NUMERIKUS FUNKCIONÁLANALÍZIS

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Karátson János

NUMERIKUS FUNKCIONÁLANALÍZIS

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2014

© 2014–2019, Karátson János,
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Lektorálta: Galántai Aurél

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 239 2
Készült a Typotex Kiadó (http://www.typotex.hu) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, „Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: funkcionálanalízis, numerikus analízis, operátoregyenletek, lineáris, nemlineáris, parciális differenciálegyenletek, projekciós módszerek, iterációs módszerek.

ÖSSZEFOGLALÁS: A funkcionálanalízis a matematikai analízisből kinőtt azon tudományág, melynek lényege végtelen dimenziós terek közti lineáris és nemlineáris leképezések vizsgálata. A benne megjelenő absztrakció lehetővé teszi az egységes tárgyalásmódot. E könyv témájának, a numerikus funkcionálanalízisnek a fogalma arra alapszik, hogy ezek az egységes, absztrakt módszerek éppoly alkalmasak a vizsgált egyenletek konstruktív megoldási algoritmusainak kidolgozására és analízisére, mint elméleti vizsgálatukra. E könyv megírásának mozgatórugója, hogy numerikus funkcionálanalízisről szóló könyv magyarul még nem elérhető. A könyv négy részből áll. Az I. részben a funkcionálanalízis egyes alapismereteit foglaljuk össze. A II. és III. rész lineáris, ill. nemlineáris operátoregyenletek megoldhatósági eredményeiről, azaz a megoldás fogalmáról, létezéséről és egyértelműségéről szól a szükséges elméleti háttérrel együtt. A IV. rész tartalmazza a különféle operátoregyenlettípusokra vonatkozó közelítő módszerek tárgyalását. A vizsgált eljárások elsősorban két nagy csoportba tartoznak: projekciós, ill. iterációs módszerek. Ennek az anyagnak egy része megfelel az ELTÉ-n tartott funkcionálanalízis BSc és nemlineáris funkcionálanalízis MSc előadás témájának, az utolsó fejezet tárgya pedig újabb kutatásokhoz kapcsolódik.

Tartalomjegyzék

Előszó

A funkcionálanalízis a matematikai analízisből kinőtt azon tudományág, melynek lényege végtelen dimenziós terek közti lineáris és nemlineáris leképezések vizsgálata. A benne megjelenő absztrakció lehetővé teszi az analízis különböző területeit összefogó egységes tárgyalásmódot, ebben külön említést érdemel a különböző függvényosztályok által alkotott függvényterek egységes vizsgálata. A funkcionálanalízisnek jelentős magyar vonatkozásai is vannak: Riesz Frigyes, Neumann János és (a magyar származású) Peter D. Lax neve elválaszthatatlan e terület fejlődésétől. Neumann munkásságához kapcsolódik a funkcionálanalízis egyik legnagyobb hatású eredménye, ő dolgozta ki ugyanis a kvantummechanika szilárd matematikai megalapozását. E könyv témája szempontjából viszont a funkcionálanalízisnek azon eredményei állnak középpontban, amelyek operátoregyenletekkel leírható modellek, vagyis integrál- és elsősorban differenciálegyenletek általános tárgyalására vonatkoznak.

A természettudományok számos területén fellépő közönséges és főként parciális differenciálegyenletek modern elméleti vizsgálata nagymértékben támaszkodik a funkcionálanalízis eszközeire, mivel e differenciálegyenletek természetes alapterét végtelen dimenziós függvényterek alkotják. A Szoboljevterek fogalma tette lehetővé parciális differenciálegyenletek megoldhatóságának általános elméletét, melyen belül például a lineáris elliptikus esetben a Dirichlet-féle energia-minimalizálási elv is érvényesíthető, ill. a megoldhatóság egy általános, bilineáris leképezésekre vonatkozó elvre (Lax–Milgram-lemma) vezethető vissza.

E könyv témájának, a numerikus funkcionálanalízisnek a fogalma arra alapszik, hogy ezek az egységes, absztrakt módszerek éppoly alkalmasak a vizsgált egyenletek konstruktív megoldási algoritmusainak kidolgozására és analízisére, mint elméleti vizsgálatukra. Ez az alapelv a Nobel-díjas matematikus, L. V. Kantorovics klasszikus cikkére nyúlik vissza [32]. A funkcionálanalízisben megjelenő absztrakció sokszor képes a tulajdonságok lényegét megragadni és elegáns kezelésmódot adni, ez teszi lehetővé numerikus problémák egyes osztályainak egységes megértését és kezelését is. A funkcionálanalízis módszerei mára már beépültek a numerikus eljárások modern elméletébe. Itt említendő, az alapvető példák közt tallózva, a végeselem-módszer egzakt tárgyalása Hilbert-térbeli apparátus felhasználásával, beleértve a nevezetes Céa-lemmákat, vagy a parabolikus feladatok Lax-féle elmélete, ill. az iterációs módszerek körében a Stokes-típusú nyeregpont-feladatok megoldása a megfelelő operátor függvénytérbeli szerkezetére alapozva, mint pl. az Uzawa-algoritmus. További magyar vonatkozásért pedig az iterációk körében térjünk vissza L. V. Kantorovicshoz: nála írt disszertációjában dolgozta ki Czách László nem korlátos operátorok korlátosra való transzformációját a konvergencia eléréséhez [12]. Ez az elv később mátrixokra vonatkozóan mint a kondíciószámot javító prekondicionálás technikája terjedt el, amely lineáris rendszerek iterációs megoldásának ma alapvető alkotórésze.

E könyv megírásának mozgatórugója, hogy numerikus funkcionálanalízisről szóló könyv magyarul még nem elérhető. A funkcionálanalízis említett szerepe már számos helyen megjelenik a numerikus analízist részletesen összefoglaló [69] könyvben, megfordítva azonban, e két terület (az absztrakt elmélet és a közelítő módszerek) ötvözéséről szóló olyan munka, amely a funkcionálanalízis irányából kiindulva vizsgálja az absztrakt módszerek alkalmazásait numerikus eljárásokra, nem készült magyarul. Az angol nyelvű (mind a klasszikus, mind az újabb) szakirodalomból megemlítjük a [3, 15, 17, 23, 25, 33, 40, 47, 49, 57, 58] műveket. Magyarul a Newton-típusú módszereket építi fel normált terekben a [30] könyv, amely a román nyelvű, klasszikus [29] változatra alapul.

Könyvünk bevezetést ad a numerikus funkcionálanalízis néhány fontosabb fejezetébe. Ehhez először, az I. részben, a funkcionálanalízis egyes alapismereteit foglaljuk össze. Ennek nem célja e terület egy újabb felépítése, hiszen számos munka létezik magyarul a funkcionálanalízis elemibb és mélyebb elméleti eredményeiről, például a klasszikus [59] mű, a [37, 38] (ezekre számos helyen utalunk) és a [13, 27, 36, 39, 43, 54] könyvek. Az első rész célja ehelyett önmagában használható kiindulást adni a további részekhez, ez egyben anyagot ad az ELTÉ-n tartott alkalmazott matematikus funkcionálanalízis előadáshoz is. A II. és III. rész lineáris, ill. nemlineáris operátoregyenletek megoldhatósági eredményeiről, azaz a megoldás fogalmáról, létezéséről és egyértelműségéről szól a szükséges elméleti háttérrel együtt. A IV. rész tartalmazza a különféle operátoregyenlet-típusokra vonatkozó közelítő módszerek tárgyalását. A vizsgált eljárások elsősorban két nagy csoportba tartoznak: projekciós, ill. iterációs módszerek. Ennek az anyagnak egy része megfelel az ELTÉ-n tartott nemlineáris funkcionálanalízis előadás témájának, az utolsó fejezet tárgya pedig újabb kutatásokhoz kapcsolódik [6, 23]. A tárgyalt módszereket fő alkalmazásként a könyv több pontján is parciális differenciálegyenleteken szemléltetjük. A könyv feltételezi az analízis alapjainak, elsősorban a Lebesgue-integrál és normált terek fő tulajdonságainak ismeretét.

Köszönetnyilvánítás. E könyv révén szeretném kifejezni köszönetem Czách Lászlónak – kollégámnak és korábbi tanáromnak –, akitől a terület iránti érdeklődésemet és elindulásomat nyertem, és aki velem együtt matematikusok nemzedékeivel szerettette meg az analízist.

A könyv elkészültében nagy segítséget jelentett az a két kézirat, melyet Kurics Tamás kollégám még hallgatóként készített két kapcsolódó előadásom alapján, igényes munkáját ezúton köszönöm, akárcsak neki és Kovács Balázs hallgatómnak a könyv kéziratának gondos átolvasását, ellenőrzését.

Munkámat az MTA Bolyai János Ösztöndíjának támogatásával végeztem.

I. rész

Bevezetés a funkcionálanalízisbe

1. fejezet

Normált terek

A funkcionálanalízis egyik legalapvetőbb struktúrája a normált tér, melynek lényege a hossz fogalmának általánosítása. Ennek segítségével általános keretben vizsgálhatóak a végtelen dimenziós függvényterek, melyek az alkalmazások szempontjából a normált tér fogalmának legfontosabb realizációi. Mivel e könyv feltételezi a normált terek elemi ismeretét az analízisből, itt csak rövid összefoglalást adunk néhány olyan alaptulajdonságról és példáról, melyeket leggyakrabban használunk majd, vagy nem tartoznak a szokásos alapismeretek közé. A skalárszorzatterek ennél speciálisabb struktúrájával a 2. fejezetben foglalkozunk majd hasonló szellemben.

Mivel a normált terek az euklideszi terek általánosítását jelentik, egy-egy új fogalom prototípusaként gyakran tekinthetjük magát $\mathbb{R}^n$-et. Ezért külön szakaszban térünk ki a véges dimenziós esetre, és ezután adunk példákat végtelen dimenziós terekre. A normált terek további, részletesebb tárgyalása, beleértve a későbbiekben említett, de nem bizonyított állításokat és példákat, megtalálható a [37, 38] könyvekben.

Végül megemlítjük, hogy a funkcionálanalízis egyes eredményei a normált tereknél általánosabb struktúrákban (topologikus vektorterekben) is felépíthetők, lásd szintén [37, 38], erre az általánosságra azonban e könyvben nem lesz szükségünk.

1.1. Normált terek, Banach-terek és alaptulajdonságaik

A norma definíciója a hossz fogalmát általánosítja tetszőleges vektortérben.

1.1. Definíció. Legyen X vektortér $\mathbb{K}$ felett, ahol $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$. Egy $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ függvényt *normának* nevezünk, ha teljesíti az alábbi ún. normaaxiómákat:

(i) minden $x \in X$ esetén $\|x\| \geq 0$, és $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) minden $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x \in X$ esetén $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;

(iii) minden $x, y \in X$ esetén $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ekkor az $(X, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük.

Megadunk néhány egyszerű példát normált terekre, nagyrészt véges dimenziósakat. A funkcionálanalízis alkalmazásaiban a végtelen dimenziós terek, elsősorban függvényterek játsszák a fő szerepet, ezek közül a legfontosabbakkal az 1.3. szakaszban foglalkozunk majd.

- A legegyszerűbb példa $X := \mathbb{R}$ mint önmaga feletti vektortér: ez normált tér az abszolút értékkel mint normával, azaz $\|x\| := |x|$.

- Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $X := \mathbb{R}^n$ normált tér a szokásos euklideszi normával, amit 2-es indexszel szokás jelölni, azaz $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

- Az $X := \mathbb{R}^n$ teret más normákkal is elláthatjuk, például az úgynevezett p-normákkal, ahol $x \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, & \text{ha} \quad 1 \leq p < +\infty; \\ \\ \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| \,, & \text{ha} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

- Ha $I = [a, b]$ adott intervallum, akkor $X := C(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények$\}$ normált tér az $\|f\|_{\max} := \max_I |f|$ normával. Ugyanezen a vektortéren megadható más norma is, pl. $\|f\|_1 := \int_I |f|$.

1.2. Megjegyzés. Minden normált tér egyben metrikus tér a $\varrho(x, y) = \|x - y\|$ ún. indukált metrikával. (Visszafelé ez nem igaz, vagyis nem minden metrikát indukál valamilyen norma, pl. ha az alaphalmaz nem vektortér, vagy ha a metrika diszkrét.)

A norma révén értelmezhetőek a gömbök, környezetek és ehhez kapcsolódó topológiai fogalmak. A nyílt gömbök segítségével a határérték és folytonosság ugyanúgy definiálható, mint $\mathbb{R}^n$-ben. Utóbbiak ε és δ nélkül közvetlenül is megfogalmazhatók, ezt tesszük először a sorozatok és sorok konvergenciájára, utána értelmezünk néhány topológiai alapfogalmat.

1.3. Definíció. (Sorozatok és sorok konvergenciája.) Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, $(x_n) \subset X$ sorozat, $x \in X$ vektor.

(i) $\lim x_n = x$ (vagy $x_n \to x$), ha $\|x_n - x\| \to 0$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$, ha az $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ sorozatra $s_n \to x$.

1.4. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér.

(i) Ha $x_0 \in X$ adott pont, $r > 0$ szám, akkor x_0 középű és r sugarú *nyílt gömbön*, ill. *zárt gömbön* a

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\} \quad \text{és} \quad \overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

halmazokat értjük. Egy $U \subset X$ halmaz *környezete* x_0-nak, ha U tartalmaz x_0 középű nyílt gömböt.

(ii) Egy $G \subset X$ halmaz *nyílt*, ha minden pontjának környezete.

(iii) Egy $F \subset X$ halmaz *zárt*, ha $X \setminus F$ nyílt. Ez ekvivalens azzal, hogy minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén $\lim x_n \in F$.

(iv) Egy $K \subset X$ korlátos halmaz *átmérője*: $diam(K) := \sup\limits_{x,y \in K} \|x - y\|$.

1.5. Lemma. *Normált térben minden $x, y \in X$ esetén $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.*

Bizonyítás. Mivel $x = (x-y)+y$, ezért $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, azaz $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Mivel x és y szerepe szimmetrikus, ezért $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$ is igaz, amiből az állítás következik. □

1.6. Következmény. *A norma sorozatfolytonos függvény, azaz ha $x_n \to x$, akkor $\|x_n\| \to \|x\|$.*

Bizonyítás. Az előző lemma szerint $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \to 0$, ha $n \to \infty$. □

A fenti bizonyítások megegyeztek az $\mathbb{R}$-ben szokásosakkal, az abszolút értéket normára cserélve. Hasonlóan igazolható, hogy normált térben az összeadás és a skalárral való szorzás műveletei folytonosak.
A normált terek egyik alapfogalma a tér teljessége:

1.7. Definíció. Egy normált teret *Banach-térnek* nevezünk, ha teljes, azaz ha minden Cauchy-sorozat konvergens.

A teljesség azt jelenti, hogy ebből a szempontból a tér hasonlít a valós számok halmazához, ahol klasszikus tétel garantálja a Cauchy-sorozatok konvergenciáját. Néhány további példa a normált tereknél már felsoroltakból:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér a $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ euklideszi normával.
- Általában is: minden véges dimenziós normált tér Banach-tér. (Ezzel külön foglalkozunk a következő szakaszban.)
- Ha $K \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, akkor $X := \{f : K \to \mathbb{R}$ korlátos függvények$\}$ Banach-tér az $\|f\|_\infty := \sup_K |f|$ normával.
- $(C[a,b], \|\cdot\|_{\max})$ Banach-tér az $\|f\|_{\max} := \max\limits_{[a,b]} |f|$ normával. (Az $[a,b]$ intervallum helyett egy $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz is állhat.)
- $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ nem teljes, azaz nem Banach-tér az $\|f\|_1 := \int_a^b |f|$ normával. Megadható ugyanis olyan $(f_n) \subset C[a,b]$ sorozat, amely a $\|\cdot\|_1$ normában egy $f \notin C[a,b]$ függvényhez konvergál, pl. a signumfüggvényhez. Ez Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_1$ normában, de nincs limesze $C[a,b]$-ben.

1.8. Megjegyzés. Bár nem minden normált tér Banach-tér, igazolható, hogy minden X normált tér sűrűn beágyazható Banach-térbe azonosítás erejéig, vagyis X izometrikusan izomorf egy alkalmas Banach-tér egy sűrű alterével. (Két normált teret izometrikusan izomorfnak hívunk, ha van közöttük normatartó lineáris bijekció; ilyenkor szokás őket azonosítani egymással.) Ekkor ez a Banach-tér szükségképpen egyértelmű izometria erejéig, neve X *teljessé tétele.*

Egy bizonyítást a 3.12. tételben látunk majd erre. A teljessé tétel létezése közvetlenül is igazolható metrikus terekre is, azzal az alapgondolattal, hogy a Cauchy-sorozatokhoz hozzárendelt alkalmas ideális elemekből alkotható teljes tér. Éspedig, ha két Cauchy-sorozatot ekvivalensnek hívunk, amikor különbségük 0-hoz tart, akkor az új tér a Cauchy-sorozatok ekvivalencia-osztályaiból fog állni, és egy X-beli elemet a belőle alkotott konstans sorozat ekvivalencia-osztályával azonosítunk. A hosszú számolást igénylő részletes bizonyítást lásd pl. a [37] könyvben.

1.9. Definíció. Legyen X vektortér, $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák. Azt mondjuk, hogy a két norma *ekvivalens*, ha léteznek $M \geq m > 0$ konstansok, hogy

$$m\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\,\|x\|_1 \qquad (\forall x \in X). \tag{1.1}$$

Könnyen látható, hogy ez valóban ekvivalencia-reláció. Ha a normák ekvivalensek, akkor ugyanazt a topológiát generálják, vagyis ugyanazok a nyílt halmazok és a konvergens sorozatok is. Például az 1.15 tételben látni fogjuk majd, hogy véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

1.10. Állítás. *Legyen X vektortér, $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ ekvivalens normák. Ha $(X, \|\cdot\|_1)$ teljes, akkor $(X, \|\cdot\|_2)$ is teljes.*

Bizonyítás. A definíciókból következik, hogy ha (x_n) Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_2$ normában, akkor Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_1$ normában is, így (x_n) konvergál a $\|\cdot\|_1$ normában, de akkor konvergál (ugyanahhoz a vektorhoz) a $\|\cdot\|_2$ normában is. $\square$

Végül a teljességre alapuló néhány nevezetes eredményt adunk meg.

1.11. Tétel (Cantor-féle közöspont-tétel). *Legyen X Banach-tér. Ha $(F_n) \subset X$ nem üres zárt halmazok egymásba skatulyázott sorozata (azaz $F_1 \supset F_2 \supset \dots$), melyre $diam(F_n) \to 0$, akkor $\cap F_n$ egy pont.*

Bizonyítás. Vegyünk minden n-re egy $x_n \in F_n$ pontot. Könnyen látható, hogy ezek Cauchy-sorozatot alkotnak, mivel bármely $m \geq n$ egészek esetén $\|x_n - x_m\| \leq diam(F_n) \to 0$. Mivel X teljes, létezik $x^* := \lim x_n$. Mivel minden n-re az $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ sorozat (amely szintén x^*-hoz tart) F_n-ben fekszik, így F_n zártsága miatt $x^* \in F_n$, ezekből $x^* \in \cap F_n$. Végül a $diam(F_n) \to 0$ feltétel miatt nem létezhet másik olyan pont, amely minden F_n-nek eleme, így a metszet csak x^*-ból áll. $\square$

1.12. Állítás (Weierstrass-kritérium). *Legyen X Banach-tér. Ha $\sum \|x_n\|$ konvergens, akkor $\sum x_n$ is konvergens.*

Bizonyítás. Legyenek $s_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ a megfelelő részletösszegek. Ekkor $\sum \|x_n\|$ konvergenciája miatt (σ_n) Cauchy-sorozat, emellett minden $n > m$ indexre

$$\|s_n - s_m\| = \Big\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \Big\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|,$$

így (s_n) is Cauchy-sorozat. Mivel X teljes, így ez azt jelenti, hogy $\sum x_n$ konvergens. $\square$

1.13. Tétel (Banach-féle fixponttétel). *Legyen X Banach-tér és $f : X \to X$ kontrakció, azaz van olyan $q < 1$ szám, hogy*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\| \qquad (\forall x, y \in X).$$

(1) Ekkor f-nek egyértelműen létezik fixpontja, azaz olyan $x^* \in X$, melyre $x^* = f(x^*)$.

(2) Bármely $x_0 \in X$ esetén az $x_{n+1} := f(x_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ iteráció x^*-hoz konvergál, éspedig

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\| \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. (1) Minden n-re $\|x_{n+1}-x_n\| = \|f(x_n)-f(x_{n-1})\| \le q\|x_n - x_{n-1}\|$, így indukcióval $\|x_{n+1}-x_n\| \le q^n\|x_1-x_0\|$. Ebből minden $m>n$ esetén

$$\|x_m-x_n\| \le \sum_{i=n}^{m-1}\|x_{i+1}-x_i\| \le \Big(\sum_{i=n}^{m-1} q^i\Big)\|x_1-x_0\| < \frac{q^n}{1-q}\|x_1-x_0\|, \quad (1.2)$$

amiből következik, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Mivel X teljes, így létezik $x^* := \lim x_n$. Ez fixpont, mert f (Lipschitz-)folytonos is, amiből $f(x^*) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x^*$. Más fixpont nem lehet, mert ha x^{**} is fixpont, akkor $\|x^{**}-x^*\| = \|f(x^{**})-f(x^*)\| \le q\|x^{**}-x^*\|$, ami csak $\|x^{**}-x^*\|=0$ esetén lehetséges.
(2) Az (1.2) egyenlőtlenség két széléből $m\to\infty$ esetén megkapjuk a kívánt becslést, mivel a bal oldal $\|x^*-x_n\|$-hez tart, a jobb oldal pedig nem függ m-től. □

1.14. Megjegyzés. Az 1.11 és 1.13. tételek teljes metrikus térben is igazak (a bizonyításokban csupán a különbségnormák helyett távolságokat kell írni), erre azonban nem lesz szükségünk. A Banach-féle fixponttétel a legegyszerűbb olyan tétel, amely egyenlet megoldhatóságát és a megfelelő iteráció konvergenciáját mondja ki, erre a könyv III-IV. részében is utalunk majd.

1.2. Véges dimenziós normált terek

A Banach-terekre adott példák között már említettük, hogy minden véges dimenziós normált tér teljes. Ezt most igazoljuk is; az ehhez felhasznált első eredmény önmagában is nevezetes.

1.15. Tétel. *Véges dimenziós normált téren bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Elég belátnunk, hogy minden norma ekvivalens egy rögzített normával. Ha $e_1, e_2, \dots, e_k$ bázisa X-nek, akkor tetszőleges $x\in X$ felírható $x=\sum_{i=1}^{k} x_i e_i$ alakban, és az

$$\|x\|_\infty := \max_{1\le i\le k}|x_i| \quad (1.3)$$

kifejezés normát definiál. Belátjuk, hogy tetszőleges $\|\cdot\|$ norma ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ normával, azaz fennáll (1.1) valamilyen $M\ge m>0$ konstansokkal.
Legyen $x\in X$ tetszőleges. Az egyik irány:

$$\|x\| = \Big\|\sum_{i=1}^{k} x_i e_i\Big\| \le \sum_{i=1}^{k}|x_i|\,\|e_i\| \le \max_{1\le i\le k}|x_i|\Big(\sum_{i=1}^{k}\|e_i\|\Big) = M\,\|x\|_\infty .$$

A másik irányhoz először vegyük észre, hogy az 1.5. lemma és fenti irány miatt

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x-y\| \le M\,\|x-y\|_\infty \qquad (\forall x, y \in X),$$

így $\|\cdot\|$ Lipschitz-folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ normára nézve. Emiatt folytonos is, így a Weierstrass-tétel szerint van minimuma az $S := \{x \in X : \|x\|_\infty = 1\}$ korlátos és zárt halmazon, azaz a $\|\cdot\|_\infty$ normával vett egységgömb felszínén. (S korlátossága triviális, zártsága az 1.6. következménynek köszönhető.) Ez a minimum pozitív érték, mivel a nullvektor nincs S-en, így

$$\min_{\|y\|_\infty=1} \|y\| =: m > 0.$$

Legyen most $x \in X$ tetszőleges. Feltehető $x \neq 0$, hisz 0-ra (1.1) triviális. Ekkor $y := \frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, így

$$\|x\| = \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \|x\|_\infty = \|y\|\,\|x\|_\infty \ge m\,\|x\|_\infty. \qquad \square$$

1.16. Tétel. *Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(x^n) \subset X$ Cauchy-sorozat a tér $\|\cdot\|$ normájában. Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_k$ bázis X-ben, és tekintsük az (1.3) képletben definiált $\|\cdot\|_\infty$ normát. Mivel minden $n, l \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left\|x^n - x^l\right\|_\infty \le \frac{1}{m}\left\|x^n - x^l\right\|$, így (x^n) Cauchy-sorozat $\|\cdot\|_\infty$-ban is. Ekkor minden $i = 1, \ldots, k$ koordináta esetén $(x_i^n) \subset \mathbb{R}$ is Cauchy-sorozat, így konvergens is, azaz létezik $x_i := \lim\limits_{n\to\infty} x_i^n \in \mathbb{R}$. Ekkor (x^n) is konvergens X-ben:

$$\text{ha } x := \sum_{i=1}^{k} x_i e_i, \text{ akkor } \|x^n - x\| \le M\,\|x^n - x\|_\infty = M \max_{1\le i\le k} |x_i^n - x_i| \to 0,$$
$$\text{ha } n \to \infty. \qquad \square$$

1.17. Megjegyzés. (i) A fentiek alapján véges dimenziós vektortéren bármely két norma ugyanazt a topológiát generálja, azaz ugyanazok a nyílt halmazok és a Cauchy-, ill. konvergens sorozatok is. Az utóbbi jelentése, hogy a sorozat minden koordinátája konvergens.

(ii) Egy normált tér minden véges dimenziós altere zárt, mivel önmaga mint normált tér teljes.

(iii) A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy véges dimenziós normált térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata. Ez ui. $\mathbb{R}$-ben igaz, így az első koordináták sorozatának van konvergens részsorozata. A második koordináták ilyen indexű részsorozatának is van konvergens részsorozata, és így tovább. Az utolsó lépésben kapott indexsorozattal az egész sorozatnak kapjuk konvergens részsorozatát.

További következmény az a későbbiekben hasznos tulajdonság, hogy véges dimenziós altérnek a tér bármely eleméhez van legközelebbi eleme.

1.18. Állítás. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, $X_0 \subset X$ véges dimenziós altér, $x \in X$ tetszőleges vektor. Ekkor létezik $y_0 \in X_0$, amelyre $d := dist(x, X_0) = \|x - y_0\|$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan $(y_n) \subset X_0$ sorozatot, melyre $d_n := \|x - y_n\| \to d$. Az (d_n) számsorozat konvergens, így korlátos is, így az $(y_n) \subset X_0$ vektorsorozat is korlátos. Mivel X_0 véges dimenziós, kiválasztható (y_n)-ből konvergens részsorozat, azaz $y_{n_k} \to y_0 \in X_0$. A norma folytonossága miatt $\|x - y_0\| = \lim \|x - y_{n_k}\| = \lim d_{n_k} = d$. □

Ez a legközelebbi elem nem mindig egyértelmű, pl. a maximumnormával ellátott $C[0,1]$ térben az $f \equiv 1$ konstansfüggvény 1 távolságra van a homogén lineáris függvények egydimenziós alterétől, és ezt minden $0 \leq c \leq 2$ paraméterű $g(x) := cx$ függvényen fel is veszi. Könnyen látható azonban, hogy ha egy tér normája szigorúan konvex (azaz ha $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$, amikor x és y nem egymás számszorosa), akkor a legközelebbi elem már egyértelmű. Ilyenkor ezt az adott vektor véges dimenziós altérre való vetületének hívjuk.

1.3. Nevezetes Banach-terek, függvényterek

Az alábbi példák általában jól ismertek az analízisből, lásd [37, 38, 59]. Az $L^p(\Omega)$ tereket fontosságuk miatt részletezzük. Az egyváltozós Szoboljev-tér itt ismertetett, Czách Lászlótól származó felépítése kevésbé ismert az irodalomban, célja a fogalom jól érthető szemléltetése. A Szoboljev-tér ugyanis az alkalmazásokban előforduló legfontosabb függvénytér lesz, és az egydimenziós eset jóval konstruktívabban leírható, mint a többváltozós [67], melyre a 10.2.2. szakasz elején utalunk majd.

1.3.1. Az $L^p(\Omega)$ terek

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ adott Lebesgue-mérhető halmaz, $1 \leq p \leq \infty$. Tekintsük azon $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényeket, melyekre $\|f\|_{L^p}$ véges, ahol

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}, & \text{ha} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \inf \{ \displaystyle\sup_{\Omega \setminus N} |f| : \ N \subset \Omega \text{ nullmértékű} \}, & \text{ha} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Gyakran $\|f\|_{L^p}$ helyett csak $\|f\|_p$-t írunk, ha nem okoz félreértést, mint pl. e szakasz számolásaiban. Emellett emlékeztetünk az alábbi fogalomra, ill. jelölésre: a Lebesgue-elméletben egy tulajdonságot *majdnem mindenütt* (*m. m.*) érvényesnek nevezünk, ha nullmértékű halmaz kivételével teljesül.

1.19. Definíció. Az $L^p(\Omega)$ tér azon Lebesgue-mérhető függvényekből áll, melyekre $\|f\|_{L^p} < \infty$, beleértve, hogy két függvényt azonosnak tekintünk, ha m. m. egyenlőek. (Pontosabban tehát, a tér elemei ekvivalencia-osztályok, ahol $f \sim g$, ha $f = g$ m. m.)

A m. m. azonosítás önmagában is természetes amiatt, hogy a Lebesgue-integrál érzéketlen a nullmértékű halmazon való változtatásra, fő oka azonban az, hogy csak így lesz igaz az első normaaxióma.

Az $L^\infty(\Omega)$ tér normájáról említést érdemel, hogy bármely $f \in L^\infty(\Omega)$ függvényhez megadható olyan N_f nullmértékű halmaz, hogy $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_{\Omega \setminus N_f} |f|$. (Ha ugyanis a definícióbeli infimumot sorozattal közelítjük, akkor a megfelelő nullmértékű halmazok uniója jó lesz N_f-nek.) Ebből következik, hogy $|f| \le \|f\|_\infty$ m.m. , ezért néha az L^∞-normát a függvény lényeges supremumának is nevezik és $\operatorname*{ess\,sup}\limits_\Omega |f|$-fel jelölik.

Most belátjuk, hogy $L^p(\Omega)$ normált tér. Az első két normaaxióma triviálisan teljesül, az elsőnél kihasználva a m. m. azonosítást (ugyanis $\|f\|_{L^p} = 0$ esetén $f = 0$ m. m., azaz f az $L^p(\Omega)$ tér 0-eleme). A háromszög-egyenlőtlenséget a következő tétel mondja ki.

1.20. Tétel (Minkowski-egyenlőtlenség). *Legyen* $1 \le p \le \infty$ *adott,* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *mérhető függvények. Ekkor*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Bizonyítás. Ha $p = \infty$, akkor $|f| \le \|f\|_\infty$ és $|g| \le \|g\|_\infty$ m.m., ezért

$$|f+g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ m.m.},$$

ami egy lényegében felső korlát, azaz $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Legyen most p véges. Ha a jobb oldal ∞ vagy valamelyik függvény a 0, akkor az állítás triviális. Tegyük fel tehát, hogy $\|f\|_p \ne 0$ és $\|g\|_p \ne 0$. A $t \mapsto t^p$ függvény konvex, így a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)^p} (|f| + |g|)^p = \left(\frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_p} \right)^p \le$$

$$\le \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \left(\frac{|g|}{\|g\|_p} \right)^p .$$

Mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)^p} \int_\Omega (|f| + |g|)^p \leq 1,$$

ebből

$$\|f+g\|_p \leq \left\| |f| + |g| \right\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,. \qquad \square$$

A következő tétel az L^p-terekbeli számítások igen gyakran használt segédeszköze.

1.21. Definíció. A $p, q \in [1, \infty]$ számokat *(egymáshoz) konjugált értékeknek* hívjuk, ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ha p (vagy q) értéke 1, akkor az egyenlőséget úgy értjük, hogy q (vagy p) értéke ∞.

1.22. Tétel (Hölder-egyenlőtlenség). *Ha $1 \leq p \leq \infty$ és $1 \leq q \leq \infty$ egymáshoz konjugált értékek és f, g mérhető függvények, akkor*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \,.$$

Bizonyítás. Ha a jobb oldal 0 vagy végtelen, akkor az állítás triviális. Ha $p = 1$ és $q = \infty$ (vagy fordítva), akkor $|fg| = |f|\,|g| \leq |f| \, \|g\|_\infty$ m.m., emiatt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$. Legyenek most $1 < p, q < +\infty$, és

$$F := \frac{|f|}{\|f\|_p}, \quad G := \frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

A $t \mapsto \log t$ függvény konkávitását felhasználva

$$FG = \exp\left(\frac{1}{p}\ln F^p + \frac{1}{q}\ln G^p\right) \leq \exp\ln\left(\frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^p\right) = \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^p.$$

Ezt integrálva

$$\frac{1}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \int |fg| = \int_\Omega \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \int_\Omega \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ahonnan átszorzással adódik a kívánt egyenlőtlenség. $\square$

1.23. Megjegyzés. *(i) A Hölder-egyenlőtlenségből következik, hogy ha $f \in L^p(\Omega)$ és $g \in L^q(\Omega)$, akkor $fg \in L^1(\Omega)$.*

(ii) A $p = q = 2$ speciális esetben a függvényekre vonatkozó Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget kapjuk.

(iii) A Hölder-egyenlőtlenség többféleképpen általánosítható.

Indukcióval igazolható, hogy ha az $1 \le p_1, \dots, p_n \le \infty$ *számokra* $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$*, akkor*

$$\|f_1 \cdots f_n\|_1 \le \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n} .$$

Ebből, ha az $1 \le s_1, \dots, s_n \le \infty$ *és* $1 \le r \le \infty$ *számokra* $\frac{1}{s_1} + \dots + \frac{1}{s_n} = \frac{1}{r}$*, akkor a* $p_i := \frac{s_i}{r}$ *és* $f_i := |h_i|^r$ *helyettesítéssel*

$$\|h_1 \cdots h_n\|_r \le \|h_1\|_{s_1} \cdots \|h_n\|_{s_n} . \tag{1.4}$$

1.24. Tétel (Riesz–Fischer). $L^p(\Omega)$ *a bevezetett normával teljes, azaz Banach-tér.*

Bizonyítás. Csak $1 \le p < \infty$ esetére bizonyítjuk, a $p = \infty$ eset analóg a korlátos függvények terének korábban említett teljességével. Legyen (f_n) egy $L^p(\Omega)$-beli Cauchy-sorozat. Ekkor van olyan $k_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > k_0$ esetén $\|f_m - f_{k_0}\|_p < 1/2$. Ehhez van olyan $k_1 > k_0$, hogy minden $m > k_1$ esetén $\|f_m - f_{k_1}\|_p < 1/4$. Hasonlóan folytatva az eljárást, minden n-re van olyan $k_n > k_{n-1}$ index, hogy minden $m > k_n$ esetén $\|f_m - f_{k_n}\|_p < 1/2^{n+1}$. Legyen most

$$g_n := |f_{k_0}| + \sum_{i=1}^{n} \left| f_{k_i} - f_{k_{i-1}} \right| .$$

Mivel g_n monoton növő függvénysorozat, létezik $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Mivel

$$\|g_n\|_p \le \|f_{k_0}\|_p + \sum_{i=1}^{n} \left\| f_{k_i} - f_{k_{i-1}} \right\|_p \le \|f_{k_0}\|_p + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \le \|f_{k_0}\|_p + 1 = K,$$

ezért a g_n sorozat monotonitása miatt a Beppo Levi-tételből kapjuk, hogy

$$\int_\Omega g^p = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n^p = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n^p \le K^p,$$

tehát $g \in L^p(\Omega)$. Ekkor g m. m. véges, ebből következik, hogy az

$$f_{k_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{k_n} - f_{k_{n-1}} \right)$$

függvénysor m. m. pontban abszolút konvergens. Emiatt konvergens is, jelöljük a sor összegét f-fel. Mivel f és g konstrukciója miatt $|f| \le g$, így

$f \in L^p(\Omega)$. A sor n-edik részletösszege éppen f_{k_n}, tehát $f_{k_n} \to f$ m. m. és így $|f_{k_n} - f|^p \to 0$ m. m. Emellett

$$|f_{k_n} - f| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(f_{k_i} - f_{k_{i-1}} \right) \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \left| f_{k_i} - f_{k_{i-1}} \right| + |f_{k_0}| = g,$$

így $|f_{k_n} - f|^p \le g^p \in L^1(\Omega)$, azaz $|f_{k_n} - f|^p \to 0$ m. m. és van $L^1(\Omega)$-beli majoránsa. Lebesgue dominált konvergencia-tétele szerint $\int_\Omega |f_{k_n} - f|^p \to 0$, azaz $\|f_{k_n} - f\|_p^p \to 0$. Ezzel beláttuk, hogy egy tetszőleges $L^p(\Omega)$-beli Cauchy-sorozatnak van olyan részsorozata, amely konvergens. Ebből az ismert elemi állítás szerint következik, hogy az egész sorozat is konvergens. $\square$

1.25. Megjegyzés. Ismeretes, hogy $C[a,b]$ az L^1-normával ellátva nem teljes tér. Hasonlóan, $\left(C[a,b], \|\cdot\|_p \right)$ sem az. Igazolható viszont, hogy $C[a,b]$ sűrű altere $L^p(a,b)$-nek a p-normával, így $\left(C[a,b], \|\cdot\|_p \right)$ teljessé tétele éppen $L^p(a,b)$.

A kitevő növelésével egyre szűkebb tereket kapunk, ez egyszerű számolással igazolható az (1.4) általánosított Hölder-egyenlőtlenség alapján, $h_1 := f$ és $h_2 \equiv 1$ választással:

1.26. Állítás. *($L^p(\Omega)$ függése a kitevőtől). Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $1 \le r < s \le \infty$. Ekkor $L^s(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, sőt létezik $c > 0$, hogy*

$$\|f\|_{L^r} \le c\, \|f\|_{L^s} \qquad (\forall f \in L^s(\Omega)).$$

1.27. Megjegyzés. Igazolható az is, hogy ez visszafelé nem áll fenn, azaz különböző kitevőjű L^p-normák nem ekvivalensek: alkalmasan választott $\alpha > 0$ esetén elérhető, hogy az $f(x) := |x - x_0|^{-\alpha}$ függvényre (ahol $x_0 \in \Omega$ rögzített pont) $f \in L^r(\Omega) \setminus L^s(\Omega)$, vagy $f \in L^s(\Omega)$ ugyan, de a két norma hányadosa előírt korlát fölött lesz.

1.3.2. Sorozatterek és C^n-terek

További fontos példák Banach-terekre az ℓ_p-terek:

$$\ell_p := \left\{ (x_n) \subset \mathbb{K} \text{ számsorozatok, melyre } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \qquad \text{ha } 1 \le p < +\infty,$$

$$\ell_\infty := \{ (x_n) \subset \mathbb{K} \text{ korlátos számsorozatok} \}, \qquad \text{ha } p = +\infty.$$

A norma értelmezése hasonló a korábbi esethez:

$$\|(x_n)\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}, & \text{ha} \quad 1 \le p < +\infty, \\ \\ \sup_n |x_n|, & \text{ha} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Az ℓ_p-terek valójában felfoghatók L^p-tereknek is, mivel utóbbiak definíciójában nem kellett volna a Lebesgue-mértékre szorítkoznunk: általában egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérből kiindulva egy μ-mérhető függvénynek ugyanúgy definiálható a p-normája és így az L^p-belisége, ahogyan előbb láttuk. Ekkor az ℓ_p terek a $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ kiindulási mértéktérhez tartoznak, ahol μ a számlálómérték. A fentiek alapján a Riesz–Fischer tétel átvihető az ℓ_p terekre is, ezek tehát Banach-terek.

Vezessünk még be két újabb sorozatteret: legyen c a konvergens sorozatok tere, c_0 pedig a nullsorozatok tere, a norma mindkét esetben legyen $\|(x_n)\| := \sup |x_n|$. Könnyen látható, hogy ezek teljes terek, mivel zárt alterei ℓ_∞-nek.

Végül legyen $I = [a, b]$, $n \in \mathbb{N}^+$ és

$$C^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \ n\text{-szer folytonosan differenciálható}\},$$

ahol a norma

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_{\max} = \sum_{k=0}^{n} \max_I \left|f^{(k)}\right|.$$

Ezek a már látott $n = 0$ esethez hasonlóan Banach-terek.

1.3.3. Egyváltozós Szoboljev-terek

Ebben a szakaszban bevezetjük a Szoboljev-tér fogalmát az egyváltozós esetben. A Szoboljev-terek elsősorban többváltozóban, a parciális differenciálegyenletek elméletében rendkívül fontosak, erre a 10.2.2. szakaszban utalunk majd; a többdimenziós Szoboljev-terek részletes tárgyalása a [67] könyvben olvasható. A most adott egyváltozós definíció speciális és jóval konstruktívabb, mivel megadható, milyen függvényekből áll a tér, szemben a többdimenziós esettel, ahol absztrakt teljessé tételként definiáljuk a Szoboljev-tereket. Az egyváltozós eset nagyobb szemléletessége révén könnyebben látható e terek jelentősége, elsősorban majd a gyenge megoldásra való alkalmazásuknál a 10.2.1. szakaszban.

A továbbiakban legyen $I = [a, b]$ korlátos, zárt intervallum.

(a) Elsőrendű Szoboljev-terek

1.28. Definíció. Legyen $1 \leq p \leq \infty$ adott szám. Ekkor

$$W^{1,p}(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \text{ abszolút folytonos függvények, melyre } f' \in L^p(I)\}\,.$$

1.29. Megjegyzés. (i) Emlékeztetünk az alábbi jellemzésekre (az abszolút folytonosság definíciója helyett ezeket használjuk fel), lásd [38, 18. fejezet]). Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor abszolút folytonos, ha egy $L^1(I)$-beli függvény integrálfüggvénye, ez pedig ekvivalens az alábbi három tulajdonság együttesével :

- f m. m. differenciálható,
- $f' \in L^1(I)$,
- f integrálfüggvénye f'-nek (azaz érvényes a Newton–Leibniz tétel).

Itt az $f' \in L^1(I)$ kitétel értelmes, mert elég hozzá, hogy az f' függvényt m. m. értelmeztük.

(ii) A fentiek alapján: $f \in W^{1,p}(I) \;\Leftrightarrow\; f$ egy $L^p(I)$-beli függvény integrálfüggvénye.

Több normát is bevezetünk a $W^{1,p}(I)$ téren: az alapértelmezett norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \Big(\|f\|^p_{L^p} + \|f'\|^p_{L^p}\Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega (|f|^p + |f'|^p)\Big)^{1/p} \qquad (\text{ha } 1 \leq p < \infty),$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}} := \max\{\|f\|_{L^\infty}\,,\ \|f'\|_{L^\infty}\},$$

emellett két „segédnorma”

$$\|f\|_+ := \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p} \qquad \text{és} \qquad \|f\|_* := \|f\|_{\max} + \|f'\|_{L^p}\,.$$

Célunk belátni, hogy $W^{1,p}(I)$ teljes, azaz Banach-tér a $W^{1,p}$-normával. Ehhez az 1.10. állítás alapján azt fogjuk belátni, hogy a fenti normák ekvivalensek és a tér teljes a $*$-normával.

1.30. Lemma. *A $W^{1,p}(I)$ téren $\|\cdot\|_{W^{1,p}} \sim \|\cdot\|_+$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{R}^2$-ben az $\|(x_1,x_2)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$ vagy $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \max\{|x_1|,\ |x_2|\}$ norma ekvivalens a $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ normával, ez öröklődik arra az esetre, ha argumentumukba az $\|f\|_{L^p}$ és $\|f'\|_{L^p}$ számokat írjuk, ami éppen $\|f\|_{W^{1,p}}$ és $\|f\|_+$. $\square$

1.31. Tétel. *A $W^{1,p}(I)$ téren $\|\cdot\|_+ \sim \|\cdot\|_*$.*

Bizonyítás. A $p = \infty$ esetben az állítás triviális, hiszen az f függvény folytonossága miatt $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}|f| = \|f\|_{\max}$, így $\|f\|_+ = \|f\|_*$. Legyen tehát $p < \infty$.

(i) Az egyik irányú becsléshez szintén f folytonossága miatt

$$\|f\|_{L^p} \le \Big(\int_a^b \max|f|^p \Big)^{1/p} = \Big((b-a)\max|f|^p \Big)^{1/p} = c \cdot \|f\|_{\max}$$

(ahol $c = (b-a)^{1/p}$), így

$$\|f\|_+ = \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p} \le c\,\|f\|_{\max} + \|f'\|_{L^p} \le \max\{1, c\} \cdot \|f\|_* \,.$$

(ii) A másik irányú becsléshez felhasználjuk, hogy ha $f \in W^{1,p}(I)$, akkor teljesül rá a Newton–Leibniz tétel, azaz

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f' \qquad (\forall x, y \in I).$$

Ebből, ismét az 1.26. állítást is használva

$$\begin{aligned} |f(y)| \le |f(x)| + \int_x^y |f'| \le |f(x)| + \int_a^b |f'| = |f(x)| + \|f'\|_{L^1} \le \\ \le |f(x)| + c_1 \cdot \|f'\|_{L^p} \end{aligned}$$

alkalmas $c_1 > 0$ mellett. Az egyenlőtlenség két végét integrálva x szerint

$$(b-a)\,|f(y)| \le \int_a^b |f| + c_1(b-a)\,\|f'\|_{L^p} \le c_1 \cdot \|f\|_{L^p} + c_1(b-a)\,\|f'\|_{L^p} \,,$$

majd leosztva az intervallum hosszával

$$|f(y)| \le \frac{c_1}{b-a}\,\|f\|_{L^p} + c_1\,\|f'\|_{L^p} \qquad (\forall y \in I).$$

Ebből, f folytonossága révén

$$\|f\|_{\max} = \max_{y \in I} |f(y)| \le \frac{c}{b-a}\,\|f\|_{L^p} + c\,\|f'\|_{L^p} \,,$$

így

$$\|f\|_* \le \frac{c}{b-a}\,\|f\|_{L^p} + (c+1)\,\|f'\|_{L^p} \le \max\{\tfrac{c}{b-a},\ c+1\}\ \|f\|_+ \,. \qquad \square$$

1.32. Tétel. *$W^{1,p}(I)$ teljes a $\|\cdot\|_*$ normával.*

Bizonyítás. Legyen (f_n) Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_*$ norma szerint, ekkor (f_n) Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{\max}$ normában és (f'_n) Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_{L^p}$ normában. Mivel $C(I)$ teljes a $\|\cdot\|_{\max}$-normával, ezért létezik $f \in C(I)$, hogy $f_n \to f$ egyenletesen. Mivel $f'_n \in L^p(I)$, ezért létezik $g \in L^p(I)$, hogy $f'_n \to g$ L^p-normában. Célunk belátni azt, hogy $f \in W^{1,p}(I)$ és $f_n \to f$ $\|\cdot\|_*$-normában. Mivel $f_n \in W^{1,p}(I)$, ezért

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n \qquad (\forall x \in I,\ n \in \mathbb{N}^+).$$

Tekintsük az $n \to \infty$ határátmenetet. Mivel $f_n \to f$ egyenletesen, így pontonként is, azaz $f_n(x) \to f(x)$. Mivel $f'_n \to g$ L^p-normában, így

$$\Big|\int_a^x f'_n - \int_a^x g\Big| \le \int_a^x |f'_n - g| \le \int_a^b |f'_n - g| =$$

$$= \|f'_n - g\|_{L^1} \le c_1 \|f'_n - g\|_{L^p} \to 0,$$

$$\text{így} \qquad \int_a^x f'_n \to \int_a^x g.$$

Ezekből

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g \qquad (\forall x \in I),$$

vagyis f integrálfüggvénye g-nek. Mivel $g \in L^p(I)$, ez épp azt jelenti, hogy $f \in W^{1,p}(I)$. Emellett a fenti képletet m. m. deriválva $f' = g$ m. m. Így $\|f_n - f\|_{\max} \to 0$ és $\|f'_n - f'\|_{L^p} = \|f'_n - g\|_{L^p} \to 0$, amiből következik, hogy $\|f_n - f\|_* \to 0$. □

1.33. Következmény. *$W^{1,p}(I)$ teljes a $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ norma szerint is.*

1.34. Megjegyzés. (i) A $W^{1,p}(I)$ Szoboljev-tér általánosítja a $C^1(I)$ teret abban az értelemben, hogy csak m. m. deriválhatóságot követelünk. A teljességet ekkor úgy lehetett garantálni, ha a deriváltaknak csak az L^p-normáját (lényegében súlyozott átlagát) mérjük.

(ii) Mint korábban említettük, a $(C(I), \|\cdot\|_{L^p})$ tér nem teljes, és teljessé tétele az $L^p(I)$ tér. Egészen hasonlóan $(C^1(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ sem teljes, és teljessé tétele a $W^{1,p}(I)$ tér.

(b) Magasabbrendű Szoboljev-terek

Erről az esetről csak vázlatosan ejtünk szót, mivel teljesen hasonló az elsőrendű esethez. Legyen $1 \le p \le \infty$, $N \in \mathbb{N}^+$ és

$$W^{N,p}(I) := \Big\{ f \in C^{N-1}(I) : \ f^{(N-1)} \text{ abszolút folytonos, és } f^{(N)} \in L^p(I) \Big\},$$

normája pedig

$$\|f\|_{W^{N,p}} := \Big(\sum_{k=0}^{N} \|f^{(k)}\|_{L^p}^p\Big)^{1/p}.$$

Itt is bevezethetjük a megfelelő $\|.\|_+$ és $\|.\|_*$ normákat, és segítségükkel igazolható:

1.35. Tétel. $\big(W^{N,p}(I), \|\cdot\|_{W^{N,p}}\big)$ *teljes, azaz Banach-tér.*

A $W^{N,p}(I)$ Szoboljev-tér általánosítja a $C^N(I)$ teret úgy, hogy $f^{(N)}$ létezését csak m. m. követeljük meg. A $(C^N(I), \|\cdot\|_{W^{N,p}})$ tér nem teljes, és teljessé tétele a $W^{N,p}(I)$ tér.

1.4. Lineáris leképezések alaptulajdonságai. A $B(X, Y)$ tér

Legyenek először X és Y vektorterek. A lineáris leképezések vizsgálatakor az alábbi jelöléseket használjuk majd: azt írjuk, hogy $A : X \to Y$, ha $D(A) = X$ és azt, hogy $A : X \supset\!\to Y$, ha $D(A) \subset X$ altér. Először idézzük fel a lineáris leképezés fogalmát.

1.36. Definíció. Legyenek X és Y vektorterek a $\mathbb{K}$ számtest felett. Egy $A : X \supset\!\to Y$ leképezés *lineáris*, ha bármely $x, z \in D(A)$ és $c \in \mathbb{K}$ esetén

(i) $A(x + z) = A(x) + A(z)$, (ii) $A(cx) = cA(x)$.

Ezzel ekvivalens definíció: bármely $x, z \in X$ és $c, d \in \mathbb{K}$ esetén $A(cx + dz) = cA(x) + dA(z)$.

A lineáris leképezéseket gyakran lineáris *operátoroknak* hívjuk. Ha A lineáris, akkor nem okoz félreértést az argumentum zárójel nélküli jelölése, mivel A valóban úgy viselkedik, mint egy szorzás: a továbbiakban

$$Ax := A(x).$$

Az alábbi tulajdonságok triviális következmények.

1.37. Állítás. *Legyen $A : X \supset\!\to Y$ lineáris leképezés. Ekkor*

(i) $A0 = 0$, azaz A a(z X-beli) nullvektort a(z Y-beli) nullvektorba viszi.

(ii) $R(A) \subset Y$ is altér.

(iii) A pontosan akkor injektív, ha csak $x = 0$ esetén lehet $Ax = 0$.

A lineáris leképezések gyakori speciális típusát alkotják a számértékű leképezések, ezeket később külön is vizsgáljuk majd.

1.38. Definíció. Az $A : X \to \mathbb{K}$ lineáris leképezéseket lineáris *funkcionáloknak* nevezzük.

A továbbiakban legyenek X és Y *normált terek*, ugyanis a folytonossággal foglalkozunk. Először egy fontos fogalom:

1.39. Definíció. Egy $A : X \supset\!\!\to Y$ lineáris leképezést *korlátosnak* nevezünk, ha van olyan $M \geq 0$ állandó, hogy

$$\|Ax\| \leq M\,\|x\| \qquad (\forall x \in D(A)).$$

Az elnevezés azt tükrözi, hogy a vektorok hosszának nyújtása korlátos mértékű. Ez azt is jelenti, hogy ilyenkor A korlátos halmazt korlátos halmazba visz. Maga A értékkészlete természetesen nem korlátos, hiszen altér.

Megjegyezzük, hogy pontosabb lett volna az $\|Ax\|_Y \leq M\,\|x\|_X$ jelölés, mivel a szereplő két norma általában különböző lehet. A jelölések egyszerűbb volta érdekében azonban itt és a későbbiekben sem tüntetjük fel ezt, ha nem okoz félreértést.

A lineáris leképezések vizsgálatában alapvető lesz az alábbi tétel.

1.40. Tétel. *Egy lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, ha korlátos.*

Bizonyítás. Ha A korlátos, akkor a linearitás miatt

$$\|Ax - Az\| = \|A(x-z)\| \leq M\|x-z\| \qquad (\forall x, z \in D(A)),$$

így A Lipschitz-folytonos, és így folytonos is. (Ha $x_n \to x$, akkor $\|Ax_n - Ax\| \leq M\|x_n - x\| \to 0$.)

Ha A nem korlátos, akkor van olyan $(x_n) \subset D(A) \setminus \{0\}$ sorozat, melyre $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$. Emiatt A nem lehet folytonos, mert a $z_n := x_n/(n\|x_n\|)$ vektorokra

$$\|z_n\| = \frac{1}{n}, \quad \text{így} \quad z_n \to 0, \qquad \text{de} \quad \|Az_n\| \geq 1, \quad \text{így} \quad Az_n \not\to 0. \qquad \square$$

Megjegyezzük azt (ami a fenti bizonyításból is látszik), hogy egy A lineáris leképezés pontosan akkor folytonos az egész téren, ha egy pontban folytonos, hiszen az $\{x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; Ax_n \to Ax_0\}$ kritériumot a linearitással egy pontból bárhova eltolhatjuk. Tehát A vagy mindenhol, vagy sehol sem folytonos. Hasonlóan, a korlátosság ekvivalens azzal, hogy A az egységgömböt korlátos halmazba viszi, ekkor ugyanis beszorzás alapján minden origó középű gömböt, illetve ezek részhalmazait, azaz minden korlátos halmazt korlátos halmazba visz.

A korlátos lineáris leképezések esetén kitüntetett szerepet játszanak az *egész téren értelmezett* leképezések. Ha ugyanis $D(A)$ sűrű X-ben, akkor az A folytonos lineáris leképezés egyértelműen kiterjeszthető a folytonosság és linearitás megtartásával az egész térre az $x \mapsto \lim_{n\to\infty} Ax_n$ képlettel, ahol $(x_n) \subset D(A)$ olyan sorozat, melyre $x_n \to x$. Ha $D(A)$ nem sűrű X-ben, akkor $\overline{D(A)}$-ra terjesztjük ki és ezt tekinthetjük új alaptérnek.

1.41. Definíció. Jelölje $B(X,Y)$ az $A : X \to Y$ korlátos lineáris leképezések halmazát.

A $B(X,Y)$ halmaz természetes módon vektorteret alkot a leképezések pontonkénti összeadásával és számmal való szorzásával. Most normát is definiálunk ebben a térben.

1.42. Definíció. Ha $A \in B(X,Y)$, akkor legyen

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \ x \in X, \ \|x\| \le 1\}$$

az A úgynevezett operátornormája, vagy egyszerűen csak normája.

Ez valós szám, hiszen A korlátos, így valamilyen M pozitív számra $\|Ax\| \le M$ az egységgömbben. Sőt, ebből látszik, hogy ha M a korlátosság definíciójában szereplő alkalmas konstans, akkor $\|A\| \le M$. Ha viszont a fenti normát tetszőleges lineáris leképezésre értelmeznénk, akkor A pontosan akkor lenne korlátos, ha $\|A\|$ véges. Nyilvánvaló az alábbi

1.43. Állítás. *A fent definiált operátornorma valóban norma.*

Ha tehát X és Y normált terek, akkor $B(X,Y)$ is normált tér az operátornormával.

A norma alábbi átfogalmazásai a definícióból következnek:

1.44. Állítás. *Ha $A \in B(X,Y)$, akkor*

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| = 1\} \\ &= \min\{M \ge 0 : \|Ax\| \le M\,\|x\| \ \ \forall x \in X\}.\end{aligned}$$

Az első egyenlőség úgy is fogalmazható, hogy $\|A\|$ a vektorok megnyújtásának felső határa (ill. lehetséges legnagyobb mértéke, amikor sup helyett max írható).

1.45. Következmény. *(i) Bármely $A \in B(X,Y)$ és $x \in X$ esetén $\|Ax\| \le \|A\| \|x\|$.*

(ii) Bármely $C \in B(X,Y)$ és $A \in B(Y,Z)$ esetén $\|AC\| \le \|A\| \, \|C\|$ (a norma szubmultiplikatív).

1.46. Tétel. *Legyen X normált tér, Y Banach-tér. Ekkor $B(X,Y)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen (A_n) Cauchy-sorozat $B(X,Y)$-ban. Rögzített $x \in X$ esetén az

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \, \|x\|$$

egyenlőtlenség alapján $(A_n x)$ Cauchy-sorozat Y-ban. Mivel Y teljes, ezért $(A_n x)$ konvergens is. Legyen A az az X-ből Y-ba képező operátor, amelyre

$$Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x.$$

Ekkor A lineáris a limeszképzés linearitása miatt. Igazoljuk, hogy korlátos is, azaz $A \in B(X,Y)$. Mivel (A_n) Cauchy-sorozat és $\Big| \|A_n\| - \|A_m\| \Big| \le \|A_n - A_m\|$, így $(\|A_n\|)$ is Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, így konvergens is, de elég annyi, hogy korlátos. Így $\|A_n x\| \le M \, \|x\|$ teljesül minden $x \in X$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén és mivel $A_n x \to Ax$, ezért $\|Ax\| \le M \, \|x\|$, azaz valóban $A \in B(X,Y)$. Még azt kell belátnunk, hogy az (A_n) sorozat a $B(X,Y)$ tér normájában, azaz az operátornormában konvergál az A operátorhoz. Mivel Cauchy-sorozatról van szó, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \ge N$ esetén $\|A_n x - A_m x\| \le \varepsilon \, \|x\|$ $(\forall x \in X)$. Legyen x és n rögzített, és tartsunk m-mel a végtelenbe, ekkor $\|(A_n - A)x\| \le \varepsilon \, \|x\|$ $(\forall n \ge N)$, de ez minden x-re elmondható és N nem függ x-től. Azt kaptuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \ge N$ esetén $\|A_n - A\| \le \varepsilon$, tehát $A_n \to A$ operátornormában. □

1.47. Következmény. *Ha X normált tér és $\mathbb{K}$ az alaptest, akkor $B(X,\mathbb{K})$ Banach-tér.*

Példák folytonos, ill. nem folytonos lineáris leképezésre. Az alábbi példáknak az a jelentősége, hogy általános elvet tükröznek: az integrálás folytonos, míg a deriválás nem folytonos, ha adott térből önmagába képező operátorként vizsgáljuk. Általában is az integrálást tartalmazó ún. integráloperátorok folytonosak, míg a deriválást tartalmazó ún. differenciáloperátorok nem folytonosak adott térből önmagába képező operátorként.

Tekintsük az $X := C[a,b]$ teret a maximum-normával, és benne az alábbi operátorokat:

1. Legyen $D(A) = C[a,b] = X$, és $f \in C[a,b]$ esetén

$$(Af)(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Ekkor A lineáris, és

$$\|Af\| = \max_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt \le (b-a) \max_{t\in[a,b]} |f(t)| = (b-a)\|f\|,$$

így A korlátos.

2. Legyen $D(A) := C^1[a,b] \subset X$ (azaz továbbra is a maximum-normával), és $f \in D(A)$ esetén

$$Af := f'.$$

Ekkor az $f_n(x) := e^{nx}$ sorozatra $Af_n = f_n' = nf_n$, így

$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} = n \to \infty,$$

tehát A nem korlátos.

Általánosabb integráloperátorokra a 6.2., differenciáloperátorokra többek között a 8.1. szakaszban látunk majd további példákat, ezek a közelítő módszerek vizsgálatának is fontos tárgyai lesznek. Megemlítjük azt is, hogy ha az alaptér és képtér különböző (a halmaz ugyanaz is lehet, de a norma más), akkor nem mondható ilyen általános elv arra, hogy mely operátorok korlátosak vagy nem azok. Két szélsőséges példa: ha $r < s$ és az $X = Y = L^s(\Omega)$ alaphalmazon $\|f\|_X := \|f\|_{L^r}$ és $\|f\|_Y := \|f\|_{L^s}$, akkor az $Af := f$ identitásoperátor nem korlátos, mert ahhoz az $\|f\|_{L^s} \le M\,\|f\|_{L^r}$ becslés kellene, ami az 1.27. megjegyzés szerint nem igaz. Másrészt tetszőleges operátor korlátossá tehető megfelelő normával: ha A lineáris leképezés $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek közt, akkor az $\|x\|_* := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$ új normát bevezetve az X térben, nyilvánvalóan $\|Ax\|_Y \le \|x\|_*$ ($\forall x \in X$), azaz A korlátos az $(X, \|\cdot\|_*)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ terek közt.

2. fejezet

Hilbert-terek

2.1. Hilbert-terek értelmezése

A következőkben a normált tereken belül egy speciálisabb térfogalommal foglalkozunk, melyekben skalárszorzást értelmezünk a tér elemei között. Ezáltal e terek jobban hasonlítanak a véges dimenziós euklideszi terekhez, mint általában egy normált tér; értelmezhető lesz bennük a merőlegesség, valamint a vektorok ortonormált bázissal való előállításának megfelelője sor alakjában. A skalárszorzással ellátott terek normált terek is lesznek (az euklideszi hossz megfelelőjeként természetesen értelmezett normával), és az erre nézve teljes tereket nevezik *Hilbert-térnek*.

A Hilbert-tereket alapértelmezésben a komplex számtest fölött szokás tekinteni. Itt is így teszünk, és csak megemlítjük a valós analógiát; a könyv későbbi részeiben viszont több szerep jut majd a valós Hilbert-tereknek is.

2.1. Definíció. Legyen H vektortér $\mathbb{C}$ felett. Egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ leképezést *skalárszorzatnak* nevezünk, ha bármely $x, y \in H$ esetén

(i) az $x \mapsto \langle x, y \rangle$ leképezés lineáris funkcionál,

(ii) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,

(iii) $\langle x, x \rangle > 0$, kivéve ha $x = 0$.

2.2. Megjegyzés. (a) Az (i) és (ii) tulajdonságokból adódik, hogy minden $x \in H$ esetén az $y \mapsto \langle x, y \rangle$ hozzárendeléssel értelmezett funkcionál konjugáltan lineáris, azaz

$$\langle x, c_1 y_1 + c_2 y_2 \rangle = \overline{c}_1 \langle x, y_1 \rangle + \overline{c}_2 \langle x, y_2 \rangle \qquad (\forall x, y_1, y_2 \in H,\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

A skalárszorzás tehát egy pozitív definit, konjugáltan bilineáris leképezés. (Utóbbit néha szeszkvilineárisnak is mondják.)
(b) Mivel egy lineáris funkcionál 0-hoz 0-t rendel, így az (i) tulajdonság miatt $\langle 0, y\rangle = 0$ $(\forall y \in H)$. Speciálisan $\langle 0, 0\rangle = 0$, ezért kellett kizárni az $x = 0$ esetet a (iii) pontban.
(c) A fenti megfordítása is érvényes, azaz ha egy x elemnek minden $y \in H$ vektorral vett skalárszorzata 0, akkor $x = 0$. Ekkor ugyanis önmagával vett skalárszorzata is 0, így a (iii) tulajdonság miatt $x = 0$.

Ha H vektortér $\mathbb{C}$ felett egy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalárszorzattal, akkor a $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ párt *skalárszorzattérnek* hívjuk. Ha H az $\mathbb{R}$ valós test felett vektortér, akkor *valós skalárszorzattérről* beszélünk, ekkor a skalárszorzás definíciójában értelemszerűen a konjugálás elhagyható. Valós esetben tehát a skalárszorzat egy pozitív definit bilineáris funkcionál $H \times H$-n. A skalárszorzattereket szokás pre-Hilbert-térnek vagy (elsősorban a valós esetben) euklideszi térnek is nevezni.

Norma értelmezése skalárszorzattérben: ha $x \in H$, akkor legyen

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

ennek neve a skalárszorzat által indukált norma. Ez az euklideszi hossz megfelelője. A normatulajdonságok igazolásánál csak a háromszög-egyenlőtlenség nem lesz triviális; ennek bizonyításához olyan segédállításra van szükségünk, amely önmagában is a Hilbert-terek egyik technikai alapeszköze.

2.3. Állítás (Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség). *Minden $x, y \in H$ esetén*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|\,.$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ tetszőleges. Ekkor

$$0 \le \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \|x\|^2 - \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle - \lambda\,\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\,\|y\|^2\,.$$

Ha $y = 0$, akkor triviálisan igaz az egyenlőtlenség, ezért feltehető, hogy $y \neq 0$. Ekkor megválaszthatjuk λ-t úgy, hogy $\langle x, y\rangle = \lambda\,\|y\|^2$ legyen. Ekkor $\langle y, x\rangle = \overline{\lambda}\,\|y\|^2$ és $\overline{\lambda}\lambda = |\lambda|^2$, így, folytatva az egyenlőtlenséget,

$$0 \le \|x\|^2 - |\lambda|^2\,\|y\|^2 - |\lambda|^2\,\|y\|^2 + |\lambda|^2\,\|y\|^2 = \|x\|^2 - |\lambda|^2\,\|y\|^2 = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

Ezt átrendezve a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk. □

A „Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij" helyett majd gyakran a CSB rövidítést használjuk. Itt érdemel említést a CSB-egyenlőtlenség első két egyszerű alkalmazása:

2.4. Állítás. *(i) Bármely $x \in H$ esetén $\|x\| = \sup\{\, |\langle x, y\rangle| : \ y \in H,\ \|y\| = 1\}$.*

(ii) A skalárszorzás mindkét változójában folytonos, azaz ha $x_n \to x$, akkor bármely $y \in H$ esetén $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ és $\langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$.

Bizonyítás. (i) A CSB-egyenlőtlenség szerint $\langle x, y\rangle \le \|x\|$ ($\forall y \in H,\ \|y\| = 1$), és $y := \frac{x}{\|x\|}$ esetén egyenlőség áll fenn.
(ii) Ha $x_n \to x$ és $y \in H$, akkor $|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n - x\|\|y\| \to 0$. Ugyanez igaz a fordított sorrendre is. $\square$

2.5. Megjegyzés. A (ii) pont szerint tehát $\lim \langle x_n, y\rangle = \langle \lim x_n, y\rangle$, azaz a limeszképzés és skalárszorzás felcserélhető. Ugyanezt egy konvergens sor részletösszegeire alkalmazva adódik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, y\rangle$.

Térjünk most vissza az indukált normához:

2.6. Állítás. *A $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ képlet valóban normát definiál H-n.*

Bizonyítás. A (iii) skalárszorzat-axióma miatt bármely $x \in H$ esetén $\|x\| \ge 0$, és csak $x = 0$ esetén lehet 0. A konstansok kiemelésével $\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx\rangle} = \sqrt{c\bar{c}\,\langle x, x\rangle} = |c|\|x\|$ bármely $c \in \mathbb{C}$, $x \in H$ esetén. A CSB-egyenlőtlenségből pedig könnyen ellenőrizhető a háromszög-egyenlőtlenség:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\ \langle x, y\rangle$$

$$\le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 . \quad \square$$

2.7. Definíció. A $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzatteret *Hilbert-térnek* nevezzük, ha H az indukált normával teljes.

Példák Hilbert-térre.

- $\mathbb{R}^n$ mint $\mathbb{R}$ feletti vektortér valós Hilbert-tér a szokásos

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

skalárszorzással. Az indukált norma ui. éppen az euklideszi távolság lesz, ezzel a tér valóban teljes. (A valós Hilbert-tér fogalma ennek általánosítása.)

- $\mathbb{C}^n$ mint $\mathbb{C}$ feletti vektortér (komplex) Hilbert-tér a

$$\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}^n} := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i$$

skalárszorzással. (Ennek teljessége ekvivalens $\mathbb{R}^{2n}$ teljességével.)

- $\ell_2 = \left\{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$, azaz a négyzetesen összegezhető komplex sorozatok tere Hilbert-tér az

$$\langle (x_n), (y_n)\rangle_{\ell_2} := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

skalárszorzással. A teljesség az 1.3.2. szakaszból következik.

- $L^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető: $\int\limits_{\Omega} |f|^2 \, \mathrm{d}\lambda < \infty\}$, azaz egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények tere Hilbert-tér az

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f\overline{g} \, \mathrm{d}\lambda$$

skalárszorzással. A teljesség az 1.3.1. szakaszból következik. Megemlítjük, hogy a skalárszorzás (iii) axiómája megfelel az indukált normára vonatkozó első axiómának, és most ez (mint az 1.3.1. szakaszban láttuk) kihasználja az $L^2(\Omega)$-beli egyenlőség majdnem mindenütt való értelmezését. Azaz, ha $f \in L^2(\Omega)$ és $\langle f, f\rangle_{L^2} = 0$, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

- A 2-es indexű Szoboljev-terek: $W^{1,2}(I) = \{f : I \to \mathbb{C}$ abszolút folytonos, $f' \in L^2(I)\}$. A $W^{1,2}(I)$ jelölés helyett gyakran a $H^1(I)$ jelölés használatos, itt ugyanis csak a deriválás rendje számít, a kitevő viszont csak $p = 2$ lehet, ezért nem jelöljük. Ekkor tehát $H^1(I) := W^{1,2}(I)$ Hilbert-tér az

$$\langle f, g\rangle_{H^1} := \int_a^b (f\overline{g} + f'\overline{g}') \, \mathrm{d}\lambda$$

skalárszorzással. Itt a skalárszorzat által indukált norma

$$\|f\|_{H^1} := \sqrt{\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2},$$

ami visszaadja az 1.3.3. részben bevezetett normát, így a teljesség az 1.33. következménynek köszönhető.

- A fentihez hasonlóan, bármely $N \in \mathbb{N}^+$ esetén $H^N(I) := W^{N,2}(I)$ Hilbert-tér az
$$\langle f, g \rangle_{H^N} := \int_a^b \sum_{k=0}^{N} f^{(k)} \overline{g}^{(k)}$$
skalárszorzással.

2.2. Ortogonalitási tulajdonságok Hilbert-térben

2.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $x, y \in H$ vektorok *ortogonálisak* (vagy merőlegesek) egymásra, ha $\langle x, y \rangle = 0$. Ennek jelölése: $x \perp y$.

Ugyanez halmazokkal is értelmezhető:

2.9. Definíció. Legyen $x \in H$ vektor, $K, M \subset H$ halmazok.
(i) $x \perp K$, ha $x \perp k$ minden $k \in K$ esetén.
(ii) $K \perp M$, ha $k \perp m$ minden $k \in K$ és $m \in M$ esetén.

2.10. Definíció. Legyen $K \subset H$ tetszőleges részhalmaz. A $K^\perp := \{y \in H : y \perp K\}$ halmazt K *ortokomplementumának* vagy ortogonális kiegészítőjének nevezzük.

Míg K bármilyen részhalmaza lehet H-nak, az ortokomplementuma már nem lehet akármilyen.

2.11. Állítás. *Bármely $K \subset H$ esetén $K^\perp$ zárt altér H-ban.*

Bizonyítás. Egyrészt $K^\perp$ altér, mert ha $y_1, y_2 \perp K$, akkor bármely c_1, c_2 konstansokkal $c_1 y_1 + c_2 y_2 \perp K$. Másrészt ha $(y_n) \subset K^\perp$ és $y_n \to y \in H$, akkor a skalárszorzás folytonossága miatt $0 = \langle y_n, k \rangle \to \langle y, k \rangle$ minden $k \in K$ esetén, így $y \in K^\perp$ szintén teljesül. Így $K^\perp$ zárt. $\square$

2.12. Megjegyzés. Ugyanezen megfontolással adódik, hogy bármely $K \subset H$ halmaz esetén $K^\perp = \overline{[K]}^\perp$ (ahol utóbbi a K lineáris burkának lezártját jelöli). Azaz, $x \perp K$ pontosan akkor, ha $x \perp \overline{[K]}$. Itt ugyanis a második formálisan erősebb tulajdonság, viszont ha $x \perp K$, akkor x ortogonális a K-beliek lineáris kombinációira, ill. ezek limeszeire is, azaz minden $\overline{[K]}$-beli vektorra is.

Most néhány nevezetes számolási szabályt mondunk ki.

2.13. Állítás. *Legyen H Hilbert-tér. Ekkor*

1. (Pitagorasz-tétel) *Ha $x, y \in H$ és $x \perp y$, akkor $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

2. (Paralelogramma-szabály) *Minden $x, y \in H$ esetén*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

3. (Polarizációs egyenlőség) *Minden $x, y \in H$ esetén*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2.$$

Bizonyítás. A norma-négyzetek kifejtése után egyszerű számolással adódnak. □

2.14. Megjegyzés. (i) Valós Hilbert-térben a polarizációs egyenlőség egyszerűbb:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

(ii) A polarizációs egyenlőség jelentősége, hogy a skalárszorzat kifejezhető a norma segítségével (amit a definícióban fordítva tettünk). Ekkor, a metrikus terekhez hasonlóan, felmerül a kérdés: ha adott egy normált tér, akkor a norma származtatható-e valamilyen skalárszorzatból, vagyis bevezethető-e olyan skalárszorzat, hogy az általa indukált norma megegyezik a tér eredeti normájával? A válasz általában itt is tagadó: igazolható, hogy egy normált tér normája pontosan akkor származik skalárszorzatból, ha teljesül a parallelogramma-szabály az adott normára. Ilyenkor a skalárszorzatot (természetesen) a polarizációs egyenlőség adja meg.

A következő tétel az 1.18. állítás általánosítása. Segítségével lehet ezután igazolni a Riesz-féle ortogonális felbontási tételt, amely bizonyos értelemben a Hilbert-tereknek a véges dimenzióshoz hasonló geometriáját fejezi ki.

2.15. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, $K \subset H$ nem üres, konvex, zárt halmaz. Ekkor bármely $x \in H$ esetén van egyetlen olyan $y \in K$, melyre $\|x-y\| = dist(x, K)$ (ahol $dist(x, K) := inf\{\|x-z\| : \ z \in K\}$ az x-nek K-tól vett távolsága).*

Bizonyítás. Legyen $d = \operatorname{dist}(x, K)$. Az infimum definíciója miatt létezik $(y_n) \subset K$, melyre $d_n := \|x - y_n\| \to d$. Írjuk fel a paralelogramma-szabályt az $x - y_n$ és $x - y_m$ vektorokra:

$$\|2x - (y_n + y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\Big(\underbrace{\|x-y_n\|^2}_{{d_n}^2} + \underbrace{\|x-y_m\|^2}_{{d_m}^2}\Big).$$

Itt $\|2x - (y_n + y_m)\| = 2\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \geq 2d$, mert K konvexitása miatt $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$. Így

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2({d_n}^2 + {d_m}^2) - 4d^2 = 2(d_n^2 - d^2) + 2(d_m^2 - d^2).$$

Ha $n, m \to \infty$, akkor a jobb oldal 0-hoz tart, így bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon$, ha n, m elég nagy, azaz (y_n) Cauchy-sorozat. Legyen $y := \lim y_n$. Mivel K zárt, így $y \in K$, emellett $\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = \lim d_n = d$.

Végül belátjuk, hogy ez az y egyértelmű. Azt kaptuk ugyanis, hogy bármely távolság-minimalizáló sorozat (azaz olyan $(y_n) \subset K$ sorozat, amelyre $\|x - y_n\| \to d$) konvergens. Ha lenne egy másik $z \in K$ vektor, melyre $\|x - z\| = d$, akkor vegyünk egy $(z_n) \subset K$ sorozatot, melyre $z_n \to z$, ez szintén távolság-minimalizáló. Ekkor (y_n) és (z_n) összefésülése is távolság-minimalizáló, így konvergens, de ez csak $y = z$ esetén lehet. □

2.16. Tétel (Riesz-féle ortogonális felbontás). *Legyen H Hilbert-tér, $M \subset H$ zárt altér. Ekkor $H = M \oplus M^\perp$, azaz bármely $x \in H$ vektor egyértelműen előáll $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in M$ és $x_2 \in M^\perp$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in H$ tetszőleges. Mivel az M zárt altér egyben konvex zárt halmaz is, az előző tétel szerint létezik egyetlen olyan $x_1 \in M$ vektor, amelyre $\|x - x_1\| = d := \operatorname{dist}(x, M)$. Legyen $x_2 = x - x_1$, ekkor a felbontás fennáll, így azt kell csak belátni, hogy $x_2 \in M^\perp$, azaz $\langle x_2, y\rangle = 0$ $(\forall y \in M)$. Ez triviális, ha $y = 0$, így legyen $y \in M$, $y \neq 0$ tetszőleges.
Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ is tetszőleges. Ekkor $x_1 + \lambda y \in M$, ezért

$$d^2 \leq \|x - (x_1 + \lambda y)\|^2 = \|x_2 - \lambda y\|^2 = \|x_2\|^2 - \overline{\lambda}\langle x_2, y\rangle - \lambda\langle y, x_2\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 .$$

Mivel $\|x_2\| = d$, így

$$0 \leq |\lambda|^2\|y\|^2 - \overline{\lambda}\langle x_2, y\rangle - \lambda\langle y, x_2\rangle = |\lambda|^2\|y\|^2 - \overline{\lambda}\langle x_2, y\rangle - \lambda\overline{\langle x_2, y\rangle}.$$

A CSB-egyenlőtlenség bizonyításának mintájára megválaszthatjuk λ-t úgy, hogy $\langle x_2, y\rangle = \lambda\|y\|^2$ legyen, és ekkor

$$0 \leq |\lambda|^2\|y\|^2 - |\lambda|^2\|y\|^2 - |\lambda|^2\|y\|^2 = -|\lambda|^2\|y\|^2 ,$$

ami csak akkor lehet, ha $\lambda = 0$, azaz ha $\langle x_2, y\rangle = 0$.
A felbontás egyértelmű, ugyanis ha $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, ahol $x_1, y_1 \in M$ és $x_2, y_2 \in M^\perp$, akkor $M \ni (x_1 - y_1) = (y_2 - x_2) \in M^\perp$, azaz $x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$. □

2.17. Megjegyzés. A tételbeli x_1 vektort az x vektor M-re vett (merőleges) *vetületének* hívjuk, és x_M-mel jelöljük. Erre az alábbiak igazak:

(i) $x - x_M \perp x_M$ és $\operatorname{dist}(x, M) = \|x - x_M\|$, ez a tétel bizonyításában szerepel.

(ii) A vetület egyértelműsége miatt egy $y \in M$ vektor pontosan akkor esik egybe x_M-mel, ha $x - y \perp M$.

(iii) $\|x_M\| \leq \|x\|$, hiszen $x - x_M \perp x_M$ miatt $\|x\|^2 = \|x - x_M\|^2 + \|x_M\|^2 \geq \|x_M\|^2$.

(iv) Ha M véges dimenziós altér és benne $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormált bázis, akkor
$$x_M = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
Ugyanis, a jobb oldali vektort y-nal jelölve $y \in M$, és minden e_j bázisvektorra $\langle y, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \delta_{ij} = \langle x, e_j \rangle$, ezért $x - y \perp e_j$ $(\forall j = 1, \ldots, n)$ és így $x - y \perp M$. Ekkor a (ii) pont alapján $y = x_M$.

2.3. Fourier-sorok Hilbert-térben

E témakör arról szól, hogyan lehet általánosítani a véges dimenziós terek vektorainak ortonormált bázissal való előállítását végtelen dimenziós esetre. A fő eredmény ilyen előállítást ad megfelelő sor alakjában, így egy vektor megszámlálhatóan végtelen sok koordinátával írható le. Először azon fogalmakkal foglalkozunk, amelyek a bázis, ill. ortonormált bázis fogalma helyére léphetnek.

2.18. Definíció. Egy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ vektorsorozat *teljes rendszer*, ha minden $x \in H$ esetén fennáll az alábbi tulajdonság: ha $x \perp e_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, akkor $x = 0$.

2.19. Definíció. Egy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ vektorsorozat *totális rendszer*, ha lineáris burka sűrű.

2.20. Állítás. *Hilbert-térben egy vektorrendszer pontosan akkor teljes, ha totális.*

Bizonyítás. Az M pontosan akkor teljes rendszer, ha $M^\perp = \{0\}$, ami a 2.12. megjegyzés szerint pontosan akkor teljesül, ha $\overline{[M]}^\perp = \{0\}$. Ez viszont a 2.16. tétel szerint ekvivalens azzal, hogy $\overline{[M]} = H$, azaz M totális rendszer. □

A totális rendszer fogalmát Banach-térben is lehet majd használni, mert nem használ ortogonalitást. Hilbert-térben viszont egyszerűbben alkalmazható a teljes rendszer fogalma, így most ezzel dolgozunk.

2.21. Definíció. Egy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ vektorsorozat *ortonormált rendszer*, ha elemei páronként ortogonálisak és normáltak, vagyis ha $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} := 1$, ha $i = j$ és 0, ha $i \neq j$.

Ezek alapján értelemszerű a fő fogalom:

2.22. Definíció. Egy $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ vektorsorozat *teljes ortonormált rendszer (TONR)*, ha teljes és ortonormált.

2.23. Állítás. *Szeparábilis Hilbert-térben mindig létezik teljes ortonormált rendszer.*

Bizonyítás. A tér szeparábilis volta azt jelenti, hogy létezik sűrű megszámlálható halmaz. Ha ennek elemeit rekurzívan megritkítjuk úgy, hogy lépésenként kidobjuk az előzőektől lineárisan függő elemeket, akkor egy olyan $x_1, x_2, \dots$ lineárisan független rendszert kapunk, melynek lineáris burka azonos az eredetiével, tehát sűrű. Ebből Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással ortonormált $e_1, e_2, \dots$ sorozatot kapunk, melyre teljesül, hogy $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Emiatt $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots\} = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots\}$ is sűrű H-ban, tehát $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ totális rendszer, vagyis teljes rendszer. □

2.24. Megjegyzés. A fenti bizonyítás csak az utolsó lépésben használja ki, hogy van skalárszorzat (ortogonalitás). Ha ezt elhagyjuk, akkor a bizonyítás tetszőleges szeparábilis normált térben garantálja megszámlálható és lineárisan független totális rendszer létezését.

2.25. Megjegyzés. (i) A 2.23. állítás megfordítása is igaz, vagyis ha van megszámlálható teljes ortonormált rendszer egy Hilbert-térben, akkor az szeparábilis. A rendszer elemeinek racionális együtthatókkal vett lineáris kombinációi ugyanis megszámlálható sűrű halmazt alkotnak.
(ii) Az ortonormált rendszer definíciójában feltettük, hogy az megszámlálható sok elemből áll, célunk ugyanis TONR-ek szerinti sorfejtés. Elvileg tetszőleges számosságú ortonormált rendszer is megengedhető, ebben az értelemben nézve bebizonyítható, hogy minden (nemcsak szeparábilis) Hilbert-térben létezik teljes ortonormált rendszer, szeparábilis térben viszont egy ilyen rendszer is csak megszámlálható lehet.

Mivel a TONR-eket eleve sorozatnak értelmeztük, a továbbiakban csak azt írjuk: $(e_n) \subset H$ TONR. Célunk az ilyenek szerinti sorfejtés, ehhez először a Weierstrass-kritériumot (1.12. állítás) élesítjük ortogonális sorozat esetén.

2.26. Állítás. *Legyen $\{x_n\} \subset H$ ortogonális sorozat. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ konvergens} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 \text{ konvergens.}$$

Bizonyítás. Legyenek $s_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$ a megfelelő részletösszegek. Az ortogonalitás miatt $n \geq m$ esetén

$$\|s_n - s_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\|^2 = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|,$$

így az egyik sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha a másik is az. Innen már H és $\mathbb{R}$ teljessége miatt következik, hogy a két sorozat ekvikonvergens. □

2.27. Definíció. Legyen H Hilbert-tér, $(e_n) \subset H$ TONR, $x \in H$ adott. A

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

sort az x elem (e_n) rendszer szerinti *Fourier-sorának* nevezzük. A $c_i = \langle x, e_i \rangle$ számokat Fourier-együtthatóknak hívjuk.

2.28. Tétel (Fourier-sorok főtétele). *Legyen H Hilbert-tér, $(e_n) \subset H$ TONR. Ekkor tetszőleges $x \in H$ elem Fourier-sora konvergens és összege x.*

Bizonyítás. (i) (Konvergencia.) Vezessük be az $x_i := \langle x, e_i \rangle e_i$ jelöléseket. Mivel $\{x_i\}$ ortogonális sorozat, ezért a 2.26. állítás alapján a $\sum x_i$ ortogonális sor pontosan akkor konvergens, ha $\sum \|x_i\|^2$ konvergens. Legyen $s_n := \sum_{i=1}^{n} x_i$ és $H_n = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor a 2.17. megjegyzés (iii)-(iv) pontjai szerint $s_n = x_{H_n}$, vagyis s_n az x-nek a H_n véges dimenziós altérre vett vetülete, ill. emiatt $\|s_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Mivel $\|s_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$, ezért a $\sum \|x_i\|^2$ pozitív tagú sor szeletei felülről korlátosak, tehát konvergens. Így tehát $\sum x_i$ is konvergens.

(ii) (Az összeg x.) Legyen a sorösszeg $s := \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$, be kell látni, hogy $s = x$. Az $\{e_n\}$ rendszer teljessége miatt ehhez elég azt belátni, hogy $\langle s - x, e_j \rangle =$

0 minden j-re. Ez igaz, mert a skalárszorzás folytonossága miatt adódik (l. 2.5. megjegyzés), hogy

$$\langle s, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i,\ e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \langle x, e_i \rangle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle .$$

□

2.29. Állítás. *Legyen H Hilbert-tér, $(e_n) \subset H$ TONR, $x, y \in H$. Ha*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i, \qquad \textit{akkor} \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overline{d}_i.$$

Speciálisan

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 . \tag{2.1}$$

Bizonyítás. A skalárszorzás folytonossága miatt

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, \sum_{j=1}^{\infty} d_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_i \overline{d}_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overline{d}_i.$$

A másik egyenlőség ebből következik $x = y$ esetén. □

A fenti második állítás átírható a Fourier-együtthatók $c_i = \langle x, e_i \rangle$ képlete révén:

2.30. Következmény (Parseval-egyenlőség). *Legyen H Hilbert-tér, $(e_n) \subset H$ TONR, $x \in H$. Ekkor*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 .$$

2.31. Megjegyzés. Ha $(e_n) \subset H$ nem teljes H-ban, csak ONR, akkor $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x_V\|^2$, ahol V az (e_n) lineáris burkának lezártja. Ugyanis (e_n) TONR V-ben, így ott igaz a Parseval-egyenlőség x_V-re. Itt $\langle x, e_i \rangle = \langle x_V, e_i \rangle$ minden i-re (mivel $x - x_V \perp V$), így a fenti összeg azonos az x_V-re vonatkozó összeggel.

Ebből az is következik, hogy ONR esetén csak $\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ teljesül, ez az ún. Bessel-egyenlőtlenség.

2.32. Tétel. *Minden szeparábilis H Hilbert-tér izometrikusan izomorf ℓ_2-vel.*

Bizonyítás. Legyen $(e_n) \subset H$ TONR H-ban, és tekintsük a

$$T: \ x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \quad \mapsto \quad (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

megfeleltetést. Ez lineáris, és $H \to \ell_2$ leképezés, mert ha x sora konvergens, akkor a 2.26. állítás alapján $(c_i) \in \ell_2$. Emellett T kölcsönösen egyértelmű: injektív, mivel x egyértelműen meghatározza Fourier-együtthatóit a $c_i = \langle x, e_i \rangle$ képlet révén, és szuperjektív, mivel bármely $(c_i) \in \ell_2$ előáll az $x := \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ sor T-képeként, ahol x sorának konvergenciáját ismét a 2.26. állítás garantálja. Végül T izometrikus a (2.1) egyenlőség miatt. □

2.33. Megjegyzés. A fenti tételnek számos hasznos következménye van.

(i) Ha H szeparábilis Hilbert-tér és $(e_n) \subset H$ TONR, akkor a tételt átfogalmazva, az $x \in H$ vektorokat megfeleltethetjük a $(c_1, c_2, \dots)$ koordinátasorozatnak. Ez közvetlenül általánosítja a véges dimenziós terek vektorainak koordinátákkal való leírását.

(ii) Bármely két szeparábilis Hilbert-tér izometrikusan izomorf egymással.

(iii) Ha H szeparábilis Hilbert-tér és $(e_n) \subset H$ TONR, akkor nemcsak a vektorok írhatók le végtelen sok koordinátával, hanem az $A : H \to H$ operátorok is $(\infty \times \infty)$-es mátrixszal.

Legyen először A korlátos lineáris operátor. Ha $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$, akkor $\langle Ax, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle Ae_j, e_i \rangle$. Ez az $a_{ij} := \langle Ae_j, e_i \rangle$ jelöléssel azt jelenti, hogy ha x koordinátái a c_i számok, akkor Ax koordinátái a $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, c_j$ számok. Ez egy általánosított mátrix-vektor-szorzás, vagyis tetszőleges ilyen operátor megfeleltethető egy alkalmas $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}^+}$ $(\infty \times \infty)$-es mátrixnak.

Ez a megfeleltetés megfelelő módosításokkal átvihető arra az esetre is, ha $D(A) \subset H$ és A nem korlátos. Ez fizikai jelentése miatt nevezetes. A kvantummechanika egyik egzakt megfogalmazását ugyanis Heisenberg ún. mátrixmechanikaként dolgozta ki, ami az operátorok végtelen mátrixszal való reprezentációját tartalmazza, a másik megfogalmazást Schrödinger hullámmechanikaként írta le, amely $L^2(\mathbb{R}^n)$-ben értelmezett (nem korlátos) operátorokat használ. Schrödinger azt is megmutatta, hogy a két megfogalmazás ekvivalens [65], majd Neumann János ugyanezt az $L^2(\mathbb{R}^n)$ és ℓ^2 terek izometriájából vezette le [50]. Ez az ekvivalencia megfelel az operátorok előbb leírt megfeleltetésének.

Most néhány nevezetes példát mutatunk teljes ortonormált rendszerre.

- $H := L^2(0, \pi)$,

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

(szinuszrendszer). Itt integrálással adódik, hogy ez ortonormált rendszer, továbbá az analízis egy tétele szerint ha $f \in L^2(0, \pi)$ és $\int_0^\pi f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$ minden n-re, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt [70]. Ez épp azt jelenti, hogy a szinuszrendszer TONR-t alkot.

A főtétel szerint tehát bármely $f \in L^2(0, \pi)$ esetén $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, ahol $c_n = \int_0^\pi f e_n$, és a sorösszeg L^2-norma szerinti konvergenciaként értendő.

A további példákban csak felírjuk a rendszer tagjait. (Ortonormáltságuk elemien látható, teljességük részben visszavezethető a fenti sinrendszer teljességére.)

- $H := L^2(0, \pi)$,

$$e_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & (\text{ ha } n = 0), \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx & (\text{ ha } n \in \mathbb{N}^+). \end{cases}$$

- $H := L^2(0, 2\pi)$, és a rendszer elemei

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots.$$

- $H := L^2(0, 2\pi)$, az előző rendszer komplex megfelelője:

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{inx} \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

- $H := \ell_2, \quad e_n := (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0 \ldots) \quad (n \in \mathbb{N}^+).$

- $H := L^2([a,b];w)$ esetén, azaz az $\langle f,g\rangle := \int\limits_a^b f\overline{g}\, w\, d\lambda$ súlyozott skalárszorzat mellett ortogonális polinomokból TONR alkotható. A polinomok ugyanis totális rendszert alkotnak, így a 2.23. állítás mintájára Gram–Schmidt-ortogonalizációval TONR konstruálható, ezek a w súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomok. Itt $w > 0$ mérhető, és konkrét választásától függően többféle nevezetes rendszer adódik, például a $(-1,1)$ intervallumon $w \equiv 1$ esetén a Legendre-, $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ esetén a Csebisev-polinomokat kapjuk, míg az $I = \mathbb{R}$ intervallumon a $w(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvény az Hermite-polinomokat adja. (E rendszerek numerikus integrálás során hasznosak.) Lásd [45, 69].
- $H := L^2(0,1)$ esetén a Haar-rendszer olyan lépcsősfüggvényekből áll, melyek csak 0 vagy ± 1 értéket vesznek fel $1/2^n$ hosszú részintervallumokon, éspedig $e_{0,0}(x) := 1$, ha $0 \le x < 1/2$ és -1, ha $1/2 \le x < 1$, illetve $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \le k < 2^n$ esetén $e_{n,k}(x) := e_{0,0}(2^n x - k)$, ha $\frac{k}{2^n} \le x < \frac{k+1}{2^n}$ és 0 különben. (Ennek közeli rokona a Walsh–Rademacher-rendszer, a ± 1 konstansok más elosztásával [45].) Ez teljes ortogonális rendszer, melyből normálva TONR-t kapunk.

2.34. Megjegyzés. A Fourier-sorfejtés általánosítható Banach-térre az ortogonalitás nélkül: egy $(e_n) \subset X$ rendszert Schauder-bázisnak hívunk, ha minden $x \in X$ egyértelműen előáll $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ alakban. A fenti $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,0\ldots)$ sorozatok például az ℓ_p térben Schauder-bázist alkotnak, ha $1 < p < \infty$.

2.35. Megjegyzés. A Fourier-sorok gyakorlati jelentése az, hogy egy adott jel felbontható megszámlálható sok adott frekvenciájú jel szuperpozíciójára. Tekintsük pl. a $H = L^2(0,2\pi)$ térben az $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ TONR-t, ekkor a főtétel szerint bármely $f \in L^2(0,2\pi)$ esetén $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$, ahol $c_n = \int\limits_0^{2\pi} f\overline{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.
Megemlítjük, hogy ha az intervallum $\mathbb{R}$, akkor nincsenek ilyen kitüntetett frekvenciák, azaz bármely $y \in \mathbb{R}$ esetén az $e_y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{iyx}$ függvények közt nem tehető különbség. Ilyenkor a jelek felbontásánál a fenti sor helyét az összes y-ra vonatkozó integrál veszi át, a c_n együtthatók sorozatának helyét pedig a Fourier-transzformált (lásd 6.4. szakasz).

A Fourier-sorok klasszikus elméletéről. A Fourier-sorok fejlődése során eredetileg a pontonkénti konvergencia szempontjából vizsgálták a sorokat, főleg a 3. példában szereplő sin-cos-rendszer esetén és folytonos függvényre. Ennek igen kiterjedt elméletéből (lásd pl. [45, 70]) idézünk néhány alaptételt.

A sin-cos-rendszer periodikus volta miatt $f(0) = f(2\pi)$ szükséges feltétel. Legyen tehát

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

$$\text{ahol} \qquad a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx \, \mathrm{d}x, \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx \, \mathrm{d}x.$$

Ha $f \in C[0, 2\pi]$, melyre $f(0) = f(2\pi)$, igaz-e, hogy $s_n \to f$ pontonként $[0, 2\pi]$-ben?

2.36. Tétel (Steinhaus). *Létezik $f \in C[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$, melynek Fourier-sora minden $\pi \cdot r$ helyen divergens, ahol r racionális.*

Az egy pontban való divergenciára Fejér adott először bizonyítást, ennek módosításával adódott a fenti tétel.

Ha a folytonosság feltételét némileg erősítjük, akkor már igaz a pontonkénti konvergencia, sőt az egyenletes is. Egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényre fennáll az α-kitevős Lipschitz-folytonosság ($0 < \alpha \le 1$), ha van olyan $C > 0$, hogy $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^\alpha$ ($\forall x, y \in I$). Ekkor azt írjuk, hogy $f \in Lip^\alpha(I)$. Az $\alpha = 1$ esetnek felel meg a szokásos Lipschitz-folytonosság, míg az $\alpha < 1$ esetet Hölder-folytonosságnak is szokás nevezni.

2.37. Tétel (Lipschitz-kritérium). *Legyen $0 < \alpha \le 1$ adott szám. Minden $f \in Lip^\alpha[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$ esetén $s_n \to f$ egyenletesen.*

Speciálisan, ha $f \in C^1(I)$, akkor $f \in Lip^1(I)$ is, ezért ekkor is igaz a fenti tétel.

Általánosabb függvényosztályra a pontonkéntinél gyengébb, de érdemi konvergenciatétel áll fenn:

2.38. Tétel (Carleson). *Minden $f \in L^2(0, \pi)$ függvény Fourier-sora majdnem mindenütt konvergál f-hez.*

A pontonkénti konvergencia is elérhető folytonos függvényre is, ha nem a részletösszegek konvergenciáját vizsgáljuk, hanem azok számtani közepeit. Vezessük be az úgynevezett Fejér-közepeket:

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}\left(s_0 + s_1 + \cdots + s_n\right).$$

2.39. Tétel (Fejér). *Minden $f \in C[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$ esetén $\sigma_n \to f$ egyenletesen.*

3. fejezet

Folytonos lineáris funkcionálok normált térben

3.1. Normált tér duálisa

3.1. Definíció. *Lineáris funkcionálnak* nevezünk egy számértékű lineáris leképezést, azaz egy $\phi : X \to \mathbb{K}$ lineáris leképezést, ahol X vektortér és $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ számtest.

A továbbiakban legyen X normált tér. Az 1.40. tétel funkcionálokra is érvényes, így egy $\phi : X \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha korlátos, azaz ha van olyan $M \geq 0$ állandó, hogy minden $x \in X$ esetén $|\phi x| \leq M \|x\|$. A korlátos lineáris funkcionálok tere $B(X, \mathbb{K})$.

3.2. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. A $B(X, \mathbb{K})$ teret az X *duális terének* nevezzük és X^*-gal jelöljük.

Az 1.47. következmény szerint tetszőleges normált tér duálisa Banach-tér.

Példák. 1. *Véges dimenziós terek.* Ilyenkor a duális tér mint vektortér megegyezik az ösz- szes lineáris leképezés halmazával, mert minden lineáris leképezés folytonos. Az pedig könnyen látható, hogy ekkor minden $\phi : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál valójában egy rögzített $\alpha \in \mathbb{R}^n$ vektorral való skalárszorzás. Legyen ugyanis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bázis X-ben, valamint $\alpha_i := \phi e_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ha $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in X$, akkor $\phi x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \alpha_i = \langle \xi, \alpha \rangle$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$ izomorf $\mathbb{R}^n$-nel (és így X-szel).

A duális tér mint normált tér attól függ, milyen normát használtunk X-en. Legyen például $X = \mathbb{R}^n$ a $\|.\|_1$ normával, és $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a standard bázis. Ekkor a véges dimenziós Hölder-egyenlőtlenség szerint $|\phi x| = |\langle x, \alpha\rangle| \leq \|x\|_1 \|\alpha\|_\infty$, tehát $\|\phi\| \leq \|\alpha\|_\infty = \max_i |\alpha_i|$. Másrészt ha j az az index, amelyre $|\alpha_j| = \|\alpha\|_\infty$, akkor $\phi e_j = \|\alpha\|_\infty$, így $\|\phi\| = \|\alpha\|_\infty$. Ekkor tehát $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ duális tere izometrikusan izomorf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$-nel.

Ha $\mathbb{R}^n$-ben a p-normát használjuk (ahol $p \in (1, \infty]$), akkor duális tere $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q\right)$-val lesz izometrikus, ahol q a p-hez konjugált érték, azaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A megfelelő Hölder-egyenlőtlenség szerint most $\|\phi\| \leq \|\alpha\|_q$, és (némi számolással) az $x_i := |\alpha_i|^{q-1} \operatorname{sgn} \alpha_i$ koordinátájú x vektorra $\phi x = \|x\|_p \|\alpha\|_q$, amiből $\|\phi\| = \|\alpha\|_q$.

2. *Az $L^p(\Omega)$ terek.* Legyen $1 \leq p \leq \infty$ és $X := L^p(\Omega)$. Legyen q a p-hez konjugált érték, $g \in L^q(\Omega)$ adott függvény, és tekintsük a

$$\phi_g : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_\Omega fg$$

funkcionált. Ez lineáris, emellett a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$|\phi_g f| = \left|\int_\Omega fg\right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} =: M \|f\|_{L^p} \qquad (\forall f \in L^p(\Omega)),$$

azaz ϕ_g korlátos is.

A fenti becslésből $\|\phi_g\| \leq \|g\|_{L^q}$. Némi számolással most is belátható az egyenlőség. Ha $1 \leq q < \infty$, akkor az $f := |g|^{q-1} \operatorname{sgn} g$ függvényre lesz $\phi_g f = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$. Ha $q = \infty$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén legyen $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : |g(x)| \geq \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$, ill. $\chi_{\Omega_\varepsilon}$ az Ω_ε karakterisztikus függvénye és $\lambda(\Omega_\varepsilon)$ az Ω_ε Lebesgue-mértéke, ekkor az $f_\varepsilon := \frac{1}{\lambda(\Omega_\varepsilon)} \chi_{\Omega_\varepsilon}$ függvényekre $\|f_\varepsilon\|_\varepsilon = 1$ és $\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_g f_\varepsilon = \|g\|_{L^\infty}$. Összességében tehát bármely $1 \leq p \leq \infty$ esetén

$$\|\phi_g\| = \|g\|_{L^q}.$$

Ha $p < \infty$, akkor igazolható (lásd pl. [38, 21. fejezet]), hogy bármely $\phi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál előáll a fenti alakban alkalmas $g \in L^q(\Omega)$ mellett. Így a $g \mapsto \phi_g$ leképezés izometrikus izomorfizmus $L^q(\Omega)$-ból $L^p(\Omega)^*$-ba, vagyis

$$L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega)$$

izometria erejéig.

3. *A $C(K)$-terek.* Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, akkor $C(K)^*$ izometria erejéig a $\mu : K \to \mathbb{R}$ korlátos változású előjeles Borel-mértékek vektortere a $\|\mu\| = |\mu|(K)$ normával, azaz bármely $\phi \in C(K)^*$ előáll $\phi f = \int_K f d\mu$ alakban, lásd pl. [38, 42].

3.3. Állítás. *Legyen $\phi : X \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál. Ha $\phi \not\equiv 0$, akkor* $\ker \phi$ *1 kodimenziós altér. Ha ϕ folytonos is, akkor* $\ker \phi$ *zárt is.*

Bizonyítás. Ha $\phi \not\equiv 0$, akkor van olyan $x_1 \in X$, melyre $\phi x_1 \neq 0$. Ekkor minden $x \in X$ előáll $x = (x - \lambda x_1) + \lambda x_1$ alakban, ahol $\lambda = \phi x / \phi x_1$ választással $x - \lambda x_1 \in \ker \phi$. Így $X = \ker \phi + \operatorname{span}\{x_1\}$, azaz $\ker \phi$-nek 1-dimenziós kiegészítő altere van, vagyis 1 kodimenziós. Végül ha ϕ folytonos, akkor $\ker \phi$ zárt, mert a $\{0\}$ zárt halmaz ősképe. □

3.2. Folytonos lineáris funkcionálok kiterjesztése

3.4. Állítás. *Legyen X normált tér, $X_0 \subset X$ altér és $\phi : X_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor ϕ egyértelműen kiterjeszthető $\widetilde{\phi} : \overline{X}_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionállá, ráadásul a norma megtartásával, azaz $\|\widetilde{\phi}\| = \|\phi\|$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \overline{X}_0$, ekkor létezik $(x_n) \subset X_0$ sorozat, hogy $x_n \to x$. Ekkor (x_n) Cauchy-sorozat, valamint

$$|\phi x_n - \phi x_m| \leq \|\phi\| \, \|x_n - x_m\| \qquad (n, m \in \mathbb{N}^+),$$

így $(\phi x_n) \subset \mathbb{K}$ is Cauchy-sorozat, azaz konvergens is. Legyen $\widetilde{\phi} x := \lim\limits_{n\to\infty} \phi x_n$, könnyen belátható, hogy ez nem függ az (x_n) sorozat választásától. A kapott $\widetilde{\phi}$ kiterjesztése ϕ-nek, a limeszképzés miatt lineáris, emellett korlátos is, hiszen

$$|\widetilde{\phi} x| = \lim_{n\to\infty} |\phi x_n| \leq \lim_{n\to\infty} \|\phi\| \, \|x_n\| = \|\phi\| \, \|x\| \, ,$$

emiatt $\|\widetilde{\phi}\| \leq \|\phi\|$. De $\widetilde{\phi}$ kiterjesztése ϕ-nek, így normája nem lehet kisebb, ezért $\|\widetilde{\phi}\| = \|\phi\|$. □

3.5. Tétel (Hahn–Banach). *Legyen X normált tér, $X_0 \subset X$ altér, $\phi : X_0 \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál. Ekkor létezik ϕ-nek az egész térre való folytonos lineáris kiterjesztése, azaz olyan $\widehat{\phi} : X \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, melyre $\widehat{\phi}_{|X_0} = \phi$. Sőt, ez megadható normatartó módon is, azaz $\|\widehat{\phi}\| = \|\phi\|$.*

Bizonyítás. A bizonyítást csak valós esetben és szeparábilis térre végezzük el. A szeparabilitás és a 2.24. megjegyzés alapján létezik megszámlálhatóan sok $x_1, x_2, \ldots \in X \backslash X_0$ lineárisan független elem, amelyre $\operatorname{span}\{X_0, x_1, x_2, \ldots\}$ sűrű X-ben.

Először megadunk egy $\widehat{\phi} : \operatorname{span}\{X_0, x_1\} \to \mathbb{R}$ kiterjesztést. A $\operatorname{span}\{X_0, x_1\}$ altér bármely eleme $x + \lambda x_1$ alakban írható egyértelmű módon, ahol $x \in X_0,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $\widehat{\phi}$ lineáris kiterjesztés volta miatt

$$\widehat{\phi}(x + \lambda x_1) = \phi x + \lambda \alpha$$

alakú kell legyen alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett, így csak α értékét kell jól választanunk.

Legyenek $y, z \in X_0$ tetszőleges elemek és legyen $M := \|\phi\|$. Ekkor

$$\phi y + \phi z = \phi(y + z) \leq M \|y + z\| \leq M \left(\|y + x_1\| + \|z - x_1\|\right),$$

amit átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\phi z - M \|z - x_1\| \leq M \|y + x_1\| - \phi y.$$

Itt a bal oldal csak z-től, a jobb oldal csak y-tól függ, így a bal oldal z-ben vett szuprémuma nem nagyobb a jobb oldal y-ben vett infimumánál. Így van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, melyre minden $y \in X_0$ esetén

$$\phi z - M \|z - x_1\| \leq \alpha \leq M \|y + x_1\| - \phi y,$$

és ezt választjuk a kiterjesztésben. A bal oldalon $z := -y$ választással

$$-\phi y - M \|y + x_1\| \leq \alpha \leq M \|y + x_1\| - \phi y,$$

azaz

$$|\phi y + \alpha| \leq M \|y + x_1\|. \tag{3.1}$$

Ebből $|\lambda|$-kel szorozva és $x = \lambda y$ helyettesítéssel

$$|\phi x + \lambda \alpha| \leq M \|x + \lambda x_1\|,$$

azaz

$$\left|\widehat{\phi}(x + \lambda x_1)\right| \leq M \|x + \lambda x_1\|,$$

vagyis $\widehat{\phi}$ korlátos és $\left\|\widehat{\phi}\right\| \leq M = \|\phi\|$. A fordított irányú egyenlőtlenség ismét triviálisan igaz, hiszen kiterjesztésről van szó, így a normatartást is igazoltuk. A fenti eljárást folytassuk rekurzívan az $X_n := \operatorname{span}\{X_0, x_1, \ldots, x_n\}$ altérre és az x_{n+1} elemre alkalmazva; ezzel egy $\widehat{\phi} : \cup_{n=0}^{\infty} X_n \to \mathbb{R}$ normatartó kiterjesztést kapunk, ahol $\cup_{n=0}^{\infty} X_n$ sűrű. Ebből az egész X-re való kiterjesztést a 3.4. állítás alkalmazásával kapjuk. Ezzel a tételt igazoltuk.

Ha a tér nem szeparábilis, akkor tekintsük ϕ normatartó kiterjesztései halmazát, és legyen ezen a kiterjesztés művelete a részbenrendezés. Belátható, hogy minden teljesen rendezett részhalmaznak van felső korlátja. Ekkor a Zorn-lemma szerint létezik a halmaznak maximális $\widehat{\phi}$ eleme, melyre $D(\widehat{\phi}) = X$ teljesül. Ha ugyanis $D(\widehat{\phi}) \neq X$ lenne, akkor egy $x_0 \notin D(\widehat{\phi})$ elemre és $D(\widehat{\phi})$-re alkalmazva a bizonyítás első lépését, bővebb kiterjesztést kapnánk, ellentmondva $\widehat{\phi}$ maximalitásának. Végül, a komplex eset megfelelő módosításokkal visszavezethető a fenti bizonyításra. □

3.6. Következmény („kis Hahn–Banach-tétel"). *Legyen X normált tér. Bármely $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ elemhez létezik olyan $\phi \in X^*$, hogy $\|\phi\| = 1$ és $\phi x_0 = \|x_0\|$.*

Bizonyítás. Legyen $X_0 = \operatorname{span}\{x_0\}$ és $\phi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ a következő leképezés: ha $x = cx_0 \in X_0$, akkor $\phi_0(cx_0) := c\,\|x_0\|$. Ekkor ϕ_0 lineáris és $\phi_0 x_0 = \|x_0\|$, emellett

$$|\phi_0 x| = |\phi_0(cx_0)| = |c|\,\|x_0\| = \|cx_0\| = \|x\| \qquad (\forall x \in X_0),$$

amiből adódik, hogy $\|\phi_0\| = 1$. A Hahn–Banach-tétel által adott $\phi : X \to \mathbb{R}$ kiterjesztés jó lesz, hisz mindkét tulajdonságot megőrzi. □

3.7. Következmény. *Ha $x \in X$ olyan, hogy $\phi x = 0$ teljesül minden $\phi \in X^*$ esetén, akkor $x = 0$.*

Bizonyítás. Ha $x \neq 0$ lenne, akkor az előző következmény szerint létezne $\phi \in X^*$, melyre $\phi x = \|x\| \neq 0$, ami ellentmond a feltételeknek. □

Ennek átfogalmazása (x helyett $(x-y)$-nal) az alábbi, úgynevezett szeparációs tulajdonság:

3.8. Következmény. *Ha $x, y \in X$ olyan elemek, melyekre $\phi x = \phi y$ teljesül minden $\phi \in X^*$ esetén, akkor $x = y$.*

A Hahn–Banach-tétel szép elméleti alkalmazása, hogy tetszőleges korlátos számsorozathoz rendelhető ún. Banach-limesz. Legyen ugyanis $X := \ell_\infty$ a korlátos számsorozatok tere a $\sup |x_n|$ normával, és X_0 a konvergens sorozatok altere. Ekkor az X_0-on értelmezett $\phi\big((x_n)\big) := \lim x_n$ funkcionál lineáris és $|\phi\big((x_n)\big)| \leq \lim |x_n| \leq \sup |x_n|$, azaz korlátos is, így létezik $\tilde{\phi}$ korlátos lineáris kiterjesztése az egész ℓ_∞-re. Ekkor a $\tilde{\phi}\big((x_n)\big)$ számot az (x_n) korlátos sorozat Banach-limeszének hívjuk.

A következő szakaszban normált terek fontos típusával ismerkedhetünk meg, és tárgyalásukban jól alkalmazhatók a Hahn–Banach-tétel következményei.

3.3. Reflexív Banach-terek

3.3.1. Normált terek második duálisa

3.9. Definíció. Ha X normált tér, akkor $X^{**} := (X^*)^*$ az X második duális tere.

A definíció értelmes, mert X^* is normált tér, így van duálisa. Szintén igaz itt is, hogy a második duális mindig Banach-tér.

Adjunk példát X^{**}-beli funkcionálra. Legyen $x \in X$ adott, és $x^{**} : X^* \to \mathbb{K}$ az a funkcionál, amely minden ϕ-hez ϕx-et rendeli hozzá, azaz

$$x^{**}\phi := \phi x. \tag{3.2}$$

Ekkor x^{**} lineáris, és korlátos is, mert $|x^{**}\phi| = |\phi x| \leq \|x\| \, \|\phi\| \ \ (\forall \phi \in X^*)$; emellett $\|x^{**}\| \leq \|x\|$.

3.10. Állítás. *Bármely $x \in X$ esetén $\|x^{**}\| = \|x\|$.*

Bizonyítás. Ha $x = 0$, akkor $x^{**} = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor elég a $\geq$ irányt megmutatnunk. A 3.6. következmény miatt van olyan $\phi_1 \in X^*$, hogy $\|\phi_1\| = 1$ és $\phi_1 x = \|x\|$. Ebből

$$\|x^{**}\| = \sup\{|x^{**}\phi| : \ \phi \in X^*, \ \|\phi\| = 1\} \geq |x^{**}\phi_1| = |\phi_1 x| = \|x\| . \qquad \square$$

Ez azt jelenti, hogy az $x \mapsto x^{**}$ leképezés X izometrikus beágyazása X^{**}-ba.

3.11. Definíció. Ha az $x \mapsto x^{**}$ leképezés izometria X és X^{**} közt, akkor az X normált teret *reflexívnek* nevezzük.

Ekkor tehát $X = X^{**}$ izometria erejéig, azaz egy reflexív tér azonosítható a második duálisával. Mivel utóbbi mindig Banach-tér, ezért minden reflexív normált tér Banach-tér.

Példák. 1. Minden véges dimenziós normált tér reflexív. Ekkor ugyanis az $X \to X^{**}$ beágyazás nem lehet valódi, mert $\dim X = \dim X^* = \dim X^{**}$.

2. Ha $1 < p < \infty$, akkor $L^p(\Omega)$ reflexív. Ha ugyanis $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, akkor izometria erejéig

$$L^p(\Omega)^{**} = (L^q(\Omega))^* = L^p(\Omega).$$

Megemlítünk egy gyakran használatos jelölést: ha X normált tér, $\phi \in X^*$ és $x \in X$, akkor legyen

$$\langle \phi, x \rangle := \phi x.$$

Ha X Hilbert-tér, akkor az $X^* = X$ azonosítás mellett ez valóban skalárszorzat. (Előfordul ugyanerre a fordított jelölés is, azaz $\langle x, \phi\rangle = \phi x$.) A fenti jelölés elsősorban reflexív Banach-terek esetén szemléletes, ha ugyanis nemcsak az X^{**} és X tereket, hanem az x^{**} és x elemeket is azonosítjuk, akkor (3.2) úgy írható, hogy

$$\langle x, \phi\rangle = \langle \phi, x\rangle \qquad (\forall x \in X,\ \phi \in X^*),$$

ami szemlélteti X és X^* szerepének szimmetriáját és a „duális tér” elnevezést.

3.12. Tétel. *Minden normált tér teljessé tehető, azaz izometrikusan izomorf valamely Banach-térnek egy sűrű alterével.*

Bizonyítás. Az $X \to X^{**}$ beágyazás alapján X izometrikusan izomorf az X^{**} Banach-tér egy alterével, így sűrű az utóbbi lezártjában, ami maga is Banach-tér. □

3.13. Megjegyzés. A 3.6. következmény alapján X és X^* közt is található kapcsolat. Bármely $x \in X$ esetén legyen ugyanis $\phi \in X^*$ olyan, hogy $\|\phi\| = 1$ és $\langle \phi, x\rangle = \|x\|$, majd legyen $J(x) := \|x\|\,\phi$. Ekkor $\|J(x)\| = \|x\|$ és $\langle J(x), x\rangle = \|J(x)\|\,\|x\|$. Ha X reflexív és X, X^* szigorúan konvexek (azaz gömbjeik szigorúan konvexek), akkor igazolható [76, III. 45.12.], hogy $J(x)$ egyértelmű, és $J : X \to X^*$ bijekció, azonban nem lineáris, hacsak X nem Hilbert-tér. Ekkor tehát X és X^* közt nemlineáris izometria áll fenn.

3.3.2. Gyenge konvergencia

3.14. Definíció. Legyen X normált tér. Egy $(x_n) \subset X$ sorozat *gyengén tart* az $x \in X$ vektorhoz, ha minden $\phi \in X^*$ esetén $\phi x_n \to \phi x$. A gyenge konvergenciát $x_n \xrightarrow{w} x$ vagy $x_n \rightharpoonup x$ jelöli.

Hogy megkülönböztessék a gyenge konvergenciától, a már bevezetett normakonvergenciára gyakran mint erős konvergenciára szoktak hivatkozni.

3.15. Állítás. *A gyenge limesz egyértelmű, azaz ha $x_n \xrightarrow{w} y_1$ és $x_n \xrightarrow{w} y_2$, akkor $y_1 = y_2$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint minden $\phi \in X^*$ esetén $\phi x_n \to \phi y_1$ és $\phi x_n \to \phi y_2$. Mivel $\mathbb{K}$-ban a limesz egyértelmű, ezért $\phi y_1 = \phi y_2$. Ez minden $\phi \in X^*$ esetén fennáll, ezért a 3.8. következmény szerint $y_1 = y_2$. □

Ha $x_n \to x$ erős értelemben, azaz normában, akkor a folytonosság miatt $\phi x_n \to \phi x$ minden $\phi \in X^*$ esetén, azaz az erős konvergenciából következik a gyenge konvergencia. Véges dimenzióban – szokás szerint – a két fogalom egybeesik, mindkettő ekvivalens a koordinátánkénti konvergenciával. Általában a megfordítás azonban nem igaz. Például, végtelen dimenziós Hilbert-térben, mint az 5.4 állításban látni fogjuk, egy ortonormált vektorokból álló sorozat nem konvergens, de gyengén konvergál a 0-hoz.

Egy Hilbert-térbeli ortonormált sorozat arra is példa, hogy egy korlátos sorozatnak nincs normában konvergens részsorozata, így a Bolzano–Weierstrass-tulajdonság sem marad érvényben a normakonvergenciára nézve. Ilyen normált térben is megadható, ami azt jelenti, hogy végtelen dimenzióban a zárt egységgömb nem kompakt halmaz.

3.16. Lemma (Riesz-lemma). *Legyen* $(X, \|\cdot\|)$ *végtelen dimenziós normált tér. Ekkor létezik* X*-ben olyan* $(x_n) \subset X$ *vektorsorozat, amelyre*

(i) $\|x_n\| = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$; *(ii)* $\|x_n - x_m\| \geq 1 \quad (\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m)$.

Bizonyítás. A keresett sorozatot rekurzióval állítjuk elő. Válasszunk egy $0 \neq x \in X$ vektort, és legyen $x_1 = \frac{x}{\|x\|}$. Tegyük fel, hogy már előállítottuk az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ vektorokat a kívánt tulajdonságokkal. Legyen $X_{n-1} = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, ez véges dimenziós altér. Legyen $x \in X$ olyan, hogy $x \notin X_{n-1}$ és legyen $d = \operatorname{dist}(x, X_{n-1})$, az altér zártsága miatt $d > 0$. Az 1.18. állítás szerint létezik $y_0 \in X_{n-1}$, hogy $d = \|x - y_0\|$. Legyen $x_n := \frac{x-y_0}{d}$. Ekkor $\|x_n\| = 1$, valamint

$$\operatorname{dist}(x_n, X_{n-1}) = \inf_{y \in X_{n-1}} \|x_n - y\| = \frac{1}{d} \inf_{y \in X_{n-1}} \|x - (y_0 + dy)\|$$

$$= \frac{1}{d} \operatorname{dist}(x, X_{n-1}) = 1,$$

mivel ha y befutja X_{n-1} elemeit, akkor $y_0 + dy$ is. Mivel tehát x_n-nek az altértől vett távolsága 1, így $\|x_n - x_j\| \geq 1$ minden $1 \leq j < n$ esetén. $\square$

A gyenge konvergencia fogalma viszont segít abban is, hogy megmentsük a Bolzano–Weierstrass-tulajdonságot:

3.17. Tétel. *Reflexív Banach-térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Ezt csak Hilbert-térben igazoljuk majd az 5.6. tételben; az általános eset bizonyítása megtalálható [38, 14. fejezet]-ben. A fenti tétel megfordítása is igaz, vagyis ez a tulajdonság jellemzi a reflexív Banach-tereket, ez az Eberlein–Smulian-tétel.

4. fejezet

Folytonos lineáris operátorok normált térben

4.1. A Banach–Steinhaus-tételkör

4.1.1. A Banach–Steinhaus-tétel

Ezt a tételt szokás az „egyenletes korlátosság tételének” is nevezni, és arról szól, hogy két, általános esetben különböző korlátossági fogalom folytonos lineáris operátorokra egybeesik. Jelentősége abban áll, hogy a gyakran hasznos egyenletes korlátosságot így egyszerűbben garantálhatjuk.

4.1. Definíció. Legyenek X, Y normált terek. Egy $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat *pontonként korlátos*, ha minden $x \in X$ esetén $(A_n x) \subset Y$ korlátos, illetve *egyenletesen korlátos*, ha $(\|A_n\|) \subset \mathbb{R}$ korlátos számsorozat.

4.2. Tétel (Banach–Steinhaus). *Legyen X Banach-tér, Y normált tér. Egy $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat akkor és csak akkor pontonként korlátos, ha egyenletesen korlátos.*

Bizonyítás. Ha (A_n) egyenletesen korlátos, akkor minden $x \in X$ esetén

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| \, \|x\| \leq \Big(\sup_n \|A_n\|\Big) \|x\| < \infty,$$

azaz minden rögzített x esetén $\|A_n x\|$ korlátos.

Legyen most (A_n) pontonként korlátos. Először megmutatjuk, hogy van olyan $B := \overline{B}(x^*, r) \subset X$ zárt gömb, melyre

$$\sup\{\|A_n x\| : \ n \in \mathbb{N}^+, x \in B\} =: M < \infty. \tag{4.1}$$

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor minden gömbben és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén van olyan x_0 pont és k_n index, hogy $\|A_{k_n} x_0\| \geq 2n$, sőt ekkor A_{k_n} folytonossága miatt x_0 egy környezetében lévő x pontokra $\|A_{k_n} x\| \geq n$ teljesül. Ezt a tulajdonságot rekurzívan alkalmazva, konstruálható zárt gömbök olyan $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ egymásba skatulyázott sorozata, hogy minden $x \in B_n$ pontra $\|A_{k_n} x\| \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$, és itt feltehető, hogy $diam(B_n) \to 0$, hiszen pl. minden B_n sugarát az előző sugár felénél kisebbre választhatjuk. Ekkor az 1.11 Cantor-féle közöspont-tétel miatt $\cap B_n$ egy pont, legyen ez x^*. Ekkor minden n-re $x^* \in B_n$, így $\|A_{k_n} x^*\| \geq n$, ami ellentmond annak, hogy $(A_n x^*) \subset Y$ korlátos sorozat.
A (4.1) korlát miatt pedig minden $z \in X$, $\|z\| = 1$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\|A_n z\| = \left\| \frac{1}{r} A_n\big((x^* + rz) - x^*\big) \right\| \leq \frac{1}{r} \left(\|A_n(x^* + rz)\| + \|A_n x^*\| \right) \leq \frac{2M}{r},$$

hiszen x^* és $x^* + rz \in \overline{B}(x^*, r)$. Eszerint $\|A_n\| \leq \frac{2M}{r}$, tehát $(\|A_n\|)$ korlátos. $\square$

4.1.2. A Banach–Steinhaus-tétel bizonyítása a kategória-tétellel

Ez a rész a Banach–Steinhaus-tétel egy másik bizonyítását tartalmazza, amely egy önmagában is érdekes, de itt nem bizonyított metrikus térbeli eredményre támaszkodik.

4.3. Definíció. Egy (X, ϱ) metrikus térben egy $K \subset X$ halmaz

(i) sehol sem sűrű, ha $\operatorname{int} \overline{K} = \emptyset$, azaz $\overline{K}$ nem tartalmaz gömböt;

(ii) első kategóriájú, ha előáll megszámlálhatóan sok zárt, sehol sem sűrű halmaz uniójaként;

(iii) második kategóriájú, ha nem első kategóriájú: azaz, ha $K = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, ahol mindegyik K_j zárt, akkor valamelyik K_j tartalmaz gömböt.

4.4. Tétel (Baire kategóriatétele). *Bármely teljes metrikus tér második kategóriájú.*

A bizonyítás megtalálható pl. a [27, 37] könyvekben.

A Banach–Steinhaus-tétel 2. bizonyítása. Csak a fordított irányt igazoljuk (a másik triviális volt), tegyük fel tehát, hogy (A_n) pontonként korlátos. Tekintsük minden $j \in \mathbb{N}^+$ egészre a

$$K_j := \{x \in X : \ \|A_n x\| \leq j \ \ \forall n \in \mathbb{N}^+\}$$

halmazokat. Minden rögzített j-re a K_j-beli sorozatok limeszei is K_j-beliek, azaz K_j zárt. Másrészt bármely $x \in X$ benne van valamelyik K_j-ben, mivel $(A_n x)$ korlátos sorozat, így $\|A_n x\| \le j$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$ alkalmas j-re. Így tehát $X = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, azaz X előáll megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként. A 4.4. tétel szerint van olyan $j_0 \in \mathbb{N}^+$, hogy a K_{j_0} halmaz tartalmaz gömböt, azaz van olyan $x_0 \in X$ és $r > 0$, hogy $\overline{B(x_0, r)} \subset K_{j_0}$. Ekkor minden $z \in X$, $\|z\| = 1$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\|A_n z\| = \left\| \frac{1}{r} A_n\big((x_0 + rz) - x_0\big) \right\| \le \frac{1}{r}\,\big(\,\|A_n(x_0 + rz)\| + \|A_n x_0\|\,\big) \le \frac{2}{r} j_0,$$

hiszen x_0 és $x_0 + rz \in \overline{B(x_0, r)} \subset K_{j_0}$, így minden A_n-képük normája legfeljebb j_0. Eszerint $\|A_n\| \le \frac{2j_0}{r}$, tehát $(\|A_n\|)$ korlátos. □

4.1.3. A Banach–Steinhaus-tétel alkalmazásai

4.5. Következmény. *Banach-téren értelmezett folytonos lineáris operátorsorozat pontonkénti limesze is folytonos lineáris. Azaz, ha X Banach-tér, Y normált tér és $(A_n) \subset B(X, Y)$, melyre $A_n x \to Ax$ minden $x \in X$ esetén, akkor $A \in B(X, Y)$.*

Bizonyítás. A a limeszképzés miatt lineáris. Mivel (A_n) pontonként (konvergens és így) korlátos is, a 4.2. tétel szerint egyenletesen is korlátos. Ebből

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le \Big(\sup_n \|A_n\|\Big) \|x\| \le K\,\|x\| \qquad (\forall x \in X),$$

vagyis A folytonos is. □

Gyakran a 4.2. tételt egyenletes korlátosság tételének nevezik, olyankor az alábbi következményét szokták Banach–Steinhaus-tételnek hívni.

4.6. Tétel. *Legyen X Banach-tér, Y normált tér, valamint $A_n, A \in B(X, Y)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor*

$$A_n \to A \text{ pontonként } X\text{-en} \Leftrightarrow \begin{cases} a) \text{ van olyan } M \subset X \text{ totális rendszer, hogy} \\ \qquad A_n x \to Ax \ (\forall x \in M); \\ b) \ (A_n) \text{ egyenletesen korlátos.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha (A_n) pontonként konvergens, akkor nyilván pontonként korlátos, így az 4.2. tétel szerint egyenletesen is korlátos, a kívánt tulajdonságú totális rendszernek pedig az $M := X$ választás jó lesz.
A fordított irányhoz először vegyük észre, hogy ha $A_n \to A$ M-en, akkor a linearitás miatt az $[M]$ burkon is érvényes a konvergencia. Legyen $x \in X$

tetszőleges elem. Mivel $\overline{[M]} = X$, ezért minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $y \in [M]$, hogy
$$\|x - y\| \le \frac{\varepsilon}{2\,(K + \|A\|)},$$
ahol $K := \sup_n \|A_n\| < \infty$ az egyenletes korlátosság miatt. Ekkor
$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n x - A_n y\| + \|A_n y - Ay\| + \|Ay - Ax\| \le$$
$$\le \|A_n y - Ay\| + (\|A_n\| + \|A\|)\,\|x - y\|\,,$$
ahol alkalmas küszöbindex után az első tag $\varepsilon/2$-vel becsülhető (hiszen $y \in [M]$), és ilyenkor
$$\|A_n x - Ax\| \le \frac{\varepsilon}{2} + (\|A_n\| + \|A\|)\,\frac{\varepsilon}{2\,(K + \|A\|)} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Példák.

1. A Fejér-közepek egyenletes konvergenciája. A 4.6. tétel alapján igazolható a 2.39. tétel. Legyen tehát $f \in C[0, 2\pi]$, melyre $f(0) = f(2\pi)$, és
$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}\Big(s_0(f) + s_1(f) + \cdots + s_n(f)\Big) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
a Fejér-közepek. Megmutatjuk, hogy $\sigma_n(f) \to f$ egyenletesen.

Legyen
$$X := \{f \in C[0, 2\pi] :\; f(0) = f(2\pi)\}$$
a maximum-normával. Ez $C[0, 2\pi]$ zárt altere, így maga is Banach-tér. Tekintsük az
$$A_n : X \to X, \qquad A_n f := \sigma_n(f) \qquad (n \in \mathbb{N})$$
operátorsorozatot. A kívánt állítás épp azt jelenti, hogy $A_n \to I$ pontonként X-en, ahol I az identitás. Ehhez a 4.6. tétel két feltételét kell ellenőriznünk.

(a) Legyen M a trigonometrikus polinomok halmaza. Az erre vonatkozó Weierstrass-féle approximációs tétel miatt bármely $f \in X$ egyenletesen közelíthető M-beli függvényekkel, így M sűrű, azaz totális rendszer is. Másrészt egy p trigonometrikus polinom Fourier-szelete önmaga, ha a szelet foka legalább p foka, így $s_n(p) \to p$ egyenletesen bármely $p \in M$ esetén. Ekkor az $s_n(p)$ szeletek számtaniközép-sorozata, ami éppen $\sigma_n(p)$, szintén p-hez tart egyenletesen, azaz X normájában. Tehát $A_n \to I$ M-en.

(b) A Fejér-közepek zárt alakra hozhatók alkalmas trigonometrikus összegzésekkel, lásd pl. [70]: ha $x \in [0, 2\pi]$, akkor
$$\sigma_n(f)(x) = \frac{2}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(x+2t) + f(x-2t)}{2}\Big(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\Big)^2 dt\,.$$

Ebből bármely $f \in X$ esetén

$$\|A_n f\| = \max_{[0,2\pi]} |\sigma_n(f)| \leq \max_{[0,2\pi]} |f| \cdot \frac{2}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\Big)^2 dt =$$
$$= \max_{[0,2\pi]} |f| \cdot \sigma_n(1) = \|f\|,$$

felhasználva, hogy az 1 konstansfüggvény 0-dfokú trigonometrikus polinom, így (mint láttuk) minden s_n és így σ_n is helybenhagyja, vagyis $\sigma_n(1) = 1$. Ebből $\|A_n\| \leq 1$ minden n-re, azaz (A_n) egyenletesen korlátos.

2. Kvadratúrák konvergenciája. Legyen $[a, b]$ adott intervallum. Az $f \in C[a, b]$ függvények numerikus integrálására általában az

$$I(f) := \int_a^b f \;\approx\; Q_n(f) := \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

alakú közelítéseket, ún. kvadratúrákat szokás használni, ahol $x_i \in [a, b]$ adott pontok és $\alpha_i > 0$ adott számok (súlyok), $i = 1, \ldots, n$. A kvadratúrákat úgy szokás definiálni (alkalmas interpolációs módszerek alapján), hogy az n-edik képlet pontos legyen a legfeljebb n-edfokú polinomokra, azaz $Q_n(p) = I(p)$ ($\forall p \in P_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Ekkor a 4.6. tétel alapján könnyen igazolható, hogy

$$Q_n(f) \to I(f) \quad \forall f \in C[a, b], \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Legyen ugyanis $A_n f := Q_n(f)$ ($n \in \mathbb{N}$) és $Af := I(f)$. Ekkor A_n és $A : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok az $X := C[a, b]$ téren (a szokásos maximum-normával ellátva), melyek korlátosak is, ugyanis

$$|A_n f| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |f(x_i)| \leq \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i\Big) \|f\|_{\max} \quad \text{és} \quad |Af| \leq (b-a) \|f\|_{\max}$$

($\forall f \in C[a, b]$). Ha M a polinomok halmaza, akkor az erre vonatkozó Weierstrass-féle approximációs tétel miatt M sűrű, azaz totális rendszer is X-ben, és feltételünk szerint $A_n \to A$ az M halmazon, így teljesül a 4.6. tétel (a) feltétele. Emellett a fenti becslésből

$$\|A_n\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i = Q_n(1) = 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

mivel Q_n pontos a $p \equiv 1$ nulladfokú polinomon, így (A_n) egyenletesen korlátos.

(Általánosabban az is megengedhető, hogy az α_i súlyok közt negatív értékek is szerepeljenek, ekkor viszont (A_n) egyenletes korlátosságának igazolásához külön fel kell tenni, hogy $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ n-től független korlát alatt marad. A $Q_n(p) = I(p)$, $\forall p \in P_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ feltétel is gyengíthető, elegendő, ha $\lim_{n\to\infty} Q_n(p) = I(p)$ bármely p polinom esetén.)

4.2. A Banach-féle nyíltleképezés-tételkör

4.2.1. A nyílt leképezés tétele és a homeomorfizmus-tétel

E két tétel közül különösen a második nevezetes, és sok helyütt alkalmazható: a Banach-féle homeomorfizmus-tétel azt mondja ki, hogy Banach-terek közti folytonos lineáris bijekció inverze is folytonos. Ez úgy is fogalmazható, hogy Banach-terek közti folytonos izomorfizmus homeomorfizmus is (utóbbi olyan leképezést jelent, amely maga is és inverze is folytonos); innen ered a tétel neve. A homeomorfizmus-tétel közvetlen következménye lesz a nyílt leképezés tételének, melyhez viszont több technikai eredményen keresztül juthatunk el. Ebben a fejezetben $B(a, R)$ jelöli az a középű és R sugarú nyílt gömböt.

4.7. Definíció. Legyenek X, Y normált terek. Azt mondjuk, hogy $A : X \to Y$ *nyílt leképezés*, ha bármely nyílt halmaz A-képe nyílt.

4.8. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy egy leképezés pontosan akkor nyílt, ha bármely nyílt gömb A-képe tartalmaz nyílt gömböt a középpont képe körül, azaz ha bármely $B(x, R) \subset X$ nyílt gömbhöz található olyan $B(Ax, r) \subset Y$ nyílt gömb, melyre $A(B(x, R)) \supset B(Ax, r)$.
Valóban: egyrészt, ha A nyílt leképezés, akkor a $B(x, R)$ nyílt halmaz képe is nyílt, így tartalmaz nyílt gömböt az Ax pont körül. Megfordítva, legyen $G \subset X$ nyílt halmaz. Ha $x \in G$, akkor G tartalmaz valamely $B(x, R)$ nyílt gömböt, így $A(G)$ tartalmazza az $A(B(x, R))$ halmazt, utóbbi pedig a feltevés miatt tartalmaz egy $B(Ax, r)$ nyílt gömböt. Így $A(G)$ tartalmaz nyílt gömböt minden Ax eleme körül, azaz $A(G)$ nyílt halmaz.

4.9. Lemma. *Legyen X Banach-tér, Y normált tér, $A \in B(X, Y)$. Ha van olyan $y_0 \in Y$ és $k, r > 0$, hogy $B(y_0, r) \subset \overline{A\,(B(0, k))}$, akkor megadható olyan $m > 0$, hogy minden $y \in Y$ esetén van olyan $x \in X$, melyre $Ax = y$ és $\|x\| \le m\,\|y\|$.*

Bizonyítás. Ha $B(y_0, r) \subset \overline{A\,(B(0, k))}$, akkor az is igaz, hogy $B(-y_0, r) \subset \overline{A\,(B(0, k))}$. Ha ugyanis $z \in B(-y_0, r)$, akkor $-z \in B(y_0, r) \subset \overline{A\,(B(0, k))}$, vagyis létezik $(x_n) \subset B(0, k)$ alkalmas sorozat, hogy $Ax_n \to -z$. Ekkor

$$z = -\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} A(-x_n),$$

és mivel $-x_n \in B(0, k)$, ezért $z \in \overline{A\,(B(0, k))}$. Most ezekből azt is belátjuk, hogy

$$B(0, r) \subset \overline{A\,(B(0, k))}$$

szintén teljesül. Legyen ugyanis $z \in B(0, r)$, ekkor nyilván $z + y \in B(y_0, r)$ és $z - y_0 \in B(-y_0, r)$. Az eddigiek szerint $z \pm y_0 \in \overline{A\,(B(0, k))}$, így alkalmas

$(v_n), (w_n) \subset B(0,k)$ sorozatokra $Av_n \to z + y_0$ és $Aw_n \to z - y_0$. Ekkor

$$z = \frac{z+y_0}{2} + \frac{z-y_0}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(A\left(\frac{v_n}{2}\right) + A\left(\frac{w_n}{2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(A\left(\frac{v_n+w_n}{2}\right)\right),$$

ahol $(v_n + w_n)/2 \in B(0,k)$, így $z \in \overline{A\,(B(0,k))}$. Legyen most

$$t := \frac{k}{r}.$$

Ekkor azt is beláthatjuk, hogy minden $\varrho > 0$ esetén

$$B(0,\varrho) \subset \overline{A\,(B(0,t\varrho))}. \tag{4.2}$$

Ha ugyanis $z \in B(0,\varrho)$, akkor $zr/\varrho \in B(0,r)$, ami az előzőek szerint azt jelenti, hogy $zr/\varrho \in \overline{A\,(B(0,k))}$, vagyis $z \in \overline{A\,(B(0,k\varrho/r))} = \overline{A\,(B(0,t\varrho))}$. Most megmutatjuk azt, hogy a fentiekhez hasonló tartalmazás lezárt nélkül is adható, ez a bizonyítás kulcslépése: minden $\varrho > 0$ esetén

$$B(0,\varrho) \subset A\,(B(0,2t\varrho))\,. \tag{4.3}$$

Ehhez fogjuk kihasználni, hogy X Banach-tér. Legyen tehát $y \in B(0,\varrho)$, megmutatjuk, hogy található hozzá olyan $x \in B(0,2t\varrho)$, hogy $y = Ax$. A (4.2) szerint van olyan $y_1 \in A\,(B(0,t\varrho))$, hogy

$$\|y - y_1\| < \frac{\varrho}{2}.$$

Itt $y - y_1 \in B(0,\varrho/2)$, így ismét (4.2) szerint ($\varrho/2$-re felírva) van olyan $y_2 \in A\,(B(0,t\varrho/2))$, hogy

$$\|(y-y_1) - y_2\| < \frac{\varrho}{4}.$$

Az eljárást folytatva egy olyan (y_n) sorozatot kapunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$y_n \in A\left(B\left(0, \frac{t\varrho}{2^{n-1}}\right)\right) \qquad \text{és} \qquad \left\|y - \sum_{i=1}^{n} y_i\right\| < \frac{\varrho}{2^n}. \tag{4.4}$$

Ebből az következik, hogy $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$. Válasszunk olyan $x_n \in B\left(0, \frac{t\varrho}{2^{n-1}}\right)$ elemeket, hogy $y_n = Ax_n$ (ilyen van (4.4) miatt). Megmutatjuk, hogy $\sum(x_n)$ Cauchy-sor az X Banach-térben. Legyen $m \geq n$, ekkor

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} x_i\right\| \leq \sum_{i=n}^{m} \|x_i\| < t\varrho \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{2^{i-1}} < \frac{t\varrho}{2^{n-2}} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

vagyis teljesül a Cauchy-kritérium a $\sum(x_n)$ sorra. Legyen a sor összege x. Ekkor

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < t\varrho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2t\varrho.$$

Mivel $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, így A folytonossága miatt

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y.$$

Tehát minden $y \in B(0,\varrho)$ vektorhoz találtunk olyan $x \in B(0, 2t\varrho)$ vektort, hogy $Ax = y$, amivel (4.3)-t beláttuk.
Legyen végül $m := 4t$. Tetszőleges $y \in Y$ esetén legyen $\tilde{y} = \frac{y}{2\|y\|}$. Ekkor $\tilde{y} \in B(0,1)$, így az előző rész szerint létezik $\tilde{x} \in B(0,2t)$, hogy $\tilde{y} = A\tilde{x}$. Ha most $x := 2\|y\|\,\tilde{x}$, akkor

$$Ax = 2\|y\|\,A\tilde{x} = 2\|y\|\,\tilde{y} = y \qquad \text{és} \qquad \|x\| = 2\|y\|\,\|\tilde{x}\| < 4t\,\|y\| = m\,\|y\|\,.$$

□

4.10. Lemma. *Legyen X Banach-tér, Y normált tér, $A \in B(X,Y)$. Ha valamely origó közepű nyílt gömb A-képének lezártja tartalmaz nyílt gömböt, akkor bármely nyílt gömb A-képe maga is tartalmaz nyílt gömböt a középpont képe körül.*

Bizonyítás. A feltevés épp azt jelenti, hogy alkalmazható az előző lemma, ezért megadható olyan $m > 0$, hogy minden $y \in Y$ esetén van olyan $x \in X$, melyre $Ax = y$ és $\|x\| \le m\,\|y\|$. Legyen tehát $B(x,R) \subset X$ adott nyílt gömb, találnunk kell hozzá olyan $B(Ax,r) \subset Y$ nyílt gömböt, melyre

$$A(B(x,R)) \supset B(Ax,r).$$

Megmutatjuk, hogy $r := \frac{R}{m}$ esetén ez fennáll. Legyen $y := Ax$ és $\tilde{y} \in B(y,r)$, alkalmazzuk az előző lemma eredményét az $\tilde{y} - y$ vektorra! Eszerint van olyan $\tilde{z} \in X$, melyre $A\tilde{z} = \tilde{y} - y$ és $\|\tilde{z}\| \le m\,\|\tilde{y} - y\|$. Ha most $\tilde{x} := x + \tilde{z}$, akkor

$$\|\tilde{x} - x\| = \|\tilde{z}\| \le m\,\|\tilde{y} - y\| < mr = R,$$

tehát $\tilde{x} \in B(x,R)$, emellett

$$\tilde{y} = y + A\tilde{z} = Ax + A\tilde{z} = A\tilde{x},$$

így $\tilde{y} \in A(B(x,R))$. □

4.11. Tétel (Banach-féle nyíltleképezés-tétel). *Legyenek X, Y Banach-terek, $A \in B(X,Y)$ szuperjektív. Ekkor A nyílt leképezés, azaz bármely nyílt halmaz A-képe nyílt.*

Bizonyítás. Mivel A szuperjektív, tekinthetjük a képtér $Y = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{A(B(0,n))}$ felbontását. A 4.4. tétel miatt Y második kategóriájú, így az unió valamelyik tagja tartalmaz nyílt gömböt. A 4.10. lemma szerint ekkor bármely nyílt gömb A-képe maga is tartalmaz nyílt gömböt a középpont képe körül. Ez pedig, mint a 4.8. megjegyzésben láttuk, épp azt jelenti, hogy A nyílt leképezés.

4.12. Megjegyzés. A nyíltleképezés-tételhez elég feltenni, hogy $R(A)$ második kategóriájú, hiszen a bizonyítás ugyanúgy halad; ekkor menet közben a felhasznált 4.9. lemma alapján kijön, hogy A szükségképpen szuperjektív is.

Megjegyezzük azt is, hogy a szuperjektivitásból, szintén a 4.11. tételhez felhasznált 4.9. lemma alapján, következik e lemma állítása:

4.13. Következmény. *Legyenek X, Y Banach-terek, $A \in B(X,Y)$ szuperjektív. Ekkor megadható olyan $m > 0$, hogy minden $y \in Y$ esetén van olyan $x \in X$, melyre $Ax = y$ és $\|x\| \le m\,\|y\|$.*

4.14. Tétel (Banach-féle homeomorfizmus-tétel). *Legyenek X, Y Banach-terek, $A \in B(X,Y)$ bijekció. Ekkor $A^{-1} \in B(Y,X)$.*

Bizonyítás. Mivel A szuperjektív is, a nyílt leképezés-tétel szerint nyílt halmaz A-képe nyílt. Ez ugyanaz, mint hogy nyílt halmaz A^{-1}-ősképe nyílt, azaz A^{-1} folytonos. □

4.15. Megjegyzés. A homeomorfizmus-tétel a 4.13. következményből is kijön: az ott szereplő x az A bijekció volta miatt egyértelmű, éspedig $x = A^{-1}y$, ebből pedig $\|A^{-1}y\| \le m\,\|y\|$.

A Banach-féle homeomorfizmus-tétel fontos alkalmazása operátoregyenletekkel kapcsolatos. Tekintsünk egy

$$Ax = y \tag{4.5}$$

operátoregyenletet.

4.16. Definíció. Legyenek X, Y normált terek és $A : X \supset\!\!\to Y$ lineáris operátor. A (4.5) egyenlet *korrekt kitűzésű*, ha

(i) minden $y \in Y$ esetén egyértelműen létezik x megoldás, és

(ii) x folytonosan függ y-tól.

Azaz, a (4.5) egyenlet akkor korrekt kitűzésű, ha (i) $A : D(A) \to Y$ bijekció, és (ii) A^{-1} folytonos. Mivel A^{-1} lineáris, a (ii) pont úgy is írható, hogy létezik olyan y-tól független $M > 0$ konstans, melyre $\|x\| \le M\|y\|$.

Ha most X, Y Banach-terek és A folytonos, akkor a 4.14. tétel szerint a (ii) tulajdonság következik (i)-ből:

4.17. Következmény. *Ha X, Y Banach-terek és $A \in B(X, Y)$, akkor a 4.16. definíció (ii) pontja következik (i)-ből, így elhagyható.*

A homeomorfizmus-tétel további alkalmazása az 1.10. állításnak (bizonyos értelemben) megfordítása.

4.18. Tétel. *Legyen X olyan normált tér, amely teljes az $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normákra vonatkozóan. Tegyük fel, hogy van olyan $M > 0$ konstans, amelyre $\|x\|_1 \le M \|x\|_2$ minden $x \in X$ esetén. Ekkor a két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. A feltétel szerint az $(X, \|\cdot\|_2)$ és $(X, \|\cdot\|_1)$ Banach-terek közötti $Ix := x$ identikus leképezés folytonos lineáris és bijektív. A 4.14. következmény szerint az inverz is folytonos lineáris, azaz létezik $c_2 > 0$, hogy $\left\|I^{-1}x\right\|_2 = \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1$. □

4.2.2. A zártgráf-tétel

4.19. Definíció. Legyenek X, Y normált terek, $D \subset X$, és $A : D \to Y$ adott leképezés. Ekkor a $\Gamma(A) = \{(x, A(x)) : x \in D\} \subset X \times Y$ halmazt *A gráfjának* vagy grafikonjának nevezzük.

Ha $D \subset X$ altér és $A : D \to Y$ lineáris, akkor $\Gamma(A)$ is altér $X \times Y$-ban. A továbbiakban tekintsük az $X \times Y$ szorzattéren az alábbi normát:

$$\|(x, y)\| := \|x\| + \|y\| \qquad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

4.20. Definíció. Legyenek X, Y normált terek, $D \subset X$ altér. Az $A : D \to Y$ lineáris operátor *zárt*, ha minden $(x_n) \subset D$ sorozatra fennáll, hogy ha $\exists x = \lim x_n \in X$ és $\exists y = \lim Ax_n \in Y$, akkor $x \in D$ és $y = Ax$.

A definíció jelentését magyarázza a következő állítás.

4.21. Állítás. *Egy A lineáris operátor pontosan akkor zárt, ha $\Gamma(A)$ zárt altér $X \times Y$-ban.*

Bizonyítás. Legyen $A : D \to Y$ zárt lineáris operátor. Be kell látni, hogy $\Gamma(A)$ minden torlódási pontja eleme a gráfnak. Legyen $(x, y) \in \partial\Gamma(A)$, ekkor van olyan $\big((x_n, Ax_n)\big) \subset \Gamma(A)$ sorozat a gráfban, amely (x, y)-hoz konvergál a szorzattér normája szerint, vagyis

$$\|x_n - x\| + \|Ax_n - y\| \to 0.$$

Ebből következik, hogy $x_n \to x$ és $Ax_n \to y$. Mivel A zárt, így $x \in D$ és $y = Ax$, azaz $(x, y) = (x, Ax) \in \Gamma(A)$.

Megfordítva, legyen a gráf zárt és $(x_n) \subset D$ olyan sorozat, hogy $x_n \to x \in X$ és $Ax_n \to y \in Y$. Be kell látni, hogy $x \in D$ és $Ax = y$. A feltétel szerint $\Gamma(A) \ni (x_n, Ax_n) \to (x, y) \in \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$, mert $\Gamma(A)$ zárt. Vagyis $x \in D$ és $y = Ax$, így A zárt. □

4.22. Tétel. *Legyenek X, Y normált terek, $D \subset X$ zárt altér, $A : D \to Y$ korlátos lineáris operátor. Ekkor A zárt. Speciálisan, minden $A \in B(X, Y)$ operátor zárt.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to x$ egy D-beli konvergens sorozat, melyre $Ax_n \to y$, akkor D zártsága miatt $x \in D$, továbbá A folytonosságából következik, hogy $Ax_n \to Ax$, vagyis $y = Ax$. □

Tehát az operátorok zártsága a folytonosság fogalmának enyhítése.

4.23. Tétel. *Ha egy $A : D \to Y$ injektív lineáris operátor zárt, akkor A^{-1} is zárt.*

Bizonyítás. Mivel A zárt, ezért $\Gamma(A)$ is zárt. Az injektivitás miatt minden $y \in R(A)$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $x \in D$, hogy $y = Ax$. Ezért

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D\} = \{(A^{-1}y, y) : y \in R(A)\}.$$

Legyen $S : X \times Y \to Y \times X$ a koordináta-felcserélő operátor, azaz $S(x, y) := (y, x)$. Ez nyilván izometria, emiatt zárt halmaz S-képe zárt, így az $S(\Gamma(A)) = \{(y, A^{-1}y) : y \in R(A)\} = \Gamma(A^{-1})$ halmaz zárt, vagyis A^{-1} zárt operátor. □

4.24. Tétel (zártgráf-tétel). *Legyenek X, Y Banach-terek, $A : X \to Y$ lineáris és zárt operátor. Ekkor $A \in B(X, Y)$.*

Bizonyítás. Mivel X és Y is Banach-tér, így $X \times Y$ is az. Mivel A zárt, ezért $\Gamma(A)$ zárt halmaz a szorzattérben. A zártság és a szorzattér teljessége miatt a gráf is Banach-tér. Tekintsük a $P : \Gamma(A) \to X$ leképezést, mely egy $(x, Ax) \in \Gamma(A)$ párhoz x-et rendeli. Ekkor P lineáris, és korlátos is, mert

$$\|P(x, Ax)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\|.$$

Emellett P nyilvánvalóan szuperjektív. Injektív is lesz, amihez a linearitás miatt elég azt belátni, hogy csak a $(0, 0)$ elemet viszi az X tér nullelemébe. Tegyük fel ugyanis, hogy $P(x, Ax) = 0$: ez P definíciója szerint azt jelenti, hogy $x = 0$, ebből viszont A linearitása miatt $Ax = 0$ is következik. Összességében $P : \Gamma(A) \to X$ korlátos lineáris bijekció két Banach-tér között, ekkor pedig a 4.14. tétel szerint P^{-1} is korlátos.

Ezek után már meg tudjuk mutatni, hogy A folytonos. Legyen $(x_n) \subset X$ sorozat, $x_n \to x \in X$. Ekkor P^{-1} folytonossága miatt $P^{-1}x_n \to P^{-1}x$, azaz $(x_n, Ax_n) \to (x, Ax)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\|x_n - x\| + \|Ax_n - Ax\| \to 0,$$

ebből következik, hogy $Ax_n \to Ax$. □

5. fejezet

Folytonos lineáris funkcionálok Hilbert-térben

5.1. Riesz reprezentációs tétele

Példa folytonos lineáris funkcionálra Hilbert-térben. Ha $y \in H$ rögzített vektor, akkor a

$$\phi_y : H \to \mathbb{C}, \quad \phi_y x := \langle x, y \rangle$$

leképezés a skalárszorzás definíciója miatt lineáris, és korlátos is, ugyanis

$$|\phi_y x| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \quad (\forall x \in H).$$

Ebből az is következik, hogy $\|\phi_y\| \leq \|y\|$.

5.1. Állítás. $\|\phi_y\| = \|y\| \quad$ *($\forall y \in H$).*

Bizonyítás. Az $y = 0$ eset triviális, amúgy pedig

$$\|\phi_y\| = \sup\{|\phi_y(x)| : \ \|x\| = 1\} \geq \phi_y\Big(\frac{y}{\|y\|}\Big) = \frac{1}{\|y\|} \langle y, y \rangle = \|y\| \, . \qquad \square$$

Az alábbi nevezetes tétel azt mondja ki, hogy a fenti példával, vagyis adott vektorral történő skalárszorzással minden lehetséges folytonos lineáris funkcionált leírtunk. (Tehát ugyanaz a jellemzés igaz, mint véges dimenzióban.)

5.2. Tétel (Riesz reprezentációs tétele). *Legyen H Hilbert-tér. Ekkor minden $\phi : H \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $y \in H$, hogy $\phi = \phi_y$, azaz*

$$\phi x = \langle x, y \rangle \qquad (\forall x \in H). \tag{5.1}$$

Bizonyítás. Ha $\phi \equiv 0$, akkor $y = 0$ jó lesz. Ha ϕ nem azonosan nulla, akkor a 3.3. állítás szerint $\ker \phi$ valódi (1 kodimenziós) zárt altér, így a 2.16. tétel szerint $(\ker \phi)^{\perp} \neq \{0\}$. Legyen $z \neq 0$, melyre $z \in (\ker \phi)^{\perp}$, és legyen $x_0 = (\phi x)z - (\phi z)x$. Ekkor $\phi x_0 = 0$, azaz $x_0 \in \ker \phi$, tehát $\langle x_0, z \rangle = 0$. Ezt részletesen kiírva

$$0 = \langle x_0, z \rangle = \langle (\phi x)z - (\phi z)x, z \rangle = \phi x \, \|z\|^2 - \phi z \, \langle x, z \rangle \, ,$$

vagyis

$$\phi x = \frac{\phi z \, \langle x, z \rangle}{\|z\|^2} = \left\langle x, \frac{\overline{\phi z}}{\|z\|^2} z \right\rangle,$$

ahonnan $y = \frac{\overline{\phi z}}{\|z\|^2} z$ választással adódik (5.1).
Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy y_1, y_2 a ϕ-hez tartozó reprezentáns vektorok. Ekkor $\phi x = \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$, vagyis $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0$ minden $x \in H$ esetén, így $y_1 = y_2$. □

Az 5.1. állítás és 5.2. tétel alapján a

$$T : H \to H^*, \qquad y \mapsto \phi_y$$

leképezés normatartó (tehát izometria), valamint bijekció. A linearitás azonban csak „majdnem” teljesül, mivel a (5.1)-beli skalárszorzatban y a hátsó helyen áll, így ha $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ és $y_1, y_2 \in H$, akkor az

$$\langle x, \, c_1 y_1 + c_2 y_2 \rangle = \overline{c}_1 \, \langle x, y_1 \rangle + \overline{c}_2 \, \langle x, y_2 \rangle \qquad (\forall x \in H)$$

egyenlőség alapján

$$T(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \phi_{c_1 y_1 + c_2 y_2} = \overline{c}_1 \phi_{y_1} + \overline{c}_2 \phi_{y_2} = \overline{c}_1 T(y_1) + \overline{c}_2 T(y_2),$$

azaz T konjugáltan lineáris leképezés. Ez alapján azt mondjuk, hogy egy H Hilbert-tér *konjugáltan izometrikus* a H^* duálisával, és úgy jelöljük, hogy

$$H^* \equiv_* H.$$

Bár ez nem teljesen a megszokott izometria, a kapott $y \mapsto \phi_y$ megfeleltetés révén a Hilbert-tereket azonosíthatjuk a duálisukkal.

A kapott eredményből következik, hogy minden Hilbert-tér reflexív. Könnyen látható ugyanis, hogy a $H \to H^*$ és $H^* \to H^{**}$ közti konjugáltan lineáris izometriák kompozíciója már lineáris izometria, így H izometrikus H^{**}-gal.

5.2. Gyenge konvergencia Hilbert-térben

Gyenge konvergenciával a 3.3. szakasz (b) részében foglalkoztunk. A 3.14. definíció a Riesz-féle reprezentációs tétel alapján skalárszorzattal írható fel:

5.3. Következmény. *Legyen H Hilbert-tér. Egy $(x_n) \subset H$ sorozat pontosan akkor tart gyengén az $x \in H$ vektorhoz, ha*

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \qquad (\forall y \in H).$$

Láttuk, hogy az erős konvergenciából következik a gyenge konvergencia, azaz ha $x_n \to x$ erős értelemben (vagyis normában), akkor a folytonosság miatt $\phi x_n \to \phi x$ minden $\phi \in X^*$ esetén. A megfordítás azonban nem igaz:

5.4. Állítás. *Ha $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer H-ban, akkor $e_n \xrightarrow{w} 0$. Normában azonban $e_n \not\to 0$, sőt nem is konvergens.*

Bizonyítás. A Parseval-egyenlőség (2.29. állítás) szerint tetszőleges $x \in X$ esetén $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$, így $\langle x, e_n\rangle \to 0$. Ez azt jelenti, hogy $e_n \xrightarrow{w} 0$. Az viszont világos, hogy $\|e_n\| = 1$ miatt $e_n \not\to 0$ normában. Sőt, mivel $n \neq m$ esetén $\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2$, ezért (e_n) nem Cauchy-sorozat, így nem is konvergens. □

A fenti állítás bármely $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált rendszerre is igaz, mivel utóbbi teljes a $\overline{span\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ térben, így az állítást utóbbiban használjuk fel.

Hilbert-térben az erős és a gyenge konvergencia kapcsolatát az alábbi tétel jellemzi.

5.5. Tétel. *Legyen $(x_n) \subset H$, $x \in H$. Ekkor*

$$\|x_n - x\| \to 0 \iff \begin{cases} i) & \|x_n\| \to \|x\| \\ ii) & x_n \xrightarrow{w} x. \end{cases}$$

Bizonyítás. ($\Rightarrow$) Ezt már tudjuk (a norma és a skalárszorzás folytonosságából).

($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $i)$ és $ii)$ teljesül, ekkor

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle \to 0,$$

ugyanis a gyenge konvergencia miatt $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2$. □

Az előzőek szerint végtelen dimenziós térben a zárt egységgömb korlátos ugyan, de nem sorozatkompakt, mert egy ortonormált rendszerből nem lehet kiválasztani konvergens részsorozatot. Vagyis a Bolzano–Weierstrass tétel általában nem marad érvényben. Ez a tulajdonság mégis megmenthető, mert gyenge értelemben már igaz.

5.6. Tétel. *Hilbert-térben minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset H$ korlátos sorozat, melyre tehát $\|x_n\| \leq C$ valamilyen $C > 0$ számra. Legyen $H_0 := \overline{[(x_n)]}$ az (x_n) által generált zárt altér. Legyen $H_1 = H_0^\perp$, így a 2.16. tétel szerint $H = H_0 \oplus H_1$.
Az $(\langle x_1, x_n \rangle)$ számsorozat a CSB-egyenlőtlenség szerint korlátos, van tehát olyan $(x_n^1) \subset (x_n)$ részsorozat, hogy létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_1, x_n^1 \rangle$.
Az $\left(\langle x_2, x_n^1 \rangle\right)$ számsorozat szintén korlátos, van tehát olyan $(x_n^2) \subset (x_n^1)$ részsorozat, hogy létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_2, x_n^2 \rangle$.
Az eljárást folytatva egy olyan $(x_n) \supset (x_n^1) \supset (x_n^2) \supset \ldots$ részsorozat-láncot kapunk, melyre létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_k, x_n^k \rangle$ minden rögzített $k = 1, 2, \ldots$ esetén.
Legyen $z_n := x_n^n$. A (z_n) sorozat részsorozata (x_n)-nek és a konstrukció szerint (z_n) minden rögzített k-ra az első néhány (legfeljebb k) tagtól eltekintve részsorozata (x_n^k)-nak, így létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_k, z_n \rangle$ minden k-ra. A határérték nyilván a sorozat tagjainak tetszőleges véges lineáris kombinációjára is létezik.
Legyen $\phi_n y := \langle y, z_n \rangle$ a $[(x_n)]$ lineáris burkon értelmezett lineáris funkcionál, melyre $\|\phi_n\| \leq C$, tehát korlátos is n-től független korláttal. A $\phi y := \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n y$ egyenlőséggel definiált ϕ funkcionál szintén lineáris és folytonos.
Terjesszük ki őket a 3.4. állítás segítségével $\Phi_n, \Phi : H_0 \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálokká normatartó módon.
Ekkor a $\Phi_n \in H_0^*$ funkcionálok egyenletesen korlátosak és $\Phi_n \to \Phi$ pontonként $[(x_n)]$-en, így az 4.6. tétel szerint $\Phi_n \to \Phi$ pontonként egész H_0-on, speciálisan minden $y \in H_0$ esetén létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y, z_n \rangle = \Phi y$. A $\Phi : H_0 \to \mathbb{C}$ funkcionál lineáris és folytonos is a H_0 Hilbert-téren, ezért Riesz reprezentációs tétele szerint létezik $\tilde{z} \in H_0$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y, z_n \rangle = \langle y, \tilde{z} \rangle$ minden $y \in H_0$ esetén, azaz $z_n \xrightarrow{w} \tilde{z}$ H_0-on. Már csak az kell, hogy ez H-n is igaz. Legyen tehát $y \in H$ tetszőleges, $y = y_0 + y_1$, ahol $y_0 \in H_0$ és $y_1 \in H_1$. Ekkor $y_1 = y - y_0 \perp H_0$ miatt $\langle z_n - \tilde{z}, y - y_0 \rangle = 0$. Ezt kifejtve

$$0 = \langle z_n, y \rangle - \langle z_n, y_0 \rangle - \langle \tilde{z}, y \rangle + \langle \tilde{z}, y_0 \rangle ,$$

és felhasználva, hogy $\langle y_0, z_n \rangle \to \langle y_0, \tilde{z} \rangle$, következik, hogy $\langle z_n, y \rangle \to \langle \tilde{z}, y \rangle$ minden $y \in H$ esetén, azaz $z_n = x_n^n \xrightarrow{w} \tilde{z}$. $\square$

6. fejezet

Folytonos lineáris operátorok Hilbert-térben

Ebben a részben $A : H \to H$ folytonos lineáris operátorokkal foglalkozunk. A továbbiakban jelölje röviden $B(H)$ a $B(H, H)$ teret.

Hilbert-térben folytonos lineáris operátor esetén nem jelent megszorítást, hogy az egész téren értelmezzük, ugyanis ha eredetileg csak altéren értelmeztük, akkor létezik természetes kiterjesztése az egész térre:

6.1. Állítás. *Ha $A : H \supset\!\!\to H$ folytonos lineáris operátor, akkor létezik $\tilde{A} : H \to H$ folytonos lineáris, sőt normatartó kiterjesztése.*

Bizonyítás. (i) Először $D(A)$ lezártjára terjesztjük ki az operátort az $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ képlettel, ahol $x \in \overline{D(A)}$ esetén $(x_n) \subset D(A)$ olyan sorozat, melyre $x_n \to x$. A 3.4 lemma mintájára könnyen belátható, hogy ez a limesz létezik és nem függ az (x_n) sorozat választásától, valamint a kiterjesztett operátor lineáris és normája azonos A normájával.

(ii) Most már feltehető, hogy $D(A)$ zárt. Legyen $x \in H$ tetszőleges. A 2.16. tétel alapján x felírható $x = x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in D(A)$ és $x_2 \in D(A)^\perp$. Legyen $\tilde{A}x := Ax_1$ (azaz a $D(A)^\perp$ komplementeren 0 értéket adunk). Nyilvánvaló, hogy $\tilde{A}$ lineáris és kiterjesztése A-nak. Emellett a normáját sem növelheti, mert

$$\|\tilde{A}x\| = \|Ax_1\| \leq \|A\|\|x_1\| \leq \|A\|\|x\|,$$

ahol a végén a 2.17. megjegyzést használtuk. $\square$

6.1. Adjungált operátor, speciális operátortípusok

6.2. Állítás. *Bármely $A \in B(H)$ esetén létezik egyetlen olyan $A^* \in B(H)$, melyre*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad (\forall x, y \in H).$$

Ezt az A^* operátort az A adjungáltjának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $y \in H$ rögzített. Ekkor a $\psi_y : H \to \mathbb{C}$, $\psi_y x := \langle Ax, y\rangle$ lineáris funkcionál korlátos is, mert

$$|\psi_y x| \leq \|Ax\|\,\|y\| \leq (\|A\|\,\|y\|)\,\|x\| \qquad (\forall x \in H).$$

Riesz reprezentációs tétele szerint létezik egyetlen $y^* \in H$, hogy $\psi_y x = \langle x, y^*\rangle$ minden $x \in H$-ra. Legyen $A^* : H \to H$ az a leképezés, melyre $A^*y := y^*$, erre igaz az $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ képlet. Igazolnunk kell még, hogy A^* folytonos lineáris. A linearitást a skalárszorzat tulajdonságaiból, a korlátosságot pedig az

$$\|A^*y\| = \|y^*\| = \|\psi_y\| \leq \|A\|\,\|y\|$$

becslésből kapjuk, ahol a középső lépés az 5.1. állításból következik. □

A bizonyításból az is kijött, hogy $\|A^*\| \leq \|A\|$, valójában azonban több is igaz.

6.3. Állítás. *Bármely $A \in B(H)$ esetén $A^{**} := (A^*)^* = A$ és $\|A^*\| = \|A\|$.*

Bizonyítás. Mivel $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle A^{**}x, y\rangle$ $(\forall x, y \in H)$, ezért $Ax = A^{**}x$ $(\forall x \in H)$, azaz $A = A^{**}$. A normákra vonatkozó egyenlőtlenséget figyelembevéve

$$\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|\,,$$

azaz mindenhol egyenlőségnek kell teljesülnie. □

6.4. Állítás. *Ha $A, B \in B(H)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$,
3. $(AB)^* = B^*A^*$,
4. $\|A\|^2 = \|A^*A\|$ *(C^*-tulajdonság).*

Bizonyítás. Az első három az adjungáltat definiáló egyenlőségből azonnal adódik. A 4.-hez egyrészt

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle \le \|x\|\,\|A^*Ax\| \le \|A^*A\|\,\|x\|^2$$

adódik, amiből $\|A\|^2 \le \|A^*A\|$ következik; visszafelé, az előző állítást használva

$$\|A^*A\| \le \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2 . \qquad \square$$

6.5. Tétel. *(Operátorokra vonatkozó ortogonális felbontás). Bármely $A \in B(H)$ esetén H előáll*

$$\overline{R(A)} \oplus \ker(A^*) = H$$

ortogonális direkt összeg alakjában.

Bizonyítás. Mivel $\overline{R(A)}$ zárt altere H-nak, a 2.16. tétel miatt elég belátni, hogy $\overline{R(A)}^{\perp} = \ker(A^*)$. Ez az alábbi ekvivalenciákból következik:

$$y \in \overline{R(A)}^{\perp} \;\Leftrightarrow\; y \perp \overline{R(A)} \;\Leftrightarrow\; y \perp R(A) \;\Leftrightarrow\; \langle y, Ax\rangle = 0 \quad \forall x \in H \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \langle A^*y, x\rangle = 0 \quad \forall x \in H \;\Leftrightarrow\; A^*y = 0 \;\Leftrightarrow\; y \in \ker(A^*). \qquad \square$$

6.6. Definíció. Egy $A \in B(H)$ operátor

- *önadjungált*, ha $A = A^*$;
- *izometrikus*, ha $\|Ax\| = \|x\|$ $(\forall x \in X)$;
- *unitér*, ha izometrikus és szuperjektív;
- *projektor*, ha van olyan $K \subset H$ zárt altér, hogy minden $x \in H$ esetén $Ax = x_K$;
- *normális*, ha $AA^* = A^*A$.

6.7. Megjegyzés. Minden önadjungált operátor normális. Emellett látni fogjuk a 6.3 ill. 6.4. szakaszokban, hogy minden projektor önadjungált, továbbá A pontosan akkor unitér, ha A bijekció és $A^{-1} = A^*$. Így ezek is normális operátorok.

6.8. Megjegyzés. (Adjungált különböző terek közt.) A 6.2. állítás ugyanúgy igazolható különböző H, K Hilbert-terek között is, azaz bármely $A \in B(H,K)$ esetén létezik egyetlen olyan $A^* \in B(K,H)$, melyre $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ $(\forall x \in H, y \in K)$. (Sőt, bármely X, Y Banach-terek és $A \in B(X,Y)$ esetén is létezik egyetlen olyan $A^* \in B(Y^*, X^*)$, melyre az analóg formula teljesül, skalárszorzat helyett funkcionál alkalmazása értelmében; ezt az A^*-ot Banach-adjungáltnak hívjuk.)

6.2. Önadjungált operátorok

Az önadjungált operátor definíciója úgy írható, hogy

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad (\forall x \in H),$$

legtöbbször ezt használjuk. A következő jellemzésben fontos, hogy H komplex Hilbert-tér.

6.9. Állítás. *Egy $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor önadjungált, ha kvadratikus alakja valós, azaz ha $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in H)$.*

Bizonyítás. Legyen $A \in B(H)$ önadjungált. Ekkor

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle},$$

vagyis $\langle Ax, x\rangle$ valós.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a kvadratikus alak valós értékű. Ekkor bármely $x, y \in H$ esetén

$$\underbrace{\langle A(x+y), x+y\rangle}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\langle Ax, x\rangle}_{\in\mathbb{R}} + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \underbrace{\langle Ay, y\rangle}_{\in\mathbb{R}},$$

tehát $\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle$ valós. Emiatt a képzetes részük egymás ellentettje, így

$$Im\ \langle Ax, y\rangle = -Im\ \langle Ay, x\rangle = Im\ \langle x, Ay\rangle\,. \tag{6.1}$$

Mivel x tetszőleges volt, ez érvényes ix-re is, azaz $Im\ \langle A(ix), y\rangle = Im\ \langle ix, Ay\rangle$, vagyis a $Re\, z = Im\,(iz)$ azonosság révén

$$Re\ \langle Ax, y\rangle = Im\ (i\,\langle Ax, y\rangle) = Im\ (i\,\langle x, Ay\rangle) = Re\ \langle x, Ay\rangle\,. \tag{6.2}$$

A két egyenlőségből adódik, hogy $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, tehát A önadjungált. $\square$

Ez az állítás nyilvánvalóan nem igaz valós Hilbert-térben, hiszen ott sem minden operátor önadjungált.

A következő fontos tétel előtt megemlítjük, hogy tetszőleges $A \in B(H)$ operátor normája kifejezhető bilineáris formával, ami 2.4. állítás operátorokra való analógiája:

6.10. Állítás. *Bármely $A \in B(H)$ esetén $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : \ x, y \in H,\ \|x\| = \|y\| = 1\}$.*

Bizonyítás. Az $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in H, \|x\| = 1\}$ egyenlőségben $\|Ax\|$-ra alkalmazzuk a 2.4. állítást. □

(Ebből is levezethető az $\|A^*\| = \|A\|$ azonosság.) Önadjungált operátor esetén ugyanezt elég kvadratikus alakkal felírni:

6.11. Tétel. *Ha $A \in B(H)$ önadjungált, akkor*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Bizonyítás. Legyen $F_1 := \{x \in H : \|x\| = 1\}$ az egységgömb felszíne, $\alpha := \sup_{F_1} |\langle Ax, x\rangle|$. Be kell látnunk, hogy $\|A\| = \alpha$.

Mivel minden $x \in F_1$ esetén $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\| \|x\|^2 = \|A\|$, ezért szuprémumot véve kapjuk, hogy $\alpha \leq \|A\|$.

A másik irányhoz legyen $x, y, z \in H$ tetszőleges. Ekkor

$$|\langle Az, z\rangle| = \left|\left\langle A\Big(\frac{z}{\|z\|}\Big), \Big(\frac{z}{\|z\|}\Big)\right\rangle\right| \|z\|^2 \leq \alpha \|z\|^2,$$

illetve A önadjungáltságát használva

$$\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle = 2(\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle) =$$

$$2(\langle Ax, y\rangle + \overline{\langle Ax, y\rangle}) = 4Re\ \langle Ax, y\rangle.$$

Ezekből és a parallelogramma-szabályból adódik a

$$Re\ \langle Ax, y\rangle \leq \frac{1}{4}\alpha\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\alpha\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

becslés. Amennyiben $x, y \in F_1$, akkor az utolsó tag éppen α, azaz $Re\ \langle Ax, y\rangle \leq \alpha$. Legyen most $x \in F_1$ tetszőleges, $y := \frac{Ax}{\|Ax\|} \in F_1$. Ekkor

$$Re\ \langle Ax, y\rangle = Re\left\langle Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}\right\rangle = \|Ax\| \leq \alpha,$$

azaz $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} \leq \alpha$. □

6.12. Következmény. *Ha $A \in B(H)$ olyan, hogy $\langle Ax, x\rangle = 0$ minden $x \in H$-ra, akkor $A = 0$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $\langle Ax, x\rangle$ valós minden $x \in H$ esetén, így a 6.9. állítás szerint A önadjungált, ezért a 6.11. tétel szerint $\|A\| = 0$, tehát $A = 0$. □

Ennek $A = B - C$ esetére való átfogalmazása:

6.13. Következmény. *Ha $B, C \in B(H)$ és $\langle Bx, x\rangle = \langle Cx, x\rangle$ minden $x \in H$-ra, akkor $B = C$.*

Ez a két állítás sem igaz valós Hilbert-térben: pl. $\mathbb{R}^2$-ben egy derékszögű forgatás mátrixának kvadratikus alakja azonosan 0, hiszen a kép mindig merőleges az eredeti vektorra.

A 6.11. tétel segítségével rövid bizonyítás adható a 6.4. tételben szereplő C^*-tulajdonságra.

6.14. Állítás. *Tetszőleges $A \in B(H)$ esetén $\|A^*A\| = \|A\|^2$.*

Bizonyítás. Mivel A^*A önadjungált, így

$$\|A^*A\| = \sup_{x\in F_1} |\langle A^*A, x\rangle| = \sup_{x\in F_1} |\langle Ax, Ax\rangle| = \sup_{x\in F_1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2 . \qquad \square$$

6.15. Megjegyzés. Ha az operátor nem önadjungált, akkor a 6.11. tétel helyett a következő mondható. Tetszőleges $A \in B(H)$ esetén a $W(A) := \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{C}$ halmazt az A operátor numerikus értékkészletének, a $w(A) := \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\} \in \mathbb{R}$ számot A numerikus sugarának nevezzük. Igazolható, hogy tetszőleges $A \in B(H)$ esetén $\frac{1}{2}\|A\| \le w(A) \le \|A\|$, ha viszont $A \in B(H)$ normális, akkor érvényben marad a 6.11. tétel, azaz $w(A) = \|A\|$, lásd [9].

6.16. Definíció. Egy $A \in B(H)$ operátor

- *pozitív*, ha $\langle Ax, x\rangle \ge 0 \quad (\forall x \in H)$,
- *szigorúan pozitív*, ha $\langle Ax, x\rangle > 0 \quad (\forall x \in H,\ x \ne 0)$,
- *egyenletesen pozitív*, ha van olyan $m > 0$, hogy $\langle Ax, x\rangle \ge m\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$.

A fent definiált operátorok önadjungáltak, mert a kvadratikus alakjuk valós. A pozitív operátor elnevezés annak ellenére honosodott meg, hogy a kvadratikus alakja csak nemnegatív.

6.17. Definíció. Legyen $A, B \in B(H)$. Azt mondjuk, hogy $A \ge B$, ha $A - B \ge 0$, azaz $A - B$ pozitív operátor.

6.18. Megjegyzés. Az $A \ge B$ egyenlőtlenség tehát azt jelenti, hogy $\langle Ax, x\rangle \ge \langle Bx, x\rangle$ $(\forall x \in H)$. Ebből és a 6.13. következményből adódik, hogy a fenti reláció részbenrendezést definiál $B(H)$-ban.

6.19. Definíció. Legyen $A \in B(H)$ szigorúan pozitív operátor. Ekkor az $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle$ skalárszorzatot az A operátorhoz tartozó *energia-skalárszorzatnak*, az indukált $\|x\|_A = \langle Ax, x\rangle^{1/2}$ normát *energianormának* nevezzük. (Könnyen látható, hogy $\langle ., .\rangle_A$ valóban skalárszorzat.)

Az energianorma mindig gyengébb az eredetinél, hiszen $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle \leq \|A\| \|x\|^2$. Egyenletesen pozitív operátor esetén ez fordítva is igaz, ugyanis ekkor $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle \geq m \|x\|^2$, így a két norma ekvivalens. Az 1.10. állításból fakad ekkor a

6.20. Következmény. *Egyenletesen pozitív operátor esetén* $(H, \|\cdot\|_A)$ *is Hilbert-tér.*

Végül, a 2.4 állítás energianormára is fennáll:

6.21. Állítás. *Legyen* $A \in B(H)$ *szigorúan pozitív operátor. Ekkor bármely* $x \in H$ *esetén* $\|x\|_A = \sup\{ | \langle x, y\rangle_A | : \ y \in H, \ \|y\|_A = 1\}$.

Az egyenletes pozitivitás tulajdonsága a következőképp általánosítható.

6.22. Definíció. Egy $A \in B(H)$ operátort *koercívnek* hívunk, ha létezik $m > 0$, hogy

$$Re\ \langle Ax, x\rangle \geq m \|x\|^2 \qquad (\forall x \in H).$$

6.23. Megjegyzés. Ha H valós Hilbert-tér, akkor a fenti definícióban „Re" elhagyható, de ilyenkor a koercivitás nem vonja maga után az önadjungáltságot. A két eset megkülönböztetésére az „egyenletesen pozitív" kifejezést valós Hilbert-térben is csak akkor használjuk, ha az operátor egyidejűleg koercív és önadjungált is.

Példa önadjungált, ill. pozitív operátorra. (Integráloperátor)
Legyen $I = [a, b]$, $\quad H := L^2(I)$, valamint $K \in L^2(I \times I)$ adott valós értékű függvény és $A : H \to H$ a következő:

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x, s)u(s)\mathrm{d}s \qquad (u \in L^2(I)).$$

6.24. Állítás. *A fenti feltételekkel*

(1) $A \in L^2(I) \to L^2(I)$ *korlátos lineáris operátor.*

(2) Ha K *szimmetrikus, azaz* $K(x, y) = K(y, x)$, *akkor* A *önadjungált.*

(3) Ha K úgynevezett pozitív magfüggvény, azaz létezik $N \in L^2(I \times I)$ valós függvény, hogy

$$K(x, y) = \int_a^b N(x, s) N(y, s) ds,$$

akkor A pozitív operátor.

Bizonyítás. A linearitás könnyen látható, a folytonossághoz legyen $u \in L^2(I)$, ekkor a CSB-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\|Au\|^2_{L^2(I)} = \int_a^b \left| \int_a^b K(x,s)u(s)\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_a^b \left(\int_a^b K^2(x,s)\mathrm{d}s \cdot \int_a^b u^2(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K^2(x,s)\mathrm{d}s\ \mathrm{d}x \cdot \|u\|^2_{L^2(I)} = \|K\|^2_{L^2(I\times I)} \cdot \|u\|^2_{L^2(I)},$$

azaz $\|Au\| \leq \|K\| \, \|u\|$, így A folytonos is. Ha K szimmetrikus, akkor

$$\langle Au, v\rangle_{L^2} = \int_a^b (Au)\overline{v} = \int_a^b \int_a^b K(x,s)u(s)\mathrm{d}s\ \overline{v}(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(x,s)u(s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b u(s) \int_a^b K(s,x)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}s = \int_a^b u(s)\overline{(Av)}(s)\mathrm{d}s = \langle u, Av\rangle_{L^2}.$$

Végül ha K pozitív magfüggvény, akkor legyen $(Cu)(x) := \int_a^b N(x,s)u(s)\mathrm{d}s$. Ekkor

$$\langle Cu, v\rangle_{L^2} = \int_a^b \int_a^b N(x,s)u(s)\mathrm{d}s\ \overline{v}(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \int_a^b N(x,s)u(s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b u(s) \int_a^b N(x,s)\overline{v}(x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}s = \left\langle u, \hat{C}v \right\rangle_{L^2},$$

ahol $(\hat{C}v)(s) := \int_a^b N(x,s)v(x)\ \mathrm{d}x$. Ez a $\hat{C}$ teljesíti az adjungált definíciós egyenlőségét, így $\hat{C} = C^*$. Végül vegyük észre, hogy

$$(Au)(x) = \int_a^b \Big(\int_a^b N(x,s)N(y,s)\mathrm{d}s \Big) u(y)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b N(x,s) \int_a^b N(y,s)u(y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s = (CC^*u)(x),$$

így $\quad \langle Au, u\rangle_{L^2} = \langle CC^*u, u\rangle_{L^2} = \|C^*u\|^2_{L^2} \geq 0.$ $\square$

6.3. Projektorok

6.25. Definíció. A $P \in B(H)$ operátor *projektor* (vagy ortogonális projekció), ha létezik $K \subset H$ zárt altér, hogy minden $x \in H$ esetén $Px = x_K$, azaz x vetülete K-ra. A K alteret is feltüntetve jelölje P_K a K-ra való ortogonális projekciót.

Azaz, ha $x = x_K + x_{K^\perp}$, ahol $x_K \in K$ és $x_{K^\perp} \in K^\perp$, akkor $P_K : x \mapsto x_K$.

6.26. Állítás. *Ha $K \neq \{0\}$ zárt altér, akkor $\|P_K\| = 1$.*

Bizonyítás. Mivel $\|P_K x\| = \|x_K\| \leq \|x\|$, ezért $\|P_K\| \leq 1$, és ha $0 \neq x \in K$, akkor $\|P_K x\| = \|x\|$, azaz $\|P_K\| = 1$. □

6.27. Állítás. *Egy $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor projektor, ha idempotens (azaz $A^2 = A$) és önadjungált (sőt pozitív).*

Bizonyítás. Legyen először $A = P_K$. Ekkor $P_K^2 x = P_K(P_K x) = P_K(x_K) = x_K = P_K x$, tehát P_K idempotens, valamint

$$\langle P_K x, x\rangle = \langle x_K,\ x_K + x_{K^\perp}\rangle = \|x_K\|^2 + \langle x_K, x_{K^\perp}\rangle = \|x_K\|^2 \geq 0,$$

így P_K pozitív és ezért önadjungált.
Legyen most A idempotens és önadjungált. Legyen $K := R(A)$, megmutatjuk, hogy K zárt és $A = P_K$. A zártsághoz az kell, hogy ha egy $(Ax_n) \subset K$ sorozatra létezik $y = \lim Ax_n \in H$, akkor $y \in K$, ez pedig igaz, mert $y = \lim Ax_n = \lim A^2 x_n = A(\lim Ax_n) = Ay \in K$. Legyen most $x \in H$ tetszőleges, igazoljuk, hogy $Ax = P_K x$, azaz $Ax = x_K$. Itt $Ax \in K$, és a 2.17. megjegyzés (ii) pontja szerint azt kell még belátnunk, hogy $Ax - x \perp K$, azaz $\langle Ax - x, Ay\rangle = 0$ $(\forall y \in H)$. Ez igaz, mert $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^*Ay\rangle = \langle x, A^2 y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. □

6.4. Izometrikus és unitér operátorok

6.28. Definíció. Az $A \in B(H)$ operátor izometrikus, ha minden $x \in H$ esetén $\|Ax\| = \|x\|$.

6.29. Megjegyzés. (i) Ha $A \in B(H)$ izometrikus, akkor A injektív, $\|A\| = 1$ és A^{-1} is izometrikus $R(A)$-ról H-ra, így korlátos is.
(ii) Az $R(A)$ képtér nem feltétlenül az egész H, például ℓ_2-n az $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots)$ eltolás-operátor (shift) izometrikus, de nem szuperjektív.

6.30. Definíció. Az $U \in B(H)$ operátor *unitér*, ha izometrikus és szuperjektív is.

Mivel egy izometrikus operátor eleve injektív, így egy unitér operátor valójában izometrikus bijekció.

6.31. Állítás. *Egy $A \in B(H)$ izometrikus operátor skalárszorzattartó is, azaz* $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ *($\forall x, y \in H$).*

Bizonyítás. Írjuk fel a 2.13. állításban szereplő polarizációs egyenlőséget:

$$\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|Ax + i^k Ay\right\|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|A\big(x + i^k y\big)\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2 = \langle x, y\rangle\,. \qquad \square$$

Visszafelé, a skalárszorzattartásból triviálisan következik az izometria ($x = y$ helyettesítéssel), így e két tulajdonság ekvivalens.

6.32. Állítás. *Egy $U \in B(H)$ operátor pontosan akkor unitér, ha U bijekció és $U^{-1} = U^*$.*

Bizonyítás. A fentiek alapján az állítás úgy fogalmazható át, hogy egy U bijekció pontosan akkor izometrikus, ha $U^{-1} = U^*$, azaz ha $U^*U = I$. Valóban, U pontosan akkor izometrikus, ha skalárszorzattartó, vagyis ha $\langle U^*Ux, y\rangle \equiv \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ ($\forall x, y \in H$), ez pedig ekvivalens azzal, hogy $U^*U = I$. $\square$

Példa unitér operátorra: a Fourier-transzformáció

Fontos példa unitér operátorra a Fourier-transzformáció, melynek fogalmát vázlatosan ismertetjük. E transzformáció tulajdonságai és alkalmazásai részletesen olvashatók a [67] könyvben.

6.33. Definíció. Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ekkor az

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{6.3}$$

összefüggéssel definiált $\hat{f}$ függvényt az f *Fourier-transzformáltjának* nevezzük.

Az $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ feltétel biztosítja, hogy az integrál értelmes. A Fourier-transzformációt ki lehet terjeszteni $L^2(\mathbb{R}^n)$-re is, ez az ún. Plancherel-tétel: van olyan $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ leképezés (ún. *Fourier-Plancherel-transzformáció*), hogy minden $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ esetén $\mathcal{F}f = \hat{f}$. Itt az $\mathcal{F}f$

függvényre is érvényben tartható a (6.3) képlet, ha mint Cauchy-főértéket értjük, azaz origó közepű gömbökön vett integrálok limeszeként:

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{r\to\infty} \int_{B_r(0)} e^{ix\cdot y} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

6.34. Tétel. *(1) Az $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ leképezés lineáris bijekció, és*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

ha $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, amúgy pedig a fenti képlet szintén Cauchy-főértékként értendő.

(2) $\mathcal{F}$ izometrikus, azaz $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ $(\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n))$.

Tehát az $\mathcal{F}$ leképezés unitér $L^2(\mathbb{R}^n)$-ben.

6.5. Sajátérték és spektrum

A spektrum, ezen belül a sajátértékek fogalma a lineáris operátorok fontos jellemzője. Ennek segítségével lehetséges ugyanis bizonyos operátorok olyan előállítása, amely analóg a szimmetrikus mátrixokra ismert főtengelytétellel: az ezekről szóló eredményekről a 6.7.1. szakaszban lesz szó. (Megemlítjük a sajátértékek egy fizikai interpretációját, bár ez elsősorban nem korlátos operátorokkal kapcsolatos: a kvantummechanikában a megfigyelhető mennyiségeket reprezentáló operátorok sajátértékei a mennyiség lehetséges értékei.)

Ebben a fejezetben legyen X komplex Banach-tér és $A : X \to X$ korlátos lineáris operátor, azaz $A \in B(X)$. A tételek nagy része ugyanis éppúgy igaz lesz, mint Hilbert-térben; ott szorítkozunk csak Hilbert-térre, ahol önadjungált vagy más Hilbert-térbeli operátortípusról esik szó.

6.5.1. Alaptulajdonságok

6.35. Definíció. Egy $A \in B(X)$ operátornak a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám *sajátértéke*, ha létezik $0 \neq u \in X$, hogy $Au = \lambda u$; ekkor az u vektort (λ-hoz tartozó) *sajátvektornak* nevezzük. Az $A \in B(X)$ operátor sajátértékeinek halmazát $\mathrm{Eig}(A)$-val jelöljük.

6.36. Megjegyzés. (i) Ha u λ-hoz tartozó sajátvektor, akkor bármely $c \in \mathbb{C}$ esetén cu is λ-hoz tartozó sajátvektor. Adott λ-hoz tartozhat több, lineárisan független sajátvektor is, ekkor ezek lineáris kombinációi is λ-hoz tartozó sajátvektorok. Az összes λ-hoz tartozó sajátvektor ún. λ-hoz tartozó *sajátalteret* alkot. A sajátaltérre megszorítva az A operátor hatása a λ-val való szorzás.

(ii) Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ szám pontosan akkor sajátérték, ha $A - \lambda I$ nem injektív. Ekkor $\ker(A - \lambda I)$ a λ-hoz tartozó sajátaltér.

6.37. Állítás. *Hilbert-téren értelmezett speciális operátorok sajátértékeire az alábbiak teljesülnek.*

(1) Önadjungált operátor sajátértékei valósak, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

(2) Pozitív (szigorúan pozitív) operátor sajátértékei nemnegatívak (pozitívak).

(3) Unitér operátor sajátértékeire $|\lambda| = 1$.

(4) Ha egy A normális operátorra $\lambda \in Eig(A)$, akkor $\overline{\lambda} \in Eig(A^*)$ és ugyanazok a sajátvektorai.

Bizonyítás. (1)-(2) Legyen $Au = \lambda u$, $u \neq 0$. Ekkor

$$\lambda \|u\|^2 = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Au, u \rangle .$$

Itt $\|u\|^2 > 0$, így ha A önadjungált/pozitív/szigorúan pozitív operátor, akkor $\langle Au, u \rangle$ és így λ is valós/nemnegatív/pozitív. Legyen most $Av = \mu v$, $v \neq 0$. Ha A önadjungált, akkor

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = \overline{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle ,$$

tehát ha $\lambda \neq \mu$, akkor $\langle u, v \rangle = 0$.
(3) Ha A unitér, akkor $\|u\| = \|Au\| = |\lambda| \, \|u\|$, tehát $|\lambda| = 1$.
(4) Mivel A normális, azaz $AA^* = A^*A$, így $\|Ax\| = \langle A^*Ax, x \rangle^{1/2} = \langle AA^*x, x \rangle^{1/2} = \|A^*x\|$ $(\forall x \in H)$. Ebből $\|(A - \lambda I)u\| = \left\|(A^* - \overline{\lambda} I)u\right\|$ $(\forall \lambda \in \mathbb{C}, u \in H)$, így $(A - \lambda I)u = 0 \Leftrightarrow (A^* - \overline{\lambda} I)u = 0$. □

6.38. Definíció. Legyen $A \in B(X)$ adott operátor.

(1) Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ szám A-nak

   (i) *reguláris értéke*, ha $A - \lambda I : X \to X$ bijekció;

   (ii) *szinguláris értéke*, ha nem reguláris.

   Az A operátor reguláris értékeinek halmazát jelölje $\varrho(A)$, a szinguláris értékekét pedig $\sigma(A)$.

(2) A $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ halmazt az A operátor *spektrumának* nevezzük.

6.39. Megjegyzés. (i) Ha λ reguláris értéke A-nak, akkor $(A - \lambda I)^{-1} \in B(X)$, mert a 4.14. következmény szerint korlátos lineáris bijekció inverze is korlátos lineáris operátor.

(ii) Ha $\lambda \in \varrho(A)$, akkor az azt jelenti, hogy az $Ax - \lambda x = y$ ún. másodfajú egyenlet minden $y \in X$ esetén egyértelműen megoldható, továbbá a megoldás folytonosan függ y-tól, vagyis az egyenlet korrekt kitűzésű (lásd 4.16. definíció).
Ez azt is jelenti, hogy a reguláris értékek kedvezőek a másodfajú egyenletek viselkedése szempontjából; ennek ellenére, mint a bevezetőben is említettük, a spektrum bizonyul fontosabb fogalomnak az operátorok további vizsgálatában.

6.40. Megjegyzés. *(A sajátértékek és spektrum kapcsolata.)*

(i) Egy $A \in B(X)$ operátor sajátértékei – amennyiben egyáltalán vannak neki – mind a spektrumban is vannak, azaz $\mathrm{Eig}(A) \subset \sigma(A)$. Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ szám sajátérték volta ugyanis azt jelenti, hogy $A - \lambda I$ nem injektív, akkor pedig bijekció sem lehet, azaz λ szinguláris érték.

Megfordítva általában csak véges dimenziós térben igaz, vagyis ha $\dim X$ véges, akkor az $A \in B(X)$ operátorra (lényegében a mátrixokra) $\mathrm{Eig}(A) = \sigma(A)$. Ha X végtelen dimenziós, akkor viszont λ lehet szinguláris érték úgy is, hogy nem sajátérték, hiszen ha $A - \lambda I$ nem bijekció, attól még lehet injektív, feltéve, ha nem szuperjektív. Erre a 6.88. megjegyzésben is mutatunk példát. Az alábbi példa azt a szélső helyzetet illusztrálja, amikor egyáltalán nincs sajátérték.

(ii) (Példa arra, hogy $\mathrm{Eig}(A) = \emptyset$.) Legyen $J := [a, b]$ intervallum, $X = H := L^2(J)$ és $A : H \to H$, $\quad (Af)(x) := x\,f(x)$. Könnyen látható, hogy $A \in B(H)$. Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ adott szám, akkor az $Af = \lambda f$ egyenlet megoldására $(x - \lambda)f(x) = 0$ m.m. $x \in J$, de mivel $x \neq \lambda$ esetén a bal tényező nem 0, így $f(x) = 0$ kell m.m. $x \in J$ esetén, tehát f az $L^2(J)$ tér 0 eleme, így λ nem sajátérték.

A fenti operátor spektruma viszont nem üres, hanem $\sigma(A) = J$. Ha ugyanis $\lambda \in J$, akkor $A - \lambda I$ nem lehet bijekció, mert nem szuperjektív: pl. $g \equiv 1 \in L^2(J)$, de az $(A - \lambda I)f = g$ egyenlet megoldása $f(x) = \frac{1}{x-\lambda}$ (m.m. $x \in J$), ami nem $L^2(J)$-beli, mert négyzetintegrálja végtelen. Így $\lambda \in \sigma(A)$. Ha $\lambda \notin J$, akkor a fenti f korlátos, így $L^2(J)$-beli is, tehát $A - \lambda I$ bijekció és így $\lambda \in \varrho(A)$. A spektrum nem üres voltát a következő szakaszban általában is bizonyítjuk.

(iii) Hilbert-térben a spektrumra is igazolhatók a 6.37. állítás sajátértékre kimondott tulajdonságai. Ezeket legegyszerűbben a megoldhatósági tételekből kaphatjuk meg, így a 7.1. szakaszban igazoljuk a 7.7. állításban.

Ha A normális, akkor igazolható, hogy ha $\lambda \in \sigma(A)$ nem sajátérték, akkor van olyan $(u_n) \subset H$ sorozat, melyre $\|u_n\| = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^+)$ és $Au_n - \lambda u_n \to 0$; lásd szintén a 7.1. szakaszban a 7.8. állításban. Ilyenkor a λ számot szokás általánosított sajátértéknek hívni.

(iv) Hilbert-térben a spektrum szorosan kapcsolódik a 6.15. megjegyzésben definiált $W(A)$ halmazhoz, hiszen mindkettő tartalmazza a sajátértékeket, és normális operátor esetén mindkettőt $\|A\|$ sugarú körlap tartalmazza. Igazolható [8], hogy ha A normális, akkor $W(A)$ lezártja azonos $\sigma(A)$ konvex burkával.

6.41. Definíció. Egy $A \in B(X)$ operátor *reguláris*, ha $A : X \to X$ bijekció. A reguláris operátorok halmazát $B(X)$-ban jelölje $\mathrm{Reg}(X)$.

Ismét hivatkozva a 4.14. következményre, ha $A \in \mathrm{Reg}(X)$, akkor nemcsak A, hanem A^{-1} is folytonos lineáris operátor. A „reguláris" kifejezést kétféle értelemben is bevezettük; a definíciókból világos, hogy λ pontosan akkor reguláris értéke A-nak, ha $A - \lambda I$ reguláris, azaz:

6.42. Állítás. $\lambda \in \varrho(A) \iff A - \lambda I \in \mathit{Reg}(X)$.

A továbbiakban igazolni fogjuk, hogy bármely $A \in B(X)$ operátor spektruma kompakt, nem üres halmaz.

6.5.2. A spektrum kompaktsága

6.43. Tétel (Neumann-sor). *Ha $A \in B(X)$ és $\|A\| < 1$, akkor $I - A \in \mathit{Reg}(X)$ és*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Bizonyítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor azért konvergens $B(X)$-normában, mert $\|A^n\| \le \|A\|^n$ $(\forall n)$ és így

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} < \infty, \tag{6.4}$$

így a Weierstrass-kritérium (1.12. állítás) szerint az operátorsor is konvergens. Legyen $S \in B(X)$ az összege. Ekkor

$$(I - A)S = S(I - A) = \sum_{n=0}^{\infty} (A^n - A^{n+1}) = I - A + A - A^2 + A^2 - \cdots = I$$

(ui. a kapott sor szeletei váltakozva I és $I - A^n$, ahol $\|A^n\| \to 0$). Tehát $I - A$ bijekció és $S = (I - A)^{-1}$. $\square$

6.44. Következmény. *Ha $A \in B(X)$ és $\|A\| < 1$, akkor* $\|(I-A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|A\|}$.

Bizonyítás. $\|(I-A)^{-1}\| = \Big\| \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n \Big\|$ fölülről becsülhető a (6.4) egyenlőtlenséggel. □

6.45. Következmény. *Reg(X) nyílt halmaz $B(X)$-ben. Éspedig, ha $B \in$ Reg(X) és $D \in B(X)$ olyan, hogy $\|D\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$, akkor $B - D \in$ Reg(X).*

Bizonyítás. Itt
$$B - D = B(I - B^{-1}D),$$
ahol az $A := B^{-1}D$ operátorra a feltétel szerint $\|A\| \leq \left\|B^{-1}\right\| \|D\| < 1$, így $I - A = I - B^{-1}D$ bijekció, és akkor $B - D$ is bijekció. □

6.46. Következmény. *Ha $B \in$ Reg(X) és $C \in B(X)$ olyan, hogy $\|B - C\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$, akkor $C \in$ Reg(X).*

Bizonyítás. Legyen $D := B - C$. Ekkor $\|D\| < \frac{1}{\|B^{-1}\|}$, így az előző következmény szerint $C = B - D \in \mathrm{Reg}(X)$. □

6.47. Megjegyzés. A fenti szituációban becslés is adható C^{-1} normájára: a $C = B - D = B(I - B^{-1}D)$ azonosságból, a 6.44. következményt használva
$$\left\|C^{-1}\right\| = \left\|(I - B^{-1}D)^{-1}B^{-1}\right\| \leq \left\|(I - B^{-1}D)^{-1}\right\| \left\|B^{-1}\right\| \leq$$
$$\leq \frac{\left\|B^{-1}\right\|}{1 - \|B^{-1}D\|} \leq \frac{\left\|B^{-1}\right\|}{1 - \|B^{-1}\| \, \|B - C\|}.$$
Ebből látható, hogy ha $C \to B$ operátornormában, akkor $\left\|C^{-1}\right\|$ korlátos marad.

6.48. Állítás. *Az invertálás, mint a Reg(X) halmazon értelmezett $inv :$ $B \mapsto B^{-1}$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $B \in \mathrm{Reg}(X)$ rögzített. Ha $C \in \mathrm{Reg}(X)$, akkor
$$C^{-1} - B^{-1} = C^{-1}(B - C)B^{-1}.$$
Ebből
$$\lim_{\|C-B\|\to 0} \|C^{-1} - B^{-1}\| \leq \lim_{\|C-B\|\to 0} \|C^{-1}\| \|B - C\| \|B^{-1}\| = 0,$$

mert $\|B^{-1}\|$ rögzített, és $\|C - B\| \to 0$ esetén a 6.47. megjegyzés szerint $\left\|C^{-1}\right\|$ korlátos. □

6.49. Tétel. *Bármely $A \in B(X)$ esetén $\varrho(A)$ nyílt. Éspedig, ha $\lambda \in \varrho(A)$ és $\mu \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|\mu| < \dfrac{1}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|}$, akkor $\lambda + \mu \in \varrho(A)$.*

Bizonyítás. Mivel $A-(\lambda+\mu)I = (A-\lambda I)-\mu I$, ezért a $B = (A-\lambda I)$, $D = \mu I$ szereposztással teljesülnek a 6.45. következmény feltételei, azaz $A-(\lambda+\mu)I = B - D \in \operatorname{Reg}(X)$, vagyis $\lambda + \mu \in \varrho(A)$. □

6.50. Következmény. *Bármely $A \in B(X)$ operátor $\sigma(A)$ spektruma zárt.*

6.51. Állítás. *Bármely $A \in B(X)$ esetén $\sigma(A)$ korlátos, éspedig ha $\lambda \in \sigma(A)$, akkor $|\lambda| \le \|A\|$.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|A\|$. Ekkor λ reguláris érték, ugyanis

$$A - \lambda I = -\lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda}A\Big) = -\lambda(I - B),$$

ahol $\|B\| < 1$, tehát a 6.43. tétel szerint $I-B \in \operatorname{Reg}(X)$, így $A-\lambda I \in \operatorname{Reg}(X)$, azaz $\lambda \in \varrho(A)$.

□

6.52. Következmény. *Bármely $A \in B(X)$ esetén a $\sigma(A)$ spektrum kompakt (azaz korlátos és zárt) részhalmaza $\mathbb{C}$-nek.*

6.5.3. A spektrum nem üres volta, spektrálsugár

A spektrum fentiekben látott kompaktsága valós Banach-térben is igaz, a spektrum nem üres volta igazolásakor viszont ki fogjuk használni, hogy H komplex Banach-tér (lásd a 6.58 megjegyzést).

(a) Operátorhatványsorok

Itt olyan sorokkal foglalkozunk, ahol egy komplex szám hatványait operátor-együtthatókkal látjuk el.

- Legyen $s > 0$ adott szám, és $(C_n) \subset B(X)$ olyan operátorsorozat, melyre a

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \mu^n \tag{6.5}$$

sor konvergens $B(X)$-normában bármely $\mu \in B_s(0)$ mellett, ahol $B_s(0) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < s\} \subset \mathbb{C}$ körlap. Ekkor az $X = \mathbb{C}$ esethez hasonlóan látható, hogy az

$$f : B_s(0) \to B(X), \quad \mu \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mu^n \tag{6.6}$$

függvény akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(n)}(0) = n!\, C_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{6.7}$$

(Mivel $f : \mathbb{C} \supset\!\!\to B(X)$ típusú függvény, így minden $f^{(n)}$ deriváltja is ilyen, így ezek értékei is operátorok.)

- Egy $g : \mathbb{C} \supset\!\!\to B(X)$ függvényt

  – sorbafejthetőnek hívunk egy $\lambda \in D_g$ pont körül, ha a $\mu \mapsto g(\lambda + \mu)$ függvény előáll konvergens (6.5) típusú hatványsor összegeként valamely $B_s(0)$ körlapon;

  – analitikusnak hívunk, ha minden $\lambda \in D_g$ pont körül sorbafejthető.

- Az $X = \mathbb{C}$ esethez hasonlóan igazolható a

  Liouville-tétel: ha $f : \mathbb{C} \to B(X)$ analitikus és korlátos, akkor konstans.

(b) Rezolvens, a spektrum nem üres volta

6.53. Definíció. Legyen $A \in B(X)$. Az

$$R_A : \varrho(A) \to B(X), \qquad \lambda \to (A - \lambda I)^{-1}$$

leképezést A *rezolvensének* hívjuk.

6.54. Tétel. *Bármely $A \in B(X)$ esetén R_A analitikus függvény.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \varrho(A)$ rögzített, $s := \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|}$. Igazoljuk, hogy $f : \mu \mapsto R_A(\lambda + \mu)$ sorbafejthető a $B_s(0)$ körlapon.
Legyen $|\mu| < s$. A 6.49. tétel szerint $\lambda + \mu \in \varrho(A)$, és

$$A - (\lambda + \mu)I = (A - \lambda I)\Big(I - \mu (A - \lambda I)^{-1}\Big).$$

Invertálva, valamint felhasználva, hogy $\|\mu R_A(\lambda)\| < s\|R_A(\lambda)\| = 1$ és így felírható a megfelelő Neumann-sor,

$$R_A(\lambda + \mu) = \Big(I - \mu R_A(\lambda)\Big)^{-1} R_A(\lambda) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \big(\mu R_A(\lambda)\big)^n\Big) R_A(\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n R_A(\lambda)^{n+1}. \qquad \square$$

Ekkor érvényes a (6.7) képlet, ahol most $C_n = R_A(\lambda)^{n+1}$.

6.55. Következmény. *Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $R_A^{(n)}(\lambda) = n!\, R_A(\lambda)^{n+1}$. Speciálisan, $n = 1$ esetén $R'_A(\lambda) = R_A(\lambda)^2$.*

6.56. Állítás. *Ha $\lambda \in \mathbb{C}$ és $|\lambda| > \|A\|$, akkor $\|R_A(\lambda)\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|}$.*

Bizonyítás. Ha $|\lambda| > \|A\|$, akkor $\lambda \in \varrho(A)$, emellett a 6.44. következményt felhasználva

$$\|R_A(\lambda)\| = \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}\|A\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

$\square$

6.57. Tétel. *Bármely $A \in B(X)$ esetén $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Indirekt: tegyük fel, hogy $\varrho(A) = \mathbb{C}$. Ekkor $R_A : \mathbb{C} \to B(X)$ analitikus függvény. Így R_A folytonos is, ezért korlátos a $B_{2\|A\|}(0)$ zárt körlapon, és azon kívül is korlátos, mert ha $|\lambda| > 2\|A\|$, akkor a 6.56. állítás szerint $\|R_A(\lambda)\| < \frac{1}{\|A\|}$. Így $R_A : \mathbb{C} \to B(X)$ analitikus és korlátos, ezért a Liouville-tétel szerint konstans, amiből bármely $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén $R'_A(\lambda) = \mathbf{0}$. Ekkor a 6.55. következmény szerint $R_A(\lambda)^2 = \mathbf{0}$, ami lehetetlen, mert $R_A(\lambda)$ és így $R_A(\lambda)^2$ is bijekció. $\square$

6.58. Megjegyzés. A fenti tétel nem igaz valós Banach-térben, Például $\mathbb{R}^2$-ben az $A(x, y) := (-y, x)$ forgatásnak nincs sajátértéke, és mivel véges dimenzióban $\operatorname{Eig}(A) = \sigma(A)$, így $\sigma(A)$ üres.

Összefoglalva, bármely $A \in B(X)$ operátor spektruma nem üres, kompakt halmaz.

(c) Spektrálsugár

Láttuk, hogy a spektrum benne van az origó középpontú, $\|A\|$ sugarú zárt körlapban, azonban lehetséges, hogy ennél kisebb sugarú körlap is tartalmazza. A legkisebb ilyen körlapot a spektrálsugár fogalma írja le, az ezzel kapcsolatos eredményeket csak röviden vázoljuk.

6.59. Definíció. Az $A \in B(X)$ operátor *spektrálsugara* az $r(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ szám.

A 6.51. állítás alapján $r(A) \leq \|A\|$. Mint látni fogjuk, Hilbert-térben egy tág osztály esetén egyenlőség áll fenn, éspedig a normális (ezen belül az önadjungált, speciálisan pozitív, ill. unitér) operátorokra. Ilyenkor valójában nincs szükség a spektrálsugár külön fogalmára.

6.60. Állítás. $r(A) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}^+} \|A^n\|^{1/n}$.

Bizonyítás. Tekintsük az $A^n - \lambda^n I = (A - \lambda I)(A^{n-1} + \lambda A^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} I)$ azonosságot, amelyben a szorzat tényezői felcserélhetőek, és legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ adott. Ha $|\lambda^n| > \|A^n\|$, akkor a 6.51. állítás miatt $\lambda^n \in \varrho(A^n)$, azaz $A^n - \lambda^n I$ bijekció, ezért a fenti azonosságból $A - \lambda I$ is bijekció, azaz $\lambda \in \varrho(A)$. Ez azt jelenti, hogy ha $\lambda \in \sigma(A)$, akkor $\lambda^n \in \sigma(A^n)$. Ismét a 6.51. állítás miatt (most A^n-re) ebből $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$, azaz $|\lambda| \leq \|A^n\|^{1/n}$. Mivel ez minden n-re igaz, az állítást igazoltuk. □

6.61. Megjegyzés. Az előzőnél több is igazolható, éspedig

$$r(A) = \inf_n \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n},$$

lásd pl. [8]-ban.

6.62. Állítás. *Legyen H Hilbert-tér. Ha $A \in B(H)$ normális operátor, akkor $r(A) = \|A\|$.*

Bizonyítás. Mivel A normális, a 6.37. tétel (4) részének bizonyításában láttuk, hogy $\|Ax\| = \|A^*x\|$ $(\forall x \in H)$. Ebben x-et Ax-re cserélve adódik, hogy $\left\|A^2 x\right\| = \|A^*Ax\|$ minden $x \in H$ esetén, azaz $\left\|A^2\right\| = \|A^*A\|$, ekkor a C^*-tulajdonság (6.14. állítás) szerint

$$\left\|A^2\right\| = \|A\|^2 . \tag{6.8}$$

A 6.4. állítás 3. része szerint bármely n-re $(A^n)^* = (A^*)^n$, emiatt ha A normális, akkor A^n is az. Így a (6.8) tulajdonságot A^n-re is felírhatjuk. Ha A^2-re, majd A-ra alkalmazzuk, akkor $\left\|A^4\right\| = \left\|A^2\right\|^2 = \|A\|^4$. Ebből indukcióval adódik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$. Így

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \left\|A^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \lim_{n \to \infty} \|A\| = \|A\| .$$

□

6.6. Kompakt operátorok

6.6.1. Kompakt halmazok

Ebben a részben először röviden felidézzük a kompakt halmazok fogalomkörét és alaptulajdonságait, lásd részletesen pl. a [37, 38] könyvekben. Továbbra is Banach-tereket használunk, mivel az operátorokhoz csak erre lesz szükségünk, de megemlítjük, hogy az alábbiak teljes metrikus térben is hasonlóan értelmezhetők (sőt, részben topologikus terekben is). Ahol az eredetivel ekvivalens definíciót adunk meg, amögött – értelemszerűen – az ekvivalenciát kimondó állítás áll, lásd szintén [37, 2.6. szakasz]. Legyen tehát X Banach-tér.

6.63. Definíció. Egy $K \subset X$ halmazt fedő *véges ε-hálónak* nevezünk egy olyan $\{x_1, \dots, x_\ell\} \subset X$ ponthalmazt, melyre bármely $x \in K$ esetén van olyan $k \in \{1, \dots, \ell\}$, hogy $\|x - x_k\| < \varepsilon$.

6.64. Definíció. Egy $K \subset X$ halmaz *teljesen korlátos* vagy *prekompakt*, ha

(i) bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található a K halmazt fedő véges ε-háló;

(ii) (ekvivalens definíció) ha *pre-sorozatkompakt*, azaz minden K-beli sorozatnak van konvergens részsorozata X-ben.

6.65. Definíció. Egy $K \subset X$ halmaz *kompakt*, ha

(i) bármely nyílt fedéséből (azaz ha valamely G_γ nyílt halmazokra $K \subset \cup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$) kiválasztható véges részfedés;

(ii) (ekvivalens definíció) ha *sorozatkompakt*, azaz minden K-beli sorozatnak van konvergens részsorozata K-ban.

A fenti definíciók (ii) részéből adódik a

6.66. Következmény. *Egy $K \subset X$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha teljesen korlátos és zárt.*

Példák.

(i) Véges dimenziós térben egy $K \subset X$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha teljesen korlátos, és pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.
Az első tulajdonság a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt igaz, a második a zárt halmazok azon jellemzése miatt, hogy minden $(x_n) \subset K$ konvergens sorozat limesze is K-beli kell legyen.

(ii) Végtelen dimenziós térben a $\overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ zárt egységgömb nem teljesen korlátos (így nem is kompakt), mert nem pre-sorozatkompakt: a 3.16. Riesz-lemmában konstruált sorozatnak nincs konvergens részsorozata.

(iii) Végtelen dimenziós térben minden olyan korlátos és zárt halmaz kompakt, amely véges dimenziós altérben fekszik. Ez azonban nem szükséges. Legyen H Hilbert-tér és $(e_n) \subset H$ TONR, ekkor pl. a $T := \{x \in H : \ |\langle x, e_n \rangle| \leq$

$2^{-n}\}$ ún. Hilbert-tégla teljesen korlátos és zárt, így kompakt, lásd [37, 2.7. szakasz]. Általában is könnyen látható, hogy ha $K \subset H$ kompakt, akkor a $d_n := \sup\{|\langle x, e_n\rangle| : x \in K\}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatra (amely K átmérője az n-edik koordináta irányában) $\lim d_n = 0$, azaz a K halmaz „egyre kevésbé nyúlik az újabb dimenziókba". (A Hilbert-tégla esetében $d_n = 2^{-n}$.)

(iv) A definíció alapján teljesen korlátos halmaz bármely részhalmaza is teljesen korlátos.

6.67. Állítás. *(1) Ha $K \subset X$ teljesen korlátos, akkor korlátos.*
(2) Ha $K \subset X$ kompakt, akkor korlátos és zárt.
(3) A fenti állítások megfordítása véges dimenziós térben igaz, végtelen dimenziós térben viszont nem.

Bizonyítás. Az (1) rész a definícióból következik, a (2) rész pedig az (1) részből és a 6.66. következményből. A (3) rész első állítását a fenti példában indokoltuk, a második részre példa a zárt egységgömb, amely korlátos és zárt halmaz, de (szintén a fenti példából) nem teljesen korlátos. □

6.68. Megjegyzés. A kompakt halmaz fogalma bizonyos szempontból a „korlátos és zárt" általánosítása végtelen dimenzióra, pl. véges dimenzióban korlátos és zárt halmazon folytonos függvényre ismert tételek (Heine-tétel az egyenletes folytonosságról, Weierstrass tétele a maximum és minimum létezéséről) végtelen dimenziós tér esetén kompakt halmazra érvényesek [38, 1. fejezet].

6.6.2. Kompakt operátorok alaptulajdonságai normált térben

6.69. Definíció. Egy $A \in B(X)$ operátor *kompakt*, ha bármely korlátos halmazt teljesen korlátosba visz.

Ekvivalens definíciók:

– ha bármely $(x_n) \subset X$ korlátos sorozat esetén (Ax_n)-nek van konvergens részsorozata X-ben;

– ha a $\overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ zárt egységgömb képe teljesen korlátos.

Itt az első ekvivalencia a halmazok pre-sorozatkompaktsága alapján következik. A második formálisan gyengébb az operátor kompaktságánál, de ha $\overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ képe teljesen korlátos, akkor lineáris transzformációval bármely gömb képe is az, és akkor a gömbök bármely részhalmazának, vagyis bármely korlátos halmaznak a képe is teljesen korlátos.

6.70. Megjegyzés. Egy operátor kompaktsága erősebb, mint a korlátosság (folytonosság), hiszen korlátos halmazt teljesen korlátosba visz, ami korlátos is.

1. példa kompakt operátorra: ha $A \in B(X)$ véges rangú operátor, azaz ha $R(A)$ dimenziója véges. Ekkor ugyanis A korlátossága miatt korlátos halmaz képe korlátos, de akkor teljesen korlátos is, hiszen véges dimenziós altérben fekszik.

Ez a példa még triviális volt, de ez alapján könnyen adhatunk majd továbbiakat is. Nem kompakt operátor megadására pedig többek között az alábbi állítás használható.

6.71. Állítás. *Legyen $A \in B(X)$, $(e_n) \subset X$ sorozat, melyre $\|e_n\| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^+$). Ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $\|Ae_n - Ae_k\| \geq \delta$ ($\forall k \neq n$), akkor A nem kompakt.*

Bizonyítás. Ekkor $(e_n) \subset X$ olyan korlátos sorozat, melyre (Ae_n)-nek nincs konvergens részsorozata. $\square$

6.72. Következmény. *Legyen H Hilbert-tér, $A \in B(H)$, $(e_n) \subset H$ ortonormált rendszer. Ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $\|Ae_n - Ae_k\| \geq \delta$ ($\forall k \neq n$), akkor A nem kompakt.*

Példa nem kompakt operátorra. Végtelen dimenziós térben az I identitásoperátor nem kompakt. Hilbert-tér esetén ez egyszerűen látszik a 6.72. következményből, mert a 2.3. szakaszban leírtak szerint létezik teljes ortonormált rendszer H-ban, így

$$\|Ie_n - Ie_k\|^2 = \|e_n - e_k\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_k\|^2 = 2.$$

Banach-tér esetén a 3.16. Riesz-lemma segítségével választható ki olyan sorozat, melynek tagjai egyenletesen távol vannak egymástól.

6.73. Állítás. *Kompakt operátorok $B(X)$-beli limesze is kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(A_n) \subset B(X)$ kompakt operátorokból álló sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$. Igazoljuk, hogy A is kompakt. Elég belátni, hogy $A(\overline{B(\mathbf{0}, 1)})$ teljesen korlátos, azaz ha $\varepsilon > 0$ rögzített, akkor adjunk meg hozzá egy véges ε-hálót. Mivel $A_n \to A$ operátornormában, ezért létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\|A_N - A\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Másrészt A_N kompakt, így létezik $y_1, y_2, \ldots, y_\ell \in X$, hogy minden $y \in A_N(\overline{B(\mathbf{0}, 1)})$ esetén

$$\|y - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

valamely k indexre. Ez ugyanazt jelenti, mint hogy bármely $x \in \overline{B(\mathbf{0},1)}$ esetén van olyan y_k, melyre

$$\|A_N x - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor tetszőleges $x \in \overline{B(\mathbf{0},1)}$ esetén van olyan y_k, hogy

$$\|Ax - y_k\| \le \|Ax - A_N x\| + \|A_N x - y_k\| \le \|A - A_N\|\,\|x\| + \|A_N x - y_k\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tehát az A_N-hez tartozó $\varepsilon/2$-háló jó lesz ε-hálónak A-hoz. □

A sorozat tagjaiként vehetők például véges rangú operátorok, melyekről a korábbi 1. példában láttuk, hogy kompaktak.

6.74. Következmény. *Véges rangú operátorok $B(X)$-beli limesze is kompakt.*

Ez alapján gyakran könnyen belátható egy adott operátorról, hogy kompakt.

2. példa kompakt operátorra. Legyen $I = [a,b]$, $H := L^2(I)$, valamint $K \in C(I \times I)$ adott valós értékű függvény és $A : H \to H$ a következő:

$$(Au)(x) := \int_a^b K(x,s)u(s)\mathrm{d}s \qquad (u \in L^2(I)).$$

Mivel $K \in L^2(I \times I)$ is, a 6.24. állítás alapján $A : L^2(I) \to L^2(I)$ korlátos lineáris operátor.

6.75. Állítás. *A fenti A operátor kompakt.*

Bizonyítás. A Weierstrass-féle approximációs tétel szerint van olyan (P_n) kétváltozós polinomsorozat, hogy $\max\limits_{I\times I}|K - P_n| =: \varepsilon_n \to 0$, ha $n \to \infty$. Legyen

$$(A_n u)(x) := \int_a^b P_n(x,s)u(s)\mathrm{d}s \qquad (u \in L^2(I)).$$

Ekkor A_n véges rangú, hiszen ha $P_n(x,s) = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{n-i} c_{ij}x^i s^j$, akkor

$$(A_n u)(x) := \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n-i} c_{ij}\int_a^b s^j u(s)\mathrm{d}s\Big)x^i$$

n-edfokú egyváltozós polinom. Emellett, felhasználva az 1.26. állítást,

$$\|(A - A_n)u\|_{L^2} \le c_1 \|(A - A_n)u\|_{L^\infty} \le c_1 \sup_{x \in I} |(A - A_n)u(x)| \le$$

$$\le c_1 \sup_{x \in I} \int_a^b |K(x,s) - P_n(x,s)||u(s)| \mathrm{d}s$$

$$\le c_1 \varepsilon_n \|u\|_{L^1} \le c_2 \varepsilon_n \|u\|_{L^2} \qquad \forall u \in L^2(I),$$

így $\|A - A_n\| \le c_2 \varepsilon_n \to 0$. A 6.74. következmény szerint tehát A kompakt. □

6.76. Megjegyzés. Általánosabban, ha $K \in L^2(I \times I)$ magfüggvény, akkor is igaz, hogy A kompakt operátor. A fenti bizonyításban ekkor polinomok helyett alkalmas lépcsősfüggvényeket használunk.

6.6.3. Kompakt operátorok néhány további tulajdonsága

6.77. Állítás. *Kompakt operátorokra az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

(1) A kompakt operátorok vektorteret alkotnak.

(2) A kompakt operátorok osztálya kétoldali ideált alkot a $B(X)$ gyűrűben. Azaz, kompakt és korlátos lineáris operátor szorzata kompakt operátor.

Bizonyítás.
(1) Ha A kompakt és $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor λA triviálisan kompakt, elég tehát két kompakt összegét vizsgálni. Legyenek $A, B \in B(X)$ kompakt operátorok, $S \subset X$ korlátos halmaz. Ekkor $(A + B)(S) \subset A(S) + B(S)$, ahol utóbbi két teljesen korlátos halmaz összege, így maga is teljesen korlátos.
(2) Legyen $K \in B(X)$ kompakt, $A, B \in B(X)$, $S \subset X$ korlátos halmaz. Igazoljuk, hogy $(KA)(S)$ és $(BK)(S)$ teljesen korlátos halmazok. Tekintsük először $(KA)(S) = K(A(S))$-t. Mivel A folytonos, ezért $A(S)$ korlátos halmaz, így K kompaktsága miatt $K(A(S))$ teljesen korlátos, tehát KA kompakt. Ha most $B(K(S))$-et tekintjük, $K(S)$ teljesen korlátos. Mivel teljesen korlátos halmaz folytonos képe is teljesen korlátos, ezért B folytonossága miatt $B(K(S))$ teljesen korlátos. □

6.78. Állítás. *Ha X végtelen dimenziós Banach-tér, akkor egy $A \in B(X)$ kompakt operátornak nem lehet korlátos inverze.*

Bizonyítás. Ha létezne $A^{-1} \in B(X)$, akkor $A^{-1}A = I$ az ideáltulajdonság miatt kompakt lenne, de végtelen dimenziós térben az identitás nem lehet kompakt. □

Ennél több is igaz:

6.79. Állítás. *Legyen X Banach-tér, $A \in B(X)$ kompakt operátor. Ha $R(A)$ zárt, akkor szükségképpen véges dimenziós.*

Bizonyítás. Mivel $R(A)$ zárt altér, így teljes is. Ekkor $A \in B(X, R(A))$ Banach-terek közötti szuperjektív operátor. A 4.11. tétel szerint A nyílt leképezés. Eszerint a $B(\mathbf{0}, 1) \subset X$ nyílt egységgömb képe nyílt halmaz, azaz $V := A(B(\mathbf{0}, 1))$ környezete a nullának $R(A)$-ban, másképpen mondva létezik $r > 0$, hogy $B(0, r) \subset V$ (ahol $B(0, r)$-et mint $R(A)$-beli gömböt értjük). Viszont A kompakt, így V teljesen korlátos (és vele együtt V minden részhalmaza is), de ez $B(0, r)$-re csak véges dimenzióban teljesül. □

6.80. Következmény. *Ha X végtelen dimenziós Banach-tér és $A \in B(X)$ kompakt operátor, akkor A nem lehet szuperjektív.*

Mivel egy véges rangú operátor mindig kompakt, a 6.74. következmény szerint ilyenek limesze is kompakt. Hilbert-térben ez fordítva is igaz:

6.81. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, ekkor a véges rangú operátorok sűrű alteret alkotnak az $B(H)$-beli kompakt operátorok halmazában.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy minden $A \in B(H)$ kompakt operátor és $\varepsilon > 0$ esetén létezik A-tól operátornormában legfeljebb ε távolságra levő véges rangú operátor. A kompakt, tehát $A(\overline{B(\mathbf{0}, 1)}) \subset H$ teljesen korlátos. Nyilván olyan ε-háló is létezik, amelynek pontjai $A(\overline{B(\mathbf{0}, 1)})$-beliek. Legyenek tehát $x_1, \ldots, x_n \in \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ olyan elemek, hogy a $Ax_1, \ldots, Ax_n$ pontok ε-hálót alkotnak $A(\overline{B(\mathbf{0}, 1)})$-re nézve.
Legyen $M := \operatorname{span}\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$. Ez a H Hilbert-tér véges dimenziós altere, legyen P_M az M-re vett ortogonális projekció. Ekkor P_M véges rangú, folytonos és lineáris. Legyen $x \in \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ tetszőleges, ekkor létezik x_i, hogy $\|Ax - Ax_i\| < \varepsilon$. Ekkor

$$\|Ax - P_M Ax\| = \|Ax - Ax_i + Ax_i - P_M Ax\| =$$

$$= \|Ax - Ax_i + P_M Ax_i - P_M Ax\| =$$

$$\|(I - P_M)(Ax - Ax_i)\| \leq \|I - P_M\| \, \|Ax - Ax_i\| < \varepsilon,$$

mert $(I - P_M) = P_{M^\perp}$ szintén ortogonális projekció, így normája 1. Tehát $\|A - (P_M A)\| \leq \varepsilon$, ahol $P_M A$ véges rangú. □

6.82. Következmény. *Ha H Hilbert tér, akkor minden $A \in B(H)$ kompakt operátor előáll véges rangú operátorok limeszeként.*

6.6.4. Kompakt önadjungált operátorok spektruma

Ha egy önadjungált operátor kompakt, akkor érvényes a szimmetrikus mátrixokra ismert főtengelytétel [24, II. 6.3] végtelen dimenziós általánosítása. Ezt az alábbi tétel és a 6.85. következmény mondja ki. (Ehhez kapcsolódik utána a 6.92 előállítási tétel is.)

6.83. Tétel (kompakt önadjungált operátorok főtétele). *Legyen H Hilbert-tér, $A \in B(H)$ kompakt önadjungált operátor. Ekkor $\sigma(A)$ megszámlálható, és $\sigma(A) \setminus \{0\}$ csak sajátértékekből áll, melyek csak a 0-ban torlódhatnak. A $\lambda \neq 0$ sajátértékek rangja (azaz a $\ker(A-\lambda I)$ sajátalterek dimenziója) véges.*
Ha H szeparábilis, akkor a sajátvektorokból teljes ortonormált rendszer választható H-ban.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy H végtelen dimenziós, hiszen véges dimenzióban állításunk a már említett főtengelytétel.

1. lépés. Igazoljuk, hogy $\sigma(A) \setminus \{0\}$ csak sajátértékekből áll. Mivel a 6.40. megjegyzés (iii) pontja szerint $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, így ezt elég valós λ-ra. Legyen tehát $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, és tegyük fel, hogy λ nem sajátérték. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lambda \in \varrho(A)$, azaz reguláris érték.

Mivel λ nem sajátérték, így $A - \lambda I$ injektív; célunk, hogy szuperjektív is legyen. Mivel $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$ és $A - \lambda I$ önadjungált is, a 6.5. tételből $H = \overline{R(A - \lambda I)}$, azaz $R(A - \lambda I)$ sűrű.

Legyen $y \in H$ tetszőleges; célunk, hogy $y \in R(A-\lambda I)$. Mivel utóbbi sűrű, így annyit már állíthatunk, hogy van olyan $(x_n) \subset H$ sorozat, hogy $Ax_n - \lambda x_n \to y$.

(i) Tegyük fel először, hogy (x_n) korlátos, vagy legalábbis van korlátos részsorozata. Mivel A kompakt, így (Ax_n)-nek van konvergens részsorozata, azaz melyre $Ax_{n_k} \to z$ valamely $z \in H$ esetén. Mivel $y = \lim(Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k})$ és $\lim Ax_{n_k} = z$, így (x_{n_k}) is konvergens és $y = z - \lambda \lim x_{n_k}$, felhasználva, hogy $\lambda \neq 0$. Ha $x := \lim x_{n_k}$, akkor $y = z - \lambda x$. Másrészt A folytonossága miatt $Ax = \lim Ax_{n_k} = z$, így $y = Ax - \lambda x$. Így tehát $y \in R(A - \lambda I)$.

(ii) Nézzük most a másik esetet, amikor (x_n)-nek nincs korlátos részsorozata, azaz $\|x_n\| \to \infty$. Igazoljuk, hogy ez lehetetlen. Legyen ugyanis ekkor $u_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$, ez korlátos, így a fentiek miatt $Au_{n_k} \to z$ valamely $z \in H$ esetén és alkalmas részsorozatra. Most $y = \lim(Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}) = \lim \|x_{n_k}\|(Au_{n_k} - \lambda u_{n_k})$, ami csak akkor lehet, ha $\lim(Au_{n_k} - \lambda u_{n_k}) = 0$, különben a szorzat nem lehetne konvergens $\|x_{n_k}\| \to \infty$ miatt. Mint az előbb, ekkor létezik $u := \lim u_{n_k}$ és fennáll $z = \lambda u$, másrészt $z = \lim Au_{n_k} = Au$, ezekből $Au = \lambda u$. Itt $u \neq 0$, mivel $\|u\| = \lim \|u_{n_k}\| = 1$, így λ sajátérték, ami ellentmond a feltevésnek.

2. lépés. Sorbarendezzük a sajátértékeket.

(i) Legyen először λ_1 a legnagyobb abszolút értékű sajátérték. Mivel A önadjungált, a 6.62. állítás szerint tehát

$$|\lambda_1| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|.$$

Legyen e_1 λ_1-hez tartozó normált sajátvektor és $H_1 := span\{e_1\}$ (1-dimenziós altér). Ekkor $A|_{H_1^\perp} : H_1^\perp \to H_1^\perp$, azaz A invariánsan hagyja $H_1^\perp$-et, mert ha $x \in H_1^\perp$, azaz $\langle x, e_1\rangle = 0$, akkor $\langle Ax, e_1\rangle = \langle x, Ae_1\rangle = \lambda_1\langle x, e_1\rangle = 0$, azaz $Ax \in H_1^\perp$.

(ii) Legyen λ_2 az a sajátérték, melyre

$$|\lambda_2| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A|_{H_1^\perp})\} = \|A|_{H_1^\perp}\|.$$

(Utóbbi azért igaz, mert $A|_{H_1^\perp}$ is önadjungált.) Mivel λ_2 A-nak is sajátértéke, így $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Legyen e_2 λ_2-hez tartozó normált sajátvektor és $H_2 := span\{e_1, e_2\}$. Ekkor $A|_{H_2^\perp} : H_2^\perp \to H_2^\perp$, mert ha $x \in H_2^\perp$, azaz $\langle x, e_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2)$, akkor $\langle Ax, e_i\rangle = \langle x, Ae_i\rangle = \lambda_i\langle x, e_i\rangle = 0$ $(i = 1, 2)$, azaz $Ax \in H_2^\perp$.

(iii) Az eljárást folytatva, nyerünk egy $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sajátérték-sorozatot, melyre

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots,$$

és egy megfelelő $e_1, e_2, \ldots$ sajátvektor-sorozatot, amely ortonormált rendszert alkot. A megfelelő $H_n := span\{e_1, \ldots, e_n\}$ alterekre

$$|\lambda_{n+1}| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A|_{H_n^\perp})\} = \|A|_{H_n^\perp}\|. \tag{6.9}$$

3. lépés. Igazoljuk, hogy a fenti eljárással kapott λ_n-ek csak a 0-ban torlódhatnak, és az összes sajátvektorból TONR-t alkotható $\ker(A)^\perp$-ben.

(i) Ha minden lépésben $|\lambda_n| > 0$ marad, akkor

$$\lambda_0 := \inf |\lambda_n| = 0,$$

ugyanis bármely $n \neq k$ esetén

$$\|Ae_n - Ae_k\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_k e_k\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_k^2 \geq 2\lambda_0^2,$$

így $\lambda_0 > 0$ esetén A nem lehetne kompakt a 6.72. következmény miatt. Így $\lambda_n \to 0$, és az összes nem 0 sajátértéket megkaptuk.

Emellett az e_n sajátvektor-sorozat teljes ortonormált rendszert (TONR-t) alkot $\overline{\cup H_n}$-ban. Mi a helyzet utóbbi ortokomplemetumában? Itt

$$\left\|A|_{(\cup H_n)^\perp}\right\| = \left\|A|_{\cap(H_n^\perp)}\right\| = \inf\left\|A|_{H_n^\perp}\right\| = \inf |\lambda_{n+1}| = 0,$$

tehát $(\cup H_n)^\perp = \ker(A)$. Megfordítva,

$$\overline{\cup H_n} = \ker(A)^\perp,$$

tehát az e_n sajátvektor-sorozat TONR-t alkot $\ker(A)^\perp$-ben.

(ii) Ha az eljárás véges sok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$ sajátértéket produkál (azaz λ_{n+1} már nulla; ez akkor lehet, ha A véges rangú), akkor a megfelelő $e_1, \ldots, e_n$ vektorok ortonormált bázist (ONB-t) alkotnak $\ker(A)^\perp$-ben.

4. lépés. A fentiekből következik, hogy $\sigma(A)$ megszámlálható, és csak a 0 lehet torlódási pontja. Emellett egy λ érték csak véges sokszor ismétlődhet, így véges sok független sajátvektora van, tehát a $\lambda \neq 0$ sajátértékek rangja véges.

5. lépés. Láttuk, hogy a kapott e_n sajátvektor-sorozat TONR-t vagy ONB-t alkot $\ker(A)^\perp$-ben, annak dimenziójától függően. Ha H szeparábilis, akkor $\ker(A)$ is az, így (ha $\ker(A)$ nem csak a 0 altér) választható benne is TONR vagy ONB, most $\ker(A)$ dimenziójától függően. Ezek is sajátvektorok, a 0 sajátértékhez tartozóak. Ezeket is hozzávéve a $\ker(A)^\perp$-beli e_n sajátvektorokhoz, a kapott sorozat TONR-t alkot H-ban. □

6.84. Megjegyzés. Legyen H tetszőleges (nem feltétlenül szeparábilis) Hilbert-tér. Ekkor a fenti bizonyítás 2. lépésének eljárásával a nem 0 sajátértékekhez tartozó sajátvektorokból $\ker(A)^\perp$-ben alkotható teljes ortonormált rendszer, ami a 6.83. tétel befejező állításának általánosabb megfelelője.

6.85. Következmény. *Legyen H tetszőleges (nem feltétlenül szeparábilis) Hilbert-tér, és $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ az A operátor $\lambda_k \neq 0$ sajátértékeihez tartozó ortonormált sajátvektorrendszer. Ekkor*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, e_k\rangle\, e_k \qquad (x \in H). \tag{6.10}$$

Bizonyítás. Mivel az $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ sorozat $\ker(A)^\perp$-beli TONR, az $x \in H$ vektor felírható $x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k$ alakban, ahol $x_0 \in \ker(A)$ és a második tag a $\ker(A)^\perp$-beli komponens. Mivel A folytonos lineáris és $Ax_0 = 0$, ezért ha alkalmazzuk erre a sorra, akkor megkapjuk (6.10)-et. □

6.86. Megjegyzés. A 6.83. tételből következik, hogy Hilbert térben minden $A \in B(H)$ kompakt önadjungált operátor előáll véges rangú operátorok limeszeként, azaz a 6.82. következmény speciális esete. Legyen ugyanis $A_n \in B(H)$ a következő véges rangú operátor:

$$A_n x := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle\, e_k \qquad (x \in H), \tag{6.11}$$

ahol $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$ a $\lambda_k \neq 0$ sajátértékekhez tartozó ortonormált sajátvektorrendszer, amely $\ker(A)^\perp$-beli TONR. Ekkor $(A - A_n)|_{H_n} = 0$ és $(A - A_n)|_{H_n^\perp} = A|_{H_n^\perp}$, ahol $H_n := span\{e_1, \dots, e_n\}$, így (6.9) alapján

$$\|A - A_n\| = \left\|A|_{H_n^\perp}\right\| = |\lambda_{n+1}| \to 0.$$

6.87. Megjegyzés. (i) A 6.83. tétel állításai kompakt normális operátor esetén is igazak, lásd [42, Chap. 28].
(ii) A 6.83. tétel első fele X Banach-térben is igaz tetszőleges $A \in B(X)$ kompakt operátorra, lásd [38, 14. fejezet], ez a Riesz–Schauder-tétel. Azaz, $\sigma(A)$ megszámlálható, és $\sigma(A) \setminus \{0\}$ csak sajátértékekből áll, melyek csak a 0-ban torlódhatnak, ill. a $\lambda \neq 0$ sajátértékek rangja véges.

6.88. Megjegyzés. (i) Ha $A \in B(H)$ kompakt és H végtelen dimenziós, akkor $0 \in \sigma(A)$, ugyanis az $A - 0 \cdot I = A$ operátornak a 6.78. állítás miatt nem lehet korlátos inverze.

(ii) A fentiek alapján egyszerű példák adhatók olyan operátorokra végtelen dimenziós Hilbert-térben, hogy a spektrum megegyezik, ill. szigorúan bővebb a sajátértékek halmazánál. Ha ugyanis egy kompakt önadjungált operátor nem injektív, akkor 0 is sajátértéke, így $\mathrm{Eig}(A) = \sigma(A)$; ha viszont injektív, akkor 0 nem sajátértéke, de a fentiek szerint spektrumpontja, így $\mathrm{Eig}(A) \subsetneq \sigma(A)$.

A 6.83. tétel eredménye lehetővé teszi másodfajú egyenletek konstruktív megoldását az A sajátértékei és sajátvektorai ismeretében.

6.89. Tétel (Hilbert–Schmidt-sorfejtés). *Legyen H szeparábilis Hilberttér, $A \in B(H)$ kompakt önadjungált operátor, $\lambda \in \mathbb{C}$ reguláris értéke A-nak. Ekkor az*

$$Ax - \lambda x = y$$

másodfajú egyenlet az alábbi módon oldható meg.

Legyen (e_k) a sajátvektorokból alkotott teljes ortonormált rendszer, (λ_k) a megfelelő sajátértékek sorozata multiplicitással számolva. Ha

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \qquad \Rightarrow \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k - \lambda}\, e_k.$$

Bizonyítás. Mivel λ reguláris érték, így az x megoldás létezik és egyértelmű. Legyen $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, ahol a ξ_k együtthatókat még nem ismerjük. Ekkor $c_k = \langle y, e_k\rangle = \langle Ax - \lambda x, e_k\rangle = \langle x, Ae_k\rangle - \langle \lambda x, e_k\rangle = (\lambda_k - \lambda)\langle x, e_k\rangle = (\lambda_k - \lambda)\xi_k$. Itt $\lambda_k - \lambda \neq 0$, így vele osztva következik az állítás. □

6.90. Megjegyzés. A módszer akkor is működik, ha H nem szeparábilis. Ekkor $\ker(A)^{\perp}$-ben létezik TONR, így $y = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ alakban áll elő, ahol $x_0 \in \ker(A)$. A fenti eljárást kiegészítve ekkor $x = -\frac{1}{\lambda}x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k - \lambda}\, e_k$.

Lineáris algebrai egyenletrendszerek ismert tulajdonsága négyzetes mátrix esetén, hogy a rendszernek pontosan akkor létezik tetszőleges jobboldal esetén megoldása, ha a homogén rendszernek csak a 0 megoldása. (A megfelelő lineáris leképezés tehát pontosan akkor szuperjektív, ha injektív: ez abból következik, hogy a képtér és magtér dimenziója együtt kiadja az egész tér – véges – dimenzióját.) A fenti tulajdonság nem igaz általában végtelen dimenziós terekben, de kompakt operátorból képzett $A - \lambda I$ operátorokra igen, amit az alábbi nevezetes tétel mond ki.

6.91. Tétel (Fredholm-féle alternatívatétel). *Legyen X Banach-tér, $A \in B(X)$ kompakt operátor, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ adott szám. Ekkor az*

$$Ax - \lambda x = y$$

másodfajú egyenlet megoldhatóságára nézve két eset lehetséges:

(i) (ha λ nem sajátértéke A-nak:) bármely $y \in X$ esetén az $Ax - \lambda x = y$ egyenletnek egyértelműen létezik megoldása;

(ii) (ha λ sajátértéke A-nak:) az $Ax - \lambda x = 0$ homogén egyenletnek létezik $x \neq 0$ megoldása.

Ha H Hilbert-tér és A önadjungált, akkor a (ii) esetben az $Ax - \lambda x = y$ egyenletnek pontosan akkor létezik megoldása, ha $y \perp ker(A - \lambda I)$, azaz ha $\langle y, v_i \rangle = 0$, ahol $v_1, \ldots, v_n$ bázis $ker(A - \lambda I)$-ben.

Bizonyítás. Ha $\lambda \neq 0$ nem sajátérték, akkor 6.87. megjegyzés (ii) része alapján reguláris érték, így a 6.39. megjegyzés (ii) része szerint bármely $y \in X$ esetén az $Ax - \lambda x = y$ egyenletnek egyértelműen létezik megoldása. Ha λ sajátérték, akkor a (ii) tulajdonság definíció szerint teljesül.
Ha H Hilbert-tér, A önadjungált és $\lambda \in \mathrm{Eig}(A)$, akkor igazolnunk kell: $y \in R(A - \lambda I) \Leftrightarrow y \perp ker(A - \lambda I)$. A ($\Rightarrow$) irány következik a 6.5. tételből, ha azt $(A - \lambda I)$-re alkalmazzuk. A ($\Leftarrow$) irányhoz legyen $\lambda = \lambda_j$ a j-edik sajátérték és $y \perp V_j := ker(A - \lambda_j I)$ adott vektor. Legyen először H szeparábilis, ekkor $y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k = \sum_{e_k \perp V_j} d_k e_k$, ahol (e_k) a sajátvektorokból alkotott TONR. Ha $c_k := \frac{d_k}{\lambda_k - \lambda_j}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$, akkor a 2.26. állítás alapján $x := \sum_{e_k \perp V_j} c_k e_k$ értelmes, mert minden $k \neq j$ esetén $|\lambda_k - \lambda_j| \geq dist(\sigma(A) \backslash \{\lambda_j\}$, így $\delta := \lambda_j > 0$ mellett

$\sum\limits_{e_k \perp V_j} |c_k|^2 \le \frac{1}{\delta^2} \sum\limits_{e_k \perp V_j} |d_k|^2 = \frac{1}{\delta^2} \|y\|^2 < \infty$. Emellett $(A - \lambda_j I)x = \sum\limits_{e_k \perp V_j} (\lambda_k - \lambda_j) c_k e_k = \sum\limits_{e_k \perp V_j} d_k e_k = y$, így $y \in R(A - \lambda I)$. Ha H nem szeparábilis, akkor a fenti x és y is kiegészíthető alkalmas $\ker(A)$-beli komponenssel, felhasználva, hogy a $\ker(A)$ altérben $A - \lambda_j I$ megegyezik $-\lambda_j I$-vel. $\square$

6.7. Operátorok spektrális előállítása, operátorfüggvények

6.7.1. Operátorok előállítása spektrumuk alapján

6.92. Tétel (Hilbert–Schmidt). *Legyen H Hilbert-tér. Ekkor bármely $A \in B(H)$ kompakt önadjungált operátor előáll az*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \tag{6.12}$$

pontonként konvergens sor alakjában, ahol a $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$ valós számsorozatnak csak a nulla lehet torlódási pontja, és P_n ($n \in \mathbb{N}^+$) projektor (éspedig az, amely az $S_n := \{x \in H : Ax = \lambda_n x\}$ sajátaltérre vetít).

Bizonyítás. Tekintsük a (6.10) sorfejtést, ahol $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ a sajátvektorokból álló $\ker(A)^\perp$-beli TONR. Ha most a sajátértékeket átindexeljük úgy, hogy csak a különböző sajátértékeket vesszük figyelembe, akkor legyen P_n az S_n sajátaltérre vett ortogonális projekció. Ekkor

$$P_n x = \sum_{i:\ e_i \in S_n} \langle x, e_i \rangle \, e_i$$

és így

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x \qquad (\forall x \in H). \qquad \square$$

6.93. Megjegyzés. (Kompakt normális operátor spektrálfelbontása.) A 6.87. megjegyzés alapján a 6.92. tétel bármely $A \in B(H)$ kompakt normális operátorra is igaz. Így tehát egy $A \in B(H)$ kompakt normális operátor előállítható a sajátértékei és megfelelő projekciók szerinti (6.12) ún. *spektrálfelbontással*, ahol $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$ komplex számsorozat. Ez a tulajdonság a szimmetrikus, ill. normális mátrixok spektrálfelbontásának közvetlen általánosítása, a különbség csak az, hogy most nem véges sok projekció szerepel.

Ilyen felbontás nemcsak kompakt operátorra lehetséges, hiszen tetszőleges $(e_n) \subset H$ TONR és $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ korlátos számsorozat esetén definiálható az alábbi operátor:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \text{esetén} \quad Ax := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n \qquad (x \in H). \tag{6.13}$$

Könnyen látható, hogy $\|Ax\| \leq (\sup_n |\lambda_n|)\|x\|$, így $A \in B(H)$. Az A operátornak ekkor (e_n) teljes sajátvektorrendszere. Itt A pontosan akkor kompakt, ha $\lambda_n \to 0$. Ha a 6.92. tétel bizonyításához hasonlóan átindexeljük a sajátértékeket és bevezetjük a P_n projekciókat, akkor a (6.12) felbontáshoz jutunk.

A fenti konstrukcióval igazolható az alábbi tulajdonság, amely a 6.52. következmény és 6.57. állítás „megfordítása":

6.94. Állítás. *Bármely $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, nem üres halmazhoz van olyan $A \in B(H)$ operátor, hogy $K = \sigma(A)$.*

Bizonyítás. Létezik olyan $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ megszámlálható halmaz, amely sűrű K-ban. Ez korlátos számsorozat, így ha H szeparábilis Hilbert-tér és benne $(e_n) \subset H$ TONR, akkor értelmezhető a (6.13) operátor. Itt A sajátértékei a λ_n számok, így $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \sigma(A)$, ebből $\sigma(A)$ zártsága miatt $K = \overline{(\lambda_n)}_{n\in\mathbb{N}^+} \subset \sigma(A)$. Ha viszont $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K$, akkor λ reguláris érték, mivel bármely $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n e_n$ esetén az $(A - \lambda I)x = y$ egyenletnek $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda} e_n$ egyértelmű megoldása. Itt az utóbbi sor konvergenciája a 2.26. állítás alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{d_n}{\lambda_n-\lambda}|^2 \leq \frac{1}{\inf\limits_n |\lambda_n-\lambda|^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 = \frac{1}{dist(\lambda,K)^2}\, \|y\|^2 < \infty$ becslésből következik. $\square$

Mi mondható a (6.12) felbontás helyett, ha az A operátornak nincs teljes sajátvektorrendszere? Vizsgáljuk meg ezt a 6.40. megjegyzés (ii) példája alapján, amikor A-nak nincs egyetlen sajátértéke sem. Legyen most $I = [0, 1]$, $H := L^2(I)$ és $A : H \to H$,

$$(Af)(x) := x\, f(x).$$

Láttuk, hogy ekkor $\sigma(A) = I = [0, 1]$.

A fenti A operátor egyszerűen közelíthető olyan A_n operátorokkal, melyekre érvényes a (6.12)-nek megfelelő felbontás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és bontsuk fel $[0, 1)$-et az $I_k \equiv I_k^{(n)} := [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ nemátfedő intervallumokra ($k = 1, \ldots, n$).

Legyen $\chi_k \equiv \chi_k^{(n)}$ az I_k karakterisztikus függvénye (amely I_k-ban 1-et, $I \setminus I_k$-ban 0-t vesz fel) és $\lambda_k \equiv \lambda_k^{(n)} := \frac{k}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$, valamint adott $f \in L^2(I)$ esetén

$$(A_n f)(x) := \lambda_k \, f(x) \quad (\text{ha } x \in I_k), \qquad \text{azaz} \quad A_n f := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_k f,$$

tehát A_n a $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_k$ lépcsősfüggvénnyel való szorzás operátora. Könnyen látható, hogy a

$$P_k \equiv P_k^{(n)} : L^2(I) \to L^2(I), \qquad P_k f := \chi_k f$$

leképezés (amely I_k-ban helybenhagyja és azon kívül lenullázza f-et) projekció az I_k-n kívül eltűnő L^2-beli függvények alterére, így

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k.$$

Megmutatjuk, hogy $A_n f \to Af$ $(\forall f \in L^2(I))$ L^2-normában, ha $n \to \infty$. A definícióból $x \in I_k$ esetén $|x - \lambda_k| = |x - \frac{k}{n}| \leq \frac{1}{n}$, így $|(x - \lambda_k) f(x)| \leq \frac{1}{n} |f(x)|$. Ez minden k-ra igaz, így $|(A - A_n) f| \leq \frac{1}{n} |f|$ pontonként az egész I-ben, amiből $\|(A - A_n) f\|_{L^2} \leq \frac{1}{n} \|f\|_{L^2} \to 0$. Tehát

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \to A \qquad \text{pontonként } L^2(I)\text{-ben.}$$

Vezessük be azt a P leképezést, amely az I_k intervallumhoz a P_k projektort rendeli, azaz legyen $P(I_k) := P_k$, ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(I_k) \to A \qquad \text{pontonként } L^2(I)\text{-ben.} \tag{6.14}$$

Az operátorelőállítás fő észrevétele az, hogy a fenti formula analóg egy egyváltozós integrállal: az $id(\lambda) := \lambda$ valós függvényre, μ-vel jelölve a Lebesgue-mértéket és $\int . \, d\mu(\lambda)$-val a λ valós függvényeinek μ szerinti integrálját,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(I_k) \to \int_0^1 \lambda \, d\mu(\lambda).$$

Ez alapján a következőt mondhatjuk: jelölje $\mathcal{B}(I)$ az I intervallum Borel-halmazait, és legyen

$$P : \mathcal{B}(I) \to B(H)$$

az a leképezés, amely egy $\omega \in \mathcal{B}(I)$ halmazhoz a

$$P(\omega) : f \mapsto \chi_\omega f$$

projektort rendeli. (Ez a projektor tehát ω-ban helybenhagyja és azon kívül lenullázza f-et; lényegében $P(\omega)f$ az $f_{|\omega}$ leszűkítés, amit még 0 értékkel terjesztünk vissza I-re. Speciálisan, ha $\omega = I_k$, akkor $P(I_k)$ éppen a fenti P_k projektor.) Itt tehát P egy *projektorértékű mérték.* Ekkor a (6.14) formula alapján az A operátort úgy értelmezhetjük, mint az $id(\lambda) := \lambda$ identitásfüggvénynek a P projektorértékű mérték szerinti integrálját az I intervallumon, azaz

$$A = \int_0^1 \lambda \, dP(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(I_k). \tag{6.15}$$

A fenti konvergencia I-nek az I_k-kra való felbontása helyett tetszőleges ω_k Borel-részhalmazaira való felbontásai esetén is igazolható, ha a $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\omega_k}$ lépcsősfüggvény egyenletesen tart az $id(\lambda) := \lambda$ identitásfüggvényhez. A további részletek tárgyalása nélkül most csak kimondjuk, hogy a kapott integrálformula általában is igaz bármely normális operátor esetén, ahol az I intervallum helyére az adott operátor spektruma lép:

6.95. Tétel (spektráltétel). *Legyen H Hilbert-tér, $A \in B(H)$ normális operátor. Ekkor létezik egyetlen olyan $P : \mathcal{B}(\sigma(A)) \to B(H)$ projektorértékű mérték az A spektrumának Borel-részhalmazain, hogy*

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dP(\lambda). \tag{6.16}$$

A P mértéket az A operátor spektrálfelbontásának hívjuk.

A tételben szereplő integrál tehát úgy értendő, hogy fennáll a (6.15)-beli limesz megfelelője, azaz

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(\omega_k) \tag{6.17}$$

$\sigma(A)$-nak tetszőleges ω_k Borel-részhalmazaira való felbontásai esetén, ha a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\omega_k}$ lépcsősfüggvény egyenletesen tart az $id(\lambda) = \lambda$ identitásfüggvényhez. A P mértékre a „spektrálfelbontás" elnevezés a kompakt esettel analóg, lásd 6.93. megjegyzés. Sőt, a 6.92. tétel speciális esete a 6.95. tételnek, ha a P mértéket a $\{\lambda_k\}$ sajátértékekből álló egypontú halmazokon az S_k sajátalterekre vetítő P_{S_k} projektoroknak, a sajátértékek halmazának komplementerén pedig a nulla operátornak definiáljuk (diszkrét tartójú mérték). A spektráltétel bizonyítása és a témakör részletes tárgyalása pl. a [62] könyvben olvasható.

6.7.2. Operátorfüggvények

Adott $A \in B(H)$ operátor esetén értelmes A-nak az A^n hatványa bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén: $A^n x := A(A(\dots(Ax)..))$ (ha $n \geq 1$) és $A^0 := I$ (az identitás). Ezekre érvényesek a szokásos számolási szabályok, pl. $A^n A^m = A^{n+m}$. Természetes módon nyerhetjük ezekből A polinomjait is. Kérdés, hogy általánosabb f valós függvény esetén hogyan értelmezhetjük egy operátor $f(A) \in B(H)$ függvényét úgy, hogy ez kiterjessze a fentieket és érvényben maradjanak a számolási szabályok. A gyakorlatban fontos esetek között említhetjük egy pozitív operátor négyzetgyökét, vagy egy operátor exponenciális függvényét. Mátrixokra az utóbbi lineáris differenciálegyenleteknél bukkan fel, aminek végtelen dimenziós megfelelője is értelmes, lásd a 9. fejezetben.

Ebben a szakaszban kétféle megközelítést vázolunk.

(a) Operátorfüggvények hatványsorral

Az operátorpolinomok természetes általánosításai az operátorhatványsorok, ezzel egy operátor analitikus függvényeit definiálhatjuk. A 6.5.3. szakaszban láttunk ilyen példát a Neumann-sornál. A (6.6) definícióhoz képest viszont más helyzetben vagyunk, mert ott számot hatványoztunk operátoregyütthatókkal, most pedig adott operátort hatványozunk és az együtthatók számok.

6.96. Állítás. *Legyen $R > 0$, $(c_n) \subset \mathbb{C}$, és legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor konvergens bármely $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$ esetén. Ekkor bármely $A \in B(H)$ esetén, melyre $\|A\| < R$, a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ sor konvergens $B(H)$-normában.*

Bizonyítás. Az operátorsor abszolút konvergens: $\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \|A\|^n < \infty$ az $\|A\| < R$ feltétel és a hatványsor abszolút konvergenciája miatt, így az 1.12. állítás szerint az operátorsor konvergens is. □

6.97. Definíció. *Legyen $R > 0$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, melyre $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ($\forall |z| < R$). Ha $A \in B(H)$ és $\|A\| < R$, akkor*

$$f(A) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n.$$

Példák.

1. Operátor exponenciálisa. Tetszőleges $A \in B(H)$ esetén legyen

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{6.18}$$

Mivel a megfelelő számsor mindenütt konvergens, a 6.96. állítás szerint a fenti operátorsor értelmes.

6.98. Állítás. *Legyenek* $A, B \in B(H)$.
(i) Ha $AB = BA$, *akkor* $e^{A+B} = e^A e^B$.
(ii) $e^0 = I$ *(ahol* 0 *a nulla-operátor és* I *az identitás).*
(iii) e^A *invertálható és* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
(iv) $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$.

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint a mátrixoknál. Az (i)-hez írjuk fel hatványsorokkal az $e^{a+b} = e^a e^b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ azonosságot, majd cseréljük ki a-t és b-t A-ra és B-re. A (ii) pont a definícióból következik. Az (i)-ben $B = -A$ helyettesítéssel kapjuk (iii)-at. A (iv) pont abból következik, hogy $\|e^A\|$ felső becsléseként bevihetjük a normákat a szumma mögé, majd a hatványok alá. $\square$

2. Egyenletesen pozitív operátor négyzetgyöke.

Először az identitásoperátor perturbációinak négyzetgyökét értelmezzük: az $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ $(|x| < 1)$ sorfejtés alapján

$$(I + C)^{1/2} := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} C^n, \qquad \text{ha } C \in B(H), \quad \|C\| < 1.$$

Legyen most $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor. Ekkor tehát A önadjungált és léteznek olyan $M \ge m > 0$ állandók, hogy

$$m\,\|u\|^2 \le \langle Au, u\rangle \le M\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H). \tag{6.19}$$

(Itt a 6.11. tétel alapján $\|A\| \le M$.) Némi számolással igazolható, hogy ekkor

$$\left\| \frac{2}{m+M}\, A - I \right\| \le \frac{M-m}{M+m} < 1.$$

(A levezetést lásd a 16. fejezetben, a (16.5) formulánál, ahol erre általánosabb helyzetben van szükség.) Ha tehát

$$C := \frac{2}{m+M}\, A - I, \qquad \text{akkor} \quad \|C\| < 1 \quad \text{és} \quad A = \frac{m+M}{2}\,(I + C).$$

Így értelmezhető

$$A^{1/2} := \sqrt{\frac{m+M}{2}}\;(I + C)^{1/2} = \sqrt{\frac{m+M}{2}}\; \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \Big(\frac{2}{m+M}\, A - I \Big)^n.$$

6.99. Állítás. *Ha $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor, akkor $\left(A^{1/2}\right)^2 = A$, és $A^{1/2}$ is önadjungált.*

Bizonyítás. Az $\left(A^{1/2}\right)^2 = A$ tulajdonsághoz írjuk fel hatványsorokkal a $(\sqrt{1+c})^2 = 1+c$ azonosságot ($c \in \mathbb{R}$, $|c| < 1$), majd cseréljük ki c-t a fenti C-re és szorozzuk meg az egyenlőséget $\frac{m+M}{2}$-vel. $A^{1/2}$ önadjungált volta abból következik, hogy hatványsorának minden tagja önadjungált. □

(b) Operátorfüggvények spektrális előállítással

Legyen most H szeparábilis és $A \in B(H)$ olyan operátor, melynek létezik $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subset H$ *teljes sajátvektorrendszere*, azaz (e_n) TONR és $Ae_n = \lambda_n e_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) valamely $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ korlátos számsorozatra. (Ha például A kompakt önadjungált, akkor ez teljesül, és (λ_n) valós nullsorozat, lásd 6.83. tétel). Ekkor

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \text{esetén} \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n \qquad (x \in H).$$

Ekkor A hatványai és így polinomjai is invariánsak a sajátirányokban, azaz ha $p(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^j$ adott polinom, akkor minden n-re $p(A)e_n = \sum_{j=0}^{k} c_j A^j e_n = \sum_{j=0}^{k} c_j \lambda_n^j e_n = p(\lambda_n)e_n$, ezért

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \text{esetén} \quad p(A)x = \sum_{n=1}^{\infty} p(\lambda_n) c_n e_n \qquad (x \in H).$$

Ez az egyenlőség motiválja a következő definíciót:

6.100. Definíció. *Ha H szeparábilis és az $A \in B(H)$ operátornak létezik $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subset H$ teljes sajátvektorrendszere λ_n sajátértékekkel, valamint ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ korlátos a $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ halmazon, akkor legyen $f(A) \in B(H)$ az az operátor, melyre*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \textit{esetén} \quad f(A)x := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) c_n e_n \qquad (x \in H).$$

6.101. Megjegyzés. (i) Az $f(A)x$ sorának konvergenciáját az $(f(\lambda_n))$ számsorozat korlátossága garantálja.

(ii) A definícióból következik, hogy a függvényműveletek megőrződnek a megfelelő operátorokra, pl. $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$ vagy $(f \circ g)(A) = f(g(A))$.

(iii) Könnyen látható, hogy ha az A operátorra értelmes a 6.97. definíció is, akkor a kétféleképp definiált $f(A)$ operátor ugyanaz (a hatványsort polinomok limeszeként írjuk fel), így jogos, hogy mindkétszer az $f(A)$ jelölést használtuk. Egyik definíció sem speciális esete a másiknak, azaz előfordul, hogy csak az egyik vagy csak a másik használható.

Mi mondható általánosabban, ha A olyan operátor, melynek nincs teljes sajátvektorrendszere? Erre normális operátor esetén a 6.95. spektráltétel, ill. a benne szereplő P projektorértékű mérték használható. Éspedig, ha $A \in B(H)$ normális operátor és P a spektrálfelbontása, azaz érvényes (6.16), akkor adott $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ korlátos, mérhető függvény esetén legyen

$$f(A) := \int_{\sigma(A)} f(\lambda)\, dP(\lambda), \tag{6.20}$$

ahol az integrált a (6.17)-nek megfelelő határátmenettel értelmezzük (λ_k helyett $f(\lambda_k)$ szerepel). Ez a definíció kiterjesztése a fenti, teljes sajátvektorrendszerrel bevezetett fogalomnak, és a függvényműveletek itt is megőrződnek a megfelelő operátorokra.

Az $f(A)$ operátor és az f függvény (maximum)-normája szorosan kapcsolódik egymáshoz:

6.102. Állítás. *Ha $A \in B(H)$ normális operátor és $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ korlátos, mérhető függvény, akkor $\|f(A)\| \le \sup\limits_{\sigma(A)} |f|$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy A-nak van (e_n) teljes sajátvektorrendszere. Ha $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H$ és $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1$, akkor

$$\|f(A)x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)c_n|^2 \le \sup_{\lambda \in \mathrm{Eig}(A)} |f(\lambda)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 =$$

$$= \sup_{\lambda \in \mathrm{Eig}(A)} |f(\lambda)|^2 \le \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |f(\lambda)|^2,$$

így $\|f(A)\| \le \sup\limits_{\sigma(A)} |f|$. Ha A-nak nincs teljes sajátvektorrendszere, akkor a fentebb említett határátmenetet alkalmazzuk, és a közelítő összegeknél az előbbi gondolatmenet megfelelőjét használjuk, a részleteket lásd [62]-ben. □

Az (6.20) integrállal értelmezett operátorfüggvények alaposabb tárgyalása szintén [62]-ben olvasható. Megemlítjük innen, hogy a fenti állításban folytonos f esetén egyenlőség áll fenn. (Ez teljes sajátvektorrendszer esetén rögtön látszik, sőt itt elég f korlátossága is; ha ugyanis λ_{k_n} a sajátértékek olyan részsorozata, melyre $|f(\lambda_{k_n})| \to \sup_{\lambda \in \mathrm{Eig}(A)} |f(\lambda)|$, és e_{k_n} jelöli a megfelelő normált sajátvektorokat, akkor $\|f(A)e_{k_n}\| = |f(\lambda_{k_n})| \to \sup_{\lambda \in \mathrm{Eig}(A)} |f(\lambda)|$.)

A fenti definícióval például tetszőleges (nemcsak egyenletesen) pozitív operátor négyzetgyöke is értelmezhető:

$$A^{1/2} := \int_{\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, dP(\lambda),$$

ill. speciálisan, TSVR mellett

$$A^{1/2}x := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda}_n c_n e_n.$$

Ekkor is igaz, hogy $\left(A^{1/2}\right)^2 = A$.

II. rész

Lineáris operátoregyenletek elmélete Hilbert-térben

7. fejezet

Operátoregyenletek megoldhatósága korlátos operátor esetén

Ebben a fejezetben operátoregyenletek megoldásának létezésére és egyértelműségére vonatkozó tételeket igazolunk koercivitási feltételekre alapozva. Ez a témakör tartalmazza a Lax–Milgram-lemmát, amely alapvető fontosságú számos alkalmazásban, elsősorban elliptikus feladatok gyenge megoldásánál és az erre alapuló végeselemes megoldásoknál. Felépítésünkben először operátoregyenletekkel foglalkozunk, és ezekre támaszkodva igazoljuk a bilineáris formákat használó Lax–Milgram-lemmát és változatait.

Az I. részben alapértelmezésben komplexnek tekintettünk egy Hilbert-teret, ahogy ebben a témakörben szokás. Ennek oka, hogy a funkcionálanalízis fejlődése során a fő motivációt jelentő fizikai alkalmazásokban komplex térre volt szükség. Néhány fontos állításnál, amely kihasználja a tér komplex voltát, ezt külön megemlítettük; amúgy az I. rész többi fogalma és vizsgált tulajdonsága általában érvényes valós térben is.

A továbbiakban, vagyis operátoregyenletek és numerikus módszerek esetén már jóval nagyobb szerep jut a valós Hilbert-tereknek, sőt legtöbbször csak ez használható kényelmesen. Így ebben és a következő fejezetekben mindig szót ejtünk arról, milyen (valós és/vagy komplex) terekben dolgozunk; eleinte legtöbbször mindkettőre érvényes tételeket látunk, később általában már csak valós terekről lesz szó. A számtestre általánosan a $\mathbb{K}$ jelölést használjuk, azaz $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$.

Ezzel kapcsolatban célszerű előre tisztázni két rokon fogalom, az egyenletes pozitivitás és a koercivitás kapcsolatát, utóbbinak ugyanis (bár a 6.2. szakaszban ezt is bevezettük) eddig nem jutott érdemi szerep. Összefoglalva tehát:

- Egy $A \in B(H)$ operátort *egyenletesen pozitívnak* hívunk
  - H komplex Hilbert-tér esetén:
    ha létezik $m > 0$, hogy $\langle Ax, x\rangle \geq m\,\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$.
    (Ekkor A szükségképpen önadjungált is.)
  - H valós Hilbert-tér esetén:
    ha A önadjungált és létezik $m > 0$, hogy $\langle Ax, x\rangle \geq m\,\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$.
- Egy $A \in B(H)$ operátort *koercívnek* hívunk
  - H komplex Hilbert-tér esetén:
    ha létezik $m > 0$, hogy $Re\,\langle Ax, x\rangle \geq m\,\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$.
  - H valós Hilbert-tér esetén:
    ha létezik $m > 0$, hogy $\langle Ax, x\rangle \geq m\,\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$.
    (Ekkor A nem feltétlenül önadjungált.)

  Egy operátor tehát pontosan akkor egyenletesen pozitív, ha koercív és önadjungált.

7.1. Egyenletek koercivitási feltételek mellett

Legyen H valós vagy komplex Hilbert-tér, $A \in B(H)$. Ebben a szakaszban arra adunk feltételeket, hogy egy $Ax = y$ egyenletnek bármely $y \in H$ esetén létezzék egyetlen $x^* \in H$ megoldása. Ez ugyanazt jelenti, mint hogy A bijekció H-ról H-ra. Az egyenletekkel való megfogalmazás elsősorban a tételek alkalmazásai során lesz hasznos.

Az $Ax = y$ alakú egyenleteket szokás elsőfajúnak, míg adott λ szám esetén az $Ax - \lambda x = y$ alakúakat másodfajúnak nevezni. Utóbbira a 6.6. szakasz végén láttunk példát, amikor A kompakt; ilyenkor – ha a tér végtelen dimenziós – az elsőfajú egyenletnek nem is lehet minden jobboldalra megoldása, mert a 6.80. következmény szerint kompakt operátor nem lehet szuperjektív. (Kompakt elsőfajú operátoregyenletek kezelése gyakran épp másodfajú közelítéseikkel történik, amit a 17.2. szakaszban vázolunk.)

A megoldás létezése és egyértelműsége mellett az is fontos tulajdonság, hogy az x megoldás folytonosan függjön az y jobboldaltól. A 4.17. következmény szerint ez esetünkben következik abból, hogy A bijekció, így nem kellene külön igazolni, a folytonos függésben szereplő konstans konkrét értéke miatt azonban többször mégis megfogalmazzuk.

7.1.1. Megoldhatósági tételek

7.1. Tétel. *(„Első megoldhatósági tétel".) Legyen $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor, azaz A önadjungált és létezik $m > 0$, hogy $\langle Ax, x\rangle \geq m\,\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$. Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^* \in H$ megoldása.*

Bizonyítás. Tekintsük a $(H, \|\cdot\|_A)$ energiateret, amely az egyenletes pozitivitás miatt maga is Hilbert-tér (lásd 6.20. Következmény). Rögzített $b \in H$ esetén legyen $\phi : H \to \mathbb{K}$, $\phi v = \langle v, b\rangle$, amely nyilván lineáris és folytonos is, mert

$$|\phi v| = |\langle v, b\rangle| \leq \|v\|\,\|b\| \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\,\|v\|_A\,\|b\| = \left(\frac{1}{\sqrt{m}}\,\|b\|\right)\|v\|_A\,.$$

A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik egyetlen $x^* \in H$, melyre $\phi v = \langle v, x^*\rangle_A$ minden $v \in H$ esetén. Utóbbi pedig ekvivalens azzal, hogy x^* megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, mert

$$\langle v, b\rangle = \phi v = \langle v, x^*\rangle_A = \langle Av, x^*\rangle = \langle v, Ax^*\rangle \quad (\forall v \in H),$$

azaz $b = Ax^*$. □

A következő megoldhatósági tételben általánosítjuk az egyenletes pozitivitás feltételét. Idézzük fel a fejezet elejéről a koercivitás fogalmát: láttuk, hogy ha H valós Hilbert-tér, akkor a definícióban „*Re*" elhagyható, de ilyenkor a koercivitás nem vonja maga után az önadjungáltságot.

7.2. Tétel. *(„Második megoldhatósági tétel".) Legyen $A \in B(H)$ koercív operátor. Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^* \in H$ megoldása.*

Bizonyítás. (1) Először megmutatjuk, hogy a tett feltevések esetén az alábbi két tulajdonság teljesül:

(i) $\|Ax\| \geq m\,\|x\| \quad (x \in H)$;

(ii) A^* injektív.

Valóban, egyrészt az

$$m\,\|x\|^2 \leq Re\,\langle Ax, x\rangle \leq |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\,\|x\| \tag{7.1}$$

egyenlőtlenségek miatt $\|Ax\| \geq m\|x\| \quad (\forall x \in H)$. Speciálisan, emiatt A injektív is. Másrészt, itt A^* is koercív:

$$Re\ \langle A^*x, x\rangle = Re\ \langle x, Ax\rangle = Re\ \overline{\langle Ax, x\rangle} = Re\ \langle Ax, x\rangle \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H),$$

ezért A^* szintén injektív.
(2) Most megmutatjuk, hogy az (i)-(ii) tulajdonságokból következik a kívánt megoldhatóság. Mivel A injektív, így legfeljebb egy megoldás lehet, azaz elég igazolni a megoldás létezését. Tekintsük az eredeti egyenlet szimmetrizáltját, azaz az

$$A^*Ax = A^*b$$

ún. normálegyenletet. Ennek az operátora már önadjungált és egyenletesen pozitív, hiszen

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2 \geq m^2\|x\|^2 \quad (\forall x \in H).$$

A szimmetrizált egyenlet az előző tétel szerint egyértelműen megoldható, azaz létezik $x^* \in H$, melyre $A^*Ax^* = A^*b$. Ebből pedig A^* injektivitása révén $Ax^* = b$ is következik. □

A fenti tétel ritkábban használt, de enyhébb feltételre épülő változata:

7.3. Tétel. *Legyen $A \in B(H)$, melyre van olyan $m > 0$, hogy $|\langle Ax, x\rangle| \geq m\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$. Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^* \in H$ megoldása.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyítása most is működik: ott is az $|\langle Ax, x\rangle| \geq m\|x\|^2$ egyenlőtlenséget hoztuk ki és onnan folytattuk, lásd (7.1), valamint ezt is örökli A^*, hiszen $|\langle Ax, x\rangle| = |\langle A^*x, x\rangle|$, így A^* most is injektív. □

A 7.2. tétel bizonyítása alapján már egyszerűen megadható az általános jellemzés. (Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban viszont legtöbbször az első két tétel alkalmazható könnyebben.)

7.4. Tétel. *(A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele.) Egy $A \in B(H)$ operátor pontosan akkor bijekció H-ról H-ra, ha az alábbi két tulajdonsággal rendelkezik:*

(i) létezik $m > 0$, hogy $\|Ax\| \geq m\|x\| \quad (\forall x \in H)$;

(ii) A^* injektív.

Bizonyítás. ($\Leftarrow$) A 7.2. tétel bizonyításának második részében éppen azt igazoltuk, hogy az (i)-(ii) tulajdonságokból következik a kívánt megoldhatóság.

($\Rightarrow$) Ha A bijekció, akkor a Banach-féle homeomorfizmus-tétel (4.14. tétel) szerint A^{-1} korlátos, azaz létezik $M > 0$, melyre $\|A^{-1}y\| \leq M\|y\|$ ($\forall y \in H$). Ebből $y = Ax$ és $M = 1/m$ helyettesítésekkel épp az (i) feltételt kapjuk.
Másrészt, a 6.5 felbontási tételből $R(A) = H$ miatt $\ker(A^*) = \{\mathbf{0}\}$, azaz A^* injektív. □

A feladatok korrekt kitűzését (lásd 4.16. definíció) a konkrét konstanssal fogalmazzuk meg.

7.5. Tétel. *(A megoldás folytonos függése a jobboldaltól.) Ha teljesülnek a 7.1., 7.2., 7.3 vagy 7.4. tétel feltételei az $Au = b$ operátoregyenletre, akkor $\|u\| \leq \frac{1}{m}\|b\|$.*

Bizonyítás. A 7.1–7.3. tételek feltételeiből következik a 7.4. tétel (i) feltétele, amely szerint $\|b\| = \|Au\| \geq m\,\|u\|$. □

7.6. Megjegyzés. A 7.4. tétel elégséges iránya közvetlenül is bizonyítható az alábbi módon. Teljesüljenek az (i)-(ii) feltételek. Ekkor (ii) miatt $\ker(A^*) = \{\mathbf{0}\}$, így a 6.5 felbontási tételből $H = \overline{R(A)} \oplus \ker(A^*) = \overline{R(A)}$, azaz $R(A)$ sűrű. Másrészt $R(A)$ zárt is, mert ha $Ax_n \to y \in H$, akkor (Ax_n) Cauchy-sorozat, és (i) miatt $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{m}\|Ax_n - Ax_m\|$, így (x_n) is Cauchy-sorozat: tehát létezik $x := \lim x_n$, amire viszont A folytonossága miatt $Ax = \lim Ax_n = y$, azaz $y \in R(A)$. Ezekből $R(A) = H$, és A triviálisan injektív is (i) miatt, azaz bijekció.
Ez a bizonyítás a 7.2 és 7.3. tételekre is működik, mivel azokat a fenti (i)-(ii) tulajdonságokra vezettük vissza.

7.1.2. Néhány következmény

A megoldhatósági tételek segítségével igazoljuk a spektrum néhány korábban említett tulajdonságát.

7.7. Állítás. *Legyen $A \in B(H)$. Ha A önadjungált operátor, akkor spektruma valós, és ha A pozitív operátor, akkor spektruma nemnegatív.*

Bizonyítás. (i) Legyen A önadjungált és $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, azaz $\beta \neq 0$. Ekkor bármely $u \in H$ esetén $\langle (A - \lambda I)u, u\rangle = \langle Au, u\rangle - \alpha\|u\|^2 - i\beta\|u\|^2$, ebből kapjuk, hogy $|\langle (A - \lambda I)u, u\rangle| \geq |Im\,\langle (A - \lambda I)u, u\rangle| = |\beta|\|u\|^2$, így a 7.3. tétel szerint $A - \lambda I$ bijekció, de akkor $\lambda \in \varrho(A)$.
(ii) Legyen A pozitív operátor. A fentiek szerint spektruma valós, így elég igazolni, hogy ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda \in \varrho(A)$. A fentiek mintájára bármely $u \in H$ esetén $\langle (A - \lambda I)u, u\rangle = \langle Au, u\rangle - \lambda\|u\|^2 \geq -\lambda\|u\|^2 = |\lambda|\|u\|^2$, így most a 7.1. tétel szerint $A - \lambda I$ bijekció. □

7.8. Állítás. *Legyen $A \in B(H)$ normális. Ha $\lambda \in \sigma(A)$ nem sajátérték, akkor van olyan $(u_n) \subset H$ sorozat, melyre $\|u_n\| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}^+$) és $Au_n - \lambda u_n \to 0$.*

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \sigma(A)$, azaz $A - \lambda I$ nem bijekció. Ekkor a 7.4. tétel (i) vagy (ii) tulajdonsága nem teljesülhet $(A - \lambda I)$-re. Ha λ nem sajátértéke A-nak, akkor a 6.37. állítás (iv) pontja szerint $\overline{\lambda}$ nem sajátértéke A^*-nak, azaz $A^* - \overline{\lambda} I = (A - \lambda I)^*$ injektív, vagyis a (ii) tulajdonság teljesül $(A - \lambda I)$-re. Ezért az (i) tulajdonság sérül $(A - \lambda I)$-re, ami azt jelenti, hogy $\inf\limits_{\|u\|=1} \|(A - \lambda I)u\| = 0$. Ez az infimum fogalma alapján épp azt jelenti, hogy létezik a kívánt (u_n) sorozat. □

Most egy hasznos állítást igazolunk koercív operátorokra.

7.9. Állítás. *Ha egy $A \in B(H)$ operátor koercív $m > 0$ konstanssal, azaz $Re\ \langle Ax, x\rangle \geq m\,\|x\|^2$ ($\forall x \in H$), akkor $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.*

Bizonyítás. Itt $m\,\|x\|^2 \leq Re\ \langle Ax, x\rangle \leq \|x\|\,\|Ax\|$, így $\|x\| \leq \frac{1}{m}\,\|Ax\|$ ($\forall x \in H$), és mivel A bijekció, így $v := Ax$ helyettesítéssel $\left\|A^{-1}v\right\| \leq \frac{1}{m}\,\|v\|$ ($\forall v \in H$), azaz $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$. □

Ennek megfelelője önadjungált esetben kvadratikus alakokra is érvényes, mindkét irányból:

7.10. Állítás. *Egyenletesen pozitív operátor inverze is egyenletesen pozitív. Éspedig, ha A önadjungált és*

$$m\,\|u\|^2 \leq \langle Au, u\rangle \leq M\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H),$$

akkor

$$\frac{1}{M}\,\|u\|^2 \leq \left\langle A^{-1}u, u\right\rangle \leq \frac{1}{m}\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H). \tag{7.2}$$

Bizonyítás. A 6.99. állítást használva $A^{1/2}$ önadjungált és

$$m\,\|u\|^2 \leq \|A^{1/2}u\|^2 \leq M\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H),$$

amiből a 7.4. tétel alapján $A^{1/2}$ bijekció, így $v := A^{1/2}u$ helyettesítéssel

$$\frac{1}{M}\,\|v\|^2 \leq \|A^{-1/2}v\|^2 \leq \frac{1}{m}\,\|v\|^2 \qquad (\forall v \in H),$$

ez éppen (7.2). □

7.2. Bilineáris formák, Lax–Milgram-tételkör

Ebben a szakaszban szorzattéren értelmezett leképezésekkel foglalkozunk, és átvisszük rájuk az előző szakaszbeli megoldhatósági tételeket. Itt a komplex mellett a valós eset is fontos (és némileg különböző) lesz, így általában párhuzamosan megfogalmazott értelemszerű állításokkal vizsgáljuk a két esetet.

7.11. Definíció. Egy $B : H \times H \to \mathbb{K}$ (ahol $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$) leképezés

(a) *bilineáris*, ha mindkét változójában lineáris;

(b) *konjugáltan bilineáris*, ha első változójában lineáris, második változójában konjugáltan lineáris;

(c) *szimmetrikus*, ha $B(x, y) = B(y, x) \quad (\forall x, y \in H)$;

(d) *konjugáltan szimmetrikus*, ha $B(x, y) = \overline{B(y, x)} \quad (\forall x, y \in H)$;

(e) *korlátos*, ha létezik $M > 0$, hogy $|B(x, y)| \leq M\|x\| \, \|y\| \quad (\forall x, y \in H)$;

(f) *koercív*, ha létezik $m > 0$, hogy $Re\, B(x, x) \geq m\|x\|^2 \quad (\forall x \in H)$.

7.12. Megjegyzés. (i) A (konjugáltan) bilineáris leképezéseket gyakran *(konjugáltan) bilineáris formának*, a konjugáltan bilineáris leképezéseket pedig néha szeszkvilineárisnak is hívják.
(ii) A bilineáris/szimmetrikus leképezések értelemszerűen inkább a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, míg a konjugáltan bilineáris/szimmetrikus leképezések inkább a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben fordulnak elő. Tipikus példa a skalárszorzat.
(iii) A $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben, azaz valós Hilbert-térben a koercivitás értelemszerűen a $B(x, x) \geq m\|x\|^2$ feltétellé egyszerűsödik.

7.13. Tétel (korlátos formák Riesz-reprezentációja). *Legyen H valós (komplex) Hilbert-tér, és $B : H \times H \to \mathbb{K}$ korlátos, (konjugáltan) bilineáris forma. Ekkor létezik egyetlen olyan $A \in B(H)$ korlátos lineáris operátor, melyre*

$$B(x, y) = \langle Ax, y \rangle \qquad (\forall x, y \in H).$$

Bizonyítás. Rögzített $y \in H$ esetén legyen $\psi_y : H \to \mathbb{K}$, $\psi_y x := B(x, y)$. Ez nyilván lineáris és folytonos is, mert

$$|\psi_y x| = |B(x, y)| \leq M \|x\| \, \|y\| = (M \|y\|) \, \|x\| \qquad (\forall x \in H).$$

Sőt, $\|\psi_y\| \leq M \|y\|$. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint egyértelműen létezik egyetlen $y^* \in H$, melyre $\psi_y x = \langle x, y^* \rangle$ minden $x \in H$-ra, ami a $Cy := y^*$ jelöléssel $B(x, y) = \langle x, Cy \rangle$. Igazoljuk, hogy $C \in B(H)$. Nyilván C lineáris, mivel B és a skalárszorzás is (konjugáltan) bilineáris. Emellett az 5.1. állításból

$$\|Cy\| = \|y^*\| = \|\psi_y\| \leq M \|y\| \quad (\forall y \in H),$$

azaz C korlátos is. Végül $A := C^*$ esetén $B(x,y) = \langle x, Cy\rangle = \langle Ax, y\rangle$ $(\forall x, y \in H)$. □

Az A operátort gyakran a B forma *Riesz-reprezentánsának* hívjuk. A tétel megfordítva is triviálisan igaz: adott $A \in B(H)$ esetén a fenti B forma korlátos és (konjugáltan) bilineáris.

7.14. Állítás. *Legyen H valós (komplex) Hilbert-tér, $B : H \times H \to \mathbb{K}$ korlátos, (konjugáltan) bilineáris forma, és $A \in B(H)$ a B forma Riesz-reprezentánsa.*

(1) B pontosan akkor (konjugáltan) szimmetrikus, ha A önadjungált.

(2) B pontosan akkor koercív, ha A koercív.

Bizonyítás. Mindkettő a definíciók közvetlen következménye. □

7.15. Megjegyzés. A 7.13. tétel akkor is igaz, ha két különböző Hilbert-téren értelmezzük a B formát, azaz $B : H \times K \to \mathbb{K}$ korlátos, (konjugáltan) bilineáris forma. Ekkor létezik egyetlen olyan $A \in B(H, K)$ korlátos lineáris operátor, melyre

$$B(x,y) = \langle Ax, y\rangle \qquad (\forall x \in H,\ y \in K).$$

A bizonyítás ugyanis szó szerint átvihető erre az esetre. Természetesen ekkor nincs értelme a 7.14. állításnak.

A következő tétel alapvető fontosságú számos alkalmazásban. Elsősorban valós térben használatos, ezért erre külön fogalmazzuk meg. Bár alaptételről van szó, a szakirodalomban szokásos hagyomány szerint a „lemma" elnevezést viseli.

7.16. Tétel (Lax–Milgram-lemma, koercív változat). *(1) Legyen H valós Hilbert-tér, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ korlátos, koercív bilineáris forma. Ekkor bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $u \in H$, melyre*

$$B(u,v) = \phi v \qquad (\forall v \in H). \tag{7.3}$$

(2) Ha H komplex Hilbert-tér, akkor $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{C}$-be képező, bilineáris helyett konjugáltan bilineáris formára és $B(u,v)$ helyett $B(v,u)$-ra igaz a fenti állítás.

Bizonyítás. (1) A 7.13. tétel alapján legyen $A \in B(H)$ a B forma Riesz-reprezentánsa: $B(u,v) = \langle Au, v\rangle$ $(\forall u, v \in H)$. Legyen továbbá $b \in H$ a ϕ funkcionál Riesz-reprezentánsa: $\phi v = \langle v, b\rangle = \langle b, v\rangle$ $(\forall v \in H)$. Azt kell tehát igazolnunk, hogy létezik egyetlen olyan $u \in H$, melyre $\langle Au, v\rangle = \langle b, v\rangle$ $(\forall v \in H)$, azaz melyre $Au = b$. Mivel A koercív, ez a 7.2. tétel szerint teljesül.

(2) Hasonló, most a (7.3) egyenlőség az $A^*u = b$ egyenletre vezethető vissza.
□

A fenti tétel ritkábban használt, de enyhébb feltételre épülő változata:

7.17. Tétel (Lax–Milgram-lemma, általános változat). *Helyettesítsük a 7.16. tétel feltételeiben B koercivitását az alábbi feltétellel: van olyan $m > 0$, hogy $|B(x,x)| \ge m\|x\|^2$ $(\forall x \in H)$. Ekkor is igaz, hogy valós tér esetén bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $u \in H$, melyre $B(u,v) = \phi v$ $(\forall v \in H)$. (Komplex tér esetén pedig a (2) állítás igaz.)*

Bizonyítás. Ugyanúgy kell, mint az előzőt, de a 7.2 helyett a 7.3. tételt használjuk. □

7.18. Megjegyzés. A 7.6. megjegyzés gondolatmenete a Lax–Milgram-lemma esetében is, közvetlenül is alkalmazható, valójában így is szól az eredeti bizonyítás [42, Chap. 6]. Általunk adott bizonyítása a Riesz-féle reprezentációs tételre és az $A^*Ax = A^*y$ normálegyenletre vezette vissza, hogy ezek széleskörű használhatóságát illusztrálja.

Legáltalánosabban az alábbi szükséges és elégséges feltétel adható, ez a nevezetes eredmény [7] a Lax–Milgram-lemma kiterjesztésének tekinthető.

7.19. Tétel (Babuška-lemma). *Legyen H valós Hilbert-tér, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ korlátos bilineáris forma. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(1) Bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $u \in H$, melyre

$$B(u,v) = \phi v \qquad (\forall v \in H). \tag{7.4}$$

(2) A B formára az alábbi két tulajdonság teljesül:

(i) létezik $m > 0$, hogy $\inf\limits_{\|u\|=1} \sup\limits_{\|v\|=1} B(u,v) \ge m$;

(ii) $\sup\limits_{\|u\|=1} B(u,v) > 0$ $(\forall v \neq 0)$.

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyítása szerint az (1) tulajdonság ekvivalens az $Au = b$ egyenlettel, ahol $A \in B(H)$ a B forma Riesz-reprezentánsa és $b \in H$ a ϕ funkcionál Riesz-reprezentánsa. Másrészt a (2)-ből az (i) rész jelentése: $\inf\limits_{\|u\|=1} \sup\limits_{\|v\|=1} \langle Au, v\rangle = \inf\limits_{\|u\|=1} \|Au\| \ge m$, azaz $\|Ax\| \ge m\|x\|$ $\forall x \in H$, ami a 7.4. tétel (i) része. A (ii) rész jelentése pedig $\sup\limits_{\|u\|=1} \langle Au, v\rangle = \sup\limits_{\|u\|=1} \langle u, A^*v\rangle =$

$\|A^*v\| > 0$ ($\forall v \neq 0$), azaz A^* injektív, ami a 7.4. tétel (ii) része. Így a 7.4. tétel alapján (1) és (2) valóban ekvivalens. $\square$.

Végül a 7.5. tételből és az 5.1. állításból adódik a folytonos függés:

7.20. Következmény. *Ha teljesülnek a 7.16. vagy 7.19. tétel feltételei a (7.4) egyenletre, akkor* $\|u\| \leq \frac{1}{m}\|\phi\|$.

7.3. Nyeregpont-feladatok megoldhatósága, inf-sup-feltétel

7.3.1. Operátorokkal megadott nyeregpont-feladatok

Számos alkalmazásban találkozhatunk az alábbi speciális alakú rendszerrel:

$$\begin{cases} Au + Bp = f \\ B^*u - Cp = g. \end{cases} \tag{7.5}$$

(Ilyen például a Stokes-feladat, lásd 10.3 fejezet, vagy elliptikus feladatok elsőrendű rendszerré való átírása.) Itt feltesszük, hogy H, K valós Hilbert-terek, $f \in H$, $g \in K$, $A : H \to H$, $B : K \to H$ és $C : K \to K$ korlátos lineáris operátorok, valamint A és C önadjungált, és van olyan $m > 0$, hogy

$$\langle Au, u\rangle \geq m\,\|u\|^2, \qquad \langle Cp, p\rangle \geq 0 \qquad (\forall u \in H,\ p \in K). \tag{7.6}$$

A (7.5) rendszer lényegében egy operátormátrixra vonatkozó egyenlet a $H \times K$ szorzattéren.
A „nyeregpont-feladat” elnevezés abból származik, hogy a fenti rendszer megoldása egy alkalmas kvadratikus típusú funkcionál nyeregpontjaként áll elő, ezt a 14.1 fejezet végén tárgyaljuk.

Ha C is egyenletesen pozitív:

$$\langle Cp, p\rangle \geq \sigma\,\|u\|^2 \qquad (\forall p \in K)$$

(ahol $\sigma > 0$), akkor érdemes beszorozni a második egyenletet (-1)-gyel. Így a kapott operátormátrix ugyanis (bár már nem szimmetrikus) koercív a $H \times K$ szorzattéren:

$$\left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Au, u\rangle + \langle Bp, u\rangle - \langle B^*u, p\rangle + \langle Cp, p\rangle$$

$$= \langle Au, u\rangle + \langle Cp, p\rangle \ \geq\ \min\{m, \sigma\}\ (\|u\|^2 + \|p\|^2) \qquad \forall (u, p) \in H \times K,$$

a 7.2. tétel szerint tehát bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (7.5) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $C = 0$, azaz

$$\begin{cases} Au + Bp = f \\ B^*u \qquad\ \ = g \end{cases} \tag{7.7}$$

(mint például az említett Stokes-feladat). Ekkor nem működik az előbbi eljárás; ehelyett A bijekció voltát kihasználva átrendezzük az egyenletet. Fejezzük ki az első egyenlőségből u-t:

$$u = A^{-1}(f - Bp), \tag{7.8}$$

és helyettesítsük a másodikba:

$$B^*A^{-1}(f - Bp) = g, \quad \text{azaz} \quad B^*A^{-1}Bp = B^*A^{-1}f - g =: \tilde{g}. \tag{7.9}$$

Legyen

$$S := B^*A^{-1}B, \tag{7.10}$$

ez az ún. *Schur-féle komplementer-operátor.* Itt a 6.8. megjegyzés alapján $B^* : H \to K$, így $S : K \to K$. Ha meg tudjuk oldani a (7.9)-ben kapott

$$Sp = \tilde{g} \tag{7.11}$$

egyenletet a K téren, akkor (7.8)-ből u-t is megkapjuk, így kész vagyunk. A (7.11) egyenlet megoldhatósága nem nyilvánvaló, mivel B, ill. B^* általában nem bijekciók. Az S speciális alakjára támaszkodva a megoldhatóság kulcsa az alábbi feltétel:

$$\text{van olyan } \gamma > 0, \text{ hogy} \quad \|Bp\| \geq \gamma\|p\| \quad (\forall p \in K). \tag{7.12}$$

Ezt az alábbi alakban szokás felírni:

7.21. Definíció. A (7.7) feladathoz tartozó **inf-sup-feltétel**:

$$\inf_{p \in K \setminus \{0\}} \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u \rangle}{\|p\| \|u\|} =: \gamma > 0. \tag{7.13}$$

Könnyen látható, hogy (7.12) és (7.13) ekvivalens: a 2.4. állítás alapján

$$\frac{\|Bp\|}{\|p\|} = \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} \frac{\langle Bp, v \rangle}{\|p\|} = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u \rangle}{\|p\| \|u\|},$$

tehát (7.12) és (7.13) is azt jelenti, hogy a fenti érték valamely közös $\gamma > 0$ korlát fölött van bármely p esetén. (A $p = 0$ eset érdektelen, ekkor (7.12) triviális.)

Megjegyezzük, hogy itt a $\|.\|$ jelölést a H és K terekben két különböző normára használjuk; bár lehetne a precízség kedvéért $\|.\|_H$ és $\|.\|_K$ jelöléseket is írni, ezt – a kevesebb index érdekében – nem tesszük, mivel a környezetből egyértelmű, melyik normáról van szó.

7.22. Állítás. *Ha $B^* : H \to K$ szuperjektív, akkor teljesül a (7.13) inf-sup-feltétel.*

Bizonyítás. A kívánt inf-sup-feltétel úgy is írható, hogy létezik $\gamma > 0$, melyre

$$\sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u\rangle}{\|u\|} \geq \gamma \, \|p\| \qquad (\forall p \in K). \tag{7.14}$$

Legyen most $p \in K$ tetszőleges adott vektor. A feltevés szerint létezik $w \in H$, melyre $B^* w = p$, emellett a 4.13. következmény alapján megadható olyan p-től független $\gamma > 0$, melyre

$$\|p\| \geq \gamma \|w\|.$$

Ebből

$$\sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u\rangle}{\|u\|} \geq \frac{\langle Bp, w\rangle}{\|w\|} = \frac{\langle p, B^* w\rangle}{\|w\|} = \frac{\|p\|^2}{\|w\|} \geq \gamma \, \|p\|. \qquad \square$$

7.23. Tétel. *(Nyeregpont-feladat megoldhatósági tétele.) Legyenek H, K valós Hilbert-terek, $A \in B(H)$ és $B \in B(K, H)$, ahol A önadjungált és teljesül (7.6). Ha fennáll a (7.13) inf-sup-feltétel, akkor bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (7.7) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a (7.10)-ben definiált $S : K \to K$ Schur-féle komplementer-operátor bijekció. Ehhez a 7.1. tétel szerint elég S egyenletes pozitivitása. Felhasználjuk, hogy A egyenletes (így szigorú) pozitivitása miatt A^{-1} is szigorúan pozitív: valóban, $\langle A^{-1}y, y\rangle = \langle x, Ax\rangle > 0$ ($\forall y \in H,\ y = Ax$ helyettesítéssel). Emiatt értelmes az $\|.\|_{A^{-1}}$ energianorma, és teljesíti a 6.21. állítást. Ezekből

$$\langle Sp, p\rangle = \langle B^* A^{-1} Bp, p\rangle = \langle A^{-1}Bp, Bp\rangle = \|Bp\|^2_{A^{-1}} = \sup_{\|h\|_{A^{-1}}=1} \langle Bp, h\rangle^2_{A^{-1}} =$$

$$= \sup_{\|h\|_{A^{-1}}=1} \langle Bp, A^{-1}h\rangle^2 = \sup_{\|z\|_A=1} \langle Bp, z\rangle^2 = \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u\rangle^2}{\|u\|_A^2} \geq$$

$$\geq \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u \rangle^2}{\|u\|^2 \|A\|^2} \geq \frac{\gamma^2}{\|A\|^2} \, \|p\|^2,$$

ahol előbb a $h = Az$ (és megfelelő $\|h\|^2_{A^{-1}} = \langle A^{-1}h, h \rangle = \langle z, Az \rangle = \|z\|^2_A$), majd a $z = \frac{u}{\|u\|_A}$ helyettesítésseket használtuk, és az inf-sup-feltétel (7.14) alakját tekintettük. Így tehát S egyenletesen pozitív, azaz bijekció.
Ebből már könnyen kész vagyunk: adott f és g esetén a (7.9), azaz (7.11) egyenletnek pontosan egy $p \in K$ megoldása van, ebből (7.8) alapján u-t is egyértelműen megkapjuk, és a kapott (u, p) pár az eredeti (7.7) feladat megoldása. □

Vegyük észre, hogy $B^* : H \to K$ szuperjektív volta szükséges a (7.7) rendszer megoldhatóságához a 2. egyenlet miatt. Ebből, a 7.22. állításból és a 7.23. tételből következik az alábbi jellemzés:

7.24. Tétel. *Legyenek H, K valós Hilbert-terek, $A \in B(H)$ és $B \in B(K, H)$, ahol A önadjungált és teljesül (7.6). Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(1) Bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (7.7) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.

(2) $B^* : H \to K$ szuperjektív.

(3) Teljesül a (7.13) inf-sup-feltétel.

Most kiterjesztjük a 7.23. tételt arra az esetre, ha A nem önadjungált. Ehhez szükséges az alábbi

7.25. Lemma. *Ha $A \in B(H)$ koercív operátor, akkor A^{-1} is koercív.*

Bizonyítás. A 7.2. tétel szerint A bijekció, így A^{-1} valóban létezik, és $x = A^{-1}y$ helyettesítéssel

$$\langle A^{-1}y, y \rangle = \langle x, Ax \rangle \geq m\|x\|^2 \geq \frac{m}{\|A\|^2}\|Ax\|^2 = \frac{m}{\|A\|^2}\|y\|^2 \qquad (y \in H). \quad \square$$

7.26. Tétel. *Legyenek H, K valós Hilbert-terek, $A \in B(H)$ és $B \in B(K, H)$, ahol A koercív. Ha fennáll a (7.13) inf-sup-feltétel, akkor bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (7.7) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.*

Bizonyítás. Hasonló a 7.23. tétel bizonyításához. Most is elég megmutatnunk, hogy a (7.10)-ban definiált $S : K \to K$ Schur-féle komplementer-operátor bijekció. Ehhez most a 7.2 tételt használjuk, amihez S koercivitása kell. A 7.25. lemma és 6.21. állítás alapján

$$\langle Sp, p \rangle = \langle B^*A^{-1}Bp, p \rangle = \langle A^{-1}Bp, Bp \rangle \geq \frac{m}{\|A\|^2}\|Bp\|^2 = \frac{m}{\|A\|^2} \sup_{\|z\|=1} \langle Bp, z \rangle^2$$

$$= \frac{m}{\|A\|^2} \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u\rangle^2}{\|u\|^2} \geq \frac{m\gamma^2}{\|A\|^2} \|p\|^2 \qquad (p \in K). \qquad \square$$

7.27. Megjegyzés. A 7.5. tétel miatt a (7.7) feladat megoldása folytonosan függ a jobboldalaktól, hiszen megoldhatóságát az S Schur-operátor koercivitására vezettük vissza. Utóbbi miatt tehát p, majd (7.8) révén u is folytonosan függ a jobboldalaktól.

7.3.2. Bilineáris formákkal megadott nyeregpont-feladatok

Legyenek továbbra is H, K valós Hilbert-terek. Legyenek $\mathcal{A} : H \times H \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{B} : K \times H \to \mathbb{R}$ korlátos bilineáris formák, ahol $\mathcal{A}$ koercív:

$$\mathcal{A}(u, u) \geq m \|u\|^2 \qquad (\forall u \in H), \tag{7.15}$$

legyenek továbbá $\phi : H \to \mathbb{R}$ és $\psi : K \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálok. Tekintsük az alábbi feladatot: keresendő $(u, p) \in H \times K$, melyre

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{B}(p, v) &= \phi v \qquad (\forall v \in H), \\ \mathcal{B}(q, u) \qquad\qquad &= \psi q \qquad (\forall q \in K). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Ennek megoldhatósága közvetlenül visszavezethető az előző szakaszra. A fő tulajdonság most is a megfelelő inf-sup-feltétel:

$$\inf_{p \in K \setminus \{0\}} \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(p, u)}{\|p\|\|u\|} = \gamma > 0. \tag{7.17}$$

7.28. Megjegyzés. A (7.17) inf-sup-feltétel úgy is írható, hogy

$$\inf_{\|p\|=1} \sup_{\|u\|=1} \mathcal{B}(p, u) = \gamma > 0,$$

ami analóg a 7.19. tételbeli (i) feltétellel egy másik, rokon szituációban.

7.29. Tétel. *Legyenek H, K valós Hilbert-terek, $\mathcal{A} : H \times H \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{B} : K \times H \to \mathbb{R}$ korlátos bilineáris formák, ahol $\mathcal{A}$ koercív. Ha fennáll a (7.17) inf-sup-feltétel, akkor bármely $\phi : H \to \mathbb{R}$ és $\psi : K \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálok esetén a (7.16) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása.*

Bizonyítás. A 7.13. tétel és 7.15. megjegyzés alapján legyen $A \in B(H)$ és $B \in B(K, H)$ rendre a $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ forma Riesz-reprezentánsa:

$$\mathcal{A}(u, v) = \langle Au, v\rangle \quad (\forall u, v \in H), \qquad \mathcal{B}(p, v) = \langle Bp, v\rangle \quad (\forall p \in K, v \in H).$$

Legyen továbbá $f \in H$ és $g \in K$ rendre a ϕ és ψ funkcionál Riesz-reprezentánsa:

$$\phi v = \langle f, v\rangle \quad (\forall v \in H), \qquad \psi q = \langle g, q\rangle \quad (\forall q \in K).$$

Ekkor a (7.16) feladat úgy írható, hogy

$$\begin{aligned} \langle Au + Bp,\ v\rangle &= \langle f, v\rangle \qquad (\forall v \in H),\\ \langle Bq, u\rangle &= \langle g, q\rangle \qquad (\forall q \in K), \end{aligned}$$

ami ekvivalens a (7.7) feladattal (a fenti második egyenlőséget $\langle q, B^*u\rangle = \langle q, g\rangle$ alakban írva). A tett feltevések épp azt garantálják, hogy A koercív és B-re teljesül a (7.13) inf-sup-feltétel. Így alkalmazható a 7.26. tétel, tehát feladatunknak létezik egyetlen $(u, p) \in H \times K$ megoldása. □

7.30. Megjegyzés. A 7.27. megjegyzésben elmondottak miatt a (7.16) feladat megoldása is folytonosan függ a jobboldalaktól, hiszen a fenti bizonyításban a (7.7) feladatra vezettük vissza.

8. fejezet

Nem korlátos operátorok

A gyakorlatban természetes módon előforduló differenciáloperátorok gyakran lineárisak ugyan, de nem folytonosak, ha adott térből önmagába képező operátorként vizsgáljuk. (Erre az 1.4. szakaszban láttunk példát, és más esetekben is hasonlóan igazolható.) A megoldhatósági tételek kiterjesztéséhez így a nem korlátos operátorok körében is értelmezünk néhány fontos fogalmat, és megvizsgáljuk néhány minőségileg más tulajdonságukat. Ezek segítségével általánosíthatóak a korábbi megoldhatósági eredmények. Megjegyezzük, hogy a nem korlátos operátoroknak itt csak alaptulajdonságaira van szükségünk; igen kiterjedt, részben fizikai modellek által motivált elméletükről a [54, 59, 60, 62] könyvekben bővebben olvashatunk.

A továbbiakban legyen H Hilbert-tér. Az eredmények (ahol külön nem szólunk róla) valós és komplex esetben is érvényesek.

8.1. Nem korlátos operátorok alaptulajdonságai

A nem korlátos operátorok általában nem az egész téren vannak értelmezve, csak annak egy alterén. A korlátos esetben erről természetes módon meg lehetett adni az egész térre való kiterjesztést (lásd 6.1. megjegyzés), ilyen azonban most nincs. Sőt, az értelmezési tartomány fontos szerepet játszik az operátor tulajdonságaiban.

8.1. Definíció. Ha $D(A) \subset D(B)$ és B kiterjesztése A-nak, akkor azt írjuk, hogy $A \subset B$.

Az értelmezési tartományok fontos esete az alábbi:

8.2. Definíció. Egy $A : H \supset\!\!\to H$ lineáris operátor sűrűn definiált, ha $D(A)$ sűrű H-ban.

8.1.1. Szimmetrikus és önadjungált operátorok

8.3. Definíció. Egy $A : H \supset\!\!\to H$ lineáris operátor szimmetrikus, ha $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ teljesül minden $x, y \in D(A)$ esetén.

Szimmetrikus operátorok számos esetben előfordulnak. Ilyenek például az elliptikus differenciáloperátorok, melyek egy osztályát a 8.1.2 szakaszban ismertetjük, ill. a kvantummechanikában a megfigyelhető mennyiségeket reprezentáló operátorok (sőt, utóbbiak önadjungáltak). A következő tétel szerint egy nem korlátos szimmetrikus operátor nem lehet az egész téren értelmezett operátor. Ez is jelzi, hogy nem korlátos operátorok esetén természetes (az operátorokhoz hozzátartozó) tulajdonság az, hogy csak altéren értelmezzük.

8.4. Tétel (Hellinger–Toeplitz). *Legyen $A : H \to H$ lineáris operátor, $D(A) = H$ és $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ minden $x, y \in H$ esetén. Ekkor $A \in B(H)$.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a $\Gamma(A)$ gráf zárt. Legyen $(x_n) \subset H$, $x_n \to x$ és $Ax_n \to y$. A skalárszorzás folytonossága miatt minden $z \in H$ esetén

$$\langle z, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, Ax_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Az, x_n\rangle = \langle Az, x\rangle = \langle z, Ax\rangle ,$$

azaz $\langle z, y - Ax\rangle = 0$ minden $z \in H$ esetén, amiből következik, hogy $y = Ax$. Tehát a zártgráf-tétel szerint A folytonos. $\square$

Szimmetrikus operátorra is igaz, amit csak önadjungáltra mondtunk ki, nevezetesen, a korábbi bizonyítás szó szerinti megismétlésével kapjuk:

8.5. Állítás. *Ha H komplex Hilbert-tér, akkor*

$$A : H \supset\!\!\to H \text{ szimmetrikus} \iff \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D(A) \text{ esetén.}$$

A folytonos esethez teljesen analóg módon definiálhatók a pozitív operátorok:

8.6. Definíció. Egy $A : H \supset\!\!\to H$ szimmetrikus operátor

- *pozitív*, ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in D(A)$,
- *szigorúan pozitív*, ha $\langle Ax, x\rangle > 0 \ \forall x \in D(A), \ x \neq 0$,
- *egyenletesen pozitív*, ha létezik $m > 0$, hogy $\langle Ax, x\rangle \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in D(A)$.

Komplex térben nem kell előre feltenni, hogy A szimmetrikus, mivel a 8.5. állítás miatt ez automatikusan fennáll, valós térben viszont a szimmetriát beleértjük a (szigorú/egyenletes) pozitivitás fogalmába. Ugyanúgy járunk tehát el, mint a korlátos esetben a 7. fejezet elején.

8.7. Állítás. *Egy injektív szimmetrikus operátor inverze is szimmetrikus.*

Bizonyítás. Ha $u, v \in R(A)$, akkor létezik $x, y \in D(A)$, hogy $Ax = u$ és $Ay = v$. Ekkor

$$\left\langle A^{-1}u, v\right\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = \left\langle u, A^{-1}v\right\rangle . \qquad \square$$

Következő célunk az adjungált fogalmának értelmezése nem korlátos esetre. Azaz, adott A operátorhoz olyan A^* operátort keresünk, melyre

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad (\forall x \in D(A),\ y \in D(A^*)) \tag{8.1}$$

és A^* értelmezési tartománya a lehető legbővebb. Ezt az alábbi definíció teljesíti:

8.8. Definíció. Legyen $A : H \supset\!\!\!\to H$ sűrűn definiált operátor. Ekkor A *adjungáltja* az az operátor, melyre

(i) $D(A^*) := \{y \in H :\ \exists\, y^* \in H,$ hogy $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle\ \ \forall\, x \in D(A)\}$, és

(ii) $A^*y := y^* \quad (\forall y \in D(A^*))$.

Az adjungált operátor jóldefiniált, ugyanis ha $y \in D(A^*)$-hoz tartozna egy y_1^* és egy y_2^* is, akkor minden $x \in D(A)$ esetén $\langle x, y_1^*\rangle = \langle x, y_2^*\rangle$ teljesülne, ami $D(A)$ sűrűsége miatt azt jelenti, hogy $y_1^* = y_2^*$.

8.9. Megjegyzés. $D(A^*)$ a legbővebb olyan halmaz, amelyen az adjungált (8.1) definíciós egyenlősége teljesül. Ez valójában megegyezik azon $y \in H$ vektorok halmazával, melyekre az $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ lineáris funkcionál korlátos, azaz melyekre létezik olyan $m_y \geq 0$, hogy $|\langle Ax, y\rangle| \leq m_y\|x\|$ $(\forall x \in H)$. Az utóbbi elvben ellenőrizhető feltétel (szemben a nemkonstruktív definícióval).

8.10. Definíció. Az $A : H \supset\!\!\!\to H$ operátor *önadjungált*, ha $A = A^*$.

8.11. Állítás. *Egy $A : H \supset\!\!\!\to H$ sűrűn definiált operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha $A \subset A^*$.*

Bizonyítás. A szimmetria azt jelenti, hogy $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ teljesül minden $x, y \in D(A)$ esetén. Ez viszont azt jelenti, hogy $y \in D(A^*)$, mert Ay jó lesz y^*-nak. Más szóval $D(A) \subset D(A^*)$ és $A^*y = y^* = Ay$, azaz $A \subset A^*$. $\square$

8.12. Állítás. *Legyen $A : H \supset\!\!\to H$ sűrűn definiált, szimmetrikus és szuperjektív. Ekkor A önadjungált.*

Bizonyítás. Elég, ha belátjuk, hogy $A^* \subset A$, ennek fordított irányát ugyanis már tudjuk. Legyen $y \in D(A^*)$, kell, hogy $y \in D(A)$ szintén teljesül. Mivel A szuperjektív, létezik $x \in D(A)$, hogy $Ax = A^*y$. Ekkor minden $z \in D(A)$ esetén $\langle Ax, z\rangle = \langle A^*y, z\rangle$ is teljesül, így a szimmetria miatt

$$\langle x, Az\rangle = \langle Ax, z\rangle = \langle A^*y, z\rangle = \langle y, Az\rangle \iff \langle x - y, Az\rangle = 0$$

teljesül minden $z \in D(A)$ esetén. Itt Az befutja H-t, így $y = x \in D(A)$. $\square$

A fenti bizonyításból mellesleg az is kijött, hogy A injektív. Legyenek $x_1, x_2 \in D(A) \subset D(A^*)$, ekkor $A^*x_1 = Ax_1$, ill. ha $Ax_1 = Ax_2$, azaz $A^*x_1 = Ax_2$, akkor a bizonyítottak szerint $x_1 = x_2$.

8.13. Állítás. *Legyen $A : H \supset\!\!\to H$ sűrűn definiált lineáris operátor. Ekkor* $\ker(A^*) = R(A)^\perp$.

Bizonyítás. $y \in R(A)^\perp \iff \langle Ax, y\rangle = 0$ minden $x \in D(A)$ esetén. Ez $y^* := 0$ választásssal pontosan azt jelenti, hogy $\langle Ax, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ minden $x \in D(A)$ esetén $\iff y \in D(A^*)$ és $A^*y = y^* = 0 \iff y \in \ker(A^*)$. $\square$

8.14. Következmény. *Ha egy $A : H \supset\!\!\to H$ sűrűn definiált lineáris operátor szimmetrikus, akkor* $\ker(A) \subset R(A)^\perp$.

Bizonyítás. Az 8.11. állítás szerint $A \subset A^*$. Ezt az előző állítással kombinálva kapjuk, hogy $\ker(A) \subset \ker(A^*) = R(A)^\perp$. $\square$

Ebből következik, hogy ha egy szimmetrikus operátor nem injektív, akkor szuperjektív sem lehet, sőt a képtér sűrű sem lehet H-ban.

8.15. Állítás. *Ha egy $A : H \supset\!\!\to H$ operátor egyenletesen pozitív $m > 0$ konstanssal, valamint A szuperjektív, akkor $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{m}$.*

Bizonyítás. Mivel A injektív, a feltétel miatt bijekció, azaz létezik $A^{-1} : H \to H$. Így megismételhető a 7.9. állítás bizonyítása. $\square$

Példa szimmetrikus operátorra. Legyen $H = L^2(\mathbb{R})$ és $Au = iu'$, ahol $D(A) := C_0^1(\mathbb{R})$ a kompakt tartójú $u \in C^1(\mathbb{R})$ függvényekből áll, azaz melyek egy kompakt halmazon kívül azonosan nullák. Ekkor

$$\langle Au, v\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} iu'\overline{v} = i\Big[u\overline{v}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - i\int_{-\infty}^{+\infty} u\overline{v}' = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\overline{iv'}) = \langle u, Av\rangle$$

$$(\forall u, v \in C_0^1(\mathbb{R})),$$

azaz A szimmetrikus.
Ez az A nevezetes operátor. Legyen ugyanis $M : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $Mu := id \cdot u$, azaz $(Mu)(x) = xu(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Ekkor

$$AMu - MAu = i(id \cdot u)' - id \cdot iu' = iu$$

$$(\forall u \in D(A)),$$

azaz A és M teljesíti a kvantummechanikában alapvető

$$AM - MA = iI$$

Heisenberg-féle felcserélési relációt. (Sőt, igazolható, hogy lényegében, azaz unitér transzformáció erejéig csak ezek az operátorok teljesíthetik, lásd [42, Chap. 35].)

8.1.2. Elliptikus operátorok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in C^1(\Omega)$, $p(x) \geq m > 0$, $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Peremértékfeladat alatt egy

$$\begin{cases} Lu \equiv -\operatorname{div}(p\,\nabla u) = f, \\ +\ \text{peremfeltétel} \end{cases} \tag{8.2}$$

típusú egyenletet értünk, ahol a peremfeltétel az alábbi három lehetőség valamelyike:

1. $u_{|\partial\Omega} = 0$ (Dirichlet-peremfeltétel),
2. $\partial_\nu u_{|\partial\Omega} = 0$ (Neumann-peremfeltétel),
3. $g\,\partial_\nu u + hu_{|\partial\Omega} = 0$, ahol $g, h \geq 0$, $g^2 + h^2 \neq 0$ (Robin-peremfeltétel).

(Az L operátor most egyszerűség kedvéért nem tartalmaz alacsonyabbrendű tagot.)

A számítások alapja legtöbbször a nevezetes

8.16. Tétel (Green-formula). [67] *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melyre $\partial\Omega \in PC^1$, és $p \in C^1(\overline{\Omega})$. Legyen L a következő differenciáloperátor: $Lu = -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$. Ekkor minden $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v \in C^1(\overline{\Omega})$ függvényre érvényes:*

$$\int_\Omega (Lu)\,\overline{v} = \int_\Omega p\ \nabla u \cdot \nabla \overline{v} - \int_{\partial\Omega} p\ \partial_\nu u\,\overline{v}\ d\sigma. \tag{8.3}$$

8.17. Állítás. *Legyen* $H = L^2(\Omega)$, *és legyen az* $Lu := -\,div(p\,\nabla u)$ *operátor értelmezési tartománya*

1. $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) :\ u_{|\partial\Omega} = 0\}$, *vagy*
2. $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) :\ \partial_\nu u_{|\partial\Omega} = 0\}$.

Mindkét esetben L *szimmetrikus és pozitív operátor, sőt az* 1. *esetben szigorúan pozitív is.*

Bizonyítás. A Green-formula alapján bármely $u \in D(L)$ esetén

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (Lu)\overline{u} = \int_\Omega p\,|\nabla u|^2 - \underbrace{\int_{\partial\Omega} p\,\partial_\nu u\,\overline{u}}_{0} \geq 0.$$

Ha $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$, akkor $\nabla u = 0$, azaz $u \equiv c$. Az első peremfeltétel esetén ebből az is következik, hogy $u \equiv 0$. □

Most példákat adunk szimmetrikus/önadjungált operátorokra, ill. adjungáltra.

1. példa: *közönséges differenciáloperátorok.* Legyen mindvégig $I = [a, b]$, $H = L^2(I)$.

(i) Legyen $Lu := -u''$. Ha $D(L) := H^2(I) \cap H_0^1(I) = \{u \in H^2(I) : u(a) = u(b) = 0\}$, akkor L önadjungált operátor $L^2(I)$-ben.

Itt $D(L)$ sűrű részhalmaza H-nak. A 8.12. állítás szerint elég megmutatnunk, hogy L szimmetrikus és szuperjektív. A definíció alapján az értelmezési tartomány elemei olyan $u \in C^1(I)$ függvények, melyekre u' m. m. differenciálható, $u'' \in L^2(I)$ és $u(a) = u(b) = 0$. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(I)} = -\int_a^b u''\overline{u} = \underbrace{\left[-u' \cdot \overline{u}\right]_a^b}_{0} + \int_a^b |u'|^2 \geq 0.$$

(A 8.17. állítás az $n = 1$, $p \equiv 1$ speciális esetben ugyanezt adja, de csak C^2-beli u esetén.) Így L pozitív (és ezért szimmetrikus) operátor. Legyen most $f \in L^2(I)$ tetszőleges. Kell, hogy létezik $u \in D(L)$, melyre $Lu = f$, azaz megoldandó a $-u'' = f$ egyenlet. Legyen $F(t) := \int_a^t f$, ekkor $F \in H^1(I)$. Kétszer integrálva

$$u(x) = -\int_a^x F + cx + d,$$

ahol $u \in H^2(I)$. A c és d konstansok az $u(a) = u(b) = 0$ peremfeltételekből egyértelműen meghatározhatók. Tehát L szuperjektív, amiből következően önadjungált is.

(ii) Legyen $Lu := -(pu')'$, ahol $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $p(x) \geq m > 0$. Ha $D(L) := H^2(I) \cap H_0^1(I)$, akkor L önadjungált operátor $L^2(I)$-ben.

Ez az előző példa általánosítása, hasonlóan adódik.

(iii) Legyen $Lu := -(pu')'$, ahol $p \in C^1(I, \mathbb{C})$. Legyen $D(L) := H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Ekkor $L^*v = -(\overline{p}v')'$ $(v \in H^2(I) \cap H_0^1(I))$.

Ugyanis, ha $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$, akkor

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(I)} = \int_a^b \left(-(pu')'\right)\overline{v} = \int_a^b u\left(-\overline{(\overline{p}v')'}\right) \tag{8.4}$$

$$(\forall v \in H^2(I) \cap H_0^1(I)).$$

(iv) Legyen $Lu := -(pu')'$, és újból $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $p(x) \geq m > 0$, de most $D(L) = \{u \in C^2(I) : u(a) = u(b) = 0\}$. Ekkor minden $u \in D(L)$-re és minden $v \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$-re teljesül (8.4) (ahol p fölött nem kell konjugált), így $L^*v = -(pv')'$ $(\forall v \in H^2(I) \cap H_0^1(I))$. Ez azt jelenti, hogy $L \subsetneq L^*$, azaz L szimmetrikus, de nem önadjungált.

Teljesen hasonlók igazolhatóak magasabb dimenzióban:

2. példa: *parciális differenciáloperátorok.* Legyen mindvégig $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amely egy konvex tartomány C^2-diffeomorf képe, és $H = L^2(\Omega)$. Legyen $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$.

(i) Ha $p \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $p(x) \geq m > 0$ és $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, akkor L szimmetrikus és szuperjektív, így önadjungált is.

(ii) Ha $p \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ és $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, akkor $L^*v = -\operatorname{div}(\overline{p} \cdot \nabla v)$.

(iii) Ha pedig $p \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $p(x) \geq m > 0$, $D(L) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$, akkor L szimmetrikus, de nem önadjungált.

8.1.3. Sajátértékek, kompakt inverzű operátorok

8.18. Definíció. Legyen $A : H \supset\!\to H$ lineáris operátor. A $\lambda \in \mathbb{C}$ szám sajátértéke A-nak, ha létezik $0 \neq u \in D(A)$, hogy $Au = \lambda u$.

A korlátos önadjungált esetre vonatkozó tétel bizonyításának megismétlésével kapjuk:

8.19. Állítás. *Ha $A : H \supset\to H$ szimmetrikus lineáris operátor, akkor a sajátértékei valósak és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.*

8.20. Állítás. *Legyen $A : H \supset\to H$ lineáris operátor, amely injektív. Ekkor $\lambda \in Eig(A) \iff 1/\lambda \in Eig(A^{-1})$, és ugyanazon sajátvektorok tartoznak hozzájuk.*

Bizonyítás. Az injektivitás miatt $\lambda \neq 0$. Ekkor

$$Au = \lambda u \iff \frac{1}{\lambda}u = A^{-1}u. \qquad \square$$

A következő tétel a kompakt önadjungált operátorok főtételéből és a fenti állításból következik.

8.21. Tétel. *Legyen H szeparábilis és $A : H \supset\to H$ lineáris operátor, amely injektív, szimmetrikus és $R(A) = H$. Ezenkívül legyen $A^{-1} : H \to H$ kompakt. Ekkor A-nak megszámlálhatóan sok sajátértéke van, melyek valósak, $+\infty$-hez tartanak és a normált sajátvektorokból teljes ortonormált rendszer (TONR) alkotható.*

Példák. (a) Ha $I = [0, b]$, $H = L^2(I)$, $Lu = -u''$, $D(L) = \{u \in C^2(I) : u(0) = u(b) = 0\}$, akkor L inverze a Green-függvényt tartalmazó folytonos magú integráloperátor, amely a 6.75. állítás szerint kompakt. Így L-re igaz a 8.21. tétel. Valójában itt L sajátértékei és (normált) sajátvektorai expliciten is ismertek:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2, \qquad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{b}x\right) \qquad (k \in \mathbb{N}^+). \tag{8.5}$$

(b) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amely egy konvex tartomány C^2-diffeomorf képe, és $H = L^2(\Omega)$. Legyen $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$, $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Az előző szakaszban láttuk, hogy L szimmetrikus, injektív (hiszen szigorúan pozitív), $R(L) = L^2(\Omega) = H$. Ezenkívül az is teljesül, hogy L^{-1} kompakt. (Ez következik [67, 9.3.]-ból, mert az ottani G operátor esetünkben éppen L^{-1}.) Így L-re igaz a 8.21. tétel.
Ha speciálisan $L = -\Delta$ és $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, akkor L sajátértékei és (normált) sajátvektorai ismertek:

$$\lambda_{kl} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right), \qquad u_{kl}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \qquad (k, l \in \mathbb{N}^+).$$

Alkalmazások.

(a) Hilbert–Schmidt sorfejtés. A sajátvektorok TONR volta segítségével az $Au = f$ egyenlet megoldása felírható a sajátvektorok szerinti sorfejtéssel. Éspedig, ha (e_k) a normált sajátvektorok rendszere, akkor

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \qquad u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k.$$

Ekkor az u ismeretlen függvény ξ_k együtthatókra a

$$c_k = \langle f, e_k \rangle = \langle Au, e_k \rangle = \langle u, Ae_k \rangle = \lambda_k \langle u, e_k \rangle = \lambda_k \xi_k$$

egyenletből adódik, hogy

$$\xi_k = \frac{c_k}{\lambda_k}.$$

(b) Az első sajátérték variációs tulajdonsága.

8.22. Állítás. *Legyen H szeparábilis és $A : H \supset\!\!\to H$ szigorúan pozitív operátor, melyre $R(A) = H$ és A^{-1} kompakt. Ekkor*

$$\langle Au, u \rangle \geq \lambda_1 \|u\|^2 \qquad (u \in D(A))$$

(ahol $\lambda_1 = \lambda_1(A)$ a legkisebb sajátérték), azaz A egyenletesen pozitív is.

Bizonyítás. A feltétel szerint A normált $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sajátvektorai TONR-t alkotnak. Az előző bizonyításban láttuk, hogy $\langle Au, e_k \rangle = \lambda_k \xi_k$, ebből

$$\langle Au, u \rangle = \left\langle Au, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\xi}_k \langle Au, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\xi_k|^2 \geq$$

$$\geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = \lambda_1 \|u\|^2 . \qquad \square$$

A tételből következik, hogy minden $u \in D(A) \setminus \{0\}$ esetén

$$\lambda_1 \leq \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2} \equiv \varrho(u),$$

sőt, mivel $u = e_1$ esetén egyenlőség van, ezért

$$\lambda_1 = \min_{u \in D(A)\setminus\{0\}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2}. \tag{8.6}$$

A $\varrho(u)$ kifejezést az u-hoz tartozó Rayleigh-hányadosnak nevezzük.

(c) Operátorfüggvények

Kompakt inverzű operátor esetén adaptálható az operátorfüggvények 6.100. definíciója:

8.23. Definíció. *Legyen H szeparábilis és $A : H \supset\to H$ szigorúan pozitív operátor, melyre $R(A) = H$ és A^{-1} kompakt. Jelölje (λ_n) és (e_n) a sajátértékek és megfelelő sajátvektorok sorozatát. Ekkor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény esetén legyen $f(A) : H \supset\to H$ az az operátor, melyre*

$$D(f(A)) := \Big\{x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H : \ \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)c_n|^2 < \infty\Big\},$$

$$f(A)x := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)c_n e_n.$$

Legyen például $\alpha > 0$ szám és $f(x) := e^{-\alpha x}$. Ekkor bármely $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-\alpha\lambda_n} c_n|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2 < \infty,$$

mivel $\lambda_n > 0$ miatt $e^{-\alpha\lambda_n} < 1$. Így

$$D(e^{-\alpha A}) = H, \qquad e^{-\alpha A}x := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha\lambda_n} c_n e_n. \tag{8.7}$$

(Az $f(A)$ tehát lehet bővebben értelmezve, mint A.)
A korlátos esethez hasonlóan a függvényműveletek megőrződnek a megfelelő operátorokra (most a megfelelő értelmezési tartomány erejéig). Például, ha $\alpha, \beta > 0$ számok, akkor (8.7) alapján

$$e^{-(\alpha+\beta)A} = e^{-\alpha A}e^{-\beta A}.$$

8.2. Energiatér és gyenge megoldás szimmetrikus operátor esetén

8.24. Definíció. Legyen $A : H \supset\to H$ szigorúan pozitív operátor. Az $\langle u, v\rangle_A := \langle Au, v\rangle$ formát az A-hoz tartozó *energia-skalárszorzatnak* nevezzük, az A-hoz tartozó *energiatér* pedig $H_A := [D(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A]$, azaz $D(A)$ teljessé tétele az energia-skalárszorzattal.

Ha speciálisan A egyenletesen pozitív, azaz A szimmetrikus és $A \geq p\,I$ valamilyen $p > 0$ számra, akkor

$$\|u\|_A^2 = \langle u, u\rangle_A = \langle Au, u\rangle \geq p\,\|u\|^2 \quad \forall\, u \in D(A).$$

8.25. Állítás. *Ha A egyenletesen pozitív, akkor $H_A \subset H$, azaz H_A azonosítás erejéig beágyazható H-ba.*

Bizonyítás. Legyen $u \in H_A$, ekkor H_A definíciója szerint létezik $(u_n) \subset D(A)$ sorozat, melyre $\|u - u_n\|_A \to 0$. Ekkor (u_n) Cauchy-sorozat $\|\cdot\|_A$-ban. Az egyenletes pozitivitás miatt

$$\|u_n - u_m\| \leq \frac{1}{\sqrt{p}}\,\|u_n - u_m\|_A\,,$$

azaz (u_n) Cauchy-sorozat $\|\cdot\|$-ban is, azaz létezik $\tilde{u} \in H$, hogy $u_n \to \tilde{u}$ $\|\cdot\|$-ban. Megmutatjuk, hogy a $\psi : u \mapsto \tilde{u}$ hozzárendelés injektív. Mivel ψ lineáris, így elég belátni, hogy ha $\tilde{u} = 0$, akkor $u = 0$. Tekintsük $\tilde{u} = 0$ esetén a fenti (u_n) sorozatot. Ekkor, felhasználva, hogy $u_n \to \tilde{u}$ $\|\cdot\|$-ban és $u_n \to u$ $\|\cdot\|_A$-ban,

$$0 = \langle \tilde{u}, Av\rangle = \lim\langle u_n, Av\rangle = \lim\langle u_n, v\rangle_A = \langle u, v\rangle_A \qquad (\forall v \in D(A)),$$

azaz u merőleges a H_A-ban sűrű $D(A)$ halmazra, így $u = 0$. Így tehát ψ injektív, azaz bijekciót létesít H_A és H egy részhalmaza között. □

8.26. Következmény. *Ha $A \geq p\,I$, akkor az*

$$\|u\|_A^2 \geq p\,\|u\|^2 \tag{8.8}$$

becslés minden $u \in H_A$ esetén is fennáll.

Bizonyítás. Vegyünk egy $u_n \to u$ $D(A)$-beli sorozatot, ahol a konvergencia $\|\cdot\|_A$ szerint értendő. Az előzőek szerint $\|\cdot\|$ szerint is igaz a konvergencia. Az $\|u_n\|_A^2 \geq p\,\|u_n\|^2$ egyenlőtlenségből határátmenettel következik a kívánt $\|u\|_A^2 \geq p\,\|u\|^2$ egyenlőtlenség. (Ezt a gondolatmenetet sűrűségi érvnek szoktuk hívni, és a későbbiekben is többször használjuk.) □

8.27. Állítás. *Ha A egyenletesen pozitív, $R(A) = H$ és A^{-1} kompakt, akkor a (8.8) becslésben az éles p határ az A operátor λ_1 legkisebb sajátértéke. Azaz,*

$$\|u\|_A^2 \geq \lambda_1\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H_A) \tag{8.9}$$

és ez a konstans nem javítható.

Bizonyítás. A 8.22. állítás és (8.6) szerint a fenti igaz $u \in D(A)$ esetén, és így (a 8.26. következménybeli sűrűségi érvet megismételve) $u \in H_A$ esetén is. □

Példa. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta$, ahol $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ekkor

$$\langle u, v\rangle_A = -\int_\Omega (\Delta u)\, \overline{v} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v} = \langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}\,,$$

vagyis a Laplace-operátor energiatere $H_0^1(\Omega)$.

Emellett a 8.27. állítás alapján kapjuk az ún. *Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenséget*:

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_1 \, \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (\forall u \in H_0^1(\Omega)), \tag{8.10}$$

ahol λ_1 a $-\Delta$ operátor legkisebb sajátértéke Ω-n Dirichlet-peremfeltétel mellett. Itt említést érdemel λ_1 egyszerű becslése:

$$\lambda_1 \geq \frac{n\pi^2}{diam(\Omega)^2}, \tag{8.11}$$

ahol n a tér dimenziója és $diam(\Omega)$ a tartomány átmérője, lásd [67].

Ha ugyanitt az operátor a 8.1.2. szakasz elején bevezetett $Au := -\operatorname{div}(p\, \nabla u)$, akkor az energiatér szintén $H_0^1(\Omega)$, most a súlyozott

$$\langle u, v\rangle_A = \int_\Omega p\ \nabla u \cdot \nabla \overline{v}$$

skalárszorzattal.

Ha A egyenletesen pozitív, akkor értelmezhető operátoregyenlet gyenge megoldásának fogalma az elliptikus feladatoknál megszokottak analógiájára:

8.28. Definíció. Legyen $f \in H$ adott vektor. Az $u \in H_A$ vektor az $Au = f$ feladat *gyenge megoldása*, ha

$$\langle u, v\rangle_A = \langle f, v\rangle \qquad (\forall\ v \in H_A). \tag{8.12}$$

Világos, hogy $u \in D(A)$ esetén a gyenge megoldás teljesíti az $Au = f$ egyenlőséget, így ennek általánosításáról van szó az $f \notin R(A)$ esetre.

8.29. Tétel. *Ha A egyenletesen pozitív, akkor minden $f \in H$ esetén az $Au = f$ egyenletnek egyértelműen létezik $u \in H_A$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Legyen $\phi : H_A \to \mathbb{C}$, $\phi v := \langle v, f \rangle$ lineáris funkcionál. Ekkor a

$$|\phi v| = |\langle v, f \rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \|f\| \, \|v\|_A \qquad (\forall\ v \in H_A)$$

becslés miatt ϕ korlátos is H_A-ban. Riesz reprezentációs tétele szerint egyértelműen létezik $u \in H_A$, hogy $\phi v = \langle v, f \rangle = \langle v, u \rangle_A$, ezt konjugálva megkapjuk (8.12)-t. □

8.30. Megjegyzés. Az $Au = f$ egyenlet gyenge megoldására az

$$\|u\|_A \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \|f\|$$

folytonos függés teljesül, hiszen (8.12)-ben $v = u$ helyettesítéssel, majd a (8.8) becslés alapján

$$\|u\|_A^2 = \langle u, u \rangle_A = \langle f, u \rangle \leq \|f\| \|u\| \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \|f\| \|u\|_A.$$

Fontos példaként szolgál ismét a Laplace-operátor. Erre a fenti tétel a $H_0^1(\Omega)$ térben szokásos értelemben vett gyenge megoldást adja, mellyel a 10.2.2 szakaszban foglalkozunk.

A gyenge megoldás egy szép elméleti alkalmazásaként kapjuk az ún. Friedrichs-féle kiterjesztést. Itt az alapprobléma az, hogy egy szimmetrikus operátornak van-e önadjungált kiterjesztése. Ez általában nem igaz, de egyenletesen pozitív esetre igen, és egyszerűen következik a fentiekből:

8.31. Állítás. *Ha az A szimmetrikus operátor egyenletesen pozitív, akkor van $\tilde{A}$ önadjungált kiterjesztése. Erre $R(\tilde{A}) = H$.*

Bizonyítás. A 8.12. lemma alapján elég igazolnunk, hogy A-nak van szuperjektív, szintén szimmetrikus kiterjesztése. Legyen $\tilde{A} : H \supset\!\!\to H$ a következő: $D(\tilde{A}) := \{u \in H_A \subset H :\ \exists f \in H$, hogy u az $Au = f$ egyenlet gyenge megoldása, $\tilde{A}u := f$. Ekkor a 8.29. tétel szerint $\tilde{A}$ szuperjektív. Másrészt a gyenge megoldás fogalma alapján $\langle \tilde{A}u, v \rangle = \langle f, v \rangle = \langle u, v \rangle_A$ $(\forall u, v \in D(\tilde{A}))$, így $\langle \tilde{A}u, v \rangle = \langle u, v \rangle_A = \overline{\langle v, u \rangle_A} = \overline{\langle \tilde{A}v, u \rangle} = \langle u, \tilde{A}v \rangle$, azaz $\tilde{A}$ is szimmetrikus. □

8.3. Gyenge megoldás nem szimmetrikus operátor vagy nyeregpont-feladat esetén

A szimmetrikus operátor energiatere segítségével két további feladatra értelmezzük a gyenge megoldást, valamint bizonyítjuk létezését és egyértelműségét.

8.3.1. Nem szimmetrikus operátor esete

Legyen ismét H valós Hilbert-tér, és tekintsük az

$$Lu = g \tag{8.13}$$

operátoregyenletet, ahol $L : H \supset\!\!\to H$ nem szimmetrikus, nem korlátos operátor. Szeretnénk ismét értelmezni a gyenge megoldás fogalmát a $g \notin R(L)$ esetre, de most L nem generál energia-skalárszorzatot, mivel nem szimmetrikus. Így a feladatot egy alkalmas másik S operátor energiaterére vezetjük vissza, ahol S már szimmetrikus. Ez a felépítés és alkalmazásai [6]-ból származnak.

8.32. Definíció. Legyen $S : H \supset\!\!\to H$ egyenletesen pozitív operátor. Azt mondjuk, hogy az $L : H \supset\!\!\to H$ lineáris operátor *S-korlátos és S-koercív*, ha

(i) $D(L) \subset H_S$ és $D(L)$ sűrű H_S-ben (az energianormában);

(ii) létezik $M > 0$ állandó, hogy

$$|\langle Lu, v\rangle| \le M\|u\|_S\|v\|_S \qquad (\forall u, v \in D(L));$$

(iii) létezik $m > 0$ állandó, hogy

$$\langle Lu, u\rangle \ge m\|u\|_S^2 \qquad (\forall u \in D(L)).$$

8.33. Definíció. Legyen $L : H \supset\!\!\to H$ S-korlátos és S-koercív. Ekkor $L_S \in B(H_S)$ az a korlátos lineáris operátor a H_S téren, melyre

$$\langle L_S u, v\rangle_S = \langle Lu, v\rangle \qquad (\forall u, v \in D(L)).$$

8.34. Állítás. *Az L_S operátor jóldefiniált.*

Bizonyítás. Az $u, v \mapsto \langle Lu, v\rangle$ bilineáris forma folytonos a H_S-normára nézve a 8.32. definíció (ii) pontja szerint, így egyértelműen kiterjeszthető H_S-re a folytonosság (és az M korlát) megtartásával. A kiterjesztett formának a 7.13. tétel által megadott Riesz-reprezentánsa épp az L_S operátor lesz. □

8.35. Megjegyzés. (a) Mivel $D(L)$ sűrű H_S-ben, a 8.32. definíció (ii) és (iii) pontja öröklődik az L_S operátorra:

$$|\langle L_S u, v\rangle_S| \leq M\|u\|_S\|v\|_S, \qquad \langle L_S u, u\rangle_S \geq m\|u\|_S^2 \qquad (u, v \in H_S). \tag{8.14}$$

Utóbbi szerint tehát L_S koercív a H_S téren.

(b) Ha $R(L) \subset R(S)$, akkor az L_S operátor $D(L)$-re vett leszűkítése felbontható az alábbi módon:

$$L_S\big|_{D(L)} = S^{-1}L. \tag{8.15}$$

Ekkor ugyanis a $D(L)$ sűrű altérre nézve

$$\langle L_S u, v\rangle_S = \langle Lu, v\rangle = \langle SS^{-1}Lu, v\rangle = \langle S^{-1}Lu, v\rangle_S \qquad (\forall u, v \in D(L)).$$

(Megjegyezzük, hogy itt az $R(L) \subset R(S)$ feltétel nem nagy megszorítás, mert a 8.31. állítás szerint vehetjük S helyett a Friedrichs-kiterjesztését, amelyre $R(\tilde{S}) = H$.)

8.36. Definíció. Legyen $L : H \supset\!\!\to H$ S-korlátos és S-koercív. Az $u \in H_S$ vektor a (8.13) egyenlet *gyenge megoldása*, ha

$$\langle L_S u, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (\forall v \in H_S). \tag{8.16}$$

8.37. Tétel. *Bármely $g \in H$ esetén az (8.13) egyenletnek egyértelműen létezik gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Legyen

$$B(u, v) := \langle L_S u, v\rangle_S \quad \text{és} \quad \phi v := \langle g, v\rangle \qquad (\forall u, v \in H_S).$$

Ekkor (8.14) alapján $B : H_S \times H_S \to \mathbb{R}$ korlátos és koercív bilineáris forma, ill. a 8.29. tétel bizonyításával megegyező módon $\phi : H_S \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál. Így alkalmazhatjuk a 7.16. tételt (Lax–Milgram-lemma). □

8.38. Megjegyzés. Világos, hogy $u \in D(L)$ esetén a gyenge megoldás teljesíti az $Lu = g$ egyenlőséget, így ennek általánosításáról van szó a $g \notin R(L)$ esetre.

8.39. Megjegyzés. E szakaszban foglaltak komplex térben is érvényesek, ekkor az S-koercivitásnál a 8.32. definíció (iii) pontját értelemszerűen a

$$Re\, \langle Lu, u\rangle \geq m\|u\|_S^2 \qquad (\forall u \in D(L))$$

feltétellel helyettesítjük.

8.3.2. Nyeregpont-feladat esete

Tekintsük a (7.7) rendszer megfelelőjét nem korlátos operátorokkal:

$$\begin{cases} Su + Np = f \\ N^*u \qquad = g, \end{cases} \tag{8.17}$$

ahol H, K valós Hilbert-terek, $S : H \supset\!\!\rightarrow H$ és $N : K \supset\!\!\rightarrow H$ sűrűn definiált operátorok, valamint S szimmetrikus és egyenletesen pozitív. Tegyük fel még, hogy $D(N^*) \supset H_S$, ahol H_S az S energiatere. A (8.17) feladathoz tartozó inf-sup-feltételt az S-normára nézve írjuk elő:

$$\inf_{p\in D(N)\setminus\{0\}} \sup_{u\in H_S\setminus\{0\}} \frac{\langle Np, u\rangle}{\|p\|\|u\|_S} = \gamma > 0. \tag{8.18}$$

Értelmezzük a gyenge megoldás fogalmát! Tegyük fel először, hogy (u, p) erős megoldás (azaz $u \in D(S) \cap D(N^*)$, $p \in D(N)$) és szorozzuk be az első, ill. második egyenletet tetszőleges $v \in H$, ill $q \in K$ vektorral:

$$\begin{cases} \langle Su, v\rangle + \langle Np, v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad (\forall v \in H), \\ \langle N^*u, q\rangle \qquad\qquad = \langle g, q\rangle \qquad (\forall q \in K). \end{cases}$$

A $D(N^*) \supset H_S$ feltevés miatt itt $v \in H_S$ esetén $\langle Np, v\rangle = \langle p, N^*v\rangle$. Ez alapján bevezethető:

8.40. Definíció. Az $(u, p) \in H_S \times K$ pár a (8.17) feladat gyenge megoldása, ha

$$\begin{cases} \langle u, v\rangle_S + \langle p, N^*v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad (\forall v \in H_S), \\ \langle N^*u, q\rangle \qquad\qquad = \langle g, q\rangle \qquad (\forall q \in K). \end{cases} \tag{8.19}$$

8.41. Tétel. *Legyenek H, K valós Hilbert-terek, $S : H \supset\!\!\rightarrow H$ és $N : K \supset\!\!\rightarrow H$, ahol S szimmetrikus és egyenletesen pozitív. Tegyük fel még, hogy $D(N^*) \supset H_S$ és $N^* : H_S \to K$ korlátos az S-normában. Ha fennáll a (8.18) inf-sup-feltétel, akkor bármely $(f, g) \in H \times K$ esetén a (8.17) feladatnak létezik egyetlen $(u, p) \in H_S \times K$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}(u, v) := \langle u, v\rangle_S$, $\mathcal{B}(p, v) := \langle p, N^*v\rangle$, ill. $\phi f := \langle f, v\rangle$, $\psi g := \langle g, q\rangle$; ezzel feladatunk (7.16) alakú. Célunk, hogy alkalmazzuk a 7.29. tételt, H helyett a H_S térrel. Itt $\mathcal{A} : H_S \times H_S \to \mathbb{R}$ triviálisan korlátos és koercív bilineáris forma, hisz ez maga a H_S tér skalárszorzata. Másrészt $\mathcal{B} : K \times H_S \to \mathbb{R}$ is korlátos bilineáris forma, mert $N^* : H_S \to K$ korlátossága révén $|\mathcal{B}(p, v)| \le \|p\|\|N^*\|\|v\|$ $(\forall p \in K,\ v \in H_S)$. Ellenőriznünk kell még a (7.17) inf-sup-feltételt $\mathcal{B}$-re, H helyett a H_S térrel: $D(N)$ sűrűségét használva,

$$\inf_{p\in K\setminus\{0\}} \sup_{u\in H_S\setminus\{0\}} \frac{\mathcal{B}(p, u)}{\|p\|\|u\|_S} = \inf_{p\in K\setminus\{0\}} \sup_{u\in H_S\setminus\{0\}} \frac{\langle p, N^*u\rangle}{\|p\|\|u\|_S}$$

$$= \inf_{p \in D(N)\setminus\{0\}} \sup_{u \in H_S \setminus\{0\}} \frac{\langle p, N^* u\rangle}{\|p\| \|u\|_S} = \inf_{p \in D(N)\setminus\{0\}} \sup_{u \in H_S \setminus\{0\}} \frac{\langle Np, u\rangle}{\|p\| \|u\|_S} = \gamma > 0. \tag{8.20}$$

Végül, $\phi : H_S \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál a 8.29. tétel bizonyítása szerint, ill. $\psi : K \to \mathbb{R}$ triviálisan korlátos lineáris, hiszen K-beli skalárszorzat. Így tehát teljesülnek a $H_S \times K$ térben a 7.29. tétel feltételei, amiből már következik a kívánt megoldhatóság. $\square$

9. fejezet

Operátor-differenciálegyenletek

Ebben a fejezetben

$$\dot{u}(t) = Au(t) \tag{9.1}$$

alakú lineáris operátor-differenciálegyenletek megoldhatóságáról lesz szó néhány egyszerű esetben, érintve a témakörben alapvető félcsoportok fogalmát. A félcsoportok elmélete igen kiterjedt, gyors fejlődésben lévő terület, amely a (9.1) egyenleten túli (ill. (9.1)-re is az itt tárgyaltnál általánosabb) esetek vizsgálatának is hatékony eszköze, ennek részletes összefoglalását adják a [22, 53] könyvek.

A (9.1) egyenlet vizsgálata előtt motivációként érdemes a skalár analógiáját felidézni. Legyen $a \neq 0$ valós szám és tekintsük az alábbi közönséges differenciálegyenlet kezdetiérték-feladatát:

$$\dot{x}(t) = ax(t), \qquad x(0) = x_0.$$

Ennek megoldása $x(t) = e^{at}x_0$, amit írjunk az exponenciális függvényt exp_a-val jelölve, $x(t) = exp_a(t)x_0$ alakban. Ekkor az exp_a függvény tulajdonképpen a fenti feladat megoldó-operátora, az alábbi tulajdonságokkal:

$$exp_a(0) = 1, \qquad exp_a(t+s) = exp_a(t)\, exp_a(s) \quad (\forall t, s \geq 0). \tag{9.2}$$

Ezek bármely exponenciális függvényre igazak, az a számot az

$$exp_a'(0) = a \tag{9.3}$$

deriváltból kapjuk meg. A (9.2) azonosságok félcsoport-tulajdonságnak tekinthetők, a deriváltból visszakapott a szám pedig a megoldó-operátor generátorának, mivel meghatározza, melyik exponenciális függvényről van szó. A félcsoportok absztrakt fogalma ezeket ülteti át normált terekbe, megvilágítva a skalár és a normált térbeli feladat hasonló szerkezetét.

Először a félcsoportok fogalmát és a (9.1) egyenlettel való kapcsolatát vázoljuk, majd ez alapján két megoldhatósági tételt adunk meg.

9.1. Félcsoportok és operátor-differenciálegyenletek

Az előző fejezetektől eltérően itt először nem csak Hilbert-térben nézzük a feladatot, mert egyes alkalmazásokban X szerepét a $C(I)$ vagy $C(\overline{\Omega})$ tér játssza, a tárgyalásban pedig egy darabig nincs különbség a Banach- és Hilbert-tér esete közt. Legyen tehát X Banach-tér, $A : X \supset\!\!\to X$ sűrűn definiált operátor, $u_0 \in D(A)$ adott vektor, és tekintsük az alábbi kezdetiérték-feladatot: keresendő olyan $u : [0, \infty) \to X$ függvény, melyre

$$\dot{u}(t) = Au(t), \qquad u(0) = u_0. \tag{9.4}$$

Mivel a keresett függvény $u : \mathbb{R} \supset\!\!\to X$ típusú, így a megoldásnak (a kezdeti feltételen túl) egyszerűen azt kell teljesítenie, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = Au(t) \qquad (\forall t \geq 0), \tag{9.5}$$

ahol $t = 0$ esetén csak $h \to 0^+$ esetén kell a limesz.

Először (9.2)-(9.3) mintájára értelmezzük a félcsoport és a generátor fogalmát, majd ebből származtatjuk a (9.4) feladat megoldását. Egyszerűség kedvéért feltesszük a félcsoport folytonos függését a paramétertől a pontonkénti konvergenciára nézve (erről lásd később a 9.3. megjegyzést).

9.1. Definíció. Legyen X Banach-tér, $T : [0, \infty) \to B(X)$ leképezés, melyre

(i) $T(0) = I$;

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s) \quad (\forall t, s \geq 0)$;

(iii) bármely $x \in H$ esetén $t \mapsto T(t)x$ folytonos mint $[0, \infty) \to X$ leképezés.

Ekkor a $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ operátorhalmazt (egyparaméteres, erősen folytonos) *félcsoportnak* hívjuk.

9.2. Definíció. Legyen X Banach-tér, $\{T(t)\}$ adott félcsoport, $A : X \supset\!\!\to X$ sűrűn definiált operátor. Azt mondjuk, hogy A a $\{T(t)\}$ félcsoport *generátora* (vagy A generálja a $\{T(t)\}$ félcsoportot), ha

$$D(A) = \left\{ x \in H : \; \exists\, \hat{x} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} x \right\} \qquad \text{és} \qquad Ax = \hat{x} \quad (\forall x \in D(A)).$$

9.3. Megjegyzés. (i) A félcsoport fenti definíciójában a (iii) pont helyett szokás csak a $t = 0$ pontbeli folytonosságot feltenni (azaz, hogy $T(t) \to I$ pontonként X-en, ha $t \to 0$). Ebből ui. már igazolható a folytonosság minden t-ben, vagyis a (iii) pontban feltett alakban, ezt a hosszabb levezetést azonban elhagytuk, lásd pl. [62]. A takarékosabb definíció esetén is ilyenkor erősen folytonos félcsoportnak hívják $\{T(t)\}$-t. A félcsoport folytonossága azért fontos, mert ebből igazolható, hogy mindig létezik a fenti definíció szerinti generátora, lásd szintén [62]-ben.
(ii) A generátor fogalma alapján

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\, u_0 = Au_0 \qquad (\forall u_0 \in D(A)), \tag{9.6}$$

ami értelmezhető úgy, hogy $T'(0) = A$ ($D(A)$-ban pontonként), tehát (9.3) megfelelőjeként.

9.4. Lemma. *Ha az $A : X \supset\!\to X$ sűrűn definiált operátor egy $\{T(t)\}$ félcsoportot generál, akkor bármely $u_0 \in D(A)$, $t \geq 0$ esetén $T(t)u_0 \in D(A)$ és*

$$AT(t)u_0 = T(t)Au_0.$$

Bizonyítás. A félcsoport-tulajdonságok miatt bármely $t, h \geq 0$ esetén

$$T(t)\, \frac{T(h)-I}{h}\, u_0 = \frac{T(h)-I}{h}\, T(t)u_0, \tag{9.7}$$

mivel mindkét oldal megegyezik $\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\, u_0$-lal. A generátor fogalma szerint $\lim_{h\to 0} \frac{T(h)-I}{h}\, u_0 = Au_0$, így $h \to 0$ esetén, $T(t) \in B(X)$ miatt (9.7) bal oldalának limesze $T(t)Au_0$. Ekkor (9.7) jobb oldalának limesze is $T(t)Au_0$, ami viszont a generátor definíciója szerint azt jelenti, hogy $T(t)u_0 \in D(A)$ és $AT(t)u_0$ megegyezik ezzel a limesszel, $T(t)Au_0$-lal. □

9.5. Tétel. *Ha az $A : X \supset\!\to X$ sűrűn definiált operátor egy $\{T(t)\}$ félcsoportot generál, akkor bármely $u_0 \in D(A)$ esetén az*

$$u(t) := T(t)u_0 \qquad (t \geq 0) \tag{9.8}$$

függvény megoldása a (9.4) feladatnak.

Bizonyítás. A $T(0) = I$ tulajdonság miatt a kezdeti feltétel triviálisan teljesül, így csak az egyenletet kell igazolnunk. Először jobbról vesszük a deriváltat: felhasználva rendre a félcsoport-tulajdonságot, hogy $T(t) \in B(X)$, a (9.6) egyenletet és a 9.4. lemmát,

$$\dot{u}_+(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(t+h)-T(t)}{h}\, u_0 =$$

$$\lim_{h\to 0^+} T(t)\,\frac{T(h)-I}{h}\,u_0 = T(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\,u_0 =$$
$$= T(t)Au_0 = AT(t)u_0 = Au(t).$$

A balról vett deriválthoz (amire csak $t > 0$ esetén van szükség) legyen $A_h u_0 := \frac{T(h)-I}{h}\,u_0$, ekkor $\lim_{h\to 0^+} A_h u_0 = Au_0$. Ebből

$$\dot u_-(t) = \lim_{h\to 0^+}\frac{u(t)-u(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t)-T(t-h)}{h}\,u_0 =$$
$$= \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\,A_h u_0.$$

Ha megmutatjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0^+} T(t-h)\,A_h u_0 = T(t)Au_0, \tag{9.9}$$

akkor kész vagyunk, mert az előbb már láttuk, hogy $T(t)Au_0 = Au(t)$. Valóban,

$$T(t-h)\,A_h u_0 - T(t)Au_0 = \Big(T(t-h)-T(t)\Big)Au_0 + T(t-h)\Big(A_h u_0 - Au_0\Big),$$

itt az első tag a félcsoport folytonossága miatt tart 0-hoz (lásd (iii) pont), a második tagban pedig $A_h u_0 \to Au_0$, így elég belátnunk, hogy $\|T(t-h)\|$ korlátos, ha h a 0 egy elég kis környezetéből való. Utóbbi ekvivalens azzal, hogy bármely $t_n \to t$ sorozatra $\|T(t_n)\|$ korlátos, ezt pedig a 4.2 Banach–Steinhaus-tételből tudjuk, mert (ismét a félcsoport folytonossága miatt, most t-ben) $T(t_n)$ pontonként konvergál $T(t)$-hez, így pontonként korlátos. $\square$

9.6. Megjegyzés. Mivel $T(t)$ az egész téren van értelmezve, bármely $u_0 \in X$ esetén értelmes az $u(t) := T(t)u_0 \quad (t \ge 0)$ függvény, ezt a (9.4) feladat általánosított megoldásának tekinthetjük.

9.2. Két megoldhatósági eredmény

Ebben a szakaszban legyen H Hilbert-tér. Tekintsük először a (9.1) egyenletet, amikor $A \in B(H)$. Ennek megoldása teljesen analóg a közönséges differenciálegyenlet-rendszerekből ismert módszerrel, amit most félcsoportokkal fogalmazunk meg.

9.7. Tétel. *Legyen $A \in B(H)$ korlátos lineáris operátor. Ekkor A félcsoportot generál, éspedig*

$$T(t) = e^{At} \qquad (t \ge 0)$$

félcsoport $B(H)$-ban és generátora A.

Bizonyítás. Az $e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$ operátorokat a 6.7.2. szakasz (a) pontja alapján definiálhatjuk, lásd (6.18). Megmutatjuk, hogy teljesül rájuk a 9.1. definíció. Az (i) és (ii) pont a 6.98. állításból következik, hiszen $T(0) = e^0 = I$, ill. $T(t+s) = e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As} = T(t)T(s)$ $(\forall t, s \geq 0)$. A folytonosság itt normában is igaz, azaz $\lim_{h\to 0} \|T(t+h) - T(t)\| = 0$ $(\forall t \geq 0)$. Ugyanis

$$\|T(t+h) - T(t)\| = \|e^{At}(e^{Ah} - I)\| \leq e^{\|A\|t}\|e^{Ah} - I\|,$$

itt a második tényezőre

$$\|e^{Ah} - I\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n h^n}{n!}\Big\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n |h|^n}{n!} = e^{\|A\||h|} - 1 \to 0, \qquad \text{ha } h \to 0.$$

Végül igazoljuk, hogy $\{T(t)\}$ generátora A. A (9.6) pontonkénti limesz helyett ez is igaz normában:

$$\lim_{h\to 0^+} \Big\|\frac{e^{Ah} - I}{h} - A\Big\| = \lim_{h\to 0^+} \Big\|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A^n h^{n-1}}{n!}\Big\| \leq \lim_{h\to 0^+} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|A\|^n h^{n-1}}{n!}$$

$$\leq \lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} \leq e^{\|A\|} \lim_{h\to 0^+} h = 0,$$

felhasználva, hogy $0 \leq h \leq 1$ esetén $0 \leq h^{n-1} \leq h$ $(\forall n \geq 2)$. □

Így érvényes a 9.5. tétel.

9.8. Következmény. *Bármely $A \in B(H)$ és $u_0 \in H$ esetén az $u : [0, \infty) \to X$,*

$$u(t) = e^{At}u_0$$

függvény megoldása az

$$\dot{u}(t) = Au(t), \qquad u(0) = u_0$$

kezdetiérték-feladatnak.

9.9. Állítás. *Bármely $A \in B(H)$ és $u_0 \in H$ esetén az $\dot{u}(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$ kezdetiérték-feladat megoldása egyértelmű, és az $\|u(t)\| \leq e^{\|A\|t}\|u_0\|$ $(t \geq 0)$ folytonos függés teljesül (Gronwall-típusú egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Először az egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$\|u(t)\| = \|e^{At}u_0\| = \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\, u_0\Big\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n t^n}{n!}\, \|u_0\| = e^{\|A\|t}\|u_0\|.$$

Az egyértelműséghez a linearitás miatt elég megmutatnunk, hogy $u_0 = 0$ esetén $u(t) \equiv 0$, ez pedig a kapott egyenlőtlenségből következik. □

Legyen most H szeparábilis és tekintsük a (9.1) egyenletet akkor, ha $A = -L$, ahol L-nek kompakt pozitív inverze van.

9.10. Tétel. *Legyen $L : H \supset\!\to H$ sűrűn definiált szigorúan pozitív operátor, melyre $R(L) = H$ és L^{-1} kompakt. Jelölje (λ_n) és (e_n) az L operátor sajátértékeinek és megfelelő sajátvektorainak sorozatát, ahol $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ és a sajátvektorok TONR-t alkotnak. Ekkor $-L$ egy $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ félcsoportot generál $B(H)$-ban, éspedig*

$$T(t) = e^{-Lt} \qquad (t \ge 0),$$

ahol (8.7) *alapján $e^{-Lt} \in B(H)$,*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H \quad \textit{esetén} \quad e^{-Lt}x := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} c_n e_n. \tag{9.10}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy teljesül a 9.1. definíció. Az (i) és (ii) pont e^{-Lt} definíciójából következik. A (iii) ponthoz legyen $x \in H$, igazoljuk, hogy $t \mapsto T(t)x$ folytonos, azaz ha $t \ge 0$ rögzített, akkor $\lim_{h\to 0} \|(T(t+h) - T(t))x\| = 0$. Valóban, itt a (9.10) sorfejtések alapján

$$\|(T(t+h) - T(t))x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n})^2 |c_n|^2.$$

Mivel $r, s \ge 0$ esetén $|e^{-r} - e^{-s}| \le |r - s|$ és $|e^{-r} - e^{-s}| \le 1$, így $|e^{-(t+h)\lambda_n} - e^{-t\lambda_n}| \le \min\{\lambda_n |h|, 1\}$, amiből

$$\|(T(t+h) - T(t))x\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \min\{\lambda_n^2 h^2, 1\} |c_n|^2.$$

Legyen $h \in \mathbb{R}$. Ha $\lambda_n \le 1/\sqrt{|h|}$, akkor $\lambda_n^2 h^2 \le |h|$, így $\min\{\lambda_n^2 h^2, 1\} \le |h|$, ha pedig $\lambda_n > 1/\sqrt{|h|}$, akkor $\min\{\lambda_n^2 h^2, 1\} \le 1$. Ezekből

$$\|(T(t+h) - T(t))x\|^2 \le \; |h| \sum_{\lambda_n \le \frac{1}{\sqrt{|h|}}} |c_n|^2 \; + \sum_{\lambda_n > \frac{1}{\sqrt{|h|}}} |c_n|^2.$$

Ha $h \to 0$, akkor az első tag 0-hoz tart, mert $|h|\|x\|^2$-tel becsülhető, és a második tag is 0-hoz tart, mert $\|x\|^2$ konvergens sorából egyre nagyobb indexű szeleteket vonunk le.

Végül igazoljuk, hogy $\{T(t)\}$ generátora $-L$, azaz teljesül (9.6). Ha $u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in D(L)$, akkor

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} u_0 + Lu_0 \right\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{e^{-h\lambda_n} - 1}{h} + \lambda_n \Big) c_n e_n \right\|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{e^{-h\lambda_n} - 1}{h\lambda_n} + 1 \Big)^2 \lambda_n^2 |c_n|^2$$

Legyen $f(r) := \frac{e^{-r}-1}{r} + 1$ $(r > 0)$. Elemi deriválással igazolható, hogy $1 - r \leq e^{-r} \leq 1 - r + \frac{r^2}{2}$, amiből $0 \leq f(r) \leq \frac{r}{2}$ $(\forall r > 0)$. Emellett $\lim_0 f = 0$ és $\lim_\infty f = 1$, így f korlátos. Legyen $M := \sup f$, ekkor tehát $|f(r)| \leq \min\{\frac{r}{2}, M\}$. Ebből

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} u_0 + Lu_0 \right\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \min\Big\{ \frac{1}{4} h^2 \lambda_n^2,\ M^2 \Big\}\ \lambda_n^2 |c_n|^2 .$$

Itt $Lu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n$. A korábbi gondolatmenethez hasonlóan, ha $h > 0$, akkor $\lambda_n \leq 1/\sqrt{h}$ esetén $\lambda_n^2 h^2 \leq h$, így a fenti minimum legfeljebb $h/4$, ha pedig $\lambda_n > 1/\sqrt{h}$, akkor a fenti minimum legfeljebb M^2. Ezekből

$$\left\| \frac{T(h) - I}{h} u_0 + Lu_0 \right\|^2 \leq \ \frac{h}{4} \sum_{\lambda_n \leq \frac{1}{\sqrt{h}}} \lambda_n^2 |c_n|^2 \ + \ M^2 \sum_{\lambda_n > \frac{1}{\sqrt{h}}} \lambda_n^2 |c_n|^2, \tag{9.11}$$

és ha $h \to 0$, akkor az első tag 0-hoz tart, mert $\frac{h}{4}\|Lu_0\|^2$-tel becsülhető, és a második tag is 0-hoz tart, mert $M^2\|Lu_0\|^2$ konvergens sorából egyre nagyobb indexű szeleteket vonunk le. □

9.11. Következmény. *Legyen $L : H \supset\!\!\to H$ sűrűn definiált szigorúan pozitív operátor, melyre $R(L) = H$ és L^{-1} kompakt. Bármely $u_0 \in D(L)$ esetén az $u : [0, \infty) \to X$,*

$$u(t) = e^{-Lt} u_0$$

függvény megoldása az

$$\dot{u}(t) + Lu(t) = 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{9.12}$$

kezdetiérték-feladatnak.

Bár itt a megoldhatóságot $u_0 \in D(L)$ esetén mondtuk ki, a $t \mapsto e^{-Lt} u_0$ függvény bármely $u_0 \in H$ esetén értelmes, mivel $e^{-Lt} \in B(H)$. Ezzel motiválható az alábbi

9.12. Definíció. A 9.11. következménybeli L operátor esetén, $u_0 \in H \setminus D(L)$ mellett az $u(t) := e^{-Lt}u_0$ $(t \geq 0)$ függvényt a (9.12) kezdetiérték-feladat *általánosított megoldásának* hívjuk.

Igazoljuk, hogy az általánosított megoldás csak annyival tud kevesebbet a korábbinál, hogy a 0-ban nem értelmes az egyenlet. (Ott nem is lehet, hiszen $\dot{u}(0) + Lu_0$ nem értelmezhető, ha $u_0 \notin D(L)$.)

9.13. Tétel. *Legyen L a 9.11. következménybeli operátor, és tegyük fel, hogy maximális értelmezési tartománnyal láttuk el, azaz $D(L) = \Big\{ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 < \infty \Big\}$ és ilyen x-re $Lx := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n$.*
Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges, $u(t) := e^{-Lt}u_0$. Ekkor bármely $t > 0$ esetén $\dot{u}(t) + Lu(t) = 0$.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $u(t) \in D(L)$ $(\forall t > 0)$. Ha ugyanis $u_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, akkor

$$u(t) := e^{-Lt}u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} c_n e_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n,$$

így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |d_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} |c_n|^2 \leq \frac{1}{t^2} \max_{r \geq 0} (r^2 e^{-2r}) \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{\mu}{t^2} \|x\|^2 < \infty,$$

ahol az $f(r) := r^2 e^{-2r}$ függvényre $\mu := \max\limits_{[0,\infty)} f$ azért létezik, mert $f(0) = \lim\limits_{\infty} f = 0$.
Adott $t > 0$ esetén a $\dot{u}(t) + Lu(t) = 0$ egyenlőség azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \to 0} \Big(\frac{u(t+h) - u(t)}{h} + Lu(t) \Big) = \lim_{h \to 0} \Big(\frac{T(h) - I}{h} u(t) + Lu(t) \Big) = 0.$$

Felhasználva, hogy $u(t) \in D(L)$, a fenti limesz a (9.11)-nél látottakhoz hasonlóan igazolható. □

9.14. Állítás. *A 9.11. következménybeli L operátor esetén a (9.12) kezdetiérték-feladat megoldása egyértelmű, és az $\|u(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|$ $(t \geq 0)$ folytonos függés teljesül, ahol $\lambda_1 > 0$ az L legkisebb sajátértéke.*

Bizonyítás. Ha $u_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, akkor $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$ miatt

$$\|u(t)\|^2 = \|e^{-Lt}u_0\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\lambda_n t}|c_n|^2 \le e^{-2\lambda_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = e^{-2\lambda_1 t}\|u_0\|^2,$$

ennek négyzetgyöke a kívánt becslés. Az egyértelműség ebből a 9.9. állításhoz hasonlóan következik. □

10. fejezet

A megoldhatósági tételek alkalmazásai

Ebben a fejezetben többféle példával szemléltetjük az eddigi megoldhatósági tételek alkalmazási körét. Utóbbiak felépítése azt is megmutatja, hogyan vezethetők vissza a koercivitásra ezek a megoldhatósági eredmények. A vizsgált modellekről részletesebben olvashatunk az [59, 67, 69], ill. a [40] könyvekben. További, itt nem vizsgált hasonló alkalmazások közül megemlítjük még a lineáris rugalmassági modellt [3] és a tartományfelbontási módszerekben fellépő Poincaré–Sztyeklov-operátort [56].

10.1. Integrálegyenletek

Ebben a szakaszban az alábbi integráloperátorra vonatkozó másodfajú egyenletekkel foglalkozunk: legyen $I = [a, b]$, $\;H := L^2(I)$, valamint $K \in L^2(I \times I)$ adott valós értékű függvény és $B : H \to H$ a következő:

$$(Bu)\,(x) = \int_a^b K(x,s)u(s)\mathrm{d}s \qquad (u \in L^2(I)).$$

A 6.24. állításban láttuk, hogy

(1) $B \in L^2(I) \to L^2(I)$ korlátos lineáris operátor.

(2) Ha K szimmetrikus, azaz $K(x, y) = K(y, x)$, akkor B önadjungált.

(3) Ha K úgynevezett pozitív magfüggvény, azaz létezik $N \in L^2(I \times I)$ valós függvény, hogy

$$K(x,y) = \int_a^b N(x,s)N(y,s)\mathrm{d}s,$$

akkor B pozitív operátor.

10.1. Tétel. *Legyen $K \in L^2(I \times I)$ pozitív magfüggvény. Ekkor az*

$$u(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)\ dy = f(x) \qquad (x \in I)$$

integrálegyenletnek bármely $f \in L^2(I)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in L^2(I)$ megoldása.

Bizonyítás. Az egyenlet $u + Bu = f$ alakú, ahol az $I + B \in B(H)$ operátor önadjungált, sőt

$$\langle (I+B)u, u\rangle = \|u\|^2 + \langle Bu, u\rangle \geq \|u\|^2$$

miatt egyenletesen pozitív is. Ekkor a 7.1. tétel szerint egyértelműen létezik megoldás az $L^2(I)$ térben. □

A fenti feladatra általánosabb esetben (ahol a magfüggvény pozitivitását sem kell feltennünk) a Fredholm-féle alternatívatétel érvényes:

10.2. Tétel. *Legyen $K \in L^2(I \times I)$ magfüggvény, $\mu \in \mathbb{C}$. Ekkor a*

$$\mu u(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)\ dy = f(x) \qquad (x \in I) \tag{10.1}$$

integrálegyenlet megoldhatóságára nézve két eset lehetséges:

(i) bármely $f \in L^2(I)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in L^2(I)$ megoldása;

(ii) az $f \equiv 0$ jobboldal (azaz homogén egyenlet) esetén létezik $u^* \in L^2(I)$, $u^* \neq 0$ megoldása.

Bizonyítás. Legyen $\lambda := -\mu$. Ekkor az egyenlet $Bu - \lambda u = f$ alakú, ahol B a 6.24. állításbeli operátor, amely a 6.76. megjegyzés szerint kompakt. Így a 6.91. tétel alkalmazható az $L^2(I)$ térben. □

10.3. Megjegyzés. A B integráloperátort Volterra-típusúnak hívjuk, ha benne csak a-tól x-ig integrálunk, ami akkor van így, ha bármely $x < y \leq b$ esetén $K(x,y) = 0$. Ekkor igazolható, hogy $\sigma(B)$ csak a 0 pontból áll, így a (10.1) egyenlet bármely $\mu \in \mathbb{C}$ esetén egyértelműen megoldható minden $f \in L^2(I)$ mellett, sőt ez egyenesen következik a Banach-fixponttételből, lásd [37, 43].

10.2. Peremértékfeladatok gyenge megoldása

10.2.1. Egydimenziós peremértékfeladatok (Sturm–Liouville-probléma)

(a) A $H_0^1(I)$ Szoboljev-tér

E fejezetben szükségünk lesz az 1.3.3. szakaszban bevezetett Szoboljev-terekre és további tulajdonságaikra. Mint láttuk, a Szoboljev-terek közül Hilbert-teret alkotnak a

$$H^N(I) := W^{N,2}(I) =$$
$$= \left\{ u \in C^{N-1}(I) : \ u^{(N-1)} \text{ abszolút folytonos}, \ u^{(N)} \in L^2(I) \right\}$$

(általában komplex értékű) függvényterek az

$$\langle u, v \rangle_{H^N} = \int_a^b \sum_{k=0}^N u^{(k)} \overline{v}^{(k)}$$

skalárszorzattal. Ha ezen belül $N = 1$, akkor tehát a

$$H^1(I) := W^{1,2}(I) = \left\{ u : I \to \mathbb{C} \text{ abszolút folytonos}, \quad u' \in L^2(I) \right\}$$

Szoboljev-térről van szó, melynek skalárszorzata, ill. az indukált norma

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_a^b (u\overline{v} + u'\overline{v}'), \qquad \|u\|_{H^1}^2 = \int_a^b \left(|u'|^2 + |u|^2 \right). \tag{10.2}$$

A peremértékfeladatokban szükség lesz az alábbi speciálisabb Szoboljev-térre:

$$H_0^1(I) = \{ u \in H^1(I) : u(a) = u(b) = 0 \}.$$

10.4. Állítás. *$H_0^1(I)$ Hilbert-tér a $H^1(I)$-ből örökölt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ skalárszorzattal.*

Bizonyítás. Az 1.3.3. szakaszban bevezetett $\|.\|_*$ norma segítségével könnyen látható, hogy a normában konvergens sorozatok megőrzik a homogén peremfeltételt, azaz $H_0^1(I)$ zárt altere $H^1(I)$-nek, így maga is Hilbert-tér. □

Vezessük most be a $H_0^1(I)$ téren az alábbi új skalárszorzatot:

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(I)} = \int_a^b u'\overline{v}'. \tag{10.3}$$

A peremfeltétel miatt könnyen látható, hogy ez valóban skalárszorzat.

10.5. Állítás. *(Sztyeklov-egyenlőtlenség) Létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy*

$$\|u\|_{L^2(I)} \leq c\,\|u'\|_{L^2(I)} \qquad (u \in H_0^1(I)).$$

Bizonyítás. Bármely $x \in I$ esetén a Newton–Leibniz-tétel, az $u(a) = 0$ peremfeltétel és a Cauchy-Schwarz-egyenlőség felhasználásával

$$|u(x)|^2 = \left|\int_a^x u'\right|^2 \leq \int_a^x |u'|^2 \cdot \int_a^x 1^2 \leq \|u'\|^2_{L^2(I)}\,(b-a),$$

ezt integrálva: $\|u\|^2_{L^2(I)} = \int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \|u'\|^2_{L^2(I)}\,(b-a)^2.$ □

10.6. Megjegyzés. (i) A Sztyeklov-egyenlőtlenség valójában a (8.10) Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség speciális esete. Sőt, utóbbiból az éles c konstanst is megkapjuk: $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, ahol λ_1 az $Lu := -u''$ operátor legkisebb sajátértéke I-n Dirichlet-peremfeltétel mellett. Ismeretes (lásd pl. (8.5)-ból eltolással), hogy $\lambda_k = (\frac{k\pi}{b-a})^2$ $(k \in \mathbb{N}^+)$, így az éles konstans $c = \frac{b-a}{\pi}$.
(ii) A Sztyeklov-egyenlőtlenségben fontos, hogy csak homogén peremfeltételt teljesítő u szerepelhet. Amúgy nem mindig teljesül, pl. ha $u \equiv c \neq 0$ konstansfüggvény.

10.7. Állítás. *A $H_0^1(I)$-n értelmezett új és a $H^1(I)$-től örökölt régi skalárszorzat által generált normák ekvivalensek.*

Ezt alább általánosabban igazoljuk a 10.9 állításban. Ebből és az 1.10. állításból kapjuk:

10.8. Következmény. $\left(H_0^1(I), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1}\right)$ *Hilbert-tér.*

10.9. Állítás. *Legyenek $p, q \in L^\infty(I)$, $p(x) \geq m > 0$ és $q(x) \geq 0$ minden $x \in I$-re. Ekkor*

$$[u,v] := \int_a^b (pu'\overline{v}' + qu\overline{v}) \tag{10.4}$$

skalárszorzat a $H_0^1(I)$ téren, és az $[[u]] := [u,u]^{1/2}$ norma ekvivalens a H^1-normával.

Bizonyítás. A formulából nyilvánvaló, hogy $[.,.]$ teljesíti a skalárszorzás (i)-(ii) axiómáit, a (iii) pedig következni fog a még bizonyítandó ekvivalenciából. Itt

$$[[u]]^2 = \int_a^b \left(p|u'|^2 + q|u|^2\right) \leq \max\{\|p\|_{L^\infty}, \|q\|_{L^\infty}\} \int_a^b \left(|u'|^2 + |u|^2\right) \tag{10.5}$$

$$= M\,\|u\|_{H^1}^2,$$

ahol $M := \max\{\|p\|_{L^\infty},\ \|q\|_{L^\infty}\}$. Másrészt a Sztyeklov-egyenlőtlenség alapján

$$\|u\|_{H^1}^2 \le (1+c^2)\int_a^b |u'|^2 = \frac{1+c^2}{m}\int_a^b m|u'|^2 \le$$

$$\le \frac{1+c^2}{m}\int_a^b \left(p|u'|^2 + q|u|^2\right) = \widetilde{M}\,[[u]]^2,$$

ahol $\widetilde{M} := \frac{1+c^2}{m}$. □

Az 1.10. állítás alapján:

10.10. Következmény. $\left(H_0^1(I), [.,.]\right)$ *Hilbert-tér.*

(b) Peremértékfeladatok és a megoldásfogalom problémája

Legyen $I = [a,b]$ adott intervallum. Tekintsük az alábbi ún. Sturm–Liouville-féle peremértékfeladatot:

$$\text{(PF)} \quad \begin{cases} Lu \equiv -\left(pu'\right)' + qu = f \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \tag{10.6}$$

ahol $q(x) \ge 0$, $p(x) \ge m > 0$.

Ismeretes a közönséges differenciálegyenletek elméletéből, hogy ha $p \in C^1(I)$ és $q, f \in C(I)$, akkor létezik $u \in C^2(I)$ megoldás. Ezt gyakran klasszikus megoldásnak hívjuk. Előfordul azonban, hogy csak ennél gyengébb simasági feltételek teljesülnek a p és q függvényekre, úgy, hogy nem létezhet klasszikus megoldás.

Tekintsük példaképpen a

$$\begin{cases} -(pu')' = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{10.7}$$

feladatot, azaz amikor $q = 0$, kétféle esetben.

(i) Legyen továbbra is $p \in C^1(I)$, de $f \notin C(I)$. Ekkor nem létezhet $u \in C^2(I)$ megoldás, mert akkor $pu' \in C^1(I)$ és így $-(pu')' = f \in C(I)$ lenne.

Létezhet viszont $u \in H^2(I)$ megoldás, azaz $u \in C^1(I)$, melyre u' abszolút folytonos, $u'' \in L^2(I)$, és $-u'' = f$ m. m. teljesül. Például a $p \equiv 1$ esethez tartozó

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{10.8}$$

feladat esetén bármely $f \in L^2(I)$ esetén létezik $u \in H^2(I)$ megoldás, melyre $u'' = -f$ m.m., ezt a 8.1.2 szakasz 1.(i) példájában igazoltuk. Konkrét példaként, ha $[a, b] = [-1, 1]$ és $f(x) := \mathrm{sgn}(x)$, akkor $u(x) = \frac{1}{2}x(1 - |x|)$ egy olyan C^1-beli függvény, amelynek a második deriváltja majdnem mindenütt létezik (csak $x = 0$-ban nem) és egyenlő az sgn függvénnyel, ill. a peremfeltételeket is teljesíti.

(ii) Legyen most ismét $f \in C(I)$, viszont p szakaszonként konstans. (Ilyen függvény lehet egy különböző állandó ellenállásokat tartalmazó anyag-együttható, pl. mágnességi feladatokban.) Ekkor általában $u \in H^2(I)$ megoldás sem létezik amiatt, hogy $u \in C^1(I)$ nem teljesül, azaz u' nem folytonos. Az egyenletben ugyanis $-pu'$ deriváltja az $f \in C(I)$ függvény, azaz $pu' \in C^1(I)$ kell legyen. Ha azonban u' folytonos lenne és p szakaszonként konstans, akkor pu' is szakadásos kell legyen (kivéve ha u' épp a szakadási pontokban 0), így pláne nem lehet $C^1(I)$-beli.

Ezért e megoldásfogalmak helyett egy további – gyengébb – fogalmat kell bevezetni.

(c) Az egydimenziós peremértékfeladat gyenge megoldása

A gyenge megoldás fogalmához a következő megfontolásból indulunk ki. Amennyiben u klasz- szikus megoldás, azaz $u \in C^2(I)$, szorozzuk be a (10.6) egyenletet egy $v \in H_0^1(I)$ függvény konjugáltjával és integráljunk:

$$\int_a^b \Big(-(pu')'\,\overline{v} + qu\overline{v}\Big) = \int_a^b f\overline{v}\,.$$

Ebből parciális integrálás után, a peremfeltételeket felhasználva az

$$\int_a^b (pu'\overline{v}' + qu\overline{v}) = \int_a^b f\overline{v}$$

egyenlőséget kapjuk. Ez azért hasznos, mert ebben már csak u első deriváltja szerepel, és az is elég, ha m.m. létezik és L^2-beli: azaz $u \in H_0^1(I)$ esetén is értelmes kifejezést kaptunk.

A fenti egyenlőséget tehát egy u klasszikus megoldás teljesíti, de ha ilyen nem létezik, akkor az egyenlőség $u \in H_0^1(I)$ esetén is értelmes követelmény. Erre alapul a kívánt fogalom.

10.11. Definíció. Az $u \in H_0^1(I)$ függvényt a (10.6) peremértékfeladat *gyenge megoldásának* nevezzük, ha

$$\int_a^b (pu'\overline{v}' + qu\overline{v}) = \int_a^b f\overline{v} \qquad (\forall v \in H_0^1(I)). \tag{10.9}$$

10.12. Tétel. *Legyenek $p, q \in L^\infty(I)$, $p(x) \geq m > 0$, $q(x) \geq 0$ m. m. $x \in I$-re. Ekkor a (10.6) peremértékfeladatnak bármely $f \in L^2(I)$ esetén egyértelműen létezik $u \in H_0^1(I)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Vezessük be a $H_0^1(I)$ térben a (10.4) egyenlőségben definiált $[u, v] = \int_a^b (pu'\overline{v}' + qu\overline{v})$ skalárszorzatot, és jelölje most is $[[u]]$ az indukált normát. A 10.10. következmény szerint $H_0^1(I)$ Hilbert-tér az új skalárszorzattal ellátva is, hiszen az utóbbi által indukált norma ekvivalens az eredeti $H^1(I)$-normával. Az ekvivalencia miatt létezik $K > 0$, hogy

$$\|v\|_{L^2(I)} \leq \|v\|_{H^1(I)} \leq K[[v]] \qquad (\forall v \in H_0^1(I)).$$

Legyen $\phi : H_0^1(I) \to \mathbb{C}$ a $\phi v := \int_a^b v\overline{f}$ funkcionál. Ez lineáris, másrészt

$$|\phi v| \leq \|v\|_{L^2(I)} \|f\|_{L^2(I)} \leq \Big(K \|f\|_{L^2(I)}\Big) [[v]] \qquad (\forall v \in H_0^1(I)),$$

azaz ϕ folytonos is a fenti Hilbert-térben. Riesz reprezentációs tétele szerint $\exists!\ u \in H_0^1(I)$, melyre $\phi v = [v, u]$ minden $v \in H_0^1(I)$-re. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\int_a^b (pv'\overline{u}' + qv\overline{u}) = \int_a^b v\overline{f} \qquad (\forall v \in H_0^1(I)), \tag{10.10}$$

ezt konjugálva pedig éppen a gyenge megoldás definíciójához jutunk. □

10.13. Megjegyzés. A fenti tétel más úton is igazolható, felhasználva a (szintén a Riesz-tételből levezetett) korábbi Hilbert-térbeli megoldhatósági tételeket.

(i) (A *Lax–Milgram-lemma* alkalmazása.) A (10.9) egyenlőség bal oldalán álló $[.,.]$ skalárszorzat egy $B : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbb{C}$ konjugáltan bilineáris forma, amelyre a $[[.]]$ és $\|.\|_{H^1}$ normák ekvivalenciája épp azt jelenti, hogy B korlátos és koercív: valóban, (10.5) alapján

$$|B(u, v)| = \big|[u, v]\big| \leq [[u]][[v]] \leq M\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

$$B(u.u) = [[u]]^2 \geq (1/\widetilde{M})\|u\|_{H^1}^2.$$

Tekintsük most (10.9) konjugáltját, azaz a (10.10) egyenlőséget. Az ennek jobb oldalán álló kifejezés a 10.12. tétel bizonyítása szerint folytonos lineáris funkcionál. Ezekből az egyenlőség

$$B(v, u) = \phi v \qquad (\forall v \in H_0^1(I))$$

alakban írható, ahol tehát B korlátos és koercív konjugáltan bilineáris forma, ill. ϕ folytonos lineáris funkcionál, így alkalmazható a Lax–Milgram-lemma komplex alakja (a 7.16. tétel (2) pontja).

(ii) A (10.6)-ben definiált $Lu \equiv -(pu')' + qu$ nem korlátos operátor a Dirichlet-peremfeltételek mellett egyenletesen pozitív. (Ez a 8.17. állítás alapján következik $n = 1$ dimenzióban, itt a qu tag hozzáadása $q \geq 0$ miatt megőrzi a pozitivitást.) Itt L energiatere a $H_0^1(I)$ tér a $[.,.]$ skalárszorzattal, így a 8.29. tétel esetünkben éppen a 10.12. tételt adja.

10.2.2. Többdimenziós elliptikus peremértékfeladatok

(a) Szimmetrikus feladatok

Most többdimenziós esetre vázoljuk fel a gyenge megoldás fogalmát egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon, melyről feltesszük, hogy pereme szakaszonként sima. A többdimenziós Szoboljev-terek és gyenge megoldás témakörének részletes tárgyalása a [67] könyvben olvasható. A $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-tér olyan $u \in L^2(\Omega)$ függvényekből áll, amelynek minden elsőrendű disztribúciós parciális deriváltja létezik és $L^2(\Omega)$-ban van, továbbá $u_{|\partial\Omega} = 0$ is fennáll nyomértelemben. A (10.2), ill. (10.3) skalárszorzatok megfelelői:

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \overline{v} + u\overline{v}), \qquad \langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}.$$

Tekintsük példaként a (8.2) feladatot Dirichlet-peremfeltétellel:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\operatorname{div}(p\,\nabla u) = f, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{10.11}$$

A gyenge megoldás fogalmát (az egyváltozós esetben részletezettekhez hasonlóan) az motiválja, hogy a feladatnak nem mindig van $u \in C^2(\Omega)$ klasszikus megoldása, sőt $u \in H^2(\Omega)$ sem mindig teljesül. Az utóbbi a többdimenziós esetben nemcsak p szakadásos volta esetén, hanem a tartomány miatt is előfordulhat, pl. ha „konkáv sarok" van a peremen, lásd [69, III., 15.2 fej.].

A gyenge megoldás fogalmához (az egyváltozós esethez hasonlóan) abból indulunk ki, hogy egy $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ klasszikus megoldásra

$$\int_\Omega p\ \nabla u \cdot \nabla \overline{v} = \int_\Omega f\overline{v} \qquad \forall\ v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v_{|\partial\Omega} = 0. \tag{10.12}$$

A fenti egyenlőség tehát minden $v \in C_0^1(\Omega)$ ún. tesztfüggvényre teljesül. Mivel a $H_0^1(\Omega)$ Szoboljev-tér a $C_0^1(\Omega)$ teljessé tétele – azaz $C_0^1(\Omega)$ sűrű halmaz ebben a térben – , így az egyenlőség minden $v \in H_0^1(\Omega)$ esetén is teljesül.
A (10.12) alak haszna, hogy akkor is értelmes, ha u-nak csak első deriváltja létezik m.m. és L^2-beli, azaz $u \in H_0^1(I)$ esetén is értelmes kifejezést kaptunk. Most is ez lesz a gyenge megoldás követelménye:

10.14. Definíció. Az $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt a (10.11) peremértékfeladat *gyenge megoldásának* nevezzük, ha (10.12) teljesül minden $v \in H_0^1(I)$ esetén.

A létezés és az egyértelműség az egyváltozós esethez hasonlóan adódik, itt is elég a $p \in L^\infty(\Omega)$, $p(x) \geq m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$) feltétel. Vezessük be az

$$[u, v] := \int_\Omega p \; \nabla u \cdot \nabla \overline{v} \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega))$$

skalárszorzatot. Az ez által indukált $[[.]]$ norma a p-re tett feltétel és a (8.10) Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség miatt ekvivalens a $\|.\|_{H^1}$ normával, így $H_0^1(\Omega)$ ezzel is Hilbert-tér.

10.15. Tétel. *Legyen $p \in L^\infty(\Omega)$, $p(x) \geq m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$). Ekkor a* (10.6) *peremértékfeladatnak bármely $f \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\Big(H_0^1(\Omega), [.,.]\Big)$ Hilbert-teret. Legyen $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\phi v := \int_\Omega \overline{f} v$. Ekkor ϕ lineáris funkcionál, és korlátos is, mert

$$|\phi v| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq K \|f\|_{L^2} [[v]] \qquad (\forall \; v \in H_0^1(\Omega)).$$

A Riesz-féle reprezentációs tételből egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$, hogy

$$[v, u^*] = \phi v \qquad (\forall \; v \in H_0^1(\Omega)).$$

Ezt konjugálva, $[.,.]$ és ϕ definíciója alapján u^* gyenge megoldás. □

10.16. Megjegyzés. (i) A 10.13. megjegyzésben elmondottakhoz hasonlóan a fenti tétel más utakon is igazolható.
Használhatjuk egyrészt a *Lax–Milgram-lemmát.* A (10.12) egyenlőség bal oldalán álló $[.,.]$ skalárszorzat egy $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ konjugáltan bilineáris forma, amelyre a $[[.]]$ és $\|.\|_{H^1}$ normák ekvivalenciája épp azt jelenti, hogy B korlátos és koercív: az $m \leq p(x) \leq M := \max p$ korlátok révén

$$|B(u, v)| = \big|[u, v]\big| \leq [[u]][[v]] \leq M \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1},$$

$$B(u.u) = [[u]]^2 \geq m \|u\|_{H_0^1}^2.$$

A (10.12) egyenlőség konjugáltja most is

$$B(v, u) = \phi v \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega))$$

alakban írható, ahol teljesülnek a Lax–Milgram-lemma komplex alakjának feltételei.

Alkalmazható másik indoklásként a 8.29. tétel is az $Lu \equiv -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$ operátorra.

(ii) A $p \geq m$ feltétel, a 8.30. megjegyzés és a (8.10) Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség alapján a $\|\nabla u^*\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{m\lambda_1}}\|f\|_{L^2}$ folytonos függést kapjuk.

(iii) Az $f \in L^2(\Omega)$ feltétel enyhíthető, mivel (10.12)-ben $\int_\Omega f\overline{v}$ helyett általában $\overline{\phi v}$ is szerepelhet, ahol $\phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ tetszőleges korlátos lineáris funkcionál. (Utóbbit úgy szokás jelölni, hogy $\phi \in H^{-1}(\Omega)$.) A bizonyítás ui. csak ezt használja ki ϕ-ről. Ha például $\phi v := \int_\Gamma \beta v$, ahol $\Gamma \subset \Omega$ sima felület és $\beta \in L^2(\Gamma)$, akkor (a Γ-ra vett nyomoperátor folytonossága miatt) $\phi \in H^{-1}(\Omega)$. Ez formálisan az $Lu = \beta\,\delta_\Gamma$ egyenletnek felel meg, ahol δ_Γ a Γ felületre koncentrált Dirac-féle „függvény".

A tétel emellett nulladrendű taggal együtt, azaz $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + qu$ esetén is igazolható, ha $q \in L^\infty(\Omega)$, $q \geq 0$; ekkor csak a $[[.]]$ és $\|.\|_{H^1}$ normák ekvivalenciájához kell több (de az egydimenziós esettel analóg) számolás.

(b) Nem szimmetrikus feladatok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel, és tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{10.13}$$

10.2.2. feltételek.

(i) $p \in L^\infty(\Omega)$, $p(x) \geq m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$);

(ii) $\mathbf{b} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$ (azaz $\mathbf{b}$ divergenciamentes vektormező).

A gyenge megoldás fogalmát az előző szakaszhoz hasonlóan értelmezzük. Most azonban egyszerűbb, ha valós Hilbert-térben vizsgáljuk a feladatot, legyen tehát $H_0^1(\Omega)$ valós értékű függvényekből álló Hilbert-tér az

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega))$$

skalárszorzattal. Ekkor olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt keresünk, melyre

$$\int_\Omega \Big(p\,\nabla u\cdot\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v\Big) = \int_\Omega fv \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega)). \tag{10.14}$$

10.17. Tétel. *Ha teljesülnek a 10.2.2. feltételek, akkor a* (10.13) *peremértékfeladatnak bármely $f \in L^2(\Omega)$ esetén egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. A Lax–Milgram-lemmát szeretnénk használni (most a 7.16. tétel (1) pontja). Legyen $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ az alábbi bilineáris forma:

$$B(u,v) := \int_\Omega \Big(p\ \nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v\Big).$$

Ekkor

$$|B(u,v)| \leq \|p\|_{L^\infty} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{L^2} \leq \tag{10.15}$$

$$\leq \big(\|p\|_{L^\infty} + K_2 \|\mathbf{b}\|_{L^\infty}\big) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1},$$

ahol a (8.10) Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenséget használtuk és $K_2 := \lambda_1^{-1/2}$. Így B korlátos bilineáris forma. A koercivitáshoz felhasználjuk az alábbi azonosságokat:

$$\operatorname{div}(\mathbf{b}u^2) = (\operatorname{div} \mathbf{b})\, u^2\ + \mathbf{b} \cdot \nabla(u^2) = (\operatorname{div} \mathbf{b})\, u^2\ + 2(\mathbf{b} \cdot \nabla u)u = 2(\mathbf{b} \cdot \nabla u)u$$

(a $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ feltevésből), így a Gauss–Osztrogradszkij-tételből és $u_{|\partial\Omega} = 0$ révén

$$0 = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{b}u^2) \cdot \nu \,\mathrm{d}s = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{b}u^2) = \int_\Omega 2(\mathbf{b} \cdot \nabla u)u.$$

Tehát $\int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla u)u = 0$. Ebből

$$\langle Bu, u\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \Big(p\ |\nabla u|^2 + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)u\Big) = \int_\Omega p\ |\nabla u|^2 \geq m\ \|u\|^2_{H_0^1} \tag{10.16}$$

$$(\forall u \in H_0^1(\Omega)),$$

így B koercív is. Másrészt $\phi v := \int_\Omega fv$ korlátos lineáris funkcionál a $H_0^1(\Omega)$ téren, ami ugyanúgy adódik, mint a 10.15. tétel bizonyításában. Így a Lax–Milgram-lemma alapján egyértelműen létezik olyan $u^* \in H_0^1(\Omega)$, amely teljesíti (10.14)-t. □

10.18. Megjegyzés. A tétel nulladrendű taggal együtt is igazolható a bizonyítás értelemszerű módosításával: egyrészt, ha $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu$, ahol $c \in L^\infty(\Omega)$ és $c \geq 0$; általánosabban pedig, ha a $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ és $c \geq 0$ feltételek helyett a $c - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b} \geq 0$ egyenlőtlenség teljesül.

10.3. A Stokes-feladat

Áramlási feladatokban lép fel az alábbi PDE-rendszer:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0\,, \end{cases} \tag{10.17}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ vagy 3) korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel, $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ az áramlás sebességvektora és $p : \Omega \to \mathbb{R}$ a nyomás. Az $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ adott függvény a külső erőkből származtatható. A $-\Delta\mathbf{u}$ kifejezés és az $\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0$ peremfeltétel koordinátánként értendő.

A (10.17) rendszer időben stacionárius lassú áramlást ír le. (Időben változó áramlás esetén a megfelelő első egyenletet időben diszkretizálva a fentihez hasonló feladatot kapunk, de az első egyenlet kiegészül egy $\frac{1}{\tau}\mathbf{u}$ taggal, ahol $\tau > 0$. A megoldhatóságról alább elmondottak erre az esetre is értelemszerűen átvihetők.) A Stokes-feladat a 7.3. szakaszban vizsgált nyeregpont-feladatok tipikus esete, további részletek olvashatók róla pl. a [21, 69] könyvekben.

A gyenge megoldásnál az $\mathbf{u}$ függvényt (a $-\Delta\mathbf{u}$ kifejezés és az $\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0$ peremfeltétel miatt) a $H_0^1(\Omega)^N$ szorzattérben keressük, melyet most is valós értékű függvényekkel definiálunk, így valós Hilbert-tér. A p nyomásnál is szeretnénk a deriválttól megszabadulni és csak $L^2(\Omega)$-ban keresni. Mivel a (10.17) egyenletek a p függvényt csupán additív konstans erejéig határozzák meg, így az egyértelműség érdekében bevezetjük az alábi teret:

$$\dot{L}^2(\Omega) := \{p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0\} \tag{10.18}$$

a szokásos L^2-skalárszorzattal. A gyenge megoldás definíciójához az előző szakaszhoz hasonlóan indulunk ki: a két egyenletet rendre beszorozzuk $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_N) \in H_0^1(\Omega)^N$ és $q \in \dot{L}^2(\Omega)$ tesztfüggvényekkel, majd alkalmazzuk a Green-formulát, ill. Gauss–Osztrogradszkij-tételt. A kapott kifejezés értelmes akkor is, ha $\mathbf{u}$ csak $H_0^1(\Omega)^N$-ben és p csak $\dot{L}^2(\Omega)$-ben van. Itt a vektorértékű esetben használjuk a $\nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} := \sum_{i=1}^N \nabla u_i \cdot \nabla v_i$ jelölést, ill. majd az $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{H^1} := \int_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v}$ skalárszorzatot a $H_0^1(\Omega)^N$ téren. Így az alábbihoz jutunk:

10.19. Definíció. Az $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^N \times \dot{L}^2(\Omega)$ függvénypárt a (10.17) feladat *gyenge megoldásának* nevezzük, ha

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} - \int_\Omega p\,(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \qquad (\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N), \\ \displaystyle\int_\Omega q\,(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (\forall q \in \dot{L}^2(\Omega)). \end{cases} \tag{10.19}$$

A (10.17) feladat gyenge megoldhatóságához a 7.29. tételt szeretnénk felhasználni. Vezessük be az alábbi bilineáris formákat:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} : H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}, \\ &\mathcal{B} : \dot{L}^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{B}(p,\mathbf{v}) := -\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{10.20}$$

Ekkor a (10.19) rendszer éppen (7.16) alakú.

10.20. Állítás. *A fenti $\mathcal{B}$ formára teljesül az inf-sup-feltétel:*

$$\inf_{\substack{p\in\dot{L}^2(\Omega)\\ p\not\equiv 0}} \sup_{\substack{\mathbf{u}\in H_0^1(\Omega)^N\\ \mathbf{u}\not\equiv \mathbf{0}}} \frac{\mathcal{B}(p,\mathbf{u})}{\|p\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} = \gamma > 0. \tag{10.21}$$

Bizonyítás. Ez a divergencia-operátor szuperjektivitásának köszönhető: [48] alapján bármely $p \in \dot{L}^2(\Omega)$ esetén van olyan $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^N$, melyre $p = -\operatorname{div}\mathbf{u}$. Ekkor ugyanis a 4.13. következmény szerint $\|p\|_{L^2} \geq \gamma\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$ alkalmas $\gamma > 0$ állandóval, és ezzel az $\mathbf{u}$-val

$$\mathcal{B}(p,\mathbf{u}) = -\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u}) = \int_\Omega p^2,$$

így

$$\frac{\mathcal{B}(p,\mathbf{u})}{\|p\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} = \frac{\|p\|_{L^2}}{\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} \geq \gamma. \qquad \square$$

10.21. Tétel. *Bármely $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^N$ függvény esetén a (10.17) feladatnak létezik egyetlen $(\mathbf{u},p) \in H_0^1(\Omega)^N \times \dot{L}^2(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Itt $\mathcal{A} : H_0^1(\Omega)^N \times H_0^1(\Omega)^N \to \mathbb{R}$ korlátos és koercív bilineáris forma, hiszen ez épp a $H_0^1(\Omega)^N$ tér skalárszorzata. Másrészt $\mathcal{B} : \dot{L}^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N \to \mathbb{R}$ korlátos bilineáris forma, hiszen

$$|\mathcal{B}(p,\mathbf{v})| \leq \|p\|_{L^2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{L^2} \leq \sqrt{N}\|p\|_{L^2}\|\mathbf{v}\|_{H_0^1},$$

felhasználva, hogy

$$\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^N \partial_i v_i\Big)^2 \leq N\int_\Omega \sum_{i=1}^N (\partial_i v_i)^2 \leq N\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N (\partial_i v_j)^2 =$$

$$= N\|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2}^2 = N\|\mathbf{v}\|_{H_0^1}^2.$$

Mivel a 10.20. állítás alapján fennáll a (10.21) inf-sup-feltétel, a 7.29. tételből nyerjük a kívánt megoldhatóságot. $\square$

10.4. A Maxwell-egyenletek időharmonikus esetének megoldása

A Maxwell-egyenletek a fizika egyik legnevezetesebb modelljét alkotják, és bőséges matematikai vizsgálatban részesültek. Itt [40] alapján azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor az elektromos ill. mágneses mezők az

$$\mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t) = Re\,(E(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t}) \quad \text{és}$$

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3, t) = Re\,(H(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t})$$

($x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$) ún. időharmonikus alakot veszik fel valamely $\omega > 0$ adott állandó frekvencia mellett, és az elektromos áramsűrűség időtől független. Az egyszerűség kedvéért legyen emellett a vezetőképesség és a permeabilitás állandó: $\sigma, \mu > 0$ adott konstansok. Ekkor a Maxwell-egyenletek az alábbi egyszerűbb alakra hozhatók:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} H = \sigma E \\ \operatorname{rot} E = -i\omega\mu H\,. \end{cases}$$

Itt a második egyenletből H kiküszöbölhető és csak E-re kapunk összefüggést. A H-ra elhagyott egyenlőséget a fenti első egyenletből kapott $\operatorname{div} E = \frac{1}{\sigma} \operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0$ egyenlettel helyettesítjük (mivel $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$), így az eredetivel ekvivalens rendszerhez jutunk. Emellett adott $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (szakaszonként sima peremű) tartományon az E mezőre a szokásos (ún. elektromos) peremfeltétel a külső normálissal való vektorszorzat megadása: ezekből a

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\operatorname{rot} E + i\omega\mu\sigma E = 0 \\ \operatorname{div} E = 0 \\ E \times \nu_{|\partial\Omega} = \tilde{E} \times \nu_{|\partial\Omega} \end{cases}$$

feladathoz jutunk, ahol $\tilde{E}$ adott vektormező. Végül vezessük be az $\mathbf{u} := E - \tilde{E}$ új ismeretlen függvényt és rendezzük az $\tilde{E}$-os tagokat a jobb oldalakra. A kapott rendszer alakja

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{u} + i\omega\mu\sigma \mathbf{u} = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = g \\ \mathbf{u} \times \nu_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{10.22}$$

(ahol $\mathbf{f}$ és g tartalmazza az $\tilde{E}$-os tagokat). Ennek megoldhatóságát vezetjük most le alkalmas függvénytérben.

A gyenge megoldás fogalmát (az előző szakaszokhoz hasonlóan) a klasszikus megoldásra teljesülő, kevesebb simaságot követelő formulából kapjuk, most értelemszerűen komplex Szoboljev-terekben. Az első szabály a Gauss–Osztrogradszkij-tételből némi számolással adódik:

10.22. Lemma. *Ha* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, *akkor*

$$\int_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{v}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\,(\nu \times \overline{\mathbf{v}}).$$

Ezután szorozzuk be (10.22) első egyenletét olyan $\mathbf{v} \in C^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ függvény konjugáltjával, amely teljesíti a $\mathbf{v} \times \nu_{|\partial\Omega} = 0$ peremfeltételt, valamint szorozzuk be (10.22) második egyenletét $\operatorname{div} \overline{\mathbf{v}}$-vel, integráljunk, végül adjuk össze ezeket. Ekkor

$$\int_\Omega \big(\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{v}} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \overline{\mathbf{v}}) + i\omega\mu\sigma \mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}\big) = \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \overline{\mathbf{v}} + g \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}}). \quad (10.23)$$

A megfelelő függvénytér definícióját az motiválja, hogy a $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ és $\operatorname{div} \mathbf{u}$ legyen értelmes mint L^2-beli függvény. Ez a természetes minimális követelmény (10.23) értelmezhetőségéhez. Vezessük be az alábbi tereket:

$$\begin{aligned}
H(\operatorname{div}) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \ \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \text{ disztribúció-értelemben}\},\\
H(\operatorname{rot}) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \ \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \text{ disztribúció-értelemben}\},\\
H_0(\operatorname{rot}) &:= \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}) : \ \mathbf{v} \times \nu_{|\partial\Omega} = 0 \text{ nyom-értelemben}\},
\end{aligned}$$

ahol ν a külső normálvektor. (A $\mathbf{v} \times \nu_{|\partial\Omega}$ nyom létezése egy megfelelő tétel következménye [40].) Végül legyen

$$H := H(\operatorname{div}) \cap H_0(\operatorname{rot})$$

az alábbi skalárszorzattal:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H := \int_\Omega \big(\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{v}} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \overline{\mathbf{v}}) + \mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}\big). \quad (10.24)$$

A definíciók és az L^2 terek teljessége alapján igazolható, hogy H teljes. Valójában H nem más, mint $C_0^\infty(\Omega)$ teljessé tétele a fenti skalárszorzattal.

10.23. Definíció. Az $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}) \cap H_0(\operatorname{rot})$ függvényt a (10.22) feladat *gyenge megoldásának* nevezzük, ha (10.23) teljesül bármely $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}) \cap H_0(\operatorname{rot})$ esetén.

A megoldhatóság igazolásához két lemmára van szükség. Az első a 10.20. állítás bizonyításában szereplő szuperjektivitás megfelelője div helyett rot-ra (lényegében a $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ azonosság megfordítása):

10.24. Lemma. [40] *Legyen* $\mathbf{w} \in H(\mathrm{div})$, *melyre* $\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0$. *Ekkor létezik olyan* $\mathbf{s} \in H(\mathrm{rot})$, *melyre* $\mathbf{w} = \mathrm{rot}\,\mathbf{s}$, *sőt melyre* $\|\mathbf{w}\|_{L^2} \geq \gamma\|\mathbf{s}\|_{L^2}$ *alkalmas* $\gamma > 0$ *állandóval.*

10.25. Lemma. *Az*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_0 := \int_\Omega \big(\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{v}} + (\mathrm{div}\,\mathbf{u})(\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{v}})\big)$$

skalárszorzat a (10.24) *skalárszorzatéval ekvivalens normát indukál a* $H = H(\mathrm{div}) \cap H_0(\mathrm{rot})$ *téren.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{v} \in H$ adott. Nyilván $\|\mathbf{v}\|_H \geq \|\mathbf{v}\|_0$, a visszairányhoz pedig elég igazolnunk, hogy $\|\mathbf{v}\|_{L^2} \leq \tilde{c}\,\|\mathbf{v}\|_0$, ahol $\tilde{c} > 0$ független $\mathbf{v}$-től. Tekintsük a

$$\begin{cases} -\Delta z = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \\ z_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

feladatot, melynek a 10.15. tétel szerint egyértelműen létezik $z \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása. Itt $\mathrm{div}\,\nabla z = \Delta z \in L^2(\Omega)$, így $\nabla z \in H(\mathrm{div})$. Legyen $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \nabla z$. Ekkor

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2} \leq \|\mathbf{w}\|_{L^2} + \|\nabla z\|_{L^2},$$

ahol utóbbira a 10.16. megjegyzés alapján van olyan $c > 0$, hogy $\|\nabla z\|_{L^2} \leq c\|\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|_{L^2}$. Másrészt $\mathbf{w} \in H(\mathrm{div})$ és $\mathrm{div}\,\mathbf{w} = \mathrm{div}\,\mathbf{v} - \Delta z = 0$, így a 10.24. lemma szerint létezik olyan $\mathbf{s} \in H(\mathrm{rot})$, melyre $\mathbf{w} = \mathrm{rot}\,\mathbf{s}$, sőt $\|\mathbf{w}\|_{L^2} \geq \gamma\|\mathbf{s}\|_{L^2}$. Itt a $z_{|\partial\Omega} = 0$ peremfeltétel miatt ∇z párhuzamos ν-vel, így $\nabla z \times \nu_{|\partial\Omega} = 0$, másrészt a $\mathbf{v} \in H$ feltételből $\mathbf{v} \times \nu_{|\partial\Omega} = 0$, így $\mathbf{w} \times \nu_{|\partial\Omega} = 0$. Ebből a 10.22. lemma alapján $\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{s} \cdot \overline{\mathbf{w}} = \int_\Omega \mathbf{s} \cdot \mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{w}}$. Így $\|\mathbf{w}\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{s}\|_{L^2}\|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}\|_{L^2} \leq \frac{1}{\gamma}\|\mathbf{w}\|_{L^2}\|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}\|_{L^2}$, azaz $\|\mathbf{w}\|_{L^2} \leq \frac{1}{\gamma}\|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}\|_{L^2} = \frac{1}{\gamma}\|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\|_{L^2}$, felhasználva, hogy $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \nabla z$ és hogy $\mathrm{rot}\,\nabla \equiv 0$. Együtt tehát

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2} \leq \frac{1}{\gamma}\|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\|_{L^2} + c\|\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|_{L^2} \leq \tilde{c}\left(\|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\|_{L^2}^2 + \|\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|_{L^2}^2\right)^{1/2} = \tilde{c}\,\|\mathbf{v}\|_0.$$

$\square$

10.26. Tétel. *Bármely* $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$ *és* $g \in L^2(\Omega)$ *esetén a (10.22) feladatnak létezik egyetlen* $\mathbf{u} \in H(\mathrm{div}) \cap H_0(\mathrm{rot})$ *gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Legyen

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_\Omega \big(\mathrm{rot}\,\mathbf{u} \cdot \mathrm{rot}\,\overline{\mathbf{v}} + (\mathrm{div}\,\mathbf{u})(\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{v}}) + i\omega\mu\sigma\mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}\big) \qquad (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H)$$

$$\text{és} \quad \phi v := \int_\Omega (\mathbf{f} \cdot \overline{\mathbf{v}} + g\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{v}}) \qquad (\forall \mathbf{v} \in H).$$

Ekkor a (10.23) gyenge alak $B(u,v) = \phi v$ $(\forall v \in H)$ alakban írható. Itt

$$Re\, B(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \int_\Omega \big(|\operatorname{rot}\mathbf{u}|^2 + |\operatorname{div}\mathbf{u}|^2\big) = \|\mathbf{u}\|_0^2 \qquad (\forall \mathbf{u} \in H),$$

így a 10.25. lemma szerint

$$Re\, B(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq m\, \|\mathbf{u}\|_H^2 \qquad (\forall \mathbf{u} \in H)$$

alkalmas $m > 0$ **u**-tól független konstanssal, azaz B koercív bilineáris forma. B korlátossága a (10.24) skalárszorzat definíciójából nyilvánvaló. Emellett

$$|\phi v| \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2}\|\mathbf{v}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_{L^2} \leq \tilde{c}\,(\|\mathbf{f}\|_{L^2} + \|g\|_{L^2})\,\|\mathbf{v}\|_H \qquad (\forall \mathbf{v} \in H),$$

azaz $\phi : H \to \mathbb{C}$ korlátos lineáris funkcionál. Így alkalmazhatjuk a Lax–Milgram-lemmát (7.16. tétel), amely a kívánt $\mathbf{u} \in H$ megoldást adja. □

10.27. Megjegyzés. Ha $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$, akkor eleme $H(\mathrm{div})$-nek és $H_0(\mathrm{rot})$-nak is. Értelemszerű a kérdés: megfordítva, ha $\operatorname{div}\mathbf{v}$ és $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ is értelmes mint L^2-beli függvény, abból nem következik-e már, hogy $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3$; ekkor ugyanis

$$H \equiv H(\mathrm{div}) \cap H_0(\mathrm{rot}) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 :\ \mathbf{v} \times \nu_{|\partial\Omega} = 0 \text{ nyom-értelemben}\} \tag{10.25}$$

lenne, ami fölöslegessé tenné a fent használt bonyolultabb definíciót. Valóban, ha Ω konvex, vagy pereme elég sima, akkor a fenti egyenlőség igaz; az Ω-ra való pontos feltételek és a háttéreredmények a [41, 64] cikkekben találhatók. Általában (bonyolultabb, pl. konkáv sarkokat tartalmazó tartományokra, amik tipikusak az elektromágneses feladatokban) viszont nem ismeretes ez az azonosság, így nem kerülhető el a $H := H(\mathrm{div}) \cap H_0(\mathrm{rot})$ definíció.

10.5. Parabolikus Cauchy-feladat

Tekintsük az alábbi parabolikus Cauchy- (vagy kezdetiérték-)feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \qquad (\Omega \times \mathbb{R}^+\text{-ban}) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad (\forall x \in \Omega) \\ u_{|\partial\Omega\times\mathbb{R}^+} = 0\,, \end{cases} \tag{10.26}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ korlátos tartomány. Megmutatjuk, hogy ennek megoldhatósága egyszerűen következik a 9.2. szakasz eredményeiből. A fenti feladat természetesen általánosabb adatokkal is megoldható, lásd pl. [67].

Legyen $H := L^2(\Omega)$ és $L := -\Delta$, ahol $D(L) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ekkor L teljesíti a 9.11. következmény feltételeit, azaz szigorúan pozitív és inverze kompakt. Jelölje (λ_n) és (e_n) a $-\Delta$ operátor sajátértékeinek és megfelelő sajátvektorainak sorozatát, ahol utóbbiak TONR-t alkotnak $L^2(\Omega)$-ban. A 9.11. következmény és 9.14. állítás szerint így a (10.26) feladatnak bármely $u_0 \in D(L)$ esetén egyértelműen létezik megoldása, és ha

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) \qquad (x \in \Omega),$$

akkor a megoldás előáll

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} c_n e_n(x) \qquad (x \in \Omega,\ t > 0) \tag{10.27}$$

alakban.

Megjegyezzük, hogy a 9.2. szakasz alapján a megoldás a (9.5) egyenlőséget teljesíti $L^2(\Omega)$-normában, amiből még nem következik, hogy (10.26) pontonként teljesül, utóbbit a (10.27) sorfejtésből lehet levezetni. Emellett a 9.13. tétel alapján bármely $u_0 \in L^2(\Omega)$ esetén is igaz a megoldhatóság, ami klasszikus értelemben szintén a (10.27) sorfejtésből vezethető le. Végül, a 9.14. megjegyzés szerint most a megoldás L^2-normája 0-hoz tart, amit szokás disszipativitásnak hívni, ez a konstans 0 megoldás stabilitását fejezi ki.

III. rész

Nemlineáris operátoregyenletek elmélete

11. fejezet

Nemlineáris operátorok alaptulajdonságai

Az eddigiekben vizsgált lineáris feladatok sokszor egyszerűsített modellekből származnak, melyek pontosabb leírása már nemlineáris operátorokat tartalmaz. A lineáris struktúra elhagyása jelentősen módosítja a megfelelő operátorok elméletét. Ebben és a következő fejezetben a nemlineáris operátorok egyes alapfogalmait és tulajdonságait tárgyaljuk, melyekre majd szükség lesz a megoldhatósági eredményekben és közelítő módszereknél. A témakörről részletesebben olvashatunk a [3, 19, 23, 76] könyvekben.

A nemlineáris operátorokról szóló részekben a szereplő Hilbert-terek (és ezen belül a Lebesgue- és Szoboljev-terek) valósak lesznek, szemben a lineáris esettel, ahol alaphelyzetben a komplex esetre volt szükség.

11.1. Egy elliptikus operátor

A fejezet bevezetéseként egy fontos példát ismertetünk nemlineáris operátorra, amely a későbbi alkalmazásokban is felmerül, valamint a fejezet fő fogalmait is ezen szemléltetjük majd. Először a jobb érthetőség érdekében ennek is egy speciális esetét adjuk meg.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tekintsük a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(a(|\nabla u|^2)\,\nabla u\Big) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

peremértékfeladatot, ahol $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ adott folytonos, korlátos függvény. Ez a feladat a (10.11)-belihez hasonló, de most ∇u együtthatója maga is ∇u-

tól függ, ettől a feladat nemlineáris. Legyen $T : L^2(\Omega) \supset\!\!\to L^2(\Omega)$ a feladatban szereplő operátor, $D(T) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ értelmezési tartománnyal:

$$T(u) := -\operatorname{div}\Big(a(|\nabla u|^2)\, \nabla u\Big),$$

ekkor tehát a (11.1)-beli egyenlet a

$$T(u) = g$$

alakban írható fel.

A lineáris esethez hasonlóan célszerű értelmezni a fenti feladat gyenge alakját. Ehhez a szokásos módon jutunk: a formális egyenletet szorozzuk egy $v \in H_0^1(\Omega)$ tesztfüggvénnyel, majd integrálunk. Egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt tehát a (11.1) feladat gyenge megoldásának nevezünk, ha

$$\int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega gv \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)). \tag{11.2}$$

Korábban a gyenge megoldás létezése azon múlt, hogy a bal oldalon szereplő formula egy skalárszorzatot definiált, most azonban T nemlineáris, így ez az út nem járható. Ehelyett a (11.2) egyenletet olyan operátoregyenlet alakjában szeretnénk felírni, ahol a szereplő operátor jobb tulajdonságú az eredeti T-nél, amely az $L^2(\Omega)$ térben értelmezve nem is folytonos. Célunk tehát az, hogy találjunk egy olyan $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátort, melyre

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla v \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)). \tag{11.3}$$

A Riesz-féle reprezentációs tétel alapján ugyanis (11.2) jobb oldalát is hasonló alakban írhatjuk fel: létezik olyan $b \in H_0^1(\Omega)$, hogy

$$\int_\Omega gv = \langle b, v\rangle_{H_0^1} \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)).$$

Ha tehát létezik a (11.3)-ban kívánt F, akkor

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \langle b, v\rangle_{H_0^1} \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)),$$

ami ekvivalens az

$$F(u) = b$$

operátoregyenlettel $H_0^1(\Omega)$-ban.

Megjegyezzük, hogy a fejezet elején említettek szerint most $H_0^1(\Omega)$ valós értékű függvényekből áll és valós Hilbert-tér, melyben a skalárszorzat

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \tag{11.4}$$

11.1. Állítás. *A (11.3) egyenlőség egyértelműen meghatároz egy $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátort.*

Bizonyítás. Legyen $u \in H_0^1(\Omega)$ rögzített és legyen $\psi_u : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ a következő funkcionál:

$$\psi_u v := \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla v.$$

Ekkor ψ_u lineáris, illetve a

$$|\psi_u v| \leq \int_\Omega \left| a(|\nabla u|^2)\right| |\nabla u| \, |\nabla v| \leq (\sup a) \, \|\nabla u\|_{L^2} \, \|\nabla v\|_{L^2} =$$

$$= (\sup a) \, \|u\|_{H_0^1} \, \|v\|_{H_0^1}$$

becslés miatt ψ_u korlátos. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, hogy

$$\psi_u v = \langle \widetilde{u}, v \rangle_{H_0^1} \qquad (\forall \; v \in H_0^1(\Omega)).$$

Jelöljük F-fel azt a hozzárendelést, ami az u-hoz $\widetilde{u}$-t rendeli, ami az eddigiek szerint jóldefiniált leképezés. Erre az F-re

$$\langle F(u), v \rangle_{H_0^1} = \langle \widetilde{u}, v \rangle_{H_0^1} = \psi_u v = \int_\Omega a(|\nabla u|^2)\nabla u \cdot \nabla v \qquad (\forall \; v \in H_0^1(\Omega)). \quad \square$$

A fenti F operátor általánosabb helyzetben is értelmezhető. Legyen $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, és $T(u) := -\operatorname{div} f(x, \nabla u)$. (Ez a szokásos jelölés a precízebb $T(u) := -\operatorname{div}\big(f \circ (id, \nabla u)\big)$ helyett.) Tegyük fel, hogy létezik $M > 0$, hogy

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \eta) \right\| \leq M \qquad (\forall \; (x, \eta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n), \tag{11.5}$$

ahol $\|.\|$ az euklideszi norma által indukált mátrixnormát jelenti. Ha például $\left|\big(a(r^2)r\big)'\right| \leq M$, akkor az $f(x, \eta) = a\big(|\eta|^2\big)\eta$ függvény teljesíti ezt a feltételt (ami a későbbi (13.4.1) egyenlőtlenséghez hasonlóan látható); erre az f-re $f(x, \nabla u) = a(|\nabla u|^2)\nabla u$, azaz visszakapjuk az előbbi példabeli operátor szerkezetét. Az általánosabb esetben is értelmezhető olyan $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátor, melyre most

$$\langle F(u), v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega f(x, \nabla u) \cdot \nabla v \qquad (\forall \; v \in H_0^1(\Omega)), \tag{11.6}$$

ez a 11.1. állítás mintájára, némileg több számolással igazolható. Most megmutatjuk, hogy (az eredeti T-vel szemben) F folytonos.

11.2. Állítás. *Ha teljesül (11.5), akkor F Lipschitz-folytonos a $H_0^1(\Omega)$ téren.*

Bizonyítás. A feltételből a Lagrange-egyenlőtlenség miatt f Lipschitz-folytonos η-ban:

$$|f(x,\eta) - f(x,\eta')| \le M\,|\eta - \eta'|\,, \tag{11.7}$$

ahol $|.|$ az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi távolságot jelöli. Ezt örökli F:

$$\begin{aligned}
&\|F(u) - F(v)\|_{H_0^1} = \\
&\quad = \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} \langle F(u) - F(v), z\rangle_{H_0^1} = \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega (f(x,\nabla u) - f(x,\nabla v)) \cdot \nabla z \le \\
&\quad \le \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega |f(x,\nabla u) - f(x,\nabla v)|\; |\nabla z| \le \\
&\quad \le \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} M \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|\; |\nabla z| \le \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} M\, \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2}\, \|\nabla z\|_{L^2} = \\
&\quad = \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} M\, \|u - v\|_{H_0^1}\, \|z\|_{H_0^1} = M\, \|u - v\|_{H_0^1}\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

Most differenciálhatósági tulajdonságokra térünk át, amelyekre szükség lesz az operátoregyenletek vizsgálatához.

11.2. Gâteaux-derivált

11.2.1. Alapfogalmak

11.3. Definíció. Legyenek X, Y normált terek. Egy $F : X \to Y$ (nemlineáris) operátor *Gâteaux-deriválható* az $u \in X$ pontban, ha

(i) bármely $v \in X$ esetén létezik

$$\partial_v F(u) := \lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\,;$$

(ii) a $v \mapsto \partial_v F(u)$ hozzárendelés folytonos lineáris operátor X-ből Y-ba.

A második tulajdonság szerinti operátort $F'(u)$-val jelölve

$$F'(u)v = \partial_v F(u) \quad \text{és} \quad F'(u) \in B(X,Y).$$

Idézzük fel a szokásos deriválhatóság fogalmát is, melyet szokás Fréchet-deriválhatóságnak is hívni. Az $F : X \to Y$ operátor *Fréchet-deriválható* az $u \in X$ pontban, ha van olyan $A \in B(X,Y)$ folytonos lineáris operátor, hogy

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|F(u+h) - F(u) - Ah\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor A egyértelmű, és szintén $F'(u)$-val jelöljük. (Ez az alábbiak miatt nem okoz félreértést.)

11.4. Megjegyzés. (i) A Fréchet-deriválhatóságból következik a Gâteaux-deriválhatóság, és a kétféle derivált egybeesik. Visszafelé viszont nem következik, már $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények esetén is előfordul, hogy f Gâteaux-deriválható, de nem Fréchet-deriválható.
(ii) Magasabbrendű deriváltak a definíció ismételt alkalmazásával értelmezhetők. Ha például $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható és $\Phi' : X \to B(X, \mathbb{R}) = X^*$ is Gâteaux-deriválható valamely $u \in X$ pontban, akkor $\Phi''(u) := (\Phi')'(u) \in B(X, X^*)$.

Példa Gâteaux-deriváltra. Tekintsük a (11.6)-beli operátort, azaz legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, H a $H_0^1(\Omega)$ valós Hilbert-tér a (11.4) skalárszorzattal, és $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$,

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega f(x, \nabla u) \cdot \nabla v \qquad (\forall u, v \in H_0^1(\Omega)), \tag{11.8}$$

ahol $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Tegyük fel még, hogy a $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak és sajátértékeik közös korlát alá esnek. Mivel szimmetrikus mátrix euklideszi vektornorma által indukált normája a maximális abszolút értékű sajátértéke, így az előzőek miatt teljesül (11.5).
Megmutatjuk, hogy ekkor F Gâteaux-deriválható. Legyen $u \in H_0^1(\Omega)$ tetszőleges. Rögzített $h, v \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \langle F(u+th) - F(u), v\rangle_{H_0^1} = \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{1}{t}((f(x, \nabla u + t\nabla h) - f(x, \nabla u)) \cdot \nabla v.$$

Az $f \in C^1$ feltétel miatt a fenti integrandus m. m. pontonként konvergál, és limesze

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}((f(x, \nabla u + t\nabla h) - f(x, \nabla u)) \cdot \nabla v = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u)\nabla h \cdot \nabla v,$$

így ha $\partial_h F(u)$ létezik, akkor

$$\langle \partial_h F(u), v\rangle_{H_0^1} = \langle D(h,u), v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u)\nabla h \cdot \nabla v \qquad (\forall h, v \in H_0^1(\Omega)).$$

Itt adott $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén $D(h,u) \in H_0^1(\Omega)$ létezését a Riesz-tétel garantálja, mivel a fenti integrál folytonos lineáris funkcionálja v-nek: (11.5) miatt az integrandus $M|\nabla h|\,|\nabla v|$-vel, az integrál pedig $M\|h\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$-val becsülhető. Ahhoz, hogy $D(h,u) = \partial_h F(u)$ legyen (azaz a fent definiált $D(h,u)$ függvény valóban iránymenti derivált legyen), az kell, hogy alábbi limesz nulla:

$$\lim_{t\to 0} \Big\| \frac{1}{t}(F(u+th) - F(u)) - D(h,u) \Big\|_{H_0^1} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \Big\langle \frac{1}{t}(F(u+th)-F(u)) - D(h,u),\, v\Big\rangle$$

$$= \lim_{t\to 0} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega \bigg(\frac{1}{t}\Big((f(x,\nabla u + t\nabla h) - f(x,\nabla u)\Big) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\nabla u)\nabla h\bigg)\cdot \nabla v$$

$$= \lim_{t\to 0} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega \Big(\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\nabla u + \theta t\nabla h) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\nabla u)\Big)\nabla h\cdot\nabla v$$

$$\leq \lim_{t\to 0} \Big\| \Big(\frac{\partial f}{\partial \eta}(id,\nabla u + \theta t\nabla h) - \frac{\partial f}{\partial \eta}(id,\nabla u)\Big)\nabla h\Big\|_{L^2},$$

ahol $|\theta| \leq 1$. A kapott L^2-normában olyan integrál szerepel, melyben az integrandus $t \to 0$ esetén $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ folytonossága miatt maga is 0-hoz tart. Emellett az integrandus (11.5) miatt bármely t esetén felülről becsülhető $(2M|\nabla h|)^2$-tel, ami a $h \in H_0^1(\Omega)$ feltétel miatt L^1-beli majoráns. Így a Lebesgue-tétel alapján az integrál is 0-hoz tart, tehát $D(h,u) = \partial_h F(u)$.
Itt $h \mapsto \partial_h F(u)$ lineáris operátor, és korlátos is, hiszen (szintén (11.5) miatt)

$$\|\partial_h F(u)\| = \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \langle \partial_h F(u), v\rangle_{H_0^1} \leq \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} M\int_\Omega |\nabla h|\,|\nabla v| \leq$$

$$\leq \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} M\|h\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} = M\|h\|_{H_0^1}.$$

Így tehát F Gâteaux-deriválható és

$$\langle F'(u)h, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\nabla u)\nabla h\cdot\nabla v \qquad (\forall u,h,v \in H_0^1(\Omega)). \tag{11.9}$$

11.2.2. Gâteaux-deriválható funkcionálok

Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ számértékű leképezés (funkcionál). Ekkor a Gâteaux-derivált definíciójában $Y = \mathbb{R}$, és $\Phi'(u) \in B(X,\mathbb{R}) = X^*$. Itt a 3.3 szakasz jelölésével

$$\langle \Phi'(u), v\rangle := \Phi'(u)v,$$

ami Hilbert-tér esetén valóban skalárszorzat.

11.5. Definíció. Legyen X normált tér, $u,v \in X$. Ekkor

(i) $[u,v] = \{u + t(v-u) :\ t \in [0,1]\}$ az u-t és v-t összekötő szakasz;

(ii) ha $\Phi : X \to \mathbb{R}$, akkor $\phi_{u,v} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\ \phi_{u,v}(t) := \Phi(u + t(v-u))$.

11.6. Állítás (Lagrange-középértéktétel). *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-differenciálható, $u,v \in X$. Ekkor létezik $\xi \in [u,v]$, hogy $\Phi(v) - \Phi(u) = \langle \Phi'(\xi), v-u\rangle$.*

Bizonyítás. Legyen $\phi = \phi_{u,v}$, ekkor $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenciálható és

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(u+t(v-u)+h(v-u)) - \Phi(u+t(v-u))}{h} = \\ &= \partial_{v-u}\Phi(u+t(v-u)) = \langle \Phi'(u+t(v-u)), v-u\rangle .\end{aligned}$$

A valós függvényekre vonatkozó Lagrange-középértéktétel szerint létezik $\eta \in [0,1]$, hogy $\phi(1)-\phi(0) = \phi'(\eta)$. A $\xi := u+\eta(v-u)$ vektorral a kívánt állítást kapjuk. □

11.7. Állítás (másodrendű Taylor-formula). *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ kétszer Gâteaux-differenciálható, $u, v \in X$. Ekkor létezik $\xi \in [u,v]$, hogy*

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \langle \Phi'(u), v-u\rangle + \frac{1}{2}\langle \Phi''(\xi)(v-u), v-u\rangle .$$

Bizonyítás. Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy $\phi = \phi_{u,v}$ kétszer differenciálható és $\phi''(t) = \langle \Phi''(u+t(v-u))(v-u), v-u\rangle$. A másodrendű valós Taylor-formulát ϕ-re felírva kapjuk, hogy $\phi(1)-\phi(0) = \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\eta)$, ahonnan ismét a $\xi = u + \eta(v-u)$ választással adódik az állítás. □

11.8. Definíció. Legyenek X, Y és Z normált terek, $A : X \to B(Y,Z)$ leképezés. Azt mondjuk, hogy

(i) A *hemifolytonos*, ha minden $u, v \in X$ és minden $w \in Y$ esetén a $t \mapsto A(u+tv)w$ leképezés folytonos $\mathbb{R}$-ből Z-be;

(ii) A *bihemifolytonos*, ha minden $u, v, w \in X$, $z \in Y$ esetén az $(s,t) \mapsto A(u+tv+sw)z$ leképezés folytonos $\mathbb{R}^2$-ből Z-be.

A fenti definíció általánossága arra jó, hogy többféle szokásos helyzetben is értelmezhessünk (bi)hemifolytonosságot. Legyen például $\Phi : X \to \mathbb{R}$ adott funkcionál.

- Ha $Y = Z = \mathbb{R}$, akkor $B(Y,Z) = B(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, így értelmezhető $\Phi : X \to \mathbb{R}$ (bi)hemifolytonossága.
- Ha $X = Y$ és $Z = \mathbb{R}$, akkor $B(Y,Z) = B(X,\mathbb{R}) = X^*$, így értelmezhető a $\Phi' : X \to X^*$ Gâteaux-derivált (bi)hemifolytonossága.
- Ha $X = Y$ és $Z = X^*$, akkor $B(Y,Z) = B(X,X^*)$, így értelmezhető a $\Phi'' : X \to B(X,X^*)$ második Gâteaux-derivált (bi)hemifolytonossága.

11.9. Tétel (Newton–Leibniz). *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$, $u, v \in X$.*

(1) Ha Φ Gâteaux-deriválható és Φ' hemifolytonos, akkor

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_0^1 \langle \Phi'(u + t(v-u)), v - u\rangle \, dt.$$

(2) Ha Φ kétszer Gâteaux-deriválható és Φ'' hemifolytonos, akkor

$$\Phi'(v) - \Phi'(u) = \int_0^1 \Phi''(u + t(v-u))(v-u) dt,$$

amin azt értjük, hogy minden $z \in X$ esetén

$$\langle \Phi'(v) - \Phi'(u), z\rangle = \int_0^1 \langle \Phi''(u + t(v-u))(v-u), z\rangle \, dt.$$

Bizonyítás.
(1) Legyen $\phi = \phi_{u,v}$, azaz $\phi(t) = \Phi(u + t(v-u))$, ekkor $\phi'(t) = \langle \Phi'(u + t(v-u)), v - u\rangle$. Itt Φ' hemifolytonossága miatt ϕ' folytonos, emiatt ϕ-re érvényes a közönséges Newton-Leibniz szabály. Azaz $\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)\mathrm{d}t$, ami épp a kívánt egyenlőség.
(2) Legyen $z \in X$ is rögzített és $\psi = \psi_{u,v,z}$, $\psi(t) := \langle \Phi'(u + t(v-u)), z\rangle$. Ekkor a fentihez hasonlóan $\psi'(t) = \langle \Phi''(u + t(v-u))(v-u), z\rangle$. Itt $t \mapsto \Phi''(u + t(v-u))(v-u)$ folytonos, mert Φ'' hemifolytonos, emiatt ψ' is folytonos. Így $\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\mathrm{d}t$, azaz

$$\langle \Phi'(v) - \Phi'(u), z\rangle = \langle \Phi'(v), z\rangle - \langle \Phi'(u), z\rangle =$$

$$= \int_0^1 \langle \Phi''(u + t(v-u))(v-u), z\rangle \, \mathrm{d}t. \qquad \square$$

11.10. Megjegyzés. A 11.2.1 szakaszban Gâteaux-deriváltra adott példa olyan, hogy a derivált bihemifolytonos. Éspedig, láttuk, hogy a (11.8)-beli $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátor Gâteaux-deriváltja a (11.9) operátor. Itt a $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ derivált folytonossága miatt bármely $u, v, w, z \in H_0^1(\Omega)$ esetén az

$$(s,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u + t\nabla v + s\nabla w)\nabla z$$

leképezés folytonos $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}^n$-be. Ebből bármely $u, v, w, z \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\lim_{s,t\to 0} \|F'(u+tv+sw)z - F'(u)z\| = \lim_{s,t\to 0} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \langle F'(u+tv+sw)z - F'(u)z, v\rangle$$

$$= \lim_{s,t\to 0} \sup_{\|v\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega \Big(\frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u + t\nabla v + s\nabla w)\nabla z \cdot \nabla v - \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u)\nabla z \cdot \nabla v \Big)$$

$$\leq \lim_{s,t\to 0} \Big\| \frac{\partial f}{\partial \eta}(id, \nabla u + t\nabla v + s\nabla w)\nabla z - \frac{\partial f}{\partial \eta}(id, \nabla u)\nabla z \Big\| = 0$$

az említett példához hasonló megfontolásból (az integrandus pontonként 0-hoz tart, és $2M|\nabla z|^2$ L^1-beli majoráns). Ez épp azt jelenti, hogy az $(s,t) \mapsto F'(u + tv + sw)z$ leképezés folytonos $\mathbb{R}^2$-ből $H_0^1(\Omega)$-ba, azaz F' bihemifolytonos.

11.3. Monoton operátorok és konvex funkcionálok

Most néhány, a valós függvényekével analóg fogalommal és ezek kapcsolatával foglalkozunk. A konvexitás és monotonitás fogalma megfelelő analógiával áthozható, a nemnegativitás szerepét pedig a pozitív szemidefinitség játssza majd.

11.11. Definíció. A $\Phi : X \to \mathbb{R}$ funkcionál

(i) *konvex*, ha minden $u, v \in X$ esetén $\phi_{u,v}$ konvex;

(ii) *szigorúan konvex*, ha minden $u, v \in X$ esetén $\phi_{u,v}$ szigorúan konvex.

11.12. Állítás. *Ha $\Phi : X \to \mathbb{R}$ konvex és Gâteaux-deriválható, akkor minden $u, v \in X$ esetén $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle$.*

Bizonyítás. Legyen $\phi = \phi_{u,v}$. Mivel ϕ konvex, ezért $\phi(1) - \phi(0) \geq \phi'(0)(1 - 0) = \phi'(0)$, ami éppen a kívánt $\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \Phi'(u), v - u \rangle$ állítást adja. $\square$

A konvexitás után szeretnénk a monotonitás fogalmát is kiterjeszteni normált térre. Ezt a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós monoton növő függvényeket jellemző $(\phi(v) - \phi(u))(v - u) \geq 0$ $(\forall u, v \in \mathbb{R})$ egyenlőtlenség alapján tehetjük meg $X \to X^*$ leképezésekre.

11.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy $F : X \to X^*$

(i) *monoton* operátor, ha

$$\langle F(v) - F(u), v - u \rangle \geq 0 \quad (\forall u, v \in X);$$

(ii) *szigorúan monoton* operátor, ha

$$\langle F(v) - F(u), v - u \rangle > 0 \quad (\forall u \neq v \in X);$$

(iii) *egyenletesen monoton* operátor, ha létezik $m > 0$, hogy

$$\langle F(v) - F(u), v - u \rangle \geq m\|u - v\|^2 \quad (\forall u, v \in X).$$

11.14. Állítás. *Legyen $\Phi : X \to \mathbb{R}$ kétszer Gâteaux-deriválható. Ekkor az alábbi három állítás ekvivalens:*

(i) *Φ konvex;*

(ii) *$\Phi' : X \to X^*$ monoton operátor;*

(iii) *$\Phi''(u) \geq 0$ minden $u \in X$-re, azaz $\langle \Phi''(u)h, h\rangle \geq 0$ minden $h \in X$-re.*

Bizonyítás.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Legyen $u, v \in X$ rögzített és $\phi = \phi_{u,v}$, ami a feltétel szerint konvex, így ϕ' monoton növő. Ebből $\phi'(1) - \phi'(0) \geq 0$, ami azt jelenti, hogy $\langle \Phi'(v) - \Phi'(u), v - u\rangle \geq 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. A definíciókból, $v := u + th$ mellett

$$\langle \Phi''(u)h, h\rangle = \langle \partial_h \Phi'(u), h\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{\Phi'(u+th) - \Phi'(u)}{t}, h \right\rangle =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \langle \Phi'(u+th) - \Phi'(u), h\rangle =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \langle \Phi'(u+th) - \Phi'(u), (u+th) - u\rangle \geq 0.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Legyen $u, v \in X$ tetszőleges és $\phi = \phi_{u,v}$, ekkor létezik ϕ'' és

$$\phi''(t) = \langle \Phi''(u + t(v-u))(v-u), v-u\rangle \geq 0$$

a feltétel szerint (a $h = v - u$ vektorral). Így ϕ konvex, amiből következik, hogy Φ konvex. □

11.15. Megjegyzés. A 11.10. megjegyzéshez hasonlóan igazolhatóak az alábbi, speciális esetekről szóló állítások:

(1) Φ pontosan akkor szigorúan konvex, ha $\Phi' : X \to X^*$ szigorúan monoton operátor. Ilyenkor Φ' injektív is.

(2) $\Phi' : X \to X^*$ pontosan akkor egyenletesen monoton operátor, ha Φ'' egyenletesen pozitív, azaz létezik $m > 0$, hogy $\langle \Phi''(u)h, h\rangle \geq m\|h\|^2$ $(\forall u, h \in X)$. Ilyenkor Φ-t egyenletesen konvexnek hívjuk.

11.16. Megjegyzés. Az (i) és (ii) tulajdonságok ekvivalenciájához elég, ha Φ egyszer Gâteaux-deriválható. A $(ii) \Rightarrow (i)$ irány ekkor az $(i) \Rightarrow (ii)$ mintájára következik.

Konvex funkcionálra. ill. monoton operátorra a 13.4.1. szakaszban látunk majd tipikus példát.

12. fejezet

Potenciáloperátorok

12.1. A potenciál fogalma és létezése

12.1. Definíció. Legyen X Banach-tér. Egy $A : X \to X^*$ (nemlineáris) operátort *potenciáloperátornak* nevezünk, ha van olyan $J : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható funkcionál, melyre $J' = A$, azaz $J'(u) = A(u)$ minden $u \in X$ esetén. Ekkor a J funkcionált A *potenciáljának* hívjuk.

12.2. Megjegyzés. (i) Ha létezik potenciál, akkor additív konstans erejéig egyértelmű. (Ez a Lagrange-középértéktételből következik, és nemcsak az egész X-en, hanem egyszeresen összefüggő halmazon értelmezett operátorokra is igaz.)
(ii) Egyszerű példa: ha $f \in X^*$ adott elem, akkor az $A(u) \equiv f$ konstans leképezésnek a $J(u) = \langle f, u \rangle$ $\forall u \in X$ (azaz $J = f$) lineáris funkcionál potenciálja.

Véges dimenzióban ismeretes annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy egyszeresen összefüggő halmazon értelmezett C^1-függvénynek létezzen primitív függvénye. Ehhez hasonló feltétel most is létezik, amit az egyszerűség kedvéért az egész téren értelmezett leképezésre adunk meg.

12.3. Tétel. *Legyen $A : X \to X^*$ Gâteaux-deriválható és A' bihemifolytonos. Ekkor A pontosan akkor potenciáloperátor, ha A' szimmetrikus, azaz*

$$\langle A'(u)v, h \rangle = \langle A'(u)h, v \rangle \qquad (\forall u, h, v \in X). \tag{12.1}$$

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy A potenciáloperátor, és legyen J egy potenciálja. Legyenek $u, h, v \in X$ adott vektorok, és vezessük be a

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad G(s, t) := J(u + sh + tv)$$

függvényt. Itt J kétszer Gâteaux-deriválható, hiszen a $J' = A$ operátor Gâteaux-deriválható, emellett $J'' = A'$ bihemifolytonos. Így G második parciális deriváltjai is léteznek, speciálisan

$$\partial_t \partial_s G(s,t) = \langle J''(u+sh+tv)h, v\rangle = \langle A'(u+sh+tv)h, v\rangle$$

$$\text{és ugyanígy} \quad \partial_s \partial_t G(s,t) = \langle A'(u+sh+tv)v, h\rangle,$$

valamint G második parciális deriváltjai folytonosak is, így igaz a Young-tétel, amiből

$$\langle A'(u)h, v\rangle = \partial_t \partial_s G(0,0) = \partial_s \partial_t G(0,0) = \langle A'(u)v, h\rangle\,.$$

(ii) Tegyük fel most, hogy A' szimmetrikus, igazolnunk kell, hogy létezik potenciál. Utóbbi szerepére felírható a szóbajövő képlet, mivel ha J potenciál, akkor

$$J(u) = J(0) + \int_0^1 \langle J'(0+r(u-0)), u-0\rangle \mathrm{d}r = J(0) + \int_0^1 \langle A(ru), u\rangle \mathrm{d}r \quad (u \in X).$$

Itt $J(0)$ nullának választható. Legyen tehát mostantól

$$J(u) := \int_0^1 \langle A(ru), u\rangle \mathrm{d}r \qquad (u \in X), \tag{12.2}$$

és igazolnunk kell, hogy ez a J potenciálja A-nak, azaz hogy $\langle J'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle \ \ (\forall u, v \in X)$.

Legyenek $u, v \in X$ adott vektorok, és vezessük be a

$$K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad K(s,t) := J(su+tv)$$

függvényt. Ha $J' = A$, amit szeretnénk, akkor

$$K'(s,t) = (\partial_s K(s,t), \partial_t K(s,t)) = (\langle J'(su+tv), u\rangle, \langle J'(su+tv), v\rangle)$$

$$= (\langle A(su+tv), u\rangle, \langle A(su+tv), v\rangle) =: k(s,t) \qquad (s,t \in \mathbb{R}).$$

Megfordítva, ha $K' = k$, akkor speciálisan

$$\partial_t K(1,0) = k_2(1,0), \quad \text{azaz} \quad \langle J'(u), v\rangle = \langle A(u), v\rangle.$$

Így $J' = A$ pontosan akkor, ha $K' = k$ bármely u, v esetén. Megmutatjuk, hogy utóbbi igaz. Itt k-nak van primitív függvénye, mivel a feltevésből

$$\partial_2 k_1(s,t) = \partial_t k_1(s,t) = \langle A'(su+tv)v, u\rangle =$$

$$= \langle A'(su+tv)u, v\rangle = \partial_s k_2(s,t) = \partial_1 k_2(s,t)$$

($\forall s,t\in\mathbb{R}$). Sőt, mint ismeretes, ekkor a primitív függvények megadhatók k-nak (egy rögzített pontból a változó pontba haladó görbe menti) vonalintegráljaként, ahol a görbe tetszőleges lehet. Ha (s,t) adott pont, akkor tehát egy primitív függvény előáll a $(0,0)$ pontból (s,t)-be húzott szakaszon vett vonalintegrálként, melynek értéke

$$\int_0^1 k(rs,rt)\cdot(s,t)\mathrm{d}r=\int_0^1 (\langle A(r(su+tv)),u\rangle,\langle A(r(su+tv)),v\rangle)\cdot(s,t)\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1 \langle A(r(su+tv)),su+tv\rangle\mathrm{d}r=J(su+tv)=K(s,t),$$

azaz K valóban primitív függvénye k-nak. Tehát, mint láttuk, a (12.2)-ben definiált J potenciálja A-nak. □

12.4. Megjegyzés. A (12.1) feltétel valós Hilbert-térben $A'(u)$ önadjungáltságát jelenti.

Példa potenciáloperátorra. Tekintsük a 11.2.1 szakaszban Gâteaux-deriváltra adott példát, azaz a (11.8)-beli $F:H_0^1(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ operátort. Megmutatjuk, hogy F potenciáloperátor.
Éspedig, láttuk, hogy F Gâteaux-deriválható, ill. a 11.10. megjegyzés szerint F' bihemifolytonos. A (11.9) képlet szerint F Gâteaux-deriváltjára

$$\langle F'(u)h,v\rangle_{H_0^1}=\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial\eta}(x,\nabla u)\nabla h\cdot\nabla v \qquad (u,h,v\in H_0^1(\Omega)). \tag{12.3}$$

Mivel feltettük, hogy $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial\eta}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak, a fenti képletből rögtön következik, hogy F' is szimmetrikus (azaz önadjungált, mivel most Hilbert-térben vagyunk), így a 12.3. tétel szerint F potenciáloperátor.
Esetünkben a potenciál megadható expliciten is. Az f-re tett feltételek alapján ugyanis maga f is olyan, hogy minden $x\in\overline{\Omega}$ esetén van primitív függvénye η szerint, vagyis olyan C^1-beli $\psi:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,\eta)=f(x,\eta) \qquad (\forall x\in\overline{\Omega},\ \eta\in\mathbb{R}^n).$$

Tekintsük az alábbi $J:H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ funkcionált:

$$J(u):=\int_\Omega \psi(x,\nabla u) \qquad (u\in H_0^1(\Omega)). \tag{12.4}$$

Hasonlóan, mint ahogy F Gâteaux-deriválhatóságát igazoltuk, belátható, hogy

$$\langle J'(u)v\rangle_{H_0^1}=\int_\Omega \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x,\nabla u)\cdot\nabla v=\int_\Omega f(x,\nabla u)\cdot\nabla v=\langle F(u),v\rangle_{H_0^1}$$

$(\forall u, v \in H_0^1(\Omega))$, azaz $J'(u) = F(u)$, ami azt jelenti, hogy J potenciálja F-nek.

12.2. Funkcionálok minimumhelye

Ha A monoton, azaz Φ konvex, abból még nem következik, hogy Φ-nek van minimumhelye. Egyszerű példa az $X = \mathbb{R}$ esetben a $\Phi(x) = e^x$ függvény, amely szigorúan konvex, de nincs minimumhelye. Ennek többváltozós megfelelője pl. a $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x, y) = e^x + e^y$ függvény: ekkor $\Phi'(x, y) = (e^x, e^y)$ és Φ' szigorúan monoton, mert

$$\langle \Phi'(x, y) - \Phi'(u, v), (x - u, y - v)\rangle = (e^x - e^u)(x - u) + (e^y - e^v)(y - v) > 0,$$

ha $(x, y) \neq (u, v)$. Ebből következik, hogy Φ szigorúan konvex, ugyanakkor Φ-nek nincs minimumhelye.

12.5. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér és tegyük fel, hogy $\Phi : X \to \mathbb{R}$ Gâteaux-deriválható, konvex és $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty$. Ekkor Φ-nek létezik minimuma.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha = \inf_X \Phi \geq -\infty$. Ekkor van olyan $(u_n) \subset X$ sorozat, hogy $\Phi(u_n) \to \alpha$. Emiatt a $(\Phi(u_n))$ sorozat felülről korlátos, amiből következik, hogy $(u_n) \subset X$ korlátos sorozat. Ha ugyanis nem lenne korlátos, akkor $\|u_n\|$ nem lenne korlátos, azaz lenne egy végtelenhez tartó részsorozata; erre a részsorozatra $\Phi(u_n) \to \alpha$ teljesülne, ellentmondva a $\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = \infty$ feltételnek.
A reflexivitás miatt a 3.17. tétel alapján kiválasztható gyengén konvergens részsorozat, azaz létezik $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ részsorozat és $u^* \in X$, hogy $\langle \psi, u_{n_k}\rangle \to \langle \psi, u^*\rangle$ minden $\psi \in X^*$ esetén. Speciálisan $\langle \Phi'(u^*), u_{n_k}\rangle \to \langle \Phi'(u^*), u^*\rangle$, amiből Φ konvexitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\Phi(u_{n_k}) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u_{n_k} - u^*\rangle \to 0,$$

amiből következik, hogy $\Phi(u^*) \leq \alpha = \inf \Phi$, vagyis $\Phi(u^*) = \min \Phi$. □

12.6. Megjegyzés. Ha a fenti tételben Φ szigorúan konvex is, akkor a minimumhely egyértelmű.

13. fejezet

Nemlineáris operátoregyenletek megoldhatósága

Legyen X reflexív Banach-tér, $A : X \to X^*$ adott (nemlineáris) operátor. Ebben a fejezetben – a 7.1. szakasz nemlineáris megfelelőjeként – arra adunk feltételeket, hogy egy $A(u) = b$ egyenletnek bármely $b \in X^*$ esetén létezzék egyetlen $u^* \in X$ megoldása. Ez ugyanazt jelenti, mint hogy A bijekció X-ről X^*-ra; az egyenletekkel való megfogalmazásra főleg az alkalmazások során lesz szükség. Elsősorban azzal az esettel foglalkozunk, amikor $X = H$ Hilbert-tér.

13.1. A variációs elv

Ha az adott A operátor potenciáloperátor, az $A(u) = b$ egyenletek megoldhatósága átfogalmazható a potenciállal, és ez gyakran hasznosnak bizonyul. Legyen tehát $A : X \to X^*$ potenciáloperátor, és $J : X \to \mathbb{R}$ egy potenciálja: $J'(u) = A(u) \quad (u \in X)$. Vezessük be a

$$\Phi : X \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(u) := J(u) - \langle b, u \rangle \tag{13.1}$$

funkcionált. Ez potenciálja az $u \mapsto A(u) - b$ leképezésnek (ld. 12.2.(ii) megjegyzés), azaz

$$\Phi'(u) = A(u) - b \qquad (u \in X).$$

Ez azt jelenti, hogy Φ ún. kritikus pontjai (ahol deriváltja 0) megegyeznek az $A(u) = b$ egyenlet megoldásaival.

Sok esetben a Φ funkcionál minimumhelyeire van szükség, pl. amikor Φ energia jellegű mennyiséget ír le. Ha u^* minimumhelye Φ-nek, akkor $\Phi'(u^*) = 0$, így u^* megoldása az egyenletnek: $A(u^*) = b$. Monoton potenciáloperátorok esetén a kettő egybeesik:

13.1. Állítás. *Legyen $A : X \to X^*$ monoton potenciáloperátor, J egy potenciálja és Φ a* (13.1)*-beli funkcionál. Az $u^* \in H$ vektor pontosan akkor megoldása az $A(u) = b$ egyenletnek, ha minimumhelye Φ-nek.*

Bizonyítás. Legyen először $A(u^*) = b$, azaz $\Phi'(u^*) = 0$. Itt A monotonitása miatt, a 11.14. állítás és 11.16. megjegyzés alapján J konvex, és mivel $u \mapsto \langle b, u\rangle$ lineáris, így Φ is konvex. A 11.12. állításból így $\Phi(u) - \Phi(u^*) \geq \langle \Phi'(u^*), u - u^*\rangle = 0 \quad (u \in X)$, azaz u^* minimumhely.
A másik irányt már az előbb láttuk. □

A (13.1) funkcionált gyakran *minimalizáló funkcionálnak* hívják. A következő szakaszban a fenti elv alapján adunk megoldhatósági tételeket, vagyis az adott egyenlet megoldása helyett a megfelelő Φ funkcionált minimalizáljuk.

13.2. Monoton operátoregyenletek potenciáloperátorral

13.2. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) A Gâteaux-deriválható, A' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) létezik $m > 0$, hogy

$$\langle A'(u)h, h\rangle \geq m \|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H).$$

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Bizonyítás. A 12.3. állítás szerint az első két feltétel biztosítja, hogy A potenciáloperátor. Legyen $\Phi : H \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) = J(u) - \langle b, u\rangle$, ahol $J' = A$. Ekkor $\Phi'(u) = A(u) - b$. Mivel Φ kétszer Gâteaux-deriválható, a Taylor-formula szerint minden $u \in H$ esetén

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \langle \Phi'(0), u\rangle + \frac{1}{2}\langle \Phi''(\theta u)u, u\rangle,$$

alkalmas $\theta \in [0,1]$ mellett, amiből a (iii) feltétel és $\Phi'' = A'$ miatt azt kapjuk, hogy

$$\Phi(u) \ge \Phi(0) - \|\Phi'(0)\| \, \|u\| + \frac{m}{2} \|u\|^2 =$$
$$= \Phi(0) + \|u\| \Big(- \|\Phi'(0)\| + \frac{m}{2} \|u\| \Big) \to \infty, \quad \text{ha } \|u\| \to \infty.$$

Másrészt a 11.15. megjegyzésből következik, hogy Φ szigorúan konvex. A 12.5. tétel és 12.6. megjegyzés szerint egyértelműen létezik u^* minimumhelye Φ-nek, ami a 13.1. állítás szerint pontosan akkor igaz, ha $A(u^*) = b$. □

A fenti tétel feltételeiben a közös m alsó határ létezése enyhíthető:

13.3. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor. Teljesüljön a 13.2.tétel (i)-(ii) feltétele, és tegyük fel, hogy*

(iii)' létezik olyan $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő függvény, melyre

$$\lim_{r\to\infty} m(r)r = +\infty, \qquad \textit{és} \qquad \langle A'(u)h, h\rangle \ge m(\|u\|)\, \|h\|^2 \quad (\forall u, h \in H).$$

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Bizonyítás. A fenti bizonyításban csak Φ alsó becslését kell módosítani:

$$\Phi(u) \ge \Phi(0) - \|\Phi'(0)\| \, \|u\| + \frac{1}{2} m(\|u\|)\, \|u\|^2 =$$
$$= \Phi(0) + \|u\| \left(- \|\Phi'(0)\| + \frac{1}{2} m(\|u\|)\, \|u\| \right) \to \infty,$$

ha $\|u\| \to \infty$. □

Mindkét fenti tétel a 12.5. tételre és 12.6. megjegyzésre alapul; ellenőrizhető elégséges feltételeket adnak az A operátorra nézve ezek alkalmazhatóságára. A potenciált is a feltevésekbe építve egyszerűbb tétel mondható ki:

13.4. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér, $A : X \to X^*$ szigorúan monoton potenciáloperátor, J egy potenciálja. Ha $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \frac{J(u)}{\|u\|} = \infty$, akkor bármely $b \in X^*$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik megoldása.*

Bizonyítás. A 13.1. állítás alapján azt kell igazolnunk, hogy a $\Phi(u) := J(u) - \langle b, u\rangle$ funkcionálnak egyértelműen létezik minimumhelye. Mivel A szigorúan monoton, a 11.15. megjegyzés szerint J és így Φ is szigorúan konvex. Emellett

$$\Phi(u) \ge J(u) - \|b\|\|u\| = \Big(\frac{J(u)}{\|u\|} - \|b\| \Big) \|u\| \to \infty, \qquad \text{ha} \quad \|u\| \to \infty,$$

így érvényes a 12.5. tétel. □

13.3. Operátoregyenletek nem potenciálos operátorral

13.3.1. Monoton operátoregyenletek nem potenciálos operátorral

Most kiterjesztjük az előző szakasz eredményeit arra az esetre, ha A nem potenciáloperátor. Ekkor a megoldhatóság a Banach-féle fixponttételre vezethető vissza. Itt az egyenletes monotonitást derivált nélkül fogalmazhatjuk meg, viszont megfelelő felső becslés (Lipschitz-folytonosság) is kell.

13.5. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) A egyenletesen monoton: létezik $m > 0$, hogy

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq m \, \|u - v\|^2 \qquad (\forall u, v \in H);$$

(ii) A Lipschitz-folytonos: létezik $M > 0$, hogy

$$\|A(u) - A(v)\| \leq M \, \|u - v\| \qquad (\forall u, v \in H).$$

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Bizonyítás. Ha $\alpha > 0$ állandó, akkor az $A(u) = b$ egyenlet ekvivalens az $u = u - \alpha(A(u) - b) =: G(u)$ egyenlettel. Így azt kell belátnunk, hogy megfelelő α esetén G-nek egyértelműen létezik fixpontja. Ehhez a Banach-féle fixponttétel szerint elég, ha G kontrakció. Itt

$$\|G(u) - G(v)\|^2 = \|u - v - \alpha(A(u) - A(v))\|^2$$
$$= \|u - v\|^2 - 2\alpha\langle A(u) - A(v), u - v\rangle + \alpha^2\|A(u) - A(v)\|^2 \leq$$
$$\leq (1 - 2\alpha m + \alpha^2 M^2) \, \|u - v\|^2.$$

Az $\alpha \mapsto 1 - 2\alpha m + \alpha^2 M^2$ függvény 0-ban 1-et vesz fel és deriváltja $-2m$, így elég kis $\alpha > 0$ esetén értéke 1-nél kisebb, azaz ilyen α-ra a megfelelő G kontrakció. □

13.6. Megjegyzés. A bizonyításban szereplő G leképezésre az optimális kontrakciós konstans a $\varphi(\alpha) := 1-2\alpha m+\alpha^2 M^2$ másodfokú függvény minimumának négyzetgyöke, ami az $\alpha_{opt} := \frac{m}{M^2}$ mellett kapott $q_{opt} := \sqrt{\varphi(\alpha_{opt})} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}$ érték.
Néha hasznos ennek egyszerűbb becslése: a $\sqrt{1-t} \leq 1 - \frac{t}{2}$ $(t \leq 1)$ egyenlőtlenség alapján $q_{opt} \leq 1 - \frac{m^2}{2M^2} = 1 - \frac{m}{2}\alpha_{opt}$.

13.7. Megjegyzés. Ha a fenti tételben A Gâteaux-deriválható is, akkor (a 11.15. megjegyzés (2) pontjához hasonlóan) az (i) feltételbeli egyenletes monotonitásból következik, hogy $\langle A'(u)h, h\rangle \geq m\,\|h\|^2$ $(\forall u, h \in H)$, ami a 13.2.tétel (iii) feltétele. Ekkor azonban az utóbbi nem jelenti azt, hogy A önadjungált is, mivel valós térben vagyunk. (Komplex térben a fenti tétel (i) feltételében elég lenne a bal oldali kifejezés valós részét venni.)

A tételbeli egyenletes Lipschitz-feltétel enyhíthető:

13.8. Tétel. *A 13.5. tételben a (ii) feltétel helyett tegyük fel, hogy*

(ii)' A lokálisan Lipschitz-folytonos: létezik olyan $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton növő függvény, melyre

$$\|A(u) - A(v)\| \leq M(r)\,\|u - v\| \qquad (\forall u, v \in H,\ \|u\| \leq r,\ \|v\| \leq r).$$

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Bizonyítás. A 13.5. tétel bizonyítását úgy módosítjuk, hogy megmutatjuk: van olyan $R > 0$, hogy ha B_R jelöli az origó közepű R sugarú zárt gömböt és $M := M(R)$, akkor az $\alpha_{opt} := \frac{m}{M^2}$ értékhez tartozó $G(u) := u - \alpha_{opt}(A(u) - b)$ leképezés kontrakció B_R-ből B_R-be. Ekkor is igaz, hogy G-nek egyértelműen létezik fixpontja.
Legyen először $R > 0$ tetszőleges. A megfelelő G leképezés kontrakció volta ugyanúgy jön ki, mint az előbb, ekkor $\|G(u) - G(v)\| \leq q_{opt}\|u - v\|$, ahol $q_{opt} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M(R)^2}}$ függ R-től. Belátjuk, hogy ha R elég nagy, akkor G B_R-ből B_R-be képez. Legyen $\|u\| \leq R$. Ekkor

$$\|G(u)\| \leq \|G(0)\| + \|G(u) - G(0)\| \leq \|G(0)\| + q_{opt}\|u\|.$$

Itt $\|G(0)\| = \alpha_{opt}\|A(0) - b\|$, valamint $\|u\| \leq R$ és a 13.6. megjegyzésből $q_{opt} \leq 1 - \frac{m}{2}\alpha_{opt}$, így

$$\|G(u)\| \leq \alpha_{opt}\|A(0) - b\| + (1 - \frac{m}{2}\alpha_{opt})R = R - \alpha_{opt}(\frac{mR}{2} - \|A(0) - b\|) \leq R,$$

ha a második zárójelben álló kifejezés nemnegatív, ami fennáll elég nagy R esetén. $\square$

13.3.2. Nem monoton operátoregyenletek

Ebben a rövid fejezetben csak kimondunk egy általánosabb tételt, amely jelzi, hogy monotonitás nélkül is elérhető a megoldhatóság.

13.9. Tétel. [55] *Legyenek X, Y Banach-terek, $A : X \to Y$ Fréchet-deriválható, melyre bármely $u, h \in X$ esetén $A'(u) : X \to Y$ bijekció és*

$$\|A'(u)h\| \geq m\|h\|, \tag{13.2}$$

ahol $m > 0$ független u, h-tól. Ekkor bármely $b \in X$ esetén az $A(u) = b$ egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in X$ megoldása.

13.10. Megjegyzés. A (13.2) egyenlőtlenségnek
(i) következménye az alábbi hasznos becslés:

$$\|A'(u)^{-1}\| \leq \tfrac{1}{m} \quad (u \in X);$$

(ii) elégséges feltétele $X = Y = H$ Hilbert-tér esetén a korábbiakban szereplő becslés:

$$\langle A'(u)h, h\rangle \geq m\,\|h\|^2 \quad (\forall u, h \in H).$$

13.4. Alkalmazások nemlineáris elliptikus peremértékfeladatokra

13.4.1. Főrészében nemlineáris egyenletek

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, és tekintsük a

$$\begin{cases} -\operatorname{div} f(x, \nabla u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{13.3}$$

peremértékfeladatot az alábbi tulajdonságokkal:
13.4.1. feltételek.

(i) $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$;

(ii) a $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixok szimmetrikusak (ha $x \in \Omega$, $\eta \in \mathbb{R}^n$);

(iii) léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók, hogy

$$m|\xi|^2 \leq \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}\,\xi \cdot \xi \leq M|\xi|^2 \qquad (x \in \Omega,\ \eta, \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{13.4}$$

A 11.1. fejezet alapján átfogalmazzuk a feladatot. Először értelmezzük a fenti feladat gyenge alakját: egy $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény gyenge megoldás, ha

$$\int_\Omega f(x, \nabla u) \cdot \nabla v = \int_\Omega gv \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)). \tag{13.5}$$

A (iii) feltétel azt jelenti, hogy a deriváltmátrixok sajátértékei közös pozitív konstansok közé esnek, így teljesül (11.5) is. Láttuk, hogy ekkor értelmes az $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátor, melyre

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega f(x, \nabla u) \cdot \nabla v \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega)) \tag{13.6}$$

(ahol $H_0^1(\Omega)$ valós Hilbert-tér a (11.4) skalárszorzattal), és hogy így a (13.3) feladat ekvivalens az

$$F(u) = b \tag{13.7}$$

operátoregyenlettel $H_0^1(\Omega)$-ban, ahol $\langle b, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega gv$ ($\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$).

A (13.3) feladat gyenge megoldását a (13.7) operátoregyenletre alkalmazott 13.2. tételből nyerjük.

13.11. Tétel. *Ha teljesülnek a 13.4.1. feltételek, akkor bármely $g \in L^2(\Omega)$ esetén a (13.3) peremértékfeladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Igazolnunk kell, hogy fennállnak a 13.2.tétel feltételei. A 11.2.1 szakaszban adott példa és a 11.10. megjegyzés alapján F Gâteaux-deriválható és F' bihemifolytonos. A deriváltra

$$\langle F'(u)h, v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u)\nabla h \cdot \nabla v \qquad (u, h, v \in H_0^1(\Omega)) \tag{13.8}$$

teljesül (11.9) szerint. Ebből, mint a 12.1. szakasz végén is láttuk, rögtön következik, hogy F' önadjungált. Végül a (iii) feltételből

$$\langle F'(u)h, h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u)\nabla h \cdot \nabla h \geq m \int_\Omega |\nabla h|^2 = m\, \|h\|^2_{H_0^1}$$

$$(\forall u, h \in H_0^1(\Omega)). \qquad \square$$

Példa. Tekintsük a (11.1) feladatot:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\Big(a(|\nabla u|^2)\, \nabla u\Big) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{13.9}$$

ahol $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ adott C^1-beli függvény, és tegyük fel, hogy léteznek olyan $M \geq m > 0$ konstansok, hogy

$$0 < m \leq a(r^2) \leq \big(a(r^2)r\big)' \leq M \qquad (\forall r \geq 0). \tag{13.10}$$

Ez a feladat olyan alakú, mint (13.3), ha

$$f(x, \eta) = a\big(|\eta|^2\big)\eta \qquad (x \in \overline{\Omega},\ \eta \in \mathbb{R}^n),$$

sőt, itt f független x-től. Megmutatjuk, hogy teljesülnek a 13.4.1. feltételek.

(i) Itt $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, és az $a \in C^1(\mathbb{R}^+)$ feltétel miatt $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(ii) Kiszámítjuk a $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ deriváltmátrixokat. Itt $f_i(x,\eta) = a\big(\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^2\big)\eta_i$, így

$$\frac{\partial f_i(x,\eta)}{\partial \eta_k} = a\big(\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2\big)\delta_{ik} + 2a'\big(\sum_{j=1}^{n} \eta_j^2\big)\eta_i\eta_k, \qquad \text{azaz}$$

$$\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta} = a\big(|\eta|^2\big)\, I + 2a'\big(|\eta|^2\big)\,(\eta\eta^T),$$

ahol $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az identitásmátrix és az $\eta\eta^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix az η és η^T diadikus szorzata. Ebből látható, hogy $\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}$ szimmetrikus.

(iii) A deriváltmátrixok kvadratikus alakja

$$\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}\, \xi\cdot\xi = \; a(|\eta|^2)|\xi|^2 + 2\,a'(|\eta|^2)\,(\eta\cdot\xi)^2 \qquad (\xi,\eta \in \mathbb{R}^n). \quad (13.11)$$

A (13.10) feltétel részletesebben azt jelenti, hogy bármely $r \geq 0$ esetén

$$m \leq a(r^2), \qquad 0 \leq a'(r^2), \qquad a(r^2) + 2a'(r^2)r^2 \leq M.$$

Így a (13.11) képletből és a Cauchy–Schwarz-egyenlőségből

$$m|\xi|^2 \leq a(|\eta|^2)|\xi|^2 \leq \frac{\partial f(x,\eta)}{\partial \eta}\, \xi\cdot\xi \leq$$
$$\Big(a(|\eta|^2) + 2\,a'(|\eta|^2)\,|\eta|^2\Big)\,|\xi|^2 \leq M|\xi|^2. \qquad (13.12)$$

Így tehát érvényes a (13.9) feladatra a 13.11 megoldhatósági tétel.

A fenti példa általánosítható úgy, hogy f függhet x-től is:

$$f(x,\eta) = a\big(x, |\eta|^2\big)\eta, \qquad \text{ahol} \qquad 0 < m \leq a(x,r^2) \leq \frac{\partial}{\partial r}\Big(a(x,r^2)r\Big) \leq M$$

($\forall x \in \overline{\Omega},\ \eta \in \mathbb{R}^n,\ r \geq 0$). Az iméntihez hasonló számolással igazolhatók a 13.11. tétel feltételei.

Nevezetes példa (13.9) alakú feladatra a stacionárius Maxwell-egyenletekből származtatható mágneses potenciál egyenlete, amikor az elektromos és mágneses tér közt nemlineáris összefügés áll fenn. Ekkor az $r \mapsto a(r)$ nemlinearitás teljesíti a (13.10) feltételeket, pl. $a(r) = \frac{r^k+\varrho}{r^k+\tau}$, ahol $\varrho, \tau > 0$ és $k \in \mathbb{N}^+$ állandók [40].
Egy másik fontos példa (13.9) alakú feladatra a képlékeny torzió egyenlete, ahol a feszültség és nyírás erőssége között (13.10) típusú nemlineáris összefügés áll fenn [31].

13.12. Megjegyzés. A 12.1. szakasz végén láttuk, hogy a (11.8) operátor $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ potenciálja megadható

$$J(u) := \int\limits_\Omega \psi(x, \nabla u) \quad \text{alakban, ahol} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(x, \eta) = f(x, \eta)$$

($\forall x \in \Omega,\ \eta \in \mathbb{R}^n$). Ebből (13.1) alapján a minimalizáló funkcionál $\Phi(u) := J(u) - \langle b, u \rangle$, azaz

$$\Phi(u) = \int_\Omega (\psi(x, \nabla u) - gu) \qquad (u \in H_0^1(\Omega)). \tag{13.13}$$

A (13.3) feladat gyenge megoldása tehát ezt a Φ funkcionált minimalizálja.

Megemlítjük, hogy itt

$$\langle \Phi''(u)h, h \rangle_{H_0^1} = \langle F'(u)h, h \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, \nabla u) \nabla h \cdot \nabla h \geq m \, \|h\|_{H_0^1}^2$$

($\forall u, h \in H_0^1(\Omega)$), azaz Φ egyenletesen konvex. Ez a tulajdonság volt az alapja a megoldhatósághoz felhasznált 13.2. tételnek is.

A (13.9)-beli speciális esethez tartozó Φ funkcionál alakja

$$\Phi(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} \, \mathcal{A}(|\nabla u|^2) - gu \Big),$$

ahol $\mathcal{A}'(r) = a(r)$ $(r \geq 0)$. Ekkor ugyanis a $\psi(x, \eta) := \frac{1}{2} \, \mathcal{A}(|\eta|^2)$ függvényre $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}(x, \eta) = a\big(|\eta|^2\big)\eta \quad (\eta \in \mathbb{R}^n)$.

A fenti példa a lineáris esetet is tartalmazza speciális esetként, amikor az egyenlet $-\Delta u = g$, ekkor a minimalizáló funkcionál

$$\Phi(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2} \, |\nabla u|^2 - gu \Big).$$

Ez az ún. Dirichlet-integrál, amire a 14.1. szakaszban is visszatérünk.

13.4.2. Szemilineáris feladatok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos síkbeli tartomány, és tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \, \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + q(x, u) = g, \\ \ \ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{13.14}$$

13.4.2. feltételek.

(i) $a \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \geq m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$);

(ii) $\mathbf{b} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ (azaz $\mathbf{b}$ divergenciamentes vektormező);

(iii) $q \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, és léteznek olyan $p \geq 2$, $\alpha, \beta \geq 0$ állandók, hogy

$$0 \leq \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} \leq \alpha + \beta|\xi|^{p-2} \qquad (\forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}). \tag{13.15}$$

A (13.14) modellekben általában az operátor három tagja rendre a diffúziót, konvekciót és kémiai reakciót írja le, melyekből, mint itt is, legtöbbször az első kettő lineáris. (További részleteket ld. majd a 13.14. megjegyzésben.)
A (13.14) feladat gyenge megoldása olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvény, melyre

$$\int_\Omega \Big(a\ \nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v + q(x,u)v\Big) = \int_\Omega gv \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega). \tag{13.16}$$

13.13. Tétel. *Ha teljesülnek a 13.4.2. feltételek, akkor bármely $g \in L^2(\Omega)$ esetén a (13.14) peremértékfeladatnak egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.*

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy értelmes az az $F : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ operátor, melyre

$$\langle F(u), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \Big(a\ \nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v + q(x,u)v\Big) \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega)). \tag{13.17}$$

Könnyen látható, hogy a (13.15) feltételből $|q(x,\xi)| \leq \alpha_1 + \beta_1|\xi|^{p-1}$, ahol $\alpha_1, \beta_1 \geq 0$ alkalmas állandók. Ebből, a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\Big|\int_\Omega q(x,u)v\Big| \leq \int_\Omega \Big(\alpha_1|v| + \beta_1|u|^{p-1}|v|\Big) \leq \alpha_1\|v\|_{L^1} + \beta_1\Big\||u|^{p-1}\Big\|_{L^q}\|v\|_{L^p},$$

ahol $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor $p - 1 = \frac{p}{q}$, így

$$\Big\||u|^{p-1}\Big\|_{L^q} = \Big\||u|^{\frac{p}{q}}\Big\|_{L^q} = \Big(\int_\Omega |u|^p\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_\Omega |u|^p\Big)^{\frac{p-1}{p}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}.$$

Emellett az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon a Szoboljev-féle beágyazási tétel révén [1, 67] bármely $p \geq 2$ esetén van olyan $K_p > 0$ állandó, hogy

$$H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega), \qquad \|u\|_{L^p} \leq K_p\|u\|_{H_0^1} \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega)). \tag{13.18}$$

Így
$$\Big|\int_\Omega q(x,u)v\Big| \le \Big(\alpha_1 K_1 + \beta_1 K_p^p \, \|u\|_{H_0^1}^{p-1}\Big)\|v\|_{H_0^1}.$$
A többi tag könnyebben becsülhető: a (10.15) becslésből
$$\Big|\int_\Omega \big(a\ \nabla u\cdot\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v\big)\Big| \le \big(\|a\|_{L^\infty} + K_2\|\mathbf{b}\|_{L^\infty}\big)\,\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}. \quad (13.19)$$
Legyen $u\in H_0^1(\Omega)$ rögzített, ekkor a (13.17)-beli integrál v-ben lineáris, és felülről becsülhető az alábbival:
$$\Big(\|a\|_{L^\infty}\|u\|_{H_0^1} + K_2\|\mathbf{b}\|_{L^\infty}\|u\|_{H_0^1} + \alpha_1 K_1 + \beta_1 K_p^p\,\|u\|_{H_0^1}^{p-1}\Big)\|v\|_{H_0^1},$$
így korlátos lineáris funkcionálja v-nek. A Riesz-tétel tehát megadja azt az $F(u)\in H_0^1(\Omega)$ elemet, melyre (13.17) teljesül.
Megmutatjuk, hogy F teljesíti a 13.5. tétel feltételeit. Először belátjuk, hogy F egyenletesen monoton. Ehhez felbontjuk lineáris és nemlineáris részre $F = B + N$ alakban, ahol
$$\langle Bu,v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \Big(a\ \nabla u\cdot\nabla v + (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v\Big), \qquad \langle N(u),v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega q(x,u)v.$$
Itt (10.16) alapján
$$\langle Bh,h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \Big(a\ |\nabla h|^2 + (\mathbf{b}\cdot\nabla h)h\Big) \ge m\,\|h\|_{H_0^1}^2 \qquad (\forall h\in H_0^1(\Omega)),$$
így a B operátor koercív, ami lineáris esetben ($h = u-v$ helyettesítéssel) azt is jelenti, hogy egyenletesen monoton. Emellett a (13.15) feltételből $\xi\mapsto q(x,\xi)$ monoton növő, így N is monoton operátor:
$$\langle N(u)-N(v),u-v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (q(x,u)-q(x,v))(u-v) \ge 0 \qquad (\forall u,v\in H_0^1(\Omega)).$$
Összegezve, F egyenletesen monoton.
Ezután belátjuk, hogy F lokálisan Lipschitz-folytonos, ehhez is a fenti felbontást használjuk. A lineáris B rész Lipschitz-folytonos, mert korlátos, ami (13.19)-ból következik. Az N részhez ismét a (13.15) feltételből és a Lagrange-egyenlőtlenségből
$$|q(x,\xi)-q(x,\tilde\xi)| \le \max_{\zeta\in[\xi,\tilde\xi]} |\partial_\xi q(x,\zeta)|\,|\xi-\tilde\xi| \le \big(\alpha + \beta\max\{|\xi|,|\tilde\xi|\}^{p-2}\big)\,|\xi-\tilde\xi|,$$
ebből az F létezésénél használt számoláshoz hasonlóan kapjuk, hogy
$$\|N(u)-N(v)\| = \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1}\langle N(u)-N(v),z\rangle_{H_0^1} = \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1}\int_\Omega (q(x,u)-q(x,v))\,z$$

$$\leq \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} \int_\Omega \big(\alpha + \beta \max\{|u|,|v|\}^{p-2}\big)\, |u-v|\, |z|$$

$$\leq \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} \Big(\alpha K_2^2 + \beta K_p^p \max\{\|u\|_{H_0^1}, \|v\|_{H_0^1}\}^{p-2}\Big)\, \|u-v\|_{H_0^1}\, \|z\|_{H_0^1}$$

$$\leq M(r)\|u-v\|_{H_0^1} \qquad (\|u\|_{H_0^1} \leq r,\ \|v\|_{H_0^1} \leq r),$$

ahol $M(r) := \alpha K_2^2 + \beta K_p^p\, r^{p-2}$ $(r \geq 0)$. Így N, és végül F is lokálisan Lipschitz-folytonos.

Innen ugyanúgy kapjuk az eredményt, mint a 13.4.1. szakaszban, mivel a (13.16) feladat jobboldala most is $\langle b, v\rangle_{H_0^1}$ alakban írható, maga (13.16) pedig $F(u) = b$ alakban. Itt F teljesíti a 13.5. tétel feltételeit, így a feladatnak egyértelműen létezik gyenge megoldása. $\square$

13.14. Megjegyzés. (i) A megoldhatósági tétel 3 vagy több dimenzióban is érvényes, ha q-ra szigorúbb növekedési feltételt írunk elő: a felhasznált Szoboljev-féle beágyazási tétel $n \geq 3$ dimenzióban a $2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ feltétel esetén érvényes.

(ii) A (13.14) feladatban az u függvény a vizsgált anyag koncentrációját adja meg. A (iii) feltétel azt fejezi ki, hogy a reakció autokatalitikus, azaz nagyobb koncentráció gyorsabb reakciót indukál. A kapott megoldhatósági tétel azt az esetet is lefedi, amikor $\mathbf{b} = 0$ (reakció-diffúzió-egyenlet monoton nemlinearitással), ilyen egyenlet írja le pl. sugárzó test lehűlését, ill. egyes enzimek által katalizált reakció-diffúzió stacionárius állapotát, lásd pl. [23, Chap. 1].

(iii) A kapott megoldhatósági tétel igaz a (13.14) egyenletnél általánosabb, hasonló feladatokra is. A reakció-konvekció-diffúziós modellekben általában több komponens szerepel, így PDE-rendszer írja le a keresett koncentrációkat, emellett a $\operatorname{div}\mathbf{b}$ feltétel enyhíthető. E rendszerek (13.14)-hez hasonló alakúak:

$$\left.\begin{aligned} &-\operatorname{div}(a_i\,\nabla u_i) + \mathbf{b}_i\cdot\nabla u_i + q_i(x,u_1,\ldots,u_l) = g_i \\ &u_{i\,|\partial\Omega} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,\ldots,l). \tag{13.20}$$

A feltételek értelemszerűen átvihetők. A $\frac{\partial q(x,\xi)}{\partial\xi}$ deriváltak most Jacobi-mátrixok, így a felső becslést normájukra tesszük:

$$\left\| \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} \right\| \leq c_3 + c_4|\xi|^{p-2} \qquad (\forall (x,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}^l).$$

A $\frac{\partial q(x,\xi)}{\partial\xi}$ derivált nemnegativitása helyett pozitív szemidefinitséget tehetünk fel, ill. koordinátánként írhatjuk elő a $\operatorname{div}\mathbf{b}_i = 0$ feltételt. E kettő helyett azonban a közös, általánosabb

$$\frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi}\,\eta\cdot\eta-\frac{1}{2}\,\Big(\max_i\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}_i(x)\Big)\,|\eta|^2\geq 0$$

$(\forall (x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^l,\ \eta\in\mathbb{R}^l)$ feltétel is elég, lásd pl. [2]. Ezek alapján a 13.13. tételhez hasonlóan igazolható a megoldhatóság, lásd pl. [23, Chap. 6].

IV. rész

Közelítő módszerek normált terekben

14. fejezet

Közelítő módszerek és a variációs elv

Könyvünk IV. részének tárgya az eddig vizsgált operátoregyenletekre vonatkozó közelítő módszerek konstrukciója és konvergenciaanalízise. A módszerek legtöbbjét Hilbert-térben értelmezzük, amely általában valós lesz.

A 13.1. fejezetben láttuk, hogy operátoregyenletek egy fontos osztálya esetén az egyenlet megoldhatósága átfogalmazható megfelelő Φ minimalizáló funkcionállal, éspedig az egyenlet megoldása ekvivalens azzal, hogy a Φ funkcionált minimalizáljuk. Ez az ún. variációs elv az adott operátoregyenletek közelítő megoldására is gyakran jól használható. Most konkrétabban megvizsgáljuk néhány esetre a minimalizáló funkcionált.

14.1. Lineáris egyenletek és kvadratikus funkcionál

Legyen először H komplex Hilbert-tér, $A : H \supset\!\!\to H$ szigorúan pozitív operátor, $f \in H$ adott vektor.

14.1. Definíció. Az $Au = f$ egyenlethez tartozó *kvadratikus funkcionál* az alábbi $\Phi : H \to \mathbb{R}$ funkcionál:

$$\Phi(u) := \langle Au, u \rangle - 2Re\, \langle f, u \rangle\,. \tag{14.1}$$

14.2. Állítás. *Ha létezik $u^* \in D(A)$, amelyre $Au^* = f$, akkor Φ-nek pontosan egy minimumhelye van, és ez éppen u^*.*

Bizonyítás. Tetszőleges $u \in D(A)$, $u \neq u^*$ esetén

$$\begin{aligned}\Phi(u) = \langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle - \langle u, f\rangle &= \langle Au, u\rangle - \langle Au^*, u\rangle - \langle u, Au^*\rangle \\ &= \langle A(u-u^*), u-u^*\rangle - \langle Au^*, u^*\rangle \\ &= \langle A(u-u^*), u-u^*\rangle + \Phi(u^*) > \Phi(u^*). \qquad \square\end{aligned}$$

A kvadratikus funkcionál tehát minimalizáló annyiban, hogy az $Au = f$ egyenlet megoldása ekvivalens Φ minimalizálásával. Tudnunk kell viszont azt, hogy az egyenletnek létezik-e egyáltalán megoldása, ehhez némileg erősebb feltételek kellenek.

1. Ha A egyenletesen pozitív és korlátos is, akkor a 7.1. megoldhatósági tétel szerint egyértelműen létezik u^* megoldás.

2. Ha A egyenletesen pozitív, de nem korlátos, akkor a 8.29. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H_A$ gyenge megoldás. Ekkor a variációs elvet úgy tudjuk használni, ha áttérünk az energiatérre, azaz Φ-t kiterjesztjük $D(A)$-ról H_A-ra. Legyen $\widetilde{\Phi} : H_A \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\Phi}(u) := \|u\|_A^2 - 2Re\,\langle f, u\rangle\,.$$

Ekkor a 14.2. állítás bizonyítását megismételve kapjuk, hogy $\widetilde{\Phi}$-nak egyértelműen létezik minimumhelye, és ez a gyenge megoldás, hiszen $u \in H_A$, $u \neq u^*$ esetén

$$\widetilde{\Phi}(u) = \|u-u^*\|_A^2 - \|u^*\|_A^2 = \|u-u^*\|_A^2 + \widetilde{\Phi}(u^*) > \widetilde{\Phi}(u^*). \qquad (14.2)$$

Legyen most H valós Hilbert-tér, $A : H \supset\!\!\to H$ szimmetrikus, szigorúan pozitív operátor, $f \in H$ adott vektor. Az $Au = f$ egyenlethez tartozó eredeti, ill. kiterjesztett kvadratikus funkcionál ekkor

$$\Phi(u) := \langle Au, u\rangle - 2\,\langle f, u\rangle\,, \qquad \widetilde{\Phi}(u) := \|u\|_A^2 - 2\,\langle f, u\rangle\,.$$

Ezekre is értelemszerűen igazak a fenti minimumeredmények.

Példa kvadratikus funkcionálra. Legyen $H := L^2(\Omega)$ mint komplex Hilbert-tér, $A := -\Delta$, $D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ adott. Mint a 8.2. szakasz példájában láttuk, ekkor $H_A = H_0^1(\Omega)$. A megfelelő funkcionálok

$$\Phi(u) = -\int_\Omega (\Delta u)\,\overline{u} - 2Re\int_\Omega f\overline{u} \qquad (u \in D(A))$$

és

$$\widetilde{\Phi}(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - 2Re\int_\Omega f\overline{u} \qquad \big(u \in H_0^1(\Omega)\big)\,.$$

Az előzőek szerint a

$$\left.\begin{array}{rcl} -\Delta u & = & f \\ u_{|\partial\Omega} & = & 0 \end{array}\right\}$$

feladat gyenge megoldása minimalizálja a $\widetilde{\Phi}$ funkcionált a $H_0^1(\Omega)$ téren. Gyakran $\frac{1}{2}$-es szorzóval írjuk fel a funkcionált:

$$E(u) := \frac{1}{2}\Phi(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - Re\ (f\overline{u})\right), \tag{14.3}$$

ami fizikai modellekben a megfelelő energiát jelenti. (Emiatt, az általános Hilbert-térbeli esetben is, szokták a kvadratikus funkcionált energiafunkcionálnak is hívni.)

14.3. Megjegyzés. A (14.1) funkcionál esetén megengedhető, hogy A csak (nem feltétlenül szigorúan) pozitív operátor, de ekkor természetesen csak a $\Phi(u) \geq \Phi(u^*)$ egyenlőtlenség garantálható $u \neq u^*$ esetén is.

A fenti kvadratikusokkal rokon a (7.5) feladathoz tartozó $\Psi : H \times K \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(u,p) = \langle Au, u\rangle + 2\langle Bp, u\rangle - \langle Cp, p\rangle - 2\langle f, u\rangle - 2\langle g, p\rangle \tag{14.4}$$

funkcionál, ahol $A \geq mI \quad (m > 0)$ és $C \geq 0$. (Ez is kvadratikus bizonyos értelemben, hiszen u-nak kvadratikus és lineáris kifejezéseiből áll.) Megmutatjuk, hogy a (7.5) feladat (u^*, p^*) megoldása Ψ nyeregpontja.

14.4. Állítás. *Legyen* $(u^*, p^*) \in H \times K$ *a* (7.5) *feladat megoldása. Ekkor bármely* $(u, p) \in H \times K$ *esetén*

$$\Psi(u^*, p) \leq \Psi(u^*, p^*) \leq \Psi(u, p^*).$$

(Sőt, ha $u \neq u^*$*, akkor a második egyenlőtlenség szigorú, ill. ha még* C *is szigorúan pozitív, akkor az első egyenlőtlenség is.)*

Bizonyítás. (i) Igazoljuk, hogy $\Psi(u^*, p^*) \leq \Psi(u, p^*) \quad (u \in H)$. Az

$$\begin{aligned} u \mapsto \Psi(u, p^*) &= \langle Au, u\rangle + 2\langle Bp^*, u\rangle - \langle Cp^*, p^*\rangle - 2\langle f, u\rangle - 2\langle g, p^*\rangle \\ &= \Big(\langle Au, u\rangle - 2\langle f - Bp^*, u\rangle\Big) - \Big(\langle Cp^*, p^*\rangle + 2\langle g, p^*\rangle\Big) \end{aligned}$$

funkcionál az $Au = f - Bp^*$ egyenlethez tartozó kvadratikus funkcionál és egy konstans összege, így szigorú minimumát ennek az egyenletnek a megoldásában, tehát u^*-ban veszi fel.

(ii) Hasonlóan jön ki, hogy $\Psi(u^*, p) \leq \Psi(u^*, p^*) \quad (p \in K)$. A

$$\begin{aligned} p \mapsto \Psi(u^*, p) &= \langle Au^*, u^*\rangle + 2\langle Bp, u^*\rangle - \langle Cp, p\rangle - 2\langle f, u^*\rangle - 2\langle g, p\rangle \\ &= \Big(\langle Au^*, u^*\rangle - 2\langle f, u^*\rangle\Big) - \Big(\langle Cp, p\rangle - 2\langle p, B^*u^* + g\rangle\Big) \end{aligned}$$

funkcionál egy konstans és a $Cp = B^*u^* + g$ egyenlethez tartozó kvadratikus funkcionál különbsége, így maximumát ennek az egyenletnek a megoldásában, tehát p^*-ban veszi fel. (Ha C szigorúan pozitív is, akkor ez a maximum szigorú.) $\square$

14.2. Nemlineáris egyenletek minimalizáló funkcionáljai

Legyen H valós Hilbert-tér. Először tekintsük azt az esetet, amikor az $A : H \to H$ nemlineáris operátor potenciáloperátor. Ekkor az $A(u) = f$ egyenlethez, mint a 13.1. fejezetben láttuk, bizonyos esetekben igen egyszerűen konstruálható minimalizáló funkcionál

$$\Phi : X \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(u) := J(u) - \langle f, u \rangle \tag{14.5}$$

alakban, ahol J egy potenciálja A-nak. Itt ugyanis $A(u^*) = f$ pontosan akkor áll fenn, ha $\Phi'(u^*) = 0$, így ha Φ konvex (azaz A monoton), akkor ez azt jelenti, hogy u^* minimumhelye Φ-nek (13.1. állítás).
Mint imént a lineáris esetben, garantálnunk kell azt, hogy az egyenletnek létezzék megoldása, amihez némileg erősebb feltételek kellenek. Használjuk fel a 13.2. tételt, amely elégséges feltételt ad egyenletesen konvex potenciál létezésére és ezáltal az $A(u) = f$ egyenlet egyértelmű megoldhatóságára. Ebből adódik a

14.5. Következmény. *Tegyük fel, hogy az $A : H \to H$ operátor*

(i) Gâteaux-deriválható, és A' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) létezik $m > 0$, hogy $\langle A'(u)h, h \rangle \geq m \|h\|^2 \quad (\forall u, h \in H)$.

Legyen J egy potenciálja A-nak. Ekkor bármely $f \in H$ esetén a (14.5) *funkcionálnak egyértelműen létezik minimumhelye, és ez az $A(u) = f$ egyenlet megoldása.*

Említést érdemel, hogy itt a (14.5)-beli Φ maga is potenciál, de nem A-nak, hanem az $u \mapsto A(u) - f$ operátornak.

14.6. Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni, hogy a fenti tétel lefedi-e a lineáris esetet, azaz az előző szakaszbeli kvadratikus funkcionál potenciálja-e az $u \mapsto Au - f$ operátornak. Itt valós Hilbert-tér esetén

$$\Phi(u + tv) = \langle Au, u \rangle + 2t \langle Au, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle - 2 \langle f, u \rangle - 2t \langle f, v \rangle$$

$$= \Phi(u) + 2t\,\langle Au - f, v\rangle + t^2\,\langle Av, v\rangle \qquad (\forall u, v \in H,\ t \in \mathbb{R}), \tag{14.6}$$

így létezik

$$\partial_v \Phi(u) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\Phi(u+tv) - \Phi(u)\Big) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\Big(t\,\langle Av, v\rangle + 2\,\langle Au - f, v\rangle\Big) = 2\,\langle Au - f, v\rangle\,.$$

Emellett $v \mapsto 2\,\langle Au - f, v\rangle$ folytonos lineáris funkcionálja v-nek, így Φ Gâteaux-deriválható és

$$\Phi'(u) = 2(Au - f),$$

kérdésünkre tehát igen a válasz (eltekintve a 2-es szorzótól, amit persze megszüntethetünk (14.3) mintájára).

Ha viszont a Hilbert-tér komplex, akkor a fenti számolás mintájára

$$\partial_v \Phi(u) = 2Re\,\langle Au - f, v\rangle$$

adódik. Ez, mivel valós értékű, a komplex térben nem lineáris funkcionálja v-nek, hanem (mint könnyen látható) csak valós-lineáris, azaz additív, de csak valós konstanssal való szorzó vihető ki belőle.

Ez azt is mutatja, miért a valós Hilbert-terek alkalmasabbak a nemlineáris operátoregyenletek vizsgálatára: mivel csak valós értékű minimalizáló funkcionálnak van értelme, ezek v iránymenti deriváltjai is valós értékű funkcionáljai v-nek, így a komplex tér értelmében nem tekinthetnénk őket Gâteaux-deriválhatónak.

Legyen H ismét valós Hilbert-tér, és tekintsük most azt az esetet, amikor $A : H \to H$ nem potenciáloperátor. Tegyük fel, hogy az $A(u) = f$ egyenletnek egyértelműen létezik u^* megoldása (ez pl. a 13.5 vagy a 13.9. tétel feltételeivel garantálható), valamint hogy A Gâteaux-deriválható. Ekkor természetes minimalizáló funkcionált adhatunk meg a legkisebb négyzetek elve alapján: legyen

$$\Phi(u) := \|A(u) - f\|^2 \qquad (u \in H). \tag{14.7}$$

Nyilvánvaló, hogy $A(u^*) = f$ pontosan akkor áll fenn, ha u^* minimumhelye Φ-nek (és ekkor Φ értéke 0). Ugyanez a norma négyzet nélkül is minimalizálna, de akkor u^*-ban sérülhetne Φ Gâteaux-deriválhatósága. Így viszont:

14.7. Állítás. *Ha A Gâteaux-deriválható, akkor a* (14.7) *funkcionál is Gâteaux-deriválható, és*

$$\Phi'(u) = 2A'(u)^*(A(u) - f) \qquad (u \in H).$$

Bizonyítás. Felhasználva az $\|x\|^2-\|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle$ azonosságot, bármely $u, v \in H$ esetén

$$\partial_v \Phi(u) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\|A(u+tv)-f\|^2 - \|A(u)-f\|^2\Big) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\langle A(u+tv) + A(u) - 2f, A(u+tv) - A(u)\Big\rangle$$

$$\Big\langle \lim_{t\to 0} A(u+tv)+A(u)-2f,\ \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(A(u+tv)-A(u))\Big\rangle = \Big\langle 2(A(u)-f),\ A'(u)v\Big\rangle$$

$$= 2\langle A'(u)^*(A(u)-f), v\rangle,$$

ami folytonos lineáris funkcionálja v-nek. □

14.8. Megjegyzés. (i) Ha A Gâteaux-deriválható, akkor az említett 13.5. vagy 13.9. tétel feltételei esetén $A'(u)$ bijekció, így $A'(u)^*$ is, tehát a $\Phi'(u) = 2A'(u)^*(A(u)-f) = 0$ egyenlet ekvivalens az eredeti $A(u) = f$ egyenlettel. Az eljárás tehát úgy is felfogható, hogy ha az eredeti operátornak nincs potenciálja, akkor $A'(u)^*$-gal beszorozva már van.

(ii) Ha speciálisan A lineáris, azaz $\Phi(u) = \|Au-f\|^2$, akkor $\Phi'(u) = 2A^*(Au-f)$, azaz a $\Phi'(u) = 0$ egyenletből az

$$A^*Au = A^*f$$

egyenletet kapjuk, ami az eredeti egyenlet szimmetrizáltja (ún. normálegyenlet). A normálegyenlet haszna, mint pl. a 7.2. tételben is láttuk, hogy az eredetivel ekvivalens, de már szimmetrikus (azaz a szereplő operátor önadjungált).

15. fejezet

Ritz–Galjorkin-féle projekciós módszerek

Egy végtelen dimenziós térben felírt operátoregyenlet közelítő megoldásának természetes alapgondolata, hogy az alapteret véges dimenziós altereivel helyettesítjük, és az eredeti egyenletet megfelelő értelemben vetítjük erre a térre. A kapott véges dimenziós feladat (algebrai egyenletrendszer) ugyanis már a numerikus analízis módszereivel megoldható, az alterek megfelelő sorozatának választásával pedig a közelítő megoldások az eredetihez tartanak. A Ritz–Galjorkin-módszer ezt az elvet valósítja meg. Az itt tárgyaltnál bővebb elméleti, ill. gyakorlati alkalmazásai találhatók a [14, 67, 76] könyvekben.

15.1. Ritz–Galjorkin-módszer szimmetrikus lineáris egyenletekre

Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \supset\!\!\to H$ szimmetrikus és egyenletesen pozitív: $A \geq pI$ (ahol $p > 0$). Legyen $f \in H$, és tekintsük az

$$Au = f$$

operátoregyenletet. A 8.29. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H_A$ gyenge megoldás, azaz

$$\langle u^*, v\rangle_A = \langle f, v\rangle \qquad (\forall v \in H), \tag{15.1}$$

a 14.1. szakaszból pedig tudjuk, hogy u^* a

$$\Phi(u) := \|u\|_A^2 - 2\,\langle f, u\rangle$$

kvadratikus funkcionál egyetlen minimumhelye H-n.

Legyenek $\phi_1, \phi_2, \ldots$ lineárisan független vektorok, melyek lineáris burka sűrű H_A-ban, azaz totális rendszert alkotnak H_A-ban. Rögzített $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$H_n := \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}.$$

A közelítő módszer alapgondolata, hogy Φ minimumhelyét az egész H tér helyett csak H_n-en keressük. A pontos megoldást tehát egy véges dimenziós altéren előállított közelítő megoldással approximáljuk. Ezt az eljárást *Ritz–Galjorkin-módszernek* nevezik.

Jelölje a H_n-en vett minimumhelyet $u_n \in H_n$, tehát itt

$$\Phi(u_n) = \min_{H_n} \Phi.$$

Ekkor

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i$$

alakú. Itt u_n létezése és egyértelműsége ugyanúgy következik, mint u^*-é, hiszen a kvadratikus funkcionálnak a H_n véges dimenziós téren is egyetlen minimumhelye van.

15.1.1. Konstrukció

Először megvizsgáljuk, hogyan állítható elő u_n. Legyen

$$\widehat{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \widehat{\Phi}(c) := \Phi\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i\Big).$$

Nyilván Φ u-ban való minimalizálása egyenértékű $\widehat{\Phi}$ c-ben való minimalizálásával. Ez utóbbit deriválással kapjuk, éspedig $\widehat{\Phi}$ konvexitása miatt a minimumhely a derivált zérushelye. Itt

$$\widehat{\Phi}(c) = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j \Big\rangle_A - 2\Big\langle f, \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle_A - 2 \sum_{i=1}^{n} c_i \langle f, \phi_i \rangle .$$

Ekkor

$$\partial_k \widehat{\Phi}(c) = 2 \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A - 2 \langle f, \phi_k \rangle ,$$

amiből következik, hogy

$$\widehat{\Phi}'(c) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A \, c_i = \langle f, \phi_k \rangle \qquad (\forall k = 1, \ldots, n).$$

Bevezetve a

$$G_{ik} = G_{ki} := \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A \quad \text{és} \quad b_k := \langle f, \phi_k \rangle$$

$(i, k = 1, \ldots, n)$ jelöléseket, azt kapjuk, hogy u_n keresett együtthatóit a

$$Gc = b \tag{15.2}$$

lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával kapjuk, ahol $c \in \mathbb{R}^n$ a c_i-kből képzett oszlopvektor. Itt a $G = \{G_{ik}\}_{i,k=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix neve Gram-mátrix. (Természetesen itt G, c és b is függ n-től, de ezt az egyszerűség kedvéért nem jelöltük.)

15.1.2. Konvergencia és jellemzés

A kapott u_n megoldásoktól azt várjuk, hogy a valódi megoldást közelítsék, ha n-et növeljük.

15.1. Állítás. *A fent konstruált u_n vektorokra $u_n \to u^*$ $\|\cdot\|_A$-normában, ha $n \to \infty$.*

Bizonyítás. Mivel $\cup_n H_n$ sűrű H_A-ban és Φ folytonos H_A-n, ezért $\min_{H_n} \Phi \to \min_{H_A} \Phi$, azaz $\Phi(u_n) \to \Phi(u^*)$. Így (14.2) alapján

$$\|u_n - u^*\|_A^2 = \Phi(u_n) - \Phi(u^*) \to 0. \qquad \square$$

Az $u_n \in H_n$ vektort mint Φ H_n-en vett minimumhelyét definiáltuk, de még két fontos tulajdonsággal rendelkezik. Valójában e három tulajdonság bármelyikével bevezethető a Ritz–Galjorkin módszer.

15.2. Tétel. *A Ritz–Galjorkin módszerrel kapott u_n-re az alábbi tulajdonságok teljesülnek:*

(1) (Közelítő minimalizálás:) u_n *a* $\Phi_{|H_n}$ *minimumhelye.*

(2) (Vetületi egyenlet:) $\langle u_n, v \rangle_A = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in H_n)$.

(3) (A hiba ortogonalitása:) $\langle u_n - u^*, v \rangle_A = 0 \quad (\forall v \in H_n)$.

Bizonyítás.
(1) Ez definíció szerint igaz.
(2) Ahhoz, hogy minden $v \in H_n$ esetén fennálljon a vetületi egyenlet, elég, ha a bázisvektorokra belátjuk az egyenlőséget, ez pedig a konstrukcióból következik:

$$\langle u_n, \phi_k \rangle_A = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i, \phi_k \right\rangle_A = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A = \langle f, \phi_k \rangle .$$

(3) A (15.1) és a vetületi egyenletből bármely $v \in H_n$ esetén

$$\langle u_n, v \rangle_A - \langle u^*, v \rangle_A = \langle f, v \rangle - \langle f, v \rangle = 0. \qquad \square$$

15.3. Megjegyzés. A (2) tulajdonságot azért hívjuk vetületi egyenletnek, mert u_n a (15.1)-beli bármely $v \in H$ helyett csak bármely $v \in H_n$ esetén teljesíti az egyenlőséget, ami olyan, mintha H_n-re vetítenénk a (15.1) egyenletet.
A (3) tulajdonság azt mondja ki, hogy az $u_n - u^*$ hibavektor merőleges a H_n altérre, ez az ún. Galjorkin-ortogonalitás.
Mindkét tulajdonság azt jelenti, hogy u_n éppen u^* vetülete H_n-re.

15.1.3. Klasszikus speciális esetek

Nagyon egyszerű esetet kapunk, ha $\{\phi_i\}$ teljes ortonormált rendszer (TONR) H_A-ban. Ekkor $G_{ik} = \langle \phi_i, \phi_k \rangle_A = \delta_{ik}$, azaz $G = I$ és így $c_i = \langle f, \phi_i \rangle$. Ebből következően

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f, \phi_i \rangle \phi_i .$$

Ha például a $\{\phi_i\}$ függvények A sajátfüggvényei és A^{-1} kompakt, akkor (ld. 8.21. tétel) $\{\phi_i\}$ TONR H-ban és így H_A-ban is. Ekkor $\phi_i \in D(A)$. Ennek az esetnek az általánosítása, ha $D(A)$-ban nem ortonormált rendszert választunk, ekkor a H_A-beli teljesség a következőképp garantálható:

15.4. Állítás. *Legyen $\{\phi_j\} \subset D(A)$ olyan lineárisan független rendszer, hogy $\{A\phi_j\}$ totális rendszer H-ban. Ekkor $\{\phi_j\}$ totális rendszer H_A-ban.*

Bizonyítás. Be kell látni, hogy $\mathrm{span}\{\phi_j : j \in \mathbb{N}\}$ sűrű H_A-ban. Ehhez elég, ha csak $D(A)$-ban sűrű (mert $D(A)$ sűrű H_A-ban). Legyen $v \in D(A)$. Az $\{A\phi_j\}$ rendszer teljessége szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz léteznek olyan $i_1, \ldots, i_k$ indexek és $c_{i_1}, \ldots, c_{i_k}$ konstansok, hogy

$$\|Av - (c_{i_1} A\phi_{i_1} + \ldots + c_{i_k} A\phi_{i_k})\| < \sqrt{p}\, \varepsilon.$$

Ekkor a 8.26. következmény alapján

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{k} c_{i_n}\phi_{i_n} \right\|_A \le \frac{1}{\sqrt{p}} \left\| A\Big(v - \sum_{n=1}^{k} c_{i_n}\phi_{i_n}\Big) \right\| =$$
$$\frac{1}{\sqrt{p}} \left\| Av - \sum_{n=1}^{k} c_{i_n} A\phi_{i_n} \right\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Gyakorlati szempontból a $\phi_i \in D(A)$ feltétel nagyon erős, ehelyett a $\phi_i \in H_A$ gyengítést nagyon is célszerű kihasználni, sőt az eddigi módszerhez képest lényegesen jobban használható az az eset, ha a H_n altereket nem egymásba ágyazva, hanem függetlenül definiáljuk. Erről szól a következő szakasz.

15.1.4. A Ritz–Galjorkin módszer általánosítása

A Ritz–Galjorkin módszer egy lehetséges általánosítása, ha minden egyes n-re új bázisfüggvényeket választunk, azaz $H_n = span\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_n^{(n)}\} \subset H_A$, ahol az elemek lineárisan függetlenek. Ekkor tehát nem követeljük meg a H_n alterek egymásba ágyazottságát, ami jóval nagyobb szabadsági fokot ad.

Az u_n közelítést ugyanúgy állíthatjuk elő, mint az eredeti esetben: u_n együtthatóit a (15.2) lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával kapjuk. (A különbség csak annyi, hogy most a különböző n-ekhez tartozó Gram-mátrixok sincsenek egymásba ágyazva.) Érvényes a 15.2. tételben adott jellemzés is, hiszen ott nem használtuk ki a H_n alterek egymásba ágyazottságát.

A konvergenciához szükség van megfelelő feltételre ahelyett, hogy az eredeti módszerben $\phi_1, \phi_2, \dots$ totális rendszert alkot H_A-ban. Itt nem elég feltenni, hogy $\cup_i H_i$ legyen sűrű H_A-ban, mert ez csak ahhoz elég, hogy u_n egy részsorozata tartson u^*-hoz. Ehelyett a következő tulajdonságra van szükség:

15.1.4. feltétel. Bármely $u \in H_A$ esetén

$$\mathrm{dist}_A(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\|_A : \ v_n \in H_n\} \to 0, \qquad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A távolságban a 2.15. tétel alapján írhatunk infimum helyett minimumot. A feltétel annyiban erősebb $\cup_i H_i$ sűrűségénél, hogy egy $u \in H_A$ vektor olyan sorozattal közelíthető, melynek tagjai nemcsak valamelyik H_i-ben vannak, hanem az n-edik tag éppen H_n-ből való.

15.5. Állítás. *Ha teljesül a 15.1.4. feltétel, akkor $u_n \to u^*$ $\|\cdot\|_A$-normában, ha $n \to \infty$.*

Bizonyítás. A hiba Galjorkin-ortogonalitása, azaz az $u_n - u^* \perp H_n$ tulajdonság (15.2. tétel (3) pont) azt jelenti, hogy u_n éppen u^* vetülete H_n-re.

Így u_n van H_n-ből legközelebb u^*-hoz, tehát

$$\|u^* - u_n\|_A = \min\{\|u^* - v_n\|_A : \ v_n \in H_n\} \to 0. \qquad \square$$

15.2. Ritz–Galjorkin-módszer nem szimmetrikus lineáris egyenletekre, Céa-lemma

Most nem szimmetrikus lineáris operátoregyenleteket tekintünk a 8.3.1. szakasz alapján. Legyen tehát H ismét valós Hilbert-tér, $L : H \supset\!\!\to H$ adott lineáris operátor, amely S-korlátos és S-koercív valamely $S : H \supset\!\!\to H$ egyenletesen pozitív operátorra nézve. Legyen $g \in H$ és tekintsük az

$$Lu = g \tag{15.3}$$

operátoregyenletet. A 8.37. tétel szerint ennek egyértelműen létezik gyenge megoldása, azaz olyan $u^* \in H_S$, melyre

$$\langle L_S u^*, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (\forall v \in H_S). \tag{15.4}$$

A Ritz–Galjorkin módszert most rögtön a 15.1.4. szakasznak megfelelő általánosabb helyzetben definiáljuk, emellett alaptérnek H_S-et vesszük. Legyenek tehát

$$H_n = span\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \ldots, \phi_n^{(n)}\} \subset H_S$$

alterek ($n \in \mathbb{N}^+$), ahol minden n-re a $\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \ldots, \phi_n^{(n)}$ elemek lineárisan függetlenek. (A továbbiakban a kevesebb index kedvéért megmaradunk a $\phi_k := \phi_k^{(n)}$ jelölésnél.) A 15.1.4. feltétel mintájára teljesüljön a

15.2. feltétel. Bármely $u \in H_S$ esetén

$$\mathrm{dist}_S(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\|_S : \ v_n \in H_n\} \to 0, \qquad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Az u_n közelítés előállításához most nem használhatunk kvadratikus funkcionált, de vetületi egyenletet ugyanúgy értelmezhetünk, mint a szimmetrikus esetben, így ez lesz a módszer definíciója. Az

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \in H_n \tag{15.5}$$

közelítő megoldást tehát az

$$\langle L_S u_n, v\rangle_S = \langle g, v\rangle \qquad (\forall v \in H_n) \tag{15.6}$$

egyenlőség definiálja. (Ennek létezését és egyértelműségét a 8.37. tétel garantálja a H_n véges dimenziós térben.)

Az u_n együtthatóit a szimmetrikus esethez hasonlóan egy lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával kapjuk: ha

$$G_{ki} := \langle L_S\phi_i, \phi_k\rangle_S \quad \text{és} \quad b_k := \langle g, \phi_k\rangle$$

$(i, k = 1, \ldots, n)$, akkor a c_i-kből képzett $c \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektort a

$$Gc = b \tag{15.7}$$

rendszer megoldása adja meg. Ez most abból következik, ha a (15.5) alakot és a $v := \phi_k$ függvényeket a (15.6) egyenletbe helyettesítjük.

15.6. Megjegyzés. (A reziduális hiba ortogonalitása.) A Galjorkin-ortogonalitás most nem az $u_n - u^*$, hanem az $L_S(u_n - u^*)$ vektorra teljesül: a (15.4) és (15.6) egyenletekből

$$\langle L_S(u_n - u^*), v\rangle_S = 0 \qquad (\forall v \in H_n), \tag{15.8}$$

azaz $L_S u_n - L_S u^* \perp H_n$. Ha $b \in H_S$ jelöli (15.4) jobboldalának Riesz-reprezentánsát, azaz $\langle b, v\rangle_S = \langle g, v\rangle$ $(\forall v \in H_S)$, akkor $L_S u^* = b$, így $L_S u_n - b \perp H_n$, így az $L_S u_n - b$ „gyenge” reziduális vektor ortogonális H_n-re.

A módszer konvergenciája az alábbi nevezetes eredményre alapul:

15.7. Állítás. (Céa-lemma) *Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$\|u^* - u_n\|_S \leq \frac{M}{m} \min\{\|u^* - v_n\|_S : \ v_n \in H_n\}.$$

Bizonyítás. A (8.14) és (15.8) összefüggésekből bármely $v_n \in H_n$ esetén

$$\begin{aligned} m\|u^* - u_n\|_S^2 &\leq \langle L_S(u^* - u_n), u^* - u_n\rangle_S = \langle L_S(u^* - u_n), u^* - v_n\rangle_S \\ &\leq M\|u^* - u_n\|_S \|u^* - v_n\|_S, \end{aligned}$$

így $\|u^* - u_n\|_S \leq \frac{M}{m}\|u^* - v_n\|_S$. □

Más szóval $\|u^* - u_n\|_S \leq \frac{M}{m} \cdot \mathrm{dist}_S(u^*, H_n)$.

15.8. Következmény. *Ha teljesül a 15.2. feltétel, akkor $u_n \to u^*$ $\|\cdot\|_S$-normában, ha $n \to \infty$.*

15.3. Ritz–Galjorkin-módszer bilineáris formával megfogalmazott feladatokra

Ebben a szakaszban röviden vázoljuk a Ritz–Galjorkin-módszer konstrukcióját és konvergenciáját további két, ezúttal bilineáris formával megfogalmazott feladattípusra.

15.3.1. A Lax–Milgram-lemmára alapuló feladatok

A Ritz-Galjorkin-módszer az előző szakasszal teljesen analóg módon tárgyalható a Lax–Milgram-lemmában (7.16. tétel) tételben szereplő, bilineáris formával megfogalmazott feladatokra. Ez a 7.13. tételnek köszönhető, amellyel visszavezethető operátoregyenletre.

Legyen $B : H \times H \to \mathbb{R}$ korlátos, koercív bilineáris forma, $\ell : H \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál. Tekintsük a

$$B(u, v) = \ell v \qquad (\forall v \in H)$$

feladatot, melynek a 7.16. tétel szerint egyértelműen létezik megoldása. Ekkor az $u_n \in H_n$ közelítő megoldást a

$$B(u_n, v) = \ell v \qquad (\forall v \in H_n)$$

egyenlőséggel értelmezzük, és a

$$G_{ki} := B(\phi_k, \phi_i), \qquad b_k := \ell\phi_k$$

$(i, k = 1, \dots, n)$ alapján definiált $Gc = b$ lineáris egyenletrendszer megoldásából kapjuk. Az $u_n \in H_n$ elem létezését és egyértelműségét szintén a 7.16. tétel garantálja, most a H_n véges dimenziós térben, mivel a $H_n \times H_n$-re leszűkített B forma örökli $H \times H$-ról a korlátosságot és koercivitást: mindkét egyenlőtlenség nyilvánvalóan fennáll akkor is, ha tetszőleges H-beli vektor helyett csak H_n-belieket helyettesítünk.

A (15.8) ortogonalitás helyére a $B(u_n - u^*, v) = 0$ $(\forall v \in H_n)$ azonosság lép, ebből a fentivel azonosan igazolható a Céa-lemma és így a konvergencia:

15.9. Következmény. *Ha bármely $u \in H$ esetén dist$(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\| : v_n \in H_n\} \to 0$, akkor $\|u_n - u^*\| \to 0$.*

15.3.2. Nyeregpont-feladatok LBB-feltétellel

Tekintsük a 7.3.2. szakasz feladatát: legyenek H, K valós Hilbert-terek, $\mathcal{A} : H \times H \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{B} : K \times H \to \mathbb{R}$ korlátos bilineáris formák, ahol $\mathcal{A}$ koercív, azaz fennáll (7.15), valamint teljesül a (7.17) inf-sup-feltétel. Legyenek továbbá $\ell : H \to \mathbb{R}$ és $\kappa : K \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálok, és keresendő $(u, p) \in H \times K$, melyre

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(u, v) + \mathcal{B}(p, v) = \ell v \qquad (\forall v \in H), \\ &\mathcal{B}(q, u) \qquad\qquad\quad\;\; = \kappa q \qquad (\forall q \in K). \end{aligned} \tag{15.9}$$

A 7.29. tétel szerint egyértelműen létezik $(u^*, p^*) \in H \times K$ megoldás.

Legyenek $H_n = span\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_{m_n}^{(n)}\} \subset H$ és $K_n = span\{\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}, \dots, \psi_{k_n}^{(n)}\} \subset K$ alterek ($n \in \mathbb{N}^+$), ahol minden n-re a $\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \dots, \phi_{m_n}^{(n)}$ ill. $\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}, \dots, \psi_{k_n}^{(n)}$ elemek lineárisan függetlenek, valamint

$$\begin{aligned} &\text{bármely } u \in H \text{ esetén} \quad \operatorname{dist}(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\| : \ v_n \in H_n\} \to 0, \\ &\text{bármely } p \in K \text{ esetén} \quad \operatorname{dist}(p, K_n) := \min\{\|p - q_n\| : \ q_n \in K_n\} \to 0. \end{aligned} \tag{15.10}$$

Az $(u_n, p_n) \in H_n \times K_n$ közelítő megoldást a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_n, v) + \mathcal{B}(p_n, v) &= \ell v \qquad (\forall v \in H_n), \\ \mathcal{B}(q, u_n) \qquad\qquad &= \kappa q \qquad (\forall q \in K_n). \end{aligned} \tag{15.11}$$

feladat megoldásaként keressük. (A közelítő megoldások együtthatóira most (7.7) alakú lineáris egyenletrendszer áll fenn.)

A korábbi szakaszokhoz képest azonban a fenti diszkrét feladat nem örökli automatikusan az eredeti feladat megoldhatóságát. A problémát az okozza, hogy a (7.17) inf-sup-feltétel nem öröklődik tetszőleges H_n és K_n alterekre. Ez könnyen látható, ha a $\mathcal{B}$ forma B reprezentáló operátorával írjuk fel rájuk az inf-sup-feltételt (7.14) szerint:

$$\sup_{u \in H_n \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u \rangle}{\|u\|} \geq \gamma \, \|p\| \qquad (\forall p \in K_n). \tag{15.12}$$

Ha ugyanis H_n-et például úgy választjuk, hogy valamely $p \in K_n$ mellett $H_n \perp Bp$, akkor a fenti számlálóban $\langle Bp, u \rangle = 0$ bármely $u \in H_n \setminus \{0\}$ esetén.

Ezt csak azzal oldhatjuk meg, ha az inf-sup-feltételt külön előírjuk a H_n és K_n alterek esetén is. Ezt a későbbiek miatt egyenletesen, azaz n-től független konstanssal kell:

15.10. Definíció. A H_n és K_n alterek teljesítik a (15.11) feladathoz tartozó **LBB-feltételt** (Ladüzsenszkaja-Babuška-Brezzi-feltételt) vagy **diszkrét inf-sup-feltételt**, ha van olyan $\gamma_0 > 0$ n-től független állandó, hogy

$$\inf_{p \in K_n \setminus \{0\}} \ \sup_{u \in H_n \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{B}(p, u)}{\|p\| \|u\|} \geq \gamma_0. \tag{15.13}$$

A gyakorlatban tehát H_n és K_n nem választható egymástól függetlenül. Az LBB-feltételben az u-ra vett supremum pozitív korlát fölöttisége azt követeli meg, hogy adott K_n esetén a H_n altér „elég nagy" legyen.

15.11. Megjegyzés. Az LBB-feltételt Babuška lemmája (7.19. tétel) alapján Brezzi dolgozta ki nyeregpont-feladatokra [11]. Az elterjedt elnevezés Ladüzsenszkaja korábbi kapcsolódó munkájára is utal.

Ha teljesül az LBB-feltétel, akkor tehát a (15.11) feladatnak egyértelműen létezik $(u_n, p_n) \in H_n \times K_n$ megoldása. Az LBB-feltétel alapján emellett igazolható a Céa-lemma megfelelője: létezik olyan $c > 0$ állandó, hogy

$$\|u^* - u_n\| + \|p^* - p_n\| \le c \big(\min_{v_n \in H_n} \|u^* - v_n\| + \min_{q_n \in K_n} \|p^* - q_n\| \big)$$

bármely n esetén. (A c állandó nem függ n-től, de függ γ_0-tól. A bizonyítás megtalálható a [21, 69] könyvekben.) Ebből adódik a konvergencia:

15.12. Következmény. *Ha teljesül* (15.10) *és az LBB-feltétel, akkor* $\|u_n - u^*\| + \|p_n - p^*\| \to 0$, *ha* $n \to \infty$.

15.4. Ritz–Galjorkin-módszer nemlineáris egyenletekre

Most nemlineáris operátoregyenletekkel foglalkozunk a 13.3.1. szakasz alapján. A lineáris esettel ellentétben most folytonos operátort nézünk, mivel (mint a 13.4. szakasz gyenge alakú példái is mutatják) az alkalmazások általában már erre az esetre épülnek. Legyen tehát H ismét valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott nemlineáris operátor, amely egyenletesen monoton és Lipschitz-folytonos: létezik $M \ge m > 0$, hogy bármely $u, v \in H$ esetén

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \ge m \|u - v\|^2, \qquad \|A(u) - A(v)\| \le M \|u - v\| . \tag{15.14}$$

Tekintsük az

$$A(u) = b \tag{15.15}$$

operátoregyenletet, ahol $b \in H$, ennek a 13.5. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása. Írjuk fel ezt a vele ekvivalens tesztfüggvényes alakban:

$$\langle A(u^*), v \rangle = \langle b, v \rangle \qquad (\forall v \in H). \tag{15.16}$$

Legyenek $H_n = span\{\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \ldots, \phi_n^{(n)}\} \subset H$ alterek ($n \in \mathbb{N}^+$), ahol minden n-re a $\phi_1^{(n)}, \phi_2^{(n)}, \ldots, \phi_n^{(n)}$ elemek lineárisan függetlenek és bármely $u \in H$ esetén

$$\operatorname{dist}(u, H_n) := \min\{\|u - v_n\| : \ v_n \in H_n\} \to 0, \qquad \text{ha} \quad n \to \infty. \tag{15.17}$$

(A továbbiakban a kevesebb index kedvéért ismét megmaradunk a $\phi_k := \phi_k^{(n)}$ jelölésnél.)

Az $u_n \in H_n$ közelítés előállításához most sem használhatunk potenciált, de vetületi egyenletet ugyanúgy értelmezhetünk, mint a lineáris esetben, így most is ez lesz a módszer definíciója. Az

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \in H_n \tag{15.18}$$

közelítő megoldást tehát az

$$\langle A(u_n), v\rangle = \langle b, v\rangle \qquad (\forall v \in H_n) \tag{15.19}$$

egyenlőség definiálja, létezését és egyértelműségét pedig a 13.5. tétel garantálja a H_n térben.

Az u_n együtthatóit a következőképp kapjuk. Helyettesítsük a (15.18) alakot és a $v := \phi_k$ függvényeket a (15.19) egyenletbe:

$$\Big\langle A\big(\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i\big), \phi_k\Big\rangle = \langle b, \phi_k\rangle \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Vezessük be az

$$\mathcal{A}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{A}_k(c) = \mathcal{A}_k(c_1, \ldots, c_n) := \Big\langle A\big(\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i\big), \phi_k\Big\rangle$$

valós függvényeket és legyen $\beta_k := \langle b, \phi_k\rangle \quad (k = 1, \ldots, n)$. Az ezekből összerakott $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény és $\beta \in \mathbb{R}^n$ vektor mellett tehát u_n együtthatóit az

$$\mathcal{A}(c) = \beta$$

nemlineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

15.13. Megjegyzés. (A reziduális hiba ortogonalitása.) A (15.16) és (15.19) egyenletekből következik, hogy

$$\langle A(u^*) - A(u_n), v\rangle = 0 \qquad (\forall v \in H_n), \tag{15.20}$$

azaz $A(u^*) - A(u_n) \perp H_n$. Jelölje most $r_n := A(u_n) - b$ a reziduális vektort (más néven maradékvektort). Mivel $A(u^*) = b$, a fentiekből $\langle r_n, v\rangle = 0$ minden $v \in H_n$ esetén, azaz r_n ortogonális H_n-re.

A módszer konvergenciája a Céa-lemma (15.7. állítás) megfelelőjére alapul:

15.14. Állítás. (Nemlineáris Céa-lemma) *Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$\|u^* - u_n\| \le \frac{M}{m} \min\{\|u^* - v_n\| : \ v_n \in H_n\}.$$

Bizonyítás. A (15.14) és (15.20) összefüggésekből bármely $v_n \in H_n$ esetén

$$\begin{aligned} m\|u^* - u_n\|^2 &\le \langle A(u^*) - A(u_n), u^* - u_n\rangle = \langle A(u^*) - A(u_n), u^* - v_n\rangle \\ &\le \|A(u^*) - A(u_n)\|\|u^* - v_n\| \le M\|u^* - u_n\|\|u^* - v_n\|, \end{aligned}$$

így $\|u^* - u_n\| \le \frac{M}{m}\|u^* - v_n\|$. □

15.15. Következmény. *Ha teljesül a* (15.17) *feltétel, akkor* $\|u_n - u^*\| \to 0$.

15.5. A végeselem-módszer elméleti háttere

A Ritz–Galjorkin-módszernek, pontosabban a 15.1.4. szakaszban leírt általánosabb alakjának fő alkalmazása a végeselem-módszer (FEM – finite element method), amely (elsősorban parciális) differenciálegyenletek peremértékfeladatainak egyik legelterjedtebb megoldási módszere. A FEM lényege, hogy a tartományt felosztjuk véges sok kis egyszerűbb résztartományra („elemekre", melyek általában háromszögek/tetraéderek vagy téglalapok/téglatestek). A kívánt véges dimenziós alterek olyan függvényekből állnak, amelyek leszűkítései egy-egy ilyen „elemre" valamilyen megadott fokú polinomok, melyeket az egész tartományon folytonosság (vagy valahányszori folytonos differenciálhatóság) köt össze. Az alterek jelölésére a végeselem-módszernél megszokott jelölést használjuk, és $n \in \mathbb{N}^+$ egész helyett a $h > 0$ ún. rácsparaméterrel indexeljük, amely általában az „elemek" maximális átmérőjével (azaz a rácsfinomsággal) arányos. (Ekkor n fordítottan arányos h-nak a térdimenziótól függő hatványával. A V_h-beli közelítő megoldásra az u_h jelölést használjuk.) Így a korábbi H_n helyett most a V_h jelölést használjuk. Azaz

$$V_h := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : \ u_{|T_i} \in P_m \ \forall i = 1, \ldots, n\}, \tag{15.21}$$

ahol $k, m \geq 0$ és $n \geq 1$ adott egészek, P_m a legfeljebb m-edfokú polinomok halmaza és $T_1, \ldots, T_n$ az „elemek". A legegyszerűbb, de igen elterjedt eset, amikor az elemek háromszögek/tetraéderek, $k = 0$ és $m = 1$, azaz szakaszonként lineáris polinomokból álló folytonos függvények alkotják V_h-t.

A V_h altér bázisfüggvényeit úgy szokás megadni, hogy függvényértékeik (és esetleg bizonyos deriváltjaik értéke) adott pontokban 0 vagy 1, úgy, hogy már egyértelműen meghatározzák az adott fokú polinomot. A fenti egyszerű példákban a függvényértékekre egy-egy csúcspontban 1-et, az összes többiben 0-t írunk elő.

A FEM konstrukciója a peremértékfeladat gyenge alakjára támaszkodik, a Gram-mátrix elemei megfelelő integrálok (a FEM során a Gram-mátrixra a merevségi mátrix elnevezés terjedt el). A módszer előnyös tulajdonsága, hogy akkor is konvergál, ha nem tételezünk fel semmilyen regularitást a gyenge megoldásról. A konvergencia rendjének becslése már megkíván valamilyen (általában H^2-beli) regularitási feltételt. Ennek és a konkrét végeselemes felbontásoknak, ill. a módszer megvalósítási technikáinak rendkívül kiterjedt elmélete van, lásd pl. [14, 69]. Nem célunk ezek ismertetése, itt csak azt illusztráljuk egy egyszerű példán, hogyan illeszkedik a FEM az eddigiekben tárgyalt absztrakt elméletbe.

Tekintsük példaként a (10.11) feladatot:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \nabla u) = f, \\ \quad u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{15.22}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in L^\infty(\Omega)$, $p(x) \geq m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$), $f \in L^2(\Omega)$. Ennek a 10.15. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása, ahol most a $H_0^1(\Omega)$ teret valós értékű függvényekkel definiáljuk. Ekkor

$$\int_\Omega p\ \nabla u^* \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)). \tag{15.23}$$

A FEM felírásakor a 15.1.4. szakasz felépítését használhatjuk a $H := L^2(\Omega)$ térben. Itt az $Au := -\operatorname{div}(p\,\nabla u)$ operátor a Dirichlet-peremfeltétel mellett szimmetrikus és egyenletesen pozitív, és $H_A = H_0^1(\Omega)$ az

$$\langle u, v\rangle_A = \int_\Omega p\ \nabla u \cdot \nabla v \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega)) \tag{15.24}$$

skalárszorzattal (lásd pl. a 8.2. szakasz példájában). Ekkor (15.23) megegyezik (15.1)-gyel. Legyen V_h valamely (15.21) típusú altér. Ekkor az u_h közelítő megoldás együtthatóit a

$$Gc = b \tag{15.25}$$

lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával kapjuk, ahol

$$G_{ik} = G_{ki} = \int_\Omega p\ \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_k \quad \text{és} \quad b_k = \int_\Omega f\phi_k \tag{15.26}$$

$(i, k = 1, \ldots, n)$. Ez az u_h függvény teljesíti az

$$\int_\Omega p\ \nabla u_h \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \qquad (\forall\ v \in V_h)$$

vetületi egyenletet.

A 15.1-beli kiindulási definíció szerint emellett u_h minimalizálja az (energiát kifejező) kvadratikus funkcionált V_h-en: a (14.3) egyenlőséghez hasonlóan, $\frac{1}{2}$-es szorzóval felírva

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\,p\ |\nabla u_h|^2 - fu_h\right) = \min_{u \in V_h} \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\,p\ |\nabla u|^2 - fu\right).$$

A hibafüggvény Galjorkin-ortogonalitása (15.2. tétel) ebben a helyzetben:

$$\int_\Omega p\ \nabla(u_h - u^*) \cdot \nabla v = 0 \qquad (\forall\ v \in V_h).$$

Végül, a végeselemes alterek egy $\{V_h\}_{h>0}$ családja esetén, ha a felbontás finomsága (azaz az elemek maximális átmérője) 0-hoz tart, akkor az elemekre és a polinomokra tett nem túl szigorú feltételekkel [14, 69] elérhető, hogy bármely $u \in H_0^1(\Omega)$ esetén

$$\mathrm{dist}_{H_0^1}(u, V_h) = \min\{\|u - v_h\|_{H_0^1} : \; v_h \in V_h\} \to 0, \qquad \text{ha} \quad h \to 0. \quad (15.27)$$

Ekkor a $H_0^1(\Omega)$-norma és a (15.24)-hoz tartozó súlyozott norma ekvivalenciája miatt teljesül a 15.1.4. feltétel. Ebből a 15.5. állítás alapján következik a végeselem-módszer konvergenciája:

$$\|u_h - u^*\|_{H_0^1} \to 0.$$

Egyszerű példa. Triviális szemléltetésként tekintsük az alábbi egydimenziós feladatot a $[-1, 1]$ intervallumon:

$$\begin{cases} -u'' &= \;1 \\ u(-1) = u(1) &= \;0. \end{cases}$$

Osszuk fel az intervallumot négy egyenlő részre, és a ϕ_i függvények legyenek az úgynevezett kalapfüggvények: azok a szakaszonként lineáris függvények, melyek egy adott belső osztópontban 1-et vesznek fel, a többiben nullát. Ekkor

$$G_{ik} = G_{ik} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_A = \int_{-1}^{1} \phi_i' \phi_k', \quad b_k = \langle f, \phi_k \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \phi_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ebben a konkrét példában kiszámolható, hogy

$$G = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és a $Gc = b$ egyenletet megoldva megkapjuk az együtthatóvektort:

$$c = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

A kapott töröttvonal-megoldásra még az is igaz, hogy a $\pm\frac{1}{2}$ és 0 rácspontokban megegyezik az $u^*(x) = \frac{1-x^2}{2}$ pontos megoldással.

Végül, a fentiekhez hasonlóan építhető fel a végeselemes megoldás a (13.3) nemlineáris feladatra:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} f(x, \nabla u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (15.28)$$

a 13.4.1. feltételekkel. Ennek $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldására

$$\int_\Omega f(x, \nabla u^*) \cdot \nabla v = \int_\Omega gv \qquad (\forall\ v \in H_0^1(\Omega)). \tag{15.29}$$

Legyen V_h ugyanolyan végeselemes altér, mint az előbbi lineáris esetben. Ekkor az $u_h \in V_h$ közelítő megoldás teljesíti az

$$\int_\Omega f(x, \nabla u_h) \cdot \nabla v = \int_\Omega gv \qquad (\forall\ v \in V_h)$$

vetületi egyenletet, és u_h együtthatóit az

$$\mathcal{A}(c) = \beta$$

nemlineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával kapjuk, ahol

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$\mathcal{A}_k(c) = \mathcal{A}_k(c_1, \ldots, c_n) = \int_\Omega f(x,\ \sum_{i=1}^n c_i \nabla\phi_i) \cdot \nabla\phi_k$$
$$(k = 1, \ldots, n)$$

és $\beta_k := \int_\Omega g\phi_k \quad (k = 1, \ldots, n)$. A megfelelő A operátorra igazak a (15.14) tulajdonságok, így ha teljesül (15.27), akkor a 15.15. következmény szerint

$$\|u_h - u^*\|_{H_0^1} \to 0.$$

16. fejezet

Iterációs módszerek lineáris operátoregyenletekre

Ebben a fejezetben kiderül, hogy egyes, véges dimenzióban jól ismert iterációs módszerek értelemszerűen átvihetők a végtelen dimenziós esetre. A gyakorlatban ennek az a fő jelentősége, hogy a kapott elvi iterációk jellemzik a véges dimenziós módszerek aszimptotikus viselkedését a közelítés finomítása során. A tárgyalt módszerekről részletesen esik szó a [25, 33, 74] könyvekben.

Az iterációk vizsgálatához idézzük fel a konvergencia legfontosabb rendjeinek fogalmát, lásd pl. [69]: egy iteráció elsőrendben vagy *lineárisan* konvergál, ha van olyan $0 < q < 1$ állandó, hogy az ε_n hibákra $\varepsilon_{n+1} \le q\,\varepsilon_n$ teljesül ($\forall n \in \mathbb{N}$; ekkor $\varepsilon_n \le \varepsilon_0\, q^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$), ill. másodrendben vagy *kvadratikusan* konvergál, ha van olyan $c > 0$ állandó, hogy $\varepsilon_{n+1} \le c\,\varepsilon_n^2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

16.1. A gradiens-módszer korlátos önadjungált operátorra

16.1.1. A gradiens-módszer alapgondolata minimalizálási feladatra

A gradiens-módszer (GM) alapelvét először általánosan ismertetjük, mint funkcionálok minimalizálására alkalmas módszert. Ezt most lineáris egyenletek esetén a kvadratikus funkcionálra használjuk fel, de egy későbbi fejezetben ugyanezt az elvet alkalmazzuk majd nemlineáris egyenletek megoldására is.

Legyen X Banach-tér, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ adott funkcionál. Szeretnénk meghatározni Φ egy lokális minimumhelyét. Ennek természetes módja egy olyan iteráció, melynek minden lépésében a legnagyobb csökkenés irányában lépünk tovább (emiatt szokás az ilyen eljárást a leggyorsabb ereszkedés módszerének is hívni). Formálisan ez a következőképp írható le: tegyük fel, hogy minden $u, v \in X$ esetén létezik a $\partial_v \Phi(u)$ iránymenti derivált. Definiáljuk a következő sorozatot:

- legyen $u_0 \in X$ tetszőleges;
- ha $n \in \mathbb{N}$ és u_n már megvan, akkor

$$u_{n+1} := u_n + \alpha_n v_n,$$

ahol $\alpha_n > 0$ konstans és a $v_n \in X$ vektor eleget tesz a

$$\partial_{v_n} \Phi(u_n) = \min\{\partial_v \Phi(u_n) : \ v \in X, \ \ \|v\| = 1\}$$

feltételnek. Itt v_n létezését is feltesszük.

Ha $X = H$ Hilbert-tér és Φ Gâteaux-deriválható, akkor

$$\partial_v \Phi(u_n) = \langle \Phi'(u_n), v \rangle \geq - \|\Phi'(u_n)\| \, \|v\| \, ,$$

és itt akkor van egyenlőség, ha $v_n = -\frac{\Phi'(u_n)}{\|\Phi'(u_n)\|}$, tehát a leggyorsabb ereszkedés iránya $-\Phi'(u_n)$ számszorosa. Végeredményben ilyenkor a GM iterációs lépése

$$u_{n+1} := u_n - t_n \, \Phi'(u_n) \tag{16.1}$$

alakban írható, ahol $t_n > 0$ állandó.

A GM-t legtöbbször olyankor használják, amikor egyértelműen létezik Φ-nek minimumhelye, és megfelelő feltételekkel elérhető, hogy u_n ehhez tartson. Az említett két eset – az alábbi lineáris és későbbi nemlineáris – is ilyen lesz a vizsgált funkcionálok egyenletes konvexitásának köszönhetően. (Több lokális minimumhellyel rendelkező funkcionálokra való alkalmazások olvashatók pl. a [49] könyvben.)

16.1.2. A gradiens-módszer korlátos lineáris önadjungált operátorra

Legyen H Hilbert-tér, $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor. Ekkor tehát A önadjungált és léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók, hogy

$$m \|u\|^2 \leq \langle Au, u \rangle \leq M \|u\|^2 \qquad (\forall u \in H), \tag{16.2}$$

itt a 6.11. tétel alapján vehető $M = \|A\|$.

Legyen $f \in H$ tetszőleges és tekintsük az

$$Au = f$$

operátoregyenletet. Ennek a 7.1. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása. Szeretnénk iteráció segítségével megoldani az egyenletet, azaz u^*-hoz közelítő sorozatot konstruálni.

A 14.2. állítás szerint a

$$\Phi(u) := \langle Au, u \rangle - 2Re\ \langle f, u \rangle$$

kvadratikus funkcionál a fenti egyenlethez tartozó minimalizáló funkcionál, azaz $\Phi(u^*) = \min_H \Phi$. (Ha H valós tér, akkor Re elhagyható.) Alkalmazzuk tehát a gradiens-módszert Φ minimalizálására! Ennek konstrukciójához először ki kell számítanunk a leggyorsabb ereszkedés v irányát adott u pontban.

Legyenek $u, v \in H$ tetszőlegesek. A 14.6. megjegyzés alapján valós Hilbert-tér esetén létezik a $\Phi'(u) = 2(Au - f)$ Gâteaux-derivált, így a keresett v irány $-(Au - f)$ számszorosa. Ha H komplex, akkor pedig

$$\partial_v \Phi(u) = 2Re\ \langle Au - f, v \rangle\,,$$

ami a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján szintén akkor minimális, ha v a $-(Au-f)$ vektor számszorosa (le kell normálni). A GM során a lenormálásból származó értéket beépíthetjük az α_n konstansokba, így az alábbi algoritmust kapjuk:

- legyen $u_0 \in X$ tetszőleges;
- ha $n \in \mathbb{N}$ és u_n már megvan, akkor

$$u_{n+1} := u_n - t_n(Au_n - f),$$

  ahol $t_n > 0$ állandó.

A lépésirány tehát épp az $r_n := Au_n - f$ reziduális hibavektor (amiről azt szeretnénk hogy 0-hoz tartson). Ezzel a jelöléssel az iterációs lépés

$$u_{n+1} := u_n - t_n r_n\,.$$

Hogyan válasszuk meg a t_n konstansokat (a lépésközt)? Két természetes választás van:

i) állandó lépésköz: $t_n \equiv t > 0$ konstans;

ii) optimális lépésköz: t_n legyen olyan, hogy $\Phi(u_n - t_n r_n) = \min_{t>0} \Phi(u_n - tr_n)$.

(i) A legjobb állandó lépésköz. A közelítő sorozat ekkor

$$u_{n+1} := u_n - t(Au_n - f) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{16.3}$$

Szeretnénk úgy választani a t értéket, hogy lépésenként a legjobban csökkenjen az $u_n - u^*$ hibavektor hossza. Itt

$$u_{n+1} - u^* = u_n - u^* - t\,(Au_n - Au^*) = (I - tA)(u_n - u^*),$$

ebből

$$\|u_{n+1} - u^*\| \le \|I - tA\|\,\|u_n - u^*\|\,.$$

A t konstanst tehát úgy kell megválasztani, hogy $\|I - tA\|$ a legkisebb legyen. Mivel A önadjungált (mert egyenletesen pozitív), ezért $I - tA$ is az, így a normája az

$$\|I - tA\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (I - tA)x, x\rangle|$$

képlettel számolható (6.11. tétel). Felhasználva az A-ra vonatkozó becsléseket, ha $\|x\| = 1$, akkor

$$\langle (I - tA)x, x\rangle = \|x\|^2 - t\,\langle Ax, x\rangle \le \|x\|^2 - tm\,\|x\|^2 = (1 - tm)\,\|x\|^2 = 1 - tm,$$

és ugyanígy $\langle (I - tA)x, x\rangle \ge \|x\|^2 - tM\,\|x\|^2 = (1 - tM)\,\|x\|^2 = 1 - tM.$

Ebből következik, hogy

$$\|I - tA\| \le \max\{|1 - tm|\,, |1 - tM|\}, \tag{16.4}$$

és ez a maximum minimális, ha $tM - 1 = 1 - tm$. Így

$$t_{\text{opt}} = \frac{2}{m + M} \quad \text{és ekkor} \quad \left\| I - \frac{2}{m + M}\,A \right\| \le 1 - \frac{2}{m + M} \cdot m = \frac{M - m}{M + m}\,. \tag{16.5}$$

Ebből

$$\|u_{n+1} - u^*\| \le \frac{M - m}{M + m}\,\|u_n - u^*\| \le \cdots \le \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n \|u_0 - u^*\|\,,$$

tehát a sorozat mértani sebességgel, azaz lineárisan konvergál. A becslésben nem szerencsés, hogy tartalmazza az ismeretlen u^*-ot. Felhasználva, hogy $A \ge mI$ esetén $\|Au\| \ge m\,\|u\|$ ($\forall u \in H$, lásd a 7.2. tétel bizonyításában),

$$m\,\|u_0 - u^*\| \le \|A(u_0 - u^*)\| = \|Au_0 - f\|\,.$$

Összefoglalva:

16.1. Tétel. *Legyen $A \in B(H)$ önadjungált és teljesüljön* (16.2). *Ekkor tetszőleges $u_0 \in H$ esetén az*

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{m+M}\,(Au_n - f) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

iteráció lineárisan konvergál, éspedig

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m}\,\|Au_0 - f\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n .$$

16.2. Megjegyzés. Ha nem az optimális t értéket keressük, akkor (16.4) szerint olyan t-re konvergál a GM, vagyis $\|I - tA\| < 1$ akkor teljesül, ha $q(t) := \max\{|1-tm|\,, |1-tM|\} < 1$. Könnyen látható, hogy ez $0 < t < \frac{2}{M}$ esetén áll fenn, tehát ilyen t esetén $\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m}\,\|Au_0 - f\|\; q(t)^n$.

(ii) Az optimális lépésköz. Kiszámítjuk, melyik az optimális t_n konstans az egyes lépésekben. Itt (14.6) alapján, $u = u_n$ és $v = -r_n$ helyettesítéssel $\Phi(u_n - tr_n)$ a következő másodfokú polinom t-ben:

$$\Phi(u_n - tr_n) = \Phi(u_n) - 2t\,\langle Au_n - f, r_n\rangle + t^2\,\langle Ar_n, r_n\rangle =$$

$$= \Phi(u_n) - 2t\,\|r_n\|^2 + t^2\,\langle Ar_n, r_n\rangle\,.$$

Ez akkor minimális, ha

$$t = t_n := \frac{\|r_n\|^2}{\langle Ar_n, r_n\rangle}.$$

Megemlítjük, hogy a (t_n) sorozat korlátos, nevezetesen

$$\frac{1}{M} \le t_n \le \frac{1}{m} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

valamint az optimális állandó lépésköz ennek az alsó és felső korlátnak a harmonikus közepe.

16.3. Megjegyzés. Az optimális lépésköz esetén is csak az állandó lépésközre kapott konvergenciahányadossal becsülhető a hiba, azaz

$$\|u_n - u^*\| \le C \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n$$

(lásd [33, Chap. XV]). Az optimális lépésköz több számítást igényel, mint az állandó, előnye viszont az, hogy ez a t_n akkor is kiszámítható, ha nem ismerjük m-et és M-et.

16.4. Definíció. Ha egy $A \in B(H)$ operátor invertálható, akkor az operátor kondíciószáma

$$\kappa \equiv \text{cond}(A) := \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

(A kondíciószám a mátrixokhoz hasonlóan megjelenik akkor, ha a jobboldal hibája esetén a megoldás hibáját becsüljük.) Most a GM konvergenciahányadosát írjuk át a kondíciószámmal. Itt ugyanis az operátor önadjungált és (16.2) teljesül. Ha ebben az m és M határok élesek, akkor, mint láttuk, $M = \|A\|$, és ezzel analóg módon $1/m = \left\|A^{-1}\right\|$. Így egyenletesen pozitív operátorra

$$\kappa = \frac{M}{m},$$

ez a pozitív definit mátrixokra ismert $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ egyenlőség megfelelője. (Ha (16.2) fennáll, de nem tudjuk az élességét, akkor $\kappa \leq M/m$). A GM konvergenciahányadosa tehát

$$q = \frac{M-m}{M+m} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\ .$$

Ez annál kisebb, minél közelebb van κ 1-hez, nagy kondíciószám esetén viszont $q \approx 1$.

16.2. A konjugált gradiens-módszer korlátos önadjungált operátorra

16.2.1. A KGM konstrukciója

Legyen H valós Hilbert-tér, $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor, azaz teljesüljön ismét (16.2). A gradiens-módszer általános lépése a következő volt:

$$u_{n+1} := u_n - t_n r_n,$$

ahol $r_n := Au_n - f$ a reziduális hibavektor, másképpen $r_n = \Phi'(u_n)$, ahol $\Phi(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle f, u\rangle$. Rekurzióval látható, hogy ekkor u_{n+1}-et az u_0 és az $r_0, r_1, \ldots, r_n$ vektorok feszítik ki, utóbbiak negatív együtthatókkal. Ebből (véges dimenziós szemlélet alapján, az ott szokásos megfontolással) annál nagyobb halmazon kereshetjük az újabb közelítést, minél „függetlenebbek” az r_i vektorok, pontosabban, minél nagyobb szöget zárnak be páronként. Ebből adódik az ún. konjugált gradiens-módszer (KGM) alapgondolata: az r_n helyett a p_n, úgynevezett konjugált irányokban keresünk, ahol a p_n vektorok merőlegesek az A-skalárszorzatban:

$$\langle Ap_i, p_j\rangle = 0 \qquad (\forall i \neq j). \tag{KONJ}$$

Ezután a sorozat a GM-hez hasonló: legyen $u_0 \in H$ tetszőleges, és ha u_n megvan, akkor

$$u_{n+1} = u_n - \alpha_n p_n,$$

ahol $\alpha_n > 0$ állandó.

Néhány előzetes megjegyzés:

1. Ha $H_n := \text{span}\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, akkor a fentihez hasonló rekurzióval $u_{n+1} \in u_0 + H_n$.
2. Az $\alpha_n > 0$ számot optimálisan akarjuk megválasztani abban az értelemben, hogy

   $$\Phi(u_{n+1}) = \min \Phi_{|u_0+H_n}.$$

   A Φ konvexitása miatt ez ekvivalens azzal, hogy

   $$\partial_p \Phi(u_{n+1}) = \langle \Phi'(u_{n+1}), p\rangle = 0 \qquad (\forall p \in H_n)$$

   ami azt jelenti, hogy

   $$\langle r_{n+1}, p_i\rangle = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{ORT}$$

A cél tehát úgy megválasztani az α_n konstansokat és a p_n vektorokat, hogy a (KONJ) és (ORT) tulajdonságok teljesüljenek. Erre több lehetőség is van, a legelterjedtebb az úgynevezett

$$K_n := \text{span}\left\{r_0, Ar_0, A^2 r_0, \ldots, A^n r_0\right\}$$

Krylov-alterekkel történik, amelyek láthatóan csak u_0-tól függnek. Éspedig, mint látni fogjuk, elérhető, hogy $K_n = H_n$, azaz a p_n irányok K_n-ben vannak. Ekkor:

A konjugált gradiens-módszer (KGM) algoritmusa:

- Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges, $p_0 := r_0 (= Au_0 - f)$;
- ha $n \in \mathbb{N}$ és u_n, p_n ismert, akkor

$$u_{n+1} := u_n - \alpha_n p_n, \text{ ahol } \alpha_n = \frac{\langle r_n, p_n\rangle}{\langle Ap_n, p_n\rangle}, \tag{16.6}$$

$$p_{n+1} := r_{n+1} - \beta_n p_n, \text{ ahol } \beta_n = \frac{\langle Ar_{n+1}, p_n\rangle}{\langle Ap_n, p_n\rangle}. \tag{16.7}$$

Megemlítjük, hogy a fenti képletekből vezethetők le a KGM elméleti tulajdonságai, viszont programozási szempontból inkább a 16.6. megjegyzésben alább említett alakot érdemes használni.

Néhány hasznos megjegyzés:

1. Az első egyenletre alkalmazva A-t és mindkét oldalból kivonva f-et, azt kapjuk, hogy
$$r_{n+1} = r_n - \alpha_n A p_n. \tag{16.8}$$

2. Látható, hogy α_n definíciója miatt
$$\langle r_{n+1}, p_n \rangle = \langle r_n, p_n \rangle - \alpha_n \langle A p_n, p_n \rangle = 0, \tag{16.9}$$
hasonlóan β_n definíciójából
$$\langle A p_{n+1}, p_n \rangle = \langle A r_{n+1}, p_n \rangle - \beta_n \langle A p_n, p_n \rangle = 0 \tag{16.10}$$
adódik. Így egymást követő indexekre (KONJ) és (ORT) teljesül.

3. Ha $\beta_n = 0$ lenne, akkor visszakapnánk a gradiens-módszert.

16.5. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor*

1. $p_n \in K_n$*,* $r_n \in K_n$*;*
2. $H_n = K_n$*;*
3. $\langle r_{n+1}, p_i \rangle = 0 \quad i = 0, 1, \ldots, n$*, azaz* (ORT) *teljesül;*
4. $\langle r_{n+1}, A p_i \rangle = 0 \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$*;*
5. $\langle A p_{n+1}, p_i \rangle = 0 \quad i = 0, 1, \ldots, n$*, azaz* (KONJ) *is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $n = 0$. Ekkor definíció szerint $p_0 = r_0$, így 1. és 2. triviálisan teljesül. A 3. és 5. az előző megjegyzés miatt teljesül, mert $i = n$-re (16.9) és (16.10) szerint igaz, de most $n = 0$. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges és tegyük fel, hogy 1., 2., 3. és 5. teljesül $n-1$-ig.

1. Az indukciós feltevés szerint $r_{n-1} \in K_{n-1}$ és $p_{n-1} \in K_{n-1}$, ezért a maradékvektorra kapott (16.8) rekurziót használva
$$r_n = \underbrace{r_{n-1}}_{\in K_{n-1} \subset K_n} - \alpha_{n-1} \cdot \underbrace{A p_{n-1}}_{\in A(K_{n-1}) \subset K_n} \in K_n,$$
$$p_n = \underbrace{r_n}_{\in K_n} - \beta_{n-1} \cdot \underbrace{p_{n-1}}_{\in K_{n-1} \subset K_n} \in K_n.$$

2. Tudjuk, hogy $p_i \in K_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ az indukciós feltevés szerint, $i = n$-re a most bizonyított 1. rész szerint. Ekkor $H_n = \operatorname{span}\{p_0, p_1, \ldots, p_n\} \subset K_n$, ahol K_n legfeljebb $n+1$ dimenziós, H_n viszont az 5. indukciós feltevése szerint pontosan $n+1$ dimenziós, így $H_n = K_n$.

3. Ha $i = n$, akkor (16.9)-et kapjuk, ami teljesül. Ha $i \leq n-1$, akkor 3. és 5. indukciós feltevését felhasználva

$$\langle r_{n+1}, p_i \rangle = \langle r_n - \alpha_n A p_n, p_i \rangle = \underbrace{\langle r_n, p_i \rangle}_{0} - \alpha_n \underbrace{\langle A p_n, p_i \rangle}_{0} = 0.$$

4. Ez az állítás a többiből indukció nélkül következik: be kell látni, hogy $\langle r_{n+1}, Ap_i \rangle = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Ha $i \leq n-1$, akkor $Ap_i \in A(K_i) \subset K_{i+1} \subset K_n$. A 3. rész miatt $r_{n+1} \perp K_n$, mert minden báziselemére merőleges.
5. A (16.10) szerint $i = n$-re teljesül az állítás. Ha $i \leq n-1$, akkor 4.-et és 5. indukciós feltevését felhasználva

$$\langle A p_{n+1}, p_i \rangle = \langle A r_{n+1} - \beta_n A p_n, p_i \rangle = \underbrace{\langle A r_{n+1}, p_i \rangle}_{\langle r_{n+1}, Ap_i \rangle = 0} - \beta_n \underbrace{\langle A p_n, p_i \rangle}_{0} = 0. \qquad \square$$

16.6. Megjegyzés. Az α_n és β_n értékeket gyakran másik alakban használják. Egyrészt, az algoritmusból $p_n := r_n - \beta_{n-1} p_{n-1}$, így $r_n \perp p_{n-1}$ miatt $\langle r_n, p_n \rangle = \|r_n\|^2$ és $\alpha_n = \dfrac{\|r_n\|^2}{\langle A p_n, p_n \rangle}$. Ebből, és felhasználva, hogy $\alpha_n A p_n = r_n - r_{n+1}$ és hogy $r_n \in K_n \perp r_{n+1}$:

$$\beta_n = \frac{\langle A r_{n+1}, p_n \rangle}{\|r_n\|^2} \alpha_n = \frac{\langle r_{n+1}, \alpha_n A p_n \rangle}{\|r_n\|^2} = -\frac{\|r_{n+1}\|^2}{\|r_n\|^2}.$$

Emellett fontos észrevenni, hogy lépésenként szükség van az r_n értékekre is, amiket $r_n := Au_n - f$ kiszámítása helyett a (16.8) rekurzióval kapunk. Végül, gyakran a korrekciós tagokat plusz előjellel írjuk és a mínuszt áttesszük a konstansokba. (Nem okoz félreértést, ha ugyanazokkal a betűkkel jelöljük.) Ezekből a KGM algoritmusa az

$$lu_{n+1} := u_n + \alpha_n p_n \text{ és } r_{n+1} := r_n + \alpha_n A p_n, \text{ ahol } \alpha_n = -\frac{\|r_n\|^2}{\langle A p_n, p_n \rangle}, \quad (16.11)$$

$$p_{n+1} := r_{n+1} + \beta_n p_n, \qquad \text{ahol } \beta_n = \frac{\|r_{n+1}\|^2}{\|r_n\|^2} \quad (16.12)$$

alakban írható.

16.7. Megjegyzés. Konjugált irányok egy másik nevezetes konstrukciója a magyar Lánczos Kornél nevéhez fűződik, a Lánczos-algoritmus mind egyenletrendszerek megoldásában, mind sajátértékek és sajátvektorok kiszámításában felhasználható, lásd pl. [4, 46].

16.2.2. A KGM konvergenciája

A konvergenciatulajdonságok a KGM minimalizáló tulajdonságából vezethetők le, amit többféleképp is megfogalmazhatunk. Kiindulásképp idézzük fel a konstrukció elején felírt formában:

16.8. Állítás. $\Phi(u_{n+1}) = \min \Phi_{|u_0+K_n}$.

Bizonyítás. Mint láttuk, ez Φ konvexitása miatt épp az (ORT) tulajdonsággal ekvivalens, azt pedig az előző tételből tudjuk. □

16.9. Megjegyzés. A fenti tulajdonságból következik, hogy a KGM véges dimenzióban kerekítési hibáktól eltekintve véges (direkt) módszer, azaz egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív definit mátrixú egyenletrendszerre alkalmazva n lépés után a pontos megoldást adja. Ez azonban elvi végesség, a gyakorlatban mint iterációs módszert használjuk a KGM-et, mivel az n mátrixméret általában sokkal nagyobb (pl. 10^3–10^6), mint ahány lépésben (pl. 10–100) már elfogadható hibahatáron belülre konvergál a sorozat.

Mint láttuk, $\Phi(u) - \Phi(u^*) = \|u-u^*\|_A^2$, így a fenti állítás szerint

$$\|u_{n+1} - u^*\|_A = \min_{u\in u_0+K_n} \|u-u^*\|_A \,.$$

Ebből adódik az alábbi egyenlőség, amely a konvergenciabecslések alapja.

16.10. Tétel (a KGM minimalizáló tulajdonsága). *Legyen $e_n = u_n - u^*$ a hibavektor, és jelölje $\mathbb{P}_n^1$ azon legfeljebb n-edfokú egyváltozós p_n polinomok halmazát, melyekre $p_n(0) = 1$. Ekkor*

$$\|e_n\|_A = \min_{p_n\in\mathbb{P}_n^1} \|p_n(A)e_0\|_A \,.$$

Bizonyítás. Az előzőek szerint

$$\|e_n\|_A = \min_{e\in e_0+K_{n-1}} \|e\|_A \,.$$

Itt az $r_0 = Au_0 - f = Au_0 - Au^* = Ae_0$ egyenlőség miatt

$$\begin{aligned} e_0 + K_{n-1} &= \left\{ e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i r_0 :\ c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^{i+1} e_0 :\ c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ p_n(A)e_0 :\ p_n \in \mathbb{P}_n^1 \right\}. \end{aligned}$$

□

Ha A-nak létezik teljes sajátvektorrendszere, akkor többet tudunk mondani. Legyen $\{u_k\} \subset H_A$ sajátvektorokból álló teljes ortonormált rendszer, és legyenek λ_k ($k \in \mathbb{N}^+$) a megfelelő sajátértékek. Tekintsük e_0-nak az $\{u_k\}$ rendszer szerint Fourier-sorfejtését. Ekkor

$$e_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k \qquad \Rightarrow \qquad p_n(A)e_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k p_n(\lambda_k) u_k$$

$$\Rightarrow \qquad \|p_n(A)e_0\|_A^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |d_k p_n(\lambda_k)|^2 \le \max_{\lambda_k} |p_n(\lambda_k)|^2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2}_{\|e_0\|_A^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1} \frac{\|p_n(A)e_0\|_A}{\|e_0\|_A} \le \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1} \left\{ \max_{\lambda_k} |p_n(\lambda_k)| \right\}. \tag{16.13}$$

A kapott kifejezés becsléséhez először csak azt használjuk fel, hogy az $mI \le A \le MI$ feltétel miatt $\lambda_k \in [m, M]$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). Ekkor az előzőek szerint

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \le \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1} \left\{ \max_{\lambda \in [m,M]} |p_n(\lambda)| \right\} =: q(m, M). \tag{16.14}$$

Ha nincs teljes sajátvektorrendszer, akkor A spektrálfelbontásából kapjuk ugyanezt. Itt ugyanis $\sigma(A) \subset [m, M]$, ez a 7.7. állítás 2. feléből következik, mivel az $mI \le A \le MI$ feltétel miatt $\sigma(A - mI) \subset [0, \infty)$ és $\sigma(MI - A) \subset [0, \infty)$, amiből $\sigma(A) \subset (-\infty, M] \cap [m, \infty)$. Így (16.13) és a 6.102. állítás alapján

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \le \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1} \|p_n(A)\| \le \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1} \left\{ \max_{\lambda \in \sigma(A)} |p_n(\lambda)| \right\} \le$$
$$\le \min_{p_n \in \mathbb{P}_n^1} \left\{ \max_{\lambda \in [m,M]} |p_n(\lambda)| \right\} = q(m, M).$$

A $q(m, M)$ érték meghatározása tisztán approximációelméleti feladat, melynek megoldása ismert (lásd pl. [69, I. 1.6.7]), éspedig

$$q(m, M) = \frac{1}{T_n\left(\frac{M+m}{M-m}\right)} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n}{1 + \left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^{2n}} \lessapprox 2\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n,$$

ahol T_n az n-edfokú elsőfajú Csebisev-polinom. Ebből következik a KGM nevezetes lineáris konvergenciabecslése:

16.11. Tétel (lineáris konvergencia). *Ha az $A \in B(H)$ operátorra teljesül* (16.2)*, akkor a KGM által létrehozott $e_n = u_n - u^*$ hibavektorokra*

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \leq 2\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ha összehasonlítjuk a GM és KGM módszerek konvergenciahányadosait, akkor látható, hogy a KGM gyorsabb:

$$q_{KGM} = \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1} < \frac{\kappa-1}{\kappa+1} = q_{GM}, \tag{16.15}$$

ahol $\kappa = \frac{M}{m}$ az operátor kondíciószáma.

16.12. Megjegyzés. Mivel $\|e_n\|_A^2 = \langle Ae_n, e_n\rangle = \langle r_n, A^{-1}r_n\rangle$, így a 7.10. állítást alkalmazva $\frac{1}{M}\|r_n\|^2 \leq \|e_n\|_A^2 \leq \frac{1}{m}\|r_n\|^2$. Ebből és az előző tételből adódik a maradékvektorokra érvényes becslés:

$$\frac{\|r_n\|}{\|r_0\|} \leq 2\sqrt{\frac{M}{m}}\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ha az A operátornak speciális alakja van, akkor jobb konvergenciabecslést is tudunk mondani. Tegyük fel, hogy $A = I + L$, ahol $L \geq 0$ kompakt önadjungált operátor H-ban. Ekkor tudjuk, hogy L-nek megszámlálható sok sajátértéke van, amelyek csak a nullában torlódhatnak, valamint létezik teljes sajátvektorrendszere. Legyenek L sajátértékei $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq 0$, ekkor A sajátértékei $\lambda_i = 1 + \mu_i$, és sajátvektorai ugyanazok, mint L-nek.

16.13. Tétel (szuperlineáris konvergencia). *Legyen $A = I + L$, ahol $L \geq 0$ kompakt önadjungált operátor. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_n \to 0$ sorozat, hogy a KGM hibavektoraira*

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \leq \varepsilon_n^n.$$

Bizonyítás. Legyen

$$Q_n(\lambda) := \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right).$$

Világos, hogy Q_n olyan n-edfokú polinom, amelyre $Q_n(0) = 1$. Emellett $Q_n(\lambda_k) = 0$, ha $k \le n$. A (16.13) becslést használva tehát

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \le \max_{\lambda_k} |Q_n(\lambda_k)| = \max_{k \ge n+1} |Q_n(\lambda_k)| = \max_{k \ge n+1} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j} \right| =$$

$$= \max_{k \ge n+1} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{\mu_j - \mu_k}{1 + \mu_j} \right| \le \max_{k \ge n+1} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{1} = \prod_{j=1}^{n} \mu_j = \varepsilon_n^n,$$

ahol $\varepsilon_n := \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \mu_j}$ egy nullsorozat mértani-közép sorozata, így szintén nullához tart. □

16.14. Megjegyzés. Az ε_n sorozatot gyakran a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség révén összeg alakban becsüljük:

$$\varepsilon_n \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \le \Big(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \Big)^n \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{16.16}$$

Ha $\sum \mu_j < \infty$, akkor tehát a konvergenciahányados $O(\frac{1}{n})$ nagyságrendben tart 0-hoz. Ha csak azt tesszük fel, hogy L ún. Hilbert–Schmidt operátor, azaz amelyre $|||L|||^2 := \sum \mu_j^2 < \infty$, akkor a négyzetes középpel becsülve

$$\varepsilon_n \le \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_j^2} \le \frac{|||L|||}{\sqrt{n}} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Ilyenek például a 6.75. állításban szereplő integráloperátorok, lásd [3]. Az említetteken kívül hasonló becslések adhatók tetszőleges p-adikus közepekkel, ezt és a fenti tétel eredeti változatát lásd [73].

16.2.3. A prekondicionált KGM

Ha az A operátor olyan, hogy $\frac{M}{m}$ nagy, akkor a KGM konvergál ugyan, de lassan. Ilyenkor a véges dimenziós eset mintájára bevezethető a KGM prekondicionált változata. Tegyük fel, hogy van olyan, szintén önadjungált és egyenletesen pozitív B operátor, mellyel a megfelelő operátoregyenletek egyszerűbben megoldhatók, mint A-val, emellett a B-normára nézve az A operátor határai közelebb vannak egymáshoz, azaz

$$\widetilde{m} \, \langle Bu, u \rangle \le \langle Au, u \rangle \le \widetilde{M} \, \langle Bu, u \rangle \qquad (\forall u \in H), \tag{16.17}$$

ahol

$$\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{m}} \ll \frac{M}{m}.$$

Itt a B energia-skalárszorzatával és -normájával kifejezve

$$\langle Au, u\rangle = \left\langle B^{-1}Au, u\right\rangle_B \quad \text{és} \quad \langle Bu, u\rangle = \|u\|_B^2,$$

így

$$\widetilde{m}\|u\|_B^2 \le \left\langle B^{-1}Au, u\right\rangle_B \le \widetilde{M}\|u\|_B^2 \qquad (\forall u \in H),$$

azaz a $B^{-1}A$ prekondicionált operátorra (16.2) megfelelője áll fenn B energiaterében, jobb határokkal. Az $Au = f$ egyenlet is átírható

$$B^{-1}Au = B^{-1}f$$

alakba, így alkalmazhatjuk rá a KGM-t B energiaterében. Ekkor a (16.11)-(16.12) algoritmusban A helyett a $B^{-1}A$ operátor és $\langle .,.\rangle$ helyett a $\langle .,.\rangle_B$ skalárszorzat szerepel, ezen belül α_n nevezőjében $\left\langle B^{-1}Ap_n, p_n\right\rangle_B = \left\langle BB^{-1}Ap_n, p_n\right\rangle = \langle Ap_n, p_n\rangle$ marad, a többi helyen B-norma áll. Így az iteráció

$$u_{n+1} := u_n + \alpha_n p_n \text{ és } r_{n+1} := r_n + \alpha_n B^{-1}Ap_n, \qquad (16.18)$$

$$\text{ahol } \alpha_n = -\frac{\|r_n\|_B^2}{\langle Ap_n, p_n\rangle},$$

$$p_{n+1} := r_{n+1} + \beta_n p_n, \quad \text{ahol } \beta_n = \frac{\|r_{n+1}\|_B^2}{\|r_n\|_B^2} \qquad (16.19)$$

alakú. Itt az r_{n+1}-re vonatkozó lépésben nem számítjuk ki B^{-1}-et, hanem meg kell oldani egy segédegyenletet, azaz két lépésre bontva

$$\left\{\begin{array}{l} r_{n+1} := r_n + \alpha_n z_n\,, \quad \text{ahol} \\ Bz_n = Ap_n. \end{array}\right. \qquad (16.20)$$

A hibabecslésben $\left\langle B^{-1}Ae_n, e_n\right\rangle_B^{1/2} = \langle Ae_n, e_n\rangle^{1/2} = \|e_n\|_A$ marad, de a konstansok $\widetilde{m}$ és $\widetilde{M}$ lesznek, így

$$\frac{\|e_n\|_A}{\|e_0\|_A} \le 2\left(\frac{\sqrt{\widetilde{M}} - \sqrt{\widetilde{m}}}{\sqrt{\widetilde{M}} + \sqrt{\widetilde{m}}}\right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \qquad (16.21)$$

A fenti módszer nem korlátos esetre is kiterjeszthető, ott azonban a H-nál szűkebb értelmezési tartományok miatt nagyobb körültekintésre van szükség. Ezt a 16.5. szakaszban írjuk le.

16.3. A konjugált gradiens-módszer korlátos, nem önadjungált operátorra

Legyen $A \in B(H)$, ahol A most nem önadjungált. Tegyük fel, hogy A bijekció. Az előző szakasz módszerét természetes módon kiterjeszthetjük erre az esetre, ha felírjuk az $Au = b$ egyenlet szimmetrizáltját, azaz a normálegyenletet:

$$A^*Au = A^*b. \tag{16.22}$$

Itt a 4.14. homeomorfizmus-tétel szerint A^{-1} folytonos, ebből és a korlátosságból összességében léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók, hogy

$$m\,\|u\| \leq \|Au\| \leq M\,\|u\| \qquad (\forall u \in H). \tag{16.23}$$

Itt $\|Au\|^2 = \langle A^*Au, u\rangle$, ebből

$$m^2\,\|u\|^2 \leq \langle A^*Au, u\rangle \leq M^2\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H), \tag{16.24}$$

és itt A^*A önadjungált is. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a 7.1. tétel szerint a (16.22) egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása. Mivel a 6.5. felbontási tételből $R(A) = H$ miatt $\ker(A^*) = \{\mathbf{0}\}$, azaz A^* injektív, így u^* egyben az $Au = b$ megoldása is. Másrészt, (16.24) szerint alkalmazhatjuk az előző szakaszbeli KGM algoritmust.

Írjuk fel a (16.11)-(16.12) algoritmust a (16.22) egyenletre! Szeretnénk megtartani az r_n jelölést az $Au_n - b$ reziduális vektorra, ezért a (16.11)-(16.12)-ban szereplő r_n jelölést s_n-nel helyettesítjük. Ekkor tehát $s_n = A^*(Au_n - b) = A^*r_n$. Emellett az A operátor és b jobboldal helyett az algoritmusban rendre A^*A és A^*b szerepel. Ezek alapján könnyen látható, hogy a (16.22)-re kapott algoritmus a következő alakban írható fel. Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges, $r_0 := Au_0 - b$, $s_0 := p_0 := A^*r_0$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és megvan p_n, u_n, r_n és s_n, akkor legyen

$$\begin{cases} z_n = Ap_n, \\ \alpha_n = -\dfrac{\langle r_n, z_n\rangle}{\|z_n\|^2}\,, \quad u_{n+1} = u_n + \alpha_n p_n\,, \quad r_{n+1} = r_n + \alpha_n z_n\,; \\ s_{n+1} = A^*r_{n+1}, \\ \beta_n = \dfrac{\|s_{n+1}\|^2}{\|s_n\|^2}\,, \quad p_{n+1} = s_{n+1} + \beta_n p_n. \end{cases} \tag{16.25}$$

Ezt az algoritmust gyakran KGN-módszernek hívják.

A KGN-módszer konvergenciabecslései közvetlenül adódnak az előző szakaszbeliekből. Itt $\|e_k\|_{A^*A} = \|Ae_k\| = \|r_k\|$, így a becsléseket nem az e_k hibavektorra, hanem az r_k maradékvektorra kapjuk. (Ebből viszont utána a (16.23) szerinti $m\,\|e_k\| \le \|r_k\|$ egyenlőtlenség miatt e_k-ra is áttérhetünk.) Először a lineáris konvergenciabecslést írjuk fel a 16.11. tételből, ahol (16.24) miatt $\sqrt{M}$ és $\sqrt{m}$ helyére M és m lép:

$$\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} \le 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (\forall n \in \mathbb{N}). \tag{16.26}$$

Ha pedig $A = I + L$, ahol $L \ge 0$ kompakt operátor, akkor $A^*A = I + (L^* + L + L^*L)$, azaz A^*A is a fenti típusú, hiszen $L^* + L$ és L^*L is kompakt önadjungált és pozitív. Így a (16.16) becslésből

$$\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} \le \Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\big(\lambda_i(L^*+L)+\lambda_i(L^*L)\big)\Big)^k \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{16.27}$$

16.15. Megjegyzés. A (16.23) feltételekhez elégséges a koercivitás, emellett a norma is kifejezhető bilineáris formákkal, azaz ha

$$m\|u\|^2 \le \langle Au, u\rangle \quad \text{és} \quad |\langle Au, v\rangle| \le M\|u\|\|v\| \qquad (u, v \in H),$$

akkor teljesül (16.23). Valóban, egyrészt a bal oldali koercivitási becslésből

$$m\|u\|^2 \le \langle Au, u\rangle \le \|Au\|\|u\|,$$

amiből következik (16.23) bal oldala, másrészt a jobb oldali becslésből a 6.10. állítás alapján $\|A\| \le M$, ami ekvivalens (16.23) jobb oldalával.

A nem önadjungált eset egy további lehetséges megközelítése olyan algoritmusok kidolgozása, melyek elkerülik a normálegyenletet: a keresési irányokhoz az eredeti operátor maradékvektorát használjuk, és – a legkisebb négyzetek elve alapján – az így konstruált H_n altereken minimalizáljuk a $\Phi(u) := \|Au - f\|^2$ funkcionált. Ekkor azonban a konvergenciahányados is nagyobb. Ilyenek pl. az algebrai egyenletrendszerek esetén nevezetes GMRES és GCG módszerek, lásd pl. [4].

Ennek a szakasznak az algoritmusaira is értelemszerűen konstruálható prekondicionált változat.

16.4. Iterációs módszerek nyeregpont-feladatokra

Tekintsük a (7.7) feladatot:

$$\begin{cases} Au + Bp = f \\ B^*u \qquad\; = g, \end{cases} \tag{16.28}$$

ahol H, K valós Hilbert-terek, $f \in H$, $g \in K$, $A : H \to H$ és $B : K \to H$ korlátos lineáris operátorok, valamint A önadjungált és van olyan $m > 0$, hogy

$$\langle Au, u\rangle \geq m\,\|u\|^2 \qquad (\forall u \in H), \tag{16.29}$$

végül pedig teljesüljön az inf-sup-feltétel:

$$\inf_{p\in K\setminus\{0\}} \sup_{u\in H\setminus\{0\}} \frac{\langle Bp, u\rangle}{\|p\|\|u\|} =: \gamma > 0. \tag{16.30}$$

A (16.28) feladat iterációs megoldása ugyanazon elven alapul, mint a megoldhatóság igazolása a 7.3.1. szakaszban, éspedig azon, hogy a feladat visszavezethető az

$$S := B^* A^{-1} B \tag{16.31}$$

Schur-féle komplementer-operátorra vonatkozó

$$Sp = \tilde{g} \tag{16.32}$$

egyenletre, ahol $\tilde{g} := B^* A^{-1} f - g$. Itt ugyanis S egyenletesen pozitív, így a (16.32) egyenletre alkalmazhatjuk az előző szakaszok módszereit.

Ha a(z állandó lépésközű) gradiens-módszert használjuk a (16.32) egyenletre, akkor a nevezetes ún. Uzawa-algoritmust kapjuk.

16.16. Tétel. (Az Uzawa-algoritmus konvergenciája.) *A (16.28) feladat feltételei mellett tekintsük az alábbi iterációt. Legyenek $u_0 \in H$, $p_0 \in K$ tetszőlegesek és $\alpha > 0$ adott szám, ha pedig $n \in \mathbb{N}$ és megvan $u_n \in H$ és $p_n \in K$, akkor*

$$\begin{cases} Au_{n+1} + Bp_n = f & \text{(azaz } u_{n+1} \text{ ennek megoldása),} \\ p_{n+1} := p_n + \alpha(B^* u_{n+1} - g). \end{cases} \tag{16.33}$$

Van olyan $\alpha_0 > 0$, hogy $0 < \alpha < \alpha_0$ esetén a fenti iteráció lineárisan konvergál, vagyis alkalmas $c_1, c_2 > 0$ és $q < 1$ mellett

$$\|u_n - u^*\| \leq c_1 q^n, \qquad \|p_n - p^*\| \leq c_2 q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Itt $\alpha_0 = \frac{2m}{\|B\|^2}$. Az optimális paraméter $\alpha_{opt} = \frac{2}{\Lambda+\lambda}$, ahol $\lambda := \frac{\gamma^2}{\|A\|^2}$ és $\Lambda := \frac{\|B\|^2}{m}$; ekkor $q = \frac{\Lambda-\lambda}{\Lambda+\lambda}$.

Bizonyítás. Tekintsük a (16.32) egyenletet. Itt S egyenletesen pozitív és a 7.23. tétel bizonyítása szerint $\langle Sp, p\rangle \geq \frac{\gamma^2}{\|A\|^2}\|p\|^2$ $(\forall p \in K)$. Emellett a (16.31) definíció alapján $\|S\| \leq \|B^*\|\|A^{-1}\|\|B\| = \|B\|^2\|A^{-1}\|$. Itt $m\,\|u\|^2 \leq$

$\langle Au, u\rangle$ miatt $\|A^{-1}\| \le \frac{1}{m}$, lásd 7.9. állítás. Ebből $\|S\| \le \frac{\|B\|^2}{m}$. Az S operátor határai tehát $\lambda := \frac{\gamma^2}{\|A\|^2}$ és $\Lambda := \frac{\|B\|^2}{m}$.
Alkalmazzuk a (16.32) egyenletre a gradiens-módszert: (16.3) megfelelője most $p_{n+1} := p_n - \alpha(Sp_n - \tilde{g})$. Ha itt u_{n+1}-et (16.33) első egyenlőségével definiáljuk, akkor

$$p_{n+1} = p_n - \alpha\Big(B^*A^{-1}(Bp_n - f) + g\Big) = p_n - \alpha\big(g - B^*u_{n+1}\big),$$

ami épp (16.33) második egyenlősége, így a (16.32) egyenletre alkalmazott GM megegyezik a (16.33) iterációval. A 16.2. megjegyzés alapján $0 < \alpha < \alpha_0 := \frac{2}{\Lambda}$ esetén ez a GM lineárisan konvergál, éspedig $\|p_n - p^*\| \le c_2 q^n$, ahol $c_2 > 0$ és $q \equiv q(\alpha) = \max\{|1 - \alpha m|, |1 - \alpha M|\} < 1$. Az u_n-ekre vonatkozó becslést ebből úgy nyerjük, ha (16.33) első sorát átírjuk $Au_n + Bp_{n-1} = Au^* + Bp^*$ alakban, ebből ugyanis

$$m\|u_n - u^*\| \le \|Au_n - Au^*\| = \|Bp_{n-1} - Bp^*\| \le$$

$$\le \|B\|\,\|p_{n-1} - p^*\| \le \frac{\|B\|\,c_2}{q}\,q^n.$$

Végül az optimális eset következik a 16.1. tételből, mivel az S operátor határai λ és Λ. □

Az Uzawa-algoritmus értelemszerűen átvihető bilineáris formákkal megfogalmazott vagy nem korlátos operátorokat tartalmazó nyeregpont-feladatokra, ahogy utóbbiak megoldhatóságánál is eljártunk. Tekintsük például a (8.17) feladatot, melyet rögtön a (8.19)-ben bevezetett gyenge alakban írunk fel:

$$\begin{cases} \langle u, v\rangle_S + \langle p, N^*v\rangle = \langle f, v\rangle & (\forall v \in H_S), \\ \langle N^*u, q\rangle = \langle g, q\rangle & (\forall q \in K). \end{cases} \tag{16.34}$$

Itt H, K valós Hilbert-terek, $S : H \supset\!\to H$ és $N : K \supset\!\to H$ sűrűn definiált operátorok, S szimmetrikus és egyenletesen pozitív, valamint $f \in H$, $g \in K$ adott vektorok. Teljesüljön emellett $D(N^*) \supset H_S$ (ahol H_S az S energiatere), és az S-normával vett inf-sup-feltétel:

$$\inf_{p \in D(N)\setminus\{0\}} \sup_{u \in H_S\setminus\{0\}} \frac{\langle Np, u\rangle}{\|p\|\|u\|_S} = \gamma > 0. \tag{16.35}$$

A 8.41. tétel szerint ekkor a (16.34) feladatnak egyértelműen létezik $(u^*, p^*) \in H_S \times K$ gyenge megoldása. Ezt az eredményt a gyenge alak bilineáris formáit reprezentáló operátorokon keresztül a (16.28) típusú feladatokra vezettük vissza a $H_S \times K$ térben. Ugyanígy adódik a 16.16. tétel megfelelője. Az algoritmus (16.33) alapján a következő: legyenek $u_0 \in H_S$, $p_0 \in K$ tetszőlegesek és $\alpha > 0$ adott szám, ha pedig megvan $u_n \in H_S$ és $p_n \in K$, akkor

$$\begin{cases} \langle u_{n+1}, v\rangle_S + \langle p_n, N^* v\rangle = \langle f, v\rangle \qquad (\forall v \in H_S), \\ \langle p_{n+1}, q\rangle = \langle p_n, q\rangle + \alpha\Big(\langle N^* u_{n+1}, q\rangle - \langle g, q\rangle\Big) \qquad (\forall q \in K). \end{cases} \tag{16.36}$$

Itt az S-skalárszorzatot H_S-en az identitás reprezentálja, így $\|A\|$ és m helyére most 1 kerül, $\|B\|$ helyére pedig a $\mathcal{B} : K \times H_S \to \mathbb{R}$ bilineáris forma normája lép, ahol $\mathcal{B}(p, v) := \langle p, N^* v\rangle$. Ezekből a megfontolásokból adódik a

16.17. Következmény. *A* (16.34) *feladat feltételei mellett van olyan* $\alpha_0 > 0$*, hogy* $0 < \alpha < \alpha_0$ *esetén a* (16.36) *iteráció lineárisan konvergál, vagyis alkalmas* $c_1, c_2 > 0$ *és* $q < 1$ *mellett*

$$\|u_n - u^*\|_S \le c_1 q^n, \qquad \|p_n - p^*\| \le c_2 q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\beta := \|\mathcal{B}\|$ *jelöléssel* $\alpha_0 = \frac{2}{\beta^2}$*, valamint az optimális paraméter és hozzátartozó konvergenciahányados rendre* $\alpha_{opt} = \frac{2}{\beta^2+\gamma^2}$ *és* $q = \frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

A fentiekhez hasonlóan konstruálhatunk iterációt nyeregpont-feladatra a konjugált gradiens-módszer alapján is. Tekintsük ismét a (16.28) feladatot, és írjuk fel a KGM algoritmusát az (16.32) egyenletre a (16.11)–(16.12) képletek alapján. Mivel most p jelöli a második koordinátát, így a keresési irányokat d_n-nel jelöljük. Ekkor az algoritmus:

$$p_{n+1} := p_n + \alpha_n d_n \quad \text{és} \quad r_{n+1} := r_n + \alpha_n S d_n, \tag{16.37}$$

$$\text{ahol } \alpha_n = -\frac{\|r_n\|^2}{\langle S d_n, d_n\rangle},$$

$$d_{n+1} := r_{n+1} + \beta_n d_n, \qquad \text{ahol } \beta_n = \frac{\|r_{n+1}\|^2}{\|r_n\|^2}. \tag{16.38}$$

A fenti iteráció a GM-hez hasonlóan feldarabolható és tartalmaz lépésenként egy segédegyenletet, mivel Sd_n kiszámítása úgy írható, hogy az $Az_n = Bd_n$ egyenlet megoldása után $Sd_n = B^* z_n$. A p_n-re vonatkozó konvergencia hányadosa $q = \frac{\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\Lambda}+\sqrt{\lambda}}$, ahol λ és Λ az S operátornak az előbb kiszámított határai. Adott n-re u_n kiszámítása és ugyanilyen konvergenciahányadosú hibabecslése pedig megegyezik a GM-nél látottal.

16.5. Iterációs módszerek és prekondicionálás Hilbert-térben nem korlátos operátorra

Az előző szakaszokbeli gradiens- és konjugált gradiens-módszerek felhasználják az operátor korlátosságát. Nem korlátos operátor esetére úgy vihetők át ezek a módszerek, ha alkalmas segédoperátorral korlátos operátorra transzformáljuk az eredeti operátort. Ez a mátrixoknál elterjedt, ill. a 16.2.3. szakaszban korlátos operátorokra ismertetett prekondicionálás műveletének analógiája, így tulajdonképpen itt is prekondicionálás történik, ez azonban a nem korlátosság és a H-nál szűkebb értelmezési tartományok miatt nagyobb körültekintést kíván.

Ezt a módszert Czách László vezette be [12], elliptikus operátorok nem korlátosságának kezelésére a gradiens-módszer esetén, lásd [33, XV. fej.] is; a transzformációt e munkák alapján ismertetjük. A [12] dolgozat megelőzte a prekondicionálás technikájának későbbi elterjedését, vagyis ez az elv először rögtön végtelen dimenziós esetben jelent meg. A módszer megfelelője a konjugált gradiens-módszerre a [18] cikkben található. (Mátrixok prekondicionálása esetén nem a végtelen, hanem véges, de nagy kondíciószámok problémáját lehet így kezelni, ezzel a 19.4.1. szakaszban foglalkozunk még.)

Legyen tehát $L : H \supset\!\!\rightarrow H$ nem korlátos lineáris operátor, amely szimmetrikus és egyenletesen pozitív. Legyen $S : H \supset\!\!\rightarrow H$ olyan, szintén szimmetrikus és egyenletesen pozitív operátor, melyre $D(S) = D(L) =: D$ és $R(S) \supset R(L)$, valamint tegyük fel, hogy léteznek olyan $M \geq m > 0$ konstansok, melyekre

$$m \langle Su, u\rangle \leq \langle Lu, u\rangle \leq M \langle Su, u\rangle \qquad (u \in D).$$

(Ekkor L és S ún. spektrálisan ekvivalens operátorok.) Ez azt jelenti, hogy

$$m \|u\|_S^2 \leq \left\langle S^{-1}Lu, u\right\rangle_S \leq M \|u\|_S^2 \qquad (\forall u \in D), \tag{16.39}$$

vagyis az $S^{-1}L$ operátor már teljesíti a (16.2) egyenlőtlenségeket, de H helyett a H_S energiatérben. Itt $S^{-1}L : H_S \supset\!\!\rightarrow H_S$, ahol $D(S^{-1}L) = D$ sűrű H_S-ben, és $S^{-1}L$ szimmetrikus operátor H_S-ben, mivel

$$\left\langle S^{-1}Lu, v\right\rangle_S = \langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle = \left\langle u, S^{-1}Lv\right\rangle_S \qquad (\forall u, v \in D). \tag{16.40}$$

Terjesszük ki $S^{-1}L$-et H_S-re! Ehhez igazoljuk, hogy $S^{-1}L$ korlátos: mivel az $(u, v) \mapsto \langle Lu, v\rangle$ bilineáris forma valójában skalárszorzat is a D altéren, így

$$\left\|S^{-1}Lu\right\|_S^2 = \sup_{\|v\|_S=1} |\left\langle S^{-1}Lu, v\right\rangle_S|^2 = \sup_{\|v\|_S=1} |\langle Lu, v\rangle|^2$$

$$\leq \sup_{\|v\|_S=1} \langle Lu, u\rangle \langle Lv, v\rangle \leq \sup_{\|v\|_S=1} M \|u\|_S^2 M \|v\|_S^2 = (M \|u\|_S)^2,$$

azaz $\left\|S^{-1}Lu\right\|_S \le M\,\|u\|_S$, tehát $\left\|S^{-1}L\right\|_S \le M$. Mivel tehát $S^{-1}L$ folytonos lineáris, így egyértelműen létezik olyan $A \in B(H_S)$, melyre

$$A\big|_D = S^{-1}L. \tag{16.41}$$

Mivel D sűrű, így A is szimmetrikus, így a korlátosság miatt önadjungált is, továbbá örökli (16.39)-ot:

$$m\,\|u\|_S^2 \le \langle Au, u\rangle_S \le M\,\|u\|_S^2 \qquad (\forall u \in H_S). \tag{16.42}$$

Így A már pontosan olyan operátor, mint a 16.1.2. szakaszban feltettük, csak a H_S téren.

Megjegyezzük, hogy ez az A operátor nem más, mint a 8.3.1. szakaszban definiált L_S operátor. Ezt most – a szimmetrikus esetben – közvetlenül, spektrális ekvivalenciára alapozva lehetett bevezetni. A bevezetés fentivel ekvivalens módja, ha először az $(u,v) \mapsto \langle Lu, v\rangle$ bilineáris formát terjesztjük ki H_S-re és ennek Riesz-féle reprezentáló operátoraként kapjuk A-t. A (16.41) alak azt fejezi ki, hogy a 16.2.3. szakaszbeli prekondicionálás megfelelőjéről van szó nem korlátos esetben.

Így a következő módszert kaptuk: az $Lu = g$ eredeti egyenletről áttérünk az

$$S^{-1}Lu = S^{-1}g =: f$$

egyenletre, ami helyett felírjuk az

$$Au = f$$

egyenletet H_S-ben. Ennek, mivel A önadjungált és teljesíti a (16.2) egyenlőtlenségeket, egyértelműen létezik $u^* \in H_S$ megoldása. Emellett alkalmazhatjuk rá a 16.1.2. szakaszból a gradiens-módszert a H_S térben: ha $u_0 \in H_S$ tetszőleges, akkor

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m}\,(Au_n - f) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az (u_n) sorozat u^*-hoz tart az alábbi becslés szerint:

$$\|u_n - u^*\|_S \le C\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n.$$

Mi következik ebből az eredeti $Lu = g$ egyenletre? Itt u^* gyenge megoldása a feladatnak a 8.28. definíció értelmében, ugyanis az energianormák ekvivalenciájából $H_S = H_L$ és ($\langle Lu, v\rangle$-ből határátmenettel) $\langle u, v\rangle_L = \langle Au, v\rangle_S$ ($\forall u, v \in H_S = H_L$), tehát $Au = f$ ekvivalens az $\langle u, v\rangle_L = \langle g, v\rangle$ ($\forall v \in H_L$) egyenlőséggel.

Ha $u_0 \in D$, akkor indukcióval $(u_n) \subset D$ és a gradiens-módszer n-edik lépése

$$u_{n+1} = u_n - \frac{2}{M+m} S^{-1}(Lu_n - g).$$

Ez ekvivalens az

$$\begin{cases} \quad u_{n+1} &= u_n - \dfrac{2}{M+m} z_n, \\ \text{ahol} \quad Sz_n &= Lu_n - g \end{cases}$$

kétlépéses módszerrel, azaz lépésenként u_n ismeretében meg kell oldani egy $Sz = b$ típusú egyenletet.
Ez azt mutatja, az elméleti esetben az S operátort úgy kell választani, hogy ezt a segédegyenletet viszonylag egyszerűen, legalábbis az eredetinél lényegesen könnyebben meg lehessen oldani. (A gyakorlatban ugyanez a követelmény akkor is, ha a fenti iterációnak megfelelő numerikus eljárást nézzük egy véges dimenziós altérben, lásd 19.1. szakasz.)

Az $R(S) \supset R(L)$ és $u_0 \in D$ regularitási feltételek kikerülhetők, csak a módszer érthetőbb leírásához használtuk fel. Az általános esetben az $Sz_n = Lu_n - g$ „erős" alak helyett a $z_n = Au_n - f$ „gyenge" alak használható, ami tesztfüggvényekkel írva a következő módszert adja:

$$\begin{cases} \quad u_{n+1} &= u_n - \dfrac{2}{M+m} z_n, \\ \text{ahol} \quad \langle z_n, v\rangle_S &= \langle Au_n, v\rangle_S - \langle g, v\rangle \qquad (\forall v \in H_S). \end{cases}$$

Az A operátort itt ugyan nem definiáltuk konstruktívan, de a fenti egyenlet numerikus (pl. Ritz–Galjorkin-féle) megoldása esetén elég lehet a fenti gyenge alak, vagyis egyes tesztfüggvényes skalárszorzatok ismerete.

A fentihez teljesen hasonló a helyzet, ha a konjugált gradiens-módszert használjuk az $Au = f$ egyenletre. Ez is a (16.42) tulajdonság miatt konvergál a H_S téren, és szintén S-re vonatkozó segédegyenletet kell megoldani lépésenként. Éspedig, a (16.8) egyenletből, gyenge alakot használva a következő lépést kapjuk:

$$\begin{cases} \quad r_{n+1} &= r_n - \alpha_n z_n, \\ \text{ahol} \quad \langle z_n, v\rangle_S &= \langle Ap_n, v\rangle_S \qquad (\forall v \in H_S). \end{cases} \tag{16.43}$$

Itt a segédfeladat az $Sz_n = Lp_n$ egyenlet gyenge alakja. (A KGM többi lépése nem tartalmaz segédfeladatot.)

Példák.

1. Legyen $I = [a, b]$, $H = L^2(I)$, $D = D(L) = D(S) = H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Legyen

$$Lu = -\left(pu'\right)' + qu,$$

ahol $p \in C^1(I)$, $q \in C(I)$, $p(x) \geq m > 0$ és $q(x) \geq 0$ $(x \in I)$. Tekintsük az

$$\begin{cases} Lu = g \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

feladatot. Bevezetve az $Su = -u''$ segédoperátort, bármely $u \in D$ esetén

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(I)} = \int_a^b \left(p\,|u'|^2 + q\,|u|^2\right),$$

$$\langle Su, u\rangle_{L^2(I)} = \int_a^b |u'|^2 .$$

Ezek a 10.9. állítás szerint ekvivalens normák $H_0^1(I)$-n, így L és S spektrálisan ekvivalens, ezért alkalmazható a fenti gradiens- vagy a konjugált gradiens-módszer. Az iteráció (erős alakban felírva) a következő alakú segédfeladatok megoldását igényli:

$$\begin{cases} -z_n'' = w_n \\ z_n(a) = z_n(b) = 0. \end{cases}$$

2. Hasonló mondható az előző példa többdimenziós változatáról: legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, $H := L^2(\Omega)$, $D := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Lu := -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + qu$, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) \geq m > 0$ $(x \in \Omega)$, illetve $Su := -\Delta u$. Az energianormák ekkor is ekvivalensek, így L és S spektrálisan ekvivalens operátorok. Az

$$\begin{cases} Lu = g \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

feladat megoldása tehát visszavezethető

$$\begin{cases} -\Delta z_n = w_n \\ z_{n|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

alakú segédfeladatok megoldására.

Mindkét fenti példában az S operátor egyszerűbb az eredetinél, megoldására az 1. példában és egyes tartományokon a 2. példában képlet is adható (Green-függvénnyel).

A gyakorlatban e példák jelentősége az, hogy megadják a hasonlóan prekondicionált numerikus eljárások aszimptotikus viselkedését, ha a rácsokat finomítjuk, és ebből optimalitási eredményeket kaphatunk. Ezzel a 19.4.1. szakaszban foglalkozunk.

17. fejezet

Néhány további módszer lineáris operátoregyenletekre

17.1. Közelítő operátorsorozatok

Legyenek X, Y normált terek és tekintsük az

$$Au = f$$

operátoregyenletet. Gyakran szokás az A operátort valamely A_n operátorsorozattal közelíteni, ahol az A_n-ek valamilyen szempontból egyszerűbb szerkezetűek A-nál. (Például ha $X = Y = H$ Hilbert-tér és $A = I + K$, ahol K kompakt pozitív operátor, mint a 10.1. szakasz integrálegyenletei, akkor K véges rangú közelítéseivel a feladat a megfelelő véges dimenziós alterekre redukálható.) Ilyen esetekben szeretnénk, ha az $A_n u_n = f$ egyenletek megoldásaira $n \to \infty$ esetén $u_n \to u$ teljesülne.

17.1. Definíció. Az $(A_n) : X \to Y$ lineáris operátorsorozat *approximálja* az A operátort, ha pontonként tart hozzá, azaz $A_n u \to Au$ $(\forall u \in X)$.

17.2. Definíció. Az $A_n \approx A$ approximáció *stabil*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik A_n^{-1}, és $(\|A_n^{-1}\|)$ korlátos számsorozat.

17.3. Tétel. *Legyenek X, Y normált terek, Y teljes. Legyenek $A_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és $A : X \to Y$ lineáris bijekciók, melyekre $A_n^{-1} \in B(Y, X)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és (A_n) approximálja az A operátort. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens.*

(1) *Bármely $f \in Y$ esetén az $A_n u_n = f$ egyenletek u_n megoldásai tartanak az $Au = f$ egyenlet u megoldásához, ha $n \to \infty$.*

(2) *Az $A_n \approx A$ approximáció stabil.*

Bizonyítás. (1)⇒(2). Ha $u_n \to u$, akkor $u_n = A_n^{-1} f \to A^{-1} f = u$. Ez minden f esetén fennáll, azaz az $\left(A_n^{-1}\right)$ operátorsorozat pontonként konvergens, amiből következik, hogy pontonként korlátos is. A Banach–Steinhaus tétel szerint egyenletesen korlátos is, azaz $\left(\left\|A_n^{-1}\right\|\right)$ korlátos sorozat, tehát az approximáció stabil.
(2)⇒(1). Ha az $A_n \approx A$ approximáció stabil, azaz $K := \sup_n \left\|A_n^{-1}\right\| < \infty$, akkor

$$\begin{aligned} \|u_n - u\| &= \left\|A_n^{-1} A_n (u_n - u)\right\| \leq K \left\|A_n (u_n - u)\right\| = \\ &= K \left\|f - A_n u\right\| \to K \left\|f - Au\right\| = 0. \end{aligned}$$ □

17.2. Regularizáció nem koercív feladatokra

Legyen H valós Hilbert-tér, $G \in B(H)$ kompakt operátor, melyre $\langle Gx, x \rangle > 0$ $(\forall x \neq 0)$. Legyen $b \in H$ és tekintsük a

$$Gx = b$$

operátoregyenletet.

Mivel G kompakt, így (a 6.80. következmény alapján) nem lehet szuperjektív, így fel kell tennünk, hogy $b \in R(G)$. (Ekkor a megoldás egyértelmű.) További probléma a fenti egyenlettel kapcsolatban, hogy (mint a 15-16. fejezetekben láttuk) a szokásos numerikus módszerekhez fel kell tennünk, hogy az operátor koercív. A G kompakt operátor azonban nem lehet koercív, hiszen akkor szuperjektív is lenne (7.2. tétel). Megjegyezzük, hogy a koercivitásból következne az inverz korlátossága, amit regularitásnak is szokás hívni. Kompakt operátornak viszont nem lehet korlátos inverze (6.78. állítás), így a gondot a regularitás hiánya okozza.

Ennek megkerülésére való az alábbi módszer, az ún. *Tyihonov–Lavrentyev-regularizáció*:

(i) Legyen $\alpha > 0$ valós paraméter, és tekintsük a

$$G_\alpha x_\alpha := (G + \alpha I) x_\alpha = b$$

egyenleteket. Ezekben a G_α operátorok koercívak, így rögzített $\alpha > 0$ esetén egyértelműen létezik az $x_\alpha \in H$ megoldás.

(ii) Az α paraméter tartson 0-hoz. Célunk, hogy $\lim\limits_{\alpha \to 0} x_\alpha = x$ legyen.

Megmutatjuk, hogy ha x maga is $R(G)$-beli, akkor teljesül $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = x$. Az alábbiakban végig legyen $b \in R(G)$ rögzített, x és x_α pedig a megfelelő egyenletek megoldása, azaz

$$Gx = b, \qquad G_\alpha x_\alpha = b.$$

17.4. Lemma. $x - x_\alpha = \alpha\, G_\alpha^{-1} x$.

Bizonyítás. A definíciókból

$$G_\alpha x - \alpha x = (G_\alpha - \alpha I)x = Gx = b = G_\alpha x_\alpha,$$

ebből

$$G_\alpha(x - x_\alpha) = G_\alpha x - G_\alpha x_\alpha = \alpha x.$$

Mivel G_α koercív, így bijekció (7.2. tétel), ezért alkalmazhatjuk a fentire G_α^{-1}-et, és ez a kívánt egyenlőséget adja. $\square$

17.5. Lemma. *Ha* $x \in R(G)$, *akkor* $\|G_\alpha^{-1} x\| \le 2\|G^{-1}x\|$.

Bizonyítás. Legyen $y := G^{-1}x$. Itt $G_\alpha^{-1}x = G_\alpha^{-1}Gy = G_\alpha^{-1}(G_\alpha - \alpha I)y = y - \alpha\, G_\alpha^{-1} y = y - z_\alpha$, ahol $z_\alpha := \alpha\, G_\alpha^{-1} y$. Ekkor $\alpha y = G_\alpha z_\alpha = G z_\alpha + \alpha z_\alpha$, amiből (mivel G pozitív)

$$\alpha\|y\|\|z_\alpha\| \ge \langle \alpha y, z_\alpha\rangle = \langle G z_\alpha + \alpha z_\alpha, z_\alpha\rangle = \langle G z_\alpha, z_\alpha\rangle + \alpha\|z_\alpha\|^2 \ge \alpha\|z_\alpha\|^2,$$

így $\|y\| \ge \|z_\alpha\|$, és végül a fenti $G_\alpha^{-1}x = y - z_\alpha$ egyenlőségből $\|G_\alpha^{-1}x\| \le \|y\| + \|z_\alpha\| \le 2\|y\|$. $\square$

17.6. Tétel. *Ha* $x \in R(G)$, *akkor* $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|x - x_\alpha\| = 0$.

Bizonyítás. Ha $\alpha \to 0$, akkor a két lemma alapján

$$\|x - x_\alpha\| = \alpha\, \|G_\alpha^{-1}x\| \le 2\alpha\|G^{-1}x\| \to 0. \qquad \square$$

Összefoglalva: ha $b \in R(G^2)$, akkor $x \in R(G)$, így $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = x$, sőt $\|x - x_\alpha\| = O(\alpha)$. A $Gx = b$ egyenlet x megoldása tehát úgy közelíthető, hogy először elég kis α-ra felírjuk a $G_\alpha x_\alpha = b$ egyenletet, majd erre alkalmazzuk a korábbi szakaszok (koercivitást felhasználó) valamelyik közelítő módszerét.

Megemlítjük, hogy ha G önadjungált is, akkor $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = x$ abban az esetben is igazolható, ha $x \notin R(G)$, de ekkor az $O(\alpha)$ nagyságrend már nem érvényes. Ha G nem önadjungált és a pozitivitást sem tesszük fel, akkor a fenti módszert a $G^*Gx = G^*b$ normálegyenletre alkalmazzuk a $G^*G + \alpha I$ segédoperátorokkal, ez a Tyihonov-regularizáció. További részletek találhatók pl. a [28] könyvben.

17.3. Operátor-differenciálegyenletek diszkretizációja

Legyen X Banach-tér, $L : X \supset\!\!\!\to X$ sűrűn definiált operátor, $u_0 \in D(L)$ adott vektor, és tekintsük az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\dot{u}(t) + Lu(t) = 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{17.1}$$

Az ilyen típusú operátor-differenciálegyenletek vizsgálatát elsősorban parabolikus PDE-k numerikus megoldása motiválta, számos módszer és részlet olvasható a [3, 71, 72] könyvekben. Itt a célunk egy általános eredmény ismertetése, amely összefoglalja a közelítő megoldás során felmerülő tulajdonságokat.

17.3. feltételek.

(i) A $-L$ operátor egy $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ félcsoportot generál $B(X)$-ben. (Ekkor tehát a 9.5. tétel szerint az $u(t) := T(t)u_0 \ \ (t \geq 0)$ függvény megoldása a (17.1) feladatnak. Sőt, a 9.6. megjegyzés alapján ez bármely $u_0 \in X$ esetén is értelmes.)

(ii) Folytonos függés teljesül u_0-tól: van olyan $C > 0$, hogy $\|T(t)u_0\| \leq C\|u_0\|$ bármely $u_0 \in X$ és $t \in [0, T]$ esetén.

Ha például $X = H$ Hilbert-tér, akkor a 9.2. szakasz (9.12) egyenletéről van szó, melyre a 9.10. tételben szereplő L operátor esetén teljesülnek a 17.3. feltételek.

Célunk a (17.1) feladat közelítő megoldása valamely $[0, T]$ intervallumon, rögzített $T > 0$ esetén. Vezessük be a t „idő”-változó szerinti következő diszkretizációt: legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $\tau := \frac{T}{n}$, $t_i := i\tau$ $(i = 1, \ldots, n)$ osztópontjai $[0, T]$-nek, és legyen u_i a megoldás t_i-beli közelítése:

$$u_i \approx u(t_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

(Ha $t = 0$, akkor $u_0 = u(0)$ az ismert kezdeti vektor.) Az egyenletbeli derivált a τ-hoz tartozó alkalmas különbségi hányadossal közelíthető: legegyszerűbb az

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau}$$

explicit sémát alkalmazni, ez az ún. explicit Euler-módszer. További lehetőségek például az

$$\frac{u(t) - u(t-\tau)}{\tau} \quad \text{(implicit) vagy} \quad \frac{u(t+\tau) - u(t-\tau)}{2\tau} \quad \text{(szimmetrikus)}$$

sémák. Írjuk fel az egyenletben az explicit sémát a szomszédos osztópontokra az $u(t_i) \approx u_i$ és $u(t_i + \tau) = u(t_{i+1}) \approx u_{i+1}$ közelítésekkel, ekkor az alábbi rekurziót kapjuk:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + Lu_i = 0 \qquad (i = 0, \dots, n-1). \tag{17.2}$$

Ebből u_0 ismeretében az u_i-k sorra kiszámíthatóak, hiszen átrendezve

$$u_{i+1} = u_i - \tau L u_i \qquad (i = 0, \dots, n-1).$$

Ha az explicit helyett más sémát alkalmazunk, akkor általában egy lineáris egyenletet vagy egyenletrendszert kell megoldani az u_i-k kiszámításához: például az implicit séma esetén

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\tau} + Lu_i = 0 \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{17.3}$$

átrendezve

$$u_i + \tau L u_i = u_{i-1} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

A konvergencia vizsgálata abból az általános alakból indul ki, hogy bármelyik sémával diszkretizálunk t szerint, az u_i-k végső soron u_0-tól függnek, és előállnak az alábbi alakban:

$$u_m = C(\tau)^m u_0 \qquad (m = 1, \dots, n), \tag{17.4}$$

ahol $C(\tau) \in B(X)$ a τ paramétertől függő operátor. Az explicit séma esetében

$$C(\tau) = I - \tau L,$$

hiszen

$$u_{i+1} = (I - \tau L)\, u_i, \qquad \text{így rekurzióval} \qquad u_m = \Big(I - \tau L\Big)^m u_0\,.$$

Hasonlóan adódik az implicit séma esetében

$$C(\tau) = (I + \tau L)^{-1}. \tag{17.5}$$

Általában tehát a következő fogalmat használjuk:

17.7. Definíció. A (17.1) feladathoz tartozó *differenciamódszernek* egy

$$C : [0, \tau_0] \to B(X)$$

operátorcsaládot hívunk.

Itt tehát minden $0 < \tau \le \tau_0$ értékhez tartozik egy operátor. Ha τ rögzített, akkor $C(\tau)$ azt mondja meg, hogy az adott módszerben hogyan kapjuk meg közelítőleg egy függvényértékből a τ-val későbbi függvényértéket. A pontos megoldásra $u(t_m) = T(\tau)^m u_0$ $(m = 1, \ldots, n)$, így (17.4) úgy is fogalmazható, hogy a C család a T félcsoport közelítése, vagyis közelítő megoldó-operátor. Célunk ezután az, hogy $\tau \to 0$ esetén egyre jobb közelítéseket kapjunk.

A C operátorcsalád nem lehet akármilyen, hiszen a felhasznált sémának $\tau \to 0$ esetén közelítenie kell az eredeti egyenletet. Ez a követelmény általánosan a következőképp írható le. A pontos megoldásra (17.1) alapján bármely $t \ge 0$ esetén

$$0 = \lim_{\tau \to 0} \Big(\frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} + Lu(t) \Big) = \lim_{\tau \to 0} \Big(\frac{T(\tau) - I}{\tau} + L \Big) u(t)$$

kell teljesüljön. A C operátorcsalád akkor közelíti az eredeti egyenletet $\tau \to 0^+$ esetén, ha ez a $C(\tau)$-kra is igaz:

$$0 = \lim_{\tau \to 0^+} \Big(\frac{C(\tau) - I}{\tau} + L \Big) u(t). \tag{17.6}$$

Ezt a két képletet kivonva egymásból,

$$0 = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{C(\tau) - T(\tau)}{\tau} u(t).$$

Ha itt felhasználjuk, hogy $T(\tau)u(t) = T(\tau)T(t)u_0 = T(t+\tau)u_0 = u(t+\tau)$, akkor megkapjuk a C-re vonatkozó követelmény szokásos definícióját, amit konzisztenciának nevezünk. Pontosabban, az eredeti feladat $u_0 \in D(L)$ feltételét itt némileg enyhítjük, mivel a gyakorlatban a konzisztencia általában csak a $D(L)$-belinél nagyobb regularitás esetén igazolható; a kérdéses limeszt viszont egyenletesnek tesszük fel.

17.8. Definíció. A C operátorcsaláddal leírt differenciamódszer *konzisztens*, ha van olyan sűrű $D_0 \subset D(L)$ altér, hogy bármely $u_0 \in D_0$ esetén a megfelelő u megoldásra

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{C(\tau)u(t) - u(t+\tau)}{\tau} = 0 \qquad \text{egyenletesen a } [0,T] \text{ intervallumban.}$$

Az explicit séma $C(\tau) := I - \tau L$ családja például triviálisan konzisztens, hiszen a (17.6) képletben már a limeszképzés előtt azonosan 0-t kapunk. A differenciamódszerre további szükséges feltétel, hogy az (17.4)-ben kapott értékek korlátosak maradjanak, amíg a $[0,T]$ intervallumban vagyunk, hiszen különben az u_m-ek nem közelíthetik a pontos megoldást.

17.9. Definíció. A C operátorcsaláddal leírt differenciamódszer *stabil*, ha az operátorcsalád hatványai egyenletesen korlátosak, azaz van olyan $K > 0$, hogy

$$\|C(\tau)^m\| \leq K, \quad \text{ha} \quad \tau \leq \tau_0,\ m\tau \leq T.$$

A fő kérdés a módszer konvergenciája. Mivel a közelítő megoldásokat csak diszkrét t pontokban értelmeztük, a konvergencia fogalma úgy értendő, hogy ha $\tau_i \to 0$ és $m_i\tau_i \to t$ valamely m_i indexsorozatra, akkor az $u(m_i\tau_i)$-re számított megoldások $u(t)$-hez tartsanak. A számítást leíró (17.4) képlet és az $u(t) = T(t)u_0$ azonosság alapján kapjuk az alábbi definíciót.

17.10. Definíció. A C operátorcsaláddal leírt differenciamódszer *konvergens*, ha bármely $u_0 \in X$ és $t \in [0, T]$ esetén, ha $\tau_i \to 0$ és az m_i indexsorozatra $m_i\tau_i \to t$, akkor

$$\lim_{\tau_i \to 0^+} C(\tau_i)^{m_i} u_0 = T(t)u_0.$$

A témakör fő eredménye a fenti három fogalom kapcsolatát jellemzi, és alkalmas szükséges és elégséges feltételt ad a konvergenciára.

17.11. Tétel (Lax ekvivalenciatétele). *Teljesüljenek a 17.3. feltételek. Egy konzisztens differenciamódszer pontosan akkor konvergens, ha stabil.*

Bizonyítás. (1) Legyen a differenciamódszer konzisztens és stabil.
Tegyük fel először, hogy $u_0 \in D_0$. Ha $m \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$ és $m\tau \leq T$, akkor a

$$C(\tau)^m u_0 - u(m\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} C(\tau)^{m-j-1}\Big(C(\tau)u(j\tau) - u((j+1)\tau)\Big)$$

teleszkópos összegből a stabilitás révén

$$\|C(\tau)^m u_0 - u(m\tau)\| \leq K \sum_{j=0}^{m-1} \|C(\tau)u(j\tau) - u((j+1)\tau)\|$$

$$\leq K\tau m \sup_{t \in [0,T]} \frac{\|C(\tau)u(t) - u(t+\tau)\|}{\tau} =: K\tau m\, \varepsilon(\tau).$$

A konzisztencia és $u_0 \in D_0$ miatt $\lim_{\tau \to 0^+} \varepsilon(\tau) = 0$. Így ha $\tau_i \to 0$ és $m_i\tau_i \leq T$, akkor

$$\|C(\tau_i)^{m_i} u_0 - u(m_i\tau_i)\| \leq KT\varepsilon(\tau_i) \to 0.$$

Másrészt $t \mapsto u(t)$ folytonos, hiszen differenciálható is, így ha $m_i\tau_i \to t$, akkor

$$\|u(m_i\tau_i) - u(t)\| \to 0.$$

Így ha $\tau_i \to 0$ és $m_i\tau_i \to t$, akkor a fenti két limeszből

$$\|C(\tau_i)^{m_i}u_0 - T(t)u_0\| = \|C(\tau_i)^{m_i}u_0 - u(t)\| \leq$$

$$\leq \|C(\tau)^{m_i}u_0 - u(m_i\tau_i)\| + \|u(m_i\tau_i) - u(t)\| \to 0,$$

azaz a módszer konvergens.
Legyen most $u_0 \in X$ tetszőleges. Mivel D_0 sűrű, van olyan $u_0^n \subset D_0$ sorozat, hogy $u_0^n \to u_0$. A stabilitást és a folytonos függést felhasználva

$$\|C(\tau_i)^{m_i}u_0 - T(t)u_0\| \leq$$

$$\leq \|C(\tau_i)^{m_i}(u_0 - u_0^n)\| + \|C(\tau_i)^{m_i}u_0^n - T(t)u_0^n\| + \|T(t)(u_0^n - u_0)\|$$

$$\leq (K + C)\|u_0 - u_0^n\| + \|C(\tau_i)^{m_i}u_0^n - T(t)u_0^n\|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor elég nagy n-re $(K+C)\|u_0 - u_0^n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel a megfelelő u_0^n-re már tudjuk a konvergenciát, így ha τ_i és $|m_i\tau_i - t|$ elég kicsik, akkor a második tag is kisebb $\frac{\varepsilon}{2}$-nél. Együttvéve

$$\|C(\tau_i)^{m_i}u_0 - T(t)u_0\| \leq \varepsilon,$$

ha τ_i és $|m_i\tau_i - t|$ elég kicsik, és ezt akartuk belátni.
(2) Legyen a differenciamódszer konvergens. Tegyük fel indirekt, hogy nem stabil. Ekkor vannak olyan τ_i és m_i sorozatok, hogy $\tau_i \leq \tau_0,\ \ m_i\tau_i \leq T$ és

$$\lim_{i\to\infty} \|C(\tau_i)^{m_i}\| = \infty. \tag{17.7}$$

Itt

$$\|C(\tau_i)^{m_i}\| \leq \|C(\tau_i)\|^{m_i} \leq K^{m_i} \qquad (\forall i \in \mathbb{N}),$$

mivel a K stabilitási konstans $C(\tau_i)$ első hatványaira is érvényes. Ebből látható, hogy $m_i \to \infty$, ha ugyanis m_i-nek lenne korlátos részsorozata, akkor $\|C(\tau_i)^{m_i}\|$-nek is lenne korlátos részsorozata, de az ∞-hez tart. Ha viszont $m_i \to \infty$, akkor $\tau_i \to 0$. Emiatt alkalmazható a konvergencia definíciója, és $C(\tau_i)^{m_i}$ pontonként konvergál $T(t)$-hez X-en. Így $C(\tau_i)^{m_i}$ pontonként korlátos is, ekkor viszont a 4.2. tétel szerint egyenletesen is korlátos, azaz $\|C(\tau_i)^{m_i}\|$ korlátos. Ez viszont ellentmond (17.7)-nek. □

17.12. Megjegyzés. A Lax-féle ekvivalenciatétel bizonyításából látható, hogy a visszairányhoz nem kellett a konzisztencia. Így valójában azt mondhatjuk, hogy egy konzisztens és stabil differenciamódszer konvergens is, míg egy konvergens differenciamódszer stabil is.

Példa. Tekintsük a 9.2. szakasz második megoldhatósági eredményében szereplő feladatot: legyen H szeparábilis Hilbert-tér, $L : H \supset\!\to H$ sűrűn definiált szigorúan pozitív operátor, melyre $R(L) = H$ és L^{-1} kompakt. A 9.13. tételnek megfelelően L-et maximális értelmezési tartománnyal láttuk el, azaz $D(L) = \Big\{ x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in H : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 < \infty \Big\}$ és ilyen x-re $Lx := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n e_n$.

Legyen $u_0 \in H$ adott vektor, és tekintsük a (17.1) kezdetiérték-feladatot:

$$\dot{u}(t) + Lu(t) = 0, \qquad u(0) = u_0. \tag{17.8}$$

A 9.13. tétel és 9.14. következmény alapján teljesülnek a 17.3. feltételek.

Alkalmazzuk a (17.3) implicit sémát! Megmutatjuk, hogy ez a differenciamódszer konvergens, amihez a Lax-féle ekvivalenciatételt használjuk, így azt bizonyítjuk, hogy konzisztens és stabil. Láttuk (17.5)-ban, hogy a megfelelő operátorcsalád

$$C(\tau) = (I + \tau L)^{-1}.$$

Konzisztencia. Legyen $D_0 := D(L)$, a konzisztenciával ekvivalens (17.6) alakot használjuk, éspedig igazoljuk, hogy bármely $x \in D(L)$ esetén

$$\lim_{\tau \to 0^+} \Big(\frac{C(\tau) - I}{\tau} + L \Big) x \equiv \lim_{\tau \to 0^+} \Big(\frac{(I + \tau L)^{-1} - I}{\tau} + L \Big) x = 0. \tag{17.9}$$

Legyen $x \in D(L)$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n$. Ekkor

$$\Big(\frac{(I + \tau L)^{-1} - I}{\tau} + L \Big) x = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\tau} \big(\frac{1}{1 + \tau\lambda_n} - 1 \big) + \lambda_n \Big) c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau\lambda_n^2}{1 + \tau\lambda_n} c_n e_n.$$

Itt $\frac{\tau\lambda_n^2}{1+\tau\lambda_n} \le \min\{\tau\lambda_n^2, \lambda_n\}$. Követve a 9.10. tétel bizonyításának módszerét, legyen $\tau \in \mathbb{R}$ rögzített. Ha $\lambda_n \le 1/\sqrt{\tau}$, akkor $\tau\lambda_n^2 \le 1$, így $\tau^2\lambda_n^4 \le \tau\lambda_n^2$ és $\min\{\tau\lambda_n^2, \lambda_n\}^2 \le \tau\lambda_n^2$, ha pedig $\lambda_n > 1/\sqrt{\tau}$, akkor $\min\{\tau\lambda_n^2, \lambda_n\}^2 \le \lambda_n^2$. Ezekből

$$\Big\| \Big(\frac{(I + \tau L)^{-1} - I}{\tau} + L \Big) x \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\tau\lambda_n^2}{1 + \tau\lambda_n} \Big)^2 |c_n|^2 \le$$

$$\le \tau \sum_{\lambda_n \le \frac{1}{\sqrt{\tau}}} \lambda_n^2 |c_n|^2 + \sum_{\lambda_n > \frac{1}{\sqrt{\tau}}} \lambda_n^2 |c_n|^2,$$

és ha $\tau \to 0$, akkor az első tag 0-hoz tart, mert $\tau \|Lx\|^2$-tel becsülhető, és a második tag is 0-hoz tart, mert $\|Lx\|^2$ konvergens sorából egyre nagyobb indexű szeleteket vonunk le.

Stabilitás. Mivel L szigorúan pozitív, így $\langle (I+\tau L)u, u\rangle \geq \|u\|^2$ $(\forall u \in D(L))$, azaz $I+\tau L$ egyenletesen pozitív $m = 1$ konstanssal. Könnyen látható L értelmezéséből, hogy $I+\tau L$ szuperjektív is, azaz ha $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n e_n \in H$, akkor az $u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+\tau\lambda_n} e_n$ vektor értelmes és $(I+\tau L)u = f$. Így a 8.15. állítás alapján $\|(I+\tau L)^{-1}\| \leq 1$. Ebből bármely $m \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|C(\tau)^m\| = \|(I+\tau L)^{-m}\| \leq \|(I+\tau L)^{-1}\|^m \leq 1$, azaz a módszer stabil.

17.13. Következmény. *A tett feltételek mellett a* (17.8) *feladatra alkalmazott implicit séma konvergens.*

17.14. Megjegyzés. Az explicit sémára nem ültethető át a fenti eredmény, mert ha L nem korlátos (és a fentiek tipikusan erre vonatkoznak), akkor a stabilitás nem teljesül, hiszen már a $C(\tau) = I - \tau L$ operátorok maguk nem korlátosak. Ha az eredeti feladatot véges dimenziósakkal közelítjük, pl. L-re Ritz–Galjorkin-féle diszkretizációval, akkor a megfelelő L_h $(h > 0)$ korlátos operátorokra már elérhető $I - \tau L_h$ hatványainak normakorlátossága, ha $\|I - \tau L_h\| \leq 1$, éspedig, a 16.2. megjegyzés alapján ez $\tau \leq \frac{2}{\|L_h\|}$ esetén teljesül. Itt azonban $\lim_{h\to 0} \|L_h\| = \infty$, pl. elliptikus L operátor esetén $\|L_h\| = \mathcal{O}(h^{-2}) \to \infty$, ha $h \to 0$, lásd pl. [5]. (Ennek következményével a 19.9. állítás után is foglalkozunk.) Ebben az esetben tehát a τ időlépést és h rácsfinomságot az a feltétel köti össze, hogy τ/h^2 legyen korlátos; a módszer csak ekkor lehet konvergens.

18. fejezet

Iterációs módszerek nemlineáris operátoregyenletekre

A 16. fejezet nemlineáris megfelelőjeként néhány véges dimenzióban ismert iterációs módszer végtelen dimenziós megfelelőjével foglalkozunk. Az itt említett és más kapcsolódó módszerekről a [30, 69], ill. [23, 25, 33, 40] könyvek adnak bővebb információt.

18.1. Egyszerű iteráció monoton operátorokra

18.1.1. Gradiens-módszer potenciáloperátor esetén

Legyen H valós Hilbert-tér és $A : H \to H$ olyan operátor, amelyre teljesülnek a 13.2. tétel feltételei. Legyen $f \in H$ és keressük az

$$A(u) = f \tag{18.1}$$

egyenletet megoldását. A 14.2. szakaszban leírtak szerint létezik olyan $\Phi : H \to \mathbb{R}$ egyenletesen konvex funkcionál, melyre $\Phi'(u) = A(u) - f$, vagyis Φ minimalizáló funkcionál, melynek egyetlen minimumhelye megadja (18.1) megoldását. Erre a funkcionálra szeretnénk alkalmazni a gradiens-módszert. Mivel Φ Gâteaux-deriválható, (16.1) szerint a gradiens módszer a következő.

- Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges;
- ha $n \in \mathbb{N}$ és u_n már megvan, akkor

$$u_{n+1} := u_n - t_n\, \Phi'(u_n) = u_n - t_n\, (A(u_n) - f).$$

Itt most csak a $t_n \equiv t$ állandó lépésköz esetével foglalkozunk. A konvergencia igazolásához a 13.2. tétel (i)-(iii) feltételein kívül fel kell tennünk (iii) felső megfelelőjét is. Ekkor a lineáris esetben kapott optimális lépésköz mellett az ottani konvergenciahányados is érvényes lesz, azaz a 16.1. tétellel teljesen analóg eredményt kapunk.

18.1. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy*

(i) A Gâteaux-deriválható, A' bihemifolytonos,

(ii) minden $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált,

(iii) léteznek olyan $M \geq m > 0$ állandók, hogy

$$m\|h\|^2 \leq \langle A'(u)h, h\rangle \leq M\|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H).$$

Legyen $f \in H$, és $u^* \in H$ a (18.1) egyenlet megoldása. Ekkor tetszőleges $u_0 \in H$ esetén az

$$u_{n+1} := u_n - \frac{2}{m+M}(A(u_n) - f) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat az

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{1}{m}\|A(u_0) - f\| \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

hibabecslés szerint konvergál u^*-hoz.

Bizonyítás. A 11.9. tétel szerint

$$\begin{aligned}\Phi'(u_{n+1}) &= \Phi'(u_n) + \int_0^1 \Phi''\left(u_n + t\left(u_{n+1} - u_n\right)\right)(u_{n+1} - u_n)\mathrm{d}t = \\ &= \Phi'(u_n) - \frac{2}{M+m}\int_0^1 \Phi''(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\Phi'(u_n)\mathrm{d}t = \\ &=: L_n\Phi'(u_n),\end{aligned}$$

ahol (felhasználva, hogy $\Phi'' = A'$) $L_n : H \to H$ az alábbi operátor:

$$L_n x := x - \frac{2}{M+m}\int_0^1 A'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\, x\,\mathrm{d}t.$$

Itt L_n lineáris operátor, sőt korlátos is, mivel a (iii) feltétel miatt $\|A'(u)\| \leq M$ $(\forall u \in H)$, így

$$\begin{aligned}\|L_n x\| &\leq \|x\| + \frac{2}{M+m}\int_0^1 \|A'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))\|\,\|x\|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \left(1 + \frac{2M}{M+m}\right)\|x\|\end{aligned}$$

$(\forall x \in H)$. A (ii) feltételt használva kapjuk, hogy bármely $x, y \in H$ esetén

$$\langle L_n x, y\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{2}{M+m}\int_0^1 \langle A'(u_n + t(u_{n+1}-u_n))x, y\rangle \,\mathrm{d}t = \langle x, L_n y\rangle\,,$$

azaz L_n önadjungált is. Ebből $\|L_n\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |\langle L_n x, x\rangle|$. Itt a (iii) feltétel szerint

$$m\,\|x\|^2 \le \langle A'(u_n + t(u_{n+1}-u_n))x, x\rangle \le M\,\|x\|^2\,,$$

ezért ha $\|x\| = 1$, akkor

$$-\left(\frac{M-m}{M+m}\right) = \left(1 - \frac{2M}{M+m}\right) \le \langle L_n x, x\rangle \le \left(1 - \frac{2m}{M+m}\right) = \frac{M-m}{M+m} =: Q,$$

így tehát $\|L_n\| \le Q$. Emiatt

$$\|\Phi'(u_{n+1})\| = \|L_n \Phi'(u_n)\| \le Q\,\|\Phi'(u_n)\|\,,$$

azaz indukcióval

$$\|\Phi'(u_n)\| \le Q^n\,\|\Phi'(u_0)\| = Q^n\,\|A(u_0) - b\| \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Végül a (iii) feltétel szerint és a 11.15. megjegyzés alapján Φ' egyenletesen monoton operátor, ebből

$$\|\Phi'(u_n)\|\,\|u_n - u^*\| \ge \langle \Phi'(u_n), u_n - u^*\rangle =$$

$$= \langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u^*), u_n - u^*\rangle \ge m\,\|u_n - u^*\|^2\,,$$

amiből következik, hogy

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m}\,\|\Phi'(u_n)\| \le \frac{1}{m}\,\|A(u_0) - b\|\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n. \qquad \square$$

18.1.2. Egyszerű iteráció nem potenciálos operátor esetén

A lineáris egyenleteknél is említettük, hogy állandó lépésköz esetén a GM egybeesik az ún. egyszerű (vagy Richardson-féle) iterációval, ez most

$$u_{n+1} := u_n - t\,(A(u_n) - f).$$

Ennek a módszernek a motivációja és konvergenciabecslése is leírható a potenciáltól függetlenül is. Motivációt úgy is nyerhetünk, hogy azzal az $A(u_n) - f$ taggal korrigáljuk u_n-et, amelynek 0-nak kellene lennie, így ha a fenti sorozat konvergál, akkor limesze csak u^* lehet. Az előző szakaszbeli konvergencia-becslés pedig átírható úgy, hogy a $\Phi'(u)$ tagok helyett mindenhol $A(u) - f$ szerepel, és látható, hogy valójában egy kontrakcióra alapuló fixponttételes bizonyítás volt.

Ezek az észrevételek azért is hasznosak, mert így a módszer átvihető arra az esetre is, amikor A nem potenciáloperátor. A különbség az lesz, hogy önadjungált $A'(u)$ operátorok hiányában csak lassabb konvergencia garantálható.

Legyen tehát most $A : H \to H$ olyan operátor, amelyre teljesülnek a 13.5. tétel feltételei. Legyen $f \in H$ és keressük ismét az

$$A(u) = f \tag{18.2}$$

egyenlet megoldását.

18.2. Tétel. *Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor. Tegyük fel, hogy létezik $M \ge m > 0$, hogy bármely $u, v \in H$ esetén*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \ge m \|u - v\|^2, \qquad \|A(u) - A(v)\| \le M \|u - v\|. \tag{18.3}$$

Legyen $f \in H$, és $u^* \in H$ a (18.2) *egyenlet megoldása. Ekkor tetszőleges $u_0 \in H$ esetén az*

$$u_{n+1} := u_n - \frac{m}{M^2}(A(u_n) - f) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{18.4}$$

sorozat az

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m} \|A(u_0) - f\| \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^{n/2} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{18.5}$$

hibabecslés szerint konvergál u^*-hoz.

Bizonyítás. A 13.5. tétel bizonyítása és a 13.6. megjegyzés alapján $\alpha_{opt} := \frac{m}{M^2}$ mellett a $G : H \to H$,

$$G(u) := u - \alpha_{opt}(A(u) - f)$$

leképezés kontrakció, melynek konstansa $q_{opt} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}$. Az $A(u) = f$ egyenlet ekvivalens az $u = G(u)$ egyenlettel, így u^*-ot közelítő sorozatot kapunk az utóbbira felírt $u_{n+1} := G(u_n)$ fixpont-iterációval, ami éppen (18.4), és a konvergenciabecslés $\|u_n - u^*\| \le q_{opt}^n \|u_0 - u^*\|$. Itt (18.3) alapján

$$m \|u_0 - u^*\|^2 \le \langle A(u_0) - A(u^*), u_0 - u^*\rangle =$$
$$= \langle A(u_0) - f, u_0 - u^*\rangle \le \|A(u_0) - f\| \|u_0 - u^*\|,$$

ebből

$$\|u_n - u^*\| \le \|u_0 - u^*\| q_{opt}^n \le \frac{1}{m} \|A(u_0) - f\| q_{opt}^n,$$

ami éppen a (18.5) becslés. □

18.2. A Newton–Kantorovics-módszer

Az előző szakasz lineárisan konvergens módszereinél sokkal gyorsabb eljárást ad a nevezetes Newton–Kantorovics-módszer, lépésenként egy-egy lineáris segédegyenlet megoldása árán. A Newton–Kantorovics-módszer közvetlenül általánosítja a klasszikus egyváltozós Newton-módszert, ahol adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény esetén az $f(x) = 0$ egyenlet megoldását keressük az alábbi iterációval:

- $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és
- $x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Ismeretes, hogy bizonyos feltételek mellett a Newton-módszer konvergenciája másodrendű, lásd pl. [69, I. 6.4]. A fenti iteráció alkalmas általánosítása Banach-térre, ha az $f'(x_n)$-nel való osztás helyett formálisan az $F'(x_n)$ operátorok inverzét alkalmazzuk; az említett feltételek megfelelői esetén ekkor is igaz a másodrendű konvergencia. Ezt Kantorovics vezette be [33, Chap. XVIII], azóta számtalan módosítást és további általánosítást dolgoztak ki, és véges dimenzióban nemlineáris egyenletrendszerek megoldására ez a módszercsalád bizonyult a leghatékonyabbnak, lásd pl. [26, 52, 69]. A standard Newton–Kantorovics-módszert a jóval könnyebb érthetőség kedvéért először erősebb feltételek mellett tárgyaljuk, akárcsak majd a következő szakaszbeli változatait, ezek [23, 5.2.2. fejezet]-re alapulnak.

A Newton-típusú módszerek esetén X, Y Banach-terek közt ható operátorokat tekintünk, mivel az eredmények nem használnak fel ennél speciálisabb helyzetet. Legyen tehát $F : X \to Y$ nemlineáris operátor. Keressük az

$$F(u) = 0 \tag{18.6}$$

egyenletet $u^* \in X$ megoldását. A jobboldal ilyenkor szokásos 0 voltát az egyváltozós analóg helyzet (zérushelykeresés) motiválja, de ez nyilvánvalóan nem jelent megszorítást, hiszen egy $A(u) = f$ típusú feladat esetén csak az $F(u) := A(u) - f$ operátorra kell áttérnünk.

Tegyük fel, hogy $F : X \to Y$ Fréchet-deriválható. A másodrendű konvergencia mögött álló kulcsfeltétel F' Lipschitz-folytonossága lesz, azaz hogy létezik olyan $L > 0$ állandó, melyre

$$\|F'(u) - F'(v)\| \le L\|u - v\| \qquad (\forall u, v \in X). \tag{18.7}$$

Ezáltal ugyanis az F operátort az iteráció lépéseiben elsőfokú Taylor-polinomjaival linearizálhatjuk, és a maradék másodrendben kicsi lesz. Először olyan egyenletekkel foglalkozunk, ahol garantálható az egyértelmű megoldás, ebben a helyzetben a 13.9. tétellel: ha bármely $u, h \in X$ esetén

$$F'(u) : X \to Y \text{ bijekció és } \quad \|F'(u)h\| \geq m\|h\|, \tag{18.8}$$

ahol $m > 0$ független u, h-tól, akkor a (18.6) egyenletnek egyértelműen létezik $u^* \in X$ megoldása.

18.3. Tétel. *Legyenek X, Y Banach-terek és $F : X \to Y$ Fréchet-deriválható. Tegyük fel, hogy teljesül* (18.8)*, valamint F' Lipschitz-folytonos L konstanssal. Ha $u_0 \in X$ tetszőleges, akkor az*

$$u_{n+1} = u_n - F'(u_n)^{-1}F(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

iterációra az alábbiak teljesülnek:

(1) $\|F(u_{n+1})\| \leq \dfrac{L}{2m^2}\, \|F(u_n)\|^2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$

(2) Ha u_0 olyan, hogy

$$q := \frac{L}{2m^2}\, \|F(u_0)\| < 1, \tag{18.9}$$

akkor

$$m\|u_n - u^*\| \leq \|F(u_n)\| \leq \frac{2m^2}{L} q^{2^n} \to 0. \tag{18.10}$$

18.4. Megjegyzés. A megadott iterációs lépés az alábbi alakba írható át:

$$\begin{cases} F'(u_n)p_n &= -F(u_n), \\ u_{n+1} &= u_n + p_n\,, \end{cases}$$

sőt ez az, amit valójában használunk: nem kell meghatározni $F'(u_n)$ inverzét, hanem a megfelelő lineáris operátoregyenletet kell megoldani p_n kiszámításához.

A 18.3. tétel bizonyítása. (1) A 11.9. tétellel analóg Newton–Leibniz-formula szerint

$$\begin{aligned} F(u_{n+1}) = F(u_n) + \int_0^1 F'(u_n + t(u_{n+1} - u_n))(u_{n+1} - u_n)\mathrm{d}t = \\ = -F'(u_n)p_n + \int_0^1 F'(u_n + tp_n)p_n\mathrm{d}t = \\ = \int_0^1 \left(F'(u_n + tp_n) - F'(u_n)\right)p_n\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Itt (18.8) miatt $\left\|F'(u)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{m}$ minden $u \in H$ esetén. Ebből, és felhasználva F' Lipschitz-folytonosságát,

$$\begin{aligned}
\|F(u_{n+1})\| &\leq \int_0^1 \|F'(u_n + tp_n) - F'(u_n)\| \, \|p_n\| \, \mathrm{d}t \leq \\
&\leq \int_0^1 Lt \, \|p_n\|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{L}{2} \, \|p_n\|^2 = \frac{L}{2} \left\|F'(u_n)^{-1} F(u_n)\right\|^2 \leq \\
&\leq \frac{L}{2m^2} \, \|F(u_n)\|^2 .
\end{aligned}$$

(2) Most alkalmazzuk a fenti becslést n-szer:

$$\begin{aligned}
\|F(u_n)\| &\leq \frac{L}{2m^2} \, \|F(u_{n-1})\|^2 \leq \frac{L}{2m^2} \left(\frac{L}{2m^2}\right)^2 \|F(u_{n-2})\|^4 = \\
&= \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{1+2} \|F(u_{n-2})\|^{2^2} \leq \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{1+2+2^2} \|F(u_{n-3})\|^{2^3} \\
&\leq \ldots \leq \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}} \|F(u_0)\|^{2^n} = \\
&= \left(\frac{L}{2m^2}\right)^{2^n-1} \|F(u_0)\|^{2^n} ,
\end{aligned}$$

azaz

$$\|F(u_n)\| \leq \frac{2m^2}{L} \left(\frac{L}{2m^2} \, \|F(u_0)\|\right)^{2^n} = \frac{2m^2}{L} q^{2^n} .$$

Ha (18.9) teljesül, akkor $q < 1$ és így $\|F(u_n)\| \to 0$. □

18.5. Megjegyzés. Mint láttuk, Hilbert-térben a (18.8) feltétel garantálható pl. az

$$\langle F'(u)h, h\rangle \geq m \, \|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H)$$

egyenlőtlenséggel. Ekkor a (18.6) egyenlet megoldhatóságához még feltesszük vagy F' bihemifolytonosságát és önadjungáltságát, vagy F (lokális) Lipschitz-folytonosságát, viszont a Fréchet-deriválhatóság helyett elég a Gâteaux-deriválhatóság. Könnyen látható, hogy a 18.3. tétel bizonyításában is elég a Gâteaux-deriválhatóság.

18.6. Megjegyzés. A 18.3. tételben szereplő Lipschitz-feltétel több módon is enyhíthető.

(a) Elég feltenni a Hölder-folytonosságot:

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq L\|u - v\|^\alpha \qquad (u, v \in X)$$

ahol $L > 0$, $0 < \alpha < 1$ állandók. Ekkor a tétel bizonyításával kvadratikus helyett $1+\alpha$ rendű konvergenciát kapunk:

$$\|F(u_{n+1})\| \le c\,\|F(u_n)\|^{1+\alpha} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Elég feltenni F' Lipschitz-folytonosságát egy u^* közepű olyan gömbön, melynek R sugarára $\frac{1}{m}\|F(u_0)\| \le R$. Az eredeti tételben ui. az $\|F(u_n)\|$ sorozat csökken, így

$$\|u_n - u^*\| \le \tfrac{1}{m}\|F(u_n)\| \le \tfrac{1}{m}\|F(u_0)\| \le R$$

és a feltételek csak az említett gömbön kellenek.

(c) Elég feltenni F' lokális Lipschitz-folytonosságát, azaz hogy létezik olyan monoton növő $\tilde{L} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, hogy

$$\|F'(u) - F'(v)\| \le \tilde{L}(r)\|u - v\| \qquad (u, v \in X,\ \|u\|, \|v\| \le r). \quad (18.11)$$

Ez az előző (b) pont miatt van így. Legyen ugyanis $R_0 := \frac{2}{m}\|F(u_0)\| + \|u_0\|$. Ekkor F' Lipschitz-konstansa a $B(0, R_0)$ gömbön $L = \tilde{L}(R_0)$, másrészt a $B(0, R_0)$ gömb tartalmazza az u^* körüli $\frac{1}{m}\|F(u_0)\|$ sugarú gömböt, amelyben a sorozat fut: ha u eleme az utóbbi gömbnek, akkor

$$\|u\| \le \|u - u^*\| + \|u^* - u_0\| + \|u_0\| \le \tfrac{2}{m}\|F(u_0)\| + \|u_0\| = R_0.$$

Most idézzük a klasszikus Kantorovics-féle tételt, amely hasonló konvergenciarendet ad kevesebb feltétellel. Az előző megjegyzés (b) pontja alapján elég a feltételeket az egész tér helyett egy gömbön feltenni, ha a gömb sugara összhangban áll a többi konstanssal. Emellett ha a (18.8) regularitást csak a kezdőpontban tesszük fel, akkor a Lipschitz-folytonosság miatt annak egy környezetében is teljesül. Az alábbi tétel a megoldás létezését is garantálja.

18.7. Tétel. *Legyenek X, Y Banach-terek, $F : X \to Y$ Fréchet-deriválható egy $D \subset X$ konvex halmazon, és legyen F' Lipschitz-folytonos D-ben L konstanssal. Legyen $u_0 \in D$, és tegyük fel, hogy*

$$\|F'(u_0)^{-1}\| \le 1/m, \qquad \|F'(u_0)^{-1}F(u_0)\| \le \mu$$

és

$$\theta := L\mu/m < 1/2.$$

Legyen $t^* := \frac{L}{m}\left(1 - (1-2\theta)^{1/2}\right)$ és $S := \{u \in X : \|u - u_0\| \le t^*\} \subset D$. Ekkor az

$$u_{n+1} = u_n - F'(u_n)^{-1}F(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

iteráció jóldefiniált, és konvergál egy $u^* \in S$ vektorhoz. Ez az u^* a (18.6) *egyenlet egyetlen megoldása az S gömbben, és érvényes a* (18.10) *konvergenciabecslés $q = 2\theta$ mellett.*

A fenti tétel és számos, elsősorban algebrai rendszerekre elterjedt változata található a [15, 52] könyvekben, ezek értelemszerűen igazak Banach-térben is. Kantorovics eredeti eredményei és bizonyításaik [33]-ban olvashatók.

18.8. Megjegyzés. A Newton-módszer felfogható a gradiens-módszer általánosításának, ha lépésenként változó skalárszorzatra nézve keressük a leggyorsabb ereszkedés irányát [35]; igazolható, hogy az ilyen eljárások között a Newton-módszer optimális [34].

18.3. Newton-típusú módszerek

Az előző szakaszban definiált

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n\,, \quad \text{ahol} \\ F'(u_n)p_n = -F(u_n) \end{cases}$$

iteráció a gyakorlatban két okból is módosításra szorul. Egyrészt, a lineáris segédegyenletet általában csak közelítőleg tudjuk megoldani, másrészt a konvergencia csak lokálisan, azaz elég jó kezdeti közelítés esetén teljesül.
A lineáris segédegyenletek közelítő megoldásával felírt iterációt inegzakt Newton-módszernek hívjuk. Itt tehát p_n-et valamilyen előírt hibahatáron belül számítjuk ki, vagyis az

$$F'(u_n)p_n + F(u_n) = 0$$

egyenlőséget az

$$\|F'(u_n)p_n + F(u_n)\| \le \delta_n \|F(u_n)\|$$

egyenlőtlenséggel helyettesítjük, ahol $\delta_n > 0$ előre megadott relatív hibahatár.

18.9. Tétel (inegzakt Newton-módszer). *Teljesüljenek a 18.3. tétel feltételei és legyen $u^* \in X$ a (18.6) egyenlet megoldása. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha $\|u_0 - u^*\| < \varepsilon$ és tekintjük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \quad \textit{ahol} \\ \|F'(u_n)p_n + F(u_n)\| \le \delta_n \|F(u_n)\| \quad \textit{és} \quad 0 < \delta_n \le \delta_0 < 1, \end{cases} \tag{18.12}$$

akkor $u_n \to u^*$ a (δ_n) sorozattól függő rendben. Éspedig, ha $\delta_n \le c\,\|F(u_n)\|^\gamma$ valamely $0 < \gamma \le 1$ és $c > 0$ konstansok mellett, akkor a konvergencia rendje $1+\gamma$:

$$\|F(u_{n+1})\| \le c_1 \|F(u_n)\|^{1+\gamma} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\textit{és} \qquad \|u_n - u^*\| \le \tfrac{1}{m}\|F(u_n)\| \le d_1\, q^{(1+\gamma)^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(ahol $0 < q < 1$, $c_1, d_1 > 0$ alkalmas állandók).

Bizonyítás. A 18.3. tétel bizonyítását módosítjuk. Az (1) rész helyett most

$$\|F(u_{n+1})\| \le \delta_n \|F(u_n)\| + (L/2)\|p_n\|^2. \tag{18.13}$$

A (18.12) feltételből

$$\|p_n\| \le \|F'(u_n)^{-1}\| \|F'(u_n)p_n\| \le \|F'(u_n)^{-1}\| \big(\|F'(u_n)p_n + F(u_n)\| + \|F(u_n)\| \big)$$
$$\le m^{-1} \|F(u_n)\|(1+\delta_n), \tag{18.14}$$

így

$$\|F(u_{n+1})\| \le \delta_n \|F(u_n)\| + (L/2m^2)(1+\delta_n)^2 \|F(u_n)\|^2. \tag{18.15}$$

Legyen

$$\delta_n := c\,\|F(u_n)\|^\gamma \qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{18.16}$$

(ahol $c > 0$ and $0 < \gamma \le 1$ állandók). Ekkor (18.15) és (18.16) alapján

$$\begin{aligned} \|F(u_{n+1})\| &\le c\|F(u_n)\|^{1+\gamma} + (L/2m^2)\,(1 + c\|F(u_n)\|^\gamma)^2\, \|F(u_n)\|^2 \\ &\le \|F(u_n)\| \Big(c\|F(u_n)\|^\gamma + (L/2m^2)\,(1 + c\|F(u_n)\|^\gamma)^2\, \|F(u_n)\| \Big). \end{aligned} \tag{18.17}$$

Ha u_0 olyan, hogy

$$\varrho_0 := c\|F(u_0)\|^\gamma + (L/2m^2)\,(1 + c\|F(u_0)\|^\gamma)^2\, \|F(u_0)\| < 1, \tag{18.18}$$

akkor $(\|F(u_n)\|)$ csökken, hiszen (18.17)–(18.18) miatt $\|F(u_1)\| \le \varrho_0 \|F(u_0)\|$, és indukcióval, ha valamely n-re $\|F(u_n)\| \le ... \le \|F(u_0)\|$, akkor ismét (18.17)–(18.18) révén

$$\|F(u_{n+1})\| \le \varrho_0 \|F(u_n)\|.$$

Legyen $c_1 := c + (L/2m^2)(1 + c\|F(u_0)\|^\gamma)^2 \|F(u_0)\|^{1-\gamma}$. A (18.17) és $\|F(u_n)\| \le \|F(u_0)\|$ becslések alapján

$$\begin{aligned} \|F(u_{n+1})\| &\le \|F(u_n)\|^{1+\gamma} \Big(c + (L/2m^2)\,(1 + c\|F(u_n)\|^\gamma)^2\, \|F(u_n)\|^{1-\gamma} \Big) \\ &\le c_1 \|F(u_n)\|^{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Ebből indukcióval

$$\|F(u_n)\| \le c_1^{\frac{(1+\gamma)^n - 1}{\gamma}} \|F(u_0)\|^{(1+\gamma)^n} = d_1\, q^{(1+\gamma)^n}$$

ahol $d_1 = c_1^{-1/\gamma}$ és $q = c_1^{1/\gamma} \|F(u_0)\| = \varrho_0^{1/\gamma} < 1$. $\square$

18.10. Megjegyzés. Az inegzakt Newton-módszer speciális esetei az ún. kvázi-Newton módszerek, melyekben az $F'(u_n)$ derivált valamely B_n közelítését használjuk:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - B_n^{-1} F(u_n) \qquad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{ahol} \\ \|I - F'(u_n)B_n^{-1}\| \le \delta_n \quad \text{és} \quad 0 < \delta_n \le \delta_0 < 1. \end{cases} \tag{18.19}$$

(Itt I az identitás Y-ban). Ekkor ui. $p_n = -B_n^{-1}F(u_n)$, így

$$\|F'(u_n)p_n + (F(u_n))\| = \|(-F'(u_n)B_n^{-1} + I)(F(u_n))\| \le \delta_n \|F(u_n)\|.$$

A következő módosítás az ún. csillapított Newton-módszer, melyben a globális konvergencia érdekében a p_n vektorokat alkalmas $\tau_n \in (0, 1]$ állandókkal szorozzuk.

18.11. Tétel (csillapított Newton-módszer). *Teljesüljenek a 18.3. tétel feltételei és legyen $u^* \in X$ a (18.6) egyenlet megoldása. Legyen $u_0 \in X$ tetszőleges, és tekintsük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \quad \textit{ahol} \\ F'(u_n)p_n = -F(u_n) \qquad \textit{és} \quad \tau_n = \min\left\{1, \frac{m^2}{L\|F(u_n)\|}\right\}. \end{cases} \tag{18.20}$$

Ekkor

$$\|u_n - u^*\| \le \tfrac{1}{m}\|F(u_n)\| \ \to 0$$

monoton csökkenően és lokálisan másodrendben, azaz alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ index után

$$\|F(u_{n+1})\| \le c_1 \|F(u_n)\|^2 \qquad (n \ge n_0) \tag{18.21}$$

$$\textit{és} \qquad \|u_n - u^*\| \le \tfrac{1}{m}\|F(u_n)\| \le d_1\, q^{2^n} \qquad (n \ge n_0) \tag{18.22}$$

(ahol $0 < q < 1$, $c_1, d_1 > 0$).

Bizonyítás. Most is a 18.3. tétel bizonyítását módosítjuk: az (1) rész helyett most

$$\begin{aligned} F(u_{n+1}) = (1 - \tau_n)F(u_n) + \tau_n(F(u_n) + F'(u_n)p_n) + \\ + \tau_n \int_0^1 (F'(u_n + t\tau_n p_n) - F'(u_n))p_n dt, \end{aligned} \tag{18.23}$$

$$\begin{aligned} \text{így} \qquad \|F(u_{n+1})\| &\le (1 - \tau_n)\|F(u_n)\| + \tau_n^2 (L/2m^2)\|F(u_n)\|^2 \\ &= \|F(u_n)\| \left(1 - \tau_n + \tau_n^2 (L/2m^2)\|F(u_n)\|\right). \end{aligned} \tag{18.24}$$

Ha $(L/2m^2)\|F(u_0)\| < 1$, akkor $\tau_n \equiv 1$ és a 18.3. tétel használható, különben pedig rögzített n esetén a valós $\varphi(t) := 1 - t + t^2(L/2m^2)\|F(u_n)\|$ $(t \geq 0)$ függvény minimumát $t = \tau_n := \frac{m^2}{L\|F(u_n)\|}$ esetén veszi fel, és itt értéke

$$\varphi(\tau_n) = 1 - \frac{m^2}{2L\|F(u_n)\|}. \tag{18.25}$$

Így (18.3) alapján és indukcióval az $(\|F(u_n)\|)$ sorozat csökken és

$$\|F(u_n)\| \leq \left(1 - \frac{m^2}{2L\|F(u_0)\|}\right)^n \|F(u_0)\| \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{18.26}$$

Így alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}^+$ után az $(L/2m^2)\|F(u_{n_0})\| < 1$ becslés áll fenn, ekkor $\tau_n \equiv 1$ $(n \geq n_0)$ és a 18.3. tétel használható u_{n_0} kezdővektorral. □

A fenti két változat előnyei közös módszerben egyesíthetőek, amely épp emiatt a legelterjedtebb. Az ún. csillapított inegzakt Newton-módszer tehát globális konvergenciát nyújt a segédegyenletek közelítő megoldása mellett is.

18.12. Tétel (csillapított inegzakt Newton-módszer). *Teljesüljenek a 18.3. tétel feltételei és legyen $u^* \in X$ a (18.6) egyenlet megoldása. Legyen $u_0 \in X$ tetszőleges, és tekintsük az alábbi sorozatot:*

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + \tau_n p_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \quad \textit{ahol} \\[2mm] \|F'(u_n)p_n + F(u_n)\| \leq \delta_n \|F(u_n)\| \qquad \textit{és} \quad 0 < \delta_n \leq \delta_0 < 1, \quad \textit{valamint} \\[2mm] \tau_n := \min\left\{1,\ \frac{(1-\delta_n)}{(1+\delta_n)^2}\frac{m^2}{L\|F(u_n)\|}\right\}. \end{cases} \tag{18.27}$$

Ekkor

$$\|u_n - u^*\| \leq \tfrac{1}{m}\|F(u_n)\| \ \to 0$$

monoton csökkenően, a (δ_n) sorozattól függő rendben. Éspedig, ha $\delta_n \leq c\,\|F(u_n)\|^\gamma$ valamely $0 < \gamma \leq 1$ és $c > 0$ konstansok mellett, akkor a konvergencia rendje lokálisan $1 + \gamma$, azaz alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ index után

$$\|F(u_{n+1})\| \leq c_1 \|F(u_n)\|^{1+\gamma} \qquad (n \geq n_0)$$

$$\textit{és} \qquad \|u_n - u^*\| \leq \tfrac{1}{m}\|F(u_n)\| \leq d_1\, q^{(1+\gamma)^n} \qquad (n \geq n_0)$$

(ahol $0 < q < 1$, $c_1, d_1 > 0$ alkalmas állandók).

Bizonyítás. A korábbiakhoz hasonló, most (18.3) és (18.14) alapján

$$\|F(u_{n+1})\| \leq (1 - \tau_n)\|F(u_n)\| + \tau_n \delta_n \|F(u_n)\| + \tau_n^2 (L/2)\|p_n\|^2$$

$$\leq \|F(u_n)\| \left(1 - \tau_n(1-\delta_n) + \tau_n^2 (L/2m^2)(1+\delta_n)^2 \|F(u_n)\|\right). \qquad (18.28)$$

A zárójelben álló kifejezés minimumát $\tau_n = \frac{(1-\delta_n)}{(1+\delta_n)^2} \frac{m^2}{L\|F(u_n)\|}$ esetén veszi fel, és itt értéke

$$\varphi(\tau_n) = 1 - \frac{m^2}{2L\|F(u_n)\|} \left(\frac{1-\delta_n}{1+\delta_n}\right)^2. \qquad (18.29)$$

Indukcióval, $\delta_n \leq \delta_0 < 1$ miatt $\varphi(\tau_n) \leq \varphi(\tau_0)$ és $\|F(u_n)\|$ lineárisan csökken, ezen belül valamely $n_0 \in \mathbb{N}^+$ esetén (18.18) teljesül, ha ott $\|F(u_0)\|$ helyett $\|F(u_{n_0})\|$-t írunk. Így a 18.3. tétel használható u_{n_0} kezdővektorral. $\square$

18.13. Megjegyzés. A fenti három tételben szereplő Lipschitz-feltétel több módon is enyhíthető, ugyanúgy, mint a 18.6. megjegyzésben említettük az eredeti Newton-iterációra.

18.4. Külső-belső iterációk

Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor az alábbi tulajdonságokkal:

18.4. feltételek.

(i) A Gâteaux-deriválható, A' bihemifolytonos;

(ii) bármely $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált;

(iii) létezik $M \geq m > 0$, hogy

$$m\,\|h\|^2 \leq \langle A'(u)h, h\rangle \leq M\,\|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H);$$

(iv) A' Lipschitz-folytonos L konstanssal.

Tekintsük az

$$A(u) = b$$

egyenletet, melynek a 13.2. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

Az előző szakaszban bevezetett inegzakt Newton-módszer és csillapított változata esetén a segédegyenletek közelítő megoldására most használhatjuk a konjugált gradiens-módszert. Ezáltal a közelítő sorozatot kétszeres, ún. külső-belső iterációval adjuk meg. A konstrukció és a konvergencia a megfelelő korábbi eredményekből levezethető, ezt foglaljuk most össze.

Legyen $u_0 \in H$ tetszőleges.

(a) A külső Newton-iteráció:

$$u_{n+1} = u_n + \tau_n p_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{18.30}$$

ahol $p_n \in H$ az alábbi lineáris egyenlet közelítő megoldása:

$$A'(u_n)p_n \approx -(A(u_n) - b), \tag{18.31}$$

emellett

$$\left.\begin{aligned} &\delta_n > 0 \quad \text{előírt konstans, melyre} \quad 0 < \delta_n \le \delta_0 < 1, \\ &\tau_n = \min\{\, 1,\ \tfrac{(1-\delta_n)}{(1+\delta_n)} \tfrac{\mu_1}{L\|p_n\|} \} \in (0,1]\,. \end{aligned}\right. \tag{18.32}$$

(b) Belső iteráció: a (18.31)-beli p_n vektor kiszámítására a KGM segítségével konstruálunk egy

$$(p_n^{(k)}) \subset H \qquad (k \in \mathbb{N})$$

közelítő sorozatot. Legyen $p_n^{(0)} := 0$ és $p_n := p_n^{(k_n)}$ a legkisebb k_n indexű tag, melyre már teljesül az

$$\|A'(u_n)p_n^{(k_n)} + (A(u_n) - b)\| \le \delta_n \|A(u_n) - b\| \tag{18.33}$$

relatív hibabecslés, ahol $\delta_n > 0$ a (18.32)-ben előírt hibakorlát.

18.14. Tétel. *Teljesüljenek a 18.4. feltételek. Ekkor az alábbi konvergenciabecslések állnak fenn.*

(1) A belső iterációra

$$\|A'(u_n)p_n^{(k)} + (A(u_n) - b)\| \le 2\sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^k \|A(u_n) - b\| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Így ahhoz, hogy az n-edik külső lépésben (18.33) *már teljesüljön, a szükséges belső iterációs lépések minimális száma legfeljebb az a* $k_n \in \mathbb{N}$, *melyre*

$$\left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^{k_n} \le \frac{\delta_n}{2} \sqrt{\frac{m}{M}}. \tag{18.34}$$

(2) Az (u_n) *külső iterációra*

$$\|u_n - u^*\| \le \frac{1}{m} \|A(u_n) - b\| \to 0$$

monoton csökkenően, a (δ_n) *sorozattól függő rendben. Éspedig, ha* $\delta_n \le c\,\|A(u_n)-b\|^\gamma$ *valamely* $0<\gamma\le 1$ *és* $c>0$ *konstansok mellett, akkor a konvergencia rendje lokálisan* $1+\gamma$*, azaz alkalmas* $n_0 \in \mathbb{N}$ *index után*

$$\|A(u_{n+1})-b\| \le c_1\|A(u_n)-b\|^{1+\gamma} \qquad (n \ge n_0)$$

$$\textit{és} \qquad \|u_n-u^*\| \le \tfrac{1}{m}\|A(u_n)-b\| \le d_1\, q^{(1+\gamma)^n} \qquad (n \ge n_0)$$

(ahol $0<q<1$, $c_1, d_1 > 0$ *alkalmas állandók).*

Bizonyítás. (1) A 18.4. feltétel miatt az $A'(u_n)$ operátorra vonatkozó (18.31) lineáris egyenletre érvényes a 16.11. tétel. Itt a maradékvektorok az $r_n^{(k)} := A'(u_n)p_n^{(k)}+(A(u_n)-b)$ vektorok, speciálisan $p_n^{(0)} := 0$ miatt $r_n^{(0)} = A(u_n)-b$, így a 16.12. megjegyzés alapján kapjuk a konvergenciabecslést, abból és a (18.33) becslésből pedig azonnal következik (18.34).
(2) Az $F(u) := A(u)-b$ operátorra a 18.5. megjegyzés alapján teljesülnek a 18.3. tétel feltételei és elég a Gâteaux-deriválhatóság. Így fennállnak a 18.12. tétel feltételei is, ez pedig épp a kívánt becsléseket adja. $\square$

19. fejezet

Iterációs módszerek Ritz–Galjorkin-diszkretizációkra

19.1. Rácsfüggetlenség lineáris egyenletek esetén

Legyen H valós Hilbert-tér és tekintsük az

$$Lu = g \tag{19.1}$$

lineáris operátoregyenletet, ahol L S-korlátos és S-koercív a 8.32. definíció szerint, és $g \in H$ adott vektor. A 8.37. tétel szerint ennek egyértelműen létezik gyenge megoldása.

A gyakorlatban az ilyen operátoregyenlettel modellezett feladatok megoldása általában a következő két lépésből áll:

i) diszkretizáció (azaz véges dimenziós feladattal közelítjük, amely lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet);

ii) iteráció (amellyel megoldjuk a fent kapott lineáris egyenletrendszert).

Mindkét lépésben többféle lehetőség van megfelelő módszer választására. Itt az eddig bemutatott algoritmusok alapján a diszkretizációra Ritz–Galjorkin-féle, az iterációra pedig prekondicionált konjugált gradiens-módszert alkalmazunk.

A fejezet fontos eredménye, hogy alkalmas prekondicionálás segítségével a konvergencia rácsfüggetlenségét fogjuk igazolni. Ez azt jelenti, hogy a prekondicionált mátrixok kondíciószáma és így a konvergencia hányadosa is korlátos marad a diszkretizáció finomítása (azaz az alterek dimenziójának tetszőleges növelése) során. Ennek jelentőségéről a 19.4. szakaszban is szót ejtünk majd, amikor a fenti eredményt elliptikus feladatokra alkalmazzuk.

Az említettekhez hasonló eredmények részletes tárgyalása olvasható a [6, 23] munkákban.

19.1.1. A megoldás menete

Először tehát a 15.2. szakasz alapján Ritz–Galjorkin-módszerrel közelítjük a (19.1) egyenlet megoldását. Az alterek jelölésére a végeselem-módszernél megszokott jelölést használjuk a 15.5. szakaszhoz hasonlóan, azaz $N \in \mathbb{N}^+$ egész helyett $h > 0$ paraméterrel indexeljük (amely a gyakorlatban fordítottan arányos N-nek a feladattól függő hatványával). Legyen tehát

$$V_h = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \subset H_S$$

adott altér, ahol a φ_i vektorok lineárisan függetlenek. Jelölje most a megfelelő Gram-mátrixot

$$\mathbf{L}_h := \left\{ \langle L_S \varphi_j, \varphi_i \rangle_S \right\}_{i,j=1}^N .$$

Az $u_h \in V_h$ közelítő megoldást ekkor $u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$ alakban kapjuk, ahol $\mathbf{b}_h := \{\langle g, \varphi_j \rangle\}_{j=1}^N$, és a $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{R}^N$ vektor az

$$\mathbf{L}_h \, \mathbf{c} = \mathbf{b}_h \tag{19.2}$$

$N \times N$-es lineáris egyenletrendszer megoldása. Láttuk, hogy ha teljesül a 15.2. feltétel, akkor $u_h \to u^* \quad \|\cdot\|_S$-normában.

A (19.2) rendszer megoldására alkalmazzuk a prekondicionált KGM-t, ahol a prekondicionáló mátrix az S operátorhoz tartozó merevségi mátrix:

$$\mathbf{S}_h = \left\{ \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_S \right\}_{i,j=1}^N .$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti rendszer helyett formálisan az alábbi prekondicionált rendszert tekintjük:

$$\mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{L}_h \, \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{b}}_h \tag{19.3}$$

(ahol $\tilde{\mathbf{b}}_h = \mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{b}_h$), és erre alkalmazzuk a KGM algoritmusát. Utóbbiban ekkor lépésenként az $\mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{L}_h$ mátrix szerepel, ami valójában azt jelenti, hogy $\mathbf{S}_h \mathbf{z}_n = \mathbf{L}_h \mathbf{w}_n$ típusú segédrendszereket kell megoldani, lásd (16.20). A prekondicionálás lényege, hogy az $\mathbf{S}_h$-val felírt rendszerek egyszerűbben megoldhatók legyenek, mint $\mathbf{L}_h$-val. Másrészt a konvergenciára az alábbi rácsfüggetlenségi tulajdonságot fogjuk igazolni: az $\mathbf{S}_h^{-1} \mathbf{L}_h$ mátrixok kondíciószáma, amely függ h-tól (azaz N-től), korlátos marad $h \to 0$ (azaz $N \to \infty$) esetén.

19.1.2. Szimmetrikus feladatok

Legyen először L maga is szimmetrikus operátor, ekkor az S-korlátos és S-koercív volta nem jelent mást, mint az alábbi spektrális ekvivalenciát:

$$m\|u\|_S^2 \leq \langle L_S u, u\rangle_S \leq M\|u\|_S^2 \qquad (u \in H_S). \tag{19.4}$$

Ekkor $\mathbf{L}_h$ is szimmetrikus. Itt $\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h$ önadjungált a $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle_{\mathbf{S}_h} := \mathbf{S}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$ skalárszorzatra nézve (hasonlóan, mint operátorokra láttuk (16.40)-nél). Így alkalmazható a (16.11)-(16.12) algoritmus a (19.3) rendszerre, ahol $\mathbb{R}^N$-ben a $\langle .,.\rangle_{\mathbf{S}_h}$ skalárszorzatot és megfelelő $|.|_{\mathbf{S}_h}$ normát használjuk, vagyis a (16.18)-(16.19) algoritmus megfelelője. Ekkor igaz a 16.11. tétel becslése, amihez szükség van $\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h$ határaira a $\langle .,.\rangle_{\mathbf{S}_h}$ skalárszorzatra nézve. Megmutatjuk, hogy itt $\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h$ örökli az eredeti határokat V_h-tól függetlenül. Az eredeti operátorokra vonatkozó feltétel az L és S spektrális ekvivalenciája lesz.

19.1. Állítás. *Legyenek L és S spektrálisan ekvivalensek, azaz $D(L) = D(S)$ $=: D$ és létezik $M \geq m > 0$, hogy*

$$m\langle Su, u\rangle \leq \langle Lu, u\rangle \leq M\langle Su, u\rangle \qquad (u \in D). \tag{19.5}$$

Ekkor bármely $V_h \subset H_S$ altér esetén

$$m\,|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h}^2 \leq \langle \mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle_{\mathbf{S}_h} \leq M\,|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h}^2 \qquad (\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N)$$

V_h-tól függetlenül.

Bizonyítás. A (19.5) spektrális ekvivalencia és L_S definíciója alapján teljesül (19.4). Tetszőleges $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ esetén az $u = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j\varphi_j \ \in V_h$ vektorra

$$\|u\|_S^2 = \Big\|\sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j\Big\|_S^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_S\, c_i\, c_j = \mathbf{S}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}, \tag{19.6}$$

és hasonlóan

$$\langle L_S u, u\rangle_S = \mathbf{L}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}.$$

Ezeket (19.4)-be beírva

$$m\ (\mathbf{S}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \leq \mathbf{L}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \leq M\ (\mathbf{S}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})\,,$$

ami megegyezik a kívánt egyenlőtlenséggel. □

Így alkalmazhatjuk (16.21)-et m és M határokkal, tehát a (19.3) rendszerre felírt KGM-algoritmusra az

$$\frac{\|e_n\|_{\mathbf{L}_h}}{\|e_0\|_{\mathbf{L}_h}} \leq 2\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{19.7}$$

V_h-tól független becslést kapjuk.

19.1.3. Nem szimmetrikus feladatok

Legyen most L tetszőleges S-korlátos és S-koercív operátor. Láttuk (8.14)-ben, hogy

$$m\|u\|_S^2 \leq \langle L_S u, u\rangle_S, \quad |\langle L_S u, v\rangle_S| \leq M\|u\|_S\|v\|_S \qquad (u, v \in H_S). \tag{19.8}$$

19.2. Állítás. *Ha fennáll (19.8), akkor bármely $V_h \subset H_S$ altér esetén*

$$m\,|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h}^2 \leq \langle \mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle_{\mathbf{S}_h}, \quad |\langle \mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle_{\mathbf{S}_h}| \leq M|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h}|\mathbf{d}|_{\mathbf{S}_h} \quad (\forall \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^N) \tag{19.9}$$

V_h-tól függetlenül.

Bizonyítás. Ugyanúgy megy, mint a 19.1. állítás bizonyítása; most tetszőleges $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$ esetén az $u = \sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j \ \in V_h$ és $v = \sum_{j=1}^{N} d_j\varphi_j \ \in V_h$ vektorokat (19.8)-ba helyettesítve

$$m\,(\mathbf{S}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \leq \mathbf{L}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}, \qquad |\mathbf{L}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}| \leq M|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h}|\mathbf{d}|_{\mathbf{S}_h} \qquad (\forall \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^N), \tag{19.10}$$

ez pedig nem más, mint (19.9). □

A 16.15. megjegyzést felhasználva adódik a

19.3. Következmény. *Ha fennáll (19.8), akkor*

$$m\,|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h} \leq |\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h} \leq M\,|\mathbf{c}|_{\mathbf{S}_h} \qquad (\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N).$$

Ekkor tehát alkalmazhatjuk a 16.3. szakaszban kapott lineáris konvergenciabecslést:

19.4. Következmény. *Ha fennáll (19.8), akkor a (16.25) KGN algoritmust a (19.3) rendszerre alkalmazva*

$$\frac{\|r_n\|_{\mathbf{S}_h}}{\|r_0\|_{\mathbf{S}_h}} \leq 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{19.11}$$

V_h-tól függetlenül.

19.5. Megjegyzés. A fenti becslés azt mutatja, hogy a 16.3. szakaszban operátorokra kapott lineáris konvergenciabecslés öröklődik a Ritz–Galjorkin-diszkretizációra megfelelő prekondicionálás esetén. Hasonló igaz a (16.27) szuperlineáris konvergenciabecslésre is: ha $L_S = I + Q_S$ alakú, ahol $Q_S \geq 0$ kompakt, akkor a (16.25) KGN algoritmust a (19.3) rendszerre alkalmazva

$$\frac{\|r_n\|_{\mathbf{S}_h}}{\|r_0\|_{\mathbf{S}_h}} \leq \ \varepsilon_n^n \qquad (n = 1, 2, ..., N), \tag{19.12}$$

ahol

$$\varepsilon_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\big|\lambda_i(Q_S^* + Q_S)\big| + \lambda_i(Q_S^* Q_S) \Big) \to 0 \qquad (\text{ha } \ n \to \infty) \quad (19.13)$$

V_h-tól független nullsorozat. Ez (általánosabb esetre) [6]-ban található.

19.2. Rácsfüggetlenség lineáris nyeregpont-feladatok esetén

Legyenek H, K valós Hilbert-terek, és tekintsük a (8.17) feladatot:

$$\begin{cases} Su + Np = f \\ N^*u \qquad = g, \end{cases} \quad (19.14)$$

ahol $S : H \supset\!\!\to H$ és $N : K \supset\!\!\to H$ sűrűn definiált operátorok, S szimmetrikus és egyenletesen pozitív, valamint $f \in H$, $g \in K$ adott vektorok. Teljesüljön emellett $D(N^*) \supset H_S$ (ahol H_S az S energiatere), és az S-normával vett inf-sup-feltétel:

$$\inf_{p \in D(N)\setminus\{0\}} \sup_{u \in H_S \setminus\{0\}} \frac{\langle Np, u\rangle}{\|p\| \|u\|_S} = \gamma > 0. \quad (19.15)$$

A feladat gyenge alakja

$$\begin{cases} \langle u, v\rangle_S + \langle p, N^*v\rangle = \langle f, v\rangle & (\forall v \in H_S), \\ \langle N^*u, q\rangle \qquad\qquad = \langle g, q\rangle & (\forall q \in K). \end{cases} \quad (19.16)$$

A 8.41. tétel szerint egyértelműen létezik az $(u^*, p^*) \in H_S \times K$ gyenge megoldás. A tétel bizonyításához átírtuk a fenti inf-sup-feltételt:

$$\inf_{p \in K\setminus\{0\}} \sup_{u \in H_S \setminus\{0\}} \frac{\langle p, N^*u\rangle}{\|p\| \|u\|_S} = \gamma > 0.$$

A (19.14) feladatot Ritz–Galjorkin-módszerrel diszkretizáljuk a 15.3.2. szakasz alapján. Az altereket (a 15.5. szakaszbeli jelöléshez hasonlóan) $h > 0$ paraméterrel indexeljük, legyenek tehát $V_h \subset H_S$ és $P_h \subset K$ véges dimenziós alterek. Az $(u_h, p_h) \in V_h \times P_h$ közelítő megoldást az

$$\begin{cases} \langle u_h, v\rangle_S + \langle p_h, N^*v\rangle = \langle f, v\rangle & (\forall v \in V_h), \\ \langle N^*u_h, q\rangle \qquad\qquad = \langle g, q\rangle & (\forall q \in P_h). \end{cases} \quad (19.17)$$

feladat megoldásaként keressük.

Láttuk, hogy a fenti diszkrét feladat nem örökli automatikusan az inf-sup-feltételt, hanem ezt külön elő kell írnunk; sőt, ezt a Ritz–Galjorkin-módszer konvergenciájához egyenletesen, azaz h-tól független konstanssal kell tennünk. A 15.10. definíció alapján tehát feltesszük, hogy a V_h és P_h alterek teljesítik az ún. LBB-feltételt, azaz van olyan $\gamma_0 > 0$ h-tól független állandó, hogy

$$\inf_{p \in P_h \setminus \{0\}} \sup_{u \in V_h \setminus \{0\}} \frac{\langle p, N^* u \rangle}{\|p\| \|u\|_S} \geq \gamma_0. \tag{19.18}$$

Ekkor a (19.17) diszkrét feladatnak egyértelműen létezik $(u_h, p_h) \in V_h \times P_h$ megoldása, emellett ha $\{V_h\}_{h>0}$ és $\{P_h\}_{h>0}$ alterek olyan családja, melyre

$$\begin{aligned} &\text{bármely } u \in H_S \text{ esetén} \quad \operatorname{dist}(u, V_h) := \min\{\|u - v_h\| : \ v_h \in V_h\} \to 0, \\ &\text{bármely } p \in K \text{ esetén} \quad \operatorname{dist}(p, P_h) := \min\{\|p - q_h\| : \ q_h \in P_h\} \to 0 \end{aligned} \tag{19.19}$$

(ha $h \to 0$), akkor a 15.12. következmény szerint $\|u_h - u^*\|_S + \|p_h - p^*\| \to 0$, ha $h \to 0$.

Írjuk fel most a 16.4. szakaszban definiált Uzawa-algoritmust a (19.17) diszkrét feladat megoldására! Ez nem más, mint (16.36) vetítése a $V_h \times P_h$ altérbe. Legyenek $u_0 \in V_h$, $p_0 \in P_h$ tetszőlegesek és $\alpha > 0$ adott szám, ha pedig megvan $u_n \in V_h$ és $p_n \in P_h$, akkor

$$\begin{cases} \langle u_{n+1}, v \rangle_S + \langle p_n, N^* v \rangle = \langle f, v \rangle & (\forall v \in V_h), \\ \langle p_{n+1}, q \rangle = \langle p_n, q \rangle + \alpha\Big(\langle N^* u_{n+1}, q \rangle - \langle g, q \rangle \Big) & (\forall q \in P_h). \end{cases} \tag{19.20}$$

A 16.17. következményben láttuk ennek konvergenciabecslését. Esetünkben γ helyére a (19.18)-beli γ_0 állandó, $\|B\|$ helyére pedig a $\mathcal{B}_{|V_h \times P_h}$ bilineáris forma normája lép, ahol $\mathcal{B} : K \times H_S \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{B}(p, v) := \langle p, N^* v \rangle$. Itt

$$\|\mathcal{B}_{|V_h \times P_h}\| = \sup_{\substack{p \in P_h \setminus \{0\} \\ v \in V_h \setminus \{0\}}} \frac{|\langle p, N^* v \rangle|}{\|p\| \|v\|_S} \leq \sup_{\substack{p \in K \setminus \{0\} \\ v \in H_S \setminus \{0\}}} \frac{|\langle p, N^* v \rangle|}{\|p\| \|v\|_S} = \|\mathcal{B}\| =: \beta,$$

ahol $\beta > 0$ független h-tól.

19.6. Következmény. *A (19.14) feladat feltételei és a (19.18) LBB-feltétel mellett van olyan $\alpha_0 > 0$, hogy $0 < \alpha < \alpha_0$ esetén a (19.20) iteráció lineárisan konvergál, vagyis alkalmas $c_1, c_2 > 0$ és $q < 1$ mellett*

$$\|u_n - u^*\|_S \leq c_1 q^n, \qquad \|p_n - p^*\| \leq c_2 q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Itt $\alpha_0 = \frac{2}{\beta^2}$, valamint az optimális paraméter és hozzátartozó konvergenciahányados rendre $\alpha_{opt} = \frac{2}{\beta^2 + \gamma_0^2}$ és $q = \frac{\beta^2 - \gamma_0^2}{\beta^2 + \gamma_0^2}$; mindezen állandók függetlenek V_h-tól és P_h-tól.

19.3. Rácsfüggetlenség nemlineáris egyenletek esetén

Legyen H valós Hilbert-tér, $A : H \to H$ adott operátor a 18.4-hez hasonló feltételekkel, ahol a (iv) pontot a 6.11. tétel alapján írjuk fel:

19.3. feltételek.

(i) A Gâteaux-deriválható, A' bihemifolytonos;

(ii) bármely $u \in H$ esetén $A'(u) \in B(H)$ önadjungált;

(iii) létezik $M \geq m > 0$, hogy

$$m \|h\|^2 \leq \langle A'(u)h, h \rangle \leq M \|h\|^2 \qquad (\forall u, h \in H);$$

(iv) létezik olyan $L > 0$ állandó, melyre

$$\|A'(u) - A'(v)\| \equiv \sup_{\|z\|=1} |\langle (A'(u) - A'(v))z, z \rangle| \leq L\|u - v\| \quad (\forall u, v \in H). \tag{19.21}$$

Tekintsük az

$$A(u) = b$$

egyenletet, melynek a 13.2. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H$ megoldása.

A 19.1. szakaszhoz hasonlóan ezt a feladatot a következő két lépésben oldjuk meg: diszkretizáció (azaz véges dimenziós feladattal közelítjük, amely nemlineáris algebrai egyenletrendszerre vezet), majd iteráció (amellyel megoldjuk a fent kapott nemlineáris egyenletrendszert). A diszkretizációra most is a Ritz–Galjorkin-módszert használjuk, és az iteráció rácsfüggetlen konvergenciáját mutatjuk meg. Utóbbi a gradiens-módszer esetén nagyban hasonlít az előző szakasz lineáris egyenletére vonatkozó eredményéhez, ezért ezzel most nem foglalkozunk, hanem a Newton-módszer kvadratikus konvergenciájának rácsfüggetlenségét igazoljuk a fenti feltételek mellett.

Az előző szakaszhoz hasonlóan legyen

$$V_h = span\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \subset H$$

adott altér, ahol a φ_i vektorok lineárisan függetlenek. A 15.4. szakaszt követve az $u_h \in V_h$ közelítő megoldást $u_h = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$ alakban keressük úgy, hogy teljesüljön az

$$\langle A(u_h), v \rangle = \langle b, v \rangle \qquad (\forall v \in V_h) \tag{19.22}$$

vetületi egyenlet. Mint láttuk, az u_h vektor $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)$ együtthatóit egy nemlineáris egyenletrendszerből kapjuk, az ebben szereplő függvényt jelöljük most $\mathbf{A}_h$-val, feltüntetve a h paramétertől való függést. Ekkor a szóban forgó egyenletrendszer

$$\mathbf{A}_h(\mathbf{c}) = \mathbf{b}_h, \tag{19.23}$$

ahol

$$\mathbf{A}_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{A}_h(\mathbf{c}) := \Big\{ \big\langle A\big(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\big), \varphi_k \big\rangle \Big\}_{k=1}^{N}$$

$$\text{és} \quad \mathbf{b}_h := \Big\{ \langle b, \varphi_k \rangle \Big\}_{k=1}^{N} \in \mathbb{R}^n.$$

Láttuk, hogy ha teljesül a (15.17). feltétel, akkor $\|u_h - u^*\| \to 0$.

Célunk most a 18.3. tételbeli Newton-módszer alkalmazása a (19.22) véges dimenziós feladatra. Ehhez abból indulunk ki, hogy az eredeti egyenletben szereplő $F(u) := A(u) - b$ operátorra a 19.3. feltételek révén és a 18.5. megjegyzés alapján teljesülnek a 18.3. tétel feltételei. Megmutatjuk, hogy a 19.3. feltételek öröklődnek a vetületi egyenletre is. Legyen

$$A_h : V_h \to V_h, \qquad A_h := P_h \circ A_{|V_h},$$

ahol $P_h : H \to V_h$ a V_h altérre vetítő ortogonális projekció. Mivel bármely $u \in V_h$ esetén $A(u) - A_h(u) = A(u) - P_hA(u) \perp V_h$, így

$$\langle A_h(u), v \rangle = \langle A(u), v \rangle \qquad (\forall u, v \in V_h). \tag{19.24}$$

Könnyen látható, hogy a 19.3.(i) feltétel teljesül A_h-ra, hiszen P_h folytonos és lineáris, így $A_h'(u) = P_hA'(u)_{|V_h}$. Ebből

$$\langle A_h'(u)z, v \rangle = \langle A'(u)z, v \rangle \qquad (\forall u, z, v \in V_h),$$

ebből világos A_h-ra a (ii) tulajdonság, és (iii) is ugyanazon m-mel és M-mel, mint A-ra. Hasonlóan,

$$\|A_h'(u) - A_h'(v)\| = \sup_{\substack{z \in V_h \\ \|z\|=1}} |\langle (A_h'(u) - A_h'(v))z, z \rangle| = \sup_{\substack{z \in V_h \\ \|z\|=1}} |\langle (A'(u) - A'(v))z, z \rangle|$$

$$\leq \sup_{\substack{z \in H \\ \|z\|=1}} |\langle (A'(u) - A'(v))z, z \rangle| = \|A'(u) - A'(v)\| \leq L\|u - v\| \qquad (\forall u, v \in V_h).$$

Legyen $u_0 \in H$ adott, u_0^h ennek vetülete V_h-ra. Írjuk fel ezzel a kezdővektorral az (19.22) feladatra vonatkozó Newton-iterációt:

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n\,, \quad \text{ahol} \\ A_h'(u_n)p_n = -(A_h(u_n) - b_h). \end{cases} \tag{19.25}$$

19.7. Tétel. *Ha teljesülnek a 19.3. feltételek, akkor*

(1) $\|A_h(u_{n+1}) - b_h\| \le \dfrac{L}{2m^2} \|A_h(u_n) - b_h\|^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$

(2) Ha u_0 olyan, hogy

$$q := \frac{L}{2m^2}\Big(\|A(0) - b\| + M\,\|u_0\|\Big) < 1, \tag{19.26}$$

akkor

$$m\|u_n - u^*\| \le \|A_h(u_n) - b_h\| \le \frac{2m^2}{L} q^{2^n} \to 0. \tag{19.27}$$

Mindkét becslés állandói V_h-tól függetlenek.

Bizonyítás. A fenti megfontolásban láttuk, hogy a 19.3. feltételek öröklődnek a (19.22) feladatra is, így a 18.5. megjegyzés alapján teljesülnek a 18.3. tétel feltételei. Így érvényes a 18.3. tétel az $F_h(u) := A_h(u) - b_h$ operátorból származtatott (19.25) sorozatra, h-tól függetlenül ugyanazon m és L állandókkal.
A 18.3. tétel (1) pontja erre az esetre egybeesik a fentivel, így utóbbit beláttuk. A 18.3. tétel (2) pontja most azt mondja ki, hogy ha u_0^h olyan, hogy

$$q_h := \frac{L}{2m^2}\left\|A_h(u_0^h) - b_h\right\| < 1, \tag{19.28}$$

akkor

$$m\|u_n - u^*\| \le \|A_h(u_n) - b_h\| \le \frac{2m^2}{L} q^{2^n} \to 0.$$

Itt

$$\left\|A_h(u_0^h) - b_h\right\| \le \|A_h(0) - b_h\| + \left\|A_h(u_0^h) - A_h(0)\right\|.$$

Egyrészt

$$\begin{aligned} \|A_h(0) - b_h\| &= \sup_{\substack{v\in V_h\\ \|v\|=1}} |\langle A_h(0) - b_h, v\rangle| = \sup_{\substack{v\in V_h\\ \|v\|=1}} |\langle A(0) - b, v\rangle| \le \\ &\le \sup_{\substack{v\in H\\ \|v\|=1}} |\langle A(0) - b, v\rangle| = \|A(0) - b\|, \end{aligned}$$

másfelől, hasonló megfontolásból és az $\|A'(z)\| \le M$ becslésből (ami a (iii) feltétel következménye)

$$\left\|A_h(u_0^h) - A_h(0)\right\| \le \left\|A(u_0^h) - A(0)\right\| \le M\left\|u_0^h\right\| \le M\|u_0\|.$$

Ezekből

$$\left\|A_h(u_0^h) - b_h\right\| \le \|A(0) - b\| + M\,\|u_0\|,$$

azaz $q_h \le q$. Ezt a (19.28) feltétellel összevetve azt kapjuk, hogy ha $q < 1$, azaz teljesül (19.26), akkor q_h is kisebb 1-nél, ezért igaz (19.27) is. Tehát (2)-t is beláttuk. □

19.8. Megjegyzés. A feltételek alapján az is igaz, hogy ha a (19.25)-beli lineáris egyenletekre a 18.4. szakasz szerint a KGM-t alkalmazzuk belső iterációként, akkor annak konvergenciája is M-től és m-től függ, így V_h-tól független.

19.4. Alkalmazások elliptikus peremértékfeladatokra

19.4.1. Lineáris peremértékfeladatok

Legyen L lineáris elliptikus operátor, és tekintsük az

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{19.29}$$

peremértékfeladatot. A gyakorlatban a megoldás szokásos menete két lépésből áll, amit absztrakt esetben a 19.1. szakasz elején írtuk fel:

i) diszkretizáció (azaz véges dimenziós feladattal közelítjük, amely lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet);

ii) iteráció (amellyel megoldjuk a fent kapott lineáris egyenletrendszert).

Mindkét lépésben többféle módszer választható, itt az előző, Hilbert-térben tárgyalt algoritmusok alapján a következőket használjuk: a diszkretizációra végeselem-módszert írunk fel, az iterációra pedig prekondicionált konjugált gradiens-módszert választunk, melyben a 16.3. szakasz prekondicionáló operátorainak diszkrét megfelelőit alkalmazzuk.

Az így konstruált prekondicionálásnak köszönhetően érvényesek lesznek a 19.1. szakasz rácsfüggetlenségi eredményei: a prekondicionált mátrixok kondíciószáma és így a konvergencia hányadosa is korlátos marad a végeselemes rácsháló finomítása (azaz $h \to 0$) során. Ez azért jelentős tulajdonság, mert a prekondicionálás előtti mátrixok kondíciószáma végtelenhez tart, azaz ha prekondicionálás nélkül alkalmaznánk a KGM-et, akkor a rács finomításával a konvergencia lelassulna, így viszont a konvergencia sebessége nem függ a h rácsfinomságtól.

1. példa: feladat szimmetrikus operátorral.

Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\operatorname{div}(p\,\nabla u) = f, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{19.30}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel, $p \in L^\infty(\Omega)$, $p(x) \geq m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$), $f \in L^2(\Omega)$. A 10.15. tétel szerint ennek egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása.

Először a 15.5. szakasz alapján végeselem-módszerrel közelítjük (19.30) megoldását. Legyen tehát $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ véges dimenziós altér $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ bázissal. Az $u_h \in V_h$ közelítő megoldást a V_h bázisvektorainak lineáris kombinációjaként keressük. Az u_h együtthatóit az

$$\mathbf{L}_h \mathbf{c} = \mathbf{f}_h$$

lineáris egyenletrendszer $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ megoldásának koordinátái adják, ahol most $\mathbf{L}_h$-val jelöljük a merevségi mátrixot (azaz a végeselem-módszer Gram-mátrixát). Itt (15.26) alapján

$$(\mathbf{L}_h)_{ij} = \int_\Omega p\ \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j, \qquad (\mathbf{f}_h)_i = \int_\Omega f\varphi_i \qquad (i,j = 1,\ldots,N).$$

Most szeretnénk konjugált gradiens-módszerrel megoldani a fenti rendszert. Először nézzük meg, milyen konvergenciát kapnánk, ha közvetlenül, azaz prekondicionálás nélkül alkalmaznánk a KGM-et. Ekkor $\mathbf{L}_h$ határai $m_h := \lambda_{\min}(\mathbf{L}_h)$ és $M_h := \lambda_{\max}(\mathbf{L}_h)$, azaz

$$m_h\,|\mathbf{c}|^2 \leq \mathbf{L}_h\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \leq M_h\,|\mathbf{c}|^2 \qquad (\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N).$$

A mátrix kondíciószáma $\kappa(\mathbf{L}_h) = \frac{M_h}{m_h}$, a KGM konvergenciahányadosa $q(\mathbf{L}_h) = \frac{\sqrt{\kappa(\mathbf{L}_h)}-1}{\sqrt{\kappa(\mathbf{L}_h)}+1}$, lásd (16.15).

19.9. Állítás. [5] *Az L operátorból származtatott* $\mathbf{L}_h$ *mátrixra* $\kappa(\mathbf{L}_h) = \mathcal{O}(h^{-2}) \to \infty$*, ha* $h \to 0$.

Ebből következik, hogy a KGM konvergenciahányadosa 1-hez tart, ha a felosztást finomítjuk, ami azt jelenti, hogy adott pontosság eléréséhez egyre többet kellene iterálni.

Ez a probléma megoldható prekondicionálással: legyen $\mathbf{S}_h$ olyan pozitív definit mátrix, amelyre

$$\widehat{m}_h\,(\mathbf{S}_h\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \leq (\mathbf{L}_h\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \leq \widehat{M}_h\,(\mathbf{S}_h\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) \qquad (\forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^N) \tag{19.31}$$

és teljesíti az alábbi két követelményt:

(i) $\mathbf{S}_h$ egyszerűbb szerkezetű legyen, mint $\mathbf{L}_h$, vagyis az $\mathbf{S}_h$-val felírt rendszerek egyszerűbben megoldhatók legyenek, mint $\mathbf{L}_h$-val;

(ii) $\dfrac{\widehat{M}_h}{\widehat{m}_h} \ll \dfrac{M_h}{m_h}$.

Tekintsük az eredeti rendszer helyett az alábbi prekondicionált rendszert:

$$\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{f}}_h \tag{19.32}$$

(ahol $\tilde{\mathbf{f}}_h = \mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{f}$), és erre alkalmazzuk a KGM (16.11)-(16.12) algoritmusát a $\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle_{\mathbf{S}_h} := \mathbf{S}_h\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}$ skalárszorzatra nézve. Az iterációban ekkor lépésenként az $\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h$ mátrix szerepel, ami valójában azt jelenti, hogy $\mathbf{S}_h\mathbf{z}_n = \mathbf{L}_h\mathbf{w}_n$ típusú segédrendszereket kell megoldani, ez pedig a feltétel szerint egyszerűbb az eredetinél. A prekondicionált KGM konvergenciahányadosa

$$q(\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h) = \frac{\sqrt{\kappa(\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h)}-1}{\sqrt{\kappa(\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h)}+1} = \frac{\sqrt{\widehat{M}_h}-\sqrt{\widehat{m}_h}}{\sqrt{\widehat{M}_h}+\sqrt{\widehat{m}_h}},$$

(lásd 16.2.3. szakasz), ahol a kondíciószám $\kappa(\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h) = \frac{\widehat{M}_h}{\widehat{m}_h}$. A cél tehát az, hogy ez a kondíciószám lényegesen jobb legyen az eredetinél. Megmutatjuk a 19.1.2. szakasz alapján, hogy alkalmas operátor segítségével $\kappa(\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h)$ korlátos marad, ha $h \to 0$.

Válasszuk az $S := -\Delta$ segédoperátort, és legyen $\mathbf{S}_h$ ennek merevségi mátrixa ugyanazon végeselemes diszkretizáció szerint, azaz

$$(\mathbf{S}_h)_{ij} = \int_\Omega \nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_j \qquad (i,j=1,\dots,N). \tag{19.33}$$

Ilyen mátrixú egyenletek megoldására ismeretesek egyszerűbb módszerek, mint az eredetiére, felhasználva, hogy az S operátor állandó együtthatós: például Fourier-módszer (FFT) vagy FACR típusú párhuzamosítható direkt módszerek [61, 69]. Így az (i) feltétel teljesül, nézzük (ii)-t.

19.10. Állítás. *Legyenek $\widehat{m}_h$ és $\widehat{M}_h$ a (19.33)-beli $\mathbf{S}_h$ mátrixhoz tartozó (19.31)-beli éles határok. Ekkor*

$$m \le \widehat{m}_h \quad \textit{és} \quad \widehat{M}_h \le M,$$

ahol $m := \min p$ és $M := \max p$ függetlenek V_h-tól.

Bizonyítás. Legyen $H := L^2(\Omega)$, $D := H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Elég megmutatnunk, hogy

$$m\langle Su,u\rangle_{L^2} \le \langle Lu,u\rangle_{L^2} \le M\langle Su,u\rangle_{L^2} \qquad (u\in D). \tag{19.34}$$

Ekkor ugyanis a 19.1. állítás szerint

$$m\,|\mathbf{c}|^2_{\mathbf{S}_h} \le \langle \mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c},\mathbf{c}\rangle_{\mathbf{S}_h} \le M\,|\mathbf{c}|^2_{\mathbf{S}_h} \qquad (\forall \mathbf{c}\in\mathbb{R}^N),$$

ami ekvivalens azzal, hogy (19.31) teljesül m és M határokkal is, és ez az, amit igazolni akartunk.

Legyen tehát $u \in D$. Ekkor a Green-formulából

$$\int_\Omega (Lu)u = \int_\Omega p\,|\nabla u|^2\,, \qquad \int_\Omega (Su)u = \int_\Omega |\nabla u|^2\,.$$

Mivel $m \le p(x) \le M$ miatt

$$m\int_\Omega |\nabla u|^2 \le \int_\Omega p\,|\nabla u|^2 \le M\int_\Omega |\nabla u|^2\,,$$

épp azt kapjuk, hogy (19.34) teljesül. □

19.11. Következmény. *Ekkor* $\kappa(\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h) = \dfrac{\widehat{M}_h}{\widehat{m}_h} \le \dfrac{M}{m}$ $(\forall h>0)$, *és ennek megfelelően a prekondicionált KGM-re az*

$$\frac{\|e_n\|_{\mathbf{L}_h}}{\|e_0\|_{\mathbf{L}_h}} \le 2\left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^n \qquad (n=1,2,\ldots,N)$$

V_h-tól független becslést kapjuk.

Ez azt jelenti, hogy egy előre megadott pontossághoz szükséges iterációs lépések száma korlátos marad, ha a rácsot finomítjuk. Speciálisan, ha az $\mathbf{S}_h\mathbf{z}_n = \mathbf{L}_h\mathbf{w}_n$ típusú $N\times N$-es segédrendszereket $O(N)$ optimális műveletigénnyel oldjuk meg, akkor az iterációt is figyelembe vevő teljes műveletigény is az optimális $O(N)$.

2. példa: feladat nem szimmetrikus operátorral.

Tekintsük a következő feladatot, amely konvekció-diffúziós állapotot ír le:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\operatorname{div}(p\,\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{19.35}$$

ahol teljesülnek a 10.2.2. feltételek, azaz $p\in L^\infty(\Omega)$, $p(x)\ge m>0$ (m. m. $x\in\Omega$), $\mathbf{b}\in C^1(\overline{\Omega})^n$, $\operatorname{div}\mathbf{b}=0$, valamint $f\in L^2(\Omega)$. A 10.17. tétel szerint ennek egyértelműen létezik $u^*\in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása. A megoldást az előző példához hasonló módon közelítjük, így főleg csak a különbségeket hangsúlyozzuk.

Legyen először ismét $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ véges dimenziós altér $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ bázissal. Az $\mathbf{L}_h\mathbf{c} = \mathbf{f}_h$ egyenletrendszerben most

$$(\mathbf{L}_h)_{ij} = \int_\Omega \Big(p\,\nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i + (\mathbf{b}\cdot\nabla\varphi_j)\,\varphi_i\Big), \quad (\mathbf{f}_h)_i = \int_\Omega f\varphi_i \quad (i,j = 1,\ldots,N).$$

Mivel most az egyenletrendszer nem szimmetrikus, a 16.3. szakaszban ismertetett KGN-módszert (pontosabban, annak prekondicionált változatát) alkalmazzuk. Legyen az $\mathbf{S}_h$ prekondicionáló mátrix ismét az $S := -\Delta$ segédoperátor merevségi mátrixa, azaz (19.33). Megmutatjuk, hogy a konvergenciahányados most is korlátos marad, ha $h \to 0$.

19.12. Állítás. *A fenti feltételek mellett a KGN algoritmust az $\mathbf{S}_h^{-1}\mathbf{L}_h\,\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{f}}_h$ rendszerre alkalmazva*

$$\frac{\|r_k\|_{\mathbf{S}_h}}{\|r_0\|_{\mathbf{S}_h}} \le 2\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n \qquad (n = 1, 2, ..., N), \tag{19.36}$$

ahol $m := \min p$ és $M := \|p\|_{L^\infty} + \lambda_1^{-1/2}\|\mathbf{b}\|_{L^\infty}$ (ahol λ_1 a $-\Delta$ operátor első sajátértéke), azaz m és M függetlenek V_h-tól.

Bizonyítás. A 19.4. következmény szerint elég megmutatnunk, hogy fennáll (19.8) a $H_S = H_0^1(\Omega)$ térben a fenti m és M konstansokkal. Ez pedig a 10.17. tétel bizonyításából következik, mivel az ottani $B(u,v)$ bilineáris forma azonos a fenti L operátorhoz tartozó $\langle L_S u, v\rangle_S$ bilineáris formával. □

Megjegyezzük, hogy ha λ_1-re a (8.11) becslést használjuk, akkor a konvergenciahányados felső becslése is egyszerűen kiszámítható.

19.4.2. Stokes-feladat

Tekintsük a (10.17) Stokes-feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0\,, \end{cases} \tag{19.37}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ vagy 3) korlátos tartomány, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ adott vektor. A 10.21. tétel szerint ennek egyértelműen létezik $(u^*, p^*) \in H_0^1(\Omega)^d \times \dot{L}^2(\Omega)$ gyenge megoldása.

A Stokes-feladatot megfelelő végeselemes diszkretizációval, majd az Uzawa-algoritmus alkalmazásával oldjuk meg, a 19.2. szakasz alapján pedig igazoljuk, hogy rácsfüggetlen konvergenciabecslést kapunk.

Először megmutatjuk, hogy a (19.37) feladat speciális esete (19.14)-nek. Legyenek $H := L^2(\Omega)^d$ és $K := \dot{L}^2(\Omega)$ valós Hilbert-terek,

$$S := (-\Delta, \cdots, -\Delta) : L^2(\Omega)^d \supset\!\!\to L^2(\Omega)^d, \qquad N := \nabla : \dot{L}^2(\Omega) \supset\!\!\to L^2(\Omega)^d,$$

ahol $D(S) := (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^d$ és $D(N) := H^1(\Omega) \cap \dot{L}^2(\Omega)$. Ezek sűrűn definiált operátorok, S szimmetrikus és egyenletesen pozitív, és $H_S = H_0^1(\Omega)^d$. Emellett a Gauss-Osztrogradszkij-tételből

$$\int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{u} = -\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u}) \qquad (p \in H^1(\Omega),\ \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d),$$

így $N^*\mathbf{u} = -\operatorname{div}\mathbf{u}$ $(\forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^d)$, és teljesül $D(N^*) \supset H_S = H_0^1(\Omega)^d$. Végül érvényes a (19.15) inf-sup-feltétel is a 10.20. állítás alapján.

A végeselemes diszkretizációhoz olyan $V_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ és $P_h \subset \dot{L}^2(\Omega)$ véges dimenziós altereket kell választanunk, melyek teljesítik a (19.18) LBB-feltételt, azaz van olyan $\gamma_0 > 0$ h-tól független állandó, hogy

$$\inf_{p \in P_h \setminus \{0\}} \sup_{u \in V_h \setminus \{0\}} \frac{-\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u})}{\|p\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} \geq \gamma_0. \tag{19.38}$$

Mint láttuk, ez nem feltétlenül öröklődik az eredeti inf-sup-feltételből: csak speciális, megfelelően egymáshoz választott (V_h, P_h) párok esetén teljesül. Ilyen, ún. stabil térpárok konstrukciója található pl. [69, III. 17.5.4]-ben.

Írjuk fel most a (19.20) Uzawa-algoritmust a diszkretizált Stokes-feladatra. Legyenek $u_0 \in V_h$, $p_0 \in P_h$ tetszőlegesek és $\alpha > 0$ adott szám. Ha megvan $u_n \in V_h$ és $p_n \in P_h$, akkor u_{n+1} és p_{n+1} rendre az alábbi diszkrét feladatok megoldása:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} - \int_\Omega p_n\,(\operatorname{div}\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \qquad (\forall \mathbf{v} \in V_h),\\ &\int_\Omega p_{n+1}\, q = \int_\Omega p_n\, q - \alpha \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{u}_{n+1})\, q \qquad (\forall q \in P_h). \end{aligned} \tag{19.39}$$

Ez nem más, mint a

$$-\Delta \mathbf{u}_{n+1} + \nabla p_n = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{u}_{n+1\,|\partial\Omega} = 0$$
$$\text{és} \qquad p_{n+1} = p_n - \alpha \operatorname{div}\mathbf{u}_{n+1}$$

feladatok V_h- ill. P_h-beli végeselemes megoldása.

19.13. Tétel. *Ha teljesül a (19.38) LBB-feltétel, akkor $0 < \alpha < 2$ esetén a (19.39) iteráció lineárisan konvergál, vagyis alkalmas $c_1, c_2 > 0$ és $q < 1$ mellett*

$$\|u_n - u^*\|_{H_0^1} \leq c_1 q^n, \qquad \|p_n - p^*\|_{L^2} \leq c_2 q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Itt az optimális paraméter és hozzátartozó konvergenciahányados rendre $\alpha_{opt} = \frac{2}{1+\gamma_0^2}$ *és* $q = \frac{1-\gamma_0^2}{1+\gamma_0^2}$, *ezek függetlenek* V_h*-tól és* P_h*-tól.*

Bizonyítás. A fenti eredményeket a 19.6. következmény mondja ki, ha megmutatjuk, hogy $\beta = 1$. Itt

$$\beta := \sup_{\substack{p \in \dot{L}^2(\Omega)\setminus\{0\} \\ v \in H_0^1(\Omega)^d \setminus\{0\}}} \frac{|\langle p, N^*\mathbf{v}\rangle|}{\|p\|_{L^2}\|\mathbf{v}\|_{H_0^1}} = \sup_{\substack{p \in \dot{L}^2(\Omega)\setminus\{0\} \\ v \in H_0^1(\Omega)^d \setminus\{0\}}} \frac{-\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u})}{\|p\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}},$$

valamint $|\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u})| \le \|p\|_{L^2}\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^2}$. A 10.21. tétel bizonyításában láttuk, hogy $\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^2}$ elemien becsülhető $\sqrt{d}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$-val, de itt a $\sqrt{d}$ szorzó alkalmas számolással 1-re javítható, lásd pl. [51]. Így $|\int_\Omega p\,(\operatorname{div}\mathbf{u})| \le \|p\|_{L^2}\|\mathbf{u}\|_{H_0^1}$, amit a fenti sup-ba beírva megkapjuk, hogy $\beta = 1$. □

19.4.3. Nemlineáris peremértékfeladatok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos síkbeli tartomány, és tekintsük a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\,\nabla u) + s(x,u) = g, \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{19.40}$$

feladatot az alábbi feltételekkel:

(i) $a \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \ge m > 0$ (m. m. $x \in \Omega$);

(ii) $s \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, valamint $\partial_\xi s(x,\xi) := \frac{\partial s(x,\xi)}{\partial \xi}$ monoton növő és korlátos, éspedig létezik olyan $\alpha \ge 0$ állandó, hogy

$$0 \le \partial_\xi s(x,\xi) \le \alpha \qquad (\forall x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}); \tag{19.41}$$

(iii) $\partial_\xi s$ Lipschitz-folytonos ξ-ben, éspedig létezik olyan $L_s \ge 0$ állandó, hogy

$$|\partial_\xi s(x,\xi_1) - \partial_\xi s(x,\xi_2)| \le L_s|\xi_1 - \xi_2| \qquad (\forall x \in \Omega,\ \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R}); \tag{19.42}$$

(iv) $g \in L^2(\Omega)$.

Ez a feladat speciális esete (13.14)-nek, így a 13.13. tétel szerint egyértelműen létezik $u^* \in H_0^1(\Omega)$ gyenge megoldása, azaz, bevezetve az

$$\langle A(u), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (a\,\nabla u \cdot \nabla v + s(x,u)v) \qquad (\forall u, v \in H_0^1(\Omega))$$

operátort,

$$\langle A(u^*), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega gv \qquad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

A 19.3. szakaszt követve először végeselemes diszkretizációt alkalmazunk, majd a kapott nemlineáris algebrai egyenletrendszerre a Newton-módszert használjuk. Igazolni fogjuk a Newton-módszer kvadratikus konvergenciájának rácsfüggetlenségét.

Legyen $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ véges dimenziós altér $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ bázissal. Az $u_h \in V_h$ közelítő megoldást úgy keressük, hogy teljesüljön az

$$\langle A(u_h), v\rangle_{H_0^1} = \langle b, v\rangle_{H_0^1} := \int_\Omega gv \qquad (\forall v \in V_h)$$

vetületi egyenlet, azaz

$$\int_\Omega (a\,\nabla u_h \cdot \nabla v + s(x, u_h)v) = \int_\Omega gv \qquad (\forall v \in V_h).$$

Legyen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ adott, u_0^h ennek vetülete V_h-ra. Írjuk fel (19.25) alapján ezzel a kezdővektorral a fenti feladatra vonatkozó Newton-iterációt:

$$\begin{cases} u_{n+1} := u_n + p_n\,, \quad \text{ahol} \\ \langle A_h'(u_n)p_n, v\rangle_{H_0^1} = -\langle (A_h(u_n) - b_h), v\rangle_{H_0^1} \qquad (\forall v \in V_h). \end{cases} \tag{19.43}$$

Itt (a 11.2.1 szakasz példájához hasonlóan) A Gâteaux-deriválható és

$$\langle A'(u)v, z\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (a\,\nabla v \cdot \nabla z + \partial_\xi s(x, u)\, vz) \qquad (\forall u, v, z \in H_0^1(\Omega)), \tag{19.44}$$

továbbá a 19.3. szakasz szerint A_h és A_h' definícióját úgy kapjuk a fentiekből, ha $H_0^1(\Omega)$ helyett V_h-t írunk. Így a (19.43)-beli linearizált egyenlet, amit meg kell oldanunk az n. lépésben,

$$\int_\Omega (a\,\nabla p_n \cdot \nabla v + \partial_\xi s(x, u_n)\, p_n v) =$$

$$= -\int_\Omega (a\,\nabla u_n \cdot \nabla v + s(x, u_n)v - gv) \qquad (\forall v \in V_h).$$

Ez nem más, mint a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\,\nabla p_n) + \partial_\xi s(x, u_n)\, p_n = \operatorname{div}(a\,\nabla u_n) - s(x, u_n) + g, \\ p_{n\,|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

lineáris elliptikus feladat végeselemes megoldása a V_h altérben.

19.14. Tétel. *Teljesüljenek a* (19.40) *feladatra adott feltételek, és legyen*

$$m := \min a, \qquad L := \frac{L_s}{\sqrt{2}}\Big(\frac{diam(\Omega)}{\pi}\Big)^2,$$

ahol L_s *a* $\partial_\xi s$ *függvény* (19.42)*-beli Lipschitz-konstansa és* $diam(\Omega)$ *a tartomány átmérője. Ekkor*

(1) $\|A_h(u_{n+1}) - b_h\|_{H_0^1} \le \dfrac{L}{2m^2}\, \|A_h(u_n) - b_h\|^2_{H_0^1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$

(2) Ha u_0 *olyan, hogy*

$$q := \frac{L}{2m^2}\Big(\|A(0) - b\|_{H_0^1} + M\,\|u_0\|_{H_0^1}\Big) < 1, \tag{19.45}$$

akkor

$$m\|u_n - u^*\|_{H_0^1} \le \|A_h(u_n) - b_h\|_{H_0^1} \le \frac{2m^2}{L} q^{2^n} \to 0. \tag{19.46}$$

Mindkét becslés állandói V_h*-tól függetlenek.*

Bizonyítás. A 19.7. tételt szeretnénk használni, ehhez teljesülni kell a 19.3. feltételeknek. Itt A Gâteaux-deriválható és A' bihemifolytonos, ami a 11.2. szakasz példáival teljesen analóg módon jön ki, emellett A'-re (19.44) teljesül, amiből $A'(u)$ önadjungáltsága is látszik. Itt

$$\langle A'(u)h, h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \big(a\,|\nabla h|^2 + \partial_\xi s(x,u)\,h^2\big) \qquad (\forall u, v, z \in H_0^1(\Omega)),$$

így a feltevések miatt

$$\begin{aligned} m\,\|h\|^2_{H_0^1} = m\int_\Omega |\nabla h|^2 \le \int_\Omega a\,|\nabla h|^2 \le \langle A'(u)h, h\rangle_{H_0^1} \le \\ \le \int_\Omega \big(\|a\|_\infty\,|\nabla h|^2 + \alpha h^2\big) = \\ = \|a\|_\infty\,\|h\|^2_{H_0^1} + \alpha\,\|h\|^2_{L^2} \le \Big(\|a\|_\infty + \frac{\alpha}{\lambda_1}\Big)\,\|h\|^2_{H_0^1} =: M\,\|h\|^2_{H_0^1}, \end{aligned}$$

ahol a (8.10) Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenséget használtuk. Végül igazoljuk, hogy A' Lipschitz-folytonos. Itt

$$|\langle (A'(u) - A'(v))z, z\rangle| = \left|\int_\Omega \big(\partial_\xi s(x,u) - \partial_\xi s(x,v)\big)\,z^2\right| \tag{19.47}$$

$$\le L_s \int_\Omega |u - v|\,z^2 \le L_s\|u - v\|_{L^2(\Omega)}\|z\|^2_{L^4(\Omega)},$$

ahol az általános Hölder-egyenlőtlenséget használtuk az $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ felbontásra. A z függvény valóban $L^4(\Omega)$-beli, felhasználva a (13.18) Szoboljev-féle beágyazási tételt a $p=4$ esetre:

$$H_0^1(\Omega)\subset L^4(\Omega), \qquad \|v\|_{L^4}\le K_4\|v\|_{H_0^1} \quad (v\in H_0^1(\Omega)). \tag{19.48}$$

Ezt és ismét a (8.10) Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenséget használva

$$|\langle (A'(u)-A'(v))z,z\rangle| \le \tfrac{L_s K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|u-v\|_{H_0^1}\|z\|_{H_0^1}^2,$$

így

$$\|A'(u)-A'(v)\| = \sup_{\|z\|_{H_0^1}=1} |\langle (A'(u)-A'(v))\,z,z\rangle| \le \tfrac{L_s K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}\|u-v\|_{H_0^1},$$

tehát A' Lipschitz-folytonos $L:=\frac{L_s K_4^2}{\sqrt{\lambda_1}}$ konstanssal. A K_4 beágyazási konstansra

$$K_4^2\le\sqrt{\tfrac{2}{\lambda_1}}$$

(lásd pl. [23, Chap. 11]), így, felhasználva a (8.11) becslést is,

$$L\le \tfrac{L_s\sqrt{2}}{\lambda_1}\le \tfrac{L_s}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{diam(\Omega)}{\pi}\right)^2.$$

Így tehát ez a kiszámítható Lipschitz-konstans vehető az iterációban, és ekkor a 19.7. tétel szerint fennállnak a (19.45)–(19.46) becslések. □

19.15. Megjegyzés. (i) Az itt használt eredeti Newton-iteráció csak lokálisan konvergál. Ennek kiküszöbölésére használható a 18.11. tételbeli csillapított Newton-módszer, amely az első lépésekben lineárisan, majd lokálisan kvadratikusan konvergál. Az utóbbi lokális szakasz kvadratikus becslésére a fenti eredmény értelemszerű adaptációja érvényes.

Ha a 18.12. tételbeli csillapított inegzakt Newton-módszert használjuk, és a 18.4. szakasz alapján a segédegyenletek közelítő megoldására belső konjugált gradiens-iterációt alkalmazunk, akkor az ottani eredmény szerint a belső iteráció konvergenciája is rácsfüggetlenül becsülhető.

(ii) A 19.14. tétel általánosítható arra az esetre, ha a (19.40) feladat feltételeiben a (19.41) korlátosság helyett $\partial_\xi s$ hatványrendű növekedését is megengedjük, és a (19.42) feltételben csak lokális Lipschitz-folytonosságot írunk elő szintén hatványrendben növekedő Lipschitz-konstanssal. Ekkor A' is csak lokálisan Lipschitz-folytonos lesz, ekkor a 18.6 (ill. csillapított/inegzakt Newton-módszer esetén a 18.13) megjegyzés alapján módosított konvergenciatételt használjuk, lásd [23, sec. 5.2].

Irodalomjegyzék

[1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] Antal I., Karátson J., A mesh independent superlinear algorithm for some nonlinear nonsymmetric elliptic systems, *Comput. Math. Appl.* 55 (2008), 2185-2196.

[3] Atkinson, K., Han, W., *Theoretical numerical analysis. A functional analysis framework*, Texts in Applied Mathematics, 39, Springer-Verlag, New York, 2001.

[4] Axelsson, O., *Iterative Solution Methods,* Cambridge University Press, 1994.

[5] Axelsson, O., Barker, V.A., *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*, Academic Press, 1984.

[6] Axelsson, O., Karátson J., Equivalent operator preconditioning for elliptic problems, *Numer. Algor.* (2009) 50:297–380.

[7] Babuška, I., Error bound for the finite element method, *Numer. Math.* 16 (1971), pp. 322-333.

[8] Bachman, G., Narici, L., *Functional Analysis*, Dover, 2000.

[9] Bernau, S. J., Smithies, F. A note on normal operators, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 59 (1963), pp. 727–729.

[10] Brézis, H., *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[11] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *Rev. Franc. Automat. Inform. Rech. Operat.* 8, R-2, 129-151 (1974).

[12] Czách L., A leggyorsabb ereszkedés módszere elliptikus parciális differenciálegyenletekre (oroszul), kandidátusi értekezés, Leningrád, 1955.

[13] CZÁCH L., *Lineáris operátorok elmélete*, egyetemi jegyzet.

[14] CIARLET, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems,* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[15] COLLATZ, L., *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, Academic Press, N.Y., 1966.

[16] CONWAY, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1990.

[17] CRYER, C. W., *Numerical functional analysis*, Oxford University Press, New York, 1982.

[18] DANIEL, J.W., The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **4** (1967), 10-26.

[19] DEIMLING, K., *Nonlinear functional analysis,* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[20] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. T., *Linear operators,* I–III., Reprint of the original, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[21] ELMAN, H. C., SILVESTER, D. J., WATHEN, A. J., *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics,* Oxford University Press, New York, 2005.

[22] ENGEL, K.-J., NAGEL, R., *A short course on operator semigroups,* Springer, New York, 2006.

[23] FARAGÓ, I., KARÁTSON, J., *Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problems via Preconditioning Operators. Theory and Applications.* Advances in Computation, Vol. 11, NOVA Science Publishers, New York, 2002.

[24] FRIED E., *Klasszikus és lineáris algebra,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[25] GAJEWSKI, H., GRÖGER, K., ZACHARIAS, K., *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen,* Akademie-Verlag, Berlin, 1974

[26] GALÁNTAI A., The theory of Newton's method, *J. Comput. Appl. Math.* 124 (2000), no. 1-2, 25–44.

[27] GRUBER T., *Analízis VIII. (Funkcionálanalízis)*, ELTE jegyzet, 1997.

[28] Hofmann, B., *Regularization for Applied Inverse and Ill-Posed Problems: a Numerical Approach*, Teubner-Texte zur Mathematik, 85, Leipzig, 1986.

[29] Jankó B., *Rezolvarea Ecuatiilor Operationale Neliniare in Spatii Banach*, Bucuresti, Editura Academiei RSR, 1969.

[30] Jankó B., *Nemlineáris operátoregyenletek numerikus megoldása*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[31] Kachanov, L.M., *Foundations of the Theory of Plasticity,* North-Holland, 1971.

[32] Kantorovich, L.V., Funkconálanalízis és alkalmazott matematika (oroszul), *Uszpehi Mat. Nauk* 3 (1948), no. 6(28), 89–185.

[33] Kantorovich, L.V., Akilov, G.P., *Functional Analysis,* Pergamon Press, 1982.

[34] Karátson J., Numerical preconditioning methods for elliptic PDEs, in J.W. Neuberger: *Sobolev Gradients and Differential Equations*, 2nd Edition, Lecture Notes Math. 1670, pp. 245-258; Springer, 2010.

[35] Karátson J., Faragó I., Variable preconditioning via quasi-Newton methods for nonlinear problems in Hilbert space, *SIAM J. Numer. Anal.* **41** (2003), No. 4, 1242-1262.

[36] Kérchy L., Valós- és funkcionálanalízis, Polygon, Szeged, 2008.

[37] Kolmogorov, A. N., Fomin, Sz. V., *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, 1981.

[38] Komornik Vilmos, *Valós analízis előadások I.–II.*, Typotex, 2003.

[39] Kristóf János, *Az analízis elemei I.–IV.*, ELTE jegyzet, 1994-98.

[40] Křížek, M., Neittaanmäki, P., *Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[41] Křížek, M., Neittaanmäki, P., On the validity of Friedrichs' inequalities, *Math. Scand.* 54 (1984), no. 1, 17–26.

[42] Lax, P. D., *Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 2002.

[43] Losonczi L., *Funkcionálanalízis I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[44] MATOLCSI M., Neumann János szerepe a Hilbert-terek elméletének megalapozásában, *Matematikai Lapok*, 11 (2002/03), no. 2, 26-35 (2006).

[45] MIKOLÁS M., *Valós függvénytan és ortogonális sorok,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[46] MEURANT, G., *The Lanczos and Conjugate Gradient Algorithms: from Theory to Finite Precision Computations*, SIAM, Philadelphia, 2006.

[47] MOORE, R. E., *Computational functional analysis,* Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], New York, 1985.

[48] NEČAS, J., *Equations aux dérivées partielles,* Presse de l'Université de Montréal, Canada, 1965.

[49] NEUBERGER, J. W., *Sobolev Gradients and Differential Equations*, Lecture Notes in Math., No. 1670, Springer, 1997.

[50] NEUMANN J., *A kvantummechanika matematikai alapjai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980. (Eredeti: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1932.)

[51] NOCHETTO, R. H., PYO, J.-H., Optimal relaxation parameter for the Uzawa method, *Numer. Math.* 98 (2004), no. 4, 695–702.

[52] ORTEGA, J.M., RHEINBOLDT, W.C., *Iterative Solutions for Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, 1970.

[53] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1983.

[54] PETZ D., *Lineáris analízis*, Akadémiai kiadó, 2002.

[55] PLASTOCK, R., Homeomorphisms between Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 200 (1974), 169–183.

[56] QUARTERONI, A., VALLI, A., *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations,* Oxford University Press, New York, 1999.

[57] RALL, L. B., *Computational solution of nonlinear operator equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[58] REDDY, J. N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1986.

[59] RIESZ F., SZŐKEFALVI-NAGY B., *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[60] Reed, M., Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics, I. Functional Analysis,* Academic Press, New York-London, 1972.

[61] Rossi, T., Toivanen, J., A parallel fast direct solver for block tridiagonal systems with separable matrices of arbitrary dimension, *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1999), no. 5, 1778–1796.

[62] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.

[63] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.

[64] Saranen, J., On an inequality of Friedrichs, *Math. Scand.* 51 (1982), no. 2, 310–322.

[65] Schrödinger, E., Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinem, *Annalen der Physik* 384 (1926), No. 8, pp. 734–756.

[66] Swartz, C., *Elementary Functional Analysis,* World Scientific Publishing Co., 2009.

[67] Simon L., Baderko, E., *Másodrendű parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[68] Tóth J., Simon L. P., *Differenciálegyenletek. Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba*, Typotex, 2005.

[69] Stoyan G., Takó G., *Numerikus módszerek*, I–III, Typotex, 1997.

[70] Szőkefalvi-Nagy B., *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[71] Thomée V., *Finite Difference Methods for Linear Parabolic Equations*, Elsevier, North-Holland, 1990.

[72] Thomée, V., *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer, Berlin, 1997.

[73] Winther, R., Some superlinear convergence results for the conjugate gradient method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 17 (1980), 14-17.

[74] Wouk, A., *A course of applied functional analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1979.

[75] Yosida, K., *Functional analysis*, Sixth edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 123, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[76] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, I–IV., Springer-Verlag, New York, 1988.