuk, hogy egy $n$-elemű alaphalmazon egy TU hipergráfnak legfeljebb

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

különböző éle lehet (az üreshalmazt is beleértve). Bizonyítás nélkül felhasználható, hogy ha egy $H = (V, E)$, $(|V| = n)$ hipergráfnak több, mint

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}$$

különböző éle van, akkor kiválasztható $X \subseteq V$, $|X| = k$ úgy, hogy $\{X \cap e : e \in E\} = 2^X$. (Megoldás)

**614.** Lovász tétele szerint ha egy $n$ oszlopú $0-1$ TU-mátrixnak bármely két sora különböző, akkor legfeljebb

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$$

sora van. Bizonyítsd be, hogy ez a korlát éles. (Megoldás)

# 8. fejezet

# Lineáris programozás és TU-ság alkalmazásai

## 8.1. Geometriai feladatok

**615.** (*Carathéodory*) Ha $\mathbb{R}^n$ egy $z$ pontja előáll az $a_1, a_2, \ldots, a_t$ pontok konvex kombinációjaként, akkor közülük legfeljebb $n+1$-nek is előáll konvex kombinációjaként. (Megoldás)

**616.** (*Kirchberger*) Adott $\mathbb{R}^n$-ben véges sok kék és véges sok piros pont. Pontosan akkor nem választhatóak szét (szigorúan) hipersíkkal, ha van közöttük $n+2$ pont, hogy már azok sem választhatóak szét. (Megoldás)

**617.** Adott a síkon véges sok kék és véges sok piros pont. Pontosan akkor létezik a piros és kék pontokat elválasztó egyenes, ha az alábbi két eset egyike sem következik be:

(i) három egyszínű pont alkotta háromszögben egy ellentétes színű pont,

(ii) két egymást metsző zárt szakasz, az egyik végpontjai pirosak, a másikéi kékek.

(Megoldás)

**618.** (*Helly*)

a) Igazoljuk, hogy ha véges sok $\mathbb{R}^n$-beli poliéder közül bármely legfeljebb $n+1$ metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.

b) Bizonyítsuk be ugyanezt poliéderek helyett tetszőleges konvex halmazokra. (Megoldás)

**619.** Adottak az $a_1, \ldots, a_m$ pontok $\mathbb{R}^n$-ben, $m \geq n+2$. Az $a_i$ pont kihagyásával keletkező $m-1$ pont konvex burkát jelölje $Q_i$. Igazoljuk, hogy $\cap_{i=1}^m Q_i \neq \emptyset$. (Megoldás)

**620.** Írjuk fel LP feladatként a következőt. Adottak $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ és $c, p \in \mathbb{R}^n$ vektorok. Tegyük fel, hogy a $p$-ből kiinduló, $c$ irányú félegyenes metszi az $a_1, \ldots, a_k$ pontok konvex burkát. Találjuk meg a $p$-hez legközelebbi metszéspontot. (Megoldás)

## 8.2. Modellezés LP feladattal

**621.** Adott $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_+$. Alakítsuk át lineáris programozási feladattá a következő feladatot:

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i| :$$
$$Ax \leq b.$$

(Megoldás)

**622.** Adott $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}^n$. Alakítsuk át lineáris programozási feladattá a következő feladatot:

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$\min f(x),$$

ahol $f(x) := \max\{c_1 x, \ldots, c_k x\}$. (Megoldás)

**623.** Írjuk fel lineáris programozási feladatként a következő két problémát: egy adott $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliéder és $a \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén határozzuk meg a poliéder egy olyan pontját, amelyre

a) $||x-a||_\infty := \max |x_i - a_i|$ minimális;

b) $||x-a||_1 := \sum |x_i - a_i|$ minimális. (Megoldás)

**624.** Írjuk fel LP feladatként a következő problémát. Egy adott áru vételét, eladását, tárolását kell meghatározni $n$ hónapra. Minden hónapban adott az eladási és a vételár. Kezdetben 50 egységnyi áru van, a tárolási kapacitás 100, a tárolási költség 100 Ft havonta. Az adott hónapban vett árut tárolni kell, az adott hónapban eladottat nem. A cél a profit maximalizálása. (Megoldás)

**625.** Egy gyárban négyféle terméket készítenek. Legyenek ezek $A$, $B$, $C$ és $D$. A termékek előállítása daraboló-, forgácsoló- és hegesztőgéppel történik. Az egyes termékek előállításának fajlagos gépidejét, valamint a gépek kapacitását (órában kifejezve) a következő táblázat mutatja.

| Gépek | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | Gép kapacitása |
|---|---|---|---|---|---|
| Darabológép | 1 | 2 | 1 | 2 | 2000 |
| Forgácsológép | 0 | 1 | 2 | 2 | 1200 |
| Hegesztőgép | 3 | 2 | 1 | 2 | 3000 |

Az $A$ és $B$ termékekből összesen legalább annyit kell termelni, mint a $C$ és $D$ termékekből összesen. A $B$ termékből kétszer annyit kell termelni, mint $C$-ből. A forgácsológép kapacitását ki kell használni. Mennyit termeljenek az egyes termékekből, ha a cél az, hogy a kihasználatlan kapacitásórák mennyisége minimális legyen? Írjuk fel az LP feladatot.

**626.** Egy ékszerésznél 20 dkg arany, 20 db gyémánt és 40 db zafír van raktáron. Háromféle ékszert készíthet ezekből: 1 db gyémánt 2 db zafírral és 3 dkg arannyal, ennek ára 1 millió forint, 2 db gyémánt 3 db zafírral és 1 dkg arannyal (4 millió), vagy 3 db gyémánt 1 db zafírral és 2 dkg arannyal (5 millió). Hogyan érheti el a legnagyobb bevételt? Oldjuk meg a feladatot szimplex módszerrel. (Megoldás)

**627.** Egy írószer-üzletben piros, zöld, és kék színű ceruzákat árulnak. A vezetőség úgy dönt, hogy a maradék készletből nem egyesével, hanem kettesével árulja ceruzákat: egy csomagban mindig különböző színűek lesznek. A piros-zöld, piros-kék, zöld-kék csomag ára rendre 50, 60 ill. 70 Ft. Az egyes színekből jelenleg 10-10 darab van már csak raktáron. Melyik készletből mennyit kell eladniuk, hogy a bevétel a lehető legtöbb legyen? (Nem kötelező kiárusítani a teljes raktárkészletet!) Oldjuk meg a problémát szimplex-algoritmussal. (Megoldás)

**628.** Van egy fonógépünk, ami napi 18 órát használható, és egy szövőgépünk, ami napi 3 órát. Négy terméket készíthetünk: FonalA, FonalB, SzövetA, SzövetB. Az alábbi táblázat tartalmazza, hogy az egyes termékekből 1 doboz mennyi munkát igényel a fonó- és szövőgépen, és hogy mennyiért adható el.

Határozzuk meg szimplex módszerrel, hogy melyikből mennyit érdemes készíteni. Minden optimális bázisra nézzük meg, hogy az árak illetve rendelkezésre álló gépidők milyen változása esetén maradnak optimálisak (ha egyetlen adat változik).

| | SzövetA | SzövetB | FonalA | FonalB |
|---|---|---|---|---|
| Fonógép | 10 | 4 | 3 | 2 |
| Szövőgép | 2 | 0,5 | 0 | 0 |
| Eladási ár | 12 | 4 | 2 | 1 |

## 8.3. Gráfok

**629.** Mutassuk meg, hogy egy $G$ irányított gráf pont-él incidencia-mátrixa pontosan akkor teljes oszloprangú, ha $G$ (irányítatlanul nézve) erdő.

**630.** Mennyi egy $G$ összefüggő páros gráf incidencia-mátrixának rangja? (Megoldás)

**631.** Legyen $G$ irányítatlan gráf, $A$ a gráf egy rögzített irányításához tartozó pont-él incidencia-mátrixa, és hagyjuk el a mátrix egy sorát, a maradék mátrixot jelölje $A_0$. Bizonyítsuk be, hogy a $G$-beli feszítőfák száma éppen $\det A_0 A_0^\top$. (Megoldás)

**632.** (*Cayley*) A $K_n$ teljes gráf feszítőfáinak száma $n^{n-2}$. (Megoldás)

**633.** Lássuk be a Farkas-lemma segítségével a Hall-tételt! (Megoldás)

**634.** Legyen $G = (V, E)$ gráf. Bizonyítsuk be, hogy a következők ekvivalensek.

(i) $\exists x : V \to \mathbb{R}_+$, amelyre minden $v \in V$ csúcsra

$$\sum_{u \in N(v)} x(u) = 1;$$

(ii) $\nexists y : V \to \mathbb{R}$, amelyre $\sum_{v \in V} y(v) < 0$ és minden $v \in V$-re

$$\sum_{u \in N(v)} y(u) \geq 0.$$

(Megoldás)

**635.** Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $f : V \to \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy pontosan akkor nem lehet az élekre $c(e)$ valós számokat írni úgy, hogy

$$\sum_{uv \in E} c(uv) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

ha $\exists\ g : V \to \mathbb{R}$, hogy $g(u) + g(v) = 0\ \forall uv \in E$ és

$$\sum_{v \in V} f(v)g(v) \neq 0!$$

**636.** Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Mit mond a dualitás-tétel az alábbi feladatról? Írjunk nemnegatív számokat a gráf éleire ($x : E \to \mathbb{R}_+$) úgy, hogy minden $v$ csúcsban $\sum_{e=uv \in E} x(e) \geq 1$ teljesüljön, és a $\sum_{e \in E} x(e)$ összeg minimális legyen. (Megoldás)

**637.** Bizonyítsuk be TU-mátrixok segítségével

a) Kőnig tételét, miszerint egy páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával.

b) Egerváry tételét (219. feladat)! (Megoldás)

**638.** Karakterizáljuk azon összefüggő $G$ gráfokat, amelyekre létezik olyan $x : E(G) \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\sum_{e \ni v} x(e) = 1$ minden $v$-re teljesül. (Megoldás)

**639.*** Karakterizáljuk azon összefüggő $G$ gráfokat, amelyekre létezik olyan $x : E(G) \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy $\sum_{e \ni v} x(e) = 1$ minden $v$-re teljesül. (Megoldás)

**640.** A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf éleire egészeket akarunk írni úgy, hogy minden csúcsban a szomszédos élekre írt számok összege páratlan legyen. Bizonyítsuk be, hogy ezt pontosan akkor nem lehet megtenni, ha van egy páratlan $U \subseteq V$ halmaz, melyből nem megy ki él. (Megoldás)

**641.** Legyen $A$ a $K_{n,n}$ teljes páros gráf pont-él incidencia-mátrixa. Legyen $c \geq 0$ súlyfüggvény az éleken. Tegyük fel, hogy adott egy polinomiális algoritmus, amely meghatározza a $\max cx : Ax = \mathbf{1}, x \geq 0$ feladat duálisának egy optimális megoldását. Keressünk ezen szubrutint felhasználva polinomiális algoritmust, amely megadja a $\max cx : Ax \leq \mathbf{1}, x \geq 0$ feladat duálisának egy optimális megoldását. (Megoldás)

**642.** Bizonyítsuk be, hogy izolált pontot nem tartalmazó páros gráfban a lefogó élek minimális száma egyenlő a független pontok maximális számával. Miért van szükség az izolált pontok kizárására? (Megoldás)

**643.** Fogalmazzunk meg és bizonyítsunk be minimax tételt az alábbi problémákra:

a) Egy páros gráfban mennyi azon élek maximális száma, amelyek közül minden pontra legfeljebb 2 illeszkedik?

b) Egy páros gráfban mennyi a legkisebb olyan élhalmaz mérete, amelyben minden pont foka legalább kettő?

**644.** Legyen $A$ egy páros gráf incidencia-mátrixa, $P = \{x : Ax = \mathbf{1}, x \geq 0\}$ poliéder. Bizonyítsuk be, hogy

a) $P$ a teljes párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burka;

b) $K_{n,n}$ teljes páros gráf esetén $\dim P = (n-1)^2$. (Megoldás)

**645.*** Egy gráf részgráfja $(\leq f)$-faktor, ha minden foka legfeljebb $f(v)$ egy adott $f : V \to \mathbb{N}$ fokkorlátra. Adjunk minimax tételt egy páros gráf $(\leq f)$-faktorainak maximális élszámára.

**646.** Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf. Lássuk be, hogy pontosan akkor létezik olyan $F \subseteq E$ élhalmaz, aminek $S$-ben minden foka 10 és $T$-ben minden foka 20, ha

$$\begin{cases} \nexists X \subseteq S,\ Y \subseteq T, \text{ amelyekre } 20|Y| > 10|X| + d(Y, S-X) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{és} \\ \nexists X \subseteq S,\ Y \subseteq T, \text{ amelyekre } 10|X| > 20|Y| + d(X, T-Y), \end{cases}$$

ahol $d(X, Y)$ az $X$ és $Y$ között menő élek számát jelöli.

**647.** Bizonyítsuk be, hogy egy páros gráf éleit meg lehet színezni úgy $k$ színnel, hogy minden $v$ csúcsra és mindegyik $j$ színre a $v$-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe $j$. (Megoldás)

**648.*** Legyen a $G = (S, T, E)$ páros gráf, $k$ tetszőleges egész szám. Ekkor $E$-t meg lehet színezni úgy $k$ színnel, hogy minden $v$ csúcsra és mindegyik $j$ színre a $v$-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe $j$ és minden színosztály mérete $\lfloor |E|/k \rfloor$ vagy $\lceil |E|/k \rceil$. (Megoldás)

**649.** Mutassuk meg, hogy ha egy páros gráf minimális foka $\delta$, akkor a gráfban van $\delta$ éldiszjunkt lefogó élhalmaz. (Megoldás)

**650.** Bizonyítsuk be TU mátrixokkal, hogy egy irányított gráf éleit meg lehet színezni úgy $k$ színnel, hogy ha az $i$-színű részgráf be- ill. kifokfüggvényét $\varrho_i$ ill. $\delta_i$-vel jelöljük, akkor minden $v$ csúcsra és $i$ színre

$$\left\lfloor \frac{\varrho(v)-\delta(v)}{k} \right\rfloor \leq \varrho_i(v)-\delta_i(v) \leq \left\lceil \frac{\varrho(v)-\delta(v)}{k} \right\rceil.$$

(Megoldás)

## 8.4. Áramok, folyamok

**651.** Adott egy $G=(V,E)$ irányított gráf.

a) Legyen $C=\{x\in\mathbb{R}^E : x\geq 0,\ x \text{ áram}\}$. Írjuk fel a $C$ kúpot metszetkúpként és generált kúpként!

b) Legyen $P=\{x\in\mathbb{R}^E : x\geq 0,\ x \text{ áram}, \sum_{e\in E} x(e)=1\}$. Írjuk fel $P$-t poliéderként és politópként! (Megoldás)

**652.** Adott egy $G=(V,E)$ összefüggő irányított gráf. Igazoljuk, hogy az $\{x\in\mathbb{R}^E : x \text{ áram}\}$ altér dimenziója $|E|-|V|+1$.

**653.**

a) Legyen $Q$ a $D=(V,A)$ irányított gráf incidencia-mátrixa. Ha $f$ és $g$ egészértékű, akkor a megengedett áramok $\{x\in\mathbb{R}^A :\ Qx=0,\ f\leq x\leq g\}$ poliédere egész poliéder.

b) Egész kapacitások esetén a megengedett folyamok poliédere egész. (Megoldás)

**654.** Bizonyítsuk be TU-mátrixok segítségével

a) Hoffmann tételét,

b) az MFMC tételt!

**655.** Legyenek a $D=(V,A)$ digráf élhalmazán adottak az $f$ és $g$ kapacitásfüggvények és a $c$ költségfüggvény. Igazoljuk, hogy léteznek az $A$ halmazon értelmezett $f'$ és $g'$ függvények úgy, hogy $D$-ben egy $x$ egy $f$-re és $g$-re nézve megengedett áram akkor és csak akkor minimális $c$-költségű, ha $x$ megengedett az $f'$-re és a $g'$-re nézve. (Megoldás)

**656.** Legyen $A$ egy $G$ irányított gráf pont-él incidencia-mátrixa, $f \ll g$ alsó ill. felső korlátok az éleken. Bizonyítsuk be, hogy $x_0$ bázismegoldása a megengedett áram feladatnak (azaz $\{Ax = 0, f \leq x \leq g\}$-nek) akkor és csak akkor, ha azok az élek, amelyeken $x_0$ nem egyenlő egyik korláttal sem, erdőt alkotnak $G$-ben. (Megoldás)

**657.** Legyen $A$ hálózati mátrix. Bizonyítsuk be, hogy a

$$p \leq Ax \leq b,$$
$$f \leq x \leq g$$

rendszer visszavezethető egy megengedett áram feladatra. (Megoldás)

**658.** Legyen $D = (V, E)$ egy digráf, $f$ és $g$ alsó illetve felső korlátok az éleken, $c : E \to \mathbb{R}$ költségfüggvény, és keressük a minimális költségű megengedett áramot. Definiáljuk a $D' = (V, E')$ segéd-digráfot és a $c' : E' \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

– $uv \in E'$ „előre él", ha $uv \in E$ és $g(uv) = \infty$, és ekkor legyen $c'(uv) = c(uv)$;

– $uv \in E'$ „hátra él", ha $vu \in E$ és $f(vu) = -\infty$, és ekkor legyen $c'(uv) = -c(vu)$.

Mutassuk meg, hogy ekkor, feltéve, hogy létezik megengedett áram, a következők ekvivalensek:

(i) $cx$ korlátos alulról,

(ii) nincs negatív $c'$-költségű irányított kör $D'$-ben,

(iii) létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre:

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } g(uv) = \infty, \text{ és}$$
$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } f(uv) = -\infty.$$

(Megoldás)

**659.** Legyen $D = (V, E)$ egy digráf, $f$ és $g$ alsó illetve felső korlátok az éleken, $c : E \to \mathbb{R}$ költségfüggvény, és keressük a minimális költségű megengedett áramot. Egy $x$ megengedett áramra definiáljuk a $D_x = (V, E_x)$ segéd-digráfot és a $c_x : E_x \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

– $uv \in E_x$ „előre él", ha $uv \in E$ és $x(uv) < g(uv)$, és ekkor legyen $c_x(uv) = c(uv)$;

– $uv \in E_x$ „hátra él”, ha $vu \in E$ és $x(vu) > f(vu)$, és ekkor legyen $c_x(uv) = -c(vu)$.

Mutassuk meg, hogy ekkor a következők ekvivalensek:

(i) $x$ minimális költségű megengedett áram,

(ii) nincs negatív $c_x$-költségű irányított kör $D_x$-ben,

(iii) létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre:

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) < g(uv), \text{ és}$$
$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) > f(uv).$$

## 8.5. Egyéb kombinatorikai alkalmazások

**660.** Legyen $I$ egy nemüres zárt intervallum, és $I_1, \dots, I_k$ nemüres zárt részintervallumai $I$-nek. Fogalmazzunk meg minimax-tételt az $I_1, \dots, I_k$ közül kiválasztható diszjunkt intervallumok maximális számára! (Megoldás)

**661.*** Adjunk kombinatorikus algoritmust a fenti intervallumpakolási feladat megoldására! (Megoldás)

**662.** Legyen $I$ egy nemüres zárt intervallum, és $I_1, \dots, I_k$ nemüres zárt részintervallumai $I$-nek, amik együtt lefedik $I$-t. Fogalmazzunk meg minimax-tételt az $I_1, \dots, I_k$ közül $I$-t fedő intervallumok minimális számára! (Megoldás)

**663.** Adjunk kombinatorikus algoritmust a fenti intervallumfedési feladat megoldására! (Megoldás)

**664.** Adott egy út valahány részútjának rendszere. Mutassuk meg, hogy a részutakat lehet egyenletesen színezni $k$ színnel, vagyis úgy, hogy minden élre minden színből körülbelül ugyanannyi út illeszkedik ($\pm 1$). Adjunk a $k = 2$ eset megoldására egy egyszerű rekurzív algoritmust!

**665.** Azt mondjuk, hogy egy $\{a_1, \dots, a_n\}$ halmaz *reprezentál* egy $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazrendszert, ha létezik $\pi$ permutáció, hogy $a_{\pi(i)} \in F_i$ minden $i$-re. Legyen $V$ véges alaphalmaz, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq 2^V$, $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}| = n$, ahol $n \leq |V|$. Pontosan akkor létezik olyan $n$ elemű halmaz, ami $\mathcal{F}$-et és $\mathcal{G}$-t is reprezentálja, ha $\forall I, J \subseteq \{1, \dots, n\}: \ |\bigcup_{i \in I} F_i \cap \bigcup_{j \in J} G_j| \geq |I| + |J| - n$.

## 8.6. Hálózati szimplex módszer

Egy digráf **gyengén összefüggő**, ha az irányítást elfelejtve összefüggő gráfot kapunk. A hálózati szimplex módszer egy

$$\begin{aligned} \varrho_x(v) - \delta_x(v) &= b_v \qquad \forall v \in V - v_0 \\ x &\geq 0 \\ \max \sum_{e \in E} c_e x_e & \end{aligned}$$

alakú feladatot old meg, ahol $D = (V, E)$ gyengén összefüggő digráf, $v_0 \in V$ egy kijelölt csúcs, $b_v$ és $c_e$ pedig valós számok ($v \in V - v_0$, $e \in E$). Ha minden $b_v$ egész, akkor van egész optimális megoldás (miért?).

Bázisnak az élek egy olyan részhalmazát nevezzük, ami irányítatlan értelemben feszítő fa. Az egyenletrendszer mátrixának azt a nemszinguláris részmátrixát, amit a fa éleihez tartozó oszlopok adnak, szintén $B$-vel jelöljük. Az $\bar{x}$ vektort úgy kapjuk, hogy a $B^{-1}b$ vektort kiegészítjük 0 értékekkel a fához nem tartozó éleken. Ha $\bar{x} \geq 0$, akkor a bázis primál megengedett, és $\bar{x}$ a hozzá tartozó bázismegoldás. Amint az az előadásjegyzetben szerepel, mind $\bar{x}$, mind $\bar{y} = c_B B^{-1}$ könnyen kiszámolható a feszítő fán fölfele illetve lefele lépkedve.

**666.** Adott egy $G = (V_1, V_2; E)$ összefüggő páros gráf. Tudjuk, hogy a gráf $A$ incidencia-mátrixa TU (lásd 594. feladat), tehát az $Ax = \mathbf{1}, x \geq 0$ rendszer pontosan akkor megoldható, ha $G$-nek van teljes párosítása. Mi az $A$ mátrix rangja? Ha teljes sorrangúvá tesszük, mi egy bázis? Mikor primál megengedett egy bázis? (Megoldás)

**667.** Legyen $D = (V, E)$ gyengén összefüggő irányított gráf, $v_0 \in V$, legyen $A$ az a mátrix, amit az incidencia-mátrixból kapunk a $v_0$-hoz tartozó sor törlésével. Tekintsünk egy $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ alakú feladatot. Nevezzünk egy primál megengedett bázist *erősen megengedettnek*, ha a feszítő fa összes olyan $uv$ élére, amire $\overline{x}_{uv} = 0$, $v$ közelebb van a fában $v_0$-hoz mint $u$. Van-e mindig erősen megengedett bázis, ha a feladat megoldható? (Megoldás)

**668.** A 667. feladatban definiáltuk az erősen megengedett bázist. Mutassuk meg, hogy ha adott egy erősen megengedett bázis, akkor a szimplex-módszer egy lépésében a kilépő élt lehet úgy választani, hogy a következő bázis is erősen megengedett legyen. Mutassuk meg, hogy ezzel a módszerrel egy degenerált báziscserénél (tehát amikor a bázismegoldás nem változik) $\sum_{v \in V} \overline{y}_v$ szigorúan csökken. (Megoldás)

**669.** A 667. feladatban szereplő hálózati feladatban az $x \geq 0$ feltételt cseréljük le arra, hogy $l_e \leq x_e \leq u_e$ minden $e$ élre, ahol $l_e \leq u_e$ egész korlátok. Mutassuk meg, hogy egy bázis tekinthető úgy, mint egy $F$ feszítő fa plusz az $E \setminus F$ éleinek két részre osztása. Mikor primál megengedett egy bázis? Hogy definiálhatjuk a bázishoz tartozó duális vektort? Mikor duál megengedett a bázis? Mi a feltétele annak, hogy megoldható legyen a feladat?

**670.** Legyen $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, és legyen $D = (V, E)$ a teljes irányított gráf $V$-n, amiben minden él mindkét irányban szerepel. Legyen $b_{v_1} = -1$, $b_{v_5} = 1$, és $b_{v_2} = b_{v_3} = b_{v_4} = 0$. Az éleken a súlyfüggvény

$$c(v_i v_j) = -\left\lfloor \frac{|i-j|}{2} \right\rfloor.$$

Az ezekre vonatkozó hálózati feladatot tekintjük, azaz

$$\max\{cx : \ x \geq 0, \ \varrho_x(v) - \delta_x(v) = b_v \ \forall v \in V\}.$$

a) Tegyünk meg 2 lépést a primál hálózati szimplex módszerrel a

$$\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5\}$$

kiindulási bázisból. (A Bland szabálynál az élek lexigrafikus sorrendben vannak, azaz $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_1$, stb.)

b) Tegyünk meg 2 lépést a primál hálózati szimplex módszerrel a

$$\{v_2v_1, v_3v_1, v_4v_1, v_1v_5\}$$

kiindulási bázisból, a Bland szabály alkalmazásával.

c) Tegyünk meg 2 lépést a duál hálózati szimplex módszerrel a

$$\{v_1v_2, v_5v_4, v_4v_3, v_3v_2\}$$

kiindulási bázisból.

# 9. fejezet

# Egészértékű programozás

## 9.1. IP felírás és vágások

**671.** Fogalmazzuk meg IP feladatként egy gráfban a független pontok maximális számát! Mi az LP relaxáció duálisa? (Megoldás)

**672.** Fogalmazzuk meg IP feladatként egy gráfban a maximális párosítás méretét! Mi az LP relaxáció duálisa? (Megoldás)

**673.** (*Halmazfedési feladat*) Legyen $S$ egy nemüres alaphalmaz és $\mathcal{H}$ egy hipergráf $S$-en. Legyen $\rho = \min\{k :$ létezik $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ ami fedi $S$-et, és $|\mathcal{H}'| = k\}$. Fogalmazzuk meg $\rho$-t egy IP feladat optimumaként! Mi az LP relaxáció duálisa? (Megoldás)

**674.** Legyen $S$ egy nemüres alaphalmaz és $\mathcal{H}$ egy hipergráf $S$-en. $\rho_2 := \min\{k :$ létezik $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ ami kétszeresen fedi $S$-et és $|\mathcal{H}'| = k$ (multiplicitással)$\}$. Fogalmazzuk meg $\rho_2$-t egy IP feladat optimumaként! Mi az LP relaxáció duálisa? (A kétszeres fedés azt jelenti, hogy minden $s \in S$ esetén $s$ benne van $\mathcal{H}'$ legalább 2 elemében.) (Megoldás)

**675.** (*Halmazpakolási feladat*) Legyen $S$ egy nemüres alaphalmaz és $\mathcal{H}$ egy hipergráf $S$-en. Legyen $\nu = \max\{k :$ létezik $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ melyre $\mathcal{H}'$ elemei diszjunktak és $|\mathcal{H}'| = k\}$. Fogalmazzuk meg $\nu$-t egy IP feladat optimumaként! Mi az LP relaxáció duálisa? (Megoldás)

**676.** Legyen $R \subseteq \mathbb{R}^n$ egy rács, amit a $g_1, \ldots, g_k$ lineárisan független vektorok generálnak, azaz $R$ ezek egész együtthatós kombinációiból áll. Írjuk fel a $\max\{cx : \ Ax \le b, \ x \in R\}$ feladatot egészértékű programozási feladatként. (Megoldás)

**677.** (*Szimmetrikus utazó ügynök feladat*) Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, és $c : E \to \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Írjuk fel egészértékű programozási feladatként a minimális költségű Hamilton-kör megkeresését. (Megoldás)

**678.*** Írjuk fel a szimmetrikus utazó ügynök feladatot (lásd 677. feladat) a gráf méretében polinomiális méretű egészértékű programozási feladatként. (Megoldás)

**679.*** (*Díjgyűjtő utazó ügynök feladat*) A szimmetrikus utazó ügynök feladat általánosítása a Díjgyűjtő Utazó Ügynök feladat. Adott $n$ csúcs, minden $(i, j)$ csúcspárnak adott a $c(i, j)$ utiköltsége (feltesszük, hogy erre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség), és minden $i$ csúcsnak adott egy $p_i$ értéke. Az ügynök az 1. csúcsból indul, és egy kört tesz meg, de nem feltétlenül kell az összes csúcsot érintenie. Az ügynök bevétele a körön lévő csúcsok értékeinek az összege, kiadása pedig a bejárt élek utiköltségeinek összege. A cél a profit maximalizálása. Írjuk fel ezt a feladatot egészértékű lineáris programozási feladatként! (Megoldás)

**680.** Legyenek $P^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : A^1 x \le b^1\}$, $P^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : A^2 x \le b^2\}$, $\ldots$, $P^k = \{x \in \mathbb{R}^n : A^k x \le b^k\}$ korlátos poliéderek. Írjuk fel vegyes lineáris programozási feladatként a következőt:

$$\max\{cx : x \in P^1 \cup P^2 \cup \cdots \cup P^k\}.$$

(Megoldás)

**681.*** Írjuk fel vegyes programozási feladatként a következőt:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \\ &\quad l_j \le x_j \le u_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ &\quad Ax \le b, \end{aligned}$$

ahol $f_j$ szakaszonként lineáris függvény $(j = 1, \ldots, n)$. (Megoldás)

**682.*** Adott $m$ gép és $n$ munka. Minden munkát egy gépen kell megszakítás nélkül végezni, de mindegy hogy melyiken. Minden gép egyszerre csak egy munkát tud végezni. A $j$-edik munkát legkorábban az $s_j$ időpontban kezdhetjük, legkésőbb a $t_j$ időpontban be kell fejeznünk, és elvégzési ideje $a_j$. Tegyük fel, hogy az $s_j, t_j, a_j$ értékek egészek. Írjuk fel a feladatot egészértékű programozási feladatként, ha célunk minél előbb végezni az összes munkával. (Megoldás)

**683.*** Írjuk fel egészértékű lineáris programozási modellel a következő feladatot. Adott $n$ tárgy, mindegyiket 3 gépen kell megmunkálni: először az első gépen, utána a másodikon, utána a harmadikon. Az $i$-edik tárgy megmunkálása a $j$-edik gépen $t_{ij}$ időt vesz igénybe, és nem lehet megszakítani. Minden gép egyszerre csak egy tárgyat tud megmunkálni. A cél a minél hamarabbi befejezése az összes munkának. (Megoldás)

**684.** Egy befektető $m$ különböző befektetési lehetőség közül választhat $n$ egymás utáni időperiódusban. Az $i$-edik befektetésbe a $j$-edik periódusban beszállni $d_{ij}$ forintba kerül (minden befektetési lehetőségbe legfeljebb egyszer lehet beszállni). Adottak még $a_{ij}$ $(i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\})$ számok; ha az $i$-edik befektetésbe a $t$-edik periódusban szállunk be, akkor minden $j > t$ periódus elején van $a_{ij}$ bevételünk ebből a befektetésből. Kezdetben a befektetőnek $B$ forintja van; természetesen a későbbi bevételeit is befektetheti. Írjuk fel az egészértékű lineáris programozási modellt, ha a cél a nettó jelenértékének maximalizálása, és a kamatláb $r$. A nettó jelenérték kiszámolása:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{C_j}{(1+r)^{j-1}}$$

ahol $C_j$ a pénzmozgás (bevétel mínusz kiadás) az $j$-edik időszakban.

**685.** Írjuk fel egészértékű lineáris programozási modellel a következő feladatot. Egy vállalatnak van $m$ üzlete $(u_1, \ldots, u_m)$, ezekhez akar raktárakat létesíteni. A raktárak $n$ lehetséges helyen épülhetnek: $v_1, \ldots, v_n$. Ha a $v_j$ helyen épül raktár, az kétféle lehet: vagy 10 egység kapacitású (építési költség $f_j^1$) vagy vagy 20 egység kapacitású (építési költség $f_j^2$). Az $u_i$ üzlet igénye $d_i$ egység, ezt akár több raktárból is kielégíthetjük (de csak egész egységenként). Ha azonban az $u_i$ üzletbe több mint 1 raktárból szállítunk, az $g_i$ extra költséget jelent (az mindegy, hogy mennyivel több mint 1 raktárból). Egységnyi áru szállítási költsége $v_j$-ből $u_i$-be $c_{ij}$. A cél az összköltség minimalizálása.

**686.** A `http://www.cs.elte.hu/~tkiraly/students/pk1.mps` linken elérhető fájl egy vegyes programozási feladatot tartalmaz. Oldjuk meg ezt a feladatot valamilyen szoftverrel. Mi az optimumérték? Mi az optimumérték, ha az $x_8, x_9, \ldots, x_{49}$ változókra követelünk egészértékűséget? Mi az LP relaxált optimumértéke? Mi az LP relaxált optimumértéke, ha a célfüggvényt $x_1 + x_6 + x_8 + x_{52} + x_{53}$-ra módosítjuk?

Az MPS formátumról ismertető: `http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/mps-format.htm`. (Megoldás)

**687.** Költözéskor szeretnénk $n$ darab tárgyat, amiknek a mérete rendre $a_i, \ldots, a_n$, egy $Q$ kapacitású teherautóval elszállítani. A tárgyakat azonban először dobozokba kell pakolni (egy dobozba több tárgyat is lehet). Rendendelkezésre áll $m$ darab doboz, a méreteik rendre $b_1, \ldots, b_m$. Egy adott dobozba bepakolt tárgyak méreteinek összege legfeljebb annyi lehet, mint a doboz mérete. Természetesen nem muszáj az összes dobozt felhasználni. Hányat kell fordulnunk a teherautóval? Írjuk fel egészértékű modellt a feladatra a GNU MathProg nyelven (`http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/MathProg.htm`), és oldjuk meg GLPK-val (Windows: `http://glpklabw.sourceforge.net`) a következő adatokra:

$Q = 20$, dobozméretek: 3,5,7,12, mindegyikből 4 db van, tárgy méretek: 1 (4db), 2 (4db), 3 (3db), 6 (3db), 10 (2db). (Megoldás)

**688.** Tekintsük páratlan $n$-re a következő feladatot:

$$\begin{aligned} \max \quad -x_{n+1} \\ 2x_1 + \cdots + 2x_n + x_{n+1} = n \\ x \in \{0,1\}^{n+1} \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy az előadáson látott korlátozás és szétválasztás algoritmus ennél a feladatnál mindenképpen exponenciálisan sok részfeladatot néz meg. (Megoldás)

**689.** Tekintsük a $\max\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ feladatot, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = (0, -3, 0, 0, 0, -2).$$

Mutassuk meg, hogy két optimális bázismegoldás van. Mik azok? Mik a két optimális bázisnál a Gomory-vágások? (Megoldás)

**690.** A 689. feladat mindkét optimális bázisánál minden egyes $1 \leq j \leq 6$-ra számoljuk ki, hogy milyen értékek között változtathatjuk $c_j$-t ($c$ többi komponensét nem változtatva) úgy, hogy az adott bázis optimális maradjon.

**691.** Tekintsük a következő egészértékű programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \max x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 \leq 21 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Oldjuk meg az LP relaxáltat szimplex módszerrel, és az optimális megoldáshoz tartozó szimplex táblából generáljunk Gomory-vágást. Írjuk fel a Gomory-vágással kiegészített szimplex táblát. (Megoldás)

## 9.2. Dinamikus programozás

**692.** Adott egy fa, és minden csúcsának egy nemnegatív súlya. Adjunk dinamikus programozási algoritmust maximális súlyú stabil csúcshalmaz megtalálására. (Egy csúcshalmaz stabil, ha nem tartalmaz szomszédos csúcsokat.) (Megoldás)

**693.** Adott egy $T = (V, E)$ fa, egy kijelölt $r \in V$ gyökér, és minden $v \in V$-re egy $c_v \in \mathbb{R}$ súly. Egy *gyökeres részfa* egy olyan részfája $T$-nek, ami tartalmazza $r$-et. Egy $V'$ csúcshalmazú gyökeres részfa súlya $\sum_{v \in V'} c_v$. Adjunk dinamikus programozási algoritmust, ami $O(|V|)$ lépésben megtalálja a maximális súlyú gyökeres részfát (összeadás és kivonás 1 lépésnek számít).

**694.** Az $n$ pontú összefüggő gráf a szomszédsági mátrixával adott. A gráf élei kétféle színűek, minden élhez adott, hogy a színe kék vagy zöld. Adott még egy $s$ csúcs a gráfban és egy $K$ egész szám. Adjunk algoritmust, ami $O(Kn^2)$ lépésben eldönti, hogy az $s$ csúcsból mely gráfbeli csúcsokba vezet olyan élsorozat (nem feltétlenül út), mely pontosan $K$ élből áll és melyben nincsen két egyforma színű él közvetlenül egymás után!

**695.** Egy szövegszerkesztő program egy dokumentumot oldalakra akar osztani. A dokumentum $n$ darab egymás utáni elemből (szavakból, ábrákból) áll. Minden $1 \leq i \leq j \leq n$-re adott hogy az $i$-edik elemmel kezdődő és $j$-edik elemmel végződő oldal mennyire szép: $c_{ij}$. A dokumentum szépségét úgy kapjuk, hogy összeadjuk az oldalak szépségét. Adjunk dinamikus programozási algoritmust, ami meghatározza a legszebb beosztást. (Megoldás)

**696.** Adott két DNS szekvencia, $S_1$ és $S_2$, amik nem feltétlenül egyforma hosszúak. Mindkét szekvencia az $\{A, C, G, T\}$ halmazból vett betűk sorozata. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy mennyire nehéz az $S_1$ szekvenciát átalakítani az $S_2$ szekvenciává. A megengedett műveletek a következők:

– A szekvenciába valahova beszúrunk egy elemet. Ennek nehézsége $\alpha$.

– A szekvenciából valamelyik elemet töröljük. Ennek nehézsége $\beta$.

– A szekvencia $j$-edik elemét átalakítjuk $x$-ről $y$-ra, ahol $x, y \in \{A, C, G, T\}$. Ennek nehézsége $c_{xy}$, tehát a betűktől függ.

Az átalakítás nehézsége a műveletek nehézségének összege. Adjunk dinamikus programozási algoritmust, ami kiszámolja a legkönnyebb átalakítást. (Megoldás)

**697.** (*Erőforrás-korlátos legolcsóbb út*) Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, $s, t \in V$ csúcsok, minden $e \in A$ élre egy $c_e \in \mathbb{Z}$ költség és egy $r_e \in \mathbb{Z}_+$ erőforrás-igény, valamint egy $B \in \mathbb{Z}_+$ erőforrás-korlát. A cél minimális költségű olyan $s-t$ út megtalálása, amin az élek erőforrás-igényének összege legfeljebb $B$. Mutassuk meg, hogy aciklikus digráfban van $O(Bn^2)$ futási idejű algoritmus a feladatra.

## 9.3. Közelítő algoritmusok

**698.** A minimális lefogó csúcshalmaz feladatra a *mohó algoritmus* a következő: válasszunk ki egy maximális fokú csúcsot, tegyük be $U$-ba, és töröljük a rá illeszkedő élekkel együtt. Ismételjük ezt amíg van él.

Most tekintsük a következő, *fordított mohó algoritmust*: válasszunk ki egy minimális fokú csúcsot, tegyük be az összes szomszédját $U$-ba, és töröljük őt és a szomszédait is a gráfból.

a) Mutassunk példát, ahol a fordított mohó jobb mint a mohó, és olyat is, ahol a mohó a jobb.

b) Mutassuk meg, hogy se a mohó, se a fordított mohó algoritmus nem 2-közelítő. (Megoldás)

**699.** Mutassuk meg, hogy a 3-reguláris gráfok osztályában a (698. feladatban definiált) mohó algoritmus is és a fordított mohó algoritmus is 2-nél jobb közelítést ad a minimális lefogó csúcshalmaz feladatra, azaz létezik $\alpha < 2$, hogy az algoritmus $\alpha$-közelítő. (Megoldás)

**700.** Adott egy $G = (V, E)$ gráf. Készítsünk belőle egy $G' = (V_1, V_2, E')$ páros gráfot a következőképpen. Minden $v \in V$ csúcsnak megfelel egy $v_1 \in V_1$ csúcs és egy $v_2 \in V_2$ csúcs. Minden $uv \in E$ élnek két él felel meg az új gráfban: $u_1v_2$ és $v_1u_2$.

a) Mit tudunk mondani $G'$-ben a minimális súlyú csúcsfedés feladat LP relaxáltjának bázismegoldásairól?

b) Mi következik ebből a $G$-re vonatkozó minimális súlyú csúcsfedés feladat LP relaxáltjának bázismegoldásaira? (Megoldás)

**701.** (*Metrikus Steiner fa*) Az $n$ pontú teljes gráf élein adott egy $c$ nemnegatív költségfüggvény, ami kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Adott továbbá a csúcsoknak egy $U$ részhalmaza. *Steiner fának* nevezünk egy olyan fát, aminek csúcshalmaza tartalmazza $U$-t. Mutassunk polinom idejű 2-közelítő algoritmust minimális költségű Steiner fa megtalálására. (Megoldás)

**702.*** Szeretnénk $n$ darab munkát elvégezni $m$ darab azonos típusú, párhuzamosan működő gépen. Minden munkához adott a $p_j$ megmunkálási idő. Minden munkát egy gépen, megszakítás nélkül kell végezni. A cél a legkésőbbi befejezési idő minimalizálása. Adjunk 2-közelítő algoritmust a feladatra. (Megoldás)

**703.*** Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, és egy $w : E \to \mathbb{R}_+$ súlyfüggvény. Adjunk a maximális súlyú vágás feladatra 2-approximáló mohó algoritmust! (Megoldás)

## 9.4. Lagrange-relaxáció

**704.** Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} Qx &\le p \\ Ax &= b \\ z &= \min cx \end{aligned}$$

Ennek Lagrange-relaxáltja:

$$\begin{aligned} Qx &\le p \\ L(\lambda) &= \min(cx + \lambda(Ax - b)) \end{aligned}$$

a) Mi a kapcsolat $z$ és $L(\lambda)$ között?
b) Valamely $\lambda$-ra egy $x$ optimális megoldás az eredeti feladatnak is megoldása. Mi mondható még $x$-ről?
c) Most az eredeti feladatban cseréljük ki $Ax = b$-t $Ax \leq b$-re. Hogyan kell még módosítani a feladatot, hogy továbbra is alsó becslést kapjunk? Mi a helyzet a b) résszel?

**705.** Tekintsük az alábbi hátizsákfeladatot: 3 tárgyunk van, ezek súlyai 2, 3, 1 és értékei rendre 10, 12, 3. A hátizsák teherbírása 4. Írjuk fel a feladatot IP-ként és vegyük a hátizsák teherbírásához tartozó feltétel Lagrange-relaxáltját (vigyázat: a változók egészértékűségét ne relaxáljuk). Oldjuk meg a Lagrange-feladatot (azaz keressük meg a legjobb $\lambda$-t).

**706.** Adott egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf $c$ élköltségekkel, valamint egy $w$ kijelölt csúcs. Olyan minimális költségű feszítőfát keresünk, melynek $w$-beli foka pontosan $k$. Tegyük fel, hogy a feszítőfák poliéderének ismerjük a leírását: $Ax \leq b$, ahol $x \in \mathbb{R}^{|E|}$.

a) Fogalmazzuk meg a feladatot LP feladatként,
b) alkalmazzunk Lagrange relaxációt,
c) adjunk kombinatorikus algoritmust olyan $\lambda$ együttható megtalálására, melyre $L(\lambda)$ éppen a keresett optimum. (Megoldás)

**707.** Tekintsük az előadáson szereplő hosszkorlátos út problémát, és a relaxált alábbi alakját:

$$\begin{aligned} (y, \lambda) &\in \mathbb{R}^2 \\ \lambda &\geq 0 \\ \forall P : y &\leq c(P) + \lambda(d(P) - \Delta) \\ \max y& \end{aligned}$$

Mit csinál a vágósíkos algoritmus ezen a példán?

# 10. fejezet

# Konvex programozás

Egy $C \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz **konvex**, ha tetszőleges $x, y \in C$ és $0 \le \lambda \le 1$-re $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Azaz: ha egy szakasz két végpontja benne van $C$-ben, akkor a teljes szakasz benne van.

Az $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok egy **konvex kombinációja** egy olyan vektor, ami előáll $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ alakban, ahol $0 \le \lambda_i \le 1$ $(i = 1, \ldots, k)$ és $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

Egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz **konvex burka** az összes olyan vektorból áll, ami $X$ véges sok elemének konvex kombinációja. Jelölése: $\mathrm{conv}(X)$. A $C$ halmaz pontosan akkor konvex, ha $C = \mathrm{conv}(C)$.

**Konvex kúp** alatt $\mathbb{R}^n$ olyan részhalmazát értjük, ami zárt a nemnegatív számmal való szorzásra és az összeadásra. Egy konvex kúp **csúcsos**, ha a 0 extremális pontja, ami ekvivalens azzal, hogy nem tartalmaz 0-n átmenő egyenest. Egy $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex kúp **polárisa** a $K^p = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^T y \le 0 \ \forall y \in K\}$ halmaz.

## 10.1. Konvex halmazok

**708.** Konvexek-e az alábbi halmazok:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, \, (x-3)^2 + (y-2)^2 \le 2, \, 2y + x \ge 6\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2\pi, \, y \ge 0, \, y - \sin x \le 0, \, y + (x-1)^2 \le 2\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z \ge 4, \, x^2 + 4z^2 \le 4, \, x^3 + 2x^2 + y^2 + y \le 7, \, x, y, z \ge 0\}$? (Megoldás)

**709.** (*Carathéodory tétel*) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}^n$ esetén tetszőleges $x \in \mathrm{conv}(X)$ előáll legfeljebb $n+1$ $X$-beli pont konvex kombinációjaként.

**710.** Mutassuk meg, hogy konvex halmaz belseje és lezártja is konvex.

**711.** Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus valós $n \times n$-es mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós terében a pozitív szemidefinit mátrixok konvex kúpot alkotnak. (Megoldás)

**712.** Mutassuk meg, hogy adott $A_1, \ldots, A_m, B$ szimmetrikus valós $n \times n$-es mátrixokra az $\{x \in \mathbb{R}^m : x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m \preceq B\}$ halmaz konvex. ($A \preceq B$ azt jelenti, hogy $B - A$ pozitív szemidefinit.) (Megoldás)

**713.** Legyen $D = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x_{n+1} > 0\}$, és definiáljunk egy $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvényt: $z \in \mathbb{R}^n$ és $t > 0$-ra $f(z,t) = \frac{z}{t}$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $C \subseteq D$ konvex halmazra $f(C)$ is konvex, és tetszőleges $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazra $f^{-1}(C)$ is konvex. (Megoldás)

**714.*** Mutassuk meg, hogy ha $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt konvex halmaz, és $x^* \notin C$, akkor létezik $w \in \mathbb{R}^n$, hogy $wx > wx^*$ minden $x \in C$-re. (Megoldás)

**715.** Mutassuk meg, hogy ha $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, és $x^* \notin C$, akkor létezik $w \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, hogy $wx \geq wx^*$ minden $x \in C$-re. (Megoldás)

**716.** Mutassuk meg, hogy ha $C_1$ és $C_2$ diszjunkt konvex halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor létezik $w \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektor, hogy $wx \geq wy$ minden $x \in C_1, y \in C_2$-re. (Megoldás)

**717.** Mutassuk meg, hogy konvex kúp polárisa is konvex kúp. Igaz-e, hogy $(K^p)^p = K$? (Megoldás)

**718.** A szimmetrikus $n \times n$-es mátrixok terében definiáljuk a skalárszorzatot a két mátrix szorzatának nyomaként, azaz $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$. Mi a polárisa a pozitív szemidefinit mátrixok konvex kúpjának (lásd 711. feladat)? (Megoldás)

**719.*** Bizonyítsuk be, hogy ha $K_1, K_2, \ldots, K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex csúcsos kúpok amikre $K_1 \cap \cdots \cap K_m = \{0\}$, akkor léteznek $v^i \in K_i^p$ vektorok ($i = 1, \ldots, m$), amik nem mind 0-k, de $\sum_{i=1}^m v^i = 0$. (Megoldás)

## 10.2. Konvex függvények

**720.** (*Jensen egyenlőtlenség*) Legyen $C$ konvex halmaz, $f : C \to \mathbb{R}$ konvex függvény, és $x^1, \dots, x^k \in C$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ számokra

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x^i).$$

**721.** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-ben tetszőleges norma konvex függvény.

**722.** Mutassuk meg, hogy ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, akkor az $f(x) = x^T Ax$ függvény pontosan akkor konvex, ha $A$ pozitív szemidefinit.

**723.** Mutassuk meg, hogy ha $f_1, \dots, f_k$ konvex függvények a $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon, $g$ konvex függvény $\mathbb{R}^k$-n, és $x \le y$ esetén $g(x) \le g(y)$, akkor a $C$-n definiált $x \mapsto g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ függvény is konvex. (Megoldás)

**724.** Legyen $f$ konvex függvény $\mathbb{R}^n$-en. Mutassuk meg, hogy ha valamilyen $\beta \in \mathbb{R}$ esetén az $\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \le \beta\}$ halmaz nemüres és korlátos, akkor minden $\beta$ esetén korlátos.

**725.** Adott $0 < k < n$ egészekre és $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra legyen $f_k(x)$ az $x$ vektor $k$ legnagyobb koordinátájának az összege. Mutassuk meg, hogy $f_k$ konvex függvény. (Megoldás)

**726.** Mutassuk meg, hogy a szimmetrikus valós $n\times n$-es mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós terében a maximális sajátérték függvény, azaz $f(A) = \lambda_{max}(A)$ konvex. (Megoldás)

**727.** Igazoljuk, hogy minden $n$ természetes számra

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \le \prod_{i=1}^{n} (1 + \mathrm{e}^{x_i})^{\frac{1}{n}}.$$

(Megoldás)

**728.** Legyenek $\alpha, \beta, \gamma$ egy háromszög szögei! Igazoljuk a

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

egyenlőtlenséget! (Megoldás)

**729.** Mutassuk meg, hogy minden $u_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sum \lambda_i = 1$ esetén $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \le \ln(\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{u_i})$. (Megoldás)

**730.** (*Hölder-egyenlőtlenség*) Bizonyítsuk be, hogy ha $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, és $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, akkor

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

(Megoldás)

**731.** Mutassuk meg, hogy minden $u_i > 0$, $\lambda_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ esetén

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{u_i}\right) \ge 1.$$

(Megoldás)

**732.** Bizonyítsuk be, hogy ha $g$ konvex függvény a $C$ konvex halmazon, és $g(x) < 0$ minden $x \in C$-re, akkor tetszőleges $p \ge 1$-re az

$$f(x) = \left(\max\left\{0, \log\frac{1}{-g(x)}\right\}\right)^p$$

függvény konvex $C$-n. (Megoldás)

**733.** Legyen $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_1x_2x_3 + 2x_2x_3^2$. Mi a függvény gradiense, és mi az értéke az (1,2,3) pontban. Mi a Hesse-mátrix? Lehet-e valahol pozitív vagy negatív definit? (Megoldás)

## 10.3. Feltételes optimalizálás

Egy $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaznak egy $x \in C$ pontban az $s \in \mathbb{R}^n$ vektor **megengedett iránya**, ha létezik $\epsilon > 0$, amire az $[x, x + \epsilon s]$ szakasz $C$-ben van.

**734.** Mik a megengedett irányai

a) az $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 4,\ x + y \leq 1\}$ halmaznak a $(3, -2)$ illetve a $(2, -3)$ pontokban?

b) az $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 3 \geq 0,\ -x^2 + y - 1 \geq 0,\ x, y \geq 0\}$ halmaznak a (2,5) illetve az (1,2) pontokban? (Megoldás)

**735.** Milyen $p$ paraméter mellett lesz az

$$\begin{aligned} y^2 - px - 4y &\to \min \\ x^2 + y^2 - 4y &\leq 5 \\ x^2 + y &\leq 5 \\ x + y &\geq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

feladatnak a (2,1) pontban optimumpontja? Használjuk a Karush–Kuhn–Tucker tételt. (Megoldás)

**736.** Ellenőrizzük, hogy az alábbi feladatokra teljesül-e a Karush–Kuhn–Tucker-féle szükséges optimalitási kritérium a megadott pontokban.

a) $(x^*, y^*) = (0, -3)$,

$$\begin{aligned} x^2 + y &\to \min \\ x^2 + y^2 &\leq 9 \\ x + y &\leq 1. \end{aligned}$$

b) $(x^*, y^*) = (0{,}0)$,

$$\begin{aligned} x + y &\to \min \\ x^2 - y &\leq 0 \\ 2y + x &\leq 4. \end{aligned}$$

(Megoldás)

**737.** Mutassuk meg, hogy az alábbi feladat egy Slater-reguláris konvex programozási feladat. Határozzuk meg az optimális megoldását a Karush–Kuhn–Tucker optimalitási feltételek segítségével.

$$y \to \min,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ -x + y^2 \leq 0,\ x + y \geq 0.$$

(Megoldás)

**738.** Írjuk fel a Karush–Kuhn–Tucker optimalitási feltételeket, és oldjuk meg a feladatot.

$$\begin{aligned} 3x + z^2 &\to \min \\ -x + y + z &\le 0 \\ -x - 2y + z^2 &\le 0 \end{aligned}$$

(Megoldás)

**739.** Ellenőrizzük a Slater regularitást és a Karush–Kuhn–Tucker feltétel teljesülését.

a) $y \to \max,\ x^2 + y \le 1,\ x + y \le 1$ és $(x^*, y^*) = (0,1)$.

b) $-x+y \to \min,\ x^2+y^2+2x \le 1,\ |x| \le 1,\ |y| \le 1$ és $(x^*, y^*) = (0, -1)$.

c) $y \to \max,\ x^2 + 3y \le 3,\ 2x + 3y \le 4,\ x, y \ge 0$ és $(x^*, y^*) = (0,1)$.
(Megoldás)

**740.** Lehet-e a (0,1) illetve az $(1, 0)$ pont optimális a Karush–Kuhn–Tucker-féle szükséges feltétel alapján az alábbi feladatban:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 20x - 20y &\to \min \\ y &\le (x-1)^2 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0? \end{aligned}$$

(Megoldás)

**741.** A Karush–Kuhn–Tucker tételt használva keressük meg az alábbi halmaznak a (3,4) ponthoz eső legközelebbi pontját:

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 5,\ x + 2y \le 6,\ x, y \ge 0\right\}$$

(Megoldás)

**742.** A Karush–Kuhn–Tucker tételt használva keressük meg az alábbi halmaznak az $u_0 = (2{,}4)$ ponthoz eső legközelebbi pontját:

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \le 4,\ 2x + y \le 6,\ x, y \ge 0\right\}$$

(Megoldás)

**743.** Döntsük el, hogy az alábbi feladat Slater-reguláris konvex programozási feladat-e, majd oldjuk meg:

$$\begin{aligned} -x - y &\to \min \\ x^2 + y &\le 3 \\ x + 2y &\ge 0 \\ x &\ge 0. \end{aligned}$$

(Megoldás)

**744.** Döntsük el, hogy az alábbi feladat Slater-reguláris konvex programozási feladat-e, majd oldjuk meg:

$$\begin{aligned} x - y &\to \min \\ x + y^2 &\le 3 \\ 2x + y &\ge 0 \\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

(Megoldás)

**745.** Megengedett irányok módszerével oldjuk meg az alábbi feladatot az $u_1 = (1,1)$ pontból kiindulva.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6x - 10y &\to \min \\ x + y &\le 6 \\ x^2 - y &\le 0 \\ x &\ge 1 \end{aligned}$$

# II. rész

# Megoldások

# 1. fejezet

# Bevezető feladatok

## 1.1. Skatulya-elv

**1.** Indirekt tegyük fel, hogy nincs ilyen hónap. Ekkor minden hónapban legfeljebb 8 ember születhetett. Mivel 12 hónap van, ez összesen maximum $8 \cdot 12 = 96$ embert jelent, ellentmondva a 100 fős létszámnak.

**2.** Egy erősebb állítást látunk be: azt fogjuk igazolni, hogy a kiválasztott számok közt létezik kettő, melyek összege pontosan 2013.

Állítsuk párba a számokat 1-től 2012-ig a következőképpen:

$$\begin{aligned} 1 &- 2012, \\ 2 &- 2011, \\ &\vdots \\ 1006 &- 1007. \end{aligned}$$

Ekkor 1006db párt kapunk, és minden párban a szereplő számok összege 2013. Mivel 1007db számot választunk ki, biztos, hogy azok közt szerepel valamelyik pár mindkét tagja.

**3.** Nem, hiszen $3 \cdot 7 = 21$, $3 \cdot 9 = 27$, vagyis 7 különböző összeget keverhetünk ki hármat véve ezen három számból, de nekünk 8 különböző értékre lenne szükség (3 sor, 3 oszlop, 2 átló).

**4.** Osszuk fel a sakktábla mezőit 8 skatulyába a következő módon: az első részbe kerülnek a főátló mezői, a következőbe a főátló alatti mezők plusz a bal felső sarok, stb. Ekkor 8 skatulyát kapunk, így bárhogy helyezzük el a 33 bástyát, biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább 5 bástya kerül. Ezen bástyák pedig nem ütik egymást.

**5.** Készítsük el a következő részösszegeket:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_i &= a_1 + \ldots + a_i, \\ &\vdots \\ s_{100} &= a_1 + \ldots + a_{100}. \end{aligned}$$

Ha valamelyik $s_i$ osztható 100-zal, akkor készen vagyunk, így tegyük fel, hogy nem ez a helyzet. Ekkor viszont biztosan van olyan $1 \leq i < j \leq 100$, melyre $s_i$ és $s_j$ ugyanazt a maradékot adják 100-zal osztva. Ekkor $s_j - s_i$ osztható 100-zal, és ez a különbség könnyen láthatóan néhány $a_k$ összegeként áll elő.

**6.** Az említett bejárás nem lehetséges. A ló sötét mezőről mindig világosra lép, és fordítva, így a bejárásnak mindenképpen szükséges feltétele, hogy a táblán ugyanannyi legyen a két színből. Ez $7 \times 7$-es sakktáblára nem teljesül.

**7.** Indirekt tegyük fel, hogy egyik említett részsorozat sem létezik. Jelölje a sorozat elemeit $a_1, \ldots, a_{nm+1}$, és minden $1 \leq i \leq nm + 1$-re definiáljuk az $(x_i, y_i)$ párt a következőképpen: $x_i$ jelöli az $a_i$-vel kezdődő leghosszab monoton növő, míg $y_i$ a leghosszabb monoton csökkenő részsorozat hosszát.

Ekkor az indirekt feltevés miatt $1 \leq \max_i(x_i) \leq n$ illetve $1 \leq \max_i(y_i) \leq m$. Ez azt jelenti, hogy összesen legfeljebb $n \cdot m$ különböző $(x_i, y_i)$ páros létezik. Vegyük észre, hogy $i \neq j$ esetén $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$, ami ellentmond annak, hogy összesen $nm + 1$ tagú a sorozat.

## 1.2. Alapozó feladatok

**8.** Nem létezik, hiszen a fokszámok összege páros kell, hogy legyen.

**9.** Igen, mert ha $G$ nem összefüggő, akkor a pontjait két osztályba oszthatjuk úgy, hogy a két rész pontjai között nem megy él. De ekkor a komplementerben e két rész között egy teljes páros gráf található, ami önmagában összefüggő.

**10.** Valójában legalább két ilyen pont létezik: vegyünk a gráfban egy feszítőfát, és ennek bármely levele megfelelő lesz.

**11.** Indirekt: ha a gráf nem összefüggő, akkor a pontjait két részre oszthatjuk úgy, hogy a két pontosztály között nem megy él. Ekkor a kisebbik rész legfeljebb $n$ pontot tartalmaz, így bármely pontjának foka -a gráf egyszerű volta miatt- legfeljebb $n - 1$, ellentmondásban a feladat feltevésével.

**12.** Elegendő belátnunk, hogy egy $n$ pontú gráfnak vagy a komplementerének legalább $n$ éle van, ha $n \geq 5$. Ez következik abból, hogy $\binom{n}{2}/2 \geq n$, ha $n \geq 5$.

**14.** Húzzuk össze azokat az éleket, melyek súlya kisebb, mint $\alpha$. Pontosan akkor létezik megfelelő partíció, ha a kapott gráfnak legalább $k$ csúcsa van.

**15.** Használjuk a Menger-tételt.

**17.** Az (a) és (b) esetekben nem, de a (c) és (d) esetekben lehet 4 hosszú kör feszített részgráf. Tekintsünk mindig egy legkisebb kezdőpontú, azon belül leghosszabb intervallumot.

**18.** A gazos rész kerülete nem nőhet.

## 1.3. Fák, fenyők

**19.** Minden mérkőzésen pontosan egy ember esik ki, és mivel a győztesen kívül mindenki más pontosan egyszer veszít, így összesen $n-1$ mérkőzést játszanak.

**20.** Ez lényegében ugyanaz, mint a 19. feladat: minden összehasonlításnál, mint egy „kieséses” versenyen, tartsuk meg a kisebb elemet.

**22.** Mutassuk meg, hogy ha $F_1$ és $F_2$ minimális költségű feszítő fák, akkor minden $c$ súlyra ugyanannyi $c$ súlyú él található $F_1$-ben és $F_2$-ben.

**26.** A mélységi fa irányítása miatt minden pont elérhető $s$-ből. Ugyanakkor minden pontból elérhető $s$. Valóban, ha egy $v$ pontból $s$ nem érhető el, akkor létezik a pontoknak egy olyan $v \in X$, $s \notin X$ részhalmaza, melynek az irányításban a kifoka 0. Ez azt jelenti, hogy a mélységi fa tartalmazza az összes belépő élt, de akkor -a mélységi fa definíciója miatt- ezen élek elvágó élek a gráfban, ellentmondás.

**27.** $D'$-ben egy minimális költségű feszítő fenyő súlya legfeljebb annyi, mint $D$-ben. Ugyanakkor tetszőleges $D'$-beli fenyőt „visszafújva” $D$-be és a kör megfelelő 0 súlyú éleivel kiegészítve egy ugyanolyan költségű feszítő fenyőt kapunk $D$-ben.

**28.** Töröljük azon $F$-en kívüli éleket a gráfból, melyek fejébe már lép bele $F$-beli él. Pontosan akkor egészíthető ki $F$ a kívánt módon, ha az így kapott digráf gyökeresen összefüggő. Ennek feltétele, hogy ne legyen olyan $Z \subseteq V - s$ részhalmaz, amelybe $F$-beli él nem lép be és minden $Z$-be lépő $uv$ élre $v$-be lép $F$-beli él.

**30.** Jelöljük ki a gráf tetszőleges $s$ pontját gyökérpontnak, majd vegyük egy minimális költségű $s$-gyökerű feszítő ki- és be-fenyő unióját.

**31.** Építsünk fel egy tarka feszítő $s$-fenyőt mohó módon: ha az aktuális lépésben adott egy tarka $s$-fenyő, mely nem feszít minden pontot, akkor vegyünk egy olyan élt, mely kilép a már elért pontok halmazából, és még nem használt színű. Ilyen biztosan létezik, hiszen a pontok minden $s$-et tartalmazó valódi részhalmazából lép ki minden színből legalább egy. (Lásd 25. feladat.)

**32.** Segítség: tekintsünk egy $v$ levelet $T_1'$-ben. Ha a $v$-be lépő $T_1'$ és $T_2$-beli élek különbözőek, akkor a két él kicserélhető $T_1'$-ben. Ha $T_1'$ minden levelébe olyan él lép, mely $T_2$-ben is benne van, akkor töröljük ezen leveleket $T_1'$-ből és az így kapott kisebb fenyő leveleire alkalmazzuk a fentit. Fontos: mutassuk meg, hogy minden lépésben fenyőt kapunk.

**33.** Használjuk a 32. feladat állítását.

**34.** Vegyünk $k$ feszítő fát. Ha ezek nem teljesítik a feltételt, akkor van köztük olyan ($F_1$), mely legalább két élt tartalmaz $F$-ből, és olyan is ($F_2$), mely 0-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $F_1 \cap F$ egy elemét ki tudjuk cserélni $F_2$ egy elemére.

**35.** Jelölje $c(a)$ azt a nemnegatív egész számot, ahány kijelölt halmazba az $a$ él belép. Ekkor pontosan akkor létezik a kívánt tulajdonságú $s$-fenyő, ha a kapott $c$ költségfüggvényre nézve a minimális költségű fenyő súlya megegyezik a kijelölt halmazok számával.

## 1.4. Vágások

**43.** Az „akkor” irány nyilvánvaló. A „csak akkor” irányhoz: vegyük a feszítő fa egy jó színezését két színnel. Azt állítjuk, hogy ez egyben a gráf egy jó színezését adja. Ehhez elegendő ellenőrizni, hogy egy tetszőleges él két végpontja különböző színű. Ez a fa éleire automatikusan teljesül, míg egy fán kívüli élre a fához tartozó alapkörök párosságából következik.

## 1.5. Séták, Utak

**46.** Tekintsünk egy sétát. Ha ez út, akkor készen is vagyunk, ha nem, akkor tartalmaz kört. Vegyünk egy ilyen kört, és hagyjuk ki éleit a sétából. Ezt az eljárást iteráljuk.

**48.** Hasonlóan a 46. feladat megoldásához.

**50.** Húzzuk össze $S$ pontjait egyetlen ponttá, és futassunk az így kapott $s$ pontból egy szélességi/mélységi keresést az irányított gráfban.

**51.** Vegyük észre, hogy a gráfban nincs olyan él, mely a szélességi keresés során kapott fában legalább két szintet ugrana.

**52.** Vegyünk fel egy új $s$ pontot és $ss_i$ éleket. Ekkor a digráf $s$-ből gyökeresen $k$-élösszefüggő, ezért Edmonds tétele szerint van benne $k$ éldiszjunkt $s$ gyökerű feszítőfenyő. Válasszuk az $s_i - t_i$ utat az $i$-edik fenyőből.

**53.** Két különböző sor skaláris szorzata akkor nagyobb mint egy, ha legalább két oszlopnál mindkét sorban egyes áll. Ez éppen egy 4-hosszú körnek felel meg.

**54.** Használjuk ki, hogy az adjacencia-mátrix $k$-adik hatványában az $i$. sor $j$. eleme azt adja meg, hogy hány különböző $k$ élű séta létezik az $i$. sornak és a $j$. oszlopnak megfelelő pontok között (itt a séta egy élt többször is használhat).

**55.** Nem, vegyünk egy háromszöget. Ekkor a háromszög tetszőleges pontjához tartozó főátlóbeli elem nem 0 az 5. hatványban.

**57.** Mivel $G$-ben nincs hurokél, ezért egy $v$ pontból önmagába egy három hosszú séta csak egy háromszög mentén mehet. Mivel egy háromszöget mindhárom csúcsánál figyelembe veszünk, ráadásul rajta mindkét irányba mehetünk, ezért a háromszögek száma a főtálóbeli elemek összege osztva $2 \cdot 3$-mal, azaz 20.

**58.** Egyrészt $A$ főátlójában minden elem 0, másrészt $A^2$ főátlójában a csúcsok fokszámai szerepelnek, ezért a gráf reguláris. Sőt, bármely két csúcsra igaz, hogy a közös szomszédaik száma eggyel kevesebb, mint a fokszámuk. Tehát a gráf teljes.

**59.** Vegyük azt a $c$ élsúlyozást, melyben minden él súlya annyi, ahány $M$-beli halmazba belép. Ekkor minden $s - t$-út legalább $|M|$ költségű. Ha a legrövidebb út költsége éppen $|M|$, akkor létezik a keresett út, különben nem.

## 1.6. Euler-gráfok

**60.** Az „akkor” irány nyilvánvaló. A „csak akkor” irányhoz tekintsük a gráf egy körét, és hagyjuk el a gráfból. Ekkor a gráf esetleg több komponensre esik szét, melyek mindegyike Euler. Indukcióval, ezekben létezik zárt Euler-séta, ezeket pedig megfelelő módon összefűzve az elhagyott körrel az eredeti gráfban kapunk egy megfelelő Euler-sétát.

**61.** Indukcióval: tekintsük a gráf egy tetszőleges körét. Ezt hagyjuk el a gráfból, az így kapott -esetleg nem összefüggő- gráf minden komponense Euler, így felbomlik élidegen körök uniójára. Ehhez hozzávéve az eredetileg elhagyott kört egy jó felbontást kapunk.

**62.** Ugyan a kapott gráfban minden pont foka páros, nem igaz az állítás, mert a megmaradó gráf nem feltétlenül összefüggő.

**63.** Nem, mert a gráf nem összefüggő: minden mod 4 osztály egy komponenst alkot.

**64.** a) Tetszőleges zárt Euler-sétán végigmenve irányítsuk az éleket a haladás irányába. b) Párosítsuk le a páratlan fokú pontokat új élekkel (akkor is, ha ezzel párhuzamos élek keletkeznek), így egy Euler-gráfot kapunk. Ennek tekintsük egy Euler irányítását, majd hagyjuk el az extra éleket.

**65.** Duplázzuk meg a gráf összes élét. Az így kapott gráfban minden pont foka páros, így létezik benne zárt Euler-séta. A sétát az eredeti gráfban tekintve egy megfelelő bejárást kapunk.

**66.** Vegyünk a gráfban egy zárt Euler-sétát, melynek kezdőpontja $s$, és színezzük meg az éleit felváltva piros és kék színnel. Ekkor könnyen látható, hogy minden $s$-től különböző csúcsban az élek fele piros, fele kék. Az $s$ kezdőpontra pedig ez azért fog teljesülni, mert a gráfnak a 4-regularitás miatt páros sok éle van, így az Euler-séta első és utolsó éle különböző színű lesz.

**67.** Hasonlóan a 66. feladat megoldásához.

**68.** Az „akkor” irányhoz lásd a 66. feladat megoldását. A „csak akkor” irányhoz vegyük észre, hogy ha egy gráfban minden pontra ugyannyi piros él illeszkedik, mint kék, akkor az élek száma szükségszerűen páros. Valóban, jelölje $p$ a piros, $k$ a kék, $e$ pedig az összes élek számát. Ha összeadjuk minden pontra a rá illeszkedő piros élek számát, akkor $2p$-t, ugyanezt a kék színre eljátszva $2k$-t kapunk. De $2p = 2k$, így $2e = 2p + 2k = 4p$, azaz $2|e$.

**69.** Egy zárt Euler-sétán végighaladva számozzuk meg az éleket sorban 1-től $m$-ig, ez könnyen láthatóan jó megoldást ad.

Ellenpélda: két diszjunkt háromszögből álló gráf.

**70.** Hasonlóan a a 66. feladathoz.

**71.** Lásd a 64. (a) feladatot.

**72.** a) Igaz, lásd 70. feladat. b) Nem igaz, ha a gráfnak páratlan sok pontja van, akkor az élszám is páratlan, így nem bontható két egyenlő részre. c) Nem igaz, ha a gráfnak páratlan sok pontja van, akkor az élszám nem osztható 4-gyel, így nem bontható négy egyenlő részre.

**73.** Euler-gráfban minden vágás páros, ezért ha egy él $G'$-ben elvágó, akkor elvágja $s$-et a séta aktuális $v$ végpontjától. Két ilyen él nem illeszkedhet $v$-re. Nevezzünk a sétában az aktuális $G'$ gráfra nézve egy élet rossznak, ha elvágó és $s$-et még fedetlen élektől vágja el. Tegyük fel, hogy a séta úgy tér vissza végleg $s$-be, hogy nem fedett le minden élt. Ekkor a séta utolsó éle rossz volt. Vegyük a sétában az első rossz $uv$ élet, az általa elvágott csúcshalmazok legyenek $X$ és $Y$. Feltehető, hogy $s \in X$. Legyen továbbá a sétában $uv$ előtt szereplő él $wu$. Ha $w \in Y$ lenne, $wu$ is rossz lett volna, mivel $u$-nak minden más éle fedett volt $uv$ választásakor. Ám $w \in X$ sem lehet, mert az $Y - u$ halmazt egy rossz él korábban elvágta volna $s$-től.

**74.** A 73. feladat megoldásához hasonlóan. Vegyük észre, hogy ha lenne rossz él, az mindenképpen $F$-beli lenne.

**75.** Használjuk, hogy

$$\sum_{v \in S} \varrho(v) = \varrho(S) + i(S) \text{ és } \sum_{v \in S} \delta(v) = \delta(S) + i(S).$$

**76.** Ha $\delta(s) = 0$, akkor az állítás nyilván igaz. Indukcióval bizonyítunk: legyen $\delta(s) > 0$, és induljunk el $s$-ből egy tetszőleges élen. Mivel minden pont befoka megegyezik a kifokával, ezért az aktuális csúcsból mindig tovább tudunk lépni egy olyan élen, amit még nem használtunk. Ez az eljárás csak a $t$ pontban akadhat el, és ekkor találtunk egy $s - t$ sétát. Ebből körök esetleges kihagyásával egy $s - t$ utat készíthetünk. Ezt kihagyva a gráfból $\delta(s)$ pontosan eggyel csökken, és az $s$-től és $t$-től különböző pontok ki- és befoka továbbra is megegyezik, így indukcióval kész vagyunk.

**77.** a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) nyilvánvaló. A c) $\Rightarrow$ a) implikációhoz tekintsük azon élek halmazát $D$-ben, melyek $D'$-ben fordítva állnak. c) alapján ezen élek $D$-nek egy Euler-részgráfját alkotják, mely a 61. feladat alapján ($D$-beli) éldiszjunkt körök uniójára bomlik. Ezen köröket átfordítva éppen $D'$-t kapjuk.

**80.** Háromszögeljük a síkgráfot, és figyeljük meg, hogy eközben a formula mindkét oldala ugyanannyival változik. Így elegendő az állítást háromszögelt síkgráfra igazolni.

## 1.7. Párosítások

**86.** Egy párosításban minden pont foka legfeljebb egy, így két párosítás uniójában legfeljebb 2. Egy gráf, melyben minden pont foka legfeljebb 2, pontdiszjunkt körök és utak uniója.

**87.** Legyen a páros gráf két pontosztálya $S$ és $T$. Irányítsuk a piros éleket $S$, a kékeket $T$ felé, és az így kapott irányított gráfban keressünk irányított utat a két pont között valamely irányban.

## 1.8. Irányított gráfok

**88.** Ha létezik topologikus sorrend, akkor a digráf nyilván aciklikus. A fordított irányhoz vegyünk a gráfban egy nyelő pontot (melyből nem lép ki él; ilyen pont mindig van, ellenkező esetben mindig az aktuális pontból egy kimenő élen továbblépve előbb-utóbb irányított kört kapnánk), tegyük a sorrend végére, és töröljük a gráfból. Iteráljuk az eljárást.

**89.** Tekintsük a pontok egy tetszőleges sorrendjét. Ebben az előre menő élek alkotják az egyik, míg a hátra menő élek a másik aciklikus digráfot.

**90.** Tekintsük a két digráf unióját, és az így kapott gráfról döntsük el, hogy aciklikus-e.

## 1.9. Mohó algoritmusok

**94.** (b) Helyezzük a munkákat egymás után egy $mT$ hosszú intervallumra, vágjuk ezt a szalagot $T$ hosszú részekre, és osszuk ki a részeket a gépek közt. Minden gép munkabeosztását a neki szánt szalagrész mutatja.

**95.** A munkák a megmunkálási idők szerint nem-csökkenő sorrendben kövessék egymást.

**96.** Felcserélés a második gépen.

## 1.10. Áramok, tenziók

**98.** Vegyünk egymás után egy $st$ utat és egy másikat visszafelé, ezek együtt irányítatlan értelemben körsétát alkotnak. Minden körséta körökre bomlik, melyekre a tenzió definícióját alkalmazva az állítás adódik.

**99.** Lásd 100.

**100.** Ha tenzió, akkor potenciálkülönbség: használjuk a 98. feladatot. Egy rögzített $v$ csúcs potenciálja legyen 0, minden más csúcsé pedig a $v$-ből odavezető utak hossza. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban potenciál lesz.

**101.** Használjuk a 100. feladatban leírt módszert.

**103.** Használjuk a 100. feladatot. A feszítőfa és $x$ definiál egy eltolástól eltekintve egyértelmű potenciált, melynek potenciálkülönbsége a fa élein $x$. Ez pontosan akkor adja vissza $x$-et potenciálkülönbségként a többi élen is, ha minden fán kívüli élre az alapkör semleges.

**106.** (iii)$\to$(iv): tekintsünk egy $n$ pontú utat, mint feszítőfát.

**107.** (i)$\to$(ii), (ii)$\to$(iii) világos. (iii)$\to$(i): indukcióval belátható, hogy minden pont semleges.

**108.** (i)$\to$(iii), (iii)$\to$(i) világos. (i)$\to$(ii): használjuk, hogy minden tenzió előáll egészértékű potenciálkülönbségként (lásd 101.), a $k$-nál nagyobb értékű csúcsok egy-egy irányított vágást definiálnak minden olyan $k$-ra, amely a potenciál értékkészetébe esik (kivéve a maximumot). Meggondolható, hogy ezek megfelelőek.

**114.** Feltehető, hogy $x$ minden élen pozitív. Legyen $C$ egyirányú kör, és jelölje $x_C$ az $x$ áram minimális értékét $C$ élein, $C_0$ pedig azon $C$-beli éleket, melyeken $x$ értéke éppen $x_C$. Csökkentsük $x$-et $C$ élein $x_C$-vel, és tekintsük az új áram pozitív értékű éleinek összefüggőségi komponenseit. A nemnegativitás miatt ezek is erősen összefüggőek lesznek, és az eredeti gráf erősen összefüggősége miatt számuk legfeljebb $|C_0|$. Innen indukcióval kapjuk az állítást.

**116.** Legyen $\pi$ egy potenciál, melyre $\Delta_\pi = x$ és tekintsük a pontok egy $\pi(v_1) \leq \pi(v_2) \leq \ldots \leq \pi(v_n)$ sorrendjét úgy, hogy az azonos értékű csúcsokra megszorítva topologikus sorrend legyen. Vegyük észre, hogy $\Delta_\pi \geq 0$ miatt ez a sorrend az egész gráfnak is topologikus sorrendje. Indukcióval bizonyítunk a szigorúan monoton ugrások számára. Jelölje minden $1 \leq i \leq n$-re $V_i$ az első $i$ pont halmazát, $\pi_i$ pedig azt a potenciált, mely $V_i$-n 0, komplementerén pedig 1. Ekkor $\Delta_{\pi_i}$ éppen a $V_i$-hez tartozó egyirányú vágás karakterisztikus vektora. Ha valamely $i$-re $\pi(v_i) < \pi(v_{i+1})$, akkor vonjuk ki $x$-ből a $\Delta_{\pi_i}$ tenzió $(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i))$-szeresét.

# 2. fejezet

# Optimális utak

## 2.1. Nemnegatív költségek, Dijkstra algoritmusa

**117.** Például legrövidebb/legolcsóbb/leggyorsabb út térképen; olyan tömegközlekedési útvonal, amelyhez minél kevesebb jegy kell, stb.

**118.**

a) Ha $P$ egy $s$-ből induló út, akkor legyen $m(P) = \max\{c(e) : e \in P\}$. Induljunk $s$-ből és minden más csúcsra határozzuk meg az oda vezető utak $m(P)$ értékei közül a minimálisat. Ez a Dijkstra-algoritmus lépéseit módosítva megtehető.

b) A max $\leq$ min egyenlőtlenség könnyen látható. Legyen

$$c^* := \max\left\{\min\left\{c(e) : e \in F\right\} :\ F\ s-t\text{-vágás}\right\},$$

ekkor minden $s-t$-vágásban van legfeljebb $c^*$ súlyú él, ezekből felépíthető egy $s-t$-út, melyből a másik irányú egyenlőtlenség is következik.

**119.** Egy $v$ csúcsra jelölje $p_i(v)$ a piros élek minimális azon $s-v$-utak között, melyek legfeljebb $i$ kék élt tartalmaznak. Ekkor $p_i(v) = \min(\min\{p_i(u) + 1 | uv \text{ piros él}\}, \min\{p_{i-1}(u) | uv \text{ kék él}\})$. Így a $p_0, p_1, \ldots, p_k$ távolságfüggvények ebben a sorrendben meghatározhatók.

**120.** Nem, csak nemnegatív súlyfüggvényre működik.

**121.** Kihasználjuk, hogy egy út részútjai nem hosszabbak az útnál. Ez nem teljesül, ha negatív éleket is megengedünk.

**122.** Nem igaz, hiszen az utak hossza a bennük szereplő élek számának függvényében változik. Egy tenzióval való eltolás viszont nem változtat a legrövidebb utak halmazán.

## 2.2. Legrövidebb utak konzervatív súlyozásra nézve, potenciálok

### 2.2.1. Megengedett potenciál létezése, konzervatív súlyozás

**123.** Amennyiben az élek súlyai nemnegatívak.

**124.** Vegyük észre, hogy egy konstanssal való eltolás nem rontja el a megengedett potenciált. Kellően nagy abszolút értékű számmal eltolva a potenciált egy nempozitív potenciált kapunk.

**126.**

a) Egy tetszőleges $uv \in A$ élre $\pi_1(v) \leq \pi_1(u) + c(uv)$ mivel a legrövidebb $v$-be vezető út legfeljebb akkora, mint a legrövidebb olyan $v$-be vezető út, melynek az utolsó éle az $uv$.

b) Hasonló meggondolással kapható a $\pi_2(v) \leq \pi_2(u) + c(uv)$ tetszőleges $uv \in A$ élre.

**127.**

a) Az eltolás megtartja a megengedettséget.

b) Vegyük észre, hogy a megengedett potenciálok halmaza konvex.

c) Esetszétválasztással könnyen belátható.

d) Egy $uv$ élre a megengedettség ekvivalens azzal, hogy $\pi(v) \leq c(uv) + \pi(u)$. Mindkét oldal alsó egészrészét véve is igaz marad a reláció, és $c$ egészértékűsége miatt $\lfloor \pi(u) \rfloor \leq c(uv) + \lfloor \pi(v) \rfloor$. Ezt átrendezve kapjuk az állítást.

**128.** Az állítás következik a a 127. feladat részeiből.

**129.** Legyen $\pi$ egy $c$-re nézve megengedett potenciál. Tekintsük a $c'(uv) = c(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$ súlyfüggvényt. Egyrészt $c' \geq 0$, tehát a Dijkstra-algoritmussal tudunk $c'$-re nézve legrövidebb $st$ utat keresni. Másrészt egy tetszőleges $P$ $st$-út költsége $c'(P) = c(P) - \pi(s) + \pi(t)$ így egy út akkor és csak akkor legrövidebb $s-t$-út $c$-re nézve, ha $c'$-re nézve legrövidebb.

**130.** Ha létezik megengedett potenciál, akkor természetesen nem lehet negatív kör. Ha nincs negatív kör, akkor vehetjük a a 126 feladatnál definiált valamelyik potenciált.

**131.** Lásd a a 126 és a a 130 feladatok megoldásait. Miért lesz jó a potenciál definíciója, ha utak helyett sétákat veszünk?

**132.** Az új élek költségeinek definíciója miatt akkor és csak akkor létezik negatív kör a kisebb gráfban, ha eredetileg létezett, tehát $c$ a kisebb gráfon is konzervatív, ha eredetileg az volt. Így itt létezik $\pi$ megengedett potenciál. Legyen $\pi(z) = \min_{uz \in A}\{\pi(u) + c(uz)\}$. Ez a kiterjesztett potenciál megengedett lesz az eredeti gráfon, mert ha lenne sértő él, az csak $zv$ alakú lehetne, azaz $\pi(v) - \pi(z) > c(zv)$ teljesülne. Ám ekkor $\pi(z)$ értékét behelyettesítve kapnánk, hogy valamely $uz$ élre

$$\pi(v) - (\pi(u) + c(uz)) > c(zv),$$

azaz

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uz) + c(zv),$$

tehát mégsem lett volna megengedett potenciál $\pi$, ellentmondás.

**133.** A súlyozást a következő módon definiáljuk:

a) az $s$-ből kilépő éleken egy rögzített konstans, a többi élen nulla;

b) minden élen legyen egy-egy különböző 2-hatvány;

c) vegyünk egy $s$ gyökerű $T$ fenyőt. A $T$-n kívüli éleken legyen a súly egy nagy $M$ konstans, melyre

$$M > \sum_{v \in V}\{\pi(v)\}.$$

$T$ egy $uv$ élén pedig legyen $\pi(v) - \pi(u)$.

**134.** Gallai-tételből: az a) esetben az eredeti gráf egy megengedett potenciálja az újnak is megengedett potenciálja lesz. A b) esetben vegyünk egy olyan megengedett potenciált, melyre $\pi(t) - \pi(s)$ minimális. Belátható, hogy ekkor $\pi$ pontos $P$ minden élén, így a transzformáció után is megengedett potenciál marad.

**135.** Gallai-tételből: ha konzervatív lenne, lenne megengedett potenciál. Ám bármely $v$-re és negatív összkölségű $wv$-útra $\pi(v) < \pi(w)$, a maximális $\pi$ értékű $v$-t véve ellentmondást kapunk, itt nem végződhet negatív séta.

**136.** Először vegyük észre, hogy tetszőleges $\pi$ potenciálra $\pi(t) - \pi(s) = \pi(t)$ legfeljebb akkora, mint a minimális $s - t$-út hossza. Így a a 126. feladatban definiált $\pi_1$ potenciál jó választás lesz.

**137.** Vegyük a a 136. feladatban definiált potenciált minden $s \in V$ pontra, ez pl. a Bellman-Ford-algoritmussal megtehető polinom időben. Ezek közül válasszuk azt, amelynek a maximális értéke a legnagyobb.

**138.** Az a 127. feladat szerint feltehetjük, hogy a keresett potenciál nempozitív. Vegyük észre, hogy egy tetszőleges $\pi$ nempozitív potenciálra teljesül, hogy $\pi(t)$ legfeljebb akkora, mint egy tetszőleges $t$-ben végződő út, minden $t \in V$-re. $\pi$ legyen a a 126. feladatban definiált $\pi_2$ potenciál. Természetesen $\pi \leq 0$. A a 135. feladat szerint létezik olyan $s \in V$ csúcs, melybe nem vezet negatív séta, tehát $\pi(s) = 0$. Ezen észrevételeket felhasználva már könnyen következik, hogy a választott potenciál jó lesz.

**139.** Lásd a a 138. feladat megoldását.

### 2.2.2. A Bellman-Ford algoritmus

**147.** A Bellman-Fordot módosítsuk úgy, hogy a minimumból vegyük ki a $\pi_{k-1}(v)$ tagot.

**148.** Jelölje a minimális körátlag értékét $h$ (feltettük, hogy $h < 0$). Vegyük észre, hogy ekkor $-h$ az a legkisebb mennyiség, mellyel az élköltségeket eltolva konzervatív súlyozást kapunk, valamint tetszőleges $K$ negatív kör körátlagával eltolva a súlyozást $K$ 0-kör lesz. A konzervativitás eldöntésére szolgáló algoritmusban amíg van olyan $v$ csúcs, melyre $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$, addig a $\pi_n(v)$ értéket felvevő sétában van negatív kör. Ezen kör körátlagával toljuk el a költségeket és ismételjük az algoritmust. Vegyük észre, hogy az új költségfüggvényre már nem állhat fenn $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$, ezért legfeljebb pontszámnyi növelést kell végrehajtanunk. Az utolsó kör lesz a legnegatívabb.

**150.** Az irányítatlan élek egy $F$ erdőt alkotnak. $F$ komponenseit összehúzva aciklikus gráfot kapunk. Ennek egy topologikus sorrendjében haladva meghatározható a minimum: az aktuális komponens $F_i$ fáját visszafújva minden benne szereplő $v$ csúcsra végig kell nézni a korábbi komponensekből induló élek $F_i$-beli végpontjain át $v$-be menő utakat. Ezeknek az $F_i$-be eső része egyértelmű, a megelőző hossza pedig ismert.

**152.** Az átváltási lehetőségek gráfjának éleit súlyozzuk az árfolyamok logaritmusaival. Az első kérdés annak eldöntése, hogy van-e negatív kör a gráfban. A második pedig egy legrövidebb út keresése. Ezek pedig mennek a Bellman-Ford algoritmussal.

**153.** Az $F$-beli éleket előre 1 súllyal súlyozzuk, és fordítva is behúzzuk -1 súllyal, az $E \setminus F$-beli éleket pedig mindkét irányban felvesszük 0 súllyal. A kibővített gráfban ellenőrizzük, hogy a súlyozás konzervatív-e.

**154.** Legyen az élek súlya 1, és fordítva is húzzuk be őket -1 súllyal. A kibővített gráfban minimális átlagú irányított kört keresünk. Lásd a 148. feladat.

### 2.2.3. Pontos élek és alkalmazásaik, Duffin-tétel

**157.** Legyen $\pi$ megengedett potenciál, azaz $c_\pi \geq 0$. Az állítás következik abból, hogy egy egyirányú kör $c$-költsége akkor és csak akkor 0, ha minden élének $c_\pi$ költsége 0.

**158.** Duffin-tételből: ha egy $P$ $s-t$-útra és $\pi$ megengedett potenciálra $\pi(t)-\pi(s) = c(P)$, akkor $P$ legrövidebb (és $\pi$ is optimális).

**159.** Duffin-tételből.

**161.** Legyen a $c_1$-hez tartozó optimális pontenciál $\pi_1$. Keressünk legolcsóbb $s-t$-utat $\pi_1$-pontos élekből.

**162.** Lásd 161. feladat. A pontos élek részgráfja most aciklikus.

**163.** A pontos élek részgráfjában van két éldiszjunkt $s-t$-út.

## 2.3. Leghosszabb utak, részben rendezett halmazok

**165.** Legyen $\pi(v)$ a maximális $sv$ út hossza. Ekkor az $uv$ élen $\pi(v)-\pi(u)-1$ új pont jó lesz.

**166.** 1. Maximális elemek, majd a maradékban maximálisok, stb. minimális antilánc-fedést ad. 2. PERT módszerrel: az egyes antiláncok a PERT szerint azonos időpontban kezdődő munkák.

**167.** Tekintsük az alábbi segédgráfot: $V := \{s, t, v_1, \dots, v_n\}$, élek $sv_i$, $v_it$, továbbá $v_iv_j$, ha $i < j$ és $a_i \leq a_j$. Minden $v_i$ csúcsra a benne végződő élek súlya legyen $a_i$. Keressünk leghosszabb utat $s$-ből $t$-be.

**168.** $P = \{p_i\}$, $p_i < p_j \iff i < j$ és $a_i \leq a_j$ részbenrendezés. Használjuk a Dilworth-tételt. Ha nincs legalább $n+1$ hosszú antilánc, akkor lefedhető $n$ antilánccal, valamelyik antilánc legalább $m+1$ hosszú.

**172.** Szokásos gráf, $s$-ből minden munka kezdőpontjába él a legkorábbi kezdési időponttal mint súllyal.

**175.** Elég a súlyozott esettel foglalkozni. Legyen a két betűsorozat hossza $k$ illetve $l$, és jelölje $f(i,j)$ a két sorozat első $i$ illetve $j$ karakteréből álló részfeladat optimumát ($1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq l$). Jelölje továbbá $c(i)$ az első sorozat $i$-edik karakterének értékét. Ekkor $f(i,0) = f(0,j) = 0$. Pozitív $i,j$-re pedig $f(i,j) = \max\{f(i-1,j), f(i,j-1), f(i-1,j-1)+c(i)\}$, ha a két részsorozat utolsó karakterei megegyeznek és $f(i,j) = \max\{f(i-1,j), f(i,j-1)\}$, ha különböznek.

**177.** Vegyük a következő aciklikus irányított gráfot!
$V := \{s, t, v_1, v_1', \ldots, v_{|\mathcal{F}|}, v_{|\mathcal{F}|}'\}$, az élek pedig $sv_i$, $v_i't$, továbbá $v_i'v_j$, ha éldiszjunktak, és $P_i$ megelőzi $P_j$-t. Élsúlyozás: $c(v_i v_i') = |P_i|$, a többi élen 0. A feladat ekvivalens azzal, hogy leghosszabb utat kell keresni $s$-ből $t$-be.

**179.** Max súlyú lánc.

**181.** Bepakolás szerint számozva a tárgyakat, könnyű belátni, hogy a kapott permutációban nem lehet $k$-nál hosszabb növekvő részsorozat. Belátjuk, hogy minden más előállhat. Jelölje az $i$-edik tárgy helyét a sorban $p_i$. definiáljuk az alábbi részbenrendezést $\{1, \ldots, n\}$-en: $i \prec j \iff i < j$ és $\pi_i < \pi_j$. Ekkor minden lánc legfeljebb $k$ hosszú, így Dilworth tétele szerint fedhető $k$ antilánccal. Minden verembe egy-egy antiláncot teszünk.

# 3. fejezet

# Párosítások

## 3.1. Súlyozatlan gráfok párosításai

**187.** Ha létezik alternáló út, akkor $M$ nem maximális, mert $M$ és az út szimmetrikus differenciáját véve egy nagyobb párosítást kapunk.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $M$ nem maximális, és legyen $N$ egy párosítás, melyre $|N| > |M|$. Ekkor $N \triangle M$ alternáló körök és utak diszjunkt uniója. Könnyen látható, hogy $|N| > |M|$ miatt ezen alternáló utak között létezik egy olyan, melynek első és utolsó éle is $(N - M)$-beli.

**188.** Legyen $M$ egy teljes párosítás a gráfban. Ekkor az első játékos nyerő stratégiája a következő: egy $M$-beli éllel kezdjen, majd minden esetben a második játékos által éppen választott élnek az útban elsőfokú végpontját (ilyen mindig létezik) fedő $M$-beli élt adja az úthoz.

**189.** Tegyük fel először, hogy $G$-ben nincs teljes párosítás. Ekkor az első játékos nyerő stratégiája a következő: választ egy $M$ maximális méretű párosítást, és egy olyan csúccsal kezd, amit nem fed, utána $M$ éleit használja.

Ha $G$-ben létezik egy $M$ teljes párosítás, akkor a második játékos nyerő stratégiája a következő: bármit is választ az első játékos, a második játékos kiválasztja annak a pontnak az $M$-szerinti párját.

**190.** Legyen $N$ egy nem bővíthető párosítás, $M$ egy maximális párosítás. Ekkor $N \triangle M$ alternáló utak és körök diszjunkt uniója. Mivel $N$ nem bővíthető, ezért az unióban nincs egyetlen $M$-beli élből álló alternáló út. Mivel minden alternáló körben ugyanannyi, és a korábbiak alapján minden alternáló útban legfeljebb kétszer annyi $M$-beli él van, mint $N$-beli, ezért $|M| \leq 2|N|$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha minden alternáló út 3 hosszú, és első és utolsó élük $M$-beli.

**191.** Legyen $A$ a gráf adjacencia mátrixa. Ekkor $\det A$ páros, hiszen az első sorhoz hozzáadva az összes többit az első sorban csupa páros szám áll, így eszerint a sor szerint kifejtve a determinánst páros számot kapunk. Egy teljes párosítás megfelel egy a főátlóra szimmetrikus, nem-nulla kifejtési tagnak, és a determináns párossága miatt ezen kifejtési tagok száma páros.

**192.** Segítség: Egy $v$ csúcshoz rendeljük hozzá azon csúcsok $X_v$ halmazát, melyek a $v$-ből induló $M$-éllel kezdődő, és $E-M$-beli éllel végződő alternáló sétán elérhető. Ekkor ha $v$ a lefogó ponthalmazban van, akkor $X_v$ is. $X_v$ meghatározása megy polinomiálisan. Ha $X_v$ tartalmaz párosításbeli élt, akkor $v$ nem lehet a lefogó ponthalmazunkban. Ha $u$ az $X_v$-től egy diszjunkt $M$-él egyik végpontja, akkor $X_u$ diszjunkt $X_v$-től (különben a másik végpont $X_v$-ben lenne).

**193.** A 192. feladatra adott algoritmus itt is jó lesz, hiszen egy lefogó halmaz komplementere mindig stabil.

### 3.1.1. Páros gráfok párosításai

**194.** $M_1$ és $M_2$ uniója alternáló utakból és körökből áll. A köröknél csak $M_1$ éleit tekintve az összes pont fedve lesz. Amennyiben egy út két vége különböző pontosztályban van, akkor a páratlan sorszámú élei egy a pontjait fedő párosítást adnak. Amennyiben az út mindkét vége mondjuk $S$-ben van, akkor egyik végpontja nincs benne $A$-ban, így ha a másik végpontjából indulva vesszük minden második élét, akkor $A \cup B$-nek az összes az útra eső pontját fedjük.

**195.** Egy maximális elemszámú $M_1$ és egy $X$-et fedő $M_2$ párosítás szimmetrikus differenciája alternáló utakból és körökből áll. Az olyan alternáló utak mentén, melyeknek egyik vége $M_2$-beli, cseréljük ki az $M_1$-beli éleket $M_2$-beliekre. Az így kapott párosítás már fedi $X$-et, és maximális elemszámú.

**196.** Mivel $|E| = k|S| = k|T|$, kapjuk, hogy $|S| = |T|$. Tetszőleges $X \subseteq S$ halmazra az $X$ és $\Gamma(X)$ között menő élek száma egyrészt pontosan $k|X|$, másrészt legfeljebb $k|\Gamma(X)|$, így $|X| \leq |\Gamma(X)|$, azaz a gráfban van teljes párosítás.

**197.** Egy reguláris páros gráfból egy teljes párosítás éleit elhagyva újra reguláris páros gráfot kapunk, így a feladat állítása következik a 196. feladatból.

**198.** Új élek, és esetleg csúcsok hozzávételével elérhető, hogy minden csúcs foka az eredeti gráf maximális fokával legyen egyenlő. Ebben a gráfban a 196. feladat értelmében van teljes párosítás. Az eredetileg maximális fokú csúcsokra csak eredeti gráfélek illeszkednek, így a kiterjesztett gráf teljes párosítása meghatározza az eredeti gráf egy maximális fokú csúcsokat fedő párosítását.

**199.** A 198. feladatot ismételten alkalmazva, a párosítás éleit egy színnel színezve kapjuk a színezést.

**200.** Igaz, hiszen a kupacokra osztás egy 4-reguláris páros gráffal szemléltethető: az egyik pontosztály a kupacoknak, a másik a 8-féle értéknek felel meg, és egy kupac-érték pár között annyi élt húzunk be, ahány olyan értékű lapot az adott kupac tartalmaz. A 196 feladat értelmében az így kapott gráfban létezik teljes párosítás, mely pont egy megfelelő kiválasztást definiál. Sőt, a 197. feladat alapján ezt háromszor egymás után megtehetjük, és a végén a kupacokból megmaradó lapok is mind különböző értékűek lesznek!

**201.** A 197 feladatot alkalmazzuk azon a páros gráfon, melynek egyik pontosztálya az oszlopokból, másik az 1-től $n$-ig terjedő számokból áll, és egy oszlopot azon számokkal kötünk össze, melyek nem szerepelnek benne. Egy-egy színosztály adja meg a maradék $n - m$ sort.

**202.** Azt látjuk be, hogy ha nincs $k$ pontú egyszínű részfa valamely 2 színnel való élszínezés esetén, akkor $G$ $(k-1)$-színezhető. Legyen a két szín a kék és a lila, és jelölje $A_1, ..., A_k$ a kék, $B_1, ..., B_\ell$ a lila komponenseket. Ekkor $|A_i| \leq k-1$, $|B_i| \leq k-1$ minden $i = 1, ...k$; $j = 1, ..., \ell$. Vegyük azt a páros gráfot, melynek csúcsai az egyszínű komponenseknek felelnek meg, és az $A_i$-nek illetve a $B_j$-nek megfelelő csúcsok között $A_i \cap B_j$ él fut. Itt egy halmaznak megfelelő csúcs foka, pont a halmaz elemszáma, egy él pedig megfelel $G$ egy csúcsának. Könnyen látható, hogy egy párosítás megfelel egy stabil halmaznak, így a 199. feladat által adott színezés egy jó $(k-1)$-színezését adja $G$-nek.

**203.** Készítsük el azt a $G = (S, T; E)$ páros gráfot, melyben $S$ a sakktábla sorainak, $T$ az oszlopainak felel meg, és $s \in S, t \in T$ között megy él, ha az $s$ sor és $t$ oszlop metszetében áll bástya. Ekkor minden pont foka legfeljebb 8, így az a 199. feladat szerint az élhalmaz felbomlik 8 párosításra diszjunkt uniójára. Ezek közt biztos van legalább egy, melynek legalább 5 éle van, és egy párosítás pont bástyák egy olyan halmazát adja, melyek páronként nem ütik egymást.

**204.** Segítség: A Hall-tételt használva megmutatható, hogy abban a páros gráfban melynek csúcsait a mátrix sorainak és oszlopainak, éleit a mátrix nem nulla elemeinek feleltetjük meg, létezik teljes párosítás. Ebből indukcióval következik a tétel.

**205.** Legyenek a $G$ páros gráf osztályai a jobb-, illetve baloldali mellékosztályok halmazai, vezessen él köztük, ha a két mellékosztály metszi egymást. Ismert, hogy $aH = Hb \iff a \in Hb$. Így teljes párosítást szeretnénk ebben a gráfban, aminek létezése a Hall-tételből következik.

**206.** Legyen a gráf $G$, és $M$ egy maximális párosítás, $L$ egy minimális lefogó élhalmaz. Ekkor $|L| \leq n-2|M|+|M| = n-|M|$, hiszen $M$-mel lefogunk $2|M|$ pontot, és a maradék $n-2|M|$ pont mindegyikéhez egy megfelelő élt választva $n-|M|$ éllel lefoghatjuk az összes pontot. Ugyanakkor kevesebb éllel ez nem oldható meg, hiszen $|L| < n-|M|$ esetén $L$ legfeljebb $2|M|+|L|-|M| = |L|+|M| < n$ pontot foghat le.

Ezzel algoritmust is adtunk: keressünk egy maximális párosítást $G$-ben, majd ezt bővítsük ki minden fedetlen $v$ pontra egy $v$-t fedő éllel.

A bizonyítás során nem használtuk, hogy a gráf páros, így az állítás igaz tetszőleges gráfban.

**207.** Könnyen látható, hogy $D$ egy irányított körének $G$ egy párosítása felel meg, így egy körfedésnek egy teljes párosítás, és fordítva.

**208.** (i)$\Rightarrow$(iii): $|S| = |T|$ nyilvánvaló abból, hogy létezik teljes párosítás; $|\Gamma(X)| > |X|$ azért teljesül, mert a Hall-feltétel szerint $|\Gamma(X)| \geq |X|$, viszont egy $\Gamma(X)$-re illeszkedő, de $X$-et elkerülő él végpontjait törölve még mindig van teljes párosítás, és ilyen él az összefüggőség miatt van.

(iii)$\Rightarrow$(ii): Az implikáció következik abból, hogy a Hall-feltétel teljesül $G-u-v$-ben.

(ii)$\Rightarrow$(i): Nyilván létezik bármely élet elhagyva teljes párosítás. Az összefüggőség igazolásához indirekt tegyük fel, hogy a gráf több komponensből áll. Ekkor $u$ és $v$ választható úgy, hogy elhagyva őket valamelyik komponensben nem egyezik a két színosztály mérete, ellentmondásban a teljes párosítás létezésével.

**210.** Legyen $L$ minimális lefogó csúcshalmaz, és legyen $L_S = L \cap S$, $L_T = L \cap T$. Azt állítjuk, hogy $\Gamma(S-L_S) = L_T$. Tegyük fel először indirekt, hogy létezik $v \in \Gamma(S-L_S) - L_T$. De ekkor létezik olyan $uv$ él, melyre $u \in S-L_S$, és $uv$-t nem fogja le $L$, ellentmondás.

Most tegyük fel, hogy $\Gamma(S-L_S) \subset L_T$, azaz van olyan $L_T$-beli $v$ pont, melynek nincs szomszédja $S-L_S$-ben. Ekkor $L-v$ is lefogó ponthalmaz, ellentmondásban $L$ minimális voltával.

**211.** $T$-hez vegyünk hozzá $\max\{|X|-|\Gamma(X)| : X \subseteq S\} - 1$ csúcsot, és ezeket kössük össze $S$ minden pontjával. Így a maximalizáló $X$-re még mindig nem teljesül a Hall-feltétel. Ha $|R_S| < \max\{|X|-|\Gamma(X)| : X \subseteq S\}$, akkor $M$ kiegészíthető $S$-et fedő párosítássá a kiterjesztett gráfban, ellentmondás. Az egyenlőség esete hasonló módon igazolható.

**212.** Segítség: A maximális hiányú halmazok metszet-unió zárt halmazrendszert alkotnak. Az algoritmus az egyértelmű legszűkebb maximális hiányú halmazt adja meg.

**213.** Segítség: A maximális hiányú halmazok metszet-unió zárt halmazrendszert alkotnak.

**214.** Segítség: Az algoritmus által adott „elérhető pontok halmaz” az egyik pontosztályban az egyértelmű legszűkebb maximális hiányú halmazt, a másikban az egyértelmű legbővebb maximális hiányú halmazt adja.

**215.** $G[X\Delta Y]$ páros gráf. Ha nincs teljes párosítás, akkor a Kőnig-tétel szerint a minimális lefogó ponthalmaz mérete kevesebb, mint a csúcsszám fele. Ennek a komplementere stabil, amihez $X \cap Y$-t hozzávéve egy $X$-nél nagyobb stabil halmazt kapunk, ellentmondás.

**216.** A Kőnig-tételt alkalmazzuk arra a gráfra, melynek csúcsai: $V := P + P'$ (duplázás), élei: $p_i p'_j$, ahol $p_i < p_j$. (Algoritmus a Kőnig-tétel algoritmikus bizonyítása alapján adható.)

**217.** Segítség: Definiáljuk a következő részbenrendezést az eseményeken: egy esemény „kisebb”, mint a másik, ha oda lehet róla érni a „nagyobbra”. Ekkor egy tudosító egy láncot tud fedni ebben a részbenrendezett halmazban. Tehát minimális láncfedést keresünk, lásd a a 216. feladatot. A feladat költséges árammal is megoldható.

## 3.2. Súlyozott párosítások

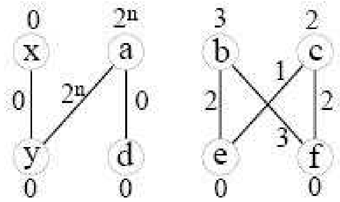
**218.** A 194. feladat alkalmazásához vegyük észre, hogy a maximalitás miatt egy-egy $M_1$-$M_2$- alternáló úton illetve körön az $M_1$-beli és az $M_2$-beli élek súlya megegyezik, így az ott kapott $M$ párosítás maximális súlyú.

**219.** Segítség: A max $\leq$ min irányt könnyű igazolni. Egy $uv$ élt egy $\pi$ súlyozott lefogásra nézve nevezzünk pontosnak, ha $c(uv) = \pi(u) + \pi(v)$. Elegendő olyan $\pi$-t találni, melyre nézve a pontos élek gráfjában van teljes párosítás. Tetszőleges $\pi$ súlyozott lefogásból kiindulva a pontos élek gráfjában keressünk maximális párosítást a Kőnig-algoritmussal, és ha az nem teljes, a $\pi$ értékét módosítsuk úgy, hogy a pontos élek gráfjában nőjön a maximális párosítás mérete.

**220.** Páros gráfban a $P_{mo}$ minden $uv$ élére legyen $\pi(u) = c(uv), \pi(v) = c(uv)$. Ez egy súlyozott lefogás (a mohóságból adódóan), és ezért minden $M$ párosítás súlya legfeljebb ennek az értéke, azaz $\widetilde{c}(M) \leq \widetilde{\pi}(V) = 2\widetilde{c}(M_{mo})$. Nem páros gráfban legyen $P$ a max súlyú párosítás. Az $M$ és az $M_{mo}$ szimmetrikus differenciája már páros gráf.

**221.** Emlékeztetőül, ha a pontos élek gráfja nem tartalmaz teljes párosítást, akkor Egerváry eredeti algoritmusa egy tetszőleges maximális hiányú halmazt vesz, és annak segítségével módosítja a súlyozott lefogást.

Tekintsük az alábbi példát. Legyen $X_1 = \{x, a, c\}$ az első kiválasztott hiányos halmaz, $X_2 = \{x, a, b\}$ a második, majd felváltva válasszuk ezen halmazokat. Könnyű ellenőrizni, hogy ekkor minden lépésben maximális hiányú halmazt veszünk, de az aktuális súlyozott lefogás értékét csak 1-gyel változtatjuk a megfelelő pontokon, így $2^n - 2$ iterációra van szükség, hogy az $ad$ él pontossá váljon.



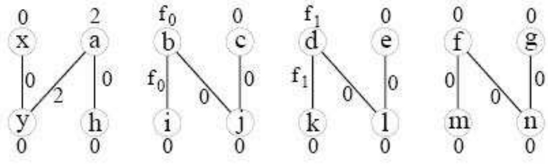

**222.** Legyen $f_n = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $f_n - f_{n+1} = f_{n+2}$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2. \tag{3.1}$$

Tekintsük az alábbi gráfot. Az $n$. iterációban választott hiányos halmaz legyen a következő:

$$X_n := \begin{cases} \{x, a, b, d, g\}, & \text{ha } n = 3k+1\,; \\ \{x, a, b, e, f\}, & \text{ha } n = 3k+2\,; \\ \{x, a, c, d, f\}, & \text{ha } n = 3k. \end{cases}$$

Ekkor az $i$. iterációban $X_i$ maximális hiányú, és a súlyozott lefogás értékét épp $f_j$-vel változtatjuk a megfelelő pontokon, ahol $i \equiv j \pmod 3$. Ugyanakkor (3.1) miatt az $ah$ él sosem válik pontossá, így az algoritmus nem áll le véges sok iteráció után, továbbá a súlyozott lefogások értéke nem konvergál egy optimális megoldáshoz.




**223.** Egyszerűen a definícióból látható, hogy két súlyozott lefogás konvex kombinációja is súlyozott lefogást ad.

**224.** A mátrix sorainak és oszlopainak megfeleltetve egy teljes páros gráf egy-egy pontosztályát, az $uv$ élre pedig az $u$ sor és a $v$ oszlop metszetében álló mező súlyát írva a feladat ekvivalens egy maximális súlyú párosítás keresésével.

**225.** Egerváry tétele alapján egy maximális súlyú teljes párosítás súlya megegyezik a minimális összsúlyú súlyozott lefogás súlyával, azaz

$$c(M) = \sum_{v \in V} \pi(v).$$

Ugyanakkor $c(M) = \sum_{uv \in M} c(uv) \leq \sum_{uv \in E} \pi(u) + \pi(v) = \sum_{v \in V} \pi(v)$. Azaz ahhoz, hogy itt egyenlőség álljon, minden becslésnek élesnek kell lennie, vagyis $c(uv) = \pi(u) + \pi(v)$ minden $uv \in M$ esetén.

**226.** Ha a kapott súlyozás nem konzervatív, akkor egy negatív összsúlyú kör mentén alternálva -a kör negativitása miatt- egy nagyobb súlyú párosítást kapunk. Fordítva, ha $M$ nem maximális súlyú, akkor egy $M'$ maximális súlyú teljes párosítással vett szimmetrikus differenciájában kell lennie olyan alternáló körnek, melyben az $M'$-beli élek összesúlya nagyobb, mint az $M$-belieké, így $D$-ben ez a kör negatív összsúlyú.

**227.** Az, hogy a súlyozott lefogások összértékének minimuma legalább annyi, mint a maximális súlyú párosítás súlya nem bizonyítjuk, csak azt, hogy van olyan súlyozott lefogás, amire egyenlőség áll. Könnyen látható, hogy a digráfon lévő költségfüggvényre nézve megengedett $\pi$ potenciált $S$-en $-1$-szeresére változtatva egy olyan $\pi' : S \cup T \to \mathbb{R}$ függvényt kapunk, amire $uv \notin M$ esetén $\pi'(u) + \pi'(v) \geq c(uv)$ és $uv \in M$ esetén $\pi'(u) + \pi'(v) \leq c(uv)$. Ekkor $\pi'$ értékeinek növelésével elérhető, hogy minden párosítás él pontosan legyen lefogva, (és közben minden más él lefogva marad). A kapott súlyozott lefogás összértéke így, mivel $M$ élei pontosak, megegyezik a maximális súlyú teljes párosítás súlyával.

**228.** $S = \{a, b\}$, $T = \{x, y\}$, $c(ax) = c(by) = 1, c(ay) = 4, c(bx) = -1$.

**229.** A legkisebb $\pi$-érték legyen $\pi(v) = -K$. Feltehető, hogy $v \in S$. $S$-en növeljünk, $T$-n csökkentsünk $K$-val.

**230.** $S = \{a, b\}$, $T = \{x, y\}$, $E = \{ax, by, ay\}$, $c(ax) = c(by) = 1, c(ay) = 4$.

Teljes gráfra nincs példa, hiszen teljes páros gráf és nemnegatív $c$ esetén $\pi$ mindig választható nemnegatívnak (lásd a 229. feladatot).

**231.** Töröljük a negatív éleket, vegyünk hozzá a kisebb csúcsosztályhoz annyi pontot, hogy a két osztály egyenlő legyen, és húzzunk be minden nem behúzott élet 0 súllyal. Ebben keressünk maximális súlyú teljes párosítást.

**232.** Az egyetlen $-1$ súlyú élből álló páros gráf megfelel.

**233.** Segítség: használjuk a 231. feladat megoldásában írtakat.

**234.** Segítség: A Magyar-módszert használva látható, hogy igaz.

**235.** Ha $M \subseteq E_\pi$, akkor $c(M) = \pi(V)$, így $M$ maximális súlyú. Tegyük fel most, hogy $M$ maximális súlyú. Ekkor nem lehet, hogy valamelyik éle $\pi$-re nézve nem pontos, ellenkező esetben $c(M) > \pi(V)$, ellentmondva $\pi$ súlyozott lefogás voltának.

**236.** Igaz, mert minimális súlyozott lefogásra nézve minden él pontos. A megfordítás már azonosan 1 súlyozással sem igaz, hiszen tetszőleges páros gráfban nem feltétlenül van benne minden él teljes párosításban.

**237.** A 235. feladat szerint ha a $c_1$-pontos élek gráfján keresünk maximális teljes párosítást $c_2$-re, akkor az jó lesz.

**238.** Egészítsük ki a gráfot új élekkel és esetleg pontokal, hogy egy teljes páros gráfot kapjunk. A $c_1$ súlyfüggvényt definiáljuk az eredeti éleken $c$-nek, az új éleken 0-nak. Az így kapott élsúlyozott gráfban egy teljes párosítás maximális súlya megegyezik $G$ maximális súlyú párosításának súlyával. A $c_2$ súlyfüggvény értéke legyen $-1$ az eredeti éleken és 0 az új éleken. Alkalmazzuk a 237. feladatot.

**239.** a) Könnyű példát mutatni, hogy nem igaz; b) Igaz (a 235. feladat miatt); c) Megmutatható, (mint a 240. feladat is mutatja), hogy már b) sem igaz.

**240.** A háromszögek élein legyen a súlyozás értéke 1, a köztes éleken 0. Ekkor könnyen láthatóan minden köztes él benne van maximális súlyú teljes párosításban, ugyanakkor a három köztes él nem ad maximális súlyú párosítást.

**241.** Lásd a 240. feladat megoldását.

## Alkalmazások

**242.** A $c_j$ függvények monotonitása miatt az optimális ütemezésnél minden gép maximum $\lceil n/k \rceil$ ideig működik, és az utolsó időintervallumban csak $k(n/k - \lfloor n/k \rfloor)$ gép üzemel.

Definiáljuk a $G = (S, T; E)$ teljes páros gráfot, és hozzá a $c$ súlyozást: $S := \{v_1, \ldots, v_m\}$ (az $m$ darab munkának megfelelő csúcsok); $T := T_1 \cup \cdots \cup T_{\lceil n/k \rceil}$, ahol $T_t := \{u_1^t, \ldots, u_k^t\}$ $(t = 1, \ldots, \lfloor n/k \rfloor)$ és

$$T_{\lfloor n/k \rfloor} := \left\{ u_1^{\lfloor n/k \rfloor}, \ldots, u_{k(n/k - \lfloor n/k \rfloor)}^{\lfloor n/k \rfloor} \right\}$$

(az adott időintervallumban működő gépeknek megfelelő csúcsok); $c(v_j u_i^t) := c_j(t)$ ($j = 1, \dots, m;\ t = 1, \dots, \lceil n/k \rceil;\ i = 1, \dots, k$). Ebben egy minimális súlyú teljes párosítás megad minden munkához egy időpontot és egy gépet, ami egy minimális összköltségű ütemezése a munkák elvégzésének.

# 4. fejezet

# Áramok, folyamok

## 4.1. Alapozó feladatok

**244.**

a) Ha $x$ áram, akkor nyilván $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ teljesül minden $v$-re. Vegyük észre, hogy $\sum_{v\in V} \varrho_x(v) = \sum_{v\in V} \delta_x(v)$ tetszőleges, az éleken értelmezett $x$ függvényre. Mivel $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ minden $v \in V$-re teljesül ezért az egyenlőtlenségnek szükségképpen minden csúcsra egyenlőséggel kell teljesülnie.

b) Ha $x$ áram, akkor $\sum_{v\in Z} \varrho_x(v) = \sum_{v\in Z} \delta_x(v)$ teljesül minden $Z \subseteq V$ halmazra. Ezt használva $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \varrho_x(Z) + i_x(Z) - i_x(Z) - \delta_x(Z) = \sum_{v\in Z} \varrho_x(v) - \sum_{v\in Z} \delta_x(v) = 0$, melyet átrendezve épp a kívánt egyenlőséget kapjuk.

c) A feltétel elégségessége az a) részből, a szükségesség pedig b)-ből következik.

**245.** Tekintsük azon élek részgráfját, melyekre $x(e) \neq 0$.

a) Ebben a részgráfban nincs nyelő, tehát tartalmaz egy $C$ irányított kört. Vonjuk le $x$-ből $C$ incidencia-vektorát, mellyel egy $x'$ szintén $0-1$ áramot kapunk. Mivel $x'$ legalább eggyel több élen vesz fel nulla értéket, mint $x$, az eljárás véges sok lépésben véget ér.

b) Hasonlóan az a) részhez $x$-ből vonjuk le $C$ incidencia-vektorának $x(f)$-szeresét, ahol $f$ azon éle $C$-nek, melyre $x$ minimális.

c) Ebben a részgráfban van egy $C'$ irányítatlan kör. Most $f$ olyan éle legyen $C'$-nek, melyre $|x(f)|$ minimális majd végezzük el a b)-nél leírt műveletet.

**247.** $\delta_x(Z) - \varrho_x(Z) = \sum_{v\in Z}(\delta_x(v) - \varrho_x(v)) = \delta_x(s)$.

**248.** Tekintsük azon élek részgráfját, amelyekre $x$ nem nulla. Ha ez a részgráf nem aciklikus, akkor a 245. b) feladatnál leírt módon körök mentén csökkentve $x$-et megkaphatunk egy olyan $x'$ folyamot, melyre a megfelelő részgráf aciklikus. Szintén 245. alapján $x - x'$ áram. $x'$-ről pedig hasonló módszerrel könnyen belátható, hogy $st$-utak nemnegatív kombinációja.

**249.** Definiáljunk $D = (V, E)$-hez egy $D' = (V', E')$ digráfot: minden $v_i \in V$-hez vegyünk fel egy $v_i'$ és egy $v_i''$ csúcsot, tehát $V' = \{v_i', v_i'' : v_i \in V\}$. Valamint legyen $E' = \{v_i''u_j' : v_iu_j \in E\} \cup \{v_i'v_i'' : v_i \in V\}$. A kapacitásfüggvény legyen $g'(v_i''u_j') = g(v_iu_j)$ minden $v_i''u_j' \in E'$-re és legyen $g'(v_i'v_i'') = g_V(v_i)$ minden $v_i'v_i'' \in E'$-re. Keressünk a $D'$ digráfban maximális $s''t''$-folyamot $g'$-re nézve.

**250.** Legyenek $S_1, S_2$ minimális kifokú $s\bar{t}$-halmazok. Természetesen $S_1 \cap S_2$ és $S_1 \cup S_2$ is $s\bar{t}$-halmaz. Valamint: $\delta(S_1) + \delta(S_2) \geq \delta(S_1 \cap S_2) + \delta(S_1 \cup S_2)$, amiből az állítás következik.

**251.** Ha létezik ilyen út, akkor nyilván van tetszőlegesen nagy értékű $st$-folyam. Ha pedig nincs csupa $+\infty$ kapacitású élekből álló út, akkor van egy olyan vágás, melynek kapacitása véges. Ezen kapacitás felső korlát a maximális folyam nagyságára, így nem létezik tetszőlegesen nagy értékű $st$-folyam.

**252.** Legyen $(V, E; A)$ páros digráf, minden $e \in E$-ből vezessen él a végpontjaiba. Vegyünk még fel egy $s$ és $t$ pontot is, vezessünk $s$-ből minden $E$-beli csúcsba, minden $V$-beli csúcsból $t$-be valamint $t$-ből $s$-be egy-egy élt. $A$-n az alsó/felső kapacitás legyen $0/1$. $s$-ből $E$ pontjaiba legyen $1/1$, $V$ pontjaiból $t$-be pedig $\alpha/\beta$, az $ts$ élen $-\infty/+\infty$. Könnyen látható, hogy az így definiált segédgráfban pontosan akkor létezik megengedett áram, ha $G$-nek létezik az előírt fokszámkorlátokat teljesítő irányítása. A Hoffmann-tétel alkalmazásával adódik a válasz.

**253.** Legyen $x : E \to \mathbb{Z}$ az alábbi folyam: $x(v_1v_n) = n - 1$, $x(v_1v_i) = \min\{i - 1, n - i\}$, $x(v_iv_n) = \min\{i - 1, n - i\}$ és 0 különben. Legyen $S = \{v_1, v_{\lceil n/2\rceil}, v_{\lceil n/2\rceil+1}, \ldots, v_{n-1}\}$ egy vágás. Mivel $x$ nagysága egyenlő $S$ kapacitásával $x$ maximális folyam és $S$ minimális vágás.

**254.**

a) Legyen minden él kapacitása 1. Ekkor létezik olyan maximális folyam, mely minden élen 0 vagy 1, egy ilyen folyam pedig felbontható éldiszjunkt $st$-utakra. Az MFMC tétel szerint így az éldiszjunkt $st$-utak maximális száma megegyezik a minimális $s\bar{t}$-vágás kapacitásával.

b) A $G = (A, B; E)$ páros gráfból készítsünk egy irányított $D$ segédgráfot: $G$ minden élét irányítsuk a $B$-beli végpontja felé. Vegyünk fel két új, $s, t$ csúcsot, vezessünk $s$-ből minden $A$-beli pontba egy élet valamint minden $B$-beli pontból egy-egy élet $t$-be. Az összes él kapacitása legyen 1. A $D$ segédgráf konstrukciója miatt akkor és csak akkor létezik $G$-ben $A$ minden pontját fedő párosítás, ha $D$-ben van $|A|$ méretű folyam. Ugyanis ha a maximális folyam mérete $m < |A|$, akkor van egy $m$ kapacitású legszűkebb $S$ $s\bar{t}$-vágás $D$-ben. Tekintsük az $X = S \cap A$ halmazt. Állítjuk, hogy $|X| > |N(X)|$. Ha nem így lenne, akkor az $\{s\}$ $s\bar{t}$-vágás lenne a legszűkebb minimális, de ennek a kapacitása $|A|$, ami ellentmondás.

c) Készítsük el a b) résznél definiált segédgráfot. Tudjuk, hogy a maximális folyam mérete megegyezik a páros gráf maximális párosításának méretével. Vegyünk egy legszűkebb minimális vágást. Ebből csak $s$-re és $t$-re illeszkedő élek lépnek ki. Ezen $A \cup B$-beli végpontjai lefogó ponthalmazt alkotnak, melynek mérete megegyezik a minimális vágás kapacitásával.

**255.** Tipp: Vegyük azt a hálózatot, melyet úgy kapunk, hogy egy új $s$ csúcsból minden olyan $v$ csúcsba, melyre $\varrho_f(v) > \delta_f(v)$, húzunk élet $\varrho_f(v) - \delta_f(v)$ kapacitással, minden olyan $v$ csúcsból, melyre $\varrho_f(v) < \delta_f(v)$ egy új $t$ csúcsba húzunk élet $\delta_f(v) - \varrho_f(v)$ kapacitással és minden eredeti $e$ élt megtartunk $g(e) - f(e)$ kapacitással. Ezen pontosan akkor létezik olyan maximális megengedett folyam, mely minden $s$-ből kilépő élt telít, ha az eredeti gráfban létezett megengedett áram. (Mégpedig a folyamot az eredeti élekre megszorítva, azt $f$-hez adva kapjuk az áramot).

Az általános eset: Ha $f(e) = -\infty$ és $g(e) = +\infty$, akkor az $e$ él összehúzható. Ha már mindenhol csak az egyik végtelen, akkor élek megfordításával elérhető, hogy $f$ véges legyen. Ekkor a véges esetre mutatott konstrukció működik.

**256.** Tipp: Az alsó kapacitás legyen mindenhol 0. Húzzuk be a $ts$ élt akkora alsó és felső kapacitással, amekkora folyam nagyságot szeretnénk.

## 4.2. Maximális folyam algoritmusok

**258.** Vegyünk minden élet visszafele irányítva a digráfhoz. Ezen legyen a $g'$ kapacitásfüggvény egyenlő $g - x$-szel az „előre" éleken és $x$-szel a „hátra" éleken. Induljunk ki a gráf ponthalmazán értelmezett üres gráfból. $g'$-re nézve nagyság szerint csökkenő sorrendben húzzuk be az éleket majd minden él behúzása után eldöntjük, hogy van-e $st$-út az aktuális részgráfban pl. szélességi kereséssel. A legelső $st$-út lesz a legtöbbel növelő út. Másik megoldás: lásd a 118. feladatot.

**260.** A fordított gráfban keressünk legszűkebb minimális $t\bar{s}$-vágást. Ez megtehető a javító utas algoritmus segítségével (lásd a 259. feladat).

**261.** Keressünk egy $x$ maximális megengedett folyamot. Minden $e$ telítetlen élre legyen $e$ éle $D'$-nek és minden $f$ élre, melyre $x(f) > 0$, legyen $f$ megfordítottja éle $D'$-nek.

**263.** Minden $e = uv$ élt töröljünk ki, és vegyünk be helyette egy $w_e$ csúcsot és egy $f$ alsó kapacitású $uw_e$ illetve egy $-g$ alsó kapacitású $vw_e$ élt.

**264.** Pontosan akkor van ilyen vágás, ha a $\sum_{i=1}^{t} g_i$ kapacitásfüggvényre a minimális vágás nagysága egyenlő a $g_i$-kre vett minimális vágás nagyságok összegével, tehát $t + 1$ darab maximális folyam keresésével és egy növelő lépéssel eldönthető.

**265.** Keressünk $g' := m \cdot g + 1$-re minimális vágást, ahol $m$ az élszám.

**266.** Vegyünk egy maximális $x$ folyamot. Egy $e$ élen legyen $g'(e) = 1$, ha $g(e) = x(e)$, különben pedig $\infty$. Keressünk $g'$-re minimális vágást.

**268.** Tegyük fel, hogy a maximális folyam értéke $k$. Legyen $S_0$ egy minimális kapacitású $s\bar{t}$-halmaz. Emeljük meg a $g$-t annyival, hogy $\delta_{g'}(S_0) = K$ legyen, vagyis $(K - k)/\delta_A(S_0)$-lal. Iteráljuk ezt az eljárást. A növelést követően már minden olyan $S$ $s\bar{t}$-halmaz kapacitása legalább $K$ lesz, amelyből legalább $\delta_A(S_0)$ él lép ki. Mivel $\delta_A(S)$ legfeljebb $|A|$-féle értéket vehet fel, legfeljebb ennyi iterációra van szükség.

**269.**

a) Keressünk megengedett áramot $g = c$ felső, $f = -\infty$ alsó korláttal. Ekkor a Hoffman-tétel feltétele ($\varrho_f(X) \le \delta_g(X)$) nyilván teljesül minden olyan $X$ halmazra, melybe lép be él, így a feltétel csak irányított vágásokra romolhat el. Ezekre pedig a feltétel éppen a $0 \le \delta_c(X)$ egyenlőtlenséget adja, azaz pontosan akkor létezik megengedett áram, ha minden irányított vágás súlya nemnegatív.

b) Tekintsük az első részfeladatban definiált áram feladatot, és legyen $x$ egy megengedett áram. Ha egy irányított vágás súlya nulla, akkor a megfelelő $X$ halmazra $0 = \delta_c(X) \ge \delta_x(X) \ge \delta_x(X) - \varrho_x(X) = 0$, hiszen $x$ áram és $\varrho(X) = 0$. Ekkor viszont végig egyenlőség áll, azaz $\delta_c(X) = \delta_x(X)$, vagyis minden $X$-ből kilépő élen az áram értéke megegyezik az él súlyával. Tehát ha egy irányított vágás minden éle benne van nulla összsúlyú irányított vágásban, akkor minden élén az áram értéke megegyezik az él súlyával, de akkor -ismét az előző egyenlőtlenségánc miatt- ő maga is nulla súlyú.

## 4.3. Minimális költségű áramok, folyamok

**271.** A 248. feladat alapján $x$ előáll, mint egy áram és $st$-utak kombinációja. Ebből az összegből az áram nem befolyásolja $x$ nagyságát, tehát azt az $x$-ből kivonva egy olyan folyamot kapunk, melynek nagysága megegyezik $x$ nagyságával a költsége pedig nem nagyobb $x$ költségénél.

**272.** Tekintsük azon $e$ élek részgráfját, melyekre $f(e) \neq x(e) \neq g(e)$. Ha ebben van egy $C$ kör, akkor $c(C) = 0$-nak kell teljesülnie. (Ha $c(C) > 0$ ($c(C) < 0$) lenne, akkor $C$ mentén $x$-et kicsit csökkentve (növelve) kisebb költségű áramot kapnánk.) Most a 245. feladatnál leírt módon elérhető, hogy $C$ valamely élére az áram valamelyik kapacitással egyenlő legyen. Ezzel a körök száma a részgráfban csökkent, az új áram költsége pedig azonos $x$ költségével. Ismételjük az eljárást, amíg erdőt nem kapunk.

**273.** Legyen $\pi$ a potenciál, aminek potenciálkülönbsége a $c$. Ekkor egy $x$ folyam költsége $\mathrm{val}(x) \cdot (\pi(t) - \pi(s))$ (minden más kiesik), tehát minden maximális folyam ugyanannyi költségű.

**275.** A negált súlyfüggvényre keressünk legolcsóbb $k$-fonatot. Ezen utóbbit minden digráfban lehet konzervatív súlyozás esetén, hiszen egy megengedett potenciál-különbséggel eltolva ekvivalens feladatot kapunk immár nemnegatív költségfüggvényre nézve.

**276.**

a) A 255. feladatban leírt gráf új éleinek a költsége legyen 0, az eredeti élek költsége legyen $c(e)$.

b) A negatív költségű éleket töröljük és tegyük vissza megfordítva ($-g(e)$, $-f(e)$) alsó és felső kapacitásokkal és $-c(e)$ költséggel. Így visszavezettük az a) részre.

c) A 256. feladatban leírt gráf segítségével vezessük vissza a feladatot a b) részre.

**277.**

a) Jelölje $M$ a maximális folyam nagyságát. A $v$ pontot széthúzzuk egy $v'v''$ új éllé, a $v$-be futó éleket vezetjük $v'$-be, a kiindulókat $v''$-ből kifelé. $t$-ből $s$-be is behúzunk egy élt. A kérdést áram-feladattá fogalmazzuk át: legyen $f(v'v'') = 0$, $g(v'v'') = M$, $f(ts) = g(ts) = M$. Költségfüggvény: $c(v'v'') = -1$, egyébként $c \equiv 0$. Keressünk minimális költségű áramot.

b) Nézzük meg, hogy a $v$ pontot törölve csökken-e a maximális folyam nagysága? (Másik megoldás: az a)részben legyen $c(v'v'') = 1$)

**278.**

a) Áram-feladattá írjuk át: legyen $f(e) = g(e)$, vegyünk fel egy $ts$ élet, melyre $f(ts) = g(ts) = M$, többi élre az alsó kapacitás 0. Döntsük el, van-e megengedett áram.

b) Definiáljunk egy költségfüggvényt az éleken, $c(e) = 1$, a többi élen 0. Keressünk minimális költségű maximális folyamot.

## 4.4. Alkalmazások és rokon feladatok

### 4.4.1. Rokon feladatok

**280.** Tipp: Legyen $t$ új csúcs és vegyük a gráfhoz a $vt$ éleket minden $v \in V$-re $(m(v), m(v))$ alsó és felső kapacitással. A kapott gráfban pontosan akkor létezik megengedett áram, ha az eredetiben létezett megengedett $m$-áram.

**281.** Tipp: A 263. feladat szerint elég azzal az esettel foglalkozni, ha csak alsó kapacitás adott. Ekkor $m(v) = \delta_f(v) - \varrho_f(v)$-re keressünk nemnegatív $m$-áramot. Ezt $f$-hez adva megengedett áramot kapunk.

**282.** Minden $ij$ élt helyettesítsünk egy 3 hosszú úttal, aminek a középső éle fordítva van, és legyen a két új pont $v_{ij}^1$ és $v_{ij}^2$ (tehát a három él: $iv_{ij}^1$, $v_{ij}^2 v_{ij}^1$, $v_{ij}^2 j$). Legyen $b(v_{ij}^1) = g(ij)$ és $b(v_{ij}^2) = -g(ij)$.

**283.** Legyen $D' = (V', A')$ a következő irányított segédgráf. $V' = V + s$ és $E' = E \cup \{vs : v \in V\}$, az új élen az alsó- és felső kapacitások legyenek $p(v)$ illetve $b(v)$. $D'$-ben akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha $D$-ben van általánosított áram. A Hoffmann-tételt felhasználva az állítás következik.

**284.** Tipp: Vegyük azt a partíciót, melyet úgy kapunk, hogy a csúcsokat ekvivalenciaosztályokba soroljuk a szerint, hogy melyik az őket tartalmazó legszűkebb $\mathcal{F}$-beli halmaz. A partíció tagjait összehúzva a kapott gráfban pontosan akkor van megengedett áram, ha az eredeti gráfban volt megengedett $\mathcal{F}$-áram (és persze $f \leq g$ teljesült).

**285.** Jelölje $M = (a_{ij})$ a mátrixot, az sor-, és oszlopösszegek $b_i, c_j$. Készítsünk egy $D = (V, A)$ segédgráfot, ahol $V = \{s, t\} \cup \{v_i, w_j : i, j = 1, \ldots, k\}$. Élek azonos alsó és felső kapacitásokkal, és 0 költséggel: $sv_i$ kapacitása $b_i - \sum_j a_{ij}$, $w_j t$ kapacitása $c_j - \sum_i a_{ij}$, $ts$ kapacitása $\sum b_i = \sum c_j$. További élek: $v_i w_j$ alsó és felső kapacitása $(-a_{ij}, 1 - a_{ij})$, költsége $(1 - 2a_{ij})c_{ij}$. Költséges áram.

### 4.4.2. Gráfelméleti alkalmazások

**287.** Definiáljuk a $V$ két részhalmazát: $S = \{v : c(v) > 0\}, T = \{v : c(v) < 0\}$. Vegyük fel az $s, t$ extra pontokat, vezessünk éleket $s$-ből $S$ pontjaiba, ill. $T$ pontjaiból $t$-be. Az eredeti élek kapacitása legyen végtelen. Egy $sv$ él kapacitása legyen $c(v)$ míg egy $vt$ élé $-c(v)$. Keressünk minimális $st$-vágást a segédgráfban.

**289.** Rendezzük körbe a pontokat majd a szomszédok között keressünk minimális vágást. A legkisebb kapacitású minimális vágás kapacitása lesz a digráf élösszefüggősége.

**291.**

a) Legyen minden él kapacitása 1. Keressünk 2 nagyságú megengedett folyamot.

b) Legyen minden $v \in V - \{s, t\}$ pont kapacitása 1 majd a 249. feladatnál leírt módon vezessük vissza az a)kérdésre.

**292.** Hasonló a 291. feladat megoldásához, keressünk legolcsóbb 2 nagyságú egész folyamot.

**293.** Vegyünk egy optimális megengedett potenciált és nézzük a pontos élek gráfját. Ebben keressünk maximális folyamot az azonosan 1 kapacitásfüggvényre nézve.

**295.** Ez a minimális vágás feladat átfogalmazása.

**296.** A gráf éleit irányítsuk $S$-ből $T$ felé, és tegyünk rájuk $\infty$ kapacitást. Egy úgy $s$ csúcsból húzzunk minden $v \in S$-be egy $sv$ élt, melynek kapacitása $v$ súlya, valamint vezessünk egy új $t$ csúcsba minden $u \in T$ csúcsból egy $ut$ élt, melynek kapacitása az $u$ súlya.

a) Minimális $s\bar{t}$ vágást keresünk.

b) Olyan minimális $s\bar{t}$ vágást keresünk, melyben a kilépő élek száma minimális. (Lásd a 266. feladatot.)

**298.** Az egyenlőtlenség relációt irányított élekkel reprezentálva maximális súlyú ponthalmazt keresünk, amibe nem vezet él. Lásd a 287. feladatot.

**299.** $s$ új csúcsból minden csúcsba vezessen egy $(\delta(v) - \varrho(v))/2$ alsó és felső kapacitású, 0 súlyú él (ha ez nem egész, akkor nincs Euler átirányítás). A többi élre rakjunk 0 alsó és 1 felső kapacitást. Keressünk minimális költségű (egész) áramot, és az 1 értékű éleket fordítsuk meg.

### 4.4.3. Modellezési feladatok

**300.** Legyen $V = \{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_\ell, s, t\}$, $A = \{sv_i : i = 1, \ldots, k\} \cup \{v_i u_j : i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, \ell\} \cup \{u_j t : j = 1, \ldots, \ell\}$, $g(sv_i) := a_i$, $g(v_i u_j) := 1$, $g(u_j t) := b_j$ $(i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, \ell)$. Létezik-e olyan maximális folyam, mely minden $s$-ből kilépő élt telít.

**301.** Az elhelyezkedés egy részbenrendezés, egy maximális súlyú ideált keresünk. Lásd 298.

**306.** Legyen $V := \{s, a_i^f, a_i^l, b_j^f, b_j^l, b_j : i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n\}$. Az élek/alsó/felső kapacitások/költségek:

$$\left(sa_i^f/f_i/f_i/0\right),$$

$$\left(sa_i^l/\ell_i/\ell_i/0\right),$$

$$\left(a_i^f b_j^f/0/f_i/d_{ij}\right),$$

$$\left(a_i^l b_j^l/0/\ell_i/d_{ij}\right),$$

$$\left(b_j^f b_j/0/p_j - q_j/0\right),$$

$$\left(b_j^l b_j/q_j/r_j/0\right),$$

$$\left(b_j t/0/p_j/0\right),$$

$$\left(ts/\sum\left(f_i + \ell_i\right)/\sum\left(f_i + \ell_i\right)/0\right),$$

(ahol $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$). Keressünk minimális költségű áramot.

**310.** Tipp: áruljunk helyre szóló jegyeket. Azaz olyan min költségű $k$ nagyságú folyam feladatot írjunk fel, ahol a folyam út-felbontásában minden út megfelel a $k$ hely egyikének.

## 4.5. Szintező algoritmusok

**313.** Tipp: futtassunk két szintező algoritmust egymás után: a felső korlátra "felfelé", majd az alsóra "lefelé". Figyeljük meg, hogy a másodiknál a felső korlátok nem romlanak el.

# 5. fejezet

# Lineáris algebra és poliéderek

## 5.1. Lineáris algebra

**318.** A válasz igen. Adjuk hozzá az utolsó oszlophoz az utolsó előtti oszlop 10-szeresét, az azt megelőző oszlop 100-szorosát, stb. Ezen lépések nem változtatják meg a mátrix determinánsát, és az eljárás végén az utolsó oszlopban csupa 2013-mal osztható szám áll. E szerint az oszlop szerint kifejtve a determinánst adódik az állítás.

**319.** Jelölje $V$ és $W$ a két affin alteret, és legyen $z \in V \cap W$. Mivel egy affin altér egy altér eltoltja, ezért $V = V' + \{z\}$ és $W = W' + \{z\}$ ahol $V'$ és $W'$ alterek. De ebből $V \cap W = (V' \cap W') + \{z\}$ , amiből következik az állítás, hiszen alterek metszete altér. Összegre hasonlóan gondolkodhatunk.

**320.** A vektorterek tulajdonságait könnyű ellenőrizni. A tér dimenziója 3, bázist alkot pl. az $\{1, x, x^2\}$ hármas. A deriválás lineáris transzformáció volta következik a deriválás szabályaiból. A transzformáció nem invertálható, hiszen ha két polinom csak a konstans tagban tér el egymástól, akkor deriváltjuk megegyezik. Így a transzfromáció determinánsa 0.

**321.** Hasonlóan a 320. feladathoz.

**323.** Jelölje $r_{\mathbb{Q}}, r_{\mathbb{R}}$, és $r_{\mathbb{F}_2}$ rendre a $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ill. $GF(2)$ fölötti rangot. Ekkor $r_{\mathbb{Q}} = r_{\mathbb{R}} \geq r_{\mathbb{F}_2}$, ugyanis ha $\sum \lambda_i a_i = 0$ valós együtthatókkal, akkor a $\lambda_i$-k választhatók racionálisnak. Sőt, nem mind páros egészeknek is, és ekkor legyen $\lambda_i' := (\lambda_i \mod 2)$. Másképpen: $\det_{\mathbb{R}} = \det_{\mathbb{Q}}$ és $\det_{\mathbb{F}_2} = (\det_{\mathbb{Q}} \mod 2)$.

**324.** Használjuk fel, hogy $r(A) = \dim\ \mathrm{Im}(A)$.

**325.** Nyilván elég teljes sorrangú mátrixra igazolni az állítást. Ekkor ha $xAA^{\mathsf{T}} = 0$, akkor $xAA^{\mathsf{T}}x = 0$, azaz $|xA|^2 = 0$, ebből $xA = 0$ és így $x = 0$.

A komplex esetben egy ellenpélda: $(1\ i)$.

**326.** Segítség: vonjuk ki az első sorból a másodikat, majd a másodikból a harmadikat, stb. Ezután fejtsük ki a determinánst az első oszlop szerint, és használjunk indukciót.

**327.** Indirekt tegyük fel, hogy $z$ benne van az $A$ sorterében, azaz létezik olyan $y$ sorvektor, melyre $yA = z$. De ekkor $|z|^2 = (yA)z = y(Az) = 0$, amiből $z = 0$, ellentmondás.

**328.** Jelölje $A'$ azt a mátrixot, melyet $A$-ból az utolsó oszlop elhagyásával kapunk. Mivel $A$ utolsó oszlopa, $a_n$, lineárisan függ az első $n-1$ oszloptól, ezért létezik olyan $x'$ vektor, melyre $A'x' = a_n$. Ekkor az $x = (x', -1)$ vektorra $Ax = 0$, vagyis $x$ merőleges $A$ minden sorára. Mivel $r(A) = r(C)$, ezért $B$ minden sora lineárisan függ $A$ soraitól, emiatt $Bx = 0$ is teljesül, és így $Cx = 0$, amit átrendezve épp az állítást kapjuk (hiszen $x$ utolsó koordinátája nem nulla).

**329.** A feladat azzal ekvivalens, hogy adjunk meg minimális számú $w_1, \ldots, w_{k-1}$ vektort úgy, hogy az általuk feszített altér az $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza legyen. Ekkor ugyanis ezen altért az $Ax = b$ rendszer egy $x_0$ megoldásával eltolva megkapjuk a kívánt alteret, a vektorok pedig az $w_1 + x_0, \ldots, w_{k-1} + x_0, x_0$ vektorok lesznek (ha $x_0 = 0$, akkor persze nem vesszük hozzá a rendszerhez).

Ilyen $w_1, \ldots, w_{k-1}$ rendszert pedig könnyen találhatunk: az $A$ nullterében kell keresnünk egy bázist. Ezt mohó módon megtehetjük: tegyük fel, hogy valamely $0 \le i < k-1$ értékig meghatároztuk a $w_i$-ket. Legyen $A_i$ az a mátrix, melyet $A$-ból kapunk a $w_1, \ldots, w_i$ vektorok mint sorok hozzávételével. Ekkor $w_{i+1}$-re jó választás az $A_i x = 0$ rendszer egy megoldása.

**330.** Hasonló meggondolásokat alkalmazzunk, mint a 329. feladatban.

**331.** Jelölje $A$ sorait ${}_1a, \ldots, {}_ma$. Ekkor $Ax = 0 \iff {}_iax = 0\ \forall i \iff x \in \mathrm{S}(A)^{\perp}$.

**332.** Gauss-eliminációval. Vegyük észre, hogy itt nem ütközhetünk ellentmondásos sorba, hiszen a rendszer homogén.

**333.** Következik a 332. feladatból.

**334.** Alkalmazzuk a 328. és a 332. feladatokat.

**335.** Megmutatjuk, hogy az $A_1$ mátrix oszlopai függetlenek, a sorokra hasonlóan megy a bizonyítás.

Tekintsük az $A$ első $r$ oszlopa által alkotott $A'$ mátrixot (ennek $A_1$ részmátrixa). Tegyük fel indirekt, hogy $A_1$ oszlopai nem függetlenek. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $x$ vektor, melyre $A_1x = 0$. Mivel $A$ minden sora függ az első $s$ sortól, ezért ugyanez igaz $A'$ soraira is. De akkor $A'x = 0$ is teljesül, ellentmondva annak, hogy $A'$ oszlopai lineárisan függetlenek.

**336.** Jelölje a mátrixot $A$, az oszlopokat $a_1, \dots, a_k$, az új vektort $b$. Tegyük fel indirekt, hogy nő a mátrix rangja, azaz létezik a mátrixban úgy maximálisan sok független oszlop, hogy azokhoz az új oszlopot hozzávéve még mindig független rendszert kapunk. Legyen ez a rendszer $a_1, \dots, a_i, b$. Mivel $a_1, \dots, a_i$ maximális független $A$-ban, ezért $A$ minden oszlopa kifejezhető ezen vektorok lineáris kombinációjaként. Ugyanakkor $b$ lineárisan függ $A$ oszlopaitól, így $b$ is kifejezhető az $a_1, \dots, a_i$ lineáris kombinációjaként, ellentmondva az $a_1, \dots, a_i, b$ rendszer független voltának.

Az oszlop elhagyására vonatkozó állítás hasonlóan látható. A sorokra vonatkozó rész egyszerűen következik a mátrix transzponálásával.

**337.** Tekintsük az adott 5 sorból álló mátrixot. Erre alkalmazzuk a 335. feladatot.

**338.** Általában nem igaz, pl. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ első oszlopa és sora. $r(A)$ darabra igaz.

Legyen most $A = \left(\begin{smallmatrix} Q & C \\ B & D \end{smallmatrix}\right)$, ahol $(Q\ C)$ sorai és $\binom{Q}{B}$ oszlopai függetlenek. $(B\ D)$ sorai $(Q\ C)$ sorainak lineáris kombinációi, speciálisan $B$ soraira ${}_ib = x_iQ$. Ha valamely $y$-ra $Qy = 0$, akkor ${}_iby = x_iQy = 0$, azaz $\binom{Q}{B}y = 0$, tehát $y = 0$.

**339.** Alkalmazzuk a 333. és a 338. feladatokat.

**343.** Igen. Az "akkor" irány egyszerű. A "csak akkor" irányhoz: legyen $\sum_j \lambda_{ij}a_j = 0$, ahol $\lambda_{ii} \neq 0$. Szorozzuk meg az $i$-dik egyenletet $\vartheta^i$-nel, és adjuk ezeket össze, ekkor $\sum p_i(\vartheta)a_i = 0$ adódik, ahol $p_i$ nemnulla polinomok. Válasszuk $\vartheta$-t úgy, hogy ne legyen gyöke egyik polinomnak sem.

**344.** Mutassuk meg, hogy $\mathrm{S}(A_1) \subseteq \mathrm{Ker}(A_2)$, és a dimenziójuk megegyezik.

**345.** $A_1$-ből kiindulva mindig egy sorral bővítsük a mátrixot úgy, hogy az aktuális sor merőleges legyen az összes korábbira, azaz ha $A$ jelöli az aktuális mátrixot, akkor vegyük hozzá az $Ax = 0$ rendszer egy megoldását sorként. A kapott $A_2$ mátrix nulltere nyilván tartalmazza $A_1$ sorterét, az egyenlőség a dimenziókból adódik.

**346.** Ellenőrizzük az ortogonalitást és a dimenziókat.

**347.** Az első rész következik a 345. feladatból, a másik két rész következik az elsőből.

**351.** Legyen $x_0$ az $Ax = b$ egy megoldása. Ekkor $A'(x_0 - x^*) = 0$, azaz $x_0 - x^*$ merőleges az $A'$ mátrix minden sorára. Ugyanakkor $A'$ az $A$ maximálisan sok lineárisan független sorából állt, azaz $x_0 - x^*$ valójában $A$ minden sorára merőleges, így $A(x_0 - x^*) = 0$, tehát $Ax^* = Ax_0 = b$.

**353.** Általában nem igaz az állítás: ha $A$-nak két oszlopa van, melyek megegyeznek, akkor az $x_i$-ket váltakozva a megfelelő egységvektornak véve konstans sorozatot kapunk, holott $x_i$ nem konvergens.

Tegyük most fel, hogy $A$ oszlopai lineárisan függetlenek, és legyen $Ax_k = z_k$. Jelölje a $z_k$ sorozat limeszét a $z$ vektor. Ekkor $x_k$ konvergál $A^{-1}z$-hez, jelölje ezt a vektort $x$. Teljesülni fog, hogy $Ax = z$.

**356.** Ha $E_0$ irányítatlanul tartalmaz kört $E_1$ élhalmazzal, akkor vegyük az $A(E_1)$ részmátrixot. Az oszlopokat szorozzuk meg $\pm 1$-gyel úgy, hogy egy irányított kör incidencia-mátrixát kapjuk. Most az oszlopokat összeadva 0-t kapunk.

Fordítva, legyen $E_0$ olyan hogy $A(E_0)$ oszlopai összefüggenek valamilyen együtthatókkal. Egy nemnulla együtthatójú él mindkét végpontjában kell hogy kapcsolódjon nemnulla együtthatójú él. Ezeken az éleken haladva egy idő után kell hogy kört találjunk.

Végül, $A$ rangja a maximális lineárisan függetlenül kiválasztható oszloprendszer elemszáma, azaz a maximális élszámú részerdő, még másként egy feszítőerdő élszáma.

**357.** Legyen $v_1, \ldots, v_n$ egy maximális súlyú független részhalmaz, és tekintsük a rendszer vektorait súly szerint csökkenő sorrendben úgy, hogy azonos súlyú vektorok közül a $v_i$-ket vesszük előre. Ebben a sorrendben futtatva a mohó algoritmust a kérdéses rendszert kapjuk.

## 5.2. Konvexitás

**360.** Segítség: Helyettesítsük be a $z_i$-k $z$-t adó konvex kombinációjában minden $z_i$ helyére a $v_i$-k megfelelő konvex kombinációit.

**361.** Az „akkor” irány nyilvánvaló. A „csak akkor” irányt indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $k - 1$ pont konvex kombinációjáról már tudjuk, hogy a halmazhoz tartozik, és tekintsük $k$ pont konvex kombinációját: $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$. Legyen $u_1 = \frac{\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_{k-1} v_{k-1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}}$ és $u_2 = v_k$. Ekkor $u_1$ és $u_2$ is a halmazhoz tartozik az indukciós feltevés miatt. De $v = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1})u_1 + \lambda_k u_2$, azaz előáll két pont konvex kombinációjaként, és így $v$ is a halmazban van.

**362.** Az „akkor” irány nyilvánvaló. A „csak akkor” irányhoz a 361. feladat értelmében azt kell megmutatnunk, hogy a halmaz bármely két elemének bármely konvex kombinációja a halmazhoz tartozik. Legyen $u$ és $v$ két pont, $w = \alpha u + (1-\alpha)v$ valamely $0 < \alpha < 1$ számra. Az $u-v$ szakaszból kiindulva, mindig az aktuális szakaszt felezve és a $w$-t tartalmazó részét megtartva szakaszok olyan sorozatát kapjuk, melyek végpontjai $w$-hez tartanak és benne vannak a halmazban, így a zártságból adódóan $w$ is eleme a halmaznak.

A feladat második feléhez: álljon a halmaz a [0,1] intervallum azon racionális elemeiből, melyek $\frac{p}{q}$ alakba írhatóak, ahol $q$ 2-hatvány.

**363.** Ha két pont benne van a két halmaz metszetében, akkor bármely konvex kombinációjuk is.

**364.** Nyilván a $C$ elemeiből képzett konvex kombinációk halmaza konvex, és tartalmazza $C$-t, így konv$(C)$-t is. Ugyanakkor $C \subseteq$konv$(C)$, és konv$(C)$ konvex, így tartalmazza a $C$ elemeiből képzett összes konvex kombinációt. Így a két halmaz egybeesik.

**365.** Azt kell megmutatnunk, hogy $f(\frac{c_1+c_2}{2}) \leq \frac{f(c_1)+f(c_2)}{2}$. Legyenen $x \in A$ olyan, hogy $f(c_1 + c_2) = (c_1 + c_2)x$. Ekkor nyilván $f(\frac{c_1+c_2}{2}) = \frac{c_1+c_2}{2}x$ is teljesül. Mivel $f(c_1) \geq c_1 x$ és $f(c_2) \geq c_2 x$, kapjuk, hogy $f(\frac{c_1+c_2}{2}) = \frac{c_1+c_2}{2}x \leq \frac{f(c_1)}{2} + \frac{f(c_2)}{2} = \frac{f(c_1)+f(c_2)}{2}$.

**366.** $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$ könnyen látható. $(i) \Rightarrow (iii)$ következik a 362. feladatból.

**367.** Megszámlálható sok.

**368.** Kontinuum, mert minden egyes határpontot csak egyetlen félsíkkal lehet levágni.

**369.** Igaz, ugyanis indirekt tegyük fel, hogy egyik körre sem teljesül az állítás. A két kör nyilván metszi egymást két pontban. A metszéspontjaikon átmenő egyenes szétválasztaná a két háromszöget, ellentmondás.

**370.** Tegyük fel, hogy $K$ tartalmazza az $u$ pontjából kiinduló, de nem tartalmazza a $v$ pontjából kiinduló, $c$ irányú félegyenest. Ez azt jelenti, hogy $u + \lambda c \in K$ minden $\lambda \geq 0$ esetén, de létezik olyan $\mu > 0$ szám, melyre $v + \mu c \notin K$. Tekintsük a következő pontok sorozatát: $w_i := \frac{i-\mu}{i}v + \frac{\mu}{i}(u + ic)$ $(i \geq \mu)$. $K$ konvexitása miatt $w_i \in K$, ugyanakkor $w_i \to v + \mu c$ $(i \to \infty)$, így $K$ zártsága miatt $v + \mu c \in K$, ellentmondás.

**372.** Egy extremális pont természetesen nem állhat elő $K$-beli szakasz felezőpontjaként. A fordított irányhoz tegyük fel, hogy az $v \in K$ pont előáll legalább három $K$-beli pont konvex kombinációjaként, $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ $(k \geq 3)$. Ekkor $v$ előáll az $u_1 = \frac{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1}}{\lambda_1 + \ldots \lambda_{k-1}}$ és $u_2 = v_k$ pontok konvex kombinációjaként, azaz létezik őt tartalmazó szakasz $K$-ban. Ezen a szakaszon két elég közeli pontot véve $v$-hez az előáll a két pont által meghatározott szakasz felezőpontjaként.

**373.** $v$ extremális $\iff$ nem áll elő más $K$-beli pontok konvex kombinációjaként $\iff$ $K \setminus \{v\}$ zárt a konvex kombináció képzésre $\iff$ $K \setminus \{v\}$ konvex.

## 5.3. Poliéderek

**378.** Mutassuk meg, hogy a poliédert kimetsző zárt félterek mindegyike homogén.

**380.** Ha $q$ mozgásvektora $z$-nek, akkor elég kicsi $\lambda > 0$-ra $z + \lambda q \in R$ és $z - \lambda q \in R$. Ez azt jelenti, hogy $Q(z + \lambda q) = Qz + \lambda Qq \leq b$ és $Q(z - \lambda q) = Qz - \lambda Qq \leq b$, ami csak úgy lehetséges, ha $Q_z^= q = 0$.

Ha $Q_z^= q = 0$, akkor tudunk olyan kicsi $\lambda > 0$ számot választani, melyre $z + \lambda q$ és $z - \lambda q$ is $R$-ben van.

**381.** Legyen $R = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Qx \leq b\}$. Ekkor egy $q$ vektor akkor iránya $R$-nek, ha $Qq \leq 0$. Könnyű látni, hogy az ilyen vektorok halmaza zárt a nemnegatív együtthatós lineáris kombinációkra, így konvex kúpot alkotnak.

**382.** Hasonlóan a 372. feladathoz.

**383.** Hasonlóan a 372. feladathoz.

**384.** Legyen a két pont $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Ekkor az általuk meghatározott szakaszt a következő $z$ vektorok alkotják: $\{z \in \mathbb{R}^n : \min(x_i, y_i) \leq z_i \leq \max(x_i, y_i)\}$. Ez a halmaz pedig könnyen láthatóan egy poliéder.

**385.** $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \ -1 \leq \sum_1^n x_i \leq 1, \ -1 \leq x_i \leq 1 (i = 1, \ldots, n)\}$, ami könnyen láthatóan egy poliéder.

**386.** Segítség az (e) részhez: $y \in K^* \iff yA \leq 0$ szerint $z \in K^{**} \iff yz \leq 0 \ \forall y \in K^* \iff \nexists y : yA \leq 0, yz > 0 \iff \nexists y : yA \geq 0, yz < 0 \iff \exists x : Ax = z, x \geq 0 \iff z \in K$.

Segítség az (f) részhez: $K^*$ metszetkúp, így generált kúp is, tehát $K + K^*$ is generált kúp. $(K + K^*)^* = K^* \cap K = \{0\}$.

**389.** Metszetkúpként:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_2 - x_1 \le 0, \dots, x_n - x_{n-1} \le 0, -x_n \le 0\}\,.$$

Generált kúpként:

$$C = \{y_1 \cdot (1{,}0,\dots,0) + y_2 \cdot (1{,}1{,}0,\dots,0) + \dots \\ \dots + y_n(1{,}1,\dots,1),\ y_1,\dots,y_n \ge 0\}\,.$$

**390.** Eltolási altér: azon $z$ vektorokat keressük, melyekre a feladathoz tartozó $A$ mátrixra $Az = 0$, azaz $2z_1 - 3z_2 = 0,\ z_1 - 3z_2 = 0,\ stb.$ Ebből azonnal látszik, hogy $z_1 = z_2 = 0$, azaz a poliéder eltolási alterre triviális.

Iránykúp: azon $z$ vektorokat keressük, melyekre $Az \le 0$, azaz $2z_1 - 3z_2 \le 0,\ z_1 - 3z_2 \le 0,\ -z_1 - 2z_2 \le 0,\ -2z_1 + z_2 \le 0,\ -z_1 + z_2 \le 0$. Ezen feltételek mindegyike akkor teljesül, ha $\frac{2}{3}z_1 \le z_2 \le z_1$.

Mivel például a $z = (1{,}1)$ vektor benne van az iránykúpban, tetszőleges $c = (a, b)$ vektor j választás lesz, melyre $a + b > 0$.

**394.** Ábrázoljuk a megoldáshalmazt koordinátarendszerben $\alpha$ és $\beta$ függvényében.

**395.** $A \cap K \supseteq P$ általában. Ha $0 \in A$, akkor könnyű látni, hogy a generált affin altér megegyezik a generált altérrel. Ennek része a kúp, és a metszet egybeesik a kúppal, ami nem korlátos, mint a politóp, tehát nem egyenlőek.

Tegyük most fel, hogy $0 \notin A$. Legyen $u \in A \cap K$, tehát $u \ne 0$. Ekkor $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i,\ \lambda_i \ge 0$ és $u = \sum_{i=1}^k \mu_i v_i,\ \sum_{i=1}^k \mu_i = 1$. Azt állítjuk, hogy a $\lambda_i$-k jók lesznek a politópbeli előállításhoz. Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, akkor készen is vagyunk, így tegyük fel, hogy $0 < \sum_{i=1}^k \lambda_i \ne 1$. Alkalmas $\alpha$-ra, ahol $0 < \alpha \ne 1$, $\alpha u \in A \cap K$, és $u \in A \cap K$. Ekkor $0 = \frac{\alpha}{\alpha-1}u + \frac{-1}{\alpha-1}\alpha u$, tehát előállt a 0 az affin altér elemeként, ellentmondás.

**397.** Vegyük az élesíthető halmazokhoz tartozó megoldások számtani középét.

**398.** a) $w_i$ éppen az ${}_ia$ irányú szélesség.

b) $P := \operatorname{conv}\big((0{,}0{,}1), (0{,}0,-1), (1{,}1{,}0), (-1{,}1{,}0)\big)$, $w_i = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 = w(P)$.

c) Feltehető, hogy $A$ soraira $||{}_ia|| = 1$. $P$ tartalmaz $\varrho$ sugarú gömböt $\iff$ $\{x : Ax \le b - \varrho\mathbf{1}\} \ne \emptyset$. Az a) rész szerint $\exists x^{(i)} : Ax \le b, {}_iax^{(i)} \le b_i - w(P)$. $x := \frac{1}{m}\sum x^{(i)}$.

d) Kell: $\{{}_iax \le b_i - \frac{w(P)}{n+1}\}$ félterek metszete nem üres. Helly-tétel miatt elég legfeljebb $n+1$ félteret nézni, ezek metszetére $w(P') \ge w(P)$. Alkalmazzuk a c) részt.

**399.** $K$ kompakt, ezért $\exists Y \subseteq K$ véges halmaz, hogy $\forall x \in K \exists y \in Y$ : $||x-y|| < \frac{\varepsilon}{2}$. $P := \mathrm{conv}\big(Y\big), w(P) \geq w(K) - \varepsilon$. Lásd a 398. feladat d) része.

**400.** Segítség: $\Longrightarrow$ : $b := -\mathbf{1}A$.

**401.** Tekintsük a következő poliédert a síkon: $x \geq 0, y \leq \sqrt{2} \cdot x$.

**402.** Vázlat: $n = 1$-re OK. Ha már nem tudunk több lapot elvenni, akkor létezne legalább $2n+1$ vektor, hogy bármely kettő legalább derékszöget zár be. Ez indukció miatt nem lehet.

**405.** $P$ korlátos, tehát csúcsai konvex burka. $\mathcal{A}(P)$ definíciójában elég a csúcsokra megkövetelni az egyenlőtlenséget. Legyenek a $B$ mátrix sorai $P$ csúcsai, $\mathcal{A}(P) = \{y \geq 0 : By \leq \mathbf{1}\}$. $B$ elemei nemnegatívak, és minden oszlopban van pozitív elem, hiszen ha pl. $\alpha$ pozitív elem $A$ első oszlopában, akkor $\frac{1}{\alpha}e_1 \in P$. Tehát $\mathcal{A}(P) \in \mathcal{M}$. Másrészt $P \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}(P))$ triviális, ha pedig $z \notin P$, akkor $\exists b_i$ csúcsa $P$-nek, hogy $zb_i > 1$, tehát $z \notin \mathcal{A}(\mathcal{A}(P))$.

**407.** A feladatban szereplő halmaz az $n$-dimenziós $0-1$ vektorok konvex burka.

**408.** A feladatban szereplő halmaz az $n$-dimenziós egységvektorok konvex burka.

**413.** Az $A$ mátrix sorterének kiegészítő altere könnyen láthatóan teljesíti a feltételeket. Ha lenne olyan $x$, melyre $Ax \neq 0$, feltehető, hogy $Ax$ első koordinátája pozitív. Ekkor elég nagy $\lambda$-ra $x_0 + \lambda x \notin R$.

## 5.4. Bázismegoldások

**416.** Mindegyik implikáció egyszerűen következik az eltolási vektor definíciójából.

**417.** Lásd a 416. feladat a) és b) része.

**420.** A 416. feladat szerint egy $q$ vektorra akkor és csak akkor $Qq = 0$, ha $Q'q = 0$, vagyis $Q$ és $Q'$ nulltere megegyezik, így sorterük is.

A második részhez indirekt tegyük fel, hogy mondjuk $Q_z^=$ sortere nem tartalmazza ${Q'}_z{}^=$ valamely $q'$ sorát. Ekkor a Fredholm féle alternatíva tételből következik, hogy létezik olyan $q$ vektor, amelyre $Q_z^= q = 0$, $qq' > 0$. De ekkor kicsiny pozitív $\lambda$-ra $z' := z + \lambda q$ olyan, hogy $Qz' \leq b$, de $qq' > 0$ miatt $Q'z' \nleq b'$, ellentmondásban a feltevéssel.

**421.** Következik a 420. feladatból.

**422.** Legyen $z \in R$ minimális szintű elem. Belátjuk, hogy $\sigma(z) = 0$, azaz $z$ bázismegoldás. Ha indirekt $r(Q) > r(Q_z^=)$, úgy a Fredholm tétel szerint létezik $q$ vektor, amelyre $Q_z^= q = 0$ és $Q_z^< q \neq 0$. A $q$ esetleges negálásával elérhetjük, hogy a $Q_z^< q$ vektornak van szigorúan pozitív komponense. Ekkor van olyan $\lambda > 0$ érték, amelyre $z' = z + \lambda q \in R$ és ${}_iqz' = b(i)$ a $Q_z^<$ valamely ${}_iq$ sorára ($b(i)$ a $b$ vektor $i$. komponensét jelöli). $Q_z^= q = 0$ és ${}_iqq \neq 0$ miatt ${}_iq$ lineárisan független $Q_z^=$ soraitól. Így $Q_z^= z' = b_z$ miatt $r(Q_{z'}^=) > r(Q_z^=)$, ellentmondásban $z$ választásával.

**423.**

b) Jelölje $m$ és $n$ az $A$ sorainak és oszlopainak számát. Esetleges sorcserével feltehetjük, hogy $z$-nek az utolsó $j$ komponense pozitív. Jelölje az ezen $j$ oszlophoz tartozó $m \times j$-es részmátrixot $A'$. Legyen $M := \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, ahol $I$ az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli. Definíció szerint $z$ akkor bázismegoldás, ha $r(M_z^=) = r(M) = n$. Ekkor $M_z^=$ az $M$ mátrix első $m + (n - j)$ sora (vagyis az $A$ sorai valamint a $-I$ első $n - j$ sora). Ennek a bal alsó $(n - j) \times (n - j)$-es részmátrixa egy negatív egységmátrix, így $M_z^=$ rangja pontosan akkor $n$, ha az első $n - j$ oszlopának és utolsó $n - j$ sorának kitörlésével keletkező $A'$ részmátrix rangja $n - (n - j) = j$, ami épp azt jelenti, hogy $A'$ oszlopai lineárisan függetlenek.

c) Jelölje $A_0$ az $A$ azon $a_i$ oszlopaiból álló részmátrixot, melyekre $y_0$ merőleges, azaz $a_i y_0 = 0$. Definíció szerint $y_0$ akkor bázismegoldás, ha $r(A_0, b) = r(A, b)$. Az állítás azzal ekvivalens, hogy $y_0$ pontosan akkor bázismegoldás, ha $r(A_0) = r(A, b) - 1$. Azt kell tehát csak belátnunk, hogy $r(A_0) = r(A_0, b) - 1$. De ez rögtön látszik, hiszen $y_0 A_0 = 0$ és $y_0 b = -1$ miatt a $b$ vektor nem függ lineárisan $A_0$ oszlopaitól.

**427.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Legyen $c$ a $Q_z^=$ sorainak az összege, azaz $c = y_1 Q$, ahol $y_1$ azt a $(0-1)$-es vektort jelöli, amelyben a $Q_z^=$ sorainak megfelelő komponensek értéke 1, a többié 0. Tetszőleges $x \in R$ esetén $cx = (y_1 Q)x = y_1(Qx) \leq y_1 b = y_1(Qz) = (y_1 Q)z = cz$. Ha itt valamely $x \in R$ elemre egyenlőség szerepel, akkor $Q_z^= x = b_z^=$, ennek pedig $z$ az egyértelmű megoldása, hiszen a feltevés szerint $Q_z^=$ oszlopai lineárisan függetlenek.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ha $z$ csúcs, akkor létezik egy olyan $c$ vektor, amelyre $cz > cx$ minden $x \in R - z$ elemre. Ha $z$, indirekt, nem extrém, akkor létezik $x, y \in R - z$, melyekre $z = (x + y)/2$. De ekkor $cx < cz$ és $cy < cz$ és így $cz = (cx + cy)/2 < (cz + cz)/2 = cz$, ellentmondás.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Tegyük fel, hogy $z$ extrém. Amennyiben $Q_z^=$ oszlopai, indirekt, lineárisan összefüggőek, úgy létezik egy $q$ nemnulla vektor, amelyre $Q_z^= q = 0$. De ekkor kicsiny pozitív $\varepsilon$-ra $z + \varepsilon q$ is és $z - \varepsilon q$ is benne van $R$-ben (merthogy kielégítik $\{Qx \leq b\}$-t), ellentmondásban a feltevéssel, hogy $z$ extrém.

**428.** Következik a 427. feladatból.

**429.** Az első három feltétel ekvivalenciája közvetlenül adódik a 416. feladatból.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Ha $z$ csúcs, akkor a 427. feladat nyomán $Q_z^=$ oszlopai lineárisan függetlenek, így persze $Q$ oszlopai is azok.

(i) $\Rightarrow$ (iv) A 422. feladat miatt van bázismegoldás, és a 427. feladat miatt bármely $z$ bázismegoldás csúcs.

**430.** Először belátjuk, hogy $R \subseteq A + R'$, azaz bármely $z \in R$ elem előáll egy $A$-beli és egy $R'$-beli elem összegeként. Valóban, minden $z$ elem egyértelműen előáll egy $A$-beli $z_1$ és egy $A^\perp$-beli $z_2$ elem összegeként. Belátjuk, hogy $z_2 \in R'$. Ha nem ez volna a helyzet, akkor $z \in A^\perp$ miatt $z_2$ nem volna $R$-ben, azaz $z_2$ megsértené $Qx \leq b$ valamelyik sorát. De akkor $Qz_1 = 0$ miatt $z = z_1 + z_2$ is megsértené ugyanazt a sort, ellentétben a $z \in R$ feltevéssel. Így valóban $R \subseteq A + R'$. Másrészt a definíciókból világos, hogy $A + R' \subseteq A + R \subseteq R$, amiből $A + R' = R$.

Végül belátjuk, hogy $R'$ egyenes-mentes, így csúcsos. Az $A$ altér egy bázisából, mint sorvektorokból készítsük el a $Q^*$ mátrixot. Ekkor tehát $Q$ sorai és $Q^*$ sorai egymásra merőlegesek, együtt kifeszítik az egész teret, azaz $\begin{pmatrix} Q \\ Q^* \end{pmatrix}$ teljes oszlop-rangú. Miután $R'$ a $\{Q^*x = 0, Qx \leq b\}$ rendszer megoldáshalmaza, a 429. feladatból adódik, hogy $R'$ egyenes-mentes.

**431.** A 430. feladat alapján csak azt kell látnunk, hogy $R'$ metszetkúp, de ez világos, hiszen egy altér metszetkúp.

**432.** (ii) $\Rightarrow$ (iii) semmitmondó. A (iii) $\Rightarrow$ (i) és (i) $\Rightarrow$ (ii) irányok közvetlenül látszanak.

**436.** (i) $\Rightarrow$ (ii) Mivel $R$ nem tartalmaz félegyenest, így egyenest még kevésbé, és ezért a 429. feladat miatt van csúcsa, a 428. feladat miatt véges sok csúcsa van. Jelölje $R_K$ a csúcsok konvex burkát. Belátjuk, hogy $R = R_K$. Ha bizonyos vektorok kielégítenek egy egyenlőtlenség-rendszert, akkor bármely konvex kombinációjuk is kielégíti, ezért $R_K \subseteq R$.

A fordított irányú tartalmazás igazolásához indirekt tegyük fel, hogy a poliédernek van olyan $z$ pontja, amely nem áll elő csúcsok konvex kombinációjaként. Válasszuk $z$-t olyannak, hogy $Q_z^=$, a $z$-aktív részmátrix maximális legyen. Mivel $z$ nem csúcs, így $Q_z^=$ oszlopai lineárisan összefüggenek. Ezért létezik egy nemnulla $q$ vektor, amelyre $Q_z^= q = 0$. Kicsiny pozitív $\lambda$-ra $z+\lambda q \in R$ és mivel $R$ nem tartalmaz félegyenest, nagy $\lambda$ értékre $z + \lambda q \notin R$. Ez azt jelenti, hogy $Q_z^<$-nek van olyan ${}_iq$ sora, amelyre ${}_iqq > 0$. Így ha $\lambda$-t nullától kezdve folyamatosan növeljük, lesz egy olyan $\lambda_1$ érték, amelyre $z_1 := z + \lambda_1 q$ benne van $R$-ben és aktív részmátrixa szigorúan bővebb $Q_z^=$-nél. (Nevezetesen $\lambda_1 := \min(b_1(i) - {}_iqz)/({}_iqq)$, ahol a minimum a $Q_z^=$ azon ${}_iq$ soraira megy, amelyekre ${}_iqq > 0$.) Analóg módon létezik egy $z_2 := z - \lambda_2 q$ vektor $R$-ben

($\lambda_2 > 0$), amelynek aktív részmátrixa szigorúan bővebb $Q_z^=$-nél. A $z$-re tett feltevés miatt mind $z_1$, mind $z_2$ benne van $R_K$-ban, és ezért a $z_1z_2$ szakasz belsejében fekvő $z$ is, ellentmondás.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Triviális.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Ha indirekt létezne az iránykúpnak $q$ nemnulla eleme, akkor bármely $z \in R$ elemre a $\{z + \lambda q : \lambda \geq 0\}$ félegyenes $R$-ben volna, és így $R$ nem lenne korlátos.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Ha indirekt valamely $q$ nemnulla vektorra a $\{z + \lambda q : \lambda \geq 0\}$ félegyenes $R$-ben volna, akkor szükségképpen $Qq \leq 0$, azaz $q$ benne volna az iránykúpban.

**443.** $(2x_2 - x_1)c \leq 0, \ldots, (2x_t - x_{t-1})c \leq 0, cx_t = 1$-nek van megoldása. Korábban láttuk, hogy létezik erős bázismegoldás, és úgy áll elő, hogy a mátrix egy maximális nem szinguláris részmátrixát véve egyenlőséggel megoldjuk a megfelelő rendszert, majd a megoldást 0-ákkal egészítjük ki. A megoldás Cramer-szabály szerinti előállításában a feltételek miatt a nevező legalább 1, a számláló legfeljebb $2^n n!$ (durva becslés). Így $t \leq \log|cx_1| \leq \log(n2^n n!) = O(n \log n)$.

**444.** Van legalább két, $A^=$-től független sor, $a_i$ és $a_j$. Ekkor $\exists z : A^= z = 0$, $a_i z = -1$, $a_j z = 1$. Ez az irány jó lesz.

**450.** A mátrix rangja 2, $x_0$ pedig a rendszer utolsó két sorát egyenlőséggel teljesíti, melyek rangja szintén 2, így $x_0$ bázismegoldás.

## 5.5. Fourier-Motzkin elimináció

**453.** Csak az elsővel foglalkozunk részletesen. A Fourier-Motzkin elimináció lépései:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Mivel az utolsó rendszer nem oldható meg nincs megoldás. (A második rendszerre azt kapjuk, hogy $x_3$-at tetszőlegesen megválaszthatjuk, például $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ egy megoldás.)

**455.** Kezdetben $8\binom{n}{3}$ egyenlőtlenségünk van. Indukcióval: $p$ lépés után $n' = n - p$ darab változó marad, és szerepel az összes $2^p + 2$ tagú összeg, az összes lehetséges előjellel, így az egyenlőtlenségek száma legalább $2^{2^p+2} = 2^{n'}$.

**458.** Írjunk fel egy magasabb dimenziós poliédert $(x, z)$-vel (ahol $z = Ax$), majd vetítsük a megfelelő koordináták mentén.

**459.** A 452. feladat szerint az $\{x : Ax \le 0\}$ metszetkúp $x_1$ tengelymenti belső vetülete az $\{x : A^{[1]}x \le 0\}$ metszetkúp. Miután $A^{[1]}$ első oszlopa 0-vektor, a külső vetület nem más, mint az $\{x' : A'^{[1]}x' \le 0\}$ metszetkúp, ahol $A'^{[1]}$ jelöli az $A^{[1]}$-ből az első (azonosan nulla) oszlop elhagyásával keletkező mátrixot. Az $R = \{x' : Qx' \le b^{[1]}\}$ poliéder $x_1$ menti belső vetülete a 452. feladat alapján az $\{x' : Q^{[1]}x' \le b^{[1]}\}$ poliéder, míg a külső vetülete az $\{x' : Q'^{[1]}x' \le b^{[1]}\}$ poliéder, ahol $Q'^{[1]}$ az a mátrix, amely $Q'^{[1]}$ első (azonosan nulla) oszlopának elhagyásával keletkezik.

**460.** Tekintsük $\mathbb{R}^m$-ben az $A$ ($m \times n$-es) mátrix oszlopai által generált kúpot és az $A'$ ($m \times n'$-s) mátrix oszlopai által feszített politópot. Ezek összege a $C := \{z : z = Ax + A'x', (x, x') \ge 0, ex' = 1\}$ halmaz, ahol $e$ a csupa egyesből álló ($n'$ dimenziós) vektort jelöli.

Tekintsük most $\mathbb{R}^{m+n+n'}$-ben az $R := \{(z, x, x') : Ax + A'x' - Iz = 0, x \ge 0, x' \ge 0, ex' = 1\}$ poliédert. Ha $R$-nek vesszük a külső vetületét az $(x, x')$ komponenseinek megfelelő koordináták mentén, akkor (definíció szerint) azon $z$ vektorok halmazát kapjuk, melyekhez van olyan $(x, x')$, hogy $Ax + A'x' - Iz = 0, x \ge 0, x' \ge 0, ex' = 1$, azaz $z = Ax + A'x'$. Vagyis a külső vetület éppen $C$, és így a 459. feladat alapján $C$ valóban poliéder.

**461.** Mivel minden generált kúp metszetkúp, azaz véges sok homogén féltér metszete, így ha $b$ nincs a kúpban, akkor nincs benne ezen félterek valamelyikében. A második rész ugyanígy következik abból, hogy minden politóp poliéder, azaz véges sok féltér metszete.

**462.** a) Tegyük fel, hogy $G_A \supseteq M_B$ és lássuk be, hogy $M_A \subseteq G_B$. Ehhez legyen $z \in M_A$, vagyis ${}_ia z \le 0$ fennáll az $A$ minden sorára. Emiatt az $A$ sorainak bármely $q = \sum \lambda_i \; {}_ia$ $(\lambda_i \ge 0)$ nemnegatív kombinációjára $qz \le 0$, azaz

$$G_A \text{ minden } q \text{ elemére } qz \le 0. \tag{5.3}$$

Másrészt, ha indirekt $z$ nincs a $G_B$ generált kúpban, akkor a Farkas-lemma (461. feladat) szerint van olyan homogén féltér, amely tartalmazza $G_B$-t, de $z$-t nem. Vagyis létezik olyan $q$ vektor (a féltér határoló hipersíkjának normálisa), amelyre egyrészt $Bq \le 0$, azaz $q \in M_B \subseteq G_A$, másrészt $qz > 0$, ellentmondva (5.3)-nek. Tehát $M_A \subseteq G_B$.

b) Tegyük most fel, hogy $G_A \subseteq M_B$. Ekkor $G_A$ minden sorvektora $M_B$-ben van, azaz ${}_ia \; {}_jb \le 0$ fennáll az $A$ minden ${}_ia$ és a $B$ minden ${}_jb$ sorára. Emiatt minden $y \in G_B$ elemre is érvényes ${}_iay \le 0$ vagyis $y \in M_A$. Tehát $G_B \subseteq M_A$.

c) Az állítás igazolásához figyeljük meg, hogy az a) és b) részek összetevéséből kapjuk, hogy ha $G_A = M_B$, akkor $M_A = G_B$. Az $A$ és a $B$ szerepének felcseréléséből pedig adódik, hogy $G_B = M_A$, akkor $M_B = G_A$.

**463.** Az $A$ mátrix sorai által definiált $M_A$ metszetkúpról fogjuk kimutatni, hogy generált kúp. A 460. feladat szerint a $G_A$ generált kúp előáll metszetkúpként, azaz létezik egy olyan $B$ mátrix, amelyre $G_A = M_B$. A 462. feladat nyomán $M_A = G_B$, vagyis $M_A$ a $B$ sorai által generált kúp.

**471.** Ha $A$ az incidencia-mátrix, akkor a megengedett potenciálok az $\{x : Ax \leq c\}$ poliéder elemei. A rendszer megoldhatóságát a FM eliminációval tesztelve csak akkor akadunk el, ha találunk egy negatív összsúlyú körsétát, ekkor negatív kör is van.

## 5.6. Oldalak

**474.** Igen, pl. tekintsük

$$\mathrm{conv}\big(\{(0,0,0),(0,2,0),(2,2,0),(2,0,0),(3,1,1),(-1,1,1)\}\big)$$

vetületét az $xy$-síkra.

**475.** Az $n$-dimenziós kocka megfelelő lesz.

**477.** $(i)$-ből $(ii)$: $A_1x = b_1, A_2x \leq b_2$ esetén legyen $c := \mathbf{1}A_1$.

$(ii)$-ből $(i)$: $Ax \leq b, cx = c_0$ implicit egyenlőségeit kell egyenlőséggel megszorítani. Ha ez tartalmazna $x'$ pontot, amire $cx' < c_0$, akkor $cx = c_0$ esetén $x'' = x + \varepsilon(x - x')$ elég kis $\varepsilon$-ra a poliéderben van, és $cx'' > c_0$, ellentmondás.

**480.** Minden valódi egyenlőtlenséghez vehetünk egy pontot $R$-ben, ami azt szigorúan teljesíti. Ezen pontok súlypontja jó.

**481.** Világos, hogy a $Z_R$ affin altér tartalmazza a poliédert. Másrészt legyen $Z$ egy affin altér amire $Z_R \setminus Z \neq \emptyset$, és legyen $z \in Z_R \setminus Z$. A 480. feladat alapján van $x_0 \in R$, ami minden valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesít. Ha $x_0 \notin Z$, akkor $Z$ nem tartalmazza $R$-et. Ha $x_0 \in Z$, akkor elég kis $\varepsilon$-ra $x_0 + \varepsilon(z - x_0) \in R \setminus Z$, tehát $Z$ ekkor sem tartalmazza $R$-et.

A poliéder dimenziója $Z_R$ dimenziója, tehát $n - r(Q^=)$.

**483.** Tetszőleges $A_R$-re merőleges vektor $S_R$-ben van. Másrészt tetszőleges $s \in S_R$-re merőleges hipersík tartalmazza $A_R$-t, tehát a metszetük is, azaz $A_R$ része $S_R$ ortogonális kiegészítőjének. Ezekből együtt adódik, hogy $A_R$ az $S_R$ ortogonális kiegészítője. A b) rész következik a 481. feladatból.

**486.** Lásd 477. feladat.

**489.** $A := \binom{A_1}{A_2}$, ahol $A_1$ az implicit egyenlőségekhez tartozó oszlopokból álló mátrix. Ha ${}_ja$ $A_2$-beli, akkor a minimalitás miatt létezik $x_1$, hogy ${}_iax_1 \leq b_i$ minden $i \neq j$-re, és ${}_jax_1 > b_j$. Ha most $x_2 \in P, {}_jax_2 < b_j$ akkor $x_1$ és $x_2$ alkalmas konvex kombinációjára ${}_jax = b_j$, affin altérség miatt $x_1 \in P$.

**493.** Miután $qx \leq \beta$ valódi, létezik olyan $x' \in R$, amelyre $qx' < \beta$. Miután $qx \leq \beta$ lényeges, létezik olyan $x''$, amely az (5.7) rendszerből a $qx \leq \beta$ egyenlőtlenséget megsérti, de a többit mind kielégíti. Az $x'x''$ szakasz egyik vége $R$-ben van, másik nincs, így a szakasznak van olyan $z$ pontja, amely $R$-ben van és $qz = \beta$.

**494.** $(i)$-ből $(ii)$: Ekkor van $\{x : Ax = d\}$ alakú leírása. Az oldal fogalma nem függ a poliédert leíró rendszerétől, és mivel itt csak egyenlőségek szerepelnek, $R$-nek nem lehet valódi oldala.

$(ii)$-ből $(iii)$: Tegyük most fel, hogy (ii) teljesül. Ha indirekt (iii) nem állna, akkor az (5.7)+ban létezne egy $qx \leq \beta$ valódi, lényeges egyenlőtlenség. Ehhez $R$-nek van olyan $x'$ pontja, amelyre $qx' < \beta$, és a 493. feladat szerint olyan $z$ pontja is, amelyre $qz = \beta$. De ekkor $\{x \in R : qx = \beta$ valódi (nemüres) oldala lenne $R$-nek.

A $(iii)$-ból $(i)$ irány triviális.

**495.** Következik a 494. feladatból.

**496.** Minimális oldal az eltolási altér eltoltja.

**498.** Tegyük fel először, hogy $F = F'$. Miután $F$-nek a 480. feladat alapján van olyan eleme, amely minden valódi $F$-egyenlőtlenséget szigorúan teljesít, ezért a $Q'x \leq b'_1$ minden sora implicit $F$-egyenlőség, azaz $Q'$ része $Q^{=}_F$-nek. Ha indirekt $r(Q') < r(Q^{=}_F)$, akkor van olyan $x'$, amelyre $Q'x' = 0$, és a $Q^{=}_F$ valamely ${}_iq$ sorára ${}_iqx' < 0$. Ekkor kicsiny pozitív $\varepsilon$-ra és az $F'$ valamely $z$ elemére a $z + \varepsilon x'$ pont $F'$-ben van, de szigorúan teljesíti a ${}_iqx \leq b(i)$ egyenlőtlenséget, ellentmondásban ennek implicit $F$-egyenlőség voltával.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $Q'$ részmátrixa $Q^{=}_F$-nek és $r(Q') = r(Q^{=}_F)$. Mivel $F$ minden $z$ elemére $Q^{=}_F z = b^{=}_F$, így $Q'z = b'$ és ezért $F \subseteq F'$. Az $F' \subseteq F$ tartalmazás igazolásához legyen $x' \in F'$ és legyen $z \in F$. $r(Q') = r(Q^{=}_F)$ miatt az $Q^{=}_F$ tetszőleges ${}_iq$ sorához létezik $y$, amelyre ${}_iq = yQ'$. Ekkor ${}_iqx' = (yQ')x' = y(Q'x') = yb' = y(Q'z) = (yQ')z =_i qz = b(i)$, tehát $Q^{=}_F x' = b^{=}_F$, azaz $x' \in F$, és így $F' \subseteq F$.

**500.** Ha $u, v$ csúcsok, akkor $z := u - v$.

**501.** Feltesszük, hogy a poliéder $R = \{x : Qx \leq b\}$ alakban adott. Legyen $x_0$ a megadott pont. Ha már $x_i$ megvan: számoljuk ki a $Q^{=}_{x_i}$ mátrixot. Ha

$r(Q^{=}_{x_i}) = n$, akkor $x_i$ csúcs, tehát egész pont, hiszen a poliéder egész. Ha $r(Q^{=}_{x_i}) < n$, akkor legyen $z$ olyan vektort, ami merőleges $Q^{=}_{x_i}$ soraira. Keressük meg a legnagyobb abszolút értékű $\delta$ számot, amire $x_i + \delta z \in R$ (ez az abszolút érték pozitív, mert $z$ merőleges $Q^{=}_{x_i}$ soraira, és véges, mert $R$ nem tartalmaz egyenest). Legyen $x_{i+1} = x_i + \delta z$. Mivel $|\delta|$ maximális volt, egy újabb egyenlőtlenség teljesül egyenlőséggel, tehát $r(Q^{=}_{x_{i+1}}) > r(Q^{=}_{x_i})$.

# 6. fejezet

# Lineáris programozás

## 6.1. A Farkas-lemma alakjai

**503.** $\exists$ ilyen $(x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow \nexists (y_1, y_2)$ :

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 + y_2 & = & 0, \\ 4y_1 + 2y_2 & \geq & 0, \\ -3y_1 - 3y_2 & \geq & 0, \\ y_2 & \geq & 0, \\ -y_1 & < & 0. \end{array}$$

**505.**

a) 1. $\leftarrow$ 2. : $\begin{array}{rl} Ax & \leq b, \\ -Ax & \leq -b, \\ x & \geq 0 \end{array}$ 2. $\leftarrow$ 1. : $\begin{array}{rl} Ax + Iz & = b, \\ x, z & \geq 0 \end{array}$

b) 2. $\leftarrow$ 3. : $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ 3. $\leftarrow$ 2. : $\begin{pmatrix} A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, \; x, x' \geq 0$

c) 3. $\leftarrow$ 4. : $Ax \leq b$ 4. $\leftarrow$ 3. : $\begin{array}{rl} Ax & \leq a, \\ -Ax & \leq -a, \\ Bx & \leq b \end{array}$

**506.** Vegyünk egy $(A\ a)$ mátrixot, ahol $a$ az utolsó sor. A mátrix sorterében van ilyen vektor $\Leftrightarrow$ $\exists y : yA \geq 0,\ yb > 0 \Leftrightarrow \nexists x \geq 0 : Ax = -a \Leftrightarrow \nexists (x, z)$ : $Ax + az = 0,\ x \geq 0, z > 0 \Leftrightarrow$ a mátrix nullterében nincs ilyen vektor.

**508.** Duális bázismegoldás.

**509.** Konvex, zárt halmazokra nem igaz: síkon $H_1 = \{(x,y) : y \geq 2^x\}$ ill. $H_2 = \{(x,y) : y \leq 0\}$. Poliéderekre: Farkas-lemmából $\exists y_1, y_2 \geq 0 :$ $y_1A_1 + y_2A_2 = 0, y_1b_1 + y_2b_2 < 0$. $y_1b_1 < \alpha < \beta < -y_2b_2, c := y_1A_1 = -y_2A_2$.

**510.** Síkon: tegyük fel, hogy $P$ és $Q$ két olyan poligon, amiknek oldalegyenesei nem választják el őket. Ekkor a két poligont határoló $P_i$ és $Q_j$ félsíkok közül három metszete nem üres: mert vagy az egyik poligonhoz tartoznak, vagy pl. $P_1 \cap Q_1 \cap Q_2$, ami azért nem üres, mert a $P_1$ határoló egyenese nem választja el a két poligont. Így alkalmazhatjuk Helly tételét, ami alapján a két poligon metszi egymást.

Három dimenziótól nem igaz: két, élével merőlegesen egymás felé fordított véső.

**511.** A Farkas-lemma alapján pontosan akkor nincs ilyen $x$, ha

$$\begin{aligned} \exists(y,u,v):\ yA - u + v &= 0, \\ yb - uf + vg &< 0, \\ y,u,v &\geq 0. \end{aligned}$$

$u_i$-t és $v_i$-t ugyanannyival csökkentve (amíg nemnegatívak) megoldás marad, így ez ekvivalens azzal, hogy olyan megoldás létezik, aminél minden $i$-re $u_i$ és $v_i$ valamelyike 0. Ekkor

$$u_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } ya_i \leq 0 \\ ya_i, & \text{ha } ya_i > 0 \end{cases}, \text{ és}$$

$$v_i = \begin{cases} 0, & \text{ha } ya_i \geq 0 \\ ya_i, & \text{ha } ya_i < 0 \end{cases},$$

a másik feltétel alapján pedig az állításban szereplő egyenlőtlenséget kapjuk.

**512.** Lineáris $\Rightarrow$ logikai: $ax = yAx \leq yb \leq \beta$.

Logikai $\Rightarrow$ lineáris: tegyük fel, hogy nem lineáris következmény, vagyis $\nexists y \geq 0 : yA = a,\ yb \leq \beta$. A Farkas-lemma alapján $\exists(z,t) : t \geq 0, Az + bt \geq 0, az + \beta t < 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $\exists x : Ax \leq b, ax > \beta$.

**514.** $Ax \leq b \implies -_1ax \leq -b_1$, lásd 512. feladat.

## 6.2. Lineáris programok, szimplex módszer

### 6.2.1. Bázistranszformációk, bázistáblák

**523.** Jelöljük $A$ oszlopait $a_1, \ldots, a_n$-nel, tekintsük az $a_1, \ldots, a_n, e_1, \ldots, e_n$ vektorrendszert az $e_1, \ldots, e_n$ kiinduló bázissal, majd pivotáljunk be minél több $a_i$-t a bázisba!

**524.** jelöljük $A$ oszlopait $a_1, \ldots, a_n$-nel, tekintsük az $a_1, \ldots, a_n, b, e_1, \ldots, e_n$ vektorrendszert az $e_1, \ldots, e_n$ kiinduló bázissal, majd pivotáljunk be minél több $a_i$-t a bázisba!

### 6.2.2. Végesség, elméleti kérdések

**529.** Segítség: Tekintsük azt a feladatot, hogy a síkon néhány pont konvex burkában benne van-e egy másik!

**530.** $y := \frac{x}{dx+d_0} \geq 0, y_0 := \frac{1}{dx+d_0} > 0$. Ekkor a feladat ekvivalens a következővel: $Ay - by_0 = 0, dy + d_0 y_0 = 1, y, y_0 \geq 0, \max cy + c_0$. Ha itt $y_0 = 0$, akkor $Ay = 0, dy = 1, y \geq 0$ miatt $y$ végtelen iránya a poliédernek.

**532.** 531-ből.

**534.** Legyen $b'_r = b_r + \delta$. Ekkor

- $\bar{c}$ nem változik, ezért $B$ duál megengedett marad.
- $\bar{b}' = B^{-1}b'$, tehát $\bar{b}'_i = B^{-1}_{i.}b' = \bar{b}_i + \delta B^{-1}_{ir}$.

Ez alapján:

$$\bar{b}' \geq 0 \Leftrightarrow \max\{-\frac{\bar{b}_i}{B^{-1}_{ir}} : \bar{b}_i > 0\} \leq \delta \leq \min\{-\frac{\bar{b}_i}{B^{-1}_{ir}} : \bar{b}_i < 0\}.$$

Nézzük meg, hogyan változik a célfüggvényérték a fenti változtatás során, ha $B$ optimális bázis marad:

$$\bar{y}b' = \bar{y}b + \delta\bar{y}_r.$$

## 6.3. Dualitás-tétel

**544.** a) Duális poliéder grafikusan, $(3; 2)$ optimális duális megoldás.

**546.** $i$ lényegtelen $\Leftrightarrow \max\{x_i : Ax = b, x \geq 0\}$ optimuma $0 \Leftrightarrow \min\{yb : yA \geq 0, ya_i \geq 1\}$ optimuma $0 \Leftrightarrow \exists y : yA \geq 0, yb = 0, ya_i > 0$.

**547.** Igen, pl. $A = (0),\ b = -1,\ c = 1$.

**548.** Nem. Primál korlátos $\iff \nexists x \geq 0 : Ax \leq 0, \mathbf{1}x > 0 \iff \exists y \geq 0 : yA \geq \mathbf{1} \implies$ duál nem korlátos.

**549.** Farkas-lemma.

**553.** $Ax = b, x \geq 0, \max 0x$ ill. $yA \geq 0, \min yb$.

**554.** $y = (y_1, y_2)$ optimális duális megoldás, legyen $c_i := y_i A$.

**555.** A gráfos algoritmusokhoz hasonlóan. Egy $c_1$-re vett duális optimumhoz tartozó sorokat egyenlőséggé szigorítva keressünk optimumot $c_2$-re.

**556.**

$$\min_{x \in \mathcal{O}_A} \max_i x_i = \min \alpha : \begin{matrix} x \geq 0, \\ \mathbf{1}x = 1, \\ \mathbf{1}\alpha - Ax \geq 0 \end{matrix} = \max \beta : \begin{matrix} y \geq 0, \\ y\mathbf{1} = 1, \\ -yA + \beta\mathbf{1} \leq 0 \end{matrix} = \max_{y \in \mathcal{S}_A} \min_j y_j.$$

**557.** c) $y_0$ duál-optimális, $c' := c - y_0 A$. d) $A = (1\ 1)$, $b = (0)$, $\forall c \in \mathbb{R}^2$ neutrális. e) $\supseteq$ triviális, a másik irányhoz $\exists x^{(i)} \in P$, hogy $x_i^{(i)} > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. $x_0 := \frac{1}{k}(x^{(1)} + \ldots + x^{(k)})$-hoz tartozik $y_0$ duális optimális megoldás. Ekkor $c_i = (y_0 A)_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

## 6.4. Szigorú egyenlőtlenségek

**559.** Lásd 552. és 563. Legyen $C = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A^T & 0 & c \\ b^T & -c^T & 0 \end{pmatrix}$.

**560.** (ii) $\to$ (i) triviális, (i) $\to$ (ii) adódik $z$ és $x$ megfelelő konvex kombinációjából.

**561.** Előbbi ekvivalens azzal, hogy $\exists x : Ax \leq -\mathbf{1}$, innen Farkas-lemmából adódik.

**562.** $\exists c \nexists y : yA = c, y \geq 0 \iff \exists c \exists x : Ax \leq 0, cx > 0 \iff \exists x : Ax \leq 0, x \neq 0$.

**563.** a) Farkas-lemma. b) Vegyünk minden $i$ koordinátához egy $x^{(i)}$-t a) alapján, és legyen $x := \sum x^{(i)}$.

**564.** Az 563. mintájára.

**565.** Pl. a) $\exists x : Ax \ll 0 \iff \exists x : Ax \leq -\mathbf{1} \iff \nexists y \geq 0 : yA = 0, y(-\mathbf{1}) < 0 \iff \nexists y \neq 0, y \geq 0, yA = 0$.

**569.** Lásd 565. d) és 397.

**570.** Homogenizálással, pl. a) $\exists x \iff \exists x', \lambda : Ax' - \lambda b = 0, x' \geq \mathbf{1}, \lambda \geq 1$.

**571.** 1. Homogenizálás. 2. $Ax = b, x \geq 0, \max e_1 x$, dualitás-tétel.

## 6.5. Algoritmikus visszavezetések

**575.** Gauss-elimináció a korlátozó mátrix soraira, hogy $P$ bal felső sarka egy egységmátrix legyen, másutt 0.

**577.** Lásd 552. feladat.

**578.** Egymás után hagyjunk ki oszlopokat, hogy a maradéknak még mindig legyen megoldása. Végül bázismegoldáshoz jutunk.

**579.** $P_2$ oldalai a célfüggvények.

**580.** $\exists x' : A'x' \leq b' \iff \min\{b'y' : y'A' \geq 0, y' \geq 0\} < 0$, ami eldönthető az orákulummal.

**582.** $A_1$ végére az oszlopok összegének ellentettjét írjuk.

**583.** $Ax \leq b$-hez $yA = 0, y \geq 0, yb \geq 0$, az utolsó redundáns-e, $y = 0$ megoldás mellett.

## 6.6. Duál szimplex módszer

# 7. fejezet

# Teljesen unimoduláris mátrixok

**589.** Ha $A = 0$ akkor TU. Ha pedig $A \neq 0$, tartalmaz nemnulla $a$ elemet, de ekkor az $\begin{pmatrix} A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$ mátrixnak része $\begin{pmatrix} a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$ ami nem TU.

**590.** Tekintsük $\begin{pmatrix} -A & A \\ A & -A \end{pmatrix}$ egy $B$ négyzetes részmátrixát. Ha $B$ részmátrixa $A$ vagy $-A$ valamelyikének, akkor determinánsa 0 vagy $\pm 1$ lesz. Különben $B$-nek van két sora vagy két oszlopa melyek összege a nullvektor, tehát determinánsa 0.

**591.** Tekintsünk egy $B = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ alakú négyzetes részmátrixot - másfajta részmátrixok determinánsáról már tudjuk, hogy 0 vagy $\pm 1$. Ha $A'$ és $A''$ nem négyzetes, akkor $B$ szinguláris; különben $det(B) = \det(A') \det(A'')$, így ezekben az esetekben is teljesül, hogy a részmátrix determinánsa 0 vagy $\pm 1$.

**592.** $(A, I)$, $(A, -A)$ TU-mátrixok, $(A, B)$ nem feltétlenül.

**593.** Elég csak az $(A, A)$ és $(A, I)$ mátrixokkal foglalkozni. Az $(A, A)$ tetszőleges részmátrixa vagy egyenlő $A$ egy részmátrixával, vagy van benne két azonos oszlop. Az első esetben $A$ TU-ságából következik, hogy a determináns 0 vagy $\pm$, a második esetben a determináns 0 lesz. Az $(A, I)$ tetszőleges részmátrixában vagy van az $I$ egy oszlopa, vagy már az $A$-nak is részmátrixa. Az első esetben elhagyunk az $I$-beli 1-es számhoz tartozó sort és oszlopot, és indukciót alkalmazunk, illetve ha nincs 1-es szám, akkor van egy csupa 0 oszlop, amikor a determináns értéke 0.

**594.** a) hálózati mátrix, így egyúttal TU is (Tekintsünk egy páros gráfot az $U$ és $V$ ponthalmazok között. A hálózat konstrukciójához vezessünk be még egy $p$ pontot, és legyen az $F$ fa élei legyenek az $up$, $qv$ élek (ahol $u \in U, v \in V$), ezzel az irányítással. A páros gráf éleihez így a fagráf két megfelelő éle fog tartozni.), b) nem TU, c) hálózati mátrix, így egyúttal TU is. (Egy irányított utat tekintünk az $F$ fának.)

**595.** Legyen a páros gráf $G = (S, T; E)$. Egészítsük ki a gráfot két új ponttal, jelölje ezeket $s$ és $t$. Minden $v \in S$ pontba vezessünk egy irányított élt $s$-ből, $G$ minden élét irányítsuk meg $T$ felé, és minden $v \in T$ pontból menjen egy irányított él $t$-be. Végül adjuk hozzá a $ts$ irányított élet. Ebben az irányított gráfban az $s$ és $t$ pontokra illeszkedő élek egy irányított fát határoznak meg, és az ehhez a fához tartozó hálózati mátrix épp az incidencia-mátrix egy csupa 1-es sorral való kiegészítése.

**596.** A TU-sághoz a következőket gondoljuk végig. Ha elhagyjuk az utolsó négy oszlop bármelyikét, akkor hálózati mátrixot kapunk – könnyen ellenőrizhető, hogy az 5 hosszú úttal, illetve annak 3 hosszú részútjaival reprezentálható. Ezt a mátrix transzponáltjára is alkalmazhatjuk, így már csak a teljes mátrix, és a jobb alsó $4 \times 4$-es részmátrix determinánsa hiányzik - melyeket pedig kézzel ellenőrizhetünk, mindkettőnek 0 a determinánsa.

Indirekt tegyük fel, hogy a mátrix hálózati. Ekkor – mivel van benne egy csupa 1-es oszlop – a reprezentáló fa egy 5 hosszú út kell legyen. A többi oszlopnak 3-hosszú részutaknak kellene megfelelniük, viszont ebből csak 3 különböző van, így sehogyan sem lehet a maradék 4 oszlopot részutaknak megfeleltetni.

**598.** Konstukcióhoz: $G$-hez tartozó hálózati mátrix transzponáltja is hálózati $\iff$ $G$ síkbarajzolható.

**601.** $\frac{x_1+x_2}{2}$ $\mathbf{1}$ és $3 \cdot \mathbf{1}$ közti megoldás. Emiatt létezik egész ilyen megoldás is, mert TU a rendszer.

**603.** Vegyük az $\{x : Ax \le b,\ \lfloor x_0 \rfloor \le x \le \lceil x_0 \rceil\}$ poliédert, aminek $x_0$ eleme. A leíró mátrixa TU, tehát a csúcsai egészek, vagyis $x_0$ kerekítései, például a $cx$-et maximalizáló csúcs is.

**608.** A TU mátrixok oszlopainak egyenletes színezéséről szóló tétel alapján az oszlopokat 2 részre tudjuk osztani úgy, hogy minden sorban a 2 részbe eső elemek összege ugyanannyi (mert a sorok összege páros). Mivel minden oszlopban is páros az összeg, így az első részbe eső oszlopok elemeinek összege páros, az egész mátrix elemeinek összege pedig kétszer ennyi.

**610.** $P = \text{conv}\{(0{,}0{,}0), (1{,}0{,}0), (0{,}1{,}0), (1{,}1{,}2)\}$, $k = 2$, $z = (1{,}1{,}1)$.

**613.** A felhasználható állítás szerint ha egy hipergráfnak több mint $\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$ különböző éle van, akkor kiválasztható az alaphalmazának egy háromelemű része, hogy erre megszorítva a $2^3$ élből álló teljes hipergráfot kapjuk. Az incidencia-mátrixban így kapott részmátrix tartalmazza a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot, ami nem TU.

**614.** Legyen az alaphalmaz egy $n$-élű út. Az összes részút (az egypontú úttal együtt) TU, mert hálózati mátrix. Ennek $\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}$ különböző sora van, hisz rendre ennyi a legalább 2 hosszú utak, az 1 élű utak, és az üres utak száma.

# 8. fejezet

# Lineáris programozás és TU-ság alkalmazásai

## 8.1. Geometriai feladatok

**615.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times t}$ az a mátrix, aminek $i$-edik oszlopa $a_i$ egy 1-essel kiegészítve az utolsó koordinátában. A feltétel miatt az $Ax = \binom{z}{1}$ rendszernek van nemnegatív megoldása. Ekkor van bázismegoldása is (lásd a 422. feladat), ami a definíció miatt olyan konvex kombinácót ad, amiben legfeljebb $n+1$ nemnulla együttható van.

**616.** Nem választhatóak szét $\iff$ a piros ill. kék pontok konvex burkának metszete nem üres, tehát a megfelelő rendszer megoldható. Innentől a 615. feladathoz hasonlóan fejezhető be a megoldás.

**617.** Lásd a 616. feladat.

**618.** a) Tegyük fel, hogy üres a metszetük, vagyis a leíró rendszereik együttes rendszerének nincs megoldása. Ekkor van duális bázismegoldás, ami legfeljebb $n+1$ nemnulla elemet tartalmaz (lásd 423. b) feladat). Ekkor viszont a megfelefő $\leq n+1$ poliéder metszete is üres. b) A halmazokat leszűkíthetjük poliéderekké úgy, hogy kiválasztunk minden legfeljebb $n+1$-es metszetből egy-egy pontot.

**619.** Helly tétellel (618. feladat).

**620.** Legyen $A$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oszlopokból álló mátrix.

$$\begin{gathered}\min \mu : \\ x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}_+^k, \mu \in \mathbb{R}_+, \\ x = A\lambda, \\ x = p + \mu c,\end{gathered}$$

## 8.2. Modellezés LP feladattal

**621.** Használjuk azt, hogy $x_i = x_i^+ - x_i^-$, $|x_i| = x_i^+ + x_i^-$, ahol $x_i^+$ ill. $x_i^-$ az $x_i$ pozitív ill. negatív része.

**622.** $\min z \in \mathbb{R} : \ Ax = b, x \geq 0, z \geq c_i x \ (i \in [k])$.

**623.** Használjuk a 621. és a 622. feladatokat.

**624.** Legyen $e_i$ és $v_i$ az eladási és a vételár az $i$-edik hónapban. A változók: $x_i^v$ (mennyit veszünk az $i$-edik hónapban), $x_i^e$ (mennyit adunk el) és $x_i^t$ (mennyit tárolunk).

$$\begin{aligned} &\max \sum_{i=1}^{n} (e_i x_i^e - v_i x_i^v - 100 x_i^t) : \\ x_i^v,\ x_i^e,\ &x_i^t \geq 0 \quad \forall i \in [n], \\ &x_i^t \leq 100 \quad \forall i \in [n], \\ &x_i^t = 50 + \sum_{j=1}^{i} (x_j^v - x_j^e) \quad \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

**626.** Optimális megoldás: a kétgyémántos ékszerből készítünk 10-et.

**627.** Optimális megoldás: mindhárom fajta csomagból 5.

## 8.3. Gráfok

**630.** Egy feszítőfa független oszlopokat ad, így a rang $\geq n-1$. De a sorok alkalmas előjeles összege 0, tehát nem teljes sorrangú, ebből rang $= n-1$.

**631.** A Cauchy-Binet-formula (355. feladat) alapján

$$\det A_0 A_0^\mathsf{T} = \sum_{F\subseteq E, |F|=n-1} \det A_F \cdot \det A_F^\mathsf{T},$$

ahol $F \subseteq E$-re $A_F$ az $A_0$ mátrix $F$-hez tartozó soraiból álló mátrix. Másrészt

$$\det A_F = \begin{cases} 0, & \text{ha } F \text{ nem feszítőfa,} \\ \pm 1, & \text{ha } F \text{ feszítőfa} \end{cases}$$

(lásd 629; az elhagyott sor lineárisan függ a többitől).

**632.** A 631. feladat szerint $K_n$ feszítőfáinak száma $\det A_0 A_0^\mathsf{T}$, ahol $A_0$ a $K_n$ egy irányításának incidencia-mátrixa, egy sort lehagyva. Ekkor

$$A_0 A_0^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Ennek a determinánsa a 326. feladat alapján $(n-1-(-1))^{n-1-1} \cdot (n-1+(n-1-1)\cdot(-1)) = n^{n-2}$.

**633.** Legyen $G = (V, E)$ egy páros gráf, és $A$ az incidencia-mátrixa. Nézzük az $Ax = \mathbf{1}, x \geq 0$ rendszert. Mivel $A$ TU (lásd 594.), így a Farkas-lemma alábbi egész erősítése is fennáll: $\exists x \in \mathbb{Z}^E : Ax = \mathbf{1}, x \geq 0 \iff \nexists y \in \{0,1,-1\}^V : yA \geq 0, y\mathbf{1} < 0$. Egy primál megoldás egy teljes párosítás. Egy $y$ duál megoldásnál pedig valamelyik színosztályban a -1-es csúcsokat véve a Hall-feltételt megsértő halmazt kapunk.

**634.** Farkas-lemma az $Ax = \mathbf{1},\ x \geq 0$ rendszerre, ahol $A$ a $G$ adjacenciamátrixa.

**636.** A minimum egyenlő a $\sum_{v\in V} y_v$ maximumával, ahol $y : V \to \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $uv$ élre $y_u + y_v \leq 1$. (Elnevezéseik: minimális frakcionális lefogó élhalmaz, illetve maximális frakcionális független ponthalmaz.)

**637.** Legyen $A$ a páros gráf pont-él incidencia-mátrixa, ami az 594. feladat miatt TU. Használjuk a TU-mátrixokra vonatkozó dualitás-tételt. a) Emiatt a $\max \mathbf{1}x : Ax \leq \mathbf{1}, x \geq 0$ lineáris programnak és a duálisának ($\min y\mathbf{1} : yA \geq \mathbf{1}, y \geq 0$) is van egész megoldása. A primál optimum pont a maximális párosítás elemszáma, a duál pedig a lefogó pontok minimális száma. b) Hasonlóan, a $\max cx : Ax = 1, x \geq 0$ LP-nek is van egész optimális megoldása és ha a $c$ egész, akkor a duális $\min y\mathbf{1} : yA \geq c$ LP-nek is. Ez éppen Egerváry tételét adja.

**638.** Használjuk a Farkas-lemmát. Akkor és csak akkor, ha nem lehet $V$-t két ($A$ és $B$) részre partícionálni úgy, hogy $|A| \neq |B|$ és $G$ páros gráf $A$ és $B$ között.

**639.** Akkor és csak akkor, ha nem létezik egy $X \subseteq V$ független ponthalmaz, melyre $|N(X)| < |X|$. Belátható, hogy létezik $0-1$ duál megoldás.

**640.** Nyilván elég 0-1 vektorokat nézni. Tekintsük az $Ax = \mathbf{1}$ rendszert $\mathbb{F}_2$ felett, ahol $A$ a gráf incidencia-mátrixa, ennek megoldásai a feladatban szereplő vektorok közül a 0-1 vektorok. A Fredholm alternatíva tétel szerint pontosan akkor nincs megoldás, ha van olyan $y$, melyre $yA = 0$ és $y\mathbf{1} \neq 0$. Egy $y$ pedig pont egy olyan ponthalmazt incidencia-vektora, ami páratlan elemszámú és minden élnek 0 vagy 2 végpontja van benne.

**641.** Keressük először $\min \mathbf{1}y : yA \geq c$ optimális megoldását, ez csak az egyik osztályban vehet fel negatív értéket. Legyen $\Delta$ a legnegatívabb komponense. A negatív elemeket tartalmazó osztályon növeljünk, a másikon csökkentsünk $|\Delta|$-kel.

**642.** Használjuk a TU-mátrixokra vonatkozó dualitás-tételt a $\min \mathbf{1}x : Ax \geq \mathbf{1}, x \geq 0$ rendszerre, ahol $A$ a páros gráf pont-él incidencia-mátrixa. Pontosan akkor megoldható a rendszer, ha nincs izolált pont.

**644.** a) Az 594. feladat miatt $P$ csúcsai egészek. b) $P$ affin burka éppen $H = \{x : Ax = \mathbf{1}\}$ (pl. 557. e) miatt). $H$ kodimenziója (vagyis a tér dimenziója - $H$ dimenziója) $\mathrm{codim} H = r(A) = 2n - 1$ (lásd 629.). Tehát $\dim P = n^2 - \mathrm{codim} H = (n-1)^2$.

**647.** Használjuk a TU-mátrixok egyenletes színezhetőségét a páros gráf incidencia-mátrixára.

**648.** TU-mátrixok egyenletes színezhetőségét szeretnénk használni; ehhez az kell, hogy egy páros gráf incidencia-mátrixa egy csupa 1-es sorral kiegészítve is TU marad, ami következik az 595. feladatból.

**649.** A gráf éleit a 647. feladatnak megfelelően $\delta$ színnel színezve a színosztályok egy-egy lefogó élhalmazt definiálnak.

**650.** Használjuk a TU-mátrixok egyenletes színezhetőségét az irányított gráf $(0, \pm 1$-es) incidencia-mátrixára.

## 8.4. Áramok, folyamok

**651.** Legyen $A$ a $G$ incidencia-mátrixa.

a) Metszetkúpként $C = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ Ax = 0\}$ (vagy $Ax \geq 0$ is elég). Mivel a leíró mátrix TU, így a kúpot generálják a 0-1 elemei, ezek közül pedig elég a $G$ irányított köreinek indikátor vektorait venni.

b) Poliéderként $P = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,\ Ax = 0,\ \sum_{e \in E} x(e) = 1\}$. Mivel $P$ a $C$ és a $\{x \in \mathbb{R}^E : \sum_{e \in E} x(e) = 1\}$ hipersík metszete, így a) alapján $P$ az $\frac{1}{|O|} \cdot \chi_O$ alakú vektorok konvex burka, ahol $O$ irányított kör.

**653.** 594. miatt a leíró mátrix TU.

**655.** Legyen $P$ a megengedett áramok poliédere. A minimális $c$-költségű áramok $P$ egy oldalát alkotják, tehát azt kell belátni, hogy $P$ egy oldala szintén árampoliéder, ugyanazon a gráfon, más kapacitásokkal. Ez igaz, hiszen $P$ egy oldala előáll $\{xinP : x_e = f'_e(e \in B_1), x_e = g'_e(e \in B_2)\}$ alakban, valamely $B1, B_2 \subseteq A$ élhalmazokra és $f'_e$ $(einB_1)$ illetve $g'_e$ $(e \in B_2)$ számokra.

**656.** Lásd a 449. és a 629. feladatokat.

**657.** Ötlet: $(x, Ax)$ áram.

**658.** (i) $\Rightarrow$ (ii): nyilván, hiszen ha lenne egy $O$ irányított kör $D'$-ben, amire $c'(O) < 0$, akkor egy tetszőleges $x^*$ megengedett áramot $O$ előre élein egy $\delta > 0$ számmal növelve, a hátra élein $\delta$-val csökkentve szintén megengedett áramot kapunk, míg célfüggvény értéke csökkent.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): a 126. feladat alapján létezik megengedett potenciál a $c'$ konzervatív súlyfüggvényre, ez pont egy ilyen $\pi$ függvényt jelent.

(iii) $\Rightarrow$ (i): egy ilyen $\pi$ függvény segítségével tudunk adni alsó korlátot $cx$-re élenként.

## 8.5. Egyéb kombinatorikai alkalmazások

**660.** Vegyünk minden „atomból” (a részintervallumok, amikre $I_1, \ldots, I_k$ végpontjai felosztják $I$-t) egy-egy pontot, és vegyük az intervallumrendszer incidencia-mátrixát ezen a véges ponthalmazon, legyen ez $A$. 594. c) miatt $A$ TU, így a dualitás-tétel TU-s változatából következik, hogy a maximum ugyanannyi, mint a minimális számú pont, amivel le lehet fogni az összes intervallumot.

**661.** Haladjunk végig balról jobbra az intervallumon, és vegyük az első olyan pontot, ahol végetér egy intervallum. Ezt a pontot vegyük be a lefogó pontjaink közé, az intervallumot pedig a diszjunkt intervallumok közé. Hagyjuk el azokat az intervallumokat, amiket a pont lefog, és a maradékon folytassuk ugyanígy.

**662.** A 660. feladathoz hasonlóan; ugyanannyi, mint az olyan pontok maximális száma, amik közül semelyik kettő sincs egy $I_j$ intervallumban.

**663.** Üres rendszerből indulva, ha már valameddig megvan, vegyük azt, ami a még fedetlen intervallum elején kezdődik, s ezek közül a lehető legjobbra megy. Az algoritmus helyességét igazolhatjuk a következő módokon. 1. biz.: indirekt, ha ez nem jó, vegyünk egy olyan optimálisat, ami az elejéről kezdve a lehető legtovább megegyezik ezzel, és javítsuk az optimálisat. 2. biz.: útközben egy duál megoldást is készítünk: minden kiválasztott intervallumnál vegyünk egy pontot az eddig fedetlen rész első atomjából. Mivel a kiválasztott fedő intervallumok száma és a kiválasztott „független” pontok száma megegyezik, a dualitás-tétel (könnyű iránya) miatt mindkettő optimális.

## 8.6. Hálózati szimplex módszer

**666.** $r(A) = |V_1| + |V_2| - 1$. Bázis: feszítő fa. Egy $F$ feszítő fa primál megengedett, ha van teljes párosítása.

**667.** Nem feltétlenül; de ha nincs, akkor vannak olyan élek, amiken minden megengedett megoldásban 0 a folyam.

**668.** Tegyük fel, hogy az $e$ él kerül be a bázisba, és $C$ a keletkező kör. Legyen $v$ a $C$ kör $v_0$-hoz legközelebbi pontja. A szóba jöhető kilépő élek közül válasszuk azt, amelyik $v$-től $e$ irányába indulva utolsó a $C$ körön.

# 9. fejezet

# Egészértékű programozás

## 9.1. IP felírás és vágások

**671.** Duális: $\min\{\sum_{e\in E} y_e : y \geq 0,\ d_y(v) \geq 1\ \forall v \in V\}$ (ez a lefogó élek minimális számának frakcionális változata).

**672.** Duális: $\min\{\sum_{v\in V} y_v : y \geq 0,\ y_u + y_v \geq 1\ \forall uv \in E\}$ (ez a lefogó pontok minimális számának frakcionális változata).

**673.** Feltehető, hogy egy hiperél csak egyszer szerepel. A duális feladat: $\max\{\sum_{s\in S} y_s : y \geq 0,\ \sum_{s\in Z} y_s \leq 1\ \forall Z \in \mathcal{H}\}$.

**674.** Itt nem tehető fel, hogy egy halmaz csak egyszer szerepel. Legyen $\mathcal{H}_1$ az 1 multiplicitású halmazok rendszere. Ha $Z \in \mathcal{H}_1$, akkor az LP relaxációban szerepel az $x_Z \leq 1$ egyenlőtlenség, tehát a duálisban lesz egy ennek megfelelő $\nu_Z$ változó. A duális így a következő: $\max\{\sum_{s\in S} y_s - \sum_{Z\in\mathcal{H}_1} \nu_Z : y, \nu \geq 0,\ -\nu_Z + \sum_{s\in Z} y_s \leq 1\ \forall Z \in \mathcal{H}_1,\ \sum_{s\in Z} y_s \leq 1\ \forall Z \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_1\}$.

**675.** Feltehető, hogy egy halmaz csak egyszer szerepel. A duális feladat: $\min\{\sum_{s\in S} y_s : y \geq 0,\ \sum_{s\in Z} y_s \geq 1\ \forall Z \in \mathcal{H}\}$.

**676.** $\max\{cBz :\ ABz \leq b,\ z \in \mathbb{Z}^k\}$, ahol $B$ a $g_1, \dots, g_k$ oszlopokból álló mátrix. Tehát lényegében $x = Bz$ behelyettesítést végzünk.

**677.** Ötlet: használjuk azt a feltételt, hogy $d_x(U) \geq 2$ minden nemüres $U \subsetneq V$ csúcshalmazra.

**678.** Tipp: válasszunk egy tetszőleges kiindulási pontot, és használjunk külön változókat minden $i \in \{1, \dots, |V|\}$-re arra, hogy egy él a kör $i$-edik éle-e.

**679.** Vezessünk be bináris változókat arra, hogy egy csúcsot meglátogatunk-e. Ezekkel írjuk fel feltételként, hogy a meglátogatott csúcsok foka 2, és minden, az 1-es csúcsot nem tartalmazó $U$ csúcshalmaz vagy nem tartalmaz meglátogatott csúcsot, vagy $d_x(U) \geq 2$. Így a következő rendszert kapjuk (a csúcshalmaz $V = \{v_1, \dots, v_n\}$):

$$\begin{aligned}
\max \sum_{i=1}^{n} p_i y_i - &\sum_{0 \leq i < j \leq n} c_{ij} x_{ij} \\
x &\in \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \\
y &\in \{0,1\}^n \\
d_x(v_i) &= 2y_i \quad (i = 1, \dots, n) \\
d_x(U) &\geq 2y_i \quad \forall U \subseteq V - v_1,\ \forall v_i \in U.
\end{aligned}$$

**680.** Használjunk bináris változót, ami csak akkor lehet 1, ha $x$ benne van $P^i$-ben. Mivel a poliéderek korlátosak, létezik egy olyan $K$ szám, hogy minden poliéderbeli pont minden koordinátája $-K$ és $K$ között van. Jelölje $a_{\max}$ a legnagyobb abszolút értéket, ami az $A^i$ mátrixokban előfordul, és legyen $L = nKa_{\max}$. Vegyük észre, hogy tetszőleges $i$-re és tetszőleges $-K$ és $K$ közti $x$-re $A^i x \leq L$. Ennek segítségével már felírhatjuk a rendszert.

$$\begin{aligned}
\max \quad & cx \\
x &\in \mathbb{R}^n \\
y &\in \{0,1\}^k \\
-K \leq x_j &\leq K \quad (j = 1, \dots, n) \\
\sum_{i=1}^{k} y_i &\geq 1 \\
A^i x &\leq y_i b^i + (1 - y_i)L \quad (i = 1, \dots, k).
\end{aligned}$$

**681.** Tipp: használjunk bináris változókat annak kijelölésére, hogy $x_j$ melyik szakaszon van.

**682.** Vezessünk be $x_{ij}$ bináris változókat arra, hogy a $j$ munkát az $i$ gépen végezzük-e. Ezen túl használjunk $z_{jj'}$ bináris változót annak kifejezésére, hogy a $j$ munkát nem kezdjük később mint a $j'$ munkát. Ezekkel a segédváltozókkal felírhatók a feltételek. Legyen $t$ a legnagyobb $t_j$ érték.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & u \\
x &\in \{0,1\}^{m\times n} \\
y &\in \mathbb{Z}^n \\
z &\in \{0,1\}^{n\times n} \\
u &\in \mathbb{Z} \\
y_j &\geq s_j \quad (j = 1,\ldots,n) \\
y_j &\leq t_j - a_j \quad (j = 1,\ldots,n) \\
u &\geq y_j + a_j \quad (j = 1,\ldots,n) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= 1 \quad (j = 1,\ldots,n) \\
z_{jj'} &= 1 - z_{j'j} \quad (j \neq j') \\
y_j &\leq y'_j + t z_{j'j} \quad (j \neq j') \\
y_j &\leq y'_j - a_j + t(3 - x_{ij} - x_{ij'} - z_{jj'}) \quad (i = 1,\ldots,m,\ j \neq j').
\end{aligned}
$$

**683.** Használjunk bináris segédváltozókat az olyan típusú feltételek felírására, hogy egy adott gépen vagy a $j$ munka előzi meg a $j'$ munkát, vagy fordítva. Egyszerűsítés: bizonyítható, hogy van olyan optimális megoldás, ahol mindhárom gépen ugyanolyan sorrendben végezzük a munkákat.

**686.** Optimumérték: 11. Ha az $x_8, x_9, \ldots, x_{49}$ változókra követelünk egészértékűséget: 2,1776. LP optimum: 0. LP relaxált optimumértéke, ha a célfüggvényt $x_1 + x_6 + x_8 + x_{52} + x_{53}$-ra módosítjuk: 1,006.

**687.** A példában hármat kell fordulni a teherautóval.

**688.** Minden ágban, ahol van rögzítetlen változó $x_{n+1}$-en kívül, és legfeljebb $(n-1)/2$ változót rögzítettünk 1-re, ott a felső korlát 0. Ezeket mind végig kell nézni.

**689.** Első bázismegoldás: $x_1 = 2$, $x_3 = 3$, $x_5 = \frac{7}{2}$. Gomory-vágás: $x_5 - 2x_2 + x_4 \leq 3$. Második bázismegoldás: $x_3 = 5$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{3}{2}$. Gomory-vágás: $x_5 - x_1 - 2x_2 - 3x_6 \leq 1$.

**691.** Optimális megoldás: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 3$. A Gomory vágáshoz tartozó új sor: $s_3 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{3}{5}s_1 - \frac{9}{10}s_2 = -\frac{1}{2}$. (Itt $s_1$ és $s_2$ az eredeti feladat két kiegészítő (slack) változója, $s_3$ pedig a Gomory vágáshoz tartozó új kiegészítő változó.)

## 9.2. Dinamikus programozás

**692.** A levelektől indulva minden csúcsra számoljuk ki a leszármazottainak részfájában a max súlyú stabilt, ami tartalmazza/nem tartalmazza a csúcsot.

**695.** Minden $j$-re kiszámoljuk a $j$-edik elemmel végződő kezdőszelet legszebb beosztását.

**696.** Tipp: egy átalakítás megfelel egy nem-keresztező (nem feltétlenül teljes) párosításnak $S_1$ elemei és $S_2$ elemei között. Az átalakítás nehézsége: a párosítás mentén az átalakítások nehézsége + $S_1$ maradék elemeinek törlése + $S_2$ maradék elemeinek beszúrása.

## 9.3. Közelítő algoritmusok

**698.** A mohó algoritmus nem 2-közelítő: definiálunk egy $G = (A, B; E)$ páros gráfot. Az $A$ osztályban 60 csúcs van, mind 5 fokú. A $B$ osztályban 12 db 5 fokú, 15 db 4 fokú, 20 db 3 fokú, 30 db 2 fokú, és 60 db 1 fokú, összesen 137 db. csúcs. Minden $i \in \{1, \ldots, 5\}$-re a $B$ -beli $i$-fokúak szomszédságai $A$ egy partícióját adják (hogy pontosan melyik partícióját, az mindegy). A mohó algoritmus lehet hogy a teljes $B$ osztályt választja, pedig az $A$ osztály kevesebb, mint fele akkora méretű.

A fordított mohó algoritmus nem 2-közelítő: definiálunk egy $G = (A, B; E)$ páros gráfot. Az $A$ osztályban 9 csúcs van, a $B$ osztályban pedig 20. Az $A$ osztályban 4 csúcs mindegyik $B$-belivel össze van kötve, a maradék 5 csúcs pedig 4 $B$-belivel, úgy, hogy minden $B$-beli csúcs 5 fokú. A fordított mohó algoritmus a teljes $B$ osztályt választja.

**699.** Könnyű belátni, hogy a fordított mohó algoritmus a csúcsoknak legfeljebb 3/4-ét választja ki. Kicsit nehezebb, hogy a mohó is (tipp: ha már 2 a max fokszám, akkor a maradék csúcsok legfeljebb 2/3-át választja ki).

**700.** $G'$-ben a bázismegoldások egészek (TU). Ebből és a $G'$-beli és $G$-beli megoldások egymásba alakíthatóságából bizonyítható, hogy $G$-ben a bázismegoldások félegészek.

**701.** Készítsük el azt a $c'$ költségfüggvényt, ahol $c'(uv)$ az $u$ és $v$ közti legolcsóbb út költsége. Keressünk $c'$-re nézve minimális költségű feszítő fát $U$ pontjain. A fának megfelelő éleket helyettesítsük a megfelelő legolcsóbb utakkal, és az így kapott gráfnak (ami nem tartalmazza mind az $n$ csúcsot!) vegyük egy feszítő fáját. Ez 2-közelítő: ha $T$ optimális Steiner fa, akkor az éleit megduplázva a ponthalmazán egy Euler gráfot kapunk, és ha ennek egy Euler sétája szerinti sorrendben vesszük $U$ pontjait, akkor egy olyan $H$ Hamilton kört kapunk $U$-n, amire $c'(H) \leq 2c(T)$. Márpedig $U$-n a $c'$-re nézve minimális költségű feszítő fa súlya legfeljebb $c'(H)$.

**702.** Rögzítsük a munkák egy sorrendjét. Amint egy gép felszabadul, kezdje meg a soron következő, még nem géphez rendelt munkát. Ez $(2 - \frac{1}{m})$-közelítő algoritmus.

Sőt, $\frac{3}{2}$-közelítő algoritmus is adható, ha az előző módszerben megmunkálási idő szerint csökkenő sorrendben osztjuk be a munkákat. Tekintsük ugyanis a legtöbb ideig dolgozó gépet. Ha ezen egyetlen munkát végzünk, könnyen belátható, hogy a kapott beosztás optimális. Ha viszont legalább két munkát osztottunk be, akkor az utolsó munka hossza legfeljebb az optimum fele (hiszen egy optimális beosztásban is lennie kell gépnek, melyre az első $m+1$ munkából kettő be van osztva). Az utolsó munkát megelőző összes korábbi együtt pedig legfeljebb optimum.

**703.** Rögzítsük a pontok egy sorrendjét, amikor $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}$ színe már rögzített, válasszuk $v_j$-t kéknek, ha a korábbi kékekhez menő élek összsúlya legfeljebb akkora mint a pirosakhoz menő, különben pirosnak.

## 9.4. Lagrange-relaxáció

**706.** Először keressünk minimális költségű feszítőfát, fokszámelőírás nélkül. Ha az így kapott fa fokszáma $w$-ben nem $k$, meghatározható az a $\lambda$, mellyel a költségfüggvényt a $w$-re illeszkedő éleken eltolva a fokszám eggyel változik. Ezt ismételgetve megkapjuk a megfelelő $\lambda$-t.

# 10. fejezet

# Konvex programozás

## 10.1. Konvex halmazok

**708.** a) igen, b) igen, c) igen

**711.** Definícióból (vagy: a minimális sajátérték konkáv függvény a szimmetrikus valós mátrixokon).

**712.** Következik abból, hogy a pozitív szemidefinit mátrixok kúpja konvex (lásd 711. feladat).

**713.** Tekintsük inkább a $g(z,t) = (\frac{z}{t},1)$ függvényt. Egy $(y,1)$ pont ősképe a 0-ból $(y,1)$-en átmenő nyílt félegyenes. Ebből könnyen látható mindkét irány.

**714.** Tipp: nézzük az $x^*$-hoz legközelebbi pontot $C$-ben.

**715.** $x^*$-hoz konvergáló pontsorozat a lezárton kívül, 714. feladat.

**716.** $C_1 - C_2$ konvex, 0 nincs benne, 715. feladat.

**717.** $(K^p)^p = K$ akkor és csak akkor igaz, ha $K$ zárt.

**718.** A negatív szemidefinit mátrixok kúpja. Tipp: használjuk, hogy $A$ pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha az összes sajátértéke nemnegatív.

**719.** Legyen $C_1 = (K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_m) \setminus \{0\}$, és $C_2 = \{(x, x, \ldots, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Ezek diszjunkt konvex halmazok $\mathbb{R}^{mn}$-ben, tehát gyengén szeparálhatók (716. feladat). A szeparáló hipersík normálvektora adja a megoldást.

## 10.2. Konvex függvények

**723.** Definícióból

**725.** Lineáris függvények maximuma.

**726.** Felírható végtelen sok lineáris függvény maximumaként: $\lambda_{max}(A) = \max_{|x|=1} x^\mathsf{T} Ax$.

**727.** $\log(e^x + 1)$ konvex; Jensen egyenlőtlenség.

**728.** $\sin x$ konkáv a $0 \leq x \leq \pi$ intervallumon; Jensen egyenlőtlenség.

**729.** $\ln x$ konkáv a pozitív számokon; Jensen egyenlőtlenség.

**730.** Tipp: használjuk, hogy $-\log x$ konvex.

**731.** Az $\frac{1}{x}$ függvény konvex a pozitív számokon; Jensen egyenlőtlenség.

**732.** Használjuk a 723. feladatot.

**733.** Az (1,2,3) pontban: $(10, 21, 26)$. A Hesse-mátrix:

$$\begin{pmatrix} 12x_1^2 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 + 4x_3 \\ x_2 & x_1 + 4x_3 & 4x_2 \end{pmatrix}$$

A főminorok: $12x_1^2$; $-x_3^2$; $-12x_1^4 - 96x_1^3x_3 + 2x_1x_2x_3 - 192x_1^2x_3^2 + 4x_2x_3^2$. Az első kettő miatt se negatív definit, se pozitív definit nem lehet sehol.

## 10.3. Feltételes optimalizálás

**734.**

a) $\{x + y \leq 0, 2x + y \leq 0\}$, illetve $\mathbb{R}^2$

b) $\{x - y \geq 0, 4x - y < 0\} \cup \{0\}$, illetve $\{2x - y < 0\} \cup \{0\}$.

**735.** A feladat Slater-reguláris. A (2,1) pont az $x^2 + y \leq 5$ és az $x + y \geq 3$ feltételeket teljesíti egyenlőséggel. A KKT tétel szerint (2,1) pontosan akkor optimális, ha léteznek $\mu \geq 0$ és $\nu \geq 0$ számok, hogy

$$\nabla(y^2 - px - 4y) + \mu\nabla(x^2 + y - 5) + \nu\nabla(3 - x - y) = 0 \text{ a (2,1) pontban,}$$

azaz

$$-p + 4\mu - \nu = 0,$$
$$-2 + \mu - \nu = 0.$$

Pontosan akkor vannak ilyen $\mu$ és $\nu$ nemnegatív számok, ha $p \geq 2$.

**736.**

a) igen

b) nem

**737.** Például az $(\frac{1}{2}, 0)$ pont Slater-pont. Az optimális megoldás megkeresése: a KKT feltételek szerint egy optimumhelyhez léteznek olyan $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ nemnegatív számok, amikre

$$\nabla(y) + \mu_1\nabla(x^2 + y^2 - 1) + \mu_2\nabla(-x + y^2) + \mu_3\nabla(-x - y) = 0,$$

és csak az egyenlőséggel teljesülő feltételekhez tartozhat pozitív $\mu_i$. A deriváltakat kiszámolva:

$$2\mu_1 x - \mu_2 - \mu_3 = 0,$$
$$1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2 y - \mu_3 = 0.$$

Ha $\mu_2 = \mu_3 = 0$, akkor $2\mu_1 x = 0$ és $2\mu_1 y = -1$. Ez csak úgy lehet, hogy $x = 0$ és $y = \pm 1$ (mert az első egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül), de ez ellentmond a második egyenlőtlenségnek. Tehát $\mu_2 + \mu_3 > 0$, és az első KKT feltétel miatt $\mu_1 > 0$, így $x^2 + y^2 = 1$. Ha $\mu_2 > 0$, akkor $y^2 = x$, így viszont $x + y \geq 0$ csak akkor teljesülhet, ha $y > 0$. Ekkor $\mu_3 = 0$ és a második KKT feltétel nem teljesülhet. Marad tehát az a lehetőség, hogy $\mu_2 = 0$ és $\mu_3 > 0$, azaz $x + y = 0$. Tehát az optimális megoldás: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**738.** Optimális megoldás: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

**739.**

a) Slater-reguláris feladat; (0,1) optimális

b) Slater-reguláris feladat; $(0, -1)$ optimális

c) Slater-reguláris feladat; (0,1) optimális

**740.** (0,1) igen, $(1, 0)$ nem.

**741.** A (2,2) pont.

**742.** Az (1,3) pont.

**743.** Slater-reguláris feladat; az optimális megoldás $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$.

**744.** Slater-reguláris feladat; az optimális megoldás $(-1{,}2)$.

# Tárgymutató