

Renormalization methods in truncated conformal
space with applications – Renormálási módszerek a
csonkolt konform állapotterben alkalmazásokkal

Lencsés Máté

Az értekezés tézisei

Témavezető: Takács Gábor, DSc, Egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika Doktori Iskola
Részecskefizika és csillagászat program
Elméleti Fizikai Tanszék

Doktori iskola vezetője: Dr. Palla László

Programvezető: Dr. Palla László



Budapest

2015

Bevezetés

A doktori dolgozatomban a csonkolt konform állapotter módszer (truncated conformal space approach, TCSA) renormálási módszereivel foglalkozok. A disszertáció alapját az [1] és [2] munkák adják.

A TCSA egy variációs módszer, melyet Yurov és Zamolodchikov fejlesztett ki a skálázó Lee–Yang model spektrumának vizsgálatára [3]. Azóta számos egyéb perturbált konform térelméletre alkalmazták, mind a spektrum mind operátor mátrixelemek vizsgálatára.

A megközelítés azon alapszik, hogy a konform térelmélet spektruma ismert, az operátorok mátrixelemei meghatározhatóak. Véges térfogatban a spektrum diszkrét, egy levágás bevezetésével véges dimenziós Hilbert-teret kapunk, a Hamilton-operátor numerikusan diagonalizálható. A kapott eredmények a levágástól függenek. A konvergencia sebessége a perturbáló operátorok dimenziójától függ. Minél relevánsabb a perturbáció, annál gyorsabb a konvergencia. Irreleváns perturbáció esetén a kapott eredmények divergálnak a levágás növelésével. A TCSA renormálásának célja a levágásfüggés megszüntetése, a konvergencia felgyorsítása illetve a divergencia kezelése. Ezáltal kifejleszthető egy olyan, nemperturbatív eljárás, melynek segítségével elvben tetszőleges perturbált konform térelmélet vizsgálható megfelelő pontossággal.

A kutatás előzménye [4]-ben található észrevétel volt, miszerint a mágneses tér nélküli háromállapotú Potts-modellben a spinláncon végzett elméleti számítások illetve a sűrűségmátrix renormálási csoport módszerrel végzett szimulációk eredményei nem egyeztek a skálázó térelmélet jóslatával. Ebben a munkában TCSA analízis is készült, azonban a nyers TCSA eredmények erős levágásfüggést muttatak, ezért szükség volt a renormálás alkalmazására. Disszertációmban a [5]-ben ismertetett ellentagos renormálási eljárást továbbfejlesztve meglepő pontossággal sikerült megkapni a modell alacsony energiás állapotainak spektrumát és kétrészecske fázistolásokat. Az eredményeket termodinamikai Bethe ansatz jóslatokkal hasonlítottam össze. A renormálási procedura ismeretében megállapítható, hogy a nyers TCSA fázistolás erős levágásfüggését egy, a perturbáló operátor önmagával vett operátorszorzatában megjelenő irreleváns operátor okozza, a térelméleti jóslathoz képest a spinláncon tapasztalt eltérést generálva.

A következő cél az volt, hogy alkalmazzuk az eljárást több perturbációra és nem-integrálható esetekben. Kézenfekvő volt, hogy a q -állapotú Potts-modellben aktívan vizsgált bezárás jelenségét vizsgáljuk [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Az ellentagos renormálás hátránya, hogy minden egyes állapothoz meg kell konstruálni az ellentegokat,

ez a számítás magasabb energiás állapotok esetén egyre bonyolultabb. A bezárás jelenségének vizsgálatához azonban ilyen állapotok tanulmányozására van szükség. Egy másik lehetséges út a [14, 5]-ben ismertett renormálási csoport (renormalization group, RG) módszer. Itt a levágás inverzében vezető rendig RG egyenleteket írunk fel a csatolásokra, kezdeti feltételként a végtelen levágáshoz tartozó értékeket beállítva. A csatolásokat az RG egyenletek alapján lefolytatjuk a TCSA levágásra, majd az így kapott csatolásokat használjuk a programban. A vezető levágásfüggés eliminálása után maradék levágásfüggés exponenseire a renormálási csoport konkrét jóslatot ad, aminek alapján végzett extrapolációval pontosíthatjuk az eredményeket. A [14, 5] RG módszert [15, 16] alapján továbbfejlesztve sikerült igazolni a háromállapotú Potts-modell mezon- és barionspektrumára vonatkozó nemrégiben közzétett jóslatokat.

Tézispontok

1. A levágásfüggés megfogalmazása Schrieffer–Wolff transzformációval

A disszertációmban a renormálás megfogalmazásának első lépéseként a Schrieffer–Wolff (SW) transzformáció [17] alkalmazásával levezetem a TCSA-ból kapott energiaszintek levágásfüggését a dolgozat 2.2 fejezetében. Az általános formalizmusban megkonstruálom az, egy adott levágás fölötti héjat figyelembe vevő effektív Hamilton-operátort. Ez alapján formulát adok az energiaszintekhez egy adott konform leszármaztatási szint járulékára, a SW formalizmusban a következő szintet tekintve nagyenergiás altérnek. A formulát nagy levágás esetén egy aszimptotikus sorral közelíthetjük. A szintjárulékok helyességét, illetve az aszimptotikus sor viselkedését a disszertáció 4.3 fejezetében hasonlítom össze a TCSA adatokkal. A szintjárulékok ismerete ad alapot az ellentagos konstrukciójához és a renormálási csoport egyenletek felírásához.

2. Az ellentagos renormálás továbbfejlesztése

A SW formalizmusban alacsonyenergiás bázisként a csonkolt konform Hilbert-teret választva kapjuk az energiaszintek szintjárulékkaira [5] által használt formulát. Innen számíthatók a fent említett szintjárulékok. Ellentétben a [5]-ben található számolással, dolgozatomban a magas levágás sorfejtésben magasabb rendig számolok. A szintjárulékokra vonatkozó numerikus összehasonlítás ad alapot arra, hogy hány tagot hagyjunk meg a sorból. A perturbáció utáni kiszemelt állapothoz tartozó konform állapot ismerete szükséges az ellentagos konstrukciójához. A szintjárulékot a kon-

form négypontfüggvényből számolhatjuk, egy kettős sorfejtéssel, ahonnan egy explicite elvégezhető végtelen összegzéssel kapható maga az ellentag. Magasabb gerjesztett állapotok esetében a konform állapottér degenerált, így ez az állapot a konform állapotok egy lineáris kombinációjaként áll elő. Kiderül, hogy a levágásban vezető viselkedés univerzális, minden állapotra megegyezik. Az általános konstrukció a disszertáció 2.3 fejezetében található, konkrét példaszámolások a háromállapotú Potts modellben pedig a 4.2 fejezetben.

3. Háromállapotú Potts-modell gerjesztett állapoti termodinamikai Bethe ansatz egyenleteinek nagyenergiás határesetének származtatása

Az ellentagok konstrukciójához szükséges a kiszemelt állapothoz tartozó nagyenergiás (UV) konform állapot. Ezeket a [1]-ben javasolt gerjesztett állapoti termodinamikai Bethe ansatz (TBA) egyenletek UV határesetének számításával lehet meghatározni. A [18, 19, 20, 21] munkák alapján általános formulát vezettem le adott részecskekonfigurációt tartalmazó állapothoz tartozó effektív centrális töltés meghatározására. Ennek ismeretében az adott állapot konform határesetét beazonosítható, ami elengedhetetlen az ellentagok konstrukciójához. Az általános számítás a dolgozat 3.2.3 alfejezetében található, konkrét példákat a 4.1 fejezetben ismertetek.

4. TCSA ellentagos renormálás alkalmazása háromállapotú Potts-modellben

Az konform állapotok beazonosítása és a szintjárulékok ellenőrzése után meghatároztam a megfelelő ellentagokat. Az ellentagok levonása után a TBA jóslatokkal összevetve nagyon jó egyezést találtam az alacsony energiás spektrumra vonatkozóan. A kétrészecske fázistolást vizsgálva kiderült, hogy a nyers TCSA adatok [4]-ban talált viselkedéssel összhangban vannak. Az ellentagok levonása után a levágásfüggés és egyben a fázistolás fenti viselkedése eltűnik. Tekintve, hogy a fázistolást az alapállapothoz képest számolt relatív energiaszintekből számoljuk, az univerzális vezető korrekció kiesik. A következő járulékot egy, a perturbáló operátor önmagával vett operátorszorzat kifejtésében található irreleváns operátor adja. Mindez arra utal, hogy a véges rácsállandóval végzett számolások esetén egy irreleváns operátor hatását láthatjuk. A vonatkozó eredményeket a dolgozat 4.3 fejezetében tárgyalom, további numerikus összehasonlítás a C Appendixben található.

5. Renormálási csoport egyenletek alkalmazása q -állaptú Potts-modellben

Magasabb energiás állapotok vizsgálatára a [14, 5]-ben ismertett renormálási csoport egyenletek [15, 16] alapján módosított változatát kombináltam a maradék levágásfüggesben vett extrapolációval. Ezt használtam az Ising- és a háromállapotú Potts-modell spektrumának tanulmányozására mágneses tér jelelétében. Az Ising-modell segítségével meggyőződtem a módszer helyes működéséről, egyben kiderült, hogy kellően nagy mágneses terek esetén a mezonspektrumra WKB-közelítés használható [8]. A háromállapotú Potts-modellben a renormált TCSA adatok visszaadták a WKB közelítés [12] eredményét, míg a bariontömegek esetén a közelmúltban javasolt háromrészecske kvantummechanikai számolás eredményét [13] sikerült igazolnom. Kiderült továbbá, hogy a mezonok esetében a tér- és töltésparitás megegyezik, míg a barionok esetében tet-szőleges kombinációt meg lehet figyelni.

References

- [1] M. Lencsés and G. Takács, “Excited state TBA and renormalized TCSA in the scaling Potts model,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 9, p. 52, Sept. 2014.
- [2] M. Lencses and G. Takacs, “Confinement in the q -state Potts model: an RG-TCSA study,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2015, no. 9, 2015.
- [3] V. P. Yurov and A. B. Zamolodchikov, “Truncated Conformal Space Approach to Scaling Lee-Yang Model,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 5, pp. 3221–3245, 1990.
- [4] Á. Rapp, P. Schmitteckert, G. Takács, and G. Zaránd, “Asymptotic scattering and duality in the one-dimensional three-state quantum Potts model on a lattice,” *New Journal of Physics*, vol. 15, p. 013058, Jan. 2013.
- [5] P. Giokas and G. Watts, “The renormalisation group for the truncated conformal space approach on the cylinder,” *ArXiv e-prints*, June 2011.
- [6] P. Fonseca and A. Zamolodchikov, “Ising Field Theory in a Magnetic Field: Analytic Properties of the Free Energy,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 110, pp. 527–590, 2003.

- [7] S. B. Rutkevich, “Large- n Excitations in the Ferromagnetic Ising Field Theory in a Weak Magnetic Field: Mass Spectrum and Decay Widths,” *Physical Review Letters*, vol. 95, p. 250601, Dec. 2005.
- [8] P. Fonseca and A. Zamolodchikov, “Ising Spectroscopy I: Mesons at $T < T_c$,” *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, Dec. 2006.
- [9] G. Delfino and P. Grinza, “Confinement in the q -state Potts field theory,” *Nuclear Physics B*, vol. 791, pp. 265–283, Mar. 2008.
- [10] S. B. Rutkevich, “Formfactor perturbation expansions and confinement in the Ising field theory,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 42, p. D4025, July 2009.
- [11] Rutkevich, S., “Confinement in Ising field theory and Ising spin chain: Bethe-Salpeter equation approach,” Talk presented at the Workshop on *Quantum Matter in Low Dimensions: Opportunities and Challenge*, Stockholm, 30 Aug - 24 Sep 2010, 2010.
- [12] S. B. Rutkevich, “Two-kink bound states in the magnetically perturbed Potts field theory at $T < T_c$,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 43, p. 235004, June 2010.
- [13] S. B. Rutkevich, “Baryon masses in the three-state Potts field theory in a weak magnetic field,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 1, p. 10, Jan. 2015.
- [14] G. Feverati, K. Graham, P. A. Pearce, G. Z. Tóth, and G. M. T. Watts, “A renormalization group for the truncated conformal space approach,” *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, vol. 3, p. 11, Mar. 2008.
- [15] M. Hogervorst, S. Rychkov, and B. C. van Rees, “Truncated conformal space approach in d dimensions: A cheap alternative to lattice field theory?,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 025005, Jan. 2015.
- [16] S. Rychkov and L. G. Vitale, “Hamiltonian truncation study of the ϕ^4 theory in two dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 085011, Apr. 2015.
- [17] J. R. Schrieffer and P. A. Wolff, “Relation between the Anderson and Kondo Hamiltonians,” *Physical Review*, vol. 149, pp. 491–492, Sept. 1966.

- [18] A. B. Zamolodchikov, “Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models: Scaling 3-state potts and Lee-Yang models,” *Nuclear Physics B*, vol. 342, pp. 695–720, Oct. 1990.
- [19] P. Dorey and R. Tateo, “Excited states by analytic continuation of TBA equations,” *Nuclear Physics B*, vol. 482, pp. 639–659, Feb. 1996.
- [20] P. Dorey and R. Tateo, “Excited states in some simple perturbed conformal field theories,” *Nuclear Physics B*, vol. 515, pp. 575–623, Apr. 1998.
- [21] P. Fendley, “Excited-state thermodynamics,” *Nuclear Physics B*, vol. 374, pp. 667–691, May 1992.