ANALÍZIS FELADATGYŰJTEMÉNY II

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyben és a közgazdaságtanban
Analízis feladatgyűjtemény I
Analízis feladatgyűjtemény II
Bevezetés az analízisbe
Complexity of Algorithms
Differential Geometry
Diszkrét matematikai feladatok
Diszkrét optimalizálás
Geometria
Igazságos elosztások
Introductory Course in Analysis
Mathematical Analysis – Exercises I
Mathematical Analysis – Problems and Exercises II
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Pénzügyi matematika
Szimmetrikus struktúrák
Többváltozós adatelemzés
Variációszámítás és optimális irányítás

Fehér László, Kós Géza,
Tóth Árpád

ANALÍZIS FELADATGYŰJTEMÉNY II

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2014

Szerkesztők: Kós Géza és Szentmiklóssy Zoltán

Lektorálta: Pach Péter Pál

ISBN 978 963 279 421 1
Készült a Typotex Kiadó (http://www.typotex.hu) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú,
„Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt
keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai
Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: analízis, kalkulus, derivált, integrál, több-változó, komplex.

ÖSSZEFOGLALÁS: Ez a feladatgyűjtemény elsősorban azon egyetemi hallgatók számára készült, akik matematikát, ezen belül kalkulust és analízist tanulnak. A könyv fő feladata bevezetni az olvasót a a differenciál és integrálszámításba és ezek alkalmazásaiba.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ebben a gyűjteményben azokból a gyakorlatokból és feladatokból válogattunk, amelyeket az utóbbi néhány évben az ELTE TTK Analízis Tanszékén, a Matematika Bsc. és a korábbi osztatlan képzések Analízis I-IV. és Komplex Függvénytan gyakorlatain adtunk fel. Ezeket a feladatokat főleg a matematikus vagy alkalmazott matematikus szakirányokat, továbbá a felkészültebb, a matematika tanár szakirányokat választó diákoknak és oktatóiknak ajánljuk.

Minden feladathoz megadtunk egy 1 és 10 közötti, általunk becsült nehézségi értéket. Ez az érték lényegében annak felel meg, hogy az illető feladat hányadik lehetne az egyetemi zárthelyi dolgozatokban. A tanárszakosoknál ez 1-7, alkalmazott matematikus szakon 2-8, míg matematikus szak esetében 3-9 ez az érték. (Tudni kell, hogy a jeles jegy megszerzéséhez öt feladatot kell megoldani; a hatodik és hetedik feladat célja az, hogy a legjobbak se unatkozzanak.) A 10-es nehézségű feladatok már mindenképpen túl nehezek egy zárthelyire, de kutató pályára készülő diákok számára ezeket is ajánljuk.

A feladatok egy részének nem ismerjük a pontos eredetét. A feladatok szájhagyomány útján is terjednek oktatók és oktatók, vagy éppen oktatók és az ő egykori oktatóik között. Valószínűleg sok olyan feladat van, amit több generációval ezelőtt talált ki valaki.

Sokunk számára „a stencil" volt a feladatok forrása, az ebben szereplő feladatok többsége Laczkovich Miklós, Lempert László és Pósa Lajos gyűjtése, illetve alkotása.

Ezért hadd álljon itt azoknak a társszerzőinknek a (bizonyára nem teljes) felsorolása, akik tanszékünkön előadóként vagy gyakorlatvezetőként részt vesznek vagy részt vettek a valós és az egyváltozós komplex analízis tanításában: Bognár Mátyás, Buczolich Zoltán, Császár Ákos, Elekes Márton, Gémes Margit, Halász Gábor, Keleti Tamás, Laczkovich Miklós, Petruska György, Révész Szilárd, Rimányi Richárd, Sigray István, Simonovics Miklós, Szentmiklóssy Zoltán, Szőke Róbert, Szűcs András, T. Sós Vera.

Néhány feladatot Laczkovich Miklós és T. Sós Vera Analízis I. könyvéből vettünk át szíves engedélyükkel.

I. rész

Feladatok

1. fejezet

Alapfogalmak. A valós számok axiómarendszere

1.0.1. Logikai alapfogalmak

1.0.1. (4) Egy 11 tagú társaságban kétféle ember lehet: *lovagok* (akik mindig igazat mondanak) és *lókötők* (akik mindig hazudnak). Megkérdezték mindegyik embert, hogy a társaságban hány lovag van, és a következő válaszok hangzottak el: 3, 1, 4, 1, 5, 3, 5, 9, 5, 3 és 5. Meg lehet-e állapítani, hogy hány lovag van köztük?

1.0.2. (4) Egy szigeten olyan lakosok élnek, akik csak hétfőn, szerdán és pénteken mondanak igazat, a hét többi napján pedig hazudnak. Mikor hangozhattak el a következő mondatok?

1. Holnap igazat fogok mondani.
2. Holnap és holnapután is hazudni fogok.

1.0.3. (1) Adjuk meg az igazságtáblát!

$$A \vee (B \Longrightarrow A)$$

Eredmény→

1.0.4. (3) Adjuk meg az igazságtáblákat!

1. $A \Rightarrow B$ 2. $\overline{A \Rightarrow B}$ 3. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

1.0.5. (2) Jelentse $P(x)$: „x páros”, $H(x)$: „x hattal osztható”. Mit jelentenek a következő formulák, és igazak-e?($\neg$ a tagadást jelöli.)

1. $P(4) \wedge H(12)$
2. $\forall x \ \big(P(x) \Rightarrow H(x)\big)$
3. $\exists x \ \big(H(x) \Rightarrow \neg P(x)\big)$
4. $\exists x \ \big(P(x) \wedge H(x)\big)$
5. $\exists x \ \big(P(x) \wedge H(x+1)\big)$
6. $\forall x \ \big(H(x) \Rightarrow P(x)\big)$
7. $\forall x \ \big(\neg H(x) \Rightarrow \neg P(x)\big)$

1.0.6. (3) Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$. Írjuk fel az alábbi tulajdonságokat, illetve tagadásukat is formalizálva. Létezik-e a megadott tulajdonságú halmaz?

1. H-nak legfeljebb 3 eleme van.
2. H-nak nincs legkisebb eleme.
3. H bármely két különböző eleme között van harmadik H-beli.
4. Bármely számnál van nagyobb H-beli szám.

Eredmény→

1.0.7. (2) Írjuk le formálisan azt az állítást, hogy nincs legnagyobb természetes szám, és hogy van legnagyobb természetes szám (logikai jelek, $=$ és $<$ használható).

1.0.8. (5) Ha $H \subset \mathbb{N}$, akkor mit jelentenek a következő állítások?
(a) $(1 \in H) \wedge (\forall x \in H \ (x+1) \in H)$;
(b) $(1 \in H) \wedge (2 \in H) \wedge (\forall x \in \mathbb{N} \ (x \in H \wedge (x+1) \in H) \Rightarrow (x+2) \in H)$;
(c) $(1 \in H) \wedge ((\forall x \in \mathbb{N} \ (\forall y \in \mathbb{N} \ y < x \Rightarrow y \in H)) \Rightarrow x \in H)$;
(d) $\forall x \in \mathbb{N} \ (x \notin H) \Rightarrow (\exists y \in N \ (y < x \wedge y \notin H)$;

1.0.9. (4) Legyen Γ egy egyszerű (hurok- és többszörös-él mentes) gráf, amelynek csúcshalmaza V és élhalmaza E. Az alábbi állítások közül melyik fejezi ki, hogy nincs 3 hosszú kör a gráfban?

1. $\forall x, y, z \in V \ ((\{x, y\} \in E \wedge \{x, z\} \in E) \Longrightarrow \{y, z\} \notin E)$
2. $\exists x, y, z \in V \ ((\{x, y\} \in E \wedge \{x, z\} \in E) \Longrightarrow \{y, z\} \notin E)$
3. $\forall x, y \ \exists z \in V \ ((\{x, y\} \in E \wedge \{x, z\} \in E) \Longrightarrow \{y, z\} \notin E)$

Adjunk példát olyan gráfra, ami teljesíti a másik két állítást.

1.0.10. (4) Egy táncmulatságon lányok és fiúk táncoltak. Jelölje $T(L, F)$ azt az állítást, hogy az L lány az este folyamán táncolt az F fiúval. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyikből következik a másik. (És ha nem tudjuk, hogy volt-e egyáltalán valaki a mulatságon?)

1. $(\exists L)(\forall F)T(L, F)$; 2. $(\forall F)(\exists L)T(L, F)$; 3. $(\exists F)(\forall L)T(L, F)$;
4. $(\forall L)(\exists F)T(L, F)$; 5. $(\forall L)(\forall F)T(L, F)$; 6. $(\exists L)(\exists F)T(L, F)$.

1.0.11. (4)

Az 1.0.10 feladatbeli táncmulatság kapcsán döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyikből következik a másik. (A felülhúzás a tagadást jelöli.)

1. $\overline{(\exists L)(\forall F)T(L, F)}$; 2. $(\forall F)(\exists L)\overline{T(L, F)}$;
3. $(\forall L)(\exists F)\overline{T(L, F)}$; 4. $(\forall L)(\forall F)\overline{T(L, F)}$.

1.0.12. (7) Hány olyan $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz van, amelyre teljesül, hogy $\forall x\ (x \in H \Longrightarrow x + 1 \notin H)$?

1.0.13. (7) Hány olyan $H \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz van, amelyre teljesül, hogy $\forall x\ ([(x \in H) \wedge (x + 1 \in H)] \Rightarrow x{+}2 \in H)$?

Ötlet→

1.0.14. (5) Melyik alábbi állításból következik melyik?

1. $(\forall x \in H)(\exists y \in H)(x + y \in A \wedge x - y \in A)$;
2. $(\exists x \in H)(\forall y \in H)(x + y \in A \wedge x - y \in A)$;
3. $(\forall x \in H)(\exists y \in H)(x + y \in A)$.

1.0.15. (4) Ha H egy számhalmaz, akkor mit jelentenek a következő állítások?
(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in H\ x < y$; (b) $\forall x \in H\ \exists y \in \mathbb{R}\ x < y$; (c) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ x < y$.

1.0.16. (5) Legyen A és B két számhalmaz. Melyik állításból következik a másik?
(a) $\forall x \in A\ \exists y \in B\ x < y$ (c) $\forall x \in A\ \forall y \in B\ x < y$
(b) $\exists y \in B\ \forall x \in A\ x < y$ (d) $\exists x \in A\ \exists y \in B\ x < y$

1.0.17. (3) (a) Miben tartunk egy mindent feloldó folyadékot?
(b) Mi történik, ha egy mindent elsöprő erő egy leküzdhetetlen akadállyal kerül szembe?

(Moldova Gy.: Pályázat)

Megoldás→

1.0.18. (1) Mit jelent ez a mondat?

> „Megnyugtatásul közlöm, hogy tévesnek bizonyult a cáfolata annak a híresztelésnek, miszerint mégsem hazugság azt tagadni, hogy lesz olyan vizsgázó, akinek egy valós analízis tétel bizonyítását sem kell tudnia ahhoz, hogy ne bukjon meg."

1.0.19. (2) Magyarázzuk meg a beszélgetést!

Kapitány: Elég lesz az üzemanyag a leszálláshoz, vagy lezuhanunk?
Számítógép: Igen.
Kapitány: Igen, de *MI*?!!
Számítógép: Igen, *Uram.*

(R. Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek?)

Megoldás→

1.0.20. (5) Tegyük fel, hogy

(a) nem mindenki hullamosó, aki szereti a spenótot;
(b) minden zenerajongó hullamosó, vagy legalábbis nem szereti a spenótot;
(c) vagy az igaz, hogy aki nem hullamosó, az zenerajongó, vagy pedig az, hogy aki hullamosó, az nem zenerajongó.

Következik-e a fentiekből, hogy aki szereti a spenótot, az nem zenerajongó?

(KöMaL, 1975. december, F. 2001., [Pósa Lajos feladata] alapján)

Ötlet→

1.0.21. (5)

> *„Minden asszony életében jön (van) egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad."* (Hofi)

Írjuk fel a fenti állítást kvantorokkal, tagadjuk, majd fogalmazzuk meg a tagadást szövegesen is. (Végül zenésítsük meg.)

Megoldás→

1.0.22. (3) Ha minden repülni tudó állatnak van szárnya, és minden madárnak szárnya van, akkor a logika szabályai szerint melyik állítás igaz biztosan?

(a) Minden szárnyas állat tud repülni
(b) Minden madár tud repülni
(c) Néhány szárnyas tud repülni
(d) Minden szárnyas állat madár
(e) Több is biztosan igaz a fentiek közül
(f) Egyik sem igaz biztosan a fentiek közül

(g) Egyik sem igaz biztosan a fentiek közül
(h) Egyik sem igaz biztosan a fentiek közül

(„Az ország IQ-tesztje” nyomán)

1.0.23. (5) Igazoljuk, hogy az implikáció balról disztributív a diszjunkcióra nézve.

Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 1.0.24

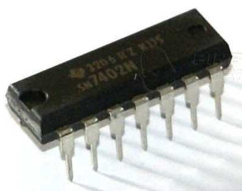
1.0.24. (5) (a) Igaz-e, hogy az implikáció jobbról disztributív a konjunkcióra nézve?

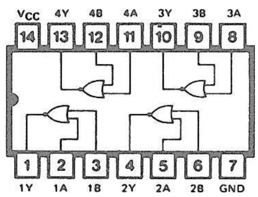
(b) Igaz-e, hogy az implikáció balról disztributív a konjunkcióra nézve?

Kapcsolódó feladat: 1.0.23

1.0.25. (4) Legyen $\mathrm{NOR}(x,y) = \neg(x \vee y)$. Csupán a NOR műveletet felhasználva sokféle kifejezést készíthetünk, pl. $\mathrm{NOR}(x, \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x,y), \mathrm{NOR}(z,x)))$. (a) Mutassuk meg, hogy bármilyen n-változós logikai függvényt előállíthatunk így!

(b) Mutassunk példát a NOR helyett más kétváltozós logikai függvényre, amikre ugyanez a tulajdonság teljesül!





A Texas Instruments SN7402N integrált áramköre, ami 4 független NOR logikai kaput tartalmaz

Eredmény→

1.0.26. (6) Mutassuk meg, hogy bármely $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-változós Boole-függvény (azaz olyan függvény, ami n darab igaz/hamis értékhez rendel egyetlen igaz/hamis értéket) felírható csupán a változójelek, zárójelek, a konstans hamis érték és az implikáció művelet ($\Rightarrow$) felhasználásával.

1.0.27. (8) Legyen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy n-változós Boole-függvény (azaz olyan függvény, ami n darab igaz/hamis értékhez rendel egyetlen igaz/hamis értéket). Bizonyítsuk be, hogy az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvény akkor és csak akkor írható fel csupán a változójelek, zárójelek és az implikáció művelet ($\Rightarrow$) felhasználásával, ha

$$\exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \Big(\forall x_1, \dots, x_n \ (x_k \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n))\Big).$$

1.0.2. Halmazok, függvények, kombinatorika

1.0.28. (2) Oldjuk meg: $|2x-1| < |x^2-4|$.

1.0.29. (3) Az azonos kerületű paralelogrammák közül melyik a legnagyobb területű?

1.0.30. (2) Milyen x-re igaz?

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$$

1.0.31. (2) Találomra választunk egy 9-cel osztható 1996-jegyű számot. Számjegyeinek összege legyen a. Az a számjegyeinek összege b. A b számjegyeinek összege c. Mennyi a c?

1.0.32. (1)

1. Az A, B, C, D, E, F, G betűkből hány k-betűs „szó" képezhető?
2. Hány 7-betűs „szó" képezhető, ha a betűket nem ismételhetjük?
3. Hány olyan 7-betűs „szó" képezhető, amelyben az A és B szomszédos (ismétlés nincs)?

1.0.33. (2) Lássuk be, hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

1.0.34. (4) Bizonyítsuk be az úgynevezett *binomiális tételt*, azaz, hogy

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n.$$

Ötlet→

1.0.35. (3) Melyik nagyobb? 639^9 vagy $638^9 + 9 \cdot 638^8$?

Ötlet→

1.0.36. (3) Bizonyítsuk be a De Morgan azonosságokat, azaz, hogy $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.0.37. (3) Bizonyítsuk be, hogy $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.0.38. (2) Legyen $A = \{1, 2, ..., n\}$ és $B = \{1, ..., k\}$.

1. Hány $f : A \to B$ függvény található?
2. Hány $f : A \to B$ injektív függvény található?
3. Hány $f : A_0 \to B$ függvény található, ha A_0 az A tetszőleges általunk választott részhalmaza lehet?

Eredmény→

1.0.39. (4) Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor teljesül $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$, ha x az $A_1, \ldots, A_n$ halmazok közül páratlan soknak eleme.

1.0.40. (3) Jelöljük az A és B halmazok szimmetrikus differenciáját, azaz az $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt $A \Delta B$-vel. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra:
1. $A \Delta \emptyset = A$, 2. $A \Delta A = \emptyset$, 3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

1.0.41. (2) A síkon n pont legfeljebb hány egyenest határoz meg? És a térben hány síkot?

1.0.42. (5) Egy afrikai törzsben a nők kagylóból készült gyűrűket hordanak (egy ujjukon legfeljebb egyet). Nincs két nő, aki ugyanazon az ujjain hordana gyűrűket. Hányan lehetnek legfeljebb? És ha pont öt gyűrűje van mindegyiknek? És ha akár 3 gyűrűt is tehetnek egy ujjukra, de mindegyik máshogy hordja a gyűrűket?

1.0.43. (3)

1. Hány totószelvény kell a biztos 13 találathoz?
2. Hány totószelvény kell a biztos 5 találathoz?

1.0.44. (3) Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán:

1. 2 fehér bástyát?
2. 2 fehér bástyát, hogy ne üssék egymást?
3. 1 fehér és 1 fekete bástyát?
4. 1 fehér és 1 fekete bástyát hogy ne üssék egymást?

Eredmény→

1.0.45. (4) Hány különböző téglalap látható a sakktáblán?

1.0.46. (3) Igaz-e tetszőleges A, B, C halmazokra, hogy
(a) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$;
(b) $(A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$;
(c) $(A\triangle B)\cup C = (A\cup C)\triangle(B\cup C)$?

Eredmény→

1.0.47. (4) Igaz-e, hogy egy H halmaz részhalmazai a szimmetrikus differenciával és a) a metszettel; b) az unióval egységelemes gyűrűt alkotnak?

1.0.48. (4) Legyen $f : A \to B$. Tetszőleges $X \subset A$ halmazra legyen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ (az X halmaz *képe*), és tetszőleges $Y \subset B$ halmazra legyen $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$ (az Y halmaz *ősképe*). Igaz-e, hogy
(a) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$?
(b) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(B)$ $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$?

Megoldás→

1.0.49. (4) Legyen $f : A \to B$. Igaz-e, hogy
(a) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ $f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y)$?
(b) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(B)$ $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$?

1.0.50. (5) Az $\sim\, \subset A \times A$ kétváltozós relációt *ekvivalenciarelációnak* nevezzük, ha a következő három tulajdonság teljesül rá:
(a) $\sim$ reflexív, azaz $\forall x \in A$ $(x \sim x)$;
(b) $\sim$ szimmetrikus, azaz $\forall x, y \in A$ $(x \sim y \Rightarrow y \sim x)$;
(c) $\sim$ tranzitív, azaz $\forall x, y, z \in A$ $\big((x \sim y \;\wedge\; y \sim z) \Rightarrow x \sim z\big)$.

Bizonyítsuk be, hogy ha $\sim$ ekvivalenciareláció, akkor A felbontható diszjunkt részekre, „ekvivalenciaosztályokra” úgy, hogy A bármely két x, y eleme akkor és csak akkor van ugyanabban az ekvivalenciaosztályban, ha $x \sim y$.

1.0.51. (8) Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ nemüres, véges halmazok és tetszőleges n pozitív egészre f_n egy A_{n+1}-ből A_n-be képező függvény. Igazoljuk, hogy létezik olyan végtelen $x_1, x_2, \ldots$ sorozat, amire tetszőleges n esetén $x_n \in A_n$ és $f_n(x_{n+1}) = x_n$ (König-lemma).

1.0.52. (8) A König-lemma (l. a 1.0.51 feladatot) segítségével igazoljuk, hogy ha egy megszámlálható gráf minden véges része síkba rajzolható, akkor a teljes gráf is.

1.0.53. (9) A derékszögű koordinátarendszerben bizonyos rácspontokat megmérgeztek úgy, hogy tetszőleges n-re az $x + y \leq n$ tartományban legfeljebb n mérgezett pont van. Egy bolha az origóból indulva ugrál, mindig vagy a $(0, 1)$, vagy az $(1, 0)$ vektorral ugrik. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan végtelen hosszú útvonal, amin elkerülheti a mérgezett pontokat.

1.0.54. (7) Mutassunk példát olyan asszociatív $\circ : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ műveletre (ami tehát $\mathbb{R}$ bármely két X, Y részhalmazához rendel egy újabb $X \circ Y$ részhalmazt), amire nézve az unió balról disztributív, de jobbról nem disztributív.

1.0.3. Bizonyítási módszerek: indirekt bizonyítás, teljes indukció

1.0.55. (7) Egy sakktábla szembenlévő sarokkockáit levágtuk. Lefedhető-e a maradék 1×2-es dominókkal? És $n \times k$-as sakktáblánál?

1.0.56. (7) Tekintsük a $2, 3, \ldots n+1$ számokat, valamint a párosával, hármasával, stb. vett szorzatokat belőlük. Bizonyítsuk be, hogy ezen számok reciprokainak összege $n/2$. (Pl. $n = 3$-ra $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{3}{2}$).

1.0.57. (9) Tekintsük a végtelen négyzetrács jobb felső negyedét. Kezdetben a sarokban van egy korong. Megengedett lépés: ha valahol egy korongtól jobbra és fölötte nincs korong, akkor őt levesszük, és tőle jobbra és föléje teszünk egy korongot. Felszabadítható-e az a terület, mely az első sorból a bal 4, a második sorból a bal 3, a harmadik sorból a bal 2, és a negyedik sorból a baloldali négyzetet tartalmazza?

1.0.58. (3) Az $A_1, A_2, \ldots$ állítások egy sorozata. Mi következik az alábbi feltételekből?

a) A_2, A_3 igaz, és ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.

b) Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz, továbbá A_{2^n} hamis minden n-re.

c) Ha A_n igaz, akkor A_{n-1} is igaz, és A_{10} hamis.
d) Ha A_n hamis, akkor A_{n+1} is hamis, továbbá A_1 igaz.
e) A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.

Eredmény→

1.0.59. (6) Egy 2^n-szer 2^n-es sakktábla egyik saroknégyzetét kivágtuk. Bizonyítsuk be, hogy a maradék lefedhető 3 négyzetből álló L-alakú dominókkal.

1.0.60. (3) Igazoljuk, hogy

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$$

Megoldás→

1.0.61. (8) (a) Hogyan változik $f(x,y,z,u,v) := (x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2$ értéke, ha $y<0$, $x+y+z+u+v>0$ esetén elvégezzük az $y' := -y$, $x' := x+y$, $z' := z+y$ helyettesítést?

(b) Egy ötszög csúcsaihoz egész számokat írunk, melyek összege pozitív. Ha valamelyik negatív, akkor őt kicserélhetjük az ellentettjére, ha előbb a szomszédaihoz őt hozzáadjuk. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet végtelen sok ilyen lépést végezni egyetlen kezdő konfigurációból sem.

(IMO 1986/3)

1.0.62. (4)

1. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

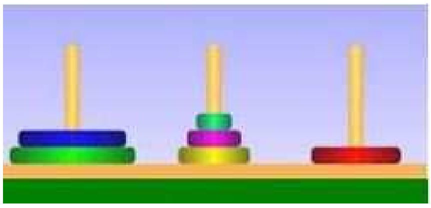
2. Legyen $a_1 = 0{,}9$ és $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Bizonyítsuk be, hogy $a_{n+1} < a_n$ és $0 < a_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

Megoldás→

1.0.63. (7) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{tg}\,1^o$ irracionális!

Ötlet→

1.0.64. (5) Legalább hány lépés kell a 64 emelet magas Hanoi torony átrendezéséhez?



Hanoi tornyai

Ötlet→

1.0.65. (4) Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy akárhogy veszünk fel n különböző irányú egyenest a síkon, azok mindig átmennek egy közös ponton. Az állítás $n = 1$-re és $n = 2$-re nyilvánvalóan igaz. Legyen $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz n egyenesre. Legyenek $e_1, \ldots, e_{n+1}$ különböző irányú egyenesek a síkon. Az indukciós feltevés szerint az $e_1, \ldots, e_n$ egyenesek átmennek egy közös P ponton, az $e_2, \ldots, e_{n+1}$ egyenesek pedig átmennek egy közös Q ponton. Mivel a különböző irányú $e_2, \ldots, e_{n-1}$ egyenesek átmennek mind a P, mind pedig a Q ponton, ezért szükségképpen $P = Q$. Ezzel beláttuk, hogy az összes egyenes átmegy egy közös ponton, ti. P-n.

1.0.66. (5) Hány részre osztja a síkot n egyenes, ha közülük semelyik három nem megy át egy közös ponton?

1.0.67. (8) Hány részre osztja a teret n sík, ha közülük semelyik négy nem megy át egy közös ponton és semelyik 3 nem tartalmaz közös egyenest?

Ötlet→

1.0.68. (5) Bizonyítandó, hogy véges sok egyenes (vagy kör) a síkot olyan tartományokra bontja, melyek kiszínezhetők két színnel úgy, hogy azonos színű tartományoknak nincs közös határvonaluk.

1.0.69. (3) Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennáll az alábbi azonosság.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Megoldás→

1.0.70. (3) Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + \ldots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1}.$$

1.0.71. (3) Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennáll az alábbi azonosság.

$$1^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

Megoldás→

1.0.72. (3) Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennállnak az alábbi azonosságok.

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$;
2. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$.

1.0.73. (3) Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$.

1.0.74. (5) Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket!

1. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1)$;
2. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$;
3. $1 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n+1)$;
4. $1 \cdot 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$.

1.0.75. (4) Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

Ötlet→

1.0.76. (6) Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 6$ pozitív egészre egy négyzetet fel lehet bontani n db négyzetre.

Megoldás→

1.0.77. (5) $A_1, A_2, \ldots$ logikai állítások. Mit mondhatunk, ha
(a) $A_1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \Rightarrow A_{n+1}$?
(b) Ha $A_1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \Rightarrow (A_{n+1} \wedge A_{n+2})$?
(c) Ha $A_1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ (A_n \vee A_{n+1}) \Rightarrow A_{n+2}$?
(d) Ha $\forall n \in N\ \neg A_n \Rightarrow \exists k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\ \neg A_k$?

1.0.78. (4) Igazoljuk, hogy

$$1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Fibonacci számok

1.0.79. (6) Legyen u_n az n-edik Fibonacci-szám ($u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $\ldots$).
(a) $u_0 + u_2 + \ldots + u_{2n} =?$
(b) $u_1 + u_3 + \ldots + u_{2n+1} =?$

1.0.80. (6) Igazoljuk, hogy $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = \pm 1$.

1.0.81. (3) Legyen u_n az n-edik Fibonacci-szám. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot 1{,}6^n < u_n < 1{,}7^n.$$

1.0.82. (5) Bizonyítsuk be, hogy bármelyik két szomszédos Fibonacci-szám relatív prím egymással.

1.0.83. (5) Bizonyítsuk be, hogy

$$u_1^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}.$$

1.0.84. (6) Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket!

1. $u_0 + u_3 + \ldots + u_{3n}$;
2. $u_1 u_2 + \ldots + u_{2n-1} u_{2n}$.

1.0.4. Egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok megoldása közepekkel

1.0.85. (6) Legyen $a, b \geq 0$ és legyenek r, s pozitív racionális számok, $r+s=1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^r \cdot b^s \leq ra + sb.$$

1.0.86. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \geq 3.$$

Megoldás→

1.0.87. (2) Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}$.

1.0.88. (4) Legyen $a, b > 0$. Milyen x-re minimális $\dfrac{a+bx^4}{x^2}$?

Ötlet→

1.0.89. (3) Legyen $a_i > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

1.0.90. (8) Melyik nagyobb? $1000001^{1000000}$ vagy $1000000^{1000001}$

Megoldás→

1.0.91. (4) Tudjuk, hogy három pozitív szám szorzata 1.

1. Milyen kicsi lehet az összegük?
2. Milyen nagy lehet az összegük?
3. Milyen kicsi lehet a reciprokösszegük?
4. Milyen nagy lehet a reciprokösszegük?

1.0.92. (4) Legfeljebb mekkora lehet xy, ha $x, y \geq 0$ és
(a) $x + y = 10$;
(b) $2x + 3y = 10$?

1.0.93. (2) Bizonyítsuk be, hogy $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$, ha $x \neq 0$.

1.0.94. (4) Adott felszínű téglatestek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

Megoldás→

1.0.95. (4) Legfeljebb mekkora lehet a^3b^2c, ha a, b, c nemnegatív valós számok, és $a + 2b + 3c = 5$?

1.0.96. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

1.0.97. (4) Határozzuk meg az $x^2 \cdot (1 - x)$ függvény legnagyobb értékét, ha $x \in [0, 1]$.

Megoldás→

1.0.98. (6) Bizonyítsuk be, hogy a V térfogatú egyenes körhengerek közül annak a legkisebb a felszíne, amelyiknek a magassága egyenlő az alap átmérőjével.

Megoldás→

1.0.99. (5) Bizonyítsuk be, hogy $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, ha $n > 1$.

Megoldás→

1.0.100. (6) Mi az $x^3 - x^5$ függvény maximuma a $[0, 1]$ intervallumban?

1.0.101. (6) Legfeljebb mekkora térfogatú henger írható az egyenes körkúpba?

1.0.102. (6) Milyen nagy térfogatú hengert lehet beleírni egy egységnyi sugarú gömbbe?

1.0.103. (10) Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számokra

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}}+\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}+\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}+\ldots+\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}<2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

(KöMaL N. 189., 1998. november)

Megoldás→

1.1. Valós számok

1.1.1. Testaxiómák

1.1.1. (4) Igazoljuk a testaxiómák felhasználásával a következőket.
Ha $ab=0$, akkor $a=0$ vagy $b=0$;
$-(-a)=a$;
$(a-b)-c=a-(b+c)$;
$-a=(-1)\cdot a$;
$(a/b)\cdot(c/d)=(a\cdot c)/(b\cdot d)$.

1.1.2. (4) Igazoljuk a testaxiómák felhasználásával a következőket.
$(-a)\cdot b=-(ab)$;
$1/(a/b)=b/a$;
$(a-b)+c=a-(b-c)$.

1.1.3. (4) Bizonyítsuk be a testaxiómák és a definíciók alapján a következő azonosságot! $(-a)(-b)=ab$.

Megoldás→

1.1.4. (4) Bizonyítsuk be a testaxiómák és a definíciók alapján a következő azonosságokat!

1. $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$,

2. $(-x)\cdot y=-\ x\cdot y$.

1.1.5. (5) Igazoljuk, hogy ha $*$ egy kétváltozós, asszociatív művelet, akkor az $a_1*a_2*\ldots*a_n$ kifejezés bármely zárójelezésének ugyanaz az eredménye.

1.1.2. Rendezési axiómák

1.1.6. (4) Bizonyítsuk be a test és rendezési axiómák és a definíciók alapján a következő állításokat!

1. Ha $a < b$, akkor $-a > -b$;
2. Ha $a > 0$, akkor $\frac{1}{a} > 0$;
3. Ha $a < b$ és $c < 0$, akkor $ac > bc$.

1.1.7. (3) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

1.1.8. (4) Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy $\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 \geq 0$.

1.1.9. (5) Mutassuk meg, hogy a komplex számok testét nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

Ötlet→

1.1.10. (4) Egy valós együtthatós, racionális törtfüggvényt (két polinom hányadosát) nevezzünk pozitívnak, ha a számláló és a nevező főegyütthatója azonos előjelű.

Ellenőrizzük, hogy ezzel a rendezéssel ($r > q \Leftrightarrow r - q$ pozitív) a racionális törtfüggvények rendezett testet alkotnak.

Kapcsolódó feladat: 1.1.13

1.1.11. (4) Cseréljük a rendezési axiómákat a következőkre.

10'. Minden valós szám vagy 0, vagy pozitív, vagy negatív.
11'. x akkor és csak akkor pozitív, ha $-x$ negatív.
12'. Bármely két pozitív szám összege pozitív.
13'. Bármely két pozitív szám szorzata pozitív.

A $<$ relációt definiáljuk a következőképppen: $a < b$ akkor és csak akkor, ha $b - a$ pozitív.

Mutasssuk meg, hogy ezekből következnek az eredeti rendezési axiómák.

1.1.12. (4) Vezessük le a test- és rendezési axiómákból, hogy ha $a < b < 0$, akkor $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} < 0$.

1.1.3. Arkhimédészi axióma

1.1.13. (6) Teljesül-e a racionális függvények rendezett testében az Arkhimédészi axióma?

Ötlet→

Kapcsolódó feladat: 1.1.10

1.1.14. (7) Adott egy R rendezett test, aminek $\mathbb{Q}$ részteste. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(\forall a, b \in R)\Big((1 < a < b < 2) \Rightarrow \big((\exists q \in \mathbb{Q})\ (a < q < b)\big)\Big),$$

akkor R-ben teljesül az Arkhimédészi axióma.

Ötlet→

1.1.15. (5) Legyen R rendezett test. Az R egy részhalmazát nevezzük „szépnek”, ha $0 \in H$ és $\forall x \in H\ (x+1) \in H$. Legyen N az összes szép halmaz metszete.

(a) Miért értelmes ez a definíció?
(b) Igazoljuk, hogy N szép halmaz.
(c) Igazoljuk, hogy N minden nemüres részalmazának van legkisebb eleme.
(d) Igazoljuk, ha egy $t(x)$ tulajdonságra $t(1) \wedge \forall x \in N\big(t(x) \Rightarrow t(x+1)\big)$, akkor $\forall x \in N\ t(x)$.

1.1.16. (5) Milyen rendezett testekben értelmezhetjük az egészrészfüggvényt?

Eredmény→

1.1.4. Cantor-axióma

1.1.17. (8) Teljesül-e a racionális törtek rendezett testében a Cantor-axióma?

Ötlet→

Kapcsolódó feladat: 1.1.10

1.1.18. (5) A következő feladatokban is indokoljuk meg a válaszokat!

1. Lehet-e egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres?
2. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete üres?

3. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont?

4. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete nem üres?

5. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete üres?

6. Lehet-e egy egymásba skatulyázott, nyílt intervallumsorozat metszete zárt intervallum?

1.1.19. (7) Ismeretes, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan prímszám, amely n^3 és $(n+1)^3$ közé esik. Ennek felhasználásával bizonyítsuk be, hogy van olyan $a > 1$ valós szám, amelyre a^{3^k} egész része prímszám, minden természetes k-ra.

(KöMaL F. 2405., 1983. február)

Ötlet→

1.1.20. (8) A Cantor-axióma felhasználásával adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy az irracionális számok halmaza sűrű a számegyenesen: minden nyílt intervallumban van irracionális szám.

1.1.21. (4) A valós számok axiómái közül melyek teljesülnek és melyek nem a racionális számok halmazára (a szokásos műveletekkel és rendezéssel)?

Eredmény→

1.1.22. (9) Létezik-e olyan rendezett test, amiben teljesül a Cantor-axióma, de nem teljesül az arkhimédészi axióma?

1.1.23. (1) Írjuk fel az Arkhimédeszi és a Cantor axióma tagadását (ne negációval kezdődjön!)!

1.1.24. (2) Határozzuk meg a következő intervallumsorozatok metszetét! (Pl. rajz segítségével sejtsük meg a metszetet! Ha a sejtés szerint a metszet M, akkor bizonyítsuk be, hogy $\forall x \in M$ esetén teljesül, hogy $\forall n\ x \in I_n$, továbbá ha $y \notin M \Longrightarrow \exists k\ y \notin I_k$.) ($k, n$ pozitív egész számok.)

1. $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, 2. $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, 3. $I_n = [-5+n, 3+n)$,

4. $I_n = [2-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}]$, 5. $I_n = (2-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n})$, 6. $I_n = [2-\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n})$,

7. $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, 8. $I_n = (0, \frac{1}{n})$, 9. $I_n = [0, \frac{1}{n})$, 10. $I_n = (0, \frac{1}{n}]$.

1.1.25. (3) Melyik állítás igaz? (A választ mindig indokoljuk!)

1. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok zártak.
2. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor az intervallumok nyíltak.
3. Egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumsorozat metszete egyetlen pont.
4. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nyílt.
5. Ha egy egymásba skatulyázott intervallumsorozat metszete üres, akkor van az intervallumok között nem zárt.
6. Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

1.1.5. A számegyenes, intervallumok

1.1.26. (3) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

Megoldás→

1.1.27. (4) Bizonyítsuk be, hogy

1. $\sqrt{3}$ irracionális; 2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ irracionális; 3. $\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}+3}{4}+5$ irracionális!

1.1.28. (3) Legyen $a, b \in \mathbb{Q}$ és c, d irracionális. Mit mondhatunk $a+b$, $a+c$, $c+d$, ab, ac és cd racionalitásáról?

1.1.29. (3) Bizonyítsuk be, hogy minden nyílt intervallumban van racionális és irracionális szám is.

1.1.30. (4) Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Mi a kapcsolat az alábbi két állítás között, azaz melyikből következik a másik?
P: Az A halmaz véges (azaz véges sok eleme van).
Q: Az A halmaz korlátos.

1.1.31. (2) Egy számhalmaznak hány (a) maximuma; (b) felső korlátja lehet?

1.1.32. (2) Döntsük el az alábbi halmazokról, hogy alulról korlátosak-e, felülről korlátosak-e, korlátosak-e, és hogy van-e legkisebb illetve legnagyobb elemük?

1. prímszámok halmaza, 2. pozitív számok halmaza, 3. $[-5,-2)$, 4. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$, 5. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 73\}$, 6. $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 73\}$, 7. $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{2}\}$, 8. $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq \sqrt{2}\}$,

1.1.33. (2) Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumát, ha vannak!

1. $[1,2]$, 2. $(1,2)$, 3. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$, 4. $\mathbb{Q}$, 5. $\{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^+\}$,

6. $\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}^+\}$, 7. $\{x : x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$, 8. $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n,k \in \mathbb{N}^+\}$,

9. $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$, 10. $\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$

1.1.34. (2) Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Mi a maximumuk, minmimumuk, szuprémumuk és az infimumuk? Melyik halmaz konvex?

$$\emptyset \qquad \{1,2,3,\dots\} \qquad \{1,-1/2,1/3,-1/4,1/5,\dots\} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R}$$

$$[1,2) \qquad (2,3] \qquad [1,2)\cup(2,3]$$

1.1.35. (2) Legyen H egy valós számokból álló halmaz. A H halmaz milyen tulajdonságait fejezik ki az alábbi állítások?

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in H)(x < y)$;
2. $(\forall x \in H)(\exists y \in \mathbb{R})(x < y)$;
3. $(\forall x \in H)(\exists y \in H)(x < y)$.

1.1.36. (3) Legyen $A \cap B \neq \emptyset$. Mit tudunk mondani $\sup A$, $\sup B$ és $\sup(A \cup B)$, $\sup(A \cap B)$, illetve $\sup(A \setminus B)$ kapcsolatáról?

1.1.37. (3) Legyen

$$A = (0,1), \quad B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad C^+ = \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} : n \in N^+,\ m \in N^+\right\},$$

$$C^- = \left\{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} : n \in N^+,\ m \in N^+\right\},\ D = \left\{\frac{1}{n} + m : n \in N^+,\ m \in N^+\right\},$$

$$E=\left\{\frac{1}{n}:n\in N^+\right\},\quad F=\left\{-\frac{1}{n}:n\in N^+\right\}.$$

Határozzuk meg – amennyiben léteznek – a fenti halmazok szuprémumát, infimumát, maximumát, minimumát.

1.1.38. (3) Milyen $H\subset\mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy
(a) $\inf H<\sup H$; (b) $\inf H=\sup H$; (c) $\inf H>\sup H$?

1.1.39. (5) Legyen $K,L\subset\mathbb{R}$ nemüres és felülről korlátos. Bizonyítsuk be, hogy:

1. $\sup(K+L)=\sup K+\sup L$, ahol $K+L=\{k+l:k\in K,l\in L\}$;
2. $\sup(K\cup L)=\max\{\sup K,\sup L\}$;
3. $\sup(K\cap L)\leq\min\{\sup K,\sup L\}$, és ha véges, akkor $\geq\max\{\inf K,\inf L\}$.

Megoldás→

1.1.40. (5) A következő halmazoknak mi a szuprémuma és mi az infimuma?
a) $\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$.
b) $\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$.
c) $\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\}\cup\{\frac{-1}{n}|n\in\mathbb{N}\}$.
d) $\{\frac{1}{n^n}|n\in\mathbb{N}\}\cup\{2,3\}$.
e) $\{\frac{\cos n}{n^n}|n\in\mathbb{N}\}\cup[-6,-5]\cup(100,101)$.

1.1.41. (5) Legyenek H,K nemüres részhalmazai $\mathbb{R}$-nek. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata?
a) $\sup H<\inf K$;
b) $\forall x\in H\ \exists y\in K\ x<y$.

1.1.42. (4) Legyen $a_n=\sqrt{n+1}+(-1)^n\sqrt{n}$.

$$\inf\{a_n|n\in\mathbb{N}\}=?$$

1.1.43. (5) $A\cup B=(0,1)$. Következik-e ebből, hogy

$$\inf A=0\qquad\text{vagy}\qquad\inf B=0\qquad ?$$

1.1.44. (7) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ minden konvex részhalmaza intervallum.

1.1.6. Teljességi tétel, összefüggőség, a számegyenes topológiája

1.1.45. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha egy R rendezett testben minden konvex halmaz intervallum, akkor a testben igaz a teljességi tétel: minden nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja.

Ötlet→ Megoldás→

1.1.46. (7) Teljesül-e a racionális törtek rendezett testében a teljességi tétel: minden nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja?

Ötlet→ Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 1.1.10

1.1.47. (6) Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a teljességi tétel, akkor teljesül az arkhimédészi axióma is.

Ötlet→

1.1.48. (6) Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a teljességi tétel, akkor teljesül a Cantor-axióma is.

Ötlet→

1.1.49. (8) Mutassunk példát olyan konvex halmazra a racionális tört függvények testében, ami nem intervallum.

Ötlet→

1.1.50. (7) (a) Legyen I_α $(\alpha \in A)$ korlátos, zárt intervallumok egy rendszere úgy, hogy közülük bármelyik kettőnek létezik közös pontja. Igazoljuk, hogy $\bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \neq \emptyset$. (1-dimenziós Helly-tétel)

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(c) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

Ötlet→

1.1.51. (8) Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel, akkor a testben igaz a teljességi tétel.

Ötlet→

1.1.52. (4) Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall a \in H\ \exists b, c\ ([b, c] \subset H,\ b < a < c)$. Melyik halmaz nyílt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a, b); \qquad [a, b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Eredmény→

1.1.53. (5) Igazoljuk, hogy
a) akárhány nyílt halmaz uniója is nyílt;
b) véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.

1.1.54. (4) Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *zárt*nak, ha a komplementere nyílt. Melyik halmaz zárt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a, b); \qquad [a, b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Eredmény→

1.1.55. (5) Igazoljuk, hogy
a) akárhány zárt halmaz metszete is zárt;
b) véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

1.1.56. (7) A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b\ \Big(\exists c, d\ \big(a < c < d < b\ \wedge\ H \cap (c, d) = \emptyset\big)\Big).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű. (Baire kategóriatétel)

Megoldás→

1.1.57. (9) Egy halmazt nevezzünk G_δ-nak, ha előáll, mint megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.

Bizonyítsuk be, hogy
a) Az irracionális számok halmaza G_δ.
b) A racionális számok halmaza nem G_δ.

Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 1.1.56

1.1.58. (8) Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *összefüggő*nek, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{R}$ összefüggő;

b) minden intervallum összefüggő.

Ötlet→

1.1.59. (5) Legyen R rendezett test, $A = \{x \in R : \ x^2 < 2\}$ és $B = \{x \in R : \ x^2 > 2\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok nyíltak.

(b) Mutassuk meg, hogy ha R összefüggő, akkor van olyan $a \in R$, amire $a^2 = 2$.

Megoldás→

1.1.60. (7) Igazoljuk, hogy ha egy R rendezett test összefüggő, akkor a testben igaz az Arkhimédészi és a Cantor-axióma is.

Ötlet→

1.1.61. (8) Legyen K zárt intervallum, és I_α $(\alpha \in A)$ nyílt intervallumoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in B} I_\alpha$. (Borel fedési tétele)

Ötlet→

1.1.62. (8) Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz Borel fedési tétele, akkor a test izomorf a valós számok testével.

Ötlet→

1.1.63. (8) Legyen $K \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt halmaz, és I_α $(\alpha \in A)$ nyílt halmazoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in B} I_\alpha$ (Minden korlátos, zárt halmaz kompakt.)

Ötlet→

1.1.64. (9) Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(IMO 1985/6)

Ötlet→

1.1.65. (5) Általánosítsuk a nyílt, zárt, összefüggő halmaz fogalmát rendezett halmazokra.

1.1.66. (9) Legyen $(R, <)$ egy rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy $<$ trichotóm és tranzitív kétváltozós reláció). Keressünk a következő állítások között ekvivalenseket. Adjunk közvetlen bizonyítást az $(a) \Rightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(d) \Rightarrow (c)$ stb. implikációk közül minél többre, illetve mutassunk ellenpéldát azokban az esetekben, amikor az implikáció nem igaz.

(a) R-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja.

(b) R-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja.

(c) R-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel.

(d) R minden konvex részhalmaza intervallum.

(e) R-ben igaz Borel fedési tétele, azaz minden korlátos zárt intervallumnak bármely nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

(f) R minden konvex részhalmaza összefüggő.

(g) R minden intervalluma összefüggő.

(h) R összefüggő.

Ötlet→

1.1.7. Hatványozás

1.1.67. (6) Mutassuk meg, hogy $(a^x)^y = a^{xy}$ ha $a > 0$ és $x, y \in \mathbb{Q}$.

1.1.68. (6) Bizonyítsuk be, hogy $(1 + x)^r \leq 1 + rx$ ha $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$ és $x \geq -1$.

Megoldás→

1.1.69. (6) Lehet-e x (ir)racionális és y (ir)racionális számok esetén x^y (ir)racionális (ez 8 feladat)?

Megoldás→

2. fejezet

Végtelen számsorozatok konvergenciája

2.1. Elméleti feladatok

2.1.1. (3) Tegyük fel, hogy $0 < a_n \to 0$. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n index van, amelyre $a_n > a_{n+r}$ minden $r \in \mathbb{N}$-re.

2.1.2. (2) $0 < a_n < 1$ minden n-re. Következik-e ebből, hogy $a_n^n \to 0$?

2.1.3. (2) Tegyük fel, hogy $a_{2n} \to B$, $a_{2n+1} \to B$. Következik-e ebből, hogy $a_n \to B$?

2.1.4. (3) Igaz-e, hogy ha

$$\frac{a_n}{3 - a_n} \to 2,$$

akkor $a_n \to 2$?

2.1.5. (3) Lássuk be, hogy ha $x_n \to a \neq 0$, akkor $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

2.1.6. (4) Lássuk be, hogy ha $y_n \to 0$ és létezik $y = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n}$, akkor $y \in [-1, 1]$.

2.1.7. (2) Legyen a_n egy számsorozat. Írjuk fel a $\lim a_n = 7$ állítás tagadását (és ne negációval kezdődjön)!

2.1.8. (4) Legyen a_n egy számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens:
(A) a_n korlátos; (B) minden $b_n \to 0$ sorozatra $a_n b_n \to 0$.

Megoldás→

2.1.9. (4) Mutassunk példát olyan $a_n \to \infty$ sorozatra, melyre $\forall k = 1, 2, \ldots$-re $(a_{n+k} - a_n) \to 0$.

2.1.10. (4) Mutassunk példákat olyan a_n sorozatra, amelyre $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ és
1. a_n konvergens; 2. $a_n \to \infty$;
3. $a_n \to -\infty$; 4. a_n "oszcillálva" divergens.

2.1.11. (5) Tegyük fel, hogy $a_n b_n \to 1$, $a_n + b_n \to 2$. Következik-e ebből, hogy $a_n \to 1$, $b_n \to 1$?

2.1.12. (4) Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozatnak van legkisebb vagy legnagyobb értéke.

Ötlet→

2.1.13. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \geq 0$, és $a_n \to a$, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

2.1.14. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat ∞-hez tart, akkor van legkisebb eleme.

2.1.15. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat $(-\infty)$-hez tart, akkor van legnagyobb eleme.
Kapcsolódó feladat: 2.1.12

2.1.16. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor $\sqrt{a_n} \to \infty$.

2.1.17. (3) Tegyük fel, hogy $a_n \to -\infty$, és legyen $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Mutassuk meg, hogy $b_n \to -\infty$.

2.1.18. (2) Igaz-e, hogy ha x_n konvergens, y_n divergens, akkor $x_n y_n$ divergens?

Megoldás→

2.1.19. (3) Legyen a_n egy sorozat és a egy szám. Melyik melyikből következik?
a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon$.

b) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ |a_n - a| \geq \varepsilon$.
c) $\exists\varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon$.
d) $\forall\varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon$.
e) $\exists\varepsilon' > 0\ \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon'\ \exists N\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \varepsilon$.

2.1.20. (3)

a) $a_n \to 1$. Következik-e ebből, hogy $a_n^n \to 1$?

b) $a_n > 0, a_n \to 0$. Következik-e ebből, hogy $\sqrt[n]{a_n} \to 0$?

c) $a_n > 0, a_n \to a > 0$. Következik-e ebből, hogy $\sqrt[n]{a_n} \to 1$?

d) $c_n d_n \to 0$. Következik-e ebből, hogy $c_n \to 0$ vagy $d_n \to 0$?

2.1.21. (1) Mutassuk meg, hogy 1. $a_n \to a \iff (a_n - a) \to 0$, 2. $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$.

2.1.22. (1) Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall K \in \mathbb{R}$-re az (a_n)-nek csak véges sok tagja kisebb K-nál.

2.1.23. (2) Mutassuk meg, hogy ha $\forall n \geq n_0$-ra $a_n \leq b_n$ és $a_n \to \infty$, akkor $b_n \to \infty$.

2.1.24. (4) Példák konstruálásával mutassuk meg, hogy ha $a_n \to 0$ és $b_n \to +\infty$, akkor $a_n b_n$ kritikus.

2.1.25. (1) Mutassuk meg, hogy ha $a_n \to 0$ és $a_n \neq 0$, akkor $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$.

2.1.26. (3) Az alábbi állítások közül melyek jelentik az $a_n \to A$ állítás tagadását? A többi mit jelent? Mi a logikai sorrend, azaz melyikből következik a másik?

1. Minden $\varepsilon > 0$-ra a sorozat végtelen sok tagja esik $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$-on kívülre.

2. Van olyan $\varepsilon > 0$, hogy a sorozat végtelen sok tagja esik $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$-on kívülre.

3. Minden $\varepsilon > 0$-ra a sorozatnak csak véges sok tagja esik az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumba.

4. Van olyan $\varepsilon > 0$, hogy a sorozatnak csak véges sok tagja esik az $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallumba.

2.1.27. (3) Van-e csupa irracionális számból álló sorozat, mely
(a) 1-hez tart
(b) $\sqrt{2}$-höz tart?

Megoldás→

2.1.28. (3) Adjunk példákat arra, hogy $a_n - b_n \to 0$ de $a_n/b_n \not\to 1$, illetve $a_n/b_n \to 1$ de $a_n - b_n \not\to 0$.

2.1.29. (2) Bizonyítandó, hogy ha (a_n) konvergens, akkor $(|a_n|)$ is konvergens. Igaz-e az állítás megfordítása?

2.1.30. (3) Abból, hogy $a_n^2 \to a^2$, következik-e, hogy $a_n \to a$? És $a_n^3 \to a^3$-ból, hogy $a_n \to a$?

Megoldás→

2.1.31. (4) Tekintsük az (a_n) sorozathoz tartozó

$$s_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

számtani közepek sorozatát. Bizonyítsuk be, ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, akkor $\lim_{n\to\infty} s_n = a$. Adjunk meg olyan sorozatot, amelyre (s_n) konvergens, de (a_n) divergens.

Megoldás→

2.1.32. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to \infty$.

Kapcsolódó feladat: 2.1.31

2.1.33. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n\ a_n > 0$ és $a_n \to b$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to b$.

Kapcsolódó feladat: 2.1.31

2.1.34. (4) Tekintsük $a_n \to b$ definícióját: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \ge n_0)(|a_n - b| < \varepsilon)$. A kvantorokat permutálva ill. megváltoztatva kapjuk a következő állításokat:

1. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\exists n \ge n_0)(|a_n - b| < \varepsilon)$;
2. $(\forall\varepsilon > 0)(\forall n_0)(\forall n \ge n_0)(|a_n - b| < \varepsilon)$;
3. $(\exists\varepsilon > 0)(\exists n_0)(\exists n \ge n_0)(|a_n - b| < \varepsilon)$;
4. $(\exists n_0)(\forall\varepsilon > 0)(\forall n \ge n_0)(|a_n - b| < \varepsilon)$;

5. $(\forall n_0)(\exists \varepsilon > 0)(\exists n \geq n_0)(|a_n - b| < \varepsilon)$.

Ezek az állítások az (a_n) sorozat milyen tulajdonságait fejezik ki? Adjunk meg olyan sorozatokat, amelyek rendelkeznek a megfelelő tulajdonságokkal.

2.1.35. (4) Tekintsük $a_n \to \infty$ definícióját: $(\forall P)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(a_n > P)$. A kvantorokat permutálva ill. megváltoztatva a következő állításokat kapjuk:

1. $(\forall P)(\exists n_0)(\exists n \geq n_0)(a_n > P)$;
2. $(\forall P)(\forall n_0)(\forall n \geq n_0)(a_n > P)$;
3. $(\exists P)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(a_n > P)$;
4. $(\exists P)(\exists n_0)(\exists n \geq n_0)(a_n > P)$;
5. $(\exists n_0)(\forall P)(\forall n \geq n_0)(a_n > P)$;
6. $(\forall n_0)(\exists P)(\exists n \geq n_0)(a_n > P)$.

Ezek az állítások az (a_n) sorozat milyen tulajdonságait fejezik ki? Adjunk meg olyan sorozatokat (amennyiben léteznek), amelyek rendelkeznek a megadott tulajdonságokkal.

2.1.36. (4) Adjunk példákat az (a_n) sorozat összes lehetséges viselkedésére (konvergens, végtelenhez tart, mínusz végtelenhez tart, oszcillálva divergens), miközben $a_{n+1} - a_n \to 0$ is teljesül.

2.1.37. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to \infty$ és (b_n) korlátos, akkor $(a_n + b_n) \to \infty$.

2.1.38. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak nincs végtelenhez tartó részsorozata, akkor (a_n) felülről korlátos.

2.1.39. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_{2n}) (a_{2n+1}), (a_{3n}) konvergensek, akkor a_n is az.

2.1.40. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a > 1$, akkor $(a_n^n) \to \infty$.

2.1.41. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a$, ahol $|a| < 1$, akkor $(a_n^n) \to 0$.

2.1.42. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

2.1.43. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $(a_n + b_n)$ konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens.

Ötlet→

2.1.44. (3) Igaz-e, hogy ha $(a_n \cdot b_n)$ konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens?

2.1.45. (3) Igaz-e, hogy ha (a_n/b_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens?

2.1.46. (3) Legyen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Bizonyítsuk be, hogy $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$.

2.1.47. (4) Legyen $a_k \neq 0$ és $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1.$$

Megoldás→

2.1.48. (4) Mutassuk meg, hogy ha $a_n > 0$ és $a_{n+1}/a_n \to q$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to q$.

2.1.49. (4) Adjunk példát olyan pozitív (a_n) sorozatra, amelyre $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, de a_{n+1}/a_n nem tart 1-hez.

2.1.50. (5) Egy sorozat a monotonitás, korlátosság, konvergencia szempontjából (elvben) 8-féleképpen viselkedhet (mindegyik tulajdonsággal vagy rendelkezik vagy sem). Valójában a 8 eset közül hány fordulhat elő?

2.1.51. (5) Tegyük fel, hogy $a_n \to a$ és $a < a_n$ minden n-re. Bizonyítsuk be, hogy a_n átrendezhető monoton csökkenővé.

Ötlet→

2.1.52. (6) Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat tagjai kielégítik az $a_n \leq (a_{n-1} + a_{n+1})/2$ egyenlőtlenséget minden $n > 1$-re. Bizonyítsuk be, hogy (a_n) nem lehet oszcillálva divergens.

2.1.53. (6) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) konvergens és $(a_{n+1} - a_n)$ monoton, akkor $n \cdot (a_{n+1} - a_n) \to 0$. Adjunk példát olyan konvergens (a_n) sorozatra, amelyre $n \cdot (a_{n+1} - a_n)$ nem tart 0-hoz.

2.1.54. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata, akkor $|a_n| \to \infty$.

Megoldás→

2.1.55. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) korlátos, és minden konvergens részsorozata b-hez tart, akkor $a_n \to b$.

2.1.56. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) minden részsorozatának van b-hez tartó részsorozata, akkor $a_n \to b$.

2.1.57. (4) Tegyük fel, hogy $a_{n+1} - a_n \to 0$. Következik-e ebből, hogy $a_{2n} - a_n \to 0$?

2.1.58. (4) Adjunk példákat arra, hogy $a_n \to \infty$ és

1. $a_{2n} - a_n \to 0$; 2. $a_{n^2} - a_n \to 0$; 3. $a_{2^n} - a_n \to 0$;

2.1.59. (4) Mutassunk példát olyan a_n és b_n sorozatokra, amikre $(a_n - b_n) \to 0$ és $a_n/b_n \to \infty$.

Megoldás→

2.1.60. (5) Igazoljuk, hogy minden számsorozat előállítható egy 0-hoz tartó és egy végtelenhez tartó sorozat szorzataként.

2.1.61. (5) Tegyük fel, hogy $a_n \to 1$. Mit mondhatunk az (a_n^n) sorozat határértékéről?

2.1.62. (5) Hogyan definiálhatnánk a 0^0, ∞^0 és 1^∞ mennyiségeket? Indokoljuk a választást.

2.2. Sorozatok nagyságrendje, Küszöbindex

2.2.1. (3) Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot \frac{1}{2^2} \cdots \frac{1}{3^3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n^n} < \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

2.2.2. (5) Bizonyítsuk be, hogy $n^{n+1} > (n+1)^n$ ha $n > 2$.

Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 2.6.8

2.2.3. (8) Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2^n} < n+1.$$

Megoldás→

2.2.4. (5) Bizonyítsuk be, hogy $2^n > n^k$ elég nagy (k-tól függő) n-re.

Megoldás→

2.2.5. (5) Bizonyítsuk be, hogy minden elég nagy n-re igaz az alábbi két állítás. Honnantól igaz? Bizonyítsuk be!
1. $2^n > n^3$, 2. $n^2 - 6n - 100 > 8n + 11$

2.2.6. (5) Keressünk olyan $n_o \in \mathbb{N}$-et, hogy $\forall n > n_o$-ra igaz:
1. $n^2 - 15n + 124 > 14512n$, 2. $n^3 - 16n^2 + 25 > 15n + 32162$,
3. $(1,01)^n > 1000$, 4. $n! > n^5$.

2.2.7. (5) Keressünk olyan $n_o \in N$-et, hogy $\forall n > n_o$ -ra igaz legyen:
1. $(1,01)^n > n$, 2. $(1,01)^n > n^2$, 3. $(1,0001)^n > 1000 \cdot \sqrt{n}$, 4. $100^n < n!$
5. $\frac{1}{2} < \frac{2n^2+3n-2}{3n^2-4n+20} < 1$, 6. $3^n - 1000 \cdot 2^n > n^3 + 100n^2$,
7. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{n}$, 8. $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, 9. $n\left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Megoldás→

2.2.8. (4) Mutassuk meg, hogy van olyan n_0 szám, amire igaz, hogy minden $n > n_0$ esetén
1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0,1$ 2. $\sqrt{n+3} - \sqrt{n} < 0,01$
3. $\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1} < 0,01$ 4. $\sqrt{n^2+5} - n < 0,01$.

2.2.9. (4) Bizonyítsuk be hogy az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja.

Megoldás→

2.2.10. (4) Hogyan lehet azt helyesen bizonyítani az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$,sorozatra, hogy $a_{10001} > 100$? (L. a 2.2.9 feladatot és megoldását.)

Megoldás→

Kapcsolódó feladatok: 2.2.9, 2.5.20

2.2.11. (5) Határozzuk meg az alábbi, rekurzióval definiált sorozat határértékét!
$a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1/(1 + a_n)\ (n = 1, 2, \ldots)$.

Ötlet→

2.2.12. (2) Van-e az alábbi sorozatoknak véges határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk $\varepsilon = 10^{-4}$-hez küszöbindexet!

$$1/\sqrt{n}; \qquad (-1)^n$$

2.2.13. (4) Van-e az alábbi sorozatoknak véges határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz küszöbindexet!

$$\frac{2n+1}{n+1}; \qquad \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$$

2.2.14. (4) Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $P = 10^6$-hoz, illetve $P = -10^6$-hoz.

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}; \qquad n^2 - n^3; \qquad n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right); \qquad \sin n$$

2.2.15. (4) Keressünk olyan N számot, hogy $\forall n > N$ esetén teljesüljön, hogy
1. $n^2 > 6n + 15$ 2. $n^2 > 6n - 15$ 3. $n^3 > 6n^2 + 15n + 37$
4. $n^3 > 6n^2 - 15n + 37$ 5. $n^3 - 4n + 2 > 6n^2 - 15n + 37$
6. $n^5 - 4n^2 + 2 > 6n^3 - 15n + 37$
7. $n^5 + 4n^2 - 2 > 6n^3 + 15n - 37$.

2.2.16. (4) Keressünk olyan N számot, hogy $\forall n > N$ esetén teljesüljön, hogy
1. $2^n > n^4$, 2. $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$; 3. $1,01^n > 100$, 4. $1,01^n > 1000$;
5. $0,9^n < \frac{1}{100}$; 6. $\sqrt[n]{2} < 1,01$, 7. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{100}$,
8. $\sqrt{n^2+5} - n < 0,01$, 9. $n^7 > 100n^5$,
10. $n^8 + n^3 - 10n^2 > n^5 + 1000n$.

2.2.17. (4) Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, és adjunk meg adott $\varepsilon > 0$-hoz n_0-at.

1. $1/\sqrt{n}$; 2. $(2n+1)/(n+1)$; 3. $(5n-1)/(7n+2)$; 4. $1/(n-\sqrt{n})$;

5. $(1+\ldots+n)/n^2$; 6. $(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})/n^{4/3}$; 7. $n\cdot\left(\sqrt{1+(1/n)}-1\right)$;

8. $\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}-2n$; 9. $\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-2}$;

10. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$.

2.2.18. (4) Adjunk meg adott P-hoz n_0-at a következő sorozatok esetében.

1. $n-\sqrt{n}$; 2. $(1+\ldots+n)/n$; 3. $(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})/n$;

4. $\dfrac{n^2-10n}{10n+100}$; 5. $2^n/n$;

2.2.19. (5) Lássuk be, hogy létezik olyan N természetes szám, hogy $\forall n > N$ esetén teljesül

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n^2.$$

Megoldás→

2.2.20. (5) Mutassunk olyan n_0 pozitív egészt, amire tetszőleges $n > n_0$ esetén

a) $10^n+11^n+12^n < 13^n$; *b)* $1,01^n > n$; *c)* $\sqrt{n}+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4} < n^{0,51}$.

2.2.21. (4) Mutassunk olyan n_0 pozitív egészt, amire tetszőleges $n > n_0$ esetén $1,0001^n > n^{100}$.

2.2.22. (4) Mutassunk példát olyan n_0 számra, amire igaz, hogy tetszőleges $n > n_0$ esetén

$$\frac{1}{n-5\sqrt{n}} > \frac{10n^2}{2^n-100}.$$

2.2.23. (7) Legyen $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots$ végtelenhez tartó sorozatok egy sorozata. Igazoljuk, hogy létezik olyan (b_n) sorozat, aminek nagyságrendje nagyobb, mint akármelyik $(a_n^{(k)})$ nagyságrendje.

2.3. Torlódási pontok, liminf, limsup

2.3.1. (3) Adjunk meg olyan sorozatot, melynek pontosan egy véges torlódási értéke van, de nem konvergens.

Megoldás→

2.3.2. (1) Legyen $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ adott. Adjunk meg olyan sorozatot, melynek pontosan ezek a számok a torlódási értékei.

2.3.3. (5) Legyen $a_1, a_2, \dots$ egy számsorozat. Adjunk meg olyan sorozatot, melynek legalább ezek a pontok torlódási értékei. Milyen más pontok torlódási értékek még *szükségképpen*?

2.3.4. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ és $\sup A = \alpha \notin A$, akkor létezik olyan (a_n) sorozat, amelyre $\{a_n\} \subset A$, (a_n) szigorúan monoton növekedő és $a_n \to \alpha$. Igaz-e az állítás akkor is, ha $\alpha \in A$?

2.3.5. (2) Adjuk meg a $B(0,1)$, $\dot{B}(0,1)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ és az $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ halmazok torlódási pontjait!

2.3.6. (5) Igazoljuk, hogy bármely számsorozat (vagy halmaz) véges torlódási pontjai zárt halmazt alkotnak.

2.3.7. (6) Mutassunk példát olyan sorozatra, amelynek torlódási pontjai éppen a $[0,1]$ halmaz elemei.

Megoldás→

2.3.8. (6) Igazoljuk, hogy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont.

2.3.9. (7) Igaz-e, hogy $\mathbb{R}$ minden zárt részhalmaza előáll, mint egy valós számsorozat véges torlódási pontjainak halmaza?

2.3.10. (2) Mik az alábbi sorozatok torlódási pontjai? Mi a limesz szuperioruk és limesz inferioruk?

$$\sqrt[n]{n}; \qquad (-1)^n + \frac{1}{n}; \qquad \{\sqrt{n}\}$$

2.3.11. (2) Számítsuk ki az $a_n = \dfrac{n^k}{2^n}$ sorozat limesz szuperiorát és limesz inferiorát.

2.3.12. (4) Igazoljuk közvetlenül a $\limsup$ és a $\liminf$ definíciójából, hogy $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

2.3.13. (5) (a) Bizonyítsuk be, hogy ha a_n és b_n két számsorozat úgy, hogy mindkettő alulról korlátos vagy mindkettő felülről korlátos, akkor

$$\underline{\lim}\, a_n+\underline{\lim}\, b_n \le \underline{\lim}(a_n+b_n) \le \underline{\lim}\, a_n+\overline{\lim}\, b_n \le \overline{\lim}(a_n+b_n) \le \overline{\lim}\, a_n+\overline{\lim}\, b_n.$$

(b) Keressünk olyan (a_n) és (b_n) korlátos sorozatokat, amikor
(b1) egyik esetben sincs egyenlőség;
(b2–b5) pontosan az egyik egyenlőségnél áll fenn egyenlőség (4 példa).

2.3.14. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

Megoldás→

2.3.15. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to a > 0$ és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\underline{\lim}(a_n \cdot b_n) = a \cdot \underline{\lim}\, b_n \quad \text{és} \quad \overline{\lim}(a_n \cdot b_n) = a \cdot \overline{\lim}\, b_n.$$

2.3.16. (5) Bizonyítsuk be, hogy
(i) ha $a_n \to a \ge 1$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\overline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\overline{\lim}\, b_n} \quad \text{és} \quad \underline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\underline{\lim}\, b_n}.$$

(ii) ha $a_n \to a \le 1$ és (b_n) korlátos, akkor

$$\overline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\underline{\lim}\, b_n} \quad \text{és} \quad \underline{\lim}\, a_n^{b_n} = a^{\overline{\lim}\, b_n}.$$

2.3.17. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) korlátos számsorozat, amire $\liminf a_n$ pozitív, továbbá $b_n \to 0$, akkor $a_n^{b_n} \to 1$.

2.3.18. (5) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots$ valós számsorozatra

$$\liminf \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \liminf a_n$$

és

$$\limsup \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \limsup a_n.$$

2.3.19. (5) Igazoljuk, hogy ha $a_n \to a$, akkor

$$\inf\left\{\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\right\} = a.$$

2.4. Határértékszámítás

2.4.1. (1) Sejtsük meg a határértéket és bizonyítsuk is be, használva a határérték definícióját:

1. $\lim \frac{(-1)^n}{n} = ?$ 2. $\lim \frac{1}{n!} = ?$
3. $\lim \frac{2n}{n^2+1} = ?$ 4. $0 < b < 1$ esetén $\lim b^n = ?$

2.4.2. (2) Sejtsük meg a határértéket és bizonyítsuk is be, használva a határérték definícióját:

$$\lim \frac{n}{2^n} = ?$$

2.4.3. (2) Határozzuk meg $\dfrac{n^2+1}{n+1} - an$ határértékét minden a-ra.

2.4.4. (3) Határozzuk meg $\sqrt{n^2 - n + 1} - an$ határértékét minden a-ra.

2.4.5. (3) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[n]{2} \to 1$.

Megoldás→

2.4.6. (4) Számítsuk ki: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n - n}$.

Megoldás→

2.4.7. (4) Sejtsük meg a határértéket és bizonyítsuk is be, használva a határérték definícióját:

$$\lim \frac{2^n}{n!} = ?$$

2.4.8. (3)

$$\lim \frac{n^2 + 6n^3 - 2n + 10}{-4n - 9n^3 + 10^{10}} = ?$$

2.4.9. (3)

$$\lim \frac{n+7\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}+3} = ?$$

2.4.10. (4) Számítsuk ki:

$$\lim \frac{n^{100}}{1,1^n} = ?$$

Ötlet→

2.4.11. (5) Mi az $\sqrt[n]{n}$ sorozat határértéke?

2.4.12. (4) Mi az $\sqrt[n]{n!}$ sorozat határértéke?

2.4.13. (4) Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\dfrac{n^5-n^3+1}{3n^5-2n^4+8}$; 2. $\sqrt{n^4+n^2}-n^2$; 3. $\sqrt[n]{6^n-5^n}$.

Megoldás→

2.4.14. (4) Mi az alábbi sorozatok határértéke?

1. $\sqrt[n]{3}$ 2. $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ 3. $\left(\dfrac{1+\log 2}{n}\right)^n$ 4. $\sqrt[n]{2^n+n}$

5. $\sqrt[n]{1+2+3+\ldots+n}$ 6. $\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\ldots+100^n}$

7. $\dfrac{n^2+(n+2)^3}{n^2-\sqrt{(n^2+1)(n^4+2)}}$ 8. $\dfrac{n^{100}2^n+3^n}{\left(\sqrt{4^n+1}-2^n+n^5\right)(5^{n+6}-8)}$

2.4.15. (4) Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\dfrac{3n+16}{4n-25}$, 2. $n\cdot\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$, 3. $\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n^2+1}{n^3+1}$, 4. $\dfrac{5-2n^2}{4+n}$,

5. $\dfrac{\sin(n)+n}{n}$, 6. $\dfrac{2n^3+3\sqrt{n}}{1-n^3}$, 7. $\sqrt[n]{n+5^n}$, 8. $\dfrac{2^n+n!}{n^n-n^{1000}}$,

9. $\sqrt[n]{n^n-5^n}$, 10. $\dfrac{\sin(n)}{n}$, 11. $\dfrac{5n^2+(-1)^n}{8n}$, 12. $\dfrac{6n+2n^2\cdot(-1)^n}{n^2}$.

2.4.16. (4) Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\sqrt[n]{2n+\sqrt{n}}$, 2. $\dfrac{n^7-6n^6+5n^5-n-1}{n^3+n^2+n+1}$, 3. $\dfrac{n^3+n^2\sqrt{n}-\sqrt{n}+1}{2n^3-6n+\sqrt{n}-2}$,

4. $\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}$, 5. $\sqrt[n]{2^n+3^n}$, 6. $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+4}}$, 7. $\log\frac{n+1}{n+2}$, 8. $\frac{7^n-7^{-n}}{7^n+7^{-n}}$,

9. $\frac{(2n+3)^5\cdot(18n+17)^{15}}{(6n+5)^{20}}$, 10. $\frac{\sqrt{4n^2+2n+100}}{\sqrt[3]{6n^3-7n^2+2}}$, 11. $\frac{\sqrt[4]{n^3+6}}{\sqrt[3]{n^2+3n-2}}$,

12. $n\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, 13. $\frac{2^n+5^n}{3^n+1}$, 14. $n\cdot(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$.

2.4.17. (4)

$$\lim \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} = ?$$

Megoldás→

2.4.18. (4)

$$\lim \left(\frac{4n+1}{4n+8}\right)^{3n+2} = ?$$

2.4.19. (4) Legyen $a>0$.

$$\lim \sqrt[n]{n+a^n} = ?$$

Ötlet→

2.4.20. (7) Konvergens-e a

$$a_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

sorozat?

2.4.21. (4)

$$\lim \frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{2n+1} = ?$$

2.4.22. (5) Konvergens-e

$$x_n = \frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}?$$

Ötlet→

2.4.23. (4) Számítsuk ki:

$$\lim \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right) =?$$

1.4-8c

2.4.24. (4) Konvergens-e

$$\sqrt[n]{n^2+\cos n} \qquad ?$$

Megoldás→

2.4.25. (4) Számítsuk ki

$$\lim \sqrt[n]{2^n+\sin n}.$$

2.4.26. (5) Számítsuk ki

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

2.4.27. (4) Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\dfrac{6n^4+2n^2\cdot(-1)^n}{n^4}$, 2. $\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}-2n$;

3. $\dfrac{\sqrt[n]{n^n-5^n}}{n}$, 4. $n\cdot(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$.

2.4.28. (5) Tegyük fel, hogy $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. Számítsuk ki a $\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}$ sorozat limeszét.

2.4.29. (5) Számítsuk ki a $\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$ sorozat limeszét.

2.4.30. (4) Legyen $|a|, |b| < 1$.

$$\lim \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} =?$$

2.4.31. (4)

1. $\lim \sqrt[n^2]{1^2 + 2^n + 3^n + \ldots + n^n} = ?$
2. $\lim \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}} = ?$
3. $\lim \dfrac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^3}}{\frac{1}{n!} - \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n^4+2)}}} = ?$

2.4.32. (4)

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = ?$$

2.4.33. (4)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}} = ?$$

2.5. Rekurzívan definiált sorozatok

2.5.1. (2) Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$. Bizonyítsuk be, hogy a_n monoton növekedő.

2.5.2. (3) Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az alábbi sorozatot, ha van határérték, adjuk meg: $a_1 = 0,9 \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$.

Megoldás→

2.5.3. (4) Legyen $a_1 = 0,9$, $a_{n+1} = a_n - a_n^5$. Létezik-e olyan tagja a sorozatnak, mely kisebb $\frac{1}{10^{10}}$-nél?

2.5.4. (4) Definiáljuk az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az

$$a_1 = 10; \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$$

rekurzióval.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat korlátos, és mutassunk példát alsó, illetve felső korlátra.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 1$. Ellenőrizzük a definíciót, és keressünk minden $\varepsilon > 0$-hoz n_0-t.

Megoldás→

2.5.5. (3) Legyen

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}.$$

Konvergens-e x_n? Ha igen, mennyi a limesze?

2.5.6. (3) Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az alábbi sorozatot, ha van határérték, adjuk meg: $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

2.5.7. (3) Határozzuk meg az alábbi, rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1/(2 - a_n)\ (n = 1, 2, \dots);$
2. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1/(4 - a_n)\ (n = 1, 2, \dots);$
3. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1/(1 + a_n)\ (n = 1, 2, \dots);$
4. $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2}\ \sqrt{a_n}\ (n = 1, 2, \dots);$

2.5.8. (8) Legyen $a > 0$ adott, és definiáljuk az (a_n) sorozatot az $a_0 = a$ $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$ rekurzióval. Bizonyítandó, hogy $a_n \to \sqrt{a}$. Ha $\sqrt{2}$-t akarjuk kiszámolni 6 tizedesjegyig, akkor hanyadik tagig kell elmenni?

2.5.9. (6) Legyen $A > 0$, $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}$. Igazoljuk, hogy $x_n \to \sqrt{A}$.

2.5.10. (3) Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Igazoljuk, hogy

(a) A sorozat monoton nő;

(b) A sorozat korlátos;

(c) A sorozat határértéke csak a 2 lehet.

2.5.11. (4) Legyen $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{6}{5 - x_n}$. Mennyi x_n határértéke?

2.5.12. (4) Legyen $a_0 = 0, a_1 = 1$, és $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. $\lim a_n = ?$

2.5.13. (2) Legyen $a_1 = 100$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Igazoljuk, hogy a sorozat monoton és korlátos. Mi lehet a határértéke?

2.5.14. (4) Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{100}}$ ha $n \geq 1$. Korlátos-e ez a sorozat? Mi a határértéke?

2.5.15. (4) Definiáljuk az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a következő rekurzióval: legyen $x_1 = 3\sqrt{2}$, és $x_{n+1} = \dfrac{8}{6 - x_n}$, ha $n \geq 1$. Mi a sorozat limesz szuperiora?

2.5.16. (5) Legyen $a_1 = 10$ és $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{a_n^2 + 1}$. $\lim a_n =?$

2.5.17. (5) Konvergens-e, és ha igen, akkor mi a limesze az

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{4}{a_n}}{2}$$

sorozatnak?

2.5.18. (5) Határozzuk meg az alábbi, rekurzióval definiált sorozat határértékét!

$a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1/(4 - a_n)\ (n = 1, 2, \ldots);$

2.5.19. (3) Legyen az (a_n) sorozat a következő rekurzióval megadva: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

Megoldás→

2.5.20. (4) Legyen $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{a_n^2}$. Igazoljuk, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $a_n \geq 10$.

Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 2.2.10

2.5.21. (2) Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$-re.

2.5.22. (4) Legyen $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3}.$$

Igaz-e, hogy ekkor $\exists n\ a_n > 10^{10}$?

2.6. Az e szám

2.6.1. (3) Bizonyítsuk be:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

2.6.2. (5) Bizonyítsuk be:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

2.6.3. (7) Bizonyítsuk be:

$$0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$$

2.6.4. (5) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2},$$

vagyis az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Megoldás→

2.6.5. (5) Bizonyítsuk be, hogy

$$n+1 < e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} < 3n.$$

2.6.6. (9) Melyik nagyobb? Az e szám vagy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$?

2.6.7. (5) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egészre $n! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^n$, és $n \geq 7$ esetén $n! < \frac{n^{n+1}}{e^n}$.

2.6.8. (6) Melyik nagyobb? $1000001^{1000000}$ vagy $1000000^{1000001}$

Ötlet→

1.2-3

2.6.9. (7) Mutassunk olyan pozitív c_1, c_2 konstansokat, amelyekre

$$c_1 \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} < n! < c_2 \cdot \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$$

minden pozitív egész n-re.

2.6.10. (4) Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n.$$

sorozat határértékét.

Megoldás→

2.6.11. (4) Számítsuk ki:

$$\lim \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{3n+8} =?$$

2.6.12. (7) Igazoljuk, hogy ha $n \cdot a_n \to a$ és $b_n/n \to b$, akkor $(1+a_n)^{b_n} \to e^{ab}$.

2.6.13. (7) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (a_n) valós számsorozatra

$$\liminf \left(1+\frac{1}{n}\right)^{a_n} = e^{\liminf \frac{a_n}{n}}.$$

2.7. A Bolzano–Weierstrass-tétel és a Cauchy-kritérium

2.7.1. (4) a_n monoton és van konvergens részsorozata. Következik-e ebből, hogy a_n konvergens?

Megoldás→

2.7.2. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha $|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n}$ minden n-re, akkor (a_n) konvergens.

2.7.3. (8) Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a Bolzano–Weierstrass-tétel, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.

2.7.4. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha egy arkhimédészien rendezett testben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor a testben igaz a legkisebb felső korlát tétele is.

2.7.5. (8) Vezessük le a Cauchy-kritérium elégségességét az egydimenziós Helly-tételből.

2.8. Végtelen sorok: bevezetés

2.8.1. (7) a) Bizonyítsuk be, hogy $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ divergens.

b) Mutassuk meg, hogy ha a)-ban csak olyan tagokat adunk össze, melyek 10-es számrendszerbeli alakjában nincs 9-es számjegy, akkor a_n konvergens.

2.8.2. (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

2.8.3. (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + \frac{1}{2}} = ?$$

2.8.4. (3) Konvergens vagy divergens?

$$\sum \frac{n^{100}}{1{,}001^n}$$

2.8.5. (3) Konvergens vagy divergens?

$$\sum \frac{1}{\sqrt{(2i-1)(2i+1)}}$$

2.8.6. (2)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} \right) = ?$$

2.8.7. (5) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Megoldás→

2.8.8. (2) Igazoljuk, hogy ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim(a_{n+1} + a_{n+1} + \ldots + a_{n^2}) = 0$.

2.8.9. (4) Adjunk példát olyan a_n sorozatra, melyre $\sum a_n$ konvergens, és a_{n+1}/a_n nem korlátos.

Megoldás→

2.8.10. (6) Konvergens vagy divergens?

$$\sum \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$$

2.8.11. (6) Konvergens vagy divergens?

$$\sum \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{1}{2k+1}$$

2.8.12. (7) Milyen $z \in \mathbb{C}$-re konvergens?

$$\sum z^n \qquad \sum \frac{z^n}{n} \qquad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

2.8.13. (4) Konvergens vagy divergens?

$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \ldots$$

2.8.14. (3) Konvergens vagy divergens?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$$

2.8.15. (5) Konvergens vagy divergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{e}-1)$$

2.8.16. (5) Mutassuk meg, hogy ha $|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{n^2}$, akkor (a_n) konvergens.

Ötlet→

2.8.17. (7) $h_n := \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{2h_2^2}+\ldots+\frac{1}{nh_n^2}<2.$$

2.8.18. (5) Milyen x-re és p-re konvergens

$$\sum\frac{x^n}{n^p}\ ?$$

2.8.19. (4) Konvergens vagy divergens?

$$\sum\frac{7^n}{\sqrt{n!}}$$

2.8.20. (4) Legyen $a,b>0$. Milyen x-re konvergens?

$$\sum\frac{x^n}{a^n+b^n}$$

Megoldás→

2.8.21. (5) (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\liminf\frac{\log\frac{1}{a_k}}{\log k}>1$, akkor $\sum a_k$ konvergens.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\limsup\frac{\log\frac{1}{a_k}}{\log k}<1$, akkor $\sum a_k$ divengens.

(c) Mutassunk példát olyan a_n sorozatra, amire $\frac{\log\frac{1}{a_k}}{\log k}\to 1$, és $\sum a_k$ konvergens.

(d) Mutassunk példát olyan a_n sorozatra, amire $\frac{\log\frac{1}{a_k}}{\log k}\to 1$, és $\sum a_k$ divergens.

2.8.22. (4) Milyen x-re konvergens?

$$\sum \log\left(\frac{k+1}{k}\right) x^k$$

2.9. Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok

2.9.1. Megszámlálható halmazok

2.9.1. (5) Igazoljuk, hogy a magyar betűs írásjelkészlettel leírható szövegek halmaza megszámlálható.

2.9.2. (5) Igazoljuk, hogy a kínai betűs írásjelkészlettel leírható matematikai bizonyítások halmaza megszámlálható.

2.9.3. (5) Igazoljuk, hogy a véges hosszú, egészekből áll sorozatok halmaza megszámlálható.

Megoldás→

2.9.4. (5) Bizonyítsuk be, hogy az algebrai számok halmaza megszámlálható.

2.9.5. (8) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$-nek minden nyílt részhalmaza előáll, mint megszámlálható sok nyílt intervallum egyesítése. (Lindelöf-lemma)

2.9.6. (8) Nevezzük „hangjegynek” a sík olyan ponthalmazait, amik egy körvonalból és egy hozzá húzott érintő szakaszból állnak. Bizonyítsuk be, hogy minden olyan halmaz, amelynek elemei páronként diszjunkt hangjegyek, megszámlálható.

2.9.7. (7) A racionális számokon egy méretei miatt nem látható bolha ugrál. A bolha minden másodpercben egy titkos, de állandó racionális számmal arrébb ugrik (mindig ugyanabba az irányba). Mi minden lépés után az egyik racionális számra rácsapunk. Elpusztíthatjuk-e biztosan a bolhát?

2.9.2. Kontinuum számosságú halmazok

2.9.8. (8) Igazoljuk, hogy a körvonal kontinuum számosságú. Valamint, hogy a sík mint ponthalmaz kontinuum számosságú.

2.9.9. (6) Igazoljuk, hogy a véges hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmaza megszámlálható. Ugyanakkor igazoljuk, hogy a végtelen hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmaza kontinuum számosságú.

Megoldás→

2.9.10. (7) Keressünk példát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésre $(0,1]$ és $[0,1]$ között.

Kapcsolódó feladatok: 2.9.18, 2.9.20

2.9.11. (9) Lehet-e a számegyenes minden racionális pontja fölé egy T betűt írni úgy hogy páronként diszjunktak legyenek? És minden pontja fölé?

2.9.12. (8) Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \sim R$.

2.9.13. (8) Mutassuk meg, hogy valós számok bármely A megszámlálható részhalmazához létezik olyan a valós szám, amire $A \cap (A+a) = \emptyset$

2.9.14. (8) Bizonyítsuk be, hogy $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

2.9.15. (8) Bizonyítsuk be, hogy a valós számokból áll végtelen sorozatok halmaza kontinuum számosságú.

2.9.16. (9) Igazoljuk, hogy $\mathcal{P}(\mathbb{N})$-nek létezik olyan kontinuum számosságú $\mathcal{L}$ részhalmaza, ami lánc, vagyis tetszőleges $A, B \in \mathcal{L}$ esetén $A \subset B$ vagy $B \subset A$.

2.9.17. (9) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami minden intervallumban minden valós értéket felvesz.

2.9.3. Számosságok összehasonlítása

2.9.18. (8) Legyen H halmaz és $h : P(H) \to P(H)$ monoton növő halmazfüggvény, amire $X \subset Y \subset H$ esetén $h(X) \subset h(Y) \subset H$. Nevezzünk egy $X \subset H$ halmazt kicsinek, ha $X \subset h(X)$. Egy X halmaz fixpontja h-nek, ha $h(X) = X$.

Legyen A a kicsi halmazok uniója.
(a) Igazoljuk, hogy A kicsi.
(b) Igazoljuk, hogy $h(A)$ kicsi.
(c) Igazoljuk, hogy A fixpontja h-nak.
(d) Legyen $X_0 = \emptyset$ és $X_{n+1} = h(X_n)$. Igaz-e, hogy $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$?
Kapcsolódó feladatok: 2.9.19, 2.9.20

2.9.19. (6) A *Cantor–Schöder–Bernstein-tétel* szerint ha A, B halmazok, és léteznek $f : A \to B$ és $g : B \to A$ injekciók, akkor létezik $A \to B$ bijekció is.

A 2.9.18 feladat segítségével bizonyítsuk be a Cantor–Schöder–Bernstein-tételt úgy, hogy felosztjuk az A, B halmazokat két-két olyan diszjunkt részre, amikre $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, $f(A_1) = B_1$ és $g(B_2) = A_2$.
Kapcsolódó feladatok: 2.9.18, 2.9.20

2.9.20. (6) Legyen $A = [0, \infty)$, $B = (0, \infty)$, $f : A \to B$, $f(x) = x + 1$, s $g : B \to A$, $g(x) = x$. A 2.9.19 feladat segítségével adjunk meg egy $A \to B$ bijekciót!
Kapcsolódó feladatok: 2.9.18, 2.9.19

3. fejezet

Valós függvények határértéke, folytonossága

3.1. Valós függvények globális tulajdonságai

3.1.1. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha H olyan halmaz a síkon, ami minden függőleges egyenesről megszámlálható sok pontot tartalmaz, akkor létezik olyan $f : R \to R$ függvény, hogy f megszámlálható sok eltoltjának grafikonja együttesen lefedi H-t. (A g függvény az f függvénynek „eltoltja", ha van olyan d valós szám, amire $g(x) = f(x - d)$.)

3.1.2. (2) A következő függvényekről bizonyítsuk be, hogy a megadott H halmazon injektívek, és határozzuk meg az inverzüket:

1. $f(x) = 3x - 7$, $H = \mathbb{R}$; 2. $f(x) = x^2 + 3x - 6$, $H = [-3/2, \infty)$.

3.1.3. (2) A következő függvényekről bizonyítsuk be, hogy a megadott H halmazon injektívek, és határozzuk meg az inverzüket:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $H = [-1, 1]$; 2. $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$, $H = \mathbb{R}$.

Megoldás→

3.1.4. (7) Keressünk olyan $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ függvényt, amire $f(f(x)) = -x$ $\forall x \in [-1, 1]$.

Megoldás→

3.1.5. (4) Konstruáljunk olyan periodikus függvényt, aminek akármilyen kicsi pozitív periódusa is létezik, de nem konstans.

3.1.6. (6) Legyen I nem elfajuló intervallum. Igazoljuk, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $\forall a,b,c \in I \quad a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a};$

(b) $\forall a,b,c \in I \quad a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} < \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b};$

(c) $\forall a,b,c \in I \quad a<b<c \Rightarrow \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} < \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b};$

(d) $\forall a,b \in I \quad \forall t \in (0,1) \quad a \neq b \Rightarrow f\big(ta+(1-t)b\big) < tf(a)+(1-t)f(b);$

(e) minden $a \in I$-re az $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ függvény szigorúan nő az $I \setminus \{a\}$ halmazon;

(f) I minden belső a pontjához létezik olyan b valós szám, hogy bármely $x \in I \setminus \{a\}$ esetén $f(x) > b(x-a)+f(a)$.

3.1.7. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : I \to \mathbb{R}$ konvex az (a,b) intervallumban, akkor az alábbi esetek egyike fennáll.

1. f monoton csökkenő (a,b)-ben.
2. f monoton növő (a,b)-ben.
3. Létezik egy $c \in (a,b)$ pont úgy, hogy f monoton csökkenő $(a,c]$-ben és monoton növő $[c,b)$-ben.

3.1.8. (2) Milyen nevezetes egyenlőtlenséget kapunk, ha a Jensen-egyenlőtlenséget felírjuk az x^2 függvényre?

3.1.9. (2) Milyen nevezetes egyenlőtlenséget kapunk, ha a Jensen-egyenlőtlenséget felírjuk az $1/x$ függvényre a $(0,\infty)$ félegyenesen?

3.1.10. (6) Legyen $u_\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex valamilyen A indexhalmaz minden elemére. Tegyük fel, hogy $f(x) := \sup_{\alpha\in A} u_\alpha$ véges minden x-re. Igazoljuk, hogy f konvex.

3.1.11. (5) Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak minden $f : A \to B$ függvényre és $H, K \subset A$ részhalmazra.

1. $f(H \cup K) = f(H) \cup f(K)$; 2. $f(H \cap K) = f(H) \cap f(K)$;
3. $f(H \setminus K) = f(H) \setminus f(K)$.

3.1.12. (5) Tetszőleges $f : A \to B$ függvényre és $Y \subset B$ halmazra jelöljük $f^{-1}(Y)$-val azon $x \in A$ elemek halmazát, amelyekre $f(x) \in Y$. (Nem tesszük fel, hogy f-nek létezik az inverze. A jelölés jogosságát illetően megjegyezzük, hogy *ha* létezik az f^{-1} inverz, akkor $f^{-1}(Y)$ kétféle értelmezése ugyanazt a halmazt jelöli.)

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $Y, Z \subset B$ halmazokra

1. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$; 2. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$;
3. $f^{-1}(Y \setminus Z) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Z)$.

3.1.13. (1) Keressük meg $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x-2}$ inverzét az $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ halmazon.

3.1.14. (2) Injektívek-e a következő függvények a $[-1, 1]$ halmazon?

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Megoldás→

3.1.15. (2) Legyen f és g értelmezve $(-\infty, +\infty)$-ben és legyen
1. f páros, g páratlan; 2. f páros, g páros; 3. f páratlan, g páratlan.
Mi mondható az 1), 2) ill. 3) esetekben az $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ill. $f \circ g$ függvények paritásáról?

3.1.16. (2) A 3.1.15 feladat kérdése páros ill. páratlan helyett monoton növekedő ill. monoton csökkenő függvényekre.

3.1.17. (2) Bizonyítsuk be, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény előáll mint egy páros és egy páratlan függvény összege.

3.1.18. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha f páratlan függvény $(-1, +1)$-en és monoton $(-1, 0)$-n, akkor monoton $(0, +1)$-en is. Igaz-e, hogy $(-1, +1)$-en is monoton?

3.1.19. (2) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ha } x \text{ racionális} \\ -x^3 & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Létezik-e $f(x)$ egyértelmű inverze $(-\infty, +\infty)$-ben?

3.1.20. (2) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ függvény monoton $(0,1)$-en és itt minden valós értéket pontosan egyszer vesz fel.

3.1.21. (4) Legyen $f(x) = \max\{x, 1-x, 2x-3\}$. Vizsgáljuk meg a függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából.

3.1.22. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha f szigorúan konvex az I intervallumon, akkor f grafikonját minden egyenes legfeljebb két pontban metszi.

3.1.23. (1) Létezik-e olyan $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik korlátos, de nincs maximuma?

3.1.24. (2) Létezik-e olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik korlátos, de nincs maximuma?

3.1.25. (4) Van-e olyan f monoton függvény, amelyikre

1. $D(f) = [0,1]$, $R(f) = (0,1)$;
2. $D(f) = [0,1]$, $R(f) = [0,1] \cup [2,3]$;
3. $D(f) = [0,1]$, $R(f) = [0,1) \cup [2,3]$;
4. $D(f) = [0,1]$, $R(f) = [0,1) \cup (2,3]$?

Megoldás→

3.1.26. (8) Létezik-e olyan függvény, amelyik minden intervallumon minden egész értéket felvesz?

3.1.27. (5) Bizonyítsuk be, hogy x^k szigorúan konvex $[0,\infty)$-ben, minden $k > 1$ egész számra.

3.1.28. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, \dots, a_n \geq 0$ és $k > 1$ egész, akkor $\dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\dfrac{a_1^k + \dots + a_n^k}{n}}$.

3.1.29. (4) Bizonyítsuk be, hogy

1. $\sqrt{x}$ szigorúan konkáv $[0,\infty)$-ben;
2. $\sqrt[k]{x}$ szigorúan konkáv $[0,\infty)$-ben minden $k>1$ egészre.

3.1.30. (4) Igazoljuk, hogy ha $g : A \to B$ és $f : B \to C$ konvex, továbbá f monoton nő, akkor $f \circ g$ is konvex.

3.1.31. (4) Igazoljuk, hogy ha f konvex, akkor felbontható egy monoton növekvő és egy monoton csökkenő függvény összegére.

3.1.32. (9) Konstruáljunk olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, aminek kontinuumféle különböző periódusa van, de nem konstans.

3.1.33. (7) Előáll-e az x^2 függvény két periodikus függvény összegeként?

3.1.34. (10) Előáll-e az x^2 függvény három periodikus függvény összegeként?

3.2. Függvények folytonossága és határértéke

3.2.1. (2) A határérték megfelelő definíciója szerint alkalmas küszöbszámokat (pl. ε-hoz δ-t, vagy K-hoz δ-t, vagy ε-hoz L-et stb.) keresve adjuk meg a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\{x\}+1}{x-3}$;

Megoldás→

3.2.2. (2) Adjunk meg adott $\varepsilon > 0$-hoz vagy K-hoz jó δ-t vagy L-et az alábbi függvényekhez.

1. $\lim\limits_{x\to 1+} (x^2+1)/(x-1)$, 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$.

3.2.3. (2) Határozzuk meg a következő függvények szakadási pontjait. Milyen típusú a szakadás?

1. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$, 2. $g(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$,
3. $h_1(x) = x[\dfrac{1}{x}]$, 4. $h_2(x) = x^2[\dfrac{1}{x}]$.

3.2.4. (3) Határozzuk meg a következő függvények szakadási pontjait. Milyen típusú a szakadás?

1. $\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, 2. $\dfrac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]}$.

3.2.5. (2) Határozzuk meg a következő függvények szakadási pontjait. Milyen típusú a szakadás?

a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$, b) $g(x)=\operatorname{sgn}\left(\left\{\dfrac{1}{x}\right\}\right)$.

Megoldás→

3.2.6. (2) Mutassuk meg, hogy

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b.$

3.2.7. (1) Definiáljuk

$\lim_{x\to a-} f(x)=-\infty$-t, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=b$-t és $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$-t.

3.2.8. (1) Mondjuk ki $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ tagadását!

3.2.9. (2) Mutassuk meg, hogy az f függvény akkor és csak akkor folytonos az a pontban, ha ott jobbról is és balról is folytonos.

3.2.10. (1) Mutassuk meg, hogy az $[x]$ függvény folytonos a-ban, ha a nem egész, és jobbról folytonos a-ban, ha a egész.

3.2.11. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonos egy pontban, akkor $|f|$ is folytonos ugyanitt. Fordítva, $|f|$ folytonosságából következik-e f folytonossága?

3.2.12. (2) Hol folytonosak a következő függvények?

1. $f(x)=\begin{cases} x & \text{ha } \frac{1}{x}\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{x}\notin\mathbb{N} \end{cases}$,
2. $f(x)=\begin{cases} 3x+7 & \text{ha } x\in\mathbb{Q} \\ 4x & \text{ha } x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$,
3. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{ha } x\geq 0 \\ cx & \text{ha } x<0 \end{cases}$.

3.2.13. (2) Hol folytonosak?

1. Riemann-függvény, 2. $\sin\dfrac{1}{x}$, 3. $x\sin\dfrac{1}{x}$.

3.2.14. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonosak és $f(a)<g(a)$, akkor a-nak létezik egy környezete, ahol $f(x)<g(x)$.

3.2.15. (2) Legyen f konvex $(-\infty,\infty)$-ben, és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$. Lehetséges-e, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$?

3.2.16. (2) Legyen f konvex $(-\infty,\infty)$-ben, és tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$. Lehetséges-e, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$?

3.2.17. (1) Adjunk meg olyan $f:[0,1]\to[0,1]$ függvényt, amely monoton és végtelen sok szakadási helye van.

3.2.18. (3) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény a pontbeli folytonosságának definíciója a következő formulával írható le:
$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$.
Tekintsük a következő formulákat.
$(\forall\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$;
$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$;
$(\exists\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$;
$(\forall\delta>0)(\exists\varepsilon>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$;
$(\exists\delta>0)(\forall\varepsilon>0)(\forall x)(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$.
Ezek a formulák az f függvény milyen tulajdonságait írják le?

3.2.19. (1) Írjuk fel a definíciót ε,δ,P,Q stb. betűkkel:

$$\lim_{-\infty} f=1;\quad \lim_{t\to t_0+0} s(t)=0;\quad \lim_{\zeta\to-0} g(\zeta)=-\infty$$

$$\varlimsup_{\vartheta\to-1} h(\vartheta)=\infty;\quad \varliminf_{\xi\to-\infty} u(\xi)=2.$$

3.2.20. (1) Írjuk fel a definíciót ε,δ,K,L stb. betűkkel.

$$\lim_{1} f=\infty;\quad \lim_{\eta\to\eta_0-} s(\eta)=2;\quad \lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty;\quad \lim_{\omega\to\omega_0-} s(\omega)=2;$$

$$\varliminf_{0+} g=1;\quad \varliminf_{\infty} h=1.$$

3.2.21. (2) Lássuk be, hogy ha f és g folytonosak az a pontban, akkor $\max(f,g)$ és $\min(f,g)$ is folytonosak a-ban.

3.2.22. (2) Legyen $g(x)=f(x^2)$ folytonos. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ is folytonos?

3.2.23. (7) Tegyük fel, hogy $g(x)=\lim\limits_{t\to x} f(t)$ létezik minden pontban. Bizonyítsuk be, hogy $g(x)$ folytonos.

Ötlet→

3.2.24. (3) Keressünk példát arra, hogy $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta} g(x)=\gamma$, de $\lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x))\neq\gamma$.

3.2.25. (2) Definiálhatjuk-e a $(\sqrt{x}-1)/(x-1)$ függvényt $x=1$-ben úgy, hogy ott folytonos legyen?

3.2.26. (2) Legyen n pozitív egész. Definiálhatjuk-e az $(\sqrt[n]{1+x}-1)/x$ függvényt $x=0$-ban úgy, hogy ott folytonos legyen?

3.2.27. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodikus és $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, akkor f azonosan nulla.

3.2.28. (4) Konstruáljunk olyan f és g függvényeket, amelyekre $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, továbbá

1. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ létezik és véges; 2. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\infty$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=-\infty$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))$ nem létezik.

3.2.29. (2)

1. Ha $x=a$-ban f folytonos, g pedig nem folytonos, akkor lehet-e ugyanitt folytonos $f+g$?
2. Ha $x=a$-ban sem f, sem g nem folytonos, lehet-e ugyanitt folytonos $f+g$?

3.2.30. (3) Ellenőrizzük a folytonosság definícióját; adjunk meg $\varepsilon>0$-hoz jó δ-t, vagy olyan ε-t, amihez nincs δ.

a) $f(x)=x^3$, $a=0$; b) $f(x)=\{x\}$, $a=3$;

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $a=\dfrac{1}{25}$; d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $a=4$.

3.2.31. (1) Azt mondjuk, hogy az U halmaz „környezete” az a számnak, ha a szám belső pontja U-nak, azaz $\exists r > 0$ $B(a,r) \subset U$. Igazoljuk, hogy az f függvény akkor és csak akkor folytonos a-ban, ha $f(a)$ bármely környezetének f szerinti ősképe környezete a-nak.

3.2.32. (2) Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos minden pontban, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt.

3.2.33. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény minden racionális pontban folytonos, akkor van olyan irracionális pont is, ahol folytonos.

3.2.34. (8) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és tetszőleges $a > 0$ esetén $f(n \cdot a) \to 0$. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{\infty} f = 0$.

3.2.35. (2) Hol folytonos a D Dirichlet-függvény és az $xD(x)$ függvény?

3.2.36. (2) Hol folytonosak az alábbi függvények?

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

3.2.37. (2) Hol folytonos?

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

3.2.38. (2) Hol folytonos?

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

3.2.39. (1) Mi a két állítás logikai kapcsolata:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos;
b) $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos?

3.2.40. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $g(x) := \min\{f(x), 0\}$ függvény is folytonos.

3.2.41. (4) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitív periódusainak halmaza H. Mutassuk meg, hogy ha f folytonos és $\inf H = 0$, akkor f konstans.

Megoldás→

3.2.42. (8) Hány folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény van?

3.2.43. (9) Létezik-e olyan folytonos $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény, ami minden valós számot véges és páros sokszor vesz fel?

3.2.44. (3) Mi a Dirichlet- és a Riemann-függvény limsup-ja és liminf-je tetszőleges pontban? Hol van határértéke a két függvénynek?

3.2.45. (2) Mik a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazok izolált, illetve torlódási pontjai?

3.2.46. (2) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in \mathbb{Q}; \\ -x & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hol folytonos ez a függvény? Hol folytonos a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazokra megszorítva? Hol van határértéke a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazokra megszorítva?

3.2.47. (3) Legyen α az A és B halmazok közös torlódási pontja, és f valós értékű függvény, ami értelmes az α egy pontozott környezetében. Igazoljuk, hogy

$$\overline{\lim_{\alpha, A\cup B}} f = \max\left(\overline{\lim_{\alpha,A}} f, \overline{\lim_{\alpha,B}} f\right) \qquad \text{és} \qquad \underline{\lim_{\alpha, A\cup B}} f = \min\left(\underline{\lim_{\alpha,A}} f, \underline{\lim_{\alpha,B}} f\right).$$

3.2.48. (7) Van-e olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, aminek minden pontban ∞ a határértéke?

3.2.49. (8) Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény „metszi az x-tengelyt” az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha az a minden környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is. Igaz-e, hogy bármely, sehol sem sűrű zárt $Z \subset \mathbb{R}$ halmazhoz létezik olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami pontosan Z pontjaiban metszi az x-tengelyt?

(IMC)

3.2.50. (4) Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek minden pontban 0 a határértéke, akkor a függvény azonosan 0?

Megoldás→

3.2.51. (1) Írjuk fel a Cauchy-kritériumot $\varepsilon, \delta, K, L$ stb. betűkkel az $\alpha = 1$, $\alpha = a + 0$, $\alpha = -\infty$ esetekben!

3.2.52. (2) Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt{x}$ határértékre.

3.2.53. (7) Igazoljuk, hogy ha az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvényre $\forall\varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall x, y > K\ |f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{|x|}$, akkor $\lim\limits_{\infty} f$ létezik és véges.

3.2.54. (1) Írjuk fel a Cauchy-kritériumot $\varepsilon, \delta, K, L$ stb. betűkkel az $\alpha = 0$, $\alpha = a - 0$, $\alpha = \infty$ esetekben!

3.2.55. (2) Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim\limits_{x\to\infty} \{x\}$ határértékre.

3.2.56. (6) (a) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?

(b) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

3.2.57. (8) Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény elsőfajú szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

3.2.58. (6) (a) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?

(b) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

3.2.59. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : (0, 1) \to (0, \infty)$, és minden x, y-ra $f(x) < e^y f(y)$, akkor f-nek véges határértéke van a $(+0)$-ban.

3.2.60. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz tulajdonságú az $(a, a + \delta_0)$ intervallumban valamely $\delta_0 > 0$-ra, akkor $\lim\limits_{a+0} f$ létezik és véges.

3.2.61. (4) (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus, akkor $\underline{\lim\limits_{\infty}}\, f = \inf f$ és $\overline{\lim\limits_{\infty}}\, f = \sup f$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és $\lim\limits_{\infty} f$ létezik, akkor f konstans.

3.2.62. (4) Legyen $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ végtelen halmazsorozat, és α a közös torlódási pontja az A_n halmazoknak. Legyen továbbá f valós értékű függvény, ami értelmes az α egy pontozott környezetében. Melyik igaz az alábbiak közül?

(a) $\overline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \le \sup\left\{ \overline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$;

(b) $\overline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \ge \sup\left\{ \overline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $\underline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \le \sup\left\{ \underline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $\underline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \ge \sup\left\{ \underline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

3.2.63. (4) Legyen $A_1, A_2, \ldots \subset \mathbb{R}$ végtelen halmazsorozat, és α a közös torlódási pontja az A_n halmazoknak. Legyen továbbá f valós értékű függvény, ami értelmes az α egy pontozott környezetében. Melyik igaz az alábbiak közül?

(a) $\overline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \le \inf\left\{ \overline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $\overline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \ge \inf\left\{ \overline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $\underline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \le \inf\left\{ \underline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

(d) $\underline{\lim\limits_{\alpha, A_1 \cup A_2 \cup \ldots}} f \ge \inf\left\{ \underline{\lim\limits_{\alpha, A_n}} f : n \in \mathbb{N} \right\}$

3.2.64. (2)

$$\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} \left(\{2x\}^2 - 4\{x\}^2 \right) = ? \qquad \overline{\lim\limits_{x\to\infty}} \left(\{2x\}^2 - 4\{x\}^2 \right) = ?$$

3.2.65. (5) Legyen α torlódási pontja az A halmaznak, és legyen f értelmes az A és az α hely egy pontozott környezetének közös részében. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $B, C \subset A$ halmazok, amelyeknek α torlódási pontja, továbbá

$$\underline{\lim\limits_{x\to\alpha,\ x\in A}} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha,\ x\in B} f(x) \quad \text{és} \quad \overline{\lim\limits_{x\to\alpha,\ x\in A}} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha,\ x\in C} f(x).$$

3.2.66. (4) Tegyük fel, hogy f konvex $\mathbb{R}$-en, $f(0) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} > 0$. Mit tudunk $\lim_{x\to\infty} f(x)$-ről mondani?

Megoldás→

3.2.67. (3) Mutassunk tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez olyan g, h függvényeket, amelyekre $\lim\limits_{\infty} g = \lim\limits_{\infty} h = \infty$ és $f = g - h$.

3.2.68. (8) Legyen $f_1, f_2, \ldots$ olyan függvények egy sorozata, amelyek határértéke ∞-ben ∞. Igazoljuk, hogy ezekhez létezik olyan g függvény, ami az összes f_n-nél gyorsabban tart ∞-hez, és létezik olyan h függvény is, ami szintén ∞-hez tart, de az összes f_n-nél lassabban.

3.2.69. (3) Mutassunk tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez olyan g, h függvényeket, amelyekre $\lim\limits_{+0} g = \lim\limits_{+0} h = 0$ és $f = g/h$.

3.2.70. (6) Igazoljuk, hogy ha f és g folytonos az a pontban és $f(a) > 0$, akkor az f^g függvény is folytonos a-ban.

3.3. Függvény-határértékek kiszámítása

3.3.1. (5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ? \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = ?$$

3.3.2. (5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = ?$$

3.3.3. (4)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1} = ?$$

3.3.4. (4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = ?$$

3.3.5. (4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$$

3.3.6. (4)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=?$$

3.3.7. (4)

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}=?$$

3.3.8. (4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=?$$

3.3.9. (4)

$$\lim_{x\to 0}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=?$$

3.3.10. (4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=?$$

3.3.11. (4)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin(a)}{x^2}=?$$

3.3.12. (4)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}=?$$

3.3.13. (5)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=?$$

3.3.14. (5) Legyen

$$f(x)=\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

$\lim_{x\to 0} f(x)=?$, $\lim_{x\to 1} f(x)=?$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=?$

3.3.15. (4)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x}=?$$

3.3.16. (5)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{x^2\sin x-\frac{\pi^2}{72}}{x-\frac{\pi}{6}}=?$$

3.3.17. (6)

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=?$$

3.3.18. (6)

$$\lim_{x\to1/2}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{4x^2-1}=?$$

3.3.19. (6)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}=?$$

3.3.20. (3) Határozzuk meg az alábbi határértékeket, és mindegyik esetben ellenőrizzük a definíciót.

$$(a)\quad \lim_{x\to-0}\frac{1}{x};\quad (b)\quad \lim_{x\to-\infty}x^2;\quad (c)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}};$$

$$(d)\quad \overline{\lim_{x\to+0}}\sqrt{\{1/x\}};\quad (e)\quad \underline{\lim_{x\to+\infty}}\{x\}.$$

3.3.21. (3) 3 Határozzuk meg az alábbi határértékeket, és mindegyik esetben ellenőrizzük a definíciót.

$$(a)\quad \lim_{x\to0}\frac{1}{|x|};\quad (b)\quad \lim_{x\to+0}\frac{1}{x};\quad (c)\quad \lim_{x\to\infty}x^2;$$

$$(d)\quad \overline{\lim_{x\to-\infty}}\frac{1-x}{3-2x};\quad (e)\quad \underline{\lim_{x\to0}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}.$$

3.3.22. (3)

$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sin e^x}{x}=? \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{\sqrt{x^2+1}}=?$$

3.3.23. (3) Az alábbi függvényeknek a megadott α helyen határozzuk meg a határértékét.

1. $f(x)=[x],\ \alpha=2+0;$ 2. $f(x)=\{x\},\alpha=2+0;$
3. $f(x)=\dfrac{x}{2x-1},\ \alpha=\infty;$ 4. $f(x)=\dfrac{x}{2x-1},\ \alpha=\dfrac{1}{2}+0;$
5. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1},\ \alpha=\infty;$ 6. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1},\ \alpha=1-0.$
7. $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x},\ \alpha=\infty;$ 8. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x-\sqrt{x}},\ \alpha=\infty;$
9. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5},\ \alpha=\infty;$ 10. $2^{-[1/x]},\ \alpha=\infty;$
11. $\sqrt[3]{x^3+1}-x,\ \alpha=\infty,$ 12. $x\{\frac{1}{x}\},\ \alpha=0,$ 13. $x[\frac{1}{x}],\ \alpha=0,$

3.3.24. (3)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{x+25}-3}=?$$

3.3.25. (3) Számítsuk ki a következő határértékeket:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[359]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right]$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{3/2}\cdot\left[\sqrt{x+2}+\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right]$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x+\sin(x)$

3.3.26. (3) Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to-\frac{d}{c}+}\frac{ax+b}{cx+d}=\begin{cases}\infty, & \text{ha } bc-ad>0\\ -\infty, & \text{ha } bc-ad<0,\end{cases},$$

$$\lim_{x\to -\frac{d}{c}-} \frac{ax+b}{cx+d} = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } bc-ad>0 \\ \infty, & \text{ha } bc-ad<0, \end{cases}$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\,, \qquad (c\neq 0).$$

3.3.27. (5) Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x-1}$ határértéket, ha a) α pozitív egész; b) α pozitív racionális; c) pozitív valós; d) α tetszőleges valós szám.

3.3.28. (3)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{\sqrt{2}}-1}{x^\pi - 1} =? \qquad \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} =?$$

Kapcsolódó feladat: 3.3.27

3.3.29. (1) Igazoljuk, hogy ha $a>b>0$, akkor $x\to\infty$ esetén x^a nagyságrendje nagyobb, mint x^b nagyságrendje.

3.3.30. (4) Rakjuk sorba nagyságrend szerint a következő függvényeket ($x\to\infty$):

$$x^{100} \qquad 1,01^x \qquad x^{\sqrt{x}} \qquad 2^x \qquad 1,01^{x^2} \qquad 2^{\sqrt[3]{x}}.$$

3.3.31. (4) Legyen $a>1$ és $k>0$. Bizonyítsuk be, hogy $x\to\infty$ esetén $a^{\sqrt{x}}$ nagyságrendje nagyobb, mint x^k nagyságrendje. (Vagyis $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^{\sqrt{x}}}{x^k} = \infty$.)

3.3.32. (4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4^x+x^3}-2^x}{(3/5)^x} =?$$

3.3.33. (4) Igazoljuk, hogy tetszőleges $a>1$, $b>0$ és $\varepsilon>0$ esetén a^{x^ε} nagyságrendje nagyobb, mint x^b nagyságrendje.

3.3.34. (3) Rakjuk sorba nagyságrend szerint a következő függvényeket ($x\to +0$):

$$e^{1/x} \qquad \frac{1}{x} \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \qquad \frac{1}{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}$$

3.3.35. (5)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{x^n-1}-\frac{m}{x^m-1}\right)=?$$

3.3.36. (5)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=?$$

3.4. Az átviteli elv

3.4.1. (1) Tudjuk, hogy $\lim_{x\to-\infty}\{x\}$ nem létezik. Mutassunk példát olyan x_n sorozatra, amire $x\searrow -\infty$ és az $\{x_n\}$ sorozatnak nincs határértéke.

3.4.2. (3) Legyen f értelmes a 0 egy jobb oldali pontozott környezetében. Bizonyítsuk be a definícióból és az átviteli elvvel is, hogy ha $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to\infty} f(1/x)$ közül valamelyik létezik, akkor a másik is létezik, és egyenlőek.

3.4.3. (3) Igazoljuk, a definícióból és az átviteli elvvel is, hogy ha f korlátos az α egy pontozott környezetében és $\lim\limits_{\alpha} g=0$, akkor $\lim\limits_{\alpha}(fg)=0$.

3.4.4. (3) Vezessük le a függvényekre vonatkozó rendőr-elvet a sorozatokra vonatkozó rendőr-elvből és az átviteli elvből.

3.4.5. (7) Legyen $f:[a,b]\to[a,b]$ folytonos függvény, és legyen $p\in[a,b]$. Definiáljuk a $p_0,p_1,\dots$ sorozatot a $p_0=p$, $p_{n+1}=f(p_n)$ rekurzióval. Igazoljuk, hogy ha a $T_p=\{p_n:\ n=0,1,2,\dots\}$ halmaz zárt, akkor véges.

(IMC)

3.4.6. (3) Igazoljuk, a definícióból és az átviteli elvvel is, hogy ha f korlátos az a szám egy pontozott környezetében, g folytonos a-ban és $g(a)=0$, akkor fg folytonos a-ban.

3.4.7. (3) Vezessük le a függvényekre vonatkozó végtelen rendőr-elvet a sorozatokra vonatkozó végtelen rendőr-elvből és az átviteli elvből.

3.5. Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények

3.5.1. (4) Tegyük fel, hogy $p(x) = a_{2k}x^{2k} + \cdots + a_1 x + a_0$ adott páros fokú polinom és $a_{2k} \cdot a_0 < 0$. Bizonyítsuk be, hogy p-nek legalább két valós gyöke van.

Megoldás→

3.5.2. (3) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és periodikus. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ korlátos?

3.5.3. (3) (Brouwer-féle fixponttétel; 1-dimenziós eset.) Minden $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvénynek van fixpontja, azaz van olyan x, melyre $f(x) = x$.

Megoldás→

3.5.4. (3) Legyen $f : [0, 1] \to [0, 1]$ és $g : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos és $f(0) \geq g(0)$, $f(1) \leq g(1)$. Bizonyítsuk be, hogy létezik $x \in [0, 1]$, hogy $f(x) = g(x)$.

3.5.5. (4) Egy függvény Darboux tulajdonságú az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumban, ha $\forall\ a, b \in I$, $a < b$-re teljesül, hogy minden olyan y-hoz, ami $f(a)$ és $f(b)$ közé esik található $c \in (a, b)$, hogy $f(c) = y$. Adjunk példát olyan függvényre, ami rendelkezik a Darboux tulajdonsággal $I = \mathbb{R}$-en, de nem folytonos.

3.5.6. (4) Legyen $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ folytonos, $f(0) = f(2)$. Bizonyítsuk be, hogy a grafikonjának van 1-hosszúságú vízszintes húrja.

3.5.7. (7) Vezessük le a Bolzano–Darboux-tételt abból, hogy minden intervallum összefüggő. (Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz „összefüggő”, ha a következő teljesül: valahányszor A, B olyan diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $H \subset A \cup B$, akkor $H \subset A$ vagy $H \subset B$.)

3.5.8. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha I egy intervallum (zárt vagy sem, korlátos vagy sem, elfajuló vagy sem) és $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $f(I)$ is egy intervallum.

3.5.9. (9) Igazoljuk, hogy ha egy testben igaz a Bolzano–Darboux-tétel, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.

3.5.10. (9) Igazoljuk, hogy ha egy testben igaz a Weierstrass-tétel, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.

3.5.11. (4) Igazoljuk, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

3.5.12. (4) Bizonyítandó, hogy az $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2$ harmadfokú polinomnak 3 valós gyöke van.

Megoldás→

3.5.13. (6) Igazoljuk, hogy kompakt halmaz folytonos képe kompakt.

3.5.14. (9) Legyen K egy metrikus tér részhalmaza (esetleg $\mathbb{R}$ egy részhalmaza). Igazoljuk, hogy ha minden folytonos $K \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, akkor K kompakt.

3.5.15. (9) Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben a $[0,1]$ intervallum kompakt, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.

3.5.16. (4) Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$, akkor létezik olyan $c \in [a,b]$, amire $f(c) = \dfrac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

3.5.17. (7) Legyen $K \subset \mathbb{R}$ és $f : K \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény felülről félig folytonos az a pontban a K halmazra szorítkozva, ha a izolált pontja K-nak, vagy pedig $\limsup\limits_{x \to a,\, x \in K} f \leq f(a)$. Bizonyítsuk be, hogy ha K kompakt, és f a K minden pontjában felülről félig folytonos, akkor f felülről korlátos.

3.5.18. (5) Van-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amire $f(f(x)) = -x$ minden x-re?

3.5.19. (10) Nevezzünk egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt *perfekt*nek, ha zárt és nincs izolált pontja. Igazoljuk, hogy minden zárt halmaz felbontható egy megszámlálható és egy perfekt halmaz uniójára.

3.5.20. (9) Igazoljuk, hogy minden nem üres perfekt halmaz kontinuum számosságú.

3.5.21. (9) Igazoljuk, hogy ha K kompakt halmaz egy metrikus térben, akkor minden K-beli végtelen sorozatnak van torlódási pontja K-ban.

3.5.22. (8) Legfeljebb hány izolált pontja lehet $\mathbb{R}$ egy kompakt részhalmazának?

3.6. Egyenletes folytonosság

3.6.1. (4) Egyenletesen folytonos-e?

a) x^2 az $(1,2)$ halmazon,

b) $\sin x$ az $\mathbb{R}$-en,

c) $\sin \frac{1}{x}$ a $(0,\infty)$-n,

d) $1/x$ a $(0,2)$-n,

e) $\sqrt{x}$ a $(0,\infty)$-n.

3.6.2. (4) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos. Következik-e ebből, hogy $f \cdot g$ is egyenletesen folytonos?

3.6.3. (4) Igazoljuk, hogy ha f egyenletesen folytonos egy korlátos I intervallumon, akkor f korlátos I-n.

3.6.4. (4) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en, akkor az $f(x+5) - f(x)$ függvény korlátos.

3.6.5. (2) Az f függvény „Lipschitz tulajdonságú”, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \ \forall x, y \in D(f)\ \ |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz az a pont egy környezetében, akkor ott folytonos is.

3.6.6. (8) Igazoljuk (a Bolzano–Weierstrass-tétel használata nélkül), hogy ha egy függvény folytonos egy kompakt halmazon, akkor egyenletesen folytonos.

3.6.7. (4) Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények? Ellenőrizzük a definíciót, és mutassunk ε-hoz δ-t, illetve mutassunk olyan ε-t, amihez nem létezik δ.

$\sqrt{x}$ a $[0,\infty)$ intervallumon;
$1/x$ az $[1,2]$ intervallumon;
x^2 a $[0,\infty)$ intervallumon;

3.6.8. (5) Legyen $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítsuk be, hogy f akkor és csak akkor egyenletesen folytonos, ha $\lim\limits_{1-0} f$ létezik és véges.

3.6.9. (3) Egyenletesen folytonosak-e a következő függvények? Ellenőrizzük a definíciót, és mutassunk ε-hoz δ-t, illetve mutassunk olyan ε-t, amihez nem létezik δ.

x^2 az $[-1,1]$ intervallumon;

$|x|$ a teljes $\mathbb{R}$-en;
$1/x$ a $(0,1)$ intervallumon.

3.6.10. (8) Legyen $K \subset \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha minden folytonos $K \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos, akkor K kompakt.

3.6.11. (6) Mutassuk meg, hogy $(0,1) \to \mathbb{R}$ Lipschitz függvények szorzata is Lipschitz.

3.7. Monotonitás és folytonosság

3.7.1. (2) Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton.

3.7.2. (3) Igazoljuk az átviteli elvvel is, hogy ha f monoton növekvő az (a,b) intervallumon, akkor $\lim\limits_{a+0} f = \inf\limits_{(a,b)} f$ és $\lim\limits_{b-0} f = \sup\limits_{(a,b)} f$.

3.7.3. (4) Egy monoton $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete sűrű $\mathbb{R}$-ben. Igazoljuk, hogy f mindenhol folytonos.

3.7.4. (6) Rendezzük a racionális számokat egy (q_n) sorozatba, és legyen tetszőleges k pozitív egészre

$$a_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad q_k > x; \\ 1 & \text{ha} \quad q_k = x; \\ 2 & \text{ha} \quad q_k < x. \end{cases}$$

Definiáljuk az f függvényt a következőképpen: legyen $f(x)$ tizedestört alakja $0,a_1(x)a_2(x)a_3(x)\ldots$.

Igazoljuk, hogy ez a függvény korlátos, szigorúan monoton növekvő, az irracionális számokban folytonos, a racionális számokban pedig sem jobbról, sem balról nem folytonos.

3.7.5. (8) Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x-0) \leq f(x) \leq f(x+0)$, akkor f monoton növekvő?

3.7.6. (7) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset \mathbb{R}$ megszámlálható halmazhoz létezik olyan szigorúan monoton függvény, ami pontosan H pontjaiban szakad.

Kapcsolódó feladat: 3.7.4

3.8. Konvexitás és folytonosság

3.8.1. (5) Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor $\lim_{a+0} f$ és $\lim_{b-0} f$ létezik és véges, továbbá $\lim_{a+0} f \le f(a)$ és $\lim_{b-0} f \le f(b)$.

3.8.2. (4) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkáv, akkor $\lim_{-\infty} f < \infty$ vagy $\lim_{\infty} f < \infty$?

3.8.3. (4) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex és $\lim_{-\infty} f = -\infty$, akkor $\lim_{\infty} f = \infty$?

3.8.4. (6) Igazoljuk, hogy ha f gyengén konvex, akkor

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

3.8.5. (4) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konkáv és $\lim_{-\infty} f$ véges, akkor f monoton csökkenő?

3.8.6. (4) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív, akkor f^2 gyengén konvex.

3.8.7. (9) Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény gyengén konvex és alulról korlátos, akkor konvex?
Kapcsolódó feladat: 3.8.6

3.8.8. (4) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő és konvex, akkor f^{-1} konkáv az $(\inf f, \sup f)$ intervallumon.

3.8.9. (7) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan gyengén konkáv, és $\limsup_{-\infty} f$ véges, akkor $\liminf_{\infty} f = -\infty$.

3.9. A függvénygrafikon ívhossza

3.9.1. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz az $[a,b]$ intervallumban, akkor a grafikonja rektifikálható.

3.9.2. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha f grafikonja rektifikálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor minden a-tól különböző pontban létezik és véges a bal oldali határértéke, illetve minden b-től különböző pontban létezik és véges a jobb oldali határértéke.

3.9.3. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha az f és g függvények grafikonja rektifikálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f + g$ grafikonja is rektifikálható.

3.9.4. (7) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítsuk be, hogy

$$\forall K < s(f; [a, b]) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$$
$$\Big(\big(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad \max(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}) < \delta\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} > K\Big).$$

3.9.5. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ grafikonja rektifikálható minden korlátos intervallumban, akkor f felírható egy monoton növekvő és egy monoton csökkenő függvény összegeként.

3.9.6. (9) Létezik-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, aminek grafikonja semmilyen nem elfajuló intervallumban nem rektifikálható?

3.9.7. (4) Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ grafikonja rektifikálható, akkor f korlátos.

3.9.8. (5) Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor a grafikonja rektifikálható.

3.9.9. (7) Van-e olyan $[a, b]$-n egyenletesen folytonos függvény, melynek ívhossza végtelen?

3.9.10. (4) Mekkora az $[x]$ függvény ívhossza a $[0, 2]$ intervallumban?

3.9.11. (9) Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami monoton nő, a szakadási helyeinek halmaza sűrű, és tetszőleges $a \le b$ esetén $s(f; [a, b]) = b - a + f(b) - f(a)$?

3.9.12. (5) Legyen $(q_1, q_2, \ldots)$ a $(0, 1)$-beli racionális számok egy sorbarendezése, valamint $f(q_n) = \frac{1}{2^n}$, $f(0) = f(1) = 0$ és $f(x) = 0$ ha x irracionális. $s(f, [0, 1]) =?$

3.10. Exponenciális, logaritmus- és hatványfüggvények

3.10.1. (4) Igazoljuk, hogy tetszőleges c valós számra az $x \mapsto x^c$ függvény minden pozitív helyen folytonos.

3.10.2. (7) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ folytonos és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, akkor f exponenciális függvény.

3.10.3. (1) Melyik nagyobb? $5^{\log_7 3}$ vagy $3^{\log_7 5}$?

3.10.4. (5) Igazoljuk, hogy ha $\varphi > 0$, és $\log \varphi$ konvex, akkor φ konvex, de visszafele nem következik.

3.10.5. (3) Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$ és $\lim\limits_{x\to+0} x \cdot \log x = 0$.

3.10.6. (4)

$$\lim_{x\to+0} x^x =? \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x} =?$$

3.10.7. (4) Rakjuk sorba nagyságrend szerint a következő függvényeket, ha $x \to \infty$.

$$\log_2 x \qquad \log_2 \log_3 x \qquad x^{0,1} \qquad 2^{\sqrt{\log_2 x}}$$

3.10.8. (7) Igazoljuk, hogy a $0 < a < b$ számokra akkor és csak akkor teljesül $a^b = b^a$, ha van olyan pozitív x szám, amire $a = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ és $b = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

3.10.9. (5) Igazoljuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$, $a > 1$ és $K \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \cdot \log_a^K x = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a^K x}{x^\varepsilon} = 0$.

3.10.10. (4) Rakjuk sorba nagyságrend szerint a következő függvényeket, ha $x \to +0$.

$$|\log_2 x| \qquad \log_2 |\log_3 x| \qquad x^{-0,1} \qquad (0,99)^{\sqrt{\log_2 x}}$$

3.10.11. (7) Igazoljuk, hogy ha $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos és tetszőleges $x, y > 0$ esetén $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, akkor f hatványfüggvény.

3.10.12. (6)

$$\lim_{x \to +0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

3.10.13. (6) Igazoljuk, hogy $0 < x$, $x \neq 1$ esetén $\log x < x - 1$.

3.10.14. (6) Igazoljuk, hogy $0 < x < 1$ esetén $\log(x) > 1 - \dfrac{1}{x}$.

3.10.15. (5) Az $e^t > 1+t$ egyenlőtlenség n-edik hatványra emelésével igazoljuk, hogy ha $x > 0$, akkor

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Kapcsolódó feladat: 3.10.20

3.10.16. (7) Mutassunk olyan a, b valós számokat, amikre $|x| < \frac{1}{2}$ esetén $1 + x + ax^2 < e^x < 1 + x + bx^2$.

3.10.17. (7) Mutassunk olyan a, b valós számokat, amikre $|x| < \frac{1}{2}$ esetén $x + ax^2 < \log(1 + x) < x + bx^2$.

3.10.18. (9) Igazoljuk, hogy rögzített $a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n > 0$ esetén

$$\lim_{p \to 0} \left(\frac{w_1 a_1^p + \ldots + w_n a_n^p}{w_1 + \ldots + w_n}\right)^p = \left(a_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1 + \ldots + w_n}},$$

azaz a $p \mapsto H(p, a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n)$ (p-edik hatványközép) függvény folytonos a 0-ban.

3.10.19. (5)

$$\lim_{x \to -0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

3.10.20. (4) Igazoljuk, hogy $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$e^x > 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Kapcsolódó feladat: 3.10.15

3.10.21. (4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^6+2}-x} = ?$$

3.10.22. (4)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2^x+3^x}+4^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}} = ?$$

3.10.23. (4)

$$\lim_{x\to+0} e^{\log x/(\log|\log x|)} = ?$$

3.10.24. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, és minden $x,y>10$-re $(f(x))^{(y^{1/y})} < f(y)$, akkor f-nek van határértéke a ∞-ben, és a határérték véges.

3.10.25. (5) Igazoljuk, hogy $\log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \le (\log n)+1$.

3.10.1. Nevezetes egyenlőtlenségek

3.10.26. (5) Bizonyítsuk be a súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$(a_1^{w_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{w_n})^{\frac{1}{w_1+\ldots+w_n}} \le \frac{w_1a_1+\ldots+w_na_n}{w_1+\ldots+w_n},$$

ha $a_1,\ldots,a_n,w_1,\ldots,w_n>0$; egyenlőség akkor áll, ha $a_1=\cdots=a_n$.

3.10.27. (5) Bizonyítsuk be a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget úgy, hogy négyzetösszeggé alakítjuk a

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$$

kifejezést.

3.10.28. (4) Igazoljuk, hogy ha $a_1,\ldots,a_n>0$ és $x_1,\ldots,x_1>0$, akkor

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\ldots+\frac{a_n^2}{x_n} \ge \frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{x_1+\ldots+x_n}.$$

(A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség „Engel-féle alakja”... de miért is?)

3.10.29. (6) Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbitt-egyenlőtlenség)

3.10.30. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$ és $a + b + c = 1$, akkor

$$\left(\frac{1}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{b} + 1\right)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geq 8.$$

3.10.31. (4) Mi a kapcsolat a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség és a súlyozott számtani-négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség között?

3.10.32. (5) Vezessük le a Nesbitt-egyenlőtlenséget a Caucy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség Engel-féle alakjából. (Bővítsük a törteket úgy, hogy a számlálókban teljes négyzetek legyenek.)

3.10.33. (10) Igazoljuk, hogy ha $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$, akkor

$$a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \ldots + a_n^2 a_1 < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(IMO Shortlist, 2007)

3.10.34. (4) (a) Legfeljebb mekkora lehet $2x^3 + 5y^3 + 7z^3$, ha $x^4 + y^4 + y^4 = 1$?
(b) Legfeljebb mekkora lehet $x^3 + y^3 + z^3$, ha $2x^4 + 3y^4 + 5y^4 = 1$?

3.10.35. (4) Egészítsük ki úgy, hogy igaz (és lehetőleg éles) legyen:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|^{\cdots\cdots} \leq \ldots\ldots\ldots \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_i|^c \quad (c > 1);$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^3\right|^{\cdots} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^6\right) \cdot \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right).$$

3.10.36. (5) (a) Milyen számokra, milyen súlyokkal kell felírni a számtani-mértani egyenlőtlenséget, hogy éppen a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget kapjuk?

(b) Milyen számokra kell felírni a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget, hogy éppen a súlyozott számtani-mértani egyenlőtlenséget kapjuk?

(c) Milyen számokra, milyen súlyokkal kell felírni a súlyozott számtani-mértani egyenlőtlenséget, hogy éppen a Hölder-egyenlőtlenséget kapjuk?

(d) Milyen számokra kell felírni a Hölder-egyenlőtlenséget, hogy éppen a súlyozott p-edik és q-adik hatványközepek közötti egyenlőtlenséget kapjuk?

3.10.37. (7) Igazoljuk, hogy tetszőleges a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k)$ valós számokra

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} a_{ij}\right)^{k} \leq \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{k}.$$

3.10.38. (6) Mikor áll egyenlőség a Hölder-egyenlőtlenségben?

3.10.39. (7) Mi lehetne a Hölder-egyenlőtlenség Engel-féle alakja?

3.10.40. (9) Egy táblázatban pozitív számok vannak, továbbá adottak a $b < c$ valós számok. Vegyük minden sorban az elemek b-edik hatványközepét, majd ezek c-edik hatványközepét. Az így kapott szám legyen U. Ezután vegyük minden oszlopban az elemek c-edik hatványközepét, majd ezek b-edik hatványközepét; ezt a számot jelöljük V-vel. Melyik nagyobb, U vagy V?

3.11. Trigonometrikus függvények és inverzeik

3.11.1. (5) (a) Igazoljuk, hogy $x \neq k\pi$ esetén

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

(b)

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = ?$$

3.11.2. (5) Bizonyítsuk be, hogy minden nemnegatív egész n-hez léteznek olyan, n-edfokú $T_n(x)$ és $U_n(x)$ polinomok, amelyekre

$$T_n(\cos t) = \cos nt, \quad \text{illetve} \quad U_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t},$$

továbbá

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{és} \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

(Ezek az úgynevezett Csebisev-polinomok.)

3.11.3. (8) Egy legfeljebb n-edfokú p polinomra tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén $|p(x)| \le 1$. Igazoljuk, hogy $x > 1$ esetén $|p(x)| < T_n(x)$.

3.11.4. (6) (a) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{tg} x$-szel.
(b) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$-vel.
(c) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$-vel.

3.11.5. (9) Keressünk használható becslést $T_n(1+\varepsilon)$-ra és $U_n(1+\varepsilon)$-ra, ha $\varepsilon > 0$ kicsi, de azért *nem annyira.* :-) (Mennyire...?)

3.11.6. (10) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-hez létezik olyan $p(x)$ polinom, amelynek foka kisebb, mint $10\sqrt{n}$, és

$$p(0) > |p(1)| + |p(2)| + \ldots + |p(n)|.$$

4. fejezet

A differenciálszámítás és alkalmazásai

4.1. A differenciálhatóság fogalma

4.1.1. (2) Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható, $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$. Következik-e ebből, hogy $\lim_{x\to b} f'(x) = \infty$?

4.1.2. (2)

$$\left(\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\right)' = ?$$

4.1.3. (3)

$$a)\quad (x^x)' = ? \qquad\qquad b)\quad \left((\sin x)^{\cos x}\right)' = ?$$

4.1.4. (3) Hol differenciálható az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény?

4.1.5. (2) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, $\lim_{x\to\infty} f = 1$. Következik-e ebből, hogy $\lim_{x\to\infty} f' = 0$? és ha tudjuk, hogy létezik $\lim_{x\to\infty} f'$?

4.1.6. (5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elég sima, $\forall x, h$:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x).$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = ax + b$ alkalmas a, b számokra.

4.1.7. (5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elég sima, $\forall x, h$:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x + \frac{h}{2}).$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = ax^2 + bx + c$ alkalmas a, b, c számokra.

4.1.8. (4) Mennyi az a, ha

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{ha } x < 0 \\ a + x & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

folytonos? Differenciálható-e f?

4.1.9. (3) Hol differenciálható az $\left(\{x\} - \frac{1}{2}\right)^2$ függvény?

4.1.10. (3) Hol differenciálható az $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ függvény? Mi a deriváltja?

4.1.11. (3) 3 Legyen $f(x) = x^2$, ha $x \leq 1$, és $f(x) = ax + b$, ha $x > 1$. Milyen a és b értékekre lesz f mindenütt differenciálható?

4.1.12. (2) Bizonyítsuk be, hogy az $1/x$ függvény minden $a > 0$ pontban differenciálható, és számítsuk ki a deriváltját. Mutassuk meg, hogy az $1/x$ függvény bármely érintője és a tengelyek olyan háromszöget határolnak, amelynek a területe nem függ az érintési ponttól.

4.1.13. (4) Legyen $f(x) = x \cdot (x+1) \cdots (x+100)$, és legyen $g = f \circ f \circ f$. Számítsuk ki $g'(0)$ értékét!

4.1.14. (3) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény minden $a > 0$ pontban differenciálható, és $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$.

4.1.15. (4) Milyen a valós szám esetén differenciálható az $|x|^a$ függvény a 0-ban?

4.1.16. (3) Legyen n pozitív egész. Számítsuk ki $\dfrac{1}{x^n}$ deriváltját a definícióból és a hányados differenciálási szabályából is.

4.1.17. (3) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindenhol differenciálható. Igazoljuk, hogy ha f páros, akkor f' páratlan, illetve ha f páratlan, akkor f' páros.

4.1.18. (7) Legyen $r(x)$ a Riemann-függvény. Milyen α esetén létezik olyan pont, ahol $r^\alpha(x)$ differenciálható?

4.1.19. (4) Hol differenciálható az $\big||x| - 1\big|$ függvény?

4.1.20. (7) Legyen $[a, a + \delta) \subset D(f)$. Rakjuk nagyság szerint sorba:

$$\overline{f'_+}(a) \qquad \underline{f'_+}(a) \qquad \overline{\lim_{a+0}}\,\overline{f'} \qquad \overline{\lim_{a+0}}\,\underline{f'} \qquad \underline{\lim_{a+0}}\,\overline{f'} \qquad \underline{\lim_{a+0}}\,\underline{f'}$$

4.1.21. (2)

Deriváljuk a következő függvényeket:

$$-x; \qquad 3x^3-2x+1; \qquad \frac{x^2+1}{x^3+2}; \qquad (x^{10}+x^2+1)^{100}; \qquad \frac{(x^3+1)^n}{(2+x)\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)}$$

4.1.22. (2) Deriváljuk a következő függvényt:

$$\frac{(x^2+1)^4(2-x)^8}{x^3+2} \cdot \frac{1+\dfrac{1}{1+x}}{2-x}$$

(Ne rendezzük. Ne hozzuk közös nevezőre. Csak deriváljuk.)

4.1.23. (4) Legyen n páratlan egész szám. Mi az $\sqrt[n]{x}$ függvény deriváltja? (Különös tekintettel az $x < 0$ esetre.)

4.1.24. (3) Deriváljuk a következő függvényeket.

$$\sin x^2 \qquad e^{\operatorname{tg} x} \qquad \log_3(\operatorname{ctg}^2 x) \qquad \operatorname{arc\,tg}(x^2+1)$$

$$\sin\Big(\operatorname{ar\,ch}\big(\operatorname{arc\,cos}(\log_5 x)\big)\Big)$$

4.1.25. (2) Minek a deriváltja?

$$1 + x + x^2; \qquad x + \frac{1}{x}; \qquad \frac{x^2}{(x^3+1)^2}$$

4.1.26. (3) A $8x+\cos x$ függvény szig. mon. nő. Mi az inverzének a deriváltja az 1-ben?

4.1.27. (10) Létezik-e olyan folytonos és monoton $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, ami egy pontban sem differenciálható?

4.1.28. (4) Tegyük fel, hogy $f + g$ differenciálható a-ban, és g nem differenciálható a-ban. Lehet-e f differenciálható a-ban?

4.1.29. (4) Legyen $f(x) = x^2 \cdot \sin(1/x)$, $f(0) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy f mindenütt differenciálható.

4.1.30. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < c < 1$, akkor x^c jobb oldali deriváltja 0-ban végtelen.

4.1.31. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan pozitív egész, akkor $\sqrt[n]{x}$ deriváltja 0-ban végtelen.

4.1.32. (5) Adjunk zárt képletet $x + 2x^2 + \cdots + nx^n$-re. Számítsuk ki ennek alapján az

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \ldots + \frac{n}{3^n}$$

összegeket!

Ötlet→

4.1.33. (4) Bizonyítsuk be, hogy az x^x függvény minden $x > 0$ pontban differenciálható, és számítsuk ki a deriváltját!

4.1.34. (3) Az x^x függvény szigorúan monoton $[1, \infty)$-ben. Mennyi az inverzének a deriváltja a 27 pontban?

4.1.35. (3) Az $x^5 + x^2$ függvény szigorúan monoton $[0, \infty)$-ben. Mennyi az inverzének a deriváltja a 2 pontban?

4.1.36. (3) Bizonyítsuk be, hogy az $x + \sin x$ függvény szigorúan monoton növő. Mennyi az inverzének a deriváltja az $1 + (\pi/2)$ pontban?

4.1.37. (4) Van-e olyan $f(x)$ függvény, amelyre $f'(0) = 0$, de sehol máshol nem deriválható?

4.1.38. (6) Bizonyítsuk be, hogy ha $f'(x) \geq \frac{1}{100}$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

4.1.39. (4) Bizonyítandó, hogy ha $f'(x) = x^2$ minden x-re, akkor van olyan c konstans, hogy $f(x) = (x^3/3) + c$.

4.1.40. (5) Bizonyítandó, hogy ha $f'(x) = f(x)$ minden x-re, akkor van olyan c, hogy $f(x) = c \cdot e^x$ minden x-re.

4.1.41. (5) Legyen f differenciálható $(0, \infty)$-ben. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, akkor $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

4.1.42. (4) Bizonyítandó, hogy ha $f(a) = g(a)$ és $x > a$ esetén $f'(x) \geq g'(x)$, akkor $f(x) \geq g(x)$ minden $x > a$-ra.

4.1.43. (3) Deriváljuk a következő függvényeket.

$$x^3; \qquad 2^x; \qquad \log_{1/2} x; \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}; \qquad e^x + 3\log x \qquad x^2 3^x$$

$$\frac{\sin x}{x} \qquad x^3 e^x \cos x; \qquad x^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x; \qquad \frac{x^2 \cdot \log x \cdot 3^x \cdot \cos x}{\sqrt{x} - \frac{3\sin x}{x^3}}.$$

4.1.44. (3) Minek a deriváltja?

$$x^3; \qquad \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x};$$

4.1.45. (3) Mi az $x^5 + x^3$ függvény inverzének a deriváltja a -2-ben?

4.1.46. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha $u \in (-1, 1)$ a $T_k(x)$ Csebisev-polinom egyik gyöke, akkor

$$|T_k'(u)| = \frac{k}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

4.1.47. (4) Adjunk meg olyan f függvényt, amelyre $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, de $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

4.1.48. (4) Adjunk meg olyan f függvényt, amely monoton csökkenő és differenciálható $(0,\infty)$-ben, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, de $\lim_{x\to\infty} f'(x) \neq 0$.

4.1.49. (4) Tegyük fel, hogy 1. $x \cdot f(x)$, 2. $f(x^3)$, 3. $f^3(x)$ deriválható a 0-ban. Következik-e ebből, hogy $f(x)$ is deriválható a 0-ban?

4.1.50. (2) Tegyük fel, hogy $f(x)$ 1. páros, 2. páratlan, 3. periodikus, mit mondhatunk ekkor $f'(x)$-ről?

4.1.51. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha $f(a) = g(a)$ és $f(x) \leq g(x)$ az a pont egy környezetében, akkor $f'(a) = g'(a)$.

4.1.52. (5) Számoljuk ki a Csebisev polinomok deriváltját 1-ben: $T_n'(1) =$? $U_n'(1) =$?

4.1.53. (3) Deriváljuk a következő függvényeket.

$$x^2 e^{x^2+\cos x^2} \qquad \log_{\operatorname{cth}^2 x+1} \operatorname{ctg} \frac{5^{\operatorname{tg} x}}{\operatorname{ch} x} \qquad \frac{\dfrac{2^{\log x/2}}{x} + \operatorname{ar\,cth} x}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$$

$$\frac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2+1} \cdot \dfrac{\sqrt{x} \cdot 10^x}{\log_3 x + x \operatorname{ctg} x}}{(x+1)(x^2+x^e)\cos x}$$

4.1.54. (3) Legyen $f(x) = \dfrac{\{1/x\}}{x^2}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol differenciálható a függvény? Mi a deriváltja?

4.1.55. (4) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $f'(0) > 1$, de f a 0 egyetlen környezetében sem monoton növekedő.

4.1.56. (3)

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = ? \qquad \left(\log_{f(x)} g(x)\right)' = ?$$

4.1.57. (2) Deriváljuk az

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad (x \neq 1)$$

azonosság mindkét oldalát.

4.1.58. (3) Vezessük le a logaritmusfüggvény deriváltját az inverz függvény differenciálási szabályából.

4.1.59. (4) Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_n$ differenciálható függvények, és $b_{i,j}$ valós számok minden $2 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq n$ esetén.

$$\left(\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & n_{2,m} \end{pmatrix}\right)' = ?$$

4.1.60. (5) Tegyük fel, hogy $f_{i,j}$ differenciálható függvény minden $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq n$ esetén.

$$\left(\det \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \ldots & f_{n,n} \end{pmatrix}\right)' = ?$$

4.1.61. (5) Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f'(x) = \infty$ minden x-re?

4.1.62. (6) Adjunk példát mindenütt differenciálható függvényre, amelynek a deriváltja nem folytonos!

Ellenőrizzük egy ilyen függvényre a Darboux tétel állítását!

4.1.63. (5) Igaz-e, hogy ha f folytonos a-ban és $\lim_{x \to a} f'(x) = \infty$, akkor $f'(a) = \infty$?

4.1.64. (2) Adjuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre $f'(x) = x$!

4.1.65. (6) Határozzuk meg az összes olyan mindenütt differenciálható f, g függvénypárt, amelyre

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1, \quad f' = g, \quad g' = -f!$$

4.1.66. (2) Értelmezzük 0^c-t 0-nak minden $c > 0$-ra. Mely $c > 0$ értékekre lesz az x^c függvény jobb oldali deriváltja 0-ban végtelen?

4.1.67. () Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható, $\lim_b f(x) = \infty$. Következik-e ebből, hogy $\lim_b f'(x) = \infty$?

4.1.68. (3) Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!
1. $\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$, 2. x^x, 3. $(\sin x)^{\cos x}$.

4.1.69. (4) f differenciálható, $|f'| < K$. Ekkor f egyenletesen folytonos.

4.1.70. (4) Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^x & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény grafikonja érinti az y-tengelyt.

4.1.71. (5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} = ?$$

4.1.72. (5) Legyen $f(x) = |x|^\alpha \cdot \sin\left(|x|^\beta\right)$, ha $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Milyen α-ra és β-ra lesz f folytonos 0-ban? Mikor lesz f differenciálható 0-ban?

4.1.73. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha f differenciálható 0-ban, akkor az $f(|x|)$ függvény akkor és csak akkor differenciálható 0-ban, ha $f'(0) = 0$.

4.1.74. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Mutassuk meg, hogy az állítás nem megfordítható.

4.1.75. (4) Legyen

$$\begin{aligned}K =&\{f : f \quad \text{korlátos} \quad [a,b]-\text{ben}\},\\ F =&\{f : f \quad \text{folytonos} \quad [a,b]-\text{ben}\},\\ M =&\{f : f \quad \text{monoton} \quad [a,b]-\text{ben}\},\\ X =&\{f : f \quad \text{konvex} \quad [a,b]-\text{ben}\},\\ D =&\{f : f \quad \text{differenciálható} \quad [a,b]-\text{ben}\},\\ I =&\{f : f\text{-nek} \quad \text{létezik} \quad \text{az} \quad \text{inverze } [a,b]-\text{ben}\}.\end{aligned}$$

Tartalmazás szempontjából a K, F, M, X, D és I halmazok milyen relációban állnak egymással?

4.1.1. Érintő

4.1.76. (3) Milyen szögben metszi egymást a sin és cos függvény grafikonja?

4.1.77. (5) Bizonyítsuk be, hogy az $r = ae^{m\varphi}$ polárkoordináta-egyenlettel megadott görbe (a, m állandójú logaritmikus spirál) minden pontjában a helyvektor és az érintő azonos szöget zár be.

4.1.78. (4) A $\sqrt[3]{\sin x}$ függvény grafikonjának hol függőleges az érintője?

4.1.79. (4) Bizonyítsuk be, hogy az x^2 függvény grafikonját akkor és csak akkor érinti az $y = mx + b$ egyenes, ha pontosan egy közös pontjuk van.

4.1.80. (3) Hol vízszintes a $2x^3 - 3x^2 + 8$ függvény grafikonjának érintője?

4.1.81. (4) Mikor érinti az $x^3 + px + q$ grafikonja az x-tengelyt?

4.1.82. (3) Milyen szögben metszi az x^2 függvény grafikonja az $y = 2x$ egyenest? (Azaz mekkora a közös pontokban az érintő és az egyenes szöge?)

4.1.83. (5) Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt{4a(a-x)}$ és $\sqrt{4b(b+x)}$ függvények grafikonjai merőlegesen metszik egymást, azaz a metszéspontban az érintők merőlegesek egymásra.

4.1.84. (6) Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és $xy = b$ görbék merőlegesen metszik egymást. Azaz, a $\pm\sqrt{x^2 - a}$ és b/x függvények grafikonjai merőlegesen metszik egymást.

4.1.85. (6) Legyen a és b nullától különböző szám. Bizonyítsuk be, hogy az $ax = x^2+y^2$ és $by = x^2+y^2$ görbék csak merőlegesen metszhetik egymást.

4.1.86. (6) Legyen a és b nullától különböző szám. Bizonyítsuk be, hogy az $x^3 - 3xy^2 = a$ és $y^3 - 3x^2y = b$ görbék csak merőlegesen metszhetik egymást.

4.1.87. (2) Igazoljuk, hogy az x-tengely akkor és csak akkor érinti az $y = ax^2 + bx + c$ parabolát (ahol $a \neq 0$), ha $b^2 - 4ac = 0$.

4.1.88. (4) Milyen szögben metszi egymást a 2^x és a $(\pi - e)^x$ függvény grafikonja?

4.2. Magasabb rendű differenciálhányadosok

4.2.1. (4) Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén melyik állításból következik a másik?
(i) Az $f(x)$ függvény a-ban n-szer differenciálható.
(ii) Van olyan n-edfokú $p(x)$ polinom, amelyre $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^n} = 0$.

4.2.2. (5) Igaz-e, hogy ha $f'''(x) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, akkor $f(x) = c \cdot e^x$ alkalmas $c \in \mathbb{R}$-re?

4.2.3. (4) Mit állíthatunk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényről, ha $f^{(n)}(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re ($n \in \mathbb{N}$ rögzített)?

4.2.4. (4) Igaz-e, hogy ha f 7-szer differenciálható $\mathbb{R}$-en, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$ és $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, akkor f-nek van inflexiós pontja?

4.2.5. (6) Igaz-e, hogy ha f kétszer differenciálható a-ban, akkor

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2} = f''(a) \ ?$$

4.2.6. (6) Adjunk meg olyan differenciálható függvényt, amely $x \leq 0$ esetén $2x$, $x \geq 1$ esetén $3x$. Van-e kétszer differenciálható függvény, ami megoldja a feladatot? És akárhányszor differenciálható?

4.2.7. (5) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elég sokszor differenciálható, $0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f(1) = f'(1)$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\xi \in (0,1)$, amelyre $f^{(6)}(\xi) = 0$.

4.2.8. (5) Adjuk meg az n-edik deriváltját az

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

függvénynek.

4.2.9. (2) Legyen $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. $f''(x) + f(x) =?$

4.2.10. (2) Határozzuk meg az alábbi deriváltakat:
1. $\left(e^{(x^3)}\right)^{(60)}(0)$, 2. $\left(e^{x^4}\right)^{(102)}(0)$, 3. $\left(e^{x^4}\right)^{(100)}(0)$.

4.2.11. (7) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ elég sima, $f'(a) = f'(b) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan c az a és b között, hogy

$$f''(c) \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

4.2.12. (5) $f \in C^\infty(0, \infty)$, $\lim_{0+0} f = \lim_\infty f = 0$. Ekkor $\exists \xi > 0$: $f^{''}(\xi) = 0$.

4.2.13. (3) Bizonyítsuk be, hogy ha f kétszer differenciálható a-ban, akkor f folytonos a egy környezetében.

4.2.14. (3) Hányszor differenciálható az $|x|^3$ függvény 0-ban?

4.2.15. (4) Adjunk meg olyan függvényt, amely 0-ban k-szor differenciálható, de nem differenciálható $k+1$-szer.

4.2.16. (5) Legyen $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ha $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Hol differenciálható a függvény? Mi a deriváltja? Hol folytonos a derivált függvény?

4.2.17. (4) Hányszor differenciálható az $|x|^\alpha$ függvény a 0-ban, ha $\alpha > 0$?

4.2.18. (5) Tegyük fel, hogy az f és a g függvény n-szer differenciálható az a-pontban.
(a) Igazoljuk, hogy fg is n-szer differenciálható a-ban.
(b) $(fg)^{(n)}(a) =?$

4.2.19. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $a \in (-1, 1)$ a $T_n(x)$ Csebisev-polinomnak ($T_n(\cos t) = \cos nt$) inflexiós pontja, akkor

$$|T_n'(a)| = \frac{n^2}{\sqrt{n^2(1-a^2)+a^2}}.$$

4.2.20. (5) Igazoljuk, hogy

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

4.2.21. (4) Mutassunk példát olyan, akárhányszor differenciálható f függvényre, amire $x \neq 0$ estén $f(x) > 0$ és $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0$.

4.3. A lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolata

4.3.1. (5) (a) Igazoljuk, hogy ha f konvex, akkor minden pontban differenciálható jobbról és balról is.

(b) Igazoljuk, hogy ha f konvex, akkor f'_+ monoton nő.

4.3.2. (5) Mutassunk példát olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, ami minden pontban lokálisan növekvő vagy csökkenő, de nem monoton.

4.3.3. (4) Legyen a belső pontja $D(f) \subset \mathbb{R}$-nek. Melyik állításból következik melyik?

(a) Az f függvény a-ban lokálisan növekedő.

(b) Az f függvény a-ban lokálisan szigorúan növekedő.

(c) $\overline{f'}(a) \geq 0$. (d) $\underline{f'}(a) \geq 0$. (e) $\overline{f'}(a) > 0$. (f) $\underline{f'}(a) > 0$.

4.3.4. (2) Legyen $D(f) = [0, 1]$, $f(x) = x^7(1-x)^9$. Hol tűnik el f'? Mi a függvény minimuma és maximuma?

4.3.5. (4) Igazoljuk, hogy ha egy függvény egy intervallum minden pontjában (szig.) lokálisan növekedő, akkor a teljes intervallumon (szig.) monoton növekvő.

4.3.6. (4) Legyen a belső pontja $D(f) \subset \mathbb{R}$-nek. Melyik állításból következik melyik?

(a) f-nek a-ban lokális minimuma van.

(b) f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.

(c) $f'(a) = 0$. (d) $\overline{f'_-}(a) \leq 0$ és $\underline{f'_+}(a) \geq 0$. (e) $\overline{f'_+}(a) \leq 0$ és $\underline{f'_-}(a) \geq 0$.

(f) $\overline{f'_-}(a) < 0$ és $\underline{f'_+}(a) > 0$. (g) $\overline{f'_+}(a) < 0$ és $\underline{f'_-}(a) > 0$.

4.3.7. (6) Igazoljuk, hogy ha $a \in (-1,1)$ az U_n másodfajú Csebisev-polinomnak ($U_n(\cos t) = \dfrac{\sin(n+1)t}{\sin t}$) lokális szélsőértékhelye, akkor

$$|U_n(a)| = \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2(1-a^2)+a^2}}.$$

4.3.8. (4) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f-nek 0-ban szigorú lokális minimumhelye van, de f' nem vált előjelet 0-ben.

4.4. Középértéktételek

4.4.1. (2) Hol a hiba?

a) $f(x) = 1/x$-re Lagrange tétel $[-1,1]$-en $\implies$ $\exists\, t \in (0,1) \;:\; f'(t) = \frac{1/1 - 1/(-1)}{1-(-1)} = 1$.

Másfelől $f'(x) = -1/x^2 < 0$, ellentmondás.

b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$-re, $f(-1) = f(1) = 0$, tehát Rolle tétel szerint $\exists t \in (-1,1) \;:\; f'(t) = 0$.

Másfelől $f'(x) \neq 0$ $[-1,1]$-en, ellentmondás.

4.4.2. (4) Adjunk példát olyan differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyhez van olyan c pont, hogy $f'(c)$ nem egyenlő az $(f(b) - f(a))/(b-a)$ differenciahányadossal semmilyen $a < b$-re! Ez miért nem mond ellent a Lagrange-középértéktételnek?

4.4.3. (3) Adott három valós szám, $a < b < c$, valamint egy $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az f kétszer differenciálható (a, c)-n, továbbá $f(a) = f(b) = f(c)$. Igazoljuk, hogy van olyan $\xi \in (a, c)$, amire $f''(\xi) = 0$.

4.4.4. (3) Az f függvény folytonos $[a, b]$-n és háromszor differenciálható (a, b)-n, továbbá $f(a) = f'_+(a) = f(b) = f'_-(b) = 0$. Igazoljuk, hogy van olyan $\xi \in (a, b)$, amire $f'''(\xi) = 0$.

4.4.5. (4) A Lagrange-középértéktétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha f differenciálható $\mathbb{R}$-en és f' korlátos, akkor f Lipschitz.

4.4.6. (5) Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $\xi \in (a, b)$ szám, amire

$$\underline{f'}(\xi) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \overline{f'}(\xi).$$

Igaz marad-e ez az állítás, ha csak azt kötjük ki, hogy f féloldalról folytonos az a és a b pontban?

4.4.7. (6) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható az $[0, 2]$ intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (0, 2)$, amire $f(0) - 2f(1) + f(2) = f''(\xi)$.

4.4.8. (5) A Lagrange-középértéktétel felhasználásával igazoljuk, hogy ha $f'(a + 0)$ létezik, akkor $f'_+(a)$ is létezik és egyenlők.

4.4.9. (7) Az f függvény háromszor differenciálható, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$ és $f'(0) = 1$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\xi \in (-1, 1)$, amire $f'''(\xi) = 3$.

4.4.10. (8) Általánosítsuk a Lagrange-, és a Cauchy-középértéktételt három alappontra és második deriváltra.

4.4.11. (7) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor monoton növekvő, ha (a, b)-ben $\underline{f'_+} \ge 0$.

4.4.12. (10) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható, $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ és $f(1) = 1$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $\xi \in (0, 1)$ valós szám, amire $f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0$.

4.4.13. (9) Egy n-szer differenciálható f függvény *osztott differenciáit az* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *alappontokon* így jelöljük és definiáljuk:

$$f[x_0] = f(x_0);$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\text{ha} \quad x_{n-1} \neq x_n;$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x]'\Big|_{x=x_n} \qquad \text{ha} \quad x_{n-1} = x_n.$$

(a) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$. $f[x, y, z] =?$

(b) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható, $x \leq y \leq z$ és $x \neq z$, akkor létezik olyan $\xi \in (x, z)$, amire $\frac{f''(\xi)}{2} = f[x, y, z]$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy az osztott differencia nem függ az $x_0, \ldots, x_n$ számok sorrendjétől.

(d) Igazoljuk, hogy ha f n-szer differenciálható és az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok nem mind egyenlők, akkor

$$\exists \xi \in \big(\min x_i, \max x_i\big) \quad \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

4.4.14. (10) Általánosítsuk a Cauchy-középértéktételt osztott differenciákkal. (l. 4.4.13)

4.4.15. (9) Legyen $a < b < c$, továbbá $f, g : [a, c] \to \mathbb{R}$ folytonos és (a, c)-ben kétszer differenciálható, továbbá g'' sehol sem 0. Igazoljuk, hogy van olyan $\xi \in (a, c)$ pont, ahol

$$\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} = \frac{(c-b)f(a) - (c-a)f(b) + (b-a)f(c)}{(c-b)g(a) - (c-a)g(b) + (b-a)g(c)}.$$

4.4.16. (9) Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ és $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\det \begin{pmatrix} e^{a_1 b_1} & e^{a_1 b_2} & \ldots & e^{a_1 b_n} \\ e^{a_2 b_1} & e^{a_2 b_2} & \ldots & e^{a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_n b_1} & e^{a_n b_2} & \ldots & e^{a_n b_n} \end{pmatrix} > 0.$$

(KöMaL A. 463., 2008. október)

Megoldás→

4.4.1. Gyökök száma

4.4.17. (3) Egy p n-edfokú polinom minden gyöke valós. Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden deriváltjának minden gyöke valós.

4.4.18. (3) Bizonyítsuk be, hogy az $x^5 - 5x + 2$ függvénynek három valós gyöke van.

4.4.19. (3) Bizonyítsuk be, hogy az $x^7 + 8x^2 + 5x - 23$ függvénynek legfeljebb három valós gyöke van.

4.4.20. (5) Hány valós gyöke lehet legfeljebb az $x^{16} + ax + b$ függvénynek?

4.4.21. (4) Az $x^3 - 6x^2 + 9x + k$ függvénynek k milyen értéke mellett van pontosan egy valós gyöke?

4.4.22. (8) Legfeljebb hány különböző nullhelye lehet egy $e^x + p(x)$ alakú függvénynek, ha p egy n-edfokú polinom?

4.4.23. (5) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f deriváltfüggvényének végtelen sok gyöke van $(0,1)$-ben.

4.5. Szélsőérték-feladatok

4.5.1. (2) Egy a és b oldalú téglalapból felül nyitott téglatest alakú dobozt akarunk készíteni úgy, hogy a téglalap négy sarkánál egy-egy x oldalú négyzetet kivágunk és a négy keletkező téglalapot felhajtjuk. Hogyan kell x értékét megválasztani, hogy a doboz köbtartalma a lehető legnagyobb legyen?

4.5.2. (2) Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú egyenes körkúp?

4.5.3. (2) Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút szélsőértékeit a megadott intervallumokban!

1. $x^2 - x^4$; $[-2, 2]$; 2. $x - \operatorname{arc\,tg} x$; $[-1, 1]$; 3. $x + e^{-x}$; $[-1, 1]$;
4. $x + x^{-2}$; $[1/10, 10]$; 5. $\operatorname{arc\,tg}(1/x)$; $[1/10, 10]$; 6. $\cos x^2$; $[0, \pi]$;

7. $\sin(\sin x)$; $[-\pi/2, \pi/2]$; 8. $x \cdot e^{-x}$; $[-2, 2]$; 9. $x^n \cdot e^{-x}$; $[-2n, 2n]$;
10. $x - \log x$; $[1/2, 2]$; 11. $1/(1+\sin^2 x)$, $(0, \pi)$; 12. $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$; $[-2, 2]$;
13. $x \cdot \sin(\log x)$; $[1, 100]$; 14. x^x; $(0, \infty)$; 15. $\sqrt[x]{x}$; $(0, \infty)$;
16. $(\log x)/x$; $(0, \infty)$; 17. $x \cdot \log x$; $(0, \infty)$; 18. $x^x \cdot (1-x)^{1-x}$; $(0, 1)$.

4.5.1. Egyenlőtlenségek, becslések

4.5.4. (4) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin \frac{x+y}{2} \qquad (x, y \in [0, \pi])\ !$$

4.5.5. (4) Bizonyítsuk be, hogy a $(0, \pi/2)$ intervallumon $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$.

4.5.6. (6) Bizonyítsuk be, hogy minden $x > 0$-ra

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x.$$

4.5.7. (4) Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in [0, 1]$-re
1. $2^x \le 1 + x \le e^x$, 2. $\frac{2}{\pi} x \le \sin x \le x$.

4.5.8. (4) Bizonyítandó, hogy $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \le |x - y|$ minden x, y-ra.

4.5.9. (5) Legyen $x < 0$ és n pozitív egész. Melyik nagyobb? e^x vagy $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$?

4.5.10. (9) Bizonyítsuk be, hogy ha $a > 1$ és $0 < x < \frac{\pi}{a}$, akkor $\dfrac{\sin ax}{\sin x} < ae^{-\frac{a^2-1}{6}x^2}$.

4.5.11. (9) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n pozitív egész számra és $x > 0$-ra

$$\frac{\binom{n}{0}}{\sqrt{x}} - \frac{\binom{n}{1}}{\sqrt{x+1}} + \frac{\binom{n}{2}}{\sqrt{x+2}} - \frac{\binom{n}{3}}{\sqrt{x+3}} + - \ldots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{\sqrt{x+n}} > 0.$$

4.5.12. (6) Milyen $a, b \in \mathbb{R}$-re igaz, hogy

$$\left(\frac{x_1^a + \ldots + x_n^a}{n}\right)^{1/a} \leq \left(\frac{x_1^b + \ldots + x_n^b}{n}\right)^{1/b} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n > 0) \text{ ?}$$

4.5.13. (4) (a) Igazoljuk, hogy az $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ függvény szigorúan konkáv a $(-\infty, 0)$ intervallumon.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \leq a, b \leq 1$, akkor $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{1+ab}}$.

4.5.14. (4) Bizonyítsuk be, hogy $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

4.5.15. (5) Igazoljuk, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén

$$\cos x < e^{-x^2/2}.$$

4.5.16. (5) Igazoljuk, hogy $0 < x$ esetén

$$\operatorname{arc\,tg} x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.5.17. (7) Legyen $|x| < \dfrac{\pi}{2}$. Melyik nagyobb, $\dfrac{\sin x}{x}$ vagy $e^{-x^2/2}$?

4.5.18. (4) Mi az $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ függvény értékkészlete?

4.5.19. (10) Legyen $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ valós együtthatós polinom, ahol $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy valamilyen pozitív egész k-ra az $(x-1)^{k+1}$ polinom osztója $p(x)$-nek. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} |a_\ell| > 1 + \frac{2k^2}{n}.$$

CIIM 4, Guanajuato, Mexikó, 2012

4.5.20. (5) Legyen $0 < x, y < \pi$. Melyik nagyobb: $\sin\sqrt{xy}$, vagy $\sqrt{\sin x \cdot \sin y}$?

4.6. A differenciálható függvények vizsgálata

4.6.1. (4) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre!
1. e^{-1/x^2}, 2. x^x (konvexitás nélkül), 3. $x + e^{-x}$, 4. $\sin(\sin x)$, 5. $3x - x^3$, 6. $\frac{2-x^2}{1+x^4}$, 7. $\log(1 + x^2)$, 8. $x^3 - 3x$, 9. $x^2 - x^4$, 10. $x - \operatorname{arc\,tg} x$, 11. $x + e^{-x}$, 12. $x + x^{-2}$, 13. $\operatorname{arc\,tg}(1/x)$, 14. $\cos x^2$, 15. $\sin(\sin x)$, 16. $\sin(1/x)$, 17. $x \cdot e^{-x}$, 18. $x - \log x$.

4.6.2. (4) Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényekre!
1. $1/(1 + \sin^2 x)$, 2. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, 3. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, 4. $\sqrt{1 - e^{-x^2}}$, 5. x^x, 6. $\sqrt[x]{x}$, 7. $(\log x)/x$, 8. $x \cdot \log x$, 9. $x^x \cdot (1-x)^{1-x}$, 10. $\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$, 11. $\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{x+1}$, 12. $x^4/(1 + x)^3$, 13. $e^x/(1 + x)$, 14. $e^x/\operatorname{sh} x$, 15. $e^{-x} \cdot \left[\dfrac{1 - x^2}{2}\sin x - \dfrac{(1 + x)^2}{2}\cos x\right]$.

4.6.3. (4) Teljes függvényvizsgálat:

$$a)\ \frac{2 - x^2}{1 + x^4} \qquad b)\ \log(1 + x^2).$$

4.6.4. (4) Legyen $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$. $f\big((0, \infty)\big) = ?$

4.6.5. (4) Függvényvizsgáljuk az $\dfrac{e^x}{1 - x^2}$ függvényt.

4.6.6. (4) Függvényvizsgáljuk az $\frac{\pi}{4}x - \operatorname{arc\,tg} x$ függvényt.

4.6.1. Konvexitás

4.6.7. (3) Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény
1. konvex és korlátos, akkor konstans? 2. konkáv és mindenütt pozitív, akkor konstans?

4.6.8. (3) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $f(5) = 12$ és $\alpha = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Mi lehet (és mi nem lehet) α?

4.6.9. (6) Hány pontban metszheti egymást két konvex függvény grafikonja? És egy konvex meg egy konkávé?

4.6.10. (4) Milyen intervallumokon konvex illetve konkáv?
1. e^x, 2. $\log x$, 3. $|x|$, 4. x^a $(a \in \mathbb{R})$, 5. a^x $(a > 0)$
6. $\sin x$.

4.6.11. (5) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex, $\psi : f(a,b) \to \mathbb{R}$ konvex és monoton nő. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\psi \circ f$ is konvex.

4.6.12. (4) Igaz-e, hogy egy konvex függvény inverze konkáv?

4.7. A L'Hospital-szabály

4.7.1. (3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x} = ?$$

4.7.2. (3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = ?$$

4.7.3. (3) Határozzuk meg az alábbi határértékeket L'Hospital szabállyal!
1. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}}$.

4.7.4. (3) Határozzuk meg az alábbi határértékeket kétféleképpen: L'Hospital-szabállyal és Taylor-polinommal!
1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2) - 1}{x}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$,
4. $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}$, 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$, 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$,
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

4.7.5. (3) Alkalmazzuk a differenciálszámítást határértékek kiszámítására. A módszer abban áll, hogy a vizsgált függvényt differencia-hányadossá alakítjuk, és annak a határértékét deriválással határozzuk meg. Például

$$\lim_{x\to 0} (x + e^x)^{1/x}$$

helyett a logaritmusát véve a

$$\frac{\log(x+e^x)}{x}$$

hányadost kapjuk, ami a számlálónak a 0 ponthoz tartozó differenciahányadosa. A tört limesze tehát a számláló deriváltja a 0-ban. Ha ez a limesz A, akkor az eredeti limesz e^A. Fejezzük be a számolást!

Alkalmazzuk a fenti módszert, illetve variánsait az alábbi limeszek meghatározására:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$, 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$, 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e}{\log x}$, 4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3}{\cos x-\cos 3}$,
5. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin x}$, 6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)^{1/\operatorname{sh} x}$, 7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\log\cos 3x}$,
8. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{1/\cos(\pi/(2x))}$.

4.7.6. (2) Egy-egy alkalmas függvény differenciálásával számítsuk ki a következő határértékeket.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^3 x+e^x-2}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\log_2(1+x)}$$

4.7.7. (3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = ? \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\cos ax}{\log\operatorname{ch} bx} = ? \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{x^{-2}} = ?$$

$$\lim_{x\to 1} \left((x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right) = ? \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\log x}{x} = ?$$

Alkalmazhatjuk-e a L'Hospital szabályt? Alkalmazhatjuk-e a 0-beli (ill. 1-beli) derivált definícióját?

4.7.8. (3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x+e^{-x}-3}{\sin 2x+x^2+\operatorname{sh} x} = ? \qquad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = ?$$

$$\lim_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = ? \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{2x-\cos x} = ?$$

Alkalmazhatjuk-e a L'Hospital szabályt? Alkalmazhatjuk-e a 0-beli (ill. 1-beli) derivált definícióját?

4.7.9. (4) Alkalmazható-e a L'Hospital-szabály $\frac{0}{\text{akármi}}$ alakú határértékek esetén?

4.7.10. (4) Tegyük fel, hogy az f, g függvények k-szor differenciálhatók, $\lim\limits_{\infty} |g| = \infty$, $g^{(k)} \neq 0$ és $\lim\limits_{\infty} \frac{f^{(k)}}{g^{(k)}} = \beta$. Következik-e ebből, hogy $\lim\limits_{\infty} \frac{f}{g} = \beta$?

4.7.11. (4)

$$\lim_{x\to 0} \log_{(1-x^2)}(\cos bx) =? \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+e^x}{1+\cos x}\right)^{\operatorname{ctg} x} =?$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{cth}(x^2) - \operatorname{ctg}(1-\cos x)}{\log(1+x) - \sin x} =?$$

4.7.12. (4)

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^{\log_x 2} =? \qquad \lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{ctg}^2 x} =?$$

4.7.13. (5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}}{3^x - \operatorname{ch} x} =?$$

4.7.14. (5)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) =?$$

4.7.15. (5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cth} x - \operatorname{ctg} x}{\log(1+x) - x} =?$$

4.8. Polinomapproximáció, Taylor-polinom

4.8.1. (4) Írjuk fel az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény Taylor-sorát.

4.8.2. (3) Írjuk fel az e^x és az $e^{(x^2)}$ Taylor-sorát.

4.8.3. (2) Írjuk fel az $1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ polinomot $x + 1$ hatványainak összegeként.

4.8.4. (4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = ?$$

4.8.5. (4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = ?$$

4.8.6. (2) Írjuk fel $\log(\cos x)$ 5-ödfokú Taylor-polinomját.

4.8.7. (5) $A=?$, $B=?$ ha $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1+Ax^2}{x+Bx^3} + o(x^4)$.

$\operatorname{ctg} x - 1/x = \dfrac{(A-B)x}{1+Bx^2} + o(?)$

Ötlet→

4.8.8. (4) Írjuk fel a 0 körüli Taylor-sorát.

a) $\dfrac{1}{1-x}$ *b)* $\dfrac{1}{1+x}$ *c)* $\dfrac{1}{1+2x}$ *d)* $\dfrac{1}{3+4x}$ *e)* $\dfrac{1}{2+x^2}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

4.8.9. (3) Írjuk fel az

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$$

0 körüli 3-adfokú Taylor-polinomját.

4.8.10. (3) Írjuk fel a $\sin(\sin x)$ 0 körüli 3-adfokú Taylor-polinomját.

4.8.11. (3) $(1+x)^x - 1$ főtagja $=?$

4.8.12. (4) Állítsuk elő a $\log(1+x)$-et 0 körüli hatványsorként $(-1,1)$-en, használva az $1/(1+x)$ hatványsorát és hogy $(\log(1+x))' = 1/(1+x)$!

4.8.13. (6) Bizonyítsuk be, hogy $\lim n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2}$.

Megoldás→

4.8.14. (3) Határozzuk meg az x^3 függvény $0, 1, 2, 3, 4$ és 5-ödrendű 1 körüli Taylor-polinomját!

4.8.15. (4) Állítsuk elő az $\mathrm{sh}(x)$ és $\mathrm{ch}(x)$ függvényeket 0 körüli hatványsor alakban! Oldjuk meg ezt a feladatot kétféleképpen!

4.8.16. (6) Bizonyítsuk be, hogy e irracionális!

4.8.17. (5) Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket (ha nincs megadva, akkor a 0 körül):

1. $\sin x$; 2. $\cos x$; 3. $\operatorname{arc\,tg} x$; 4. $\arcsin x$; 5. $\dfrac{1}{1-x^2}$;
6. $\dfrac{1}{1+x^2}$; 7. e^x; 8. e^{x^2}; 9. $x^3e^{-x^2}$; 10. $1/x,\ a=1$;
11. $\sin^2 x$; 12. arc $\sin x$.

4.8.18. (4) Milyen $a, b \in \mathbb{R}$-re igaz, hogy

$$\binom{a+b}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{b}{k-i} \ ?$$

4.8.19. (2) Bizonyítsuk be a binomiális sor segítségével a binomiális tételt!

4.8.20. (1) Bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} .$$

4.8.21. (4) Igazoljuk, hogy a valós együtthatós $p(x)$ polinom akkor és csak akkor osztható az $(x-a)^k$ polinommal, ha $p(a) = p'(a) = \ldots = p^{(n-1)}(a) = 0$.

4.8.22. (5) Bizonyítsuk be, hogy $x > 0$ esetén

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots - \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} < \sin x < \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \ldots - \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$$

$$\text{és} \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots - \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} < \cos x <$$
$$< 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

4.8.23. (1) Írjuk fel az f függvény első néhány Taylor-polinomját a 2 körül, ha $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, $f''(2) = 4$ és $f'''(2) = 8$.

4.8.24. (7) Igazoljuk, hogy ha f akárhányszor differenciálható az I intervallumban, és létezik olyan K, hogy $|f^{(n)}| < K^n$ minden $x \in I$-re és $n \in \mathbb{N}$-re, akkor

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k$$

minden $a, x \in I$-re.

4.8.25. (4) A Taylor-formula segítségével mutassunk példát olyan intervallumra, amin az arc tg függvényhez tartanak a McLaurin polinomjai.

Mekkora a legnagyobb ilyen intervallum?

4.8.26. (7) Igazoljuk, hogy ha az $[a, b]$ intervallumon $|f^{(n)}| < n^{\sqrt{n}}$, akkor f Taylor-polinomjai f-hez tartanak.

4.8.27. (5) Mit írjunk a kipontozott helyekre, hogy az alábbi állítás igaz legyen?

Ha az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható az $[a, x]$ intervallumban és $0 < \ell < n$, akkor van olyan $c \in (a, x)$, amire

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{\cdots\cdots}(x-c)^{\ell}(x-a)^{\cdots\cdots}.$$

4.8.28. (8) Igazoljuk, hogy tetszőleges a_n valós számsorozathoz létezik olyan, akárhányszor differenciálható f függvény, amire $f^{(n)}(0) = a_n$.

4.8.29. (9) Igazoljuk, hogy ha f akárhányszor differenciálható az $(a - \varepsilon, b)$ intervallumon és mindegyik deriváltja nemnegatív $[a, b]$-n, akkor az a-beli Taylor-polinomjai tartanak f-hez.

4.8.30. (6) Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén.

4.8.31. (7) Milyen felső becslést kapunk $\left| \log(1+x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right|$ nagyságára a Lagrange-maradéktagból? Milyen x értékekre bizonyíthatjuk ezzel a módszerrel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \log(1+x)$?

5. fejezet

Az egyváltozós Riemann-integrál és alkalmazásai

5.0.1. A határozatlan integrál

5.0.1. (1)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = ? \qquad \int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int (e^{-x} + e^{-2x+3})\,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.2. (2)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4x^2} = ? \qquad \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = ? \qquad \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.3. (3)

$$\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int x^2 \log x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \operatorname{th}^2 x\,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.4. (4)

$$\int \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = ? \qquad \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = ?$$

5.0.5. (5)

$$\int |x| \,\mathrm{d}x = ? \qquad \int |x^2-1| \,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.6. (4)

$$\int \frac{4x^5-5x^4+16x^3-19x^2+12x-16}{(x-2)^2(x^4+4x^2+4)} \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.7. (4)

$$\int \frac{x^5+4x^4+12x^3+14x^2+15x+12}{(x+2)(x^2+3)} \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.8. (4)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.9. (5)

$$\int \sqrt{x^3+x^4} \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.10. (5)

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}} \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.11. (5)

$$\int \sin x \cdot \log(\operatorname{tg} x) \,\mathrm{d}x = ?$$

5.0.12. (4)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = ?$$

5.0.13. (4) $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} = ?$$

5.0.2. A deriváltfüggvények tulajdonságai

5.0.14. (5) Keressünk nem-folytonos függvényt, melynek létezik primitív függvénye.

5.0.15. (7) Adjunk példát olyan f függényre, aminek van primitív függvénye, de f^2-nek nincs.

5.0.16. (4) Mely állítások igazak tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre?

(a) Ha f korlátos, akkor Riemann-integrálható.

(b) Ha f korlátos, akkor van primitív függvénye.

(c) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor integrálható.

(d) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor nem integrálható.

(e) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor korlátos.

(f) f-nek akkor és csak akkor van primitív függvénye, ha az integrálfüggvénye primitív függvény.

(g) Ha f integrálható és az integrálfüggvénye differenciálható, akkor az integrálfüggvény deriváltja azonos f-fel.

(h) Ha f monoton nő, akkor az integrálfüggvénye konvex.

(i) Ha f integrálfüggvénye konvex, akkor f monoton.

(j) Ha f Darboux-tulajdonságú, akkor van primitív függvénye.

5.0.17. (4) Van-e olyan függvény, aminek a $\sqrt{|x|}$ (a) integrálfüggvénye; (b) primitív függvénye?

5.0.18. (7) Igazoljuk, hogy a

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0; \\ c & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek akkor és csak akkor létezik primitív függvénye, ha $c = 0$.

5.0.19. (4) Van-e olyan függvény, aminek az $|x| - 2$ (a) integrálfüggvénye; (b) primitív függvénye?

5.0.20. (5) Igazoljuk, hogy ha f-nek van primitív függvénye egy nyílt intervallumon, akkor ott nincs elsőfajú szakadása.

5.0.21. (5) Mely állítások igazak tetszőleges $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre?

(a) Ha f integrálható, akkor van primitív függvénye.

(b) Ha f integrálható, akkor nincs primitív függvénye.

(c) Ha f integrálható, akkor korlátos.

(d) Ha f integrálható, akkor Darboux-tulajdonságú.

(e) Ha f-nek van primitív függvénye, akkor Darboux-tulajdonságú.

(f) Ha f primitív függvénye konvex, akkor f monoton.

(g) Ha f integrálfüggvénye konvex, akkor f értékét véges sok pontban megváltoztathatjuk úgy, hogy monoton legyen.

(h) Ha f Darboux-tulajdonságú és integrálható, akkor van primitív függvénye.

5.1. A határozott integrál

5.1.1. (1) Számoljuk ki a definícióval a következő függvények Riemann-integrálját a $[0, 1]$-en:

a) x^2 *b)* $\begin{cases} 0 & x \leq 1/2 \\ 1 & x > 1/2 \end{cases}$ *c)* véges sok pont kivételével 0

5.1.2. (6) Legyen $0 < a < b$. Alkalmas felosztássorozat választásával határozzuk meg a definícióból $\int_a^b x^m \, \mathrm{d}x$ értékét!

5.1.3. (1) $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \ \mathrm{d}x$ =? Mi a $(-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$ felosztáshoz tartozó alsó, felső, illetve oszcillációs összeg?

5.1.4. (1) Mennyi a Dirichlet-, és a Riemann-függvény alsó és felső integrálja $[0, 1]$-ben?

5.1.5. (4) Integráljuk a szinuszfüggvényt $[0, \pi]$-ben.

5.1.6. (4) Számítsuk ki az $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ Riemann-integrált. (Válasszunk olyan felosztást, amikor az osztópontok mértani sorozatot alkotnak.)

5.1.7. (3) Mondjuk ki a megfelelő feltételeket és bizonyítsuk be, hogy

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

5.1.8. (2) Létezik-e a Riemann-integrálja $[0,1]$-en:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{ha } x=\frac{1}{n},\ n=1,2,\dots\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

5.1.9. (4) Igaz-e, hogy egy nyílt intervallumon értelmezett függvény akkor és csak akkor konvex, ha egy monoton növő függvény integrálfüggvénye?

5.1.10. (2) Mi legyen a (súlyozott) Jensen-egyenlőtlenség Riemann-integrálos alakja?

5.1.11. (5) Mi lehetne az integrálközelítő összegekre vonatkozó Cauchy-kritérium? Mondjuk ki, és bizonyítsuk be!

5.1.12. (6) Igazoljuk, hogy ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-ben, akkor van olyan pont, ahol folytonos.

5.1.13. (6) Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, aminek $[a,b]$ minden belső pontjában 0 a határértéke. Igazoljuk, hogy f Riemann-integrálható, és az integrálja 0.

5.1.14. (2) Számítsuk ki az $\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x$ integrált a definícióból.

5.1.15. (9) Igazoljuk, hogy ha f integrálható $[a,b]$-ben, akkor kontinuum sok pontban folytonos.

5.1.16. (9) Igazoljuk, hogy ha $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, és

$$\forall c\in[0,1]\ \left(\varlimsup_{x\to c,\ x\in[0,1]} f(x)-\varliminf_{x\to c,\ x\in[0,1]} f(x)\le 1\right),$$

akkor

$$\overline{\int_0^1} f-\underline{\int_0^1} f\le 1.$$

5.1.17. (8) Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Igazoljuk, hogy f felső összegeinek halmaza intervallum.

5.1.18. (4) Minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan $\delta > 0$-t, hogy ha F az I intervallum egy δ-nál finomabb felosztása, és σ az f függvénynek egy F-hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $|\sigma - \int_I f| < \varepsilon$.

(a) $I = [0,1]$, $f(x) = e^x$;
(b) $I = [0,1]$, $f(1/n) = 1$, ha $n \in \mathbb{N}$, egyébként $f(x) = 0$.

5.1.19. (2) Igazoljuk, hogy ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) - f(\frac{4}{n}) + \ldots + (-1)^{n-1} f(\frac{n}{n})}{n} \to 0.$$

5.1.20. (3) Igazoljuk, hogy tetszőleges $c > 0$ számra

$$\frac{1^c + 2^c + \ldots + n^c}{n^{c+1}} \to \frac{1}{c+1}.$$

5.1.21. (8) Mutassunk példát olyan integrálható $f : [0,1] \to [0,1]$ függvényre, amire $f \circ f$ nem integrálható.

5.1.22. (7) Legyen C az olyan $[0,1]$-beli valós számok halmaza, amelyeknek van olyan harmadostört alakja, amiben nem szerepel az 1-es számjegy. (Ezt hívjuk Cantor-halmaznak.) Legyen $f(x) = 1$ ha $x \in C$ és $f(x) = 0$, ha $x \notin C$. (Ez „a Cantor-halmaz karakterisztikus függvénye”.) Igazoljuk, hogy

(a) C kompakt, perfekt, és számossága kontinuum;
(b) Az f függvény szakadási pontjainak halmaza C;
(c) f Riemann-integrálható.

5.1.23. (5) Minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan $\delta > 0$-t, hogy ha F az I intervallum egy δ-nál finomabb felosztása és σ az f függvénynek egy F-hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $|\sigma - \int_I f| < \varepsilon$, vagy pedig mutassunk olyan $\varepsilon >$-t, amihez nem létezik megfelelő $\delta > 0$.

(a) $I = [0, \pi/2]$, $f(x) = \sin x$;
(b) $I = [0,1]$, $f(x) = x$, ha x racionális, és $f(x) = -x$, ha x irracionális.

5.1.24. (1) Tegyük fel, hogy f korlátos $[0,1]$-ben, és

$$\frac{f(1/n) + f(2/n) + \ldots + f(n/n)}{n} \to A.$$

Következik-e ebből, hogy f Riemann-integrálható, és $\int_0^1 f = A$?

5.1.25. (5) Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, és $f : [0,1] \to [c,\infty)$ Riemann-integrálható, akkor

$$\sqrt[n]{f(1/n) \cdot f(2/n) \cdot \ldots \cdot f(n/n)} \to e^{\int_0^1 \log f}.$$

Igaz-e ugyanez $[0,1] \to (0,\infty)$ függvény esetén?

5.1.26. (7) Igazoljuk, hogy ha egy $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és minden szakadási helye a Cantor-halmazban van, akkor Riemann-integrálható.

5.1.27. (7) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor $f \circ g$ is integrálható $[a,b]$-n.

5.1.28. (8) Konstruáljunk olyan $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmazt, aminek a karakterisztikus függvénye nem integrálható.

5.1.29. (9) Igazoljuk, hogy ha egy $[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és csak megszámlálható sok pontban szakad, akkor Riemann-integrálható.

5.1.30. (9) Az f korlátos függvénynek a $[0,1]$ intervallum minden pontjában van határértéke. (A végpontokban féloldali van.) Bizonyítsuk be, hogy f integrálható.

5.1.31. (4) Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor e^f is Riemann-integrálható.

5.1.32. (5) Adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy integrálható függvények szorzata integrálható.

5.1.33. (4) Általánosítsuk Riemann-integrállal a következőket: számtani közép, mértani közép, p-edik hatványközép, súlyozott p-edik hatványközép, súlyozott hatványközepek közötti egyenlőtlenségek, Jensen-egyenlőtlenség.

5.1.34. (4) Igazoljuk, hogy ha $c > 0$, továbbá $f : [a,b] \to (c,\infty)$ és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor f^g is Riemann-integrálható.

5.1.35. (5) Igazoljuk, hogy a kövér Cantor-halmaz karakterisztikus függvénye nem Riemann-integrálható.

5.1.36. (7) Konstruáljunk olyan $g : [a,b] \to [c,d]$ és $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényeket, amikre f integrálható, g folytonos és szigorúan monoton, de $f \circ g$ nem integrálható.

5.1.37. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha $c > 0$, és $f : [0,1] \to (c,\infty)$ integrálható, akkor $\log f$ és $1/f$ is integrálható, és

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right)^{-1} \leq e^{\int_0^1 \log f} \leq \int_0^1 f.$$

5.1.38. (3) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Milyen intervallumokon integrálható ez a függvény?

5.1.39. (9) Hogy lehetne a $\binom{2n}{n}$ binomiális együtthatót pozitív valós számokra kiterjeszteni? Mennyi legyen $\binom{2c}{c}$, ha $c > 0$?

5.1.40. (8) Definiáljuk tetszőleges f folytonos függvény n-edik integrálfüggvényét így:

$$(I_n f)(x) = \int_0^x \left(\int_0^{t_n} \left(\dots \int_0^{t_3} \left(\int_0^{t_2} f(t_1)\,\mathrm{d}t_1\right) \mathrm{d}t_2 \dots\right) \mathrm{d}t_{n-1}.\right) \mathrm{d}t_n.$$

Keress olyan φ_n függvényt, amire tetszőleges f folytonos függvény és x pozitív szám esetén

$$(I_n f)(x) = \int_0^x f(t) \cdot \varphi_n(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

5.1.41. (4) Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvényre

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 (1-t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5.1.42. (2) Adott ε. Adjunk meg olyan δ-t, melyre

$$\delta(F) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\int_0^{10} e^x\,\mathrm{d}x \; - s_F(e^x)\right| < \varepsilon.$$

5.1.43. (3) Ha létezik adjuk meg a (1) Riemann-integrálját, (2) primitív függvényeit és (3) integrálfüggvényét $[-1,1]$-en: (a) $|x|$; (b) $\operatorname{sgn} x$.

5.1.44. (3) Mutassunk ε-hoz δ-t, melyre $|I - s_F| < \varepsilon$, ha $\delta(F) < \delta$:

$a)$ $\sin x$; $[0, 2\pi]$-n $\qquad$ $b)$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \\ 1 & \text{egyébként} \quad [0, 1]\text{-en;} \end{cases}$

$c)$ $\sin x \cup \{(0, 0)\}$ $[0, 1]$-en.

5.1.45. (6) Mi a parciális integrálás megfelelője összegekre?

5.1.46. (7) Az $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvényre $f(0) = 1$, $f'_+(0) = -\delta < 0$ és $x > 0$ esetén $f(x) < 1$. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = n \cdot \int_0^1 f^n$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

5.1.47. (5) Riemann-integrálható-e a Riemann-függvény $[0, 1]$-en?

5.1.48. (5) Riemann-integrálható-e a következő függvény a $[0, 1]$-en?

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{q}} & x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q > 0 \\ 0 & x \text{ irracionális} \end{cases}$$

5.1.49. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim\limits_{\infty} f = A$, akkor $\lim\limits_{H \to \infty} \int_0^1 f(Hx)\, \mathrm{d}x = A$.

5.1.50. (1) Létezik-e $\int_0^1 f$, s ha igen, mennyi, ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \left[\frac{1}{2^{2k+1}}, \frac{1}{2^{2k}}\right], \quad k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{egyébként?} \end{cases}$$

5.1.51. (4) f folytonos, $\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 x f(x)\, \mathrm{d}x = 0$. Bizonyítsuk be, hogy f-nek létezik legalább két különböző gyöke $(0, 1)$-ben.

5.1.1. Nem elemi integrálok, Liouville-tétel

5.1.52. (8) A Liouville-tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy az $e^{\cos x}$ függvény primitív függvénye nem elemi.

5.1.53. (8) (a) A Liouville-tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy ha $c \neq 0$, akkor az e^{cx^2} függvény primitív függvénye nem elemi.

(b) Igazoljuk, hogy ha $f(x)$ legalább másodfokú polinom, akkor $e^{f(x)}$ primitív függvénye nem elemi.

5.1.54. (8) Bizonyítsuk be, hogy $\int e^x \cdot (\operatorname{arc\,tg} x)\, \mathrm{d}x$ nem elemi.

5.1.2. Az integrál értékére vonatkozó egyenlőtlenségek

5.1.55. (3) Ha f korlátos és konkáv $[a, b]$-n, akkor

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \;\leq\; \int_a^b f \;\leq\; (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$

5.1.56. (5) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton nő, folytonos, valamint $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\infty} f = \infty$. Legyen g az f inverz függvénye. Ekkor

$$xy \leq \int_0^x f \;+\; \int_0^y g.$$

5.1.57. (3) Igazoljuk, hogy ha $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos, és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, akkor

$$\int_0^1 f(g(x))dx \geq f\left(\int_0^1 g\right).$$

5.1.58. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, akkor

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b}(f+g) \leq \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b}(f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Mutassunk példát olyan f, g függvényekre, amikor egyik egyenlőtlenségben sem áll egyenlőség.

5.1.59. (3) Legyenek p, q pozitívak és $1/p + 1/q = 1$. Ekkor minden $x, y \geq 0$-ra

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

5.1.60. (3) Gondoljuk végig, hogy a sorozatokra vonatkozó Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij, illetve a Hölder-egyenlőtlenség bizonyítása hogyan vihető át a Riemann-integrálos változatra:

(a) Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ (Schwarz-egyenlőtlenség).

(b) Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható, $p, q > 0$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, akkor $\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$ (Hölder-egyenlőtlenség).

5.1.61. (7) Bizonyítsuk be, hogy minden $f : [a, b] \to (0, \infty)$ korlátos függvényre

$$\underline{\int_a^b} f > 0.$$

5.1.62. (5) Keressünk minél pontosabb becslést az

$$\left| \int_k^{k+1} \log t \, \mathrm{d}t - \frac{\log k + \log(k+1)}{2} \right|$$

számra, ha k nagy pozitív egész.

5.1.63. (6) Legyen $\operatorname{li} x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$, ha $x \geq 2$. Igazoljuk, hogy $\operatorname{li} x > \dfrac{x}{\log x} + \dfrac{x}{\log^2 x} - 10$.

5.1.64. (6) Igazoljuk, hogy $\operatorname{li} x \sim \dfrac{x}{\log x}$, ha $x \to \infty$.

5.1.65. (5) Igazoljuk, hogy $a > 0$ esetén

$$\frac{e^{-a}}{a+1} < \int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x} \, \mathrm{d}x < \frac{e^{-a}}{a}.$$

5.1.66. (5) Mutassuk meg, hogy $xy \leq (x+1)\log(x+1) - x + e^y - y - 1$ tetszőleges x, y pozitív számok esetén.

5.2. Integrálszámítás

5.2.1. (4)

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad b)\ \int_0^1 x\ \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.2. (4)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.3. (3)

$$\int_0^3 x \cdot [x]\ \mathrm{d}x$$

5.2.4. (5) Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$$\int_0^{e-1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\log^3 x}{x}\,\mathrm{d}x; \quad \int_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x;$$

$$\int e^{ax}\cos(bx)\sin(cx)\,\mathrm{d}x.$$

5.2.5. (4) Adjuk meg a $[-2,3]$ intervallumon az alábbi függvények összes primitív függvényét, integrálfüggvényét, határozatlan integrálját és határozott integrálját!

$$|x|; \qquad \operatorname{sgn} x; \qquad 1 + x^2 \operatorname{sgn} x$$

5.2.6. (5)

$$\int (\operatorname{th} x)^3\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.7. (5)

$$\int_0^1 x \cdot (\operatorname{arc\ tg} x)^2\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.8. (5) Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \quad \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad \int_0^1 \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{3/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \int_0^1 2^x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x; \quad \int_0^\pi (x^2+2x)\cos x\,\mathrm{d}x; \quad \int_1^e 1\cdot\log^2(x)\,\mathrm{d}x; \quad \int e^{ax}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

5.2.9. (6) Számítsuk ki parciális integrálással (helyettesítés nélkül!) a következő integrálokat:

$$(a)\quad \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x; \qquad (b)\quad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad (c)\quad \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x;$$

$$(d)\quad \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Segítség, egyben félrevezetés: $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = (x-1)'\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Megoldás→

5.2.10. (4) Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_0^\pi x^5\cos x\,\mathrm{d}x; \quad \int \operatorname{ar\,th} x\,\mathrm{d}x$$

5.2.11. (5) Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^2\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^1 \sqrt{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \int \left(\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_0^1 \sqrt{2^x-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.12. (3)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x+x^2}} = ? \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-1+x+x^2}} = ? \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = ?$$

5.2.13. (4) Számítsuk ki az alábbi integrálokat.

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x; \quad \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x; \quad \int_0^1 \sqrt{x^4+x^2}\,\mathrm{d}x; \quad \int \operatorname{ctg}(2-3x)\,\mathrm{d}x.$$

5.2.14. (2) (a) Bontsuk parciális törtekre a „határozatlan együtthatók” módszerével!

(b) Bontsuk parciális törtekre gyök behelyettesítésével!

$$\frac{1}{x^5-5x^3+4x} \qquad \frac{x^4}{x^3+x}$$

5.2.15. (4)

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \frac{x^5+3}{x^4+4x^3+8x^2+8x+3}\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.16. (3) Számítsuk ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

$$x = \sin u; \qquad x = \cos v; \qquad x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \qquad x = \sqrt{1-s^2}.$$

Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény minden esetben ugyanaz.

5.2.17. (4)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1} = ? \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = ? \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+2)^3} = ?$$

5.2.18. (7) A Wallis-formula mintájára legyen tetszőleges $n, k \geq 0$ egészek esetén

$$I_{n,k} = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n (\cos x)^k \,\mathrm{d}x.$$

(a) $I_{n,k} = ?$

(b) Hogyan terjeszthetjük ki a binomiális együtthatókat nem egész értékekre? Mennyi legyen $\binom{a}{b}$, ha $a \geq b \geq 0$ valós számok?

Kapcsolódó feladat: 5.2.21

5.2.19. (5) Számítsuk ki az $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozott és az $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált a következő helyettesítésekkel:

$$x = \frac{w}{\sqrt{1+w^2}}; \qquad x = \frac{2y}{1+y^2}; \qquad x = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Ellenőrizzük, hogy a kapott eredmény ugyanaz.

5.2.20. (8) (a) Keressünk legalább ötféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ integrált ki lehet számítani.

(b) Keressünk legalább ötféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ integrált ki lehet számítani.

Ötlet→

5.2.21. (7) (a) Legyen m és n pozitív egész. Számítsuk ki a $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$ integrált.

(b) Hogyan általánosíthatnánk a binomiális együtthatókat valós számokra? Mi lenne a kiterjesztett binomiális együtthatók értelmezési tartománya?

(c) Mi a kapcsolat a 5.2.18 feladatbeli $I_{n,k}$ és $B(m,n)$ között?

Kapcsolódó feladat: 5.2.18

5.2.22. (5)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1} = ? \qquad \int_0^1 \frac{8^x}{4^x+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = ?$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = ?$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 + \sin^4 x} = ? \qquad \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = ?$$

5.2.23. (4) (a) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$-vel.

(b) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{ctg} x$-szel.

5.2.24. (5)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_1^2 \frac{e^x+2}{e^x+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x)} = ?$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = ?$$

5.2.25. (6) Számítsuk ki az $\int_0^{3/4} \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ integrált és az $\int_0^{5/4} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ integrált minél többféle helyettesítéssel.

5.2.26. (5)

$$\int_1^2 \log x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int x^2 \operatorname{arc\,ctg} x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_1^e \log^3(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{1/4}^{3/4} \sqrt{x} \operatorname{arc\,sin} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \operatorname{ar\,cth} x\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \frac{x}{(1+x^2)^4}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int \frac{x^4}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.27. (4) (a) Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et csak $\operatorname{th} x$-szel.
(b) Fejezzük ki $\operatorname{sh} x$-et és $\operatorname{ch} x$-et csak $\operatorname{th} \frac{x}{2}$-vel.

5.2.28. (6)

$$\int_{3/4}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot (x^2+1)^{3/2}} = ?$$

5.2.29. (6)

$$\int_{5/4}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot (x^2-1)^{3/2}} = ?$$

5.2.30. (5)

$$\int (\operatorname{ctg} x)^3\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.31. (5)

$$\int_0^1 x \cdot \log^2(x^2+1)\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.32. (3)

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = ?$$

5.2.33. (6)

$$\int_{0,1}^{0,2} \sqrt[\log \operatorname{ch} \sin x]{1+\operatorname{sh}^2 \sin x}\ \mathrm{d}x = ?$$

5.2.34. (5)

$$\lim_{0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\ \mathrm{d}t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\ \ \mathrm{d}x} = ?$$

Ötlet→

5.2.35. (5)

$$\int \sqrt{3^x + 1}\, \mathrm{d}x = ?$$

5.2.36. (5)

$$\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + 2} = ?$$

5.2.1. Az integrálás és a differenciálás kapcsolata

5.2.37. (4)

$$\left(\int_0^{x^4} e^{t^3} \sin t\ dt \right)' = ?$$

5.2.38. (5) Írjuk fel az

$$f(t) = \int_{t^2}^{-t^3-t} e^{x^2} \sin \sqrt{x}\ \ \mathrm{d}x$$

függvény 0 körüli másodfokú Taylor-polinomját.

5.2.39. (7) Legyen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ két integrálható függvény, egy-egy integrálfüggvényük F, illetve G. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 \left(f(x) G\big(\sqrt{1-x^3}\big) - g(x) F\big(\sqrt[3]{1-x^2}\big) \right) \mathrm{d}x = F(1)G(0) - F(0)G(1).$$

5.3. Az integrálszámítás alkalmazásai

5.3.1. (4) Határozzuk meg az Euler-összegképlettel:

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} k^5; \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n} k^3(n-k)^3.$$

5.3.2. (7) Bizonyítsuk be, hogy a $\log\Gamma(x)$ függvény szigorúan konvex a $(0,\infty)$ félegyenesen.

5.3.3. (9) Legyen minten pozitív egész n-re λ_n az a szám, amire $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\lambda_n}$. Igazoljuk, hogy $\frac{1}{12n+1} < \lambda_n < \frac{1}{12n}$.

5.3.4. (5) Mi a nagyságrendje? (Adjuk meg n-nek olyan elemi függvényét, mellyel osztva véges határértéket kapunk)

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \log k \qquad b)\ 1^n \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \cdots (n-1)^2 \cdot n$$

5.3.5. (3)

$$\lim \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} = ?$$

5.3.6. (4) Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} \sim \frac{\log^2 n}{2}.$$

5.3.7. (5) Mi az $1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \cdot \dots \cdot (n-1)^2 n^1$ sorozat nagyságrendje?

5.3.8. (4) Milyen α valós számokra igaz, hogy $n \to \infty$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}?$$

5.3.9. (8) Monoton-e az $(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ sorozat? Melyik nagyobb, $(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}$ vagy e?

5.3.10. (4)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=?$$

5.3.11. (7) Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valós számok egy olyan sorozata, amire

$$\exists c>0 \quad \forall x>2 \quad \left|\{k:\ a_k<x\}\right| < c\frac{x}{\log^2 x}.$$

(Ilyenek például az ikerprímek.) Bizonyítsuk be, hogy $\sum \frac{1}{a_k}$ konvergens.

5.3.12. (6) Az $f:[-1,1]\to[0,1]$ folytonos függvényre $f(0)=1$, $x\neq 0$ esetén $f(x)<1$, továbbá $f'(0)=0$ és $f''(0)=-c<0$. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n=\sqrt{n}\cdot\int_{-1}^{1} f^n$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

5.3.13. (8) Legyen

$$f(s)=\frac{4^s\cdot\Gamma(s)\cdot\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(2s)}.$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy f periodikus.

(b) Bizonyítsuk be, hogy f-nek van határértéke ∞-ben, és számítsuk ki. (Használjuk a Stirling-formulát.)

(c) Mondjuk ki az eredményt: $\Gamma(s)\cdot\Gamma(s+\frac{1}{2})=\ldots\ldots\ldots\cdot\Gamma(2s)$ ha $s>0$.

(d) Általánosítsuk az eredményt $\frac{1}{2}$ helyett $\frac{1}{n}$-nel.

5.3.14. (8) Mi $\int_a^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ nagyságrendje, ha $a\to\infty$?

5.3.15. (4) Fejezzük ki az $\int_0^\infty e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$ integrált a Γ-függvénnyel.

5.3.16. (3) Keressünk összefüggéseket $B(p,q)$, $B(p+1,q)$ és $B(p,q+1)$ között.

5.3.17. (9) Bizonyítsuk be a Stirling-formulát a Γ függvény

$$\Gamma(s)=\frac{(s-1)^s}{e^{s-1}}\int_0^\infty \left(ye^{1-y}\right)^{s-1}\,\mathrm{d}y$$

alakjából.

5.3.18. (9) Igazoljuk, hogy $u, v > 0$ esetén

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

5.3.19. (7) Igazoljuk a Stirling-formula felhasználása nélkül, hogy bármely δ valós számra

$$\frac{\Gamma(x+\delta)}{\Gamma(x)} \sim x^{\delta},$$

ha $x \to \infty$.

5.3.20. (8) Legyen tetszőleges $\alpha \geq 0$-ra $I_\alpha = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^\alpha \, \mathrm{d}t$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $\alpha \to \infty$ esetén $I_\alpha \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$.

(b) Legyen $f(\alpha) = (\alpha+1) I_\alpha I_{\alpha+1}$. Igazoljuk, hogy az f függvény 1 szerint periodikus.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $I_\alpha \cdot I_{\alpha+1} = \dfrac{2\pi}{\alpha+1}$.

5.3.21. (3)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = ?$$

5.3.22. (8) A síkon az origó közepű, $R \geq 1$ sugarú körbe eső rácspontok száma $R^2\pi + O(R^\vartheta)$, ahol $\vartheta \leq 1$. ($\vartheta = 1$ triviális; $\vartheta = 2/3$ elemi; $\vartheta = 131/208 \approx 0,63$ ismert; $\vartheta = 1/2$-re nem igaz.) Ennek felhasználásával becsüljük meg a körbe eső, origótól különböző rácspontok origótól mért távolságainak szorzatát.

5.3.23. (7) Mi az $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi$, $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$ görbeív súlypontja?

Ötlet→

5.3.24. (3) Egy 10 méter hosszú rúdban a sűrűség hosszirányú változása $6 + 0,3x \ \frac{kg}{m}$. Mennyi a rúd tömege?

5.3.25. (4) Mennyi munka kell ahhoz, hogy egy m tömegű testet a Föld felszínéről h magasságba emeljünk? és ha $h = \infty$?

5.3.26. (5) Milyen görbét fut be az $r = a \cdot e^{m\varphi}$ logaritmikus spirál $(r = a, \psi = 0) - P$ darabjának súlypontja, ha P befutja a spirált?

5.3.27. (4) Forgassuk meg az $y^2 \leq 2px$, $0 \leq x \leq a$ által definiált kompakt tartományt az x tengely körül. Számítsuk ki a keletkezett forgástest súlypontját.

5.3.1. Terület- és térfogatszámítás

5.3.28. (1) Igazoljuk, hogy a kétdimenziós Jordan-térfogat nem változik, ha elforgatjuk a koordináta-tengelyeket.

5.3.29. (1) Számítsuk ki az origó középpontú, r sugarú kör (mint szektorszerű tartomány) területét és kerületét polárkoordinátákkal.

5.3.30. (3) Számítsuk ki az $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ halmaz területét polárkoordinátákkal.

5.3.31. (5) Egy egyenes körhengert elmetszünk egy síkkal, ami illeszkedik az egyik alapkör középpontjára, és érinti a másik alapkört. Milyen arányban osztja ketté ez a sík a henger térfogatát?

5.3.32. (6) Mennyi az n-dimenziós, r sugarú gömb térfogata?

5.3.33. (5) Számítsuk ki a kardioid területét: $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

5.3.34. (2) Ellenőrizzük, hogy az $[a,b] \times [c,d]$ téglalap határán a $-\int \dot{x}y$ és a $\int x\dot{y}$ képlet valóban a téglalap területét adja meg.

5.3.35. (3) Mennyi az r sugarú kör alapú, h magasságú forgásparaboloid-süveg térfogata?

5.3.36. (4) Mekkora a tórusz térfogata?

5.3.37. (6) A $g : [a,b] \to \mathbb{R} \times (0,\infty)$ folytonosan differenciálható, egyszerű, zárt, folytonos görbét megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora a súrolt felület által határolt test térfogata?

5.3.38. (3) A szinuszfüggvény grafikonjának 0 és π közötti ívét megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora az így kapható, szivar alakú test térfogata?

5.3.39. (4) Számítsuk ki az $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ cikloisív alatti területet.

5.3.40. (4) Mekkora az $y^2+z^2 \le \dfrac{1}{3+5\cos x}$, $|x| \le \pi/2$ forgástest térfogata?

5.3.41. (5) Az $x = t-\sin t$, $y = 1-\cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ cikloisívet körbeforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora az így kapható test térfogata?

5.3.42. (5) Mennyi a térfogata az $(0, \cos t, \sin t) - (1, \cos t, 0)$ szakaszok által súrolt felület alatti testnek? $(t \in [0, \pi/2])$

5.3.2. Ívhossz-számítás

5.3.43. (4) Paraméterezzük az $(1, 1)$ $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ csúcsú négyzetvonalat folytonosan differenciálható függvényekkel. Számítsuk ki a négyzet kerületét és területét ezzel a paraméterezéssel.

5.3.44. (4) Mennyi az $y = x^2$ parabola ívhossza $x = 0$-tól a-ig?

Ötlet→

5.3.45. (4) Számítsuk ki az $r(\varphi) = ae^{b\varphi}$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ logaritmikus spirális hosszát.

5.3.46. (4) Milyen képlettel számíthatjuk ki az $(r(t), \varphi(t))$ polárkoordinátás alakban megadott görbe hosszát, ha r és φ differenciálható, és a deriváltjuk integrálható?

5.3.47. (3) Számítsuk ki az $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ cikloisív hosszát.

5.3.48. (3) Milyen hosszú a $\operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának a $(0, 1)$ és az $(a, \operatorname{ch} a)$ pont közötti íve?

5.3.49. (4) Milyen hosszú az

$$f(x) = \log \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

függvény grafikonjának az $\big(\log 2, f(\log 2)\big)$ és $\big(\log 3, f(\log 3)\big)$ pontok közötti íve?

5.3.50. (3) Számítsuk ki az $r(\varphi) = 1 - \varphi^2$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ polárkoordinátás alakban megadott görbe hosszát.

5.3.51. (3) Számítsuk ki az $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ arkhimédészi spirális hosszát.

5.3.52. (3) Mennyi az $r(\theta) = a + a\cos\theta$, $(\theta \in [\pi/4, \pi/4])$ görbe ívhossza?

Ötlet→

5.3.53. (3) Bizonyítsuk be, hogy az $r = a \cdot e^{c\cdot\psi}$ logaritmikus spirál hossza véges. $(\psi \in [0, \infty))$

5.3.3. A forgási felületek felszíne

5.3.54. (4) $f := \frac{1}{x}|_{[0,\infty)}$. Mennyi az f grafikonjának x-tengely körüli forgatásával keletkező végtelen „tölcsér” felszíne, térfogata?

Eredmény→

5.3.55. (4) A $g : [a, b] \to \mathbb{R} \times (0, \infty)$ folytonosan differenciálható, egyszerű, folytonos görbét megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora a súrolt felület?

5.3.56. (5) Előadáson láttuk, hogy a forgástestek felszínét nem definiálhatjuk úgy, hogy a függvénygrafikonba beírt töröttvonalakat az x-tengely körül körbefogatjuk, és az így kapott, összeragasztott csonkakúpok felszínének a szuprémumát vesszük. Min múlik ez? Melyik a töröttvonalaknak az a tulajdonsága, ami a megforgatásnál elvész?

5.3.57. (3) Számítsuk ki a gömböv $(x \in [a, b],\ y^2 + z^2 = r^2 - x^2)$ felszínét.

5.3.58. (3) Ellenőrizzük, hogy az előadáson tanult képlet visszaadja a csonkakúp felszínét.

5.3.59. (4) Mekkora a tórusz felszíne?

5.3.60. (3) Az $f(x) = \operatorname{ch}^2 x$ függvény grafikonjának 0 és 1 közötti ívét megforgatjuk az x-tengely körül. Mekkora az így kapott forgásfelület felszíne?

5.4. Korlátos változású függvények

5.4.1. (4) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ folytonos görbe, mely lefedi $[0, 1]\times[0, 1]$-et. Lehet-e γ korlátos változású?

Ötlet→

5.4.2. (6) Igazoljuk, hogy $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ pontosan akkor folytonos és korlátos változású, ha előáll két monoton folytonos függvény összegeként.

Ötlet→

5.4.3. (2) Mi $\{x\}$ totális variációja a $[0,3]$ intervallumban?

5.4.4. (3) Legyen $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$. Korlátos változású-e a függvény? Abszolút folytonos-e?

5.4.5. (5) Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

(a) Ha f korlátos változású, akkor f folytonos.
(b) Ha f korlátos változású, akkor f Riemann-integrálható.
(c) Ha f Lipschitz, akkor f korlátos változású.
(d) Ha f Lipschitz, akkor f abszolút folytonos.
(e) Ha f abszolút folytonos, akkor f egyenletesen folytonos.
(f) Ha f abszolút folytonos, akkor az $\int_a^b \mathrm{d}f$ Stieltjes-integrál létezik.
(g) Ha f folytonos és korlátos változású, akkor f abszolút folytonos.

5.4.6. (4) Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Melyik állításból melyik következik?

(a) f grafikonja rektifikálható.
(b) f korlátos változású.
(c) f folytonos.
(d) f korlátos.
(e) f monoton.
(f) f Lipschitz.
(g) f két monoton függvény összege.

5.5. A Stieltjes-integrál

5.5.1. (2) Legyen f folytonos, $g(x)=\begin{cases} c & \text{ha } x<\frac{a+b}{2}\\ d & \text{ha } x>\frac{a+b}{2}\\ e & \text{ha } x=\frac{a+b}{2}\end{cases}.$

$$\int_a^b f\,dg=?$$

Ötlet→

5.5.2. (2) Legyen f folytonos.

$$\int_a^b f\ d[x] = ?$$

5.5.3. (5) Az 5.5.2 feladat alkalmazásával bizonyítsuk be, hogy ha f differenciálható, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\ \ \mathrm{d}x + \frac{f(1)+f(n)}{2} - \int_1^n \left([x] - x + \frac{1}{2}\right) f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.5.4. (6) A 5.5.3 feladatból vezessük le, hogy

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

egy pozitív konstanshoz tart (Stirling-formula).

5.5.5. (3) Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat.

$$\int_0^3 x^2\ \mathrm{d}[x]; \qquad \int_0^3 [x]\ \mathrm{d}\{x\}; \qquad \int_0^3 [x+0,5]\ \mathrm{d}\{x\}; \qquad \int_0^\pi \cos x\ \mathrm{d}(\sin x)$$

5.5.6. (5) Hogyan definiálhatnánk az $\int_a^b f \cdot |\ \mathrm{d}g|$ integrált? Mondjunk elégséges feltételeket a létezésére!

5.5.7. (5) Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b$ Stieltjes-integrál létezik. Igazoljuk, hogy ha g folytonos a $c \in (a,b)$ pontban, akkor a $h(u) = \int_a^u f\ \ \mathrm{d}g$ függvény is folytonos c-ben.

5.5.8. (3) (a) Számítsuk ki a következő Stieltjes-integrálokat: $\displaystyle\int_0^3 x^2\ \mathrm{d}\left[\sqrt{x}\right]$; $\displaystyle\int_0^\pi x\ \mathrm{d}(\sin x)$.

(b) Számítsuk ki ugyanezeket az integrálokat parciális integrálással is.

5.5.9. (5) Igaz-e, hogy ha f integrálható, g pedig korlátos változású és nincs közös szakadási helyük, akkor az $\int_a^b f\ \ \mathrm{d}g$ Stieltjes-integrál létezik?

5.5.10. (5) Terjesszük ki a Stieltjes-integrált improprius értelemben. Legyen $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$, $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $\int_a^b f \ \mathrm{d}g$ Stieltjes-integrál létezik tetszőleges $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ intervallumban. Legyen

$$\int_\alpha^\beta = \lim_{a \to \alpha+} \lim_{b \to \beta-} \int_a^b f \ \mathrm{d}g.$$

Igazoljuk, hogy ha

$$\int_\alpha^\beta |f| \cdot |\ \mathrm{d}g|$$

véges, akkor $\int_\alpha^\beta f \ \mathrm{d}g$ konvergens.

5.5.11. (5) Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos változású, $[c, d] \supset g([a, b])$, $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos. Igazoljuk, hogy

$$\int_a^b (f \circ g) \ \mathrm{d}g = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

5.5.12. (4) $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, egy $x_0 \in (a, b)$-ben f, g jobbról nem folytonos. Ekkor $\nexists \int_a^b f\ dg$.

5.5.13. (5) Bizonyítsuk be, hogy $\exists \int_a^b f\ dg, \int_b^c f\ dg \not\Rightarrow \exists \int_a^c f\ dg$

5.5.14. (7) Például a Legendre-formulából (a $n!$ prímtényezős felbontásából) tudjuk, hogy

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Bizonyítsuk be ebből, hogy $\pi(x) < cx$ valamilyen pozitív c konstanssal.

Ötlet→

5.6. Az improprius integrál

5.6.1. (6) Konvergensek-e, illetve abszolút konvergensek-e a következő improprius integrálok?

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} \ \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \ \mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^2) \ \mathrm{d}x$

5.6.2. (5) Bizonyítsk be, hogy

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \ \mathrm{d}x = n!.$$

5.6.3. (4) Mik azok a c valós számok, amikre az

$$\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{ar\,th} x}{x^2}\right)^c \mathrm{d}x$$

integrál konvergens?

5.6.4. (4)

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\, \mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^1 \frac{\log x}{x}\, \mathrm{d}x = ? \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = ?$$

$$\int_1^\infty \frac{x \log x}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x = ?$$

5.6.5. (5) Igaz vagy hamis?

(a) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\lim_\infty f = 0$.

(b) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf_\infty f = 0$.

(c) Ha $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\limsup_\infty f = 0$.

(d) Ha $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ folytonos, és $\int\limits_0^\infty f$ konvergens, akkor $\liminf_\infty f = 0$.

5.6.6. (4)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2} = ? \qquad \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = ? \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} = ?$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = ?$$

5.6.7. (4) Igaz vagy hamis?

(a) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor f korlátos.

(b) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és $\lim_\infty f = 0$, akkor $\int_0^\infty f$ konvergens.

(c) Ha $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, $\lim_\infty f = 0$ és f integrálfüggvénye korlátos, akkor $\int_0^\infty f$ konvergens.

5.6.8. (4) Milyen c valós számokra konvergens az

$$\int_3^\infty \frac{(\log\log x)^c}{x\log x}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál?

5.6.9. (4) Igazoljuk, hogy ha $f \ge 0$, akkor az $\int_\alpha^\beta f$ improprius integrál biztosan létezik.

5.6.10. (4) Konvergens? Divergens?

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin\sin\sin x} \qquad \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^\infty \frac{[x]!}{2^x+3^x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{arc\,cos} x}$$

5.6.11. (4) Milyen c számok esetén konvergens?

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\log^c x} \qquad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^c}\,\mathrm{d}x$$

5.6.12. (3) Legyenek f, g, h folytonos függvények $[a,\infty)$-en, és tegyük fel, hogy $f(x) \le g(x) \le h(x)$ minden $x \ge a$-ra. Bizonyítsuk be, hogy ha $\int_a^\infty f$ és $\int_a^\infty h$ konvergens, akkor $\int_a^\infty g$ is konvergens.

5.6.13. (5) (a) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a < b$, akkor $\left|\int_a^b \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| < \dfrac{1}{a}$. (Integráljuk parciálisan.)

(b) Bizonyítsuk be, hogy az $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens.

(c) Abszolút konvergens-e az $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ integrál?

5.6.14. (5) Az $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvényre $f(0) = 1$, $f'_+(0) = -c < 0$ és $x > 0$ esetén $f(x) < 1$. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = n \cdot \int_0^1 f^n$ sorozat konvergens, és számítsuk ki a határértékét.

5.6.15. (4) Konvergens? Divergens?

$$\int_0^1 \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 |\log x|^{\log x}\,\mathrm{d}x$$

5.6.16. (5) Milyen c számok esetén konvergens?

$$\int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \log x \cdot (\log\log x)^c} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{arc}\,\cos x)^c}$$

5.6.17. (5)

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{ar}\ \mathrm{cth}\, x}{x^2}\ \mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\pi \log\sin x\ \mathrm{d}x = ?$$

5.6.18. (2) Igaz-e, hogy ha $\int_0^\infty |f|$ konvergens, akkor $\lim_\infty f = 0$?

5.6.19. (5) Igazoljuk, hogy ha f egyenletesen folytonos $[2,\infty)$-en, akkor $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^2 \log^2 x}\ \mathrm{d}x$ konvergens.

5.6.20. (6) Igazoljuk, hogy ha f differenciálható, és $0 < f < -f'$, akkor $\int_0^\infty f$ konvergens.

5.6.21. (4) Milyen α, β valós számokra konvergens az

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\alpha (\cos x)^\beta\ \mathrm{d}x$$

integrál?

5.6.22. (7) Igazoljuk, hogy ha $f > 0$, és az $\int_3^\infty f$ improprius integrál konvergens, akkor az

$$\int_3^\infty \big(f(x)\big)^{1-\frac{1}{\log x}}\ \mathrm{d}x$$

integrál is konvergens.

5.6.23. (3)

$$\lim_{0+0} x \cdot \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t = ?$$

5.6.24. (4) Mik azok a c valós számok, amikre az

$$\int_1^\infty \left(\frac{\mathrm{ar}\ \mathrm{cth}\, x}{x}\right)^c \mathrm{d}x$$

integrál konvergens?

5.6.25. (2) Konvergens-e?

$$\int_0^3 \frac{\cos t}{t} \, \mathrm{d}t$$

Ötlet→

5.6.26. (5)

$$\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, \mathrm{d}x = ?$$

Ötlet→

5.6.27. (5) Milyen α-ra konvergens

$$\int_0^1 (x - \sin x)^\alpha \, \mathrm{d}x?$$

5.6.28. (7) Létezik-e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $\int_0^\infty f$ konvergens, de $\int_0^\infty f^2$ divergens?

6. fejezet

Numerikus sorok

6.0.1. (1) Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}.$$

6.0.2. (3) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n < 1.$$

6.0.3. (5) Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

konvergens.

6.0.4. (4)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots = ?$$

6.0.5. (4)

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots = ?$$

6.0.6. (4)

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots=?$$

6.0.7. (4)

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots=?$$

6.0.8. (5) Legyen $u_n=\int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$. Konvergens-e a $\sum\limits_1^{\infty}u_n$ sor?

6.0.9. (2)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots=?$$

6.0.10. (4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=?$$

6.0.11. (4) Igaz, vagy hamis?

(a) Ha $a_n\to 0$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens.

(b) Ha $a_n\to 0$, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ részletösszegei korlátosak, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergens.

(c) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ összege létezik, akkor $a_n\to 0$.

6.0.12. (4) Igazoljuk, hogy ha $|a_n|<\frac{1}{n^2}$ minden pozitív egész n-re, akkor az $\sum a_n$ sorra teljesül a Cauchy-kritérium.

6.0.13. (8) Legyen $\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$ pozitív tagú divergens sor. Igazoljuk, hogy van olyan, pozitív számokból álló, 0-hoz tartó (c_n) sorozat, amire $\sum\limits_{n=1}^{n}(c_n\cdot a_n)$ divergens.

6.0.14. (4)

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots=?$$

6.0.15. (5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 q^n = ?$$

6.0.16. (4) Tegyük fel, hogy $a_n \le b_n \le c_n$ minden pozitív egész n-re. Igazoljuk, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens.

6.0.17. (8) Legyen $\sum\limits_{n=1}^{n} a_n$ pozitív tagú konvergens sor. Igazoljuk, hogy van olyan, ∞-hez tartó (c_n) sorozat, amire $\sum\limits_{n=1}^{n} (c_n \cdot a_n)$ konvergens.

6.0.18. (8) Legyen $s > 1$ esetén $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, és $(p_1, p_2, p_3, \dots) = (2, 3, 5, \dots)$ a prímszámok sorozata.

(a) Prove that $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} = \zeta(s)$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$.

(c) Mi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^s}$ nagyságrendje, ha $s \to 1 + 0$?

6.0.19. (9) Legyen minden k pozitív egészre $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}$ pozitív tagú divergens sorozat. Igazoljuk, hogy van olyan, pozitív számokból álló, 0-hoz tartó (c_n) sorozat, amire a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot a_n^{(k)})$ sorok $(k = 1, 2, \dots)$ mind divergensek.

6.0.20. (3) Konvergens? Feltételesen konvergens? Abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n + \sqrt{n} + 1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/2]}}{\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

6.0.21. (3) Konvergens? Divergens?

$$\sum e^{-n^2} \qquad \sum \frac{n^{10}}{3^n - 2^n} \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad \sum n^2 e^{-\sqrt{n}}$$

$$\sum \left(n^{1/n^2} - 1\right) \qquad \sum \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\log^2 n}$$

6.0.22. (5) Tegyük fel, hogy $a_n > 0$, $b_n > 0$ minden n-re és $a_n/b_n \to 1$. Bizonyítsuk be, hogy $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\sum b_n$ konvergens. Mutassunk példát arra, hogy mindez nem igaz, ha elhagyjuk az $a_n > 0, b_n > 0$ feltételt.

6.0.23. (2) Mutassuk meg, hogy ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergens, akkor a következő sorok is abszolút konvergensek:

$$\sum(a_n + b_n) \qquad \sum \max(a_n, b_n) \qquad \sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

6.0.24. (5) Mi lehetne a gyökkritérium, a hányadoskritérium, a Dirichlet-kritérium és az Abel-kritérium improprius integrálokra vonatkozó megfelelője?

6.0.25. (3) Konvergens? Feltételesen konvergens? Abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{2^{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

6.0.26. (4) Konvergens? Divergens?

$$\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad \sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}\log n + n\log\log n}$$

$$\sum \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

6.0.27. (5)

(a) Igazoljuk, hogy ha $\overline{\lim}\left(|a_n|^{\frac{1}{\log n}}\right) < \frac{1}{e}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens.

(b) Igazoljuk, hogy ha $a_n \geq 0$, és $\underline{\lim}\left(|a_n|^{\frac{1}{\log n}}\right) > \frac{1}{e}$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

(c) Mondhatunk-e valamit az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájáról, ha $a_n > 0$, és $\lim\left(|a_n|^{\frac{1}{\log n}}\right) = \frac{1}{e}$?

6.0.28. (6) Legyen a $\sum a_{\varphi(n)}$ sor a $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor egy átrendezése. Milyen halmaz lehet a $\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}$ részletösszegek torlódási pontjainak halmaza?

6.0.29. (7) Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív valós számok egy olyan sorozata, amire

$$\exists c > 0 \quad \forall x > 2 \quad \left|\{k : \ a_k < x\}\right| > c\frac{x}{\log x}.$$

(Ilyenek például a prímszámok.) Bizonyítsuk be, hogy $\sum \frac{1}{a_k} = \infty$.

6.0.30. (5) Bizonyítsuk be a *Kondenzációs lemmát*: Legyen $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{konvergens} \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \qquad \text{konvergens.}$$

Megoldás→

6.0.31. (6) Konvergens vagy divergens?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

Ötlet→

6.0.32. (6) $\varepsilon > 0$. Konvergens vagy divergens?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$$

Ötlet→

6.0.33. (4) Milyen valós c-re konvergens

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot (\log \log n)^c}?$$

6.0.34. (5) A Dirichlet-kiritérum alkalmazásával igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}$ minden valós a-ra konvergens.

6.0.35. (5) Igaz, vagy hamis?

(1) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot a_n)$ is konvergens.

(2) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot a_n)$ is divergens.

(3) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ is konvergens.

(4) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ is divergens.

Ötlet→

6.0.36. (5) Mutassunk példát olyan abszolút konvergens $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ és feltételesen konvergens $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sorokra, amelyek Cauchy-szorzata feltételesen konvergens.

6.0.37. (5) (Raabe-kritérium) Legyenek a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjai pozitívak.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\liminf\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, akkor a sor konvergens.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ elég nagy n-re, akkor a sor divergens.

6.0.38. (10) Egy $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ sorozatra legyen

$$SA = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$$

az $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ sor részletösszegeinek sorozata. Van-e olyan, nem azonosan nulla A sorozat, amelyre az A, SA, SSA, $SSSA$, $\ldots$ sorozatok mind konvergensek?

Schweitzer-verseny, 2007

7. fejezet

Függvénysorozatok és sorok

7.1. Függvénysorozatok konvergenciája

7.1.1. (3) Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervallumokon egyenletesen konvergensek?

$$\sqrt[n]{|x|} \qquad \frac{x^n}{n!} \qquad x^n - x^{n+1} \qquad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

7.1.2. (4) Igaz-e, hogy

(a) monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze monoton?

(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan monoton?

(c) korlátos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze korlátos?

(d) folytonos függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze folytonos?

(e) Lipschitz-függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze Lipschitz?

7.1.3. (4) Igaz-e, hogy

(a) monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze monoton?

(b) szigorúan monoton függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan monoton?

(c) korlátos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze korlátos?

(d) folytonos függvényekből álló sorozat egyenletes limesze folytonos?

(e) Lipschitz-függvényekből álló sorozat egyenletes limesze Lipschitz?

7.1.4. (3) Az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen korlátos*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ |f_n(x)| < K$.

Igazoljuk, hogy egyenletesen korlátos függvénysorozat pontonkénti limesze korlátos.

7.1.5. (6) Bizonyítsuk be, hogy $\zeta(s)$ akárhányszor differenciálható az $(1, \infty)$ intervalumban.

7.1.6. (5) Igaz-e, hogy ha a folytonos $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvényekből álló (f_n) sorozat egyenletesen konvergens az $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ halmazon, akkor a teljes intervallumon egyenletesen konvergens?

7.1.7. (9) Igaz-e a Bolzano-Weierstrass tétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy folytonos függvények bármely, egyenletesen korlátos sorozatából kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat?

7.1.8. (3) Hol konvergensek az alábbi függvénysorozatok? Mely intervallumokon egyenletesen konvergensek?

$$\frac{x^n}{1+x^n} \qquad \sqrt[n]{1+x^{2n}} \qquad \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$$

7.1.9. (4) Igaz-e, hogy

(a) konvex függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze konvex?

(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze szigorúan konkáv?

(c) integrálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze integrálható?

(d) differenciálható függvényekből álló sorozat pontonkénti limesze differenciálható?

7.1.10. (4) Igaz-e, hogy

(a) konvex függvényekből álló sorozat egyenletes limesze konvex?

(b) szigorúan konkáv függvényekből álló sorozat egyenletes limesze szigorúan konkáv?

(c) integrálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze integrálható?

(d) differenciálható függvényekből álló sorozat egyenletes limesze differenciálható?

7.1.11. (5) Az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *egyenletesen Lipschitz*, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x, y \in I\ |f_n(x) - f_n(y)| \le K|x - y|$. Igazoljuk, hogy egyenletesen Lipschitz-függvénysorozat pontonkénti limesze Lipschitz.

7.1.12. (7) Igazoljuk, hogy ha az $f_1, f_2, \ldots : I \to \mathbb{R}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos, és egyenletesen Lipschitz az I korlátos zárt intervallumon, akkor létezik egyenletesen konvergens részsorozata.

7.1.13. (7) Igazoljuk, hogy ha az (f_n) függvénysorozat a H halmaz minden megszámlálható részén egyenletesen konvergens, akkor H-n is egyenletesen konvergens.

7.1.14. (5) Igaz-e, hogy ha $f_1, f_2, \ldots$ folytonos, nemnegatív értékű függvények egy sorozata, akkor az $F(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ függvény is folytonos?

7.1.15. (9) Igaz-e a Weierstrass-tétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy ha $H \subset C[a, b]$ nem üres, korlátos, zárt halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (funkcionál), akkor f-nek van maximuma?

7.1.16. (9) Igaz-e a Baire-kategóriatétel $C[a, b]$-ben? Avagy, igaz-e, hogy $C[a, b]$ nem áll elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként?

7.2. Függvénysorok konvergenciája

7.2.1. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor minden átrendezettje egyenletesen konvergens a H halmazon, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ sor is egyenletesen konvergens.

7.2.2. (4) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^n?$$

7.2.3. (4) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n)} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n?$$

7.2.4. (4) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n?$$

7.2.5. (3) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}?$$

7.2.6. (3) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}?$$

7.2.7. (4) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}?$$

7.2.8. (4) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^2}?$$

7.2.9. (5) Mely x értékekre konvergens, illetve abszolút konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n?$$

7.2.10. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ *Laurent-sor* $x = r$ és $x = R$, $(0 < r < R)$ esetén konvergens, akkor konvergens minden olyan x értékre is, amelyre $r < |x| < R$.

7.2.11. (5) Határozzuk meg a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{a^{|n|}} x^n$$

sor konvergenciatartományát, és a sor összegét.

7.2.12. (6) Legyen $(x)_n = x(x-1)\dots(x-(n-1))$. Határozzuk meg az alábbi Newton-féle sorok abszolút és feltételes konvergencia tartományait:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x)_n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \frac{(x)_n}{n!}$$

ahol $p \in \mathbb{R}$.

7.2.13. (6) Tegyük fel, hogy $f_n(x)$ monoton függvény az $[a,\ b]$ szakaszon minden n-re és

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

abszolút konvergens a szakasz végpontjaiban. Mutassuk meg, hogy ekkor a függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens az $[a,\ b]$ intervallumon.

7.2.14. (7) Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sor konvergens. Bizonyitsuk be, hogy ebben az esetben a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

függvénysor konvergens minden olyan korlátos zárt intervallumon, ami nem tartalmazza az a_n pontok egyikét sem. Vizsgáld meg, hogy a sor abszolút, illetve egyenletesen konvergens-e!

7.2.15. (7) Tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

Dirichlet-sor $x = x_0$ esetén konvergens. Bizonyítsuk be, hogy a sor $x > x_0$ esetén is konvergens.

7.2.16. (7) Konstruáljunk olyan függvénysort, ami egyenletesen konvergens és abszolút konvergens is, de nem egyenletesen abszolút konvergens.

7.2.17. (5) Mutassunk példát olyan, nemnegatív függvényekből álló, egyenletesen konvergens függvénysorra, amire nem alkalmazható a Weierstrass-kritérium.

7.3. Taylor-sorok és hatványsorok

7.3.1. (4) Írjuk fel a következő függvények Taylor-sorát.

(a) $\dfrac{1}{1-x}$ a 0 körül;

(b) $\dfrac{1}{x^2}$ a 3 körül;

(c) $\log x$ az 5 körül;

(d) $\sin x$ a $\dfrac{\pi}{3}$ körül;

(e) $\log(x^2-1)$ a 2 körül;

(f) $\operatorname{ar\,sh} x^2$ a 0 körül;

(g) $\operatorname{ar\,cth} x$ a 2 körül.

Mutassunk olyan intervallumot, amiben a Taylor-sor előállítja a függvényt.

7.3.2. (7) Konstruáljunk olyan, akárhányszor differenciálható függvényt, aminek 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens, a $[-1,1]$ intervallumban előállítja a függvényt, de máshol nem.

7.3.3. (3) Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát.

$$\sum n^{99}x^n \qquad \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \qquad \sum n! x^{n^2}$$

7.3.4. (1) Tanultuk, hogy $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ha $|x|<1$. Milyen összefüggéseket kapunk az $\alpha=-1$ és $\alpha=-2$ esetekben?

7.3.5. (6)

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots=? \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1}=?$$

7.3.6. (6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+2}\right)=?$$

7.3.7. (6) Legyen $c_0 = 1$ és $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$. (Ezeket hívják Catalan-számoknak.) Definiáljuk a $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ „generátorfüggvényt".

(a) Bizonyítsuk be, hogy a G-t definiáló hatványsor konvergens a 0 egy környezetében.

(b) Igazoljuk, hogy a konvergenciaintervallum belsejében $G(x) = xG^2(x) + 1$.

(c) Számítsuk ki és fejtsük hatványsorba G-t, és számítsuk ki c_n-et.

7.3.8. (8) Legyen p_n az n szám olyan partícióinak száma, amiben a tagok különbözők. (Megengedjük az egytagú, sőt az üres összeget is. Pl. $p_0 = 1$ és $p_6 = 4$, mert $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 2 + 1$.) A $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ generátorfüggvény segítségével keressünk felső becslést p_n-re.

7.3.9. (5) Fejtsük hatványsorba az $\operatorname{ar\,th} x$ függvényt az $1/2$ körül. Hol állítja elő a hatványsor a függvényt?

7.3.10. (6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} - \frac{2}{3k+3} \right) = ?$$

7.3.11. (5) (a) Határozzuk meg azoknak a c valós számoknak a halmazát, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^c \cdot \cos(nx) \right)$ függvénysor $\mathbb{R}$-en pontonként konvergens.

(b) Határozzuk meg azoknak a c valós számoknak a halmazát, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^c \cdot \sin(nx) \right)$ függvénysor $\mathbb{R}$-en egyenletesen konvergens.

7.3.12. (2) Milyen c valós számokra igaz, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} = 2^c?$$

7.3.13. (6) π közelítése Machin-típusú formulával. Hány tagot kell az $\operatorname{arc\,tg} x$ függvény Taylor-sorából figyelembe vennünk ahhoz, hogy a $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}$ képlet hibája 10^{-6}-nál kisebb legyen? (A képlet levezethető a $(2 + i)(3+i) = 5+5i$ azonosságból.) Hány tagra van szükség ha a $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} +$

$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$ képletet használjuk, és azt akarjuk, hogy a hiba 10^{-6}-nál kisebb legyen? Ismételjük meg az eredeti Machin formulával (1706): $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$.

8. fejezet

Többváltozós függvények differenciálása

8.1. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények

8.1.1. A ponthalmazelmélet alapjai

8.1.1. (2) Mi az

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz belseje, határa, lezárása?

8.1.2. (5) Igaz-e?

- a) $A \subset B \;\Rightarrow\; \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$;
- b) $\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$;
- c) $\partial \operatorname{int} A = \partial A$;
- d) $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$;
- e) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
- f) $\operatorname{int}(\overline{A}) = \operatorname{int} A$;
- g) $\partial \overline{A} = \partial A$

8.1.3. (5) Bizonyítsuk be, hogy $\overline{H}$ a H-t tartalmazó legszűkebb zárt halmaz.

8.1.4. (4) $\overline{H} = \{\ y \mid \exists x_n \in H \text{ sorozat, melyre } x_n \to y\ \}$.

8.1.5. (4) Igazoljuk, hogy
a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
b) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

8.1.6. (1) Bizonyítsuk be, hogy ha p az $E \subset \mathbb{R}^d$ halmaz torlódási pontja, akkor p minden környezetében végtelen sok pontja van az E-nek.

8.1.7. (5) Mutassuk meg, hogy minden $H \subset \mathbb{R}^d$ halmazra $\partial\partial H \subset \partial H$. Mutassunk példát, amikor a tartalmazás szigorú.

8.1.8. (6) Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $a \in A$ pont, melyre $|x - a| = d(x, A)$, ahol

$$d(x, A) := \inf\{|x - b| : b \in A\}$$

az x pont távolsága A-tól.

8.1.9. (6) Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$ zárt halmaz, melynek

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

diamétere (átmérője) d. Bizonyítsuk be, hogy van olyan a és b pontja A-nak, melyek távolsága d.

8.1.10. (1) Mi az alábbi halmazok belseje, külseje és határa? Mi a határ határa?

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x, y > 0,\ x{+}y < 1\big\}; \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 1/n,\ |y| < \frac{1}{n}\right\}$$

8.1.11. (5) Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges A részhalmazára

$$\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A; \quad \operatorname{int} \operatorname{ext} A = \operatorname{ext} A.$$

8.1.12. (6) Igazoljuk, hogy ha K egy metrikus tér olyan részhalmaza, hogy K minden, nyílt gömbökkel történő lefedéséből kiválasztható véges fedés, akkor K kompakt. (Egy halmaz akkor kompakt, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.)

8.1.13. (8) Igazoljuk, hogy ha K kompakt részhalmaza egy metrikus térnek, akkor K korlátos és zárt.

8.1.14. (5) Létezik-e olyan $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amire ∂A, $\partial\partial A$, $\partial\partial\partial A$, $\dots$ mind különböző?

8.1.15. (5) Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges A, B részhalmazaira

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B;$$

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

Igaz-e, hogy

$$\big(\partial(A \cup B)\big) \cup \big(\partial(A \cap B)\big) = \partial A \cup \partial B?$$

8.1.16. (6) (a) Bizonyítsuk be, hogy ha A egy metrikus tér tetszőleges részhalmaza, akkor $\partial(\operatorname{int} A) \subset \partial A$ és $\partial(\operatorname{ext} A) \subset \partial A$.

(b) Igaz-e, hogy $\partial(\operatorname{int} A) = \partial(\operatorname{ext} A)$?

8.1.17. (5) Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus térben minden halmaznak zárt a határa.

8.1.18. (6) Igazoljuk, hogy ha K kompakt halmaz egy metrikus térben, akkor K minden zárt részhalmaza kompakt.

8.1.19. (1) Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus térben a nyílt és a zárt halmazok számossága megegyezik.

8.1.20. (8) Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben minden korlátos, zárt halmaz kompakt, akkor a tér teljes. (A tér teljes, ha minden, az elemeiből képzett Cauchy-sorozat konvergens.)

8.1.21. (9) (a) Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben teljesül a Bolzano–Weierstrass-tétel, akkor a tér teljes.

(b) Mutassunk példát olyan metrikus térre, ami teljes, de nem teljesül a Bolzano–Weierstrass-tétel.

8.1.22. (8) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-nek kontinuum sok nyílt, és kontinuum sok zárt részhalmaza van.

8.1.23. (9) Az $\mathbb{R}^p$ tér egy részhalmaza „G_δ", ha megszámlálható sok nyílt halmaz metszete. A H halmazrendszer „lánc," ha bármelyik két eleme közül az egyik részhalmaza a másiknak. Igazoljuk, hogy tetszőleges, nyílt halmazokból álló lánc elemeinek metszete G_δ.

8.1.24. (5) Gyűjtsünk össze minél több ekvivalens feltételt arra, hogy egy halmaz nyílt, illetve zárt.

8.1.25. (5) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-ben minden zárt szakasz „összefüggő", azaz ha A, B diszjunkt, nyílt halmazok és $[a, b] \subset (A \cup B)$, akkor $[a, b] \subset A$ vagy $[a, b] \subset B$.

8.1.26. (6) Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^p$-ben teljesül a Baire-kategóriatétel.

8.1.27. (9) Bizonyítsuk be Helly tételét:

(a) ha $F_1, \ldots, F_n \subset \mathbb{R}^p$ konvex halmazok, és közülük bármely $(p+1)$-nek van közös pontja, akkor az összes F_i-nek van közös pontja.

(b) ha $F_i \subset \mathbb{R}^p$ $(i \in I)$ konvex kompakt halmazok, és közülük bármely $(p+1)$-nek van közös pontja, akkor az összes F_i-nek van közös pontja.

8.1.28. (9) Mutassuk meg, hogy $C[a, b]$ (a maximum normával) zárt egységgömbje nem kompakt, noha korlátos és zárt.

8.1.29. (10) Igaz-e, hogy tetszőleges, G_δ halmazokból álló lánc elemeinek metszete is G_δ?

8.1.30. (9) Tegyük fel, hogy K egy metrikus tér részhalmaza és minden K-n értelmezett folytonos függvény korlátos. Igazoljuk, hogy K korlátos és zárt. Következik-e a feltételből, hogy K kompakt?

8.1.2. Határérték és folytonosság $\mathbb{R}^n$-ben

8.1.31. (4) $\lim_{(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = ?$

Eredmény→

8.1.32. (8) Egy $||.|| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényt normának nevezünk, ha a következők teljesülnek:

(a) $||x|| \geq 0$ és $||x|| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$;
(b) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;
(c) $||c \cdot x|| = |c| \cdot ||x||$ minden $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$-re.
Definiáljuk a következő normákat $\mathbb{R}^p$-ben:

$$||x||_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^\alpha \right)^{1/\alpha} \qquad (1 \leq \alpha < \infty); \qquad ||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|.$$

(a) Igazoljuk, hogy ezek valóban normák.
(b) Miért nem definiáljuk a normát $\alpha < 1$ esetén?
(c) Igazoljuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}^p$ esetén

$$\lim_{\alpha \to \infty} ||x||_\alpha = ||x||_\infty.$$

(d) Mutassuk meg, hogy

$$\forall \alpha, \beta \in [1, \infty) \cup \{\infty\} \; \exists c_1, c_2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^p \; c_1 ||x||_\alpha < ||x||_\beta < c_2 ||x||_\alpha.$$

(e) Igazoljuk, hogy bármely két norma ekvivalens, azaz ha $||.||$ és $||.||'$ két tetszőleges norma, akkor vanak olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, amikre $c_1 ||x|| \leq ||x||' \leq c_2 ||x||$.

8.1.33. (1) Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x + y$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

8.1.34. (3) Milyen valós α esetén folytonos az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban?

8.1.35. (5) Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ és $f : A \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Legyen B azon $\mathbb{R}^p$-beli pontok halmaza, amelyekben az f-nek létezik véges határértéke az A halmazra szorítkozva, és legyen tetszőleges $b \in B$-re $g(b) = \lim_{x \to b,\, x \in A} f(x)$. Igazoljuk, hogy g folytonos a B halmazon.

8.1.36. (6) Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik $f_{x=a}$ szekciófüggvénye folytonos, és mindegyik $f_{y=b}$ szekciófüggvénye monoton és folytonos. Igazoljuk, hogy f folytonos.

8.1.37. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^p$, és minden K-n értelmezett folytonos függvény korlátos, akkor K kompakt.

8.1.38. (1) Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto xy$ függvény folytonos. Keressünk az $(1, 2)$ pontban $\varepsilon = 10^{-3}$-hoz δ-t.

8.1.39. (4) Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyekre $\lim_{\mathbf{0}} g = 0$ és $\lim_{0} f = 0$, de $\lim_{\mathbf{0}}(f \circ g) \neq 0$.

8.1.40. (5)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x + \cos y - 2}{x^2 + y^2} = ?$$

Keress ε-hoz δ-t!

8.1.41. (3) Igazoljuk, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz ősképe nyílt.

8.1.42. (5) Létezik-e a $\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$ függvénynek határértéke az origóban az $\{(x, y) : \ x \neq y\}$ halmazra szorítkozva?

Kiterjeszthető-e a függvény folytonosan a teljes síkra?

8.1.43. (5)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{ch} x - \cos y}{x^2 + y^2} = ?$$

Keress ε-hoz δ-t!

8.1.44. (1) $x_0 \in \mathbb{R}^p$. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - x_0|$. Bizonyítsuk be, hogy folytonos.

8.1.45. (4) Milyen $a > 0$ esetén folytonos az $\dfrac{x^2 y}{(x^2 + 3y^2)^a}$ függvény az origóban?

8.1.46. (3) Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$, $A \neq \emptyset$, és legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \inf\{ \ |x - y| \ | \ y \in A \ \}.$$

Bizonyítsuk be, hogy f folytonos. Bizonyítsuk be, hogy

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

8.1.47. (8) Konstruáljunk $[0,1] \to [0,1]^3$ „Peano-görbét” (azaz folytonos, szürjektív leképezést).

8.1.3. Differenciálás $\mathbb{R}^n$-ben

8.1.48. (1) Differenciálható-e az xy ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) leképezés? Mi a derivált a 0-ban?

8.1.49. (2)

$$g(t) = \begin{cases} t^2 & \text{ha } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{ha } t < 0 \end{cases}$$

Hol differenciálható $f(x,y) := g(x) + g(y)$?

8.1.50. (2) Rajzoljuk fel $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ szintvonalait. Egy adott (x_0, y_0) pontban melyik irányban nő legjobban a függvény értéke?

8.1.51. (3) Hol differenciálható a $||\ .\ ||_1 := \sum |x_i|$ függvény?

8.1.52. (3) Legyen $1 < p < \infty$. Hol differenciálható a $||\ .\ ||_p := \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$ függvény?

8.1.53. (7) Mutassunk példát olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre, melynek létezik minden 0 körüli iránymenti deriváltja, de 0-ban nem differenciálható.

8.1.54. (5) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az $I := [0,1] \times \{0\}$ intervallumtól mért távolság. Hol differenciálható? Hol differenciálható kétszer?

8.1.55. (2) Legyen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható, és deriváltja $(f(x,y), g(x,y))$. Mi a deriváltja az $F(\sin t, \cos t)$ függvénynek?

8.1.56. (1) $f(x,y) = x^2 + y^3$, $g(x,y) = x^2 + y^4$. Számítsuk ki a $(0,0)$-ban e függvények első és második differenciálját.

8.1.57. (4)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{egyébként} \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = ? \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = ?$$

8.1.58. (4) Egyenletesen folytonos-e $(x,y) \mapsto \arcsin \frac{x}{y}$?

8.1.59. (2) Legyen $f(x, y) = \log\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Igazoljuk, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

8.1.60. (3) Igazoljuk, hogy

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{egyébként} \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mindenhol differenciálható, de nem folytonosan differenciálható.

8.1.61. (3) Legyen $g(t) = \operatorname{sgn}(t) \cdot t^2$. Mutassuk meg, hogy az $f(x, y) = g(x) + g(y)$ kétváltozós függvény mindenhol differenciálható, de a tengelyek mentén nem differenciálható kétszer.

8.1.62. (3) Mutassuk meg, hogy az $(x - y^2)(2x - y^2)$ függvénynek nincs lokális minimuma $(0, 0)$-ban, de minden $(0, 0)$-n áthaladó egyenesre megszorítva lokális minimuma van ott.

8.1.63. (2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ elég sima. Adjuk meg egy irányvektorát a $z = f(x, y)$ grafikon $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$-beli normálisának.

8.1.64. (3) Határozzuk meg $x^3 + x^2 - xy$ minimumát és maximumát a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzeten.

8.1.65. (3) Határozzuk meg $xy \cdot \log(x^2 + y^2)$ maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 \leq r$ körlemezen.

8.1.66. (1) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciálisan differenciálható, és $D_1 f \equiv 0$, akkor f csak y-tól függ.

8.1.67. (2) Igazoljuk, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja? Keressünk ε-hoz δ-t!

8.1.68. (2) Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto \log_x y$ függvény differenciálható, ha $x > 1$ és $y > 0$. Vezessük le a láncszabályból $\log_{f(x)} g(x)$ differenciálási szabályát.

8.1.69. (2) Igazoljuk, hogy az $(x, y) \mapsto x^y$ függvény $(y > 0)$ folytonosan differenciálható. Mi a deriváltja?

8.1.70. (3) Igazoljuk, hogy az $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ függvény az origóban minden irányban differenciálható. Létezik-e olyan a vektor, amire tetszőleges v egységvektor esetén $D_v f(0,0) = a \cdot v$?

8.1.71. (4) Mik azok a differenciálható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amikre $D_1 f \equiv D_2 f$?

8.1.72. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható az a pontban, $f(a) = 0$, és $f'(a) = 0$, akkor minden korlátos $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre gf is differenciálható a-ban.

8.1.73. (5) Konstruáljunk olyan függvényt, aminek az origóban minden iránymenti deriváltja 0, és
(a) nem differenciálható az origóban;
(b) nem folytonos az origóban;
(c) nem korlátos az origó egyetlen környezetében sem.

8.1.74. (6) Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $D_{12}f$ második parciális deriváltja mindenhol létezik, és sehol sem negatív. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a < b$, $c < d$ számokra $f(a,c) + f(b,d) \geq f(a,d) + f(b,c)$.

8.1.75. (5) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $D_{12}f$ második parciális deriváltja mindenhol létezik. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges $a < b$, $c < d$ számokra $f(a,c) + f(b,d) \geq f(a,d) + f(b,c)$, akkor D_{12} sehol sem negatív.

8.1.76. (5) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható. Mutassuk meg, hogy ha a teljes síkon $D_{12} \geq 0$, akkor $D_{21} \geq 0$.

8.1.77. (5) Mi a $\operatorname{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ függvény deriváltja?

Eredmény→

8.1.78. (2) Igazoljuk, hogy az n-dimenziós vektorok skaláris szorzása, mint $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

8.1.79. (1) Igazoljuk, hogy az $(x,y) \mapsto x/y$ függvény differenciálható ($y \neq 0$). Mi a deriváltja?

8.1.80. (2) Igazoljuk, hogy az $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \dots x_n$ függvény differenciálható. Mi a deriváltja?

8.1.81. (3) Vezessük le a láncszabályból az n-tényezős szorzat deriváltjára vonatkozó szabályt.

Kapcsolódó feladat: 8.1.80

8.1.82. (2) Legyenek $f : I \to (0, \infty)$ és $g : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Vezessük le a láncszabályból f^g differenciálási szabályát.

8.1.83. (5) Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható és minden a-n átmenő egyenesre megszorítva f-nek lokális minimuma van az a pontban, akkor f-nek lokális minimuma van a-ban?

8.1.84. (5) Legyen B valós $q \times r$-es mátrix. Mi az

$$f(x_1, \ldots, x_{q+r}) = (x_1, \ldots, x_q)M(x_{q+1}, \ldots, x_{q+r})^T$$

bilineáris forma deriváltja?

8.1.85. (5) Igaz-e, hogy ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény az origón kívül minden pontban differenciálható és az origóban minden irányban 0 az iránymenti deriváltja, akkor az origóban is differenciálható?

8.1.86. (3) Írjuk fel a differenciálhatóság és a kétszer, illetve háromszor differenciálhatóság definícióját lineáris leképezésekkel.

8.1.87. (4) Milyen $\alpha, \beta > 0$ esetén lesz $|x|^\alpha \cdot |y|^\beta$ kétszer differenciálható az origóban?

8.1.88. (1) Írjuk fel az xyz függvény második Taylor-polinomját az $(1, 2, 3)$ pontban.

8.1.89. (1) Írjuk fel a $\sin(x+y)$ függvény harmadik Taylor-polinomját a $(0, 0)$ pontban.

8.1.90. (3) Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 5; \qquad x^3y^2(2 - x - y).$$

8.1.91. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha $D_{12}f$ és $D_{21}f$ is létezik az (a, b) pont egy környezetében és mindkettő folytonos (a, b)-ben, akkor $D_{12}f(a, b) = D_{21}f(a, b)$.

8.1.92. (8) Tegyük fel, hogy a $D_1 f$, $D_2 f$ és $D_{12} f$ parciális deriváltak léteznek az (a, b) pont egy környezetében és $D_{12} f$ folytonos (a, b)-ben. Bizonyítsuk be, hogy $D_{21} f(a, b)$ is létezik és $D_{21} f(a, b) = D_{12} f(a, b)$. (Schwarz tétele)

8.1.93. (4) Milyen $\alpha, \beta > 0$ esetén lesz $|x|^\alpha \cdot |y|^\beta$ háromszor differenciálható az origóban?

8.1.94. (1) Írjuk fel az x/y függvény harmadik Taylor-polinomját az $(1, 2)$ pontban.

8.1.95. (3) Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$x^3 + y^3 - 9xy; \qquad \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

8.1.96. (5) Legyen $f(x, y) = g(x)h(y)$, ahol a $g(x)$ és $h(y)$ függvények n-szer differenciálhatók az a, illetve a b pontban. A $g(x)$ n-edik Taylor-polinomja az a pontban legyen $c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n$, a $h(y)$ n-edik Taylor-polinomja a b pontban pedig $d_0 + d_1(y - b) + \ldots + d_n(y - b)^n$. Mi az f függvény (a, b)-beli, n-edik Taylor-polinomja?

8.1.97. (7) Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényre tetszőleges x, y esetén

$$y^2 \cdot D_1 f(x, y) = x^2 \cdot D_2 f(x, y).$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x, y) = g(x^3 + y^3)$ egy alkalmas g függvénnyel. Igaz-e, hogy a g függvény differenciálható a 0-ban?

8.1.98. (3) Igazoljuk, hogy ha $f_1, ..., f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex függvények, akkor a $g(x_1, \ldots, x_p) = f_1(x_1) + \ldots + f_p(x_p)$ függvény is konvex. Ellenőrizzük, hogy a $d^2 g$ kvadratikus alak mindenhol pozitív szemidefinit.

8.1.99. (3) Határozzuk meg $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ lokális szélsőértékeit.

8.1.100. (5) Hány lokális maximumhelye és hány lokális minimumhelye van az $(1 + e^y) \cos x - ye^y$ függvénynek?

8.1.101. (2) $f(x, y) = \psi(x - ay) + \varphi(x + ay)$, ahol ψ, φ akárhányszor differenciálható.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ?$$

8.1.102. (4) Milyen c-re differenciálható

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^c y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8.1.103. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható és tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $D_1 f(x,y) = y D_2 f(x,y)$, akkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amire $f(x,y) = g(e^x y)$.

8.1.104. (7) Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ konvex és nyílt, és $f : H \to \mathbb{R}$ konvex, akkor f a H minden kompakt részén Lipschitz.

8.1.105. (9) Adott egy $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható konvex függvény. Az F minimumát a *konjugált gradiens módszerrel* keressük: veszünk egy x_0-t, majd legyen

$$x_{n+1} = x_n - c(x_n) \cdot \mathrm{grad} f(x_n),$$

ahol a $c(x_n)$ számot az f függvény x_n-beli első és második deriváltjából számítjuk.

(a) Mi legyen $c(x_n)$?

(b) Igazoljuk, hogy a módszer működik másodfokú polinomokra.

(c) Keressünk más elégséges feltételt a módszer működésére.

8.1.106. (4) Legyen $H \subset \mathbb{R}^{p+q}$, $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$, $(a,b) \in \operatorname{int} H$ és $f : H \to \mathbb{R}$ differenciálható az (a,b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy egy, az a pont egy környezetében értlemezett, $\mathbb{R}^q$-ba képező φ differenciálható függvény megoldása az $f(x, \varphi(x)) = 0$ egyenletnek. Igazoljuk, hogy

$$f'_a(b) \circ \varphi'(a) = -(f^b)'(a).$$

8.1.107. (4) Legyen $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ esetén $u(x,y,z)$ az

$$(2+x)u^3 + (1+y)u - (3+z) = 0$$

polinom valós gyöke. $u'(0,0,0) =?$

8.1.108. (4) Legyen $|x_1 - 10| < 1$, $|x_2 - 20| < 1$, $|x_3 - 30| < 1$ esetén $u = (u_1, u_2)$ az

$$u_1 + u_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 10, \quad u_1 u_2 = \frac{x_1 x_2 x_3}{10}$$

egyenletrendszernek a $(30,20)$ ponthoz közelebbi megoldása. $u'(10,20,30) =?$

8.1.109. (4) Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ feltételek mellett x, $x + y + z$, illetve $y + z$ legnagyobb lehetséges értékeit.

8.1.110. (4) Határozzuk meg xyz legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ feltételek mellett.

8.1.111. (3) Ellenőrizzük a mértani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

8.1.112. (5) Legyen M szimmetrikus $n \times n$-es mátrix.

(a) Mely v egységvektorok esetén lesz $v^T M v$ minimális, illetve maximális?

(b) Melyik a leghosszabb, illetve a legrövidebb azon v vektorok közül, amikre $v^T M v = 1$?

8.1.113. (4) Határozzuk meg $x - y + 3z$ legnagyobb és legkisebb értékét az $x^2 + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1$ ellipszoidon.

8.1.114. (4) Határozd meg $x^2 + yz + z$ legkisebb és legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ halmazon.

8.1.115. (5) Legyen A és B két $n \times n$-es valós szimmetrikus mátrix, $\det A \neq 0$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R}^n$ feltételes lokális szélsőértékhelye az $x \to x^T B x$ függvénynek az $x^T A x = 1$ feltétel mellett, akkor x_0 sajátvektora az $A^{-1}B$ mátrixnak.

(b) Mi a jelentése az x_0 sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek?

8.1.116. (6) Adottak a térben a $p_1, \ldots, p_n$ pontok. Tekintsük azt az origón átmenő síkot, amire a pontok és a sík távolságainak négyzetösszege minimális. Legyen a sík normálvektora v.

(a) Igazoljuk, hogy v sajátvektora a $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i p_i^T$ mátrixnak.

(b) Mi a geometriai jelentése a v-hez tartozó sajátértéknek?

8.1.117. (4) Határozd meg $x^2 y^3 \log(x^2 + y^2)$ értékkészletét az $x^2 + y^2 \leq 1$ halmazon.

8.1.118. (4) Mik azok az (x, y) pontok, amelyeknek van olyan környezete, amelyben a $\sin x + \sin(x + y)$ függvény konvex?

8.1.119. (5) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ha minden pontban

$$\langle f'(x, y, z), (x, y, z)\rangle \geq 0,$$

akkor

$$D_{11}f(0, 0, 0) + D_{22}f(0, 0, 0) + D_{33}f(0, 0, 0) \geq 0.$$

8.1.120. (4) Határozd meg az $xy = 4$ hiperbola és az $(5, 5)$ pont távolságát a Lagrange-multiplikátor módszerrel.

8.1.121. (7) A differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényre

$$y^2 \cdot D_1f(x, y) + x^3 \cdot D_2f(x, y) = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) = f(0, 0)$.

8.1.122. (3) Hol van az $x^3 - 3x + xy - xz + y^2 + z^2$ függvénynek lokális minimuma, illetve maximuma?

8.1.123. (4) Legyen $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ esetén $u(x)$ az

$$(2 + x)u^5 + (1 + y)u - (3 + z) = 0$$

polinom valós gyöke. Igazoljuk, hogy u kétszer differenciálható a 0-ban. $u''(0) =$?

8.1.124. (4) Differenciálható-e az

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}{x^2+y^2+z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1 & x = y = z = 0 \end{cases}$$

függvény az origóban?

8.2. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények

8.2.1. Határérték és folytonosság

8.2.1. (5) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A, B \subset \mathbb{R}^p$, $x \in A \cap B$. Az f folytonos x-ben A-ra megszorítva, B-re megszorítva. Bizonyítsuk be, hogy folytonos $A \cup B$-re megszorítva is. Igaz-e az analóg kérdés végtelen unióra is?

8.2.2. (3) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A, B \subset \mathbb{R}^p$. Az f folytonos A-ra megszorítva, B-re megszorítva. Igaz-e, hogy folytonos $A \cup B$-re megszorítva is?

8.2.3. (3) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $A, B \subset \mathbb{R}^p$ zártak. Az f folytonos A-ra megszorítva, B-re megszorítva. Igaz-e, hogy folytonos $A \cup B$-re megszorítva is?

8.2.4. (10) Két hegymászó az $y = f(x)$ grafikonú hegyet akarja megmászni, ahol $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény és $f(0) = f(1) = 0$. Az egyik hegymászó a $(0, 0)$, a másik az $(1, 0)$ pontból indul. A két hegymászó úgy szeretne találkozni, hogy minden pillanatban azonos magasságban vannak. Sikerülhet-e ez nekik?

(Avagy: léteznek-e olyan $g, h : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvények, amelyekre $g(0) = 0$, $h(0) = 1$, $g(1) = h(1)$ és minden $x \in [0, 1]$-re $f(g(x)) = f(h(x))$?)

8.2.2. Differenciálhatóság

8.2.5. (3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (e^x, x^2 + y^2, \sin x)$; $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(X, Y, Z) \mapsto XY$. $(g \circ f)' =?$

8.2.6. (1) Írjuk fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x, y) = \big(x + y, xy, \cos(x + y)\big); \quad g(x, y) = \big(e^{x+y}, xy\big); \quad h = f \circ g.$$

8.2.7. (2) Igazoljuk, hogy a vektorok vektoriális szorzása, mint $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ függvény, differenciálható. Mi a deriváltja?

8.2.8. (4) Mi az $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ leképezés (azaz a komplex négyzetre emelés) lokális inverzének Jacobi-mátrixa?

8.2.9. (5) Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertálható lineáris. Igazoljuk, hogy

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\min\{Ax | x \in S_0^{n-1}(1)\}}.$$

8.2.10. (5) Mutassunk olyan $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, melyre

$$\sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2} > ||A||.$$

Mutassuk meg, hogy itt mindig $\geq$ áll.

8.2.11. (8) Igazoljuk, hogy

$$\max_{1\le j\le p}\sqrt{\sum_{i=1}^{q}a_{ij}^2}\le\left\|\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{q1} & \dots & a_{qp}\end{pmatrix}\right\|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}^2}.$$

Mutassunk példát olyan mátrixra, amikor nem áll egyenlőség.

8.2.12. (2) Írjuk fel a következő leképezések Jacobi-mátrixát.

$$f(x,y)=\big(\sin x,\cos y\big);\quad g(x,y)=\big(\log x, x^2+y^2\big);\quad h=f\circ g.$$

8.2.13. (1) Igazoljuk, hogy a kvaterniószorzás, mint $\mathbb{R}^8\to\mathbb{R}^4$ függvény differenciálható.

8.2.14. (4) Legyen az $\mathbb{R}^q$-ba képező f függvény differenciálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}^p$ szakasz pontjaiban. Igazoljuk, hogy

$$|f(b)-f(a)|\le|b-a|\cdot\sup_{c\in[a,b]}||f'(c)||.$$

8.2.15. (7) Igazoljuk, hogy minden $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p)$-re $||A||\ge|\det A|^{1/p}$.

8.2.16. (5)

(a) Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ lineáris leképezés Lipschitz.

(b) Igazoljuk, ha $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p)$ invertálható, akkor $\exists c>0\,\forall x\in\mathbb{R}^p\;|A(x)|$
$\ge c|x|$.

8.2.17. (10) Legyen $H\subset\mathbb{R}^{p+1}$, $a\in\mathbb{R}^p$, $b\in\mathbb{R}$, $(a,b)\in\operatorname{int}H$ és $f: H\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható az (a,b) pontban, továbbá tegyük fel, hogy $D_{p+1}f(a,b)\ne 0$. Igazoljuk, hogy az $f(x,\varphi(x))=0$ ($\varphi(a)=b$) egyenlettel megadott φ implicit függvény kétszer differenciálható az a pontban, és írjuk fel a második deriváltját.

8.2.18. (10) Legyen $H\subset\mathbb{R}^p$ nyílt, $f:H\to\mathbb{R}^p$ kétszer folytonosan differenciálható, $a\in H$, és tegyük fel, hogy $f'(a)$ invertálható. Tudjuk, hogy f-nek létezik inverze az a pont egy környenyezetében; legyen ez g. Igazoljuk, hogy g kétszer differenciálható $f(a)$ egy környezetében. Írjuk fel $g''\big(f(a)\big)$-t $f'(a)$ és $f''(a)$ segítségével.

8.2.19. (10) Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : H \to \mathbb{R}^p$ n-szer folytonosan differenciálható, $a \in H$, és tegyük fel, hogy $f'(a)$ invertálható. Tudjuk, hogy f-nek létezik inverze az a pont egy környenyezetében; legyen ez g. Igazoljuk, hogy g is n-szer differenciálható $f(a)$ egy környezetében.

9. fejezet

Többdimenziós Jordan-mérték és Riemann-integrál

9.0.1. (2) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $0 \leq a \leq b$ valós számokhoz létezik olyan $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz, amire $b(H) = a$ és $k(H) = b$.

9.0.2. (3) Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások?

(a) Ha $k(H) = 0$, akkor $H \in \mathcal{J}$. (d) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.

(b) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\partial H \in \mathcal{J}$. (e) Ha $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.

(c) Ha $\partial H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$. (f) Ha $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$ és $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.

9.0.3. (5) Legyen $A, B \subset \mathbb{R}^p$ két diszjunkt, korlátos halmaz. Rakjuk sorba nagyság szerint a következő mennyiségeket:

$$k(A \cup B); \qquad b(A \cup B); \qquad k(A) + k(B); \qquad b(A) + b(B);$$

$$k(A) + b(B); \qquad b(A) + k(B).$$

9.0.4. (5) Legyen $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin \log x$. Korlátos változású-e a függvény? Abszolút folytonos-e?

9.0.5. (4) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

(a) Ha f monoton, akkor f korlátos változású.

(b) Ha f folytonos, akkor f korlátos változású.
(c) Ha f folytonos és korlátos változású, akkor f Lipschitz.
(d) Ha f korlátos változású, akkor az $[a, b]$ intervallum felbontható megszámlálható sok olyan intervallumra, amelyeken f monoton.
(e) Ha az $\int_a^b \mathrm{d}f$ Stieltjes-integrál létezik, akkor f abszolút folytonos.
(f) Ha f abszolút folytonos, akkor f Riemann-integrálható.

9.0.6. (5) Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz. Igazak-e a következő állítások?
(a) Ha $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(b) Ha H zárt és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{int} H \in \mathcal{J}$.
(c) Ha H nyílt és $H \in \mathcal{J}$, akkor $\operatorname{cl} H \in \mathcal{J}$.
(d) Ha $k(\operatorname{int} H) = b(\operatorname{cl} H)$, akkor $H \in \mathcal{J}$.
(e) $\partial H \in \mathcal{J}$.

9.0.7. (4) Legyenek $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ korlátos halmazok. Igaz-e, hogy
(a) $k^{(p+q)}(A \times B) = k^{(p)}(A) \cdot k^{(q)}(B)$?
(b) $b^{(p+q)}(A \times B) = b^{(p)}(A) \cdot b^{(q)}(B)$?
(c) Ha A és B mérhető, akkor $A \times B$ is mérhető és $t^{(p+q)}(A \times B) = t^{(p)}(A) \cdot t^{(q)}(B)$?

9.0.8. (6) Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ mérhető halmazok az egységkockában, és tegyük fel, hogy a mértékeik összege nagyobb, mint k. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont, amely a halmazok közül több, mint k-nak eleme.

9.0.9. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset B \subset \mathbb{R}^p$ és B Jordan-mérhető, akkor

$$t(B) = k(A) + b(B \setminus A).$$

9.0.10. (5) Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha bármely $B \subset \mathbb{R}^p$ halmazra

$$k(B) = k(B \cap A) + k(B \setminus A).$$

9.0.11. (5) Legyen $A \subset [a, b]$ Jordan-mérhető $\mathbb{R}$-ben. Kössük össze A minden pontját egy adott síkbeli ponttal. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott szakaszok uniója Jordan-mérhető a síkban. Mennyi a területe?

9.0.12. (4) Igaz-e, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ mérhető, akkor

$$\{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \in A\} \subset \mathbb{R}^2$$

is mérhető?

9.0.13. (7) Igazoljuk, hogy ha $B_1, B_2, \ldots \subset \mathbb{R}^p$ páronként diszjunkt, nyílt gömbök, akkor

$$b\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b(B_i).$$

9.0.14. (7) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $0 \le c \le d < \infty$-hez létezik olyan korlátos, zárt halmaz, aminek belső mértéke c, külső mértéke d.

Ötlet→

9.0.15. (6) Igazoljuk, hogy ha $m : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ nemnegatív, additív, eltolás-invariáns és normált, akkor $m = t$.

9.0.16. (7) Legyen $\mathcal{R} \subset P(\mathbb{R}^p)$ halmazgyűrű és $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$. Nevezzünk egy $A \in \mathcal{R}$ halmazt μ-mérhetőnek, ha bármely $B \in \mathcal{R}$ esetén $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$. Bizonyítsuk be, hogy a μ-mérhető halmazok $\mathcal{R}$-nek egy részgyűrűjét alkotják, és ezen a részgyűrűn μ additív, azaz tetszőleges A, B diszjunkt, μ-mérhető halmazokra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

9.0.17. (5) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ és $\operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl} B$ nullmértékű, akkor $k(A \cup B) = k(A) + k(B)$.

9.0.18. (6) Bizonyítsuk be, hogy egy $A \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz akkor és csak akkor mérhető, ha bármely $B \subset \mathbb{R}^p$ halmazra

$$b(B) = b(B \cap A) + b(B \setminus A).$$

9.0.19. (5) Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető. Igaz-e, hogy az $\bigcup_{a \in A} [0, a]$ halmaz (az origót az A-beli pontokkal összekötő szakaszok uniója) mérhető?

Eredmény→ Megoldás→

9.0.20. (6) Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén osszuk fel az n-dimenziós egységkockát egy nyílt és egy zárt részre úgy, hogy a két rész belső Jordan-mértéke ε-nál kisebb legyen.

9.0.21. (10) Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz esetén legyen $B(H)$ az (egyik) legnagyobb nyílt gömb, ami H-nak részhalmaza; ha H belseje üres, akkor legyen $B(H) = \emptyset$. Egy $A_0 \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető halmazból kiindulva képezzük az $A_1, A_2, \ldots$ halmazsorozatot az $A_{n+1} = A_n \setminus B(A_n)$ rekurzióval. Igazoljuk, hogy $\lim b(A_n) = 0$.

9.0.22. (9) Létezik-e differenciálható Peano-görbe? (Azaz, olyan $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ differenciálható leképezés, amelynek értékkészlete $[0,1]^2$.)

9.0.23. (8) Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű folytonos görbe. Igaz-e, hogy a képe nullmértékű?

9.0.24. (3) Mekkora egy m tömegű, r sugarú, $2h$ magasságú, homogén tömegeloszlású henger tehetetlenségi nyomatéka egy, a középpontján átmenő, a geometriai tengelyére merőleges forgástengely körül?

9.0.25. (2) Cseréljük fel az integrálások sorrendjét!

$$\int_0^1 \int_x^{2x} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x; \qquad \int_{-1}^1 \int_{|x|}^{x^2+x+1} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

9.0.26. (3)

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 e^x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = ?$$

9.0.27. (4) Egy háromszög három csúcsa $A = (a,0)$, $B = (b,0)$, $C = (0,m)$. Legyen tetszőleges $(x,y) \in [0,1]^2$-re

$$f(x,y) = (1-x)(1-y) \cdot A + x(1-y) \cdot B + y \cdot C.$$

Számítsuk ki a háromszög területét mértéktranszformációval.

9.0.28. (3) Számítsuk ki a polárkoordinátákkal megadott $\beta - 90^\circ \le \varphi \le 90^\circ - \gamma$, $0 \le r \le \dfrac{m}{\cos\varphi}$ halmaz területét.

9.0.29. (3)

$$\int_{\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2} \sin(x^2+y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = ?$$

9.0.30. (7) Igazoljuk, hogy ha A mérhető és pozitív mértékű, és f integrálható A-n, akkor f legalább egy pontban folytonos.

9.0.31. (5) Legyen f korlátos és nemnegatív a mérhető A halmazon. Bizonyítsuk be, hogy ha $\int_A f = 0$, akkor $k(\{x \in A : f(x) \ge a\}) = 0$ minden $a > 0$-ra. Igaz-e a fordított állítás?

9.0.32. (10) Egy számítógépes kísérlethez független, normális eloszlású (ál)véletlen számokra van szükségünk. A rendelkezésünkre álló véletlenszám-generátor egyenletes eloszlású, független véletlenszámokat biztosít. Hogyan készíthetünk két független, $(0,1)$-beli egyenletes eloszlású véletlen számból két független, normális eloszlású véletlen számot? (A normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varrho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.)

9.0.33. (8) Minden folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre legyen $I_0 f = f$, és $a \geq 0$ esetén legyen $I_a f$ az a függvény, amire

$$(I_a f)(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-y)^{a-1}}{\Gamma(a)} \, \mathrm{d}x.$$

Igazoljuk, hogy (a) $(I_1 f)(x) = \int_0^x f$; (b) $I_{a+b} = I_a I_b$.

9.0.34. (5) Bizonyítsuk be Steiner tételét: ha egy merev test tömege m és tehetetlenségi nyomatéka egy, a súlypontján átmenő tengely körül Θ_0, akkor egy vele párhuzamos, r távolságra levő tengely körül a tehetetlenségi nyomaték $\Theta_0 + mr^2$.

9.0.35. (4)

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} \, dx \right) dy = ? \qquad \int_0^1 \left(\int_{y^{2/3}}^1 y \cos x^2 \, dx \right) dy = ?$$

9.0.36. (3) Számítsuk ki az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \ |z| \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}\}$ halmaz Jordan-térfogatát.

9.0.37. (7) Igaz-e, hogy ha egy $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény minden vízszintes és függőleges szakaszon monoton, akkor integrálható?

9.0.38. (7) Bizonyítsuk be, hogy ha $f > 0$ a pozitív Jordan-mértékű $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, akkor $\underline{\int}_A f \, dx > 0$.

9.0.39. (10) Legyen $a \in \mathbb{R}$. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cos(ax) \, \mathrm{d}x = ?$

9.0.40. (6) Bizonyítsuk be, hogy egy $K \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha minden korlátos nyílt halmazt „jól vág ketté”, azaz bármely $X \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmazra $b(X \cap K) + b(X \setminus K) = b(X)$.

9.0.41. (6) Bizonyítsuk be, hogy egy $K \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha minden korlátos zárt halmazt „jól vág ketté”, azaz bármely $X \subset \mathbb{R}^n$ korlátos zárt halmazra $k(X \cap K) + k(X \setminus K) = k(X)$.

9.0.42. (4) Mutassunk példát olyan $\varphi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ függvényre, amire tetsző-leges $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^2 f\varphi.$$

9.0.43. (4)

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_x^{\pi/2} \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = ?$$

9.0.44. (3) Mekkora egy homogén sűrűségeloszlású, tömör kúp tehetetlenségi nyomatéka a tengelye körül, ha a tömege m, az alapkörének sugara r, a magassága pedig h?

9.0.45. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ korlátos, zárt halmazok és $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ nullmértékű, akkor $k(F_n) \to 0$.

9.0.46. (3) Mekkora egy tömör kúp tehetlenségi nyomatéka a tengelye körül, ha a tömege m, az alapkör sugara r, a magassága pedig h?

9.0.47. (9) Legyen $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x$ és $B(s, u) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{u-1}\, \mathrm{d}x$ az Euler-féle Gamma-, illetve Béta-függvény. Igazoljuk, hogy

$$B(s, u) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(u)}{\Gamma(s+u)}.$$

9.0.48. (7) A Γ-függvény segítségével írjuk fel a gömb térfogatképletét olyan alakban, hogy ugyanaz a képlet legyen érvényes páros és páratlan dimenzió-ban is. Mennyi legyen a féldimenziós gömb térfogata?

9.0.49. (4) Igazoljuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ függvény akárhányszor differenciál-ható a $(0, \infty)$ intervallumban.

9.0.50. (4)

$$\int_0^1 \sqrt{x}\left(\int_{x^{3/4}}^1 e^{y^3}\, \mathrm{d}y\right)\, \mathrm{d}x = ?$$

9.0.51. (7) Igazoljuk, hogy $s > 0$ esetén $\Gamma(s) \cdot \Gamma''(s) > \left|\Gamma'(s)\right|^2$.

9.0.52. (7) Írjuk fel, és bizonyítsuk be a paraméteres improprius integrálokra vonatkozó Dirichlet- és Abel-kritériumokat.

9.0.53. (6) Mi lehetne a paraméteres improprius Stieltjes-integrálokra vonatkozó Weierstrass-kritérium?

9.0.54. (7) Differenciálható-e az $f(t) = \displaystyle\int_1^t \int_1^t e^{xyt}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ $(t > 1)$ függvény? Mi a deriváltja?

9.0.55. (7) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos, és $G(r) = \int_{x^2+y^2 \le r^2} f(x, y, r)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ $(r > 0)$.

(a) Igazoljuk, hogy G folytonos.

(b1) Igazoljuk, hogy ha f folytonosan differenciálható, akkor G is folytonosan differenciálható. Mi G'?

(b2) A folytonos differenciálhatóságot milyen gyengébb feltételre cserélhetjük ki?

9.0.56. (8) Bizonyítsuk be, hogy a Béta-függvény szigorúan konvex.

9.0.57. (7) Differenciálható-e az $f(t) = \displaystyle\int_1^t e^{x^2 t}\, \mathrm{d}x$ függvény? Mi a deriváltja?

9.0.58. (7) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos, és $G(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x^2} f(x, y)\, \mathrm{d}y$.

(a) Igazoljuk, hogy G folytonos.

(b1) Igazoljuk, hogy ha f folytonosan differenciálható, akkor G is folytonosan differenciálható. Mi G'?

(b2) A folytonos differenciálhatóságot milyen gyengébb feltételre cserélhetjük ki?

9.0.59. (5) Igazoljuk, hogy az Euler-féle Béta-függvény akárhányszor differenciálható, és írjuk fel a deriváltját paraméteres integrál alakban.

9.0.60. (10) Tauber tétele szerint ha $\lim_{r\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = C$ létezik és véges, továbbá $na_n \to 0$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = C$.

(a) Mi lehetne a paraméteres integrálokra vonatkozó Tauber-tétel?
(b) Bizonyítsuk be a paraméteres integrálokra vonatkozó „Tauber-tételt”.

9.0.61. (10) Legyen tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $I(x) \cdot I(y) = I\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$.
(b) Hogy viselkedik az I függvény a 0 közelében?
(c) $I(x) =?$

9.0.62. (9) Legyen B az Euler-féle Béta-függvény. Bizonyítsuk be, hogy a $\log B$ függvény konvex.

10. fejezet

Integráltételek

10.1. A vonalintegrál

10.1.1. (3) Legyen $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\log t, 2t, t^2)$.

(a) Számítsuk ki a γ görbe hosszát.

(b) Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (x,y,z)$ függvény vonalintegrálját a görbén.

10.1.2. (3) Legyen C az $\{(x,y)|\ |x|+|y| = a\}$ görbe. $\int_C xy \ \mathrm{d}s =?$

10.1.3. (3) Legyen $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $(t) \mapsto (t,t^2)$ görbe. Számoljuk ki az $\int_\gamma (-y,x) \ \mathrm{d}g$ vonalintegrált, ahol g az identitás-függvény.

10.1.4. (3) Legyen γ a 0 körüli a sugarú körvonalnak az $x \geq 0$ félsíkba eső része. $\int_\gamma x \ \mathrm{d}y =?$

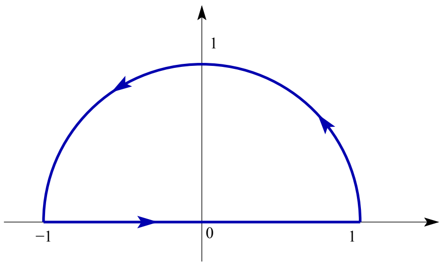
10.1.5. (3) Legyen γ a 0 körüli a sugarú körvonalnak az $y \geq 0$ félsíkba eső része. $\int_\gamma x^2 \ \mathrm{d}s =?$

10.1.6. (4)

$$a) \quad \int_0^2 \sin x \ \mathrm{d}\{x\} =? \qquad\qquad b) \quad \int_\gamma x^2 \ \mathrm{d}(y^2) =?$$

ahol γ a $(0,0),(2,0),(0,1)$ háromszög kerülete.

10.1.7. (4) Számítsuk ki az $\int xy \ \mathrm{d}y$ vonalintegrált az ábrán látható félkörvonalon.



10.1.8. (3) Számítsuk ki az $\left(\dfrac{x}{1+y}, \dfrac{y}{2+x}\right)$ függvény vonalintegrálját az $y = x^2$ parabola $(-1, 1)$ és $(1, 1)$ közötti ívén.

10.1.9. (4) Tekintsünk egy $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt egydimenziós görbének. Mikor rektifikálható ez a görbe? Mi a hossza?

Eredmény→

10.1.10. (4) Legyen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű, zárt, rektifikálható görbe. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_g x^2 \ \mathrm{d}x = \int_g e^{-\cos y^2} \ \mathrm{d}y = 0.$$

10.1.11. (4) Legyen $* : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ bilineáris operáció (valamilyen szorzás), $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ folytonos, továbbá $g : [a, b] \to \mathbb{R}^q$ folytonos görbe. Mutassuk meg, hogy

(a) ha g rektifikálható, akkor az $\int_g f(\mathbf{x}) * \mathrm{d}\mathbf{x}$ vonalintegrál létezik;

(b) ha g folytonosan differenciálható, akkor $\int_g f(\mathbf{x}) * \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^b f(g(t)) * g'(t) \ \mathrm{d}t$.

10.2. Newton-Leibniz formula

10.2.1. (3) Legyen $g(t) = (t, t^2)$ $(t \in [0, 1])$. Számítsuk ki a következő vonalintegrálokat:

$$\int_g \cos x \ \mathrm{d}y \qquad \int_g \langle (e^x \cos x, e^x \sin y), \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$$

10.2.2. (3) Legyen $g(t) = (1, t, t^2)$ $(t \in [0,1])$ és $f(x,y,z) = (yz, xz, xy)$. Számítsuk ki a következő vonalintegrálokat:

$$\int_g f_1 \ \mathrm{d}x_2 \qquad \int_g \langle f,\ \mathrm{d}\mathbf{x}\rangle \qquad \int_g f \times \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Melyik integrált számíthatjuk ki közvetlenül a valós vonalintegrálokra vonatkozó Newton-Leibniz formulából?

10.2.3. (4) Mik azok a differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amire a következő állítás teljesül? Ha g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^2$-ben, akkor

$$\int_g x^2y^3 \ \mathrm{d}y = \int_g f(x,y) \ \mathrm{d}x.$$

Megoldás→

10.2.4. (5) Mik azok a differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amire a következő állítás teljesül? Ha g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^2$-ben, akkor

$$\int_g e^x \cos y \ \mathrm{d}x = \int_g f(x,y) \ \mathrm{d}y.$$

Ötlet→

10.2.5. (5) Mutassunk példát olyan folytonos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényre, aminek minden zárt rektifikálható görbén 0 a vonalintegrálja, de nem mindenhol differenciálható.

Eredmény→

10.2.6. (7) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos, és minden tengelypárhuzamos téglalap kerületén eltűnik a vonalintegrálja, akkor f-nek van primitív függvénye.

Kapcsolódó feladat: 10.3.5

10.3. A primitív függvény létezése

10.3.1. (2) Melyik halmaz egyszeresen összefüggő?

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \qquad \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \qquad \mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^4 \setminus \{(\cos t, \sin t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

10.3.2. (3) Legyen G összefüggő nyílt halmaz $\mathbb{R}^p$-ben. Igazoljuk, hogy egy $G \to \mathbb{R}^p$ függvény primitív függvényei csak konstanssal térhetnek el egymástól.

10.3.3. (5) Melyik halmaz egyszeresen összefüggő?

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{t,0,0) : t \in \mathbb{R}\} \quad \mathbb{R}^4 \setminus \{t,0,0,0) : t \in \mathbb{R}\}$$

10.3.4. (10) Legyen $G \subset \mathbb{R}^p$ nyílt, $f : G \to \mathbb{R}^p$ differenciálható, rotációmentes, továbbá legyen $g, h : [0,1] \to G$ két folytonosan differenciálható görbe, amelyek kezdő- és végpontja is megegyezik, azaz $g(0) = h(0)$ és $g(1) = h(1)$. Tegyük fel, hogy g és h homotóp, azaz van egy olyan $\varphi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^p$ folytonos átmeneti függvény, amire $\varphi(t,0) = g(t)$, $\varphi(t,1) = h(t)$, továbbá bármely $u \in [0,1]$ esetén $\varphi(0,u) = g(0) = h(0)$ és $\varphi(1,u) = g(1) = h(1)$. (A $\varphi(t,u)$ helyett praktikus lehet azt írni, hogy $\varphi^u(t)$, tehát $\varphi^0 = g$ és $\varphi^1 = h$.)

(a) Bizonyítsuk be a Goursat-lemmából, hogy $\int_g \langle f, \mathrm{d}x\rangle = \int_h \langle f, \mathrm{d}x\rangle$.

(b) Tegyük fel azt is, hogy φ folytosan differenciálható, és legyen $I(u) = \int_{\varphi^u} \langle f, \mathrm{d}x\rangle$. Igazoljuk a Goursat-lemma nélkül, hogy $I' = 0$. (Elég $p = 2$-re.)

10.3.5. (6) Gondoljuk végig a Goursat-lemma bizonyítását háromszöglemez helyett téglalapra.

10.3.6. (7) Az $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ vektormező akárhányszor differenciálható, rotációmentes, és az origó egy pontozott könyezetében korlátos. Bizonyítsuk be, hogy van primitív függvénye.

Megoldás→

10.3.7. (5) Legyen $H = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) : \ x^2+y^2 = 1\}$. Mutassunk példát olyan differenciálható, rotációmentes $H \to \mathbb{R}^3$ függvényre, aminek nincs primitív függvénye.

10.3.8. (5) Melyik függvénynek van primitív függvénye? Ha van, írjuk is fel! Ha nincs, mutassunk példát olyan zárt görbére, amelyen a vonalintegrál nem tűnik el!

$$(x,y) \qquad (y,x) \qquad \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

10.3.9. (5) Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Keressünk olyan differenciálható $G \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ami rotációmentes (azaz a „keresztbe vett” parciális deriváltjai megegyeznek), de nincs primitív függvénye.

Ötlet→

10.3.10. (4) Melyik függvénynek van primitív függvénye? Ha van, írjuk fel! Ha nincs, mutassunk példát olyan zárt görbére, amelyen a vonalintegrál nem 0!

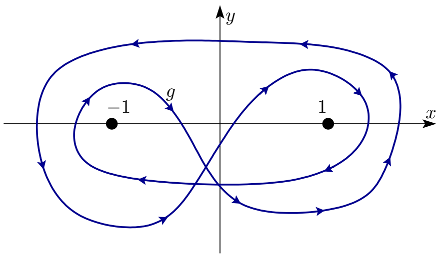
$$(\operatorname{ch} y; x \operatorname{sh} y) \qquad (\operatorname{ch} x; y \operatorname{sh} x) \qquad \left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{y}{x^2+y^2};\right)$$

10.3.11. (3) Egy ρ homogén töltéssűrűségű egyenes által létrehozott elektromos térerősség iránya az egyenesre merőleges, nagysága az egyenestől d távolságban $2k\rho/d$. Mekkora a feszültség két pont között?

10.3.12. (9) Egyszeresen összefüggő-e a $H = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ halmaz?

Eredmény→

10.3.13. (10) Legyen $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$, és g az ábrán látható görbe.



(a) Mutassuk meg, hogy g-n bármely $f : G \to \mathbb{R}^2$ differenciálható, rotációmentes vektormező vonalintegrálja eltűnik.
(b) Nullhomotóp-e g a G halmazban?
(c) Nullhomológ-e g a G halmazban?

10.3.14. (8) Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és legyen $\varphi_u(t)$ folytonosan differenciálható $[0, 1]^2 \to G$ paraméteres görbesereg (tehát minden egyes u értékre $t \mapsto \varphi_u(t)$ egy görbe), aminek $\varphi_u(0)$ kezdő-, illetve $\varphi_u(1)$ végpontja független az u paramétertől. Egy $f : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható, rotációmentes vektormezőre definiáljuk az $I(u) = \int_{\varphi_u} \langle f, \mathrm{d}x\rangle$ paraméteres vonalintegrált. Igazoljuk, hogy $I'(u) = 0$.

10.4. Integráltételek

10.4.1. (1) Ellenőrizzük a Green-tételt a $[0,1]\times[0,1]$ négyzetre és az $f(x,y) = xy$ függvényre.

10.4.2. (7) Mi lehetne a parciális integrálás a kétdimeziós Newton-Leibniz formulával?

10.4.3. (5) Mi egydimenzióban a gradiens, a divergencia, a rotáció, a Gauss-Osztogradszkij és a Stokes-tétel?

10.4.4. (2) Rögzített $a \in \mathbb{R}^3$ mellett legyen $f(x) = a \times x$ és $g(x) = x \times a$ $(x \in \mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{div} f = ? \qquad \operatorname{div} g = ? \qquad \operatorname{rot} f = ? \qquad \operatorname{rot} g = ?$$

10.4.5. (3) Állapítsuk meg, hogy a $\operatorname{div}, \operatorname{rot}, \operatorname{grad}$ operátorok lehetséges 9 párosításából ($\operatorname{div}\operatorname{div}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}$, ...) melyek alkalmazhatóak kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényre, illetve $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezésre, és közülük melyek adnak mindig nullát!

10.4.6. (5) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sima (akárhányszor differenciálható) vektormező. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} f = \operatorname{grad}\operatorname{div} f - \begin{pmatrix} \operatorname{div}\operatorname{grad} f_1 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_2 \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f_3 \end{pmatrix}.$$

10.4.7. (8) Az $F \subset \mathbb{R}^3$ konvex sokszöget a g zárt, irányított töröttvonal határolja. A síklap jobbkézszabály szerint irányított területvektora $\vec{A}$. Igazoljuk, hogy

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\int_g \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Ötlet→

10.4.8. (3) Legyen $P = \{(u,v) \in [0,1]^2 : u^2+v^2 \le 1\}$, $g(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$, $F = g(P)$ és $f(x,y,z) = (x,y,z)$. Írjuk át egyváltozós (esetleg többszörös) integrállá a következő felszíni/felületi integrálokat.

$$\int_F \mathrm{d}\vec{S}; \quad \int_F |\,\mathrm{d}S|; \quad \int_F \left\langle f,\, \mathrm{d}\vec{S} \right\rangle; \quad \int_F f \times \mathrm{d}\vec{S}.$$

10.4.9. (4) Számítsuk ki az r sugarú gömb felszínét a divergenciatételből, az $f(x,y,z) = (x,y,z)$ vektormező felületi integráljából.

10.4.10. (9) Legyen F folytonosan differenciálható paraméteres felület a térben, amit a g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe határol úgy, hogy a peremgörbe és a felület irányítása a jobbkézszabálynak megfelelő, azaz a peremgörbe ősképe a paramétertartományban pozitív irányítású.

Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_F \left\langle \operatorname{rot} f,\ \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = \int_g \langle f,\ \mathrm{d}x \rangle .$$

(Avagy, az örvénysűrűség felületi integrálja egyenlő a határon vett örvényerősséggel.)

10.4.11. (4) Legyen $B = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ és $f(x,y,z) = (yz, x-z, z-y)$.

$$\int_{\partial B} \left\langle f,\ \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = ?$$

Ötlet→

10.4.12. (4) Legyen $B = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ és $f(x,y,z) = (yz, x-z, z-y)$.

$$\int_{\partial B} f \times \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ?$$

Ötlet→

10.4.13. (7) Legyen $G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő, nyílt, $g : [0,1] \to G$ egyszerű, zárt, rektifikálható, pozitív irányítású görbe, $A \subset G$ a g belseje és $f : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_A (D_x f \times D_y f)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{f \circ g} \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

10.4.14. (5) Legyen $f_1(x,y,z) = xyz$ és $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Konstruáljunk olyan $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az (f_1, f_2, f_3) vektormező felületi integrálja tetszőleges zárt gömbfelületen megegyezik a gömb térfogatával.

Ötlet→

10.4.15. (8) (a) Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ és $\varphi_t(u,v)$ egy $[0,1]^3 \to G$ folytonosan differenciálható paraméteres felületsereg, ami az egységnégyzet minden rögzített (u,v) határpontjára független a t paramétertől. Legyen $F : G \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, divergenciamentes vektormező. Mutassuk meg, hogy az $I(t) = \int_0^1 \int_0^1 \langle D_x\varphi_t(x,y) \times D_y\varphi_t(x,y), F(\varphi_t(x,y)\rangle \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ paraméteres felületi integrál nem függ t-től.

(b) Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Konstruáljunk olyan $H \to \mathbb{R}^3$ divergenciamentes vektormezőt, aminek az egységgömbön vett felületi integrálja nem 0.

(c) Igazoljuk, hogy G nem homeomorf $\mathbb{R}^3$-nal.

11. fejezet

Mértékelmélet

11.1. Halmazalgebrák

11.1.1. (5) (a) Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált gyűrűben, akkor benne van az $\mathcal{A}$ egy alkalmas véges részrendszere által generált gyűrűben is.

(b) Igazoljuk, hogy ha egy halmaz benne van az $\mathcal{A}$ halmazrendszer által generált σ-gyűrűben, akkor benne van az $\mathcal{A}$ egy alkalmas megszámlálható részrendszere által generált σ-gyűrűben is.

11.1.2. (3) Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ σ-gyűrű. Milyen halmazokból áll az $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ által generált σ-gyűrű?

11.1.3. (7) Milyen kicsi lehet egy végtelen σ-gyűrű számossága?

Eredmény→

11.1.4. (5) Legyen $\mathcal{T}$ az $[a, b) \times [c, d)$ alakú, félig nyílt téglalapok rendszere.

(a) Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}$ félgyűrű.

(b) Mi a $\mathcal{T}$ által generált gyűrű?

(c) Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor additív, ha létezik olyan $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amire $f\big([a, b) \times [c, d)\big) = g(b, d) - g(a, d) - g(b, c) + g(a, b)$.

11.1.5. (3) (a) Milyen gyűrűt generálnak az $[a, \infty)$ alakú félegyenesek?

(b) Milyen σ-gyűrűt generálnak az $[a, \infty)$ alakú félegyenesek?

(c) Hány elem (mekkora számosságú halmaz) generálja a Borel-halmazok σ-gyűrűjét?

11.1.6. (5) Igazoljuk, hogy minden nyílt halmaz F_σ, és minden zárt halmaz G_δ.

11.1.7. (7) Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonossági pontjainak halmaza Borel, és adjunk meg minél szűkebb Borel-osztályt (pl. $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$), aminek biztosan eleme.

Megoldás→

11.1.8. (6) Bizonyítsuk be, hogy az F_σ, illetve a G_δ tulajdonságú halmazok rendszerei zártak a véges metszetre és a véges unióra.

11.1.9. (8) (a) Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű G_δ halmaz metszete sűrű G_δ.

(b) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q} \in F_\sigma(\mathbb{R}) \setminus G_\delta(\mathbb{R})$.

Ötlet→

11.1.10. (5) Igazoljuk, hogy $F_{\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n) \subset G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}(\mathbb{R}^n)$.

11.1.11. (9) Hány Borel-halmaz van $\mathbb{R}^n$-ben?

Ötlet→

11.1.12. (7) Legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos minden n-re. Bizonyítsuk be, hogy az $\{x : f_n(x)\,\text{konvergens}\}$ halmaz Borel, és adjunk meg minél szűkebb Borel-osztályt, aminek biztosan eleme.

Megoldás→

11.1.13. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, és $H \in F_{\sigma\delta}(\mathbb{R})$, akkor $f^{-1}(H) \in F_{\sigma\delta}(\mathbb{R})$.

11.2. Mértékek és külső mértékek

11.2.1. (4) Legyen X nem megszámlálható halmaz, $\mathcal{M}$ pedig az X egyelemű részhalmazai által generált σ-algebra.

a) Jellemezzük $\mathcal{M}$ elemeit!

b) Konstruáljunk olyan α valószínűségi mértéket $\mathcal{M}$-en, mely szerint az egyelemű halmazok nullmértékűek!

c) Határozzuk meg az α által generált φ_α külső mértéket!

d) Mi a φ_α által meghatározott mérték és mely halmazok mérhetőek?

11.2.2. (5) Miért nem külső mérték a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?

Megoldás→

11.2.3. (6) Legyen $\overline{\mu}$ külső mérték az X halmazon, és $A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olyan halmazok, amikre $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n)$ véges. Bizonyítsuk be, hogy az olyan X-beli pontok halmaza, amelyek végtelen sok A_n-nek elemei, μ-nullmértékű.

11.2.4. (4) (a) Igazoljuk, hogy ha μ mérték egy σ-gyűrűn, akkor a σ-véges halmazok σ-gyűrűt alkotnak.

(b) Milyen σ-algebrát generálnak a σ-véges halmazok?

11.2.5. (6) Jelöljük $A_n(x)$-szel az $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ tizedestörtben az első n jegy közötti 7-esek számát, és legyen $H = \{x \in (0,1) : \lim_{n\to\infty} \frac{A_n(x)}{\sqrt{n}} = 0\}$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy H Borel-mérhető.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\lambda(H) = 0$.

11.2.6. (8) Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan sűrű nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazt, amire $\overline{\lambda}(G) < \varepsilon$.

11.2.7. (6) Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli halmaz (a) minden Borel-halmazt; (b) minden G_δ halmazt; (c) minden F_σ halmazt; (d) minden nyílt halmazt; (e) minden zárt halmazt; (f) minden intervallumot; (g) minden egységnyi hosszúságú intervallumot jól vág ketté a külső Lebesgue-mérték szerint, akkor Lebesgue-mérhető?

11.2.8. (8) Konstruáljunk olyan $H \subset \mathbb{R}$ Borel-halmazt, amelyre tetszőleges $a < b$ esetén $\lambda((a,b) \cap H) > 0$ és $\lambda((a,b) \setminus H) > 0$.

11.2.9. (9) Igaz-e, hogy minden Lebesgue-nullmértékű valós számhalmaz előáll, mint megszámlálható sok Jordan-nullmértékű halmaz uniója?

11.2.10. (4) (a) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli nyílt halmaz nullmértékű, akkor üres.

(b) Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-beli zárt halmazra, ami nullmértékű, de nem üres.

11.2.11. (4) Tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra adjunk meg olyan nyílt $G \subset \mathbb{R}$ halmazt, amire $G \supset \mathbb{Q}$ és $\overline{\lambda}(G) < \varepsilon$.

11.2.12. (7) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}^n$-beli halmaz előáll nem üres belsejű konvex halmazok uniójaként, akkor Lebesgue-mérhető.

11.2.13. (5) (a) Igazoljuk, hogy ha egy $\mathbb{R}$-beli zárt halmaz nullmértékű, akkor sehol sem sűrű.

(b) Igaz-e, hogy ha egy halmaz sehol sem sűrű, akkor nullmértékű?

11.2.14. (5) Legyen μ eltolás-invariáns mérték $\mathbb{R}$ Borel-halmazain, amire $\mu\big([0,1]\big) < \infty$. Igazoljuk, hogy μ a Lebesgue-mérték konstansszorosa.

11.2.15. (6) Legyen H tetszőleges halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, és $M \subset \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy M mérhető burka H-nak, ha M mérhető, és tetszőleges $X \supset H$ mérhető halmazra $\lambda(M \setminus X) = 0$.

Létezik-e (a) nyílt; (b) zárt; (c) F_σ; (d) G_δ mérhető burka minden $\mathbb{R}^n$-beli halmaznak?

(e) Mérhető burok-e a mérhető burkok metszete?

(f) A mérhető burkok között létezik-e (esetleg több) minimális?

11.2.16. (5) Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyre bármely $a < b$ esetén $\overline{\lambda}((a,b) \cap H) < \dfrac{99}{100}(b-a)$, akkor H nullmértékű.

Ötlet→

11.2.17. (9) Megadható-e kontinuum sok 1/2 Lebesgue-mértékű mérhető halmaz $[0,1]$-ben úgy, hogy közülük bármely kettő metszetének mértéke 1/4 legyen?

Ötlet→ Megoldás→

11.2.18. (9) Tegyük fel, hogy $A \subset [0,1]$ Lebesgue-mérhető, és valahányszor $x, y \in [0,1]$ számok tizedesjegyei véges sok kivétellel megegyeznek, akkor x és y egyszerre eleme vagy nem eleme A-nak. Igazoljuk, hogy $\lambda(A) = 0$ vagy $\lambda(A) = 1$.

11.2.19. (5) Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$ $g(x) = \lfloor x \rfloor$ és $h(x) = \lceil x \rceil$. Határozzuk meg a $\overline{\mu}_f$, $\overline{\mu}_g$, $\overline{\mu}_h$ Lebesgue–Stieltjes külső mértékeket és a mérhető halmazok rendszerét.

11.2.20. (4) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és tetszőleges $a \leq b$ esetén $\mu\big([a,b]\big) = f(b+0) - f(a-0)$. Milyen mértéket generál ez a függvény?

11.2.21. (4) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és tetszőleges $a < b$ esetén $\mu\big((a,b)\big) = f(b-0) - f(a+0)$. Milyen mértéket generál ez a függvény?

11.2.22. (5) Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $H \subset I$-re $\overline{\mu}_f(H) = \overline{\lambda}\big(f(H)\big)$. Mutassuk meg, hogy H akkor és csak akkor μ_f-mérhető, ha $f(H)$ Lebesgue-mérhető.

11.2.23. (5) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény, és μ_f az f által generált Lebesgue–Stieltjes-mérték. Igazoljuk, hogy tetszőleges Borel-mérhető H halmazhoz léteznek olyan F_σ $B \subset H$ és G_δ $K \supset H$ halmazok, amikre $\mu_f(B) = \mu_f(K) = \mu_f(H)$.

11.2.24. (5) Keressünk példákat totálisan σ-véges és nem totálisan σ-véges mértékterekre.

11.2.25. (8) (a) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(A) > 0$, akkor $A - A$ tartalmaz 0 körüli gömböt. (Steinhaus tétele)

(b) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A + B$ belseje nemüres.

(c) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ pozitív mértékű mérhető és $B \subset \mathbb{R}^p$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $A + B$ belseje nemüres.

Ötlet→ Megoldás→

11.3. Mérhető függvények. Integrál

11.3.1. (2) Bizonyítsuk be, hogy minden monoton $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető.

11.3.2. (2) Bizonyítsuk be, hogy Borel-mérhető függvények kompozíciója Borel-mérhető.

11.3.3. (5) Bizonyítsuk be, hogy minden Riemann-integrálható $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Lebesgue-mérhető.

11.3.4. (4) Igazoljuk, hogy minden $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényhez létezik olyan $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény, amire $f = g$ m.m.

11.3.5. (7) Bizonyítsuk be Luzin tételét: ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mérhető, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan ε-nál kisebb mértékű D halmaz, hogy f folytonos $[a,b] \setminus D$-n.

11.3.6. (9) Konstruáljunk olyan $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, ami semmilyen teljes mértékű halmazra megszorítva sem folytonos.

11.3.7. (2) Bizonyítsuk be, hogy minden folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lebesgue-mérhető.

11.3.8. (2) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető, és $g : M \to \mathbb{R}$ mérhető valamely (M, μ) mértéktéren. Bizonyítsuk be, hogy az $f \circ g$ függvény μ-mérhető.

11.3.9. (2) Igaz-e, hogy minden Riemann-integrálható $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető?

11.3.10. (2) Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmaz, és $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.
Igazoljuk, hogy $\int_{\mathbb{R}} \chi_A \, \mathrm{d}\lambda = \lambda(A)$.

11.3.11. (5) Igazoljuk, hogy ha $f > 0$ a μ-mérhető, pozitív mértékű A-n, akkor $\int_A f \, \mathrm{d}\mu > 0$.

11.3.12. (7) Átírhatjuk-e az integrál definícióját felső összegekre?

11.3.13. (2) Give a bounded Lebesgue-integrable function $[a, b] \to \mathbb{R}$ that is not Riemann-integrable.

11.3.14. (2) Adott mérhető $f : X \to \mathbb{R}$ függvényre melyikből következik a másik?
(i) f integrálható X-en,
(ii) $|f|$ integrálható X-en.

11.3.15. (7) Igaz-e, hogy bármely korlátos, Lebesgue-integrálható $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvényhez létezik olyan $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, amire $f = g$ m.m.?

11.3.16. (5) Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mérhető függvény, amelynek minden intervallumon $+\infty$ az integrálja?

11.3.17. (6) Legyen $A \subset \mathbb{R}$ (a) korlátos intervallum; (b) véges sok korlátos intervallum uniója; (c) véges mértékű Lebesgue-mérhető halmaz. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \sin(nx) d\lambda = 0.$$

11.4. Függvénysorozatok és -sorok integrálása

11.4.1. (8) Igaz-e, hogy Lebesgue-mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények tetszőleges sorozatából kiválasztható olyan részsorozat, aminek m.m. pontban van határértéke?

11.4.2. (4) Hogyan alkalmazhatjuk a monoton konvergencia tételt a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

határérték meghatározására?

11.4.3. (4) Igaz-e, hogy ha $f_1 \geq f_2 \geq \dots$ nemnegatív, Lebesgue-mérhető függvények, akkor

$$\lim \int f_n\,\mathrm{d}\lambda = \int (\lim f_n)\,\mathrm{d}\lambda?$$

11.4.4. (4) Legyen $A = \{1, 2\}$, és $\mu : A \to \mathbb{R}$ a számosságmérték. Mit mond ebben az esetben a Fatou-lemma?

11.4.5. (7) Kicserélhetjük-e a Fatou-lemmában a liminf-et limsup-ra?

11.4.6. (5) Mutassunk példát olyan, pontonként konvergens $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatra, amire $\lim \int_0^1 f_n$ létezik, de $\lim \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$.

11.4.7. (4) Vezessük le a Fatou-lemmából a monoton konvergencia tételt.

11.4.8. (3) Fogalmazzuk át a nagy Lebesgue-tételt számsorok sorozataira.

11.4.9. (5) Igaz-e, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n és $\int_A f_n d\mu < 1/n$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.?

11.4.10. (4) Legyen $(A, \mathcal{M}, \mu)$ valószínűségi mértéktér, és nevezzük valószínűségi változónak a μ-mérhető $\xi : A \to \mathbb{R}$ függvényeket.
(a) $E(\xi) =?$
(b) $D^2(\xi) =?$
(c) Legyen F a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető. $E\big(f(\xi)\big) =?$

11.4.11. (3) Fogalmazzuk át Beppo Levi tételét számsorok összegére.

11.4.12. (3) Egy ξ valószínűségi változó eloszlása a $\mu_\xi(H) = P(\xi \in H)$ valószínűségi Borel-mérték. Milyen integrál írja le a várható értéket és a szórásnégyzetet?

11.4.13. (5) Igazoljuk a Borel–Cantelli-lemma segítségével, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n és $\int_A f_n d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.

Ötlet→

11.4.14. (4) Igazoljuk a Beppo Levi tétel segítségével, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n, és $\int_A f_n d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.

Ötlet→

11.4.15. (8) Bizonyítsuk be Lebesgue-integrál nélkül, hogy ha $f_n : [0,1] \to [0,1]$ folytonos, és $f_n(x) \to 0$ minden $x \in [0,1]$-re, akkor $\int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x \to 0$!

11.5. Fubini-tétel

11.5.1. (6) Tegyük fel, hogy igaz a kontinuumhipotézis, és $\prec$ a $[0,1]$ intervallum egy ω_1 típusú jólrendezése. Legyen

$$A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \prec y\}.$$

(a) Igazoljuk, hogy A-nak minden vízszintes szekciója nullmértékű.
(b) Igazoljuk, hogy A-nak minden függőleges szekciója teljes mértékű.
(c) Igazoljuk, hogy A nem mérhető a kétdimenziós Lebesgue-mérték szerint.

11.5.2. (7) Ismert, hogy a kontinuum kofinalitása nem lehet ω. Legyen $\prec$ a $[0,1]$ intervallum egy kontinuum típusú jólrendezése. Legyen minden $H \subset [0,1]$-re $\mu(H) = 0$, ha $|H| < 2^{\aleph_0}$ (azaz H kicsi), és $\mu(H) = 1$, ha $\big|[0,1] \setminus H\big| < 2^{\aleph_0}$ (azaz H nagyon nagy).
(a) Igazoljuk, hogy μ mérték.
(b) Igazoljuk, hogy az $A = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \prec y\}$ halmaz nem mérhető a μ^2 kétdimenziós mérték szerint.

11.6. Differenciálás

11.6.1. (4) Egészítsük ki úgy, hogy igaz legyen: ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex, és . . . ., akkor f abszolút folytonos.

Ötlet→

11.6.2. (5) Nevezzünk egy μ véges Borel-mértéket folytonosnak, ha az $x \mapsto \mu((-\infty, x))$ függvény folytonos. Mutassunk példát olyan mértékre, ami folytonos, de nem abszolút folytonos.

Ötlet→

11.6.3. (2) Mi a Lebesgue-mérték Radon–Nikodym-deriváltja?

Eredmény→

11.6.4. (3) (a) Mi a kapcsolat az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény között?

(b) Igazoljuk, hogy egy valószínűségi változónak akkor és csak akkor van sűrűségfüggvénye, ha az eloszlásfüggvénye abszolút folytonos.

(A ξ valószínűségi változónak az f sűrűségfüggvénye, ha tetszőleges H Borel-halmazra $P(\xi \in H) = \int_H f d\lambda$.)

11.6.5. (3) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, és $\forall x, y$ $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

(a) Igazoljuk, hogy f valamilyen mérhető g függvény (Lebesgue-) integrálfüggvénye.

(b) Mutassuk meg, hogy $|g| \leq K$ m.m.

Ötlet→

11.6.6. (5) Igaz-e, hogy ha f abszolút folytonos, és szigorúan monoton növő $[a, b]$-n, akkor az inverze is abszolút folytonos?

Ötlet→

11.6.7. (5) Milyen Radon–Nikodym-derivált a feltételes várható érték?

11.6.8. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha f és g abszolút folytonosak $[a, b]$-n, akkor $f \cdot g$ is abszolút folytonos $[a, b]$-n.

11.6.9. (7) Konstruáljunk olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvényt, amely nem abszolút folytonos, de előáll két abszolút folytonos függvény kompozíciójaként.

Eredmény→

11.6.10. (8) Igaz-e, hogy minden differenciálható, abszolút folytonos függvény előáll két differenciálható monoton függvény különbségeként?

11.6.11. (5) Legyen $f : C \to [0,1]$ a Cantor-függvény. Tetszőleges $H \subset [0,1]$ Borel-halmazra legyen $\mu_1(H) = \lambda(f(H \cap C))$, $\mu_2(H) = \lambda(f^{-1}(H))$ és $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$. A μ_1, μ_2, μ_3 és λ mértékek közül melyik melyikkel szinguláris, illetve melyik melyikre nézve abszolút folytonos? Mi a μ_i függvényeknek a Lebesgue-mértékre vonatkozó Lebesgue-felbontása? Mi a Lebesgue-mérték μ_i-re vonatkozó Lebesgue-felbontása?

11.6.12. (7) Konstruáljunk szigorúan növekvő, szinguláris függvényt $[0,1]$-en.

Ötlet→

11.6.13. (9) Az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ tetszőleges $x, y \in [0,1]$ esetén. Igazoljuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra f grafikonja lefedhető megszámlálható sok (nem feltétlenül tengelypárhuzamos) téglalappal úgy, hogy a téglalapok rövidebbik oldalainak összege kisebb, mint ε.

(Vojtech Jarnik verseny, 2010)

Ötlet→

11.6.14. (6) Igazoljuk, hogy ha a sűrűségi pont definíciójában a gömböt kockára cseréljük, akkor ekvivalens definíciót kapunk.

Ötlet→

11.6.15. (5) Egészítsük ki úgy, hogy igaz legyen: ha egy .... függvény bal felső deriváltja m.m. nemnegatív, akkor monoton nő.

Eredmény→

12. fejezet

Komplex differenciálhatóság

12.0.1. Komplex számok

12.0.1. (3)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=?$$

Ötlet→

12.0.2. (3) Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Milyen geometriai jelentése van az $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((c-a)\cdot\overline{(b-a)}\right)$ számnak?

Eredmény→

12.0.3. (4) Tegyük fel, hogy a $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezés távolságtartó. Mutassuk meg, hogy $w(z) = Az + B$ vagy $w(z) = A\bar{z} + B$, ahol $|A| = 1$.

12.0.4. (2) Mi az m-edik egységgyökök szorzata, összege, négyzetösszege?

Ötlet→

12.0.5. (5) Mi a primitív m-edik egységgyökök szorzata, összege, négyzetösszege?

12.0.6. (3) Az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szög egységnyi sugarú körülírt körén adott egy P pont. Mutassuk meg, hogy

$$PA_1 \cdot PA_2 \cdot \ldots \cdot PA_n \leq 2.$$

12.0.7. (5) Legyen $p(z)$ nem konstans, komplex együtthatós polinom. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

(a) Ha p minden gyökének negatív a valós része és $\operatorname{Re} z \geq 0$, akkor $\operatorname{Re} \dfrac{p'(z)}{p(z)} > 0$.

(b) Ha $p(z)$ gyökei a $\operatorname{Re} z < 0$ félsíkba esnek, akkor $p'(z)$ gyökei is.

(c) (Gauss tétele) Ha $p(z)$ nem konstans komplex polinom, akkor p gyökeinek konvex burka tartalmazza p' gyökeit.

(d) A $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pontok konvex burkában az összes $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)^{k_j} = P(z)$ alakú polinomok $P'(z)$ deriváltjainak gyökei sűrű halmazt alkotnak.

12.0.8. (7) Legyen $f(z)$ nem konstans polinom. Igazoljuk, hogy

(a) a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvényeknek sehol sincs lokális szélsőértékhelye;

(b) az $|f|$ függvénynek csak olyan helyen lehet szélsőértéke, ahol $f = 0$.

(c) Hogyan következik az utóbbi állításból az algebra alaptétele?

12.0.9. (7) Legyen $n \geq 2$ és $u_1 = 1, u_2, \ldots, u_n$ legfeljebb 1 abszolút értékű komplex számok, továbbá legyen

$$f(z) = (z - u_1)(z - u_2)\ldots(z - u_n).$$

Igazoljuk, hogy az $f'(z)$ polinomnak van olyan komplex gyöke, aminek a valós része nemnegatív.

KöMaL A. 430.

Megoldás→

12.0.10. (3) Hova képezi a $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ (Zsukovszkij-leképezés)

(a) az egységkörvonalat?

(b) az egységkörvonal belsejét?

(c) a külsejét?

(d) a 0 középpontú köröket?

(e) a 0-n átmenő egyeneseket?

Eredmény→

Kapcsolódó feladat: 12.1.2

12.0.11. (3) Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre

(a) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 1$; (b) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = 2$;

(c) $\arg(z+1) = \arg(2z-1)$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$.

12.0.12. (3) Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre
(a) $\operatorname{Re}(z^2) = 4$; (b) $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$; (c) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$;
(d) $|\arg(z)| < \dfrac{\pi}{4}$.

12.0.13. (3) Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre
(a) $\dfrac{|z|}{\operatorname{Re} z} < K$; (b) $|z-1| + |z+1| < 4$; (c) $\operatorname{Re}\dfrac{1+z}{1-z} > 0$.

12.0.14. (7) Hova képezi a $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe-féle függvény a (0 középpontú) nyílt egységkörlemezt?

12.0.15. (8) Legyen f komplex együtthatós polinom és T egy olyan téglalap, amelynek kerületén f-nek nincs gyöke. Mutassuk meg, hogy f-nek pontosan annyi gyöke van T belsejében, mint ahányszor az iránya körbefordul T kerületén.

12.0.16. (5) Valamely $m > 1$ egész számra tekintsük az összes $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$ függvények (m szerint periodikus komplex számsorozatok) halmazát. Definiáljuk az $a(n)$ és $b(n)$ sorozatok összegét és *konvolúcióját* a következőképpen:

$$(a+b)(n) = a(n) + b(n); \qquad (a * b)(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a(k)b(n-k).$$

Igazoljuk, hogy a sorozatok ezzel a két művelettel egységelemes gyűrűt alkotnak.

12.0.17. (6) Legyen $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$ az első m-edik komplex egységgyök. Definiáljuk egy m szerint periodikus $a(n)$ sorozat *véges Fourier-transzformáltját* így:

$$\hat{a}(n) = \sum_{k=0}^{m-1} a(k)\varepsilon^{nk}.$$

Igazoljuk, hogy $\widehat{(a * b)}(n) = \hat{a}(n) \cdot \hat{b}(n)$.

12.0.18. (8) Írjuk fel a véges Fourier-transzformált inverzét!

12.0.19. (10) Az $1, 2, \ldots, n$ számoknak vegyük az összes k-elemű részhalmazát. Minden ilyen részhalmazban számoljuk ki az elemek összegét modulo m. Bizonyítsuk be, hogy ha az m minden 1-nél nagyobb d osztójára $k \mod d > n \mod d$, akkor ezek a maradékok egyenletesen oszlanak el.

12.0.20. (9) Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, amelyre $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 1$. (Más szóval, $\dfrac{f(z)}{z} \to 1$ ha $|z| \to \infty$.) Igazoljuk, hogy f értékkészlete a teljes $\mathbb{C}$.

12.0.21. (6) Legyen $a_1, a_2, \dots$ pozitív valós számokból álló, monoton csökkenő, 0-hoz tartó sorozat, $b_1, b_2, \dots$ pedig olyan komplex számokból álló sorozat, amelynek összegsorozata, $b_1+\ldots+b_n$ korlátos. Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergens.

12.0.22. (9) A komplex számsíkra merőlegesen, a sík által határolt egyik féltérben felvettük az a, b, illetve c, d átmérőjű félköröket. Bizonyítsuk be, hogy a két félkör akkor és csak akkor metszi egymást merőlegesen, ha $(a, b, c, d) = -1$.

(Riesz-verseny, 1988)

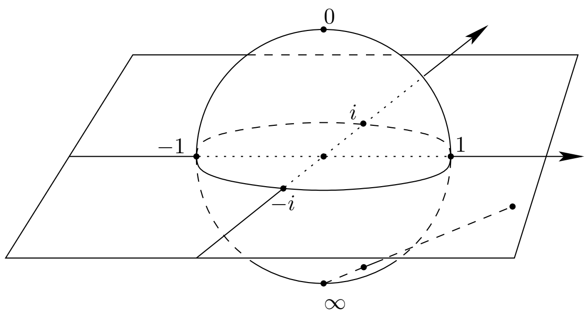
12.0.2. A Riemann-gömb

12.0.23. (9) Feleltessük meg az egységnyi sugarú gömb pontjait a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ halmaznak sztereografikus projekcióval (inverzióval) az ábra szerint.

(a) A gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$z \mapsto -z; \qquad z \mapsto \overline{z}; \qquad z \mapsto iz; \qquad z \mapsto \frac{1}{z}; \qquad z \mapsto \frac{-1}{\overline{z}}; \qquad z \mapsto \frac{z-i}{1-iz}$$

(b) Mely függvények a gömb forgatásai?



Eredmény→

12.1. Reguláris függvények

12.1.1. Komplex differenciálhatóság

12.1.1. (3) A komplex sík mely pontjaiban differenciáható a $z \mapsto \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z + i|z|^2$ függvény?

Megoldás→

12.1.2. (6) Igazoljuk a komplex differenciálhatóság és a Zsukovszkij-függvény segítségével, hogy a $-1, 1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

Kapcsolódó feladat: 12.0.10

12.1.3. (3) Mik azok a komplex számok, ahol az $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re}^2 z \cdot i + \overline{z}$ függvény differenciálható?

12.1.4. (3) Mik azok a komplex számok, ahol az $\operatorname{Im}^2 z + \operatorname{Re} z + \overline{z}$ függvény differenciálható?

12.1.5. (3) Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 - (2+i)\overline{z}$ függvény?

Megoldás→

12.1.6. (3) Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy–Riemann-egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2 + y^2, 2xy); \qquad (x^2 - y^2, 2xy); \qquad (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

12.1.7. (3) Ellenőrizzük, hogy az $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ függvény 0-ban ugyan nem differenciálható, de a Cauchy–Riemann-egyenleteket kielégíti.

12.1.8. (5) Legyen f reguláris a D tartományon, értékkészlete D'. Tegyük fel, hogy f egyrétű (injektív), továbbá D' területét jelölje $t(D')$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy

$$t(D') = \int\limits_D |f'(z)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

(b) Hasonlítsuk össze ezt a képletet az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényekre vonatkozó hasonló eredménnyel!

12.1.2. Cauchy–Riemann parciális egyenletek

12.1.9. (4) Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény differenciálható z_0-ban, akkor $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ is differenciálható $\overline{z_0}$-ban.

12.1.10. (4) Igazoljuk, hogy ha f egészfüggvény, akkor $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ is egészfüggvény.

12.1.11. (5) Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartomány, és $u, v : D \to \mathbb{R}^2$ olyan, kétszer differenciálható függvények, amikre az $x + yi \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ leképezés reguláris D-n. Igazoljuk, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

12.2. Hatványsorok

12.2.1. A hatványsor konvergenciatartománya

12.2.1. (3) Számítsuk ki a $\sum_{0}^{\infty} \frac{(n^2-n)!}{3^{n^2}} z^n$ hatványsor konvergenciasugarát!

12.2.2. (4) Az f függvény hatványsorba fejthető z_0 körül, egy r-nél nagyobb sugarú körben. Igazoljuk, hogy a z_0 körüli, r sugarú körön $f(z)$ átlaga $f(z_0)$.

12.2.3. (4) Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}(z+2i)^n$ hatványsor?

12.2.4. (4) Hol konvergens és hol abszolút konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+5}(z+1-2i)^n$ hatványsor?

12.2.5. (8) Létezik-e olyan 0 körüli hatványsor, aminek konvergenciasugara 1, és

(a) a körvonalon sehol sem konvergens;
(b) a körvonalon mindenhol konvergens;
(c) az 1 kivételével minden pontban konvergens;
(d) az 1-ben konvergens, de sehol másutt;
(e)* csak azokban a pontokban konvergens, amelyek iránya a π-nek irracionális többszöröse?

12.2.6. (4) Fejtsük hatványsorba az $1/(z^2-1)$ függvényt a $-2i$ körül, és számítsuk ki a konvergenciasugarat.

12.2.7. (4) Fejtsük hatványsorba az $1/z$ függvényt az i körül, és számoljuk ki a konvergenciasugarat.

12.2.8. (4) Fejtsük hatványsorba az $1/(z^2-1)$ függvényt az i körül, és számoljuk ki a konvergenciasugarat.

12.2.9. (3) Számítsuk ki a Cauchy–Hadamard-tételből az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát! Hol konvergensek, és hol abszolút konvergensek ezek a hatványsorok? Mik a tagonkénti deriváltak, illetve primitív függvények? Mekkora a konvergenciasugara a deriváltakat és a primitív függvényeket előállító soroknak? Mekkora (a hatványsor középpontja körüli) körre lehet a fenti függvényeket regulárisan kiterjeszteni?

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n}.$$

12.2.10. (5) (a) $f(z)=\sum_{0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ a $z=1$ pont kivételével minden $|z|=1$ pontban konvergál.

(b) Ezeken a pontokon ki is folytatható regulárisan.

12.2.2. Az összegfüggvény regularitása

12.2.11. (6) Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergens az egységkörben, és az összege egyrétű (injektív) függvény. Fejezd ki az egységkörlap képének területét az együtthatókkal.

12.2.12. (6) [(Parseval-formula hatványsorokra)] Tegyük fel, hogy az $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergens az $|z|<r+\varepsilon$ körön. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi r}\int_{|z|=r} |f(z)|^2\cdot|\,\mathrm{d}z| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

12.2.3. Taylor-sor

12.2.13. (5) Határozzuk meg az alábbi függvények 0 körüli hatványsorfejtésének első négy tagját!

a) $\operatorname{tg} z$ b) $\dfrac{1}{e^z - 1}$ c) e^{e^z} d) $\dfrac{e^z}{\sin z}$

12.3. Elemi függvények

12.3.1. Az exponenciális és trigonometrikus függvények

12.3.1. (7) Legyen $f(0) = 0$ és $f(z) = \dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}$, ha $z \neq 0$. Igaz-e, hogy az f függvény differenciálható a 0-ban?

12.3.2. (4) Lássuk be, hogy a $\sin z$ függvénynek $2k\pi$-n kívül nincsenek más periódusai.

12.3.3. (6) Hagyjuk el a síkból a π (valós egész) többszöröseinek ε sugarú környezetét. Igazoljuk, hogy a megmaradt tartományon az $1/\sin z$ és a $\operatorname{ctg} z$ függvény is korlátos.

12.3.4. (3) Van-e határértéke az e^{-1/z^4} függvénynek a 0-ban?

12.3.5. (5) Hogy viselkednek az e^{iz}, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ függvények, ha $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$?

12.3.6. (3) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

és

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

12.3.7. (4) Lássuk be a definiáló sorok Cauchy-szorzásával, hogy $e^{z+w} = e^z e^w$.

12.3.8. (3) Lássuk be, hogy az alábbi egyenleteknek csak valós megoldásaik vannak!

a) $z \sin z = 1$ b) $\operatorname{tg} z = z$.

12.3.9. (4) Mutassuk meg, hogy $\cos z$ akkor és csak akkor egyrétű a D tartományon, ha D, $-D$, $D+2\pi$ és $-D+2\pi$ páronként diszjunktak.

12.3.2. Komplex logaritmus

12.3.10. (5) Az f függvény reguláris és sehol sem 0 egy csillagszerű (egyszeresen összefüggő) D tartományon. Az f'/f függvény integrálásával mutassuk meg, hogy a $\log f$ függvény az egész D tartományon értelmezhető regulárisan.

Igaz marad-e az állítás, ha D nem egyszeresen összefüggő?

12.3.11. (5) Legyen c komplex szám és $\operatorname{Re} z > -1$ esetén $f(z) = (1+z)^c = \exp\big(c \cdot \log(1+z)\big)$, ahol a log a logaritmus főértékét jelenti. Milyen c esetén folytatható a függvény a -1 ponton keresztül?

12.3.12. (4) Tekintsük a logaritmusfüggvénynek azt a $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x \geq 0, y = \sin x\}$ tartományon reguláris ágát, amelyre $\log 1 = 0$. Erre a log függvényre $\log(e^{3/2}) =$?

12.3.13. (4) Adjuk meg az összes lehetséges értékeit a következő kifejezéseknek!

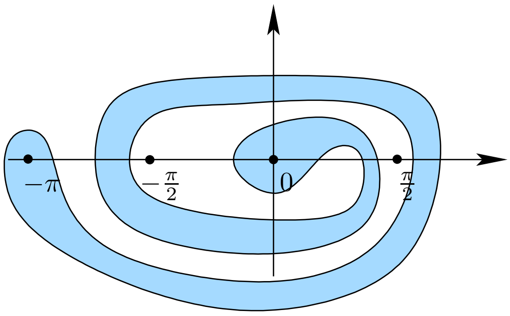
$$e^{\pi e^{i\pi/2}} \qquad \log(3+\sqrt{3}i)$$

12.3.14. (6) (a) Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonos és sehol sem tűnik el, akkor az $\arg f$, a $\log f$, továbbá tetszőleges $\alpha \in \mathbb{C}$-re az f^α függvény folytonosan értelmezhető az egész komplex síkon.

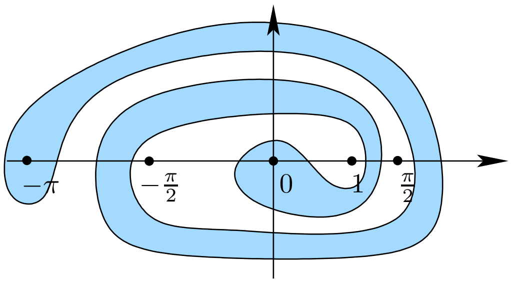
(b) Bizonyítsuk be az algebra alaptételét a Brouwer-fixponttételből, a $z + c\sqrt[n]{p(z)}$ függvény vizsgálatával.

12.3.15. (8) Be lehet-e bizonyítani az algebra alaptételét úgy, hogy a Brouwer-fixponttételt a $z + af(bz+c)$ függvényre alkalmazzuk valamilyen alkalmas a, b, c konstansokkal?

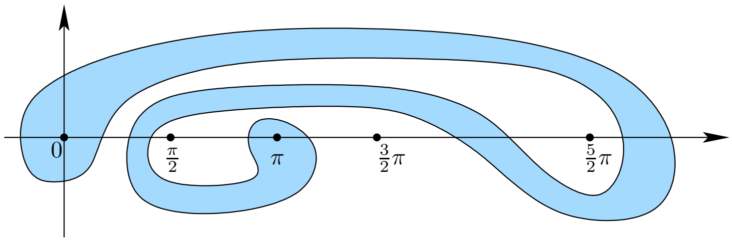
12.3.16. (9) Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \sqrt[3]{\cos z}$ függvény regulárisan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 1$. (Ezt később bebizonyítjuk.) Mennyi $f(-\pi)$?



12.3.17. (9) Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \sqrt{\dfrac{\cos z}{1-z}}$ függvény regulárisan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 1$. Mennyi $f(-\pi)$?



12.3.18. (9) Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \log \cos z$ függvény regulárisan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 0$. Mennyi $f(\pi)$?



12.3.19. (6) Ábrázoljuk a síkon a következő halmazokat:

$$\left\{e^z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}; \qquad \left\{\log\frac{1-z}{1+z}:\ \operatorname{Re} z > 0\right\};$$

$$\left\{\cos z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ 0 < \operatorname{Im} z\right\}; \qquad \left\{\sin z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\ 0 > \operatorname{Im} z\right\}$$

12.3.20. (5) Határozzuk meg a képtartományt!

a) $w(z) = \log z \qquad D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
b) $w(z) = \log z \qquad D = \{|z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$
c) $w(z) = \operatorname{tg} z \qquad D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$
d) $w(z) = \operatorname{ctg} z \qquad D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$
e) $w(z) = \sin z \qquad D = \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$

12.3.21. (4) Hol differenciálható a $\log(1+z)$ függvény főértéke? Mik a Taylor-együtthatói a 0 pontban? Mekkora a konvergenciasugár?

12.3.22. (9) Mutassuk meg, hogy a $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ függvénynek csak szinguláris pontjai vannak a körvonalon, azaz nincs olyan bővebb nyílt halmaz, amire ez a függvény analitikusan folytatható.

13. fejezet

A komplex vonalintegrál és alkalmazásai

13.0.3. A komplex vonalintegrál

13.0.1. (4) Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\int\limits_{[0,1+i]} e^z\,\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle\int\limits_{[1,i]} |z|^2\,\mathrm{d}z$ f) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

13.0.2. (3) Legyen Γ_1 a $(0,1)$ és $(1,1+i)$ irányított szakaszok uniója; Γ_2 az $\mathrm{Im}\,z = \mathrm{Re}\,z$ egyenes 0 és $1+i$ közötti íve; Γ_3 az $\mathrm{Im}\,z = (\mathrm{Re}\,z)^2$ parabola 0 és $1+i$ közötti íve . Számítsuk ki az $\int_{\Gamma_j} z^2$ vonalintegrálokat (a definícióból).

13.0.3. (3) Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

$$\int\limits_{|z|=1} \mathrm{Im}\,z \cdot \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z; \qquad \int\limits_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z; \qquad \int\limits_{[1,i]} |z|^2\,\mathrm{d}z.$$

13.0.4. (3) Legyen γ az $\mathrm{Im}\,z = (\mathrm{Re}\,z)^2$ parabola azon íve, aminek kezdőpontja $-1+i$, végpontja pedig $1+i$.

$$\int_\gamma |z|^2\,\overline{\mathrm{d}z} = ?$$

Megoldás→

13.0.5. (3) Legyen Γ az $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parabola 0 és $1+i$ közötti íve. Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_\Gamma z^2 \,\mathrm{d}z; \qquad \int_\Gamma z^2 |\,\mathrm{d}z|; \qquad \int_\Gamma z^2 \,\overline{\mathrm{d}z}; \qquad \int_\Gamma |z^2| \cdot |\,\mathrm{d}z|; \qquad \int_\Gamma |z^2| \cdot \operatorname{Im}\,\mathrm{d}z.$$

Melyik integrál esetében alkalmazható a Newton-Leibniz szabály?

13.0.6. (3) Számítsuk ki az $1/z$ függvény vonalintegrálját a 0 körüli r sugarú körön.

13.0.7. (3) Legyen n egész szám és $r > 0$. $\displaystyle\int_{|z|=r} z^n \,\mathrm{d}z = ?$

13.0.8. (7) A $p(z)$ polinom gyökei közül k darab az $|z| < r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t) = p(re^{it})$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Mi a γ görbe 0-ra vonatkozó indexe?

Ötlet→

13.0.9. (7) Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \to \mathbb{C}$ egyrétű. Igazoljuk, hogy $f(D)$ egyszeresen összefüggő.

13.0.4. A Cauchy-tétel

13.0.10. (7) Igazoljuk, hogy tetszőleges a komplex számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{iax} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-a^2/2}.$$

(Avagy, haranggörbe Fourier-transzformáltja is haranggörbe.)

13.0.11. (5) Legyen $p(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$, $n > 1$, $R > 0$ nagyobb, mint p gyökeinek abszolút értéke, és legyen $I(R) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{dz}{p(z)}$.

Igazoljuk, hogy

(a) $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = 0$; (b) $I(R)$ értéke állandó. (c) $I(R) = 0$.

13.0.12. (5) Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int\limits_{[0,1+i]} e^z dz$ b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$ c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$

(T a $\pm 1 \pm i$ csúcsú négyzet.)

13.0.13. (6) Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány, ami nem tartalmazza a 0-t.

(a) Bizonyítsuk be, hogy az $1/z$ függvénynek létezik primitív függvénye D-n.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha a D tartományon $g'(z) = 1/z$, akkor $ze^{-g(z)}$ konstans.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $\log z$ értelmezhető regulárisan a D tartományon.

13.0.14. (6) Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány, $f(z)$ reguláris D-n, és $f \neq 0$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy az f'/f függvénynek létezik primitív függvénye D-n.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha a D tartományon $g' = f'/f$, akkor $f(z)e^{-g(z)}$ konstans.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $\log f$ értelmezhető regulárisan a D tartományon.

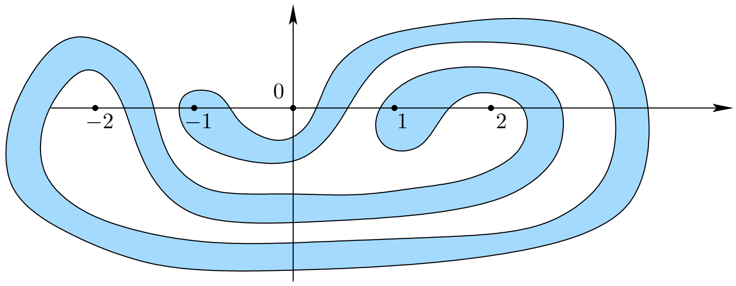
13.0.15. (5) Legyen a és b két különböző komplex szám. Bizonyítsuk be, hogy az $[a, b]$ szakasz komplementerén a $\log \frac{z-a}{z-b}$ függvénynek van reguláris ága.

13.0.16. (7) Legyen $\ell(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, ha $|z| < 1$. Igazoljuk (behelyettesítéssel), hogy $e^{\ell(z)} = 1 + z$.

13.0.17. (7) A D tartományt egy Γ rektifikálható Jordan-görbe határolja. Az $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ függvény reguláris D belsejében és folytonos a határán. Igazoljuk, hogy $\int_\Gamma f = 0$.

13.0.18. (5) (a) Mutassuk meg, hogy az ábrán látható, egyszeresen összefüggő tartományon az $f(z) = \sqrt[4]{\dfrac{3z}{4-z^2}}$ függvény értelmezhető regulárisan.

(b) Ha $f(1) = 1$, mennyi $f(-1)$?



(Szabad szemléletes dolgokra hivatkozni, és azt sem kell bizonyítani, hogy a tartomány valóban egyszeresen összefüggő.)

13.1. A Cauchy formulák

13.1.1. (8) Legyen f reguláris függvény az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen és $|a| < 1$. Mutassunk példát olyan $\varphi_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ függvényre, amire igaz, hogy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\varphi_a(t)dt.$$

13.1.2. (8) Igazoljuk, hogy tetszőleges a komplex számra

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left|e^{it} + a\right| \mathrm{d}t = \begin{cases} \log |a| & \text{ha } |a| > 1, \\ 0 & \text{ha } |a| \le 1. \end{cases}$$

Megoldás→

13.1.3. (6) Az f függvény reguláris az egységkör belsejében és folytonos a zárt körlemezen. Igazoljuk, hogy tetszőleges $|z| < 1$ esetén

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\xi)}{z - \xi} \,\mathrm{d}\xi.$$

13.1.4. (8) Az f függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Igazoljuk, hogy

$$\log |f(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{it})| \,\mathrm{d}t.$$

Mikor áll egyenlőség?

13.1.5. (7) Legyen n egész szám. (Lehet negatív is.)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^n}{(z-1)(z-3)}\,\mathrm{d}z = ?$$

13.1.6. (4)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-2}\,\mathrm{d}z = ?$$

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)(z-4)}\,\mathrm{d}z = ?$$

13.1.7. (7) Legyenek a, b komplex számok, $|b| < 1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 |\,\mathrm{d}z| = \frac{|a-b|^2}{1-|b|^2} + 1.$$

Ötlet→ Megoldás→

13.1.8. (2)

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{3^z}{(z-1)^2(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = ?$$

Ötlet→ Megoldás→

13.1.9. (2) Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör ($|z| < 1$) belsejében, és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

Eredmény→ Megoldás→

13.1.10. (5) a) Mutassuk meg, hogy ha $f \in O(|z| \leq 1)$, akkor $f'(z)\,(1-|z|)$ korlátos.

b) Mit mondhatunk az n-edik deriváltról?

13.1.11. (3)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^8}\,\mathrm{d}z = ? \qquad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z = ?$$

13.1.12. (3) Legyen a és r is pozitív valós szám. Számítsuk ki a következő vonalintegrálokat a Cauchy-formulák segítségével!

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} a^z\,\mathrm{d}z;\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{a^z}{z}\,\mathrm{d}z;\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{a^z}{z+1}\,\mathrm{d}z;\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{a^z}{z^2}\,\mathrm{d}z;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{a^z}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z.$$

13.2. Hatvány- és Laurent-sorba fejtés

13.2.1. Hatványsorba fejtés, Liouville-tétel

13.2.1. (9)

Az $a_0, a_1, \ldots,$ sorozatban $a_0 = -1$ és tetszőleges $n \geq 1$-re $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1} = 0$. Igazoljuk, hogy $n \geq 1$ esetén $a_n > 0$. (IMO Shortlist, 2006)

Oldjuk meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel; mutassuk meg, hogy

$$a_n = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2 + \log^2(x-1))}.$$

13.2.2. (5) Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olyan egész függvény, amelyre $|f(z)| < e^{|z|}$. Bizonyítsuk be, hogy $|a_n| \leq \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

13.2.3. (10) (a) Legyen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ és $f_k(z) = \sum_{n=0}^{k} \left(1 - \frac{n}{k+1}\right) a_n z^n$. Igazoljuk, hogy az egységkör f szerinti képének konvex burka tartalmazza az egységkör f_k szerinti képét.

(b) Legyen k pozitív egész. Alkalmazzuk az (a) pontot a $\frac{1}{1-(\frac{k}{k+1})^2 z}$ függvényre, és konstruáljunk olyan k-adfokú p polinomot, amire $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, és az egységkörben $|p(z)| < e^{2/k}$.

(c) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k pozitív egészhez létezik olyan k-adfokú h polinom, amire $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, az egységkör belsejében h-nek nincs gyöke és $|h(z)| < e^{2/k}$. (Halász-polinom)

13.2.4. (9) Igazoljuk, hogy ha egy f egészfüggvény minden értéke a -1, 1 pontokat összekötő szakaszon kívülre esik, akkor f konstans.
Kapcsolódó feladat: 12.0.10

13.2.5. (7) Igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z), f(z+b) = f(z)$ és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

13.2.6. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha egy f egészfüggvény a síkot az egységkör külsejébe viszi, akkor f konstans.

13.2.7. (4) Legyen $f \in O(\mathbb{C})$. Ekkor $\operatorname{Re} f$ nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről.

13.2.8. (3) Fejtsük hatványsorba az $\dfrac{z^2+i}{z^2+z}$ függvényt az i körül.

13.2.9. (5) Fejtsük hatványsorba az $(1+x)^c = \exp\big(c \cdot \log(1+z)\big)$ függvényt a 0 körül.

13.2.10. (4) Melyek azok az $f \in O(\mathbb{C})$ függvények, amelyek nem vesznek föl pozitív valós értékeket?

13.2.11. (4) a) Ha f nem-konstans egész függvény, akkor $\liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{M(f,r)}{r} > 0$.

b) Ha az f egész függvény nem polinom, akkor $\forall n$-re $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{M(f,r)}{r^n} = \infty$. ($M(r) = \max\limits_{|z|\le r} |f(z)|$.)

13.2.12. (6) Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{C}$ reguláris függvény. Bizonyítsuk be, hogy $f(z) = Az + B$.

13.2.2. Laurent-sorba fejtés

13.2.13. (3) Fejtsük Laurent-sorba a $\dfrac{z^3}{z^2-1}$ függvényt az $1+2i$ körül úgy, hogy előállítsa a függvényt a 0 egy környezetében. Mi az a legbővebb tartomány, ahol a Laurent-sor előállítja a függvényt?

Megoldás→

13.2.14. (6) Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény reguláris az $|z| > 1$ tartományon, és tetszőleges, az $|z| < 3$ körlapon reguláris g függvényre

$$\int_{|z|=2} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

akkor f kiterjeszthető regulárisan a teljes síkra.

Kapcsolódó feladat: 14.2.5

13.2.15. (6) Az f függvény akárhányszor integrálható az $1 < |z| < 2$ gyűrűn. Igazoljuk, hogy analitikusan folytatható a teljes $|z| < 2$ körlapra.

Kapcsolódó feladat: 14.2.5

13.2.16. (5) (Parseval-formula Laurent-sorokra) Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ Laurent-sor konvergens az $r - \varepsilon < |z| < r + \varepsilon$ körgyűrűn. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|z|=r} |f(z)|^2 \cdot |\,\mathrm{d}z| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

13.2.17. (5) Legyen f analitikus egy 0 közepű körgyűrűben. Igazoljuk, hogy ha f

(a) páros, akkor $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$,

(b) páratlan, akkor $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$!

13.2.18. (9) Az $f(z)$ függvény reguláris az egységkörvonal egy környezetében, Laurent-sora $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges N pozitív esetén

$$\min_{|z|=1} \operatorname{Re} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) a_n z^n \geq \min_{|z|=1} \operatorname{Re} f(z).$$

13.2.19. (5) Fejtsük Laurent-sorba az $\dfrac{e^z}{z-1}$ függvényt a 0 körül, az $|z| > 1$ tartományon.

13.2.20. (7) Számítsuk ki az $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvény Laurent-sorának együtthatóit az együtthatóformulából az $1 < |z| < 2$ tartományon.

13.2.21. (5) Írd fel az $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ függvény Laurent-sorát az $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$ és $|z| > 2$ tartományokon. Számítsuk ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

13.2.22. (3) Fejtsük Laurent-sorba a $\dfrac{2z^3-1}{z^2+z}$ függvényt az i körül, az $1 < |z-i| < \sqrt{2}$ halmazon.

Megoldás→

13.2.23. (3) Fejtsük Laurent-sorba a $z \mapsto \dfrac{z}{z^2-3z+2}$ függvényt a 3 körül az $|z-3| < 1$, az $|z-3| > 2$ és az $1 < |z-3| < 2$ tartományokon.

13.2.24. (3) Fejtsük Laurent-sorba az $\dfrac{1}{1-z}$ függvényt az $1 < |z-2| < 3$ tartományon.

13.2.25. (3) Fejtsük Laurent-sorba az $\dfrac{1}{1-z}$ függvényt a 3 körüli 2 sugarú kör belsejében!

13.2.26. (4) Legyen $f(z) = e^{z+1/z} \in O(\mathbb{C}\backslash 0)$. Lássuk be, hogy f Laurent-sora $f(z) = \alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_n(z^n + z^{-n})$ alakú, ahol $\alpha_n = \sum_{j=0}^\infty \dfrac{1}{(n+j)!j!}$.

13.2.27. (3) Az alábbi fügvényeknek több Laurent-sorfejtésük is van a 0 körül aszerint, hogy milyen gyűrűben tekintjük a függvényeket. Fejtsük a lehetséges tartományokon sorba ezeket!

a) $\dfrac{1}{(1-z^2)^2} + \dfrac{1}{2-z}$ b) $\log(1-z) + \dfrac{1}{(2z-1)^2}$ c) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$

13.2.28. (5) Fejtsük Laurent-sorba az $e^{z+1/z}$ függvényt a 0 körül.

13.2.29. (6) Legyen $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ olyan Laurent-polinom, amire tetszőleges $|z| = 1$ esetén $|p(z)| \le 1$, és $\xi \ne 0$ komplex szám. Keressünk felső becslést $|p(\xi)|$-re.

13.2.30. (6) Legyen $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát az $|z| = \frac{1}{2}$ körön: cseréljük ki a kört egy nagy, R körre (közben alkalmazzuk a Cauchy-formulát az 1 pontban) és nézzük meg, hogy mi történik, ha $R \to \infty$.

13.2.31. (6) Ha az $f \in O(0 < |z| < 2)$ függvényre minden $g \in O(0 < |z| < 2)$ páros függvénnyel $\int\limits_{|z|=1} f(z)g(z)dz = 0$, akkor f is páros függvény.

13.2.32. (7) Legyen $D_1 = \{z :\ 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$ és $D_2 = \{z :\ |z| < 1 + \varepsilon\}$. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény reguláris D_1-en és bármely, D_2-n reguláris g függvényre $\int_{|z|=1} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z = 0$, akkor f analitikusan folytatható D_2-re.

13.3. Reguláris függvények lokális tulajdonságai

13.3.1. Unicitás-tétel

13.3.1. (3) Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

Ötlet→ Megoldás→

13.3.2. (3) Az f egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

Megoldás→

13.3.3. (7) Igazoljuk, hogy ha az f egész függvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

Ötlet→

13.3.4. (7) Az f függvény reguláris az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $1, 2$ pontokat összekötő szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $-1, -2$ pontokat összekötő szakaszon is csak valós értékei vannak.

Ötlet→ Megoldás→

13.3.5. (8) Az f függvény reguláris az $1-\varepsilon < |z| < 1+\varepsilon$ körgyűrűn, és az egységkörvonalnak létezik egy olyan íve, amelyen f értéke valós. Bizonyítsuk be, hogy f a teljes körvonalon valós.

Ötlet→

13.3.6. (5) Mutassunk olyan nem azonosan 0 függvényt, ami reguláris az egységkör belsejében, és ott végtelen sok gyöke van. Miért nem mond ez ellent az unicitás-tételnek?

Megoldás→

13.3.7. (8) Bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris az $|z| < 1+\varepsilon$ körlapon és nem konstans, akkor az $|z| = 1$ körvonalnak csak véges sok pontjában lehet tisztán valós az értéke.

Ötlet→

13.3.8. (6) Tegyük fel, hogy $f \in O(\mathbb{C})$ és $|f(x)| = 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor $\overline{f(\overline{z})} = \dfrac{1}{f(z)}$.

13.3.9. (6) Ha f egész függvény, a valós tengely egy szakaszán valós értékeket vesz fel, akkor $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ minden z-re.

13.3.10. (7) $f \in O(|z| > 1)$, f korlátos, és $f(n) = 0 \qquad (n = 2, 3, \dots)$. Ekkor $f \equiv 0$.

13.3.11. (7) $f \in O(\mathbb{C})$, $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| < \dfrac{1}{2^n}$, akkor $f \equiv 0$. Hogyan élesíthető ez?

13.3.12. (8) $f \in O(\mathbb{C})$, $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \cos\dfrac{1}{n}$, $f(-1) = ?$

13.3.2. Maximum-elv

13.3.13. (7) Legyen f reguláris az egységkörben és folytonos a határán. Legyen $A = \max\limits_{0\le t\le\pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max\limits_{\pi\le t\le 2\pi} |f(e^{it})|$. Igazoljuk, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$.

13.3.14. (5) Legyen f reguláris függvény az egységkör belsejében és folytonos a körvonalon. Bizonyítsuk be, hogy az egységkör belsejében felvett értékei a határon felvett értékek konvex burkába esnek.

13.3.15. (5) Bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

13.3.16. (9) [(Hadamard-féle három kör tétel)] Igazoljuk, hogy ha $0 < r_1 < r_2 < r_3$ és az f függvény reguláris az $r_1 < |z| < r_3$ tartományon és folytonos a határán, akkor

$$\left(\max_{|z|=r_2} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_1)} \leq \left(\max_{|z|=r_1} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_2)} \left(\max_{|z|=r_3} |f(z)|\right)^{\log(r_2/r_1)}.$$

13.4. Izolált szingularitások

13.4.1. Szingularitások

13.4.1. (4) Az f függvény reguláris a z_0 pont körül, a g-nek ugyanott pólusa van, továbbá

$$\lim_{z \to z_0} \left(|f(z)| \cdot |g(z)|^2\right) = 4.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(z_0) = f'(z_0) = 0$.

13.4.2. (4) Igazoljuk, hogy a $\frac{z}{\sin z}$ és az $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ függvények analitikusan folytathatók a 0-ban.

13.4.3. (5) Tegyük fel, hogy f-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és p egy n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy $p(f(z))$ függvénynek mn-edrendű pólusa van a-ban.

13.4.4. (7) Lehet-e az f függvény izolált szingularitása $\sin f$-nek pólusa?

13.4.5. (7) Lehet-e az f függvény izolált szingularitása e^f-nek pólusa?

13.4.6. (5) Igazoljuk, hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$ és $w_n \to a$ sorozatok, hogy $f(z_n) \to 1$, $f(w_n) \to 2$, akkor van olyan $s_n \to a$ sorozat is, hogy $f(s_n) \to 3$.

13.4.7. (4) Bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény az $|z| > 1$ tartományon reguláris és korlátos, akkor létezik határértéke a ∞-ben.

13.4.8. (5) Ha f-nek a-ban pólusa van, úgy f a körül pontosan akkor egyrétű, ha a pólus elsőrendű.

13.4.9. (4) Legyenek $f, g \in O(|z| \le 1)$.

a) Ha $|g| \le |f|$ és z_0 f k-szoros zéróhelye, akkor z_0 g-nek is (legalább) k-szoros zéróhelye.

b) Ha $|g(e^{it})| \le |f(e^{it})|$ és f minden k-szoros gyöke egyben g-nek is (legalább) k-szoros gyöke, akkor $|g| \le |f|$ $|z| \le 1$-ben. Ha egyetlen $|z| < 1$-re egyenlőség áll fenn, akkor $f = Ag, |A| = 1$ konstanssal.

(Az $f(z) = z$ speciális esetet nevezik Schwarz-lemmának.)

13.4.10. (9) Bizonyítsuk be (a nagy Picard-tétel felhasználása nélkül), hogy ha az f függvénynek lényeges szingularitása van egy z_0 pontban, akkor a z_0 tetszőleges ε sugarú pontozott környezetében az értékkészlet komplementere nem tartalmazhat szakaszt.

Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 12.0.10

13.4.2. A reziduumtétel

13.4.11. (4) Ha $f \in \mathcal{M}(|z| < 1)$ akkor f-nek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha f minden szingularitásában a reziduuma 0.

13.4.12. (5) Számítsuk ki (például L'Hospital szabállyal) a $\operatorname{ctg} z$ és a $\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$ függvény Laurent-sorának első 6 tagját a $0 < |z| < \pi$ tartományon. Mi a $\frac{\operatorname{ctg} z}{z}, \frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}, \ldots, \frac{\operatorname{ctg} z}{z^5}$ függvények reziduuma a 0 körül?

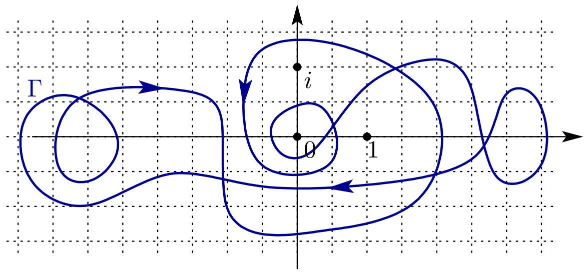
13.4.13. (6) Legyen $f(z)$ olyan racionális törtfüggvény, amiben a nevező foka legalább 2-vel nagyobb, mint a számlálóé. Mutassuk meg, hogy a
$\pi \operatorname{ctg}(\pi z) \cdot f(x)$ függvény összes reziduumának összege 0.

13.4.14. (4)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \operatorname{tg} z \, \mathrm{d}z = ?$$

13.4.15. (4)

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 + 1} \, \mathrm{d}x = ?$$



13.4.16. (3) Hol vannak a $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ függvény szingularitásai? Mi ezeken a helyeken a reziduuma?

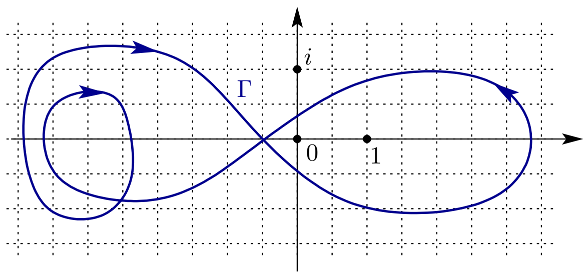
13.4.17. (6) Legyen az f függvény reguláris az egységkör belsejében és folytonos a határán. Fejezd ki az

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{f(z)}{\sin^3 z} \,\mathrm{d}z$$

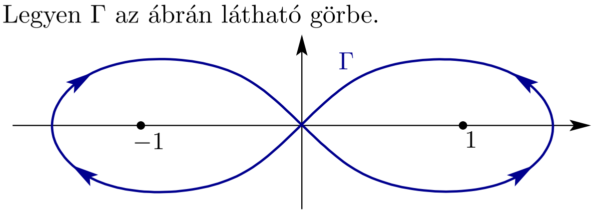
integrált $f(0)$, $f'(0)$, ... segítségével.

13.4.18. (4)

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\cos z} = ?$$



13.4.19. (4) Legyen Γ az ábrán látható görbe.

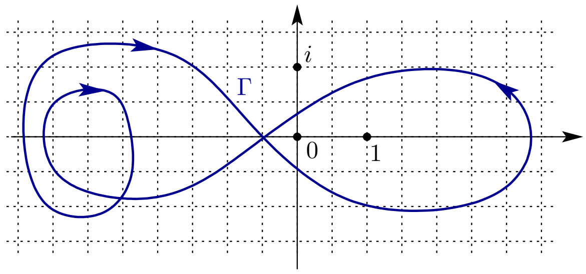


(a) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{z^{20}+2}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$

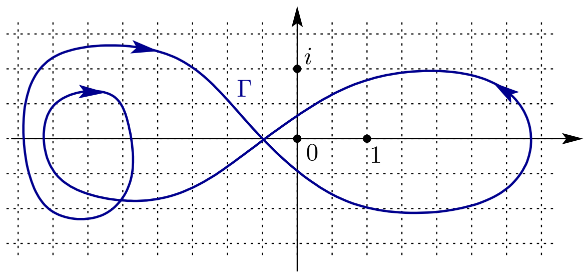
13.4.20. (4)

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2 \sin z} = ?$$



13.4.21. (5)

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = ?$$



Megoldás→

13.4.22. (5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/4} \frac{\mathrm{d}z}{\sin \frac{1}{z}} = ?$$

13.4.23. (4)

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin\frac{\pi}{z}}{z^4-1} = ?$$

13.4.24. (4) Legyen $0 < r < \pi$. $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{\mathrm{d}z}{\sin z} = ?$

13.4.25. (7) Igazoljuk, hogy ha $a_1, \dots, a_n$ különböző komplex számok és $p(z) = (z-a_1)\cdot \ldots \cdot (z-a_n)$, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{p''(a_j)}{(p'(a_j))^3} = 0.$$

13.4.26. (5)

$$\int_{|z|=5} \frac{z^2}{\sin z}\,\mathrm{d}z = ?$$

13.4.27. (4)

$$\int_{|z-2|=4} \frac{z}{\sin z}\,\mathrm{d}z = ?$$

13.4.3. A reziduum kiszámítása

13.4.28. (5) Mi a $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{tg}^2 z$, $\operatorname{tg}^3 z$ függvények reziduuma a $\frac{3\pi}{2}$ pont körül?

13.4.29. (5) Mi a $\dfrac{\operatorname{tg} z}{1-\cos z}$ és a $\dfrac{e^z}{\operatorname{tg} z - \sin z}$ függvények reziduuma a 0-ban?

13.4.30. (4) Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Mennyi ott a reziduumuk?

$$\frac{1}{z};\quad \frac{1}{z^2};\quad \frac{1}{z^2+2z};\qquad \frac{1}{\sin z};\quad \sin\frac{1}{z};\quad \frac{e^z}{z^2+4};\quad \frac{e^z}{(z^2+4)^2};$$

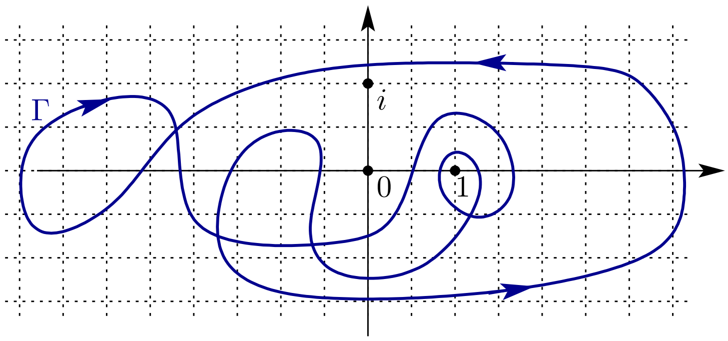
$$\frac{e^z}{(z^2+4)^3}\qquad \frac{e^z-z^3+8}{z^2+1}$$

13.4.31. (5) Legyen f és g reguláris a z_0 pont egy környezetében.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha z_0 a g-nek egyszeres gyöke, akkor $\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$.

(b) Tegyük fel, hogy z_0 kétszeres gyöke g-nek. Fejezd ki $\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g}$-t az f és g, valamint deriváltjaik értékével a z_0 helyen.

13.4.32. (7)



$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{ctg} z}{z^8 - z^6 - z^4 + z^2}\, dz = ?$$

13.4.33. (7) Igazoljuk, hogy ha $p(z)$ legalább másodfokú polinom és a gyökei, $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ különbözők, akkor $\sum \frac{1}{p'(\varrho_k)} = 0$.

13.4.34. (4)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=5} \operatorname{tg} z\, dz = ?$$

13.4.4. A reziduumtétel alkalmazásai

13.4.35. (8) Legyen n pozitív egész szám és φ egészfüggvény. Tetszőleges $X > 0$ valós szám esetén legyen

$$f(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=n+1} \frac{\varphi(s) \cdot X^s}{s(s-1)(s-2)\cdot \ldots \cdot (s-n)}.$$

(a) Igazoljuk, hogy $f(X)$ polinom.

(b) Mutassuk meg, hogy ha φ polinom, és $\deg\varphi = k < n$, akkor f-nek az 1 pontosan $(n-k)$-szoros gyöke.

Végtelen sorok összegének kiszámítása

13.4.36. (5) Számítsuk ki a a reziduumtételből a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkóposan is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

13.4.37. (10) $\operatorname{Re} s > 0$ esetén legyen $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$; kisebb valós rész esetén legyen $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$. Hol van a Γ és a $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ függvényeknek gyöke vagy pólusa? Mennyi a pólusoknál a reziduum? Kiszámolhatjuk-e a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ összeget a Γ függvény segítségével?

13.4.38. (5)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = ?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

Megoldás→

13.4.39. (5) A $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2}$ függvény reziduumainak vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

13.4.40. (5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = ? \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = ?$$

13.4.41. (5)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k^2-1} = ?$$

13.4.42. (5) Legyen N_k az a négyzet, amelynek csúcsai $\pm(k+\frac{1}{2}) \pm (k+\frac{1}{2})i$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{N_k} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^2}\,\mathrm{d}z = ?$$

Milyen összefüggést kaphatunk a $k \to \infty$ határátmenetből?

13.4.43. (5) Legyen $f \in O(D)$, γ a belsejével együtt D-ben levő egyszerű, zárt, rektifikálható Jordan-görbe. Ha $|f(z)|$ konstans $z \in \gamma$ esetén, akkor vagy $f(z)$ konstans, vagy van f-nek gyöke γ belsejében.

Valós integrálok kiszámítása

13.4.44. (4)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^7+1} = ?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

Megoldás→

13.4.45. (4) Legyen $a \in (0,1)$ valós szám.

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Ötlet→

13.4.46. (6)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

13.4.47. (7)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = ? \qquad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = ? \qquad \int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

13.4.48. (6)

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

13.4.49. (6)

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

13.4.50. (5)

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^4+z^2)\sin z} = ?$$

13.4.51. (5)

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)\sin z} = ?$$

13.4.52. (9) a) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx = ?$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin(3x^2+1) dx = ?$

13.4.53. (7) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t} dt = ?$ $(0 < \alpha < 1)$

13.4.54. (7) $\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathrm{ch}\, Az}{(z+1)(z+2)} dz = ?$ $(A > 0)$

13.4.55. (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^4-1}{x^6-1}\, \mathrm{d}x = ?$

13.4.56. (9) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = ?$

13.4.57. (7)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(x-3)\cos x}{x^2-6x+109}\, \mathrm{d}x = ?$$

13.4.58. (6) a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+a^2}\, \mathrm{d}x$ $(a > 0)$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\, \mathrm{d}x$

13.4.59. (6)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\, \mathrm{d}x = ? \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-it}}{x^4+1} = ? \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = ?$$

13.4.60. (7) Számítsuk ki tetszőleges $a > 0$ valós számra az $\displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{a^\xi}{1-\xi^2}\, \mathrm{d}\xi$ integrált.

13.4.61. (7) Legyen $h > 0$ esetén $\Gamma_1(h)$ az $1 - hi$ és $1 + hi$ pontokat összekötő szakasz, $\Gamma_2(h)$ az $1 - hi$ és $1 + hi$ pontokat összekötő, origó középpontú, az óramutató járásával ellentétes irányban haladó körív, $\Gamma_3(h)$ az $1 - hi$ és $1 + hi$ pontokat összekötő, origó középpontú, az óramutató járásával megegyező irányban haladó körív.

(a) Mi az összefüggés az alábbi integrálok értéke között?

$$I_1(h) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1(h)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi};\qquad I_2(h) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2(h)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi};\qquad I_3(h) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_3(h)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi};$$

(b) Számítsuk ki a három integrál határértékét, ha $h \to \infty$.

13.4.62. (7) $\displaystyle\int\limits_{\sigma-i}^{\sigma+i}\frac{zt^z}{z^2+1}dz = ? \qquad (\sigma > 0, \qquad 0 < t < 1)$

13.4.63. (5) a) $\displaystyle\int\limits_{C(\pi,1)}\frac{z}{\sin z}dz = ?$ b) $\displaystyle\int\limits_{C(\pi i,1)}\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}dz = ?$

13.4.64. (5)

a) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = ?$ b) $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi|=1}\frac{e^z}{\sin^2 z}dz = ?$ c) $\displaystyle\int\limits_{|z-2\pi i|=1}\frac{1}{e^z-1}dz = ?$

d) $\displaystyle\int\limits_{|z|=\pi}\frac{e^z}{\cos z - 1}dz = ?$

13.4.65. (5) Tegyük fel, hogy f-nek izolált szingularitása van az a pontban, és az a egy pontozott környezetében $f \neq 0$. Milyen szám lehet f'/f reziduuma az a-ban?

13.4.66. (6) Legyen $f(z) = a_0 + a_1 e^z + \cdots + a_n e^{nz}$, és nevezzük f két gyökét lényegesen különbözőnek, ha nem $2\pi i$ egész többszörösével térnek el egymástól. Ekkor a $\operatorname{Re} z < \alpha$ félsíkba eső lényegesen különböző gyökök száma véges és megegyezik

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i}^{\alpha+i}\frac{f'(w)}{f(w)w}dw \qquad \text{-vel.}$$

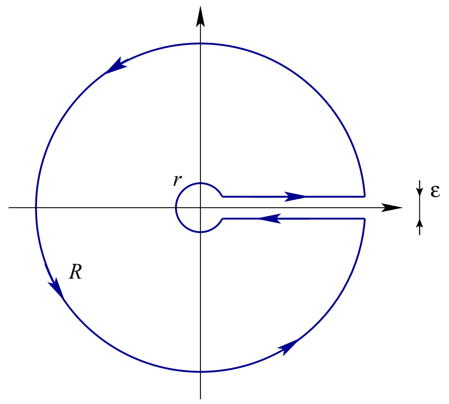
13.4.67. (6) Az f nemkonstans függvény reguláris a γ zárt görbe belsejében és egy kis környezetében, továbbá $|f|$ a teljes görbén konstans. Igazoljuk, hogy f-nek van gyöke γ belsejében.

13.4.68. (4) Lássuk be, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ és $n > 3$ mellett $|z| < 3$-ban van gyöke az $1 + z + az^n$ polinomnak!

13.4.69. (6) Legyen $\Gamma_{r,R,\varepsilon}$ az ábrán látható görbe, ahol R nagy, r kicsi és ε még r-nél is sokkal kisebb. Milyen összefüggést kapunk a

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{r\to+0} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,R,\varepsilon}} \frac{\log z}{z^2+1} \, \mathrm{d}z$$

határérték vizsgálatából?



13.4.70. (7) Legyen $\Gamma(h)$ a $-hi$ és hi pontokat összekötő egyenes szakasz. Számítsuk ki

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(h)} \frac{e^{\xi}}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi$$

értékét $\operatorname{Re} z < 0$ és $\operatorname{Re} z > 0$ esetén.

13.4.71. (5)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})^n dt = ?$$

13.4.72. (7) Legyen $a > 0$ valós szám.

$$\int\limits_{\operatorname{Re} z = 0} \frac{a^z}{z^2 - 1} \, \mathrm{d}z = ?$$

13.4.73. (4) a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^{10}}{(z-1)^7} dz = ?$ b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=21} \frac{1}{z(z-1)\dots(z-20)} dz = ?$

13.4.74. (9) Tegyük fel, hogy az $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ Dirichlet-sor abszolút konvergens $\operatorname{Re} s \geq 1$ esetén, és legyen $X > 0$ valós szám.

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s=1, |\operatorname{Im} s|\leq h} f(z)\frac{X^s}{s} = ? \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s=1} f(z)\frac{X^s}{s^2} = ?$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s=1} f(z)\frac{X^s}{s(s+1)} = ?$$

13.4.75. (7) Bizonyítsuk be az alábbi integrálformulát!

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{-\lambda s}}{s^2} ds = \begin{cases} 0 & \lambda > 0, (a > 0) \\ \lambda & \lambda < 0 \end{cases}$$

13.4.5. Argumentum elv és Rouché tétele

13.4.76. (7) Bizonyítsuk be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha ϱ az $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ polinomnak (ahol $a_n \neq 0$) pontosan k-szoros gyöke, akkor minden, elegendően kicsi $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $b_0, \ldots, b_n$ komplex számok és $|b_j - a_j| < \delta$, akkor a ϱ középpontú, ε sugarú körben a $b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$ polinomnak pontosan k gyöke van.

13.4.77. (3) Hány gyöke van a $\cos z = 2z^3$ egyenletnek az egységkörben?

Megoldás→

13.4.78. (3) Az f függvény reguláris a γ egyszerű, zárt görbe belsejében és egy kis környezetében, továbbá a teljes görbén $|f| > 1$. Igazoljuk, hogy f az egységkörlemez minden elemét ugyanannyiszor veszi fel γ belsejében.

13.4.79. (3) Hány gyöke van a megadott tartományokon az adott egyenleteknek?

(a) $\sin z = 2z^2$, $|z| < 1$
(b) $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0$, $1 < |z| < 2$
(c) $z^6 - 6z + 10$, $|z| > 1$.

13.4.80. (3) Legyen $|a| = 3$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon?

13.4.81. (4) Tegyük fel, hogy az $f \in \mathcal{M}$ $(1 \leq |z| \leq 2)$ függvényre $|f(z)| \leq 1$, ha $|z| = 1$ vagy 2. Lássuk be, hogy ekkor $f(z)$ a 2 értéket éppen annyiszor veszi fel, mint ahány pólusa van ebben a körgyűrűben.

13.4.82. (3) Hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben?

13.4.83. (5) Bizonyítsuk be az algebra alaptételét Rouché tételéből.

13.4.84. (5) Tegyük fel, hogy a γ egyszerű zárt görbe a belsejével együtt a D tartományban fekszik, ahol f és g reguláris, továbbá a γ görbén $|f| > |g|$. Igazoljuk Rouché tételét az $I(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(f+ug)'}{f+ug}$ paraméteres integrál vizsgálatával.

13.4.85. (4) Bizonyítsuk be, hogy az $az^n + 3z + 1$ polinomnak tetszőleges a komplex szám és $n > 1$ egész esetén létezik gyöke az egységkör belsejében.

13.4.86. (5) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy a $(z-1)^n e^z = a$ egyenletnek pontosan n megoldása van a $\operatorname{Re} z > 0$ félsíkban.

13.4.87. (9) A karakterisztikus függvények gyökeinek vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X, Y független, azonos eloszlású, legfeljebb 5 abszolút értékű valószínűségi változókhoz létezik olyan $t \in [0,1]$, amire

$$|P(X + Y < t) - t| > 10^{-10}.$$

(Schweitzer-verseny alapján)

Ötlet→

14. fejezet

Konform leképezések

14.1. Törtlineáris függvények

14.1.1. (4) (a) Igazoljuk, hogy a $(z_1, z_2, z_3) := \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ osztóviszony pontosan akkor valós, ha z_1, z_2 és z_3 egy egyenesbe esnek.

(b) Igazoljuk, hogy a $(z_1, z_2, z_3, z_4) := \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ kettősviszony pontosan akkor valós, ha z_1, z_2 z_3 és z_4 egy „köregyenesre” esnek.

14.1.2. (5) Igazoljuk, hogy minden kettősviszonytartó síktranszformáció reguláris, sőt törtlineáris leképezés.

14.1.3. (3) Igazoljuk, hogy az $1/z$ függvény kettősviszonytartó, azaz

$$\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}\right) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Keressünk más kettősviszonytartó függvényeket!

14.1.4. (5) Mutassuk meg, hogy ha egy egyrétű függvény csak egyetlen körvonalat körvonalba visz, akkor már törtlineáris leképezés!

14.1.5. (6) Tegyük fel, hogy az $f_n \in O(D)$ függvényekre $f_n \to f$ (f nem konstans) D belsejében egyenletesen. Igazoljuk, hogy ha minden n-re van K_n körvonal, amelyet f_n körvonalba visz, akkor f minden köregyenest köregyenesbe visz.

14.1.6. (7) Mik a törtlineáris függvények csoportjának véges részcsoportjai?

14.1.7. (7) Mik azok a törtlineáris függvények, amik a pozitív félsíkot a pozitív félsíkra képezik?

14.1.8. (3) Milyen geometriai jelentése van a kettősviszony képzetes részének?

14.1.9. (3) A függvény 0-, ∞- és 1-beli értéke alapján mutassuk meg, hogy $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-1} < 0$, ha $|z| < 1$.

Megoldás→

14.1.10. (3) A kitevőben levő függvény 0-, ∞- és 1-beli értéke alapján, további számolás nélkül, pusztán a lineáris törtfüggvények és az exponenciális függvény ismert tulajdonságai alapján mutassuk meg, hogy

$$\left| e^{\frac{z+1}{z-1}} \right| < 1 \quad (|z| < 1).$$

14.1.11. (5) (a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-edfokú f polinomhoz létezik olyan n-edfokú g polinom, amelynek az egységkör belsejében nincs gyöke, továbbá az egységkörvonalon $|g| = |f|$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges meromorf f függvényhez létezik olyan meromorf g függvény, amelynek az egységkör belsejében nincs sem pólusa, sem gyöke, továbbá az egységkörvonalon $|g| = |f|$.

14.1.12. (5) Egy törtlineáris függvény az egységkörvonalat önmagára képezi. Hogyan helyezkedhetnek el a gyökei és a pólusai?

14.1.13. (5) Mik azok a meromorf f függvények, amikre $|z| = 1$ esetén $|f(z)| = 1$?

14.1.14. (7) Az f függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlapon véges sok pólus kivételével és $f(0) = 1$. A függvény gyökei és pólusai az egységkör belsejében $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$, illetve $p_1, p_2, \ldots, p_m$ (minden gyököt és pólust annyiszor sorolunk fel, amennyi a multiplicitása). Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \log |f(z)| \cdot |dz| = \log \left| \frac{p_1 p_2 \ldots p_m}{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n} \right|.$$

(Ha egyáltalán nincs gyök vagy pólus, akkor a megfelelő szorzat értéke 1.)

14.1.15. (6) Ha az $f : S(0,1) \to S(0,1)$ reguláris függvény gyökei a véges vagy végtelen sok $|a_k| < 1$ szám, akkor

$$|f(0)| \le \left| \prod_{i=0}^{\infty} a_i \right| .$$

14.1.16. (5) Igazoljuk, hogy

(a) Ha $T(z)$ törtlineáris leképezés, akkor T-nek van fixpontja $\mathbb{C} \cup \infty$-ben.

(b) Ha $z_j,\ w_j\ \ (j = 1, 2, 3)$ adottak ($z_k \ne z_j,\ w_k \ne w_j$), akkor van olyan egyértelműen meghatározott T törtlineáris leképezés, amelyre $T(z_j) = w_j$.

(c) Milyen típusú törtlineáris leképezéseknek lehet 1, 2 vagy több fixpontja?

14.1.17. (5) Igazoljuk, hogy

(a) Pontosan akkor lesznek z és w a K körre vonatkozóan inverz pontpárok, ha a z, w egyenes áthalad K középpontján, és z, w Thalesz-köre merőleges K-ra. (Ha K egyenes, akkor a tükrös pontpárok inverzek.)

(b) A törtlineáris leképezés a köregyenesre vonatkozó inverz pontpárokat tartja.

14.1.18. (4) (a) Gondoljuk meg, hogy minden törtlineáris transzformáció előállítható mint eltolás, forgatás, nagyítás és reciprokképzés (azaz körre, majd egyenesre való tükrözésből összetett körüljárástartó transzformáció) felhasználásával képzett kompozíció.

(b) A törtlineáris leképezések egyrétűek, megtartják a szögeket, a síkidomok körüljárását és a pontnégyesek kettősviszonyát. Így a kört és egyenest körbe vagy egyenesbe viszik („köregyenes”-tartóak).

14.1.19. (5) Az f függvény reguláris az $|z| < 1 + \varepsilon$ körlemezen. Igazold, hogy

$$\log |f(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{it})| \, \mathrm{d}t.$$

14.1.20. (5) Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan konform leképezés létezik, amely

(a) egy K kört egy K' körbe visz úgy, hogy három kerületi pontot K' három előírt kerületi pontjába visz (3 valós paraméter);

(b) egy K kört egy K' körbe visz úgy, hogy egy belső és egy kerületi pont K' előírt kerületi ill. belső pontjába kerüljön (1 valós és 1 komplex, azaz 3 valós paraméter).

(c) Ismeretes, hogy ha $f : D \leftrightarrow G$ konform leképezés, $\partial D = \chi$ és $\partial G = \Gamma$ Jordan-görbék, akkor f folytonosan és bijektíven kiterjeszthető $D \cup \partial D \leftrightarrow G \cup \partial G$ leképezéssé (azaz a határokat is megfelelteti egymásnak). Ennek a Caratheodory-tételnek a felhasználásával általánosítsuk a)-t és b)-t!

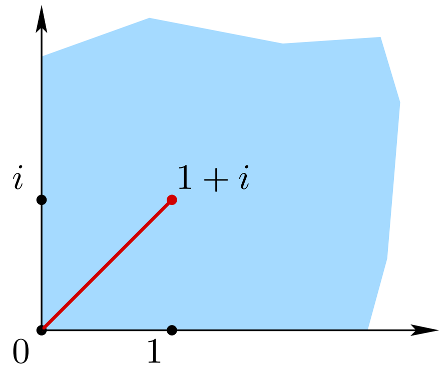
14.1.21. (5) Lássuk be, hogy a H felső félsíkra

$$\mathrm{Aut}(H) = \left\{ T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}!$$

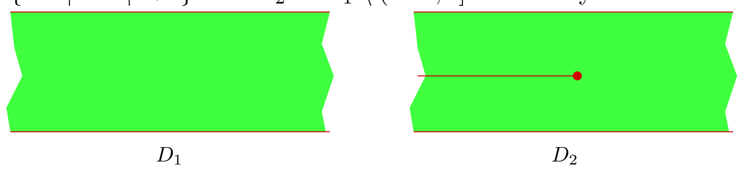
Ha $\mathrm{Aut}(H)$ elemeit az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixszal jellemezzük, akkor mely mátrixok határozzák meg ugyanazt a transzformációt?

14.2. Riemann alaptétel

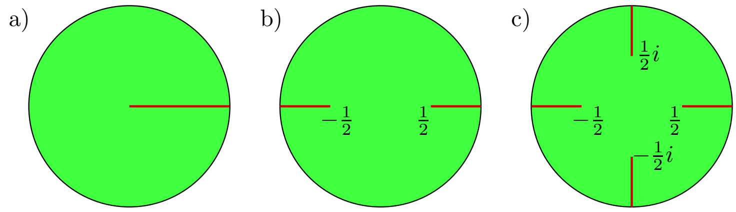
14.2.1. (5) Adjunk meg konform megfeleltetést (képletet) az ábrán látható bevágott negyedsík és az egységkör között.



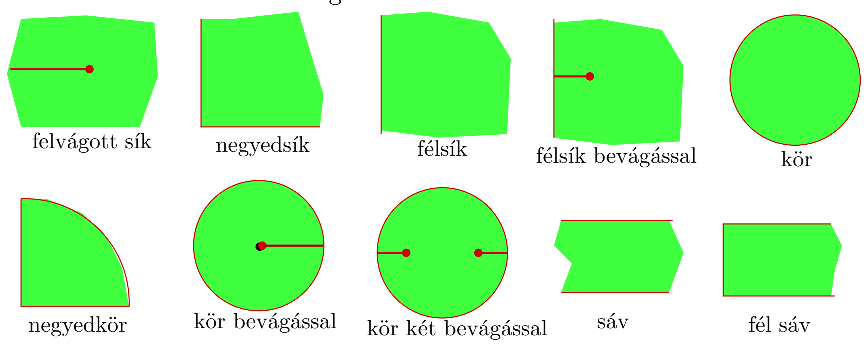
14.2.2. (5) Mutassunk példát (képletet) konform megfeleltetésre a $D_1 = \{z :\ |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$ és a $D_2 = D_1 \setminus (-\infty, 0]$ tartományok között.



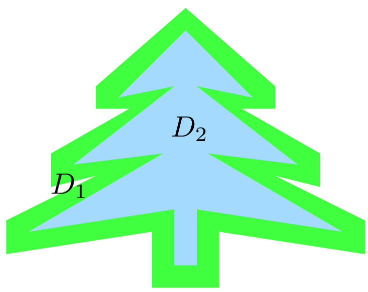
14.2.3. (7) Képezzük le az egységkörre:



14.2.4. (7) Az ábrán tízféle nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány látható. Keress közöttük konform megfeleltetéseket.



14.2.5. (9) Legyen D_1 az ábrán a külső, zöld színű tartomány, D_2 pedig a kék és a zöld rész együtt. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény reguláris D_1-en és bármely, a D_2-n reguláris g függvényre az $f \cdot g$ függvénynek létezik primitív függvénye D_1-en, akkor f analitikusan folytatható D_2-re.



Kapcsolódó feladat: 13.2.15

14.2.6. (7) Mutassunk példát (képletet) konform megfeleltetésre a $D_1 = \{z : \ |\operatorname{Im} z| < 1\}$ és a

$D_2 = \{z: \ |z| < 1 \text{ és } |z-1-i| > 1\}$
tartományok között.

Megoldás→

14.2.7. (6) Konstruáljuk meg a megadott tartományok konform leképezéseit az egységkörlapra!

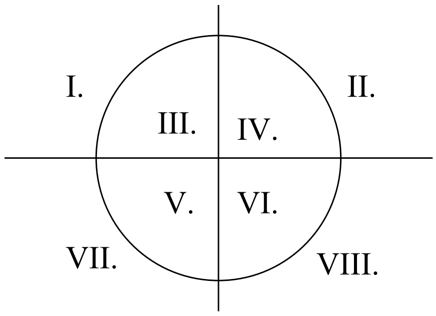
a) $\{z: \ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ b) $\{z: \ |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}$
c) $\{z: \ |z| < 1, \text{ vagy } \operatorname{Im} z < 0\}$ d) $\mathbb{C}\backslash[0,1]$

14.2.8. (5) Jelölje $\operatorname{Aut}(D)$ a D komplex tartomány konform automorfizmusainak csoportját. Mutassuk meg, hogy ha létezik $f : D \leftrightarrow D'$ konform leképezés, akkor $\operatorname{Aut}(D) \cong \operatorname{Aut}(D')$.

14.2.9. (5) Legyen $D_1 = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ 0 < \operatorname{Im} z\}$ és $D_2 = \{z: \ \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Mutassunk példát (képletet) $D_1 \to D_2$ konform leképezésre.

14.2.10. (7) Jelöljük a koordinátatengelyek és az egységkör által nyolcfelé vágott sík részeit római számokkal.

Konstruáljuk meg az összes lehetséges olyan konform transzformációt, amely ezeket a tartományokat egymás közt cseréli fel.



Hányféle lehet a képek elhelyezkedése?

14.2.11. (5) Képezzük le a megadott tartományokat konforman az $\operatorname{Im} w > 0$ félsíkra!

(a) $\{z: \ |z| > 1\}\backslash[-2,-1]$
(b) $\mathbb{C}\backslash[-1,0]\backslash[1,\infty)$
(c) $\{z: \ |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}\backslash\left[0, \frac{i}{2}\right]$
(d) $\{z: \ 0 < \arg z < \pi/2, \ |z| > 1\}\backslash[1+i,\infty)$

14.2.12. (7) Legyenek $F \subsetneq G$ komplex tartományok, $f : S(0,1) \leftrightarrow F$, $g : S(0,1) \leftrightarrow G$ konform leképezések, továbbá $f(0) = g(0)$. Bizonyítsuk be, hogy $|f'(0)| < |g'(0)|$.

14.3. Schwarz-lemma

14.3.1. (5) Adott a komplex síkon egy K kör, rajta kívül egy p pont. Bizonyítsuk be, hogy ha f olyan törtlineáris függvény, amire $f(K) = K$ és $f(p) = p$, akkor $|f'(p)| = 1$.

14.3.2. (6) Igazoljuk, hogy minden $D \subset \mathbb{C}$ tartományhoz és ebben rögzített a ponthoz egyértelműen létezik az az $r(a, D)$ sugár, amelyre van $f : D \leftrightarrow S\big(0, r(a, D)\big)$, $f(a) = 0$, $f'(a) = 1$ konform leképezés.

14.3.3. (6) Legyenek $F \subsetneq G$ és D komplex, egyszeresen összefüggő tartományok, $a \in F$, és $f : F \leftrightarrow D$, $g : G \leftrightarrow D$ konform leképezések úgy, hogy $f(a) = g(a)$. Ekkor $|f'(a)| > |g'(a)|$.

14.3.4. (5) Legyen $P = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ a pozitív félsík, $f : P \to P$ reguláris és $f(1) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy $|f'(1)| \leq 1$.

14.3.5. (7) A Schwarz-lemma segítségével igazoljuk, hogy ha
T, $R \in \operatorname{Aut}\big(S(0,1)\big)$ és $T(a) = R(a) = 0$,
akkor $T = cR$ valamilyen $|c| = 1$ konstanssal. Gondoljuk meg, hogy eszerint milyen elemei vannak $\operatorname{Aut}\big(S(0,1)\big)$-nek?

14.3.6. (7) Igazoljuk, hogy ha f reguláris az egységkörben és $|f(z)| < 1$, akkor

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

14.3.7. (6) Tegyük fel, hogy az $f : S(0,1) \to S(0,1)$ reguláris függvény gyökei $a_1, \ldots, a_n$. Ekkor

$$|f(z)| \leq \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{a_i - z}{1 - \overline{a_i} z} \right| \qquad (|z| < 1).$$

14.3.8. (7) Tegyük fel, hogy az $f \in O(|z| < 1)$ $\operatorname{Re} z > 0$-ba képez, és $f(0) = 1$. Ekkor

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

14.3.9. (7) Legyen $w : S(0,1) \to S(0,1)$ reguláris, $|a| < 1$. Ekkor

$$\text{a)} \left|\frac{w(z)-w(a)}{1-\overline{w(a)}w(z)}\right| \le \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \qquad \text{b)} |w'(a)| \le \frac{1-|w(a)|^2}{1-|a|^2}.$$

14.3.10. (7) Tegyük fel, hogy $w : S(0,1) \to S(0,1)$ reguláris függvény, és $w(\alpha) = 0$. Ekkor

$$\text{(a) } |w(z)| \le \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|; \qquad \text{(b) } |w'(a)| \le 1-|\alpha|^2.$$

14.3.11. (6) Legyen $a_1, a_2, \ldots$ komplex számsorozat, amire bármely k esetén $|a_k| < 1$ és $\operatorname{Re} a_k > \frac{1}{2}$. Legyen

$$z_0 = 0, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n + a_n}{1 + \overline{a_n} z_n}.$$

Igazoljuk, hogy $a_n \to 1$.

(IMC 2011/6 alapján)

14.3.12. (9) Legyen $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ a komplex egységkörlemez, és legyen $0 < a < 1$ valós szám. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, amire $f(a) = 1$ és $f(-a) = -1$.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \ge \frac{1}{a}.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha f-nek nincs gyöke, akkor

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \ge \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$

(Schweitzer-verseny, 2012)

Megoldás→

14.4. Kiterjesztés a határra

14.4.1. (10) Igaz-e a Caratheodory tétel megfelelője olyan tartomány esetén, ami nem egyszeresen összefüggő, hanem véges sok Jordan-görbe határolja?

14.4.2. (9) Bizonyítsuk be, hogy az $r_1 < |z| < R_1$ és $r_2 < |z| < R_2$ gyűrűk akkor és csak akkor konform ekvivalensek, ha $\dfrac{R_1}{r_1} = \dfrac{R_2}{r_2}$.

14.5. Tükrözési elv

14.5.1. (5) Az f függvény reguláris az $r < |z| < 1$ körgyűrűn, folytonos az egységkörvonalon, és (a) a körvonalon f valós; (b) $f \neq 0$, és a körvonalon $|f| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy a függvény analitikusan folytatható az $r < |z| < \frac{1}{r}$ gyűrűre.

14.5.2. (7) Legyen $D = \{z : \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2},\ |z| > 1\}$.

(a) Írjuk fel azt a φ konform leképezést, ami D-t megfelelteti az egységkörnek úgy, hogy $\varphi(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = i$, $\varphi(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -i$ és $\varphi(\infty) = 1$.

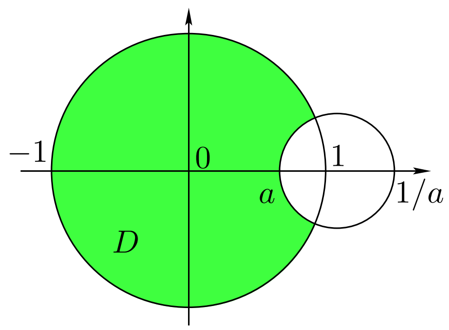
(b) Igazoljuk, hogy φ kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénnyé.

(c) Hány pólusa van a kiterjesztett φ-nek? Mi a rendje ezeknek a pólusoknak?

Megoldás→

Kapcsolódó feladat: 14.5.3

14.5.3. (7) Legyen $0 < a < 1$ és a D tartomány az egységkörlemez és az $(a, 1/a)$ átmérőjű kör különbsége.



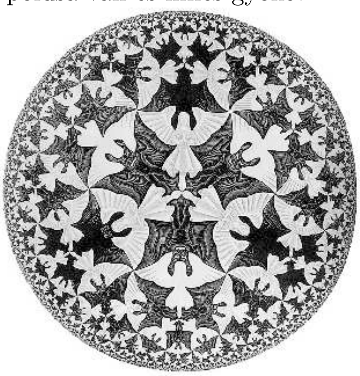
(a) Írjuk fel azt az f konform leképezést, ami D-t a $\operatorname{Re} z > 1$ félsíkba viszi úgy, hogy $f(a) = \infty$, $f(-1) = 1$ és $f(0) = 2$.

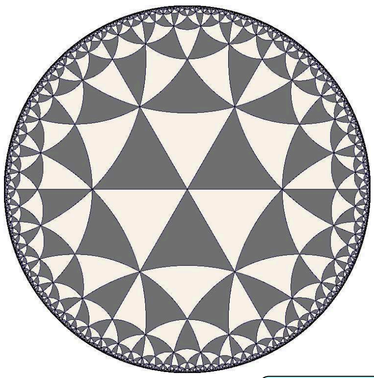
(b) Igazoljuk, hogy f kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénnyé.
(c) Hol veszi még fel a (kiterjesztett) függvény a 2 értéket?

Kapcsolódó feladat: 14.5.2

14.5.4. (5) Az f függvény reguláris és sehol sem 0 egy D konvex tartományon, aminek határa tartalmazza a valós tengely egy I intervallumát. A függvény folytonosan kiterjeszthető az I belsejére és ott $|f| = 1$. Bizonyítsuk be, hogy f analitikusan folytatható D tükörképére (a $\overline{D} = \{\overline{z} : z \in D\}$ halmazra).

14.5.5. (9) Bontsuk fel a Poincaré féle körmodellt olyan egybevágó háromszögekre, amelyeknek két 45 és egy 60 fokos szöge van, és színezzük ezeket felváltva feketére és fehérre. (Ld. M. C. Escher *Cirlce Limit IV — Heaven and Hell* c. fametszetét az ábrán). Létezik-e olyan, az egységkörben meromorf fügvény, aminek minden fekete háromszögben (ördög) pontosan egy gyöke van és nincs pólusa, továbbá minden fehér háromszögben (angyal) pontosan egy pólusa van és nincs gyöke?





Ötlet→

II. rész

Megoldások

15. fejezet

Megoldási ötletek és végeredmények

1.0.3. Adjuk meg az igazságtáblát!

$$A \vee (B \Longrightarrow A)$$

Végeredmény:

A	B	A ∨ (B ⇒ A)
I	I	I
I	N	I
N	I	N
N	N	I

←Vissza

1.0.6. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$. Írjuk fel az alábbi tulajdonságokat, illetve tagadásukat is formalizálva. Létezik-e a megadott tulajdonságú halmaz?

1. H-nak legfeljebb 3 eleme van.
2. H-nak nincs legkisebb eleme.
3. H bármely két különböző eleme között van harmadik H-beli.
4. Bármely számnál van nagyobb H-beli szám.

Végeredmény:

1. $\forall \quad x, y, z, w \in H \quad x = y \vee x = z \vee x = w \vee y = z \vee y = w \vee z = w$
2. $\forall \quad x \in H \quad \exists \quad y \in H \quad y < x$
3. $\forall \quad x, y \in H \quad x < y \ \exists \quad z \in H \quad x < z < y$
4. $\forall \quad x \in \mathbb{R} \quad \exists \quad y \in H \quad x < y$

←Vissza

1.0.13. Hány olyan $H \subset \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz van, amelyre teljesül, hogy $\forall x \ ([(x \in H) \wedge (x + 1 \in H)] \Rightarrow x{+}2 \in H)$?

Megoldási ötlet: Az elejére vegyünk hozzá! $j(n+1) = j(n) + j(n-1) + 1$

←Vissza

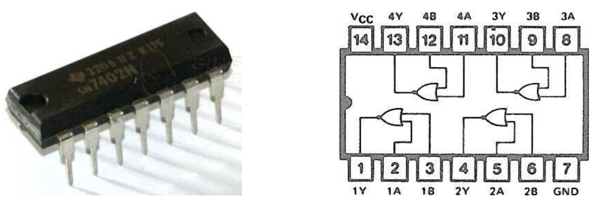
1.0.20. Tegyük fel, hogy
(a) nem mindenki hullamosó, aki szereti a spenótot;
(b) minden zenerajongó hullamosó, vagy legalábbis nem szereti a spenótot;
(c) vagy az igaz, hogy aki nem hullamosó, az zenerajongó, vagy pedig az, hogy aki hullamosó, az nem zenerajongó.
Következik-e a fentiekből, hogy aki szereti a spenótot, az nem zenerajongó?
(KöMaL, 1975. december, F. 2001., [Pósa Lajos feladata] alapján)

Megoldási ötlet: Rajzoljuk le a hullamosók, spenótevők és zenerajongók halmazait Venn-diagramon.

←Vissza

1.0.25. Legyen $\mathrm{NOR}(x, y) = \neg(x \vee y)$. Csupán a NOR műveletet felhasználva sokféle kifejezést készíthetünk, pl. $\mathrm{NOR}(x, \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x, y), \mathrm{NOR}(z, x)))$. (a) Mutassuk meg, hogy bármilyen n-változós logikai függvényt előállíthatunk így!

(b) Mutassunk példát a NOR helyett más kétváltozós logikai függvényre, amikre ugyanez a tulajdonság teljesül!



A Texas Instruments SN7402N integrált áramköre, ami 4 független NOR logikai kaput tartalmaz

Végeredmény: Elég a $\wedge$, $\vee$ és $\neg$ műveleteket felírni:

$$x \wedge y = \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x,x), \mathrm{NOR}(y,y); \quad x \vee y = \mathrm{NOR}(\mathrm{NOR}(x,y), \mathrm{NOR}(x,y);$$
$$\neg x = \mathrm{NOR}(x,x).$$

Egy másik „univerzális” művelet a $\mathrm{NAND}(x,y) = \neg(x \wedge y)$ (Az SN7400N IC-ben négy független NAND kapu van.)

←Vissza

1.0.34. Bizonyítsuk be az úgynevezett *binomiális tételt*, azaz, hogy

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Megoldási ötlet: Használjuk a 1.0.33 feladatot és teljes indukciót.

←Vissza

1.0.35. Melyik nagyobb? 639^9 vagy $638^9 + 9 \cdot 638^8$?

Megoldási ötlet: Használjuk a binomiális tételt.

←Vissza

1.0.38. Legyen $A = \{1, 2, ..., n\}$ és $B = \{1, ..., k\}$.

1. Hány $f : A \to B$ függvény található?
2. Hány $f : A \to B$ injektív függvény található?
3. Hány $f : A_0 \to B$ függvény található, ha A_0 az A tetszőleges általunk választott részhalmaza lehet?

Végeredmény:

1. $|B|^{|A|} = k^n$.
2. $\binom{k}{n} \cdot n! = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.
3. $(|B|+1)^{|A|} = (k+1)^n$.

←Vissza

1.0.44. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán:

1. 2 fehér bástyát?
2. 2 fehér bástyát, hogy ne üssék egymást?
3. 1 fehér és 1 fekete bástyát?
4. 1 fehér és 1 fekete bástyát hogy ne üssék egymást?

Végeredmény:

1. $\binom{64}{2}$,
2. $\frac{1}{2} \cdot 64 \cdot 49$,
3. $64 \cdot 63$,
4. $64 \cdot 49$.

←Vissza

1.0.46. Igaz-e tetszőleges A, B, C halmazokra, hogy
(a) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
(b) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$;
(c) $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cup C)$?

Végeredmény: (a) igen; (b) igen; (c) nem.

←Vissza

1.0.58. Az $A_1, A_2, \ldots$ állítások egy sorozata. Mi következik az alábbi feltételekből?
a) A_2, A_3 igaz, és ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.
b) Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz, továbbá A_{2^n} hamis minden n-re.
c) Ha A_n igaz, akkor A_{n-1} is igaz, és A_{10} hamis.
d) Ha A_n hamis, akkor A_{n+1} is hamis, továbbá A_1 igaz.
e) A_1 igaz, és ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.

Végeredmény:
(a) A_n igaz $n \geq 2$-re.
(b) A_n hamis minden n-re.
(c) A_n hamis $n \geq 10$-re.
(d) A_1 igaz.
(e) A_n igaz minden n-re.

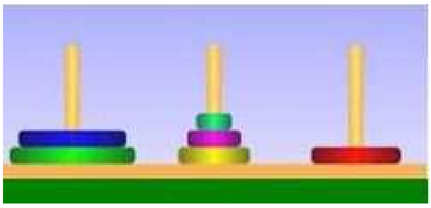
←Vissza

1.0.63. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{tg} 1^o$ irracionális!

Megoldási ötlet: Milyen szögről tudjuk biztosan, hogy a tangense irracionális?

←Vissza

1.0.64. Legalább hány lépés kell a 64 emelet magas Hanoi torony átrendezéséhez?



Hanoi tornyai

Megoldási ötlet: Indukció; $l_{n+1} = 2l_n + 1$.

←Vissza

1.0.67. Hány részre osztja a teret n sík, ha közülük semelyik négy nem megy át egy közös ponton és semelyik 3 nem tartalmaz közös egyenest?

Megoldási ötlet: Használjuk a 1.0.66 feladat eredményét.

←Vissza

1.0.75. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

Megoldási ötlet: Az alsó becslés triviális, a felső például indukcióval igazolható.

←Vissza

1.0.88. Legyen $a, b > 0$. Milyen x-re minimális $\dfrac{a + bx^4}{x^2}$?

Megoldási ötlet: Számtani-mértani közepek

←Vissza

1.1.9. Mutassuk meg, hogy a komplex számok testét nem lehet rendezni úgy, hogy a rendezési axiómák teljesüljenek.

Megoldási ötlet: A test- és rendezési axiómákból vezessük le, hogy tetszőleges rendezett testben bármely x-re $x^2 \geq 0$.

←Vissza

1.1.13. Teljesül-e a racionális függvények rendezett testében az Arkhimédészi axióma?

Megoldási ötlet: Az $x/1$ tört nagyobb az összes pozitív egésznél.

←Vissza

1.1.14. Adott egy R rendezett test, aminek $\mathbb{Q}$ résztteste. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$(\forall a, b \in R)\ \Big((1 < a < b < 2) \Rightarrow \big((\exists q \in \mathbb{Q})\ (a < q < b)\big)\Big),$$

akkor R-ben teljesül az Arkhimédészi axióma.

Megoldási ötlet: Tegyük fel, hogy az $L \in R$ elem minden pozitív egésznél nagyobb. Legyen $a = 1 + \frac{1}{2L}$ és $b = 1 + \frac{1}{L}$.

←Vissza

1.1.16. Milyen rendezett testekben értelmezhetjük az egészrészfüggvényt?

Végeredmény: Arkihmédészien rendezett testekben.

←Vissza

1.1.17. Teljesül-e a racionális törtek rendezett testében a Cantor-axióma?

Megoldási ötlet: Legyen $I_n = \left[n; \frac{x}{n}\right]$.

←Vissza

1.1.19. Ismeretes, hogy minden n pozitív egész számhoz található olyan prímszám, amely n^3 és $(n+1)^3$ közé esik. Ennek felhasználásával bizonyítsuk be, hogy van olyan $a > 1$ valós szám, amelyre a^{3^k} egész része prímszám, minden természetes k-ra.

(KöMaL F. 2405., 1983. február)

Megoldási ötlet: Vegyünk egy olyan, prímekből álló $p_1, p_2, p_3, \ldots$ végtelen sorozatot, amire $p_k^3 + 2 \le p_{k+1} \le (p_k + 1)^3 - 2$. Mi lehet az ezekhez tartozó a szám?

←Vissza

1.1.21. A valós számok axiómái közül melyek teljesülnek és melyek nem a racionális számok halmazára (a szokásos műveletekkel és rendezéssel)?

Végeredmény: Csak a Cantor-axióma nem teljesül.

←Vissza

1.1.45. Bizonyítsuk be, hogy ha egy R rendezett testben minden konvex halmaz intervallum, akkor a testben igaz a teljességi tétel: minden nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja.

Megoldási ötlet: A felső korlátok halmaza konvex.

Megoldás→ ←Vissza

1.1.46. Teljesül-e a racionális törtek rendezett testében a teljességi tétel: minden nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja?

Megoldási ötlet: Vizsgáljuk $\mathbb{R}$-et, mint a racionális törtek egy részhalmazát.

Megoldás→ ←Vissza

1.1.47. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a teljességi tétel, akkor teljesül az arkhimédészi axióma is.

Megoldási ötlet: Mi a pozitív egészek legkisebb felső korlátja?

←Vissza

1.1.48. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül a teljességi tétel, akkor teljesül a Cantor-axióma is.

Megoldási ötlet: Legyen $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset$ egy tetszőleges, korlátos zárt intervallumokból álló lánc. Mutassuk meg, hogy $\sup\{a_1, a_2, \ldots\}$ mindegyik intervallumnak eleme.

←Vissza

1.1.49. Mutassunk példát olyan konvex halmazra a racionális tört függvények testében, ami nem intervallum.

Megoldási ötlet: Nevezzünk egy racionális törtet *kicsinek*, ha van nála nagyobb valós szám, illetve *nagynak*, ha minden valós számnál nagyobb. Mutassuk meg, hogy sem a kicsi, sen a nagy törtek halmaza nem intervallum.

(Egy tört akkor kicsi, ha legfeljebb nulladfokú, azaz a számláló foka nem nagyobb, mint a nevező foka.)

←Vissza

1.1.50. (a) Legyen I_α ($\alpha \in A$) korlátos, zárt intervallumok egy rendszere úgy, hogy közülük bármelyik kettőnek létezik közös pontja. Igazoljuk, hogy $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha \neq \emptyset$. (1-dimenziós Helly-tétel)

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(c) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

Megoldási ötlet: Vegyük az intervallumok alsó végpontjainak a szuprémumát.

←Vissza

1.1.51. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel, akkor a testben igaz a teljességi tétel.

Megoldási ötlet: Legyen H nem üres, felülről korlátos halmaz. Tekintsük azokat a zárt intervallumokat, amelyek alsó végpontja eleme, felső végpontja pedig felső korlátja H-nak.

←Vissza

1.1.52. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall a \in H\ \exists b, c\ ([b, c] \subset H,\ b < a < c)$. Melyik halmaz nyílt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a, b); \qquad [a, b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Végeredmény: Az $\emptyset$, $\mathbb{R}$, (a, b) és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazok nyíltak, az $[a, b]$ és $\mathbb{Q}$ halmazok nem nyíltak.

←Vissza

1.1.54. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *zárt*nak, ha a komplementere nyílt. Melyik halmaz zárt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a, b); \qquad [a, b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Végeredmény: Az $\emptyset$, $\mathbb{R}$ és $[a, b]$ halmazok zártak, az (a, b), $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazok nem zártak.

←Vissza

1.1.58. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *összefüggő*nek, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{R}$ összefüggő;

b) minden intervallum összefüggő.

Megoldási ötlet: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és tegyük fel indirekte, hogy az A és B diszjunkt nyílt halmazok együttesen lefedik I-t, továbbá $a \in A \cap I$ és $b \in B \cap I$, ahol mondjuk $a < b$. Vizsgáljuk a $c = \sup(A \cap [a, b])$ számot.

←Vissza

1.1.60. Igazoljuk, hogy ha egy R rendezett test összefüggő, akkor a testben igaz az Arkhimédészi és a Cantor-axióma is.

Megoldási ötlet: R-be beágyazhatjuk a racionális számokat; úgy is vehetjük, hogy $\mathbb{Q}$ rendezett részteste R-nek.

(a) Nevezzük R elemét elemét *kicsinek*, ha van nála nagyobb pozitív egész szám, illetve *nagynak*, ha minden pozitív egész számnál nagyobb. Mutassuk meg, hogy a kicsi és a nagy elemek halmaza is nyílt.

(b) Legyen $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset$ egy tetszőleges, korlátos zárt intervallumokból álló lánc. Vizsgáljuk az $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (-\infty, a_i)$ és $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (b_i, \infty)$ halmazokat.

←Vissza

1.1.61. Legyen K zárt intervallum, és I_α $(\alpha \in A)$ nyílt intervallumoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha \in B} I_\alpha$. (Borel fedési tétele)

Megoldási ötlet: Legyen $K = [a, b]$, és $\mathcal{F}$ a fedő halmazrendszer. Vegyük azoknak a $c \in [a, b]$ elemeknek a halmazát, amire $\mathcal{F}$ tartalmazza $[a, c]$ egy véges fedését.

←Vissza

1.1.62. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz Borel fedési tétele, akkor a test izomorf a valós számok testével.

Megoldási ötlet: Elég igazolni a legkisebb felső korlát tételét.

Vegyünk egy tetszőleges H felülről korlátos, nem üres halmazt, és legyen K a H felső korlátainak halmaza. Válasszunk ki egy-egy $a \in H$ és $b \in K$ elemet.

Lefedi-e az $[a,b]$ intervallumot az $\mathcal{F} = \big\{(-\infty, c) : c \in H\big\} \cup \big\{(d, \infty) : d \in K\big\}$ halmazrendszer?

←Vissza

1.1.63. Legyen $K \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt halmaz, és I_α $(\alpha \in A)$ nyílt halmazoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in B} I_\alpha$ (Minden korlátos, zárt halmaz kompakt.)

Megoldási ötlet: Vegyük hozzá a fedéshez K komplementumát.

←Vissza

1.1.64. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(IMO 1985/6)

Megoldási ötlet: Legyen $f_1(x) = x$ és $f_{n+1}(x) = f_n(x)\big(f_n(x) + \frac{1}{n}\big)$.

(a) Az egyértelműséghez igazoljuk, hogy ha $x < y$, és az $(f_n(x))$ és az $(f_n(y))$ sorozat is monoton nő, akkor $f_n(y) - f_n(x) > n(y - x)$.

(b) A megfelelő kezdőelem létezéséhez nevezzünk egy x számot kicsinek, ha van olyan n, amire $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$, illetve nagynak, ha van olyan n, amire $f_n(x) \ge 1$. A létezést sokféleképpen bizonyíthatjuk, például:

- A Cantor-axiómát alkalmazzuk azokra az $[a_n, b_n]$ intervallumokra, amikre $f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n)$ és $f_n(b_n) = 1$;
- Vesszük a kicsi számok szuprémumát;
- Vesszük a nagy számok infimumát;
- Ellenőrizzük, hogy a kicsi és a nagy számok halmaza is nemüres és nyílt;
- Az 1-dimenziós Helly-tételt alkalmazzuk az olyan intervallumokra, amelyek alsó végpontja kicsi, nagy végpontja pedig nagy.

←Vissza

1.1.66. Legyen $(R, <)$ egy rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy $<$ trichotóm és tranzitív kétváltozós reláció). Keressünk a következő állítások között ekvivalenseket. Adjunk közvetlen bizonyítást az $(a) \Rightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(d) \Rightarrow (c)$ stb. implikációk közül minél többre, illetve mutassunk ellenpéldát azokban az esetekben, amikor az implikáció nem igaz.

(a) R-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja.

(b) R-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja.

(c) R-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel.

(d) R minden konvex részhalmaza intervallum.

(e) R-ben igaz Borel fedési tétele, azaz minden korlátos zárt intervallumnak bármely nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés.

(f) R minden konvex részhalmaza összefüggő.

(g) R minden intervalluma összefüggő.

(h) R összefüggő.

Megoldási ötlet: A kételemű rendezett halmazra az (a), (b), (c), (d), (e) állítások igazak, az (f), (g), (h) viszont hamis.

(a)⇔(b): Vegyük az alsó korlátok legkisebb felső korlátját, illetve a felső korlátok legnagyobb alsó korlátját.

(a)⇒(c): Vegyük az alsó végpontok szuprémumát.

(c)⇒(a): A 1.1.51 feladathoz hasonlóan, tekintsük azokat a zárt intervallumokat, amelyek alsó végpontja eleme, felső végpontja pedig felső korlátja a halmaznak.

(a),(b)⇒(d): Vegyük a halmaz infimumát és szuprémumát.

(d)⇒(a): Bármely halmaz felső korlátai konvex halmazt, tehát intervallumot alkotnak. Vegyük ennek az intervallumnak az alsó végpontját. (Lásd az 1.1.45 feladatot.)

(a)⇒(e): A 1.1.61 feladathoz hasonlóan, legyen $[a, b]$ az intervallum, és $\mathcal{F}$ a fedő halmazrendszer. Vegyük azoknak a $c \in [a, b]$ elemeknak a halmazát, amire $\mathcal{F}$ tartalmazza $[a, c]$ egy véges fedését.

(e)⇒(c): Legyen I_0 az egyik zárt intervallum, és $I_x : x \in X$ a többi. Lefedik-e az $R \setminus I_x$ halmazok I_0-t?

(h)⇒(e): Ha egy halmaznak nincs legkisebb felső korlátja, akkor a felső korlátjai, és a nem felső korlátjai is nemüres nyílt halmazt alkotnak.

(f)⇒(g)⇒(h) triviális.

(h)⇒(f): Tegyük fel, hogy a $K \subset R$ konvex halmazt lefedik a diszjunkt, nyílt A, B halmazok, $a \in A \cap K$, $b \in B \cap K$ és $a < b$. Konstruáljuk meg ezekből R egy felbontását két diszjunkt nyílt halmazra.

←Vissza

2.1.12. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozatnak van legkisebb vagy legnagyobb értéke.

Megoldási ötlet: Mutassuk meg, hogy ha az $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak nincs maximuma, akkor létezik a_n-nek létezik egy $a_{n_k} \to \sup A$ részsorozata.

←Vissza

2.1.43. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a_n + b_n)$ konvergens és (b_n) divergens, akkor (a_n) is divergens.

Megoldási ötlet: Elég belátni, hogy ha (c_n) konvergens és (d_n) divergens, akkor $(c_n + d_n)$ is divergens.

←Vissza

2.1.51. Tegyük fel, hogy $a_n \to a$ és $a < a_n$ minden n-re. Bizonyítsuk be, hogy a_n átrendezhető monoton csökkenővé.

Megoldási ötlet: Vizsgáljuk a $b_n := \max\{a_k : k \geq n\}$ sorozatot.

←Vissza

2.2.11. Határozzuk meg az alábbi, rekurzióval definiált sorozat határértékét! $a_1 = 0,\ a_{n+1} = 1/(1 + a_n)\ (n = 1, 2, \ldots)$.

Megoldási ötlet: l. a 2.2.9 feladatot.

←Vissza

2.4.10. Számítsuk ki:

$$\lim \frac{n^{100}}{1,1^n} = ?$$

Megoldási ötlet: Lásd 2.2.4 megoldását

←Vissza

2.4.19. Legyen $a > 0$.

$$\lim \sqrt[n]{n + a^n} = ?$$

Megoldási ötlet: Lásd 2.4.6 megoldását.

←Vissza

2.4.22. Konvergens-e

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}?$$

Megoldási ötlet: Ellenőrizzük a Cauchy-feltételt.

←Vissza

2.6.8. Melyik nagyobb? $1000001^{1000000}$ vagy $1000000^{1000001}$

Megoldási ötlet: Vizsgáljuk a $\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot.

←Vissza

2.8.16. Mutassuk meg, hogy ha $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n^2}$, akkor (a_n) konvergens.

Megoldási ötlet: Használjuk a 2.7.2 feladat gondolatmenetét.

←Vissza

3.2.23. Tegyük fel, hogy $g(x) = \lim_{t \to x} f(t)$ létezik minden pontban. Bizonyítsuk be, hogy $g(x)$ folytonos.

Megoldási ötlet: átviteli elv + átlós módszer

←Vissza

4.1.32. Adjunk zárt képletet $x + 2x^2 + \cdots + nx^n$-re. Számítsuk ki ennek alapján az

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \ldots + \frac{n}{3^n}$$

összegeket!

Megoldási ötlet: deriváljuk $1 + x + \cdots + x^n$-et.

←Vissza

4.8.7. $A =?$, $B =?$ ha $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + o(x^4)$.
$\operatorname{ctg} x - 1/x = \dfrac{(A-B)x}{1 + Bx^2} + o(?)$

Megoldási ötlet: $\operatorname{ctg} x - 1/x = \frac{(A-B)x}{1+Bx^2} + o(?)$

←Vissza

5.2.20. (a) Keressünk legalább ötféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ integrált ki lehet számítani.

(b) Keressünk legalább ötféle helyettesítést, amivel az $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ integrált ki lehet számítani.

Megoldási ötlet: (a) A kézenfekvő $x = \operatorname{sh} y$ és $x = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$ helyettesítésekből az $e^z = u$, az $e^y = 1/v$ választással, vagy hiperbolikus azonosságokkal (pl. $\operatorname{sh} z = \dfrac{2\operatorname{th}(z/2)}{1-\operatorname{th}^2(z/2)} = \dfrac{2\operatorname{cth}(z/2)}{\operatorname{cth}^2(z/2)-1} = \dfrac{\operatorname{th} z}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 z}} = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 z - 1}}$) gyárthatunk további működő helyettesítéseket:

$$x = \frac{u^2-1}{2u}; \qquad x = \frac{2v}{v^2-1}; \qquad x = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \qquad x = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}.$$

(b) Itt a $x = \operatorname{ch} y$, az $x = \dfrac{1}{\cos z}$ és az $x = \dfrac{1}{\sin w}$ helyettesítésekből is kiindulhatunk. Néhány működő helyettesítés:

$$x = \operatorname{ch} z; \qquad x = \frac{u^2+1}{2u}; \qquad x = \frac{1+t^2}{1-t^2}; \qquad x = \frac{s^2+1}{s^2-1};$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}; \qquad x = \frac{1}{\sqrt{q^2-1}}.$$

Egy további helyettesítés, ami mindkét integrál esetén működik: $w = \sqrt{x^2 \pm 1} - x$.

←Vissza

5.2.34.

$$\lim_{0+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, \mathrm{d}t}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\ \ \mathrm{d}x} = ?$$

Megoldási ötlet: L'Hospital.

←Vissza

5.3.23. Mi az $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi$, $\varphi \in [-\alpha, \alpha]$ görbeív súlypontja?

Megoldási ötlet: A súlypont x-koordinátája

$$\frac{\int_a^b x\sqrt{x'^2+y'^2}}{\int_a^b \sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

←Vissza

5.3.44. Mennyi az $y = x^2$ parabola ívhossza $x = 0$-tól a-ig?

Megoldási ötlet: Az ívhosszképlet $\sqrt{x^2+1}$ integrálására vezet. Lásd az 5.2.20 feladatot.

←Vissza

5.3.52. Mennyi az $r(\theta) = a + a\cos\theta$, $(\theta \in [\pi/4, \pi/4])$ görbe ívhossza?

Megoldási ötlet: Polárkoordinátás ívhosszképlet.

←Vissza

5.3.54. $f := \frac{1}{x}|_{[0,\infty)}$. Mennyi az f grafikonjának x-tengely körüli forgatásával keletkező végtelen „tölcsér” felszíne, térfogata?

Végeredmény: Felszín végtelen, térfogat véges.

←Vissza

5.4.1. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ folytonos görbe, mely lefedi $[0,1] \times [0,1]$-et. Lehet-e γ korlátos változású?

Megoldási ötlet: Nem. Tekintsünk egy $1/n$-es rácsot a négyzeten. Csúcspontjai ősképeihez, mint felosztáshoz tartozó megváltozás $> n^2 \cdot 1/n$.

←Vissza

5.4.2. Igazoljuk, hogy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pontosan akkor folytonos és korlátos változású, ha előáll két monoton folytonos függvény összegeként.

Megoldási ötlet: A megváltozásfüggvény és magának a függvénynek a különbsége monoton.

←Vissza

5.5.1. Legyen f folytonos, $g(x) = \begin{cases} c & \text{ha } x < \frac{a+b}{2} \\ d & \text{ha } x > \frac{a+b}{2} \\ e & \text{ha } x = \frac{a+b}{2} \end{cases}.$

$$\int_a^b f\ dg = ?$$

Megoldási ötlet: $f(\frac{a+b}{2})(d-c)$.

←Vissza

5.5.14. Például a Legendre-formulából (a $n!$ prímtényezős felbontásából) tudjuk, hogy

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Bizonyítsuk be ebből, hogy $\pi(x) < cx$ valamilyen pozitív c konstanssal.

Megoldási ötlet: Legyen $f(x) = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p}$. Ekkor $\pi(x) = \int_{3/2}^{x} \frac{t}{\log t} \mathrm{d}f(t)$. Integráljunk parciálisan.

←Vissza

5.6.25. Konvergens-e?

$$\int_0^3 \frac{\cos t}{t} \ \mathrm{d}t$$

Megoldási ötlet: $\frac{\cos t}{t} > \frac{1/2}{t}$. Vagy: $\frac{\cos t}{t} > \frac{1-\frac{t^2}{/2}}{t}$. Vagy: parciálisan $1/t = u', \cos t = v$ propriusra vezet.

←Vissza

5.6.26.

$$\int_0^{\pi/2} \log\cos x \ \ \mathrm{d}x = ?$$

Megoldási ötlet: Konvergens (vagy nagyságrend-becsléssel, vagy parciálisan: $1 = u', \log\sin x = v$). Helyettesítéssel $\int_0^{\pi/2} = \int_{\pi/2}^{\pi}$. Tehát $\int_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\sin 2t \ \ dt$ helyettesítéssel. Itt $\sin 2t$ helyett beírjuk $2\sin t \cos t$-t, s logaritmusok összegére bontjuk. Adódik, hogy $= -\frac{\pi}{2}\log 2$

←Vissza

6.0.31. Konvergens vagy divergens?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

Megoldási ötlet: Használjuk a 6.0.30 kondenzációs lemmát.

←Vissza

6.0.32. $\varepsilon > 0$. Konvergens vagy divergens?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$$

Megoldási ötlet: Használjuk a 6.0.30 kondenzációs lemmát.

←Vissza

6.0.35. Igaz, vagy hamis?

(1) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot a_n)$ is konvergens.

(2) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} \cdot a_n)$ is divergens.

(3) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ is konvergens.

(4) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ is divergens.

Megoldási ötlet: Alkalmazzuk a Dirichlet-, és az Abel-kritériumokat.

←Vissza

8.1.31. $\lim_{(0,0)}(x^2 + y^2)^{x^2 y^2} =?$

Végeredmény: 1

←Vissza

8.1.77. Mi a $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ függvény deriváltja?

Végeredmény: A tr függvény deriváltja a konstans tr. :-)

←Vissza

9.0.14. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $0 \le c \le d < \infty$-hez létezik olyan korlátos, zárt halmaz, aminek belső mértéke c, külső mértéke d.

Megoldási ötlet: Kövér Cantor-halmaz.

←Vissza

9.0.19. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető. Igaz-e, hogy az $\bigcup\limits_{a\in A} [0, a]$ halmaz (az origót az A-beli pontokkal összekötő szakaszok uniója) mérhető?

Végeredmény: Nem.

Megoldás→ ←Vissza

10.1.9. Tekintsünk egy $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt egydimenziós görbének. Mikor rektifikálható ez a görbe? Mi a hossza?

Végeredmény: Akkor rektifikálható, ha korlátos változású. A görbe hossza a totális variáció.

←Vissza

10.2.4. Mik azok a differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amire a következő állítás teljesül? Ha g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^2$-ben, akkor

$$\int_g e^x \cos y \, \mathrm{d}x = \int_g f(x, y) \, \mathrm{d}y.$$

Megoldási ötlet: Az $\big(- e^x \cos y, f(x, y)\big)$ függvény vonalintegrálja minden zárt görbén nulla.

←Vissza

10.2.5. Mutassunk példát olyan folytonos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényre, aminek minden zárt rektifikálható görbén 0 a vonalintegrálja, de nem mindenhol differenciálható.

Végeredmény: $f(x, y) = \big(|x|, 0\big)$

←Vissza

10.3.9. Legyen $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Keressünk olyan differenciálható $G \to \mathbb{R}^3$ vektormezőt, ami rotációmentes (azaz a „keresztbe vett” parciális deriváltjai megegyeznek), de nincs primitív függvénye.

Megoldási ötlet: Legyen $\varphi(p)$ a p pont és az (x, x, x) egyenes által meghatározott félsík iránya (valamilyen rögzített iránytól mért szög.) Ez a szög lokálisan értelmezhető, de globálisan nem. Legyen $f = \operatorname{grad} \varphi$.

←Vissza

10.3.12. Egyszeresen összefüggő-e a $H = \mathbb{R}^3 \setminus \{(\cos t, \sin t, e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ halmaz?

Végeredmény: Igen.

←Vissza

10.4.7. Az $F \subset \mathbb{R}^3$ konvex sokszöget a g zárt, irányított töröttvonal határolja. A síklap jobbkézszabály szerint irányított területvektora $\vec{A}$. Igazoljuk, hogy

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \int_g \mathbf{x} \times \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Megoldási ötlet: Igazoljuk először háromszögre. A háromszög területvektorát két oldalvektor vektoriális szorzataként írhatjuk fel.

←Vissza

10.4.11. Legyen $B = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$ és $f(x,y,z) = (yz, x-z, z-y)$.

$$\int_{\partial B} \left\langle f,\ \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right\rangle = ?$$

Megoldási ötlet: Alkalmazzuk a divergenciatételt.

←Vissza

10.4.12. Legyen $B = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$ és $f(x,y,z) = (yz, x-z, z-y)$.

$$\int_{\partial B} f \times \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ?$$

Megoldási ötlet: Alkalmazzuk a Stokes-tételt.

←Vissza

10.4.14. Legyen $f_1(x,y,z) = xyz$ és $f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Konstruáljunk olyan $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az (f_1, f_2, f_3) vektormező felületi integrálja tetszőleges zárt gömbfelületen megegyezik a gömb térfogatával.

Megoldási ötlet: Olyan f_3-t keressünk, amire $\operatorname{div}(f_1, f_2, f_3) = 1$.

←Vissza

11.1.3. Milyen kicsi lehet egy végtelen σ-gyűrű számossága?

Végeredmény: Kontinuum.

←Vissza

11.1.9. (a) Igazoljuk, hogy megszámlálható sok sűrű G_δ halmaz metszete sűrű G_δ.

(b) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q} \in F_\sigma(\mathbb{R}) \setminus G_\delta(\mathbb{R})$.

Megoldási ötlet: (a) Alkalmazzuk a Cantor-axiómát vagy a Baire-kategória-tételt.

(b) A $\mathbb{Q}$ halmaz F_σ, mert megszámlálható. Ha a $\mathbb{Q}$ halmaz G_δ lenne, akkor az üres halmaz is előállna megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszeteként.

←Vissza

11.1.11. Hány Borel-halmaz van $\mathbb{R}^n$-ben?

Megoldási ötlet: Kontinuum.

Legyen B_0 a Borel-halmazok valamelyik kontinuumnál nem nagyobb generátorrendszere, például a nyílt körlemezek halmaza, és definiáljuk a B_α Borel-osztályokat transzfinit rekurzióval:

$$B_{\alpha+1} = (B_\alpha)_\sigma \cup (B_\alpha)_\delta,$$

és legyen

$$B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta,$$

ha α limeszrendszám.

Mutassuk meg, hogy B_{ω_1} már mindenképpen σ-algebra, és $\alpha < \omega_1$ esetén $|B_\alpha| = 2^{\aleph_0}$.

←Vissza

11.2.16. Igazoljuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}$ olyan halmaz, amelyre bármely $a < b$ esetén $\overline{\lambda}((a,b) \cap H) < \dfrac{99}{100}(b-a)$, akkor H nullmértékű.

Megoldási ötlet: Vegyünk egy fedést, és konstruáljunk ebből legfeljebb $\frac{99}{100}$-szor akkora fedést.

Megjegyzés: Az állítás magasabb dimenzióban is igaz.

←Vissza

11.2.17. Megadható-e kontinuum sok $1/2$ Lebesgue-mértékű mérhető halmaz $[0,1]$-ben úgy, hogy közülük bármely kettő metszetének mértéke $1/4$ legyen?

Megoldási ötlet: Cseréljük ki a halmazokat olyan halmazokra, amelyek véges sok, racionális végpontú intervallum egyesítései.

Megoldás→ ←Vissza

11.2.25. (a) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(A) > 0$, akkor $A - A$ tartalmaz 0 körüli gömböt. (Steinhaus tétele)

(b) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A + B$ belseje nemüres.

(c) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ pozitív mértékű mérhető és $B \subset \mathbb{R}^p$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $A + B$ belseje nemüres.

Megoldási ötlet: Vegyünk olyan, azonos méretű, tengelypárhuzamos K_A és K_B kockákat, amikre $\lambda(K_A \cap A) > \frac{99}{100}\lambda(K_A)$, illetve $\overline{\lambda}(K_B \cap B) > \frac{99}{100}\lambda(K_B)$.

Megoldás→ ←Vissza

11.4.13. Igazoljuk a Borel–Cantelli-lemma segítségével, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n és $\int_A f_n d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.

Megoldási ötlet: Alkalmazzuk a Borel–Cantelli-lemmát a $B_n = \{f_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ halmazsorozatra.

←Vissza

11.4.14. Igazoljuk a Beppo Levi tétel segítségével, hogy ha f_n nemnegatív és μ-mérhető a μ-mérhető A-n, és $\int_A f_n d\mu < 1/n^2$, akkor $f_n \to 0$ μ-m.m.

Megoldási ötlet: Legyen $f = \lim f_n$ és $g_n = f - f_n$.

←Vissza

11.6.1. Egészítsük ki úgy, hogy igaz legyen: ha $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex, és . . . ., akkor f abszolút folytonos.

Megoldási ötlet: Mi a határérték az intervallum végpontjaiban?

←Vissza

11.6.2. Nevezzünk egy μ véges Borel-mértéket folytonosnak, ha az $x \mapsto \mu((-\infty, x))$ függvény folytonos. Mutassunk példát olyan mértékre, ami folytonos, de nem abszolút folytonos.

Megoldási ötlet: Vegyük a Cantor-függényt.

←Vissza

11.6.3. Mi a Lebesgue-mérték Radon–Nikodym-deriváltja?

Végeredmény: Konstans 1.

←Vissza

11.6.5. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz, és $\forall x, y$ $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
(a) Igazoljuk, hogy f valamilyen mérhető g függvény (Lebesgue-) integrálfüggvénye.
(b) Mutassuk meg, hogy $|g| \leq K$ m.m.

Megoldási ötlet: Vegyük a Radon–Nikodym-deriváltat.

←Vissza

11.6.6. Igaz-e, hogy ha f abszolút folytonos, és szigorúan monoton növő $[a, b]$-n, akkor az inverze is abszolút folytonos?

Megoldási ötlet: Nem. Legyen $h(x)$ szinguláris, és $f(x) = (x + h(x))^{-1}$.

←Vissza

11.6.9. Konstruáljunk olyan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvényt, amely nem abszolút folytonos, de előáll két abszolút folytonos függvény kompozíciójaként.

Végeredmény: Legyen $(0, 1)$-en $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right|$.

←Vissza

11.6.12. Konstruáljunk szigorúan növekvő, szinguláris függvényt $[0, 1]$-en.

Megoldási ötlet: Vegyük megszámlálható sok szinguláris függvény (vagy mérték) összegét.

←Vissza

11.6.13. Az $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényre $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ tetszőleges $x, y \in [0, 1]$ esetén. Igazoljuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra f grafikonja lefedhető megszámlálható sok (nem feltétlenül tengelypárhuzamos) téglalappal úgy, hogy a téglalapok rövidebbik oldalainak összege kisebb, mint ε.

(Vojtech Jarnik verseny, 2010)

Megoldási ötlet: A függvény m.m. pontban differenciálható.

←Vissza

11.6.14. Igazoljuk, hogy ha a sűrűségi pont definíciójában a gömböt kockára cseréljük, akkor ekvivalens definíciót kapunk.

Megoldási ötlet: A kocka ás a gömb térfogatának aránya állandó.

←Vissza

11.6.15. Egészítsük ki úgy, hogy igaz legyen: ha egy .... függvény bal felső deriváltja m.m. nemnegatív, akkor monoton nő.

Végeredmény: jobbról folytonos

←Vissza

12.0.1.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=?$$

Megoldási ötlet: Fejtsük ki a binomiális tétellel az $(1+x)^n$ polinomot.

←Vissza

12.0.2. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Milyen geometriai jelentése van az $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((c-a)\cdot\overline{(b-a)}\right)$ számnak?

Végeredmény: Az (a, b, c) háromszög előjeles területe.

←Vissza

12.0.4. Mi az m-edik egységgyökök szorzata, összege, négyzetösszege?

Megoldási ötlet: Használjuk az x^m-1 polinomot.

←Vissza

12.0.10. Hova képezi a $w(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ (Zsukovszkij-leképezés)

(a) az egységkörvonalat?
(b) az egységkörvonal belsejét?
(c) a külsejét?
(d) a 0 középpontú köröket?
(e) a 0-n átmenő egyeneseket?

Végeredmény: (a): A $[-1, 1]$ szakaszba.
(b) és (c): A $[-1, 1]$ szakasz komplementerébe.
(d): $-1, 1$ fókuszú ellipszisekbe (az egységkört a $[-1, 1]$ szakaszba).
(e): $-1, 1$ fókuszú hiperbolákba (a valós tengelyt a $(-\infty, -1]$ és $[1, \infty)$ félegyenesek uniójába, a képzetes tengelyt a képzetes tengelybe).

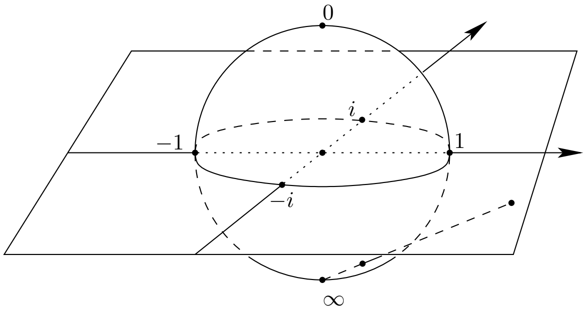
←Vissza

12.0.23. Feleltessük meg az egységnyi sugarú gömb pontjait a $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ halmaznak sztereografikus projekcióval (inverzióval) az ábra szerint.

(a) A gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$z\mapsto -z;\qquad z\mapsto \overline{z};\qquad z\mapsto iz;\qquad z\mapsto \frac{1}{z};\qquad z\mapsto \frac{-1}{\overline{z}};\qquad z\mapsto \frac{z-i}{1-iz}$$

(b) Mely függvények a gömb forgatásai?



Végeredmény: (a) $z \mapsto -z$: Tükrözés a $(0, \infty)$ tengelyre.

$z \mapsto \overline{z}$: Tükrözés a $(0, 1, -1)$ síkra.

$z \mapsto iz$: $90°$-s elforgatás a $(\infty, 0)$ egyenes körül, a jobbkézszabály szerinti pozitív irányba.

$z \mapsto \frac{1}{z}$: Tükrözés a valós tengelyre.

$z \mapsto \frac{-1}{\overline{z}}$: Tükrözés a gömb középpontjára.

$z \mapsto \frac{z-i}{1-iz}$: $90°$-os elforgatás a valós tengely körül, a jobbkézszabály szerinti pozitív irányba.

(b) Azok a $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ függvények, amelyeknek két fixpontja van (a forgástengely két végpontja), a két fixpont szorzata -1, és a fixpontokban a derivált egységnyi.

←Vissza

13.0.8. A $p(z)$ polinom gyökei közül k darab az $|z| < r$ kör belsejébe esik, a többi gyök a körön kívül van. Legyen $\gamma(t) = p(re^{it})$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

(a) Hogyan számíthatjuk ki az $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ integrált helyettesítéses integrálással?

(b) Mi a γ görbe 0-ra vonatkozó indexe?

Megoldási ötlet: Bontsuk parciális törtekre a $p'(z)/p(z)$ függvényt.

←Vissza

13.1.7. Legyenek a, b komplex számok, $|b| < 1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left| \frac{z-a}{z-b} \right|^2 |\,\mathrm{d}z| = \frac{|a-b|^2}{1-|b|^2} + 1.$$

Megoldási ötlet: Alakítsuk át komplex vonalintegrállá, majd alkalmazuk a Cauchy-formulát.

Megoldás→ ←Vissza

13.1.8.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{3^z}{(z-1)^2(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = ?$$

Megoldási ötlet: Alkalmazzuk a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulát.

Megoldás→ ←Vissza

13.1.9. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör ($|z| < 1$) belsejében, és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

Végeredmény: 6.

Megoldás→ ←Vissza

13.3.1. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

Megoldási ötlet: Alkalmazzuk az Unicitástételt a $g(z) = f(z) \cdot \overline{f(\overline{z})}$ függvényre.

Megoldás→ ←Vissza

13.3.3. Igazoljuk, hogy ha az f egész függvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

Megoldási ötlet: Vizsgáljuk az $\overline{f(\overline{z})}$ és az $\overline{f(-\overline{z})}$ függvényeket.

←Vissza

13.3.4. Az f függvény reguláris az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $1, 2$ pontokat összekötő szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $-1, -2$ pontokat összekötő szakaszon is csak valós értékei vannak.

Megoldási ötlet: Vizsgáljuk az $\overline{f(\overline{z})}$ függvényt.

Megoldás→ ←Vissza

13.3.5. Az f függvény reguláris az $1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon$ körgyűrűn, és az egységkörvonalnak létezik egy olyan íve, amelyen f értéke valós. Bizonyítsuk be, hogy f a teljes körvonalon valós.

Megoldási ötlet: Vizsgáljuk az $\overline{f(1/\overline{z})}$ függvényt.

←Vissza

13.3.7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris az $|z| < 1+\varepsilon$ körlapon és nem konstans, akkor az $|z| = 1$ körvonalnak csak véges sok pontjában lehet tisztán valós az értéke.

Megoldási ötlet: $\frac{1}{1+\varepsilon} < |z| < 1+\varepsilon$ halmazon $f = g$.

←Vissza

13.4.45. Legyen $a \in (0,1)$ valós szám.

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Megoldási ötlet: Integráljuk a függvényt egy félkörön.

←Vissza

13.4.87. A karakterisztikus függvények gyökeinek vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X, Y független, azonos eloszlású, legfeljebb 5 abszolút értékű valószínűségi változókhoz létezik olyan $t \in [0,1]$, amire

$$|P(X+Y<t) - t| > 10^{-10}.$$

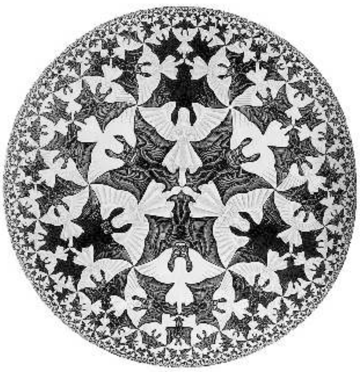
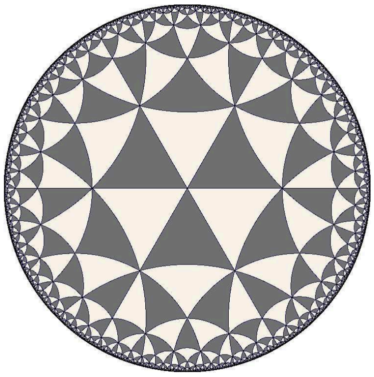
(Schweitzer-verseny alapján)

Megoldási ötlet: Cseréljük ki az X, Y változókat korlátos változókra, hogy a karakterisztikus függvényük egész függvény legyen; ekkor tehát $X+Y$ karakterisztikus függvénye egy egészfüggvény négyzete.

Mutassuk meg, hogy ha egy eloszlás túl közel van az egyenletes eloszláshoz, akkor a karakterisztikus függvényének van egyszeres gyöke.

←Vissza

14.5.5. Bontsuk fel a Poincaré féle körmodellt olyan egybevágó háromszögekre, amelyeknek két 45 és egy 60 fokos szöge van, és színezzük ezeket felváltva feketére és fehérre. (Ld. M. C. Escher *Cirlce Limit IV — Heaven and Hell* c. fametszetét az ábrán). Létezik-e olyan, az egységkörben meromorf fügvény, aminek minden fekete háromszögben (ördög) pontosan egy gyöke van és nincs pólusa, továbbá minden fehér háromszögben (angyal) pontosan egy pólusa van és nincs gyöke?

Megoldási ötlet: Feleltessük meg az egyik fekete háromszöget az egységkörlemeznek.

←Vissza

16. fejezet

Megoldások

1.0.17. (a) Miben tartunk egy mindent feloldó folyadékot?

(b) Mi történik, ha egy mindent elsöprő erő egy leküzdhetetlen akadállyal kerül szembe?

(Moldova Gy.: Pályázat)

Megoldás: (a) Nem tartunk mindent feloldó folyadékot. (Azt nem tudjuk biztosan, hogy létezik-e mindent feloldó folyadék.)

(b) Mindent elsöprő erő nem kerül szembe leküzdhetetlen akadállyal.

←Vissza

1.0.19. Magyarázzuk meg a beszélgetést!

Kapitány: Elég lesz az üzemanyag a leszálláshoz, vagy lezuhanunk?
Számítógép: Igen.
Kapitány: Igen, de *MI*?!!
Számítógép: Igen, *Uram.*

(R. Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek?)

Megoldás: A számítógép a *vagy* szót logikai műveletként értelmezte. Ha az „Elegendő az üzemanyag?”, illetve „Lezuhanunk?” kérdések közül legalább az egyikre igen a válasz, akkor a két kérdés diszjunkciójára is igen a válasz.

←Vissza

1.0.21.

> *„Minden asszony életében jön (van) egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.”* (Hofi)

Írjuk fel a fenti állítást kvantorokkal, tagadjuk, majd fogalmazzuk meg a tagadást szövegesen is. (Végül zenésítsük meg.)

Megoldás: Először vezessük be a következő jelöléseket. Legyen A az asszonyok halmaza. Tetszőleges a asszonyhoz legyen $elet(a) \subset \mathbb{R}$ az az időintervallum, amikor a él, és jelöljük T-vel a tevékenységek halmazát. Tetszőleges $a \in A$-ra, $p \in \mathbb{R}$-re és $t \in T$-re jelentse $akar(a, p, t)$ és $szabad(a, p, t)$ azt, hogy az a asszony a p pillanatban a t tevékenységet akarja-e, illetve szabad-e megtennie.

Ezekkel a jelölésekkel a dalrészlet így írható fel:

$$\forall a \in A\ \exists p \in elet(a)\ \exists t \in T\ \Big(akar(a, p, t) \wedge \neg szabad(a, p, t)\Big)$$

A tagadást úgy kaphatjuk, hogy a $\forall$ kvantorokat $\exists$ kvantorokra, a $\exists$ kvantorokat pedig $\forall$ kvantorokra cseréljük, és a belső állítást tagadjuk:

$$\exists a \in A\ \forall p \in elet(a)\ \forall t \in T\ \neg\Big(akar(a, p, t) \wedge \neg szabad(a, p, t)\Big)$$

A de Morgan azonosságokat is felhasználva, $\neg(X \wedge \neg Y) = (\neg X) \vee Y = (X \Rightarrow Y)$, ezért ezt így alakíthatjuk tovább:

$$\exists a \in A\ \forall p \in elet(a)\ \forall t \in T\ \Big(\neg akar(a, p, t) \vee szabad(a, p, t)\Big),$$

vagy

$$\exists a \in A\ \forall p \in elet(a)\ \forall t \in T\ \Big(akar(a, p, t) \Rightarrow szabad(a, p, t)\Big).$$

Szabadon megfogalmazva:

> *Van olyan asszony, aki egész életében bármikor, bármit szabadon megtehet, amit csak akar.*

←Vissza

1.0.23. Igazoljuk, hogy az implikáció balról disztributív a diszjunkcióra nézve.

Megoldás: Azt kell igazolnunk, hogy

$$\Big(A \Rightarrow (B \vee C)\Big) = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C).$$

Ezt megtehetjük az igazságtábla felírásával, de a $\vee$ művelet alapvető tulajdonságai (idempotencia, kommutativitás, asszociativitás) és az $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg X \vee Y$ azonosság alkalmazásával is, például a következőképpen:

$$\begin{aligned}\Big(A \Rightarrow (B \vee C)\Big) &= \neg A \vee (B \vee C) = (\neg A \vee \neg A) \vee (B \vee C) = \\ &= (\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C).\end{aligned}$$

←Vissza

1.0.48. Legyen $f : A \to B$. Tetszőleges $X \subset A$ halmazra legyen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ (az X halmaz *képe*), és tetszőleges $Y \subset B$ halmazra legyen $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$ (az Y halmaz *ősképe*). Igaz-e, hogy

(a) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$?

(b) $\forall X, Y \in \mathcal{P}(B)$ $f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cup Y)$?

Megoldás: (a) Igen.

(b) Igen, mivel $\big(z \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)\big) \Leftrightarrow \big((\exists\, a \in X\ f(a) = z) \vee (\exists\, a \in Y\ f(a) = z)\big) \Leftrightarrow \big(\exists\, a \in X \cup Y\ f(a) = z\big) \Leftrightarrow \big(z \in f^{-1}(X \cup Y)\big)$.

←Vissza

1.0.60. Igazoljuk, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Megoldás: Teljes indukció: $n = 1$-re igaz, másrészt

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) a_n,$$

az indukciós feltétel miatt a_n-re feltehetjük az állítást, tehát

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \frac{n+1}{2n} = \frac{n+2}{2n+2}.$$

←Vissza

1.0.62.

1. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

2. Legyen $a_1 = 0,9$ és $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Bizonyítsuk be, hogy $a_{n+1} < a_n$ és $0 < a_n < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

Megoldás: 1. Indukcióval belátható, hogy $a_n > 0$ tehát a_{n+1} is jól definiált minden n-re. Az egyenlőtlenséget is indukcióval bizonyítjuk: $a_1 < a_2$ nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $a_n < a_{n+1}$. $\Rightarrow 2a_n + 3 < 2a_{n+1} + 3 \Rightarrow \sqrt{2a_n + 3} < \sqrt{2a_{n+1} + 3}$.

←Vissza

1.0.69. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennáll az alábbi azonosság.

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

Megoldás: Teljes indukció n szerint. $n=1$-re $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$ $\surd$. Tf. n-re igaz, ekkor $n+1$-re

$$\begin{aligned}B.O.&=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}\\&=\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \qquad \text{az ind. felt. miatt}\\&=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{n+1}{2(n+1)+1},\end{aligned}$$

mivel $2n^2+5n+1=(2n+1)(n+1)$.

2. megoldás: Mivel $\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, így egy teleszkopikus összeget kapunk, vagyis

$$\begin{aligned}2\cdot B.O.&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\\&=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}.\end{aligned}$$

←Vissza

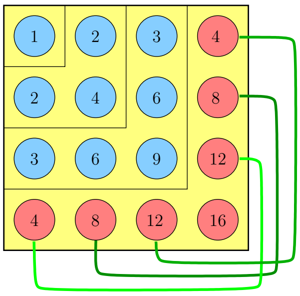
1.0.71. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egészre fennáll az alábbi azonosság.

$$1^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

Megoldás: Tejes indukció. $n=1$-re mindkét oldal értéke 1. Ha az állítás n-re igaz, akkor $(n+1)$-re

$$1^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=$$
$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{4}\right)^2.$$

2. megoldás.

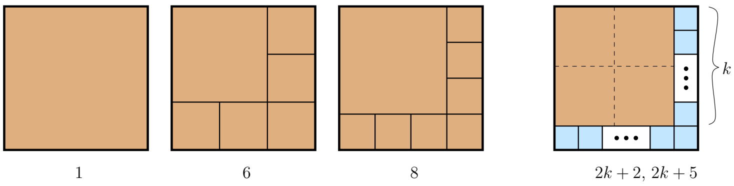


Az n-edik négyzetben lévő számok összege $(\sum i)^2$, a vonalakkal összekötött számok összege n^2, és $n-1$ pálcika van egy szinten és a jobb alsó sarokban is n^2 van.

←Vissza

1.0.76. Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 6$ pozitív egészre egy négyzetet fel lehet bontani n db négyzetre.

Megoldás: Egy négyzetet négy feleakkora oldalúra cserélve látjuk, hogy ha egy négyzetet fel lehet bontani n db négyzetre, akkor $n+3$ db négyzetre is. Viszont 1-re, 6-ra és 8-ra léteznek felbontások (lásd a baloldali három ábrát).



(A jobboldalon egy másik lehetséges konstrukciót adtunk meg.)

←Vissza

1.0.86. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség!

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \geq 3.$$

Megoldás: Alkalmazzuk a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a bal oldalon álló tagokra:

$$\frac{\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{b^2}{ac} \cdot \frac{c^2}{ab}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

←Vissza

1.0.90. Melyik nagyobb? $1000001^{1000000}$ vagy $1000000^{1000001}$

Megoldás: Tegyük fel, hogy $n \geq 3$.

I. $\dfrac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} < 1$

II. $(n+1)^n = n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \dots + \binom{n}{k} n^{n-k} + \dots + \binom{n}{n-1} n + 1 \leq$

$\leq (n-1)n^n + n^2 + 1 < (n-1)n^n + n^n.$

III. $\sqrt[n+1]{(n+1)^n} = \sqrt[n+1]{(n+1)^{n-1}\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} \overset{\text{sz-m}}{<}$

$< \dfrac{(n-1)(n+1) + 2\sqrt{n+1}}{n+1} = n - 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}.$

←Vissza

1.0.94. Adott felszínű téglatestek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?

Megoldás: $A = 2(ab+ac+bc) = 6\frac{ab+ac+bc}{3} \overset{\text{sz-m}}{\geq} 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 6V^{2/3}$. Egyenlőség csak $ab = ac = bc$, vagyis kocka esetén lehet.

←Vissza

1.0.97. Határozzuk meg az $x^2 \cdot (1-x)$ függvény legnagyobb értékét, ha $x \in [0,1]$.

Megoldás: Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[3]{x \cdot x \cdot (2-2x)} \overset{\text{sz-m}}{\leq} \frac{x + x + (2-2x)}{3}.$$

←Vissza

1.0.98. Bizonyítsuk be, hogy a V térfogatú egyenes körhengerek közül annak a legkisebb a felszíne, amelyiknek a magassága egyenlő az alap átmérőjével.

Megoldás: $\dfrac{A}{3\pi} = \dfrac{2r^2 + rh + rh}{3} \overset{\text{sz-m}}{\geq} \sqrt[3]{2r^2 \cdot rh \cdot rh} = \sqrt[3]{2\dfrac{V^2}{\pi^2}}.$

←Vissza

1.0.99. Bizonyítsuk be, hogy $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, ha $n > 1$.

Megoldás: $\sqrt[n]{n!} \overset{\text{sz-m}}{\leq} \dfrac{\binom{n+1}{2}}{n}.$

←Vissza

1.0.103. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számokra

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1}}+\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}+\frac{3}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}}+\ldots+\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}<2(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

(KöMaL N. 189., 1998. november)

Megoldás: A súlyozott számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget használva,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1+2+\ldots+k}{\frac{1}{a_1}+\frac{2}{2a_2}+\ldots+\frac{k}{ka_k}}\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1\cdot a_1+2\cdot 2a_2+\ldots+k\cdot ka_k}{1+2+\ldots+k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}i^2a_i=\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\sum_{i=k}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}<\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\sum_{i=k}^{n}\frac{2(2k+1)}{k^2(k+1)^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{2}{k^2}-\frac{2}{(k+1)^2}\right)<\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\left(\frac{2}{i^2}-\frac{2}{(n+1)^2}\right)<$$

$$<\sum_{i=1}^{n}i^2a_i\cdot\frac{2}{i^2}=2\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Megjegyzés: A jobboldalon a 2 konstans éles. Ha $a_i=\frac{1}{i}$ és n elég nagy, akkor a két oldal hányadosa tetszőlegesen közel lehet az 1-hez.

←Vissza

1.1.3. Bizonyítsuk be a testaxiómák és a definíciók alapján a következő azonosságot! $(-a)(-b)=ab$.

Megoldás: I. megoldás:

$a+(-1)\cdot a=1\cdot a+(-1)\cdot a=(1+(-1))\cdot a=0$, az 1, -1 definíciója és a disztributivitás miatt. Tehát az additív inverz egyértelműsége miatt $(-1)\cdot a=-a$. $\Longrightarrow$ $(-a)(-b)=((-1)\cdot a)((-1)\cdot b)$, ez pedig tovább egyenlő $((-1)\cdot(-1))ab$-vel a szorzás asszociativitása (zárójelek elhagyhatók) és kommutativitása miatt. Viszont könnyű látni, hogy $(-1)\cdot(-1)=1$.

II. megoldás:

$ab=(a+0)(b+0)=(a+a+(-a))(b+b+(-b))$ a 0 ill. $-a$ és $-b$ definíciója és az összeadás asszociativitása (zárójelek elhagyhatók) miatt. Ez pedig tovább egyenlő $ab+ab+a(-b)+ab+ab+a(-b)+(-a)b+(-a)b+(-a)(-b)$ a disztributivitás és az összeadás asszociativitása miatt. Az összeadás kommutativitása és a disztributivitás miatt ez tovább egyenlő $a(b+(-b))+a(b+$

$(-b)) + (a + (-a))b + (a + (-a))b + (-a)(-b)$-vel. $-a$ és $-b$ ill. 0 definíciója miatt ez egyenlő $(-a)(-b)$-vel.

III. megoldás:

Mivel $x+y+(-x)+(-y) = 0$, így $-(x+y) = (-x)+(-y)$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} 0 &= -((a + (-a))b + a(b + (-b))) + ((a + (-a))(b + (-b)) \\ &= -(ab) + (-((-a)b)) + (-(ab)) + (-(a(-b))) + ab + a(-b) + (-a)b \\ &\qquad + (-a)(-b) \\ &= -(ab) + (-a)(-b). \qquad \text{(Csirik Mihály)} \end{aligned}$$

←Vissza

1.1.26. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol p, q relatív prím egészek. Ekkor $p^2 = 2q^2$, tehát p páros. $\Rightarrow p^2$ osztható 4-gyel $\Rightarrow q^2$ is páros $\Rightarrow q$ is páros, tehát p, q nem relatív prímek $\lightning$

←Vissza

1.1.39. Legyen $K, L \subset \mathbb{R}$ nemüres és felülről korlátos. Bizonyítsuk be, hogy:

1. $\sup(K + L) = \sup K + \sup L$, ahol $K + L = \{k + l : k \in K, l \in L\}$;
2. $\sup(K \cup L) = \max\{\sup K, \sup L\}$;
3. $\sup(K \cap L) \leq \min\{\sup K, \sup L\}$, és ha véges, akkor $\geq \max\{\inf K, \inf L\}$.

Megoldás: 1. Ha $k \in K$ akkor $k \leq \sup K$, és hasonlóan $l \in L \Rightarrow l \leq \sup L$, tehát $k + l \leq \sup K + \sup L$, vagyis $\sup(K + L) \leq \sup K + \sup L$.

Másrészt ha $z < \sup K + \sup L$, akkor léteznek x, y valós számok, hogy $z = x + y$, $x < \sup K$ és $y < \sup L$. Tehát léteznek $k \in K$, $l \in L$, hogy $x < k$ és $y < l$. Ekkor $z < k + l$, vagyis z nem felső korlátja $K + L$-nek.

←Vissza

1.1.45. Bizonyítsuk be, hogy ha egy R rendezett testben minden konvex halmaz intervallum, akkor a testben igaz a teljességi tétel: minden nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja.

Megoldás: Legyen H felülről korlátos, nem üres halmaz, és K a felső korlátainak halmaza. Azt kell igazolnunk, hogy K-nak van legkisebb eleme.

Vegyük észre, hogy a K halmaz konvex. Ha ugyanis $k_1 < x < k_2$ és $k_1, k_2 \in K$, akkor k_1 felső korlátja H-nak, emiatt x is felső korlát, tehát $x \in K$.

A K halmaz konvex, tehát a feltétel szerint intervallum. Világos, hogy K nem üres (mert létezik felső korlátja H-nak), alulról korlátos (a nem üres H

halmaz bármely eleme alsó korlátja K-nak), továbbá K nem korlátos felülről (ha m felső korlátja K-nak, akkor m felső korlátja H-nak is, de ekkor $m+1$ is felső korlátja H-nak, tehát $(m+1) \in K$, ami viszont ellentmond annak, hogy m felső korlátja K-nak). Tehát K csak pozitív irányú félegyenes lehet: $K = (a, \infty)$ vagy $K = [a, \infty)$ valamilyen $a \in R$ elemmel.

Most megmutatjuk, hogy a felső korlátja H-nak. Indirekt, ha a nem felső korlát, akkor van olyan $b \in H$, amire $a < b$. Legyen $c \in R$ olyan elem, amire $a < c < b$ (ilyen elem létezik, például az $(a+b)/2$). Ekkor $c \in (a, \infty) \subset K$, tehát c felső korlátja H-nak. Ugyanakkor H-nak létezik c-nél nagyobb eleme: a b. Ez így ellentmondás az indirekt feltevéssel, ezzel igazoltuk, hogy a felső korlátja H-nak.

Mivel a felső korlátja H-nak, $a \in K$, és így a $K = (a, \infty)$ eset sem lehetséges. Tehát $K = [a, \infty)$, a felső korlátok K halmazának van legkisebb eleme: az a.

←Vissza

1.1.46. Teljesül-e a racionális törtek rendezett testében a teljességi tétel: minden nem üres korlátos halmaznak van legkisebb felső korlátja?

Megoldás: Nem.

Jelöljük $\mathbb{R}(x)$-szel a racionális törtek testét. Az $\mathbb{R}$-et beágyazhatjuk $\mathbb{R}(x)$-be úgy, hogy a valós számokat megfeleltetjük a konstans függvényeknek, ilyen módon $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(x)$. Megmutatjuk, hogy az $\mathbb{R}$ halmaz nem üres, felülről korlátos, de nincs legkisebb felső korlátja.

Az $\mathbb{R}$ nem üres, és az $x = \dfrac{x}{1}$ függvény felső korlátja, mert bármely $a \in \mathbb{R}$-re $x - a = \dfrac{x-a}{1} > 0$ (a számláló és a nevező főegyütthatója is pozitív, tehát $\dfrac{x-a}{1}$ pozitív).

Most megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}$-nek nincs legkisebb felső korlátja. Ha $K \in \mathbb{R}(x)$ felső korlát, akkor $K-1$ is felső korlát, mert bármely $a \in \mathbb{R}$-re $a+1 \in \mathbb{R} \Rightarrow a+1 \leq K \Rightarrow a \leq K$. Tehát bármely $K \in \mathbb{R}(x)$ felső korláthoz létezik kisebb felső korlát, például a $K-1$.

←Vissza

1.1.56. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b \Big(\exists c, d \ \big(a < c < d < b \ \wedge \ H \cap (c, d) = \emptyset\big)\Big).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű. (Baire kategóriatétel)

Megoldás: Legyen $G_0 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nem üres nyílt intervallum. Azt akarjuk megmutatni, hogy G_0 tartalmaz olyan pontot, ami nem eleme egyik S_i-nek sem.

Egy $G_0 \supset F_1 \supset G_1 \supset F_2 \supset G_2 \supset \dots$ intervallumsorozatot fogunk definiálni a következő tulajdonságokkal:

(1) Minden i-re G_i nem üres, nyílt intervallum, ami diszjunkt S_i-vel;

(2) Minden i-re F_i nem elfajuló, korlátos, zárt intervallum.

Tegyük fel, hogy valamely i-re a G_{i-1} intervallumot már definiáltuk. Az F_i legyen a G_{i-1} egy tetszőleges nem elfajuló, korlátos, zárt részintervalluma. Mivel S_i sehol sem sűrű, F_i-nek van olyan nyílt részintervalluma, ami diszjunkt S_i-vel; az egyik ilyen legyen G_i. A konstrukció miatt (1) és (2) biztosan teljesül.

A Cantor-axióma miatt az $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ halmaz nem üres; legyen c egy ilyen elem. Ekkor $c \in F_1 \subset G_0$, továbbá minden i-re $c \in F_{i+1} \subset G_i$; mivel G_i diszjunkt S_i-vel, ebből következik, hogy $c \notin S_i$. A c tehát a $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n}$ halmaznak egy, a G_0 intervallumba eső eleme.

Az $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n}$ halmaznak tehát minden nyílt intervalumban van eleme, a halmaz sűrű.

←Vissza

1.1.57. Egy halmazt nevezzünk G_δ-nak, ha előáll, mint megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.

Bizonyítsuk be, hogy

a) Az irracionális számok halmaza G_δ.

b) A racionális számok halmaza nem G_δ.

Megoldás: (a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \big(\mathbb{R} \setminus \{q\}\big)$.

(b) Tegyük fel indirekte, hogy $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$, ahol $G_i \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz minden i-re. Mivel $\mathbb{Q}$ sűrű, a G_i halmazok is sűrűek.

Állítsuk elő most $\mathbb{R}$-et a következőképpen:

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_i)\right) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\right).$$

A jobboldalon megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniója áll; a 1.1.56 feladat szerint ezek uniója nem tartalmazhat intervallumot. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

←Vissza

1.1.59. Legyen R rendezett test, $A = \{x \in R : \ x^2 < 2\}$ és $B = \{x \in R : \ x^2 > 2\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok nyíltak.

(b) Mutassuk meg, hogy ha R összefüggő, akkor van olyan $a \in R$, amire $a^2 = 2$.

Megoldás: (a) Először megmutatjuk, hogy az A halmaz nyílt, azaz bármely $a \in A$-hoz van olyan $r > 0$ testelem, amire $(a - r, a + r) \subset A$. Legyen tehát $a \in A$ tetszőleges, azaz $a^2 < 2$; ekkor például $|a| < 2$.

Állapodjunk meg abban, hogy csak olyan r-et választunk, amire $r \le 1$. Ekkor $x \in (a - r, a + r)$ esetén

$$x^2 < \left(|a| + r\right)^2 = a^2 + 2|a|r + r^2 < a^2 + 4r + 1 \cdot r = a^2 + 5r.$$

Ha az is igaz, hogy $5r \le 2 - a^2$, akkor $x^2 < 2$, vagyis $x \in A$.

Az $r = \min\left(1, \frac{2-a^2}{5}\right)$ választással a fenti egyenlőtlenségek mind teljesülnek, tehát bármely $x \in (a - r, a + r)$-re $x \in A$, vagyis $(a - r, a + r) \subset A$.

Most azt igazoljuk, hogy a B halmaz is nyílt. Legyen $b \in B$ tetszőleges. Ekkor tehát $b^2 > 2$, amiből következik, hogy $|b| > 1$. Az $r = \min\left(|b|, \frac{b^2-2}{2|b|}\right)$ választással bármely $x \in (b - r, b + r)$ esetén

$$|b| = \left|x + (b - x)\right| \le |x| + |b - x| < |x| + r,$$
$$|x| > |b| - r.$$

Négyzetre emelve ($r \le |b|$, ezért mindkét oldal nemnegatív)

$$x^2 > \left(|b| - r\right)^2 = b^2 - 2|b|r + r^2 > b^2 - 2|b|\frac{b^2 - 2}{2|b|} = 2.$$

Tehát $x \in B$, és mivel ez minden $x \in (b - r, b + r)$-re igaz, $(b - r, b + r) \subset B$.

(b) Az A és B halmazok nyíltak, és nem üresek, mert például $0 \in A$ és $2 \in B$. A definíció szerint diszjunktak is. Mivel az R test összefüggő, nem áll elő két diszjunkt nyílt részhalmaza uniójaként; van más eleme is, ami nem szerepel $(A \cup B)$-ben. Legyen a egy ilyen elem. A trichotómia miatt $a^2 > 2$, $a^2 < 2$ és $a^2 = 2$ valamelyike teljesül. Ha $a^2 < 2$, akkor $a \in A$, ha pedig $a^2 > 2$, akkor $a \in B$, de ezek nem lehetségesek, mert a nem eleme sem A-nak, sem B-nek. Csak az az eset lehetséges, hogy $a^2 = 2$.

←Vissza

1.1.68. Bizonyítsuk be, hogy $(1 + x)^r \le 1 + rx$ ha $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < 1$ és $x \ge -1$.

Megoldás: $r = p/q$, $\sqrt[q]{(1 + x)^p \cdot 1^{q-p}} \overset{\text{sz-m}}{\le} \frac{p(1+x)+(q-p)}{q}$.

←Vissza

1.1.69. Lehet-e x (ir)racionális és y (ir)racionális számok esetén x^y (ir)racionális (ez 8 feladat)?

Megoldás: I. $x = \sqrt{2}$, $y = 2\log_2 3$, a többi hasonló vagy egyszerűbb.

II. Ha még nincs log-függvény: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$, tehát $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ akár racionális, akár nem van egy példánk. Valójában $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irracionális, l. *J. P. Jones and S. Toporowski. Irrational numbers. Amer. Math. Monthly, 80:423–424, 1973.* A példa *D. Jarden. Curiosa: A simple proof that a power of an irrational number to an irrational exponent may be rational. Scripta Math., 19:229, 1953*-ban bukkan fel először.

←Vissza

2.1.8. Legyen a_n egy számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens:

(A) a_n korlátos; (B) minden $b_n \to 0$ sorozatra $a_n b_n \to 0$.

Megoldás: (A) $\Rightarrow$ (B):

Legyen $|a_n| < K$ minden n-re . Ekkor $|b_n| < \varepsilon \Rightarrow |a_n b_n| < K\varepsilon$, vagyis a b_n sorozat ε/K-hoz tartozó küszöbindexe jó lesz az $a_n b_n \to 0$ sorozat ε-hoz tartozó küszöbindexének.

(B) $\Rightarrow$ (A):

Tegyük fel, hogy létezik egy $a_{n_k} \to \infty$ részsorozat. Feltehetjük azt is, hogy $a_{n_k} \neq 0$. Legyen b_n olyan, hogy $b_{n_k} = b_{n_k+1} = \cdots = b_{n_{k+1}-1} = 1/a_{n_k}$ minden k-ra. Ekkor $b_n \to 0$, de $a_{n_k} b_{n_k} = 1$ minden k-ra.

←Vissza

2.1.18. Igaz-e, hogy ha x_n konvergens, y_n divergens, akkor $x_n y_n$ divergens?

Megoldás: Nem, pl. $x_n = \frac{1}{n^2}$ és $y_n = n$.

←Vissza

2.1.27. Van-e csupa irracionális számból álló sorozat, mely

(a) 1-hez tart

(b) $\sqrt{2}$-höz tart?

Megoldás: (a) $1 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ (b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{2}$.

←Vissza

2.1.30. Abból, hogy $a_n^2 \to a^2$, következik-e, hogy $a_n \to a$? És $a_n^3 \to a^3$-ból, hogy $a_n \to a$?

Megoldás: $(-1)^n \not\to 1$. Viszont $a = 0$-ra $\delta_{a_n}(\varepsilon) := \delta_{a_n^3}(\varepsilon^3)$, ha $a > 0 \Rightarrow$ $|a_n - a| = \frac{|a_n^3 - a^3|}{a_n^2 + a a_n + a^2} \leq \frac{|a_n^3 - a^3|}{3(a/2)^2}$ elég nagy n-re.

←Vissza

2.1.31. Tekintsük az (a_n) sorozathoz tartozó

$$s_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

számtani közepek sorozatát. Bizonyítsuk be, ha $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, akkor $\lim_{n\to\infty} s_n = a$. Adjunk meg olyan sorozatot, amelyre (s_n) konvergens, de (a_n) divergens.

Megoldás: $n > n_0(\varepsilon/2)$-re

$$|s_n - a| = \left| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{n_0} - a)}{n} + \frac{(a_{n_0+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right|.$$

Legyen $n_1 > \dfrac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{n_0} - a)}{\varepsilon/2}$. Ekkor $n > n_0, n_1$-re $|s_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$.

←Vissza

2.1.47. Legyen $a_k \neq 0$ és $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1.$$

Megoldás: Egyszerűsítsünk $a_0 n^k$-val:

$$\frac{p(n+1)}{p(n)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k + a(n)}{1 + b(n)},$$

ahol $a(n) \to 0$ és $a(n) \to 0$.

←Vissza

2.1.54. Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) sorozatnak nincs konvergens részsorozata, akkor $|a_n| \to \infty$.

Megoldás: Ha $|a_n| \not\to \infty$, akkor létezik korlátos részsorozata. Aminek a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt van konvergens részsorozata.

←Vissza

2.1.59. Mutassunk példát olyan a_n és b_n sorozatokra, amikre $(a_n - b_n) \to 0$ és $a_n/b_n \to \infty$.

Megoldás: Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ és $b_n = \frac{1}{n^2}$.

←Vissza

2.2.2. Bizonyítsuk be, hogy $n^{n+1} > (n+1)^n$ ha $n > 2$.

Megoldás: Tekintsük az $\overbrace{n+1,\dots,n+1}^{n-1}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+1}$ számokra a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget.

←Vissza

2.2.3. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2^n} < n+1.$$

Megoldás: $a_n = 2^{b_n}$, ahol $b_n = \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{n}{2^n}$. Indukcióval könnyű látni, hogy $2-b_n = \frac{n+2}{2^n}$, tehát $a_n < 4$.

←Vissza

2.2.4. Bizonyítsuk be, hogy $2^n > n^k$ elég nagy (k-tól függő) n-re.

Megoldás: $2^n > \binom{n}{k+1}$, ha $n > k+1$. $\binom{n}{k+1} > \frac{1}{(k+1)!}(n/2)^{k+1}$, ha $n > 2(k+1)$. $\frac{1}{(k+1)!}(n/2)^{k+1} > n^k$ ha $n > 2^{k+1}(k+1)!$. Persze ez nagyon messze van a pontos becsléstől: $\frac{n}{\log_2 n} > k$. Pl. $k=10$-re $n=60$-tól már jó.

←Vissza

2.2.7. Keressünk olyan $n_o \in N$-et, hogy $\forall n > n_o$ -ra igaz legyen:
1. $(1,01)^n > n$, 2. $(1,01)^n > n^2$, 3. $(1,0001)^n > 1000\cdot\sqrt{n}$, 4. $100^n < n!$
5. $\dfrac{1}{2} < \dfrac{2n^2+3n-2}{3n^2-4n+20} < 1$, 6. $3^n - 1000\cdot 2^n > n^3 + 100n^2$,
7. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} > \frac{1}{n}$, 8. $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$, 9. $n\left(\frac{n}{e}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Megoldás: Indukció, j.o. $n=7$-től, hisz $(7/e)^7 > 750 > 6!$: kell $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

←Vissza

2.2.9. Bizonyítsuk be hogy az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $a_n \le 100$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \ge a_n + \frac{1}{100}$, tehát $a_{10001} \ge 1 + 10000\cdot\frac{1}{100}$ ↯

←Vissza

2.2.10. Hogyan lehet azt helyesen bizonyítani az $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$,sorozatra, hogy $a_{10001} > 100$? (L. a 2.2.9 feladatot és megoldását.)

Megoldás: a_n monoton nő. Tegyük fel, hogy $a_{n^2+1} < n \Rightarrow \frac{1}{a_i} > \frac{1}{n}$ $\forall i \le n \Rightarrow a_{n^2+1} > a_1 + n^2\frac{1}{n}$ ↯

Megjegyzés: Pontosabb becslést kaphatunk a $b_n = a_n^2$ sorozat vizsgálatából. Könnyű ellenőrizni, hogy $b_{n+1} - b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$. Mivel $b_2 = 4$, $n > 2$ esetén $b_n > 2n$ és $a_n > \sqrt{2n}$.

←Vissza

2.2.19. Lássuk be, hogy létezik olyan N természetes szám, hogy $\forall n > N$ esetén teljesül

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n^2.$$

Megoldás: Teljes indukció: tegyük fel, hogy $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n^2$. Ekkor

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{3}{2}n^2.$$

De $\frac{3}{2}n^2 > (n+1)^2$, ha $\frac{1}{2}n^2 > 2n + 1$, ami biztos teljesül, ha $\frac{1}{2}n^2 > 2n + n$, vagyis, ha $n > 6$. Tehát, hogy elkezdődjön az indukció kell egy $n > 6$ értéket találnunk, amire $\left(\frac{3}{2}\right)^n > n^2$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{16} > 2^8 = 16^2.$$

←Vissza

2.3.1. Adjunk meg olyan sorozatot, melynek pontosan egy véges torlódási értéke van, de nem konvergens.

Megoldás: Például az $1/n$ és n sorozatok összefésülése.

←Vissza

2.3.7. Mutassunk példát olyan sorozatra, amelynek torlódási pontjai éppen a $[0, 1]$ halmaz elemei.

Megoldás: Soroljuk fel egy $[0, 1]$-ben sűrű megszámlálható halmaz (pl. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$) elemeit.

←Vissza

2.3.14. Bizonyítsuk be, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) tetszőleges számsorozat, akkor

$$\overline{\lim}(a_n + b_n) = \lim a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

Megoldás: A 2.3.13 feladat szerint J.o.$\geq$ B.o. A másik irányhoz vegyünk egy $b_{n_k} \to \overline{\lim}\, b_n$ részsorozatot. Ekkor $a_{n_k} + b_{n_k} \to$J.o. tehát J.o.$\leq$ B.o.

←Vissza

2.4.5. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[n]{2} \to 1$.

Megoldás: A Bernoulli egyenlőlenség miatt $a > 0$-ra

$$(1+a)^n > 1 + na,$$

ami nagyobb mint 2, ha n elég nagy. Tehát $1 + a > \sqrt[n]{2}$ ha n elég nagy. Másrészt $\sqrt[n]{2} > 1$, tehát $\sqrt[n]{2} \to 1$.

←Vissza

2.4.6. Számítsuk ki: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n - n}$.

Megoldás:

$$2 = \sqrt[n]{2^n} > \sqrt[n]{2^n - n} > \sqrt[n]{2^n - 2^{n-1}} = 2\sqrt[n]{\frac{1}{2}},$$

ha n elég nagy ahhoz, hogy $2^{n-1} > n$ teljesüljön. A jobboldal limesze 2.4.5 szerint 2, tehát az állítás a rendőrelvből következik.

←Vissza

2.4.13. Állapítsuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

1. $\dfrac{n^5 - n^3 + 1}{3n^5 - 2n^4 + 8}$; 2. $\sqrt{n^4 + n^2} - n^2$; 3. $\sqrt[n]{6^n - 5^n}$.

Megoldás:

1. Felhasználva a sorozat határérték műveletekkel kapcsolatos tételeit, és $\frac{1}{n} \to 0$-t, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - n^3 + 1}{3n^5 - 2n^4 + 8} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{3 - \frac{2}{n} + \frac{8}{n^5}} = \frac{1}{3}.$$

2. „Gyöktelenítjük a számlálót”, majd n^2-tel egyszerűsítünk. Végül a határértékkel és a műveletekkel kapcsolatos állításokat alkalmazva,

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^4 + n^2} - n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n^2 - n^4}{\sqrt{n^4 + n^2} + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

3. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $5^n \le \frac{5}{6} \cdot 6^n$, ezért $6^n - 5^n \ge 6^n - \frac{5}{6} \cdot 6^n = \frac{1}{6} \cdot 6^n \ge 0$. Emiatt

$$\frac{6}{\sqrt[n]{6}} = \sqrt[n]{\frac{1}{6} \cdot 6^n} \le \sqrt[n]{6^n - 5^n} \le \sqrt[n]{6^n} = 6.$$

Mivel $\sqrt[n]{6} \to 1$, az $\leq$ség mindkét oldala 6-hoz tart, így a rendőrszabály szerint $\sqrt[n]{6^n - 5^n} \to 6$.

Másik megoldás: $\sqrt[n]{6^n - 5^n} = 6\sqrt[n]{1 - (\dfrac{5}{6})^n}$. Mivel $(\frac{5}{6})^n \to 0$, így $\sqrt[n]{1 - (\frac{5}{6})^n} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{6^n - 5^n} \to 6 \cdot 1$.

←Vissza

2.4.17.

$$\lim \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} =?$$

Megoldás: Gyöktelenítjük a nevezőt, bővítünk $\sqrt{n^2-1} - n$-nel, majd egyszerűsítünk n-nel.

$$\frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} = \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} \frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2-1}-n} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}{-1},$$

tehát $\lim \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} = -2$.

←Vissza

2.4.24. Konvergens-e

$$\sqrt[n]{n^2 + \cos n} \qquad ?$$

Megoldás: $1 < \sqrt[n]{n^2 + \cos n} < \sqrt[n]{n^3} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 \to 1^3 = 1$.

←Vissza

2.5.2. Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az alábbi sorozatot, ha van határérték, adjuk meg: $a_1 = 0,9 \quad a_{n+1} = a_n - a_n^2$.

Megoldás: Teljes indukcióval $0 < a_n < 1$ belátható, hiszen

$$0 < a_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - a_n < 1$$

E két egyenlőtlenséget szorozva $\Rightarrow 0 < a_n - a_n^2 < 1$. Ebből már indukcióval következik, hogy a_n monoton csökken, és a korlátosság miatt konvergens is. Ha van limesz, annak teljesítenie kell a „rekurziós egyenlet limeszét”: $a = a - a^2$, tehát $a_n \to 0$.

←Vissza

2.5.4. Definiáljuk az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az

$$a_1 = 10; \qquad a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$$

rekurzióval.

(a) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat korlátos, és mutassunk példát alsó, illetve felső korlátra.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $a_n \to 1$. Ellenőrizzük a definíciót, és keressünk minden $\varepsilon > 0$-hoz n_0-t.

Megoldás: (a) Minden n-re $a_n > 1$ látható teljes indukcióval, ebből $a_n < 2$ ha $n > 1$ is könnyen adódik teljes indukcióval.

(b) $a_n > 1$ miatt

$$|a_{n+1} - 1| = \frac{|a_n - 1|}{|a_n + 1|} < \frac{|a_n - 1|}{2},$$

tehát minden lépésnél feleződik a hiba. Ebből pl. $n_0 = [1/\varepsilon] + 4$ jó küszöbindex ε-hoz.

←Vissza

2.5.19. Legyen az (a_n) sorozat a következő rekurzióval megadva: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$. Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

Megoldás: Állítás: a_n monoton nő. Teljes indukcióval: $n = 1$-re $0 = a_1 \leq \sqrt{6} = a_2$, $\surd$. Tf. $a_n \leq a_{n+1}$. Ekkor $a_n + 6 \leq a_{n+1} + 6$, tehát $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \leq \sqrt{a_{n+1} + 6} = a_{n+2}$. Mivel a_n monoton nő, $a_1 = 0$ alsó korlátja.

Állítjuk, hogy $a_n \leq 100$. Ezt is teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$-re $0 = a_1 \leq 100$, $\surd$.

Tf. $a_n \leq 100$. Ekkor $a_n + 6 \leq 106$, így $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \leq \sqrt{106} \leq 100$.

Tehát az a_n sorozat monoton és korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt konvergens.

Legyen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Ekkor

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 6} = \sqrt{a + 6}.$$

$\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = -2$ vagy $a = 3$. Mivel $a_n \geq 0$, $a \geq 0$, tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 3$.

←Vissza

2.5.20. Legyen $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{a_n^2}$. Igazoljuk, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $a_n \geq 10$.

Megoldás: Indirekt, tegyük fel hogy $\forall n\ a_n < 10. \implies a_n^2 < 100 \implies \frac{2}{a_n^2} > \frac{2}{100} \implies a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n^2} > a_n + \frac{2}{100}$. Ebből indukcióval kapjuk, hogy

$$a_{n+1} > a_1 + n \cdot \frac{2}{100} = 1 + n \cdot \frac{2}{100},$$

tehát pl. $n = 500$-ra

$$a_{501} > 1 + 500 \cdot \frac{2}{100} = 11 \qquad \lightning$$

Megjegyzés: A 2.2.10 feladathoz hasonlóan, pontosabb becslés kapható a $b_n = a_n^3$ sorozat vzsgálatából.

←Vissza

2.6.4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2},$$

vagyis az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Megoldás: ekvivalens $$\sqrt[n+2]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1} \overset{\text{sz-m}}{<} \frac{(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right) + 1}{n+2}.$$

←Vissza

2.6.10. Számítsuk ki az

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n.$$

sorozat határértékét.

Megoldás:

$$a_n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to e,$$

tehát $a_n \to e$.

←Vissza

2.7.1. a_n monoton és van konvergens részsorozata. Következik-e ebből, hogy a_n konvergens?

Megoldás: Igen, hiszen legyen $a_{n_k} \to a$ konvergens részsorozat. Ekkor a monotonitás miatt $\forall\ n > n_k$-ra $|a_n - a| \le |a_{n_k} - a|$, tehát $a_n \to a$.

←Vissza

2.8.7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Megoldás: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ és $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1$ (teleszkópikus összeg).

←Vissza

2.8.9. Adjunk példát olyan a_n sorozatra, melyre $\sum a_n$ konvergens, és a_{n+1}/a_n nem korlátos.

Megoldás: Például $a_{2n} = \frac{1}{n^2}$ és $a_{2n+1} = \frac{1}{n^3}$.

←Vissza

2.8.20. Legyen $a, b > 0$. Milyen x-re konvergens?

$$\sum \frac{x^n}{a^n + b^n}$$

Megoldás: Feltehetjük, hogy $a \geq b$. Ekkor $\sqrt[n]{\frac{x^n}{a^n+b^n}} \to \frac{x}{a}$. Vagyis $|x| > a$-ra a sor divergens, $|x| < a$-ra pedig konvergens. Ha $|x| = a$, akkor $\frac{x^n}{a^n+b^n} \to 1$, tehát a sor ekkor is divergens.

←Vissza

2.9.3. Igazoljuk, hogy a véges hosszú, egészekből áll sorozatok halmaza megszámlálható.

Megoldás: Az n-edik lépésben soroljuk fel azokat a legfeljebb n hosszú sorozatokat, amelyekben csak n-nél kisebb abszolútértékű számok fordulnak elő és eddig még nem soroltuk fel őket.

←Vissza

2.9.9. Igazoljuk, hogy a véges hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmaza megszámlálható. Ugyanakkor igazoljuk, hogy a végtelen hosszú, racionális számokból álló sorozatok halmaza kontinuum számosságú.

Megoldás: Az első rész ugyanúgy megy, mint 2.9.3. A második rész következik a $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ azonosságból.

←Vissza

3.1.3. A következő függvényekről bizonyítsuk be, hogy a megadott H halmazon injektívek, és határozzuk meg az inverzüket:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $H = [-1, 1]$; 2. $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$, $H = \mathbb{R}$.

Megoldás: $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$, $y \in (-1, 1)$.

←Vissza

3.1.4. Keressünk olyan $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ függvényt, amire $f(f(x)) = -x \ \forall x \in [-1, 1]$.

Megoldás: Minden ilyen f a következő alakú: Legyen $(0, 1] = A \coprod B$ diszjunkt unió, $\varphi : A \to B$ bijekció. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{ha } \ x \in A \\ -\varphi^{-1}(x) & \text{ha } \ x \in B \\ -\varphi(-x) & \text{ha } \ -x \in A \\ \varphi^{-1}(-x) & \text{ha } \ -x \in B \\ 0 & \text{ha } \ x = 0. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhetően jó, pl. $A = (0, 1/2]$, $B = (1/2, 1]$ megfelel. Viszont ha f ilyen, akkor $A := (f > 0)$, $B := (f < 0)$.

←Vissza

3.1.14. Injektívek-e a következő függvények a $[-1, 1]$ halmazon?

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Megoldás: a) Legyen $x \neq y$ és tf. hogy $f(x) = f(y)$, vagyis

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \implies x(y^2+1) = y(x^2+1) \implies x-y = (x-y)xy \implies 1 = xy,$$

hiszen $x - y \neq 0$. Mivel $|x|, |y| \leq 1$, ez csak $x = y = \pm 1$ esetén teljesülhet, de az egyenlőséget nem engedtük meg. Tehát $f(x)$ injektív a $[-1, 1]$ halmazon.

b) $g(1) = g(-1)$, tehát $g(x)$ nem injektív a $[-1, 1]$ halmazon.

←Vissza

3.1.25. Van-e olyan f monoton függvény, amelyikre

1. $D(f) = [0, 1]$, $R(f) = (0, 1)$;
2. $D(f) = [0, 1]$, $R(f) = [0, 1] \cup [2, 3]$;
3. $D(f) = [0, 1]$, $R(f) = [0, 1) \cup [2, 3]$;
4. $D(f) = [0, 1]$, $R(f) = [0, 1) \cup (2, 3]$?

Megoldás:

1. Nincs, $0 < y < f(0)$-t nem tudja hol felvenni f.
2. $f(x) := \begin{cases} 3x & \text{ha } x \leq 1/3 \text{ vagy } x > 2/3 \\ 2 & \text{ha } 1/3 < x \leq 2/3 \end{cases};$
3. $f(x) := \begin{cases} 3x & \text{ha } x < 1/3 \text{ vagy } x > 2/3 \\ 2 & \text{ha } 1/3 \leq x \leq 2/3 \end{cases}.$
4. Nincs, $\sup f^{-1}([0,1))$-t nem tudja hol felvenni f.

←Vissza

3.2.1. A határérték megfelelő definíciója szerint alkalmas küszöbszámokat (pl. ε-hoz δ-t, vagy K-hoz δ-t, vagy ε-hoz L-et stb.) keresve adjuk meg a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\{x\}+1}{x-3}$;

Megoldás:

a) Azt állítjuk, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$. Ehhez $\varepsilon > 0$-hoz $\delta > 0$-t kell megadnunk. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta := \varepsilon$. Ekkor, ha $0 < |x| = |x-0| < \delta = \varepsilon$, akkor

$$\left|\frac{x}{x^2+1} - 0\right| = \left|\frac{x}{x^2+1}\right| < |x| < \delta = \varepsilon.$$

b) Azt állítjuk, hogy $\lim_{x\to\infty} \frac{\{x\}+1}{x-3} = 0$. Ehhez $\varepsilon > 0$-hoz $L \in \mathbb{R}$-et kell megadnunk. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén legyen $L := \frac{2}{\varepsilon} + 3$. Ekkor $L > 3$, továbbá ha $x > L$, akkor

$$\left|\frac{\{x\}+1}{x-3} - 0\right| = \frac{\{x\}+1}{x-3} < \frac{2}{x-3} < \frac{2}{L-3} = \varepsilon.$$

←Vissza

3.2.5. Határozzuk meg a következő függvények szakadási pontjait. Milyen típusú a szakadás?

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x-2}$, b) $g(x) = \operatorname{sgn}\left(\left\{\dfrac{1}{x}\right\}\right)$.

Megoldás:

a) Mind a számláló, mind a nevező folytonos függvény, tehát f szakadási helyei a nevező gyökeiben lesznek. A nevező két gyöke -1 és 2, tehát ezekben van f szakadási pontja. Mivel

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-x-2} = \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{1}{3}$, tehát f-nek 2-ben megszüntethető szakadási helye van.

Állítjuk, hogy $\lim_{x\to -1+0} f(x) = \infty$. Valóban, ha $K > 0$, akkor legyen $\delta := \frac{1}{K}$. Ekkor, ha $x \in (-1, -1+\delta)$, akkor $f(x) = \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{\delta} = K$. ($K < 0$ esetén akármilyen $\delta > 0$ megfelel.)

Állítjuk továbbá, hogy $\lim_{x\to -1-0} f(x) = -\infty$. Valóban, ha $K < 0$, akkor legyen $\delta := -\frac{1}{K}$. Ekkor, ha $x \in (-1-\delta, -1)$, akkor $f(x) = \frac{1}{x+1} \leq -\frac{1}{\delta} = K$. ($K > 0$ esetén akármilyen $\delta > 0$ megfelel.) Mindebből pedig az következik, hogy -1-ben a szakadási pont másodfajú.

b) A függvény a 0 kivételével minden pontban értelmezve van. Ha $t \neq \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alakú, akkor $\frac{1}{t} \notin \mathbb{Z}$. Innen $\{\frac{1}{t}\} \in (0,1)$, tehát $\operatorname{sgn}(\{\frac{1}{t}\}) = 1$. Mindebből viszont az is következik, hogy g a t pont egy környezetében 1-et vesz fel, tehát folytonos t-ben. Ha viszont $t = \frac{1}{n}$ valamely $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$-ra, akkor $g(t) = \operatorname{sgn}(\{n\}) = 0$, ami a korábban leírtakat is felhasználva azt jelenti, hogy $0 = g(t) \neq 1 = \lim_{x\to t} g(x)$, tehát ekkor g-nek t-ben megszüntethető (elsőfajú) szakadása van.

Végezetül állítjuk, hogy g-nek 0-ban sem bal- sem jobboldali határértéke nincs. Ezt legegyszerűbben átviteli elvvel lehet bizonyítani. Mivel $\frac{2}{n} \to 0$ és $\frac{2}{n} > 0$, ezért, ha létezne $\lim_{x\to 0+0} g(x)$, akkor az $a_n = g(\frac{2}{n})$ sorozat konvergálna. Mivel azonban a_n a $0, 1, 0, 1, \ldots$ sorozat, ezért divergens.

Hasonlóan $b_n = g(-\frac{2}{n})$ divergens $\Rightarrow \lim_{x\to 0-0} g(x)$ sem létezik, $\Rightarrow$ 0-ban 2. fajú szakadási pont van.

←Vissza

3.2.41. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitív periódusainak halmaza H. Mutassuk meg, hogy ha f folytonos és $\inf H = 0$, akkor f konstans.

Megoldás: Legyen $p_n \in H$ és $p_n \to 0$. Ekkor tetszőleges $a \in \mathbb{R}$-re létezik $k_n \in \mathbb{Z}$, hogy $|k_n p_n - a| < p_n$. Tehát $k_n p_n \to a$, és $f(k_n p_n) = f(0)$. f folytonossága és az átviteli elv miatt tehát $f(a) = f(0)$.

←Vissza

3.2.50. Igaz-e, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek minden pontban 0 a határértéke, akkor a függvény azonosan 0?

Megoldás: Nem, pl. $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{x} \notin \mathbb{N} \end{cases}.$

←Vissza

3.2.66. Tegyük fel, hogy f konvex $\mathbb{R}$-en, $f(0) = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} > 0$. Mit tudunk $\lim_{x\to\infty} f(x)$-ről mondani?

Megoldás: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2a > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ hogy $\frac{f(x)}{x} > a$ ha $x \in (0, \delta)$.

Állítás: $f(x) > ax$ $\forall x > 0$. Tf. ugyanis, hogy $\exists x_1 > 0$ $f(x_1) < ax_1$. Az előbbi miatt $x_1 > \delta$. Legyen $x_0 \in (0, \delta) \Rightarrow x_0 \in (0, x_1)$. Ekkor a $(0, f(0)) = (0, 0)$-n és $(x_1, f(x_1))$-en átmenő szelő meredeksége kisebb, mint a, tehát $(x_0, f(x_0))$ a szelő fölött van. De f konvex. $\lightning$

Tehát $f(x) > ax$ $\forall x > 0$. Viszont $\lim_{x\to\infty} ax = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a ∞-beli rendőr-elv miatt.

←Vissza

3.5.1. Tegyük fel, hogy $p(x) = a_{2k}x^{2k} + \dots + a_1x + a_0$ adott páros fokú polinom és $a_{2k} \cdot a_0 < 0$. Bizonyítsuk be, hogy p-nek legalább két valós gyöke van.

Megoldás: $p(x)$-nek és $-p(x)$-nek ugyanazok a gyökei $\Rightarrow$ feltehetjük, hogy $a_{2k} > 0$, $a_0 < 0$. Ekkor $p(0) = a_0 < 0$. Viszont $p(x)$ páros fokú és a főegyüttható $a_{2k} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$. Tehát $\exists K < 0$ $p(K) > 0$ és $\exists L > 0$ $p(L) > 0$. Mivel $p(x)$ folytonos, ezért Darboux-tulajdonságú $\Rightarrow$ felveszi a 0-t a $(K, 0)$ és $(0, L)$ intervallumokon.

←Vissza

3.5.3. (Brouwer-féle fixponttétel; 1-dimenziós eset.) Minden $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvénynek van fixpontja, azaz van olyan x, melyre $f(x) = x$.

Megoldás: Alkalmazzuk $f(x) - x$-re a Bolzano–Darboux-tételt.

←Vissza

3.5.12. Bizonyítandó, hogy az $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2$ harmadfokú polinomnak 3 valós gyöke van.

Megoldás: $f(-1) = -1$, $f(0) = 2$, $f(2) = -4$, $f(4) = 14$, tehát a Bolzano–Darboux-tétel szerint van legalább 3 gyök.

←Vissza

4.4.16. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ és $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ valós számok. Mutassuk meg, hogy

$$\det \begin{pmatrix} e^{a_1b_1} & e^{a_1b_2} & \ldots & e^{a_1b_n} \\ e^{a_2b_1} & e^{a_2b_2} & \ldots & e^{a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_nb_1} & e^{a_nb_2} & \ldots & e^{a_nb_n} \end{pmatrix} > 0.$$

(KöMaL A. 463., 2008. október)

Megoldás: n szerinti indukcióval bizonyítunk. Az $n = 1$ esetben az álítás $e^{a_1b_1} > 0$, ami triviális. Legyen tehát $n > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz kisebb n-ekre.

Legyen $c_i = a_i - a_1 > 0$. Ekkor

$$\det \begin{pmatrix} e^{a_1b_1} & e^{a_1b_2} & \ldots & e^{a_1b_n} \\ e^{a_2b_1} & e^{a_2b_2} & \ldots & e^{a_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_nb_1} & e^{a_nb_2} & \ldots & e^{a_nb_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} e^{a_1b_1} & e^{a_1b_2} & \ldots & e^{a_1b_n} \\ e^{a_1b_1}e^{c_2b_1} & e^{a_1b_2}e^{c_2b_2} & \ldots & e^{a_1b_n}e^{c_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{a_1b_1}e^{c_nb_1} & e^{a_1b_2}e^{c_nb_2} & \ldots & e^{a_1b_n}e^{c_nb_n} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{c_2b_1} & e^{c_2b_2} & \ldots & e^{c_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nb_1} & e^{c_nb_2} & \ldots & e^{c_nb_n} \end{pmatrix},$$

és elég azt igazolni, hogy az utolsó determináns pozitív.

Hogy elimináljuk az első sort, vonjuk ki az $(n-1)$-edik oszlopot az n-edik oszlopból. Utána vonjuk ki az $(n-2)$-edik oszlopot az $(n-1)$-edik oszlopból, ..., végül vonjuk ki az első oszlopot a másodikból:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{c_2b_1} & e^{c_2b_2} & \ldots & e^{c_2b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nb_1} & e^{c_nb_2} & \ldots & e^{c_nb_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e^{c_2 b_1} & e^{c_2 b_2} - e^{c_2 b_1} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ e^{c_3 b_1} & e^{c_3 b_2} - e^{c_3 b_1} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n b_1} & e^{c_n b_2} - e^{c_n b_1} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} e^{c_2 b_2} - e^{c_2 b_1} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ e^{c_3 b_2} - e^{c_3 b_1} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n b_2} - e^{c_n b_1} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Tekintsük az

$$f(t) = \det \begin{pmatrix} e^{c_2 t} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ e^{c_3 t} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n t} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix}$$

függvényt:

$$\det \begin{pmatrix} e^{c_2 b_2} - e^{c_2 b_1} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ e^{c_3 b_2} - e^{c_3 b_1} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n b_2} - e^{c_n b_1} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix} = f(b_2) - f(b_1).$$

A Lagrange-középértékből kapjuk, hogy létezik olyan $b_1 < x_1 < b_2$ szám, amire $f(b_2) - f(b_1) = (b_2 - b_1) f'(x_1)$, azaz

$$\det \begin{pmatrix} e^{c_2 b_2} - e^{c_2 b_1} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ e^{c_3 b_2} - e^{c_3 b_1} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n b_2} - e^{c_n b_1} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= (b_2 - b_1) \det \begin{pmatrix} c_2 e^{c_2 x_1} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ c_3 e^{c_3 x_1} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n e^{c_n x_1} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Megismételve ezt minden oszlopra, azt kapjuk, hogy alkalmas $x_i \in (b_i, b_{i+1})$ $(1 \le i \le n-1)$ számokra

$$\det \begin{pmatrix} e^{c_2 b_2} - e^{c_2 b_1} & e^{c_2 b_3} - e^{c_2 b_2} & \dots & e^{c_2 b_n} - e^{c_2 b_{n-1}} \\ e^{c_3 b_2} - e^{c_3 b_1} & e^{c_3 b_3} - e^{c_3 b_2} & \dots & e^{c_3 b_n} - e^{c_3 b_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_n b_2} - e^{c_n b_1} & e^{c_n b_3} - e^{c_n b_2} & \dots & e^{c_n b_n} - e^{c_n b_{n-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)\cdot\det\begin{pmatrix} c_2e^{c_2x_1} & c_2e^{c_2x_2} & \dots & c_2e^{c_2x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_ne^{c_nx_1} & c_ne^{c_nx_2} & \dots & c_ne^{c_nx_{n-1}} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)\cdot\prod_{i=2}^{n}c_i\cdot\det\begin{pmatrix} e^{c_2x_1} & e^{c_2x_2} & \dots & e^{c_2x_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{c_nx_1} & e^{c_nx_2} & \dots & e^{c_nx_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Az indukciós feltevés szerint ez pozitív.

←Vissza

4.8.13. Bizonyítsuk be, hogy $\lim n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\frac{e}{2}$.

Megoldás: $\lim n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=-f'(0)$, ahol $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\log(1+x)}{x}}$. Vegyük észre, hogy $f(x)$ analitikus 0-ban.

Megjegyzés: Ebből látszik, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lassan konvergál. Viszont ugyanolyan lassan, mint $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, így a számtani közepük $\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ már k/n^2-re közelíti e-t.

←Vissza

5.2.9. Számítsuk ki parciális integrálással (helyettesítés nélkül!) a következő integrálokat:

$(a)\quad \int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x;\qquad (b)\quad \int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x;\qquad (c)\quad \int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x;$

$(d)\quad \int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Segítség, egyben félrevezetés: $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=(x-1)'\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Megoldás: (a) Az integrandus $x>1$ és $x\le -1$ esetén is értelmes.

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x=(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\int(x-1)\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{-2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\operatorname{ar\,ch}x+C$$

ha $x>1$,

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\mathrm{d}x=-\sqrt{x^2-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=-\sqrt{x^2-1}+\operatorname{ar\,ch}|x|+C$$

ha $x<-1$.

(b)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + 2C, \\
\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x + C.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2-1} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x - \mathrm{ar\ ch}\, x + 2C, \\
\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ar\ ch}\, x + C.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2+1} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \mathrm{ar\ sh}\, x + 2C, \\
\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ar\ sh}\, x + C.
\end{aligned}$$

←Vissza

6.0.30. Bizonyítsuk be a *Kondenzációs lemmát*: Legyen $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergens} \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \quad \text{konvergens.}$$

Megoldás:

$$\begin{array}{lllllllll} a_1+ & a_2+ & a_2+ & a_4+ & a_4+ & a_4+ & a_4+ & a_8+ & \cdots \geq \\ a_1+ & a_2+ & a_3+ & a_4+ & a_5+ & a_6+ & a_7+ & a_8+ & \cdots \geq \\ \frac{1}{2}a_1+ & a_2+ & a_4+ & a_4+ & a_8+ & a_8+ & a_8+ & a_8+ & \cdots \end{array}$$

←Vissza

9.0.19. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ Jordan-mérhető. Igaz-e, hogy az $\bigcup_{a \in A} [0, a]$ halmaz (az origót az A-beli pontokkal összekötő szakaszok uniója) mérhető?

Megoldás: Legyen $A = \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big) \times \{1\}$. Az $(0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1)$ négyzetben az $\bigcup_{a \in A} [0, a]$ halmaz és a komplementere is sűrű, ezért a halmaz nem lehet Jordan-mérhető.

←Vissza

10.2.3. Mik azok a differenciálható $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amire a következő állítás teljesül? Ha g egyszerű, zárt, rektifikálható görbe $\mathbb{R}^2$-ben, akkor

$$\int_g x^2y^3 \, \mathrm{d}y = \int_g f(x, y) \, \mathrm{d}x.$$

Megoldás: Az $\big(f(x, y); -x^2y^3\big)$ leképezésnek minden zárt görbén 0 a vonalintegrálja, ezért van primtív függvénye. Ezért a keresztbe vett parcális deriváltjai megegyeznek: $D_2 f(x, y) = -2xy^3$. Ebből következik, hogy rögzített x esetén $f(x, y) = -\frac{1}{2}xy^4 + c(x)$ valamilyen, x-től függő $c(x)$ konstanssal. A $c(x)$ függvény is differenciálható. Ez az eredmény megfordítható, az összes ilyen alakú függvény megoldás.

←Vissza

10.3.6. Az $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ vektormező akárhányszor differenciálható, rotációmentes, és az origó egy pontozott könyezetében korlátos. Bizonyítsuk be, hogy van primitív függvénye.

Megoldás: Legyen γ tetszőleges zárt töröttvonal, ami nem megy át az origón; azt kell igazolnunk, hogy f vonalintegrálja γ-n nulla. Legyen $0 < p \leq 1$ esetén γ_p a töröttvonal p-szeres kicsinyítése az origóból. Mivel γ és γ_p homotóp, az összes γ_p-n ugyanakkora a vonalintegrál. Másrészt f korlátossága miatt $\left|\int_{\gamma_p} f\right| \leq Kp$, így $\lim\limits_{p \to +0} \int_{\gamma_p} f = 0$. Az integrál tehát konstans (nem függ p-től), ugyanakkor 0-hoz tart.

←Vissza

11.1.7. Bizonyítsuk be, hogy bármely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonossági pontjainak halmaza Borel, és adjunk meg minél szűkebb Borel-osztályt (pl. $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$), aminek biztosan eleme.

Megoldás: Legyen minden n pozitív egészre

$$\mathcal{I}_n = \left\{ I \subset \mathbb{R} : \ I \text{ nyílt intervallum, és } \sup_I f - \inf_I f < \tfrac{1}{n} \right\}$$

és

$$A_n = \cup \mathcal{I}_n = \bigcup_{I \in \mathcal{I}_n} I.$$

A Cauchy-kritérium miatt egy $a \in \mathbb{R}$ pont akkor és akkor folytonossági pontja f-nek, ha

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists I \in \mathcal{I}_n \ \ a \in I,$$

azaz

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a \in A_n.$$

Ezért a folytonossági pontok halmaza $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, ami G_δ.

←Vissza

11.1.12. Legyen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos minden n-re. Bizonyítsuk be, hogy az $\{x : f_n(x) \text{ konvergens}\}$ halmaz Borel, és adjunk meg minél szűkebb Borel-osztályt, aminek biztosan eleme.

Megoldás: A Cauchy-kritérium miatt

$$\begin{aligned}
&\{x : f_n(x) \text{ konvergens}\} = \\
&\qquad = \left\{ x : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall p, q \geq k \ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \tfrac{1}{n} \right\} = \\
&\qquad = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p,q \geq k}^{\infty} \left\{ x : |f_p(x) - f_q(x)| \leq \tfrac{1}{n} \right\}.
\end{aligned}$$

Az utolsó halmaz a folytonosság miatt zárt, ezek metszete is zárt, tehát

$$\{x : f_n(x) \text{ konvergens}\} \in F_{\sigma\delta}(\mathbb{R}).$$

←Vissza

11.2.2. Miért nem külső mérték a külső Jordan-mérték a korlátos halmazok gyűrűjén?

Megoldás: A külső Jordan-mérték nem σ-szubadditív. Például a $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ halmaz megszámlálható sok egyelemű, tehát Jordan-nullmértékű halmaz uniója, mégis $k\big(\mathbb{Q} \cap [0, 1]\big) = 1$.

←Vissza

11.2.17. Megadható-e kontinuum sok 1/2 Lebesgue-mértékű mérhető halmaz $[0,1]$-ben úgy, hogy közülük bármely kettő metszetének mértéke 1/4 legyen?

Megoldás: A válasz nem. Megmutatjuk, hogy legfeljebb csak megszámlálható sok ilyen tulajdonságú halmaz adható meg.

Először tetszőleges $A \subset [0,1]$ mérhető halmazhoz konstruálunk egy olyan $f(A)$ halmazt, amely véges sok, racionális végpontú intervallum egyesítése, és $\lambda\big(f(A)\triangle A\big) < \frac{1}{8}$. Vegyük A egy olyan $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ fedését, amire $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < \lambda(A)+\frac{1}{16}$, és mindegyik I_m mindkét végpontja racionális. Alkalmas n pozitív egészre $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |I_k| < \frac{1}{16}$. Ezek után legyen $f(A) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$.

Most tegyük fel, hogy $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}\big([0,1]\big)$ olyan rendszer, amiben minden halmaz 1/2 Lebesgue-mértékű, és bármely kettő metszetének mértéke 1/4. Megmutatjuk, hogy az f leképezés injektív $\mathcal{A}$-n. Valóban, ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $A \neq B$, akkor

$$\lambda\Big(f(A)\triangle f(B)\Big) = \lambda\Big(A\triangle B\triangle\big(A\triangle f(A)\big)\triangle\big(B\triangle f(B)\big)\Big) >$$
$$> \lambda\Big(A\triangle B\Big) - \lambda\big(A\triangle f(A)\big) - \lambda\big(B\triangle f(B)\big) > \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} = 0.$$

Tehát $\lambda\big(f(A)\triangle f(B)\big) > 0$, és így $f(A) \neq f(B)$.

Mivel az f leképezés értékkészlete megszámlálható, az $\mathcal{A}$ rendszer is megszámlálható.

←Vissza

11.2.25. (a) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\lambda(A) > 0$, akkor $A - A$ tartalmaz 0 körüli gömböt. (Steinhaus tétele)

(b) Igazoljuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mérhető pozitív mértékű halmazok, akkor $A + B$ belseje nemüres.

(c) Igazoljuk, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^p$ pozitív mértékű mérhető és $B \subset \mathbb{R}^p$ pozitív külső mértékű halmaz, akkor $A + B$ belseje nemüres.

Megoldás: A 11.2.16 feladat szerint vannak olyan nem elfajuló $T_A \subset \mathbb{R}^p$ és $T_B \subset \mathbb{R}^p$ tengelypárhuzamos téglák, amikre $\lambda(T_A \cap A) > \frac{99}{100}\lambda(T_A)$, illetve $\overline{\lambda}(T_B \cap B) > \frac{99}{100}\lambda(T_B)$. A téglák csúcsait kicsit elmozdítva elérhetjük, hogy koordinátáik racionális számok legyenek; ezután a két téglát felbonthatjuk egyforma méretű kis kockákra. A kis kockák között is lesz legalább egy-egy olyan, amelynek nagyobb, mint $\frac{99}{100}$ része az A, illetve a B halmazhoz tartozik; legyen K_A és K_B egy-egy ilyen kis kocka; ekkor tehát

$$\lambda(K_A \cap A) > \tfrac{99}{100}\lambda(K_A) \quad \text{és} \quad \overline{\lambda}(K_B \cap B) > \tfrac{99}{100}\lambda(K_B).$$

Mindhárom állítás változatlan marad, ha a halmazokat párhuzamosan eltoljuk; ezért feltehetjük, hogy mindkét tégla középpontja az origó, tehát $K_A = K_B = [-d, d]^p = K$ valamilyen $d > 0$-val.

(a) Mivel $(A \cap K) - (A \cap K) \subset A - A$, az A halmazból a K-n kívüli részeket elhagyhatjuk, és az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $A \subset K$.

Legyen $r = \left((3/2)^{1/p} - 1\right)d$. Megmutatjuk, hogy $B(0, r) \subset A - A$. Ehhez azt kell igazolnunk, hogy $x \in B(0, r)$ esetén $x \in (A - A)$, ami ekvivalens azzal, hogy $A \cap (A + x)$ nemüres.

Legyen $K_+ = [-d - r, d + r]^p = (3/2)^{1/p} \cdot K$, és legyen $x \in B(0, r)$ tetszőleges. Ekkor $A \subset K \subset K_+$ és $(A + x) \subset (K + x) \subset K_+$, így

$$\begin{gathered}\lambda\big(A \cap (A + x)\big) = \lambda(A) + \lambda(A + x) - \lambda\big(A \cup (A + x)\big) \geq \\ \geq \frac{99}{100}\lambda(K) + \frac{99}{100}\lambda\big(K + x\big) - \lambda(K_+) = \left(\frac{99}{100} + \frac{99}{100} - \frac{3}{2}\right)\lambda(K) > 0.\end{gathered}$$

(c) Feltehetjük, hogy $A, B \subset K$. Legyen ismét $r = \left((3/2)^{1/p} - 1\right)d$, $K_+ = [-d - r, d + r]^p = (3/2)^{1/p} \cdot K$, és $x \in B(0, r)$ tetszőleges. Az A halmaz mérhető, ezért „jól vágja ketté" a $(-B + x)$ halmazt:

$$\overline{\lambda}\big((-B + x) \cap A\big) + \overline{\lambda}\big((-B + x) \setminus A\big) = \overline{\lambda}\big(- B + x\big).$$

Ezért

$$\begin{gathered}\overline{\lambda}\big((-B + x) \cap A\big) = \overline{\lambda}\big(- B + x\big) - \overline{\lambda}\big((-B + x) \setminus A\big) > \overline{\lambda}(B) - \overline{\lambda}(K_+ \setminus A) = \\ = \overline{\lambda}(B) - \lambda(K_+) + \lambda(A) > \left(\frac{99}{100} - \frac{3}{2} + \frac{99}{100}\right)\lambda(K) > 0.\end{gathered}$$

Mivel $\overline{\lambda}\big((-B + x) \cap A\big) > 0$, így $(-B + x) \cap A$ nemüres, azaz $x \in (A + B)$. Ez minden $x \in B(0, r)$-re igaz, tehát $B(0, r) \subset (A + B)$.

A (b) állítás triviálisan következik a (c)-ből.

←Vissza

12.0.9. Legyen $n \geq 2$ és $u_1 = 1, u_2, \ldots, u_n$ legfeljebb 1 abszolút értékű komplex számok, továbbá legyen

$$f(z) = (z - u_1)(z - u_2) \ldots (z - u_n).$$

Igazoljuk, hogy az $f'(z)$ polinomnak van olyan komplex gyöke, aminek a valós része nemnegatív.

KöMaL A. 430.

Megoldás: Ha az 1 többszörös gyöke f-nek, akkor $f'(1) = 0$ és az állítás triviális. Ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy $u_2, \ldots, u_n$ egyike sem 1.

Legyenek $f'(z)$ gyökei $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, és tekintsük a $g(z) = f(1-z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ polinomot.

A $g(z)$ polinom gyökei $0, 1-u_2, \ldots, 1-u_n$. A Viéta-formulákból kifejezve a 0-tól különböző gyökök reciprokösszegét,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1-u_k} = \frac{(1-u_2)\ldots(1-u_{n-1}) + \ldots + (1-u_3)\ldots(1-u_n)}{(1-u_2)\ldots(1-u_n)} = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Az $f'(1-z) = -g'(z) = -a_1 - 2a_2 z - \ldots - n a_n z^{n-1}$ polinom gyökei $1-v_1, \ldots, 1-v_{n-1}$; ezek reciprokösszege pedig

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{1-v_\ell} = \frac{(1-v_1)\ldots(1-v_{n-2}) + \ldots + (1-v_2\ldots v_{n-1})}{(1-v_1)\ldots(1-v_{n-1})} = -\frac{2a_2}{a_1}.$$

A két egyenletet összevetve,

$$\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{1-v_\ell} = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1-u_k}.$$

Minden egyes k-ra u_k az egységkörben vagy annak határán van, $1-u_k$ pedig az 1 középpontú, egységnyi sugarú körben (vagy a határán). A reciprokképzés megfelel egy 0 pólusú inverzió és a valós tengelyre való tükrözés egymás utánjának. Ezért $\frac{1}{1-u_k}$ a $\mathrm{Re}\, z \geq \frac{1}{2}$ félsíkban van, $\mathrm{Re}\frac{1}{1-u_k} \geq \frac{1}{2}$.

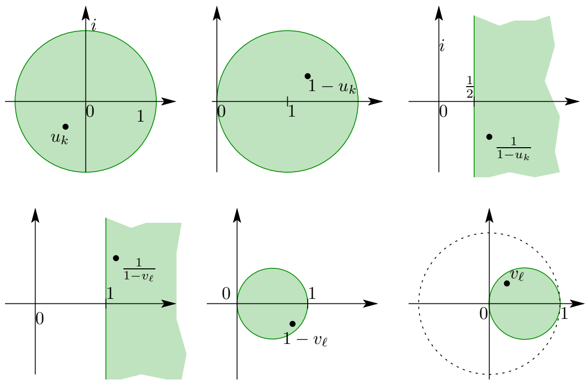
Ezt összegezve kapjuk, hogy

$$\max_{1\leq\ell\leq n-1} \mathrm{Re}\frac{1}{1-v_\ell} \geq \frac{1}{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1} \mathrm{Re}\frac{1}{1-v_\ell} = \frac{2}{n-1}\sum_{k=2}^{n} \mathrm{Re}\frac{1}{1-u_k} \geq 1,$$

vagyis legalább az egyik $\frac{1}{1-v_\ell}$ a $\mathrm{Re}\, z \geq 1$ félsíkba esik.

Az előbbi geometriai okoskodást visszafelé is elvégezve,

$$\mathrm{Re}\frac{1}{1-v_\ell} \geq 1 \iff \left|(1-v_\ell) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \iff \left|v_\ell - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathrm{Re}\, v_\ell \geq 0.$$



←Vissza

12.1.1. A komplex sík mely pontjaiban differenciálható a $z \mapsto \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z + i|z|^2$ függvény?

Megoldás: Az $(x, y) \mapsto (x - y, x^2 + y^2)$ függvény valós értelemben differenciálható, mert mindkét komponense polinom. A komplex differenciálhatóság ezért ekvivalens azzal, hogy teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek:

$$\partial_1(x-y) = \partial_2(x^2+y^2); \quad \partial_2(x-y) = -\partial_1(x^2+y^2)$$
$$1 = 2y; \quad -1 = -2x$$
$$(x, y) = (1/2, 1/2).$$

A függvény tehát csak az $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ pontban differenciálható.

←Vissza

12.1.5. Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 - (2 + i)\bar{z}$ függvény?

Megoldás: Ha $z = x + yi$, akkor az

$$|z|^2 - (2+i)\bar{z} = (x^2+y^2) - (2+i)(x-yi) = (x^2 - 2x + y^2 - y) + (-x + 2y)i$$

függvény azokban a pontokban differenciálható komplex értelemben, ahol az $u(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - y$ és $v(x, y) = -x + 2y$ mint $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók és teljesülnek rájuk a Cauchy–Riemann-egyenletek. Mivel u és v is polinom, mindenhol differenciálhatók. A Cauchy–Riemann-egyenletek:

$$\partial_1 u = \partial_2 v, \qquad \partial_2 u = -\partial_1 v$$
$$2x - 2 = 2, \qquad 2y - 1 = 1$$
$$x = 2, \qquad y = 1, \qquad z = 2 + i.$$

A függvény egyedül a $2 + i$ pontban differenciálható.

←Vissza

13.0.4. Legyen γ az $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$ parabola azon íve, aminek kezdőpontja $-1+i$, végpontja pedig $1+i$.

$$\int_\gamma |z|^2 \overline{\mathrm{d}z} = ?$$

Megoldás: A parabolaív egy paraméterezése: $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [-1, 1]$.

$$\int_\gamma |z|^2 \overline{\mathrm{d}z} = \int_{-1}^{1} \left|\gamma(t)\right|^2 \overline{\dot\gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (t^2+t^4)(1-2it)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 2it^3 + t^4 - 2it^5)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{i}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{i}{3}t^6\right]_{t=-1}^{1} = \frac{16}{15}.$$

←Vissza

13.1.2. Igazoljuk, hogy tetszőleges a komplex számra

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right|\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \log|a| & \text{ha } |a|>1, \\ 0 & \text{ha } |a| \le 1. \end{cases}$$

1. megoldás. Ha $|a| > 1$, akkor az $f(z) = \log(z+a)$ függvény regulárisan értelmezhető a $|z| < |a|$ körlapon. A középérték-tulajdonság szerint

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt = f(0),$$

tehát

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\operatorname{Re}\log\left(e^{it}+a\right)\Big)\,\mathrm{d}t =$$
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(e^{it}+a\right)\,\mathrm{d}t\right) = \operatorname{Re}\log(0+a) = \log|a|.$$

Ha $|a| < 1$, akkor a középérték-tulajdonságot a $g(z) = \log(1 - \overline{a}z)$ függvényre alkalmazzuk. Mivel a $z \mapsto \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$ függvény az egységkörön egységnyi abszolút értékű,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|e^{it}+a\right|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|(e^{it}+a)\cdot\frac{1-\overline{a}e^{it}}{e^{it}-a}\right|\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|1-\overline{a}e^{it}\right|\,\mathrm{d}t = \log 1 = 0.$$

Az $|a| = 1$ esetet határátmenettel kaphatjuk meg.

2. megoldás. Először feltesszük, hogy $|a| \neq 1$.
Felhasználjuk, hogy

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{2\pi i k/n}\right) = z^n - (-1)^n.$$

Az integrált összeggel közelítve,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|e^{it} + a\right| \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log\left|e^{2\pi i k/n} + a\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log\left|\prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i k/n} + a\right)\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \log\left|a^n - (-1)^n\right|^{1/n}.$$

Ha $|a| < 1$, akkor $a^n \to 0$ és $\left|a^n - (-1)^n\right|^{1/n} \to 1$; ha pedig $|a| > 1$, akkor $\left|a^n - (-1)^n\right|^{1/n} \to |a|$.
Az $|a| = 1$ esetet határátmenettel vagy további ügyeskedéssel kapjuk meg.

←Vissza

13.1.7. Legyenek a, b komplex számok, $|b| < 1$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 |\,\mathrm{d}z| = \frac{|a-b|^2}{1-|b|^2} + 1.$$

Megoldás:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^2 |\,\mathrm{d}z| = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}{(z-b)(\overline{z}-\overline{b})} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{iz} =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z-a)(\frac{1}{z}-\overline{a})}{(z-b)(\frac{1}{z}-\overline{b})} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z-a)(1-\overline{a}z)}{b(1-\overline{b}z)} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z =$$

$$= \left.\frac{(z-a)(1-\overline{a}z)}{b(1-\overline{b}z)}\right|_{z=b} - \left.\frac{(z-a)(1-\overline{a}z)}{b(1-\overline{b}z)}\right|_{z=0} =$$

$$= \frac{(b-a)(1-\overline{a}b)}{b(1-\overline{b}b)} + \frac{a}{b} = \frac{(a-\overline{b})(\overline{a}-b)}{1-b\overline{b}} + 1 = \frac{|a-b|^2}{1-|b|^2} + 1.$$

←Vissza

13.1.8.

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{3^z}{(z-1)^2(z+3)^2} \,\mathrm{d}z = ?$$

Megoldás: Az $f(z) = \dfrac{3^z}{(z+3)^2}$ függvény reguláris az $|z| < 3$ halmazon. A deriváltra vonatkozó Cauchy-formula szerint

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = f'(1) = \left(\frac{3^z \log 3}{(z+3)^2} - 2\frac{3^z}{(z+3)^3}\right)_{z=1} = \frac{3\log 3}{16} - \frac{3}{32}.$$

Tehát

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{3^z}{(z-1)^2(z+3)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left(\frac{3\log 3}{16} - \frac{3}{32}\right) = \frac{3(2\log 3 - 1)\pi i}{16}\,.$$

←Vissza

13.1.9. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör ($|z| < 1$) belsejében, és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

Megoldás: Írjuk fel a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulát egy $r < 1$ sugarú körön, majd becsüljünk az integrandus abszolút értékével:

$$|f'''(0)| = \left|\frac{3!}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-0)^4}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{3}{r^4\pi}\int_{|z|=r} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}z| <$$
$$< \frac{3}{r^4\pi}\int_{|z|=r} 1\,|\,\mathrm{d}z| = \frac{6}{r^3}.$$

Az $r \to 1-0$ határátmenetből $|f'''(0)| \le 6$.

Az $f(z) = z^3$ függvényre teljesül az $|f| < 1$ feltétel, és $f'''(0) = 6$. Az $|f'''(0)|$ legnagyobb lehetséges értéke tehát a 6.

←Vissza

13.2.13. Fejtsük Laurent-sorba a $\dfrac{z^3}{z^2-1}$ függvényt az $1+2i$ körül úgy, hogy előállítsa a függvényt a 0 egy környezetében. Mi az a legbővebb tartomány, ahol a Laurent-sor előállítja a függvényt?

Megoldás: Azt a Laurent-sort kell felírnunk, ami a $2 < |z-1-2i| < 2\sqrt{2}$ körgyűrűn állítja elő a függvényt. Mivel a függvénynek az 1-ben és a (-1)-ben pólusa van, ez a legbővebb tartomány.

$$\frac{z^3}{z^2-1} = z + \frac{\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1} =$$
$$= z + \frac{\frac{1}{2}}{(z-1-2i)+(2+2i)} + \frac{\frac{1}{2}}{(z-1-2i)+2i} =$$
$$= z + \frac{\frac{1}{2(2+2i)}}{1+\frac{z-1-2i}{2+2i}} + \frac{\frac{1}{2(z-1-2i)}}{1+\frac{2i}{z-1-2i}} =$$
$$= z + \frac{1}{2(2+2i)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1-2i}{2+2i}\right)^k + \frac{1}{2(z-1-2i)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-1-2i}\right)^k =$$
$$= (1+2i) + (z-1-2i) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2\cdot(2+2i)^{k+1}}(z-1-2i)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2i)^k}{2}(z-1-2i)^{-k-1}.$$

←Vissza

13.2.22. Fejtsük Laurent-sorba a $\dfrac{2z^3-1}{z^2+z}$ függvényt az i körül, az $1 < |z-i| < \sqrt{2}$ halmazon.

Megoldás:

$$\frac{2z^3-1}{z^2+z} = 2z-2+\frac{2z-1}{z^2+z} = 2z-2+\frac{-1}{z}+\frac{3}{z+1} =$$
$$= 2(z-i)+(-2+2i)+\frac{-1}{(z-i)+i}+\frac{3}{(z-i)+(1+i)} =$$
$$= 2(z-i)+(-2+2i)+\frac{\frac{-1}{z-i}}{1+\frac{i}{z-i}}+\frac{\frac{3}{1+i}}{1+\frac{z-i}{1+i}} =$$
$$= 2(z-i)+(-2+2i)+\frac{-1}{z-i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z-i}\right)^k+\frac{3}{1+i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(-i^{k+1}\right)(z-i)^k + \left((-2+2i)+\frac{3}{1+i}\right) + \left(2-\frac{3}{(1+i)^2}\right)(z-i) +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot 3}{(1+i)^{k+1}}(z-i)^k.$$

←Vissza

13.3.1. Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?

Megoldás: Legyen $g(z) = f(z) \cdot \overline{f(\overline{z})}$, ami szintén egészfüggvény. Az $1/n$ alakú pontokban $g(1/n) = f(1/n) \cdot \overline{f(1/n)} = |f(1/n)|^2 = (1/n)^4$. Az Unicitástétel miatt tehát $g(z) = z^4$. A $z = i$ pontban $1 = |i^4| = |g(i)| = |f(i)| \cdot |f(-i)| = 2|f(-i)|$, vagyis $|f(-i)| = \frac{1}{2}$.

Megjegyzés: A $|g(1/n)| = 1/n^2$ feltételnek az $f(z) = z^2 e^{i\varphi(z)}$, alakú függvények tesznek eleget, ahol φ olyan egészfüggvény, ami a valós tengelyen valós.

←Vissza

13.3.2. Az f egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \dfrac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

Megoldás: Tekintsük a $g(z) = f(z)e^{-\pi z^2}$ egészfüggvényt. Az $(1/n)$ sorozat mentén g értéke tisztán valós. A $h(z) = \overline{g(\overline{z})}$ függvény is egészfüggvény, és $h(1/n) = g(1/n)$. Az unicitás-tétel szerint tehát $h = g$. Valós helyeken $g(x) = h(x) = \overline{g(\overline{x})} = \overline{g(x)}$, vagyis valós helyeken $g(x)$ is tisztán valós. Speciálisan $g(2) = f(2)$ is valós.

Ezek után három eset marad:

$f(2) > 0$, ilyen például az $f_1(z) = e^{\pi z^2}$ függvény;

$f(2) < 0$, ilyen például az $f_2(z) = e^{\pi z^2}\left(\frac{3}{2} - z\right)$ függvény;

$f(2) = 0$, ilyen például az $f_3(z) = e^{\pi z^2}(2 - z)$ függvény.

Tehát $\arg f(2)$ a π-nek többszöröse, vagy pedig nem létezik.

←Vissza

13.3.4. Az f függvény reguláris az $1 < |z| < 2$ tartományon, és az $1, 2$ pontokat összekötő szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Mutassuk meg, hogy a $-1, -2$ pontokat összekötő szakaszon is csak valós értékei vannak.

Megoldás: Legyen $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, ami ugyanazon a halmazon értelmes. A $[1, 2]$ szakaszon z és $f(\overline{z})$ is valós, ezést itt $g(z) = f(z)$. Az unicitástétel miatt tehát $g = f$. A $[-1, 2]$ szakaszon z szintén valós, ezért itt $f(z) = g(z) = \overline{f(\overline{z})}$, vagyis $f(z)$ valós.

←Vissza

13.3.6. Mutassunk olyan nem azonosan 0 függvényt, ami reguláris az egységkör belsejében, és ott végtelen sok gyöke van. Miért nem mond ez ellent az unicitás-tételnek?

Megoldás: Ilyen függvény például a $\sin \frac{1}{1-z}$, aminek az $1 - \frac{1}{k\pi}$ alakú számok gyökei. Ez azért nem mond ellent az unicitás-tételnek, mert a gyökök nem a tartomány belsejében, hanem a határához torlódnak.

←Vissza

13.4.10. Bizonyítsuk be (a nagy Picard-tétel felhasználása nélkül), hogy ha az f függvénynek lényeges szingularitása van egy z_0 pontban, akkor a z_0

tetszőleges ε sugarú pontozott környezetében az értékkészlet komplementere nem tartalmazhat szakaszt.

Megoldás: Tegyük fel, hogy van egy egyenes szakasz, ami diszjunkt f értékkészletével, és legyen $az + b$ az a lineáris függvény, ami ezt a szakaszt a $[-1, 1]$ intervallumba viszi, és legyen $f_1(z) = af(z) + b$. Ekkor f_1-nek is lényeges szingularitása van z_0-ban, és f_1 a z_0 egy $\dot{U}$ pontozott környezetében mégsem vesz fel a függvény $[-1, 1]$-beli értéket. Legyen

$$g(z) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{f_1(z)} + 1}} \qquad (z \in \dot{U}),$$

ahol a $\sqrt{\ }$ a négyzetgyökfüggvény főértéke.

Az $\dot{U}$ halmazon az $\frac{1}{f_1} + 1$ függvény nem vesz fel nempozitív valós értéket, ezért a $\sqrt{\frac{1}{f_1(z)} + 1}$ függvény valóban értelmes, reguláris, és értékei a jobb félsíkba esnek. Végül $g(z)$ is létezik $\dot{U}$-n, és $|g(z)| < 1$.

A g függvény korlátos az $\dot{U}$ halmazon; ebből következik, hogy a z_0 pontban megszüntethető szingularitása van.

Ha g-nek k-szoros gyöke van z_0-ban (lehet $k = 0$ is), akkor az

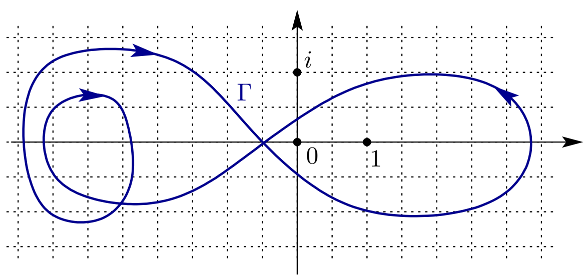
$$f_1(z) = \left(\frac{1}{g(z)} - 1\right)^2 - 1$$

függvénynek ugyanott $2k$-adrendű pólusa van ($k = 0$ esetén megszüntethető szingularitása).

←Vissza

13.4.21.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = ?$$



Megoldás: A Γ görbe $(+1)$-szer kerüli meg a $0, \frac{\pi}{3}, \pi$ pontokat és (-2)-ször a $-\pi$ pontot, más szingularitást nem kerül meg. A reziduumot a $0, \pm\pi$ pontokban például a $\operatorname{Res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$, a $\frac{\pi}{3}$-ban pedig a deriváltra vonatkozó Cauchy-formulából számíthatjuk ki.

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = \left.\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 (\sin z)'}\right|_{z=k\pi} = \frac{(-1)^k}{\left(k-\frac{1}{3}\right)^2 \pi^2} = \frac{(-1)^k \cdot 9}{(3k-1)^2\pi^2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi/3} \frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = \left.\left(\frac{1}{\sin z}\right)'\right|_{x=\pi/3} = \frac{-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3},$$

$$\int_\Gamma = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_0 + \operatorname*{Res}_\pi - 2\operatorname*{Res}_{-\pi} + \operatorname*{Res}_{\pi/3} \right) = 2\pi i \left(\frac{9}{\pi^2} - \frac{9}{4\pi^2} + 2 \cdot \frac{9}{16\pi^2} - \frac{2}{3} \right) =$$
$$= \left(\frac{63}{4\pi} - \frac{4\pi}{3} \right) i.$$

←Vissza

13.4.38.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1} = ?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

Megoldás: A $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1}$ összes reziduumainak összege 0. A függvénynek az egész helyeken kívül egyszeres pólusa van a $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ pontokban;

$$\operatorname*{Res}_{z=k\in\mathbb{Z}} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1} = \frac{1}{k^2+k+1},$$

és

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i} \frac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1} = \frac{\pi \operatorname{ctg}\left(\pi\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)}{2\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)+1} =$$

$$= \frac{\pi i \dfrac{e^{\pi i(-1\pm\sqrt{3}i)}+1}{e^{\pi i(-1\pm\sqrt{3}i)}-1}}{\pm\sqrt{3}i} = \frac{\pi}{\pm\sqrt{3}} \cdot \frac{-e^{\mp\sqrt{3}\pi}+1}{-e^{\mp\sqrt{3}\pi}-1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{e^{\sqrt{3}\pi}-1}{e^{\sqrt{3}\pi}+1}.$$

Tehát,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2+k+1}=-\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\operatorname*{Res}_{z=k}\frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2+z+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{e^{\sqrt{3}\pi}-1}{e^{\sqrt{3}\pi}+1}.$$

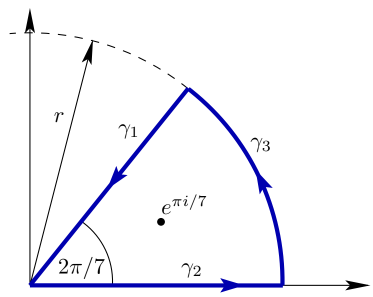
←Vissza

13.4.44.

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^7+1}=?$$

(A végeredményben nem lehetnek komplex számok!)

1. megoldás. Legyen $r>2$, és $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ az ábrán látható görbe.



Az $\dfrac{1}{z^7+1}$ függvénynek elsőrendű pólusa van az $e^{\pi i/7}$ pontban, és itt a reziduuma

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/7}}\left(\frac{1}{z^7+1}\right)=\left.\frac{1}{(z^7+1)'}\right|_{z=e^{\pi i/7}}=\left.\frac{1}{7z^6}\right|_{z=e^{\pi i/7}}=\frac{1}{7e^{6\pi i/7}}.$$

A reziduumtétel szerint

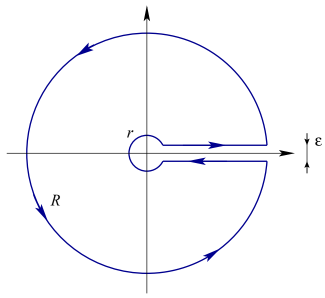
$$\frac{1}{7e^{6\pi i/7}}=\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/7}}\left(\frac{1}{z^7+1}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z^7+1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}\right)=\frac{1-e^{2\pi i/7}}{2\pi i}\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{x^7+1}+O\left(\frac{1}{r^6}\right).$$

Az $r\to\infty$ határátmenetből tehát

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^7+1}=\frac{1}{7e^{6\pi i/7}}\cdot\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/7}}=\frac{2\pi i}{7e^{7\pi i/7}\left(e^{-\pi i/7}-e^{\pi i/7}\right)}=\frac{\pi}{7\sin\dfrac{\pi}{7}}.$$

2. megoldás. Legyen $0 < r < 1 < R$, és integráljuk a $\dfrac{\log z}{z^7+1}$ függvényt a jobboldali ábrán látható γ görbén. Az $\log z$ argumentumát 0 és 2π között választjuk.



$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\log z}{z^7+1}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_r^R \frac{\log x}{x^7+1}\,\mathrm{d}x - \int_r^R \frac{\log x + 2\pi i}{x^7+1}\,\mathrm{d}x\right) + O\left(r\log\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{\log R}{R^6}\right) =$$

$$= -\int_r^R \frac{\log x}{x^7+1}\,\mathrm{d}x + O\left(r\log\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{\log R}{R^6}\right).$$

Az integrandusnak az $e^{(2k+1)\pi i/7}$ alakú $(k = 0, 1, \ldots, 6)$ helyeken van pólusa, és

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{(2k+1)\pi i/7}} \frac{\log z}{z^7+1} = \frac{(2k+1)\pi i/7}{7e^{6(2k+1)\pi i/7}} = \frac{(2k+1)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7}.$$

Mivel a kiszámolhandó integrál tisztán valós, elég a valós részt kiszámolni:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^7+1} = -\sum_{k=0}^{6} \operatorname{Re}\left(\operatorname*{Res}_{z=e^{(2k+1)\pi i/7}} \frac{\log z}{z^7+1}\right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{6} \operatorname{Re}\left(\frac{(2k+1)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7}\right) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{6} \frac{(2k+1)\pi}{49}\sin\frac{6(2k+1)\pi}{7} = \frac{12\pi}{49}\sin\frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{49}\sin\frac{2\pi}{7} + \frac{8\pi}{49}\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Megjegyzés: Mivel a hetedik egységgyökök összege 0,

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{(2k+1)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7} = \sum_{k=0}^{6} \frac{(2k-7)\pi i}{49}e^{-6(2k+1)\pi i/7},$$

és az integrál képzetes része valóban kiesik.

Egy másik lehetőség, hogy nem a $\dfrac{\log z}{z^7+1}$, hanem a $\dfrac{\log z - \pi i}{z^7+1}$ függvényt integráljuk.

←Vissza

13.4.77. Hány gyöke van a $\cos z = 2z^3$ egyenletnek az egységkörben?

Megoldás: A Rouché-tételt alkalmazzuk. Megmutatjuk, hogy a körvonalon $|2z^3| > |\cos z|$.

Mivel e^{iz} és e^{-iz} szorzata 1, valamelyik abszolút értéke legfeljebb 1. Mivel $\mathrm{Re}(iz) \le 1$, azt is tudjuk, hogy $|e^{iz}| \le e$. Ezért

$$|\cos z| = \left|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right| \le \frac{e+1}{2} < 2 = |2z^3|.$$

A Rouché-tétel szerint a kör belsejében a $2z^3 - \cos z$ függvénynek (multiplicitással számolva) ugyanannyi gyöke van, mint a $2z^3$ függvénynek, vagyis 3.

Megjegyzés: Nem nehéz ellenőrizni, hogy a $2z^3 - \cos z$ függvénynek egy egyszeres valós gyöke van, a másik két gyök egymás konjugáltja. A három gyök tehát különböző.

←Vissza

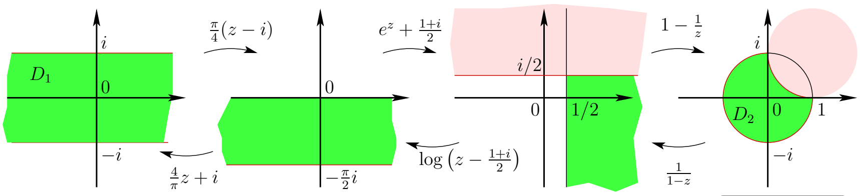
14.1.9. A függvény 0-, ∞- és 1-beli értéke alapján mutassuk meg, hogy $\mathrm{Re}\,\frac{z+1}{z-1} < 0$, ha $|z| < 1$.

Megoldás: A $\frac{z+1}{z-1}$ törtlineáris függvény az egységkörvonalat körbe vagy egyenesbe viszi. Mivel az 1 képe a ∞, az egységkör képe egy egyenes. A 0 és a ∞ szimmetrikusak a körvonalra, képeik, a -1 és $+1$ szimmetrikusak a kép egyenesre. A körvonal képe tehát a képzetes tengely, a körlemez képe egy félsík. Ez a félsík tartalmazza a 0 képét, -1 pontot, tehát a kép a bal félsík.

←Vissza

14.2.6. Mutassunk példát (képletet) konform megfeleltetésre a
$D_1 = \{z : \ |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$ és a
$D_2 = \{z : \ |z| < 1 \text{ és } |z-1-i| > 1\}$
tartományok között.

Megoldás: Egy lehetséges megfeleltetés: $z \mapsto 1 - \dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}(z-i)} + \frac{1+i}{2}}$.



←Vissza

14.3.12. Legyen $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ a komplex egységkörlemez, és legyen $0 < a < 1$ valós szám. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, amire $f(a) = 1$ és $f(-a) = -1$.

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\sup_{z\in D} \big|f(z)\big| \geq \frac{1}{a}.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha f-nek nincs gyöke, akkor

$$\sup_{z\in D} \big|f(z)\big| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$

(Schweitzer-verseny, 2012)

Megoldás: (a) Legyen $g(z) = \dfrac{f(z) - f(-z)}{2z}$ ha $z \neq 0$, és legyen $g(0) = f'(0)$. Ez a függvény is regláris, amire $g(a) = \frac{1-(-1)}{2a} = \frac{1}{a}$. Ha $a < r < 1$, akkor a háromszög-egyenlőtlenségből és a maximum-elvből

$$\sup_{z\in D} |f(z)| \geq \max_{|z|=r} |f(z)| \geq r \cdot \max_{|z|=r} \frac{|f(z)| + |f(-z)|}{2r} \geq$$
$$\geq r \cdot \max_{|z|=r} |g(z)| \geq r \cdot |g(a)| = \frac{r}{a}.$$

Ebből az állítást az $r \to 1-0$ határátmenettel kapjuk.

(b) Legyen $M = \sup\limits_{z\in D} |f(z)|$. Mivel f nem konstans, $|f| < M$ a D összes pontjában. Az $f(a) = 1$ feltételből tudjuk, hogy $M > 1$.

Legyen g a $(\log f)$-nek az az ága, amire $g(a) = 0$. Ekor $g(-a) = \log(-1) = k\pi i$ valamilyen páratlan egész k-ra. Továbbá, $|f| < M$ miatt $\operatorname{Re} g < \log M$. Legyen $H = \{z : \operatorname{Re} z < \log M\}$; ekkor tehát g egy holomorf $D \to H$ függvény.

Definiáljuk a következő törtlineáris függvényeket:

$$\varphi : D \to D, \quad \varphi(z) = \frac{z+a}{1+az}, \quad \varphi^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-az}$$

és

$$\psi : H \to D, \quad \psi(z) = \frac{z}{2\log M - z}.$$

Tekintsük a $h : D \to D$, $h = \psi \circ g \circ \varphi$ függvényt. Mivel $\varphi(0) = a$, $g(a) = 0$ és $\psi(0) = 0$, teljesül, hogy $h(0) = 0$. Alkalmazzuk a Schwarz-lemmát a h függvényre és a $\varphi^{-1}(-a) = \frac{-2a}{1+a^2}$ pontra; azt kapjuk, hogy $\left|h\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\right| \le \frac{2a}{1+a^2}$, tehát

$$\frac{2a}{1+a^2} \ge \left|h(\varphi^{-1}(-a))\right| = |\psi(g(-a))| = \left|\frac{k\pi i}{2\log M - k\pi i}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\log M}{|k|\pi}\right)^2 + 1}}$$

$$\log M \ge \frac{|k|\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2 - 1} = \frac{|k|\pi}{2} \cdot \frac{1-a^2}{2a} \ge \frac{1-a^2}{4a}\pi$$

$$M \ge \exp\frac{1-a^2}{4a}\pi.$$

Megjegyzés: A feladat állítása éles; például az $f(z) = -i\exp\left(\frac{iz-a^2}{iz+1} \cdot \frac{\pi}{2a}\right)$ függvényre egyenlőség áll.

←Vissza

14.5.2. Legyen $D = \{z : \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2},\ |z| > 1\}$.

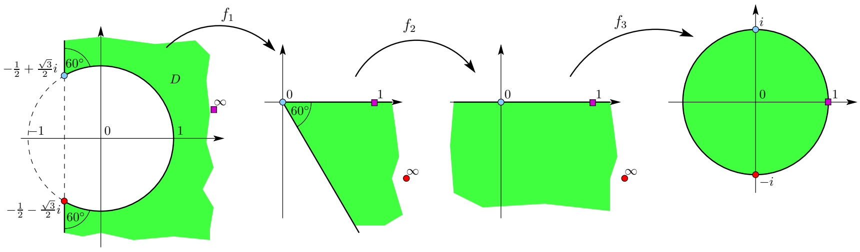
(a) Írjuk fel azt a φ konform leképezést, ami D-t megfelelteti az egységkörnek úgy, hogy $\varphi(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = i$, $\varphi(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -i$ és $\varphi(\infty) = 1$.

(b) Igazoljuk, hogy φ kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénnyé.

(c) Hány pólusa van a kiterjesztett φ-nek? Mi a rendje ezeknek a pólusoknak?

Megoldás: (a) Az egységkörvonal és a $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ egyenes a $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pontokban metszik egymást, és a két metszéspontban $60°$-os szöget zárnak be.

A keresett leképezést három függvény kompozíciójaként állítjuk elő. Az $f_1(z) = \dfrac{z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ függvény a tartományt egy $60°$-os szögtartományba viszi, amelynek csúcsa $f_1(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 0$, továbbá $f_1(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \infty$ és $f_1(\infty) = 1$. Az 1 pont a szögtartomány határára esik, tehát a szög egyik szára a valós tengely pozitív iránya. A $\infty, 1, 0$ pontok pozitív irányítás szerint következnek a határon, ezért a szögtartomány a valós tengely alatt van, és a másik szögszár a $-60°$ irányú félegyenes.



Az $f_2(z) = z^3$ a szögtartományt az alsó félsíkba viszi úgy, hogy $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$ és $f_2(\infty) = \infty$.

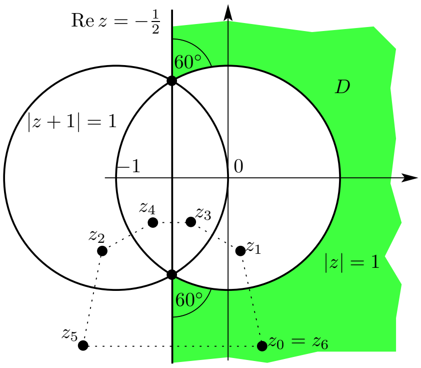
Az $f_3(z) = \dfrac{-iz+1}{z-i}$ függvény az alsó félsíkot az egységkörbe viszi, $f_3(0) = i$, $f_3(1) = 1$ és $f_3(\infty) = -i$.

Tehát

$$\varphi(z) = f_3\Big(f_2\big(f_1(z)\big)\Big) = \frac{-i\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3+1}{\left(\dfrac{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)^3-i} =$$

$$\frac{-i\Big(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3+\Big(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3}{\Big(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3-i\Big(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)^3}. \tag{1}$$

(b) Rajzoljuk meg az $|z+1| = 1$ kört is. A két kör és a $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ egyenes páronként 60°-os szöget zár be egymással, és közülük bármelyik kettő szimmetrikus a harmadikra. A két kör és az egyenes a síkot összesen 6 tartományra osztja. A hat tartományt sorban tükrözve, a függvényt mindegyikre folytathatjuk. Azt állítjuk, hogy a hat tükrözés egymás utánja az identitás. Mivel minden tükrözés egy-egy törtlineáris konjugáltja, a hat tükrözés egymás utánja egy törtlineáris, és elég azt ellenőriznünk, hogy három pont helyben marad. A $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ pontokra ez triviális, mert ezek minden tükrözésnél helyben maradnak. Egy harmadik pont lehet például a ∞; ennek tükörképe az egységkörre a 0, ennek tükörképe az egyenesre a -1, ennek tükörképe a másik körre a ∞.



Ha $z_0 \in D$ egy tetszőleges pont, amelynek tükörképei rendre $z_1, \ldots, z_5, z_6 = z_0$, akkor a kiterjesztett függvény értékei ezeken $\varphi(z_2) = \varphi(z_4) = \varphi(z_0)$, illetve $\varphi(z_1) = \varphi(z_3) = \varphi(z_5) = \dfrac{1}{\overline{\varphi(z_0)}}$.

(c) Mivel φ konform leképezés D-ről az egységkörre, φ a D-nek egy pontjában veszi fel a 0-t, és a deriváltja sehol sem 0. A függvénynek tehát egyetlen, egyszeres gyöke van D-ben, pólusa nincs. A tükrözés miatt a gyök második és negyedik tükörképe is egyszeres gyök, az első, harmadik és ötödik tükörképekben pedig elsőrendű pólus van.

Tehát összesen három pólusa van a kiterjesztett φ-nek, mindhárom pólus elsőrendű.

Megjegyzés: 1. Az (1) képlet közvetlenül megadja a kiterjesztést. Azt is leolvashatjuk, hogy három elsőrendű pólus van.

2. A pólusok akár a megoldásból, akár az (1) képletből kiszámíthatók: $-2 - \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$ és $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

←Vissza