DISZKRÉT OPTIMALIZÁLÁS

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Frank András és Jordán Tibor

DISZKRÉT OPTIMALIZÁLÁS

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2013

Lektorálta: Dr. Schlotter Ildikó

ISBN 978 963 279 231 6
Készült a Typotex Kiadó (http://www.typotex.hu) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gindilla Orsolya

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: Algoritmus, gráf, matroid, kombinatorika, optimalizálás, hálózati folyam, áram, párosítás, lineáris programozás, poliéder, merev szerkezet.

ÖSSZEFOGLALÁS: A jegyzet a diszkrét optimalizálás alapvető fogalmait, problémáit és algoritmikus módszereit tekinti át. Négy fejezetben tárgyalja az optimalizálási feladatokat gráfokon, az optimalizálási feladatokat matroidokon, a poliéderes kombinatorika eszköztárát, valamint kitér a merev gráfok és szerkezetek vizsgálatára is. Bemutatja a klasszikus feladatokra – gráfok párosításai, hálózati folyamok, diszjunkt utak, gráfok irányításai, legrövidebb utak, matroidok összege és metszete stb. – kidolgozott hatékony algoritmusokat és az ezekhez elvezető strukturális eredményeket. A jegyzet az ELTE TTK mesterszakos matematikus és alkalmazott matematikus hallgatói számára tartott hasonló nevű kurzus anyagának kibővített változata.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Optimalizálás gráfokon

1.1. Bevezetés

E munka célja, hogy a diszkrét optimalizálás néhány alapvető megközelítését, eredményét, fogalmát, algoritmusát és alkalmazását bemutassa. A jegyzet az ELTE TTK matematikus és alkalmazott matematikus mesterképzésében szereplő Diszkrét Optimalizálás című kurzus kibővített anyaga. Ebből adódóan építünk az alapképzésben megszerzett ilyen irányú ismeretekre.

Megismerkedünk a gráfelmélet, a matroidelmélet és a poliéderes kombinatorika alapeszközeivel. Mindhárom tárgykörből (hasonló címekkel) további jegyzetek állnak rendelkezésre, amelyek az egyes témakörök mélyebb és részletesebb kifejtését tartalmazzák. Idetartozik még a Kombinatorikus optimalizálási struktúrák című jegyzet is.

Az ebben a jegyzetben szereplő anyag támaszkodik a gráfelmélet és a lineáris programozás alapfogalmaira és fontosabb eredményeire, melyek megtalálhatók az Operációkutatás című jegyzetben. Például olyan, utakkal és folyamokkal kapcsolatos alaperedmények, mint Dijkstra legrövidebb út algoritmusa, a magyar módszer vagy a maximális folyamra vonatkozó javítóutas algoritmus ott találhatók meg, hasonlóan a Farkas-lemmához vagy a dualitástételhez.

A jegyzetben szereplő alapfogalmak definícióit, a legfontosabb jelöléseket, valamint néhány egyszerű megfigyelést a Függelékben gyűjtöttük össze.

1.2. Algoritmikus bizonyítások I: a mohó megközelítés

Ebben a fejezetben áttekintünk néhány standard bizonyítási technikát, és segítségükkel belátjuk a gráfelméletnek a diszkrét optimalizálás szempontjából legfontosabb alaperedményeit is, melyek nagyobb része a korábbi tanulmányok során már szerepelt.

Egy tipikus gráfelméleti eredmény valamilyen előírt tulajdonságú részgráf (teljes párosítás, Hamilton-kör, k súlyú feszítő fa) létezését állítja megfelelő feltételek fennállása esetén. A bizonyítások egy része csupán egzisztencia bizonyítás. Számunkra különösen értékesek az olyan konstruktív, algoritmikus bizonyítások, amelyek hatékony algoritmust eredményeznek a szóbanforgó részstruktúra megkeresésére. Ebben és a következő részben egy-egy tipikus algoritmikus elvet tárgyalunk.

Ha egy matematikai állítást be akarunk bizonyítani, természetes első próbálkozás „toronyiránt" elindulni, bár többnyire a mohó megközelítés nem segít. Például Kőnig tételét (miszerint *páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával)* nem tudjuk úgy bizonyítani, hogy egymás után választunk független éleket, mert így egy olyan, tovább már nem bővíthető párosításhoz juthatunk, amely nem maximális elemszámú. (Ezért van szükség az 1.3.1 tétel bizonyításában a javítóutas megközelítésre, amikor egy közbenső párosításnak esetleg nagymérvű átalakításával tudunk csak nagyobb párosításhoz jutni.) Vannak esetek azonban, amikor a mohó hozzáállás eredményes. Ezek közül a legismertebb Kruskal eljárása minimális vagy maximális súlyú feszítő fa megkeresésére.

1.2.1. Legolcsóbb feszítő fák

A gráfokon tekintett optimalizálási feladatok közül az egyik legkorábban vizsgált egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf minimális költségű feszítő fájának megkeresését célozza, adott élköltségek mellett. Ez egyfajta mohó algoritmussal történik, ami valami olyasfélét akar kifejezni, hogy az algoritmus során mindig a lokálisan legjobbat választjuk. A fákra vonatkozó mohó algoritmusnak számos változata ismert, az alábbiakban ezek egységes leírását adjuk meg. Jelölje $c : E \to \mathbf{R}$ a költségfüggvényt. A következő lemma a fák egy fontos kicserélési tulajdonságát írja le.

1.2.1. Lemma. *Jelölje T_1 és T_2 két V-t feszítő fa élhalmazát. Ekkor bármely $e \in T_1$ élhez van olyan $f \in T_2$ él, amelyre mind $T_1 - e + f$, mind $T_2 - f + e$ feszítő fa.*

Bizonyítás. Ha $e \in T_2$, akkor $f := e$ jó lesz. Tegyük fel, hogy $e = st \notin T_2$. $T_1 - e$-nek két komponense van, K_1 és K_2. T_2-ben van egy egyértelmű P út, amely összeköti az s és t pontokat. Legyen f a P útnak egy olyan éle, amely K_1 és K_2 között vezet. Ezen f él kielégíti a lemma kívánalmait. $\square$

Legyen T a $G = (V, E)$ egy feszítő fája. Az $e \in T$ élhez tartozó **alapvágás**on a G azon vágását értjük, amelyet $T - e$ két komponense határoz meg. Egy $f = uv \in E - T$ élhez tartozó **alapkör**ön azt a kört értjük, amely az f élből és az u és v pontokat a T fában összekötő egyértelmű útnak az éleiből áll. A 1.2.1 lemma bizonyításából rögtön következik:

1.2.2. Tétel. *A G gráf valamely T feszítő fájára az alábbiak ekvivalensek:*
(a) T minimális költségű,
(b) $c(e) \leq c(f)$ fennáll minden $e \in T$ élre, ahol f az e alapvágásának egy eleme,
(c) $c(e) \geq c(f)$ fennáll minden $e \notin T$ élre, ahol f az e alapkörének egy eleme.

MOHÓ ALGORITMUS [Boruvka, 1926], [Kruskal, 1956] *Az eljárás egy feszítő erdőt épít élek egyenkénti hozzávételével. A V ponthalmazú, élt nem tartalmazó erdővel indul, és akkor ér véget, amikor az aktuális feszítő erdő már fa. Az általános lépés abból áll, hogy az aktuális, már megkonstruált erdőhöz hozzáadunk egy legolcsóbb olyan élt, amely az erdő két komponensét köti össze.*

Ismeretes a mohó algoritmusnak másik változata is.

DIJKSTRA-PRIM ALGORITMUSA [Dijkstra 1959], [Prim 1957] *Egy tetszőleges x_0 pontból indulva élek egyenkénti hozzávételével fát építünk, egészen addig, amíg feszítő fát nem kapunk. Az általános lépésben egy legolcsóbb olyan éllel növelünk, amelynek pontosan az egyik végpontja tartozik a már megkonstruált fához.*

A következő algoritmus óvatosnak nevezhető; ahelyett, hogy olcsó élekből próbálna fát vagy erdőt építeni, megszabadul a drága élektől, persze ügyelve az összefüggőség megtartására.

FORDÍTOTT MOHÓ (ÓVATOS) ALGORITMUS *Az eljárás során éleket hagyunk ki a gráfból arra ügyelve, hogy a visszamaradó részgráf összefüggő legyen. Az általános lépésben kiválasztunk egy maximális költségű élt, amely az aktuálisan megmaradt gráfnak nem elvágó éle, és ezt elhagyjuk a gráfból. Amikor már minden él elvágó, a megmaradt gráf egy feszítő fa.*

Ezen algoritmusok egyetlen közös általános keretbe foglalhatók.
ÁLTALÁNOS ALGORITMUS *Az eljárás az alábbi két művelet tetszőleges sorrendben történő egymás utáni alkalmazásából áll. Az első művelet a V csúcshalmazon egy F feszítő erdőt épít élek egyenkénti hozzávételével, míg a második bizonyos éleket kitöröl. Kezdetben $F := \emptyset$.*

1. LÉPÉS *Ha az aktuális F erdő már feszítő fa, az algoritmus befejeződik. Ha F nem összefüggő, akkor válasszunk G-nek egy tetszőleges olyan B vágását, amelyben nincs F-nek éle és legyen az e él a B vágás legolcsóbb eleme. Adjuk e-t F-hez.*

2. LÉPÉS *Amíg van kör, válasszunk ki egy tetszőleges C kört. Legyen $e \in C$ egy legdrágább éle $C - F$ -nek. Töröljük e-t G-ből.*

1.2.3. Tétel. *Az algoritmus által talált végső F feszítő fa minimális költségű.*

Bizonyítás. Az algoritmus futásának tetszőleges közbenső állapota egy (F, D) párral jellemezhető, ahol F az addig megkonstruált erdőt, D pedig az addig eltörölt élek halmazát jelöli. Azt igazoljuk indukcióval, hogy létezik olyan T minimális költségű feszítő fája G-nek, amelyre $F \subseteq T \subseteq E - D$. Világos, hogy bármelyik minimális költségű fa jó lesz, amikor $F = D = \emptyset$. Tegyük most fel, hogy az állítást már beláttuk valamely (F, D) párra, vagyis hogy van egy olyan T minimális költségű feszítő fa, amelyre $F \subseteq T \subseteq E - D$.

Először tegyük fel, hogy az 1. lépést alkalmaztuk, és legyen $e \in B$ az újonnan F-hez vett él. Legyen $F' := F + e$. Ha $e \in T$, akkor készen vagyunk, mert a változatlan T jó lesz az (F', D) párra nézve is. Ha $e \notin T$, akkor legyen C_e az e alapköre a T-re nézve. Az e él a szabály szerint a B vágásban van, így C_e-nek kell lennie egy másik f élének B-ben. Miután $e, f \in B$, az 1. lépés szabálya szerint $c(e) \leq c(f)$. Mivel $e, f \in C_e$ és T minimális költségű, azt kapjuk, hogy $c(e) \geq c(f)$. Ezekből $c(e) = c(f)$, és $T' := T - f + e$ is egy minimális költségű feszítő fa, amelyre $F' \subseteq T' \subseteq E - D$.

Ezután tegyük fel, hogy a 2. lépést alkalmazzuk, és legyen $e \in C$ a frissen eltörölt él. Ha T nem tartalmazza e-t, készen vagyunk, mert a változatlan T jó lesz az $(F, D + e)$ párra nézve is. Tegyük fel tehát, hogy T tartalmazza e-t, és legyen B_e az e-nek T-re vonatkozó alapvágása. Ekkor létezik egy $f \neq e$ él, amelyre $f \in C \cap B_e$. Mivel $e, f \in C$, a 2. lépés szabálya szerint $c(e) \geq$ $\geq c(f)$. Mivel $e, f \in B_e$ és T minimális költségű, következik, hogy $c(e) \leq c(f)$. Ezekből $c(e) = c(f)$, és $T' := T - f + e$ is egy minimális költségű feszítő fa, amelyre $F \subseteq T' \subseteq E - (D + e)$. □

1. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a fenti mohó algoritmus változatok mindegyike az általános algoritmus speciális esetének tekinthető.*

2. Feladat. *Ha minden költség különböző, akkor a minimális költségű feszítő fa egyértelmű.*

3. Feladat. *Tegyük fel, hogy két költségfüggvény adott az éleken: c_1, c_2. Adjunk algoritmust olyan feszítő fa megkeresésére, amely a c_1-re nézve minimális költségű, és ezen belül c_2-re nézve minimális költségű. Hogyan általánosítható az eljárás több költségfüggvényre?*

4. Feladat. *Legyen $r(u,v)$ szimmetrikus, nemnegatív egészértékű függvény a V alaphalmaz elempárjain. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor létezik olyan $G=(V,E)$ gráf, amelyre $\lambda(u,v;G)=r(u,v)$ minden $\{u,v\}$ pontpárra, ha $r(u_1,u_k)\geq \min\{r(u_1,u_2),r(u_2,u_3),\dots,r(u_{k-1},u_k)\}$ fennáll minden, a V különböző elemeiből készített $u_1,\dots,u_k$ sorozatra.*

1.2.2. Láncok, utak, részfák

Valójában egy teljes elmélet (a matroidelmélet) épült ki annak feltérképezésére, hogy a Kruskal-típusú mohó algoritmus milyen körülmények között működik helyesen, és ezt a matroidokról szóló fejezetben tárgyalni is fogjuk. Vannak azonban másféle mohó megközelítések is. Most ezekre mutatunk példákat.

Diszjunkt utak

1.2.4. Tétel. *Ha egy $H=(V,F)$ digráfban az s és t pontokra $\varrho(s)=0=\delta(t)$ és $\varrho(v)=\delta(v)$ minden $v\in V-\{s,t\}$ pontra, akkor D-ben létezik $\delta(s)$ élidegen út s-ből t-be.*

Bizonyítás. Az s-ből kiindulva mohó módon építsünk egy maximális olyan sétát, amely minden élen legfeljebb egyszer halad át. A fokszámfeltételek miatt egyrészt s-be sohasem érhetünk vissza, másrészt bármely $v\in V-\{s,t\}$ pontból mindig tovább tudunk haladni addig még nem használt élen. Így a séta t-ben végződik. A séta magában foglal egy P utat s-ből t-be. A P éleinek kihagyásával keletkező H' digráfban s kifoka eggyel kisebb, mint H-ban, és a fokszámfeltételek H'-re is fennállnak. Az eljárást iterálva megkapjuk a keresett $\delta(s)$ élidegen utat. □

Bár egy tetszőleges D digráfban ez a mohó megközelítés nem alkalmas k élidegen s-ből t-be vezető út megkeresésére, az 1.2.4 tétel mégis elvi lehetőséget teremt erre. A tétel alapján ugyanis nem kell az utakat közvetlenül keresnünk, hanem elég D-nek egy olyan H részgráfját megkonstruálnunk, amelyben $\delta(s)=k$ és teljesülnek az 1.2.4 tétel fokszámfeltételei. Megjegyezzük, hogy ez az egyszerű megfigyelés inspirálta a folyamok fogalmának megszületését.

5. Feladat. *Gondoljuk meg, hogy érvényben marad-e az 1.2.4 tétel, ha a $v\in V-\{s,t\}$ pontokra az $\varrho(v)=\delta(v)$ egyenlőség helyett csupán a $\varrho(v)\leq\delta(v)$ egyenlőtlenséget követeljük meg.*

Diszjunkt antiláncok

1.2.5. Tétel (Mirsky)**.** *A P részbenrendezett halmazt fedő antiláncok minimális száma egyenlő a leghosszabb lánc elemszámával.*

Bizonyítás. Világos, hogy max $\leq$ min. Az egyenlőség igazolásához legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza. Ez nyilván antilánc. Legyen A_2 az A_1 elhagyása után a minimális elemek halmaza. Ezt folytatva megkonstruáljuk az $A_1, A_2, \ldots, A_c$ antiláncokból álló felbontását P-nek. Ezután visszafelé haladva előállítunk egy c elemből álló láncot. Legyen a_c az A_c antilánc tetszőleges eleme. Az a_c elem nem került bele A_{c-1}-be, ezért van A_{c-1}-nek egy a_c-nél kisebb a_{c-1} eleme. Ez az elem nem került A_{c-2}-be, tehát van A_{c-2}-ben egy a_{c-2} elem, amely kisebb, mint a_{c-1}. Ezt az eljárást folytatva megkapunk egy c elemű láncot. □

A fenti bizonyítás egy kétfázisú mohó eljárásnak tekinthető. Az első fázisban mohó módon megkonstruáltuk az antilánc felbontást, a másodikban pedig szintén mohó módon, de már az első fázis által szolgáltatott antilánc felbontás ismeretében, megkonstruáltuk a maximális láncot.

A Mirsky-tételt egyszerű fogással kiterjeszthetjük a súlyozott esetre is.

1.2.6. Tétel (súlyozott Mirsky)**.** *Legyen adott a P elemein egy nemnegatív egész s súlyozás. A maximális súlyú lánc súlya egyenlő a minden p elemet legalább $s(p)$-szer fedő* (nem feltétlenül különböző) *antiláncok minimális számával.*

Bizonyítás. Töröljük ki a nulla súlyú elemeket, majd minden p elemet helyettesítsünk egy $s(p)$ elemű lánccal, melynek tagjai pontosan ugyanazon elemekkel legyenek összehasonlíthatók, mint p. A kiterjesztett részbenrendezett halmazra megfogalmazott Mirsky-tétel éppen a súlyozott esetet adja. □

6. Feladat. *A fenti kétfázisú eljárás átalakításával adjunk direkt bizonyítást a súlyozott Mirsky-tételre.*

Részfák, részutak

1.2.7. Tétel (Dirac)**.** *Adott az F fa részfáinak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $\mathcal{F}$-ből kiválasztható diszjunkt fák maximális ν száma egyenlő az $\mathcal{F}$-et lefogó csúcsok minimális τ számával.*

Bizonyítás. Nyilván $\nu \leq \tau$, így csak a fordított irányú egyenlőtlenség igazolásával foglalkozunk. Válasszuk ki F-nek egy tetszőleges r pontját. Egy részfa talppontján az r-hez legközelebbi pontját értjük, és ennek távolságát r-től a részfa r-től való távolságának hívjuk.

Ameddig csak lehet, válasszunk ki egymás után $\mathcal{F}$-ből fákat úgy, hogy mindig az r-től legtávolabbi olyan fát választjuk, amely diszjunkt az addig már kiválasztottaktól. Jelölje az így kiválasztott fák halmazát $\mathcal{I}$, talppontjaik halmazát pedig T. Belátjuk, hogy T lefogja az $\mathcal{F}$ minden tagját, amiből $\nu \geq \tau$ már következik. Tegyük fel, hogy $F' \in \mathcal{F}$ egy lefogatlan fa. Ez metszi $\mathcal{I}$ valamely tagját. Jelölje I az $\mathcal{I}$-nek az algoritmus során legkorábban választott azon tagját, amely metszi F'-t. Mivel F' nincs lefogva, ezért I talppontja nincs F'-ben, és F' diszjunkt az $\mathcal{I}$ összes I-nél korábban kiválasztott tagjától, vagyis I választásakor nem a kiválasztási szabály szerint jártunk el. Ez ellentmondás. □

1.2.8. Tétel (Gallai)**.** *Adott az S szakasz zárt részintervallumainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Akkor és csak akkor lehet az $\mathcal{F}$ tagjait k páronként diszjunkt intervallumokból álló osztályba sorolni, ha S minden pontját legfeljebb k darab $\mathcal{F}$-beli szakasz fedi.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőséghez igazolásához S-t vízszintesen képzeljük. Az intervallumokat (bal oldali) kezdőpontjuk sorrendjében tekintve egymás után betesszük a k színosztály közül a legkorábbi olyanba, amelybe betehető a diszjunktság megsértése nélkül. Amennyiben egy $F \in \mathcal{F}$ intervallumot nem tudunk elhelyezni, mert semelyik színosztályba sem tehető be a diszjunktság megsértése nélkül, úgy F kezdőpontját a választási szabály miatt mind a k színosztály egyik intervalluma tartalmazza, ellentmondásban a feltevéssel, hogy egy pontot összesen csak k intervallum fedhet. □

1. Gyakorlat. *Adott az S szakasz zárt részintervallumainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Igazoljuk Gallai másik tételét, miszerint az $\mathcal{F}$-ből kiválasztható diszjunkt intervallumok maximális száma egyenlő az $\mathcal{F}$ tagjait lefogó pontok minimális számával.*

7. Feladat. *Adott A és B diszjunkt halmaz és egy $m : A \cup B \to \mathbf{Z}_+$ fokszámelőírás. Gale és Ryser tétele szerint* akkor és csak akkor létezik olyan egyszerű $G = (A, B; E)$ páros gráf, amelyre $d(v) = m(v)$ minden $v \in A \cup B$ csúcsra, ha $\widetilde{m}(A) = \widetilde{m}(B)$ és minden $j = 1, \ldots, |A|$ értékre a j legnagyobb A-beli $m(v)$ érték összege legfeljebb $\sum_{u \in B} \min\{j, m(u)\}$. *Igazoljuk a feltétel szükségességét, majd egy alkalmas mohó algoritmus segítségével az elegendőséget is.*

1.2.3. Irányítások

A $G = (V, E)$ irányítatlan gráf éleinek (vagy röviden G-nek) egy **irányításán** egy olyan irányított gráfot értünk, amely G-ből keletkezik azáltal, hogy G minden uv élét helyettesítjük az u-ból v-be és a v-ből u-ba vezető irányított élek egyikével. Kicsit általánosabban beszélhetünk egy vegyes gráf irányításáról, amikor is a vegyes gráf irányított éleit változatlanul hagyjuk, míg az irányítatlan éleket helyettesítjük egy-egy irányítottal.

2. Gyakorlat. *Egy irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden pont elérhető egy megadott s gyökérpontból, ha G összefüggő.*

1.2.9. Tétel (Robbins). *Egy G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőséghez tetszőleges sorrendben tekintjük a gráf éleit, és egyenként megirányítjuk őket, csak arra ügyelve, hogy ne keletkezzék egyirányú vágás. Azt kell igazolnunk, hogy az eljárás mindig befejezhető. Ennek érdekében tekintsünk egy közbenső állapotot, amikor éleknek egy $F \subset E$ részhalmazát már megirányítottuk, és jelölje $\vec{F}$ a megirányított F-t. Legyen $e = uv \in E - F$ a soron következő irányítatlan él. Amennyiben az u-ból v felé történő irányítás egy egyirányú vágást hozna létre, úgy létezne egy olyan X $v\bar{u}$-halmaz, amelyre az e-től eltekintve az X és $V - X$ közötti valamennyi él irányított (eleme $\vec{F}$-nek) éspedig $V - X$-től X felé. Hasonlóképp, amennyiben e-nek a v-ből u felé történő irányítása hozna létre egyirányú vágást, akkor létezne egy olyan Y $u\bar{v}$-halmaz, amelyre e-től eltekintve az Y és $V - Y$ közötti valamennyi él irányított $V - Y$-tól Y felé. Ekkor viszont az $X \cap Y$ halmazból nem lép ki sem irányított, sem irányítatlan él, és ugyanez áll az $X \cup Y$ halmazra is. Mivel a feltevés szerint eddig még nem hoztunk létre egyirányú vágást, így szükségképpen $X \cap Y = \emptyset$ és $X \cup Y = V$, azaz $Y = V - X$. Így X és $V - X$ között egyedül az e él vezethet, ellentétben a feltevéssel, hogy G 2-élösszefüggő. □

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás az alábbi általánosabb eredményt is kiadja:

1.2.10. Tétel. *Egy vegyes gráf akkor és csak akkor irányítható erősen összefüggővé, ha nincs benne tisztán egyirányú vágás, és irányítatlan értelemben 2-élösszefüggő.*

Az 1.2.9 tétel úgy is megfogalmazható, hogy egy irányított gráf bizonyos éleit át lehet fordítani úgy, hogy erősen összefüggő digráfot kapjunk, feltéve persze, hogy az irányítatlan alapgráf 2-élösszefüggő. Kínálkozik a kérdés, mennyi az átfordítandó élek minimális száma. Meglepő módon a válasz sokkal mélyebb eszközöket igényel, mint a Robbins tétel, de legalább létezik. Lucchesi és Younger tétele szerint a keresett minimum éppen a páronként élidegen egyirányú vágások maximális számával egyenlő.

Természetesen vetődik fel a Robbins-tétel egy másik irányú általánosításának kérdése is: mikor lehet egy gráfot k-élösszefüggővé irányítani? Ehhez nyilván szükséges, hogy a gráf $2k$-élösszefüggő legyen. Nash–Williams bebizonyította, hogy ez a feltétel elegendő is. A bizonyítás a fentinél jóval ravaszabb eszközöket igényel. A nehézséget jelzi, hogy már $k = 2$-re sem igaz az, ami $k = 1$-re, amint azt fentebb láttuk, még érvényes volt; nevezetesen, hogy az éleket mohó módon egymás után, tetszőleges sorrendben irányíthattuk, csupán arra ügyelve, hogy ne hozzunk létre hibás (azaz a $k = 1$ esetben egyirányú) vágást. Tekintsük például azt a $G = (V, E)$ gráfot, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ és G-nek a következő 11 éle van: v_1v_2, v_3v_4, 3-3 párhuzamos él v_1 és v_4 között, v_1 és v_3 között, valamint v_2 és v_3 között. Ennek a gráfnak az olvasó könnyen találhat 2-élösszefüggő irányítását. Ugyanakkor ha két párhuzamos v_1v_4 élt v_4 felé irányítunk, a harmadikat v_1 felé; két párhuzamos v_1v_3 élt v_3 felé irányítunk, a harmadikat v_1 felé; végül két párhuzamos v_2v_3 élt v_3 felé irányítunk, a harmadikat v_2 felé, akkor egyrészt, amint azt szimpla esetszétválasztás mutatja, az irányítatlanul maradt v_1v_2, v_3v_4 éleknek már nem tudunk úgy irányítást adni, hogy 2-élösszefüggő digráfot kapjunk, másrészt ennek a ténynek nincs egyszerűen megfogalmazható általános oka.

Az így kapott vegyes gráf tehát azt is mutatja, hogy a Nash–Williams-féle irányítási tétel és az 1.2.10 tétel természetesen kínálkozó közös általánosítása $k \geq 2$-re nem érvényes: egy $D = (V, A)$ irányított és $G = (V, E)$ irányítatlan gráfból álló vegyes gráfban az E elemei akkor sem feltétlenül irányíthatók úgy, hogy k-élösszefüggő digráfot kapjunk, ha minden $X \subset V$ halmazra $d_G(X) \geq (k - \varrho_D(X))^+ + (k - \delta_D(X))^+$ teljesül. Nyitva marad tehát a kérdés, hogy mikor létezik egy vegyes gráfnak k-élösszefüggő irányítása, és az előbbi négypontú példa jelzi, hogy a válasz nem ígérkezik egyszerűnek. A szubmoduláris áramok elmélete segítségével azonban az irányíthatóság feltétele megadható.

8. Feladat. *Igazoljuk Robbins tételét egy mélységi fa segítségével.*

9. Feladat. *Legyen D olyan digráf, amely irányítatlan értelemben 2-élösszefüggő. Legyen F egy tartalmazásra nézve minimális részhalmaza az éleknek, amelynek elemeit összehúzva erősen összefüggő digráfot kapunk* (azaz F minimális olyan, hogy minden egyirányú vágást lefog)*. Igazoljuk, hogy ha összehúzás helyett F minden elemének megfordítjuk az irányítását, már akkor is erősen összefüggő digráfot kapunk.*

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy elvágó élt nem tartalmazó digráf élei két színnel színezhetők úgy, hogy minden egyirányú vágás mindkét színből tartalmazzon élt.*

11. Feladat. *Egy irányítatlan G gráfnak adva van két erősen összefüggő irányítása. Igazoljuk, hogy az egyikből el lehet jutni a másikba egyirányú utak, illetve egyirányú körök egymás utáni megfordításával úgy, hogy minden közbenső irányítás erősen összefüggő!*

12. Feladat. *Egy $G = (V, E)$ összefüggő gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan irányítása, amely egy megadott $T \subseteq V$ halmaz pontjaiban páratlan, a többi ponton pedig páros, ha $|E|$ és $|T|$ ugyanolyan paritású.*

1.2.4. Színezések

1.2.11. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf kromatikus száma legfeljebb $\Delta + 1$, ahol Δ a G maximális fokszámát jelöli. Ráadásul létezik olyan $\Delta + 1$ színnel történő színezés, ahol az egyik színt legfeljebb csak egy előre meghatározott v_1 pont használja.*

Bizonyítás. A v_1 ponttal kezdve konstruáljuk meg a gráf pontjainak egy olyan $v_1, \dots, v_n$ sorrendjét, ahol a v_1-től eltekintve minden pontból megy kisebb indexű ponthoz él. A gráf összefüggősége folytán ez mindig megtehető.

E sorrendben visszafelé haladva egymás után színezzük meg a csúcsokat a $\Delta + 1$ szín közül mindig a lehető legkisebb indexűt használva, arra ügyelve csupán, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak. Mivel minden csúcsnak legfeljebb Δ szomszédja van a gráfban, ezért egy v_i $(i \geq 2)$ csúcs megszínezésekor, miután van kisebb indexű, még színezetlen szomszédja, legfeljebb csak $\Delta - 1$ tiltott szín van, és így a Δ rendelkezésre álló színből tudunk választani. A $\Delta + 1$-dik színre esetleg a v_1 csúcsnál lehet szükség. □

Kérdés, hogy meg lehet-e szabadulni, a $\Delta + 1$-dik színtől. A páratlan kör mutatja a $\Delta = 2$ esetben és egy teljes $\Delta + 1$ pontú gráf $\Delta \geq 3$-ra, hogy a válasz általában nemleges. Az előbbi mohó színezési eljárás csöppnyi finomítása azonban 3-összefüggő gráfok esetén segít.

1.2.12. Tétel (Lovász). *Legyen a $G = (V, E)$ gráf 3-összefüggő, nem teljes gráf. Ekkor G pontjai megszínezhetők Δ színnel.*

Bizonyítás. Mivel a gráf nem teljes, így van két nem szomszédos pontja. Az ezeket összekötő legrövidebb út első három pontját jelölje rendre v_n, v_1, v_{n-1}. Ekkor v_n és v_{n-1} is szomszédos v_1-gyel, de egymással nem szomszédosak. Mivel a gráf 3-összefüggő, így $G' = G - \{v_n, v_{n-1}\}$ összefüggő, és ezért G' pontjainak létezik egy $v_1, \dots, v_{n-2}$ sorrendje, amelyben minden v_i $(i \geq 2)$ csúcsból vezet visszafelé él. A v_n-től kezdve e sorrendben visszafelé haladva egymás után színezzük meg a csúcsokat a Δ szín közül mindig a lehető legkisebb sorszámút használva, arra ügyelve csupán, hogy szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak. Ekkor tehát v_n és v_{n-1} az egyes színt kapja. Mivel minden csúcsnak legfeljebb Δ szomszédja van a gráfban, ezért a v_i $(i \geq 2)$ csúcs megszínezésekor, miután van kisebb indexű, még színezetlen szomszédja, legfeljebb csak $\Delta - 1$ tiltott szín van, és így a Δ rendelkezésre álló színből tudunk választani. A v_1 csúcsnak viszont a v_n és a v_{n-1} két egyformára színezett szomszédja, így a v_1 szomszédjaira is legfeljebb $\Delta - 1$ színt használtunk fel, tehát ezt is meg tudjuk színezni a Δ szín valamelyikével. □

13. Feladat. *Igazoljuk Brooks alábbi tételét.*

1.2.13. Tétel (Brooks)**.** *Ha egy egyszerű, összefüggő gráf nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor kromatikus száma legfeljebb a maximális fokszáma.*

1.2.5. Forrás telepítés

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf minden csúcsán adott egy $r(v)$ egész szám. Azt mondjuk, hogy az S halmaz forrás, ha S-ből minden $v \in V - S$ pontba vezet $r(v)$ élidegen út. Ezek szerint a V csúcshalmaz maga forrás. A feladat a legkisebb elemszámú forrást meghatározni. Legyen $R(X) := \max\{r(v) : : v \in X\}$. A Menger-tétel szerint egy S halmaz pontosan akkor forrás, ha minden $X \subseteq V - S$ halmazra $d_G(X) \geq R(X)$. Nevezzünk egy X ponthalmazt hiányosnak, ha $d_G(X) < R(X)$. Tehát a források azok a részhalmazok, melyek lefognak minden hiányos halmazt. Természetesen elég lefogni a tartalmazásra nézve minimális hiányos halmazokat.

1.2.14. Tétel. *A minimális elemszámú forrás elemszáma egyenlő a páronként diszjunkt hiányos halmazok maximális számával.*

Bizonyítás. Világos, hogy min $\geq$ max. Az egyenlőség igazolásához egy mohó algoritmus segítségével megkonstruálunk egy S forráshalmazt, valamint minimális hiányos halmazoknak egy $|S|$ tagú diszjunkt rendszerét.

Rendezzük sorba a csúcsokat az r értékeik szerint növekvö módon, azaz legyen $r(v_1) \leq r(v_2) \leq \cdots \leq r(v_n)$. Kezdetben legyen $S = V$, majd az adott sorrendben a pontokon egyenként végighaladva az aktuális S-ből pontosan akkor töröljük a soron következő v_i pontot, ha a törlés után még mindig forrást kapunk. Ez azt jelenti, hogy ha v_i-t nem lehet kidobni, akkor létezik egy olyan X_i minimális hiányos halmaz, amelynek S-sel az egyetlen közös pontja v_i. A növekvő sorrend miatt $R(X_i) = r(v_i)$.

Jelölje S az algoritmus által szolgáltatott végső forráshalmazt, és legyen v_i, v_j két eleme S-nek.

1.2.1. Állítás. $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Bizonyítás. Legyen $X'_i = X_i - X_j$ és $X'_j = X_j - X_i$. Ha, indirekt, a metszet nemüres, akkor X'_i és X'_j nem hiányos, azaz $d(X'_i) \geq R(X'_i)$ és $d(X'_j) \geq \geq R(X'_j)$. Miután $X_i \cap S = \{v_i\}$ és $X_j \cap S = \{v_j\}$, így $v_i \in X'_i$ és $v_j \in X'_j$. Ezért $R(X'_i) = r(v_i)$ és $R(X'_j) = r(v_j)$, amiből $r(v_i) + r(v_j) = R(X_i) + + R(X_j) > d(X_i) + d(X_j) \geq d(X'_i) + d(X'_j) \geq R(X'_i) + R(X'_j) = r(v_i) + r(v_j)$, ellentmondás. □

A tétel rögtön következik a fenti állításból. □

1.3. Algoritmikus bizonyítások II: javító utak

1.3.1. Kőnig és Hall tételei

Most bemutatjuk az egész elmélet egyik alapkövének tekinthető Kőnig-tételt és annak javítóutas bizonyítását.

1.3.1. Tétel (Kőnig). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a páronként diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ számával.*

Bizonyítás. Egy ν elemű párosítás lefogásához kell legalább ν csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$.

A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb elemszámú párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy találunk egy $|M|$ méretű lefogást. Az utóbbi esetben az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg M éleit T-től S felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje R_S, illetve R_T az S-ben, illetve a T-ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban egyirányú úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg).

Két eset lehetséges. Amennyiben R_T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan R_S-t és R_T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást könnyű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben R_T diszjunkt Z-től. Z definíciója folytán Z-ből nem lép ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy Z-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosításél, hiszen v csak u-n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett egyirányú úton elérhető R_S-ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden M-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. □

A fenti bizonyítás egyúttal egy $O(nm)$ lépésszámú algoritmust ad a szóban forgó optimumok meghatározására. Közvetlen folyományként adódik Hall tétele.

1.3.2. Tétel (Hall). *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A minden X részhalmazára teljesül az ún. Hall-féle feltétel, azaz $|\Gamma(X)| \geq |X|$, ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége kézenfekvő. Az elegendőséghez azt kell belátnunk, hogy $\nu \geq |A|$. Ha ez nem állna, akkor Kőnig tétele szerint létezik az éleknek egy A-nál kevesebb pontból álló L lefogása. De ekkor az $X := A - L$ halmazra $|B \cap L| < |X|$ és $\Gamma(X) \subseteq B \cap L$, azaz X megsérti a Hall-feltételt. □

Irányítások segítségével algoritmikus bizonyítást adunk Lovász egy kapcsolódó tételére.

1.3.3. Tétel (Lovász)**.** *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik olyan erdő, amelyben minden $s \in S$ pont foka 2, ha minden $X \subseteq S$ nemüres halmazra*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| + 1. \tag{1.1}$$

Bizonyítás. Az X és $\Gamma(X)$ által feszített részgráfban egy erdőnek egyrészt legfeljebb $|X| + |\Gamma(X)| - 1$ éle van, másrészt $2|X|$, amennyiben teljesíti, hogy S-ben minden pontjának foka kettő. A kettő összevetéséből (1.1) szükségessége adódik.

Mivel a Hall-féle feltétel még szigorúan is teljesül az S minden nemüres részhalmazára, G-nek létezik S-et fedő M párosítása. Jelölje R a T azon pontjainak halmazát, melyeket M nem fed. Húzzuk össze R-et egy r ponttá. Irányítsuk az M elemeit T felé, míg az összes többi élt S felé. Állítjuk, hogy az így létrejött D digráfban r-ből S minden eleme elérhető. Valóban, ha az S nem elérhető pontjainak X halmaza nemüres, akkor $\Gamma_G(X) = \Gamma_M(X)$, azaz X megsértené (1.1)-et. Ha viszont S minden pontja elérhető r-ből, akkor a T-nek is minden pontja, és így D-nek van r gyökerű feszítő fenyője, amelynek élei az eredeti G gráfban egy S minden pontjában másodfokú erdőt alkotnak. □

Nevezzünk egy hipergráfot erdővel reprezentálhatónak, vagy röviden **erdősnek**, ha minden hiperéléből kiválasztható két elem úgy, hogy a kiválasztott párok mint gráfélek erdőt alkotnak. Egy hipergráfról azt mondjuk, hogy erősen teljesíti a Hall-feltételt, ha bármely $j > 0$ hiperélének az egyesítése legalább $j + 1$ elemű.

1.3.1. Következmény. *Egy hipergráf akkor és csak akkor erdős, ha erősen teljesíti a Hall-feltételt.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk Lovász tételét a hipergráfhoz tartozó páros gráfra. □

1.3.2. Következmény. *Ha egy hipergráf erősen teljesíti a Hall-feltételt, akkor csúcsait két színnel lehet úgy színezni, hogy ne legyen egyszínű hiperél.*

Bizonyítás. Mivel a hipergráf erősen teljesíti a Hall feltételt, így erdős. Márpedig egy erdő pontjainak létezik kétszínezése. □

14. Feladat. *Legyen $S \subseteq V$ a $G = (V, E)$ összefüggő gráf pontjainak egy stabil halmaza. Dolgozzuk ki a szükséges és elegendő feltételét egy olyan feszítő fa létezésének, amely minden S-beli pontban másodfokú. Algoritmikusan hogyan található meg egy ilyen fa?*

15. Feladat. *Az 1.3.3 tétel bizonyítási módszerével igazoljuk a tétel alábbi kiterjesztését.*

1.3.4. Tétel. *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf és $m : S \to \mathbf{Z}_+$ egy szigorúan pozitív függvény. Akkor és csak akkor létezik G-ben olyan erdő, amelyben minden $s \in S$ pont foka pontosan $m(s)$, ha minden $X \subseteq S$ nemüres halmazra*

$$|\Gamma(X)| \geq \widetilde{m}(X) - |X| + 1, \tag{1.2}$$

ahol $\tilde{m}(X) = \sum[m(s) : s \in X]$.

A tételnek Lovász által eredetileg igazolt általánosabb alakjára az 1.7.5 szakaszban adunk (nem algoritmikus) bizonyítást.

1.3.2. Fokszámkorlátos irányítások

Vizsgáljuk meg olyan irányítások létezésének feltételét, amelyeknél a gráf minden csúcsának a befoka előre megadott korlátok közé esik. Kicsit konkrétabban, legyen $f : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. (Egy csúcson a $-\infty$ alsó korlát azt jelenti, hogy ezen a csúcson egyáltalán nincs alsó korlát. Itt nullát is írhatnánk, de jobb a $-\infty$, mert így a feltételben rögtön látni lehet, hogy az ilyen csúcsok nem játszanak szerepet. A helyzet hasonló a ∞ felső korlát esetén.) Kezdjük egy nagyon egyszerű speciális esettel.

Egy irányítatlan gráfot akkor nevezünk **Euler-gráf**nak, ha minden pont foka páros (függetlenül attól, hogy a gráf összefüggő-e vagy sem). Egy irányított gráfot vagy egy irányítatlan gráf egy irányítását akkor nevezünk **Euler-gráf**nak, ha minden pont befoka egyenlő a kifokával. Kicsit általánosabban, egy gráf irányítását **közel-Euler**nak hívjuk, ha minden pontnak a befoka és a kifoka legfeljebb eggyel tér el. Természetesen egy irányítatlan Euler-gráf közel-Euler irányítása Euler-irányítás.

1.3.5. Tétel. *Egy G irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor van Euler-irányítása, ha G Euler.*

Bizonyítás. Irányítatlan Euler-gráf könnyen látható módon mindig felbontható élidegen irányítatlan körök egyesítésére. E körök mindegyikét körbe irányítva egy irányított Euler-gráfot kapunk. □

1.3.3. Következmény. *Tetszőleges G gráfnak van közel-Euler irányítása.*

Bizonyítás. Jelölje a páratlan fokú pontok halmazát T. Adjunk a gráfhoz egy új pontot, és kössük össze a T minden elemével. Így Euler-gráfot kaptunk, amelynek az előbbi tétel szerint van Euler-irányítása, és ezt az eredeti élekre megszorítva G-nek egy közel-Euler irányítását kapjuk. □

1.3.6. Tétel. *Ha egy irányítatlan gráfnak D_1 és D_2 két olyan irányítása, amelyre $\varrho_1(v) = \varrho_2(v)$ minden v csúcsra fennáll, akkor egyirányú körök egymás utáni megfordításával el lehet jutni D_1-ből D_2-be.*

Bizonyítás. Ha egy él irányítása ugyanaz a két irányításban, úgy azt kihagyva indukcióval készen vagyunk. Így minden él fordítva szerepel a két irányításban, és ezért $\varrho_1(v) = \varrho_2(v) = \delta_1(v)$, vagyis D_1 irányított Euler-gráf. Emiatt élidegen körök uniójára bomlik, amelyeket egymás után átforgatva D_2-t kapjuk. □

1.3.7. Tétel. *A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak létezik olyan irányítása,*

(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq \widetilde{f}(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re,} \tag{1.3}$$

(ii) *amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$i(X) \leq \widetilde{g}(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re,} \tag{1.4}$$

(iii) *amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (1.3), mind (1.4) fennáll.*

Bizonyítás. (1.3) szükségessége. Tegyük fel, hogy létezik jó irányítás. Ekkor $\widetilde{f}(X) \leq \sum[\varrho(v) : v \in X] \leq e(X)$.

(1.3) elegendősége. G egy irányításában nevezzünk egy s pontot hibásnak, vagy pontosabban **behiányos**nak, ha $\varrho(s) < f(s)$. Válasszunk G-nek egy olyan irányítását, amelynek a $\sum[f(v) - \varrho(v)) : v$ behiányos$]$ összeggel definiált hibája minimális. Ha ez a hiba 0, vagyis ha nincs behiányos csúcs, akkor készen vagyunk.

Legyen most az s csúcs behiányos, és jelöljük X-szel a megadott irányításban azon pontok halmazát, amelyek s-ből elérhetők. Ekkor X-ből nem lép ki él, és így $\sum[\varrho(v) : v \in X] = e(X)$. Most X szükségképpen tartalmaz egy olyan t pontot, amelyre $\varrho(t) > f(t)$, mert ha nem létezne ilyen pont, akkor $\widetilde{f}(X) > \sum[\varrho(v) : v \in X] = e(X)$ következne, ellentmondásban az (1.3) feltétellel. Egy s-ből t-be vezető út éleinek irányítását megfordítva G-nek egy olyan irányítását kapjuk, amelynek hibája kisebb, mint a meglévő irányításé. A módszer ismételt alkalmazásával legfeljebb $\widetilde{f}(V)$ út megfordításával egy jó irányítást kapunk.

Analóg módon igazolható a tétel második része (azzal az eltéréssel, hogy most egy t pont akkor hibás, ha kihiányos, azaz ha a meglévő irányításban

$\varrho(t) > g(t)$, és X-szel azon pontok halmazát jelöljük, amelyekből t elérhető). Valójában a második rész formailag is ekvivalens az első azon változatával, amikor olyan irányítást keresünk, amelyben minden v pont kifoka legalább $f(v) := d_G(v) - g(v)$.

Végül a harmadik rész igazolásához induljunk ki egy olyan irányításból, amelyre $(*)$ $\varrho(v) \leq g(v)$ teljesül minden v pontra. Alkalmazzuk az első rész algoritmusát és figyeljük meg, hogy ennek során egy s pontnak a befoka csak akkor nő, ha $\varrho(s) < f(s) \leq g(s)$, vagyis $(*)$ automatikusan érvényben marad. □

16. Feladat. *Adjunk szükséges és elegendő feltételt olyan irányítás létezésére, amelyre nem csak a pontok befokára van alsó és felső korlát előírás, hanem a kifokára is.* (A megoldáshoz használhatjuk az 1.3.7 tételt.)

Érdemes kiemelni a tétel alábbi, mindenképp meglepőnek minősítendő következményét.

1.3.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra, és van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra. Ekkor olyan is van, amely egyszerre elégíti ki mindkét követelményt (feltéve, hogy $f \leq g$).*

Az itt megfogalmazott tulajdonságot (jobb híján) **linking** tulajdonságnak nevezhetjük. Számos helyen feltűnik, hátterében, amint majd látni fogjuk, egy polimatroidokra vonatkozó tétel áll.

1.3.5. Következmény (Irányítási lemma)**.** *Adott $G = (V, E)$ gráfra és $m : V \to \mathbf{Z}$ függvényre a következők ekvivalensek.*

$$G \text{ irányítható úgy, hogy minden } v \text{ csúcsra } \varrho(v) = m(v), \tag{1.5}$$

$$e(X) \geq \widetilde{m}(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re és } \widetilde{m}(V) = |E| \tag{1.6}$$

$$i(Y) \leq \widetilde{m}(Y) \text{ minden } Y \subseteq V\text{-re és } \widetilde{m}(V) = |E|. \tag{1.7}$$

Bizonyítás. Miután $e(X) + i(V - X) = |E| = \widetilde{m}(V) = \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(V - X)$, az (1.6) és (1.7) feltételek ekvivalenciája következik. (1.6) nyilván szükséges (1.5)-höz. Figyeljük meg, hogy $f := m$-re (1.6) és (1.3) ugyanaz, így az 1.3.7 tételből kapjuk, hogy van olyan irányítása G-nek, amelyre $\varrho(v) \geq m(v)$ minden v csúcsra. Mivel $|E| = \sum[\varrho(v) : v \in V] \geq \sum[m(v) : v \in V] = \widetilde{m}(V) = |E|$, minden v pontra egyenlőség áll, azaz $\varrho(v) = m(v)$. □

3. Gyakorlat. *Legyenek ϱ és ϱ' a G két irányításának befokfüggvényei, amelyekre $\varrho(v) = \varrho'(v)$ minden v csúcsra. Igazoljuk, hogy ekkor $\varrho(X) = \varrho'(X)$ minden $X \subseteq V$-re.*

17. Feladat. *Legyen U a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak egy részhalmaza. Mutassuk meg, hogy egy $m' : U \to \mathbf{Z}$ függvényhez akkor és csak akkor létezik G-nek olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) = m'(v)$ minden $v \in U$-ra, ha $i_G(X) \leq \leq m'(X) \leq e_G(X)$ fennáll minden $X \subseteq U$ halmazra.*

18. Feladat. *Egy 2-élösszefüggő gráfnak létezik erősen összefüggő közel-Euler irányítása.*

Fentebb már említettük, hogy egy irányítatlan Euler-gráf mindig irányítható úgy, hogy minden pontnak a befoka egyenlő a kifokával. Az alábbi általánosítás önmagában is érdekes, de az élidegen utakról szóló fejezetben meglepő alkalmazásra is lel majd.

1.3.6. Következmény (Ford és Fulkerson)**.** *Adott egy $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, amely a $G = (V, E)$ irányítatlan és $D = (V, A)$ irányított gráfok összetevésével keletkezett. Akkor és csak akkor lehet úgy irányítani E elemeit, hogy az előálló irányított gráf Euler-féle legyen* (azaz minden pont befoka megegyezzék a kifokával)*, ha M-ben minden pont páros sok* (irányított és irányítatlan) *éllel szomszédos, azaz*

$$\delta_D(v) + \varrho_D(v) + d_G(v) \text{ páros,} \tag{1.8}$$

és

$$d_G(X) \geq \varrho_D(X) - \delta_D(X) \text{ teljesül minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{1.9}$$

Bizonyítás. A G egy $\vec{G} = (V, \vec{E})$ irányításának befok-, illetve kifokfüggvényét jelölje $\varrho_{\vec{G}}$ és $\delta_{\vec{G}}$. $D+\vec{G}$ akkor Euler-féle, ha minden v csúcsra $\varrho_D(v)+\varrho_{\vec{G}}(v) = = \delta_D(v) + \delta_{\vec{G}}(v)$, ami $\varrho_{\vec{G}}(v) + \delta_{\vec{G}}(v) = d_G(v)$ miatt azzal ekvivalens, hogy $\varrho_{\vec{G}}(v) = (\delta_D(v) - \varrho_D(v) + d_G(v))/2$. A jobb oldalt jelöljük $m(v)$-vel. Ez (1.8) miatt egész. Alkalmazzuk az 1.3.5 következményt, és figyeljük meg, hogy az m adott választásánál (1.9) ekvivalens az (1.6) feltétellel. □

19. Feladat. *Az 1.3.5 következményt használva vezessük le Hall tételét.* (Segítség: A $G = (S, T; E)$ páros gráf éleinek keressünk olyan irányítását, amelyben minden S-beli pont befoka 1 és minden T-beli t pont befoka $d_G(t) - 1$.)

20. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az 1.3.7 tétel bizonyításában szereplő útátfordítós technika az előbbi feladat megoldása nyomán a Kőnig-tételre leírt javítóutas bizonyítást adja vissza.*

21. Feladat. *Bizonyítsuk be az* 1.3.5 *következményt a Hall-tételre támaszkodva.* (Segítség: készítsünk el egy páros gráfot úgy, hogy G minden élét osszuk fel egy ponttal [ezen osztópontok alkotják a páros gráf pontjainak egyik osztályát], továbbá minden v pontját helyettesítsük $m(v)$ ponttal. Az így kapott páros gráf egy teljes párosítása G egy (1.5)-öt teljesítő irányításának felel meg, míg a Hall-féle feltétel az (1.6) feltétellel ekvivalens.)

22. Feladat. *Az 1.3.7 tétel segítségével adjuk meg annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy adott páros gráfnak létezzék olyan részgráfja, amelyben minden pont fokszáma előre megadott korlátok közé esik.*

23. Feladat. *Az előző feladatot felhasználva adjuk meg annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy irányított gráfnak létezzék olyan részgráfja, amelyben minden pont befoka is és kifoka is előre megadott korlátok közé esik.*

24. Feladat. *Az 1.3.4 következmény segítségével igazoljuk az alábbi eredményt, amely a linking tulajdonság egy korai megjelenése.*

1.3.7. Következmény (Mendelssohn és Dulmage)**.** *Ha egy $G = (S,T;E)$ páros gráfban létezik olyan párosítás, amely fedi az $X \subseteq S$ halmazt, és létezik olyan párosítás, amely fedi az $Y \subseteq T$ halmazt, akkor létezik olyan párosítás is, amely egyszerre fedi X-et és Y-t.*

25. Feladat. [Landau tétele] *Legyen $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$ nem-negatív egészeknek egy sorozata. Akkor és csak akkor létezik olyan turnament, amelyben az i-edik pont befoka m_i, ha $\sum_{i=1}^{n} m_i = n(n-1)/2$ és $\sum_{i=1}^{k} m_i \leq k(k-1)/2 + k(n-k)$ minden $1 \leq k \leq n$ értékre.*

26. Feladat. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráfban s és t két olyan csúcs, melyekre $\varrho_D(s) = 0 = \delta_D(t)$ és tegyük fel, hogy*

$$\varrho(T) \geq k \text{ fennáll minden } t\bar{s}\text{-halmazra.} \tag{1.10}$$

*Igazoljuk, hogy D tartalmaz egy olyan D' részgráfot, amelyben $\varrho'(v) = \delta'(v)$ teljesül minden $v \in V - \{s,t\}$ pontra és $\delta'(s) = k = \varrho'(t)$. Vezessük le ebből a Menger-tétel élidegen változatát, amely szerint D-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen út s-ből t-be, ha (*1.10*) fennáll.* (Segítség: Legyen G az az irányítatlan gráf, amelyet D-ből kapunk az élek irányításának elhagyásával. Keressünk G-nek olyan $\vec{G}$ irányítását, amelyben minden $v \in V - \{s,t\}$ pont befoka az eredeti, s befoka k, és t befoka $\varrho_D(t) - k$. D azon élei által alkotott D' részgráf, melyek $\vec{G}$-ben fordítva vannak, jó lesz.)

Irányítások egy alkalmazása

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf minden v pontján adott tiltott fokszámok egy $F(v) \subseteq \{0,1,\ldots,d_G(v)\}$ halmaza. A G egy $G' = (V, E')$ részgráfja **F-elkerülő**, ha $d_{G'}(v) \notin F(v)$ minden v csúcsra.

1.3.8. Tétel (Shirazi és Verstraëte)**.** *Ha*

$$|F(v)| \leq \lfloor d_G(v)/2 \rfloor \text{ minden } v \text{ csúcsra,} \tag{1.11}$$

akkor G-nek létezik F-elkerülő részgráfja.

Láttuk, hogy minden G gráfnak van $D = (V, \vec{E})$ közel-Euler irányítása. Ebben minden v pontra $\varrho_D(v) \geq \lfloor d_G(v)/2 \rfloor$, és így az alábbi eredményből következik az 1.3.8 tétel.

1.3.9. Tétel. *Ha egy G gráfnak van olyan $D = (V, \vec{E})$ irányítása, amelyben minden v pontra $\varrho_D(v) \geq |F(v)|$, akkor G-nek létezik F-elkerülő részgráfja.*

Bizonyítás. Élszám szerinti indukció. Egy $e \in E$ élre jelölje $\vec{e}$ a megfelelő irányított élt D-ben. Ha a 0 semelyik csúcsban sem tiltott fokszám, akkor a $(V, \emptyset)$ élmentes részgráfja G-nek F-elkerülő. Tegyük fel, hogy $0 \in F(t)$ valamely t csúcsra. Ekkor $\varrho_D(t) \geq |F(t)| \geq 1$ és ezért van olyan $e = st$ él G-ben, amelyre $\vec{e}$ t felé van irányítva.

Legyen $G^- := G - e$ és $D^- := D - \vec{e}$. Definiáljuk F^--t a következőképp. Legyen $F^-(t) := \{i - 1 : i \in F(t) \setminus \{0\}\}$, $F^-(s) := \{i - 1 : i \in F(s) \setminus \{0\}\}$, végül $z \in V - \{s, t\}$ esetén legyen $F^-(z) := F(z)$. Mivel $|F^-(t)| = |F(t)| - 1$, így $\varrho_{D^-}(v) \geq |F^-(v)|$ fennáll minden v csúcsra. Indukció miatt G^--nak létezik egy F^--elkerülő G'' részgráfja. Az F^- konstrukciójából adódóan G-nek a $G' := G'' + e$ részgráfja F-elkerülő. $\square$

Az 1.3.7 tétel (i) részét az 1.3.9 tétellel kombinálva kapjuk a következőt.

1.3.10. Tétel. *Ha egy G irányítatlan gráfban $e_G(X) \geq \sum[|F(v)| : v \in X]$ minden $X \subseteq V$ részhalmazra fennáll, akkor G-nek létezik F-elkerülő részgráfja.*

27. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy összefüggő gráfnak mindig van olyan irányítása, amelyben egy esetleges pont kivételével minden pont befoka páratlan.*

Nyitott probléma. Keressünk az utóbbi feladatnak és tételnek közös általánosítását.

1.4. Algoritmikus bizonyítások III: helyi javítások

A javító utakat használó megfontolások hasznos bizonyítási (és algoritmikus) eszköznek bizonyultak, hátrányuk viszont, hogy egy lépés viszonylag nagymérvű változtatással jár: a Kőnig-tétel bizonyításában például egy teljes alternáló út mentén történő cserével, vagy az 1.3.7 irányítási tételben egy egész egyirányú út egyszerre való átirányításával. A mohó eljárások ehhez képest sokkal jobbak voltak, mert ott valamilyen elv szerint haladtunk a cél felé, javítgatás már nem történt. A kettő között el lehet képzelni egy olyan eljárást, amelyben van ugyan javítgatás, de ezek mindegyike csupán lokális, kis léptékű változtatás. Például az irányítási feladatban egyszerre mindig csak egy él irányítását fordítjuk meg, vagy a párosítási feladatban egyszerre csak egy párosításbeli élt cserélünk fel egy kinti élre. Az alábbiakban egy ilyen jellegű megközelítést adunk meg. Először új bizonyítást adunk az 1.3.7 tétel első részének nemtriviális irányára.

1.4.1. Irányítások

A tétel a következő volt.

1.4.1. Tétel. *A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik olyan irányítása, amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$e(X) \geq \widetilde{f}(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{1.12}$$

Bizonyítás. (Elegendőség) Az eljárás egy tetszőleges irányításból indul. Egy z pontot **többletes**nek, illetve **hiányos**nak nevezünk annak megfelelően, hogy $\varrho(z) > f(z)$ vagy $\varrho(z) < f(z)$. Legyen $n = |V|$. Végig fenntartunk egy $\Theta :$ $: V \to \{0,1,\ldots,n\}$ szintfüggvényt, amelyről azt követeljük meg, hogy

$$\text{minden többletes pont a 0 szinten van, és} \tag{1.13}$$

$$\text{minden } uv \text{ irányított élre } \Theta(v) \geq \Theta(u) - 1, \tag{1.14}$$

azaz minden él legfeljebb egy szintet lép lefelé. Kezdetben $\Theta \equiv 0$.

Készen vagyunk, ha nincs hiányos csúcs, így tegyük fel, hogy van. Akkor is készen vagyunk, ha van olyan üres szint, amely felett van hiányos csúcs. Ekkor ugyanis az üres szint felett lévő csúcsok Z halmazából nem léphet ki él (hiszen egy ilyen él legalább két szintet lépne lefelé) és így $e(Z) =$ $= \sum_{v \in Z} \varrho(v) < \sum_{v \in Z} f(v) = \widetilde{f}(Z)$, azaz Z megsérti a feltételt. Speciálisan, ha van hiányos csúcs az n-edik szinten, akkor biztosan van üres szint, tehát ez az eset áll fenn.

Az eljárás egy n-edik szint alatti u hiányos csúcsnál kétféle lépést használhat. Amennyiben létezik lefelé menő uv él, amelyre tehát $\Theta(v) = \Theta(u) - 1$, úgy ennek fordítsuk meg az irányítását. Ha nem létezik ilyen él, úgy emeljük meg u szintjét eggyel. Mindkét művelet fenntartja a Θ-ra előírt tulajdonságokat.

Mivel mindig lefelé menő él irányítását fordítjuk meg, így egy uv él két megfordítása között a $\Theta(u) + \Theta(v)$ összeg legalább kettővel nő. Továbbá minden pont szintje legfeljebb n, így a $\Theta(u) + \Theta(v)$ összeg legfeljebb $2n$, és ezért minden élt legfeljebb $n = 2n/2$-ször fordítunk meg. Emiatt élfordításból összesen legfeljebb mn lehet, míg szintemelésből legfeljebb n^2, vagyis az eljárás legfeljebb $2mn$ lépés után véget ér egy olyan irányítással, amelyben nincs hiányos csúcs. □

1.4.2. Párosítások

Nézzük meg, hogy miképp működik a szintező algoritmus Kőnig tételére.

1.4.2. Tétel (Kőnig)**.** *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a maximális elemszámú párosítás ν elemszáma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Bizonyítás. Mivel bármely M párosítás éleinek lefogásához kell legalább $|M|$ pont, így a $\nu = \tau$ egyenlőség igazolásához kell találnunk egy M párosítást és egy L lefogó pontrendszert, melyekre $|M| = |L|$. Feltehetjük, hogy nem létezik izolált pont. Élek egy M részhalmazát **félpárosítás**nak nevezzük, ha S-ben minden pont foka pontosan 1, azaz $s \in S$-re $d_M(s) = 1$ (a T-beli fokokra nincs megkötés). Legyen $n = |T|$.

Az eljárás során adott egy $\Theta : T \to \{0,1,\ldots,n =\}$ szintfüggvény, amelyre

$$\text{minden } M \text{ által fedetlen pont szintje 0, és} \tag{1.15}$$

$$u \in S, uv \in M, uz \in E - M \text{ esetén } \Theta(z) \geq \Theta(v) - 1. \tag{1.16}$$

Nevezzünk egy T-beli t csúcsot **aktív**nak, ha $d_M(t) \geq 2$. Amíg ilyen létezik, tekintsünk egy aktív t pontot az n-edik szint alatt. Ha ehhez vannak $e = st \in M$ és $f = sz \in E - M$ élek, melyekre $\Theta(z) = \Theta(t) - 1$, akkor legyen $M := M - e + f$. Amennyiben ilyen élek nem léteznek, emeljük meg eggyel t szintjét. Mindkét művelet megőrzi a feltételeket.

Az eljárás vagy akkor ér véget, ha nincs több aktív pont, azaz M párosítás, mert ekkor M bizonyosan maximális elemszámú, hiszen $L := S$ lefogja a gráf összes élét. Vagy pedig akkor, ha minden aktív pont a legfelső, n-edik szinten van. Ekkor ugyanis létezik üres szint. Jelölje Z az ennél magasabb szintű pontok halmazát, és legyen Z' azon S-beli pontok halmaza, melyeknek M-beli szomszédja Z-ben van. Ekkor az (1.16) feltétel miatt Z'-ből kizárólag Z-be megy él, azaz $L := Z \cup (S - Z')$ az összes élt lefogja. Másrészt minden Z-beli és minden $S - Z'$-beli pontnál kiválasztva egy M-beli élt egy $|L|$ elemszámú párosítást kapunk.

Az eljárás során a fedetlen pontok száma sohasem nő, és így legfeljebb n-szer csökken. Ha mindig a legalacsonyabb szintű aktív ponttal dolgozunk, akkor legfeljebb n élcsere után vagy a fedetlen pontok száma csökken vagy szintemelés következik, így legfeljebb n^3 lépés után az eljárás véget ér. □

A fent leírt **szintező eljárás**t (push-relabel néven) Goldberg és Tarjan dolgozta ki maximális folyamok kiszámítására. Az irányítási probléma és a párosítási probléma is egyszerűbb, és jobban mutatja az eljárás lényegét. Az alábbiakban bemutatjuk az eljárás egy változatát a folyamprobléma egy enyhe kiterjesztésére.

1.4.3. A szintező algoritmus megengedett m-áramok kiszámítására

A Ford és Fulkerson által bevezetett növelőutas módszer, illetve annak Edmonds és Karp, illetve Dinits által finomított változata segítségével erősen polinomiális időben, nevezetesen $O(nm^2)$ lépésben meg tudtunk határozni egy s-ből t-be menő maximális nagyságú folyamot és egy minimális vágást.

Az alábbiakban bemutatunk egy ettől gyökeresen különböző eljárást, az úgynevezett **szintező algoritmus**t, amely minden szempontból felülmúlja a növelőutas módszert. (Az angol nyelvű szakirodalomban az ilyen típusú eljárásokat *push-relabel* algoritmusnak hívják, mi a szintező eljárás nevet használjuk). A Goldbergtől és Tarjantól származó eljárás elvileg is és a gyakorlatban is hatékonyabb a növelőutas algoritmusnál. Nem használ növelő utakat, nem használ segédgráfot, sőt még folyamokat sem! Egyetlen lépése csak kicsiny, lokális változtatásból áll (szemben a növelőutas eljárásnak egy egész út mentén történő változtatásával), és helyességének, illetve a lépésszámára adott korlátnak bizonyítása is egyszerű.

Legyen $D = (V, A)$ digráf élhalmazán adott az $f : A \to \mathbf{R}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : A \to \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f \leq g$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ függvény (vagy vektor) **megengedett**, ha $f \leq x \leq g$. Legyen $\varrho_x(Z) := \sum[x(e) : e \in A$ belép Z-be$]$, $\delta_x(Z) := \varrho_x(V - Z)$ és $\Psi_x(Z) := \varrho_x(Z) - \delta_x(Z)$ $(Z \subseteq V)$. Könnyen belátható, hogy a Ψ_x függvény moduláris abban az értelemben, hogy

$$\Psi_x(Z) = \sum[\Psi_x(v) : v \in Z]. \tag{1.17}$$

Adott $m : V \to \mathbf{R}$ függvény esetén azt mondjuk, hogy $x : A \to \mathbf{R}$ **moduláris áram**, röviden m**-áram**, ha

$$\Psi_x(v) = m(v) \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra.} \tag{1.18}$$

Ha $m \equiv 0$, visszajutunk a már ismert áram fogalomhoz. Egy másik speciális esetben $f \equiv 0 \leq g$ és m-et úgy definiáljuk, hogy $m(t) = k$, $m(s) = -k$ két kijelölt s és t pontra, míg $m(v) = 0$ minden más pontra. Ekkor egy megengedett m-áram nem más, mint egy k nagyságú folyam s-ből t-be.

4. Gyakorlat. *Tegyük fel, hogy $\widetilde{m}(V) = 0$. Igazoljuk, hogy x akkor és csak akkor m-áram, ha $\varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq m(v)$ minden v csúcsra. Ha x m-áram, akkor $\varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \widetilde{m}(Z)$ minden $Z \subseteq V$ halmazra.*

1.4.3. Tétel (Hoffman, 1960)**.** *Akkor és csak akkor létezik megengedett m-áram, ha $\widetilde{m}(V) = 0$ és*

$$\varrho_f(X) - \delta_g(X) \leq \widetilde{m}(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{1.19}$$

Ha f, g és m egészértékű és (1.19) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett m-áram is.

28. Feladat. *Vezessük le a $D = (V, A)$ digráfra vonatkozó 1.4.3 tételt azon eggyel több pontú digráfra vonatkozó speciális alakjából, amelyben $m \equiv 0$.*

Hoffman tétele speciális esetben kiadja a következőt.

1.4.4. Tétel. *Akkor és csak akkor létezik k nagyságú megengedett folyam s-ből t-be, ha $\delta_g(S) \geq k$ fennáll minden S $s\bar{t}$-halmazra. Ha g egészértékű, a folyam is választható egészértékűnek.*

A tétel ekvivalens alakban is megfogalmazható.

1.4.5. Tétel (max-flow min-cut, MFMC)**.** *Adott g kapacitás függvény és $D = (V, A)$ digráf esetén a megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, a maximális folyam is választható egészértékűnek.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt a szóban forgó minimum k értékére. □

Tegyük fel, hogy az 1.4.3 tétel feltételei teljesülnek. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy nincsenek párhuzamos élek. Az algoritmus fenntart egy megengedett $x : A \to \mathbf{R}$ vektort és igyekszik az (1.18) követelményt elérni. Egy $v \in V$ pontra akkor mondjuk, hogy **pozitív**, **negatív** vagy **semleges**, ha $\Psi_x(v) - m(v)$ pozitív, negatív vagy nulla. Egy e él **csökkenthető**, ha $x(e) > f(e)$, és **növelhető**, ha $x(e) < g(e)$.

Szinttulajdonságok és megállási szabályok

A megengedett x-en kívül az algoritmus fenntart egy $\Theta : V \to \{0,1,\ldots,n\}$ szintfüggvényt, ahol $\Theta(v)$ a v csúcs szintje. (Szokás szerint n a V csúcshalmaz elemszámát jelöli.) Adott $j \in \{0,1,\ldots,n\}$ szintre az $L_j := \{v \in V : \Theta(v) = j\}$ halmazt **szinthalmaz**nak hívjuk. Tekintsük a következő **szinttulajdonságok**at.

(LP1) Minden negatív csúcs az L_0 szinthalmazban van.
(LP2′) $\Theta(v) \geq \Theta(u) - 1$ minden növelhető uv élre, azaz minden növelhető él legfeljebb egy szintet lép le.
(LP2″) $\Theta(v) \leq \Theta(u) + 1$ minden csökkenthető uv élre, azaz minden csökkenthető él legfeljebb egy szintet lép fel.

Az algoritmus futása akkor fejeződik be, ha a következő két **megállási szabály** egyike bekövetkezik.

(A) Nincs pozitív csúcs.

(B) Létezik egy z pozitív csúcs és a szintje alatt egy üres L_j szinthalmaz (azaz $j < \Theta(z)$).

1.4.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy x és Θ teljesítik a szinttulajdonságokat. Ekkor* **(A)** *esetén x megengedett m-áram, míg* **(B)** *esetén a $Z := \{v \in V : : \Theta(v) \geq j\}$ halmaz megsérti az (1.19) feltételt.*

Bizonyítás. Ha nincs pozitív csúcs, akkor $\widetilde{m}(V) = 0 = \Psi_x(V)$ miatt negatív sincs, és így x megengedett m-áram.

Tegyük fel, hogy **(B)** teljesül. Miután (LP1) miatt minden negatív csúcs L_0-ban van, Z nem tartalmaz negatív csúcsot. Ugyanakkor Z tartalmazza a pozitív z-t és ezért $\Psi_x(Z) = \sum[\Psi_x(v) : v \in Z] > \widetilde{m}(Z)$. Másrészről az L_j szinthalmaz üressége miatt minden Z-ből kilépő e él legalább két szintet lép le és ezért (LP2$'$) folytán $x(e) = g(e)$, vagyis $\delta_x(Z) = \delta_g(Z)$. Hasonlóképp, minden Z-be lépő e él legalább két szintet lép fel, és így (LP2$''$) miatt $x(e) = = f(e)$ vagyis $\varrho_x(Z) = \varrho_f(Z)$. A kettőből $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = = \Psi_x(Z) > \widetilde{m}(Z)$ adódik, mutatva, hogy Z megsérti (1.19)-et. □

Alapműveletek egy pozitív z csúcsnál

Az algoritmus egy közbenső, általános helyzetében adott egy $x : A \to \mathbf{R}$ megengedett vektor és egy Θ szintfüggvény, melyek teljesítik a szinttulajdonságokat. Tegyük fel, hogy egyik megállási szabály sem áll fenn.

Egy z pozitív csúcsra bizonyosan $\Theta(z) < n$, mert $\Theta(z) = n$ esetén létezne z alatt üres szinthalmaz, azaz **(B)** fennállna. Két alapműveletet alkalmazhatunk z-nél: élértékcsere (push) és csúcsemelés (relabel).

Élértékcsere z-nél módosítja $x(e)$-t egy z-ben kezdődő vagy végződő e élen, a következőképp.

(Növelés) Ha $e = zu$ növelhető él, amely lelép z-ből, akkor növeljük $x(e)$-t az $\alpha := \min\{g(e) - x(e), \Psi_x(z) - m(z)\}$ értékkel.
(Csökkentés) Ha $e = uz$ csökkenthető él, amely fellép z-be, akkor csökkentsük $x(e)$-t az $\alpha := \min\{x(e) - f(e), \Psi_x(z) - m(z)\}$ értékkel.

Csúcsemelés z-nél Amennyiben élértékcsere nem alkalmazható z-nél, emeljük meg z szintjét eggyel, azaz növeljük eggyel a $\Theta(z)$ értéket.

1.4.7. Lemma. *Az alapműveletek megőrzik a megengedettséget és a szinttulajdonságokat.*

Bizonyítás. Az α definíciója miatt egy élértékcsere fenntartja a megengedettséget. Mivel nem hoz létre új negatív csúcsot, az (LP1) tulajdonság is fennmarad. Miután egy élértékcsere csak olyan uv élen okoz változást, amelyre $|\Theta(u) - \Theta(v)| = 1$, az (LP2) tulajdonság sem (azaz (LP2') és (LP2")) egyike sem) tud elromlani.

Egy csúcsemelés z-nél nem érinti (LP1)-et, hiszen $\Theta(z)$-t csak akkor növeljük, ha z pozitív csúcs. Megőrzi (LP2)-t is, mert csak akkor alkalmazhatjuk, ha már nincsen z-ből lelépő növelhető, vagy z-be fellépő csökkenthető él. □

Az eljárás és lépésszámbecslés

Az algoritmus tetszőleges $x : A \to \mathbf{R}$ vektorral indul, amelyre $f \le x \le g$, továbbá Θ kezdetben azonosan nulla. Egy közbenső helyzetben adott egy megengedett x és egy Θ szintfüggvény, melyekre fennállnak a szinttulajdonságok. Ha nincsen pozitív csúcs, akkor az adott x megengedett m-áram és az algoritmus futása befejeződik.

Ameddig van pozitív csúcs, az algoritmus kiválaszt közülük egy legmagasabb szinten lévőt és a következőképpen kezeli. Amíg csak z pozitív marad és van belőle lelépő növelhető vagy z-be fellépő csökenthető él, alkalmazzuk az élértékcsere műveletet z-nél. Ha ezek után z még mindig pozitív marad, alkalmazzuk a csúcsemelést z-nél. Ennek megfelelően a z kezelésének a végére z vagy semlegessé vált vagy a szintjét megemeltük.

Az egyik lehetséges leállási mód az, amikor egy élérték csere nyomán **(A)** igazzá válik: a kapott x megengedett m-áram az 1.4.6 lemma folytán. A másik lehetséges leállási mód az, amikor egy csúcsemelés nyomán **(B)** igazzá válik, vagyis a z emelésekor a z (emelés előtti) szinthalmaza kiürül. Ekkor a $Z = \{v : \Theta(v) \ge \Theta(z)\}$ halmaz megsérti (1.19)-et az 1.4.6 lemma miatt.

Hoffman 1.4.3 tételének nemtriviális iránya rögtön következik, amint belátjuk, hogy a megállási szabályok egyike véges sok lépés után bizonyosan bekövetkezik. Valójában érvényes a következő élesebb becslés.

1.4.8. Lemma. *Legfeljebb n^3 alapművelet után* **(A)** *vagy* **(B)** *bekövetkezik.*

Bizonyítás. Azt mondjuk, hogy egy z-nél lévő e élen végrehajtott élérték csere **semlegesítő**, ha z-t semlegessé teszi (amely akkor fordul elő, ha $\alpha = \Psi_x(z) - m(z)$). Az algoritmus egy **fázis**án a futásnak egy olyan maximális szakaszát értjük, melynek során a Θ függvény változatlan. Miután egy csúcsnál legfeljebb n szintemelés lehet, a fázisok teljes száma legfeljebb n^2.

Egy z' csúcsnál végrehajtott élértékcsere csak egy z' alatti csúcsot alakíthat pozitívvá, a legmagasabb szint választási szabály miatt, ha a z csúcs semlegessé válik, ugyanabban a fázisban már nem lesz újra pozitív. Emiatt egy fázison belül legfeljebb n semlegesítő élértékcsere fordulhat elő, és így a semlegesítő élértékcserék teljes száma legfeljebb n^3.

Egy nem semlegesítő élértékcsere az e élen vagy növeli $x(e)$-et $g(e)$-re, amivel nemnövelhetővé teszi e-t, vagy csökkenti $x(e)$-t $f(e)$-re, amivel nemcsökkenthetővé teszi e-t. Emiatt egy nem semlegesítő élértékcsere műveletet követően csak akkor kerülhet újra sor az e élen élértékcserére, ha a $\Theta(z) - \Theta(u)$ előjele megfordul. Ekkorra viszont a $\Theta(z) + \Theta(u)$ összeg legalább kettővel megnőtt. Emiatt a nem semlegesítő élértékcserék száma egy e élen legfeljebb n, és így a nem semlegesítő élértékcserék teljes száma legfeljebb $|A|n \leq n^3$. □

Összefoglalva, az algoritmus futása legfeljebb $O(n^3)$ élértékcsere és csúcsemelés után befejeződik. Megjegyzendő, hogy alkalmas adatstruktúra használatával biztosítható, hogy az alapműveletek konstans időben végrehajthatók, ezért a szintező algoritmus teljes lépésszáma $O(n^3)$.

A leginkább sértő halmaz kiszámítása

Amnnyiben nem létezik megengedett m-áram, a fenti algoritmus megtalált egy (1.19)-et megsértő Z halmazt. Az eljárás minimális módosításával egy legjobban sértő Z halmaz is megkereshető, azaz egy olyan, amelyre $\varrho_f(X) - \delta_g(X) - \widetilde{m}(X)$ a lehető legnagyobb.

A módosítás abból áll, hogy a futás nem ér véget, amikor egy szintemelés nyomán egy szint kiürül. Ennek következtében lehetnek csúcsok a legfelső L_n szinten, és emiatt z választását úgy módosítjuk, hogy mindig az n-edik szint alatti legfelső pozitív csúcsot választjuk. Az algoritmus akkor ér véget, ha már nincs pozitív csúcs az n-edik szint alatt. Ha egyáltalán nincs pozitív csúcs, akkor az aktuális x megengedett m-áram, és ilyenkor nincsen sértő halmaz.

1.4.9. Tétel. *Ha a módosított algoritmus futásának befejezésekor van pozitív csúcs, akkor egy üres szint feletti pontok Z halmaza a legjobban sérti (1.19)-et, azaz*

$$\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) - \widetilde{m}(Z) \geq \varrho_f(X) - \delta_g(X) - \widetilde{m}(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re.} \tag{1.20}$$

Bizonyítás. Mivel Z minden pozitív csúcsot tartalmaz, de negatívat nem, $\Psi_x(Z) - \widetilde{m}(Z) = \sum[\Psi_x(v) - m(v) : v \in Z] \geq \sum[\Psi_x(v) - m(v) : v \in X] = \Psi_x(X) - \widetilde{m}(X)$ tetszőleges $X \subseteq V$-re, amiből $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) - \widetilde{m}(Z) = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) - \widetilde{m}(Z) = \Psi_x(Z) - \widetilde{m}(Z) \geq \Psi_x(X) - \widetilde{m}(X) \geq \varrho_f(X) - \delta_g(X) - \widetilde{m}(X)$. □

Maximális nagyságú st-folyam kiszámítása

Amint már említettük, Hoffman tétele az $f \equiv 0 \leq g$, $m(t) = k, m(s) = -k$, és $m(v) = 0 \ \ (v \in V - \{s,t\})$ választással az 1.4.4 tételre specializálódik. Ebben az esetben egy m-áram épp egy megengedett k nagyságú folyam. Továbbá, ha az S megsérti (1.19)-et, azaz $-\delta_g(S) = \varrho_f(S) - \delta_g(S) > \widetilde{m}(S)$, akkor $0 \leq \delta_g(S) < -\widetilde{m}(S)$ és ezért $s \in S \subseteq V - t$ és $\widetilde{m}(S) = -k$.

Amikor az elvárt k folyamnagyság előre adott, a fenti (módosított) algoritmus vagy megad egy k nagyságú st-folyamot, vagy megad egy olyan S

$s\bar{t}$-halmazt, melyre $\delta_g(S) < k$. Ha k nincs előre megadva, hanem maximális nagyságú folyamot keresünk, akkor alkalmazzuk első menetben a fenti algoritmust a $k := \delta_g(s)$ értékre. Amennyiben létezik k nagyságú st-folyam, akkor ez bizonyosan maximális nagyságú, hiszen $S := \{s\}$ egy minimális vágást definiál. Ha nem létezik k nagyságú st-folyam, akkor a módosított algoritmus megtalál egy legjobban sértő S $s\bar{t}$-halmazt, vagyis egy olyat, amelyre $\delta_g(S)$ minimális. Legyen $k' := \delta_g(S)$. Az MFMC tétel miatt biztosan létezik k' nagyságú st-folyam, és ezért az algoritmust k'-re újra futtatva ezt kiszámíthatjuk.

Megjegyzendő, hogy Goldberg és Tarjan eredeti algoritmusa egyetlen menetben számolja ki a maximális st-folyamot (és nem kettőben), viszont meg kell engednie, hogy a csúcsok az n-dik szint fölé is kerülhessenek. Emiatt külön igazolni kell, hogy a csúcsok nem tudnak a $2n-1$-edik szint fölé menni.

Egy speciális eset

Ha valaki a fenti eljárást vagy a bizonyítást kissé bonyodalmasnak érzi, érdemes a következő speciális esetet külön átgondolnia.

Tegyük fel, hogy $f \equiv 0, g \equiv \infty$. Ekkor az x megengedettsége egyszerűen azt jelenti, hogy x nemnegatív. Az $x(e)$ mindig növelhető, és akkor csökkenthető, ha pozitív. Hoffman tétele a következőképp egyszerűsödik.

1.4.10. Tétel. *Akkor és csak akkor létezik nemnegatív m-áram, ha $\widetilde{m}(V) = 0$ és*

$$0 \leq \widetilde{m}(X) \text{ minden olyan } X \subseteq V\text{-re, amelyből nem lép ki él.} \tag{1.21}$$

Ha m egészértékű és (1.21) fennáll, akkor létezik egészértékű nemnegatív m-áram is.

A szinttulajdonságok az alábbiakra egyszerűsödnek.

(LP1) Minden negatív csúcs az L_0 szinthalmazban van.
(LP2′) Minden él legfeljebb egy szintet lép le.
(LP2″) Minden pozitív értékű él legfeljebb egy szintet lép fel.

Az 1.4.6 lemma **(B)** részének bizonyítása is kicsit egyszerűbbé válik: Mivel (LP1) miatt minden negatív csúcs L_0-ban van, Z nem tartalmaz negatív csúcsot. Ugyanakkor Z tartalmazza a pozitív z-t és ezért $\Psi_x(Z) = \sum[\Psi_x(v) : : v \in Z] > \widetilde{m}(Z)$. Másrészről, az L_j szinthalmaz üressége miatt minden Z-ből kilépő e él legalább két szintet lép le és ezért (LP2′) folytán ilyen él nem létezhet. Továbbá minden Z-be lépő e él legalább két szintet lép fel és így (LP2″) miatt $x(e) = 0$, vagyis $\varrho_x(Z) = 0$. A kettőből $0 = \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) = \Psi_x(Z) > > \widetilde{m}(Z)$ adódik, mutatva, hogy Z megsérti (1.19)-et.

Az élértékcsere művelet is egyszerűsödik.

(Növelés) Ha $e = zu$ él lelép z-ből, akkor növeljük $x(e)$-t a $\Psi_x(z) - m(z)$ értékkel. (Ezáltal z semlegessé válik).
(Csökkentés) Ha $e = uz$ csökkenthető él, amely fellép z-be, akkor csökkentsük $x(e)$-t az $\alpha := \min\{x(e), \Psi_x(z) - m(z)\}$ értékkel.

1.5. Szétszedés pontos halmaz mentén

Az eddig vizsgált konstruktív technikák után most bemutatunk egy számos területen használható nemkonstruktív bizonyítási megközelítést. Sok esetben ez szinte közvetlenül elvezet a bizonyításhoz, máskor pedig nagyban egyszerűsíti azt.

Kőnig, Hall, Menger és Dilworth tételei

Az 1.3.1 részben a Kőnig-tételből vezettük le Hall tételét. Most lássunk egy nemkonstruktív, közvetlen bizonyítást.

1.5.1. Tétel (Hall). *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A minden X részhalmazára teljesül az ún. Hall-feltétel, azaz*

$$|\Gamma(X)| \geq |X|, \tag{1.22}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

Bizonyítás. (Halmos és Vaughan) A feltétel szükségessége kézenfekvő. Az elegendőséget az A méretére vonatkozó indukcióval látjuk be. Először tegyük fel, hogy A minden valódi nemüres részhalmazára az 1.22 feltétel szigorú egyenlőtlenséggel teljesül. Ekkor a gráf tetszőleges uv élére ($u \in A$) az u és v kihagyásával keletkező G' gráfban még mindig teljesül a Hall-feltétel, így indukció miatt G'-ben létezik $A - u$-t fedő párosítás, amit az uv éllel kiegészítve A-t fedő párosítást kapunk.

Tegyük most fel, hogy létezik A-nak egy A' valódi nemüres részhalmaza, melyre $|\Gamma(A')| = |A'|$. Ekkor egyrészt az $A' \cup \Gamma(A')$ által feszített G' részgráfban teljesül a Hall-feltétel, hiszen egy $X \subseteq A'$ halmaz G'-beli szomszédai ugyanazok, mint a G-beli szomszédai. Emiatt, indukcióval, létezik G'-ben A'-t fedő M' párosítás. Másrészt állítjuk, hogy az $A' \cup \Gamma(A')$ törlésével keletkező G'' gráfban az $A'' := A - A'$ halmaz X részhalmazaira teljesül a Hall-feltétel. Valóban, mivel $\Gamma''(X) = \Gamma(A' \cup X) - \Gamma(A')$, ezért a Hall-feltételt $A' \cup X$-re alkalmazva kapjuk, hogy $|\Gamma''(X)| = |\Gamma(A' \cup X)| - |\Gamma(A')| \geq |A' \cup X| - |A'| = |X|$. Ezután, ismét indukciót használva, egy A-t fedő párosítást kaphatunk. $\square$

1.5.1. Következmény (Kőnig élszínezési tétele)**.** *$G = (A, B; E)$ Δ-reguláris páros gráf kromatikus indexe Δ. Más szóval G élhalmaza felbomlik Δ teljes párosításra.*

Bizonyítás. Δ szerinti indukciót használva elegendő azt igazolnunk, hogy G-nek létezik teljes párosítása. Az A egy X részhalmazára tekintsük az X és $\Gamma(X)$ által feszített $G' = (X, \Gamma(X); E')$ részgráfot. G regularitását kihasználva kapjuk, hogy $\Delta|X| = |E'| \leq \Delta|\Gamma(X)|$, és így a Hall-tétel alapján létezik teljes párosítás. □

Azt mondjuk, hogy egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak van **reprezentáns rendszere**, ha minden hiperéléhez hozzá lehet rendelni egy elemét úgy, hogy különböző hiperélekhez különböző elemeket rendelünk.

1.5.2. Tétel. *Egy hipergráfnak akkor és csak akkor van reprezentáns rendszere, ha bármely j élének egyesítése legalább j elemű.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Hall-tételt a hipergráfhoz tartozó páros gráfra. □

A pontos halmaz mentén történő szétszedés módszere olyan esetekben használható, amikor bizonyos feltételek fennállása esetén valamely konfiguráció létezését akarjuk igazolni. A lényege abban áll, hogy vagy valami egyszerű redukciót végre tudunk hajtani a feltételek megsértése nélkül és ekkor indukcióval készen vagyunk, vagy pedig egy „kritikus" (másszóval pontos) halmaz mentén két (esetleg több) kisebb részre bontjuk a feladatot, és az azokra induktívan nyert megoldások összeragasztásával az eredeti feladat megoldását kapjuk. Gyakran ez a megközelítés a teljes bizonyításhoz elegendő, de ha nem, akkor is jelentős egyszerűsítést tesz lehetővé. Lássuk a módszer néhány további alkalmazását.

1.5.3. Tétel (Dilworth)**.** *Egy P részbenrendezett halmazban a fedő láncok minimális száma egyenlő az antiláncok maximális méretével. Azaz P akkor és csak akkor fedhető le k lánccal, ha nincs k-nál nagyobb antilánc.*

Bizonyítás. Mivel láncnak és antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a feltétel szükséges. Az elegendőség igazolásához jelölje k a maximális antilánc méretet. A tétel triviális, ha nincs két összehasonlítható elem, így tegyük fel, hogy nem ez a helyzet.

Legyen u egy minimális elem és v egy u-nál nagyobb maximális. Amennyiben u és v kihagyása után már nincs k elemű antilánc, úgy indukcióval a maradék halmaz $k-1$ lánccal lefedhető. Ehhez hozzávéve az $\{u, v\}$ (kételemű) láncot az egész P-nek egy k láncból álló fedését kapjuk.

Feltehetjük tehát, hogy van egy k elemű A antilánc, amely sem u-t, sem v-t nem tartalmazza. Jelölje A^+ azon x elemek halmazát, melyekre $x > a$

valamely $a \in A$ elemre. Mivel A antilánc, $A \cap A^+ = \emptyset$, továbbá $A \cup A^+$-ban a minimális elemek halmaza éppen A. A v maximalitása miatt $v \in A^+$, míg u minimalitása miatt $u \notin A \cup A^+$. Indukcióval kapjuk, hogy $A \cup A^+$ fedhető k lánccal.

Analóg módon definiálva A^--t, indukcióval kapjuk, hogy $A \cup A^-$-ban a maximális elemek halmaza A, és $A \cup A^-$ is fedhető k lánccal.

Miután A antilánc, kapjuk, hogy $A^+ \cap A^- = \emptyset$, és a két k tagú lánccsalád a k elemű A mentén összeilleszthető P-nek egy k láncból álló fedésévé. □

1.5.4. Tétel. *Ha egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban minden pont foka pozitív, akkor a pontokat fedő élek minimális φ száma egyenlő G független pontjainak maximális α számával.*

Bizonyítás. Tekintsük azt a részbenrendezést $S \cup T$-n, amelyben egy $s \in S$ elem pontosan akkor nagyobb egy $t \in T$ elemnél, ha $st \in E$. Alkalmazzuk a Dilworth-tételt, és figyeljük meg, hogy minden egyelemű lánc kiterjeszthető kételeművé, hiszen G-ben minden pontnak van szomszédja. □

1.5.5. Lemma (Gallai). *Ha egy n pontú $G = (V, E)$ gráfban minden pont foka pozitív, akkor $\nu + \varphi = n$, és $\alpha + \tau = n$.*

Bizonyítás. Az első részhez legyen M maximális, ν elemű párosítás. M-et, és minden M által nem fedett ponthoz egy rá illeszkedő élt kiválasztva G pontjainak egy $|M| + (n - 2|M|) = n - \nu$ elemű fedését kapjuk, és így $\varphi \leq n - \nu$. Megfordítva, legyen F egy minimális, azaz φ elemű fedése G pontjainak. Legyen az F éleiből álló részgráfnak k komponense. Egy minimális fedésben a komponensek csillagok. Mivel egy csillag az élszámánál eggyel több pontot fed, az F által fedett pontok száma $|F| + k = n$. Mindegyik csillagból kiválasztva egy élt egy k élű párosítást kapunk, tehát $\nu \geq k = n - |F| = n - \varphi$, azaz $\nu + \varphi \geq n$ és így $\nu + \varphi = n$.

A másik azonosság rögtön következik abból a megfigyelésből, hogy egy X ponthalmaz akkor és csak akkor független, ha a komplementere lefogó. □

Az 1.5.4 tétel és az 1.5.5 lemma felhasználásával rögtön megkapjuk Kőnig tételét (1.3.1 tétel), amelyre korábban már mutattunk egy algoritmikus bizonyítást.

29. Feladat. *Tetszőleges gráfban egy M párosítás akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nincs olyan út, amely két fedetlen pontot köt össze és minden második éle M-beli.*

30. Feladat. *Tetszőleges gráfban ha egy halmazt fed párosítás, akkor fed maximális elemszámú párosítás is.*

1.5.6. Tétel (irányított él-Menger). *Egy irányított gráfban akkor és csak akkor vezet s-ből t-be $k \geq 1$ élidegen út, ha minden $s\bar{t}$-halmaz kifoka legalább k.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Amennyiben létezik s-ből t-be egyélű vagy kétélű P út, úgy ennek éleit kihagyva minden $s\bar{t}$-halmaz kifoka pontosan eggyel csökken. A keletkező D'-ben indukcióval létezik $k-1$ élidegen út, melyekhez P-t hozzávéve megkapjuk az eredeti digráf k élidegen útját.

Létezik tehát $e = uv$ olyan él, amely sem s-sel, sem t-vel nem szomszédos. Ha e-t törölve továbbra is minden $s\bar{t}$-halmaz kifoka legalább k, akkor indukcióval készen vagyunk, így feltehetjük, hogy e kilép egy pontosan k kifokú S $s\bar{t}$-halmazból.

Az S összehúzásával keletkező D' digráfban indukció miatt van k élidegen út az S-ből keletkező s' pontból t-be. Hasonlóan, a D-ből a $T := V - S$ összehúzásával keletkező D'' digráfban indukció miatt létezik s-ből kiinduló k élidegen út a T-ből keletkező t'-be. Miután D-ben az S-ből pontosan k él megy ki, ez a két (k útból álló) útrendszer összeilleszthető, és így D-ben kapunk k élidegen utat s-ből t-be. $\square$

1.5.7. Tétel (irányítatlan él-Menger). *Egy irányítatlan gráfban akkor és csak akkor létezik s és t között $k \geq 1$ élidegen út, ha minden $s\bar{t}$-halmaz foka legalább k.*

Az irányítatlan él-Menger tétel bizonyítása az 1.5.6 tétel bizonyításához hasonlóan kapható.

5. Gyakorlat. *Mind az irányított, mind az irányítatlan esetben igazoljuk, hogy adott $S, T \subseteq V$ diszjunkt részhalmazokra az S-ből T-be vezető élidegen utak maximális $\lambda(S,T)$ száma egyenlő azon X halmazok befokainak minimumával, melyekre $T \subseteq X \subseteq V - S$.*

Teljes párosítások

Az eddigi tételek többsége egy szinten van abban az értelemben, hogy egyszerű elemi konstrukciók segítségével egymásra visszavezethetők. Most az előbbieknél mélyebb tétel következik.

1.5.8. Tétel (Tutte). *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha teljesül a Tutte-feltétel, azaz minden $X \subseteq V$ halmazra az X törlésével kapott gráfban a páratlan pontszámú* (röviden páratlan) *komponensek $q(X)$ számára $q(X) \leq |X|$.*

Bizonyítás. Szükségesség. Ha M egy teljes párosítás és $C \subset V$ a csúcsoknak egy páratlan részhalmaza, akkor C-ből lép ki M-beli él. Ezért $X \subseteq V$-re a

$G - X$-ben lévő $q(X)$ darab páratlan komponens mindegyikéből lép ki M-beli él, melynek másik végpontja szükségképpen X-ben van. Így a $q(X) \le |X|$ feltétel valóban szükséges.

Elegendőség. Pontszám szerinti indukcióval bizonyítunk. A 0 pontú gráfra a tétel semmitmondó, ezért feltesszük, hogy $|V| \ge 1$. Az $X = \emptyset$ halmazra a Tutte-feltétel azt adja, hogy G minden komponense páros, és emiatt $|V|$ páros.

Nevezzünk egy $X \subseteq V$ halmazt **pontos**nak, ha $q(X) = |X|$. Egy egyelemű $X := \{v\}$ halmaz bizonyosan pontos, hiszen egyrészt $|V - v|$ páratlansága miatt $q(\{v\}) \ge 1 = |\{v\}|$, másrészt a Tutte-feltétel miatt $q(\{v\}) \le |\{v\}|$, vagyis valóban $q(\{v\}) = |\{v\}|$. Legyen X_0 egy maximális elemszámú pontos halmaz.

1.5.2. Állítás. *$G - X_0$ minden komponense páratlan.*

Bizonyítás. Indirekt, legyen K a $G - X_0$ egy páros komponense. Legyen $v \in K$ tetszőleges elem és $X' := X_0 + v$. Mivel K páros elemszámú, így $q(X') \ge q(X_0) + 1$. Ezt, az X_0 pontosságát, valamint a Tutte-feltételt X'-re használva kapjuk, hogy $q(X') \le |X'| = |X_0| + 1 = q(X_0) + 1 \le q(X')$. Emiatt végig egyenlőség áll, speciálisan $q(X') = |X'|$, vagyis X' is pontos, ellentmondásban X_0 maximalitásával. □

Nevezzünk egy összefüggő gráfot **faktorkritikus**nak, ha bármely pontját kihagyva létezik teljes párosítása. (Egy páratlan kör például faktorkritikus, és könnyen igazolható, hogy egy faktorkritikus gráfhoz egy páratlan „fület" adva faktorkritikus gráfot kapunk.)

1.5.3. Állítás. *$G - X_0$ minden C komponense faktorkritikus.*

Bizonyítás. A C halmaz egy v elemére legyen $V' := C - v$ és $G' = (V', E')$ jelölje a G gráfnak a V' által feszített részgráfját. $X \subseteq V'$-re jelölje $q'(X)$ a $G' - X$ páratlan komponenseinek számát.

Tegyük fel indirekt, hogy G'-nek nincs teljes párosítása. Indukció alapján létezik egy $X_0' \subseteq V'$ halmaz, amelyre $q'(X_0') \ge |X_0'| + 1$, és ráadásul itt nem állhat egyenlőség hiszen $|V'|$ párossága miatt az $|X_0'|$ és $q'(X_0')$ ugyanolyan paritású.

Ekkor az $X_1 := X_0 \cup X_0' + v$ halmazra egyrészt $q(X_1) = [q(X_0) - 1] + q'(X_0') \ge [|X_0| - 1] + |X_0'| + 2 = |X_1|$, másrészt a Tutte-feltétel miatt $q(X_1) \le |X_1|$, vagyis X_1 pontos halmaz, ellentmondásban X_0 maximális választásával. □

Töröljük ki az X_0 által feszített éleket, és a $G - X_0$ komponenseinek mindegyikét húzzuk össze egy-egy pontra. A keletkező páros gráfot jelölje $G_0 = (X_0, Y_0; E_0)$, ahol Y_0 az összehúzott pontok halmaza (és ezért $|X_0| = q(X_0) = |Y_0|$).

1.5.4. Állítás. *G_0-ban van teljes párosítás.*

Bizonyítás. A Hall-tétel alapján elég azt kimutatni, hogy Y_0 részhalmazaira teljesül a Hall-feltétel. Tegyük fel indirekt, hogy Y_0-ban létezik j pont, amelyre az X_0-beli szomszédok X' halmaza j-nél kevesebb pontból áll. Ez azt jelenti, hogy G-ből az X' kihagyásával keletkező komponensek között ott lesz a j pontnak G-ben megfelelő j páratlan komponens, azaz $q(X') \geq j >$ $> |X'|$, ellentmondásban a Tutte-feltétellel. □

A G_0 egy teljes párosítása G-ben egy olyan M' párosításnak felel meg, amely minden X_0-beli pontot egy $G - X_0$-beli páratlan komponenssel köt össze, és ezek mindegyikéből egyetlen pontot fed. Mivel a páratlan komponensek mind faktorkritikusak, az M' párosítás kiegészíthető G teljes párosításává. □

Még a XIX. században tűzték ki a négyszín-sejtést, amely azt állítja, hogy minden síkgráfban lehetséges a tartományokat négy színnel színezni úgy, hogy szomszédos tartományok színe különbözzék (és amelyre mindmáig csak olyan bizonyítás ismert, amely számítógép használatát igényli). Nem túl nehéz igazolni, hogy a négyszín-sejtés ekvivalens azzal, hogy egy 2-élösszefüggő, 3-reguláris síkgráf éleit meg lehet színezni három színnel úgy, hogy azonos színű élek végpontjai különbözőek legyenek. Másként fogalmazva, a gráf élhalmaza felbontható három teljes párosításra. Petersen példával megmutatta, hogy a feltételek közül a síkbeliség nem hagyható ki. Azt azonban sikerült belátnia (jóval a Tutte-tétel előtt), hogy egyetlen teljes párosítás létezéséhez a síkbeliséget nem kell kikötni.

1.5.5. Következmény (Petersen)**.** *Minden 2-élösszefüggő, 3-reguláris $G = (V, E)$ gráfban van teljes párosítás.*

Bizonyítás. Tutte tétele alapján elég a Tutte-feltétel fennállását igazolnunk. Figyeljük meg először, hogy minden C páratlan halmazból legalább 3 él lép ki, hiszen a 3-regularitás miatt páratlan sok, míg a 2-élösszefüggőség miatt legalább kettő.

Legyen $X \subseteq V$ a pontok egy részhalmaza. Tekintsük a gráf éleinek azon F részhalmazát, melyek X és az X elhagyásával keletkező $q(X)$ páratlan komponens között vezetnek. Ekkor F egyrészt e páratlan komponensekből kilépő élek halmaza és így $|F| \geq 3q(X)$, másrészt F minden elemének egyik végpontja X-ben van és így a 3-regularitás miatt $|F| \leq 3|X|$, amiből $q(X) \leq$ $\leq |X|$, tehát a Tutte-feltétel tényleg teljesül. □

1.6. Elemi konstrukciók

Deficites alakok

Ebben a részben bemutatunk néhány egyszerű fogást („elemi konstrukciót”), melyek segítségével meglévő tételeket átalakíthatunk vagy általánosíthatunk. Először mutassuk meg, hogy a Hall-tételből miképp vezethető le annak általánosabb, deficites alakja.

1.6.1. Tétel (Ore)**.** *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban egy párosítás által fedetlen A-beli pontok minimális száma egyenlő az A-beli X részhalmazok $h(X) := |X| - |\Gamma(X)|$ hiányának μ maximumával.*

Bizonyítás. Egy párosítás az X elemei közül legfeljebb $|\Gamma(X)|$-et tud fedni, így legalább $h(X)$ pont fedetlen marad. A fordított irányhoz azt kell kimutatnuk, hogy létezik egy olyan párosítás, amely legfeljebb μ A-beli pontot nem fed. Ennek érdekében egészítsük ki a B halmazt egy μ pontból álló új halmazzal, és ennek minden elemét kössük össze A minden elemével. Az így nyert G' gráfban minden $X \subseteq A$ halmaznak μ új szomszédja van, és ezért G'-re már teljesül a Hall-feltétel. Ebből a Hall-tétel alapján adódik, hogy G'-ben létezik egy M' párosítás, amely fedi A-t. M'-nek legfeljebb μ új éle van, amiket kihagyva G-nek egy olyan párosítását kapjuk, melynek legalább $|A| - \mu$ éle van, azaz amely A-nak legfeljebb μ pontját nem fedi. □

6. Gyakorlat. *Vezessük le egymásból Kőnig és Ore tételeit.*

Ugyanez a megközelítés használható a Tutte-tétel esetén is.

1.6.2. Tétel (Berge–Tutte-formula)**.** *Egy $G = (V, E)$ gráfban egy párosítás által fedetlen pontok minimális száma egyenlő az $X \subseteq V$ részhalmazok $q(X) - |X|$ hiányának μ maximumával. Ekvivalens alakban, a maximális párosítás ν elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq V} \{|V| - (q(X) - |X|)\}/2 \tag{1.23}$$

értékkel.

Bizonyítás. Legyen X olyan halmaz, amelyre $q(X) - |X| = \mu$. Az X elhagyásával $q(X)$ páratlan komponens keletkezik. Ha egy párosítás e páratlan komponensek valamelyikének minden pontját fedi, akkor tartalmaz az X és a komponens között vezető élt. Emiatt legfeljebb $|X|$ teljesen fedett páratlan komponens létezhet, vagyis legalább $q(X) - |X|$ páratlan komponensnek van fedetlen pontja, azaz tetszőleges párosítás legalább $q(X) - |X|$ pontot fedetlenül hagy, és így legalább μ-t.

A megfordításhoz azt kell kimutatnuk, hogy létezik olyan párosítás, amely legfeljebb μ pontot nem fed. Ennek érdekében egészítsük ki V-t egy μ új pontból álló U halmazzal, és ennek minden elemét kössük össze egymással és V minden elemével. Az így kapott G' gráfban ha egy X' halmaz megsérti a Tutte-féle feltételt, akkor X' nem lehet üres, hiszen $q(X) - |X|$ és $|V|$ mindig megegyező paritású, és ezért $\mu + |V|$ páros. Emiatt X'-nek tartalmaznia kell mind a μ új pontot (hiszen azok minden más ponttal össze vannak kötve). Legyen $X := X' - U$. Ekkor $G' - X' = G - X$, és mivel $G' - X'$ az $|X'|$-nél több páratlan komponenst tartalmaz, X hiánya nagyobb, mint $\mu = |U|$, ellentétben μ definíciójával.

A Tutte-tétel alapján adódik, hogy G'-ben létezik egy M' teljes párosítás. M'-nek legfeljebb μ új éle van, amelyeket kihagyva G-nek egy olyan párosítását kapjuk, amely legfeljebb μ pontot hagy fedetlenül. □

31. Feladat. *Igazoljuk a Berge–Tutte-formula alábbi ekvivalens alakját.*

1.6.3. Tétel (Berge–Tutte-formula más alakban)**.** *Egy $G = (V, E)$ gráfban a maximális párosítás ν elemszáma egyenlő a*

$$\min\{|X| + \sum_K \lfloor |K|/2 \rfloor : X \subseteq V\} \tag{1.24}$$

értékkel, ahol az összegzés a $G - X$ gráf K komponenseire megy.

1.6.1. Pontszétnyitás

Kézenfekvő elemi művelet a pontszétnyitás, amelynél egy irányított gráf minden pontját kettővel helyettesítjük, szétosztva közöttük az eredeti pontba be- és kimenő éleket. Több variáns is lehet aszerint, hogy a szétnyitott pont két példánya között vezetünk-e élt vagy sem, illetve megtartjuk-e az élek irányítását vagy sem.

1.6.4. Tétel (Menger, irányított pontváltozat)**.** *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban, amelyben nincs él s-ből t-be, akkor és csak akkor létezik s-ből t-be k belsőleg diszjunkt út, ha az s-ből t-be menő utakat nem lehet k-nál kevesebb $V - \{s, t\}$-beli ponttal lefogni.*

Bizonyítás. (Az él-Mengerből) A feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához készítsünk egy új D' digráfot. Minden u pontot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön u' és u'', de töröljük az s'' és t' csúcsokat. Minden $uv \in A$ élre vegyük D'-be az $u'v''$ élnek k párhuzamos példányát, továbbá minden $u \in V - \{s, t\}$ csúcsra tegyük D'-be az $u''u'$ élt. Amennyiben D'-ben van s'-ből t''-be k élidegen út, úgy a konstrukció miatt ezek k pontidegen útnak felelnek meg az eredeti D-ben. Ha viszont D'-ben nincs k élidegen út, akkor az irányított él-Menger tétel (1.5.6) szerint létezik $k - 1$ él, amely lefogja az összes s'-ből t''-be vezető utat. Ismét csak a konstrukció miatt ezen élek szükségképpen $u''u'$ típusúak, és így $k-1$ $V-\{s,t\}$-beli csúcsnak felelnek meg, melyek lefogják az összes s-ből t-be vezető utat, ellentmondásban a tétel feltevésével. □

7. Gyakorlat. *Vezessük le a Menger-tétel* (eredeti) *irányítatlan pontváltozatát.*

1.6.5. Tétel (Menger, irányítatlan pontváltozat)**.** *Egy $G=(V,E)$ irányítlan gráfban, amelyben nincs él s és t között, akkor és csak akkor létezik s-ből t-be k belsőleg diszjunkt út, ha az s-ből t-be menő utakat nem lehet k-nál kevesebb $V-\{s,t\}$-beli ponttal lefogni.*

8. Gyakorlat. *Vezessük le Hall tételét az irányítatlan pont-Menger-tételből.*

A Menger-tétel egyéb ekvivalens alakokban is megfogalmazható. Például:

1.6.6. Tétel. *Egy $D=(V,A)$ digráfban legyen S és T a csúcsoknak két k elemű diszjunkt részhalmaza. Akkor és csak akkor létezik S-ből T-be k diszjunkt út, ha az S-ből T-be vezető utakat nem lehet k-nál kevesebb ponttal lefogni.*

Bizonyítás. A tétel rögtön következik az 1.6.4 tételből: adjunk D-hez egy új s pontot és minden $v\in S$-re egy sv élt, továbbá egy új t pontot és minden $v\in$ $\in T$-re egy vt-élt. Most azonban egy direkt bizonyítást is bemutatunk, amely a Hall-tételt használja.

Készítsünk egy $G=(A',B'';E)$ páros gráfot a következőképpen. Minden u pontot helyettesítsünk két új csúccsal, melyeket jelöljön u' és u'', de S minden s elemére töröljük az s'' csúcsokat és T minden t elemére töröljük a t' csúcsokat. Az egyvesszős pontok halmazát jelölje A', a kétvesszősökét B''. Minden $uv\in A$ élre vegyük G-be az $u'v''$ irányítatlan élt, továbbá minden $u\in V-S-T$ csúcsra tegyük G-be az $u''u'$ élt.

Amennyiben G-ben van M teljes párosítás, akkor ez meghatároz k diszjunkt utat S-ből T-be. Ugyanis bármely $s\in S$-beli pontra legyen $s'u_1''\in$ $\in M, u_1'u_2''\in M,\dots,u_j't''\in M$, ekkor $s,u_1,u_2,\dots,u_j,t$ egy D-beli egyirányú út, és ezek az utak szükségképpen diszjunktak. Ha viszont nincs teljes párosítás G-ben, úgy a Hall tétel szerint létezik egy $X'\subseteq A'$ halmaz, melynek $|X'|$-nél kevesebb szomszédja van. Legyen $Y':=S'-X'$ és $Z'':=\Gamma(X')-$ $-(X-S)''$. Ekkor $|\Gamma(X')|<|X'|$ azt jelenti, hogy $|Y'|+|Z''|<k$. A konstrukció miatt az $Y\cup Z$ D-beli halmaz lefogja az összes S-ből T-be vezető utat, ellentmondásban a feltevéssel. □

32. Feladat. *Vezessük le az 1.6.4 tételt az 1.6.6 tételből.*

Dilworth tétele Kőnig tételéből

Az előbbihez hasonló pontszétnyitásos konstrukcióval levezethetjük Dilworth 1.5.3 tételét is.

1.6.7. Tétel (Dilworth). *Legyen P egy részbenrendezett halmaz. A P-t fedő láncok minimális száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

Bizonyítás. A max $\leq$ min egyenlőtlenség ismét nyilvánvaló. A fordított irány igazolásához készítsünk el egy $G = (X, Y; E)$ páros gráfot, melynek mindkét osztálya a P halmaznak felel meg, és valamely x_i elem y_j-vel akkor van összekötve, ha $p_i > p_j$. (Tehát x_i nincs összekötve y_i-vel.) P elemszámát jelölje n.

1.6.8. Lemma. *G tetszőleges M párosításának megfelel P-nek egy $n - |M|$ láncból álló felbontása.*

Bizonyítás. Tekintsük az X halmaz M által fedetlen pontjait. Ezek száma $n - |M|$. Legyen x_i olyan pont, amelyet M nem fed. Mindegyik ilyen x_i elemhez megkonstruálunk egy C_i láncot, a következőképpen. Ha y_i fedetlen, akkor C_i álljon az egyetlen p_i elemből. Ha y_i-t fedi valamely M-beli $x_j y_i$ él, akkor $p_j > p_i$, és legyen p_j a lánc következő eleme. Ha y_j-t fedi valamely M-beli $x_k y_j$ él, akkor legyen p_k a lánc következő eleme. Így folytatva, a láncot addig növeljük, amíg a lánchoz utolsónak vett p_m elemhez tartozó y_m csúcsot már nem fedi M-beli él.

Ezzel a módszerrel az M által nem fedett $n - |M|$ darab X-beli csúcs mindegyikéhez definiáltunk egy láncot P-ben. A lemma következik abból, hogy az így kapott láncok páronként diszjunktak és lefedik P-t. □

1.6.9. Lemma. *Legyen $L \subseteq X \cup Y$ a páros gráf éleinek minimális lefogása. Ekkor P-ben van olyan A antilánc, amelyre $|L| + |A| = n$.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy ha $x_i \in L$, akkor $y_i \notin L$. Ha indirekt mindkét csúcs L-ben volna, akkor L minimalitása miatt a gráfnak létezne olyan $x_i y_j$, illetve $x_k y_i$ éle, melyekre $y_j, x_k \notin L$. Ekkor tehát $p_k > p_i > p_j$, amiből $p_k > p_j$, és így $x_k y_j$ éle a gráfnak. Ezt az élt viszont nem fogja le L, amely ellentmondás azt bizonyítja, hogy valóban nem lehet x_i és y_i mindegyike L-ben.

Legyen most $A := \{p_i : x_i \notin L, y_i \notin L\}$. Rögtön látszik, hogy az A halmaz kielégíti a lemma követelményeit. □

A két lemmát felhasználva Dilworth tétele rögtön következik a Kőnig-tételből, amely szerint egy páros gráfban a független élek maximális száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális számával. □

Az irányított pont-Menger tételnek illetve a Dilworth-tételnek a Hall-, illetve Kőnig-tételre történő fenti visszavezetése egyúttal algoritmust is biztosít a szóbanforgó maximum- és minimumértékek meghatározására, hiszen a Kőnig tételre adott javítóutas bizonyítás konstruktív.

1.7. Szub- és szupermoduláris függvények használata

A szubmoduláris függvények hatékony bizonyítási módszereket kínálnak. Ezt először Hall tételén szemléltetjük.

1.7.1. Hall tétele újra

1.7.1. Tétel (Hall). *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha A minden X részhalmazára*

$$|\Gamma(X)| \geq |X|, \tag{1.25}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

Bizonyítás. (Elegendőség.) Nevezzünk egy $X \subseteq A$ halmazt pontosnak, ha $|\Gamma(X)| = |X|$, és a rövidség kedvéért jelöljük $|\Gamma(X)|$-et $\gamma(X)$-szel.

1.7.2. Lemma. *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Bizonyítás. Legyen X és Y pontos. A Hall-féle feltétel miatt $\gamma(X \cap Y) \geq$ $\geq |X \cap Y|$ és $\gamma(X \cup Y) \geq |X \cup Y|$. Így a γ szubmodularitása, valamint X és Y pontossága folytán $|X| + |Y| = \gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cap Y) + \gamma(X \cup Y) \geq$ $\geq |X \cap Y| + |X \cup Y| = |X| + |Y|$. Emiatt minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, speciálisan $\gamma(X \cap Y) = |X \cap Y|$ és $\gamma(X \cup Y) = |X \cup Y|$. □

A lemma ismételt alkalmazásával következik, hogy egy z megadott pontot tartalmazó pontos halmazok $B(z)$ metszete is pontos.

A bizonyításra térve feltehető, hogy G minimális abban az értelemben, hogy bármely él elhagyása után már megsérül (1.25). Állítjuk, hogy A-ban minden pont első fokú. Tegyük fel ugyanis, hogy egy $z \in A$ csúcsból kiindul két él: $e = zu$ és $f = zv$ $(u \neq v)$. Mivel az e kihagyása már megsérti (1.25)-öt, így létezik egy z-t tartalmazó olyan X pontos halmaz, amelyben z az egyetlen u-val szomszédos pont. $B(z) \subseteq X$ miatt $B(z)$-ben is z az egyetlen u-val szomszédos pont, ezért feltehető, hogy $X = B(z)$. Ugyanígy kapjuk, hogy $B(z)$-ben z az egyetlen v-vel szomszédos pont. Ekkor viszont $B(z) -$ $- z$-nek sem u, sem v nem szomszédja, és ezért $|B(z)| - 1 = |B(z) - z| \leq$ $\leq \gamma(B(z) - z) \leq \gamma(B(z)) - 2 = |B(z)| - 2$, ellentmondás.

Tehát valóban minden A-beli pont foka egy, és ekkor E maga egy A-t fedő párosítás, hiszen (1.25) miatt bármely két A-beli pontnak van két szomszédja. □

Most megmutatjuk, hogy ugyanez a bizonyítási ötlet szinte változtatás nélkül használható Lovász 1.3.3 tételében az elegendőség igazolására. Valójában Lovász eredeti, általánosabb eredményét igazoljuk.

1.7.3. Tétel (Lovász). *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf. Legyen p az S alaphalmazon értelmezett nemnegatív, egészértékű metszőn szupermoduláris halmazfüggvény, amely ráadásul elem-szubadditív, azaz $p(X) + p(z) \geq p(X + z)$ fennáll minden $X \subseteq S$ halmazra és $z \in S - X$ elemre. Amennyiben*

$$|\Gamma(X)| \geq p(X) \tag{1.26}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ halmazra, és G élelhagyásra nézve minimális ezen tulajdonságra nézve, úgy $|\Gamma(s)|$ $(= d(s))$ $= p(s)$ minden $s \in S$ elemre.

Bizonyítás. Használjuk ismét a $\gamma(X) := |\Gamma(X)|$ jelölést. Nevezzünk egy nemüres halmazt pontosnak, ha (1.26)-ot egyenlőséggel teljesíti, azaz $\gamma(X) = p(X)$.

1.7.4. Lemma. *Két metsző, pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Bizonyítás. Legyenek X és Y egymást metsző pontos halmazok. Az (1.26) feltétel miatt $\gamma(X \cup Y) \geq p(X \cup Y)$ és $\gamma(X \cap Y) \geq p(X \cap Y)$ (itt használjuk, hogy $X \cap Y \neq \emptyset$). Így a γ szubmodularitása, valamint X és Y pontossága folytán $p(X) + p(Y) = \gamma(X) + \gamma(Y) \geq \gamma(X \cap Y) + \gamma(X \cup Y) \geq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \geq p(X) + p(Y)$. Emiatt minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, speciálisan $\gamma(X \cap Y) = p(X \cap Y)$ és $\gamma(X \cup Y) = p(X \cup Y)$. □

A lemma ismételt alkalmazásával következik, hogy egy megadott $s \in S$ pontot tartalmazó pontos halmazok $B(s)$ metszete is pontos.

G minimalitása miatt bármely él elhagyása után (1.26) már megsérül. Tegyük fel indirekt, hogy valamely $s \in S$ pont foka nagyobb, mint $p(s)$. Ekkor $B(s) - s \neq \emptyset$, és minden su_i élre $(i = 1,2,\ldots,d(s))$ létezik egy olyan, s-et tartalmazó pontos X_i halmaz, amelyben s az egyetlen u_i-val szomszédos pont. Minden i-re, ahol $1 \leq i \leq d(s)$, $B(s)$-ben is s az egyetlen u_i-val szomszédos pont. Ekkor viszont a nemüres $X := B(s) - s$ halmaznak $d(s)$-sel kevesebb szomszédja van, mint $B(s)$-nek, így az elem-szubadditivitást használva $\gamma(X) = \gamma(B(s)) - d(s) = p(B(s)) - d(s) < p(B(s)) - p(s) \leq p(X)$, vagyis az X megsérti az (1.26) feltételt. □

Következményként adódik az 1.3.4 tétel:

1.7.5. Tétel. *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű, páros gráf és $m : S \to \mathbf{Z}_+$ egy szigorúan pozitív függvény. Akkor és csak akkor létezik G-ben olyan erdő, amelyben minden $s \in S$ pont foka pontosan $m(s)$, ha minden $X \subseteq S$ nemüres halmazra*

$$|\Gamma(X)| \geq \widetilde{m}(X) - |X| + 1. \tag{1.27}$$

Bizonyítás. Szükségesség. Legyen $H = (S, T; F)$ egy olyan részerdeje G-nek, amelyre $d_H(s) = m(s)$ minden $s \in S$-re. Tekintsük H-nak az $X \cup \Gamma(X)$ által feszített $H' = (X, \Gamma(X); F')$ részerdejét. Mivel ez is erdő, kapjuk, hogy $d_H(X) = d_{H'}(X) = |F'| \le |X \cup \Gamma_H(X)| - 1 = |X| + |\Gamma_H(X)| - 1$, amiből $|\Gamma(X)| \ge |\Gamma_H(X)| \ge d_H(X) - |X| + 1 = \widetilde{m}(X) - |X| + 1$.

Elegendőség. Legyen $p(X) := \widetilde{m}(X) - |X| + 1$. Ez nyilvánvalóan metsző szupermoduláris és elem-szubadditív. Feltehetjük, hogy G olyan, élelhagyásra nézve minimális gráf, amelyre $|\Gamma(X)| \ge p(X)$ minden nemüres $X \subseteq S$-re fennáll. Ekkor a Lovász-tétel miatt $d(s) = p(s) = m(s)$ minden $s \in S$-re, és így a következő lemma implikálja a tételt.

1.7.6. Lemma. *Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, amelyben minden $X \subseteq S$ nemüres halmazra $|\Gamma(X)| \ge d(X) - |X| + 1$. Ekkor G erdő.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy a gráfban nincsen izolált pont. Bármely élt kihagyva a feltétel fennmarad, hiszen ha $|\Gamma(X)|$ az élkihagyással csökken, akkor $d(X)$ is csökken. Indukcióval következik, hogy $G - e$ erdő minden $e \in E$ élre. Ezért, ha indirekt feltesszük, hogy G tartalmaz kört, akkor G maga egy kör, de ekkor $|S| = |\Gamma(S)| \ge d(S) - |S| + 1 = 2|S| - |S| + 1 = |S| + 1$, ellentmondás. □

□

1.7.2. Él-Menger újra

Hasonló trükkel lássuk be az irányított él-Menger-tételt.

1.7.7. Tétel (irányított él-Menger)**.** *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor vezet s-ből t-be $k \ge 1$ élidegen út, ha minden S $s\bar{t}$-halmaz kifoka legalább k, azaz*

$$\delta(S) \ge k. \tag{1.28}$$

Bizonyítás. (Elegendőség.) Nevezzünk egy X $s\bar{t}$-halmaz pontosnak, ha $\delta(X) = k$.

1.7.8. Lemma. *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Bizonyítás. Legyenek X és Y egymást metsző pontos halmazok. (1.28) miatt $\delta(X \cap Y) \ge k$ és $\delta(X \cup Y) \ge k$. Így a δ szubmodularitása, valamint X és Y pontossága folytán $|k| + |k| = \delta(X) + \delta(Y) \ge \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \ge k + k$. Emiatt minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, speciálisan $\delta(X \cap Y) = k$ és $\delta(X \cup Y) = k$. □

A lemma ismételt alkalmazásával következik, hogy egy megadott z pontot tartalmazó pontos halmazok $B(z)$ metszete is pontos.

A bizonyításra térve feltehető, hogy D minimális abban az értelemben, hogy bármely él elhagyása után már megsérül (1.28). Állítjuk, hogy minden $z \in V - \{s,t\}$ pont befoka és kifoka egyenlő. Valóban, ha mondjuk $\delta(z) > \varrho(z)$, akkor a minimalitás miatt bármely z-ből kilépő él kilép egy pontos halmazból és így kilép $B(z)$-ből is. De ekkor $\delta(B(z) - z) \leq \delta(B(z)) - \delta(z) + \varrho(z) < \delta(B(z)) = k$, ellentétben az (1.28) feltétellel. (A $\delta(z) < \varrho(z)$ eset hasonló).

Tehát valóban minden $V - \{s,t\}$-beli pontra $\delta(z) = \varrho(z)$ és persze a minimalitás miatt $\varrho(s) = 0$. De egy ilyen digráfban létezik $\delta(s) \geq k$ élidegen út, hiszen s-ből kiindulva és csatlakozó élek mentén haladva $\delta(z) = \varrho(z)$ miatt megkapunk egy t-be vezető utat, és ezt $\delta(s)$-szer megismételhetjük, mert a maradék gráfban szintén fennáll a kifokok és befokok egyenlősége minden $V - \{s,t\}$-beli pontra. □

1.7.3. Irányítási lemma újra

Szubmodularitást használva belátjuk az 1.3.5 következményben megfogalmazott irányítási lemma nemtriviális irányát. Tegyük fel tehát, hogy adott $G = (V,E)$ gráfra és $m : V \to \mathbf{Z}$ függvényre $\widetilde{m}(V) = |E|$ és teljesül 1.6, azaz $\widetilde{m}(X) \leq e(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll, ahol $e(X)$ jelöli azon G-beli élek számát melyeknek legalább egyik végpontja X-ben van. Emlékezzünk rá, hogy az e függvény szubmoduláris. Nevezzünk egy halmazt pontosnak, ha $\widetilde{m}(X) = e(X)$. Eszerint az üres halmaz pontos.

1.7.1. Állítás. *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Bizonyítás. $\widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y) = e(X) + e(Y) \geq e(X \cap Y) + e(X \cup Y) \geq \widetilde{m}(X \cap Y) + \widetilde{m}(X \cup Y) = \widetilde{m}(X) + \widetilde{m}(Y)$, amiből az állítás következik. □

Az irányítási lemma bizonyításához $\widetilde{m}(V)$ szerinti indukciót használunk. Az állítás semmitmondó, ha $\widetilde{m}(V) = |E| = 0$, így feltehetjük, hogy van olyan s pont, melyre $m(s) > 0$. A lemma miatt létezik egy egyértelmű, legbővebb s-et nem tartalmazó Z pontos halmaz. Van olyan $f = us$ él, melyre $u \notin Z$, mert különben $e(Z+s) = e(Z) = \widetilde{m}(Z) = \widetilde{m}(Z+s) - m(s) < \widetilde{m}(Z+s)$, azaz $Z + s$ megsértené a feltételt. Hagyjuk ki az f élt, és csökkentsük eggyel $m(s)$ értékét. A keletkező G' gráfra és m' befokszám-előírásra teljesül az (1.6) feltétel, mert ha egy X halmaz megsértené, akkor X eredetileg egy pontos $u\bar{s}$-halmaz volt. De a Z választása folytán $u \in X \subseteq Z$, ellentétben az $u \notin Z$ feltevéssel.

Indukcióval, G'-nek létezik m' befokú irányítása, amihez az us irányított élt hozzávéve a G-nek m befokú irányítását kapjuk.

1.7.4. Megengedett áramok: Hoffman tétele

Jelöljön $D = (V, A)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : A \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : A \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : A \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in \in A, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül rá a **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (Figyelem: az f-ben megengedünk $-\infty$ komponenst, ami persze csak annyit jelent, hogy az illető élen az áram értéke nincs alulról korlátozva. Ez azt is jelenti, hogy csak az olyan e élen rendelünk majd az $f(e) \leq x(e)$ egyenlőtlenséghez duál változót, amelyen az $f(e)$ korlát véges. Analóg módon a g-nek lehetnek $+\infty$ komponensei, de az x áram komponensei mindig valósak. Az f alsó korlátban $+\infty$-t, a g felső korlátban pedig $-\infty$-t nem engedünk meg. Néha előírjuk, hogy az f vagy a g komponensei egészértékűek legyenek; ebbe beleértjük a $\pm\infty$-t is.)

9. Gyakorlat. *(a) Igazoljuk, hogy x akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \leq \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (b) Ha x áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra is fennáll.*

Az x áramot **megengedett**nek (feasible) mondjuk, ha $f \leq x \leq g$.

1.7.9. Tétel (Hoffman). *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{1.29}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (1.29) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.

Bizonyítás. A szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy x megengedett áram. Ekkor $\delta_g(X) - \varrho_f(X) \geq \delta_x(X) - \varrho_x(X) = 0$, amiből (1.29) következik.

Tekintsük a következő függvényt. $\beta(X) := \delta_g(X) - \varrho_f(X)$. Most (1.29) azzal ekvivalens, hogy β nemnegatív. Az $X, Y \subseteq V$ halmazokra jelölje $d_x(X, Y)$ az $x(e)$ értékek összegét mindazon e élekre, melyek $X - Y$ és $Y - X$ egy-egy pontját kötik össze (mindegy melyik irányban). A bizonyítás kulcsa a következő lemma.

1.7.10. Lemma. $\beta(X) + \beta(Y) = \beta(X \cap Y) + \beta(X \cup Y) + d_{g-f}(X, Y)$.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy minden lehetséges él hozzájárulása a két oldalhoz ugyanannyi. $\square$

A Hoffman-tétel bizonyításához visszatérve nevezzünk egy e élt **pontos**nak, ha $f(e) = g(e)$. Nevezzük csúcsok egy Z részhalmazát **pontos**nak, ha $\beta(Z) = = 0$. Tegyük fel indirekt, hogy a D digráfra nem igaz a tétel, és válasszunk egy olyan ellenpéldát (adott D mellett), amelyben a pontos élek és a pontos halmazok együttes száma maximális. Az nem lehet, hogy minden él pontos, mert akkor $x := f$ $(= g)$ az (1.29) miatt, megengedett áram volna. Legyen $a = st$ olyan él, amelyre $f(a) < g(a)$.

Állítjuk, hogy a belép egy pontos T halmazba. Valóban, ha nem lépne be, akkor $f(a)$-t meg tudnánk úgy növelni, hogy a módosított f' alsó korlátra továbbra is fennállna $f' \leq g$ és $\varrho_{f'}(Z) \leq \delta_g(Z)$ minden $Z \subseteq V$-re, továbbá vagy az a él válna pontossá, vagy pedig egy olyan halmaz, amelybe az a él belép. Ez a lehetőség azonban ellentmondana a pontos élek és halmazok maximális együttes számára tett feltevésünknek. Tehát az a él valóban belép egy T pontos halmazba. Analóg módon látható, hogy a kilép egy S pontos halmazból.

Az a él létezése folytán tudjuk, hogy a $d_{g-f}(S,T)$ érték szigorúan pozitív. A lemmát és (1.29)-et alkalmazva kapjuk, hogy $0+0 = \beta(S) + \beta(T) > \beta(S \cap \cap T) + \beta(S \cup T) \geq 0 + 0$, amely ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda, és így a tétel következik. Ugyanez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy ha f és g egészértékű, akkor van egészértékű megengedett áram is. $\square$

Megjegyezzük, hogy Hoffman tételéből közvetlenül kiolvasható a maximális folyam minimális vágás tétel.

1.7.11. Tétel (Ford és Fulkerson, MFMC)**.** *Egy $D = (V, A)$ digráfban adott $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásra nézve a megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\min\{\delta_g(S) : s \in S \subseteq V - t\}$ minimummal. Amennyiben g egészértékű, létezik egészértékű maximális folyam is.*

33. Feladat. *Vezessük le az MFMC tételből a Menger-tétel alábbi „vegyes” változatát.*

1.7.12. Tétel (Menger: vegyes pont-él változat)**.** *Legyen $D = (V, A)$ digráf és legyenek k, ℓ pozitív egészek. Akkor és csak akkor létezik D-ben $k\ell$ élidegen út s-ből t-be úgy, hogy minden csúcson legfeljebb ℓ darab út halad keresztül, ha bárhogy kihagyva egy $X \subseteq V - \{s, t\}$ halmazt $(0 \leq |X| \leq k-1)$, a maradékban minden $s\bar{t}$-halmazból legalább $(k - |X|)\ell$ él lép ki.*

1.8. Minimális költségű fenyők

Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf, amelynek egy adott s pontjából minden más pontja elérhető egyirányú úton, azaz D tartalmaz feszítő s-fenyőt. (A következőkben s-fenyőn mindig feszítő fenyőt értünk.) Adott az éleken egy nemnegatív $c : E \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. Keressünk minimális összköltségű (azaz legolcsóbb) s-fenyőt. Az alábbiakban először Chu és Liu eljárását mutatjuk be, de ezelőtt hasznos az alábbi feladatokat megoldani.

34. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a minimális költségű s-fenyő problémája általánosítja az irányítatlan gráfra vonatkozó minimális költségű feszítő fa problémáját.*

35. Feladat. *Hogyan lehet minimális költségű s-fenyő segítségével irányított gráfban egy s-ből t-be vezető legkisebb költségű utat megkeresni?*

36. Feladat. *Mutassunk példát arra, hogy a következő természetes mohó eljárás nem mindig ad optimális s-fenyőt: Kiindulva az s pontból élek egyenkénti hozzávételével építsünk fel egy s-fenyőt az alábbi szabály szerint. Mindig a legkisebb költségű olyan élt választjuk, amelynek a töve a már megkonstruált részfenyőben van, míg a feje új pont.*

37. Feladat. *Miként lehet az általános költségfüggvényre vonatkozó feladatot visszavezetni nemnegatív költségek esetére?*

38. Feladat. *Ha egy s-től különböző v pontba belépő valamennyi él költségét ugyanazzal az α számmal csökkentjük, akkor minden s-fenyő költsége α-val csökken.*

Ezen utolsó gyakorlat alapján feltehetjük, hogy minden s-től különböző pontba lép be 0 költségű él. Amennyiben a 0 költségű élek D_0 részgráfja tartalmaz s-fenyőt, akkor ennek 0 összköltsége nyilván minimális, hiszen a c költségfüggvényről feltettük, hogy nemnegatív. A megoldandó eset tehát az, amikor D_0 nem tartalmaz s-fenyőt, azaz nem minden pont érhető el s-ből.

1.8.1. Lemma. *D_0 tartalmaz olyan C egyirányú kört, amelyben s nincs benne.*

Bizonyítás. Legyen S az s-ből D_0-ban elérhető pontok halmaza. Ekkor S-ből nem vezet ki 0 költségű él, és a feltevés szerint $V - S$ nem üres. Most tetszőleges $v \in V - S$ pontba lép be uv 0 költségű él, és tudjuk, hogy u nem S-ben van. Következésképpen $V - S$ tartalmaz 0 költségű élekből álló kört. □

A döntő észrevétel az alábbi:

1.8.2. Lemma. *A C 0 költségű kört összehúzva az s-fenyők költségének minimuma nem változik.*

Bizonyítás. Egy tetszőleges él összehúzásával a minimum bizonyosan nem nő, hiszen az összehúzás egy eredetileg α költségű fenyőt egy legfeljebb α költségű gyökeresen összefüggő digráffá alakít, amely tartalmaz legfeljebb α költségő fenyőt. Ebből adódik, hogy tetszőleges kör összehúzásával a minimum nem nő.

Annak belátásához, hogy C összehúzásakor nem is csökken, válasszunk egy legolcsóbb F' s-fenyőt az összehúzott D' digráfban. Ennek egyetlen e' éle lép be a C kör összehúzásával keletkezett v_C pontba. Jelölje $e = uv$ az e' élnek megfelelő eredeti élt, ahol v a C körnek pontja, míg u nem. Ha a C-beli élek közül kihagyjuk a v-be lépőt, akkor egy olyan v-ből induló P utat kapunk, amelynek minden éle 0 költségű.

Most F'-t és P-t összetéve az eredeti D digráfnak kapjuk egy s-fenyőjét, amelynek költsége ugyanannyi, mint F' költsége. □

Az 1.8.2 lemma alapján elegendő meghatározni az összehúzott D' digráfnak egy minimális költségű s-fenyőjét, és e meggondolásokat rekurzívan alkalmazva kiszámítható D egy minimális költségű s-fenyője. Ez tehát a következő algoritmust jelenti. Az eljárás két fázisból áll. Az elsőben váltakozva költségeket csökkentünk és köröket húzunk össze, míg a másodikban megkeressük a kívánt s-fenyőt.

1. fázis (A) Minden s-től különböző v pontra csökkentsük a v-be lépő élek költségét ezen minimumával.

(B) Döntsük el, hogy minden pont elérhető-e s-ből 0 költségű éleket használva. Ha igen, menjünk a 2. fázisra. Ha nem, keressünk egy 0 költségű élekből álló egyirányú kört, húzzuk össze, és az összehúzott digráffal menjünk vissza az (A) pontba.

2. fázis Határozzunk meg az aktuális (összehúzások után keletkezett) digráfban egy 0 költségű élekből álló s-fenyőt. Az összehúzott köröket az összehúzás sorrendjében visszafelé haladva egymás után egyenként „fújjuk vissza", és az 1.8.2 lemma bizonyításában leírt módon a meglévő s-fenyőből határozzuk meg a visszafújt digráfnak egy s-fenyőjét.

39. Feladat. *Tegyük fel, hogy egy D irányított gráfban nem létezik s-fenyő (merthogy van olyan s-et tartalmazó $X \subset V$ részhalmaz, amelyből nem lép ki él) és új élek hozzávételével akarjuk elérni, hogy létezzék. Hogyan lehet ezt minimális költséggel megtenni, ha minden lehetséges új élre adott a hozzávételének a költsége?*

40. Feladat. *Adott egy erősen összefüggő digráf, élein költségekkel. Mutassuk meg (valamely közismert NP-teljes feladatra történő visszavezetéssel), hogy minimális költségű erősen összefüggő feszítő részgráf keresésének problémája NP-teljes. Készítsünk olyan polinom idejű eljárást, amely az optimumnak legfeljebb kétszeresét adja.*

41. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy digráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha egyirányú körök egymás utáni összehúzásával egyetlen pontra húzható.*

Chu és Liu fenti eljárásáról könnyen kimutatható, hogy polinomiális futási idejű. Gyakorlati szempontból azonban nem túlságosan hatékony. Az 1. fázis

(B) lépésében például, amikor egy C kört összehúzunk, lehet hogy az összehúzással keletkező pontba lép be 0 költségű él, és ilyenkor az (A) lépésre való visszatéréskor ott semmi sem történik, hanem a költségek változtatása nélkül ismét a (B) lépésre kerül a sor. Hogyan lehetne ezeket az üres (A) lépéseket kiiktatni? Úgy, hogy egyszerre nem csak egyetlen kört húzunk össze, hanem a 0 költségű élek D_0 digráfjának egy olyan s-et nem tartalmazó erősen összefüggő komponensét, amelybe nem vezet 0 költségű él. Nevezzünk egy ilyen halmazt **forráskomponens**nek.

1.8.3. Lemma. *Az 1. fázis folyamán az aktuális D_0-nak mindig van s-et nem tartalmazó forráskomponense.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy tetszőleges D' digráf erősen összefüggő komponenseit összehúzva aciklikus digráfot kapunk, amelyben biztosan van forráspont, ami az összehúzás előtti digráf egy forráskomponensének felel meg. Mármost legyen D' az a digráf, amely D_0-ból keletkezik úgy, hogy minden v pontból behúzunk egy s-be menő új élt. Mivel az 1. fázisban vagyunk, D_0-ban az s-ből elérhető pontok S halmaza szűkebb V-nél, és az S a D'-nek egy erősen összefüggő komponense lesz, amely nem forráskomponens. Tehát D' bármely forráskomponense jó lesz, mert nem tartalmazza s-et. □

Módosított 1. fázis A lemma alapján módosítsuk úgy az 1. fázist, hogy a 2. lépésben nem csupán egyetlen egyirányú kört húzunk össze, hanem egy teljes, s-et nem tartalmazó K forráskomponenst. Figyeljük meg, hogy K nem egyetlen pontból áll, hiszen az (A) lépés miatt minden s-től különböző pontba vezet 0 költségű él, tehát egyetlen pont nem lehet forráskomponens.

Ezen lépés összevonásnak nagy előnye, hogy egy-egy mélységi keresés segítségével lineáris időben mind egy digráf erős komponenseit, mind egy aciklikus digráf forráspontjait meg tudjuk határozni, vagyis D_0-nak az s-et nem tartalmazó forráskomponense lineáris időben megtalálható.

Kellemetlenség azonban, hogy a 2. fázis fenyőépítési eljárása áttekinthetetlenné válik. Ezt a nehézséget leküzdendő, először is figyeljük meg, hogy az 1.8.2 lemma érvényben marad akkor is, ha kör helyett forráskomponensről beszélünk. Ebből következik, hogy a 2. fázisban a D digráfnak egy olyan s-fenyőjét kell megkeresni, amelynek minden élének módosított költsége nulla, és amely $(*)$ minden valamikor is összehúzásra került halmazba egyetlen egy éllel lép be. Ezt a célt éri el a következő:

Mododosított 2. fázis s-ből kiindulva 0 (módosított) költségű élek egyenkénti hozzávételével D-ben építsünk fel egy F s-fenyőt, mindig olyan élt véve a már meglévő részfenyőhöz, amelynek költsége az első fázis során leghamarabb vált nullává.

1.8.4. Lemma. *A megkonstruált F s-fenyő kielégíti a fenti $(*)$ tulajdonságot, és így optimális.*

Bizonyítás. Legyen K az 1. fázis során valamikor összehúzott forráskomponens, és tegyük fel indirekt, hogy F több mint egyszer lép be K-ba. Legyen $e = uv$ az F-nek a K-ba belépő második éle (a 2. fázis fenyőépítésének sorrendjében), és jelölje K' a K-nak azt a részhalmazát, amely az e bevétele előtti pillanatban a meglévő részfenyőhöz tartozik. Tekintsük az 1. fázisnak a K összehúzása előtti pillanatát. Ekkor K-ba nem lép 0 költségű él, de a K által feszített 0 költségű élek erősen összefüggő digráfot alkotnak. Tehát e költsége később vált nullává, mint ezen éleké. Ily módon a módosított 2. fázis előírása szerint az e helyett egy K'-ből $K - K'$-be vezető 0 költségű élt kellett volna a meglévő részfenyőhöz venni. Ez az ellentmondás bizonyítja a lemmát. □

A fenti algoritmus segítségével most igazoljuk a legolcsóbb fenyők költségére vonatkozó minimax tételt. Ennek kimondásához nevezzünk egy $y : 2^{V-s} \to \mathbf{R}_+$ halmazfüggvényt **c-megengedettnek**, ha minden $e \in E$ élre

$$c(e) \geq \sum [y(X) : e \text{ belép } X\text{-be }] . \tag{1.30}$$

1.8.5. Tétel (Fulkerson, 1974)**.** *Az s-fenyők minimális költsége egyenlő max$\{\sum[y(X) : X \subseteq V - s] : y$ c-megengedett$\}$. Továbbá, ha c egészértékű, akkor az optimális y választható egészértékűnek.*

Bizonyítás. Legyen F feszítő s-fenyő és y egy c-megengedett halmazfüggvény. Ekkor

$$\begin{aligned}\widetilde{c}(F) &= \sum [c(e) : e \in F] \geq \\ &\geq \sum \Big(\sum [y(X) : e \text{ belép } X\text{-be }] : e \in F\Big) \geq \sum [y(X) : X \subseteq V - s]\end{aligned} \tag{1.31}$$

amiből max $\leq$ min következik. (1.31)-ben akkor van végig egyenlőség, ha a következő optimalitási feltételek teljesülnek.

$$c(e) = \sum [y(X) : e \text{ belép } X\text{-be }] \text{ minden } e \in F \text{ élre,} \tag{1.32}$$

$$y(X) > 0 \text{ esetén } \varrho_F(X) = 1. \tag{1.33}$$

Az alábbi algoritmus egy olyan F feszítő s-fenyőt és megengedett y-t konstruál, amelyre (1.32) és (1.33) teljesülnek. Két fázisból áll. Az elsőben y-t konstruáljuk meg, míg a másodikban F-et. Mindkét rész egyfajta értelemben mohó lesz. Az első fázis minden lépésében módosítjuk a költségfüggvényt, és az aktuális költségfüggvényt c'-vel fogjuk jelölni. Egy e élt a c' aktuális költségfüggvényre nézve **0-élnek** nevezzük, ha $c'(e) = 0$.

1. fázis *Amíg van $V - r_0$-nak olyan nemüres részhalmaza, amelybe nem lép be 0-él, ismételjük a következő lépést. Válasszunk egy olyan minimális nemüres $X \subseteq V - r_0$ részhalmazt, amelybe nem lép 0-él. Legyen $y(X) := \min\{c'(e) : e$ belép X-be$\}$, és csökkentsük $c'(e)$-t az $y(X)$ értékkel az összes X-be lépő e élen.*

A módosított c' továbbra is nemnegatív, és mindazokon az X-be belépő éleken 0-vá válik, amelyeken az előbbi minimum eléretik. Az 1. fázis tehát akkor fejeződik be, amikor már minden $X \subseteq V - r_0$ részhalmazba lép be 0-él, vagyis amikor már létezik 0-élekből álló feszítő r_0-fenyő.

2. fázis *Az r_0 pontból kiindulva, 0-élek egymás utáni hozzávételével felépítünk egy F r_0-fenyőt. Ha az építési eljárás egy lépésében több mint egy olyan 0-él van, amely a már megkonstruált részfenyő ponthalmazából kilép, akkor azt az élt adjuk a részfenyőhöz, amely az 1. fázis során a leghamarabb vált 0-éllé.*

Az előállítás szabályai miatt világos, hogy a megkonstruált y vektor c-megengedett, továbbá, hogy (1.32) fennáll.

1.8.6. Lemma. *y és F kielégítik (1.33)-at.*

Bizonyítás. Legyen X olyan halmaz, amelyre $y(X) > 0$, és tegyük fel indirekt, hogy $\varrho_F(X) > 1$. Ekkor a 2. fázisnak van egy olyan pillanata, amikor az aktuális F' részfenyő olyan, hogy $\varrho_{F'}(X) = 1$, és az F'-höz éppen hozzáadásra kerülő e él belép X-be.

Tekintsük most az 1. fázisnak azt a pillanatát, amikor $y(X)$ pozitív lett. Ekkor az X-be még nem lépett 0-él, ugyanakkor az X-nek már minden valódi nemüres részhalmazába lépett. Speciálisan, az $X - V(F')$ halmazba is lépett egy f 0-él, és mivel ez X-be nem léphetett, így f töve $X \cap V(F')$-ben van. Az f tehát már $y(X)$ pozitívvá válásának pillanatában 0-él volt, amikor még e nem volt az. Miután az f éllel is lehetne növelni az F' részfenyőt, ellentmondásra jutottunk a 2. fázis választási szabályával, amely szerint a legkorábban 0-éllé vált éllel kell növelni az aktuális részfenyőt. $\square$

A lemmából következik, hogy az algoritmus által megtalált F feszítő r_0-fenyő és y megengedett duális megoldás kielégítik az optimalitási feltételeket, amiből az algoritmus helyessége, valamint Fulkerson tétele is következik. $\square$

Maximális súlyú fenyvesek

Az előbbihez kapcsolódik a következő probléma. Legyen $D = (V, E)$ ismét egy irányított gráf, élhalmazán egy w súlyfüggvénnyel. Keressünk maximális súlyú fenyvest!

Egy (p, y) párt **fedésnek** nevezünk, ha $p : V \to \mathbf{R}_+$ és $y : 2^V \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív függvények, melyekre $w(u, v) \le p(v) + \sum[y(B) : u, v \in B \subseteq V]$ teljesül minden $uv \in E$ élre. A fedés **értéke** $\sum[p(v) : v \in V] + \sum[y(B)(|B| - - 1) : B \subseteq V]$.

1.8.7. Tétel (Chu és Liu – 1965, Edmonds – 1967)**.** *Egy fenyves súlyának maximuma a fedések minimális értékével egyenlő. Ha w egészértékű, akkor az optimális fedés is választható annak.*

Bizonyítás. Könnyen látszik, hogy max≤min. A fordított irány belátásához egészítsük ki D-t egy új s ponttal, és vezessünk s-ből minden $v \in V$ pontba egy új sv élt. Az így kapott D' digráfon definiáljunk egy c költségfüggvényt a következőképpen. Az új élek költsége legyen $M := \max\{w(e) : e \in E\}$, míg minden eredeti $e \in E$ élre legyen $c(e) = M - w(e)$.

Az 1.8.5 tétel szerint létezik $z : 2^V \to \mathbf{R}_+$ c-megengedett halmazfüggvény és D'-nek egy F feszítő s-fenyője, amelyek kielégítik (1.32)-t és (1.33)-at. Legyen $p(v) := M - \sum[z(B) : v \in B]$ minden $v \in V$ pontra, és $B \subseteq V$, $|B| > 1$ esetén legyen $y(B) := z(B)$ $(B \subseteq V)$. Könnyen látható, hogy az így kapott (p, y) fedést alkot D-ben w-re nézve, továbbá, hogy az értéke egyenlő a D digráf $F \cap E$ fenyvesének súlyával. $\square$

42. Feladat. *Legyen $T \subseteq V - s$ adott halmaz olyan, hogy a digráf minden pozitív költségű élének a feje T-ben van (a költségfüggvény nemnegatív). Olyan minimális költségű s gyökerű fenyőt keresünk, amely T minden pontját tartalmazza (de nem feltétlenül feszítő). Mutassuk meg, hogy a feladat visszavezethető a minimális költségű feszítő fenyő problémájára.*

43. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy $D = (V, E)$ digráfban éleknek egy adott $F \subseteq E$ részhalmaza akkor és csak akkor egészíthető ki s gyökerű feszítő fenyővé, ha nem lehet úgy megadni a $V - s$ halmaznak $|V| - |F|$ darab nemüres részhalmazát, hogy ezek egyikébe sem lép F-beli él, és $E - F$ minden eleme legfeljebb egybe lép.*

44. Feladat. *Tegyük fel, hogy adott $V - s$ részhalmazainak egy $\{A_1, \dots, A_t\}$ rendszere. Hogyan lehetne algoritmikusan eldönteni, hogy a digráf tartalmaz-e olyan feszítő fenyőt, amely mindegyik A_i halmazba pontosan egyszer lép bele?*

1.9. Fenyők és fák pakolása

Egy irányított fát akkor neveztünk **fenyő**nek, ha a gyökérpontja kivételével minden más pontjába pontosan egy él lép be, azaz a gyökérpontjából minden más pontjába el lehet jutni egyirányú úton. Egy irányított erdőt akkor neveztünk **fenyves**nek, ha minden pont befoka legfeljebb egy, azaz ha az erdő minden komponense fenyő. A 0 befokú pontok halmazát a fenyves **gyökérhalmazá**nak nevezzük. Egy $D = (V, A)$ irányított gráf **feszítő fenyvesé**n olyan fenyvest értünk, amelynek ponthalmaza V, míg élhalmaza az A-nak része. Egy $D = (V, A)$ digráfot egy s pontjára nézve gyökeresen k-élösszefüggőnek nevezzük, ha

$$\varrho(X) \geq k \text{ minden nemüres } X \subseteq V - s \text{ halmazra.} \tag{1.34}$$

Menger tétele alapján ez azzal ekvivalens, hogy a digráf minden pontjába vezet s-ből k élidegen út.

1.9.1. Tétel (Edmonds: gyenge alak)**.** *Egy $D = (V, A)$ digráf akkor és csak akkor tartalmaz k élidegen s gyökerű feszítő fenyőt, ha D az s-re nézve gyökeresen k-élösszefüggő.*

Bizonyítás. (Lovász) Mivel egy s gyökerű feszítő fenyő minden $X \subseteq V - s$ nemüres halmazba belép, a kívánt k fenyő létezése esetén $\varrho(X) \geq k$, azaz D gyökeresen k-élösszefüggő.

Az elegendőség igazolásához élek egyenkénti hozzávételével egy s gyökerű F_1 fenyőt építünk csak arra vigyázva, hogy $(*)$ a maradék $D - F_1$ digráf gyökeresen $(k-1)$-élösszefüggő legyen. Megmutatjuk, hogy így felépíthető egy feszítő fenyő, amiből a tétel indukcióval következik.

Legyen tehát F_1 egy s gyökerű fenyő, amelyre igaz, hogy $D' = D - F_1$ gyökeresen $(k-1)$-élösszefüggő. Jelölje ϱ' a D' digráf befok függvényét, míg V_1 az F_1 fenyő ponthalmazát.

Egy $X \subseteq V - s$ nemüres halmazt nevezzünk **pontos**nak, ha $\varrho'(X) = k - 1$. Mivel D gyökeresen k-élösszefüggő, X metszi V_1-et. Ha ráadásul X a $V - V_1$-et is metszi, akkor **veszélyes**nek nevezzük.

Nincs mit bizonyítanunk, ha F_1 feszítő fenyő. Tegyük fel tehát, hogy nem ez a helyzet. Kimutatjuk, hogy létezik olyan $e \in A - F_1$ él, amely kilép V_1-ből és amelyet F_1-hez véve $(*)$ továbbra is fennáll. Valamely V_1-ből kilépő e élnek az F_1-hez történő hozzávétele pontosan akkor rontja el a $(*)$ feltételt, ha belép egy veszélyes X halmazba. Ekkor ugyanis az e-nek F_1-be vételével $\varrho'(X)$ eggyel csökken. Ha nincs veszélyes halmaz, akkor bármely V_1-ből kilépő él (van ilyen!) F_1-hez vehető a $(*)$ feltétel elrontása nélkül. Tegyük fel tehát, hogy vannak veszélyes halmazok, és legyen M egy tartalmazásra nézve minimális veszélyes halmaz.

Állítjuk, hogy létezik $e = uv \in A$ él, amelyre $u \in M \cap V_1, v \in M - V_1$. Valóban, ha nem létezne ilyen él, akkor $k-1 = \varrho'(M) \geq \varrho'(M - V_1) = \varrho(M - V_1)$, azaz ilyenkor $M - V_1$ megsértené a tétel feltételét.

Állítjuk, hogy e nem lép bele veszélyes halmazba. Valóban, ha indirekt e belépne valamely X veszélyes halmazba, akkor a $(k-1) + (k-1) = \varrho'(M) + \varrho'(X) \geq \varrho'(X \cap M) + \varrho'(X \cup M) \geq (k-1) + (k-1)$, amiből következik, hogy

$X \cap M$ is veszélyes, ami ellentmond M minimális választásának. (Az u pont $M - X$-ben van, tehát $M \cap X$ valódi része M-nek.) Találtunk tehát egy olyan e élt, amellyel az F_1 fenyőt kibővítve a $(*)$ feltétel továbbra is érvényben marad. □

Feladatok

45. Feladat. *Hogyan lehet algoritmikusan megkeresni a kívánt fenyőket?* (Szubrutinként használhatjuk a maximális folyam, minimális vágás megkeresésére vonatkozó algoritmust.)

46. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy digráfban bármely élt elhagyva a $\lambda(s, v)$ értéke csökken valamely v csúcsra, akkor minden v csúcsra $\lambda(s, v) = \varrho(v)$.*

47. Feladat. *Legyen c olyan nemnegatív, valós súlyozás a D digráf élhalmazán, amelyre $\varrho_c(X) \geq 1$ teljesül minden $\emptyset \neq X \subseteq V - s$ halmazra. Nevezzünk egy X halmazt szorosnak, ha itt egyenlőség teljesül. Igazoljuk, hogy létezik olyan s-gyökerű feszítő fenyő, amely minden szoros halmazba pontosan egyszer lép be.*

48. Feladat. *Igazoljuk az Edmonds tétel alábbi kiterjesztését. Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf. Legyen $\mathcal{F}$ a $V - s$ részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $X, Y \in \mathcal{F}$, $X \cap Y \neq \emptyset$-ből következik, hogy $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{F}$. Amennyiben minden $X \in \mathcal{F}$ halmaz befoka legalább k, akkor E felbontható k részre úgy, hogy minden $X \in \mathcal{F}$-re mind a k rész tartalmaz X-be lépő élt.*

Gyökeresen k-élösszefüggővé irányítás

Következő célunk levezetni Tutte tételét diszjunkt feszítő fák létezéséről. Ehhez igazolunk egy irányítási tételt, majd alkalmazzuk Edmonds tételét.

Egy G irányítatlan gráfnak pontosan akkor van olyan irányítása, amelyben egy megadott s pontból minden más pont irányított úton elérhető, ha a gráf összefüggő. Kérdés, hogy általánosabban, adott $k \geq 1$ egészre mikor létezik a G-nek adott s pontjára nézve gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, azaz olyan, amelyben minden nemüres $V - s$-beli részhalmaz befoka legalább k. Az alábbi tétel nemcsak ezt a tulajdonságot karakterizálja, hanem rögtön megadja az ún. deficites alakot is, amely azt mondja meg, hogy legkevesebb hány új él hozzáadásával létezik a keresett irányítás.

1.9.2. Tétel. *Legyen a $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak s egy kijelölt pontja, és legyen γ nemnegatív egész. Akkor és csak akkor lehet G-hez γ új élt úgy hozzáadni, hogy a megnövelt gráfnak létezik s-ből gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, ha*

$$e(\mathcal{F}) \geq k(t - 1) - \gamma \tag{1.35}$$

teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára. Az új élek mind választhatók s-ből indulónak.

Bizonyítás. Egy s-ből k-élösszefüggő irányítást nevezzünk röviden **jó**nak. Ha γ új él hozzáadása után létezik jó irányítás, akkor mindegyik s-et nem tartalmazó V_i részhalmazra $\varrho(V_i) \geq k$, így $e(\mathcal{F}) + \gamma \geq e^+(\mathcal{F}) \geq k(t-1)$, ahol az e^+ jelölés a megnövelt gráfra utal, azaz (1.35) fennáll.

Az elegendőség igazolásához adjunk G-hez minimálisan sok s végpontú új élt úgy, hogy a kiegészített gráfban már létezzék jó irányítás. Jelölje a minimumot γ'. Célunk azt kimutatni, hogy $\gamma' \leq \gamma$.

Jelölje ϱ a megnövelt gráf jó irányításának a befokfüggvényét. Feltehetjük, hogy $\varrho(s) = 0$. Nevezzünk egy $X \subseteq V - s$ halmazt **pontos**nak, ha $\varrho(X) = k$. Ha X és Y két egymást metsző, pontos halmaz, akkor $k + k = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) \geq k + k$ miatt a metszet is és az unió is pontos. Ebből az is kiadódik, hogy ha pontos halmazok egy rendszere összefüggő hipergráfot alkot, akkor a halmazok metszete is pontos.

Jelölje T azon pontok halmazát, melyek legalább egy újonnan hozzáadott él végpontjából az adott irányításban elérhetők. Nyilván $s \notin T$ és $\varrho(V - T) = 0$.

1.9.3. Lemma. *Ha Z pontos és $Z \cap T \neq \emptyset$, akkor $Z \subseteq T$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Z \not\subseteq T$. Ekkor $Y := V - T$-re $k = \varrho(Y) + \varrho(Z) = \varrho(Y \cap Z) + \varrho(Y \cup Z) + d^+(Y, Z) \geq k + 0 + d^+(Y, Z) \geq k$. Ebből $\varrho(Y \cup Z) = 0$ és $d^+(Y, Z) = 0$ adódik. Az első egyenlőség miatt van olyan $e = st$ új él, amelyre $t \in Z$ (mert különben $T \cap Z$ pontjai semelyik új él fejéből nem lehetnének elérhetők). Ekkor viszont az e él miatt $d^+(Y, Z) > 0$, amely ellentmondás a lemmát bizonyítja. □

Két eset lehetséges. Ha létezik T-ben olyan v pont, amely nincs benne pontos halmazban, akkor vegyünk egy olyan st új élt, amelyre t-ből vezet v-be egy P irányított út. Fordítsuk meg P éleinek irányítását, és hagyjuk ki az st élt. Mivel v nincs pontos halmazban, az új irányítás továbbra is jó lesz, ellentmondásban az új élek számának minimalitásával.

Nézzük most azt az esetet, amikor T minden pontja benne van pontos halmazban. Jelölje $V_1, \dots, V_{t-1}$ azon maximális pontos halmazokat, melyek metszik T-t. Fentebb láttuk, hogy ezek páronként diszjunktak, és hogy a T partícióját alkotják. Legyen $V_t := V - T$ és $\mathcal{F} := \{V_1, \dots, V_t\}$. Mivel $\varrho(V_t) = 0$, és minden új él belép T-be, azt kapjuk, hogy $k(t-1) = \sum[\varrho(V_i) : i = 1, \dots, (t-1)] = \sum[\varrho(V_i) : i = 1, \dots, t] = e^+(\mathcal{F}) = e(\mathcal{F}) + \gamma'$, így (1.35)-öt használva, $\gamma' = k(t-1) - e(\mathcal{F}) \leq \gamma$ adódik. □

Adott pozitív egész k-ra és egész l számra egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfot akkor nevezünk **(k, ℓ)-partíció-összefüggő**nek, ha V pontjainak minden

$t \geq 2$ részes partíciójára a köztes élek száma legalább $k(t-1)+\ell$. A $(k,0)$-partíció-összefüggő gráfokat röviden k-partíció-összefüggőnek nevezzük. Az (1.35) feltétel tehát azt jelenti, hogy a G gráf $(k,-\gamma)$-partíció-összefüggő. Érdemes a $\gamma = 0$ speciális esetet külön megfogalmazni.

1.9.1. Következmény. *Egy G gráfnak akkor és csak akkor létezik s-ből gyökeresen k-élösszefüggő irányítása, ha G k-partíció-összefüggő.*

1.9.4. Tétel (Tutte). *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fa, ha G k-partícó-összefüggő.*

Bizonyítás. A tétel közvetlenül adódik Edmonds diszjunkt fenyőkre vonatkozó tételéből és az 1.9.1 következményből. □

1.9.1. Fedés fenyvesekkel és erdőkkel

Az Edmonds-tétel egy másik érdekes alkalmazása a következő.

1.9.5. Tétel. *A $D = (V, A)$ digráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k fenyvessel, ha* (i) *minden pont befoka legfeljebb k, és* (ii) *$i(X) \leq k(|X|-1)$ teljesül minden $X \subseteq V$ halmazra, ahol $i(X)$ jelöli az X által feszített élek számát.*

Bizonyítás. Mindkét feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőséget elemi konstrukcióval igazoljuk. Adjunk a digráfhoz egy új s pontot és minden v pontra $k - \varrho(v)$ párhuzamos élt s-ből v-be. Az új D' digráfban minden $X \subseteq V$ halmazra fennáll $\varrho'(X) = \varrho(X) + \sum[k - \varrho(v) : v \in X] = \varrho(X) - \varrho(X) - i(X) + k|X| \geq k$. Az 1.9.1 tétel szerint létezik k diszjunkt s gyökerű feszítő fenyő. Ezeket az eredeti D-re megszorítva k fenyvest kapunk, melyek fedik D éleit. □

1.9.6. Tétel (Nash–Williams). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k erdővel, ha a csúcsok tetszőleges X nemüres részhalmaza legfeljebb $k(|X|-1)$ élt feszít.*

Bizonyítás. Egy erdő legfeljebb $|X|-1$ darab X által feszített élt tud fedni, k erdő pedig legfeljebb k-szor ennyit, így a feltétel szükséges.

Az elegendőséghez figyeljük meg, hogy az 1.3.7 irányítási tétel (ii) része alapján G-nek van olyan irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb k, így az 1.9.5 tételt alkalmazhatjuk. □

49. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy (egyirányú) párhuzamos éleket és hurkokat nem tartalmazó digráfban minden pont befoka legfeljebb K, akkor az élhalmaz lefedhető $K+1$ fenyvessel.*

1.10. Maximális párosítások

Valamely G irányítatlan gráfra jelölje $\nu = \nu(G)$ a független élek maximális számát, vagyis a legnagyobb párosítás elemszámát. Kőnig tétele szerint páros gráfban ez egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával. Nem páros gráfokban a $\nu = \tau$ minimax reláció már nem feltétlenül igaz, amint ezt a háromszög példája mutatja. Itt $\nu = 1, \tau = 2$. Általános gráfokra vonatkozik az alábbi jellemzés, amit valójában már az 1.6 szakaszban levezettünk a Tutte-tételből. Most bemutatunk egy direkt bizonyítást, amelynek hátránya, hogy ez sem algoritmikus, ugyanakkor az itt szereplő megközelítés kiterjesztésével lehet a maximális súlyú párosítás súlyára vonatkozó minimax tételt igazolni (lásd pl. Frank A. Poliéderes kombinatorika c. elektronikus jegyzetét).

1.10.1. Tétel (Berge–Tutte-formula)**.** *G-ben a független élek maximális $\nu(G)$ számára érvényes:*

$$\nu(G) = \min_{X \subseteq V} \{|V| - q(X) + |X|\} \;/2, \tag{1.36}$$

ahol $q(X)$ jelöli az X elhagyásával keletkező páratlan pontszámú komponensek számát.

Bizonyítás. Ezt a tételt már korábban levezettük Tutte tételéből, most egy közvetlen bizonyítást is adunk. Ahogy ezt korábban már említettük, egy összefüggő gráfot akkor nevezünk faktorkritikusnak, vagy röviden kritikusnak, ha bármely pontját elkerüli maximális elemszámú párosítás.

1.10.2. Lemma (Gallai)**.** *G kritikus gráfban a maximális párosítás egyetlen pontot hagy fedetlenül.*

Bizonyítás. A definícióból kapjuk, hogy G-nek nincs teljes párosítása. Tegyük fel indirekt, hogy egy M maximális párosítás legalább két pontot nem fed. Válasszuk M-et és a fedetlenül maradó s és t pontokat úgy, hogy az s és t pontok G-beli távolsága a lehető legkisebb legyen. Persze ez a távolság nem egy, azaz s és t nem szomszédos, mert akkor az st élt M-hez lehetne venni, ellentétben M maximális voltával. Legyen P egy legrövidebb út s és t között, és legyen z ennek egy belső pontja. Mivel G kritikus, létezik egy z-t elkerülő maximális elemszámú M_z párosítás. M, s és t választása miatt M fedi a P út minden belső pontját, így z-t is. Tekintsük a z-ből induló $M - M_z$-alternáló utat, amelynek első éle M-beli, így utolsó xy éle az M_z maximalitása miatt szükségképpen M_z-beli. Az y pontot tehát nem fedi M, és értelemszerűen y különbözik s és t egyikétől, mondjuk s-től. Ekkor az alternáló út mentén cserélve egy olyan párosítást kapunk M-ből, amelynek elemszáma megegyezik M-ével, azaz amelyik szintén maximális, továbbá szabadon hagyja z-t és s-et, ellentmondásban M, s és t választásával. □

Térjünk rá a Berge–Tutte-formula bizonyítására. Tetszőleges M párosítás és $X \subseteq V$ halmaz esetén legalább $q(X) - |X|$ pont marad fedetlen, azaz M legfeljebb $|V| - (q(X) - |X|)$ pontot fed, így az M elemszáma legfeljebb $(|V| - q(X) + |X|)/2$. Így a formulában a $\nu(G) \leq$ min irány következik.

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához V elemszáma szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $|V| = 0$, akkor (1.36) mindkét oldala 0. Tegyük fel tehát, hogy $|V| \geq 1$, és azt, hogy az (1.36) formula érvényes minden kisebb gráfra. Nyilván feltehető, hogy G összefüggő. Azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan $X_0 \subseteq V$ halmaz, amelyre

$$\nu(G) \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2. \tag{1.37}$$

1. eset *G nem kritikus*, azaz van olyan v pontja, amelyet elhagyva a keletkező G' gráfra $\nu(G') \leq \nu(G) - 1$. Legyen $V' := V - v$. Indukciót használva kapjuk, hogy létezik olyan $X'_0 \subseteq V - v$, amelyre $\nu(G') = (|V'| - q'(X'_0) + |X'_0|)/2$, ahol $q'(X'_0)$ a $G' - X'_0$-ben jelöli a páratlan komponensek számát. Legyen $X_0 := X'_0 + v$. Nyilván $q(X_0) = q'(X'_0)$. Ezeket összevetve kapjuk: $\nu(G) - 1 \geq \nu(G') = (|V'| - q'(X'_0) + |X'_0|)/2 = (|V| - q(X_0) + |X_0| - 2)/2$, ami éppen (1.37).

2. eset *G kritikus*. A Gallai lemma alapján $\nu(G) = (|V| - 1)/2$. Tehát $X_0 := \emptyset$ választással $\nu(G) = (|V| - 1)/2 \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2$, azaz (1.37) fennáll. $\square$

Algoritmikus bizonyítás

A Berge–Tutte-formula nemtriviális irányára bemutatunk egy harmadik bizonyítást is, amely már elvezet majd egy maximális párosítás meghatározására szolgáló algoritmushoz. A bizonyítás két megfigyelésen múlik.

Legyen M egy párosítás. Egy olyan M-alternáló utat, amely két szabad (azaz M által nem fedett) pontot köt össze, M**-növelő** vagy röviden **növelő út**nak nevezünk.

1.10.3. Lemma (Berge)**.** *A $G = (V, E)$ gráf egy M párosítása akkor és csak akkor maximális elemszámú, ha nincsen M-növelő út.*

Bizonyítás. Amennyiben P M-növelő út, úgy az $M' := M \oplus P$ szimmetrikus differencia olyan párosítás lesz, amelynek eggyel több éle van, mint M-nek, vagyis ilyenkor M nem lehet maximális.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy létezik egy M-nél nagyobb N párosítás. Ekkor az $M \oplus N$ szimmetrikus differencia komponensei M-alternáló körök és utak. Miután $|N| > |M|$, az egyik komponensben szükségképpen több N-beli él van, mint M-beli él, de akkor ez a komponens egy M-növelő út. $\square$

Nevezzük G egy K páratlan körét **kehely**nek, ha G-nek létezik olyan M párosítása, amely K egyetlen r pontját nem fedi és az r-ből a körön akármelyik irányba elindulva minden második él M-beli. Az r pontot a kehely **bázis**ának hívjuk, és azt mondjuk, hogy M és K **illeszkednek**.

1.10.4. Lemma (Edmonds)**.** *Legyen K egy kehely és M egy illeszkedő maximális párosítása G-nek. Ekkor a K összehúzásával keletkező G' gráfban az $M' := M - K$ párosítás maximális elemszámú.*

Bizonyítás. Indirekt, ha M' nem lenne maximális G'-ben, akkor a Berge-lemma miatt létezne egy M'-növelő P' út G'-ben. Amennyiben P' nem tartalmazza a K összehúzásával keletkezett v_K pontot, úgy P' egy M-növelő utat adna G-ben, ami ellentmondana M maximalitásának. Ha viszont P' tartalmazza v_K-t, akkor ott végződik. Jelölje z a K-nak azt a pontját, ahol a P'-nek megfelelő G-beli P út végződik. Ha z megegyezik a K kehely r bázisával, akkor P egy M-növelő út. Ha $z \neq r$, akkor legyen Q az a K-ban z és r között vezető M-alternáló út, melynek z-nél levő első éle M-ben van. Ekkor $P + Q$ egy M-növelő út G-ben, ellentmondásban M maximalitásával. □

50. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha M nem maximális G-ben, akkor M' nem maximális G'-ben.*

Bizonyítás. (A Berge-Tutte formula nemtriviális irányára.) Nevezzünk **gát**nak egy olyan X halmazt, amelyre a minimum a Berge–Tutte-formulában felvétetik. Tetszőleges $X \subseteq V$ halmaz és M párpsítás esetén pontosan akkor teljesül $|M| = (|V| - q(X) + |X|)/2$, ha az alábbi $(a), (b)$ és (c) feltételek teljesülnek. Ekkor persze X biztosan gát, az M pedig maximális párosítás (a Berge–Tutte-formula könnyű iránya miatt).

(a) *Az X elhagyásával keletkező bármely C komponensre az M-nek a C-be eső része legfeljebb egy pont híján fedi C-t.*
(b) *X nem feszít M-beli élt.*
(c) *M fedi X minden pontját.*

Célunk egy olyan M maximális párosítás és egy $X \subseteq V$ részhalmaz létezését kimutatni, melyre az (a), (b) és (c) ú.n. optimalitási kritériumok fennállnak. A pontok száma szerinti indukciót használunk.

Tegyük fel először, hogy létezik egy K kehely és egy illeszkedő M maximális párosítás. Ekkor az Edmonds-lemma szerint $M' = M - K$ maximális párosítás a K összehúzásával kapott G'-ben. Indukció miatt létezik pontoknak egy olyan X részhalmaza G'-ben, melyekre (a), (b) és (c) fennáll. Mivel a K összehúzásával keletkezett v_K pont fedetlen G'-ben, így nincs X-ben, és ezért X az eredeti G-ben is teljesíti az optimalitási kritériumokat.

Tegyük most fel, hogy nem létezik kehely G-ben, amely maximális párosításra illeszkedik. Legyen M egy maximális párosítás. Egy F erdőről azt mondjuk, hogy **M-alternáló**, ha

(i) F minden komponense egyetlen fedetlen pontot tartalmaz, amelyet a komponens gyökerének nevezünk.

(ii) F bármely pontjából a gyökérhez vezető út M-alternáló.

(iii) Ha valamely $uv \in M$ élre a v pont F-ben van, akkor u is.

Legyen F egy maximális M-alternáló erdő. Az F erdőben nem szereplő G-beli pontok halmazát **tisztásnak** hívjuk és $C := C(F)$-fel jelöljük. Nyilván az M-nek C-ben levő élei C-t teljesen párosítják. **Külső** pontnak hívjuk az F azon pontjait, melyek a gyökértől páros távolságban vannak, míg az F többi pontja **belső** pont.

1.10.5. Lemma. *Ha nem létezik maximális párosításra illeszkedő kehely, akkor külső pontból csak belsőbe vezethet él.*

Bizonyítás. Az F maximalitása miatt külső pontból nem vezet él a tisztásra. Az F két különböző komponensében lévő külső pontok között sem vezethet él, mert egy ilyen uv élt a két komponensben kiegészítve az u-ból, illetve a v-ből a megfelelő gyökerekbe vezető M-alternáló utakkal egy M-növelő utat kapnánk.

Végül belátjuk, hogy az F egy F_1 komponensébe eső két külső pont között sem vezethet él. Tekintsük ugyanis egy ilyen élnek az F_1 fához tartozó K alapkörét, amelynek az F_1 r_1 gyökeréhez legközelebbi pontja legyen r. Legyen P az F_1-ben az r_1 és r között vezető alternáló út. Most $M_1 = M \oplus P$ egy maximális párosítás, amely illeszkedik K-ra, ellentmondásban a feltevéssel, hogy nem létezik kehely. $\square$

Jelölje X a belső pontok halmazát. Az F definíciójából rögtön következik, hogy a (b) és (c) optimalitási feltételek teljesülnek X-re. A lemmából pedig azt kapjuk, hogy (a) is fennáll, hiszen $G - X$ páros elemszámú komponensei a tisztást partícionálják, míg a páratlan elemszámú komponensei mind egyeleműek, éspedig a külső pontok. $\square$

Az algoritmus

A fenti bizonyítást könnyen algoritmussá alakíthatjuk. Az eljárás fázisokból áll. Egy fázisban valamely korábban megtalált M párosításból indulunk ki és keresünk egy P M-növelő utat. Amennyiben találunk, úgy az $M' := M \ominus P$ szimmetrikus differencia olyan párosítás lesz, amelynek eggyel több éle van, mint M-nek, és ekkor a következő fázisra térünk. Amikor az algoritmus már nem talál M-alternáló utat, akkor megad majd egy X részhalmazt, amely az aktuális M párosítással együtt kielégíti a három optimalitási feltételt.

Legyen tehát M valamilyen párosítás, S a szabad (fedetlen) pontok halmaza és $v \in V - S$-re jelöljük $\mu(v)$-vel a v párosításbeli szomszédját. Az S

pontjaira pedig legyen $\mu(v) = v$. Az eljárás egy F **M-alternáló** erdőt épít fel. Kiinduláskor F a szabad pontokból áll és élt nem tartalmaz. Az általános lépés leírásához legyen F M-alternáló erdő. Három esetet különböztetünk meg.

1. eset Az F-nek létezik olyan u és v külső pontja, melyek az F különböző komponenséhez tartoznak és amelyek között vezet él a gráfban. Ekkor az u és v komponensében a gyökerekhez vezető két alternáló utat az uv él mentén összekapcsolva egy P növelő utat kapunk, és ekkor az adott fázis véget ér.

2. eset F-nek létezik olyan u külső pontja, amely szomszédos egy tisztáson lévő v ponttal. Ekkor az uv élt és a $v\mu(v)$ párosító élt F-hez véve nagyobb M-alternáló erdőt kapunk.

3. eset F-nek egy komponensében létezik u és v külső pont, melyek szomszédosak. Ekkor az F-ben az u-t és v-t összekötő egyértelmű út az uv éllel együtt egy K páratlan kört alkot. Húzzuk össze K-t egy v_K ponttá. Ekkor F-ből egy másik M-alternáló erdő keletkezik, melynek az összehúzott pont külső pontja.

Az Edmonds-lemmából következik, hogy ha az összehúzott gráfban létezik növelő út, akkor ebből előállíthatjuk az eredeti gráf egy növelő útját. Ebből az is következik, hogy ha az 1. eset olyankor fordul elő, amikor már bizonyos összehúzásokat végrehajtottunk, akkor az eredeti gráfnak is elő tudjuk állítani egy növelő útját. Azt is megfigyelhetjük, hogy (esetleg többszöri) összehúzással keletkezett pont őképe olyan halmaz, amelyet a beleeső M-beli élek egy pont híján párosítanak.

Tehát: ameddig a 2. vagy 3. eset fordul elő, járjunk el az ott leírtak szerint. Amennyiben az 1. eset következik be, azaz az összehúzott gráfban van növelő út, akkor keressünk az eredeti gráfban növelő utat és egy nagyobb párosítást, majd térjünk a következő fázisra.

Végezetül amikor a fenti három eset egyike sem áll fenn, akkor a belső pontok X halmaza, amint a fenti bizonyításban már igazoltuk, teljesíti az optimalitási feltételeket.

Kanonikus gát

1.10.6. Tétel (Lovász). *Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor kritikus, ha felépíthető bármely pontjából kiindulva páratlan élszámú fülek egymás utáni hozzávételével* (ahol egy fül vagy egy egyszerű út, amelynek csak a két végpontja közös a meglévő gráffal, vagypedig egy kör, amelynek egyetlen pontja közös a meglévő gráffal.)

Bizonyítás. A Gallai-lemma nyomán a kritikusságnak azt az ekvivalens definícióját használjuk, hogy bármely pontot kihagyva létezik teljes párosítás. Egyszerű ellenőrizni, hogy a felépítési művelet kritikus gráfot eredményez.

A fordított irányhoz legyen r a gráf egy tetszőleges pontja és M a $G-r$ egy teljes párosítása. Azt fogjuk belátni, hogy G felépíthető r-ből olyan M-alternáló fülek hozzávételével, amelyek első és utolsó éle nem M-beli. Egy ilyen M-alternáló fül mindig páratlan élszámú.

Tegyük fel, hogy r-ből kiindulva már felépítettük G-nek egy részgráfját a megadott módon. Jelölje a részgráf ponthalmazát T. (Kezdetben T az egyetlen r pontból áll.) Készen vagyunk, ha $T=V$, ekkor ugyanis a még G-ből esetleg hiányzó éleket egyélű M-alternáló utakként bevéve megkapjuk G-t. Ha még $T \neq V$, akkor G összefüggősége miatt létezik olyan uv él, amelyre $u \in T, v \notin T$. A gráf kritikus, így v-ből létezik r-be vezető páros M-alternáló út (ilyet találunk az M és a $G-v$ egy teljes párosításának uniójában). Legyen ennek p az első T-be eső pontja és jelölje P' az útnak v-ből p-be vezető szegmensét. Most az uv él a P'-vel együtt egy M-alternáló utat vagy kört alkot, amellyel T tovább építhető. □

Most igazolni fogjuk, hogy a Berge–Tutte-formulában szereplő gátak között van egy „kanonikus”.

1.10.7. Tétel (Edmonds és Gallai)**.** *A $G=(V,E)$ gráfban jelölje $D(G)$ azon pontok halmazát, amelyeket G-nek valamely maximális párosítása nem fed le. Álljon $A(G)$ a $V-D(G)$ azon pontjaiból, melyeknek van $D(G)$-beli szomszédja, és legyen $C(G)$ a maradék pontok halmaza. Ekkor $A(G)$ gátja G-nek, éspedig éppen az a gát, amelynek elhagyásával keletkező páratlan komponensek uniója a lehető legszűkebb. $D(G)$ a $V-A(G)$ páratlan komponenseinek egyesítése, $C(G)$ pedig a $V-A(G)$ páros komponenseinek egyesítése. $D(G)$ komponensei kritikus gráfok. Végül, ha eltöröljük $C(G)$-t valamint az $A(G)$ által feszített éleket, és a $V-A(G)$ páratlan komponenseinek mindegyikét egy-egy pontra húzzuk össze, akkor olyan páros gráfot kapunk, amelyben az $A(G)$ minden X nemüres részhalmazának legalább $|X|+1$ szomszédja van.*

Bizonyítás. Tetszőleges A' gáthoz jelölje D' a $G-A'$ páratlan komponenseinek unióját, C' pedig a párosakét. Tetszőleges maximális M' párosítás esetén az M' lefedi A'-t és C'-t. Ezért $D(G)$ biztosan része D'-nek.

Legyen most A' egy olyan gát, amelyre D' minimális. Ekkor D' komponensei kritikusak, mert ha mondjuk az egyik K komponens nem volna az, akkor a K által feszített $G[K]$ gráfnak létezne nemüres X' gátja, amelyet A'-höz véve a G-nek egy olyan gátját kapnánk, ahol a páratlan komponensek uniója valódi része volna D'-nek.

Érvényes továbbá, hogy ha eltöröljük C'-t és az A'-ben lévő éleket, és a D'-beli páratlan komponensek mindegyikét egy-egy pontra húzzuk, akkor olyan páros gráfot kapunk, amelyben az A' minden X nemüres részhalmazának legalább $|X|+1$ szomszédja van. Valóban, ha volna egy ezt nem teljesítő X halmaz, akkor $A'-X$ is gát lenne G-ben, amelynek elhagyásával keletkező páratlan komponensek uniója valódi része lenne D'-nek. Ebből kapjuk, hogy D' bármely K páratlan komponenséhez létezik maximális párosítás, amely nem tartalmaz K-ba lépő élt, és így K kritikussága miatt K bármely pontjához létezik őt elkerülő maximális párosítás. Vagyis $D' = D(G)$. Mivel A' gát, így minden pontjából vezet él D'-be, ugyanakkor C' semelyik pontjából nem vezet él D'-be. Tehát $A' = A(G)$, és emiatt $C' = C(G)$. □

A fenti algoritmus további elemzésével igazolni lehet a következőt.

1.10.8. Tétel. *A Edmonds–Gallai-tételben szereplő $A(G)$ gát éppen az a gátja G-nek, amelyet az algoritmus megtalál, vagyis a belső pontok halmaza. $C(G)$ az algoritmus által talált tisztás.*

1.11. Perfekt gráfok

A $G = (V, E)$ irányítatlan gráfban a következő jelöléseket használjuk.

$\chi(G)$ kromatikus szám: a legkisebb szám, ahány stabil részhalmazra a csúcsokat fel lehet bontani,
$\omega(G)$: a maximális klikk elemszáma,
$\overline{\chi}(G)$ klikkfedési szám: a komplementer gráf kromatikus száma,
$\alpha(G)$: a maximális stabil halmaz elemszáma ($=\omega(\overline{G})$).

Nyilván $\chi \geq \omega$ és $\overline{\chi} \geq \alpha$. Egy $G = (V, E)$ gráfot akkor nevezünk **perfekt**nek, ha minden feszített G' részgráfjában $\chi(G') = \omega(G')$, vagyis a kromatikus szám egyenlő a maximális klikk méretével. Egy páros gráf nyilván perfekt, és a komplementere is az (a Kőnig-tétel fedési alakja miatt). H páros gráf élgráfja is perfekt hiszen az élgráf kromatikus száma éppen a H gráf $\chi'(H)$ élszínezési száma, míg a klikkszáma a H maximális $\Delta(H)$ fokszáma, márpedig Kőnig élszínezési tétele szerint $\chi'(H) = \Delta(H)$. A H páros gráf élgráfjának komplementere is perfekt, mert egyrészt ennek egy stabil halmaza a H egy csúcsában végződő élei halmazának felel meg, vagyis a kromatikus száma épp H lefogó pontjainak minimális $\tau(H)$ száma, másrészt pedig egy klikkje a H egy párosításának felel meg, márpedig Kőnig tétele szerint $\tau(H) = \nu(H)$. Részbenrendezett halmaz gráfja (comparability gráf) is perfekt a Mirsky-tétel miatt, és a komplementer gráfja is perfekt a Dilworth-tétel miatt.

1.11.1. Tétel (Lovász 1. perfekt gráf tétele)**.** *Egy perfekt gráf komplementere perfekt.*

A tétel rögvest adódik az alábbi erősebb változatból.

1.11.2. Tétel (Lovász 2. perfekt gráf tétele)**.** *Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor perfekt, ha minden $G' = (V', E')$ feszített részgráfjára*

$$|V'| \leq \alpha(G')\omega(G') \tag{1.38}$$

Bizonyítás. (Gasparian) Ha G perfekt, akkor V felbontható $\omega(G)$ darab stabil halmazra. Ezek mindegyike legfeljebb $\alpha(G)$ elemű, ezért $|V| \leq \alpha(G)\omega(G)$, és ugyanez érvényes a G minden G' feszített részgráfjára is. Tehát (1.38) szükséges.

A fordított irányhoz azt kell igazolnunk, hogy ha G imperfekt (azaz nem perfekt), akkor létezik (1.38)-at sértő G' feszített részgráfja. Ez avval ekvivalens, hogy ha G (tartalmazásra nézve) minimális imperfekt, akkor $n > \alpha\omega$, ahol $n = |V|$, $\alpha = \alpha(G)$, $\omega = \omega(G)$. Ezért a tétel következik az alábbi lemmából.

1.11.3. Lemma. *Ha $G = (V, E)$ minimális imperfekt gráf, akkor $n = \alpha\omega + 1$.*

Bizonyítás. Jelöljük az $\alpha\omega+1$ értéket n^*-gal. Mivel egy s pontra a $G' = G - s$ gráf perfekt, így $n - 1 \leq \alpha(G')\omega(G') \leq \alpha\omega$, vagyis $n \leq n^*$. Célunk tehát a fordított $n^* \leq n$ irány igazolása.

1. Állítás *Minden $S \neq \emptyset$ stabil halmazra $\chi(G - S) = \omega(G - S) = \omega(G)$.*

Bizonyítás. $\chi(G - S) = \omega(G - S)$ következik abból, hogy $G - S$ perfekt. A $G - S$ egy színezéséhez az S halmazt hozzávéve a G színezését kapjuk, amiből $\chi(G) \leq \chi(G - S) + 1$ adódik. Ha most indirekt $\omega(G - S) + 1 \leq \omega(G)$ volna, akkor $\chi(G) \leq \chi(G - S) + 1 = \omega(G - S) + 1 \leq \omega(G)$, ellentmondásban G minimális imperfektségével. □

2. Állítás *Tetszőleges s csúcsra $G - s$ felbontható $S_1, \ldots, S_\omega$ stabil halmazokra. G-nek bármely K ω elemű klikkje vagy* (2A) *nem tartalmazza s-et, és mindegyik S_i-t pontosan egy elemben metszi vagypedig* (2B) *tartalmazza s-et, és ekkor egyetlen S_i-től diszjunkt, a többit pedig pontosan egy elemben metszi.*

Legyen S_0 egy α elemszámú stabil halmaz. A 2. állítás folytán minden $s \in S_0$ elemre $G - s$ felbontható ω darab stabil halmazra. Így az S_0-lal együtt nyerjük az $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \ldots, S_{\alpha\omega}\}$ összesen $n^* = \alpha\omega + 1$ stabil halmazból álló rendszert.

3. Állítás *Bármely K ω elemű klikk pontosan egy S_i-től diszjunkt.*

Bizonyítás. Ha K az S_0-tól diszjunkt, akkor az S_0 bármely s elemére alkalmazhatjuk a (2A) tulajdonságot. Ha viszont K metszi S_0-t, akkor egyetlen s elemben metszi, és ezen s-re alkalmazhatjuk a (2B) tulajdonságot. □

Az 1. állítás folytán mindegyik S_i-hez van egy tőle diszjunkt K_i ω elemű klikk. A 3. állítás miatt K_i metszi az összes S_i-től különböző tagját $\mathcal{S}$-nek, éspedig mindegyiket egy pontban. Jelölje $\mathcal{K}$ az így nyert n^* darab ω-klikkből álló halmazrendszert.

Jelölje A azt az $n^* \times n$-es (0,1)-es mátrixot, amelynek i-edik sora az S_i karakterisztikus vektora. Jelölje B azt az $n \times n^*$-os (0,1)-es mátrixot, amelynek i-dik oszlopa a K_i karakterisztikus vektora.

Ekkor a $C = AB$ mátrix $n^* \times n^*$ méretű, melynek c_{ij} eleme az $S_i \cap K_j$ elemszáma, vagyis C egy olyan mátrix, amelynek főátlójában minden elem 0, a többi elem pedig mind 1. A C mátrix nemszinguláris, ugyanis ha z egy olyan vektor, amelyre $Cz = 0$, akkor ${}_icz = 0$ alapján $\underline{1}z = {}_icz + z(i) = z(i)$ minden i-re, vagyis $z(i)$ konstans és így 0. (Itt ${}_ic$ a C mátrix i-edik sorát jelöli.) Ezek szerint AB rangja n^*, de ekkor az A rangja is legalább n^*, vagyis az A n^* darab sora lineárisan független, és emiatt $n^* \leq n$, amire szükségünk volt. □

□

Mivel $\alpha(G') = \omega(\overline{G}')$ és $\omega(G') = \alpha(\overline{G}')$, (1.38) pontosan akkor áll fenn G'-re, amikor a $\overline{G}'$ komplementerre, így a 2. perfekt gráf tétel implikálja az elsőt. További előnyként megmutatjuk, hogy a perfektség co-NP-ben van, ami azt jelenti, hogy létezik egy polinom időben ellenőrizhető bizonyíték egy gráf imperfektségére. Nevezzünk egy G gráfot **szépen partícionálható**nak, ha léteznek $\alpha \geq 2$ és $\omega \geq 2$ egészek úgy, hogy G minden s csúcsára $G - s$ felbontható α darab ω elemű klikkre és felbontható ω darab α elemű stabilra.

1.11.4. Lemma. *Szépen partícionálható gráf imperfekt.*

Bizonyítás. A feltevés szerint G-nek $n = \alpha\omega + 1$ csúcsa van. G-ben nem létezhet $\alpha + 1$ elemű S stabil, mert akkor egy $s \notin V - S$ elemre $G - s$ nem volna α darab klikkre partícionálható. Emiatt $\alpha(G) = \alpha$, és hasonlóképp adódik, hogy $\omega(G) = \omega$. Ekkor viszont G megsérti az (1.38) egyenlőtlenséget, és így G nem perfekt. □

1.11.5. Tétel. *Egy G gráf akkor és csak akkor imperfekt, ha van szépen partícionálható feszített részgráfja.*

Bizonyítás. Az 1.11.4 lemma szerint, ha G-nek van szépen partícionálható feszített részgráfja, akkor G nem perfekt. Megfordítva, legyen G imperfekt. Feltehetjük, hogy G minimális imperfekt. Ekkor (1.38) teljesül minden valódi feszített részgráfra, de G-re magára nem. Következik, hogy $|V| = \alpha(G)\omega(G) + 1$, továbbá minden $s \in V$ csúcsra a $G' = G - s$ gráfra $\alpha(G') = \alpha(G)$ és $\omega(G') = \omega(G)$. Mivel G' perfekt, felbontható $\omega := \omega(G')$ darab stabilra és ezen stabil halmazok szükségképpen mind α eleműek. Hasonlóképp, G' felbontható $\alpha := \alpha(G')$ darab klikkre, és ezen klikkek mind ω eleműek. Vagyis G valóban szépen partícionálható. $\square$

Bizonyítás nélkül említjük a következő nagyon nehéz eredményt.

1.11.6. Tétel (Erős perfekt gráf tétel)**.** *Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha sem ő, sem a komplementere nem tartalmaz feszített, átlómentes páratlan kört.*

Lovász tétele alapján ez azzal ekvivalens, hogy minden szépen partícionálható gráf tartalmaz feszített, átlómentes páratlan kört vagy ennek komplementerét.

Seymour és társai azt is bebizonyították, hogy a perfektség NP-ben van azáltal, hogy leírtak egy konstrukciót perfekt gráfok készítésére, és megmutatták, hogy minden perfekt gráf előáll a megadott konstrukció segítségével.

2. fejezet

Optimalizálás matroidokon

2.1. Bevezetés

A matroid egy $(S, \mathcal{F})$ párral megadható absztrakt struktúra, ahol S véges halmaz, $\mathcal{F}$ pedig az S részhalmazainak bizonyos axiómákat kielégítő rendszere. A fogalmat Hassler Whitney vezette be 1933-ban azzal a céllal, hogy a „függetlenséget", különösképpen pedig a lineáris függetlenséget általános absztrakt keretbe helyezze.

Egy másik lehetséges megközelítés a matroidokat olyan rendszerekként vezeti be, melyekre a mohó algoritmus minden költségfüggvény esetén helyes eredményt ad. Ismert, hogy egy élsúlyozott, összefüggő, irányítatlan gráf maximális súlyú feszítő fájának meghatározása a mohó algoritmussal történhet: egymás után választunk éleket, mindig a legnagyobb súlyút, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott élek erdőt alkossanak. Bebizonyítható, hogy így maximális súlyú feszítő fát kapunk. Ugyanakkor, ha például élsúlyozott páros gráfban akarnánk maximális súlyú párosítást keresni, akkor nem okoz nehézséget olyan példát találni, ahol a mohó algoritmus nem ad optimális párosítást. Ennek kapcsán felvetődik a kérdés, hogy melyek azok a lényegi vonások, amelyek a mohó algoritmus helyes működését lehetővé teszik. A válaszhoz mindenekelőtt definiálni kell, hogy pontosan mit is értünk mohó algoritmuson. Egy lehetséges definíció a következő: az S alaphalmaz egy leszálló $\mathcal{F}$ részhalmazrendszerére és egy S-en értelmezett tetszőleges súlyfüggvényre egymás után válasszunk ki S-ből elemeket, mindig a lehetséges legnagyobb súlyút, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott elemek egy $\mathcal{F}$-beli részhalmazt alkossanak. Ármost a matroidok éppen az olyan leszálló halmazrendszerek, melyekre ez a mohó algoritmus tetszőleges súlyfüggvényre megadja az optimumot. (Leszálló azt jelenti, hogy $Y \subset X \in \mathcal{F}$ esetén $Y \in \mathcal{F}$.)

Jelen felépítésünkben azonban a matroidok bevezetésére nem ezt az utat követjük, hanem a Whitney által eredetileg javasoltat, amely a lineáris függetlenséget absztrahálja. A módszer a szokásos: kiválasztjuk a lineáris függetlenség néhány alapvető tulajdonságát (amelyek tehát a lináris algebrában bizonyított állítások) és ezeket tesszük meg axiómáknak. A matroidok fogalmának bevezetése több, egymással ekvivalens axiómarendszerrel is történhet. Ezeket azért érdemes tárgyalni, mert különféle alkalmazásokban más-más axiómarendszerrel könnyebb dolgozni.

A matroidok hasznossága két tényből fakad (mint ahogy bármely egyéb jól sikerült struktúráé is). Egyrészt kellően általánosak ahhoz, hogy számos helyen alkalmazhatóak legyenek, ugyanakkor elég speciálisak is, hogy mélyenfekvő, értékes eredményeket nyerjünk róluk.

Néhány probléma

Kedvcsinálónak álljon itt néhány érdekes kombinatorikus optimalizálási feladat, melyek megoldása matroidok nélkül nem lehetséges, de legalábbis igen kényelmetlen.

1. Gráfban keressünk k élidegen feszítő fát. Élsúlyozott gráfban keressünk olyan minimális súlyú részgráfot, amely tartalmaz k élidegen feszítő fát. Általánosabban: a gráf élhalmazán adott k súlyfüggvény, keressünk k élidegen feszítő fát úgy, hogy a fák súlyösszege minimális legyen, ahol az i-edik fa súlyát az i-edik súlyfüggvény definiálja.

2. Irányított gráfban keressünk olyan minimális súlyú részgráfot, amelyben egy gyökérpontból a digráf minden más pontjába vezet (a) k élidegen út, (b) k pontidegen út.

3. Gráfban keressünk olyan minimális költségű feszítő fát, melynek egy adott pontban a fokszáma előírt korlátok közé esik. Általánosabban: egy stabil halmaz minden pontjában a fa fokszáma megadott korlátok közé essék. (Ha minden pontra előírhatnánk korlátot, akkor a feladat speciális esetként már magában foglalná a Hamilton-út keresésének NP-teljes feladatát.)

4. Pontsúlyozott digráfban keressünk csúcsoknak egy olyan minimális súlyú részhalmazát, amelyből minden csúcsba vezet k diszjunkt út.

5. A síkban véges sok pont közül válasszunk ki maximálisan sok diszjunkt ponthármast, melyek mindegyike valódi háromszöget feszít.

6. Egy irányítatlan gráfon Kötő és Vágó felváltva választanak még nem tekintett éleket. Kötő megerősítheti az élt, Vágó eltörölheti. Kötő célja, hogy megerősített élekből utat hozzon létre két előre adott pont között. Vágó célja egy olyan vágást eltörölni, amely elválasztja a két megadott pontot. Kinek, mikor van nyerő stratégiája?

2.2. Függetlenség és rang

2.2.1. Függetlenségi axiómák

Adott egy S véges halmaz és részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt **matroid**nak nevezzük, ha fennáll a következő három tulajdonság.

(I1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(I2) *Ha* $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$, *akkor* $X \in \mathcal{F}$.

(I3) *Minden* $X \subseteq S$ *részhalmazra az* $\mathcal{F}$*-nek* X*-ben fekvő,* X*-ben legbővebb tagjai azonos elemszámúak.*

Az $\mathcal{F}$ tagjait szokás **független** halmazoknak nevezni, míg S többi részhalmazát **függő**nek. Az axiómák tehát azt kívánják, hogy (I1) az üres halmaz mindig független, (I2) független halmaz részhalmaza is független, (I3) tetszőleges X részhalmazban az X-ben már nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz. Ezt a csupán X-től függő, $r(X)$-szel jelölt számot az X halmaz **rang**jának nevezik. A **matroid rangján** az alaphalmazának rangját értjük. Két matroidot akkor tekintünk **izomorf**nak, ha az alaphalmazaik között létezik egy olyan egy-egy értelmű megfeleltetés, amelynél független részhalmaz képe független és függő részhalmaz képe függő. Az alábbiakban egy halmazra vonatkozó „legbővebb", „nem bővíthető", „tartalmazásra nézve maximális" jelzőket egymás szinonímáiként fogjuk használni.

Könnyű látni, hogy ekvivalens axiómarendszert kapunk, ha az (I1) axiómát kicseréljük a következővel:

(I1′) $\mathcal{F}$ *nemüres.*

Az (I3) axióma azt jelenti, hogy X-ben minden független részhalmaz kibővíthető X-nek egy maximális, azaz $r(X)$ elemszámú, független részhalmazává. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a mohó algoritmus S-nek mindig egy maximális össz-súlyú független részhalmazát szolgáltatja, bármilyen $0-1$ értékű súlyfüggvény esetén is alkalmazzuk. Amint azt később kimutatjuk, a mohó algoritmus bármilyen súlyfüggvényre helyesen dolgozik.

Az (I3) tulajdonság helyett gyakran az alábbit tekintik:

(I3′) *Legyen* $K, N \in \mathcal{F}$*, melyekre* $|K| < |N|$*. Ekkor létezik olyan* $x \in N - K$*, amelyre* $K + x \in \mathcal{F}$. (Magyarul, egy kisebb elemszámú független halmaz mindig bővíthető egy nagyobb elemszámú független halmazból vett alkalmas elemmel.)

2.2.1. Állítás. (I3) *ekvivalens* (I3′)*-vel.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ Legyen $K, N \in \mathcal{F}$, melyekre $|K| < |N|$ és legyen $S' := K \cup N$. Most (I3) miatt S'-nek minden nem bővíthető független részhalmaza legalább $|N|$ elemű, és így (I3′) következik.

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $A, B \subseteq X$ függetlenek, és hogy $|A| < |B|$. (I3′) miatt létezik $y \in B - A$, melyre $A + y$ független. $\square$

Az (I3) axióma egy kevesebbet követelő alakja a következő:

(I3$''$) *Ha* $I_k, I_{k+1} \in \mathcal{F}$ *és* $|I_k| = k, |I_{k+1}| = k + 1$ *valamely* $k \geq 0$ *egészre, akkor létezik egy* $s \in I_{k+1} - I_k$ *elem úgy, hogy* $I_k + s \in \mathcal{F}$.

Érdekes, hogy már (I3$''$) segítségével is definiálhatjuk a matroidokat, annak ellenére, hogy (I3$''$) önmagában gyengébb, mint (I3).

2.2.2. Állítás. {(I1),(I2),(I3)} *ekvivalens* {(I1),(I2), (I3$''$)}*-vel.*

Bizonyítás. (I3$''$) nyilván speciális esete (I3$'$)-nek. A megfordításhoz azt igazoljuk, hogy (I3$'$) következik (I2) és (I3$''$)-ből. Legyen $k := |K|, I_k := K$ és legyen I_{k+1} az N-nek egy $(k + 1)$ elemű részhalmaza. Az (I2) axióma szerint I_{k+1} független, így létezik egy olyan $s \in I_{k+1} - I_k \subseteq N - K$ elem, amelyre $I_k + s \in \mathcal{F}$, azaz (I3$'$) fennáll. □

A definícióból rögtön következik, hogy ha $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $S' \subseteq S$, akkor $M' := (S', \mathcal{F}')$ is matroid, ahol $\mathcal{F}' := \{F : F \subseteq S', F \in \mathcal{F}\}$. M'-t az M **részmatroid**jának nevezik. Azt is mondjuk, hogy az M' matroid M-ből a $Z := S - S'$ halmaz **elhagyás**ával (**törlés**ével) keletkezik, vagy hogy M' az M **megszorítás**a S'-re. Jelölésben $M' = M - Z$ vagy $M' = M|S'$.

A harmadik függetlenségi axiómát még tovább gyengíthetjük.

(I3$'''$) *Minden* S*-beli legbővebb független részhalmaznak az elemszáma ugyanaz az* r *szám, és ha* $I_{r-1}, I_r \in \mathcal{F}$, $|I_r| - 1 = |I_{r-1}| = r - 1$, *akkor létezik olyan* $s \in I_r - I_{r-1}$ *elem, amelyre* $I_{r-1} + s \in \mathcal{F}$.

2.2.3. Állítás. {(I1),(I2),(I3$'$)} *ekvivalens* {(I1),(I2),(I3$'''$)}*-vel.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy a második rendszerből következik (I3$'$). Legyen $K, N \subseteq S$ két olyan tagja $\mathcal{F}$-nek, melyekre $|K| < |N|$. Ekkor (I3$'''$) miatt létezik $B_K, B_N \in \mathcal{F}$, melyekre $K \subseteq B_K, N \subseteq B_N$ és $|B_K| = |B_N| = r$. Válasszuk ezeket úgy, hogy $B_K \cap B_N$ maximális legyen.

Állítjuk, hogy ilyenkor $(B_K - K) \cap N$ nem üres. Ennek igazolásához indirekt tegyük fel, hogy $(*)$ nem létezik $x \in (B_K - K) \cap N$ elem. Mivel $|K| < |N|$ és $|B_K| = |B_N|$, következik, hogy $|B_K - K| > |B_N - N|$ és így létezik egy $x_1 \in B_K - K$, amely nincs $B_N - N$-ben. A $(*)$ feltevés miatt $x_1 \notin B_N$, így az (I3$'''$) axióma miatt létezik egy $x_2 \in B_N - B_K$ elem, amelyre $B'_K := B_K - x_1 + x_2$ benne van $\mathcal{F}$-ben. Ilyen B'_K létezése viszont ellentmond $|B_K \cap B_N|$ maximalitásának.

Tetszőleges $x \in (B_K - K) \cap N$ elemre $K + x \subseteq B_K$, azaz $K + x \in \mathcal{F}$ és így (I3$'$) fennáll. □

Az (I3$'$) axióma egy más irányú gyengítése a következő.

(I3$''''$) *Legyen* $K, N \in \mathcal{F}$, *melyekre* $|K - N| = 1$, *és* $|N - K| = 2$. *Ekkor létezik olyan* $x \in N - K$, *amelyre* $K + x \in \mathcal{F}$.

51. Feladat. *Igazoljuk, hogy* {(I1),(I2),(I3)} *ekvivalens* {(I1),(I2), (I3'''')}-*vel.*

Miért jó, hogy az axiómáknak gyengébb és erősebb változatait is tekintjük? Amikor matroidokról akarunk valamit bizonyítani, akkor kényelmesebb, ha erősebb tulajdonságok állnak rendelkezésre. Ha viszont valamely konkrétan megadott struktúráról akarjuk belátni, hogy matroid, akkor egyszerűbb a gyengébb axiómák fennállását igazolni.

Lássuk be a matroid rangfüggvényének egy alapvető tulajdonságát.

2.2.1. Lemma. *A rangfüggvény minden $X, Y \subseteq S$-re kielégíti a*

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \tag{2.1}$$

szubmodularitási egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. Legyen F egy maximális független részhalmaza $X \cap Y$-nak. Ekkor $|F| = r(X \cap Y)$ és a 3. axióma szerint F kibővíthető $X \cup Y$-ban egy maximális, azaz $r(X \cup Y)$ elemszámú független N részhalmazzá. F maximalitása miatt $N \cap X \cap Y = F$ és így $|N \cap X| + |N \cap Y| = |F| + |N|$. Most $N \cap X$ független része X-nek, így $r(X) \geq |N \cap X|$. Hasonlóan, $r(Y) \geq |N \cap Y|$, amiből $r(X) + r(Y) \geq |N \cap X| + |N \cap Y| = |F| + |N| = r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$. □

Egy halmazfüggvényt, amely minden $X, Y \subseteq S$-re kielégíti (2.1)-et **teljesen szubmodulárisnak** vagy röviden **szubmodulárisnak** nevezünk. Egy matroid rangfüggvénye tehát szubmoduláris, monoton növő (azaz $X \subseteq Y$ esetén $r(X) \leq r(Y)$) és szubkardinális „elemszám alatti": minden $X \subseteq S$-re $r(X) \leq |X|$). Megjegyzendő, hogy vannak olyan szubmoduláris függvények, amelyek nem rangfüggvényei semmilyen matroidnak. Például egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain értelmezhetjük a $|\Gamma(X)|$ függvényt, amely az X-szel szomszédos T-beli csúcsok számát jelöli. Ez szubmoduláris, monoton, de nem szubkardinális. Egy irányított gráfban a csúcsok egy X részhalmazába belépő élek számát $\varrho(X)$-szel jelölve, kimutatható, hogy ϱ szubmoduláris, bár nem monoton és nem szubkardinális.

A szubmodularitás érdekes következménye az alábbi észrevétel.

2.2.2. Lemma. *Legyen b tetszőleges szubmoduláris függvény az S alaphalmazon. Rögzített $T \subset S$ részhalmazra definiáljuk az $S - T$ részhalmazain a $h_T(X) := b(X \cup T) - b(X)$ növekményfüggvényt. Ekkor h_T monoton csökkenő, azaz $X \subseteq Y$ esetén $h_T(X) \geq h_T(Y)$.*

Bizonyítás. A szubmoduláris egyenlőtlenséget az $X' = X \cup T$ és Y halmazokra felírva kapjuk, hogy $b(X \cup T) + b(Y) = b(X') + b(Y) \geq b(X' \cap Y) + b(X' \cup Y) = b(X) + b(T \cup Y)$, amiből $h_T(X) = b(X \cup T) - b(X) \geq b(Y \cup T) - b(Y) = h_T(Y)$. □

52. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy b halmazfüggvény esetén minden egyelemű T halmazhoz tartozó növekményfüggvény monoton csökkenő, akkor b szubmoduláris.*

2.2.2. Példák matroidokra

MÁTRIXMATROID Adott (valamilyen test felett) egy A mátrix. Jelölje S az A oszlopainak halmazát. Definiáljuk $\mathcal{F}$-et úgy, hogy A oszlopainak egy F részhalmaza akkor tartozzék $\mathcal{F}$-hez, ha az F-beli oszlopvektorok lineárisan függetlenek. Ekkor $(S, \mathcal{F})$ matroidot alkot. Valóban, az első két axióma triviálisan teljesül, míg a harmadik egy alapvető (elemi) tétel lineáris algebrából (aminek matroidos általánosítását, semmiféle lineáris algebrai tételt sem használva, nemsokára be is bizonyítjuk). Az így előálló matroidot **mátrixmatroid**nak nevezzük. Használatban van még a **lineáris** vagy **reprezentálható** matroid elnevezés is. Amennyiben az alaptest a $GF(2)$, **bináris matroid**ról beszélünk. A mátrixmatroidban egy X halmaz (matroidelméleti) rangja az X oszlopai által alkotott mátrix (lineáris algebrai) rangja.

AFFIN MATROID Legyen S az n dimenziós tér pontjainak véges részhalmaza. S egy részhalmazát deklaráljuk függetlennek, ha affin független. (Szám n-esek egy halmazát akkor mondjuk affin függetlennek, ha mindegyiküket egy $(n+1)$-edik 1 értékű koordinátával kiegészítve lineárisan független $n + + 1$ dimenziós vektorokat kapunk.) Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az affin függetlenség is matroidot definiál. A síkban például a pontok, a pontpárok, valamint a nem egy egyenesen lévő ponthármasok affin független halmazokat alkotnak. Ebben a szemléletben a matroid elemei a tér pontjai, szemben a mátrixmatroiddal, ahol vektorok az alaphalmaz elemei. Az affin szemléletnek az az előnye, hogy segítségével síkban 3 (térben 4) rangú matroidokat ábrázolhatunk, míg vektorokkal síkban csak 2 (térben 3) rangúakat.

Speciális példa az $U_{4,2}$ matroid, amely a síkban négy darab egy egyenesen lévő pont által meghatározott affin matroid, amelyben tehát a legfeljebb kételemű halmazok a függetlenek.

10. Gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy $U_{4,2}$ a $GF(2)$ alaptest felett nem mátrixmatroid* (azaz nem bináris), *de $GF(3)$ felett az. Igaz-e, hogy $U_{4,2}$ bármely $GF(2)$-től különböző test felett mátrix-matroid?*

KÖRMATROID Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, melynek E élhalmaza alkotja a definiálandó matroid alaphalmazát. Élek egy részhalmazát függetlennek deklaráljuk, ha nem tartalmazza a gráfnak körét, vagyis ha erdő. Az első két axióma ismét triviális, míg a harmadik következik abból a közismert gráfelméleti tételből, hogy egy gráfban tetszőleges nem bővíthető erdő élszáma egyenlő a pontok és a komponensek számának különbségével. Eszerint tehát egy $X \subseteq E$ élhalmaz $r(X)$ rangja az X által alkotott részgráf pontjainak száma mínusz a részgráf komponenseinek a száma. Az így előálló matroidot a G gráf **körmatroidjá**nak nevezik. Használatos a **grafikus matroid** elnevezés is. Összefüggő gráf körmatroidjában a a maximális független halmazok éppen a feszítő fák.

2.2.3. Tétel. *Bármely T testre a grafikus matroid izomorf egy T feletti mátrixmatroiddal.*

Bizonyítás. Legyen $\vec{G} = (V, \vec{E})$ a G gráf egy tetszőleges irányítása. Jelölje A ezen digráf pont-él incidencia mátrixát, amelyben tehát a sorok V elemeinek, az oszlopok $\vec{E}$ elemeinek felelnek meg, és egy z csúcsnak és $e = uv$ irányított élnek megfelelő a_{ze} mátrixelem $+1$, -1 vagy 0 annak megfelelően, hogy $z = v$, $z = u$ vagy $z \neq u, v$. (Itt $+1$ az adott test egységelemét jelöli, -1 pedig a negáltját.)

Állítjuk, hogy a G gráf körmatroidja és az A-hoz tartozó mátrix matroid izomorfak. Ehhez legyen $F \subseteq E$ először egy erdő, és mutassuk meg, hogy az F elemeihez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek. $|F|$ szerinti indukciót használunk. Ha F egyelemű, akkor az eleméhez tartozó oszlop nem a nulla vektor, így lineárisan független. Legyen $|F| \geq 2$. Mivel F erdő, így van olyan v csúcs, amely egyetlen F-beli e éllel szomszédos. Ezért az F-hez tartozó A-beli oszlopok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az $F - e$-hez tartozók azok. Márpedig $F - e$ is erdő, így indukció miatt az $F - e$-nek megfelelő oszlopok lineárisan függetlenek.

Megfordítva, legyen F a gráf éleinek egy olyan részhalmaza, amely tartalmaz egy C kört. Ki kell mutatnunk, hogy az F-nek megfelelő oszlopok lineárisan összefüggnek. A C elemein valamelyik irányban körbemenve a $\vec{G}$-ban előre mutató élekhez rendeljünk $+1$ együtthatót, a hátra mutató élekhez -1-et, az összes többi élhez pedig 0-t. Ezzel az F-nek megfelelő A-beli oszlopok egy lineáris összefüggését kaptuk meg. □

A gráfhoz rendelt körmatroid sok információt tartalmaz a gráfról, de nem mindent: nem-izomorf gráfok körmatroidja lehet izomorf. Például tetszőleges két m élű fa körmatroidja izomorf: minden részhalmaz független. Nem nehéz konstruálni két nemizomorf 2-összefüggő gráfot, melyek körmatroidja ugyanaz.

2.2.3. További fogalmak

A most megismert grafikus és lineáris matroidokra támaszkodva kiterjeszthetjük a gráfelmélet, illetve a lineáris algebra néhány alapvető fogalmát általános matroidokra. A rang-függvény fogalma például a lineáris algebrából jött. Az S alaphalmaz egy maximális független részhalmazát a matroid **bázisá**nak hívjuk. Azt mondjuk, hogy egy $X \subseteq S$ halmaz **feszíti** vagy **generálja** az $Y \subseteq S$ halmazt, ha $r(X \cup Y) = r(X)$. Az X **részhalmaz által feszített** vagy **generált** halmaz, vagy másnéven az X **lezártja**, mindazon elemekből áll, melyek X-hez vétele a rangot nem növeli. A lezárt jele $\mathrm{cl}(X)$ vagy $\sigma(X)$. (A cl jelölés a closure szóból ered.) Nemsokára (2.4.5 lemma) bebizonyítjuk, hogy a rang akkor sem nő, ha a lezárt elemeit egyszerre vesszük X-hez. Néha használatos a **generátor** fogalma: ez egy olyan $X \subseteq S$ halmaz, amely tartalmaz bázist, vagy más szóval feszíti S-et.

A gráfelmélet számos fogalma kiterjeszthető matroidokra is. Például a gráf egy köre olyan függő részhalmaz, amelynek bármely valódi része már független. Ez inspirálja a következő definíciót. Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid valamely $X \subseteq S$ részhalmazát **kör**nek nevezzük, ha X függő részhalmaz, de X-nek bármely valódi részhalmaza független. Az egyelemű kör neve **hurok**. Figyeljük meg, hogy egy C kör rangj $|C| - 1$. Megjegyezzük, hogy a matroidkörnek ez a definíciója a gráfkör fogalmának csak bizonyos vonásait ragadja meg, de azt például nem, hogy a gráfkör szomszédos elemei ciklikusan helyezkednek el. A matroid két elemét **párhuzamos**nak nevezzük, ha kételemű kört alkotnak. (Például a mátrixmatroidban két nemnulla vektor akkor párhuzamos, ha egyik a másik skalárszorosa. A nullvektor hurkot alkot.) Hurkot és párhuzamos elemeket nem tartalmazó matroidot **egyszerű**nek mondunk.

Ha egy gráf e, f, g élei közül e, f párhuzamos és f, g párhuzamos, akkor persze e, g is az. Ez a tulajdonság tetszőleges matroidra átmegy.

2.2.4. Lemma. *Egy matroidban e, f, g elemek legyenek egyenként függetlenek. Tegyük fel, hogy e, f párhuzamos és f, g párhuzamos. Ekkor e, g is párhuzamos és $r(\{e, f, g\}) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen $X := \{e, f\}$ és $Y := \{f, g\}$. Használva r szubmodularitását azt kapjuk, hogy $1+1 = r(X)+r(Y) \geq r(X\cap Y)+r(X\cup Y) = 1+r(X\cup Y)$, amiből $r(X \cup Y) \leq 1$ adódik. Másrészt r monotonitása miatt $r(X \cup Y) \geq 1$ és így $r(\{e, f, g\}) = r(X \cup Y) = 1$. Ebből már az is következik, hogy az $\{e, g\}$ halmaz rangja is 1, ez pedig azzal ekvivalens, miután e és g nem hurok, hogy $\{e, g\}$ kör, vagyis hogy e és g párhuzamosak. $\square$

A gráf vágásának fogalma is kiterjeszthető matroidokra. Emlékeztetőül, egy összefüggő $G = (V, E)$ gráf vágásán az X és $V - X$ között vezető élek halmazát értjük valamely $\emptyset \subset X \subset V$ részhalmazra. **Elemi vágás**on olyan vágást értünk, amely nem tartalmaz valódi részhalmazként vágást, vagyis az elemi vágás az éleknek egy olyan tartalmazásra nézve minimális élhalmaza, amelynek elhagyása a gráfot két komponensre ejti. Például egy legalább három pontú páros gráfban az összes élből álló halmaz vágás, de nem elemi vágás. Hasznos gráfelméleti feladat annak kimutatása, hogy egy összefüggő $G = (V, E)$ gráf vágása akkor és csak akkor elemi, ha mind X, mind $V - X$ összefüggő részgráfot feszít.

Valójában az elemi vágás fogalmát általánosítjuk matroidra, és ezt fogjuk vágásnak nevezni. A matroid **vágásá**n olyan tartalmazásra nézve minimális halmazt értünk, amely metsz minden bázist. (Ebben az értelemben egy gráf körmatroidjának vágásai éppen a gráf elemi vágásai.) Egy olyan elemet, amely minden bázisban benne van, **híd**nak vagy **elvágó elem**nek nevezünk. A híd tehát egy egyelemű vágás. Gráf körmatroidjában ennek az elvágó él fogalma felel meg (azaz olyan él, amit kihagyva a gráf már nem összefüggő). Egy elem éppen akkor elvágó, ha nincs benne körben. Az S valamely X részhalmazának valamely t elemére azt mondjuk, hogy X**-nek hídja** vagy **elvágó eleme**, ha t benne van X minden maximális független halmazában. Ez avval ekvivalens, hogy t nincs X-beli körben. Hasznos megjegyezni, hogy ha t az X-nek hídja, akkor hídja X minden t-t tartalmazó részének is.

2.3. Körök és felbonthatóság

Egy matroid körei egyértelműen meghatározzák a matroidot abban az értelemben, hogy közös alaphalmazon adott két különböző matroid körhalmaza nem lehet ugyanaz. Valóban, ha létezik olyan X halmaz, amely mondjuk az M_1 matroidban független, de az M_2-ben nem, akkor X az M_2-ben tartalmaz minimális függő halmazt, azaz egy C kört, másrészről viszont X valamennyi részhalmaza, így C is független az M_1-ben. Az is világos, hogy a független halmazok éppen azon részhalmazai S-nek, melyek nem tartalmaznak kört, azaz

$$\mathcal{F} = \{F : \text{ nem létezik } C \in \mathcal{C}, C \subseteq F\}, \tag{2.2}$$

ahol $\mathcal{C}$ jelöli a körök halmazát.

Tegyük most fel, hogy egy $\mathcal{C}$ halmazrendszerből indulunk ki. Kérdés, milyen kikötéseket kell tennünk $\mathcal{C}$-re ahhoz, hogy a (2.2) által meghatározott $\mathcal{F}$ rendszer egy matroid függetlenjeit alkossa, mely matroid körhalmaza épp $\mathcal{C}$. E kérdés megválaszolásához vizsgáljuk meg a körök legfontosabb tulajdonságát.

2.3.1. Körök tulajdonságai, köraxiómák

Nyilvánvaló, hogy az üres halmaz sohasem kör, és egy kör nem tartalmaz másik kört.

2.3.1. Tétel. *Legyen C_1 és C_2 két különböző tagja $\mathcal{C}$-nek és $e \in C_1 \cap C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Bizonyítás. Két bizonyítást is mutatunk. Az elsőben tegyük fel indirekt, hogy van két olyan C_1, C_2 kör, melyekre a tétel nem igaz. Az uniójukat jelöljük K-val. Most $K - e$ független, míg K nem az, így $r(K) = |K| - 1$. Másrészt $C_1 \cap C_2$ független, így kiegészíthető K-nak egy maximális F független halmazává, amely tehát $r(K) = |K| - 1$ elemű. De ekkor F a K elemei közül csak egyet hagy ki, amely elem nincs a körök metszetében, és így F az egyik kört tartalmazza, ellentmondás.

Másik bizonyítás. A C_1, C_2 körökre $(|C_1| - 1) + (|C_2| - 1) = r(C_1) + r(C_2) \geq r(C_1 \cap C_2) + r(C_1 \cup C_2) = |C_1 \cap C_2| + r(C_1 \cup C_2)$, amiből $r(C_1 \cup C_2) \leq (|C_1| - 1) + (|C_2| - 1) - |C_1 \cap C_2| = |C_1 \cup C_2| - 2$, vagyis $C_1 \cup C_2$-ből egy elemet kihagyva függő halmazt kapunk, ami tartalmaz kört. □

2.3.2. Tétel. *Ha F független halmaz és $e \in S$, akkor $F + e$ legfeljebb egy kört tartalmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $F + e$ tartalmazza a C_1 és C_2 köröket, akkor az előző tétel szerint létezne olyan C kör, amelyre $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e \subseteq F$, ellentétben F függetlenségével. □

Ezek szerint a 2.3.2 tétel következménye a 2.3.1 tételnek. Könnyen látszik, hogy ez fordítva is igaz. Amennyiben B bázis és $e \in S - B$, úgy $B + e$ biztosan nem független, így pontosan egy kört tartalmaz. Ezt a kört az e elem B-hez tartozó **alapköré**nek nevezzük. A $B + e$-ben lévő alapkör bármely elemét kidobva ismét bázist kapunk.

2.3.3. Tétel. *Legyen C_1 és C_2 két különböző kör, $e \in C_1 \cap C_2$, $e_1 \in C_1 - C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $e_1 \in C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Bizonyítás. Legyen C_1, C_2 két olyan kör, amelyre a tétel nem igaz és az uniójuk, melyet K-val jelölünk, minimális elemszámú. A 2.3.1 tétel miatt létezik egy C_3-mal jelölt kör, amelyre $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$. Most $e_1 \notin C_3$, hiszen C_1, C_2 a feltevés szerint ellenpélda.

Mivel C_3 nem része C_1-nek, létezik egy $f \in C_3 - C_1$ elem, ami persze benne van C_2-ben. K minimalitása miatt a 2.3.3 tétel állítása már érvényes a C_2, C_3 körökre (az uniójuk kisebb, mint K), így létezik olyan $C_4 \subseteq C_2 \cup C_3 - f$ kör, amely tartalmazza e-t. Most viszont a C_4 és C_1 körök uniója valódi része K-nak, így ezekre is érvényes a tétel állítása, azaz létezik olyan $C \subseteq C_1 \cup C_4 - e \subseteq K - e$ kör, amely tartalmazza e_1-et, ellentmondásban az indirekt feltevéssel. □

Legyen adott a $\mathcal{C}$ halmazrendszer, és tekintsük a következő axiómákat.

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
(C2) *Ha $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, akkor $C_1 \not\subset C_2$.*
(C3) (Gyenge körtulajdonság) *Ha C_1 és C_2 két különböző tagja $\mathcal{C}$-nek és $e \in C_1 \cap C_2$, akkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

A fentiekben már láttuk, hogy egy matroid köreinek halmaza kielégíti mindhárom tulajdonságot. Figyeljük még meg, hogy a 2.3.3 tétel bizonyításánál csupán a fenti tulajdonságokat használtuk, ezért igaz az, hogy az alábbi tulajdonság, az ún. erős körtulajdonság, következménye a {C1,C2,C3} axiómáknak.

(C3′) (Erős körtulajdonság) *Legyen C_1 és C_2 két különböző tagja $\mathcal{C}$-nek és $e \in C_1 \cap C_2$, $e_1 \in C_1 - C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $e_1 \in C \subseteq$ $\subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Más szóval a {C1,C2,C3}, illetve a {C1,C2,C3′} axiómarendszer ekvivalens. A következő tétel tartalma az, hogy ez a három tulajdonság már elég is a matroid leírásához.

2.3.4. Tétel. *Ha $\mathcal{C}$ kielégíti a fenti három tulajdonságot, akkor a (2.2) képlet által definiált halmazrendszer matroidot alkot, melynek körei éppen a $\mathcal{C}$ tagjai.*

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy teljesülnek a függetlenségi axiómák. Az (I1) és (I2) axiómák triviálisan teljesülnek. Tegyük fel indirekt, hogy (I3) nem áll és legyen K, N olyan ellenpélda, amelyre $|K| < |N|$ és $|K \cap N|$ maximális. Válasszunk ki egy $e \in N - K$ elemet. Ekkor $K + e \notin \mathcal{F}$, így létezik egy $C_1 \in \mathcal{C}$, amelyre $e \in C_1 \subseteq K + e$. 2.2 folytán C_1 nincs teljesen N-ben, így létezik egy $h \in C_1 - N$ elem. Most $K' := K - h + e \in \mathcal{F}$, hiszen a gyenge körtulajdonság miatt $K + e$-nek egyetlen részhalmaza tartozik $\mathcal{C}$-hez.

Miután $|K' \cap N| > |K \cap N|$, a K' és N halmazokra már érvényes, hogy létezik olyan $f \in N - K'$, amelyre $K' + f \in \mathcal{F}$. $K + f$ tartalmazza $\mathcal{C}$ egy C_2 tagját. C_2-nek tartalmaznia kell h-t, mert különben $C_2 \subseteq K' + f$, de $K' + f$-ben nem volt $\mathcal{C}$-nek tagja. (C3)-at alkalmazva a C_1, C_2, h választással, azt kapjuk, hogy létezik egy olyan $C_3 \in \mathcal{C}$, amelyre $h \notin C_3$, azaz $C_3 \subseteq K' + f$, ellentmondás.

Végül lássuk be, hogy a kapott matroid körei éppen a $\mathcal{C}$ elemei. Valóban, ha C' a kapott matroid egy köre, akkor C'-nek része egy $\mathcal{C}$-beli C halmaz és C' erre a tulajdonságra minimális, azaz $C' = C$. Fordítva, ha $C \in \mathcal{C}$, akkor C nem független a kapott matroidban, így részhalmazként tartalmazza annak egy C' körét. Az előbb láttuk már, hogy $C' \in \mathcal{C}$, így a (C2) axióma miatt $C = C'$. □

Mátrixmatroidok újra

Legyen A egy mátrix és S az A oszlopainak halmaza. Deklaráljuk S egy C részhalmazát körnek, ha a C-nek megfelelő oszlophalmaz lineárisan függő, de C bármely valódi része lineárisan független. Bebizonyítjuk (lineáris algebrai tételre való hivatkozás nélkül), hogy az így kapott körök kielégítik a köraxiómákat. Az első kettő triviális. A gyenge köraxiómához legyen C_1, C_2 két kör és $c \in C_1 \cap C_2$. Ekkor c előáll mind a $C_1 - \{c\}$ tagjainak lineáris kombinációjaként, mind a $C_2 - \{c\}$ tagjainak lineáris kombinációjaként. Azaz, $c = \sum \lambda_i a_i$ ($a_i \in C_1 - \{c\}$, ahol $\lambda_i \neq 0$), és $c = \sum \mu_j b_j$ ($b_j \in C_2 - \{c\}$, ahol $\mu_j \neq 0$).

Ebből $\sum \lambda_i a_i - \sum \mu_j b_j = 0$, azaz $C_1 \cup C_2 - \{c\}$ lineárisan függő, így tartalmaz kört, vagyis teljesül a gyenge körtulajdonság.

Ebben a felépítésben tehát a 2.3.4 tételnek következménye az az alapvető lineáris algebrai tétel, amit az (I3) tulajdonság ír le mátrix-matroidokra.

Vágásmatroid

2.3.5. Tétel. *$G = (V, E)$ összefüggő gráf elemi vágásai teljesítik a köraxiómákat.*

Bizonyítás. Az első két köraxióma az elemi vágás definíciójából közvetlenül kiolvasható. (C3) igazolásához tekintsük a gráf B_1 és B_2 elemi vágásait, valamint az $e \in B_1 \cap B_2$ élt. Miután $B_1 \neq B_2$, a $B_1 \cup B_2$ eltörlésével keletkező gráfnak legalább három komponense van. Ehhez visszavéve az e élt nem kapunk összefüggő gráfot, vagyis $(B_1 \cup B_2) - e$ tartalmaz vágást és így elemi vágást is. □

A 2.3.4 tétel alapján az $\mathcal{F} := \{F \subseteq E : F \text{ nem tartalmaz vágást}\}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. Az E alaphalmazon így előálló matroidot a G **vágásmatroid**jának hívjuk. Ebben tehát egy F élhalmaz független, ha elhagyása megőrzi a gráf összefüggőségét, magyarán, ha van F-től diszjunkt feszítő fa. Kissé általánosabban, könnyen igazolható, hogy tetszőleges (azaz nem feltétetlenül összefüggő) gráf esetén azon élhalmazok rendszere, melyek elhagyása nem növeli a komponensek számát kielégíti a függetlenségi axiómákat.

11. Gyakorlat. *Összefüggő gráf vágásmatroidjában I bázis, ha feszítő fa komplementere. Egy $F \subseteq E$ halmaz rangja $|F| + 1$ mínusz $G - F$ komponenseinek száma.*

12. Gyakorlat. *A vágás-matroid vágásai a körmatroid körei.*

53. Feladat. *Igazoljuk* (lehetőleg a vágásmatroid rangfüggvényének szubmodularitását használva), *hogy minden $X, Y \subseteq V$ részhalmazra $c(X) + c(Y) \leq$ $\leq c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + d(X, Y)$, ahol $c(Z)$ jelöli a Z által feszített részgráf komponenseinek számát, míg $d(X, Y)$ az $X - Y$ és $Y - X$ között vezető élek számát.*

2.3.2. Felbonthatóság

A gráf körének fogalmát sikerrel vittük át matroidokra. Mi a helyzet a gráfok összefüggőségével? Ennek értelmes kiterjesztésére nincs remény, mert bármely k élű erdőnek, összefüggő vagy sem, ugyanaz a körmatroidja. Másszóval, a gráfhoz rendelt körmatroid nem érzékeli a gráf összefüggőségét.

Ugyanakkor természetesen kínálkozik a következő definíció. Egy $M = (S, \mathcal{I})$ matroidot akkor nevezünk **felbonthatóna**k, ha S-nek létezik egy valódi, nemüres $Z \subset S$ részhalmaza úgy, hogy M független halmazai pontosan azok a halmazok, amelyek egy Z-be eső és egy $S - Z$-be eső független halmaz uniójaként állnak elő. E tulajdonság nyilván azzal ekvivalens, hogy M minden köre vagy Z-ben van, vagy $S - Z$-ben. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy M felbontható Z (vagy $S - Z$) mentén. Könnyen ellenőrizhetően a Z menti felbonthatóság azzal ekvivalens, hogy minden $X \subseteq S$ halmazra $r(X) = r(X \cap Z) + r(X - Z)$. Értelemszerűen a nem felbontható matroidokat **felbonthatatlan**nak (vagy néha az angolban használt „connected" nyomán **összefüggő**nek) hívjuk. Az egyelemű matroid definíció szerint felbonthatatlan. (Kis zavart okozhat, hogy a magyarban nincs igazán külön szó a *dependent* és a *connected* angol kifejezésekre. Mi a dependent-re a függő szót, míg a connected-re az összefüggő szót fogjuk használni.) Amint kimutatható, egy gráf körmatroidja pontosan akkor felbonthatatlan (=összefüggő), ha a gráf 2-összefüggő.

A további elemzés előtt emlékeztetünk rá, hogy az S alaphalmazon egy $H = (S, \mathcal{T})$ hipergráfot akkor neveznek **összefüggő**nek, ha az alaphalmaz bármelyik két nemüres részre történő felbontásánál létezik olyan hiperél, amely mindkét részt metszi. Jelölje $G = (S, T; E)$ a hipergráfhoz tartozó páros gráfot, amelyben T elemei a hiperéleknek felelnek meg, és az $s \in S$ és $t \in T$ pontok akkor vannak éllel összekötve, ha s benne van a t-nek megfelelő hiperélben. Könnyen látszik, hogy $\emptyset \notin \mathcal{T}$ esetén H és G egyszerre összefüggő. Ebből adódik, hogy egy S-en összefüggő hipergráf mindig tartalmaz legfeljebb $|S| - 1$ hiperélt, melyek összefüggő hipergráfot alkotnak az S-en. Valóban, könnyen látható, hogy a G egy feszítő fájából kihagyva a T-ben első fokú pontokat egy S-et fedő fát kapunk, amelynek legfeljebb $|S| - 1$ pontja van T-ben. Hasonlóképp, H összefüggősége azzal ekvivalens, hogy az alaphalmaz bármely u és v eleméhez létezik hiperélek egy $C_1, \ldots, C_\ell$ sorozata úgy, hogy $u \in C_1,\ v \in C_\ell$ és $1 \leq i < \ell$-re $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$.

A definícióból rögtön látszik, hogy M pontosan akkor összefüggő, ha köreinek $(S, \mathcal{C})$ hipergráfja összefüggő. Amennyiben $\mathcal{C}$ nem összefüggő, és $S_1, \ldots, S_k$ ($k \geq 2$) jelöli az összefüggő komponenseinek alaphalmazait (ahol tehát $\{S_1, \ldots, S_k\}$ az S alaphalmaz partíciója), úgy az M az S_i halmazokra vett M_i részmatroidjai mind felbonthatatlanok. Ezen M_i matroidokat nevezzük az M **blokkjai**nak.

Fontos kérdés annak eldöntése, hogy egy matroid felbonthatatlan-e vagy sem. Ez több kérdést is takar: milyen tanúsítványt tudunk elképzelni a felbonthatóságra, milyet a felbonthatatlanságra, és algoritmikusan hogyan lehet megtalálni ezen tanúkat. A következő tétel a felbonthatóságra szolgáltat egyszerű tanúsítványt.

2.3.6. Tétel. *Egy M matroid akkor és csak akkor felbontható, ha létezik S-nek olyan $\{S_1, S_2\}$ partíciója nemüres halmazokra, amelyre*

$$r(S_1) + r(S_2) = r(S). \tag{2.3}$$

Bizonyítás. A definícióból rögtön adódik, hogy ha M felbontható $\{S_1, S_2\}$ mentén, akkor $r(S_1) + r(S_2) = r(S)$.

A megfordításhoz $|S|$ szerinti indukciót használunk. Mivel az állítás $|S| \leq 2$ esetén semmitmondó, feltesszük, hogy $|S| \geq 3$. Tegyük fel tehát, hogy valamely $\emptyset \subset S_1 \subset S$ részhalmazra (2.3) fennáll és legyen $S_2 = S - S_1$. Azt fogjuk igazolni, hogy ekkor minden $U \subset S$ halmazra $r(U_1) + r(U_2) = r(U)$, ahol $U_1 := U \cap S_1$ és $U_2 := U \cap S_2$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen U egy maximális halmaz, amelyre $r(U_1) + r(U_2) > r(U)$. A feltevés szerint $U \neq S$, és legyen mondjuk $S_2 \not\subseteq U$. Az U maximalitása miatt $r(U_1) + r(S_2) = r(U_1 \cup S_2)$. A 2.2.2 lemmát $T := U_1$-re, $X := U_2$-re és $Y := S_2$-re alkalmazva kapjuk, hogy $r(U) - r(U_2) = r(U_1 \cup U_2) - r(U_2) \geq r(U_1 \cup S_2) - r(S_2) = r(U_1)$, ellentmondás. □

Vizsgáljuk most meg, hogy egy matroidra miként lehet a felbonthatatlanságát rábizonyítani. Amint már említettük, M akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha köreinek $\mathcal{C}$ hipergráfja összefüggő. E tulajdonságnak kétféle élesítését is megadjuk.

2.3.7. Tétel. *Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha bármely két eleme egy körön van.*

Bizonyítás. Az állítás triviális, ha $|S| = 1$, ezért feltesszük, hogy $|S| > 1$. Ha bármely két elem egy körön van, akkor a körök hipergráfja összefüggő, azaz M felbonthatatlan. Megfordítva, tegyük fel, hogy a matroid felbonthatatlan. Ekkor minden $e \in S$ benne van körben, különben M felbontható lenne e mentén. Az is következik, hogy köreinek hipergráfja összefüggő S-en. Lássuk be, hogy bármely két elem egy körön van.

2.3.8. Lemma. *Ha az x, y elemekhez létezik olyan x-et tartalmazó C_1 kör és y-t tartalmazó C_2 kör, melyek metszik egymást, akkor létezik olyan kör, amely tartalmazza x-et és y-t.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy a tétel nem igaz és válasszunk olyan ellenpéldát, hogy $K = C_1 \cup C_2$ minimális. Legyen $c \in C_1 \cap C_2$. Az erős körtulajdonság szerint létezik egy $C_1' \subset K$ kör, amelyre $c \notin C_1', x \in C_1'$. Most $C_1' \cup C_2 = K$, mert ha $C_1' \cup C_2 \subset K$ volna, akkor K minimalitása miatt, C_1', C_2 már nem ellenpélda, tehát volna x-et és y-t tartalmazó kör.

Hasonló megfontolással adódik, hogy létezik olyan C_2' kör, amelyre $c \notin C_2', y \in C_2'$ és $C_1 \cup C_2' = K$. De most C_1' és C_2' szükségképpen metszi egymást, az uniójuk valódi része K-nak (merthogy c nincs az unióban).

Ezért C'_1, C'_2 már nem ellenpélda, és így mégiscsak létezik egy x-et és y-t tartalmazó kör, ellentmondás. □

A fenti lemma alapján az *egy körön levés* ekvivalencia-reláció, azaz létezik S-nek egy egyértelmű partíciója $S_1, \ldots, S_t$ részekre úgy, hogy M mindegyik köre része valamelyik S_i-nek, és mindegyik S_i rész olyan, hogy bármely két eleme rajta van egy körön. Miután a körök hipergráfja összefüggő, t szükségképpen 1, és így S bármely két eleme rajta van egy körön. □

13. Gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy az erős körtulajdonság és a* 2.3.8 *lemma alábbi közös általánosítása nem igaz, nem mindig érvényes:* ha C_1, C_2 körök, $f \in C_1 \cap C_2, e_1 \in C_1 - C_2, e_2 \in C_2 - C_1$, akkor van olyan $C \subseteq C_1 \cup C_2 - f$ kör, amelyre $e_1, e_2 \in C$.

Miután a matroid felbonthatatlansága a körök hipergráfjának összefüggőségével ekvivalens, a felbonthatatlanságra létezik legfeljebb $|S| - 1$ körből álló tanúsítvány. Ráadásul a 2.3.7 tétel szerint ez egyszerű alakban is megadható: válasszunk ki egy tetszőleges s elemet, és minden $x \in S - s$ elemre vegyünk egy s-et és x-et tartalmazó kört. A most következő tétel szerint már egy legfeljebb $|S| - r(S)$ darab körből álló tanúsítvány is létezik.

2.3.9. Tétel. *Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha $|S| = 1$, vagy ha valamely B bázisához tartozó alapkörök $(S, \mathcal{C}_B)$ hipergráfja összefüggő.*

Bizonyítás. Természetesen ha $\mathcal{C}_B$ összefüggő, akkor $\mathcal{C}$ is az, és ezért a matroid felbonthatatlan. Fordítva, tegyük fel, hogy létezik S-nek olyan két S_1, S_2 nemüres részekre történő felbontása, hogy minden B-hez tartozó alapkör vagy teljesen az egyik részben van, vagy teljesen a másikban. Ez azt jelenti, hogy S_i-ben $S_i \cap B$ maximális független, tehát $r(S_i) = |B \cap S_i|$ $(i = 1{,}2)$, és így $r(S_1) + r(S_2) = |B \cap S_1| + |B \cap S_2| = |B| = r(S)$. A 2.3.6 tétel alapján tehát ilyenkor M nem összefüggő. □

Tetszőleges B bázisra és $x \in S - B$ elemre $B + x$ tartalmaz egy egyértelmű $C = C(B, x)$ kört, amely az x elem B **bázishoz tartozó alapköre**. Rögtön adódik, hogy az alapkör pontosan azokból az elemekből áll, amelyeket $B + x$-ből kihagyva ismét bázist kapunk. Adott B bázishoz elkészíthetjük a hozzá tartozó $G_B = (B, S - B; E_B)$ **bázisgráf**ot. Ez egy páros gráf, amelyben $x \in B, y \in S - B$ elemekre xy pontosan akkor él, ha $x \in C(B, y)$, azaz, ha x benne van az y alapkörében. Világos, hogy $\mathcal{C}_B$ akkor és csak akkor összefüggő hipergráf, ha G_B összefüggő gráf.

Összefoglalva megállapítható, hogy a matroid alaphalmaza egyértelműen felbomlik a matroid blokkjaira (azaz a hidakra és a körök hipergráfjának komponenseire). Az egyes blokkok azon ekvivalencia-reláció osztályai, amelyben két e, f elem akkor ekvivalens, ha $e = f$ vagy ha van olyan kör, amely mindkettőt tartalmazza. A nem egyelemű osztályok megegyeznek egy bázishoz tartozó alapkörök hipergráfjának komponenseivel. A komponensek ugyanazok, mint a $\mathcal{C}_B$ hipergráf, illetve a G_B páros gráf komponensei.

2.4. Bázisok és rang

A matroid egy maximális független halmazát **bázis**nak neveztük. Ennek elemszáma a matroid rangja. A bázisok családja egyértelműen meghatározza a matroidot abban az értelemben, hogy különböző M_1, M_2 matroidok bázisainak halmaza különböző. Valóban, ha például X független M_1-ben, de függő M_2-ben, akkor M_1-ben kiterjeszthető bázissá, míg M_2-ben nem, másszóval M_1-ben létezik X-et tartalmazó bázis, de M_2-ben nem, azaz M_1 és M_2 bázisainak halmaza tényleg különböző. Világos, hogy egy halmaz éppen akkor független, ha részhalmaza egy bázisnak. Kérdés, hogy egy halmazrendszerre milyen tulajdonságokat kell előírni, hogy tagjai egy matroid bázisait alkossák.

2.4.1. Bázisaxiómák

Legyen adott S részhalmazainak egy $\mathcal{B}$ halmaza, és tekintsük a következő **bázisaxiómák**nak nevezett tulajdonságokat.

(B1) $\mathcal{B}$ nemüres,
(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $x_1 \in B_1 - B_2$ esetén van olyan $x_2 \in B_2 - B_1$ elem, melyre $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$.

A (B2) tulajdonságot néha **kicserélési axiómá**nak hívják.

2.4.1. Tétel. *Egy matroid bázisai kielégítik a fenti két tulajdonságot. Ha $\mathcal{B}$ egy olyan halmazrendszer, amely kielégíti a bázisaxiómákat, akkor az*

$$\mathcal{F} := \{F : \textit{létezik } B \in \mathcal{B}, F \subseteq B\} \tag{2.4}$$

halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat.

Bizonyítás. A tétel első fele rögtön adódik a függetlenségi axiómákból. A fordított irány igazolásához látható, hogy $\mathcal{F}$ kielégíti az első két függetlenségi axiómát. Lássuk be (I3$'''$)-t. Ennek első fele azt követeli, hogy bármely két $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ halmaz elemszáma ugyanaz. Tegyük fel indirekt, hogy $|B_2| < |B_1|$, és válasszuk ezeket úgy, hogy $|B_2 - B_1|$ minimális legyen. A (B2) axióma miatt valamely $x_1 \in B_1 - B_2$ esetén létezik egy olyan $x_2 \in B_2 - B_1$ elem, amelyre $B_1' := B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$. De most $|B_2| < |B_1| = |B_1'|$ és $|B_2 - B_1'| < |B_2 - B_1|$, ellentmondásban B_1 és B_2 választásával. A $\mathcal{B}$ tagjainak közös elemszámát jelölje r.

(I3‴) második feléhez legyen $K, N \subseteq S$ két $r-1$, illetve r elemű tagja $\mathcal{F}$-nek. Ekkor persze $B_2 := N$ $\mathcal{B}$-ben van, és definíció szerint létezik $B_1 \in \mathcal{B}$ és $x_1 \in B_1$, melyekre $K = B_1 - x_1$. Ha $x_1 \in B_2 - B_1$, akkor $K + x_1 \in \mathcal{F}$, míg ha $x_1 \notin B_2 - B_1$, akkor a (B2) axióma szerint létezik $x_2 \in B_2 - B_1$, amelyre $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$, azaz K valóban függetlenné bővíthető N-ből. □

14. Gyakorlat. *Egy összefüggő gráf vágásmatroidjának bázisai a feszítő fák komplementerei.*

A kicserélési axiómának érvényes egyfajta tükörváltozata:

2.4.1. Állítás. *$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $x_2 \in B_2 - B_1$ esetén van olyan $x_1 \in B_1 - B_2$ elem, amelyre $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$.*

Bizonyítás. Tekintsük az x_2 elem B_1-re vonatkozó C alapkörét. Ez nem lehet teljesen B_2-ben, és így egy $x_1 \in C - B_2$ elem jó lesz. □

A 2.4.1 állításban megfogalmazott (B2*) tulajdonságot nevezhetjük **becserélési axiómá**nak.

54. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{B}$ teljesíti* (B1)*-et és* (B2*)*-t, akkor $\mathcal{B}$ egy matroid bázisainak a halmaza.*

A (B2) és (B2*) tulajdonságok kis esztétikai hiányossága, hogy bennük a két bázis szerepe nem szimmetrikus. Ez azonban kiküszöbölhető.

2.4.2. Tétel (Szimmetrikus báziskicserélési tétel)**.** *$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $x_1 \in B_1 - B_2$ esetén létezik egy olyan $x_2 \in B_2 - B_1$ elem, amelyre $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$ és $B_2 - x_2 + x_1 \in \mathcal{B}$.*

Azt fogjuk mondani, hogy a fenti tulajdonsággal bíró x_1 és x_2 elemek **kölcsönösen kicserélhetők**, röviden **felcserélhetők**. A tételbeli tulajdonságot **szimmetrikus bázis-kicserélési** tulajdonságnak hívjuk.

Bizonyítás. Jelölje az x_1 elem B_2-höz tartozó alapkörét C_2. Vegyünk egy olyan C kört, amelyre

$$x_1 \in C \subseteq B_1 \cup B_2 \text{ és } C - B_1 \subseteq C_2 - B_1 \tag{2.5}$$

és amelyre $|C - B_1|$ minimális. (Létezik 2.5-t kielégítő kör: C_2 ilyen.) Természetesen ez a minimum nem 0, hiszen B_1 nem tartalmaz kört.

Állítjuk, hogy $|C - B_1| = 1$. Valóban, ha indirekt $|C - B_1| > 1$, akkor tekintsük egy $x \in C - B_1$ elemnek a B_1-hez tartozó C_1 alapkörét. C minimalitása miatt ez nem tartalmazza x_1-et. Az erős köraxióma szerint azonban létezik olyan $C' \subseteq C_1 \cup C - x$ kör, amely tartalmazza x_1-et, és ilyen C' kör létezése ellentmondásban van C minimális választásával.

Azt kaptuk, hogy $C - B_1$ egyetlen elemből áll, melyet jelöljünk x_2-vel. Vagyis a C kör az x_2 elem B_1-hez tartozó alapköre, amely tartalmazza x_1-et, míg az x_2 elem benne van az x_1 elem B_2-höz tartozó alapkörében. Ezen elemek tehát felcserélhetők. $\square$

2.4.2. Következmény. *Legyen F_1 és F_2 két diszjunkt független halmaz és legyen $s_1 \in F_1$. Ekkor vagy $F_2 + s_1$ független vagy létezik egy $s_2 \in F_2$ elem, amelyre mind $F_1 - s_1 + s_2$, mind $F_2 - s_2 + s_1$ független.*

Bizonyítás. Amennyiben $F_2 + s_1$ nem független, úgy egy F_2-t magában foglaló B_2 bázis nem tartalmazza s_1-et. Legyen B_1 egy F_1-et magában foglaló bázis, és alkalmazzuk a 2.4.2 tételt. $\square$

55. Feladat. *Tegyük fel, hogy a matroid alaphalmazán adott egy c súlyfüggvény. Igazoljuk, hogy a c-re nézve maximális súlyú bázisok kielégítik a bázisaxiómákat!*

A következő tétel a (B2) axióma egy más irányú kiterjesztését mutatja.

2.4.3. Tétel. *Adott B_1, B_2 bázisokhoz létezik olyan $f : B_1 - B_2 \to B_2 - B_1$ bijekció úgy, hogy minden $x \in B_1 - B_2$ elemre $B_1 - x + f(x)$ bázis.*

Bizonyítás. $B_1 - x + f(x)$ pontosan akkor bázis, ha $x \in C(B_1, f(x))$, azaz x benne van az $f(x)$ elem B_1-re vonatkozó alapkörében. Tekintsük a $\{C(B_1, z) - B_2 : z \in B_2 - B_1\}$ halmazrendszert.

Azt állítjuk, hogy erre teljesül a Hall-feltétel, azaz, akárhogy választva j halmazt, az uniójuk elemszáma legalább j. Valóban, vegyünk $B_2 - B_1$-ben j elemet, és tekintsük a B_1-re vonatkozó $C_1, \dots, C_j$ alapköreiket. Legyen $K := \cup C_i$. Azt kell belátnunk, hogy $|K - B_2| \geq |K - B_1|$. Egyrészt $r(K) \geq$ $\geq r(K \cap B_2) = |K \cap B_2|$. Másrészt $K \cap B_1$ tovább nem bővíthető független részhalmaz K-ban, így $|K \cap B_1| = r(K) \geq |K \cap B_2|$, ami azt jelenti, hogy $|K - B_2| \geq |K - B_1|$, tehát a Hall-feltétel tényleg teljesül.

A Hall-tétel szerint létezik egy f bijekció úgy, hogy minden $x \in B_1 - B_2$ elem benne van az $f(x)$ elem B_1-hez tartozó alapkörében, ami azt jelenti, hogy $B_1 - x + f(x)$ bázis. $\square$

56. Feladat. *Legyen $x_1, x_2, \dots, x_k$ egy B bázis néhány eleme, $y_1, y_2, \dots, y_k$ pedig bázison kívüli elemek. Tegyük fel, hogy mindegyik x_i benne van a megfelelő y_i-nek a B-hez tartozó $C(B, y_i)$ alapkörében, de $h > j$ esetén $x_h \notin C(B, y_j)$. Igazoljuk, hogy $B - \{x_1 \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ bázis.*

57. Feladat. *Legyen B az $M = (S, \mathcal{B})$ matroid egy bázisa. Tegyük fel, hogy adott az elemeken egy $\Theta : S \to \{0,1, \dots, n\}$ ún. szintfüggvény, amelyre* $(*)$ $\Theta(v) \leq \Theta(u) + 1$ fennáll minden olyan $\{u, v\}$ elempárra, amelyre $u \in S -$ $- B$, $v \in C(B, u)$. *Legyen s és t olyan, hogy $\Theta(t) = \Theta(s) + 1$, $s \in S - B$, $t \in C(B, s)$. Igazoljuk, hogy a $(*)$ tulajdonság a $B' := B - t + s$ bázisra vonatkozólag is fennáll.*

2.4.2. Rangaxiómák

A rangfüggvény definíciójából adódik, hogy egy halmaz akkor és csak akkor független, ha elemszáma egyenlő a rangjával, vagyis a függetlenek családja a következő:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq S, r(X) = |X|\}. \tag{2.6}$$

Ebből következik, hogy különböző matroidok rangfüggvénye különböző. Hogyan lehet felismerni egy más módon definiált halmazfüggvényről, hogy matroid rangfüggvény-e vagy sem? Más szóval, mik a rangfüggvény lényeges tulajdonságai, melyeket meg kell követelnünk, hogy a (2.6) által szolgáltatott $\mathcal{F}$ halmazrendszer kielégítse a függetlenségi axiómákat?

2.4.4. Tétel. *Az $r : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ nemnegatív, egészértékű halmazfüggvény akkor és csak akkor egy matroid rangfüggvénye, ha kielégíti az alábbi* **rangaxiómák***at.*
(R1) $r(\emptyset) = 0$ (az üres halmazon 0),
(R2) $r(X) \geq r(Y)$ *amikor* $X \supseteq Y$ (monoton növő),
(R3) $r(X) \leq |X|$ (szubkardinális = „elemszám alatti"),
(R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$ *minden* $X, Y \subseteq S$ *halmazra* (szubmoduláris).

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy r egy matroid rang-függvénye. Az első három tulajdonság a definícióból közvetlenül adódik, a szubmodularitást pedig már beláttuk a 2.2.1 lemmában.

Megfordítva, tegyük fel, hogy r kielégíti a fenti axiómákat. Belátjuk, hogy a 2.6 által definiált $\mathcal{F}$ halmazrendszer teljesíti a függetlenségi axiómákat. Ennek érdekében először is igazoljuk a következőt.

(R3′) $r(A + e) \leq r(A) + 1$ amikor $A \subseteq S, e \in S - A$.

Valóban, a szubmodularitást használva: $r(A) + 1 \geq r(A) + r(e) \geq r(A \cap \cap \{e\}) + r(A \cup \{e\}) \geq r(A + e)$, vagyis (R3′) fennáll.

2.4.5. Lemma. *Legyen $A \subseteq S$ és $e_1, \dots, e_k \in S - A$. Ha $r(A + e_1) = \dots = = r(A + e_k) = r(A)$, akkor $r(A \cup \{e_1, \dots, e_k\}) = r(A)$.* (Azaz, ha bizonyos elemek egyike sem növeli egy halmaz rangját, akkor együttesen sem növelik.)

Bizonyítás. Indukciót használunk. Az állítás triviális $k = 1$-re, így tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és azt, hogy a lemma érvényes $k - 1$-re. Azaz $r(A') = r(A)$ ahol $A' := A \cup \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. (R2) és (R4) alapján $r(A) + r(A) = r(A + e_k) + + r(A') \geq r((A + e_k) \cap A') + r((A + e_k) \cup A') = r(A) + r(A \cup \{e_1, \dots, e_k\}) \geq \geq r(A) + r(A)$, amiből a lemma következik. □

Lássuk most be, hogy $\mathcal{F}$ kielégíti a függetlenségi axiómákat. (I1) következik (R1)-ből. Legyen $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$. Ekkor $r(Y) = |Y|$. Az (R3′) tulajdonság ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $r(Y) \leq r(X)+|Y-X|$ és innen $r(X) \geq$ $\geq |X|$. (R3) alapján $r(X) = |X|$, vagyis $X \in \mathcal{F}$, tehát (I2) is fennáll.

(I3) igazolásához egy $X \subseteq S$ részhalmazra tekintsük az $\mathcal{F}$-nek egy X-ben fekvő, de X-ben tovább már nem bővíthető F tagját. Belátjuk, hogy ennek elemszáma $r(X)$. Valóban, F maximalitása folytán minden $v \in X - F$ elemre $F + v \notin \mathcal{F}$, vagyis $r(F) \leq r(F + v) \leq |F + v| - 1 = |F| = r(F)$. Így a 2.4.5 lemma miatt $|F| = r(F) = r(X)$, vagyis az F elemszáma valóban csak X-től függ. Bebizonyítottuk tehát, hogy $(S, \mathcal{F})$ valóban matroid, amelynek rangfüggvénye éppen r. □

Figyeljük meg, hogy a rangaxiómákkal ekvivalens rendszert kapunk, ha (R3)-at kicseréljük (R3′)-re. Valóban, az előbb levezettük (R3′)-t, míg a fordított irány $|X|$ szerinti indukcióval könnyen látható. Kimutatjuk, hogy (R3) helyettesíthető a következővel is:

(R3″) $r(s) \leq 1$ minden $s \in S$ elemre.

Valóban, (R3″) és (R4)-ből kapjuk, hogy $|X| \geq \sum_{s \in X} r(s) \geq r(X)$, és innen (R3) következik. Másrészt (R3″) speciális esete (R3)-nek.

58. Feladat. *Legyen M matroid az S alaphalmazon és legyen $Z \subseteq S$ rögzített részhalmaz. Definiáljuk az $S' := S - Z$ halmazon az alábbi r' függvényt. $r'(X) := r(X \cup Z) - r(Z)$. Igazoljuk, hogy r' kielégíti a rang-axiómákat! Az M függetlenjeivel hogyan lehet meghatározni az r' rangfüggvényű matroid függetlenjeit?*

A következő fontos fogalmak lineáris algebrából jönnek. Egy $X \subseteq S$ részhalmazt akkor nevezünk **zárt**nak, ha bármely $x \in S-X$ elemre $r(X+x) > r(X)$. Az S alaphalmaz mindig zárt. Egy halmaz **nyílt**, ha komplementere zárt. Egy $r(S) - 1$ rangú zárt halmaz neve **hipersík**.

15. Gyakorlat. *Zárt halmazok metszete zárt. Egy halmaz pontosan akkor hipersík, ha vágás komplementere.*

59. Feladat. *Tegyük fel, hogy a $Z \subset S$ részhalmaz zárt az S-en értelmezett M matroidban. Igazoljuk, hogy ha az $M|Z$ matroid* (az M megszorítása Z-re) *felbontható egy X halmaz mentén, akkor X zárt M-ben.*

Egy $X \subseteq S$ részhalmaz $\sigma(X)$ **lezárt**ján (más szóval az X **által feszített halmaz**on) azon $x \in S$ elemek halmazát értettük, melyekre $r(X + x) =$ $= r(X)$. Eszerint a lezárt mindig zárt halmaz, és minden halmaz része a lezártjának. A 2.4.5 lemma szerint $\sigma(X)$ nem más, mint az X-et magában foglaló, egyértelműen meghatározott legbővebb olyan halmaz, melynek rangja ugyanaz, mint X-é. Megint másképp fogalmazva, $\sigma(X)$ az X-et tartalmazó zárt halmazok metszete.

16. Gyakorlat. *Hurokmentes matroidban a maximális 1 rangú halmazok partícionálják az alaphalmazt.*

17. Gyakorlat. *Egy gráf körmatroidjában egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha a csúcsok egy partíciójának a határa, azaz a partíció osztályai között vezető élek halmaza.*

60. Feladat. *Legyen F az X egy maximális független részhalmaza. Igazoljuk, hogy X akkor és csak akkor zárt, ha minden $s \in S - X$ elemre $F + s$ nem tartalmaz kört.*

61. Feladat. *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $\{V_1, V_2, \ldots, V_t\}$ a V egy olyan partíciója, ahol mindegyik V_i összefüggő gráfot feszít. Igazoljuk, hogy a $V_1, \ldots, V_t$ halmazok által feszített élek halmazainak uniója zárt a gráf körmatroidjában, és megfordítva, hogy a körmatroid minden zárt halmaza így áll elő.*

2.5. Matroid-algoritmusok és -poliéderek

2.5.1. Orákulumok

Már a 2.3.2 szakaszban felvetődtek matroidokkal kapcsolatos algoritmikus kérdések. Ahhoz, hogy egy ilyen algoritmus hatékonyságáról egyáltalán beszélni lehessen, tisztázni kell, mit is jelent algoritmikus szempontból az a kijelentés, hogy *adott egy matroid*. A hatékonyság szokásos mértéke a bemenő adatok méretének függvényében megadott lépésszám. Ezért, ha egy matroidot például úgy adunk meg, hogy felsoroljuk a független halmazait, akkor egy olyan algoritmust, amely ezek számában polinomiális, aligha tekinthetünk hatékonynak, hiszen a független halmazok száma tipikusan exponenciális $|S|$-ben. Márpedig a hatékonyságra olyan definíciót szeretnénk megfogalmazni, amely egy algoritmust akkor tekint hatékonynak, ha az $|S|$-ben polinomiális.

Az algoritmushoz nem adjuk meg semmilyen explicit formában a matroidot. Ehelyett egy szubrutint, függetlenségi orákulumot tartunk készenlétben, amely azt tudja, hogy az alaphalmaz tetszőleges részhalmazát megadva neki, megmondja, hogy az illető halmaz független-e vagy sem. Ebben a szemléletben egy matroid-algoritmus úgy fut, hogy időnként megkérdezi a függetlenségi orákulumot arról, hogy egy halmaz független-e, és a válasz függvényében folytatja a számításait. Ilyen matroid-algoritmust akkor tekintünk polinomiálisnak, ha egyrészt a saját számításainak mennyisége $|S|$ hatványával korlátozható, másrészt a függetlenségi orákulumhoz is a futása során legfeljebb csak $|S|$-nek egy hatványaszor fordul.

Természetesen egy matroid-algoritmus konkrét matroidokra csak akkor használható, ha az adott matroidra a függetlenségi orákulumot valahogy ténylegesen meg tudjuk valósítani (mint például racionális vagy valós mátrix által definiált mátrixmatroid esetén Gauss-eliminációval). De ez már más szinten lévő kérdés: a matroid-algoritmus nem törődik azzal, hogy konkrét matroid esetén a függetlenségi orákulum algoritmikusan realizálható-e vagy sem.

Matroidokat, amint láttuk, persze nem csak függetlenekkel lehet megadni. Ha egy matroid például a bázisaival van definiálva, akkor egy matroid-algoritmusban a függetlenségi orákulum helyett előnyösebb, ha egy bázisorákulum áll rendelkezésre. Vagy esetleg egy rangorákulum vagy kororákulum. A megelőző szakaszokban láttuk, hogy a függetlenségi-, bázis-, rang-, illetve köraxióma rendszerek páronként ekvivalensek, legalábbis abban az értelemben, hogy mindegyikük matroidot definiál.

Vizsgáljuk most meg azt a kérdést, hogy miképp viszonyulnak egymáshoz ezek az axióma-rendszerek algoritmikus szempontból. Más szóval, ha egy matroidnak adott valamelyik típusú orákuluma, akkor ennek felhasználásával tudunk-e gyártani egy másik típusú orákulumot. Kiderül, hogy bizonyos esetekben igen, máskor viszont nem a válasz.

2.5.1. Állítás. *A rang- és a függetlenségi orákulumok egymással polinomiálisan ekvivalensek.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy rendelkezésünkre áll egy függetlenségi orákulum és ennek felhasználásával polinom időben szeretnénk meghatározni egy adott $X \subseteq S$ halmaz rangját. E célból meghatározzuk az X egy maximális elemszámú független részhalmazát. Menjünk végig az X elemein egy (tetszőlegesen) megadott $x_1, \ldots, x_t$ sorrendben, és válasszuk ki az éppen tekintett elemet akkor, ha a már ezt megelőzően kiválasztott elemekkel együtt független halmazt alkot. Az (I3) függetlenségi axióma szerint így X-nek egy maximális, tehát $r(X)$ elemszámú független részhalmazát kapjuk, éspedig a függetlenségi orákulum $|X|$ darab hívásával.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a rangorákulum áll rendelkezésünkre (amely tehát egy tetszőleges X halmaz megadásakor megmondja az X rangját). Ennek segítségével a függetlenségi orákulum rögtön realizálható, hiszen egy X halmaz pontosan akkor független, ha $r(X) = |X|$. □

Hogyan viszonylik egymáshoz a függetlenségi és a bázisorákulum, amely egy megadott halmazról dönti el, hogy bázis-e vagy sem?

2.5.2. Állítás. *A függetlenségi orákulum segítségével a bázisorákulum előállítható.*

Bizonyítás. Először meghatározzuk a fentebb leírt módon az alaphalmaz $r(S)$ rangját. Ezután egy bázisság eldöntésére beadott X halmazról megkérdezzük, hogy független-e, és ha a válasz igen és $|X| = r(S)$, úgy X bázis, különben pedig nem az. □

2.5.3. Állítás. *A bázisorákulum segítségével polinomiális lépésben válaszoló függetlenségi orákulum nem állítható elő.*

Bizonyítás. Azt látjuk be, hogy egyetlen bázist sem tudunk találni polinom időben (márpedig egy függetlenségi orákulum az tudna). Még akkor sem, ha a matroid r rangja előre ismert.

Tekintsük ugyanis azt a matroidosztályt, amelyben egyetlen egy r elemű bázis van, az ebbe nem tartozó elemek mind hurokelemek. Mármost, ha az algoritmusunk sorra kérdezgeti az r elemű halmazokat az orákulumtól, vajon bázisok-e, és a válasz minden esetben nemleges, akkor amíg csak van még két meg nem kérdezett r elemű halmaz, az algoritmusunk nem tudhatja a helyes választ, hiszen ezen kettő bármelyike lehet az egyetlen bázis. □

Érdekes, hogy megváltozik a helyzet, ha a rang helyett előre meg van adva egy tetszőleges bázis. Nevezzük ezt **erős bázisorákulum**nak: ez tehát tetszőleges halmazról el tudja dönteni, hogy bázis-e továbbá rendelkezésére áll egy adott B bázis.

2.5.4. Állítás. *Az erős bázisorákulum segítségével egy függetlenségi orákulum előállítható polinom időben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy X halmazról kell eldöntenünk, hogy független-e. A megadott B_1 bázisból kiindulva olyan bázisokat igyekszünk konstruálni, melyeknek egyre több közös eleme van X-szel. Amennyiben az aktuális rendelkezésre álló B bázis magába foglalja X-et, úgy X független, és az algoritmus futása véget ér. Ha létezik $x \in X - B$ elem, akkor minden egyes $y \in B - X$ elemre megkérdezzük, hogy $B' := B - y + x$ bázis-e. Amennyiben valamelyik y-ra igenlő a válasz, úgy a B' bázisnak eggyel több közös eleme van X-szel, és B'-re vonatkozólag iteráljuk az eljárást. Ha viszont minden y-ra nemleges a válasz, az azzal ekvivalens, hogy az x-nek az B-hez tartozó alapköre teljesen X-ben van, vagyis X nem független. □

A **körorákulum** egy megadott halmazról megmondja, hogy kör vagy sem.

62. Feladat. *Igazoljuk, hogy a függetlenségi orákulumból lehet körorákulumot gyártani, de fordítva nem.*

2.5.2. A mohó algoritmus

Tegyük fel, hogy az M matroid S alaphalmazán adott egy $c : S \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény (vagy költségfüggvény). Készítsünk algoritmust maximális összsúlyú bázis keresésére. Megjegyezzük, hogy egy ilyen algoritmus segítségével maximális súlyú független halmaz már könnyen kereshető. Valóban, ha c nemnegatív, akkor egy maximális súlyú bázis automatikusan maximális súlyú független, hiszen egy független halmaz mindig kibővíthető bázissá. Amennyiben vannak negatív súlyú elemek, úgy ezeket töröljük el a matroidból, és a keletkező részmatroidnak keressük meg egy maximális súlyú bázisát. Ez nyilván az eredeti matroid maximális súlyú független halmaza lesz.

A maximális súlyú bázis előállításához a mohó algoritmus egymás után választ elemeket a következő szabály szerint. Az első lépésben kiválasztja az egyik maximális súlyú elemet, amely nem hurok. Az általános lépésben az addig kiválasztott F független halmazról eldönti, hogy bázis-e. Ha igen, az eljárás a kapott bázis kiadásával véget ér. Ha nem, akkor megnöveli F-et egy olyan maximális súlyú $x \in S - F$ elemmel, amelyre $F + x$ független. Amennyiben itt több (azonos súlyú) elem is rendelkezésre áll, bármelyiket választhatjuk. Figyeljük meg, hogy az (I3) függetlenségi axióma pontosan azt mondja ki, hogy a mohó algoritmus minden $(0 - 1)$ értékű súlyfüggvény esetén maximális súlyú bázist ad.

2.5.1. Tétel. *A fenti mohó algoritmus maximális súlyú bázist szolgáltat.*

Bizonyítás. Jelölje B_{mo} az algoritmus által konstruált bázist. Legyen B_{max} egy olyan maximális súlyú bázis, amelynek B_{mo}-val maximális sok közös eleme van. Készen vagyunk, ha $B_{mo} = B_{max}$, ezért feltehetjük, hogy nem ez a helyzet. Tegyük fel, hogy az algoritmus a B_{mo} elemeit az $f_1, f_2, \dots, f_r$ sorrendben találta meg, és legyen f_k az első olyan elem, amely nincs B_{max}-ban.

A 2.4.2 tétel szerint létezik olyan $e \in B_{max} - B_{mo}$, amely kölcsönösen kicserélhető f_k-val. Ami azt jelenti egyrészt, hogy $\{f_1, \dots, f_{k-1}, e\}$ független, és így a mohó algoritmus előírása szerint $c(e) \le c(f_k)$. Másrészt, B_{max} maximalitása miatt $c(e) \ge c(f_k)$. Ezért $c(e) = c(f_k)$, és így $B_{max} - e + f_k$ is maximális súlyú bázis, aminek eggyel több közös eleme van B_{mo}-val, ellentmondásban B_{max} választásával. □

A mohó algoritmus tényleges végrehajtásához először rendezzük nagyság szerint csökkenő sorrendbe az elemeket, azaz feltehető, hogy az elemek úgy vannak indexelve, hogy $c(v_1) \ge c(v_2) \ge \dots \ge c(v_n)$, ahol $n = |S|$. Azonos súlyú elemek egymás közti sorrendje tetszőleges lehet. Ebben a sorrendben végighaladva az elemeken mindegyikről eldöntjük, hogy kiválasztjuk-e vagy sem: az éppen aktuális elemet akkor választjuk ki, ha a már kiválasztott elemekhez véve még mindig független halmazt kapunk.

Következik, hogy az optimális bázis nem annyira a súlyozás tényleges értékeitől függ, hanem csupán az elemeknek súlyok által meghatározott sorrendjétől. Vagyis ha például két (vagy több) súlyfüggvényhez ugyanaz a csökkenő sorrend tartozik, akkor létezik olyan bázis, amely szimultán mindegyik súlyfüggvényre nézve maximális súlyú.

63. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges maximális súlyú bázis megkapható a mohó algoritmus alkalmazásával* (abban az értelemben, hogy amikor a mohó algoritmus futása során több elem közül is választhatunk, úgy ezt alkalmasan tesszük).

Természetesen a mohó algoritmus minimális súlyú bázis megkeresésére is jó, hiszen ez ekvivalens a $-c$ súlyozásra vonatkozó maximális bázis problémával. Ilyenkor tehát minden lépésben a legkisebb súlyú elemet választjuk ki, amely a már kiválasztottakkal együtt független halmazt alkot.

A mohó algoritmust először a körmatroidra vonatkozó speciális esetben írták le, amikor is egy összefüggő gráfban kellett maximális súlyú feszítő fát keresni. Ismert e feladatnak a következő alternatív megoldása is, amely egyfajta „óvatos" algoritmusnak tekinthető. Tekintsük a gráf éleit növekvő súly szerinti sorrendben, és egy élt dobjunk ki, ha a maradék gráf még mindig összefüggő lesz. Végül egy feszítő fát kapunk, amelyről belátható, hogy maximális súlyú. Ez az algoritmus is kiterjeszthető matroidokra. Itt csökkenő súlyok szerint megyünk végig az elemeken, az aktuálisat akkor dobva ki, ha a megmaradó matroid még tartalmazza az eredetinek egy bázisát. Az algoritmus akkor fejeződik be, amikor már csak egy bázis maradt.

64. Feladat. *Igazoljuk, hogy a fenti óvatos algoritmus maximális súlyú bázist szolgáltat!*

A feladatot a mohó algoritmus igazolásánál használtakhoz hasonló eszközökkel lehet belátni. Ez tehát itt kijön. Látni fogjuk azonban, hogy ennek mélyebb oka is van, és valójában az óvatos algoritmus interpretálható egy másik matroidon, az úgynevezett duális matroidon dolgozó mohó algoritmusként is: lásd a 2.6.1 tétel utáni megjegyzést.

65. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha a súlyok páronként különbözőek, akkor a maximális súlyú bázis egyértelmű!*

66. Feladat. *Tegyük fel, hogy két súlyozásunk is adott: c_1 és c_2. Hogyan lehet a matroidnak olyan bázisát megtalálni, amely a c_1-re nézve maximális súlyú, és ezen belül a c_2-re nézve maximális súlyú? Mi a helyzet, ha kettő helyett $k \geq 3$ súlyozásunk van?*

Hasznos lesz a maximális súlyú bázisok alábbi jellemzése.

2.5.2. Tétel. *Egy B bázis akkor és csak akkor maximális súlyú, ha minden $y \in S - B$ és $x \in C(B, y)$ elemre $c(y) \leq c(x)$.*

Bizonyítás. Ha x benne van az y alapkörében, akkor $B - x + y$ is bázis, tehát ha B maximális súlyú, akkor $c(x) \geq c(y)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy B' egy maximális súlyú bázis. Alkalmazzuk a 2.4.3 tételt a $B_1 = B$ és $B_2 = B'$ szereposztással. A hipotézis szerint $c(f(x)) \leq c(x)$ minden $x \in B - B'$ esetén. Ebből adódik, hogy $c(B') \leq$ $\leq c(B)$. Mivel B' maximális súlyú volt, így $c(B) \leq c(B')$, azaz B is maximális súlyú. □

67. Feladat. *Igazoljuk az előző tételt a 2.4.2 tétel felhasználásával!*

2.5.3. Tétel. *Egy F független halmaz akkor és csak akkor maximális súlyú, ha minden elemének súlya nemnegatív, $c(y) \leq 0$ fennáll minden olyan $y \in S-$ $-F$ elemre, amelyre $F+y$ független, továbbá $c(y) \leq c(x)$ fennáll, valahányszor $F+y$ függő és $x \in C(F,y)$.*

Bizonyítás. A feltételek nyilván szükségesek. Az elegendőségük igazolásához legyen S' a (szigorúan) pozitív súlyú elemek halmaza, és legyen $F' := S' \cap$ $\cap F$. Mivel F minden elemének súlya nemnegatív, $c(F') = c(F)$, és így F akkor és csak akkor maximális súlyú, ha F' maximális súlyú független az $M' := M|S'$ matroidban, ami azzal ekvivalens (mivel S' minden eleme pozitív), hogy F' maximális súlyú bázisa M'-nek. Az F-re tett feltételek nyomán a 2.5.2 tételbeli feltételek teljesülnek, így F' valóban maximális súlyú bázisa M'-nek, tehát F maximális súlyú független M-ben. □

Feladatok

68. Feladat. *Készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy egy adott független halmaz kiegészíthető-e maximális súlyú bázissá.*

69. Feladat. *Készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e olyan bázis, amely előre adott $c_1, \dots, c_k$ súlyfüggvények mindegyikére nézve szimultán maximális súlyú.*

70. Feladat. *Igazoljuk, hogy bármely c súlyozásra a maximális súlyú bázisok kielégítik a bázisaxiómákat.*

71. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy $G = (X,Y;E)$ páros gráfban pontosan egy teljes párosítás létezik, akkor mind az X, mind az Y elemei úgy sorbarendezhetők, hogy az azonos indexű elemek szomszédosak G-ben (és így az egyértelmű teljes párosítást adják), továbbá kisebb indexű $x \in X$ elem sohasem szomszédos nagyobb indexű $y \in Y$ elemmel.*

72. Feladat. *Legyen F egy matroid független halmaza, $X \subseteq F$ és $Y \subseteq S -$ $- F$ azonos elemszámú halmazok. Legyen $G = (X,Y;E)$ az a páros gráf, amelyben amelyben xy pontosan akkor él, ha $x \in C(F,y)$, vagyis ha a $F+y$ nem független, de $F+y-x$ az. Igazoljuk, hogy amennyiben G-nek pontosan egy teljes párosítása létezik, úgy $F \cup Y - X$ független.*

73. Feladat. *Legyen B egy maximális súlyú bázis a c súlyfüggvényre nézve. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_k$ bázisbeli elemek és az $y_1, y_2, \dots, y_k$ bázison kívüli elemek olyanok, hogy $x_i \in C(B,y_i)$ és $c(x_i) = c(y_i)$ minden $i = 1, \dots, k$-ra, és $h > j$, $c(x_h) = c(y_j)$ esetén $x_h \notin C(B,y_j)$. Ekkor $B' := B - \{x_1 \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ maximális súlyú bázis.*

2.5.3. Matroidok poliéderei

Ismeretes, hogy a maximális folyamra vagy a legolcsóbb útra minimax tételek fogalmazhatók meg. A maximális folyam, minimális vágás (MFMC) tétel többek között arra jó, hogy tanúsítványt szolgáltasson egy adott folyam maximalitására: egy ugyanolyan nagyságú vágást. Egy ilyen vágás léte valóban bizonyítja az adott folyam maximalitását, függetlenül attól, hogy miként tudtuk kiszámítani akár a folyamot, akár a vágást. A mohó algoritmus annyira egyszerű volt a matroid maximális súlyú bázisának (vagy függetlenjének) meghatározására, hogy a bázis maximalitását könnyen igazoló tanúsítványnak nem is igazán érezzük szükségét: a tanúsítvány ellenőrzése nem egyszerűbb feladat, mint a mohó algoritmus egy esetleges újbóli lefuttatása. Mindamellett ilyen tétel megfogalmazható.

2.5.4. Tétel. *Az $M = (S, r)$ matroidban tetszőleges $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozásra a maximális bázis súlya $\hat{r}(c)$, ami definíció szerint*

$$\hat{r}(c) := r(S)c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(S_i)[c(s_i) - c(s_{i+1})], \tag{2.7}$$

ahol $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \ldots \geq c(s_n)$ és $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$.

Bizonyítás. Az ezen sorrend szerint lefuttatott mohó algoritmus olyan B bázist szolgáltat, amelyre $|B \cap S_i| = r(S_i)$ minden i-re fennáll. Egyszerű átösszegzéssel kapjuk, hogy $\hat{r}(c) = r(S)c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(S_i)[c(s_i) - c(s_{i+1})] = |B \cap S|c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} |B \cap S_i|[c(s_i) - c(s_{i+1})] = \sum_{s \in B} c(s) = c(B)$. □

74. Feladat. *A mohó algoritmus segítségével igazoljuk, hogy egészértékű c esetén bármely $Z \subseteq S$ halmazra $\hat{r}(c + \underline{\chi}_Z) = \hat{r}(c) + r_c(Z)$, ahol $r_c(Z)$ jelöli a Z és egy maximális súlyú bázis metszetének maximális elemszámát* (vagyis a 70. feladatban definiált matroidban Z rangját).

75. Feladat. *Igazoljuk, hogy egészértékű c-re $\hat{r}(c - \underline{\chi}_Z) = \hat{r}(c) + r_c(S - Z) - r(S)$.*

76. Feladat. *Legyen $c : S \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű, és tegyük fel, hogy a $T \subseteq S$ halmaz olyan, hogy $x \in T, y \in S - T$ elemekre mindig $c(x) > c(y)$. Ekkor $\hat{r}(c - \underline{\chi}_T) = \hat{r}(c) - r(T)$.*

77. Feladat. *Igazoljuk, hogy $\hat{r}$ szubadditív, azaz $\hat{r}(c_1) + \hat{r}(c_2) \geq \hat{r}(c_1 + c_2)$ minden c_1 és c_2 súlyozásra fennáll.*

2.5.5. Tétel. *Az $M = (S, r)$ matroidhoz tartozó*

$$\max\{cx : x \in \mathbf{R}^S, x \geq 0, x(Z) \leq r(Z) \text{ minden } Z \subset S \text{ részhalmazra és } x(S) = r(S)\} \tag{2.8}$$

primál lineáris program, illetve ennek duálisa, a

$$\min\{\textstyle\sum_{Z\subseteq S} y(Z)r(Z) : y : 2^S \to \mathbf{R}, \sum_{s\in Z} y(Z) \ge c(s),\ \textit{ha}\ s\in S,\quad \textit{és}\ y(Z)\ge 0,\ \textit{ha}\ Z\subset S\} \tag{2.9}$$

lineáris program olyanok, hogy a primál problémának mindig létezik egészértékű optimuma (amely automatikusan $(0-1)$ értékű)*, míg a duál problémának létezik olyan optimális y megoldása, amelyre a $\{Z : y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lánc. Továbbá egészértékű c esetén az optimális y is választható egészértékűnek.*

Bizonyítás. Az elemek indexelése és az S_i halmazok definíciója legyen a 2.5.4 tétel szerinti. Legyen B egy maximális súlyú bázis és x ennek karakterisztikus vektora. Legyen

$$y(S_n) := c(s_n) \tag{2.10}$$

és

$$y(S_i) = c(s_i) - c(s_{i+1}) \text{ minden } i = 1,\dots,n-1 \text{ -re,} \tag{2.11}$$

valamint minden más halmazon legyen az y értéke 0. Ekkor x (egész) eleme a primál poliédernek és y (amely egész, ha c egész) eleme a duális poliédernek, és a 2.5.4 tétel szerint $cx = yr (:= \sum[y(Z)r(Z) : Z \subseteq S]$, azaz x primál optimum, y duál optimum. □

2.5.6. Tétel. *Az $M = (S,r)$ matroidhoz tartozó* $\max\{cx : x \in \mathbf{R}^S, x \ge 0, x(X) \le r(X)$ *minden $X \subseteq S$ részhalmazra*$\}$ *primál lineáris program, illetve ennek duálisa, a* $\min\{\sum[y(Z)r(Z) : Z \subseteq S] : y \ge 0, \sum[y(Z) : s \in Z] \ge c(s)$ *minden $s \in S$-re*$\}$ *lineáris program olyanok, hogy a primál problémának mindig létezik egészértékű optimuma* (amely automatikusan $(0-1)$ értékű)*, míg a duál problémának létezik olyan optimális y megoldása, amelyre a $\{Z : y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lánc. Továbbá egészértékű c esetén az optimális y is választható egészértékűnek.*

Bizonyítás. Amennyiben c nemnegatív, úgy a 2.5.5 tételben kapott primál és duál optimumok itt is jók lesznek, hiszen ekkor az $y(S) = c(s_n)$ érték is nemnegatív. Ha c-nek minden komponense nempozitív, akkor $x = 0$ primál megoldás, $y = 0$ duál megoldás és ezek optimálisak. Tegyük most fel, hogy c-nek vannak pozitív és negatív komponensei is, és legyen i az az index, amelyre $c(s_i) > 0 \ge c(s_{i+1})$. Legyen $S' := S_i$ és $M' := M|S'$. Legyen x', illetve y' a 2.5.5 tétel által az M'-ben biztosított primál és duál optimális megoldás. Ekkor az x'-t nullákkal kiegészítve kapott x és a változatlan y' primál, illetve duális optimuma a 2.5.6 tételbeli programpárnak. □

Legyen az M matroid rang-függvénye r, és jelölje a független halmazok karakterisztikus vektorainak konvex burkát $P(r)$. Ezt a **matroid poliéder**ének vagy a **függetlenek poliéderé**nek nevezzük. A bázisok karakterisztikus vektorainak konvex burkát a matroid **bázispoliéderé**nek nevezzük, és $B(r)$-rel jelöljük.

Ismeretes, hogy minden politóp (:=véges sok pont konvex burka) poliéder, azaz előáll véges sok féltér metszeteként (más szóval egy egyenlőtlenségrendszer megoldás halmazaként). Most explicit megadjuk a függetlenségi és a bázispoliédereket félterek metszeteként, azaz egyenlőtlenségekkel. Legyen

$$B' := \{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0, x(Z) \leq r(Z) \text{ minden } Z \subset S \text{ részhalmazra, és } x(S) = r(S)\} \tag{2.12}$$

és legyen

$$P' := \{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0, x(Z) \leq r(Z) \text{ minden } Z \subseteq S \text{ részhalmazra}\}. \tag{2.13}$$

2.5.7. Tétel. *$B(r) = B'$ és $P(r) = P'$.*

Bizonyítás. Miután $B(r) \subseteq B'$ és $P(r) \subseteq P'$, csak azt kell látni, hogy B', illetve P' csúcsai egészek, hiszen egy B'-ben, illetve P'-ben lévő egész (és így 0-1 koordinátákkal rendelkező) pont szükségképpen egy bázisnak, illetve egy független halmaznak a karakterisztikus vektora. A 2.5.5 és 2.5.6 tételek szerint viszont B' és P' valóban egész poliéderek. □

Egy alkalmazás

A poliéderes szemlélet hasznát a mohó algoritmus egy érdekes alkalmazásával mutatjuk be. Adott az S alaphalmazon egy M matroid, továbbá S részhalmazainak egy $\{S_1, \dots, S_k\}$ rendszere. Fejlesszünk ki algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e a matroidnak olyan B bázisa, amelyre

$$B \cap S_i \text{ feszíti } S_i\text{-t minden } i\text{-re.} \tag{2.14}$$

Egy teljes gráf körmatroidjára alkalmazva, ennek segítségével például el lehet dönteni, hogy egy adott hipergráf részfahipergráf-e, azaz létezik-e a hipergráf ponthalmazán egy olyan F feszítő fa, hogy minden hiperél az F egy részfája.

Tekintsük a $c := \sum_i \chi_{S_i}$ súlyfüggvényt, és legyen B^* egy maximális c-súlyú (azaz c-re nézve maximális súlyú) bázis, amit például a mohó algoritmus segítségével kereshetünk meg.

2.5.8. Tétel. *Akkor és csak akkor létezik (2.14)-et kielégítő bázis, ha a maximális c-súlyú B^* bázis ilyen.*

Bizonyítás. Az elegendőség semmitmondó. A szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy létezik (2.14)-et kielégítő B' bázis. Tekintsük a 2.5.5 tételben megfogalmazott duális lineáris programot, és legyen $y'(Z) := 1$, ha $Z = S_i$ valamely $i = 1, \dots, k$-ra és $y'(Z) := 0$ különben. A c definíciója folytán y'

duális megengedett megoldás. Így a maximális c-súlyú bázis súlya legfeljebb $\sum[r(S_i) : i = 1, \dots, k]$, és egy B bázisra pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $r(S_i) = |B \cap S_i|$ minden i-re, ami épp (2.14). Miután létezik ilyen B' bázis, így minden maximális súlyú bázis teljesíti (2.14)-et. □

2.6. Matroid műveletek

Ebben a fejezetben áttekintjük azokat az egyszerűbb és összetettebb műveleteket, melyek segítségével gráfokból vagy meglévő matroidokból újabb matroidot gyárthatunk.

2.6.1. Elemi műveletek

Párhuzamos többszörözés

Az M matroid egy s független elemének **párhuzamos többszörözés**én azt értjük, hogy az s elemet helyettesítjük az S-től diszjunkt $S' := \{s_1, \dots, s_k\}$ halmazzal, és a létrejövő $S - s \cup S'$ alaphalmazon egy X részhalmazt akkor deklarálunk függetlennek, ha $X \subseteq S - s$ és X független M-ben, vagy ha $|X \cap \cap S'| = 1$ és $X - S' + s$ független M-ben. Könnyen látható, hogy így matroidot kapunk, amelyben bármely két új elem kételemű kört alkot. Gráf körmatroidjában ez a konstrukció annak felel meg, hogy egy élt k párhuzamos éllel helyettesítünk. Hasznos a párhuzamos többszörözés egy másik szemléltetése. Tegyük fel, hogy $(S, T; E)$ páros gráf S ponthalmazán adott egy hurokmentes M matroid. Ekkor M-et „rátehetjük" a gráf élhalmazára, egy $F \subseteq E$ részhalmazt akkor tekintve függetlenek, ha az F-beli élek végpontjai S-ben különbözőek és függetlenek. Az így kapott M' matroid izomorf azzal, amit M-ből kapunk, ha minden $s \in S$ elemét fokszámnyiszor ($d_G(s)$-szer) párhuzamosan megtöbbszörözzük. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz M'-beli rangja nem más, mint az F S-beli végponthalmazának M szerinti rangja.

Soros többszörözés

Az M matroid egy s elemének **soros többszörözés**én azt értjük, hogy az s elemet helyettesítjük az S-től diszjunkt $S' := \{s_1, \dots, s_k\}$ halmazzal, és a létrejövő $S - s \cup S'$ alaphalmazon egy X részhalmazt akkor deklarálunk körnek, ha vagy $X \subseteq S - S'$ és X kör M-ben, vagy $S' \subseteq X$ és $X - S' + s$ kör M-ben. Könnyen látható, hogy így egy (köreivel definiált) matroidot kapunk. Gráf körmatroidjában ez a konstrukció annak felel meg, hogy egy élt k élből álló úttal helyettesítünk.

Direkt összeg

Tegyük fel, hogy adott k matroid, $M_i = (S_i, \mathcal{F}_i)$ úgy, hogy az S_i alaphalmazok diszjunktak. Legyen $S := \cup_i S_i$ és $\mathcal{F} := \{I \subseteq S : I \cap S_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, t\}$, vagyis I független, ha minden i-re az S_i-be eső része független az i-edik matroidban. Az axiómák ezúttal is könnyen ellenőrizhetőek. A keletkező matroidot az M_i matroidok **direkt összeg**ének vagy **diszjunkt unió**jának nevezzük. Rangfüggvénye $r(X) = \sum_i r_i(X \cap S_i)$. A direkt összeg egy köre valamelyik M_i összeadandó egy köre, és M_i egy köre M-nek is köre. (Tehát M minden köre valamelyik S_i halmazban fekszik.) Könnyű ellenőrizni, hogy minden matroid blokkjainak direkt összegeként áll elő.

18. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy X halmazra akkor és csak akkor teljesül $r(X) = t(X)$, ha M az $M|X$ és $M - X$ matroidok direkt összege. Itt t a matroid ko-rangfüggvénye. (Egy X halmaz $t(X)$* **ko-rangja** *a bázisok X-szel vett metszetének minimális mérete. Könnyen látható, hogy $t(X) = r(S) - r(S - X)$, ahol S az alaphalmaz.)*

Csonkolás

Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $g \geq 0$ egész szám. Az M matroid egy **csonkolt**ján (truncation) vagy g-**csonkolt**ján azt az M_g matroidot értjük, amelyben egy X halmaz akkor független, ha $\mathcal{F}$-hez tartozik és elemszáma legfeljebb g. Ez nyilván matroid lesz, melynek rangfüggvénye $r_g(X) = \min\{r(X), g\}$.

Nyújtás

Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $f \geq 0$ egész szám. Az M matroid egy **nyújtás**án (elongation) vagy f-**nyújtás**án azt az M^f matroidot értjük, amelyben egy X halmaz akkor független, ha M egy függetlenjéből keletkezik legfeljebb f elem hozzávételével. Ez matroid lesz, melynek rangfüggvénye $r^f(X) = \min\{r(X) + f, |X|\}$.

Adjungálás

Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroid, $Z \subseteq S$, és z egy új elem. A z elem Z **szerinti adjungált**jában az $S + z$ halmaz egy X részhalmaza akkor legyen független, ha $X \in \mathcal{F}$ vagy ha $z \in X$ és Z-nek van olyan $z' \notin X$ eleme, amelyre $X - z + z' \in \mathcal{F}$. Ha Z az egyetlen z' pontból áll, akkor a Z szerinti adjungált nem más, mint a z' párhuzamos duplázása.

78. Feladat. *Igazoljuk, hogy az adjungált valóban matroid, melynek r' rangfüggvényére $X \subseteq S$ esetén $r'(X) = r(X)$, míg $z \in X$ esetén $r'(X) = \min\{r(X \cup Z - z), r(X - z) + 1)\}$.*

Affin matroidban az adjungálás annak felel meg, hogy a Z részhalmaz által feszített affin altérből a matroidhoz veszünk egy„általános helyzetben" lévő új z pontot. Ez azt jelenti, hogy z pontosan akkor van benne valamely X halmaz lezártjában, ha X minden eleme benne van Z lezártjában. Például a síkban, ha Z két pontból áll, akkor az adjungált elem a két pontot összekötő egyenesen van úgy, hogy különbözik minden S-beli ponttól és nincs rajta semelyik más egyenesen, amelyet S két pontja határoz meg.

2.6.2. Duális matroid

Gráfoknál találkoztunk azzal a jelenséggel, hogy a gráf körmatroidja és vágásmatroidja között igen szoros kapcsolat mutatkozik. Nevezetesen a körmatroidban a feszítő fák a bázisok, míg a vágásmatroid bázisai éppen a feszítő fák komplementerei. Valójában minden matroidhoz elkészíthető a duális matroidja.

Legyen $M = (S, \mathcal{B})$ matroid a bázisaival adva. Az M **duálisán** azt az $M^* = (S, \mathcal{B}^*)$ matroidot értjük, ahol $\mathcal{B}^* := \{X : S - X \in \mathcal{B}\}$. Tehát M^* bázisai éppen az M bázisainak komplementerei. A definícióból világos, hogy a matroid duális matroidjának duálisa önmaga. Természetesen be kell látnunk, hogy M^* tényleg matroidot alkot.

2.6.1. Tétel. *$\mathcal{B}^*$ kielégíti a bázisaxiómákat. A duális matroid r^* rangfüggvénye:*

$$r^*(X) = |X| + r(S - X) - r(S). \tag{2.15}$$

Bizonyítás. Az első bázisaxióma triviálisan teljesül. (B2) igazolásához legyen $B_1^* = S - B_1$ és $B_2^* = S - B_2$ a $\mathcal{B}^*$ két tagja, azaz B_1 és B_2 az M bázisai. Bármely $x \in B_1^* - B_2^*$ elemre meg kell mutatnunk, hogy létezik egy $y \in B_2^* - B_1^*$ elem, amelyre $B_1^* - x + y \in \mathcal{B}^*$. Ez azzal ekvivalens, hogy az $x \in B_2 - B_1$ elemhez létezik olyan $y \in B_1 - B_2$ elem, amelyre $B_1 + x - y$ bázisa M-nek, ami éppen a 2.4.1 állítás.

(2.15) igazolásához figyeljük meg, hogy egy X halmaz rangja azt méri, maximum mennyire tud egy bázis X-be belemetszeni. Mármost $|B^* \cap X|$ maximumát, ahol B^* duális bázis, úgy határozhatjuk meg, hogy veszünk M-nek egy olyan B bázisát, amelyre $|B \cap X|$ minimális, azaz amelyre $|B - X|$ maximális. Ez a maximum nyilván $r(S - X)$. Így a minimális $|B \cap X|$ értéke $r(S) - r(S - X)$, amiből a keresett $|B^* \cap X|$ maximuma, azaz $r^*(X) = |X| - r(S) + r(S - X)$. □

A definícióból rögtön látszik, hogy egy $X \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor függetlenje M-nek, ha a komplementere generátora a duálisnak.

Megjegyezzük, hogy most már világos, miért is kellett a 64. feladat szerint az óvatos algoritmusnak maximális súlyú bázis meghatározására helyesen működnie. Ugyanis ez az algoritmus pontosan azt teszi, amit a mohó algoritmus tesz a duális matroid minimális súlyú bázisának megkeresésekor. Márpedig a maximális súlyú eredeti bázisok és a minimális súlyú duális bázisok nyilván egymás komplementerei.

19. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy $r^*(X) + t(X) = |X|$, ahol r^* a duális rangfüggvénye.*

20. Gyakorlat. *Mutassuk meg, hogy egy matroid egy B bázisának bázisgráfja ugyanaz, mint a duális matroid $B^* := S - B$ bázisának bázisgráfja.*

21. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy matroid akkor és csak akkor összefüggő, ha a duálisa is az.*

22. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy az első szakaszban leírt csonkolás és nyújtás műveletek egymás duálisai abban az értelemben, hogy egy matroid csonkoltjának a duálisa nem más, mint a duális matroid nyújtottja. Hasonlóképp, a nyújtott duálisa ugyanaz, mint a duális csonkoltja.*

23. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy matroid köre a duális matroid vágása, egy vágása pedig a duális matroid köre.*

Mátrixmatroid duálisa

2.6.2. Tétel. *Ha egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid valamely F test feletti mátrixmatroid, akkor duálisa is F feletti mátrixmatroid.*

Bizonyítás. Legyen $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Legyen A olyan mátrix, melynek elemei F-ből valók, oszlopai megfelelnek az S elemeinek, és az oszlopok egy részhalmaza pontosan akkor lineárisan független, ha a megfelelő részhalmaza S-nek $\mathcal{F}$-hez tartozik. Azt mondjuk, hogy az A mátrix reprezentálja az M matroidot.

Világos, hogy ha az A sorát megszorozzuk egy nemnulla elemmel, akkor az oszlopok lineáris függősége, illetve függetlensége változatlan marad. Ugyanez érvényes, ha egy sort hozzáadunk egy másikhoz, vagy ha két sort felcserélünk. Hasonlóképp, ha az A egy sora lineárisan függ a többi sortól, akkor a sor kihagyásával keletkező mátrix is reprezentálja M-et.

Legyen $B := \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ a matroid egy bázisa. A fenti műveletek egymás utáni alkalmazásával (magyarul Gauss-eliminációval) elérhetjük, hogy az A mátrix r sorból álljon, és az első r oszlopa egységmátrixot alkosson. Jelölje C az A mátrix maradék $r \times (n-r)$-es részét. Tekintsük az $A' := (C^T, E_{n-r})$ mátrixot, ahol C^T a C transzponáltja, E_{n-r} pedig az $(n-r) \times (n-r)$-es egységmátrix.

Az A' mátrix rangja nyilván $n - r$. Azt állítjuk, hogy A' mátrix M' mátrix-matroidja éppen az M duálisa. Legyen P egy r elemű részhalmaza

S-nek. Feltehetjük, hogy $P = \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}$. Amennyiben $P = B$, úgy $S - B$-nek az E_{n-r} egységmátrix felel meg A'-ben, vagyis ebben az esetben P bázisa M-nek és $S - P$ bázisa M'-nek.

Ha $P \neq B$, akkor legyen k a legkisebb index, amelyre $s_k \notin B$. Ugyanazt a P betűt használhatjuk az A mátrixban a P részhalmaznak megfelelő $r \times r$-es részmátrix jelölésére. Jelölje P^- a P mátrixnak azt a részmátrixát, amely a P első $k-i$ oszlopának és utolsó $k-i$ sorának elhagyásával keletkezik. Mivel P^- konstruálásakor a P-ből törölt sorok és oszlopok metszete egységmátrix, ezért a P részhalmaz akkor és csak akkor bázisa M-nek, ha P^- nemszinguláris.

Tekintsük most az $S - P$-nek megfelelő oszlopokat A'-ben, és legyen T az A'-nek az első $r-(k-i)$ oszlopa és az első $r-(k-i)$ sora által meghatározott részmátrixa. Mivel T az $S - P$-nek megfelelő négyzetes mátrixból olyan sorok és oszlopok törlésével keletkezik, amelyek metszete egységmátrix, $S - P$ akkor és csak akkor független M'-ben, ha a T mátrix nemszinguláris. De a konstrukció miatt a T mátrix éppen P^- transzponáltja, így megkaptuk, hogy P akkor és csak akkor bázis M-ben, ha $S - P$ bázis M'-ben. □

A valós számok teste felett reprezentálható duális matroidpároknak szemléletes geometriai tartalmuk van: egymásra ortogonális kiegészítő altereknek felelnek meg. Legyen A_1 egy $r \times n$-es valós mátrix, melynek sorai lineárisan függetlenek, és legyen M_1 az oszlophalmazon értelmezett mátrixmatroid. Létezik egy $(n-r)\times n$ méretű A_2 mátrix, amelynek sorai lineárisan függetlenek, és minden sora ortogonális az A_1 minden sorára. Vagyis az A_1 és A_2 mátrixok sorterei egymás ortogonális kiegészítő alterei. Jelölje M_2 az oszlopok halmazán az A_2 által definiált mátrixmatroidot.

Azt állítjuk, hogy M_1 és M_2 egymásnak duálisai. A dolog szimmetriája miatt ehhez elég azt belátni, hogy ha B_1 az M_1 bázisa, akkor $B_2 := S - B_1$ független M_2-ben. Tegyük fel indirekt, hogy nem az. Ekkor létezik egy $x \neq 0$ vektor, amelyben a B_1-nek megfelelő komponensek nullák, és amelyre $A_2 x = 0$. Ez azt jelenti, hogy x ortogonális az A_2 minden sorára, és így benne van van az A_1 sorterében, vagyis létezik y (r dimenziós) vektor, amelyre $x = yA_1$. Mivel $x \neq 0$, így $y \neq 0$. De ez azt jelenti, hogy az y ortogonális a B_1-nek megfelelő A_1-beli oszlopokra, vagyis ezen oszlopok nem lineárisan függetlenek, ellentmondásban a feltevéssel, hogy B_1 bázisa M_1-nek.

Grafikus matroid duálisa, síkgráf síkduálisa

Látjuk tehát, hogy reprezentálható matroid duálisa is reprezentálható. Felvetődik a kérdés, hogy egy grafikus matroid duálisa mikor grafikus. Érdekes módon ez gráfok síkba rajzolhatóságával van kapcsolatban. Legyen G összefüggő, síkba rajzolható gráf, és tekintsük egy konkrét síkba rajzolását. Ehhez elkészíthető a G^* síkduális gráf oly módon, hogy minden tartományba elhelyezzük a G^*-nak egy csúcsát, és kettőt α párhuzamos éllel összekötünk, ha a megfelelő tartományoknak α közös éle van G-ben. A konstrukcióból adódik, hogy G^* síkbarajzolt gráf, amelynek annyi csúcsa van, mint ahány tartománya a síkba rajzolt G-nek, és az élei egy-egy értelmű megfeleltetésben vannak a G éleivel. Hangsúlyozzuk, hogy a sík-duális a gráf egy konkrét síkba rajzolásához rendel egy síkba rajzolt gráfot, és előfordulhat, hogy G két különböző síkba rajzolásához tartozó síkduális gráfok nem izomorfak egymással. (Tétel: *3-összefüggő gráfoknál ez már nem fordulhat elő.*)

Hurokélnek a duálisban elvágó él felel meg, és megfordítva. Általánosabban, nem nehéz bebizonyítani, hogy a síkgráf egy körének a síkduális gráf egy elemi vágása felel meg, míg egy elemi vágásának a síkduális gráf egy köre. (A dolog azon a megfigyelésen múlik, hogy egy síkba rajzolt gráf köre a síkot belső és külső részre osztja.) Ebből rögtön következik, hogy ha F a $G = (V, E)$ síkgráf feszítő fája, akkor az $E - F$-nek megfelelő élhalmaz a duális gráfnak feszítő fája. Ebből adódik, hogy síkba rajzolt gráf és síkduális gráfjának körmatroidjai egymásnak (matroid-) duálisai. Továbbá, hogy a G különböző síkba rajzolásaihoz tartozó síkduális gráfok, bár nem biztosan izomorfak, de körmatroidjuk ugyanaz (nevezetesen G körmatroidjának duálisa).

Megállapítottuk tehát, hogy *síkgráf körmatroidjának duálisa mindig grafikus.* Ezen kijelentés megfordítása is érvényes, vagyishogy *nem síkba rajzolható gráf körmatroidjának duálisa nem grafikus.* (A bizonyítás vázlata a következő. Először kimutatja az ember, hogy ha egy gráf körmatroidjának duálisa grafikus, akkor ugyanez érvényes egy él elhagyásával vagy összehúzásával keletkező gráfra. A Kuratowski-tétel szerint ha egy gráf nem síkbeli, akkor pontok elhagyásával, valamint élek egymás utáni elhagyásával, illetve összehúzásával megkaphatjuk a két Kuratowski-gráf egyikét. Elég tehát kimutatni, hogy a K_5 és a $K_{3,3}$ körmatroidjainak duálisa nem grafikus. Nézzük például a K_5 ötpontú teljes gráfot. A körmatroid M^* duálisának rangja $10 - 4 = 6$. Ha M^* grafikus, azaz egy G' (összefüggő) gráf körmatroidja, akkor G'-nek 7 pontja van. Mivel K_5-ben minden kör legalább három elemű, az M' matroidban minden vágás legalább három elemű, és így G' minden pontjának a foka legalább 3. De akkor G'-nek legalább $\lceil 7 * 3/2 \rceil = 11$ éle kell hogy legyen, holott csak 10 éle van. Hasonló meggondolással látható, hogy $K_{3,3}$ körmatroidjának M' duálisa sem grafikus. Valóban, ha M' valamely összefüggő G' gráf körmatroidja lenne, akkor G'-nek 5 pontja van (merthogy M' rangja 9-5=4). Mivel $K_{3,3}$-ban mindegyik kör legalább 4 elemű, az M'-ben mindegyik vágás legalább 4 elemű, és ezért G'-ben mindegyik pont foka legalább 4. G'-ben tehát legalább $5 * 4/2 = 10$ élnek kell lennie, de csak 9 van.)

Mivel egy feszítő fa élszáma eggyel kisebb, mint a pontszáma, azt kapjuk, hogy F eggyel kevesebb élből áll, mint a G csúcsainak száma, és $E - F$ eggyel kevesebb élből áll, mint G^* csúcsainak száma, ami épp a G tartományainak száma. E kettő összeadásával nyerjük az Euler-formulát, amely szerint *egy* *síkba rajzolt gráf csúcsainak és tartományainak együttes száma kettővel nagyobb, mint a gráf éleinek a száma.*

2.6.3. Minorok: elhagyás és összehúzás

Az S alaphalmazon adott az M matroid, melynek rangfüggvénye r. Rögtön a bevezetőben már megismerkedtünk az elhagyás vagy részmatroid fogalmával. Most ennek egyfajta értelemben duális műveletét, az összehúzást vezetjük be. Legyen Z az S valódi, nemüres részhalmaza és $S' := S - Z$. Definiáljuk az $r' : 2^{S'} \to \mathbf{Z}_+$ halmazfüggvényt a következőképpen.

$$r'(X) := r(X \cup Z) - r(Z). \tag{2.16}$$

24. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy r' teljesíti a rang axiómákat.*

A gyakorlat alapján az r' egy M' matroidot határoz meg az S' halmazon. Azt mondjuk, hogy az M' matroid az M-ből a Z halmaz **összehúzás**ával keletkezik, vagy azt, hogy M' az M **összehúzott**ja $(S - Z)$-re. Jelölésben $M' = M/Z$ vagy $M' = M \cdot (S - Z)$.

2.6.3. Tétel. *A következők ekvivalensek.*

(1) *$F \subseteq S'$ független M'-ben,*

(2) *Z-nek mindegyik I maximális M-ben független részhalmazára $I \cup F$ független M-ben.*

(3) *Létezik Z-nek egy I maximális M-ben független részhalmaza, amelyre $I \cup F$ független M-ben.*

Bizonyítás. (1) $\to$ (2). Legyen I a Z-nek egy maximális M-ben független részhalmaza. Ez kiegészíthető az $F \cup Z$-nek egy $F' \cup I$ maximális M-ben független részhalmazává. (1) szerint F független M'-ben, így $r(F \cup Z) - r(Z) = |F|$, amiből $|F \cup I| \geq |F' \cup I| = r(F \cup Z) = |F| + r(Z) = |F| + |I|$. Itt szükségképpen egyenlőség van, ezért $F' = F$ és (2) következik.

A (2) $\to$ (3) irány semmitmondó. Tegyük fel most (3)-at. Ekkor $r(F \cup I) = |F \cup I|$ és $r(Z) = |I|$, így $r'(F) = r(F \cup Z) - r(Z) \geq r(F \cup I) - r(Z) = |F \cup I| - |I| = |F| \geq r'(F)$. Végig egyenlőségnek kell teljesülnie és ezért F független M'-ben, vagyis (1) fennáll. □

25. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy a fenti konstrukció egy $G = (V, E)$ gráf körmatroidjában annak felel meg, hogy az élek egy F részhalmazának elemeit összehúzzuk.*

Könnyen igazolható, hogy egy M mátrixmatroidban valamely a (nem hurok, azaz nem nulla) elem összehúzása azt jelenti, hogy a többi vektort az a-ra merőleges hipersíkra vetítjük. Konkrétan ez azt jelenti, hogy ha a matroid elemei az A mátrix oszlopvektorai, akkor (sorokra vonatkozó) Gauss-eliminációval és sorcserével elérhető, hogy az a oszlopában az első elem 1-es, a többi 0. Ezzel persze az oszlopok lineáris függősége vagy függetlensége nem változik. A merőleges vetítés most azt jelenti, hogy elhagyjuk az első sort, valamint az a oszlopát. A kapott mátrix matroidja éppen az M'.

A definícióból rögtön látszik, hogy ha Z_1, Z_2 két diszjunkt részhalmaza S-nek, akkor ugyanahhoz az M' matroidhoz jutunk, ha először összehúzzuk Z_1-et majd töröljük Z_2-t, mint ha először töröljük Z_2-t, és azután húzzuk össze Z_1-et. Azt mondjuk, hogy M' az M matroid **minor**ja.

Feladatok

79. Feladat. *Igazoljuk, hogy $t(X)$ az $S-X$ halmaz összehúzásával keletkező matroid rangja.*

80. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy $X \subseteq S-Z$ halmaz $M' = M/Z$-beli $t'(X)$ ko-rangja $t(X)$.*

81. Feladat. *Legyen $Z_1 \subset Z \subset S$ és $Z_2 := Z - Z_1$. Igazoljuk, hogy $M/Z = (M/Z_1)/Z_2 = (M/Z_2)/Z_1$ és $(M-Z_1)/Z_2 = (M/Z_2) - Z_1$.*

82. Feladat. *Igazoljuk, hogy $(M/Z)^* = M^* - Z$ és $(M-Z)^* = M^*/Z$.*

A feladat értelmében elhagyás és összehúzás duális fogalmak. Speciális eset, amikor egy G síkgráf és G^* duálisának körmatroidjait tekintjük, amelyek (mint tudjuk) egymás duálisai. Egyszerű gráfelméleti megfontolásból adódik, hogy egy G-beli e (nem elvágó) él elhagyásával keletkező gráf duálisa ugyanaz, mint a G^*-ból az e-nek megfelelő e^* él összehúzásával keletkező gráf.

A 2.6 szakaszban áttekintettük a matroidokra vontakozó alapműveleteket. Most további olyan érdekes konstrukciókat mutatunk be, melyek segítségével meglévő matroidokból újakat gyárthatunk.

2.6.4. Maximális súlyú bázisok matroidja

Egy matroidból az elemek tetszőleges c súlyozása segítségével egy új matroidot nyerhetünk.

2.6.4. Tétel. *Bármely $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozásra a maximális súlyú bázisok kielégítik a bázis axiómákat.*

Bizonyítás. Legyen B_1 és B_2 két maximális súlyú bázis, és legyen $x \in B_1 - B_2$. A 2.4.2 tétel alapján létezik olyan $y \in B_2 - B_1$ elem, amelyre mind $B_1' := B_1 - x + y$, mind $B_2' = B_2 - y + x$ bázis. Ekkor szükségképpen $c(x) = c(y)$, így B_1' és B_2' maximális súlyú bázisok. □

A 2.6.4 tételben definiált matroidot jelöljük M_c-vel.

26. Gyakorlat. *Legyen $Z \subseteq S$. Igazoljuk, hogy a $c := \chi_Z$ súlyozásra $M_c|Z = M|Z$, míg a $c := -\chi_Z$ súlyozásra $M_c|Z = M/(S - Z)$.*

Tetszőleges c-re az M_c matroidot konkrétan előállíthatjuk mint az M bizonyos minorjainak direkt összege. Tegyük fel, hogy a c különböző értékei $c_1 > c_2 > \cdots > c_t$ $(t \geq 1)$. Legyen $Z_i := \{s \in S : c(s) \geq c_i\}$. Legyen $P_1 = Z_1$ és $P_i := Z_i - Z_{i-1}$. Legyen $M_1 := M|P_1$, míg $i = 2, \ldots, t$ esetén M_i legyen az a matroid a P_i alaphalmazon, amely M-ből keletkezik a Z_{i-1} halmaz összehúzásával és az $S - Z_i$ elhagyásával.

2.6.5. Tétel. *A maximális súlyú bázisok M_c matroidja az M_i matroidok direkt összege. Az M_c rangfüggvénye:*

$$r_c(X) = \sum_{i=1}^{t} [r((X \cap P_i) \cup Z_{i-1}) - r(Z_{i-1})]. \tag{2.17}$$

Bizonyítás. Legyen B maximális súlyú bázis. Állítjuk, hogy M-ben $B \cap Z_i$ feszíti Z_i-t minden $i = 1, \ldots, t$-re. Legyen indirekt i a legkisebb index, amelyre ez nem teljesül. Ekkor van olyan $x \in Z_i - B$, amelyre $B \cap Z_i + x$ független M-ben. A kicserélési axióma miatt létezik olyan $y \in B - Z_i$, amelyre $B - y + x$ bázis. Most $y \notin Z_i$, így $c(x) > c(y)$, ellentmondásban azzal, hogy B maximális súlyú bázis. Tehát $B \cap Z_i$ valóban feszíti Z_i-t, és emiatt $B \cap P_i$ bázisa az M_i matroidnak, vagyis B bázisa a direkt összegnek.

Megfordítva, ha B bázisa a direkt összegnek, akkor látható, hogy B bázisa M-nek, és ráadásul olyan bázisa, amit a mohó algoritmus választhatott, ezért maximális súlyú. A rangformula közvetlenül adódik a minor és a direkt összeg rangfüggvényére megismert alakból. □

83. Feladat. *Igazoljuk, hogy a 2.6.4 tételben szereplő M_c matroid bázispoliédere az M bázispoliéderének egy oldala, és megfordítva, minden ilyen oldal alkalmas c-re előáll, mint az M_c matroid bázispoliédere.*

84. Feladat. *Legyen c egészértékű, nemnegatív súlyozás az M matroid S alaphalmazán. Minden $X \subseteq S$ részhalmazra jelölje $b_c(X)$ az X-be eső független halmazok maximális súlyát. Igazoljuk, hogy b_c szubmoduláris.*

2.7. Matroidok halmazrendszerekből és gráfokból

Az alábbi konstrukciókban szereplő matroidok mind úgy állnak elő, hogy megadunk egy bizonyos halmazrendszert, és egy részhalmazt akkor deklarálunk függetlennek, ha a rendszer minden tagjából legfeljebb egy előre adott számú elemet tartalmaz.

2.7.1. Partíciós matroid és rokonai

Teljes és üres matroid

Akkor beszélünk **teljes** vagy **szabad** matroidról, ha minden részhalmaz független, míg az **üres** vagy **triviális** matroidban az üres halmaz az egyetlen független halmaz.

Uniform matroid

Legyen az S halmaz n elemű és k egy egész szám, amelyre $0 \leq k \leq n$. Álljon $\mathcal{F}$ az S összes legfeljebb k elemű részhalmazából. Könnyen ellenőrizhetően mindhárom axióma fennáll. A kapott matroidot **uniform matroidnak** hívják és $U_{n,k}$-val jelölik. Egy X halmaz rangja $r(X) = \min\{|X|, k\}$. A teljes és az üres matroid nyilván speciális uniform matroidok.

Partíciós matroid

Legyen $\{S_1, \ldots, S_t\}$ az S alaphalmaz partíciója, és legyenek $g_1, \ldots, g_t$ nemnegatív egészek. Egy I halmazt deklaráljunk függetlennek, ha $|I \cap S_i| \leq g_i$ minden i-re. Az axiómákat ismét könnyű ellenőrizni: a kapott matroid neve **partíciós matroid**. A $t = 1$ esetben visszajutunk az uniform matroidhoz, másrészt egy partíciós matroid uniform matroidok direkt összege. A partíciós matroid rangfüggvénye $r(X) := \sum_i [\min\{g_i, |X \cap S_i|\}]$.

27. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy egy $Z \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden $i = 1, \ldots, t$-re vagy $S_i \subseteq Z$ vagy $|Z \cap S_i| < g_i$.*

28. Gyakorlat. *Egy irányított gráf éleinek egy részhalmazát deklaráljuk függetlennek, ha minden pontba legfeljebb egy belépő élt tartalmaz. Igazoljuk, hogy ez matroidot határoz meg.*

A továbbiakban a partíciós matroid különféle általánosításait tekintjük át.

Lamináris matroid

A partíciós matroid fogalma általánosítható. Egy $\{S_1, \ldots, S_t\}$ halmazcsaládról akkor mondjuk, hogy **lamináris**, ha bármely két tagja vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat.

85. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha $\{S_1, S_2, ..., S_t\}$ halmazrendszer lamináris, akkor az*

$$\mathcal{I} := \{I : |I \cap S_i| \leq g_i, i = 1, \ldots, t\} \tag{2.18}$$

halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat.

Az így definiált matroidot **lamináris matroid**nak nevezzük.

29. Gyakorlat. *Határozzuk meg a lamináris matroid rangfüggvényét.*

Általánosított partíciós matroid

A partíciós matroidok egy más irányú általánosítása a következő. Legyen $\{S_1, \dots, S_t\}$ az S alaphalmaz partíciója. Adottak a $g_1, \dots, g_t$, valamint az $f_1, \dots, f_t$ nemnegatív egészek ($0 \leq f_i \leq g_i \leq |S_i|$) és még egy k egész.

86. Feladat. *Igazoljuk, hogy a* $\mathcal{B} := \{X : |X| = k, f_i \leq |S_i \cap X| \leq g_i$ *minden* $i = 1, \dots, t$*-re*$\}$ *halmazrendszer, amennyiben nemüres, kielégíti a bázisaxiómákat.*

A kapott matroid neve **általánosított partíciós matroid**. Az $f_i :\equiv 0$ és $k := \sum_i \min\{g_i, |S_i|\}$ speciális esetben visszajutunk a partíciós matroid fogalmához.

87. Feladat. *Akkor és csak akkor létezik olyan* k *elemű* B *halmaz, amelyre*
(i) $|S_i \cap B| \leq g_i$ $(i = 1, \dots, t)$, *ha* $\sum_i g_i \geq k$,
(ii) $|S_i \cap B| \geq f_i$ $(i = 1, \dots, t)$, *ha* $\sum_i f_i \leq k$,
(iii) $f_i \leq |S_i \cap B| \leq g_i$ $(i = 1, \dots, t)$, *ha külön-külön létezik (i)-t kielégítő és (ii)-t kielégítő halmaz, azaz ha* $\sum_i f_i \leq k \leq \sum_i g_i$.

2.7.1. Tétel. *Egy* F *halmaz akkor és csak akkor független az általánosított partíciós matroidban, ha*

$$|F \cap S_i| \leq g_i \text{ minden } i\text{-re} \tag{2.19}$$

és

$$\sum_i \max\{f_i, |F \cap S_i|\} \leq k. \tag{2.20}$$

Bizonyítás. Ha F független, akkor létezik egy B bázis, amely magában foglalja. Ekkor $|F \cap S_i| \leq |B \cap S_i| \leq g_i$ és $\sum_i \max\{f_i, |F \cap S_i|\} \leq \sum_i \max\{f_i, |B \cap S_i|\} = \sum_i |B \cap S_i| = |B| = k$, vagyis a feltételek valóban szükségesek.

Tegyük most fel, hogy egy F halmaz teljesíti a feltételeket. Be kell látnunk, hogy benne van valamely bázisban. Ezt elég olyan F halmazokra igazolni, melyek maximálisak abban az értelemben, hogy már nem bővíthetők a feltételek megsértése nélkül. Azt látjuk be, hogy egy ilyen F halmaz bázis.

A (2.19) feltevés miatt $|F \cap S_i| \leq g_i$ teljesül. Belátjuk, hogy $|F \cap S_i| \geq f_i$ is fennáll minden i-re. Valóban, ha valamely j indexre ez nem teljesülne, akkor $S_j - F$ egy elemét F-hez véve a keletkező F'-re $\max\{f_j, |F' \cap S_j|\} = \max\{f_j, |F \cap S_j|\}$, vagyis F' is teljesítené (2.20)-at (és persze (2.19)-et is), ellentétben F maximális választásával.

Azt kell még igazolnunk, hogy $|F| = k$. Miután most $|F \cap S_i| \geq f_i$ minden i-re, így $\max\{f_i, |F \cap S_i|\} = |F \cap S_i|$, és ezért $|F| = \sum_i |F \cap S_i| = \sum_i \max\{f_i, |F \cap S_i|\} \leq k$. Ha itt, indirekt, szigorú egyenlőtlenség állna, akkor $\sum_i g_i \geq k$ miatt az egyik S_j halmazra $|F \cap S_j| < g_j$ teljesülne, és így létezne egy $s \in S_j - F$ elem, és ezzel F-et ki lehetne bővíteni a (2.19) és (2.20) feltételek megsértése nélkül, ellentmondásban F maximális választásával. $\square$

Az alábbiakban olyan konstrukciók szerepelnek, amelyek (di)gráfok párosításaival és útrendszereivel kapcsolatos matroidokat eredményeznek.

2.7.2. Transzverzális matroidok és deltoidok

Először vizsgáljuk meg, hogy páros gráfok ponthalmazán milyen matroidokat készíthetünk. Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf. Egy $I \subseteq S$ részhalmazt **párosítható**nak mondunk, ha létezik G-ben egy olyan párosítás, amely fedi az I elemeit. (A G éleinek egy X részhalmazát **párosítás**nak nevezik, ha minden pontot legfeljebb egy X-beli él fed. Ha pontosan egy, **teljes párosítás**ról beszélünk.)

2.7.2. Tétel. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S párosítható részhalmazai matroidot alkotnak.*

Bizonyítás. (Vázlat) Az első két axióma triviálisan teljesül. (I3) pedig következik a közismert alternáló utas módszerből, amely egy páros gráf bármely nem teljes P párosításához megkonstruál egy olyan nagyobb P' párosítást, amelyre az S-ben fedett pontok halmaza bővebb, mint a P által fedetteké. $\square$

A 2.7.2 tételben szereplő matroidot **transzverzális matroid**nak nevezik. A név eredete a következő. Legyen $\mathcal{T} := \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ az S alaphalmaz részhalmazainak tetszőleges családja. Azt mondjuk, hogy az $I \subseteq S$ halmaz **résztranszverzális**, ha I minden x eleméhez hozzá lehet rendelni egy x-et tartalmazó A_i halmazt úgy, hogy minden halmazt legfeljebb egy elemhez rendeljük.

Rendeljünk a szóbanforgó részhalmazrendszerhez egy $G_{\mathcal{T}} := (S, T; E)$ páros gráfot, ahol $|T| = t$, a T elemei az A_i halmazoknak felelnek meg, és egy A_i halmaznak megfeleltetett t_i pont akkor szomszédos az $s \in S$ ponttal, ha $s \in A_i$. A definícióból rögtön látszik, hogy $\mathcal{T}$ résztranszverzálisai és az S párosítható részhalmazai ugyanazok. Ezért a résztranszverzálisok kielégítik a függetlenségi axiómákat.

A transzverzális matroid még egy ekvivalens módon bevezethető. Legyen $(S, \mathcal{T})$ egy hipergráf. Hiperélek egy $\mathcal{F}$ részhalmazát **reprezentálható**nak mondunk, ha $\mathcal{F}$-nek minden tagjából kiválasztható annak egy pontja úgy, hogy különböző hiperélből különböző pontot választunk. (A Hall-tétel alapján ez pontosan akkor lehetséges, ha $\mathcal{F}$-ből bárhogyan kivéve j hiperélt, ezek egyesítése legalább j elemű).

2.7.1. Következmény. *A $\mathcal{T}$ alaphalmazon a reprezentálható részhipergráfok egy matroid független halmazait alkotják.*

30. Gyakorlat. *Igazoljuk a* 2.7.1 *következményt, majd mutassuk meg, hogy a következmény is implikálja a 2.7.2 tételt.*

88. Feladat. *Igazoljuk, hogy a négypontú teljes gráf körmatroidja nem transzverzális matroid.*

A Kőnig-tételből, illetve a vele ekvivalens deficites alakból rögtön kiolvasható a transzverzális matroid rangfüggvénye.

2.7.3. Tétel. *A $G = (S, T; E)$ páros gráf által az S halmazon definiált transzverzális matroid rangfüggvénye a következő.*

$$r(S') = \min\{|S' - X| + |\Gamma(X)| : X \subseteq S'\}. \tag{2.21}$$

Párosítások segítségével egy $G = (S, T; E)$ páros gráf teljes $S \cup T$ ponthalmazán is definiálhatunk matroidot, éspedig a bázisaival. Álljon $\mathcal{B}$ az $S \cup T$ alaphalmaz azon $|S|$ elemű részhalmazaiból, amelyek az S halmaz és valamely párosítás ponthalmazának szimmetrikus differenciájaként állnak elő.

89. Feladat. *Igazoljuk, hogy az előbbi definíció egy matroid bázisait adja.*

Az így nyert matroidot a $G = (S, T; E)$ páros gráf S **bázisú deltoid**jának nevezzük. Egy deltoid duálisa is deltoid, hiszen az S bázisú, illetve a T bázisú deltoidok egymás duálisai. Az is nyilvánvaló, hogy az S-en definiált transzverzális matroid a T bázisú deltoid részmatroidja. Másrészt az S bázisú deltoid könnyen látható módon a $\{\Gamma(s) + s : s \in S\}$ halmazrendszer által definiált transzverzális matroid (ahol $\Gamma(s)$ az s pont G-beli szomszédainak a halmaza).

2.7.2. Következmény. *Egy matroid pontosan akkor transzverzális, ha egy deltoid részmatroidja.*

Emlékeztetünk a páros gráfok Mendelsohn-Dulmage tulajdonságára:

2.7.4. Lemma. *Ha a $G = (S, T; E)$ páros gráf pontjainak egy $X \subseteq S$ halmaza és egy $Y \subseteq T$ halmaza külön-külön fedhető egy-egy párosítással, akkor létezik $X \cup Y$-t fedő párosítás is.*

Bizonyítás. Legyen M_X egy X-et fedő, míg M_Y egy Y-t fedő maximális (azaz $\nu(G)$) elemszámú párosítás olyan, hogy $|M_X \cap M_Y|$ maximális. Ekkor $M_X = M_Y$, mert különben az $M_X \cup M_Y$ halmaz tartalmazna egy C alternáló kört, és így az M_X elemeit C mentén kicserélve a kapott M'_X olyan X-et fedő $\nu(G)$ elemszámú párosítás volna, melyre $|M'_X \cap M_Y| > |M_X \cap M_Y|$. Ezért az $M_X = M_Y$ párosítás fedi $X \cup Y$-t. $\square$

90. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy t rangú transzverzális matroid az S halmazon mindig megadható egy olyan $(S,T;E)$ páros gráf által definiált transzverzális matroidként, amelyben $|T| = t$.*

2.7.3. Következmény. *A $G = (S,T;E)$ páros gráf által az S-en, illetve a T-n definiált transzverzális matroidok direkt összegében egy halmaz pontosan akkor független, ha fedhető G egy párosításával.*

Ezek szerint egy páros gráf pontjainak azon részhalmazai, melyek fedhetők párosítással, egy matroidot alkotnak. Valójában ez a konstrukció minden gráfra átvihető.

2.7.3. Párosítás-matroid

Legyen $G = (V,E)$ egyszerű, irányítatlan gráf. G párosítás matroidja a V ponthalmazon van definiálva úgy, hogy csúcsoknak egy U részhalmaza akkor tartozzék $\mathcal{F}$-hez, ha létezik G-ben olyan párosítás, amely U minden pontját fedi. A $(V,\mathcal{F})$ párról mindjárt belátjuk, hogy matroid, a G gráf **párosítás-matroid**ja.

2.7.5. Tétel. *A fent definiált $(V,\mathcal{F})$ pár matroidot alkot.*

Bizonyítás. Az (I1) és (I2) axióma a definícióból rögtön adódik. Jelölje ν a gráf legnagyobb párosításának elemszámát. Az (I3$'''$) axiómához először figyeljük meg, hogy ha M és M' párosítások, melyekre $|M'| < |M| = \nu$, akkor a két párosítás szimmetrikus differenciájának egyik komponense szükségképpen egy olyan P alternáló út, amely két M' által fedetlen pontot köt össze. Így az $M' \oplus P$ párosítás által fedett csúcsok halmaza bővebb (két elemmel), mint az M' által fedetteké. Ebből rögtön adódik, hogy a nem bővíthető függetlenek elemszáma ugyanaz: 2ν.

Az (I3$'''$) axióma második feléhez igazolnunk kell, hogy egy $2\nu - 1$ elemű K és egy 2ν elemű N független halmaz esetén K függetlenné bővíthető $N - K$-ból. Léteznek M_K és M_N párosítások, melyek fedik K-t, illetve N-t. Az elemszámok miatt szükségképpen mindkét párosítás maximális, ezért M_K-nak van olyan uv eleme, amelyre $u \in K, v \notin K$. Ekkor $K + v$ független, így ha $v \in N$, akkor kész is vagyunk. Ha $v \notin N$, akkor legyen P az a maximális alternáló út, amelynek egyik végpontja v. Az M_N maximalitása miatt P másik, y-nal jelölt végpontja $N - K$-ban van. Így a $P \oplus M_K$ szimmetrikus differencia egy olyan (maximális) párosítás, amelynek végponthalmaza $K + y$. $\square$

91. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy $G = (S,T;E)$ páros gráf párosítás-matroidja a G által az S-en, illetve a T-n definiált transzverzális matroidok direkt összege.*

Figyeljük meg, hogy a feladatban megfogalmazott állítás nem más, mint a Mendelsohn-Dulmage tulajdonság (miszerint, ha az $X \subseteq S$ és az $Y \subseteq T$ halmazok külön-külön fedhetők egy-egy párosítással, akkor egyetlen párosítással is fedhetők).

2.7.4. Gammoidok

A transzverzális matroidok egy más irányú általánosítását kaphatjuk irányított gráfok segítségével. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf és $T \subseteq V$ a csúcsok egy részhalmaza. $X, Y \subseteq V$ esetén azt mondjuk, hogy X **elvezethető** az Y-hoz, ha $|X| = |Y|$ és létezik $|X|$ darab (esetleg egypontú) diszjunkt irányított út X-ből Y-ba.

2.7.6. Tétel. *A V azon részhalmazai, amelyekhez a T valamely részhalmaza elvezethető egy matroidot alkotnak, éspedig egy transzverzális matroid duálisát.*

Bizonyítás. Legyen V' és V'' a V, illetve a $V - T$ halmazok egy-egy példánya. Azzal a jelölési konvencióval élünk, hogy egy V-beli v elem vagy X részhalmaz V'-beli megfelelőjét v'-vel, illetve X'-vel jelöljük, míg egy $V - T$-beli v elem vagy X részhalmaz V''-beli megfelelőjét v''-vel, illetve X''-vel. Készítsünk el egy $G' = (V', V''; E)$ páros gráfot, amelyben az $u' \in V'$ és $v'' \in V''$ csúcsok akkor vannak éllel összekötve, ha $u = v$ vagy ha uv éle D-nek. Tekintsük a G' által V'-n definiált M' transzverzális matroidot.

2.7.4. Állítás. *Egy $B' \subseteq V'$ halmaz pontosan akkor bázisa M'-nek, ha T elvezethető a $V - B$ halmazhoz.*

Bizonyítás. Legyen először B' az M' egy bázisa és P egy olyan párosítás, amely fedi B'-t. A konstrukció miatt $|B| = |V - T|$. Tetszőleges $v' \in V' - B'$ ponthoz a P párosítás segítségével megkonstruálhatunk D-ben egy T-ből induló és v-ben végződő utat, a következőképpen. Ha $v' \in T'$, úgy az út álljon az egyetlen v pontból. Tegyük fel, hogy $v' \notin T'$. Miután P fedi V''-t, a v'' pontot fedi párosításél, melynek másik, v_1' végpontja olyan, hogy vagy v_1 benne van T-ben, vagy ha nincs, akkor v_1''-t fedi párosításél. Ezt az eljárást ismételve valóban egy utat definiálunk T egy pontjából v-be. Könnyű ellenőrizni, hogy a $V' - B'$ különböző pontjaihoz így definiált utak páronként diszjunktak D-ben, tehát T valóban elvezethető $V - B$-hez.

Megfordítva, tekintsünk egy $|T|$ darab diszjunkt útból álló rendszert D-ben, amely a T halmazt valamely $X \subseteq V$ halmazhoz vezeti. Tekintsük G' azon éleit, melyek az útrendszer éleinek felelnek meg, együtt az olyan $v'v''$ típusú élekkel, melyekre $v \in V - T$ nincs egyik úton sem. Könnyen ellenőrizhető, hogy így a páros gráfnak egy olyan V''-t fedő M' párosítását kapjuk, amely által fedetlen V'-beli pontok halmaza $V' - X'$, azaz $V' - X'$ a transzverzális matroid egy bázisa. □

Az M' duálisában egy $Y' \subseteq V'$ halmaz akkor független, ha $V' - Y'$ magában foglalja M' egy bázisát. Így az állításból adódóan Y' pontosan akkor független a duálisban, ha T-nek valamely részhalmaza elvezethető az $Y \subseteq V$ halmazhoz. □

A 2.7.6 tételben szereplő matroid neve **szoros gammoid**. Ennek egy megszorítását (D pontjainak egy S részhalmazára) **gammoid**nak nevezik.

2.7.7. Tétel. *A szoros gammoidok éppen a transzverzális matroidok duálisai.*

Bizonyítás. A 2.7.6 tétel második része szerint minden szoros gammoid egy transzverzális matroid duálisa. A megfordításhoz tekintsünk egy $G = (V', V''; E)$ páros gráf által a V' halmazon definiált transzverzális matroidot. A 90. feladat szerint feltehető, hogy $|V''|$ a matroid rangja, azaz G-nek létezik V''-t fedő N párosítása. Jelölje T' a V' fedetlen pontjainak halmazát. Készítsünk el egy $D = (V, A)$ irányított gráfot, amelyben V a V' egy példánya, és xy akkor éle D-nek, ha $x' \in V', y'' \in V''$ és $x'y'' \in E - N$. Jelölje T a T'-nek megfelelő V-beli részhalmazt. A 2.7.6 tételben használt bizonyítás gondolatát követve nem nehéz ellenőrizni, hogy az így kapott digráfban a T által meghatározott szoros gammoid izomorf a kiindulási transzverzális matroid duálisával. □

Miután a szoros gammoidok épp a transzverzális matroidok duálisai, a transzverzális matroidok pedig épp a deltoidok részmatroidjai, továbbá a deltoidok duálisa is deltoid, kapjuk:

2.7.5. Következmény. *A szoros gammoidok éppen a deltoidok összehúzottjai.*

2.7.6. Következmény. *A gammoidok pontosan a deltoidok minorjai és pontosan a transzverzális matroidok összehúzottjai.*

2.7.7. Következmény. *Gammoidok duálisa gammoid.*

Bizonyítás. Egy gammoid duálisa egy deltoid minorjának duálisa, azaz egy duális deltoid minorja, és így egy deltoid minorja, tehát gammoid. □

2.8. Matroidok összege és metszete

2.8.1. Matroidok összege

A most ismertetésre kerülő összegmatroid fogalma jóval izgalmasabb matroid konstrukció, mint a már tárgyalt direkt összeg. A közös S alaphalmazon legyenek adva az $M_1, \ldots, M_k$ matroidok. Az S azon részhalmazait, amelyek előállnak az M_i matroidokból vett egy-egy független halmaz egyesítéseként **partícionálható** halmazoknak hívjuk (az M_i matroidokra nézve).

2.8.1. Tétel (Edmonds és Fulkerson). *Legyenek $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matroidok a közös S alaphalmazon. A partícionálható halmazok $\mathcal{F}_\Sigma$ rendszere kielégíti a függetlenségi axiómákat. Az így nyert* **összegmatroid** *rangfüggvényét a következő összegformula adja meg.*

$$r_\Sigma(Z) = \min_{X \subseteq Z} \{|Z - X| + \sum_i r_i(X)\}. \tag{2.22}$$

Bizonyítás. A partícionálható halmazok nyilván kielégítik az első két függetlenségi axiómát. A 3. függetlenségi axióma azt követeli meg, hogy egy tetszőleges Z halmazban az ott már tovább nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz. Egy algoritmus segítségével azt fogjuk belátni, hogy ez a közös elemszám épp a 2.22 formulával megadott érték. Ezt elegendő csupán a $Z = S$ alaphalmazra igazolni, mert S részhalmazaira ugyanúgy megy a bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az $I \subseteq S$ halmaz partícionálható, és legyen X tetszőleges részhalmaza S-nek. Ekkor $|I| = |I - X| + |I \cap X| \leq |S - X| + \sum_i r_i(X)$, amiből következik, hogy egy partícionálható halmaz maximális elemszáma legfeljebb $\min_{X \subseteq S}\{|S - X| + \sum_i r_i(X)\}$. Az egyenlőség igazolásához leírunk egy algoritmust, amely egyrészt megad $F_1, \ldots, F_k$ diszjunkt halmazokat úgy, hogy az F_i független M_i-ben, másrészt megad egy X halmazt úgy, hogy $S = X \cup (\cup_i F_i)$, és $F_i \cap X$ az M_i matroidban feszíti X-et. E feltételekre optimalitási kritériumként fogunk hivatkozni.

Az algoritmus tetszőleges diszjunkt $F_i \in \mathcal{F}_i$ halmazokból indítható (ez lényeges a 3. függetlenségi axióma igazolásához), ahol $\mathcal{F}_i$ az M_i független halmazainak családja minden $1 \leq i \leq k$-ra. Kezdetben ezek mindegyike lehet például az üres halmaz. Legyen a kimaradó pontok halmaza R, és készítsünk el egy segédgráfot a következőképpen. Mindegyik matroidhoz vegyünk fel egy új t_i pontot és legyen az új pontok halmaza T. Egy $x \in S - F_i$ pontból vezessünk élt t_i-be, ha M_i-ben $F_i + x$ független, azaz ha x az F_i-hez vehető. Az $x \in S - F_i$ pontból vezessünk élt az $y \in F_i$ pontba, ha $F_i + x$ függő M_i-ben és y benne van az $F_i + x$ egyetlen körében.

Egy útkereső algoritmussal határozzuk meg az R halmazból irányított úton elérhető pontok X halmazát. Két eset lehetséges.

1. eset *Nincs út R-ből T-be, azaz X diszjunkt T-től.* Miután X-ből nem lép ki semmilyen él, mindegyik i-re érvényes, hogy bármely $x \in X - F_i$ pontra $F_i + x$ függő halmaz M_i-ben, és ráadásul az $F_i + x$-ben lévő egyetlen M_i-beli kör teljesen X-ben fekszik. Ez pont azt jelenti, hogy az $F_i \cap X$ halmaz feszíti az M_i matroidban X-et. Tehát a meglévő F_i független halmazok a megtalált X halmazzal teljesítik az optimalitási kritériumokat, és ilyenkor az algoritmus véget ér.

2. eset *Létezik út R-ből T-be.* Válasszunk ki egy P legrövidebb utat (amelyről csak annyit fogunk használni, hogy nincsen hozzá előreugró él.) Legyen P utolsó éle st_j. Bővítsük ki F_j-t az s elemmel, azaz legyen $F_j := F_j + s$. Mindegyik F_i halmazra tekintsük az útnak az F_i-be lépő xy éleit, és ezek mindegyikének y fejét hagyjuk ki F_i-ből és x tövét vegyük be F_i-be.

2.8.2. Lemma. *Legyen M matroidnak I egy független részhalmaza. Legyenek $y_1, \dots, y_\ell \in S - I$ és $x_1, \dots, x_\ell \in I$ olyan elemek, amelyekre $x_i \in C(I, y_i)$ $(i = 1, \dots, \ell)$ és $x_i \notin C(I, y_j)$ $(1 \le i < j \le \ell)$. Ekkor $I - \{x_1, \dots, x_\ell\} \cup \{y_1, \dots y_\ell\}$ független.*

Bizonyítás. ℓ szerinti indukció. Ha $\ell = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert minden elemet be lehet cserélni az alapkörének egy elemére. Tegyük fel, hogy $\ell > 1$ és $\ell - 1$-re igaz az állítás. Legyen $I' := I - x_1 + y_1$. Ekkor I' független. A feltétel szerint $C(I', y_i)$ $(i \ge 2)$ tartalmazza a $C(I, y_i)$ kört, vagyis $C(I', x_i) = C(I, x_i)$. Ezért I'-re, $\{y_2, \dots, y_\ell\}$-re, valamint $\{x_2, \dots, x_\ell\}$-re teljesülnek a lemma feltételei, és így indukcióval a lemma következik. □

Miután a P út legrövidebb volt, alkalmazhatjuk a 2.8.2 lemmát, amiből következik, hogy a keletkező F_i' halmaz is független lesz M_i-ben. Így tehát olyan diszjunkt F_i' független halmazokat kaptunk, amelyek uniója egy elemmel (éspedig a P út kezdőpontjával) bővebb, mint a kiindulási F_i halmazok uniója. Következik, hogy az eljárást ismételve legfeljebb $|S|$ útkeresés után az 1. eset fog előfordulni.

Végül a 3. függetlenségi axióma következik abból, hogy az algoritmus egy javító lépése során a szóbanforgó F_i halmazok ugyan nagy mértékben átszabásra kerülnek, de az uniójuk csupán annyiban változik, hogy egyszerűen egyetlen elemmel bővül (nevezetesen a javító út első elemével). □

2.8.3. Tétel. *Az S halmazon adott k matroid. S akkor és csak akkor tartalmaz k diszjunkt halmazt úgy, hogy az i-edik halmaz bázis az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i [r_i(S) - r_i(Y)] \le |S - Y|, \text{ vagy ekvivalensen } \sum t_i(X) \le |X| \qquad (2.23)$$

teljesül minden $Y \subseteq S$ halmazra, illetve minden $X \subseteq S$ halmazra.

Az $(S, \mathcal{F}_\Sigma)$ matroidot az $M_1, M_2, \dots, M_k$ matroidok **összeg**ének (néha **unió**jának) nevezik. Amennyiben $M = M_1 = M_2 = \dots = M_k$, úgy az $(S, \mathcal{F}_\Sigma)$ matroidot az M matroid **k-szoros**ának mondjuk.

2.8.4. Tétel. *Az S halmazon adott egy matroid. S akkor és csak akkor bomlik fel k független halmazra, ha*

$$kr(X) \geq |X|, \tag{2.24}$$

teljesül minden felbonthatatlan, zárt $X \subseteq S$ halmazra.

Bizonyítás. A feltétel nyilván minden $X \subseteq S$-re szükséges. Az elegendőséghez figyeljük meg, hogy ha egy X zárt halmazra megszorítva a matroidot X direkt összegre bomlik, akkor a direkt összeadandók is zárt halmazok. Emiatt 2.24 teljesül minden zárt halmazra. De ekkor teljesül minden halmazra is, hiszen ha egy halmaz megsérti, akkor a lezártja is. Alkalmazhatjuk a 2.8.1 tételt. □

2.8.1. Következmény. *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k erdővel, ha $i(Z) \leq k(|Z| - 1)$ fennáll minden olyan $Z \subseteq V$ nemüres csúcshalmazra, amely 2-pontösszefüggő gráfot feszít.*

Bizonyítás. Egy gráf körmatroidjában élek egy részhalmaza pontosan akkor felbonthatatlan és zárt, ha valamely, a tételben megadott tulajdonságú Z halmaz feszíti. □

2.8.5. Tétel. *Az S halmazon adott egy matroid. S akkor és csak akkor tartalmaz k diszjunkt bázist, ha*

$$k(r(S) - r(Y)) \leq |S - Y|, \text{ vagy ekvivalensen } kt(X) \leq |X| \tag{2.25}$$

teljesül minden zárt $Y \subseteq S$ halmazra, illetve minden nyílt X halmazra.

2.8.2. A matroidmetszet-tétel

A matroidösszeggel analóg módon felvethető, hogy maximum milyen nagy lehet egy közös alaphalmazon adott k matroid közös függetlenjének az elemszáma. Sajnos már a $k = 3$ eset is NP-teljes problémákat foglal magában. Például az az NP-teljes feladat, hogy egy digráfban van-e Hamilton-út megfogalmazható úgy, hogy a körmatroidnak és két partíciós matroidnak van-e $n - 1$ elemű közös függetlenje. Még a $k = 2$ esetben sem érvényes, hogy két matroid közös függetlenjei egy matroid függetlenjeit alkotják, hiszen egy páros gráfban a párosítások két partíciós matroid közös függetlenjei, de nem alkotnak matroidot. De a $k = 2$ esetre legalább meg tudjuk mondani a maximális közös független halmaz elemszámát.

2.8.6. Tétel (J. Edmonds)**.** *Az S alaphalmazon adott két matroid. A közös független halmazok maximális elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + r_2(S - X)\} \tag{2.26}$$

értékkel.

Edmonds tételét néha az alábbi ekvivalens alakban fogalmazzák meg.

2.8.7. Tétel. *Az S alaphalmazon adott két matroid. Akkor és csak akkor létezik k elemű közös független halmaz, ha*

$$r_1(X_1) + r_2(X_2) \geq k \tag{2.27}$$

fennáll az S minden $\{X_1, X_2\}$ partíciójára.

A (2.27) feltétel szükségessége kézenfekvő, hiszen tetszőleges F közös független halmazra és az alaphalmaz $\{X_1, X_2\}$ partíciójára fennáll, hogy $r_1(X_1) \geq \geq |X_1 \cap F|$ és $r_2(X_2) \geq |X_2 \cap F|$, amiket összeadva $r_1(X_1) + r_2(X_2) \geq |X_1 \cap \cap F| + |X_2 \cap F| = |F|$ adódik. Hasonlóképp látható a 2.8.6 tételben a max $\leq \leq$ min irány. Így a továbbiakban csak az elegendőség, illetve a nemtriviális max $\geq$ min irány igazolásával foglalkozunk.

2.8.6 alak. Jelölje $\mathcal{B}_i$ az M_i bázisainak halmazát, és tekintsük az M_2 matroid M_2^* duálisát. Az M_1 és M_2 maximális közös függetlenjének keresése olyan $B_i \in \mathcal{B}_i$ $(i = 1{,}2)$ bázisok keresésével ekvivalens, melyek metszete maximális elemszámú. Ez viszont olyan M_1-beli B_1 bázis és M_2^*-beli B_2^* bázis keresésével egyenértékű, melyek egyesítése maximális elemszámú.

A 2.8.1 tételben szereplő $r_\Sigma(S) = \min_{X \subseteq S}\{\sum_i r_i(X) + |S - X|\}$ formulát az r_1, r_2^*-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy ezen maximális unió elemszáma $\min_{X\subseteq S}\{r_1(X) + r_2^*(X) + |S - X|\} = \min_{X\subseteq S}\{r_1(X) + |X| - r_2(S) + r_2(S - - X) + |S - X|\} = \min_{X\subseteq S}\{r_1(X) + |S| - r_2(S) + r_2(S - X)\}$. Miután $|B_1 \cap B_2| = |B_1 \cup B_2^*| - |B_2^*|$, adódik, hogy $\max\{|B_1 \cap B_2| : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \in \mathcal{B}_2\} = \min_{X\subseteq S}\{(r_1(X) + |S| - r_2(S) + r_2(S - X)) - (|S| - r_2(S))\} = = \min_{X\subseteq S}\{r_1(X) + r_2(S - X)\}$. □

31. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy ekvivalens feltételt kapunk, ha (2.27)-et olyan $\{X_1, X_2\}$ partíciókra követeljük meg, ahol X_1 zárt az M_1 matroidban.*

32. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy ekvivalens feltételt kapunk, ha (2.27)-et olyan $\{X_1, X_2\}$ partíciókra követeljük meg, ahol X_1 nem tartalmazza az $M_1|X_1$ matroid elvágó elemét.*

33. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy ekvivalens feltételt kapunk, ha (2.27)-et olyan $\{X_1, X_2\}$ halmazpárokra követeljük meg, amelyek uniója S (de nem feltétlenül diszjunktak), és X_i zárt az M_i matroidban $(i = 1{,}2)$.*

Tegyük fel, hogy egy páros gráf mindkét pontosztályán adva van egy-egy matroid. A gráf egy élhalmazát akkor nevezzük **erősen független**nek, ha párosítás (azaz minden pontot legfeljebb egyszer fed), és mindkét pontosztályban a fedett pontok halmaza a megfelelő matroidban független.

2.8.8. Tétel (Brualdi)**.** *Legyen a $G = (S, T; E)$ páros gráf S, illetve T ponthalmazain adva az M_1, illetve az M_2 matroid. Az erősen független élek maximális száma egyenlő*

$$\min\{r_1(X) + r_2(Y) : X \subseteq S, Y \subseteq T, X \cup Y \text{ minden élt lefog}\}. \tag{2.28}$$

Bizonyítás. Az E élhalmazon definiáljuk az M_1' matroidot úgy, hogy egy halmaz független, ha S-ben minden pontot legfeljebb egyszer fed, és a fedett pontok halmaza független M_1-ben. Ez nyilván matroid lesz, éspedig az a matroid, amely M_1-ből az elemek párhuzamos többszörözésével áll elő (minden $v \in S$ elemet $d_G(v)$-szer többszörözünk). Definiáljuk analóg módon az M_2' matroidot. Rögtön adódik, hogy egy élhalmaz akkor és csak akkor erősen független, ha az M_1' és az M_2' matroidok közös függetlenje. Az Edmonds-féle matroidmetszet-tételből adódik, hogy a közös függetlenek maximális elemszáma egyenlő az

$$r_1'(E_1) + r_2'(E_2) \tag{2.29}$$

értékének minimumával, ahol $E_1 \cup E_2 = E$ és E_1 zárt M_1'-ben, E_2 pedig zárt M_2'-ben. Az M_1' matroid minden zárt halmaza olyan alakú, hogy egy $X_1 \subseteq S$ halmazra az X_1 pontjaival szomszédos élekből áll, és ekkor $r_1'(E_1) = r_1(X_1)$. Hasonlóképp, M_2' egy E_2 zárt halmaza olyan alakú, hogy egy $X_2 \subseteq T$ halmazra az X_2 pontjaival szomszédos élekből áll. Ebből adódóan (2.28) megegyezik (2.29) minimumával. □

Amennyiben $|S| = |T|$, és a gráf egyetlen teljes párosításból áll, úgy visszajutunk Edmonds tételéhez. Tetszőleges páros gráf esetén, ha a két matroid egyike a szabad matroid, akkor a következő tételhez jutunk. Ha M egy matroid S-en, akkor egy párosítást M-függetlennek hívunk, ha S-ben az M matroid egy független ponthalmazát fedi.

2.8.9. Tétel. *Legyen adva a $G = (S, T; E)$ páros gráf S pontosztályán egy M matroid. A maximális M-független párosítás elemszáma egyenlő a*

$$\min\{r(X_1) + |X_2| : X_1 \subseteq S, X_2 \subseteq T,\ X_1 \cup X_2 \text{ lefogja } E\text{-t}\} \tag{2.30}$$

értékkel.

Speciális esetben kapjuk Rado tételét.

2.8.10. Tétel (Rado)**.** *Legyen $M = (S, r)$ matroid. A $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik T-t fedő M-független párosítás, ha minden $X \subseteq T$ esetén teljesül a Rado-feltétel, azaz*

$$r(\Gamma(X)) \geq |X|. \tag{2.31}$$

A Hall-tételhez hasonlóan a Rado-tételt is meg lehet fogalmazni egy másik, ekvivalens alakban.

2.8.11. Tétel. *Legyen adott az $M = (S, r)$ matroid, valamint egy k halmazból álló $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ halmazrendszer. Akkor és csak akkor lehet a T_i halmazok egy-egy elemét úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott elemek különbözőek legyenek és a matroidban (k elemű) független halmazt alkossanak, ha bárhogyan is véve $\mathcal{T}$-ből j halmazt $(1 \leq j \leq k)$, az egyesítésük rangja legalább j.*

Bizonyítás. Készítsünk el egy páros gráfot, melynek két pontosztálya S és egy k elemű T halmaz, ahol T elemei az $\mathcal{T}$ tagjainak felelnek meg. Egy $s \in S$ és egy $t_i \in T$ pont akkor van összekötve, ha $s \in T_i$. Könnyen látszik, hogy a 2.8.10 tételt ezen páros gráfra alkalmazva éppen a 2.8.11 tételt kapjuk. □

Megjegyzés. Igen speciálisak az olyan $G' = (S', T; E')$ páros gráfok, amelyeknél minden S'-beli pont első fokú. Mégis, már az ezekre vonatkozó Rado-tételből következik az általános alak. Helyettesítsünk ugyanis minden $v \in S$ pontot $d(v)$ darab, a matroidban párhuzamos elemmel. A v-ből kiinduló $d(v)$ élt helyettesítsük a $d(v)$ új pont és a v eredeti $d(v)$ darab szomszédja között vezető $d(v)$ elemű párosítással. Az így kapott $G' = (S', T; E')$ gráfra és M' matroidra a Rado-tétel épp ekvivalens az eredeti G gráfra és M matroidra vonatkozó Rado-tétellel. Ez a konstrukció azt jelzi valamiképp, hogy a Rado-tételben a páros gráf struktúrájának nincs külön szerepe, mert az belekódolható a matroidba. Teljesen analóg módon látható, hogy a 2.8.11 tételbeli alak ekvivalens azzal a speciális esetével, amikor a szóbanforgó T_i halmazok páronként diszjunktak.

3. fejezet

Poliéderes kombinatorika

3.1. Egész poliéderek, teljesen duális egészértékűség

Az alábbiakban építünk az operációkutatás olyan alapfogalmaira és alaperedményeire, mint poliéder, politóp, kúp, csúcs, (erős) bázis-megoldás, Farkas-lemma, dualitástétel, optimalitási feltételek.

3.1.1. Oldalak

Foglaljuk össze a poliéder oldalainak néhány tulajdonságát. Egy $R=\{x:Qx\leq \leq b\}$ (nemüres) poliéder F oldalán az R-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{3.1}$$

alakú nemüres részhalmazát értettük, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely cx célfüggvényre, melyre a maximum létezik. Vagyis a poliéder oldala az optimum helyek halmaza valamely cx lineáris célfüggvényre nézve, másként szólva a poliédernek az a része, amely egy hipersíkkal érintkezik, amikor azt kívülről a poliéderhez toljuk.

3.1.1. Tétel. *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres F részhalmaza akkor és csak akkor oldala R-nek, ha létezik a Q bizonyos soraiból álló olyan Q' részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol b' a Q' sorainak megfelelő részvektora b-nek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy F oldal, melyet (3.1) definiál. Tekintsük a $\min\{yb : yQ = c, y \geq 0\}$ duális lineáris programnak egy y' optimális megoldását. Legyen Q' a Q azon ${}_iq$ soraiból álló részmátrix, amelyekre a megfelelő

$y'(i)$ komponens pozitív. Tetszőleges $x \in R$-re $cx = (y'Q)x = y'(Qx) \le y'b$. A dualitástételből következik, hogy egy $x' \in R$ vektor akkor és csak akkor primál optimum (azaz eleme F-nek), ha az y' minden pozitív komponensére a neki megfelelő primál feltétel egyenlőséggel teljesül (azaz $y'(i) > 0$-ból ${}_iqx = b(i)$ következik.) Így tehát $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$.

Fordítva, legyen Q' a Q bizonyos sorai által alkotott mátrix, és b' a b megfelelő része, amelyekre $\{x \in R : Q'x = b'\}$ nemüres. Legyen e' a csupa egyes vektor, amelynek annyi komponense van, mint ahány sora Q'-nek. Jelölje c a Q' sorainak összegét (azaz $c = e'Q'$), míg δ a b' komponenseinek összegét ($\delta := e'b'$). Most $cx = (e'Q')x = e'(Q'x) \le e'b' = \delta$. Ebből adódóan valamely $x \in R$ vektorra $Q'x = b'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $cx = \delta$, amiből a tétel következik. □

Az R poliéder maga is oldal (pl. $c = 0$ célfüggvényre az R minden pontja maximalizálja cx-et, vagy másként, amikor semmilyen egyenlőtlenséget nem kötünk meg egyenlőségként.) A poliédernek egy önmagától különböző oldalát **valódi oldal**nak nevezzük. Egy tartalmazásra nézve maximális valódi oldalt **lap**nak hívunk. Fontos szerepet játszanak a (tartalmazásra nézve) **minimális oldal**ak, vagyis az olyan oldalak, melyek valódi részhalmazként már nem tartalmaznak más oldalt. Az R poliéder egy $R = \{x : Px = b_0, Qx \le b_1\}$ leírásában szereplő $qx \le \beta$ egyenlőtlenségről azt mondjuk, hogy **lényeges**, ha kihagyása megváltoztatja (bővíti) a poliédert. Az egyenlőtlenség **igazi**, ha egyenlőséggel történő cseréje megváltoztatja (szűkíti) a poliédert.

3.1.2. Tétel. *Egy R nemüres poliédernek akkor és csak akkor nincs valódi oldala, ha R affin altér.*

Bizonyítás. Ha $R = \{x : Qx = b\}$ affin altér, úgy a 3.1.1 tétel szerint nincs valódi oldala.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az R poliédernek nincs valódi oldala. Tekintsük a poliédernek egy olyan $R = \{x : Px = b_0, Qx \le b_1\}$ megadását, amelyben minden egyenlőtlenség igazi és lényeges. (Ilyen persze van, hiszen R egy tetszőleges leírásából kiindulva egymás után kihagyhatjuk az aktuálisan lényegtelen egyenlőtlenségeket, majd az implicit egyenlőségeket explicitté alakíthatjuk). Azt látjuk be, hogy Q üres, és így R valóban affin altér. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $qx \le \beta$ igazi és lényeges egyenlőtlenség. Jelölje Q' a q sor kihagyásával Q-ból keletkező részmátrixot és b'_1 a megfelelő jobb oldalt. Ekkor egyrészt van olyan $x' \in R$ pontja, amelyre $Px' = b_0$, $Q'x' \le b'_1$ és $qx' > \beta$, másrészt R-nek van olyan x'' pontja, melyre $qx'' < \beta$. Így az $x'x''$ szakasznak van olyan z pontja, amelyre $qz = \beta$ és $z \in R$, vagyis $\{x : Px = b_0, Q'x \le b'_1, qx = \beta\}$ valódi nemüres oldala R-nek, ellentmondásban a feltevéssel, hogy ilyen oldal nem létezik. □

3.1.1. Következmény. *Egy poliéder minimális oldala affin altér.*

Bizonyítás. A 3.1.1 tétel miatt az R poliéder egy oldalának oldala R-nek is oldala, így a minimális oldal olyan poliéder, amelynek már nincs valódi oldala. Alkalmazzuk a 3.1.2 tételt. □

3.1.2. Egész megoldások

Egy poliédert akkor nevezünk **egész**nek, ha minden oldala tartalmaz egész pontot. Ez avval ekvivalens, hogy minden minimális oldala tartalmaz egész pontot, ami abban a speciális esetben, amikor a poliéder csúcsos (vagy ekvivalensen, egyenesmentes) azzal egyenértékű, hogy minden csúcs egész. Először azt vizsgáljuk meg, hogy egy affin altér mikor tartalmaz egész pontot. Az alábbi eredmény érdekes analógiát mutat a Farkas-lemmával, amely arra adott jellemzést, hogy egy affin altérnek mikor nincs nemnegatív eleme.

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden elemük (komponensük) egész szám.

3.1.3. Tétel (Hermite)**.** *Legyen A egész mátrix és b egész vektor. Az $Ax = b$ rendszernek akkor és csak akkor van egész megoldása, ha minden y vektorra, amelyre yA egész, yb is egész. Ha van olyan y, amelyre yA egész, de yb nem, akkor van ilyen nemnegatív y is.*

Bizonyítás. Ha létezik egész x megoldás, és valamely y-ra yA egész vektor, akkor $(yA)x = y(Ax) = yb$, azaz yb is egész.

Az ellenkező irányú következtetés bizonyításához feltehetjük, hogy az $Ax = b$-nek létezik egyáltalán megoldása, mert ha nem létezne, akkor van olyan y, hogy $yA = 0$ és $yb \neq 0$. De akkor y úgy is választható, hogy yb nem egész.

Az is feltehető, hogy az A sorai lineárisan függetlenek, mert ha valamelyik sor lineárisan függ a többiektől, akkor ezt kihagyhatjuk (b megfelelő komponensével együtt), és ha az új rendszernek van egész megoldása, akkor az az eredetinek is megoldása, ha pedig nincs, akkor indukcióval van olyan y', amelyre $y'A'$ egész, de $y'b'$ nem. Ha most a kihagyott komponenst 0-nak vesszük, akkor egy olyan y-t kapunk y'-ből, amelyre yA egész, de yb nem az.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az eredetivel ekvivalens feladatot kapunk (mind az x, mind az y létezése szempontjából), ha az A egy oszlopát egy másik oszlopához adjuk vagy abból levonjuk. Ezen művelet ismételt alkalmazásával (és esetleges oszlop cserékkel) az A mátrix $[B,0]$ alakra hozható, ahol B egész háromszög mátrix (azaz a főátló elemei felett minden elem 0) és a főátlóban nem nulla elemek állnak.

Mivel $B^{-1}(B,0) = (I,0)$ egész mátrix, a feltevésből következik, hogy $B^{-1}b$ is egész vektor. Így az $x^* := \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ egész vektorra $(B,0)x^* = b$, azaz $Ax^* = b$.

A tétel utolsó részéhez tegyük fel, hogy valamely y'-re $y'A$ egész, de $y'b$ nem. Legyen y'' olyan egész vektor, amelyre $y^* := y' + y''$ nemnegatív. Mivel $y''A$ és $y''b$ is egész, így y^*A egész, y^*b nem az. □

Alapvető fontosságú az egész poliédereknek a következő jellemzése.

3.1.4. Tétel (Edmonds és Giles). *Az $R := \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder* (ahol Q és b egészek) *akkor és csak akkor egész, ha minden olyan c egész vektorra, amelyre $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, a* $\max\{cx : x \in R\}$ *szám egész.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, így csak az elegendőség bizonyításával foglalkozunk. Tekintsük az R-nek cx-et maximalizáló oldalát, és legyen R' ennek egy minimális oldala. A 3.1.1 következmény miatt R' affin altér, azaz megadható $\{x : Q'x = b'\}$ alakban, ahol Q' a Q bizonyos soraiból álló részmátrix.

A tételhez azt kell bebizonyítani, hogy R' tartalmaz egész pontot. Indirekt, ha nem tartalmaz, akkor a 3.1.3 tétel alapján létezik olyan $y' \geq 0$ vektor, amelyre $c' := y'Q'$ egész, de $y'b'$ nem. Ekkor tetszőleges $x \in R'$-re $c'x = y'(Q'x) = y'b'$, és tetszőleges $x \in R$-re $c'x = y'(Q'x) \leq y'b'$, amiből következik, hogy a $\max\{c'x : x \in R\}$ érték az R' elemein felvétetik, és így a maximum értéke $y'b'$. De ez ellentmond a tétel feltevésének, hiszen $y'b'$ nem egész. □

3.1.3. Teljesen duálisan egészértékű rendszerek

Gyakran a 3.1.4 tételt olyan módon fogjuk használni, hogy valamely $\max\{cx : Qx \leq b\}$ lineáris program duálisáról minden egész c-re kimutatjuk, hogy van egész optimális megoldása, feltéve persze, hogy van egyáltalán optimális megoldása. Ekkor a $Qx \leq b$ rendszert **teljesen duálisan egészértékű**nek (total dual integral: TDI) hívják. (Ez tehát az egyenlőtlenség-rendszer tulajdonsága, és nem a rendszer által definiált poliéderé. Hogy mennyire nem, azt jelzi Giles és Pulleyblank tétele: *minden egész poliéder leírható TDI rendszerrel.*) Ilyenkor tehát a 3.1.4 tétel miatt a primál poliéder egész, és így a primál problémában minden c célfüggvényre (nem csak egészre) az optimum, ha véges, úgy egész vektoron is felvétetik. A TDI-ség definíciójából, és a 3.1.4 tételből közvetlenül adódik az alábbi eredmény.

3.1.5. Tétel (Edmonds és Giles). *Egy TDI rendszerrel megadott poliéder egész, ha a feltételi mátrix és a korlátozó vektor egész.*

Igen hasznos az alábbi eredmény, amely azt mondja ki, hogy ha egy TDI rendszer egyik egyenlőtlenségét egyenlőséggel helyettesítjük, akkor továbbra is TDI rendszert kapunk. Ebből persze következik, hogy akárhány egyenlőtlenséget is egyenlőségre cserélhetünk a TDI-ség elrontása nélkül.

3.1.6. Tétel (W. Cook)**.** *Amennyiben a* $\{Qx \leq b, qx \leq \beta\}$ *rendszer TDI* (ahol Q, q, b, β egészek)*, úgy a* $\{Qx \leq b, qx = \beta\}$ *rendszer is TDI.*

Bizonyítás. Legyen

$$P := \{x : Qx \leq b,\ qx \leq \beta\} \ \text{ és } \ D = \{(y, \pi) :\ yQ + \pi q = c,\ \pi \geq 0,\ y \geq 0\}$$

az eredeti primál, illetve duál poliéder. Legyen c olyan egész vektor, amelyre a primál, illetve duál

$$P' = \{x : Qx \leq b,\ qx = \beta\} \ \text{ és } \ D' = \{(y, \pi) : yQ + \pi q = c,\ y \geq 0\}$$

poliéderek egyike sem üres. Azt kell igazolnunk, hogy az

$$m' := \min\{yb + \pi\beta : (y, \pi) \in D'\} \tag{3.2}$$

duális lineáris programnak van egészértékű (y, π) optimuma.

Ezt először olyan c-kre igazoljuk, amelyekre 3.2-nek van egy (y', π') nemnegatív optimális megoldása. Ekkor $(y', \pi') \in D \subseteq D'$ miatt $m' \geq \min\{yb + + \pi\beta : (y, \pi) \in D\} \geq m'$. Vagyis ilyenkor D egy optimális eleme optimális D'-ben is, ugyanakkor a tétel feltevése szerint D-nek van egészértékű (y, β) optimuma.

Az általános eset könnyen visszavezethető a fentire. Legyen (y', π') a D' egy optimális megoldása. Legyen ℓ olyan egész szám, amelyre $\lambda' := \ell + \pi' \geq 0$. Legyen $c_\ell := c + \ell q$, és tekintsük a

$$D'_\ell := \{(y, \lambda) :\ yQ + \lambda q = c_\ell,\ y \geq 0\}$$

duális poliédert. A $\lambda = \pi + \ell$ megfeleltetés egy-egy értelmű kapcsolatot definiál a D' és a D'_ℓ poliéder elemei között (éspedig a D'_ℓ nem más, mint a D' ℓ-lel történt eltoltja a β tengely mentén), és így $yb + \lambda\beta = yb + (\pi + \ell)\beta$. Emiatt (y', λ') optimális eleme D'_ℓ-nek, amely nemnegatív, és így az első rész szerint létezik (y^*, λ^*) egész optimuma is D'_ℓ-nek. De ekkor $\pi^* := \lambda^* - \ell$-re (y^*, π^*) egész optimuma D'-nek. $\square$

3.2. TU-mátrixok: példák, alaptulajdonságok

Gyakran előfordul, hogy egy lineáris egyenlőtlenség-rendszernek egész megoldására vagy egy lineáris programnak egész optimális megoldására van szükségünk. Bebizonyították, hogy mindkét feladat NP-teljes, így általánosságban olyan típusú kerek választ nem várhatunk, mint amilyet a Farkas-lemma vagy a dualitástétel nyújtott a valós (vagy racionális) esetre. Speciális feltételi mátrixok esetén azonban szavatolható egészértékű megoldás vagy optimum létezése. Ennek messzemenő következményei lesznek gráfokon megfogalmazott optimalizálási feladatok megértésében.

Valamely Q mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így ha a Q TU-mátrixot kiegészítjük egy I egységmátrixszal, akkor a keletkező (Q, I) mátrix is TU-mátrix. Ha Q TU-mátrix, úgy $(Q, -Q)$ is az. (De ha mondjuk egy csupa 1 oszloppal egészítjük ki Q-t, akkor nem feltétlenül kapunk TU-mátrixot: legyen Q az $\{a, b, c, d\}$ pontokon az $\{ab, ac, ad\}$ élekből álló gráf 4×3-as incidencia-mátrixa.)

Ha egy TU-mátrix valamely oszlopában van egy $+1$-es és egy -1-es elem, úgy az egyik sorát a másikéhoz adva a keletkező mátrix ugyan $\{0, \pm 1\}$-es lesz, de nem biztosan teljesen unimoduláris. Ha viszont ilyen átalakításokkal egy oszlopot egységvektorrá alakítunk, úgy már szükségképpen TU-mátrixot kapunk, amint ezt a következő tétel állítja.

3.2.1. Tétel. *Legyen Q $m \times n$-es TU-mátrix és q_1 a Q egy oszlopa, melyre $q_1(1) \neq 0$. Legyen $e_i \in \mathbf{R}^m$ az i-edik egységvektor* $(i = 1, \ldots, m)$. *Jelölje Q_1 azt a mátrixot, amelyet akkor kapunk, ha Q-t a $q_1, e_2, \ldots, e_m$ bázisban írjuk fel. Ekkor Q_1 teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy q_1 a Q első oszlopa. Sorok esetleges negálásával feltehető, hogy $q_1(1) = 1$ és $j \geq 2$-re $q_1(j)$ 0 vagy -1. Q_1 tehát úgy áll elő Q-ból, hogy a Q első sorát hozzáadjuk minden olyan sorához, amelynek első eleme -1.

Ha a tétel nem igaz, akkor Q_1-nek van egy olyan B négyzetes részmátrixa, amelyre $|\det B| \geq 2$. Az olyan aldeterminánsok értéke a báziscserével nem változik, melyek az első sorból tartalmaznak elemet, így B nem ilyen. Mivel Q_1 első oszlopa az első elemétől eltekintve nulla, a B az első oszlopból sem tartalmaz elemet. Feltehetjük, hogy az első sortól és az első oszloptól eltekintve B tartalmazza a Q_1 összes sorát és oszlopát, mert ha valamelyiket nem tartalmazná, azt egyszerűen kihagyhatjuk Q-ból és Q_1-ből. Most viszont $\det B = \det Q_1 = \det Q \in \{0, \pm 1\}$, ellentmondás. □

3.2.1. Következmény. *Ha Q egy m rangú $m \times n$-es TU-mátrix, és B a Q egy $m \times m$-es nemszinguláris részmátrixa, akkor $B^{-1}Q$ teljesen unimoduláris. Speciálisan, egy* (négyzetes) *nemszinguláris TU-mátrix inverze is teljesen unimoduláris.*

Példaképp, legyen Q egy $D = (V, A)$ irányított gráf incidencia-mátrixa, azaz Q sorai a V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és a $q_{v,e}$ elem akkor $+1$, illetve -1, ha az e él belép, illetve kilép v-ből (egyébként 0). Egy $G = (V, E)$ gráf (pont-él) incidencia-mátrixában a soroknak a csúcsok, míg az oszlopoknak az élek felelnek meg. A mátrix egy v csúcshoz és e élhez tartozó eleme akkor 1, ha e egyik végpontja v, különben 0. Tehát az incidencia-mátrix minden oszlopában két darab 1-es elem van.

3.2.2. Tétel. (a) *Digráf incidencia-mátrixa teljesen unimoduláris.* (b) *Páros gráf incidencia-mátrixa teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. (a) Vegyünk egy Q' négyzetes részmátrixot, amelyről be akarjuk látni, hogy determinánsa 0,1, vagy -1. Amennyiben ennek van olyan oszlopa, amelyben legfeljebb csak egy nem nulla elem van, akkor ezen oszlop szerint kifejtve a determinánst indukcióval kész vagyunk. Így feltehetjük, hogy minden oszlopban pontosan két nem nulla van (merthogy több nem lehet). Ezek közül az egyik $+1$, a másik -1, vagyis a sorokat összeadva 0-t kapunk, azaz Q' sorai lineárisan függőek, így a determináns 0.

(b) Szorozzuk meg -1-gyel a mátrix azon sorait, amelyek a páros gráf egyik osztályában lévő pontoknak felelnek meg. Ekkor egy irányított gráf incidencia-mátrixát kapjuk, amiről az előbb láttuk, hogy TU. □

92. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha egy páros gráf incidencia-mátrixát kibővítjük egy csupa egyesekből álló sorral, akkor TU-mátrixot kapunk, míg ha az oszlopaihoz veszünk egy csupa egyes oszlopot, akkor az így keletkező mátrix nem feltételenül TU.*

93. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy D digráf incidencia-mátrixának oszlopai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha D irányított erdő.*

Hipergráfon egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol V adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig V részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**. Egy H hipergráfot akkor nevezünk **teljesen unimoduláris**nak, ha H incidencia-mátrixa teljesen unimoduláris. Ez egy olyan (0,1) értékű mátrix, amelyben a soroknak a V elemei felelnek meg, az oszlopoknak az $\mathcal{F}$ elemei, és a mátrix egy eleme pontosan akkor egy, ha az oszlopának megfelelő hiperél tartalmazza a mátrixelem sorának megfelelő V-beli elemet. A gráfok speciális hipergráfok, ahol minden hiperél kételemű. Ezek közül már láttuk, hogy a páros gráfok teljesen unimodulárisak. Más gráfok viszont sohasem azok, hiszen egy páratlan kör incidencia-mátrixának determinánsa ± 2.

Mint láttuk, minden D digráf incidencia-mátrixa TU. Ezt általánosítja a **hálózati mátrix**. Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő, és legyen F egy feszítő fa a D irányítatlan változatában. A H_F mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem faélre a fában egy egyértelmű (nem feltétlenül irányított) út vezet v-ből u-ba. Ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval, és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

3.2.3. Lemma. *Hálózati mátrix részmátrixa is az. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát -1-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk.*

Bizonyítás. Egy oszlop eltörlése annak felel meg, hogy a megfelelő nem faélt a digráfból kihagyjuk. Egy sor törlése annak felel meg, hogy a megfelelő faélt a digráfban összehúzzuk. Egy sor vagy oszlop -1-gyel való szorzása annak felel meg, hogy a megfelelő élt (akár faél, akár nem faél) átirányítjuk. $\square$

3.2.4. Tétel. *A H_F hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. A lemma alapján elég belátni, hogy egy négyzetes hálózati mátrix determinánsa 0,1 vagy -1. Tekintsük a fának egy v levelét. Ha az F fa v-vel szomszédos éléhez tartozó sorában lévő nem nulla elemek α száma legfeljebb 1, akkor a determináns kifejtési szabály alapján indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$, vagyis v szomszédos legalább két nem faéllel. Átirányítás miatt feltehető, hogy ezek közül pontosan egy van v felé irányítva. Legyen ez sv és legyen vt egy másik nem faél. Ha az sv-nek megfelelő oszlopot hozzáadjuk a vt-nek megfelelő oszlophoz, akkor egyrészt persze a determináns értéke nem változik, másrészt ismét hálózati mátrixot kapunk, éspedig azét a gráfét, amelyben a vt él helyett az st él szerepel.

Ilyen átalakításokkal egy olyan gráfot kaphatunk, amelyben az F feszítő fa változatlan, egyetlen nem faél (nevezetesen sv) szomszédos v-vel, vagyis a hozzá tartozó hálózati mátrix v-nek megfelelő sorában egy nem-nulla elem van. Ilyen hálózati mátrixról pedig már láttuk, hogy a determinánsa 0,1, vagy -1, ugyanakkor a fenti operációk nem változtatták a determináns abszolút értékét. $\square$

3.2.2. Következmény. *Egy olyan hipergráf teljesen unimoduláris, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak.*

34. Gyakorlat. *Legyen M a $G = (V, E)$ gráf F feszítő fája által definiált négyzetes hálózati mátrix. Fogalmazzuk meg a gráf nyelvén az M invertálhatóságának feltételét.*

94. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi mátrix teljesen unimoduláris, de sem ő, sem a transzponáltja nem hálózati mátrix:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.1. Lamináris hipergráfok

Egy hipergráfot **laminárisnak** mondunk, ha bármely két hiperéle vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat. Például ha $F = (V, E)$ egy s gyökerű fenyő és minden $e = uv$ éléhez tekintjük a v-ből a fenyőben elérhető pontok halmazát, akkor ezen halmazok lamináris rendszert alkotnak. Valójában ezen állítás megfordítását sem nehéz bebizonyítani, amely szerint minden lamináris halmazrendszer lényegében ilyen alakban áll elő.

3.2.5. Tétel. *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ lamináris rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ fenyő, valamint egy $\varphi : V \to U$ leképezés úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fenyő élei egy-egy értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig oly módon, hogy tetszőleges $e \in F$ élre $\varphi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz, ahol V_e jelöli a H fenyőből az e kihagyásával keletkező két komponens közül azt, amelybe e belép.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ tagjai különbözőek, ha ugyanis egy ilyen lamináris rendszernek már létezik a kívánt fenyőábrázolása, és az $\mathcal{F}$ egy X tagjának egy újabb példányát bevesszük, akkor a keletkező lamináris rendszernek úgy kaphatjuk meg a kívánt reprezentálását, hogy az X-nek megfeleltetett fenyő élt egy új ponttal felosztjuk.

Azt is feltehetjük, hogy V minden v eleme benne van $\mathcal{F}$ valamelyik tagjában. Ezek közül a legszűkebbet jelölje $\sigma(v)$. Minden $X \in \mathcal{F}$ halmaznak feleltessünk meg egy új $f(X)$ pontot, és legyen s még egy extra pont. A keletkező pontok U halmaza lesz a fenyő ponthalmaza (U-nak tehát eggyel több eleme van, mint $\mathcal{F}$-nek).

Készítsük el az F fenyőt az U halmazon a következőképpen. Az $\mathcal{F}$ minden maximális X tagjára vezessünk egy élt s-ből $f(X)$-be. Amennyiben X az $\mathcal{F}$-nek nem maximális tagja, úgy létezik egy egyértelmű legszűkebb $Y \in \mathcal{F}$ halmaz, amely tartalmazza X-et. Ebben az esetben vezessünk $f(Y)$-ból $f(X)$-be élt. Így egy H fenyőt kapunk, melynek gyökere a speciális s pont. Végül minden $v \in V$ pontra legyen $\varphi(v) := f(\sigma(v))$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így definiált H fenyő és φ leképezés kielégítik a tételbeli kívánságokat. $\square$

Legyen $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ két lamináris hipergráf az S alaphalmazon. Jelölje A_i $(i = 1,2)$ az $\mathcal{F}_i$ incidencia mátrixának transzponáltját. Ebben az oszlopok az S elemeinek felelnek meg, míg a sorok $\mathcal{F}_i$ elemeinek. Legyen $M := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$.

3.2.6. Tétel. *M teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás. Vegyük M-nek egy négyzetes részmátrixát. Az ebben lévő egyesek száma szerinti indukcióval ennek determinánsáról kimutatjuk, hogy 0 vagy ± 1. Mivel A_i bármely részmátrixa is egy lamináris rendszer incidenciamátrixa, így feltehetjük, hogy a vizsgált részmátrix maga M. Ha M-ben minden elem nulla, akkor persze a determináns is nulla. Ha M-nek van olyan sora vagy oszlopa, amelyben legfeljebb egy nem nulla elem van, akkor indukcióval (és kifejtési szabállyal) készen vagyunk.

Ha $\mathcal{F}_1$ is és $\mathcal{F}_2$ is partíció, akkor mind A_1, mind A_2 sorainak összege a csupa 1 vektor, tehát A sorai lineárisan függőek, így $\det(M) = 0$. Tegyük fel, hogy mondjuk $\mathcal{F}_1$ nem partíció. Ekkor van egy olyan minimális Z tagja, amely része $\mathcal{F}_1$ egy másik tagjának. Ha most $\mathcal{F}_1$-nek valamennyi Z-t tartalmazó tagjából kivonjuk Z-t, ami azzal ekvivalens (a laminaritás miatt), hogy a megfelelő sorokból kivonjuk Z sorát, akkor a determináns értéke nem változik, viszont a keletkező mátrixban kevesebb egyes szerepel. Miután a módosított halmazrendszer is lamináris, indukcióval készen vagyunk. $\square$

Kimutatjuk, hogy valójában a két lamináris rendszerhez definiált fenti M mátrix hálózati mátrix.

3.2.7. Tétel. *M hálózati mátrix* (és így teljesen unimoduláris).

Bizonyítás. Legyen $F_i = (V_i, E_i)$, illetve φ_i az $\mathcal{F}_i$ lamináris rendszert ábrázoló fenyő, illetve leképezés ($i = 1,2$), melyek létezését a 3.2.5 tételben igazoltuk, és legyen s_i az F_i fenyő gyökere. Tegyük fel, hogy a fenyők diszjunktak. Egyesítsük az s_1 és az s_2 gyökeret egyetlen s ponttá, és fordítsuk meg az F_2 fenyő éleinek irányítását. Ekkor egy F irányított fát kapunk, amelyben az S alaphalmaz egy $v \in S$ eleméhez rendelt $\varphi_2(v)$ és $\varphi_1(v)$ pontok között vezető $P(v)$ út irányított. A konstrukcióból könnyen látható, hogy a v elemet az $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ hipergráfnak pontosan azon hiperélei tartalmazzák, melyek a P út éleinek felelnek meg. Az 3.2.2 következményből a tétel következik. $\square$

35. Gyakorlat. *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{F}$ az S két partíciójának egyesítése, akkor az $\mathcal{F}$ incidencia-mátrixa éppen egy páros gráf incidencia-mátrixának transzponáltja.*

Legyen V alaphalmaznak $X_B \subseteq X_K$ két részhalmaza. Az $X = (X_K, X_B)$ párt **párhalmaz**nak nevezzük, melynek X_K a **külső** tagja, míg X_B a **belső**. A párhalmazokon értelmezzük a $\cap$ és $\cup$ műveleteket a természetes módon: X, Y párhalmazokra legyen $X \cap Y := (X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$, $X \cup Y := (X_K \cup \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Azt mondjuk, hogy X **része** Y-nak, jelölésben $X \subseteq Y$, ha $X_K \subseteq Y_K$ és $X_B \subseteq Y_B$. Ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, akkor X és Y **összehasonlítható**. Két párhalmaz **metsző**, ha nem összehasonlíthatóak és $X_B \cap Y_B \neq \emptyset$. Két párhalmaz **keresztező**, ha metszők, és külső tagjaik egyesítése nem V. Párhalmazok egy rendszere **lamináris**, ha nincs közöttük két metsző. A párhalmazok egy $\mathcal{F}$ részhalmazáról azt mondjuk, hogy **metsző** (**keresztező**), ha $\mathcal{F}$ bármely két metsző (keresztező) tagjával együtt azok metszete és uniója is $\mathcal{F}$-ben van.

Tegyük fel, hogy párhalmazok egy $\mathcal{F}$ rendszere lamináris. Legyen $D = = (V, A)$ irányított gráf. Azt mondjuk, hogy egy e irányított él **lefog** egy

X párhalmazt (más szóval, hogy e **belép** X-be), ha mindkét tagjába belép. Készítsük el az $A_{\mathcal{F}}$ (0,1)- mátrixot, melynek sorai az $\mathcal{F}$ elemeinek, míg oszlopai a D éleinek felelnek meg. Egy elem akkor 1, ha az oszlopnak megfelelő él lefogja a sornak megfelelő párhalmazt.

3.2.8. Tétel. *Egy párhalmazokból álló lamináris $\mathcal{F}$ rendszerhez* (speciálisan egy lamináris halmazrendszerhez) *tartozó $A_{\mathcal{F}}$ mátrix hálózati mátrix* (és így teljesen unimoduláris).

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$-beli párhalmazok belső (második) tagjai lamináris halmazrendszert alkotnak. Tekintsük az ezt reprezentáló F fenyőt, a D digráf egy tetszőleges e élét és az általa lefogott párhalmazokat. Ezek belső tagjainak megfelelő fenyőélek irányított utat alkotnak. Márpedig egy fenyő bizonyos részútjai által alkotott hipergráf incidencia-mátrixának transzponáltjáról láttuk már, hogy hálózati mátrix. □

3.2.2. Keresztezésmentes hipergráfok

Egy alaphalmaz két részhalmazát **keresztezésmentesnek** mondjuk, ha vagy diszjunktak, vagy az egyik tartalmazza a másikat, vagy az uniójuk az alaphalmaz. Egy $\mathcal{F}$ halmazcsaládot **keresztezésmentesnek** (cross-free) mondunk, ha nincs két keresztező tagja.

Például ha adott egy F irányított fa (nem feltétlenül fenyő), és minden e élhez tekintjük a V_e halmazt, amely a fának az e elhagyásával keletkező azon komponensét jelöli, amelybe e belép, akkor az így keletkezett rendszer keresztezésmentes. Ismét érvényes egyfajta megfordítás.

3.2.9. Tétel. *A V részhalmazaiból álló tetszőleges $\mathcal{F}$ keresztezésmentes rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ irányított fa, valamint V pontjainak egy φ leképezése U-ba úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fa élei egy-egy értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig oly módon, hogy tetszőleges e élre $\varphi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz $\mathcal{F}$-ben.*

Bizonyítás. Legyen z az alaphalmaz tetszőleges pontja. $\mathcal{F}$ minden z-t tartalmazó tagját helyettesítsük a komplementerével. A keletkező $\mathcal{F}'$ halmazrendszer lamináris. Alkalmazhatjuk a 3.2.5 tételt. A kapott fenyőben fordítsunk meg minden olyan élt, amely az eredeti $\mathcal{F}$ egy z-t tartalmazó tagja komplementerének felel meg. Ekkor a kívánt reprezentációt kapjuk. □

Legyen adott a $D = (V, A)$ irányított gráf ponthalmazán egy $\mathcal{F}$ keresztezésmentes halmazrendszer. Készítsük el a $B_{\mathcal{F}}$ $(0, \pm 1)$ értékű mátrixot, melynek sorai az $\mathcal{F}$ tagjainak, míg oszlopai a D éleinek felelnek meg. Egy elem akkor 1 (illetve -1), ha az oszlopnak megfelelő él belép (illetve kilép) a sornak megfelelő halmazba (halmazból). Minden egyéb elem 0.

3.2.10. Tétel. *A $B_{\mathcal{F}}$ mátrix hálózati mátrix* (és így teljesen unimoduláris).

Bizonyítás. Az állítás közvetlenül adódik a 3.2.9 tételből. □

36. Gyakorlat. *Igazoljuk a* 3.2.10 *tétel megfordítását, miszerint minden hálózati mátrix előáll $B_{\mathcal{F}}$ alakban.*

37. Gyakorlat. *Egy, a V alaphalmazon definiált $\mathcal{F}$ keresztezésmentes halmazrendszerhez és $D = (V, A)$ digráfhoz hozzárendelhetünk egy* $0-1$ *mátrixot, amelyben a soroknak az $\mathcal{F}$ tagjai, az oszlopoknak D élei felelnek meg, és a mátrix egy $a_{Z,e}$ eleme ($Z \in \mathcal{F}$, $e \in A$) akkor 1, ha e belép Z-be,* (minden más esetben 0)*. Példával mutassuk meg, hogy ez a mátrix nem feltétlenül teljesen unimoduláris.*

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi érdekes eredményt.

3.2.11. Tétel. *Egy D digráf által meghatározott hálózati mátrix transzponáltja akkor és csak akkor hálózati mátrix, ha D* (irányítatlan értelemben) *síkba rajzolható.*

3.3. Farkas-lemma, dualitás, optimalitási feltételek TU-mátrixokra

Az erős bázismegoldás fogalma már eddig is hasznos volt (mert csak véges sok volt belőlük, és mert minden, a poliéderen felülről korlátos cx célfüggvény esetén $\max cx$ erős bázismegoldáson felvétetett.) E fogalom most újabb fontos szerephez jut.

3.3.1. Lemma. *Tetszőleges M TU-mátrixszal megadott egyenlőtlenség-rendszer esetén, ha a b jobb oldali korlátozó vektor egész, akkor minden erős bázismegoldás egész.*

Bizonyítás. Legyen $M = \binom{P}{Q}$, és tekintsük a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{3.3}$$

rendszert. Korábban megfigyeltük, hogy minden erős bázismegoldás előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéseként, ahol M' az M egy $(r(M) \times (r(M)$-es nemszinguláris részmátrixa, és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. Ha M TU-mátrix, akkor a nemszinguláris M' determinánsa $+1$ vagy -1. A Cramer-szabály szerint, miután b' egész, az egyértelmű x' megoldás is az. □

3.3.2. Lemma. *Legyen c tetszőleges* (nem feltétlenül egészértékű) *vektor. Bármely M TU-mátrixszal megadott K metszetkúpra igaz, hogy ha van K-nak olyan x' eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor van ilyen $(0, \pm 1)$ értékű eleme is.*

Bizonyítás. Legyen $M = \binom{P}{Q}$, és tegyük fel, hogy a K kúp a $Px = 0, Qx \leq$ ≤ 0 rendszer megoldáshalmaza. Mivel x' pozitív számszorosa is K-ban van, feltehető, hogy x' maga olyan, hogy minden komponense a $[-1, +1]$ zárt intervallumba esik. Vagyis a

$$(-1, \ldots, -1) \leq x \leq (1, \ldots, 1), \;\; Px = 0, Qx \leq 0 \tag{3.4}$$

rendszer által meghatározott korlátos poliédernek x' olyan eleme, amelyre $cx' > 0$. Ekkor az operációkutatásban tanultak szerint van olyan x^* erős bázismegoldása a (3.4) rendszernek, amelyre $cx^* \geq cx'$. A 3.3.1 lemma miatt x^* egészértékű, azaz minden komponense 0,1, vagy -1. □

A Farkas-lemma szerint a (3.3) és az alábbi (3.5) rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. Az alábbi tétel a Farkas-lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesítését szolgáltatja.

3.3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $M = \binom{P}{Q}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha a (3.3) primál probléma oldható meg, és a korlátozó b vektor egész, akkor (3.3)-nak van egész megoldása is. Ha az*

$$y_1 \geq 0, yM = 0, yb < 0 \tag{3.5}$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$ értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

Bizonyítás. A tétel első fele következik a 3.3.1 lemmából, és abból a korábbi eredményből, hogy ha létezik megoldás, akkor létezik erős bázismegoldás is. A tétel második fele pedig a 3.3.2 lemma közvetlen folyománya. □

Egy poliédert akkor nevezünk egésznek, ha minden oldala tartalmaz egész pontot. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy minden (tartalmazásra nézve) minimális oldal tartalmaz egész pontot, továbbá azzal (az oldal definíciója folytán), hogy minden lineáris célfüggvény optimuma egész vektoron is felvétetik. Csúcsos poliéder esetén a poliéder akkor egész, ha minden csúcsa egész. Az alábbi tételek mindegyikében az $M = \binom{P}{Q}$ mátrix teljesen unimoduláris, és b egész vektor.

3.3.4. Tétel. *Ha a* $\max\{cx : Px = b_0, Qx \le b_1\}$ *lineáris programozási problémának létezik megoldása, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem).* Ekvivalens alakban: *minden TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.*

Bizonyítás. Miután az optimum erős bázismegoldáson is felvétetik, a 3.3.1 lemmából a tétel következik. □

Az alábbi tételek ugyanígy következnek a megfelelő lineáris programozási tételekből a 3.3.1 és 3.3.2 lemmák segítségével.

3.3.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $R = \{x : Px = b_0, Qx \le b_1\}$ *nemüres. A következők ekvivalensek.*

(1) $\{cx : x \in R\}$ *felülről korlátos.*
(2) *Nem létezik olyan* $(0, \pm 1)$ *értékű* x' *vektor, amelyre* $Px' = 0, Qx' \le 0$, *és* $cx' > 0$.
(3) *Létezik olyan* $y = (y_0, y_1)$ *vektor, amelyre* $y_1 \ge 0$ *és* $yM = c$, *és amely egész, amennyiben c egész.*

3.3.6. Tétel. *Legyen* x^* *az* $R := \{x : Px = b_0, Qx \le b_1\}$ *poliéder egy eleme. Jelölje* $Q^{=}_{x^*}$ *a Q aktív részmátrixát. A következők ekvivalensek.*

(1) x^* *maximalizálja cx-et R fölött.*
(2) *Nem létezik olyan* $(0, \pm 1)$ *értékű* x' *vektor, amelyre* $Px' = 0$, $Q^{=}_{x^*}x' \le 0$, *és* $cx' > 0$.
(3) *Létezik olyan* $y = (y_0, y_1)$ *vektor, amelyre* $y_1 \ge 0$, $yM = c$, $y(b - Mx^*) = 0$, *és y egész, amennyiben c egész.*

Gyakran (bár nem mindig) a teljesen duális egészértékűség az alábbi tulajdonságon múlik.

3.3.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* $\{Px = b_0, Qx \le b_1\}$ *rendszer olyan, hogy minden egész c-re, amelyre* $\max cx$ *létezik, a*

$$\min\{b_0y_0 + b_1y_1 : y_1 \ge 0, y_0P + y_1Q = c\} \tag{3.6}$$

duális lineáris programnak van olyan y^* *optimuma, amelyre a P és Q azon soraiból álló* $M' = \begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ *részmátrix, melyek az* y^* *nem nulla komponenseinek felelnek meg, teljesen unimoduláris. Ekkor a* $\{Px = b_0, Qx \le b\}$ *rendszer TDI.*

Bizonyítás. Az M' teljes unimodularitása miatt a $\min\{b_0'y_0' + b_1'y_1' : y_1' \ge$ $\ge 0, y_0'P' + y_1'Q' = c\}$ lineáris programnak van egész optimuma, amit nulla komponensekkel kiegészítve (3.6) egy egész optimumát kapjuk. □

3.4. Kerekítés és egyenletes színezés

3.4.1. Kerekítés

Akkor mondjuk, hogy egy z egész szám az x **szám kerekítése**, ha $|x - z| < 1$. (Tehát az 1,01-nak az 1 és a 2 is kerekítése.) Ez speciálisan azt jelenti, hogy ha x egész, akkor $x = z$. A z vektor az x **vektor kerekítése**, ha minden komponense kerekítés. Egy x nem egész szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész részén a legnagyobb x-nél kisebb egész számot értjük, míg $\lceil x \rceil$ felső egész részen a legkisebb x-nél nagyob számot. Egész x-re $\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil := x$. Amennyiben x egy vektort jelöl, úgy $\lfloor x \rfloor$ azt a vektort jelöli, amelyet x-ből nyerünk a komponenseinek alsó egész részét véve. Az x vektor $\lceil x \rceil$ felső egész részét analóg módon definiáljuk.

3.4.1. Lemma. *Legyen A teljesen unimoduláris mátrix és x_0 egy vektor. Ekkor létezik egy olyan q egészértékű vektor, amelyre $\lfloor x_0 \rfloor \leq q \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Aq \leq \lceil Ax_0 \rceil$. Más szóval az x_0-nak van olyan q kerekítése, hogy az A minden a sorára aq kerekítése ax_0-nak.*

Bizonyítás. A feltevés szerint az $\lfloor x_0 \rfloor \leq z \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Az \leq \lceil Ax_0 \rceil$ rendszernek van megoldása, így a 3.3.3 tétel szerint van egész megoldása is. □

Érdemes megfogalmazni az alábbi következményt: *Ha $(S, \mathcal{F})$ teljesen unimoduláris hipergráf, úgy bármely $x_0 : S \to \mathbf{R}$ függvénynek létezik olyan q kerekítése, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ hiperélre a $\sum[q(v) : v \in A]$ szám kerekítése $\sum[x_0(v) : v \in A]$-nak.*

3.4.2. Tétel. *Tetszőleges $m \times n$-es B mátrixnak van olyan kerekítése, hogy a következő mennyiségek mind egynél kevesebbel változnak: minden sorösszeg, minden oszlopösszeg, az első j sor elemeinek összege ($j = 1,2,\dots,m$), az első i oszlop elemeinek összege ($i = 1,2,\dots,n$).*

Bizonyítás. Legyen S a B mátrix mezőinek (elemeinek) halmaza. B minden sorához legyen a sorban lévő mezők halmaza tagja $\mathcal{F}_1$-nek, valamint minden i-re $(2 \leq i \leq m)$ az első i sor mezőinek halmaza legyen tagja $\mathcal{F}_1$-nek (összesen tehát $2m - 1$ tag van $\mathcal{F}_1$-ben). $\mathcal{F}_2$-t hasonlóan definiáljuk az oszlopok segítségével. Ekkor $\mathcal{F}_i$ lamináris, így a 3.2.6 tétel és a 3.4.1 lemma alapján készen vagyunk. □

3.4.3. Tétel. *Egy $x_1, \dots x_n$ sorozat elemeinek létezik olyan $z_1, \dots, z_n$ kerekítése, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ indexre a $z_i + \dots + z_j$ összeg kerekítése az $x_i + \dots + x_j$ összegnek.*

Bizonyítás. A $\{v_1, \dots, v_n\}$ alaphalmazon tekintsük azt a hipergráfot, melynek élei a $\{v_i, \dots, v_j\}$ típusú halmazok minden $1 \leq i \leq j \leq n$ indexpárra.

Amint már láttuk (lásd 3.2.2), ez a hipergráf teljesen unimoduláris, így a 3.4.1 lemma alkalmazható. □

3.4.2. Egyenletes színezések

A teljesen unimoduláris mátrixok egy másik érdekes alkalmazása hipergráfok egyenletes színezésével foglalkozik.

3.4.4. Tétel. *Legyen A TU-mátrix, b egész vektor, k pozitív egész. Legyen z olyan egész vektor, amelyre $Az \leq kb$. Ekkor z előáll olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegeként, melyekre $Az_i \leq b$.*

Bizonyítás. k szerinti indukció alapján elég egy olyan egész z_1 egész vektort találni, amelyre $Az_1 \leq b$ és $A(z - z_1) \leq (k-1)b$. Ugyanis ilyen z_1 létezése esetén $z' := z - z_1$ olyan, amelyre $Az' \leq (k-1)b$, és az indukciós feltevés alkalmazható $(k-1)$-re.

A fenti z_1 létezéséhez csak azt kell látni, hogy az $Az - (k-1)b \leq Ax \leq b$ poliédernek van egész pontja. A poliéder mindenesetre nemüres, hiszen z/k benne van. Továbbá a feltételek egy TU-mátrixszal adhatók meg, így létezik a kívánt egész pont is. □

A fenti tétel kiterjeszthető arra az esetre, amikor z nemnegativitását is megköveteljük, és az Ax-re nemcsak felső korlát van, hanem alsó is. Valóban, ha A TU-mátrix, akkor az $(A, -A, I)$ mátrix is teljesen unimoduláris. Kapjuk a következőt.

3.4.1. Következmény. *Ha $z \geq 0$ olyan egész vektor, amelyre $kb_1 \leq Az \leq$ $\leq kb_2$, akkor z felbomlik olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$.*

Ezt felhasználhatjuk TU-mátrixok oszlopainak egyenletes k-színezésére. Az A oszlopainak egy partícióját („színezését”) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletes**nek, ha A minden a sorára érvényes, hogy a sornak az egyes A_i részekbe eső elemeinek összege minden A_i-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor sum(a)/k \rfloor$ vagy $\lceil sum(a)/k \rceil$, ahol $sum(a)$ az a sor elemeinek összege.

3.4.5. Tétel. *Az A TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes k-színezése.*

Bizonyítás. Legyen d az A oszlopainak az összege. Legyen $b_1 := \lfloor d/k \rfloor$, $b_2 := \lceil d/k \rceil$. Ekkor a $z :\equiv 1$ benne van a $\{kb_1 \leq Ax \leq kb_2, x \geq 0\}$ poliéderben. Az előbbi következmény szerint z felbomlik $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$. Világos, hogy a z_i-k (0,1) vektorok. Legyen A_i az oszlopoknak azon halmaza, melyeknek megfelelő komponense z_i-nek 1. Ezek éppen a kívánt egyenletes színezést adják. □

Egy alkalmazás

3.4.2. Következmény. *Adott egy F irányított fa (speciális esetben irányított út) és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-beli élek egy részhalmazának tekintünk. $\mathcal{P}$ tagjai* (minden k pozitív egészre) *megszínezhetők k színnel úgy, hogy F minden e élére az e-t tartalmazó egyszínű utak száma minden színre lényegében ugyanannyi, ahol a „lényegében ugyanannyi" azt jelenti, hogy bármely két színosztályra az eltérés legfeljebb egy lehet.*

Ha a hálózati mátrix transzponáltjára alkalmazzuk az egyenletes színezési tételt, akkor a következőt kapjuk.

3.4.3. Következmény. *Adott egy F irányított fa és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-beli élek egy részhalmazának tekintünk. Az F élei* (minden k pozitív egészre) *megszínezhetők k színnel úgy, hogy $\mathcal{P}$ minden tagjában a színek lényegében egyenletes számban fordulnak elő.*

95. Feladat. *Egyszerű mohó algoritmus megadásával közvetlenül bizonyítsuk be a 3.4.3 következményt.*

A 3.4.5 tétel páros gráfokra vonatkozó következményeit a 3.6.6 tételben tárgyaljuk majd.

3.5. TU-mátrixok jellemzése

Amint már láttuk, minden TU-mátrixszal meghatározott poliéder egész, amennyiben a korlátozó vektor egész. Mivel az egész poliéderek hasznosak kombinatorikus optimalizálási feladatok megoldásában, felvetődik, hogy léteznek-e általánosabb mátrixok ezzel a tulajdonsággal. Az alábbi tétel szerint a válasz egyfajta értelemben nemleges.

3.5.1. Tétel (Hoffman és Kruskal)**.** *A Q egész mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha minden egész b vektorra az $R_b := \{x : x \geq 0, Qx \leq b\}$ poliéder egész.*

Bizonyítás. Legyen b olyan, hogy R_b nem üres. Azt már tanultuk, hogy ha Q teljesen unimoduláris, akkor R_b egész. A megfordításhoz indirekt tegyük fel, hogy létezik Q-nak egy Q' négyzetes részmátrixa, amelyre $|\det Q'| \geq 2$. Feltesszük, hogy Q' minimális, azaz Q' minden valódi aldeterminánsa $0, \pm 1$ értékű.

3.5.1. Állítás. *Tetszőleges b' egész vektorra a $Q'x' = b'$ rendszer egyértelmű $x_{b'}$ megoldása egész.*

Bizonyítás. Először csak az olyan b' vektorokra igazoljuk az állítást, amelyekre $x_{b'} \geq 0$. Jelölje x^* azt a vektort, amelyet az $x_{b'}$ nullákkal történő kiegészítésével nyerünk. A b'-t alkalmasan nagy (egész) komponensekkel kiegészítve olyan b vektort kapunk, amelyre x^* kielégíti a $Qx \leq b, x \geq 0$ rendszert, azaz x^* benne van R_b-ben, és így az előállítás miatt annak csúcsa. A tétel feltevése szerint x^* egész, és így $x_{b'}$ is az.

Általános b'-re legyen z' olyan egész vektor, amelyre $x_{b'} + z' \geq 0$. Ekkor $b'' := b' + Q'z' = Q'(x_{b'} + z')$ olyan, hogy a $Q'x' = b''$ egyértelmű $x_{b'} + z'$ megoldása nemnegatív, így az első rész szerint egész, de akkor z' egészértékűsége miatt $x_{b'}$ is az. □

Mivel Q' nemszinguláris, így az első sora szerint kifejtve az egyik tag, mondjuk a $q_{1,1}$-hez tartozó, nem nulla. Legyen most $b' = (1,0,\dots 0)$ egy egységvektor. Ekkor a Cramer-szabály szerint $x_{b'}$ első komponense a Q' egy aldeterminánsának, ami ± 1 értékű, és $\det Q'$-nek a hányadosa, és ezért nem egész, ellentmondásban a 3.5.1 állítással. □

Megjegyzés A Hoffman–Kruskal-tételt kézenfekvőnek lehet érezni. Értékét talán még jobban kiemeli, hogy a hasonlóképp természetesnek tűnő azon állítás, amely szerint egy Q négyzetes egész mátrix akkor és csak akkor TU, ha minden b egész vektorra a $Qx = b$ egyértelmű megoldása egész, nem igaz. Erre példa az a 3×3-as mátrix, amelynek sorai (1,1,1), (−1,1,0), (1,0,0).

Bemutatjuk a TU-mátrixoknak még egy hasznos jellemzését. A 3.4.5 tételben láttuk már, hogy TU-mátrixok oszlopai egyenletesen k-színezhetők. Kérdés, hogy ez a tulajdonság mennyire a csak TU-mátrixok sajátja. Az alábbi tétel szerint már az egyenletes 2-színezhetőségből is következik a TU-ság. Az oszlopok egyenletes 2-színezhetőségének azt az ekvivalens definícióját használjuk, amely egy olyan z $\{\pm 1\}$-es vektor létezését követeli, amelyre Qz $\{0, \pm 1\}$-es vektor.

3.5.2. Tétel (Ghouila-Houri)**.** (ejtsd: Gujla-úri) *Egy Q mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha oszlapainak bármely részhalmaza egyenletesen 2-színezhető.*

Bizonyítás. TU-mátrix egyenletes k-színezhetőségét már láttuk korábban, így csak a fordított iránnyal foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy ha kihagyjuk Q néhány sorát, akkor Q oszlopainak egy egyenletes 2-színezése automatikusan egyenletes 2-színezése a maradéknak. Így Q mindenesetre $\{0, \pm 1\}$-es mátrix.

Tegyük fel, hogy Q minimális méretű ellenpélda. Ekkor tehát Q nem TU, de minden valódi részmátrixa az. Ezért Q négyzetes mátrix, amelyre $K := \det Q \notin \{0, \pm 1\}$. Így Q nem egyelemű, és Q minden valódi aldeterminánsa $\{0, \pm 1\}$ értékű. Tekintsük a Q mátrix Q^{-1} inverzét. A Cramer-szabály szerint

$$Q^{-1} \text{ minden nem nulla eleme } \pm 1/K \text{ alakú.} \tag{3.7}$$

Legyen q_1^* a Q^{-1} első oszlopa, és jelölje R azon j indexek halmazát, melyekre $q_1^*(j) \neq 0$. Jelölje ${}_iq$ a Q mátrix i-edik sorát és $e_1 = (1{,}0,\ldots,0)$ az első egységvektort. Mivel minden $i \geq 2$ indexre ${}_iqq_1^* = 0$, ezért (3.7) miatt a ${}_iq$ sornak páros sok olyan q_{ij} nem nulla eleme van, amelyre $j \in R$.

A feltevés szerint a Q mátrix R-hez tartozó oszlopai egyenletesen 2-színezhetők, vagyis létezik egy olyan z $\{0, \pm 1\}$-es vektor, amelyre Qz $\{0, \pm 1\}$ értékű, és $z(j)$ pontosan akkor nem nulla, ha $j \in R$. Az előbbi paritási megfigyelés miatt minden $i \geq 2$-re ${}_iqz = 0$. De ekkor ${}_1qz \neq 0$, mert különben $Qz = 0$ volna, ellentmondásban $|\det Q| \geq 2$-vel. z esetleges negálásával feltehetjük, hogy ${}_1qz = 1$, vagyis $Qz = e_1$, és emiatt $z = q_1^*$, ellentmondásban a (3.7) tulajdonsággal. □

3.6. Páros gráfok és lineáris programozás

Mi állhat annak hátterében, hogy páros gráfok párosításaival, irányított gráfokban pedig utakkal, folyamokkal, áramokkal kapcsolatban megannyi szép tételt lehet megfogalmazni és igazolni? Miként lehet ilyen tételeket megsejteni? Ebben és a következő részben megmutatjuk, hogy a szóbanforgó hálózati optimalizálási feladatok egy olyan lineáris programként írhatók fel, amelyben a feltételi mátrix teljesen unimoduláris. Kiderül, hogy a tételek mindegyike úgy tekinthető, mint egy lineáris programozási tétel (Farkas-lemma, korlátossági tétel, optimalitási feltétel, dualitástétel) TU-mátrixokra felírt alakjának speciális esete. Ennek a felismerésnek nem csak az a haszna, hogy már igazolt tételekre újabb bizonyítást nyerünk, hanem olyan hatékony eszköz birtokába jutunk általa, amely általánosabb ilyen irányú tételek megsejtésére és bizonyítására is alkalmas.

A csupa egyesből álló j dimenziós vektort e_j jelöli, illetve használni fogjuk az $\underline{c}$ és $\underline{1}$ jelöléseket is az azonosan c és az azonosan 1 vektorokra. A $j \times j$-es identitás mátrix jele I_j.

3.6.1. Páros gráfok: optimális részgráfok

Optimális párosítások

Először levezetjük Kőnig már megismert tételét:

3.6.1. Tétel (Kőnig). *A $G = (S, T; E)$ páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Bizonyítás. A gráf pontjainak számát jelölje p, az élek számát q. A páros gráf incidencia-mátrixát jelölje A, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Ekkor tehát A egy $p \times q$ méretű (0,1)-mátrix. Tekintsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max\{e_q x : Ax \leq e_p, x \geq 0\}, \tag{3.8}$$

$$\min\{e_p y : yA \geq e_q, y \geq 0\}. \tag{3.9}$$

A 3.3.4 tétel szerint mindkét programnak az optimuma egész vektoron felvétetik. Jelöljük ezeket rendre x_0-lal és y_0-lal. (3.8) minden egészértékű megoldása (0,1) értékű, és rögtön látszik, hogy (3.9) minden optimális egészértékű megoldása is (0,1) értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket veszi fel, és legyen L azon pontok halmaza, amelyeken y_0 egyet vesz fel. Az $Ax \leq e_p$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \geq e_q$ feltétel azt jelenti, hogy L az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimumértékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |L|$, ami a célunk volt. □

E bizonyítás kapcsán azt mondhatjuk, hogy a Kőnig-tétel nem más, mint a dualitástétel TU-mátrixokra vonatkozó egészértékű alakja abban a speciális esetben, amikor a feltételi mátrix a páros gráf incidencia-mátrixa, míg a korlátozó vektor és a célfüggvény a (megfelelő dimenziós) azonosan 1 vektor. Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti megközelítés Egerváry tételének következő változatát adja.

3.6.2. Tétel. *Páros gráfban egy párosítás maximális súlya egy c súlyfüggvényre nézve egyenlő* $\min\{\sum_{v \in V} \pi(v) : \pi \geq 0, \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ *minden uv élre*$\}$. *Ha c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.*

Melléktermékként kapjuk:

3.6.3. Tétel. *A G páros gráf A incidencia-mátrixával felírt*

$$\{x : Ax \leq e_p, x \geq 0\} \tag{3.10}$$

poliéder egész, amelynek csúcsai pontosan a gráf párosításainak incidencia-vektorai.

Egy gráf **párosításpolitóp**ja a párosítások incidencia-vektorainak konvex burka. A lineáris programozásban tanultak szerint tetszőleges politóp (korlátos) poliéder, azaz felírható egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazaként. A 3.6.3 tétel a (3.10) rendszerrel tehát konkrétan megadja a párosításpolitóp poliéderként történő előállítását. (Ezek miatt nem okozhat félreértést, hogy a párosításpolitópot gyakran párosításpoliédernek hívják.)

Megjegyzendő, hogy a párosításpolitóp tetszőleges gráfra is mindig része a (3.10) poliédernek, de ilyenkor lehet valódi része.

Nevezzünk egy mátrixot **bisztochasztikus**nak, ha négyzetes, nemnegatív és minden sorösszege, valamint minden oszlopösszege egy. Legegyszerűbb bisztochasztikus mátrixok a permutációmátrixok, melyeknek minden eleme 0 vagy 1, és minden oszlopában és minden sorában pontosan egy darab egyes van. Permutációmátrixok konvex kombinációja is bisztochasztikus. A következő tétel fő mondanivalója az, hogy valójában minden bisztochasztikus mátrix előáll ilyen alakban.

3.6.4. Tétel (Birkhoff és Neumann)**.** *Egy mátrix akkor és csak akkor bisztochasztikus, ha permutációmátrixok konvex kombinációja.*

Bizonyítás. Egy B $n \times n$-es mátrix megfelel egy G $n \times n$-es teljes páros gráf élhalmazán értelmezett x_B vektornak. Figyeljük meg, hogy a permutációmátrixok éppen a teljes párosításoknak felelnek meg. Ha B bisztochasztikus, akkor $Ax_B = e_{n^2}, x_B \geq 0$, azaz x_B benne van a G párosításpoliéderében, vagyis előáll párosítások (incidencia-vektorainak) konvex kombinációjaként. Tehát B előáll permutáció márixok konvex kombinációjaként. □

Természetesen megkaphatjuk Egerváry tételét, sőt most már belefoglaljuk azt az esetet is, amikor a súlyfüggvény nem egész.

3.6.5. Tétel (Egerváry)**.** *A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is. Amennyiben c egészértékű, az optimális súlyozott lefogás is választható annak.*

Bizonyítás. A fenti megközelítéshez képest csak annyit kell változtatni, hogy az $Ax \leq e_p$ egyenlőtlenség-rendszer helyett az $Ax = e_p$ egyenletrendszert kell vennünk. Ekkor persze a duálisban a változókra nincs nemnegativitás előírva. A teljes páros gráf esetén azért igaz mégis, hogy az optimális duális megoldás választható nemnegatívnak, mert ilyenkor az $\{\max cx : Ax \leq e_p, x \geq 0\}$ lineáris program optimális megoldása c nemnegativitása, valamint a páros gráf teljessége miatt mindig felvétetik teljes párosításon is, márpedig ezen lineáris program duálisában a változók nemnegatívak. □

Mi történik, ha adott k-ra a pontosan k élű párosítások maximális súlyára szeretnénk tételt kapni? Miután egy páros gráf incidencia-mátrixát egy csupa egyes sorral kiegészítve továbbra is TU-mátrixot kapunk (figyelem: csupa egyes oszloppal való kiegészítéssel nem), így a következő primál-duál lineáris program pár megadja a választ: $\max\{cx : Ax \leq e_p, e_q x = k\}$ és $\min\{\pi e_p + k\alpha : \pi A + \alpha e_q \geq c, \pi \geq 0\}$. A primál optimum tehát egészértékű, és így szükségképpen egy k elemű párosítás incidencia-vektora. A duál optimum is egészértékű, feltéve, hogy c az.

Páros gráf fokszámkorlátozott részgráfjai: a szállítási probléma

További általánosításokat kaphatunk, ha a primál feladatban a jobb oldalt valamilyen (nemnegatív) b vektornak választjuk. Ennek az a kombinatorikus jelentése, hogy a páros gráfban maximális súlyú fokszámkorlátozott részgráfot keresünk. Természetesen alsó korlátokat is kitűzhetünk a fokszámokra, mint ahogy korlátozhatjuk alulról és felülről azt is, hogy egy élt hány példányban vehetünk be a keresett részgráfba (megint csak amiatt, hogy az incidencia-mátrixot egy csupa egyes sorral kiegészítve TU-mátrixot kapunk). Valójában nem is érdemes explicit megfogalmazni a különböző lehetőségekre vonatkozó minimax tételeket, mert a dualitástétel és a páros gráf incidencia-mátrixának teljes unimodularitása már magában hordozza a szükséges információt.

96. Feladat. *Mikor létezik egy páros gráfnak egy N és egy K részgráfja úgy, hogy minden csúcsban az N fokszáma pontosan eggyel nagyobb, mint K fokszáma?*

3.6.2. Páros gráfok: élszínezések

Közismert Kőnig élszínezési tétele, amely szerint minden Δ-reguláris páros gráf élhalmaza felbomlik Δ élidegen teljes párosításra. (Ez közvetlenül levezethető indukcióval, vagy esetleg a Hall-tételre támaszkodva). Ugyanakkor a TU-mátrixokra vonatkozó 3.4.5 egyenletes színezési tételből sokkal általánosabb eredmény nyerhető. Az élszínezési tételt néha kicsit általánosabban fogalmazzák meg: *Ha egy páros gráfban a maximális fokszám Δ, akkor az éleket meg lehet Δ színnel színezni úgy, hogy minden csúcsba különböző színű élek futnak.*

3.6.6. Tétel. *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráf éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre ($j = 1, \dots, k$) a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Ráadásul még azt is megkövetelhetjük, hogy minden színosztály mérete közel ugyanakkora legyen, vagyis $\lfloor |E|/k \rfloor$ vagy $\lceil |E|/k \rceil$.*

Ha k-t a maximális Δ fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha k-t a minimális δ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint G páros gráf élhalmaza felbontható δ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot.

A lineáris programozási megközelítés eredményességét egy kevésbé közismert tételen is bemutatjuk.

3.6.7. Tétel (Folkman és Fulkerson)**.** *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik ℓ darab élidegen k élű párosítás, ha*

$$i(Z) \geq \ell(k + |Z| - |U|) \tag{3.11}$$

fennáll az $U := S \cup T$ minden Z részhalmazára.

Bizonyítás. Mivel egy M párosítás legfeljebb $|U| - |Z|$ olyan élt tartalmaz, amelynek legalább egyik végpontja nincs Z-ben, így legalább $|M| - (|U| - |Z|)$ darab $|Z|$ által feszített élt tartalmaz. Így ha létezik ℓ darab k élű párosítás, akkor Z legalább $\ell(k + |Z| - |U|)$ élt feszít, vagyis (3.11) szükséges.

Az elegendőséghez jelölje A a páros gráf pont-él incidencia márixát, p a csúcsok számát, q az élek számát. Az xe_q és ye_q skalárszorzatot szemléletesebben $\widetilde{x}(E)$-vel, illetve $\widetilde{y}(E)$-vel jelöljük, míg a πe_p-t $\widetilde{\pi}(U)$-val. Tekintsük a

$$\max\,\{\widetilde{x}(E) :\ x \geq 0,\ Ax \leq \underline{\ell},\ I_q x \leq \underline{1}\} \tag{3.12}$$

primál és a

$$\min\,\{\ell\widetilde{\pi}(U) + \widetilde{y}(E) :\ (\pi, y) \geq 0,\ \pi A + y \geq \underline{1}\} \tag{3.13}$$

duális lineáris programot, ahol $\pi : U \to \mathbf{R}_+$ az A sorainak megfelelő duális változók vektora, míg $y : E \to \mathbf{R}_+$ az I_m sorainak megfelelőké. Az A mátrix TU-sága miatt mind a primál, mind a duál optimum egész vektoron felvétetik, sőt (0,1) vektoron is, hiszen a primál feltételek között explicit szerepel a $0 \leq \leq x \leq 1$ kikötés, míg a duálisban a jobb oldalon azonosan 1 áll, így egy optimális (π, y) vektor minden komponense legfeljebb 1.

Amennyiben a (dualitástétel miatt létező) közös optimumérték legalább $k\ell$, úgy a (0,1) értékű optimális primál vektor 1 értékű komponensei egy olyan legalább $k\ell$ élű $G' = (U, E')$ részgráfot határoznak meg, amelyben minden pont foka legfeljebb ℓ. Élek esetleges törlésével elérhetjük, hogy G' pontosan $k\ell$ darab élből álljon. A 3.6.6 tétel miatt E' felbomlik ℓ darab párosításra, amelyben mindegyik párosítás közel egyforma méretű, és így szükségképpen pontosan k elemű.

Tételezzük most fel, hogy a közös optimum értéke kisebb, mint $k\ell$. Ekkor létezik egy (0,1) értékű (π, y) duális optimális megoldás, amelyre $\ell\widetilde{\pi}(U) + + \widetilde{y}(E) < k\ell$. Jelölje Z a gráf azon v pontjainak halmazát, melyekre $\pi(v) = = 0$. A duális feltételek miatt minden Z által feszített e élre $y(e) = 1$, és ezért $i(Z) \leq \widetilde{y}(E)$. Miután $\widetilde{\pi}(U) = |U| - |Z|$, így $\ell(|U| - |Z|) + i(Z) \leq \ell\widetilde{\pi}(U) + + \widetilde{y}(E) < k\ell$, ellentmondásban a (3.11) feltétellel. □

Megjegyzés Szub-, illetve szupermoduláris függvények gyakran szerepelnek különféle szükséges és elegendő feltételekben (például Hall tételében az X halmaz szomszédainak elemszámát jelölő $|\Gamma(X)|$ függvény szubmoduláris, és erről követeljük meg, hogy legalább $|X|$ legyen). Általában a szubmoduláris függvények felső korlátként szerepelnek, míg a szupermoduláris függvények alsóként. (Például gráfelméletben bizonyított eredmény, hogy *egy 2-élösszefüggő gráfnak akkor és csak akkor van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v csúcs befoka legfeljebb egy előre megadott $g(v)$ érték, ha $g(X) \geq i(X) + c(X)$ a csúcsok minden nemüres X részhalmazára, ahol $c(X)$ az X elhagyásával keletkező komponensek száma.* Itt az $i(X)+c(X)$ függvény szupermoduláris.)

Ennek tükrében furcsa, hogy a szupermoduláris i_G függvény a (3.11) feltételben felső korlátként szerepel. Valójában a szokásos $\cap$ és $\cup$ műveletek helyett bevezethetünk a páros gráf részhalmazain egy másik hálót a következő műveletekkel: legyen $X \wedge Y := (X \cap Y \cap S) \cup ((X \cup Y) \cap T)$ és $X \vee Y := ((X \cup \cup Y) \cap S) \cup (X \cap Y \cap T)$. Kimutatható, hogy ezekre nézve az i_G függvény már szubmoduláris.

3.7. Hálózati optimalizálás és lineáris programozás

Ebben a részben áttekintjük a potenciálokra, utakra, folyamokra és áramokra vonatkozó tételek lineáris programozási kapcsolatát.

3.7.1. Megengedett potenciálok, legolcsóbb utak

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, melynek $(0{,}1,-1)$-es incidencia-mátrixát jelölje Q. Egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektort akkor nevezünk a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre nézve **megengedett potenciálnak**, ha $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ fennáll minden $uv \in A$ élre. Figyeljük meg, hogy egy π vektor pontosan akkor megengedett potenciál, ha $\pi Q \leq c$. Egy $x : A \to \mathbf{R}$ vektor pedig pontosan akkor áram, ha $Qx = 0$. Megmutatjuk, hogy a megengedett potenciál létezésére vonatkozó tétel rögtön következik a Farkas-lemma TU-mátrixokra vonatkozó élesebb alakjából (3.3.3 tétel).

3.7.1. Tétel. *Adott $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvényre akkor és csak akkor létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektor, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ minden $e = uv \in A$ élre, ha c konzervatív, azaz ha nem létezik negatív költségű irányított kör. Amennyiben c egészértékű, úgy a potenciál is választható annak.*

Bizonyítás. A Q mátrix transzponáltja teljesen unimoduláris, így a 3.3.3 tétel miatt vagy létezik a $\pi Q \leq c$ rendszernek megoldása (amely egész, ha c az), vagy pedig a duális $\{Qx = 0, x \geq 0, cx < 0\}$ rendszernek létezik $(0, \pm 1)$-es megoldása. Az első eset épp egy megengedett potenciál létezését jelenti, míg a második esetben, $x \geq 0$ miatt, x egy (0,1) értékű, negatív költségű áram, amely élidegen körökre bomlik, és így e körök egyike is negatív. $\square$

A dualitástétel TU-mátrixokra vonatkozó élesített alakjából (3.3.4 tétel) könnyen levezethető a legolcsóbb utakra vonatkozó alábbi eredmény is.

3.7.2. Tétel. *Konzervatív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető utak költségének $l_c(t)$ minimuma egyenlő $\pi(t)-\pi(s)$ maximumával, ahol a maximum az összes megengedett π potenciálon veendő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a Q mátrix első és második sora felel meg az s, illetve a t pontnak. Tekintsük a $\max\{\pi(t)-\pi(s) : \pi Q \leq c\}$ lineáris programot. Ennek duálisa $\min\{cx : Qx = (-1,+1,0,0,\dots,0), x \geq 0\}$. A primál program optimális megoldása épp a tételben szereplő maximum. Mivel Q TU-mátrix, így a 3.3.4 tétel miatt létezik egészértékű optimális π is, ha c egész. A duális programnak 3.3.4 szerint a c egészértékűségétől függetlenül létezik egy x^* egészértékű optimuma. Figyeljük meg, hogy a $Qx = (-1,+1,0,0,\dots,0), x \geq$ ≥ 0 megoldásai éppen az s-ből t-be vezető egy nagyságú folyamok. Mivel x^* egészértékű, így előáll egy út és irányított körök (incidencia-vektorainak) nemnegatív kombinációjaként. De c konzervativitása miatt a körök költsége nemnegatív, így ezeket kihagyva feltehetjük, hogy x^* egy s-t út incidencia-vektora. □

3.7.2. Megengedett áramok és folyamok

Egyszerű észrevétel, hogy ha a megmaradási szabály helyett csupán a $\varrho_x(v) \leq$ $\leq \delta_x(v)$ egyenlőtlenséget írjuk elő minden v csúcsnál, akkor x automatikusan áram, más szóval a $Qx \leq 0$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza pontosan az áramok halmaza.

3.7.3. Tétel. *Ha $f \leq g$ egészértékű, akkor a megengedett áramok $\{x : Qx \leq$ $\leq 0, f \leq x \leq g\}$ poliédere, amennyiben nemüres, egész poliéder.*

Bizonyítás. Mivel Q TU-mátrix, így ha kiegészítjük egy (negatív) egységmátrixszal, úgy továbbra is TU-mátrixot kapunk, és így a 3.3.4 tételt alkalmazhatjuk. □

Hasonló megfontolással kapjuk:

3.7.4. Tétel. *A $D = (V, A)$ digráf élhalmazán adott a $g \geq 0$ egész kapacitásfüggvény. Legyen s és t két kijelölt csúcs, melyekre $\varrho(s) = 0 = \delta(t)$. A k nagyságú megengedett folyamok $\{x \in \mathbf{R}^A : 0 \leq x \leq g, \varrho_x(v) = \delta_x(v)$ minden $v \in V - \{s,t\}$-re, $\delta_x(s) = k\}$ poliédere, amennyiben nemüres, egész poliéder.*

Most megmutatjuk, hogy Hoffman megengedett áramok létezésére vonatkozó tétele nem más, mint a Farkas-lemmának a 3.3.3 tételben TU-mátrixokra vonatkozó élesebb alakja egy digráf incidencia-mátrixára felírva.

3.7.5. Tétel (Hoffman, 1960)**.** *A $D = (V, A)$ digráfban adott $f \le g$ kapacitásfüggvényekre vonatkozólag akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \le \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.14}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (3.14) fennáll, úgy létezik egészértékű megengedett áram is.

Bizonyítás. Csak az elegendőség igazolásával foglalkozunk. Tekintsük a $Qx \le \le 0, x \le g, -x \le -f$ rendszert. A 3.3.3 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha a fenti rendszernek nincs megoldása, akkor van olyan (y, u, v) (0,1) értékű vektor, amelyre $(*)$ $yQ + u - v = 0$ és $(**)$ $ug - vf < 0$. Mivel $f \le g$, így minden élre feltehető, hogy $u(e)$ és $v(e)$ közül legalább az egyik nulla (ha ugyanis mindkettő 1, akkor mindkettőt helyettesíthetjük nullával.)

Jelölje Z azon z pontok halmazát, ahol $y(z) = 1$. Ekkor $(*)$ miatt minden olyan e élre, amelynek mindkét vége vagy Z-ben vagy $V - Z$-ben van, $u(e) = = v(e) = 0$. Továbbá minden Z-be belépő e élre $v(e) = 1$, $u(e) = 0$, és minden Z-ből kilépő élre $v(e) = 0, u(e) = 1$. Miután $ug = \delta_g(Z)$ és $vf = \varrho_f(Z)$, így $(**)$ ellentmond a (3.14) feltételnek. $\square$

3.7.3. Minimális költségű áramok és folyamok

Tekintsük most a költséges áram problémát, azaz adott $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény esetén keressünk minimális költségű megengedett áramot, más szóval oldjuk meg a

$$\min\{cx : Qx = 0, f \le x \le g\} \tag{3.15}$$

lineáris programot. (Természetesen az $x \le g$ egyenlőtlenség itt azt jelenti, hogy $x(e) \le g(e)$ az olyan élekre, ahol $g(e)$ véges. Duális változó tehát csak ilyen egyenlőtlenségekhez tartozik.)

Korlátosság és optimalitás

Először vizsgáljuk meg, hogy cx mikor korlátos alulról. Készítsünk el egy $D' = (V, A')$ digráfot, és élein definiáljuk a c' költségfüggvényt a következőképpen. D'-ben uv akkor él, ha vagy $vu \in A, f(vu) = -\infty$, és ekkor $c'(uv) = = -c(vu)$, vagy pedig $uv \in A, g(uv) = \infty$, és ekkor $c'(uv) = c(uv)$. Ugyan a 3.3.5 tételből közvetlenül is kiolvasható az alábbi eredmény, az ottani bizonyítást a mostani helyzetre specializálva újra belátjuk.

A c **eltoltja** π-vel az a c_π költségfüggvény, amelynek értéke egy uv élen $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$.

3.7.6. Tétel. *Feltéve, hogy létezik megengedett áram, a következők ekvivalensek.*

(a) *A megengedett c áramok cx költsége alulról korlátos.*
(b) *Nincs negatív összköltségű irányított kör D'-ben.*
(c) *Létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, hogy minden $uv \in A$ esetén*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } g(uv) = \infty, \quad \text{azaz} \quad c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow g(uv) < \infty \tag{3.16}$$

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } f(uv) = -\infty, \quad \text{azaz} \quad c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow f(uv) > -\infty. \tag{3.17}$$

Amennyiben c egészértékű, úgy a szóbanforgó π is választható annak.

Bizonyítás. (a)→(b) Ha létezik negatív kör D'-ben, akkor ennek egy olyan kör felel meg D-ben, melynek az előremenő élein a g végtelen, a hátramenő élein az f mínusz végtelen, és az éleinek összköltsége negatív. Márpedig ha a meglévő megengedett áramot az előremenő éleken bármilyen nagy K-val egységesen megnöveljük, a hátramenőkön pedig K-val csökkentjük, akkor megengedett áramot kapunk, amelynek költsége így akármilyen kicsi lehet.

(b)→(c) Ha D'-ben nincs negatív kör, akkor a 3.7.1 tétel miatt létezik egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $uv \in A, g(uv) = \infty$ esetén (amikor is $uv \in A'$) $\pi(v) - \pi(u) \leq c'(uv) = c(uv)$, azaz (3.16) fennáll, míg $uv \in A, f(uv) = -\infty$ esetén (amikor is $vu \in A'$) $\pi(u) - \pi(v) \leq c'(vu) = -c(uv)$, vagyis $\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv)$, azaz (3.17) fennáll.

(c)→(b) Tetszőleges x áram költsége bármely $\Delta_\pi(uv) := \pi(v) - \pi(u)$ pont-indukált költségfüggvény esetén nulla. Továbbá (3.16) azzal ekvivalens, hogy $c_\pi(uv) < 0$ esetén $g(uv) < \infty$, míg (3.17) azzal, hogy $c_\pi(uv) > 0$ esetén $f(uv) > -\infty$. Ezek alapján egy x megengedett áramra és (c)-t kielégítő π-re

$$cx = c_\pi x = \sum_{uv \in A} c_\pi(uv) x(uv) =$$

$$= \textstyle\sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) < 0] \geq$$

$$\geq \sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)f(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv \in A} [c_\pi(uv)g(uv) : c_\pi(uv) < 0],$$

ami a cx-re véges alsó korlát. (Most tehát részletesen kiírogatva azt a már korábban látott egyszerű tényt igazoltuk újfent, hogy ha mind a primál, mind a dual poliéder nemüres, akkor cx alulról korlátos a primál poliéderen.) □

Tegyük most fel, hogy z megengedett áram. Készítsünk el egy $D_z = (V, A_z)$ digráfot és az élhalmazán egy c_z költségfüggvényt a következőképpen. Az uv él akkor tartozzék A_z-hez, ha vagy $uv \in A, z(uv) < g(uv)$, és ekkor legyen $c_z(uv) := c(uv)$, vagy pedig $vu \in A, z(vu) > f(vu)$, és ekkor legyen $c_z(uv) := -c(vu)$. A 3.3.6 tételt specializálva megkapjuk a következőt, de a biztonság kedvéért maga a bizonyítás is újra szerepel: a helyzetre specializálva.

3.7.7. Tétel. *Adott z megengedett áram esetén a következők ekvivalensek.*
(a) *z optimális megoldása a (3.15) minimális költségű megengedett áram feladatnak.*
(b) *D_z-ben nem létezik negatív összköltségű irányított kör.*
(c) *Létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, hogy minden $uv \in A$ él esetén*

$$\pi(v) - \pi(u) \le c(uv),\ ha\ z(uv) < g(uv),\quad azaz\ \ c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow z(uv) = g(uv) \tag{3.18}$$

$$\pi(v) - \pi(u) \ge c(uv),\ ha\ z(uv) > f(uv),\quad azaz\ \ c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow z(uv) = f(uv). \tag{3.19}$$

Amennyiben c egészértékű, úgy a szóbanforgó π is választható annak.

Bizonyítás. (a)$\to$(b) Tegyük fel, hogy létezik egy C negatív kör D_z-ben. Az ebben lévő uv éleknek megfelelő D-beli élek kétfélék lehetnek. Vagy egy olyan $uv \in A$ él, amelyre $z(uv) < g(uv)$, vagy egy olyan $vu \in A$ él, amelyre $z(vu) < f(vu)$. Az első típusú éleken z-t kicsiny pozitív Δ-val növelve, a második típusúakon Δ-val csökkentve megengedett áramot kapunk, amelynek költsége kisebb, mint z költsége, hiszen C negatív kör D'-ben.

(b)$\to$(c) Ha D_z-ben nincs negatív kör, akkor a 3.7.1 tétel miatt létezik egy $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $uv \in A, z(uv) < g(uv)$ esetén (amikor is $uv \in A_z$) $\pi(v)-\pi(u) \le c_z(uv) = c(uv)$, azaz (3.18) fennáll, míg $uv \in A, z(uv) > f(uv)$ esetén (amikor is $vu \in A_z$) $\pi(u) - \pi(v) \le c_z(vu) = -c(uv)$, vagyis $\pi(v) - \pi(u) \ge c(uv)$, azaz (3.19) fennáll.

(c)$\to$(b) Tetszőleges x áram költsége bármely $\Delta_\pi(uv) := \pi(v)-\pi(u)$ pont-indukált költségfüggvény esetén nulla. Továbbá (3.18) azzal ekvivalens, hogy $c_\pi(uv) < 0$ esetén $x(uv) = g(uv)$, míg (3.19) azzal, hogy $c_\pi(uv) > 0$ esetén $x(uv) = f(uv)$. Ezek alapján egy x megengedett áramra és (c)-t kielégítő π-re

$$cx = c_\pi x = \sum_{uv\in A} c_\pi(uv)x(uv) =$$

$$= \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)x(uv) : c_\pi(uv) < 0] \ge$$

$$\ge \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)f(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)g(uv) : c_\pi(uv) < 0] =$$

$$= \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum_{uv\in A} [c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) < 0] = cz,$$

azaz z minimális költségű megengedett áram. □

97. Feladat. *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a* 3.7.6 *és a* 3.7.7 *tételek megengedett potenciálokra vonatkozó ellenpárját.*

Az áramokra megfogalmazott optimalitási feltételt könnyen átvihetjük folyamokra.

3.7.8. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvény és a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény. Egy k nagyságú megengedett z folyam akkor és csak akkor minimális költségű a k nagyságú megengedett folyamok között, ha létezik olyan π potenciál, amelyre fennállnak a következő optimalitási feltételek:*

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{3.20}$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{3.21}$$

Bizonyítás. Adjunk a digráfhoz egy ts élt, és definiáljuk a költségét 0-nak. Legyen $g(ts) := f(ts) := k$. Minden régi élen legyen $f(e) := 0$. Az így kibővített $D' = (V, A')$ digráfban a megengedett áramok éppen a D-beli k nagyságú folyamoknak felelnek meg, így a 3.7.7 tételt D'-re alkalmazva a (3.20) és (3.21) feltételeket kapjuk. □

A minimális költségű folyamokra vonatkozó algoritmus segítségével már igazoltuk az alábbi tételt, legalábbis abban az esetben, amikor g egészértékű és c nemnegatív. Megmutatjuk, hogy a háttérben most is a 3.3.4 tételben megfogalmazott, TU-mátrixokra vonatkozó élesített dualitástétel áll.

3.7.9. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $g : A \to \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvény és a $c : A \to \mathbf{R}$ költségfüggvény. A k nagyságú megengedett folyamok költségének minimuma egyenlő a*

$$k\pi(t) + \sum [c_\pi(uv)g(uv) : uv \in A, c_\pi(uv) < 0] \tag{3.22}$$

érték maximumával, ahol a maximum az összes $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvényre megy, amelyre $\pi(s) = 0$. Amennyiben g egészértékű, az optimális folyam választható egésznek. Amennyiben c egészértékű, az optimális π választható egészértékűnek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a digráf Q incidencia-mátrixának első és második sora felel meg az s, illetve a t pontnak. Tekintsük a $\min\{cx : x \geq \geq 0, Qx = (-k, +k, 0, 0, \dots, 0), x \leq g\}$ primál programot. Az $x \leq g$ feltételt az ekvivalens $(-I_m)x \geq -g$ alakba téve felírhatjuk a duális problémát:

$\max\{k(\pi(t)-\pi(s))-gz : \pi Q - zI_m \leq c, z \geq 0\}$, ahol $m = |A|$. A primál poliéder elemei a k nagyságú megengedett folyamok. A 3.3.4 tétel szerint egész g esetén a primál poliéder egész, függetlenül c egészértékűségétől. Hasonlóképp a duális poliéder is egész, amennyiben c egész. Figyeljük meg, hogy tetszőleges π meghatároz egy hozzá tartozó legjobb z-t, amely a duális értékét maximalizálja: $z(uv) := \pi(v) - \pi(u) - c(uv)$, ha $\pi(v) - \pi(u) > c(uv)$, és $z(uv) = 0$, ha $c(uv) \geq \pi(v) - \pi(u)$. Így tehát adott π-hez tartozó $k(\pi(t) - \pi(s)) - gz$ célfüggvény értéke nem más, mint a (3.22) képletben megadott érték, hiszen a π eltolásával feltehetjük, hogy $\pi(s) = 0$. $\square$

3.7.4. Hálózati mátrixokkal adott lineáris programok

Fontos megjegyezni, hogy a hálózati mátrixokkal megadott lineáris programok megoldhatók áram problémaként. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, F feszítő fa és legyen $N := A - F$ a nem faélek halmaza. Legyen adott $f = (f_F, f_N)$ és $g = (g_F, g_N)$ korlát, melyekre $f \leq g$. Legyen továbbá $c = (c_F, c_N)$ egy olyan vektor, amelyre $c_F = 0$. Jelölje az F-hez tartozó $(0, \pm 1)$-es hálózati mátrixot B, míg a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia-mátrixát Q_D. Legyen továbbá $x = (x_F, x_N)$. Tekintsük a $\max\{c_N x_N : f_F \leq Bx_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N\}$ lineáris programot. Belátjuk, hogy ez ekvivalens a $\max\{cx : Q_D x = 0, f \leq x \leq g\}$ maximális költségű áram feladattal.

Amennyiben $x = (x_F, x_N)$ áram (azaz $Q_D x = 0$), úgy könnyen látszik, hogy $x_F = Bx_N$, és persze $cx = c_N x_N$. Emiatt $f \leq x \leq g$ ekvivalens a $f_F \leq Bx_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N$ feltételekkel. Fordítva, tegyük fel, hogy x_N kielégíti ezen utóbbi egyenlőtlenségeket. Minden $e \in N$ nem faélhez legyen $\underline{\chi}_e$ az $(1, a_e)$ vektor, ahol a_e a B mátrix e-hez tartozó oszlopa. (Más szóval, $\underline{\chi}_e$ az e élhez tartozó C_e alapkör $(0, \pm 1)$-es incidenciavektora.) Ekkor persze $\underline{\chi}_e$ áram, és így az $x := \sum[x_N(e)\underline{\chi}_e : e \in N]$ is áram, méghozzá olyan, hogy $x(e) = x_N(e)$, ha $e \in N$. Látható, hogy $f_F \leq Bx_N \leq g_F$ azzal ekvivalens, hogy $f_F(e) \leq x(e) \leq g_F(e)$ minden $e \in F$ élre fennáll.

Következik például, hogy páros gráfok éleinek vagy irányított fák irányított részútjainak egyenletes színezéseire vonatkozó tételeket egy maximális folyamot kiszámító algoritmussal tudjuk algoritmikusan kezelni. Hasonlóképp a kerekítési eredményeket. A maximális költségű megengedett potenciál meghatározásának problémáját pedig úgy lehet algoritmikusan megoldani, hogy felírjuk a hozzátartozó duális feladatot. Ez minimális költségű megengedett áram problémának tekinthető, majd ennek megoldásaként előállítjuk az optimális áramot és ennek optimális duális megoldását, ami éppen az eredeti potenciál probléma megoldása.

3.8. Fedés sétákkal és utakkal

Az alábbiakban a minimális költségű áramok elméletének két érdekes alkalmazását tekintjük át.

3.8.1. Az irányított kínai postás probléma

Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfot kell egy megadott pontjából kiindulva úgy bejárnunk, hogy minden élén legalább egyszer végigmenjünk, és a kiindulási pontba jussunk vissza. Cél a végigjárt élek számának minimalizálása, vagy általánosabban, ha az éleken adott egy végighaladási idő, akkor a teljes bejárás összidejének minimalizálása.

Például egy postásnak a postáról elindulva egy körzet minden utcáján, amelyek mindegyikéről feltesszük, hogy egyirányú, legalább egyszer végig kell haladnia majd a postára visszatérnie. (A kérdést eredetileg irányítatlan gráfra fogalmazta meg Mey-Go Guan kínai matematikus 1960-ban. Ennek megoldása és a kínai postás elnevezés Jack Edmondstól származik, és sokkal mélyebb eszközöket igényel, mint az irányított változat).

Egy másik alkalmazásban áramkör működésének helyességét kell tesztelnünk. Ehhez meg van adva, hogy az áramkör milyen állapotokban lehet. Ezek az állapotok felelnek meg a digráf csúcsainak. Ezen kívül adott még, hogy mely állapotokból mely másokba lehet átmenni, és valójában egy-egy ilyen átmenetnek a helyességét tudjuk mérni. A feladat az összes lehetséges állapotátmenet ellenőrzése minimális idő alatt. Világos, hogy a digráf bejárási probléma miért modellezi ezen tesztelési feladatot.

Annak érdekében, hogy az irányított postás problémát megengedett áram feladatként megfogalmazzuk, képzeljünk el a digráf éleinek egy adott bejárását. Jelölje $z(uv)$ azt a számot, ahányszor az uv élen áthaladtunk. Rögtön látszik, hogy z egy olyan egészértékű áram, amelynek értéke minden élen legalább 1. Megfordítva, egy olyan z egészértékű áramhoz, amely minden élen legalább 1, tartozik egy bejárás, amely minden e élen pontosan $z(e)$-szer halad végig. Ugyanis ha mindegyik e élt $z(e)$ darab párhuzamos példányával helyettesítjük, akkor Euler-digráfot kapunk, és az Euler-digráfok közismerten bejárhatók úgy, hogy minden élen pontosan egyszer haladunk végig. Ezen megfigyelés alapján az optimális bejárási probléma egy minimális költségű megengedett, egészértékű áramnak a meghatározásával egyenértékű a D digráfban az $f \equiv 1$ és $g \equiv +\infty$ korlátozó függvényekre vonatkozóan.

3.8.1. Tétel. *Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfban azon új, meglévővel párhuzamosan behúzott élek minimális száma, melyek hozzáadásával Euler-digráfot kapunk egyenlő a következő maximummal:*

$$\max\{\sum[\delta(V_i) - \varrho(V_i) : i = 1, \ldots, q]\}, \tag{3.23}$$

ahol a maximum a V részhalmazaiból álló olyan $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_q$ megengedettnek nevezett halmazláncokra megy, melyek tagjaira $\delta(V_i) - \varrho(V_i) \geq 0$, és amelyekre igaz, hogy D semelyik éle sem lép egynél több V_i halmazba.

Bizonyítás. Miután egy Euler-digráfban minden halmaz befoka megegyezik a kifokával, így mindegyik V_i halmazba legalább $\delta(V_i) - \varrho(V_i)$ új él fog lépni. Tekintve azonban, hogy az új élek mindegyike meglévővel párhuzamos, és a feltevés szerint semmilyen él nem lép egynél több V_i halmazba, így a hozzáadandó új élek minimális száma legalább $\sum[\delta(V_i) - \varrho(V_i) : i = 1, \ldots, q]$, tehát max $\leq$ min.

Ez a becslés azt is mutatja, hogy D éleinek egy adott párhuzamos többszörözése, amely D-t Euler-digráffá teszi, valamint egy adott $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_q$ megengedett halmazlánc esetén pontosan akkor áll egyenlőség, ha kizárólag V_i-be menő él került többszörözésre. A fordított irány igazolásához tehát ilyen Euler-digráffá tévő párhuzamos éltöbbszörözés és megengedett halmazlánc létezését kell kimutatnunk. E célból tekintsünk egy z minimális költségű egészértékű, megengedett áramot az $f \equiv 1, g \equiv +\infty$ korlátozó függvényekre és a $c \equiv 1$ költségfüggvényre vonatkozólag. A z meghatározza a párhuzamosan megtöbbszörözendő éleket: minden olyan $e = uv$ élre, amelyre $z(uv) \geq 2$, vegyük az e-nek $z(uv) - 1$ párhuzamos példányát. A 3.7.7 tétel miatt létezik egy $\pi : V \to \mathbf{Z}$ függvény, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) = 1$, ha $uv \in A$ és $z(uv) < g(uv)$, és $\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv) = 1$, ha $uv \in A$ és $z(uv) > f(uv)$. Tekintettel arra, hogy $g(uv) \equiv +\infty$, így $z(uv) < g(uv)$ mindig fennáll, azaz minden $uv \in A$ élre $\pi(v) - \pi(u) \leq 1$. A második feltételből pedig az adódik, hogy többszörözött uv élen (azaz ha $z(uv) \geq 2$) $\pi(v) - \pi(u) \geq 1$ és így $\pi(v) - \pi(u) = 1$.

A π esetleges eltolásával feltehetjük, hogy a π legkisebb értéke nulla. A legnagyobb π értéket jelölje q. Legyen $i = 1, \ldots, q$-ra $V_i := \{v \in V : \pi(v) \geq i\}$. Állítjuk, hogy a z által definiált éltöbbszörözés és az így definiált halmazlánc teljesíti a fenti kívánalmakat.

Valóban, $\pi(v) - \pi(u) \leq 1$ miatt D minden uv éle legfeljebb egy V_i halmazba lép be. Mivel $z(uv) \geq 2$ esetén $\pi(v) - \pi(u) = 1$, így tényleg csak valamilyen V_i-be lépő él került többszörözésre. Végül, mindegyik V_i-re valóban $\delta(V_i) \geq \varrho(V_i)$, mert ha valamely i-re $\delta(V_i) < \varrho(V_i)$ állna, akkor a V_i komplementerébe kell, hogy belépjen (legalább $\varrho(V_i) - \delta(V_i)$) többszörözött él, márpedig ilyen élen $\pi(v) - \pi(v) \leq -1$, ellentétben azzal, hogy többszörözött élen $\pi(v) - \pi(v) = 1$. □

98. Feladat. *Dolgozzunk ki modellt az áramkör-tesztelési feladat azon változatára, amelyben egy megadott állapotból egy másikba való átmenetnek nem ugyanaz az ideje, ha az állapotváltást mérjük, mintha egyszerűen csak áttérünk az egyik állapotból a másikba.*

99. Feladat. *Hogyan lehet a digráffedési feladatot megoldani, ha nem kötjük ki, hogy a bejárás végén a kiindulási pontba kell visszaérni? És ha a kiindulási pont is szabadon választható?*

3.8.2. Aciklikus digráfok optimális fedése utakkal

Az olimpia egy napján egy hírügynökség a rendelkezésre álló tudósítóit úgy akarja a különféle eseményekre beosztani, hogy együttesen minél több eseményről tudjanak tudósítani. Az egyes eseményeket egy-egy közös pont nélküli irányított éllel ábrázoljuk, és ezen élek halmazát F-fel jelöljük. Ha az $x = uv$ esemény annyival megelőzi az $x' = u'v'$ eseményt, hogy x befejeződése után át lehet érni x' kezdetére, akkor bevezetünk egy vu' élt. A feladat úgy fogalmazható meg, hogy egy aciklikus digráfban, amelyben adott az élek egy F részhalmaza, adott számú úttal fedjünk le minél több F-beli élt.

3.8.2. Tétel. *Legyen $D = (V, A)$ aciklikus digráfban $F \subseteq A$ az éleknek egy kijelölt részhalmaza, és legyen γ pozitív egész. A γ darab (nem feltétlenül élidegen) irányított úttal lefedhető F-élek maximális száma egyenlő a következő minimummal:*

$$\min\{\gamma q + \text{ az egyik } V_h\text{-ba sem lépő } F\text{-élek száma}\}, \tag{3.24}$$

ahol a minimum a V részhalmazainak olyan q tagú $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_q$ halmazláncaira megy, amelynek tagjaiból nem vezet ki D-beli él.

Bizonyítás. Először igazoljuk a triviális max $\leq$ min irányt. Legyenek P_1, $P_2, \ldots, P_\gamma$ irányított utak D-ben és $V_1 \subset \ldots \subset V_q$ egy olyan halmazlánc, hogy

$$\text{semelyik } V_h \text{ halmazból sem lép ki } D\text{-beli él.} \tag{3.25}$$

Ekkor egy P_i út egy V_h halmazba legfeljebb egyszer léphet be. Emiatt γ út a legjobb esetben is a V_h halmazokba ($h = 1, \ldots, q$) belépő F-élek közül legfeljebb γq, darabot valamint az összes olyan F-élt tartalmazhatja, amely nem lép semelyik V_h-ba, és így valóban max $\leq$ min. Ebből azt is megfigyelhetjük, hogy adott P_i utakra és V_h halmazokra pontosan akkor áll egyenlőség, ha

(1) mindegyik P_i út q különböző F-él mentén belép mind a q darab V_h halmazba,
(2) bármelyik V_h-ba belépő F-élt legfeljebb egy P_i út használja,
(3) minden olyan F-él, amely semelyik V_h halmazba sem lép be, rajta van valamely P_i úton.

A tétel nem triviális irányának igazolásához kimutatjuk egy ilyen útrendszer és halmazlánc létezését. Adjunk D-hez egy s forrás pontot és egy t nyelő pontot, továbbá minden $v \in V$ csúcsra új sv és vt éleket. Ezen kívül minden

$f = uv \in F$ élre adjuk a digráfhoz az f egy párhuzamos $f' = uv$ példányát. Az így nyert digráfot jelölje $D' = (V', A')$. Definiáljuk a g kapacitásfüggvényt F-éleken 1-nek, a többi élen kellően nagynak (valójában $\gamma + 1$ megteszi). Definiáljuk a c költségfüggvényt az F-éleken -1-nek, a többi élen 0-nak.

Tekintsünk egy z egészértékű minimális költségű γ nagyságú megengedett folyamot, valamint egy optimális π potenciált, melyekre tehát teljesülnek a 3.7.7 tételben megfogalmazott optimalitási feltételek:

$$z(uv) > 0 \text{ esetén } \pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \tag{3.26}$$

$$z(uv) < g(uv) \text{ esetén } \pi(v) - \pi(u) \leq c(uv). \tag{3.27}$$

A π esetleges eltolásával feltehetjük, hogy $\pi(t) = 0$. (Figyelem: nem az s π-értékéről tesszük fel, hogy nulla.) A $\pi(s)$ értéket jelöljük q-val. Mivel D aciklikus, így z előáll mint γ darab olyan D'-beli irányított s-t út incidenciavektorának összege, melyek az F-en élidegenek. Jelölje $P'_1, \ldots, P'_\gamma$ ezen utakat és nevezzük az általuk használt éleket fedettnek, míg a nem használtakat fedetlennek.

Mivel minden $e = uv$ nem F-él kapacitása nagy, így ezen éleken mindig $z(e) < g(e)$, ezért a (3.27) optimalitási feltételből $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) = 0$, azaz $\pi(v) \leq \pi(u)$. Ráadásul minden F-él párhuzamos egy (újonnan hozzáadott) éllel, így

$$\text{minden } uv \in A' \text{ élre } \pi(v) \leq \pi(u). \tag{3.28}$$

Mivel minden $v \in V$-re sv és vt él D'-ben, így

$$\text{minden } v \in V \text{ csúcsra } 0 = \pi(t) \leq \pi(v) \leq \pi(s) = q. \tag{3.29}$$

Ha egy $uv \in F$ él fedetlen, azaz $z(uv) = 0$, akkor (3.27) miatt $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) = -1$, vagyis

$$\text{ha } uv \text{ fedetlen } F\text{-él, akkor } \pi(v) < \pi(u). \tag{3.30}$$

Tekintsük a fedett $e = uv$ éleket, amelyeken tehát $z(uv) > 0$. Ha e nem F-él, akkor $c(e) = 0$ és (3.26) miatt $\pi(v) \geq \pi(u)$, vagyis (3.28) folytán

$$\text{ha } uv \text{ fedett nem } F\text{-él, akkor } \pi(u) = \pi(v). \tag{3.31}$$

Ha pedig e fedett F-él, akkor $c(e) = -1$ és (3.26) miatt, $\pi(v) - \pi(u) \geq -1$, vagyis $\pi(v) \leq \pi(u)$ folytán

$$\text{ha } uv \text{ fedett } F\text{-él, akkor } \pi(u) \geq \pi(v) \geq \pi(u) - 1. \tag{3.32}$$

Így ha egy P'_i úton s-ből elindulva végigmegyünk t-ig, akkor a csúcsokon a π érték a kezdeti $q = \pi(s)$ értékről indulva nem F-élen változatlan, F-élen pedig vagy nem változik, vagy eggyel csökken. Ezért minden $h = 1{,}2, \dots, q$ egészre a

$$P_i' \text{ útnak van olyan } uv \in F \text{ éle, amelyre } \pi(u) = h, \pi(v) = h - 1. \qquad (3.33)$$

Legyen $h = 1{,}2, \dots, q$-ra $V_h' := \{v \in V' : \pi(v) \leq h - 1\}$ és $V_h := V_h' - \{s, t\}$. (3.28) miatt V_h'-ból semmilyen él nem lép ki. Jelölje P_i a P_i'-nek D-ben megfelelő utat, ami tehát úgy keletkezik P_i'-ből, hogy kihagyjuk az első valamint az utolsó élét és az összes többi $f' = uv$ új élét helyettesítjük az f'-t definiáló $f = uv$ F-éllel. Állítjuk, hogy a P_i utak és a V_h halmazok teljesítik az (1), (2), (3) feltételeket. (3.33) miatt mindegyik P_i út valamennyi V_h halmazba pontosan egyszer lép be, mégpedig egy olyan F-él mentén, amely egyetlen V_h halmazba lép be, így (1) következik.

A (2) tulajdonsághoz először is figyeljük meg, hogy g definíciója miatt D'-ben a P_i' utak minden F-élt legfeljebb egyszer használnak. Továbbá ha egy $e = uv$ F-éllel párhuzamos új e' élt használ valamelyik P_i' út, akkor (3.31) miatt e nem lép be semelyik V_h-ba, így (2) tényleg fennáll.

Végül (3) azért teljesül, mert ha egy $uv \in F$ él semelyik V_h halmazba nem lép be, akkor $\pi(u) = \pi(v)$, így (3.30) folytán rajta kell lennie valamelyik P_i úton. □

Részbenrendezett halmazok láncfedései

Dilworth tétele arra adott választ, hogy egy P részbenrendezett halmaz mikor fedhető le γ darab lánccal (pontosan akkor, ha nincs γ-nál több elemből álló antilánc). A poláris Dilworth-tétel meghatározta az egyetlen lánccal fedhető elemek maximális számát, magyarán a leghosszabb lánc elemszámát. (Ez a P-t fedő antiláncok minimális számával volt egyenlő.) A két probléma közös általánosításaként megfogalmazható a kérdés, hogy egy részbenrendezett halmazban γ darab lánccal maximum hány elem fedhető le. A választ Greene tétele adja meg.

3.8.3. Tétel (Greene, 1976). *Egy P részbenrendezett halmazban a γ lánccal fedhető elemek maximális c_γ számára $c_\gamma = \min\{q\gamma + |P - \cup\mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q\}$, ahol a minimum a q darab diszjunkt antiláncból álló $\mathcal{A}_q$ családokra megy* ($q = 1{,}2, \dots$).

A bizonyítás triviális max $\leq$ min irányához figyeljük meg, hogy egy lánc minden antiláncból legfeljebb egy elemet tartalmazhat, így γ lánc egyesítése a legjobb esetben a q antilánc Z egyesítéséből γq elemet, valamint az összes $P - Z$-beli elemet tartalmazza.

100. Feladat. *Vezessük le Greene tételének nemtriviális* max $\geq$ min *irányát a 3.8.2 tétel felhasználásával.*

3.9. Fedés körökkel

Közismert Camion azon tétele, amely szerint minden legalább 2 pontú erősen összefüggő turnamentnek van Hamilton-köre, vagy másként fogalmazva, ha egy erősen összefüggő digráf (irányítatlan értelemben vett) stabilitási száma (azaz független ponthalmazainak maximális mérete) 1, akkor a pontok lefedhetők egyetlen egyirányú körrel, röviden dikörrel.

Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfra jelölje $\gamma(D)$ a digráf pontjait fedő dikörök minimális számát, míg $\alpha(D)$ az irányítatlan alapgráf stabilitási számát. A következő eredményt Gallai sejtette 1963-ban, majd Bessy és Thomassé igazolta 2007-ben. Az alábbiakban bemutatandó bizonyítás két korábban meglévő tételén alapul.

3.9.1. Tétel. *Egy $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráfra*

$$\gamma(D) \leq \alpha(D),$$

más szóval D pontjai mindig lefedhetők $\alpha(D)$ dikörrel.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra, felidézzük az ígért két korábbi tételt. A digráf egyirányú köreinek egy $F \subseteq A$ lefogása **lapos**, ha minden él benne van pontosan egyszer lefogott dikörben.

3.9.2. Tétel (Knuth-lemma, 1974). *Erősen összefüggő $D = (V, A)$ digráfban létezik a diköröknek lapos lefogása.*

Bizonyítás. Ha D egyetlen pontból áll, akkor a tétel semmitmondó. Az erősen összefüggő digráfokra vonatkozó fülfelbontási tétel alapján D megkapható egy erősen összefüggő $D' = (V', A')$ digráfból egy P fül hozzáadásával. Indukció alapján a D' diköreinek van egy B' lapos lefogása. Amennyiben P egy kör, úgy P egy tetszőleges élét B'-höz véve a D egy lapos lefogását kapjuk. Így feltehetjük, hogy P egy s-ből t-be menő egyirányú út.

3.9.1. Állítás. *A D' diköreinek van olyan B^* lapos lefogása, amelyre s elérhető t-ből a $D' - B^*$ digráfban.*

Bizonyítás. Ha s benne van a t-ből $D' - B'$-ben elérhető pontok $Z \subseteq V'$ halmazában, akkor $B^* = B'$ jó lesz. Ha s nincs Z-ben, akkor D' minden Z-ből kilépő éle B'-ben van. A B' laposságából következik, hogy D' semelyik Z-be belépő éle sincs B'-ben, hiszen bármely Z-be belépő él is benne van egyszer fedett dikörben, márpedig egy ilyen dikör kilép Z-ből és a kilépő élekről már tudjuk, hogy B'-ben vannak.

Módosítsuk most B'-t olyképpen, hogy a Z-ből kilépő éleket kivesszük belőle, míg a Z-be belépőket bevesszük. A kapott B'' halmaz olyan, hogy $|B'' \cap K| = |B' \cap K|$ minden K dikörre, és ezért B'' is a D' diköreinek egy lapos lefogása. Miután $D' - B''$-ben a t-ből elérhető pontok halmaza szigorúan bővebb, mint Z, legfeljebb n ilyen csere után egy olyan B^* lapos lefogást kapunk, amelyre s is elérhető t-ből a $D' - B^*$ digráfban. □

Legyen b a P fül egy tetszőleges éle. Ekkor $B := B^* + b$ nyilván fedi D minden dikörét, és azt állítjuk, hogy B lapos. Valóban, tekintsünk a $D' - B^*$-ban egy t-ből s-be menő P' egyirányú utat, aminek a létezését a fenti állítás biztosítja. Ekkor $K := P' \cup P$ egy olyan dikör, amelynek b az egyetlen B-hez tartozó eleme. Ezért D minden éle hozzátartozik egy egyszer fedett dikörhöz. □

A másik segédeszköz Gallai egy 1958-as tétele. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}_+$ a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf élhalmazán egy nemnegatív, egészértékű függvény. (Az alkalmazáshoz valójában csak a $c := \underline{\chi}_F$ speciális esetre lesz szükségünk, ahol F a D diköreinek egy lapos lefogása.) Egy K kör c**-értéke** az élei c-értékeinek összege, vagyis $\widetilde{c}(K)$. Csúcsoknak egy multihalmazát (ahol tehát egy csúcs több példányban is szerepelhet) c**-függetlennek** mondunk, ha minden dikörből legfeljebb annyi elemet tartalmaz, mint a dikör c-értéke. Egy multihalmaz egy $x : V \to \mathbf{Z}_+$ egész vektorral azonosítható, és ekkor x c-függetlensége azt jelenti, hogy $\widetilde{x}(V(K)) \leq \widetilde{c}(K)$ minden K körre, ahol $V(K)$ a kör ponthalmaza.

Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ egy súlyfüggvény. A dikörök halmazán értelmezett $y \geq 0$ függvényről azt mondjuk, hogy fedi w-t, ha $\sum[y(K) : v \in V(K), K$ dikör$] \geq w(v)$ minden $v \in V$-re fennáll. Egy $z \geq 0$ áramról azt mondjuk, hogy fedi a w-t, ha $\varrho_z(v) \geq w(z)$ minden $z \in V$ csúcsra fennáll. A w-t fedő körök és w-t fedő áramok közötti kapcsolatot adja meg a következő egyszerű megfigyelés.

3.9.3. Lemma. *Ha $y \geq 0$ a dikörök halmazán értelmezett, w-t fedő függvény, akkor a $z(e) := \sum[y(K) : K$ dikör és $e \in K]$ egy w-t fedő nemnegatív z áramot definiál, melyre $cz = \sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K$ dikör$]$. Ha y egészértékű, akkor z is az. Megfordítva, egy w-t fedő $z \geq 0$ áram előáll dikörök nemnegatív kombinációjaként, és bármely $z = \sum y(Z)\underline{\chi}(Z)$ előállításra az y egy w-t fedő függvény, melyre $cz = \sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K$ dikör$]$. Ha z egészértékű, akkor y is választható annak.*

3.9.4. Tétel (Gallai, 1958)**.** *Legyen $w : V \to \mathbf{Z}_+$ egy súlyfüggvény a D erősen összefüggő digráf ponthalmazán. A w-t fedő dikörök c-értékeinek minimális összege egyenlő a nem-feltétlenül különböző c-független csúcsok maximális w-súlyával.*

Felhasználva a teljesen duális egészértékű rendszerekre vonatkozó 3.1.5 tételt (miszerint egy TDI rendszerrel megadott poliéder egész, ha a feltételi mátrix és a korlátozó vektor egész) Gallai tétele következik az alábbi eredményből (és valójában ekvivalens vele).

3.9.5. Tétel. *Jelölje Q a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf dikör-csúcs incidencia-mátrixát. Jelölje $\widetilde{c}$ azt a vektort, melynek komponensei a Q sorainak (azaz D diköreinek) felelnek meg, és a K dikörnek megfelelő komponens értéke $\widetilde{c}(K)$. Ekkor a*

$$\{Qx \leq \widetilde{c},\ x \geq 0\} \tag{3.34}$$

rendszer teljesen duálisan egészértékű.

Bizonyítás. Legyen w egy egészértékű súlyfüggvény V-n, és tekintsük a következő duális lineáris programot.

$$\min\{\sum[y(K)\widetilde{c}(K) : K \text{ dikör}] : yQ \geq w,\ y \geq 0\}. \tag{3.35}$$

Az kell kimutatnunk, hogy ennek létezik olyan y optimuma, amely egészértékű. A lemma alapján elegendő azt igazolni, hogy a $\min\{cz : z \geq 0$ áram, amely fedi w-t$\}$ rendszernek van egészértékű optimuma. Ez viszont a szokásos pontduplázási technikával rögtön következik a megengedett áramok poliéderének egészértékűségéből. Valóban, minden v pontot helyettesítsünk a v' és v'' pontokkal, az $uv \in A$ éleket helyettesítsük az $u'v''$ éllel (melynek alsó kapacitása 0 és költsége $c(uv)$), végül minden v pontra vegyük be a $v''v'$ élt $w(v)$ alsó kapacitással és 0 költséggel. Ekkor a keletkező D'-gráfban egy megengedett z' áram az eredeti D-ben egy olyan z áramot definiál, amelyre $\varrho_z(v) \geq w(v)$ minden $v \in V$-re, továbbá $c'z' = cz$. □

Legyen F egy adott lapos lefogás, és alkalmazzuk Gallai 3.9.4 tételét a $w \equiv 1$ és $c := \underline{\chi}_F$ speciális esetben. Figyeljük meg, hogy ilyenkor egy S c-független ponthalmaz automatikusan különböző pontokból áll, hiszen minden pont benne van egyszer fedett dikörben, továbbá S stabil, hiszen minden él benne van egyszer fedett dikörben. Ekkor tehát a 3.9.4 tétel a következőt adja.

3.9.6. Tétel (Bessy és Thomassé)**.** *Legyen $F \subseteq A$ egy $D(V, A)$ erősen összefüggő digráf diköreinek egy lapos lefogása. Ekkor a maximális F-független stabil halmaz elemszáma egyenlő a pontokat fedő dikörök F-értékeinek minimális összegével* (ahol az F-függetlenség a $\underline{\chi}_F$-függetlenséget rövidíti, vagyis az S halmaz F-független, ha minden K dikör legfeljebb $|F \cap K|$ pontban metszi).

Bizonyítás. (3.9.1 tételé) Mivel egy dikör értéke legalább 1, Bessy és Thomassé tételéből rögtön következik, hogy a maximális stabil halmaz elemszáma legalább akkora, mint a pontokat fedő dikörök minimális száma. □

Legyen $U \subseteq V$ a csúcsok egy adott részhalmaza. A 3.9.1 tétel bizonyításában használt megfontolást a $w \equiv 1$ helyett a $w := \underline{\chi}_U$ függvényre alkalmazva rögtön kapjuk az alábbi kiterjesztést.

3.9.7. Tétel. *Legyen U a $D = (V, A)$ erősen összefüggő digráf csúcsainak egy részhalmaza. Ekkor U lefedhető $\alpha(D|U)$ dikörrel, ahol $\alpha(D|U)$ jelöli az U által feszített digráf stabilitás számát.*

101. Feladat. *Adjunk direkt bizonyítást a 3.9.7 tétel azon speciális esetére, amikor U klikket feszít.*

Megjegyzés Felvetődik a kérdés, hogy ha a bizonyítás két fő összetevője már legkésőbb 1974-ben ismert volt, akkor miért csak 2007-ben jelent meg az első bizonyítás. Egyrészt Bessy és Thomassé nem ismerte ezen korábbi eredményeket, ők egy más megközelítést alkalmaztak. De ha még valaki ismerte volna is (mint ahogy az egyik segédtétel magától Gallaitól való, és biztosra vehető, hogy Gallai ismerte Knuth lemmáját), a bizonyítást Bessynek és Thomassénak az az alapvető észrevétele tette lehetővé, hogy valójában nem közvetlenül a Gallai-sejtést kell igazolni, hanem a fentebb már megfogalmazott, sokkal élesebb minimax tételt: *a maximális F-független stabil halmaz elemszáma egyenlő a pontokat fedő dikörök F-értékeinek minimális összegével.*

3.10. Gyökeresen k-élösszefüggő digráfok

Legyen $D = (V, A)$ gyökeresen k-élösszefüggő digráf. Célunk egy minimax tételt kidolgozni a gyökeresen k-élösszefüggő feszített részgráf minimális költségére. A tétel bizonyításához hasznos lesz az alábbi egyszerű megfigyelés.

3.10.1. Lemma. *Legyen $r_1, \dots, r_n$ nemnegatív racionális számoknak egy sorozata. Ameddig csak lehet, válasszunk ki négy különböző tagot úgy, hogy a két középső pozitív. Csökkentsük a két középsőt a kisebbikük α értékével és növeljük a két kiválasztott szélsőt α-val. Ekkor az eljárás véges sok lépés után véget ér.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy a sorozat egész számokból áll. Mivel az első tag sosem csökken, és a teljes összeg konstans, véges sok lépés után az első tag rögzül. Töröljük el az első tagot, és indukcióval a lemma következik. □

Legyen $D = (V, A)$ digráf, amelyben s kijelölt gyökérpont.

3.10.2. Tétel. *Ha D gyökeresen k-élösszefüggő, úgy D gyökeresen k-élösszefüggő feszített részgráfjainak poliédere $\{x : \varrho_x(Z) \geq k$ minden $\emptyset \subset Z \subseteq V - s$ halmazra és $0 \leq x(e) \leq 1$ minden e élre$\}$. A leírásban szereplő rendszer TDI.*

Bizonyítás. Legyen $c : A \to \mathbf{Z}$ egészértékű. Jelölje Q azt a (0,1)-mátrixot, amelyben a sorok $V - s$ nemüres részhalmazainak felelnek meg, míg az oszlopok a D éleinek. Az $X \subseteq V - s$ halmaznak és az e élnek megfelelő mátrixelem pontosan akkor 1, ha e belép X-be. Az alábbiakban jelölje $\underline{k}$ azt a vektort, amelynek minden komponense k, és a komponensek a $V - s$ részhalmazainak felelnek meg.

Ekkor a primál probléma $\min\{cx : 0 \leq x \leq \underline{1}, Qx \geq \underline{k}\}$, míg a duális:

$$\max\{\sum_{X \subseteq V-s} y(X)k - z\underline{1} : yQ - z \leq c, y \geq 0, z \geq 0\}, \tag{3.36}$$

ahol az $x(e) \leq 1$ egyenlőtlenségnek megfelelő duális változót $z(e)$ jelöli.

Adott y egyértelműen meghatározza a z optimális választását: $z(e) = (yq_e - c(e))^+$, ahol q_e a Q e-nek megfelelő oszlopa. Így beszélhetünk arról, hogy egy y a (3.36) optimális megoldása.

Azt kell igazolnunk, hogy (3.36) optimuma egész vektoron is felvétetik. Legyen y_0 egy optimális (racionális) megoldás. Ameddig csak létezik két metsző halmaz, X és Y, melyek y_0-értéke pozitív, módosítsuk y_0-t a következőképpen. Az $\alpha := \min\{y_0(X), y_0(Y)\}$ értékkel csökkentsük $y_0(X)$-et és $y_0(Y)$-t, és egyúttal növeljük α-val mind $X \cap Y$, mind $X \cup Y$ y_0-értékét. Könnyű ellenőrizni, hogy (a ϱ befok függvény szubmodularitása miatt) ismét duális megoldást kapunk, amely optimális. A duális optimum ezen megváltoztatását nevezzük egy kikeresztezési lépésnek.

A $V - s$ részhalmazainak tekintsük egy olyan sorrendjét, amelyet úgy kapunk, hogy egymás után választunk a még nem választott részhalmazok közül egy minimálisat. Ekkor tetszőleges $X, Y \subseteq V - s$ esetén $X \cap Y$ megelőzi X-t és Y-t, míg $X \cup Y$ követi őket. Ebből, és a 3.10.1 lemmából következik, hogy a fenti kikeresztezési lépésből csak véges sok lehet.

Feltehetjük tehát, hogy azon $V - s$-beli részhalmazok $\mathcal{P}'$ rendszere, melyeken az y_0 értéke pozitív, lamináris. Ekkor $\mathcal{P}'$ az ismert módon egy F fenyővel és egy $\varphi : V \to V(F)$ leképezéssel reprezentálható. Könnyen ellenőrizhető, hogy (*) D minden e élére a $\mathcal{P}'$ azon tagjainak megfelelő fenyőbeli élek, melyekbe az e belép, az F egy irányított részútját alkotják.

Legyen a $\mathcal{H}$ hipergráf alaphalmaza $\mathcal{P}'$, élei pedig a következő módon definiáltak. D minden e élére legyen H_e azon $\mathcal{P}'$-beli halmazok rendszere, melyekbe e belép, $\mathcal{H}$ élei pedig feleljenek meg a H_e rendszereknek, az összes D-beli e élre. (Tehát $|E(\mathcal{H})| = |A|$.) Ekkor (*) és a 3.2.2 következmény miatt $\mathcal{H}$ teljesen unimoduláris. Másrészt a $\mathcal{H}$ incidencia-mátrixa éppen a Q mátrix azon Q' részmátrixa, melynek sorai a $\mathcal{P}'$ elemeinek felelnek meg. Emiatt Q' egy TU-mátrix, és így a 3.3.7 lemmából a tétel következik. □

A dualitástételből és a 3.10.2 tételből kiolvasható az alábbi minimax tétel, amely a legolcsóbb fenyőkre vonatkozó Fulkerson-tétel általánosításának tekinthető.

3.10.3. Tétel. *Legyen $D = (V, A)$ gyökeresen k-élösszefüggő digráf az s gyökérpontra nézve és $c : A \to \mathbf{R}_+$ egy nemnegatív költségfüggvény. A legolcsóbb gyökeresen k-élösszefüggő feszített részgráf költsége egyenlő a következő kifejezéssel:*

$$\max\{k \textstyle\sum_{X \subseteq V-s} y(X) - \sum_{e \in A}(\sum[y(Z) : Z\text{-be belép } e] - c(e))^+ : \ y \geq 0\}. \tag{3.37}$$

Azon halmazok rendszere, melyen y pozitív, választható laminárisnak. Amennyiben c egészértékű, az optimális y is választható egészértékűnek.

A $k = 1$ esetben a fenti tétel egyszerűsödik, mert a primál problémában nem kell explicit kikötni az $x \leq \underline{1}$ feltételt, hiszen ilyenkor a c nemnegativitása miatt a $\varrho_x(X) \geq 1$ $(X \subseteq V - s)$ feltételt teljesítő x egész vektorok automatikusan (0,1) értékűek. De ekkor az ezen feltételeknek megfeleltetett z duális változó sem szerepel, és ezért a minimax tétel a következőképp egyszerűsödik.

3.10.4. Tétel (Fulkerson)**.** *Nemnegatív, egészértékű c súlyfüggvény esetén a minimális súlyú s gyökerű feszítő fenyő súlya egyenlő a c-független, s-et nem tartalmazó halmazok maximális számával. Az optimális c-független halmazrendszer választható laminárisnak.*

4. fejezet

Merev gráfok és szerkezetek

4.1. Merev és infinitezimálisan merev szerkezetek

Ebben a fejezetben szerkezetek (avagy geometriai gráfok) merevségével kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk, ezek közt is elsősorban olyanokat, amelyek megoldásához az előző fejezetekben megismert gráf- és matroidelméleti módszerek vezetnek el.

A diszkrét geometriának ezt a területét Maxwell vizsgálta először az 1860-as években, de Euler és Cauchy néhány korábbi eredménye is ide sorolható. Merevségi eredmények a kézenfekvő statikai alkalmazásokon kívül számos más területen is felhasználhatók, például geometriai pakolási problémákban, szenzorhálózatok lokalizációs problémáiban, robotok mozgásának koordinálásához, CAD feladatoknál, vagy molekulák strukturális vizsgálataiban. A bevezető részben először kétféle merevségi tulajdonságot definiálunk (merevség és infinitezimális merevség). Látni fogjuk, hogy kellően általános helyzetű szerkezetek esetén ezek a tulajdonságok egybeesnek és csak a szerkezet gráfjától függnek.

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf és legyen $p : V \to \mathbf{R}^d$ a gráf pontjaihoz a d dimenziós euklideszi tér pontjait rendelő függvény. Ekkor a (G, p) párt **szerkezetnek** nevezzük. (A szerkezet (framework) elnevezés a statikai alkalmazásoknak köszönhető: a gráf egy realizációjára olyan rúdcsukló szerkezetként is tekinthetünk, melyben a pontok csuklóknak felelnek meg, az élek pedig merev, azaz rögzített hosszúságú rudaknak.) A (G, p) szerkezetet a G gráf egy (d dimenziós) **realizációjának** is hívjuk, melyben egy $v \in V$ pont képe a $p(v)$ pont, egy $uv \in E$ él pedig a $p(u)p(v)$ egyenes szakasznak felel meg. Az uv él **hossza** tehát a $||p(u) - p(v)||$ távolság, melyet a realizáció egyértelműen meghatároz. A gráf (G, p) és (G, q) realizációi **ekvi-**

valensek, ha minden $uv \in E$ élre $||p(u) - p(v)|| = ||q(u) - q(v)||$. Ha ez az egyenlőség minden $u, v \in V$ pontpárra fennáll, akkor a két realizácó **kongruens**. A (G, p) **merev**, ha ez a tulajdonság csak lokálisan teljesül, azaz létezik olyan $\epsilon > 0$, melyre ha (G, q) ekvivalens (G, p)-vel és $||p(v)-q(v)|| < \epsilon$ minden $v \in V$-re, akkor (G, q) kongruens (G, p)-vel.

A (G, p) egy **mozgása** (G, q)-ba egy olyan $P : [0,1] \times V \to \mathbf{R}^d$ függvény, amelyre

(M1) $P(0, v) = p(v)$ és $P(1, v) = q(v)$ minden v-re,

(M2) $||P(t, u) - P(t, v)|| = ||p(u) - p(v)||$ minden $t \in [0,1]$-re és minden uv élre,

(M3) $P(t, v)$ folytonos t-ben minden v-re.

Megmutatható, hogy ha van mozgás (G, q)-ba, akkor differenciálható mozgás is van, azaz olyan, amelyben $P(t, v)$ differenciálható t-ben minden v-re. Az is igazolható, hogy (G, p) pontosan akkor merev, ha minden mozgása egy vele kongruens szerkezethez vezet.

Adott szerkezet merevségének eldöntése $d \geq 2$ esetén NP-teljes. A következő – mint látni fogjuk, erősebb – tulajdonság azonban kezelhető.

A (G, p) szerkezet **infinitezimális mozgása** egy olyan $u : V \to \mathbf{R}^d$ hozzárendelés, amelyre teljesül, hogy minden $v_i v_j$ élre

$$(u(v_i) - u(v_j))(p(v_i) - p(v_j)) = 0.$$

Infinitezimális mozgást ad például minden differenciálható mozgás $t = 0$ pontban vett deriváltja, azaz a pontok „kezdősebessége”.

Ezeknek az élekre vonatkozó egyenlőségeknek az együtthatóit egy mátrixba foglalhatjuk: a d dimenziós (G, p) szerkezet $R(G, p)$ **merevségi mátrixában** a gráf minden $v_i v_j$ éléhez tartozzon egy sor, és minden v_i ponthoz d oszlop. Ha $v_i v_j$ él, akkor a neki megfelelő sorban a v_i oszlopaiban álljanak a $p(v_i) - p(v_j)$ vektor koordinátái, a v_j oszlopaiban pedig a $p(v_j) - p(v_i)$ koordinátái. A sorban mindenhol máshol legyenek nullák. Így a (G, p) infinitezimális mozgásai pontosan azok a $d|V|$ dimenziós u vektorok, melyekre $R(G, p)u = 0$.

Példa. A K_4 teljes gráf egy $\mathbf{R}^2$-beli realizációja esetén $R(K_4, p)$ egy hatszor nyolcas mátrix, melyben a $v_1 v_2$ élnek megfelelő sor

$$(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

ahol $p(v_i) = (x_i, y_i)$, és az i-edik oszloppár tartozik v_i-hez, minden $1 \leq i \leq$ ≤ 4-re.

102. Feladat. *Igazoljuk, hogy az alábbi vektorok (melyek az x, illetve az y tengely menti eltolásnak, valamint egy forgatásnak felelnek meg) egy $\mathbf{R}^2$-beli szerkezet $R(G, p)$ merevségi mátrixának minden sorára merőlegesek és* *háromdimenziós alteret feszítenek (feltéve, hogy $p(v_i)$ nem minden pontra ugyanaz):*

$$(1{,}0{,}1{,}0,...,1{,}0),\ (0{,}1{,}0{,}1,...,0{,}1),\ (-y_1, x_1, -y_2, x_2, ..., -y_{|V|}, x_{|V|}).$$

Az $n \geq 2$ és $d \geq 1$ egészekre legyen

$$S(n,d) = \begin{cases} nd - \binom{d+1}{2} & \text{ha } n \geq d+2 \\ \binom{n}{2} & \text{ha } n \leq d+1. \end{cases}$$

(Figyeljük meg, hogy $n = d$ és $n = d+1$ esetén a kétféle érték megegyezik.)

4.1.1. Tétel. *Legyen (G,p) egy d dimenziós szerkezet. Ekkor az $R(G,p)$ merevségi mátrix rangja legfeljebb $S(|V|,d)$. Ha egyenlőség áll, akkor (G,p) merev.*

Ez motiválja a következő definíciót. A $G = (V,E)$ gráfhoz tartozó d-dimenziós (G,p) szerkezet **infinitezimálisan merev**, ha

$$r(R(G,p)) = S(|V|,d).$$

Egy-, két- és háromdimenziós szerkezetek esetén tehát az infinitezimális merevséghez szükséges rang $|V|-1$, $2|V|-3$, illetve $3|V|-6$ (az utolsó eset alól kivétel, ha $|V| = 2$, amikor a rang feltétel 1). Egy szerkezet infinitezimális merevsége egy egyszerű rangszámítással – Gauss-eliminációval – tesztelhető.

Az 4.1.1 Tétel alapján minden infinitezimálisan merev szerkezet merev. Fordítva azonban ez nem mindig érvényes.

Nevezzünk a $p : V \to \mathbf{R}^d$ leképezést (vagy másképpen $\mathbf{R}^{d|V|}$ egy pontját) **generikusnak**, ha az $R(K_{|V|},p)$ merevségi mátrix minden olyan részdeterminánsa, amely - a benne szereplő koordinátákat változóknak tekintve - nem azonosan nulla polinom, az a p koordinátáit behelyettesítve sem nulla. Majdnem minden p generikus, hiszen $\mathbf{R}^{d|V|}$ pontjaiból véges sok nem azonosan nulla polinom gyökhelyeit kivéve minden pont generikus. Egy (G,p) szerkezetre akkor mondjuk, hogy generikus, ha p generikus. Amennyiben a p által meghatározott $d|V|$ koordináta algebrailag független számhalmazt alkot a racionális számtest felett, akkor biztosan generikus. (Néha ez utóbbi módon definiálják egy ponthalmaz, illetve egy szerkezet generikusságát.)

4.1.2. Tétel. *Legyen (G,p) egy d dimenziós generikus szerkezet. Ekkor (G,p) pontosan akkor merev, ha infinitezimálisan merev.*

Generikus esetben tehát a merevség ekvivalens az infinitezimális merevséggel, amelyről világos, hogy generikus esetben csak a G gráftól függ. A $G = (V,E)$ gráfra azt mondjuk, hogy **generikusan merev**, vagy röviden **merev $\mathbf{R}^d$-ben**, ha létezik olyan $p : V \to \mathbf{R}^d$ hozzárendelés, melyre (G,p)

infinitezimálisan merev. Így az is igaz, hogy ha G merev, akkor majdnem minden (avagy minden generikus) (G,p) realizációja merev. A G gráf merevségét tehát az $R(G,p)$ változós mátrix ún. generikus rangja határozza meg. Megjegyezzük, hogy általában nem ismert polinom idejű determinisztikus algoritmus egy mátrix generikus rangjának kiszámolására.

A gráf élein definiált, a megfelelő $R(G,p)$-beli sorok lineáris függetlensége által meghatározott matroidok izomorfak minden generikus realizációra. Az így kapott matroid a G d-dimenziós **merevségi matroidja**, melyet $\mathcal{R}_d(G) = (E, r_d)$ jelöl, ahol r_d a rangfüggvény. $\mathcal{R}_d(G)$ rangját jelölje $r_d(G)$. Igy a G gráf pontosan akkor merev $\mathbf{R}^d$-ben, ha $r_d(G) = S(|V|,d)$. G **független** (illetve **merevségi kör**), ha az élhalmaza független (ill. egy kör) $\mathcal{R}_d(G)$-ben.

A merevségi mátrix rangjára a 4.1.1 tételben adott felső korlátot egy X ponthalmaz által feszített részgráfra, illetve a megfelelő részmátrixra alkalmazva könnyen adódik a függetlenség alábbi szükséges feltétele.

4.1.3. Lemma. *Ha $G = (V,E)$ független $\mathbf{R}^d$-ben, akkor $i(X) \leq S(|X|,d)$ minden $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$ ponthalmazra.*

Ebből a következő felső korlátot kapjuk a gráf rangjára. Egy, a $G = (V,E)$ gráf ponthalmazának (legalább kétpontú) részhalmazaiból álló $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_t\}$ halmazrendszert a G **fedésének** nevezzük, ha $E = \cup_1^t E(G[X_i])$.

4.1.4. Lemma. *A $G = (V,E)$ rangjára érvényes az*

$$r_d(G) \leq \min_{\mathcal{X}} \sum_{X \in \mathcal{X}} S(|X|,d)$$

egyenlőtlenség, ahol a minimumot a G összes $\mathcal{X}$ fedésére vesszük.

A $d = 1{,}2$ esetben a 4.1.3 lemma megfordítása is igaz. A $d = 1$ esetben ez abból következik, hogy a gráf egydimenziós merevségi matroidja izomorf a körmatroidjával. A $d = 2$ esetben ez Laman tétele, melyet a következő fejezetben igazolunk. Hasonlóan, a 4.1.4 lemmában egyenlőség érvényes a $d = 1{,}2$ esetekben. A $d = 2$ esetben erre is látunk majd bizonyítást.

A $d \geq 3$ esetekben azonban az előbbi megfordítások egyike sem igaz. A klasszikus háromdimenziós példa erre az a gráf, amelyet két K_5 teljes gráfból kapunk úgy, hogy egy-egy kijelölt pontpárjukat azonosítjuk, majd az ezen pontok között menő éleket töröljük (ezt 2-összeg műveletnek nevezik). A kapott gráf az ún. dupla banán gráf. A terület talán legfontosabb és legnehezebb nyitott kérdése éppen az, hogy van-e a függetlenségre jó karakterizáció, illetve általánosabban, kiszámolható-e polinomidőben egy gráf rangja a három- (vagy több-) dimenziós merevségi matroidban.

Megjegyezzük, hogy a függetlenség (és így a merevség) NP-ben van minden d-re. Nem nehéz igazolni (lásd a 106. feladatot), hogy mindig létezik olyan (G,p) realizáció, melyre $R_d(G,p)$ rangja éppen $r_d(G)$, és amelynek minden eleme egy 1 és $|V|$ közti egész szám. Hasonló megfigyelésen múlik az is, hogy a merevség tesztelésére van hatékony randomizált algoritmus.

4.2. Merev gráfok a síkban

A továbbiakban csak a $d = 2$ esettel foglalkozunk. Jellemezni fogjuk a merev gráfokat és megmutatjuk, hogy a merevség polinom időben eldönthető. Ehhez az alábbi megfogalmazás lesz hasznos a számunkra: egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor merev, ha van olyan realizációja, melynek merevségi mátrixában van $2|V| - 3$ lineárisan független sor. Ha a (G, p) merevségi mátrixának sorai lineárisan függetlenek, akkor (G, p)-t **függetlennek** mondjuk. A gráf egy $F \subseteq E$ élhalmazát akkor nevezzük **függetlennek**, ha a $H = (V, F)$ részgráfnak valamely (H, p) szerkezete független. A gráf **független**, ha az élhalmaza független. Így független minden olyan gráf is, melynek élhalmaza üres. A merevség eldöntéséhez tehát azt kell meghatározzuk, tartalmaz-e a gráf $2|V| - 3$ méretű független élhalmazt. A 4.1.3 lemma a $d = 2$ esetben a következőt adja.

4.2.1. Lemma. *Legyen a (G, p) szerkezet (illetve a G gráf) független. Ekkor*

$$i(X) \leq 2|X| - 3 \text{ minden } X \subseteq V, |X| \geq 2 \text{ ponthalmazra.} \tag{4.1}$$

A megfordítás igazolásához először definiáljunk két műveletet, melyek segítségével egy adott szerkezetet egy újabb ponttal egészíthetünk ki. A (G, p) **másodfokú kiterjesztése** (a v_i, v_j pontokon az új v_0 ponttal) az a (G', p') szerkezet, melyre a G' gráf a G-ből egy új v_0 pont és a v_0v_i, v_0v_j élek hozzávételével áll elő, a p' pedig a p hozzárendelést terjeszti ki egy $p'(v_0) \in \mathbf{R}^2$ ponttal (a többi pontra $p'(v) = p(v)$.) A (G, p) **harmadfokú kiterjesztése** (a v_iv_j élen és a v_k ponton az új v_0 ponttal) az a (G', p') szerkezet, melyre a G' gráf a G-ből a v_iv_j él törlésével, valamint egy új v_0 pont és a v_0v_i, v_0v_j, v_0v_k élek hozzávételével áll elő. Mint a másik műveletnél, p' itt is a p hozzárendelést terjeszti ki egy $p'(v_0) \in \mathbf{R}^2$ ponttal (a többi pontra $p'(v) = p(v)$.) Ezek a műveletek egy gráfon is hasonlóan értelmezhetők a p-re vonatkozó rész figyelmen kívül hagyásával.

4.2.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy (G, p) független. Legyen (G', p') a (G, p) egy olyan másodfokú kiterjesztése a v_i, v_j pontokon a v_0 ponttal, melyre $p'(v_0)$, $p'(v_i), p'(v_j)$ nem kollineáris. Ekkor (G', p') is független.*

Bizonyítás. Tekintsük az $R(G', p')$ merevségi mátrixot, melyben a sorokat és oszlopokat úgy rendeztük, hogy az utolsó két sor a v_0v_i és v_0v_j élekhez, az első két oszlop a v_0 ponthoz tartozzon. Tegyük fel, hogy a sorok valamely lineáris kombinációja a $\lambda_{e_1}, \lambda_{e_2}, ..., \lambda_{v_0v_i}, \lambda_{v_0v_j}$ együtthatókkal az azonosan nulla vektort adja. Ekkor az első két oszlopot tekintve azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{v_0v_i}(p'(v_0) - p'(v_i)) + \lambda_{v_0v_j}(p'(v_0) - p'(v_j)) = 0.$$

Mivel $p'(v_0), p'(v_i), p'(v_j)$ nem kollineáris, ez csak $\lambda_{v_0v_i} = \lambda_{v_0v_j} = 0$ esetén lehet. Emiatt a lineáris kombináció a többi sorra megszorítva $R(G,p)$ sorainak adja egy olyan lineáris kombinációját, amely a nullvektort adja. Mivel (G,p) független, így $\lambda_e = 0$ kell álljon a többi élre is. Tehát (G',p') is független. □

4.2.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy (G,p) független és $p(v_i), p(v_j), p(v_k)$ nem kollineáris. Legyen (G',p') a (G,p) egy olyan harmadfokú kiterjesztése a v_iv_j élen és a v_k ponton a v_0 ponttal, melyre $p'(v_0)$ a $p(v_i)$ és $p(v_j)$ pontokon átmenő egyenesen levő (a $p(v_i)$, $p(v_j)$ pontoktól különböző) pont. Ekkor (G',p') is független.*

Bizonyítás. Tekintsük az $R(G',p')$ merevségi mátrixot, melyben a sorokat és oszlopokat úgy rendeztük, hogy az utolsó három sor a v_0v_i, v_0v_j, v_0v_k élekhez, az első hat oszlop a v_0, v_i, v_j pontokhoz tartozzon. Tegyük fel, hogy a sorok valamely lineáris kombinációja a $\lambda_{e_1}, \lambda_{e_2}, ..., \lambda_{v_0v_i}, \lambda_{v_0v_j}, \lambda_{v_0v_k}$ együtthatókkal az azonosan nulla vektort adja. Ekkor az első két oszlopot tekintve azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{v_0v_i}(p'(v_0) - p'(v_i)) + \lambda_{v_0v_j}(p'(v_0) - p'(v_j)) + \lambda_{v_0v_k}(p'(v_0) - p'(v_k)) = 0.$$

A $p'(v_0)$ választása és a $p'(v_i), p'(v_j), p'(v_k)$ pontok általános helyzete miatt így

$$\lambda_{v_0v_k} = 0,$$

valamint

$$\lambda_{v_0v_i}(p'(v_0) - p'(v_i)) = -\lambda_{v_0v_j}(p'(v_0) - p'(v_j)) = \lambda_{v_iv_j}(p'(v_i) - p'(v_j))$$

valamely $\lambda_{v_iv_j}$ számra. Figyeljük meg, hogy a lineáris kombinációt a többi sorra megszorítva, majd a ((G,p) mátrixához tartozó) v_iv_j élnek megfelelő sort a $\lambda_{v_iv_j}$ együttható ellentettjével hozzáadva szintén a nullvektort kapjuk. Mivel (G,p) független, így itt minden együttható nulla kell legyen. Emiatt a (G',p') soraira vonatkozó együtthatók is azonosan nullák, azaz (G',p') is független. □

103. Feladat. *Mutassunk minden $n \geq 1$-re n pontú merev gráfokat!*

A $G = (V,E)$ gráfot nevezzük **ritka** gráfnak, ha (4.1) teljesül, azaz minden $X \subseteq V$, $|X| \geq 2$ ponthalmazra $i(X) \leq 2|X| - 3$. A fenti lineáris algebrai meggondolások mellett szükségünk van a ritka gráfok kombinatorikus tulajdonságaira vonatkozó megfigyelésekre. Egy v harmadfokú pont **leemelése** (az u, w pontokra) az a művelet, mely törli a v pontot és a gráfhoz ad egy olyan új élt, mely v valamely két, eddig még nem szomszédos u, w szomszédja között vezet. Egy harmadfokú pontot tehát legfeljebb háromféleképp emelhetünk le. Figyeljük meg, hogy a leemelés éppen a (szerkezet gráfján tekintett) harmadfokú kiterjesztés művelet inverze.

4.2.4. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy ritka gráf, melyre $|V| \geq 3$, valamint legyen $v \in V$. Ekkor*
(i) ha $d(v) = 2$, akkor $G - v$ is ritka,
(ii) ha $d(v) = 3$, akkor van olyan leemelés a v pontnál, melyre a leemeléssel kapott gráf is ritka.

Bizonyítás. Az állítás (i) része a ritka gráfok definíciójából rögtön következik. A (ii) rész igazolásához a kritikus halmazok tulajdonságait fogjuk használni: az $X \subseteq V$ halmaz **kritikus**, ha $i(X) = 2|X| - 3$. Jelöljük a v szomszédait u, w, z-vel és figyeljük meg, hogy a v leemelése az u, w pontokra pontosan akkor nem ad ritka gráfot, ha van olyan $X \subseteq V - v$ kritikus halmaz, amely tartalmazza az u, w pontokat. A következő egyenlőség a halmazok által feszített élek leszámlálásával egyszerűen ellenőrizhető.

4.2.5. Lemma. *Legyenek a G gráfban $X, Y \subseteq V(G)$ tetszőleges ponthalmazok. Ekkor*

$$i(X) + i(Y) + d(X, Y) = i(X \cup Y) + i(X \cap Y). \tag{4.2}$$

4.2.6. Lemma. *Legyen a $H = (V, F)$ gráf ritka, és legyenek $X, Y \subseteq V$ olyan kritikus halmazok H-ban, melyekre $|X \cap Y| \geq 2$. Ekkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is kritikusak, és $d(X, Y) = 0$.*

Bizonyítás. Mivel H ritka, a (4.2) egyenlőséget felhasználva kapjuk, hogy $2|X| - 3 + 2|Y| - 3 = i(X) + i(Y) = i(X \cap Y) + i(X \cup Y) - d(X, Y) \leq$ $2|X \cap Y| - 3 + 2|X \cup Y| - 3 - d(X, Y) = 2|X| - 3 + 2|Y| - 3 - d(X, Y)$. Azaz $d(X, Y) = 0$, és mindenhol egyenlőség áll. Emiatt $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is kritikusak. □

4.2.7. Lemma. *Legyenek X, Y, Z kritikus halmazok a G ritka gráfban. Ha $|X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 1$ és $X \cap Y \cap Z = \emptyset$ akkor $X \cup Y \cup Z$ is kritikus.*

Tegyük fel, hogy egyik leemelés sem ad ritka gráfot v-nél. Ekkor léteznek olyan $X, Y, Z \subseteq V - v$ kritikus halmazok, melyekre $u, w \in X$, $u, z \in Y$ és $w, z \in Z$. (Egy él végpontjai kritikus halmazt alkotnak, így ezek a halmazok abban az esetben is léteznek, ha néhány leemelés a szomszédok közt vezető él miatt nem lenne elvégezhető.)

Ha két ilyen halmazra pl. $|X \cap Y| \geq 2$ teljesül, akkor a 4.2.6 lemma miatt $X \cup Y$ is kritikus. Mivel $u, w, z \in X \cup Y$, ezért v-ből három él vezet $X \cup Y$-ba. Így az $X \cup Y \cup v$ halmaz megsértené a ritkasági feltételt G-ben. Emiatt feltehetjük, hogy $|X \cap Y| = |X \cap Z| = |Y \cap Z| = 1$ és $X \cap Y \cap Z = \emptyset$. A 4.2.7 lemma miatt $X \cup Y \cup Z$ is kritikus. Így az $X \cup Y \cup Z \cup v$ halmaz lenne túl sűrű G-ben. Ez az ellentmondás mutatja, hogy legalább az egyik leemelés ritka gráfot ad. □

4.2.8. Tétel. *(Laman) A $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor független $\mathbf{R}^2$-ben, ha ritka.*

Bizonyítás. Az 4.2.1 lemma alapján már tudjuk, hogy minden független gráf ritka. Annak igazolását, hogy minden G ritka gráfhoz van olyan (G, p) szerkezet, melynek merevségi mátrixában a sorok lineárisan függetlenek, a gráf pontszámára vonatkozó indukcióval igazoljuk. Azt a valamivel erősebb állítást fogjuk megmutatni, hogy a (G, p) általános helyzetűnek is választható.

Feltehetjük, hogy G-ben van él. Amennyiben G kétpontú, a ritkasági feltétel miatt egyetlen éle van. Ekkor minden olyan (G, p) szerkezetre, amelyben a G pontjait p a sík különböző pontjaihoz rendeli, a merevségi mátrix sora nem lesz azonosan nulla, így a kapott szerkezet független (és általános helyzetű) lesz. Tekintsük most az általános esetet, amelyben tehát $|V| \geq 3$. Feltehető, hogy minden pont foka legalább kettő, hiszen ellenkező esetben újabb élek hozzávételével – a ritkasági feltétel megsértése nélkül – az ennél kisebb fokú pontok fokszáma megnövelhető.

Ugyanakkor mivel G ritka, $|E| \leq 2|V| - 3$, ezért van a gráfban olyan v pont, melyre $d(v) \leq 3$. Ha $d(v) = 2$, akkor $G - v$ is ritka a 4.2.4 lemma miatt. Az indukciós feltevés szerint így van olyan $(G - v, p)$ szerkezet, melyben p általános helyzetű, és amely merevségi mátrixának sorai függetlenek. Ebből alkalmasan választott másodfokú kiterjesztéssel kaphatunk egy független és általános helyzetű (G, p') szerkezetet a 4.2.2 lemma alapján.

Tekintsük most a fennmaradó $d(v) = 3$ esetet. Legyenek v szomszédai u, w, z. A 4.2.4 lemma miatt van olyan leemelés v-nél (tegyük fel, hogy pl. az u, w pontokon), melyre a kapott G' gráf ritka. Indukció miatt létezik egy (G', p) független és általános helyzetű szerkezet a G' gráfon. Mivel $p(u), p(w), p(z)$ nem kollineáris, a 4.2.3 lemma alkalmazható: alkalmasan választott harmadfokú kiterjesztéssel kaphatunk egy olyan független (G, p') szerkezetet, melyben az egyetlen kollineáris ponthármas a $p'(u), p'(v), p'(w)$. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy ezen három pont közös egyenese nem vízszintes.

Az általános helyzet biztosítására ezután a $p'(w)$ pontot vízszintes irányban eltoljuk, megőrizve a függetlenséget. Tekintsük az $R(G, p')$ egy olyan $|E| \times |E|$ méretű M négyzetes részmátrixát, melynek determinánsa nem nulla. Ha szerepel M-ben $p'(w)$ x koordinátája, akkor M determinánsában ezt a koordinátát változónak tekintve egy (legfeljebb $n - 1$ fokú) olyan polinomot kapunk, mely nem azonosan nulla. Így végtelen sok olyan értékadás létezik, melyre a determináns nem tűnik el. Ezekből egy alkalmasat választva egy független és általános helyzetű (G, p'') szerkezetet kaphatunk.

Ha nem szerepel M-ben a $p'(w)$ pont x koordinátája, akkor a helyzet még egyszerűbb: $p'(w)$ x koordinátájának bármely módosítása esetén M determinánsa nem nulla, a szerkezet pedig független marad. □

4.2.1. Következmény. *A $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor merev, ha van $2|V| - 3$ élű ritka részgráfja.*

Egy pontosan $2|V| - 3$ élű ritka gráfot ezek után jogosan nevezhetünk **minimálisan merev** gráfnak.

104. Feladat. *Mutassuk meg, hogy egy minimálisan merev gráf élhalmaza kifeszíti az összes pontját, sőt, 2-összefüggő, és minden nemtriviális elvágó élhalmaza legalább három elemű.*

105. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ritka gráf másod- vagy harmadfokú kiterjesztésével ritka gráfot kapunk.*

A 105. feladat és a 4.2.4 lemma együtt a minimálisan merev gráfokra ad előállítási tételt.

4.2.9. Tétel. *A G gráf pontosan akkor minimálisan merev, ha előáll a K_2 egyélű gráfból másod- és harmadfokú kiterjesztésekkel.*

A 4.2.9 tétel mutatja, hogy a merevség NP-ben van: egy minimálisan merev részgráf és annak előállítása K_2-ből igazolja, hogy a gráf merev. A következő feladatban megmutatjuk, hogy a definícióból közvetlenül is kimutathatjuk az NP-beliséget.

106. Feladat. *A G merevségére megfelelő bizonyíték egy olyan (G, p) szerkezet, melyre $R(G, p)$ rangja $2|V| - 3$ és amelyben nem szerepelnek túl nagy számok. A 4.2.8 tétel bizonyításában használt koordinátánkénti mozgatás segítségével mutassuk meg, hogy ha G merev, akkor olyan merev szerkezet is van G-hez, melyben minden koordináta 1 és $|V|$ közötti egész szám.*

Az 4.2.1 következmény kombinatorikus jellemzést és tömör bizonyítékot ad a merevségre, de nem ad rögtön co-NP jellemzést is. Ehhez további megfigyeléseket kell tegyünk, melyek révén egy tetszőleges gráf maximális élszámú ritka részgráfjára kapunk egy minimax tételt (és algoritmust).

Az egyszerűség kedvéért egy élhalmazt is nevezhetünk **ritkának**, amennyiben az általa feszített részgráf ritka. Ezen a ponton a szakértő olvasó már két bizonyítást is láthat arra, hogy minden tartalmazásra nézve maximális ritka élhalmaz egyúttal maximális méretű is (és így arra, hogy egy gráf ritka élhalmazai egy matroid független élhalmazainak felelnek meg).

Generikus p-re teljesül, hogy (G,p) merevségi mátrixában minden G-ben független élhalmazra a megfelelő sorok lineárisan függetlenek. Így bijekciót kapunk a ritka élhalmazok és $\mathbf{R}^{2|V|}$-beli vektorok egy halmazának lineárisan független részhalmazai között.

Egy másik lehetséges bizonyítás azt használja, hogy a $b(F) = 2|V(F)|$ függvény az éleken szubmoduláris, és a hozzá tartozó, természetes módon definiált matroidban a független élhalmazok éppen a gráf ritka élhalmazai. Egy harmadik, közvetlen bizonyítást a következő módon kaphatunk.

Legyen $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ a G gráf egy fedése. A fedés **vékony**, ha $|X_i \cap X_j| \leq 1$ minden $i \neq j$-re. Az $\mathcal{X}$ fedés **értéke** a $\sum_{i=1}^{t}(2|X_i| - 3)$ összeg, melynek jelölése $val(\mathcal{X})$.

4.2.10. Tétel. *Legyen a $G = (V, E)$ gráfra $|E| \geq 1$ és legyen $F \subseteq E$ tartalmazásra nézve maximális ritka élhalmaz E-ben. Ekkor*

$$|F| = \min val(\mathcal{X}) \tag{4.3}$$

ahol a minimumot a V összes $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ vékony fedésére vesszük.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{X}$ vékony fedés és F ritka. Mivel F ritka, $|F \cap E_G(X_i)| \leq$ $\leq 2|X_i| - 3$ minden $1 \leq i \leq t$ indexre. Emiatt $|F| \leq \sum_{i=1}^{t}(2|X_i| - 3)$ minden fedésre, így a vékony fedésekre is.

Annak igazolására, hogy egyenlőség áll, tekintsük az F által indukált H ritka részgráfot, és abban a maximális kritikus halmazokat, jelölje őket $X_1, X_2, ..., X_t$. A 4.2.6 lemma alapján $|X_i \cap X_j| \leq 1$ minden $1 \leq i < j \leq$ $\leq t$ párra. Mivel minden él önmagában kritikus halmazt indukál, azt kapjuk, hogy $X_1, X_2, ..., X_t$ a H egy vékony fedése. Ebből következik, hogy

$$|F| = \sum_{1}^{t} |E_H(X_i)| = \sum_{1}^{t}(2|X_i| - 3).$$

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_t\}$ fedi G-t is. Tekintsünk ehhez egy $uv \in E - F$ élt. Mivel F maximális ritka halmaz, $F + uv$ megsérti a ritkasági feltételt. Emiatt lennie kell egy $X \subseteq V$ halmaznak, amelyre $u, v \in X$ és $i_H(X) = 2|X| - 3$ teljesül, azaz amely kritikus H-ban. Ezért valamely i-re $X \subseteq X_i$, tehát valóban $uv \in E_G(X_i)$ áll valamely $1 \leq i \leq t$ indexre. □

A 4.2.10 tétel adja a keresett co-NP jellemzést: ha G nem merev, azt igazolhatjuk egy olyan $\mathcal{X}$ vékony fedés megadásával, melyre $val(\mathcal{X}) < 2|V| -$ $- 3$. (Figyeljük meg, hogy egy vékony fedésben legfeljebb $\binom{n}{2}$ halmaz lehet!)

4.2.11. Tétel. *(Lovász és Yemini) A $G = (V, E)$ gráf rangja az $\mathcal{R}_2(G)$ merevségi matroidban*

$$r_2(G) = \min_{\mathcal{X}} \sum 2|X_i| - 3,$$

ahol a minimumot a G összes $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_t\}$ vékony fedésére vesszük.

További következmény, hogy egy gráf éleinek ritka részhalmazai egy matroid független halmazait alkotják. (Így például az is igaz, hogy a gráf éleinek bármely ritka részhalmaza kiegészíthető maximális elemszámú ritka részhalmazzá.) Ez a matroid a fentiek szerint izomorf a G kétdimenziós merevségi matroidjával, $\mathcal{R}_2(G)$-vel, amely a G egy generikus realizációjához tartozó merevségi mátrix sorai által meghatározott lineáris matroid. Tehát ebben a matroidban a gráf rangja, $r_2(E)$, nem más, mint a G-beli maximális ritka élhalmaz mérete. Ez megegyezik a G vékony fedéseinek minimális értékével. A G pontosan akkor merev, ha $r_2(E) = 2|V| - 3$.

Speciális szerkezetű gráfokra a minimax tétel egyszerűbb alakra hozható. Az alábbi lemmát majd a pontleszúrási feladat megoldásánál hasznosítjuk. A G gráfban egy X ponthalmazra $e(X)$ jelöli azon élek számát, melyeknek legalább egyik vége X-ben van. Egy P ponthalmaz esetén a $G + K(P)$ gráfot úgy kapjuk, hogy minden olyan P-beli pontpárt egy új éllel összekötünk, melyek még nem voltak szomszédosak.

4.2.12. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ ritka, $P \subseteq V$, $|P| \geq 2$, és legyen $G' = G + K(P)$. Ekkor*

$$r_2(G') = \min_{P \subseteq Z} 2|Z| - 3 + e(V - Z).$$

Bizonyítás. A G' rangja nem nagyobb a jobb oldalon álló minimumnál, hiszen az speciális vékony fedések értékeinek minimuma: olyanoké, amelyekben egy Z halmaz szerepel, valamint minden olyan szomszédos pontpár, amely nem része Z-nek.

A 4.2.10 Tétel bizonyításában válasszuk a maximális ritka F-et úgy, hogy először $K(P)$ egy minimálisan merev feszítő részgráfját tesszük bele. (Ilyen van, hiszen a teljes gráfok merevek.) Legyen $\mathcal{X}$ a $H = (V, F)$ maximális kritikus halmazai által adott vékony fedés. Tudjuk, hogy ekkor $|F| = r_2(G') = val(\mathcal{X})$.

Mivel $H[P]$ kritikus, így lesz olyan $Z \in \mathcal{X}$, amely tartalmazza P-t. A fedésben minden tag merev részgráfot feszít. Ezért, mivel G ritka és $K(P)$ élei Z-ben vannak, minden más $X \in \mathcal{X}$ halmazra $i_G(X) = i_H(X) = 2|X| - 3$ teljesül. Ez alapján $val(\mathcal{X}) = 2|Z| - 3 + \sum_{X \in \mathcal{X} - Z} i_G(X) = 2|Z| - 3 + e(V - Z)$, ahogy állítottuk. □

Végül még egy hasznos megfigyelés. A G **merev komponensei** a G tartalmazásra nézve maximális merev részgráfjai.

4.2.13. Lemma. *Legyen $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_t\}$ az F maximális ritka élhalmazhoz tartozó vékony fedés, azaz a $H = (V, F)$ gráfban a maximális kritikus halmazok családja. Ekkor $\mathcal{X}$ megegyezik a G merev komponenseinek ponthalmazaival.*

Bizonyítás. Világos, hogy $G[X_i]$ merev minden $1 \le i \le t$-re. Tegyük fel, hogy $H[C]$ nem kritikus a G valamely merev komponensének C ponthalmazára. Ekkor van olyan $uv \in E(G[C])$ él, amelyre $H[C] + uv$ ritka. Az F maximalitása miatt van olyan kritikus halmaz H-ban, amelyre $u, v \in X$. A C maximalitása miatt, és mivel merev gráfok uniója is merev, amennyiben legalább két pontjuk közös, $X \subseteq C$ áll. Ez ellentmond annak, hogy $H[C] + uv$ ritka. □

4.3. A merevség tesztelése

A síkbeli merevség tesztelésére többféle hatékony algoritmus ismert. Az alábbiakban a gráf befok-felsőkorlátos irányításait használó változatot ismertetjük. Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf (amelyben lehetnek párhuzamos élek is) és legyen $g : V \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ egy függvény a G ponthalmazán. A G gráf egy D irányítása g-**irányítás**, ha minden $v \in V$ pontra $\rho_D(v) \le g(v)$. Az 1.3.7 tételben igazoltuk, hogy pontosan akkor van G-nek g-irányítása, ha

$$i(X) \le \tilde{g}(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ -re.} \tag{4.4}$$

Azt is láttuk, hogy (4.4) teljesülése esetén a G egy tetszőleges D' irányításából legfeljebb $\sum_{v \in V, \varrho_{D'}(s) > g(s)} (\varrho_{D'}(v) - g(v))$ gráfbejárás és útfordítás után eljuthatunk egy g-irányításhoz.

Legyen $g^2 : V \to \mathbf{Z}_+$ a $G = (V, E)$ gráf pontjain az azonosan 2 függvény, valamint egy adott $u, v \in V$ párra legyen g^2_{uv} az a függvény, amelyre $g^2_{uv}(u) = g^2_{uv}(v) = 0$ és $g^2_{uv}(w) = 2$ minden más w pontra.

4.3.1. Lemma. *Legyen a $H = (V, E)$ gráf ritka, és legyen $u, v \in V$ egy kijelölt pontpár. Ekkor pontosan akkor létezik H-nek g^2_{uv}-irányítása, ha*

$$i(X) \le 2|X| - 4$$

teljesül minden $X \subseteq V$, $u, v \in X$ halmazra. Ha van ilyen irányítás, akkor az H egy g^2-irányításából lineáris időben (legfeljebb négy útfordítással) megkapható.

A 4.3.1 lemma lehetővé teszi, hogy a G-ben egy nem bővíthető ritka I élhalmazt gyorsan megtaláljunk. Ezt mohón építhetjük fel, az éleken tetszőleges sorrendben végighaladva, és minden új uv élre ellenőrizve, hogy hozzávehető-e az addig már kiválasztott ritka élhalmazhoz (melyet szintén I-vel fogunk jelölni). Ehhez a szubrutinhoz lesz hasznos a gráf irányításait vizsgálni. Az algoritmus során végig fenntartunk egy D g^2-irányítást a $H = (V, I)$ részgráfon. Világos, hogy az uv él pontosan akkor vehető I-hez, ha

$$i_H(X) \le 2|X| - 4$$

minden $X \subseteq V$, $u, v \in X$ halmazra. A 4.3.1 lemma alapján ez $O(|V|)$ időben tesztelhető a D segítségével (figyeljük meg, hogy H élszáma $O(|V|)$, hiszen H ritka). Amennyiben az uv élet hozzávesszük I-hez, azaz találtunk H-hoz egy g^2_{uv}-irányítást, az új H egy g-irányítása könnyen megkapható ebből az uv él hozzávételével és annak tetszőleges irányításával.

Ez az eljárás $O(|V||E|)$ időben fut, és (kihasználva, hogy tartalmazásra maximális ritka részgráf az maximális méretű is) polinom idejű algoritmust ad a merevség eldöntésére, hiszen G pontosan akkor merev, ha az algoritmus olyan I ritka halmazzal áll le, melyre $|I| = 2|V| - 3$.

Az algoritmus során további információkat is kiolvashatunk az irányításokból, melyekkel a futási idő csökkenthető. Tegyük fel, hogy az algoritmus futása során valamely uv él hozzávehető az addig felépített $H = (V, I)$-hez. Ekkor van H-nak egy D g^2_{uv}-irányítása, melyet az algoritmus ($O(|V|)$ időben) meg is talál. Legyen X egy maximális ponthalmaz azok közül, melyekre $u, v \in$ $\in X$, $\rho_D(X) = 0$ és $\rho_D(w) = 2$ minden $w \in X - \{u, v\}$ pontra. Figyeljük meg, hogy ilyen X létezik, sőt egyértelmű, hiszen ilyen halmazok uniója is ilyen. Az X halmaz lineáris időben megkapható: éppen a D-ben legfeljebb egy befokú, $V - \{u, v\}$-beli pontokból irányított úton elérhető pontok halmazának komplementere lesz. Egyszerű megfigyelés az alábbi (igazoljuk!).

4.3.2. Lemma. *A $H = (V, I + uv)$ gráfban X maximális kritikus halmaz.*

Az algoritmus során keressük meg a fenti X halmazt minden új él I-hez vétele esetén, és végig tartsuk nyilván a H részgráf maximális kritikus halmazait. Jelölje ezek halmazát $\mathcal{K}$. Korábbi megfigyeléseink szerint $\mathcal{K}$ a H egy vékony fedését alkotja. Egy új X megtalálása után $\mathcal{K}$ frissítése egyszerű: betesszük X-et és kivesszük az X valódi részeit.

Figyeljük meg, hogy egy uv él pontosan akkor nem kerül be I-be (azaz **redundáns**), ha van olyan $K \in \mathcal{K}$, melyre $u, v \in K$. Így a $\mathcal{K}$ ismeretében redundáns élekre egyáltalán nem kell az irányításokat kereső szubrutint futtatni: ha van ilyen K, akkor uv biztos nem kerül be I-be. Ha nincs ilyen, akkor uv biztos I-hez adható. Ekkor az irányítós szubrutint az X maximális kritikus halmaz megtalálása érdekében futtatjuk. Mivel $|I| \leq 2|V| - 3$, az $O(|V|)$ idejű szubrutint így már csak $O(|V|)$ él esetén kell végrehajtani, azaz az összes ezzel töltött idő $O(|V|^2)$-re csökken. Ügyesen szervezve a munkát a $\mathcal{K}$ fenntartása és a redundáns élek kiszűrése is összesen $O(|V|^2)$ időt vesz igénybe. Ezzel tehát $O(|V|^2)$ időben tesztelhető a merevség.

Figyeljük meg, hogy az algoritmus végén kapott $\mathcal{K}$ halmazrendszer egyúttal megadja G merev komponenseit is, továbbá egy minimális értékű vékony fedést.

A következő feladatok megoldása előtt érdemes felidézni Nash–Williams tételét: a $G = (V, E)$ gráf élei pontosan akkor fedhetők le két erdővel, ha $i(X) \leq 2|X| - 2$ minden $X \subseteq V$ ponthalmazra.

107. Feladat. *Dolgozzunk ki hasonló algoritmust annak ellenőrzésére, hogy egy gráfban van-e két éldiszjunkt feszítőfa.*

108. Feladat. *Igazoljuk, hogy G pontosan akkor minimálisan merev, ha bármely e élére a G-ből az e megduplázásával kapott gráf két feszítőfa éldiszjunkt uniója.*

109. Feladat. *Igazoljuk, hogy G pontosan akkor minimálisan merev, ha élhalmaza felbomlik három fa uniójára úgy, hogy minden pontja pontosan két fában van, és nincs olyan (legalább két pontú) ponthalmaz G-ben, melyet a fák közül kettő is kifeszít.*

4.4. Rögzítés pontleszúrással

Ha a $G = (V, E)$ gráf nem merev, könnyű merevvé tenni minimális számú új él hozzávételével. Ez a minimum éppen $2|V|-3-r(G)$. (Miért?) Ennél izgalmasabb kérdés, hogy minimum hány csukló helyzetét kell rögzíteni (avagy a megfelelő infinitezimális sebességvektort 0-nak rögzíteni) egy generikus realizációban úgy, hogy a szerkezet ne mozoghasson, azaz az $R(G, p)u = 0$ egyenletet csak az azonosan 0 infinitezimális mozgás teljesítse. Ez adott (G, p)-re kezelhető, hiszen egy P ponthalmaz pontosan akkor jó leszúrás, ha $R(G, p)$-ben a $V - P$ oszlopai lineárisan függetlenek. A megoldáshoz azonban lineáris matroidpárosítási algoritmusra van szükség.

A generikus esetben a feladat ekvivalens egy olyan minimális méretű $P \subseteq V$, $|P| \geq 2$ ponthalmaz meghatározásával, amelyre $G + K(P)$ merev (miért?). Jelölje a kérdéses minimumot $OPT(G)$. Azt mondjuk, hogy a $P \subseteq V$ ponthalmaz **rögzíti** G-t, ha $G + K(P)$ merev.

4.4.1. Lemma. *Legyen $F \subseteq E$ maximális ritka élhalmaz a $G = (V, E)$ gráfban. Ekkor $OPT(G) = OPT(H)$, ahol $H = (V, F)$.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden G-t rögzítő P halmaz rögzíti H-t is. Ha nem ez a helyzet, akkor létezik olyan P, amelyre $G + K(P)$ rangja $2|V| - 3$, de $H + K(P)$ rangja legfeljebb $2|V| - 4$. Ekkor, mivel $G + K(P)$ merev, és minden ritka élhalmaz kiegészíthető maximális ritkává, létezik egy $e \in E - F$ él, amely $H + K(P)$-beli maximális ritkához (és így persze F-hez is) hozzávehető úgy, hogy ritka maradjon. Ez ellentmond az F maximalitásának. □

A 4.4.1 lemma alapján feltehetjük, hogy ritka gráfot rögzítünk. A 4.2.12 lemma felhasználásával a következőt kapjuk.

4.4.2. Lemma. *Legyen G ritka és $P \subseteq V$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*
(i) P rögzíti G-t,

(ii) minden $Z \subseteq V$ halmazra, amelyre $P \subseteq Z$, $2|Z|-3+e(V-Z) \geq 2|V|-3$ teljesül,
(iii) minden $Z \subseteq V$ halmazra, amelyre $P \subseteq Z$, $2|V-Z| \leq e(V-Z)$,
(iv) minden $X \subseteq V-P$ halmazra $2|X| \leq e(X)$.

Ez alapján egy minimális G-t rögzítő halmaz megkeresése ekvivalens egy maximális olyan Y halmaz megkeresésével, amelynek minden X részhalmazára legalább $2|X|$ él illeszkedik.

Tekintsük azt a $B(G)=\{E,V^*;E^*\}$ páros gráfot, amelyben az egyik színosztályban a pontok az E-beli éleknek felelnek meg, a másik színosztályban pedig minden $v \in V$ ponthoz két pont, v_1 és v_2 tartozik, továbbá egy ev_i élt $(e \in E, v_i \in V^*)$ akkor tartalmaz, ha G-ben v végpontja e-nek. Jelölje a $B(G)$ gráfban $\nu_p(B(G))$ azon V^*-beli párok maximális számát, amelyek uniója párosítható, azaz valamely $B(G)$-beli párosítással fedhető ponthalmaz.

4.4.3. Lemma. $\max\{|Y|:$ *minden* $X \subseteq Y$*-ra* $2|X| \leq e(X)\} = \nu_p(B(G))$.

Bizonyítás. Figyeljük meg, hogy a Hall-tétel alapján az Y-ra vonatkozó feltétel a segédgráfban éppen azt jelenti, hogy az Y-beli pontokhoz tartozó párok párosítható halmazt alkotnak. □

Adjuk a $B(G)$ gráfhoz a v_1v_2 élt minden $v \in V$ pontra. Jelölje a kapott gráfot $B^*(G)$, valamint legyen $\nu(B^*(G))$ a benne levő párosítások maximális mérete.

4.4.4. Lemma. $\nu_p(B(G)) = \nu(B^*(G)) - |V|$.

Bizonyítás. Legyen Y^* maximális, V^*-beli párokból álló párosítható halmaz $B(G)$-ben és M a hozzá tartozó párosítás. Ekkor M-et a $B^*(G)$ gráfban olyan párosítássá egészíthetjük ki, amely minden, az M által le nem fedett u_1,u_2 párra tartalmazza az u_1u_2 élt. Emiatt $\nu(B^*(G)) \geq |V| + \nu_p(B(G))$.

Fordítva, legyen N maximális párosítás $B^*(G)$-ben. Ha egy u_1,u_2 párnak csak az egyik pontját fedi N, akkor az arra illeszkedő N-beli élt kicserélhetjük az u_1u_2 élre. Ez alapján feltehetjük, hogy minden u_1,u_2 párra vagy N-hez tartozik az u_1u_2 él, vagy mindkét pontot külön-külön fedi N. Emiatt $\nu_p(B(G)) \geq \nu(B^*(G)) - |V|$, amiből a kívánt egyenlőség következik. □

Összefoglalva a fenti megfigyeléseket azt kapjuk, hogy egy minimális rögzítő halmaz megkeresése visszavezethető egy maximális párosítás meghatározására a $B^*(G)$ gráfban.

A leszúrási feladat egy könnyebb változatában a pontokat úgy is lehet rögzíteni, hogy infinitezimális mozgásukat kisebb dimenziós altérre korlátozzuk (pl. csak függőlegesen mozoghatnak). Minimalizálandó ezen alterek, **pályák**, kodimenzióinak összege. A válasz világos: a minimum éppen $2|V| - r(R(G,p))$. (A 4.4.1 lemmához hasonlóan itt is feltehető, hogy (G,p), illetve G független.)

Generikus esetben kombinatorikus úton is kaphatunk optimális leszúrást: határozzuk meg G merev komponenseit, majd válasszunk ki ezekből egyet, legyen C. Legyen $q = 2|V| - r(R(G,p))$ (ami független esetben éppen $2|V| - -|E|$). Rögzítsük C-t három pályával, pl. egy C-beli u pontot teljesen leszúrva és egy másik C-beli v pontot egy egydimenziós pályára téve. Ezután egy illeszkedő D komponensre és egy $ik \in C$, $ij \in D$ élpárra adjunk j-nek egy pályát. Ez rögzíti D-t is. Adjuk G-hez a jk élt. Ezt folytassuk tovább a kapott új, C-t tartalmazó merev komponenssel kezdve.

Figyeljük meg, hogy D mozgása már csak az i körüli forgatás lehet, ha C fix, ezt pedig a generikus helyzet miatt j egy pályára korlátozása már kizárja. Azt is láthatjuk, hogy $G + jk$-ban $C \cup D$ uniója is merev (sőt, ennél nagyobb merev komponens is keletkezhet). Mivel jk hozzávétele eggyel növeli a rangot, legfeljebb q pályát adunk (a kezdeti hárommal együtt) G-hez, ami optimális. A lépésszám $O(n^2)$.

4.5. Összefüggőség és merevség

Könnyen igazolható, hogy minden legalább hárompontú merev gráf 2-összefüggő (sőt, a d dimenziós esetben d-összefüggő) kell legyen. Az, hogy kellően magas pontösszefüggőségi szám esetén a gráf merev-e, egy sokéves nyitott kérdés $d \geq 3$ esetén. A $d = 2$ esetben, ahol a merevség karakterizációja (a merevségi matroid rangfüggvénye) ismert, a következő igaz.

4.5.1. Tétel. *(Lovász és Yemini) Minden 6-összefüggő gráf merev.*

Bizonyítás. Legyen G minimális pontszámú ellenpélda, maximális élszámmal. Mivel G nem merev, a 4.2.11 tétel szerint van olyan $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_t\}$ vékony fedése, melyre

$$\sum_{1}^{t} 2|X_i| - 3 < 2n - 3, \tag{4.5}$$

ahol n a G pontjainak száma. Az élszám maximalitása miatt $G[X_i]$ teljes gráf minden $1 \leq i \leq t$-re.

Először azt igazoljuk, hogy minden v pont legalább két X_i-hez tartozik. Ha valamely v-re nem ez a helyzet, akkor tekintsük azt az egyetlen halmazt, legyen X_1, amelyre $v \in X_1$. Mivel $\mathcal{X}$ fedés és v foka legalább 6, $|X_1| \geq 7$ áll. Legyen $G' = G - v$, $n' = n - 1$, $X_1' = X_1 - v$, valamint $X_j' = X_j$ minden $2 \leq j \leq t$-re. Ekkor $\mathcal{X}' = \{X_1', ..., X_t'\}$ fedi G'-t, és $\sum_1^t 2|X_i'| - 3 < 2n' - 3$ miatt G' nem merev. Ez a G minimális választása miatt csak úgy lehet, hogy G' nem 6-összefüggő. Ekkor vagy $n' = 6$ és így $G = K_7$ (ami nem lehet, mert K_7 merev), vagy van G'-ben egy ötpontú T szeparáló ponthalmaz. A G

gráfot T nem szeparálhatja, így v szomszédos $G' - T$ minden komponensével G-ben. Ez azonban ellentmond annak, hogy v szomszédhalmaza teljes gráfot alkot (hiszen minden pontja benne van X_1-ben).

Mivel G-ben minden pont foka legalább 6 és $\mathcal{X}$ fedés, ezért minden v-re

$$\sum_{X_i : v \in X_i} (|X_i| - 1) \geq 6. \tag{4.6}$$

Most megmutatjuk, hogy minden v-re

$$\sum_{X_i : v \in X_i} (2 - \frac{3}{|X_i|}) \geq 2. \tag{4.7}$$

Ennek igazolásához tegyük fel, hogy a v pont benne van az $X_1, ..., X_d$ halmazokban, de a többiben nincs. Azt is feltehetjük, hogy $|X_1| \geq ... \geq |X_d|$. Első állításunk miatt $d \geq 2$. Mivel minden tag a szummában legalább $\frac{1}{2}$, ezért $d \geq 4$ esetén (4.7) nyilvánvaló. A $d = 3$ esetben (4.6) miatt $|X_1| \geq 3$, így a bal oldal legalább $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. A $d = 2$ esetben (4.6) miatt $|X_1| \geq 4$, továbbá az $|X_1| = 4{,}5, \geq 6$ esetekben rendre $|X_2| \geq 4{,}3{,}2$ áll. Emiatt a szumma legalább $\frac{5}{4} + \frac{5}{4}, \frac{7}{5} + 1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$, mely összegek mindegyike legalább 2. Ez alapján tehát a (4.7) egyenlőtlenség érvényes minden v-re.

A G összes pontjára szummázva ebből adódik, hogy

$$\sum_1^t |X_i|(2 - \frac{3}{|X_i|}) = \sum_1^t 2|X_i| - 3 \geq 2n,$$

ellentmondás. □

A bizonyítás valójában azt az erősebb állítást adja, hogy G-ből tetszőleges 3 élt elvéve a kapott gráf még mindig merev lesz. Ez tovább már nem javítható: vegyünk két diszjunkt K_6 gráfot és kössük össze őket 6 független éllel.

5. fejezet

Függelék

5.1. Fogalmak, jelölések

Legyen V egy alaphalmaz és u, v két eleme V-nek. Egy $X \subseteq V$ halmazról azt mondjuk, hogy v**-halmaz,** ha $v \in X$, hogy $\bar{u}$**-halmaz,** ha $u \notin X$, és végül, hogy $v\bar{u}$**-halmaz,** ha $v \in X, u \notin X$.

Irányítatlan (irányított) gráfon egy (V, E, φ) hármast értünk, ahol V, E véges halmazok, φ pedig E-nek egy leképezése a V elemeiből álló rendezetlen (rendezett) párok halmazára. V elemei a gráf csúcsai vagy pontjai (node, vertex) E elemei a gráf élei (edge). Ha e egy él és $\varphi(e) = \{a, b\}$ akkor irányítatlan esetben a és b az e él két végpontja, míg irányított gráfban a az e kezdőpontja (vagy töve) és b a végpontja (vagy feje). Azt mondjuk, hogy az e él összeköti a végpontjait, vagy hogy a-ból b-be vezet. Továbbá az e irányított él az a pontból kilép, a b pontba belép.

A továbbiakban a fenti pontos definíció helyett egy rövidebb, bár kissé pontatlanabb jelölést fogunk használni, azonban ez zavart nem okoz, és kényelmesebb vele dolgozni. Azt mondjuk, hogy a (V, E) pár irányítatlan gráf, ha E a V halmaz bizonyos párjaiból álló halmaz. Ez a definíció formálisan azért nem tökéletes, mert párhuzamos éleket nem enged meg. Mi mégis úgy képzeljük, hogy a (V, E) gráfban lehetnek párhuzamos élek. Egy élt, amelynek végpontjai a és b, egyszerűen ab vagy ba-val jelölünk. Irányítatlan gráfban tehát $ab = ba$, de irányítottban ab és ba két különböző (egymással szemben irányított) élt jelöl.

Gráfokat úgy lehet szemléltetni, hogy a csúcsokat egy-egy ponttal ábrázoljuk, egy a, b végpontú $e = ab$ élt pedig az a és b pontokat összekötő vonallal. (Természetesen a vonal alakja érdektelen). Irányított gráfnál az élt ábrázoló vonalra nyilacskát teszünk, amely az él kezdőpontjától a végpontjának irányába mutat.

Általában gráfon irányítatlan gráfot értünk. Irányított gráfra használjuk a digráf kifejezést is. Egy vegyes (mixed) gráfban mind irányított, mind irányítatlan élek előfordulhatnak. Felsorolunk néhány fontos alapfogalmat.

Hurok (loop): olyan él, amelynek két végpontja ugyanaz.
Párhuzamos (parallel) él: Két irányítatlan él párhuzamos, ha a végpontjaik megegyeznek. Két irányított él párhuzamos, ha kezdőpontjaik megegyeznek és végpontjaik megegyeznek.
$Z \subseteq V$ ponthalmaz elhagyása: a Z elemeinek valamint a Z-ben lévő pontok akármelyikével szomszédos élek törlésével keletkező gráf. Jelölése $G - Z$.
F élhalmaz elhagyása: a $(V, E - F)$ gráf.
Egyszerű (simple) gráf: nincsenek sem hurkok, sem párhuzamos élek.
Részgráf (subgraph): a gráf bizonyos pontjainak és bizonyos éleinek törlésével keletkező gráf.
Feszítő (spanning) részgráf: olyan részgráf, amelynek ponthalmaza ugyanaz, mint az eredeti gráfé.
Feszített (induced subgraph) részgráf: gráf egy X ponthalmaza által meghatározott azon részgráf, amelyben az összes olyan eredeti él szerepel, amelynek mindkét végpontja X-ben van. Más szóval, a gráf bizonyos pontjainak törlésével keletkező gráf.
Él felosztás: Az élt helyettesítjük egy végpontjait összekötő úttal, melynek belső pontjai új pontok. (Szemléletesen, az élre új pontokat teszünk.)
uv él összehúzása: az u és v pontok helyett beveszünk egy új x pontot, minden uw él helyett veszünk egy xw élt, és minden vw él helyett veszünk egy xw élt. (Speciálisan egy uv élből xx hurok lesz.)
Minor: Egy G gráf bizonyos éleinek elhagyásával, illetve összehúzásával keletkező gráf.
Két pont szomszédos (adjacent), ha van őket összekötő él.
$G = (V, E)$ egyszerű gráf $\bar{G} = (V, \bar{E})$ komplementerében az $u, v \in V$ csúcsokra uv pontosan akkor él, ha uv nem éle G-nek.
Egy pont szomszédos a belőle induló élekkel (illetve ezen élek illeszkednek a pontra). A pontra illeszkedő élek száma a pont foka (degree) (vagy fokszáma). (Megállapodás: hurokél a fokszámhoz kettővel járul hozzá). Általánosabban, pontok egy X részhalmazának $d(X)$ foka az X és $V - X$ között vezető élek száma.
Izolált (isolated) pont: nem szomszédos éllel, azaz 0 fokú.
Reguláris gráf: minden pont foka ugyanaz.

Irányított gráfban egy v pontba lépő élek $\varrho(v)$ száma a v befoka (in-degree). A v-ből kilépő élek $\delta(v)$ száma a v kifoka. Általánosabban, egy $X \subseteq V$ ponthalmaz $\varrho(X)$ befoka az X-be lépő élek száma, azaz azon éleké, melyek feje X-ban, töve pedig X-en kívül van. Egy X, Y ponthalmazpárra $d^+(X, Y)$ jelöli az $X - Y$ és $Y - X$ közti, bármely irányba menő élek számát.

Irányítatlan Euler-gráf: minden pont foka páros (nem tesszük fel, hogy összefüggő).
Irányított Euler-gráf: minden pont kifoka egyenlő a befokával. Egy digráf közel-Euler, ha minden pontnak a befoka és a kifoka legfeljebb eggyel tér el.
Séta: egy $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sorozat, amely felváltva (nem feltétlenül különböző) pontokból és élekből áll úgy, hogy minden e_i éle a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A szereplő élek száma a séta hossza (így az egyetlen pontból álló séta hossza 0).
Zárt séta: olyan séta, ahol $v_0 = v_n$.
v_0 a séta kezdőpontja, v_n a végpontja. Azt mondjuk, hogy a séta összeköti a v_0 és v_n pontokat, vagy hogy a séta v_0-ból megy v_n-be.
Út (path): Olyan séta, amelyben minden pont (és így persze minden él is) különböző.
Kör (circuit): Olyan séta, amelyben a kezdőpont megegyezik a végponttal, de ettől eltekintve minden pont különböző. Digráf esetén egyirányú körről beszélünk.
Hamilton-kör: a gráf minden pontját tartalmazó kör.
Hamilton-út: a gráf minden pontját tartalmazó út.
Ciklus (cycle): élidegen körök egyesítése (irányított és irányítatlan esetben is).
Aciklikus vagy körmentes (acyclic) digráf: egyirányú kör nélküli digráf.
Forráspont (source): Digráfban olyan pont, amelybe nem lép be él.
Nyelőpont (sink): Digráfban olyan pont, amelyből nem lép ki él.
Eszerint egy izolált pont egyszerre forrás és nyelő.
Gráf összefüggő (connected), ha bármely két pontja között van út.
Komponens: gráfnak maximális összefüggő része.
Digráf erősen összefüggő (strongly connected), ha bármely pontjából bármely másik pontjába vezet egyirányú út.
Digráf gyökeresen összefüggő (root-connected), ha van olyan s pontja, amelyből bármely másik pontjába vezet egyirányú út. Azt is mondjuk, hogy a digráf s-ből gyökeresen összefüggő.
Elvágó él: melynek elhagyása megszünteti a gráf összefüggőségét.
Elvágó pont: melynek elhagyása megszünteti a gráf összefüggőségét.
Egy u és v pontpár között futó páronként éldiszjunkt utak maximális számát $\lambda(u, v)$ jelöli. Ez megegyezik az $u\bar{v}$-halmazok minimális fokszámával.
Gráf k-élösszefüggő, ha bármely $k-1$ élének elhagyása után is összefüggő marad.
Gráf k-összefüggő (k-szor pontösszefüggő), ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely $k-1$ pontjának elhagyása után is összefüggő marad.

Összefüggő gráfban egy $\emptyset \subset X \subset V$ ponthalmazra az X és $V - X$ között vezető élek halmazát vágásnak (cut) (néha: ko-ciklus) nevezzük. X és $V -$

$- X$ a vágás két oldala. Egy vágás elemi (bond), ha nem tartalmaz valódi részhalmazként másik vágást.

Ha egy digráfban az X ponthalmazba nem lép be él, akkor az X-ből kilépő élek halmazát egyirányú vagy irányított vágásnak (one-way cut, directed cut) nevezzük.

Fa (tree): olyan összefüggő gráf, amelynek bármely élét elhagyva a keletkező gráf már nem összefüggő.
Csillag: olyan fa, amelynek egy pontjából indul ki minden éle.
Erdő (forest): gráf, melynek komponensei fák.
Fenyő (arborescence): irányított fa, amelyben van egy speciális, gyökérnek nevezett s pont, amelyből minden pontba vezet egyirányú út. s a fenyő gyökere. Röviden azt is mondjuk, hogy a fenyő s-fenyő.
Fenyves (branching): Diszjunkt fenyőkből álló digráf, másszóval olyan irányított erdő, amelyben minden pont befoka legfeljebb 1.
Teljes (complete) gráf: minden pontpár össze van kötve egy éllel.
Turnament (tournament): irányított teljes gráf.
Klikk (clique): olyan részgráf, amelyben minden pontpár éllel össze van kötve.
Stabil vagy független (stable vagy independent) ponthalmaz: él nélküli feszített részgráf. $\alpha(G)$ vagy α_G jelöli G független pontjainak maximális számát, azaz a maximális stabil halmaz elemszámát.
Párosítás: olyan részgráf, amelyben minden pont foka legfeljebb 1. Másik neve: független élhalmaz. $\nu(G)$ vagy ν_G jelöli a G független éleinek maximális számát, azaz a maximális elemszámú párosítás elemszámát.
Teljes párosítás: minden pont foka pontosan 1.
Élszínezés: a gráf élhalmazát párosításokra bontjuk, minden párosítás egy-egy színosztály.
Gráf kromatikus indexe, $\chi'(G)$: élszínezésben a szükséges színek minimális száma (mindig legalább a legnagyobb fokszám).
Pontszínezés: a gráf pontjait stabil halmazokra bontjuk, minden rész egy-egy színosztály.
Gráf kromatikus száma, $\chi(G)$: pontszínezésnél a szükséges színek minimális száma.
Páros (bipartite) gráf: 2-kromatikus gráf.
Síkba rajzolható gráf: olyan gráf, amelyet le lehet a síkba úgy rajzolni, hogy az éleket reprezentáló görbéknek a végpontjaiktól eltekintve nem lehet közös pontjuk. (Fáry tétele: egyszerű síbarajzolható gráfnak mindig létezik olyan beágyazása, ahol a görbék egyenes szakaszok).
Síkba rajzolt gráf (röviden síkgráf): egy síkba rajzolható gráf konkrét lerajzolása a síkba.

A $G = (V, E)$ irányított vagy irányítatlan gráfra $I(X)$, vagy specifikusabban $I_G(X)$, jelöli az $X \subseteq V$ ponthalmaz által feszített élek halmazát, míg $E(X)$ (illetve $E_G(X)$) jelöli azon élek halmazát, melyeknek legalább egyik vége X-ben van. Általában ha a szövegösszefüggésből világos, hogy melyik gráfról van szó, nem írjuk ki az indexet. Legyen $i(X) := |I(X)|$ és $e(X){:=}|E(X)|$. Legyen továbbá $d(X,Y)$ az $X-Y$ és $Y-X$ között vezető élek száma (irányított esetben mindegy, melyik irányban). Legyen $\bar{d}(X,Y)$ az $X \cap Y$ és a $V-(X \cup Y)$ között vezető élek száma, azaz $\bar{d}(X,Y) = d(\bar{X},Y) = d(X,\bar{Y})$. Irányítatlan esetben $d(X) := d(X, V-X)$ jelöli a G **fokszámfüggvény**ét. Irányított esetben $\varrho(X)$ az X-be $V-X$-ből belépő élek száma, és $\delta(X){:=}\varrho(V-X)$. ϱ a **befokfüggvény**, δ a **kifokfüggvény**.

Jelölje $\varphi(G)$ vagy φ_G az izolált pont nélküli G gráf pontjait fedő élek minimális számát, $\tau(G)$ vagy τ_G pedig a G éleit lefogó pontok minimális számát.

5.1.1. Egyszerűbb tulajdonságok

Fokszámok

Gráfban a fokszámok összege az élszám kétszerese, így páros. Digráfban a befokok összege is és a kifokok összege is az élek száma, tehát a befokösszeg egyenlő a kifokösszeggel.

Gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

Legalább kétpontú egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú pont.

Euler-gráfban minden ponthalmaz foka páros. Irányított Euler-gráfban minden ponthalmaz befoka egyenlő a kifokával.

Egy gráf (digráf) akkor és csak akkor Euler-gráf (-digráf), ha ciklus, azaz felbomlik (egyirányú) élidegen körök egyesítésére.

Irányítatlan Euler-gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy Euler-digráfot kapjunk. Általánosabban, irányítatlan gráf éleit lehet úgy irányítani, hogy közel-Euler digráfot kapjunk (Euler-gráf közel-Euler irányítása szükségképpen Euler.)

$d(X)$ ugyanolyan paritású, mint az X-ben levő páratlan fokú pontok száma.

A ponthalmaz egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, ..., X_t\}$ partíciójára $e(\mathcal{F})$ jelöli a különböző partíciórészek között futó élek számát.

Digráfban $\varrho(X) - \delta(X) = \sum[\varrho(v) - \delta(v) : v \in X]$.

A $d_1, \ldots, d_n$ nemnegatív egészek akkor és csak akkor alkotják egy n pontú gráf fokszám sorozatát, ha összegük páros (mind hurok, mind párhuzamos élek megengedettek). Ha hurok nem megengedett, akkor még további feltétel, hogy a legnagyobb fokszám ne legyen nagyobb a többiek összegénél.

Körök, vágások

Egy gráfban, ha minden pont foka legalább 2, akkor van kör. Digráfban, ha minden pont kifoka legalább 1, akkor van egyirányú kör.

Összefüggő gráfban egy vágás akkor és csak akkor elemi, ha mindkét oldala összefüggő.

Minden vágás felbomlik elemi vágások diszjunkt uniójára.

Vágásnak és körnek páros sok közös éle van.

Turnamentnek van Hamilton-útja. Erősen összefüggő turnamentnek van Hamilton-köre.

Digráf akkor és csak akkor aciklikus, ha pontjait sorba lehet úgy rakni, hogy minden él visszafelé mutasson.

Utak, fák, fenyők

Ha van x-ből y-ba séta, akkor van út is.

Gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszúságú kör.

Gráfban, a „létezik út x és y között" reláció ekvivalencia-reláció. (Egy osztály neve: komponens).

Digráf ponthalmazán a „létezik egyirányú út x-ből y-ba, és létezik egyirányú út y-ból x-be" reláció ekvivalencia reláció. Egy osztály neve: erős (vagy erősen összefüggő) komponens.

Digráfban ha mindegyik erős komponenst egy ponttá húzzuk össze, aciklikus digráfot kapunk.

Digráfban van olyan erős komponens, amelybe nem lép be él: forráskomponens, és olyan is, amelyből nem lép ki: nyelő komponens.

Gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden $\emptyset \subset X \subset V$ részhalmazra $d(X) > 0$.

G hurokmentes gráfra a következő tulajdonságok ekvivalensek. (1) G fa. (2) G bármely két pontja között pontosan egy út vezet. (3) G összefüggő és körmentes. (4) G összefüggő és eggyel kevesebb pontja van, mint éle. (5) G felépíthető tetszőleges pontjából kiindulva élek egyenkénti hozzávételével úgy, hogy az aktuálisan hozzávett új él egyik végpontja új pont, a másik végpontja pedig a már megkonstruált fához tartozik.

D hurokmentes digráfra, amelyben az s pont befoka 0, a következő tulajdonságok ekvivalensek. (1) D s-fenyő. (2) D irányított fa, amelyben s-ből D minden pontjába vezet egyirányú út. (3) D irányított fa, amelyben az s-től eltekintve minden pontba egy él lép be. (4) D az s pontból kiindulva felépíthető élek egyenkénti hozzávételével úgy, hogy az aktuálisan hozzávett új él töve a már megkonstruált fenyőhöz tartozik, a feje pedig új pont.

Ekvivalensek: (a) digráf gyökeresen összefüggő s-ből, (b) létezik s-gyökerű feszítő fenyője, (c) minden $\emptyset \subset X \subseteq V - s$ részhalmazra $\varrho(X) > 0$.

Digráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden $\emptyset \subset X \subset V$ részhalmazra $\varrho(X) > 0$.

Digráfban akkor és csak akkor van s-ből t-be vezető út, ha $\varrho(X) > 0$ minden X $t\bar{s}$-halmazra.

A jegyzetben néha nem teszünk különbséget az egyelemű halmaz (singleton) és annak egyetlen eleme között.

Egy $f : S \to \mathbf{R}$ függvényt gyakran a természetes módon kiterjesztünk az S részhalmazaira az $\widetilde{f}(X) := \sum[f(v) : v \in X]$ definícióval. Analóg módon egy S-en értelmezett f halmazfüggvényt kiterjeszthetünk az S részhalmazainak rendszerére: $\widetilde{f}(\mathcal{F}) := \sum[f(Z) : Z \in \mathcal{F}]$, ahol $\mathcal{F}$ az S részhalmazainak egy rendszere.

5.2. NP-teljes problémák

Felsorolunk néhány alapvető gráfelméleti feladatot, melyekről igazolták, hogy NP-teljesek.

Maximális stabil: gráfban keressünk maximális méretű stabil halmazt.

Maximális klikk: gráfban keressünk maximális méretű klikket. A feladat ekvivalens a komplementer gráf maximális stabiljának megkeresésével. Páros gráfban mindkét feladat súlyozott változata is polinomiálisan megoldható.

Halmazlefogás vagy -fedés: adott H halmazrendszerről döntsük el, hogy tagjai k ponttal lefoghatók-e. Ekvivalens alakban: k halmazzal lefedhető-e az alaphalmaz. NP-teljes már $k = 2$-re is. NP-teljes azt eldönteni, hogy egy gráf élhalmaza lefedhető-e 2 Euler-gráffal. (A négyszín-tétel azzal ekvivalens, hogy 2-élösszefüggő síkgráfban ez mindig megtehető.)

Pontszínezés: határozzuk meg egy gráf kromatikus számát. Döntsük el, hogy a gráf pontjai k színnel megszínezhetők-e úgy, hogy minden színosztály stabil. Már $k = 3$-ra is NP-teljes. A $k = 2$ esetben van egyszerű algoritmus és karakterizáció. Hipergráf esetén már $k = 2$-re is NP-teljes azt eldönteni, hogy létezik a pontoknak olyan k-színezése, amelyre nincsen egyszínű hiperél.

Élszínezés: határozzuk meg egy gráf kromatikus indexét, vagyis azt, hogy hány párosítással lehet az élhalmazt lefedni. Már 3-reguláris egyszerű gráfban is NP-teljes azt eldönteni, hogy a kromatikus index három-e, azaz, hogy az élhalmaz felbontható-e 3 teljes párosításra. (A négyszín-tétel azzal ekvivalens, hogy 3-reguláris egyszerű síkgráfban ez mindig megtehető.)

Leghosszabb út, Hamilton-út, Hamilton-kör: mind irányított, mind irányítatlan gráfban NP-teljes, már 3-reguláris síkgráfban is.

Diszjunkt út probléma: döntsük el, hogy irányított vagy irányítatlan gráfban adott $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ pontpárokra léteznek-e $P_1, \ldots, P_k$ utak úgy, hogy P_i az s_i-ből vezet t_i-be és az utak páronként él- vagy pontidegenek. Mindkét változat NP-teljes. Rögzített k-ra irányítatlan gráfban vagy aciklikus irányított gráfban van polinomiális algoritmus. Az általános irányított esetben mindkét változat már $k = 2$-re is NP-teljes.