

**UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE AGRONOMÍA**

**DESARROLLO DE UN MODELO DINÁMICO DE RODAL PARA
Eucalyptus globulus L. EN URUGUAY**

por

Andrés Hirigoyen Domínguez

TESIS presentada como uno de los
requisitos para obtener el título de
Magíster en Ciencias Agrarias
opción Bioestadística

PAYSANDÚ
URUGUAY
Diciembre 2016

Tesis aprobada por el tribunal integrado por Ing.Agr. Virginia Gravina
Ing.Agr. Oscar Betancourt, Ing.Agr. (Dr.) Ricardo Methol, el 23 de diciembre
del 2016.

Autor: Ing. Agr. Andrés Hirigoyen.

Director (Dr.) Jorge Franco

Co-Director (Dr.) Ulises Diéguez Aranda (Dr.) Roberto Scoz

Agradecimientos:

A mi familia por estar ahí siempre.

A Demian Gómez por el aguante.

A INIA por permitirme desarrollar este trabajo, Roberto Scoz, Ricardo Methol y Jorge Franco por la ayuda.

A Gustavo Balmelli, Sofia Simeto, Cecilia Rachid y Fernando Resquin por su valiosa colaboración en mi formación profesional.

TABLA DE CONTENIDO

	P á g i n a
PÁGINA DE APROBACIÓN.....	II
AGRADECIMIENTOS.....	III
RESUMEN.....	VI
SUMMARY.....	VII
1. <u>INTRODUCCIÓN</u>	1
1.1 MODELOS FORESTALES.....	1
1.1.1 <u>Tipos de modelos forestales</u>	2
1.2 ECUACIONES DE TRANSICIÓN.....	4
1.2.1 <u>Algebraic difference approach</u>	5
1.2.2 <u>Generalized algebraic difference approach</u>	7
1.3 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS.....	9
1.4 SISTEMAS DE ECUACIONES.....	11
1.4.1 <u>Ajuste simultáneo</u>	14
1.5 ESTIMACIÓN DEL VOLUMEN POR HECTÁREA.....	16
1.6 DISTRIBUCIÓN Y USOS DE <i>Eucalyptus globulus</i>	17
1.7 ANTECEDENTES, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS.....	18
2. <u>MATERIALES Y MÉTODOS</u>	21
2.1 DATOS.....	21
2.2 AJUSTE DE ECUACIONES DE TRANSICIÓN.....	21
2.3 ESTIMACIÓN DE VOLUMEN POR HECTÁREA.....	28
2.4 COMPARACIÓN DE MODELOS Y VALIDACIÓN.....	28
2.4.1 <u>Calidad de ajuste</u>	28
2.4.2 <u>Capacidad predictiva</u>	29
3. <u>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</u>	31
3.1 ECUACIONES DE TRANSICIÓN.....	31
3.1.1 <u>Altura media dominante</u>	31
3.1.2 <u>Área basal</u>	37
3.1.3 <u>Número de árboles por hectárea</u>	40

3.2 AJUSTE DE SISTEMAS DE ECUACIONES.....	42
3.3 ESTIMACIÓN DE VOLUMEN.....	45
3.4 VALIDACIÓN Y COMPARACIÓN.....	46
3.4.1 <u>Cross validation</u>	46
3.4.2 <u>Comparación</u>	46
3.4.2.1 Trayectorias reales, curvas de índice de sitio y altura media dominante.....	47
3.4.2.2 Trayectorias y evolución del área basal.....	50
3.4.2.3 Número de árboles.....	51
3.4.2.4 Trayectorias reales individuales de AMD por parcela y curvas de índice de sitio.....	53
3.4.2.5 Área basal real y simulaciones.....	56
3.4.2.6 Evolución real y simulada del número de árboles por hectárea.....	59
3.4.2.7 Volumen final por hectárea.....	61
4. <u>CONCLUSIONES</u>	63
5. <u>BIBLIOGRAFÍA</u>	64
6. <u>ANEXOS</u>	80
6.1 LISTA DE CUADROS.....	80
6.2 LISTA DE FIGURAS.....	82
6.3 TABLA DE ACRÓNIMOS.....	84
6.4 Modelo dinámico de rodal para <i>Eucalyptus globulus</i> (L.) en Uruguay.....	86

RESUMEN

Los modelos determinísticos a nivel de rodal son ampliamente usados en el ámbito forestal. Para su ajuste se emplean datos empíricos que se integran en un conjunto de ecuaciones que describen las relaciones entre diferentes variables y operan con cierta probabilidad. El objetivo del presente trabajo fue desarrollar un modelo dinámico de rodal para *Eucalyptus globulus*, empleando ecuaciones de transición para área basal, altura media dominante y mortalidad, utilizando enfoque de variables *dummy*. Los datos utilizados provienen de 168 parcelas permanentes. Se evaluaron 31 ecuaciones para las variables altura media dominante y área basal y 8 ecuaciones para la evolución del número de árboles por hectárea. El ajuste simultáneo del sistema de ecuaciones se realizó mediante regresión *SUR*. Para el ajuste de las ecuaciones de volumen por hectárea se utilizaron como predictoras las variables de estado, evaluándose una serie de relaciones y transformaciones de dichas variables mediante el método *Stepwise* para regresiones. Para evaluar la capacidad predictiva del sistema de ecuaciones ajustado se utilizaron parcelas no incluidas en el set de datos iniciales. Se comparó el crecimiento real de dichas parcelas con el crecimiento proyectado por el presente modelo y con el crecimiento proyectado por el modelo previo (SAG INIA). En base al análisis de bondad de ajuste y de la capacidad predictiva, se seleccionó el modelo propuesto por Korf, modificado por Cieszewski, para la altura media dominante; el modelo de Levakovic para el área basal y el modelo de Pienaar y Shiver para la mortalidad. La estimación del volumen por hectárea se efectuó mediante una ecuación exponencial que incluye la transformación *log* del área basal, el número de árboles por hectárea y la altura media dominante. El modelo de simulación desarrollado es más flexible y permite levantar algunas de las limitantes del modelo utilizado anteriormente. Su integración a un Sistema de Apoyo a la Gestión (SAG), constituirá una herramienta de gran utilidad para la planificación y toma de decisiones en el sector forestal.

Palabras claves: *Eucalyptus globulus*, SAG, ecuaciones dinámicas, *SUR*

SUMMARY

Adjusting a dynamic stand model for *Eucalyptus globulus* L. in Uruguay

Deterministic models stand are widely used in forestry. Fitting empirical data that is integrated into a set of equations is used to describe the relationships between different variables and operate with a certain probability, which is directly related to the quality of the information provided. The aim of this study was to develop a dynamic model for *Eucalyptus globulus* using dynamic equations for basal area, dominant average height and using *dummy* variables approach for mortality. The data used is from 168 permanent plots. 31 equations for dominant average height and basal area and 8 equations for the evolution of the number of trees per hectare were evaluated. The simultaneous adjustment of the system of equations was performed by *SUR* regression. To adjust the volume per hectare equations were used as predictor variables state, evaluating a series of relationships and transformations of these variables by *Stepwise* regression method. To assess the predictive ability of the system, not included stands in the initial data set were used. The real growth of these plots with growth projected by this model and the growth projected by the previous model (SAG INIA) was compared. Based on the analysis of goodness of fit and predictive ability, the model proposed by Korf and modified by Cieszewski was used; for the dominant average height; Levakovic model was used for basal area and Pienaar and Shiver model for mortality. The estimated volume per hectare was performed by an exponential equation that includes the *log* transformation of basal area, number of trees per hectare and the dominant medium height. The simulation model developed is more flexible and can lift some of the limitations of the model used previously. Its integration into a decision support system (DSS), constitute a useful tool for planning and decision making in the forestry sector.

Keywords: *Eucalyptus globulus*, DSS, dynamic equations, *SUR*

1. INTRODUCCIÓN

1.1 MODELOS FORESTALES

La modelización forestal, permite simular los efectos de los tratamientos silvícolas y proyectar las consecuencias de una determinada decisión sobre la producción final. Un modelo es una abstracción simplificada de la realidad, en la cual se representan algunas de las propiedades del sistema original, el cual pasa a ser expresado en términos de ecuaciones matemáticas que lo describen de forma más sencilla (Vanclay 1994, Sanquetta 1996). La dinámica forestal se representa mediante ecuaciones que explican de manera cuantitativa las tasas de cambio en crecimiento y densidad del rodal a través del tiempo. Las ecuaciones integradas en un sistema describen las relaciones entre un conjunto de variables, bajo el supuesto de simultaneidad (Borders y Bailey, 1986); presentan una lógica interna de manera de ser fieles a la biología del sistema, la calidad de las estimaciones realizadas está directamente relacionadas con la calidad de la información suministrada. Las características de los ciclos del cultivo forestal hacen de la modelización una de las herramientas más útiles para el sector, por lo cual el desarrollo de modelos para el pronóstico del crecimiento, producción y aprovechamiento es tema central de investigación e innovación del sector forestal (Gadow *et al.*, 2001).

En el ámbito forestal los modelos de simulación operan a nivel de árboles individuales o a nivel de grupos de árboles o rodales, utilizando como variables predictoras las variables de estado que definen a la unidad de modelación: edad, diámetro a la altura del pecho (DAP), densidad (N), calidad o índice de sitio (IS), mortalidad y cambios de estructura y composición como los generados, por ejemplo, por podas y raleos (Alder 1980, Costas *et al.*, 2006).

1.1.1 Tipos de modelos forestales

Los sistemas de información sobre el manejo e investigación forestal utilizan modelos que pueden ser clasificados de manera sencilla y clara según diversos criterios de clasificación (Diéguez- Aranda *et al.*, 2009)

- 1) Según la unidad de muestro y medición: modelos de rodal, de clase de tamaños y de árbol individual.
- 2) De acuerdo a los datos iniciales: modelos estáticos y dinámicos.
- 3) Según los resultados brindados en la simulación: modelos determinísticos y estocásticos.
- 4) De acuerdo al origen de los datos iniciales y procesos inherentes al crecimiento: modelos empíricos, basados en procesos e híbridos.

1) Los modelos de rodal describen el desarrollo probable del conjunto de árboles que lo integran. Requieren pocas variables para estimar el crecimiento y el volumen futuro mediante una serie de funciones matemáticas. Los parámetros poblacionales de entrada más utilizados incluyen área basal, altura dominante, diámetro medio y árboles por hectárea (García 1988, 1994).

Los modelos de clases dimensionales tienen como unidad de modelación un conjunto de clases de árboles. Requieren un detalle de información mayor que los modelos anteriores que incluyen la distribución diamétrica. Simulan el crecimiento para cada clase mediante el cálculo de las características del árbol medio representativo de cada una de ellas.

Por su parte, los modelos de árbol individual son más detallados y completos que los anteriores. La unidad básica de modelado es el árbol y la información generada de manera individual se organiza para obtener información agregada a nivel de rodal. Existen dos variantes de estos modelos según se considere o no la competencia existente entre los árboles del rodal. Los modelos dependientes de la distancia consideran la competencia, e incluyen la ubicación, diámetro, y en ocasiones altura y dimensiones de la

copa de cada individuo en la parcela. El crecimiento y probabilidad de mortalidad individual se expresan como funciones de sus dimensiones y de la posición relativa en la parcela. Los modelos independientes de la distancia se basan en las características individuales del árbol objetivo y en características del rodal que lo incluye (Davis *et al.*, 2001).

2) En los modelos estáticos se integran relaciones matemáticas, estadísticas y/o lógicas que no tienen en cuenta explícitamente la tasa de crecimiento de los árboles o rodales. Predicen cambios en el tiempo de las variables como volumen, diámetro medio y área basal media, con datos obtenidos en un único inventario de una serie de parcelas, sin tener en cuenta la evolución de las variables de cada rodal en particular. Un ejemplo son las tablas de producción y los diagramas de densidad (número de árboles). Son adecuados para rodales sin intervenciones silvícolas, o para rodales con baja intervención.

Los modelos dinámicos tienen en cuenta la evolución en el tiempo de las variables descriptivas de los árboles o del rodal, lo cual se obtiene sumando o integrando dichas tasas. Utilizan datos de al menos dos inventarios y el ajuste estadístico integra dicho crecimiento. La simulación posee mayor flexibilidad considerándose más realista que la obtenida con modelos estáticos (Alder 1980, Diéguez *et al.*, 2009).

3) Los modelos determinísticos tienen la particularidad de brindar siempre igual resultado cuando se trabaja con los mismos datos de entrada y mismos algoritmos, mientras que los modelos estocásticos generan distintos resultados cada vez que se realiza la simulación. Estos últimos introducen como variable aleatoria los cambios de crecimiento producidos por las condiciones climáticas, el suelo, la variabilidad genética y los errores de medición.

4) Los modelos empíricos se caracterizan por utilizar como entrada datos experimentales de fácil medición, obtenidos de parcelas de investigación ubicadas en una región determinada, generando estimaciones cuantitativas que representan fielmente la realidad observada. Este grupo de

modelos son los más empleados desde el punto de vista práctico, si bien las relaciones que representan no son extrapolables a otra región o situación distinta a la cual se utilizó como punto de partida.

Al incorporar en la modelación forestal factores fisiológicos y ecológicos involucrados en la productividad (fotosíntesis, respiración, disponibilidad de nutrientes, balance de carbono, índice de área foliar y factores ambientales), se obtienen modelos basados en procesos o modelos biogeoquímicos, los cuales son sensibles a los cambios ambientales. Poseen gran valor científico ya que intentan interpretar con detalle el funcionamiento del sistema forestal en su totalidad, considerando las respuestas fisiológicas de los árboles a nivel de los factores de sitio. Sin embargo, el gran volumen de datos requeridos para su desarrollo es la principal limitante en su uso. Los modelos híbridos combinan las ventajas de los modelos empíricos y de los modelos basados en procesos, resultando adecuados para el manejo ecosistémico de situaciones específicas. Incluyen el efecto del sitio forestal incorporando variables edáficas y climáticas, con lo cual logran una mejora en la precisión de las estimaciones.

1.2 ECUACIONES DE TRANSICIÓN

Los modelos de mayor difusión en el ámbito forestal para *Eucalyptus globulus* L. son determinísticos y operan a nivel de rodal, empelando para su ajuste bases de datos empíricas (Tomé *et al.*, 1995, García y Ruiz 2003, Methol 2006, Wang y Baker 2007). Dichos modelos posibilitan la simulación de diferentes escenarios y la toma de decisiones, mediante el uso de una estructura de inventarios forestales que facilita su actualización a medida que crece la base de datos incluida en los mismos. Para ello se toman en cuenta diversas condiciones de densidad, a través del uso de funciones de transición a partir de las cuales se obtiene la evolución del rodal en el tiempo (Alder, 1980). La evolución de un rodal se representa mediante ecuaciones dinámicas

o de transición, que explican las tasas de cambio en crecimiento y densidad de la estructura de la masa forestal.

Las funciones de transición deben de cumplir una serie de propiedades, entre las que destacan las siguientes: polimorfismo (curvas de diferentes formas, no proporcionales entre sí y asíntota común o diferente), pauta de crecimiento sigmoideo con un punto de inflexión, capacidad de alcanzar una asíntota horizontal a edades avanzadas, respuesta lógica, ser invariantes con respecto al intervalo de simulación (*path invariance*) e invariantes respecto a la edad de referencia (*base age invariance*) (Bailey y Clutter 1974, Cieszewski y Bailey 2000).

1.2.1 Algebraic difference approach

Los primeros en formalizar la propiedad de *base age invariance* (*BAI*), fueron Bailey y Clutter (1974), en la cual se incluye una estimación de parámetros mediante el uso de una metodología de ajuste que sea también *BAI*, es decir, que las estimaciones de los parámetros no dependan de un punto arbitrariamente seleccionado como referencia y que permita el empleo de todos los datos disponibles, en oposición con la metodología clásica *base age specific* (*BAS*) (Cieszewski, 2003). Bailey y Clutter (1974), propusieron una metodología para obtener ecuaciones dinámicas con estas características que es conocida en la literatura forestal como *algebraic difference approach* (*ADA*). Esta metodología modeliza el crecimiento con una familia de curvas originadas por un modelo de crecimiento base con todos los parámetros comunes excepto uno, que es un parámetro específico del sitio forestal. Se pueden obtener así, para cada modelo de crecimiento base, tantas ecuaciones dinámicas como parámetros tenga dicho modelo. *ADA* produce tanto curvas anamórficas (curvas de igual forma, diferentes asíntotas y proporcionales entre sí) como polimórficas, siendo su principal limitante que la mayoría de los modelos derivados son anamórficos o polimórficos con asíntota común (Bailey y Clutter 1974, Cieszewski y Bailey 2000).

A partir de un modelo base con m parámetros, se obtienen m ecuaciones dinámicas asumiendo que sólo uno de los parámetros es dependiente de las condiciones del sitio forestal, siendo común para toda la población (parámetro global). Así, por ejemplo, al tomar el modelo base de Bertalanffy-Richards (Richards, 1959), cuya forma base integral se presenta a continuación:

$$Y = a_1 [1 - \exp(-a_2 t)]^{a_3} \quad (1)$$

siendo a_i los parámetros a estimar, y considerando que sólo a_1 es el parámetro específico del sitio se establece para valores iniciales de t_0 y Y_0 :

$$a_1 = Y_0 / [1 - \exp(-a_2 t_0)]^{a_3} \quad (2)$$

Sustituyendo el valor de a_1 en la ecuación (1), se obtiene la siguiente ecuación dinámica que originará curvas anamórficas:

$$Y_1 = Y_0 \left[\frac{1 - \exp(-a_2 t_1)}{1 - \exp(-a_2 t_0)} \right]^{a_3} \quad (3)$$

Si se considera como parámetro global el parámetro a_2 y en una siguiente etapa al parámetro a_3 , se derivan las siguientes ecuaciones dinámicas (familia polimórfica) respectivamente:

$$Y_1 = a_1 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{Y_0}{a_1} \right)^{1/a_3} \right)^{t_1/t_0} \right]^{a_3} \quad (4)$$

$$Y_1 = a_1 \left(\frac{Y_0}{a_1} \right)^{\left[\frac{\ln(1 - \exp(-a_2 t_1))}{\ln(1 - \exp(-a_2 t_0))} \right]} \quad (5)$$

1.2.2 Generalized algebraic difference approach

Cieszewski y Bailey (2000) propusieron una generalización de la metodología ADA, el método de las ecuaciones de diferencias algebraicas generalizado (*GADA: generalized algebraic difference approach*). La principal ventaja de este método es la obtención de ecuaciones dinámicas a partir de un modelo de crecimiento base permitiendo que más de un parámetro dependa de las condiciones específicas del sitio forestal, con lo cual las familias de curvas obtenidas son más flexibles (Cieszewski y Bailey 2000, Cieszewski 2002, 2003). Con esta generalización se pueden obtener familias de curvas polimórficas y con múltiples asíntotas, que resultan invariantes con respecto a la edad de referencia e invariantes al intervalo de simulación (Cieszewski 2002, 2004). En esta metodología se seleccionan los modelos base y se identifica el número de parámetros dependientes de la productividad del sitio. Al tomar como ejemplo el modelo base de Bertalanffy-Richards (ecuación [1]) y considerando que tanto el parámetro a_1 como el a_3 son dependientes del sitio, se pasan a expresar como una variable X , no observable e independiente, que engloba los factores que determinan la productividad del sitio: suelo, manejo, factores climáticos, etc. y nuevos parámetros.

Al considerar los parámetros a_1 y a_3 como dependientes del sitio (relacionados con la variable X) se expresan de la siguiente forma (Krumland y Eng, 2004):

$$a_1 = \exp(X), \quad a_3 = b_2 + \frac{b_3}{X} \quad \text{y} \quad a_2 = b_1 \quad (6)$$

con la notación general de las ecuaciones *GADA*, donde $a_1, a_2 \dots a_n$ refieren a los parámetros locales que se modifican de un sitio a otro y $b_1, b_2 \dots b_n$ los parámetros globales que se mantienen constantes entre sitios diferentes.

El modelo base reparametrizado es:

$$Y = \exp(X)(1 - \exp(-b_1 t))^{b_2 + b_3/X} \quad (7)$$

No es posible obtener alguna expresión matemática de un modelo *GADA* en el cual el parámetro a_2 sea específico ya que no puede ser resuelto para X . La solución de la ecuación anterior, al aplicar logaritmos y reordenar los términos, incluye el cálculo de las raíces de una ecuación cuadrática:

$$\ln(Y) = X + (b_2 + b_3/X) \ln[1 - \exp(-b_1 t)]^2 \quad (8)$$

Puesto que X no puede ser cuantificada en la realidad, el paso final en el procedimiento *GADA* es despejar el valor de X partiendo de las condiciones iniciales de t_0 y Y_0 , obteniendo un modelo aplicable en la práctica (Cieszewski y Bailey 2000, Cieszewski 2002). La solución de X en la ecuación [8] con valores iniciales de t_0 y Y_0 es:

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[(\ln Y_0 - b_2 L_0) \pm \sqrt{[b_2 L_0 - \ln Y_0]^2 - 4b_3 L_0} \right] \quad (9)$$

Donde $L_0 = \ln[1 - \exp(-b_1 t)]$

Al seleccionar la raíz positiva y sustituir en la ecuación [7], se obtiene la siguiente ecuación dinámica en diferencias algebraicas generalizadas que proporciona curvas polimórficas con asíntotas múltiples:

$$Y_1 = Y_0 \left[\frac{1 - \exp(-b_1 t_1)}{1 - \exp(-b_1 t_0)} \right]^{b_2 + b_3/X_0} \quad (10)$$

Todas las ecuaciones *GADA* se expresan con la misma forma general:

$$Y_1 = f(t_1, t_0, Y_0, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

donde Y_1 es el valor de la función al tiempo t_1 , Y_0 es el valor inicial de la variable de referencia al tiempo t_0 y b_m los parámetros a estimar. Todas las familias de curvas obtenidas con el método de ecuaciones de diferencias algebraicas o su generalización, son invariantes con respecto a la edad de referencia e invariantes con respecto al camino de simulación (Cieszewski, 2004).

1.3 ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Cieszewski (2003), trabajando con enfoques *BAS* y *BAI*, encontró que *BAS* presenta un ajuste de menor calidad, con los residuos mal distribuidos, mientras *BAI* proporciona mejoras en los residuos (magnitud, homogeneidad y distribución), así como en los demás estadísticos de ajuste, en las estimaciones y en sus errores estándar. El supuesto detrás de los métodos de estimación *BAI* siguiendo a Cieszewski (2003), es que las mediciones de datos siempre contienen errores de medición y ambientales que deben ser modelados. Los errores de medición y errores de muestreo de la variable de respuesta, se consideran como fuentes de errores que afectan las estimaciones de los parámetros. Los valores de las variables de estado inicial medidos en campo están sujetos a dichos errores, así, al ajustar una ecuación dinámica se asume que dicha variable no se ve afectada por este error cuando está a la derecha de la igualdad pero sí cuando está en la parte izquierda de la misma lo que plantea una inconsistencia. En estas condiciones las técnicas de estimación de parámetros aplicadas a modelos lineales y no lineales determinan estimaciones sesgadas (Myers, 1986). No tener en cuenta estos errores de registro provoca la aparición de sesgo en los parámetros estimados y por lo tanto en la predicción del modelo (Goelz y Burk, 1996). Diversos autores proponen distintas metodologías para solucionar este problema (Tait *et al.*, 1988, Gregoire y Schabenberger 1996, Cieszewski *et al.*, 2000).

El método basado en el empleo de variables *dummy*, en el cual los valores de la variable de estado (lado derecho de la ecuación), deben ser

valores predichos que no pueden ser conocidos hasta que los parámetros hayan sido estimados, fue desarrollado por Cieszewski *et al.*, (2000). En esta metodología los valores iniciales de la ecuación dinámica son los mismos para todos los datos de una unidad de muestreo. El valor de la variable de estado correspondiente a la edad inicial para cada unidad de muestro se estima simultáneamente con el resto de los parámetros globales de la ecuación dinámica, así, las curvas se ajustan a las tendencias individuales de los datos originales. Para aplicar este método es necesario contar con al menos dos mediciones en el tiempo por parcela, y el número de unidades de muestreo debe ser mayor que el número de parámetros globales de la ecuación dinámica.

Así, tomando la ecuación [10] la variable inicial Y_0 se sustituyó por una suma de términos que contienen un parámetro dependiente (para la i -ésima unidad de muestreo), y una variable *dummy* que toma valores de 1 o 0.

$$Y_1 = (Y_{01}I_{01} + Y_{02}I_{02} + Y_{03}I_{03} + \dots + Y_{0n}I_{0n}) \cdot \left[\frac{1 - \exp(-b_1 t_1)}{1 - \exp(-b_1 t_0)} \right]^{b_2 + b_3 / X_0} \quad (11)$$

donde I_{0i} representa una variable *dummy* con valor 1 para la i -ésima observación y 0 en caso contrario. La suma de términos de las Y_{0i} iniciales multiplicadas por las variables *dummy* da lugar, durante el proceso de ajuste, a un único parámetro para cada unidad de muestreo a la edad inicial especificada (Cieszewski *et al.*, 2000).

La precisión de las predicciones del modelo y las estimaciones de los parámetros dependen tanto del modelo como de la estructura de datos utilizada (Borders *et al.*, 1987, Goelz y Burk 1992, Cao 1993, Bailey y Cieszewski 2000, Strub y Cieszewski 2006). En la literatura se citan diferentes opciones para la estructura de datos (Borders *et al.*, 1987, Huang 1997), las seis más empleadas son: I) el intervalo ascendente más largo, II) el intervalo más largo, III) todos los intervalos ascendentes y no superpuestos, IV) intervalos sin superposición, V) todos los posibles intervalos ascendentes, y

VI) todos los intervalos posibles (*TIP*); todas con carácter *BAS* (Cieszewski, 2003). De estas alternativas Goelz y Burk (1992) y Huang (2002) indicaron que *TIP* genera modelos con un mejor rendimiento predictivo, siendo los resultados más estables y consistentes.

1.4 SISTEMAS DE ECUACIONES

Los modelos dinámicos están integrados por varios sub-modelos de crecimiento y producción, uno para cada variable de estado, formando un sistema de ecuaciones interdependientes que simulan los procesos subyacentes a la biología del rodal. Cada ecuación del sistema describe una relación específica entre las variables que lo integran, Buckman (1962) y Clutter (1963) fueron los primeros investigadores en reconocer e identificar las relaciones matemáticas entre las funciones de crecimiento y producción. La interdependencia es una característica inherente al sistema que debe tenerse en cuenta al momento de la estimación y del uso del modelo como un sistema. Existen varios ejemplos de metodologías para la estimación de variables involucradas en funciones de predicción que no contemplan las interrelaciones existentes entre las variables que integran el sistema (Tomé *et al.* 1997, Zunino y Ferrando 1997), siendo los parámetros de cada ecuación estimados separadamente. Un método de ajuste adecuado de ecuaciones de crecimiento y rendimiento debe tener en cuenta todas las interdependencias y la existencia de correlación contemporánea entre las variables, el clásico *ordinary least squares (OLS)* no resulta adecuado ya que no es un método multivariante. Gujarati (1996) menciona que *OLS* da estimadores eficientes y consistentes para una sola ecuación, pero no ocurre lo mismo para un sistema de ecuaciones, en este caso es necesario emplear un método de estimación multietapa. Diversos autores como Murphy y Beltz (1981), Murphy (1983), Amateis y McDill (1989), Burkhart (1986), Reed (1987), LeMay (1988), Borders (1989), entre otros, han utilizado métodos que generalizan el clásico

OLS (métodos instrumentales por ejemplo) para estimar los parámetros estructurales de las ecuaciones que integran sistemas.

Un método de ajuste adecuado debe tener en cuenta todas las interdependencias y correlaciones existentes entre las variables involucradas en un modelo de crecimiento y producción. El clásico OLS no es adecuado para ajustar ecuaciones de crecimiento y producción juntas, dado que se pueden originar estimaciones sesgadas debido a la dependencia entre las variables endógenas y el error estocástico (correlación). En el sistema es probable que los residuales de las ecuaciones estén correlacionados por estar asociados a atributos de la misma unidad de medición (crecimiento de los árboles, edades de las parcelas), existiendo correlaciones contemporáneas en la matriz de varianza y covarianza

El uso de ajuste simultáneo de ecuaciones en el ámbito forestal es escaso, remontándose a trabajos de Furnival y Wilson (1971), siendo mayoritariamente utilizado en ecuaciones aditivas de biomasa (Balboa, 2005). Según Pyndyck y Rubinfeld (1981) existen tres tipos de sistemas de ecuaciones:

1. Sistemas de ecuaciones aparentemente no relacionadas.
2. Sistemas de ecuaciones simultáneas.
3. Sistemas de ecuaciones recursivas.

Un sistema de ecuaciones aparentemente no relacionadas presenta la siguiente forma (Borders, 1989):

$$Y_1 = \beta_{10} + \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2 + e_1, \quad e_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$$

$$Y_2 = \beta_{20} + \beta_{21}X_3 + \beta_{22}X_4 + e_2, \quad e_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

$$Y_3 = \beta_{30} + \beta_{31}X_5 + \beta_{32}X_6 + e_3, \quad e_3 \sim N(0, \sigma_3^2)$$

donde Y_i ($i = 1,2,3$) son las variables dependientes, X_j las variables independientes, β_{ik} son los parámetros a estimar y e_i representan los términos del error.

Si la covarianza entre los errores es nula ($cov(e_i, e_j) = 0$) para todos los pares i y j , no existe ninguna relación analítica entre las ecuaciones que integran el sistema. Sin embargo, si algún término del error estuviera correlacionado ($cov(e_i, e_j) \neq 0$) con otro, entonces las ecuaciones si estarán relacionadas, lo cual es esperable ya que las Y_i son medidas repetidas en el tiempo sobre la misma unidad experimental. Esta clase de sistemas poseen en el lado derecho de la igualdad variables estrictamente definidas dentro del mismo (exógenas), cuyos residuos están correlacionados. Cuando existe correlación entre los residuos, los métodos clásicos de estimación de parámetros (OLS) no son apropiados.

Un sistema de ecuaciones simultáneas es de la forma:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_{10} + \beta_{12}Y_2 + \beta_{13}Y_3 + \beta_{14}X_1 + \beta_{15}X_2 + e_1 \\ Y_2 &= \beta_{20} + \beta_{21}Y_1 + \beta_{23}Y_3 + \beta_{24}X_1 + \beta_{25}X_2 + e_2 \\ Y_3 &= \beta_{30} + \beta_{31}Y_1 + \beta_{32}Y_2 + \beta_{34}X_1 + \beta_{35}X_2 + e_3 \end{aligned}$$

donde Y_i ($i = 1,2,3$) son las variables dependientes, X_j las variables independientes, β_{ik} son los parámetros a estimar y e_i son los términos del error.

Las interrelaciones en este tipo de sistema son complejas, además de la correlación entre los componentes del error, las variables aparecen como regresoras y dependientes a la vez, determinando la presencia de endogeneidad. En un sistema de ecuaciones, a las variables que aparecen a la izquierda (dependientes) se les denomina variables endógenas las cuales se definen por la estructura del modelo, las variables endógenas también pueden aparecer como variables predictoras. Las variables a la derecha de la igualdad, pueden ser endógenas cuyos valores se han determinado en el propio modelo (variables instrumentales), o variables exógenas cuyos valores se definen fuera del sistema (Greene 2000, Eerikäinen 2002).

Finalmente un sistema recursivo puede ser representado como:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_{10} + \beta_{13}X_1 + \beta_{14}X_2 + e_1 \\ Y_2 &= \beta_{20} + \beta_{21}Y_1 + \beta_{23}X_1 + \beta_{24}X_2 + e_2 \\ Y_3 &= \beta_{30} + \beta_{31}Y_1 + \beta_{32}Y_2 + \beta_{33}X_1 + \beta_{34}X_2 + e_3 \end{aligned}$$

donde Y_i ($i = 1,2,3$) son las variables dependientes, X_j las variables independientes, β_{ik} son los parámetros a estimar y e_i son términos relacionados con el error.

La naturaleza secuencial del sistema no implica causalidad entre las variables endógenas. Este tipo de sistemas de ecuaciones, si no presenta correlación entre los términos del error, puede ser ajustado por *OLS* de forma secuencial (primero Y_1 , luego Y_2 y finalmente Y_3). Cuando existe correlación entre los errores, se pueden emplear en la estimación de los parámetros métodos instrumentales.

1.4.1 Ajuste simultáneo

Borders (1989), Somers y Farrar (1991), entre otros han demostrado que ciertas técnicas procedentes del campo de la econometría son útiles en la estimación de sistemas de ecuaciones interdependientes. Técnicas como *seemingly unrelated regression (SUR)* (Zellner, 1962), *two stage least squares (2SLS)* (Theil, 1953), *three-stage least squares (3SLS)* (Zellner and Theil, 1962) y *full information of maximum likelihood (FIML)* (Hausman, 1975).

SUR o mínimos cuadrados generalizados conjuntos, es una generalización de *OLS* para sistemas de ecuaciones en los cuales existe correlación, *OLS* asume que los términos del error no están correlacionados contemporáneamente ($\sigma_{ij} = 0$) para todo $i \neq j$ y tienen la misma varianza en cada ecuación $\sigma_i^2 = \sigma_j^2$ para todo i, j . *OLS* y *SUR* son métodos que asumen que todas las variables regresoras son variables independientes, pero *SUR* toma en cuenta la correlación entre los errores de las diferentes ecuaciones

para mejorar la eficiencia de las estimaciones. Esta metodología se inicia estimando la matriz de covarianza de los errores entre las ecuaciones del sistema; en primer lugar se ajustan todas las ecuaciones empleando *OLS*, y así se determinan los residuos que se usan a continuación para estimar la matriz de covarianza. Seguido, se realiza la estimación *SUR*. Se ha demostrado que *SUR* proporciona una ganancia en la eficiencia de la estimación de los parámetros cuando los términos del error en un sistema de ecuaciones están correlacionados (Zellner 1962, Judge *et al.*, 1988, Rose y Lynch 2001).

El método *2SLS* en un primer paso reemplaza las variables endógenas del sistema con su valor predicho obtenido por regresión lineal múltiple empleando todas las variables exógenas del sistema como variables independientes. En un segundo paso las ecuaciones con las nuevas variables son ajustadas con *OLS* clásico. En esta metodología se asume que esas variables endógenas predichas que aparecen en el lado derecho del sistema no están correlacionadas con los componentes del error de las variables endógenas del lado izquierdo. Los parámetros estimados por esta metodología son sesgados pero consistentes.

El método *3SLS* va un paso más adelante y combina el método *2SLS* con el método *SUR* para tener en cuenta la correlación entre los componentes del error de varias ecuaciones.

FIML es un método que a diferencia de *2SLS* y *3SLS* que usan en la estimación de las variables endógenas sólo una proporción del modelo (variables exógenas), emplea todo el modelo en la estimación, aunque en ocasiones resulta complicado obtener la convergencia en dicha estimación.

1.5 ESTIMACIÓN DEL VOLUMEN POR HECTÁREA

Es común que en el ajuste de ecuaciones de estimación de volumen se presenten problemas de heterocedasticidad. La heterocedasticidad influye en el modelo ya que los estimadores son centrados pero no son eficientes y las fórmulas de las varianzas de los estimadores de los parámetros no son correctas lo cual invalida las pruebas de significación. La falta de homogeneidad de varianza es corregida en el ámbito forestal fundamentalmente a través de dos técnicas: transformación de variables implicadas en las ecuaciones o análisis ponderado (Cunia 1986, Parresol 1999, 2001).

Para levantar la restricción de heterogeneidad de varianza de los errores (la cual es desconocida), existe la alternativa de identificar gráficamente aquellas variables independientes (o combinaciones de las mismas) que causan dicha variación y utilizarlas como ponderador, Neter *et al.*, (1998) sugieren emplear una función potencia como peso:

$$\sigma_i^2 = x_i^\alpha \quad (12)$$

Para estimar el valor α (término de potencia), siguiendo a Harvey (citado por Parresol, 1999), se usan los errores obtenidos con el modelo sin ponderar (\hat{e}_i) como variable dependiente en el modelo potencial de la varianza del error:

$$\hat{e}_i^2 = x_i^\alpha \quad (13)$$

O su forma linealizada:

$$\ln(\hat{e}_i^2) = \alpha \ln(x_i) \quad (14)$$

Donde:

\hat{e}_i , es el residuo sin ponderar, x_i nueva variable, \ln logaritmo natural y α parámetro a estimar

Así, Furnival (1961), Cailliez (1980) y Prodan *et al.*, (1997), trabajando con funciones de ahusamiento y volumen compatibles, proponen como candidato para x_i^α (ecuación [12]) una función potencia de la variable D^2H , (el cuadrado del DAP multiplicado por la altura). Aplicado a las ecuaciones [12], [13] y [14] se obtienen:

$$\sigma_i^2 = (D^2H)_i^\alpha \quad (15)$$

$$\hat{\epsilon}_i^2 = \gamma(D^2H)_i^\alpha \quad (16)$$

$$\ln(\hat{\epsilon}_i^2) = \ln(\gamma) + \alpha \ln(D^2H)_i \quad (17)$$

1.6 DISTRIBUCIÓN Y USOS DE *Eucalyptus globulus*

DIEA (2014), declara que Uruguay registró en el año 2013 una superficie boscosa de 1.84 millones de hectáreas, de las cuales 726 mil corresponden al género *Eucalyptus*, valor cercano al ocupado por los bosques nativos (850 mil hectáreas). Del género *Eucalyptus*, *Eucalyptus globulus* es la especie de mayor extensión a nivel nacional representando unas 309.088 hectáreas.

Eucalyptus globulus es nativo del sur de Australia, Tasmania, islas del estrecho de Bass y sur de Victoria (FAO 1981, Golfari 1985), distribuido en zonas con una latitud de 37°-43°30´S, en localidades costeras y continentales con altitudes desde el nivel del mar a 450 m. Presenta buen desarrollo en clima templado-frío, con temperaturas máximas promedio de 20 a 23 °C y mínimas de 0 a 8 °C; subhúmedo o húmedo con precipitaciones del orden de los 500 a 1500 mm anuales mayoritariamente invernales (FAO 1981, Brussa 1994).

Eucalyptus globulus fue introducido en Uruguay en 1853 y ha sido plantado sobre varios tipos de suelos mayoritariamente al Sur del Río Negro (FAO 1981). Presenta buenos crecimientos en suelos profundos arenoso-arcillosos y un crecimiento aceptable sobre suelos franco arcillosos y arcillosos bien drenados, con un promedio de crecimiento medio anual de 25 m³ ha⁻¹ año. Los factores edáficos limitantes en el establecimiento y desarrollo

de esta especie son escasa profundidad del suelo, mal drenaje, salinidad y la presencia de un alto contenido de carbonatos asimilables (Brussa, 1994). En relación a las limitantes sanitarias, *E. globulus* es altamente susceptible a varias plagas y enfermedades, especialmente a la enfermedad conocida como mancha foliar por *Mycosphaerella* (*Teratosphaeria nubilosa*), la cual provoca manchas foliares y defoliación en el follaje juvenil. Esta enfermedad, que frecuentemente genera pérdidas de área foliar superiores al 80%, es hoy en día la principal limitante productiva para esta especie en Uruguay (Balmelli, 2014).

Eucalyptus globulus se considera como una de las mejores especies de *Eucalyptus* para la producción de papel, sus otros usos incluyen biomasa para combustible, cortina rompe vientos, barreras físicas, extracción de aceites esenciales, producción de miel y control de la erosión (FAO 1981, Skolmen y Ledig 1990, Methol 2008). Según Doldán (2007) esta especie presenta los valores más altos de rendimiento bruto de pasta de celulosa, despertando gran interés en la industria forestal. El valor bruto de las exportaciones forestales (sin incluir celulosa), para el año 2013 fue de 596 mil dólares (DIEA 2014), representando un 10% del total de las exportaciones del país (ocupando el cuarto lugar en la lista de rubros antecedido por productos agrícolas, carne y lácteos).

1.7 ANTECEDENTES, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

La expansión de la industria de producción de celulosa, junto con las características propias de la especie, han llevado a que *E. globulus* represente la mayor área plantada en Uruguay (Doldán, 2007). La importancia de esta especie en el sector productivo forestal motiva la investigación e innovación en sistemas de prognosis dinámicos, ya que contar con herramientas que ayuden en la planificación de plantaciones y predigan con cierto nivel de confianza los volúmenes a cosechar es un objetivo claro dentro del sector. La ordenación y planificación en el sector forestal uruguayo facilita el ajuste de

modelos dinámicos que predicen fundamentalmente tasas de cambio (incremento en las variables de estado) y brindan resultados aceptables.

Dada las particularidades del clima y del suelo en Uruguay (englobados en el concepto de Sitio forestal), se hace inviable el uso de modelos de prognosis ajustados para otras regiones, aun para aquellas de similitud climática. La importancia de los modelos forestales radica en su capacidad de predecir el desarrollo de un sistema forestal, y de esta manera ser una herramienta para la toma de decisiones al integrar la base de simuladores forestales. Un simulador es una plataforma en la cual los modelos funcionan como un sistema de predicción del crecimiento y de la producción. Un sistema informático que integra modelos de simulación, modelos de trozado e indicadores económicos, se denomina sistema de planificación forestal, sistema de soporte a la decisión (Palahí *et al.*, 2004, Mäkinen 2009), o sistema de apoyo a la gestión (Methol 2003, 2008). El mismo constituye una de las herramientas más útiles en la planificación y ejecución de planes forestales.

Methol (2006), confeccionó el único Sistema de Apoyo a la Gestión (SAG) disponible hasta la fecha para plantaciones de *E. globulus* en Uruguay, utilizando metodologías ADA y ajuste de ecuaciones individuales. Los avances locales tanto en silvicultura y manejo de plantaciones como en metodologías de ajustes estadísticos y en tecnologías de la información, permiten aumentar la capacidad y complejidad de los modelos incluidos en los SAG. Las decisiones para un manejo forestal sostenible se basan en información sobre las condiciones presentes y futuras de las plantaciones (Peng y Wen, 2006), así, la disponibilidad de nuevos datos permite contemplar rangos de tiempo más largos y diferentes valores de densidad iniciales, lo cual mejora el alcance y precisión de los nuevos modelos a ajustar.

El objetivo del presente trabajo es desarrollar un modelo dinámico de rodal para *E. globulus* mediante ecuaciones de transición BAI para área basal, altura dominante y mortalidad. Utilizando un método invariante respecto a la edad de referencia para estimar los efectos específicos del sitio: mediante el

enfoque de las variables *dummy* (*dummy approach*) propuesto por Cieszewski *et al.*, (2000) el cual asume que los datos contienen errores de medición y errores aleatorios que deben ser modelados. Las ecuaciones seleccionadas para integrar el modelo se ajustarán con un método adecuado para contemplar su simultaneidad. Junto con la estimación del volumen por hectárea las ecuaciones ajustadas permitirán el empleo del modelo dinámico desarrollado en Sistemas de Apoyo a la Gestión para plantaciones de *E. globulus* en Uruguay.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1 DATOS

Los datos empleados en este estudio fueron mediciones de inventario realizadas a 168 parcelas pertenecientes al Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA), ubicadas en el Sur y Sur-Este del Uruguay. En el Cuadro 1 se presentan los estadísticos resumen del conjunto de datos.

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos del set de ajuste.

Variable	Media	Mínimo	Máximo	Desviación estándar
<i>Edad</i> (años)	6,1	1	11	2,7
<i>AMD</i> (m)	16,3	1,2	26,9	6,1
<i>N</i> (árb ha ⁻¹)	1022	500	1700	237,4
<i>Dg</i> (cm)	13,5	2,6	22,4	3,9
<i>G</i> (m ² ha ⁻¹)	15,1	0,8	34,6	7,1

AMD: altura media dominante; *N*: densidad del rodal; *Dg*: diámetro medio cuadrático; *G*: área basal total.

2.2 AJUSTE DE ECUACIONES DE TRANSICIÓN

Se ajustaron 32 ecuaciones *ADA* y *GADA* para las variables altura media dominante y área basal, derivadas de funciones base existentes en la literatura forestal (Hossfeld 1882, Schumacher 1939, Lundqvist 1957, Richards 1959, McDill y Amateis 1992, Amaro *et al.*, 1997, Tomé *et al.*, 2001, Methol 2001, Cieszewski 2002, Diéguez *et al.*, 2005, Methol 2006, 2008, Barrio *et al.*, 2006)

En los Cuadros 2 y 3 se presenta las ecuaciones *ADA* de transición polimórficas y anamórficas respectivamente.

Cuadro 2. Ecuaciones ADA polimórficas

Modelo	Ecuación dinámica	Nro.
Bertalanffy –Richards	$Y_2 = a \left(\frac{Y_1}{a} \right)^{\frac{\ln[1-e^{-bt_2}]}{\ln[1-e^{-bt_1}]}}$	(18)
Bertalanffy –Richards	$Y_2 = a \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{Y_1}{a} \right)^{1-v} \right]^{\frac{t_2}{t_1}} \right\}^{\frac{1}{1-v}}$	(19)
Bertalanffy –Richards	$Y_2 = a \left\{ 1 + \left[\left(\frac{a}{Y_1} \right)^v - 1 \right] e^{[-b(t_2-t_1)]} \right\}^{\frac{1}{v}}$	(20)
Gompertz I	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)e^{-b(t_2-t_1)+c(t_2^2-t_1^2)}} e^a \left[1 - e^{-b(t_2-t_1)+c(t_2^2-t_1^2)} \right]$	(21)
Gompertz II	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)e^{-b(t_2-t_1)}e^{a[1-b(t_2-t_1)]}}$	(22)
Schumacher I	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)+a\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)}$	(23)
Schumacher II	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c+a\left[1-\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c\right]}$	(24)
Schumacher III	$Y_2 = Y_1 \left(\frac{t_1}{t_2}\right) e^a \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c \right]$	(25)
Hossfeld	$Y_2 = \frac{1}{\frac{1}{Y_2} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^b + a \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^b \right]}$	(26)
Weibull I	$Y_2 = Y_1 e^{-b(t_2^c-t_1^c)} + a[1 - b(t_2^2 - t_1^2)]$	(27)
Weibull II	$Y_2 = a - b \left[\frac{a - Y_1}{b} \right]^{\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^c}$	(28)
Levakovic	$Y_2 = \left\{ Y_1^c \left[\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 + a \left(1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{c}}$	(29)

$$\text{Monomolecular} \quad Y_2 = Y_1 e^{-b(t_2-t_1)} + a[1 - e^{-b(t_2-t_1)}] \quad (30)$$

Cuadro 3. Ecuaciones ADA anamórficas

Modelo	Ecuación dinámica	Nro.
Bertalanffy –Richards	$Y_2 = Y_1 \left[\frac{1 - e^{(-bt_2)}}{1 - e^{(-bt_1)}} \right]^c$	(31)
Gompertz	$Y_2 = Y_1 \frac{e^{-be^{(-ct_2)}}}{e^{-be^{(-ct_1)}}}$	(32)
Schumacher I	$Y_2 = Y_1 e^{-b\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)}$	(33)
Schumacher II	$Y_2 = Y_1 e^{-b\left[\left(\frac{1}{t_2}\right)^c - \left(\frac{1}{t_1}\right)^c\right]}$	(34)
Hossfeld	$Y_2 = \frac{1}{\frac{1}{Y_1} + b\left(\frac{1}{t_2}\right)^c - \left(\frac{1}{t_1}\right)^c}$	(35)
Weibull	$Y_2 = Y_1 \frac{1 - e^{(-bt_2^c)}}{1 - e^{(-bt_1^c)}}$	(36)
Monomolecular	$Y_2 = Y_1 \left[\frac{1 - be^{(-ct_2)}}{1 - be^{(-ct_1)}} \right]$	(37)
Levakovic	$Y_2 = Y_1 \left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{b + t_1^2}{b + t_2^2}\right) \right]^c$	(38)

El Cuadro 4 presenta las ecuaciones en GADA y las ecuaciones base de donde derivan.

Cuadro 4. Ecuaciones GADA

Ecuación base	Parámetro relativo al sitio	Solución para X con valores iniciales (t_0, Y_0)	Ecuación dinámica	Nro.
Bertalanffy-Richardss				
$Y = a_1[1 - e^{(-a_2t)^{a_3}}$	$a_1 = X$	$X_0 = \frac{Y_0}{[1 - e^{(-b_2t_0)}]^{b_3}}$	$Y = Y_0 \left[\frac{1 - e^{(-b_2t)}}{1 - e^{(-b_2t_0)}} \right]^{b_3}$	(39)
	$a_2 = X$	$X_0 = -\ln \left[1 - \left(\frac{Y_0}{b_1} \right)^{1/b_3} \right] / t_0$	$Y = b_1 \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{Y_0}{b_1} \right)^{1/b_3} \right]^{t/t_0} \right\}^{b_3}$	(40)
	$a_1 = e^X$ $a_3 = b_2 + b_3/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 - b_2 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 - b_2 L_0)^2 - 4b_3 L_0} \right]$ Con $L_0 = \ln(1 - e^{-b_1 t_0})$	$Y = Y_0 \left[\frac{1 - e^{(-b_1 t)}}{1 - e^{(-b_1 t_0)}} \right]^{(b_2 + b_3/X_0)}$	(41)
Korf				
$Y = a_1 e^{(-a_2 t^{-a_3})}$	$a_2 = X$	$X_0 = -\ln \left(\frac{Y_0}{a_1} \right) t_0^{a_3}$	$Y = b_1 \left(\frac{Y_0}{b_1} \right)^{\left(\frac{t_0}{t} \right)^{b_3}}$	(42)
	$a_1 = e^X$ $a_2 = b_1 + b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-b_3} \left\{ b_1 + t_0^{b_3} \ln(Y_0) + \sqrt{4b_2 t_0^{b_3} + [-b_1 - t_0^{b_3} \ln(Y_0)]^2} \right\}$	$Y = e^{X_0} e^{[-(b_1 + \frac{b_2}{X_0}) t^{-b_3}]}$	(43)

Cuadro 4. Ecuaciones GADA continuación...

Ecuación base	Parámetro relativo al sitio	Solución para X con valores iniciales (t_0, Y_0)	Ecuación dinámica	Nro.
$Y = \frac{a_1}{1 + a_2 t^{-a_3}}$	$a_2 = X$	$X_0 = t_0^{-a_3} \left(\frac{a_1}{Y_0} - 1 \right)$	$Y = \frac{b_1}{\left[1 - \left(1 - b_1/Y_0 \right) \left(t_0/t \right)^{b_3} \right]}$	(44)
	$a_1 = b_1 + X$ $a_2 = b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[Y_0 - b_1 + \sqrt{(Y_0 - b_1)^2 + 4b_2 Y_0 t_0^{-b_3}} \right]$	$Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2/X_0 t^{-b_3}}$	(45)
	$a_1 = b_1 + X$ $a_2 = b_2 X$	$X_0 = \frac{Y_0 - b_1}{1 - b_2 Y_0 t_0^{-b_3}}$	$Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2 X_0 t^{-b_3}}$	(46)
$Y = \frac{a_1 t^{a_2}}{a_3 + t^{a_2-1}}$	$a_1 = b_1 + X$ $a_3 = \frac{1}{2} b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[Y_0^3 t_0^{-1} - b_1 \pm \sqrt{(Y_0^3 t_0^{-1} - b_1)^2 + 2b_3 Y_0^3} \right]$	$Y = Y_0 \left[\frac{(b_3 + t_0^{b_2-1} X_0) t^{b_2}}{(b_3 + t_0^{b_2-1} X_0) t_0^{b_2}} \right]^{1/3}$ Si $b_2 \leq 1$: $Y = Y_0 \left[\frac{(b_3 t_0^{1-b_2} + X_0) t}{(b_3 t_0^{1-b_2} + X_0) t_0} \right]^{1/3}$	(47)

Cuadro 4. Ecuaciones GADA continuación...

Ecuación base	Parámetro relativo al sitio	Solución para X con valores iniciales (t_0, Y_0)	Ecuación dinámica	Nro.
King Prodan $Y = \frac{t^{a_1}}{a_2 + a_3 t^{a_1}}$	$a_2 = b_2 + b_3 X$ $a_3 = X$	$X_0 = \frac{t_0^{b_1} / Y_0 - b_2}{b_3 + t_0^{b_1}}$	$Y = \frac{t^{b_1}}{b_2 + b_3 X_0 + X_0 t_0^{b_1}}$	(48)
Strand (1964) $Y = \left(\frac{t}{a_1 + a_2 t} \right)^{a_3}$	$a_1 = X$ $a_2 = b_1 + b_3 X$	$X_0 = \frac{t_0 \left(Y_0^{-1/b_3} - b_1 \right)}{1 + b_2 t_0}$	$Y = \left[\frac{t}{X_0 + t(b_1 + b_2 X_0)} \right]^{b_3}$	(49)

X es la variable no observable, a_i se emplea para denotar parámetros en los modelos de base, mientras que b_i , se utiliza para los parámetros globales en formulaciones GADA.

Para modelar la evolución del número de árboles por hectárea se evaluaron 8 ecuaciones presentadas en el Cuadro 5

Cuadro 5. Ecuaciones de mortalidad

Modelo	Ecuación	Nro.
Woollon citado por Methol (2008)	$N_2 = \left\{ N_1^{-0.5} + b \left[\left(\frac{t_2}{100} \right)^a - \left(\frac{t_1}{100} \right)^a \right] \right\}^{-b}$	(50)
Bailey <i>et al.</i> , (1985)	$N_2 = N_1 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^a e^{(b+c*IS)(t_2-t_1)}$	(51)
Pienaar <i>et al.</i> , (1990)	$N_2 = N_1^a + bIS^{-1} \left\{ \left(\left(\frac{t_2}{10} \right)^c - \left(\frac{t_1}{10} \right)^c \right)^{\frac{1}{a}} \right\}$	(52)
Pienaar y Shiver (1981)	$N_2 = N_1 e^{a(t_2^b - t_1^b)}$	(53)
Clutter <i>et al.</i> , 1983	$N_2 = N_1 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^b e^{a(t_2 - t_1)}$	(54)
Tomé <i>et al.</i> , (1997)	$N_2 = N_1 e^{-b(t_2 - t_1)}$	(55)
Silva (Van Laar y Akca, 2007)	$N_2 = N_1 e^{[a(b^{t_2} - b^{t_1})]}$	(56)
Clutter y Jones (1980)	$N_2 = [N_1^a + b(t_2^b - t_1^b)]^{1/a}$	(57)

Las ecuaciones seleccionadas para cada variable de estado, pasaran a integrar un sistema para su ajuste simultáneo aplicando el método adecuado según las relaciones analíticas que se registren.

2.3 ESTIMACIÓN DE VOLUMEN POR HECTÁREA

Las ecuaciones de volumen a evaluar son modelos predictivos utilizando como predictoras las variables de estado (*AMD*, *G* y *N*) y varias relaciones y transformaciones de las mismas (logarítmicas, exponenciales, inversos, etc.). Para la evaluación de la homocedasticidad se realizaran chequeos gráficos de residuales crudos y de Pearson frente a los valores predichos de los modelos seleccionados. De registrarse heterocedasticidad se aplicaran métodos de ponderación para su corrección.

2.4 COMPARACIÓN DE MODELOS Y VALIDACIÓN

2.4.1 Calidad de ajuste

La selección de los modelos se basa en el análisis de su capacidad de ajuste y su capacidad predictiva, empleando métodos analíticos y métodos gráficos. Los estadísticos empleados para comparar calidad de ajuste tienen su base en el cálculo de los residuos (Clutter *et al.*, 1983, Prodan *et al.*, 1997, Castedo y Álvarez, 2000): a) el sesgo (\bar{E}), evalúa la desviación de la predicción del modelo respecto de los valores observados; b) la raíz del error medio cuadrático (*REMC*) analiza la precisión de las estimaciones (Newnham 1992); c) el coeficiente de determinación ajustado (R_{aj}^2), representa la fracción de la variación total en los valores de la variable dependiente que es explicada por el modelo, teniendo en cuenta el número total de parámetros a estimar y el número de observaciones; d) el criterio de información de Akaike (*AIC*); cuyas fórmulas de cálculo son:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (58)$$

$$RECM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}} \quad (59)$$

$$R_{aj}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \left(\frac{n-1}{n-p} \right) \quad (60)$$

$$AIC = -2 \log Lik + 2 * p \quad (61)$$

donde y_i representa los valores observados, \hat{y}_i son los valores predichos, \bar{y}_i es el valor promedio de la variable dependiente, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo y $\log Lik$ es el logaritmo de la máxima verosimilitud. Así, según estos estadísticos un modelo será mejor que otro si presenta menores valores de \bar{E} , $RECM$, AIC y un mayor valor del R_{aj}^2 .

El análisis gráfico consistente en examinar las relaciones de los datos y los residuos ajustados, permite detectar fácilmente errores o comportamientos anómalos (Soares *et al.*, 1995, Gadow *et al.*, 2001, Huang, 2002).

2.4.2 Capacidad predictiva

El proceso de validación es utilizado para corroborar si la bondad del ajuste refleja también la calidad de las predicciones (Huang, 2002), lo cual influye en la selección del mejor modelo. Las metodologías de validación más usadas son: validación con división aleatoria de datos (*split validation*) y validación cruzada (*cross validation*). La primer metodología consiste en probar la capacidad predictiva del modelo en un set de datos independiente del utilizado para su ajuste, ya que la calidad de éste no refleja necesariamente su capacidad predictiva (Vanclay y Skovsgaard, 1997, Kozak y Kozak, 2003). La división aleatoria del set de datos iniciales en dos muestras independientes no es real (Huang, 2002), por ello se utilizan métodos alternativos como la validación cruzada (*cross validation*).

La *cross validation* se realiza con los mismos datos que el ajuste (Myers, 1986) y consiste en el cálculo de los residuos eliminados, es decir, calcular los residuos de la *i-ésima* observación empleando los parámetros estimados al ajustar el modelo con los restantes datos excepto la *i-ésima observación*. Esta técnica es similar a la *split validation* en la cual se parte de un set de datos iniciales y se obtienen dos subconjuntos, salvo que en ella la proporción de los dos conjuntos se mantiene constante, los datos de validación tienen una observación y el resto de datos se usan para el ajuste (Huang, 2002). El uso de *cross validation* en el ámbito forestal es una práctica común (Tomé *et al.*, 2001, López *et al.*, 2003, Soares y Tomé, 2002)

A la suma de cuadrados de los residuos eliminados se denomina *PRESS* (*predicted residual sum of squares*) y es utilizado para calcular los criterios de selección: el sesgo, la raíz del error cuadrático medio (de manera indicada anteriormente por las fórmulas empleadas en el ajuste), y la eficiencia del modelo ajustada (EF_{aj}) cuyas formas de cálculo se presenta a continuación:

$$PRESS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{(i-1)})^2 \quad (62)$$

$$EF_{aj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \left(\frac{N-1}{N-p} \right) \quad (63)$$

donde y_i representa los valores observados, \hat{y}_i son los valores predichos, \bar{y} es el valor promedio de la variable dependiente, n es el número de observaciones y p los parámetros estimados. La eficiencia del modelo representa la proporción de variabilidad observada en los datos originales que es explicada por el modelo, variando entre 0 (sin ajuste) y 1 (ajuste perfecto) (Vanclay y Skovsgaard, 1997).

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 ECUACIONES DE TRANSICIÓN

La bondad de ajuste de los modelos se evaluó a través de estadísticos numéricos (con los cuales se confeccionaron rankings de posición) y del gráfico de los residuos, analizando las trayectorias predichas para comprobar si son biológicamente adecuados para los datos utilizados (Goelz y Burk 1992, Sharma *et al.*, 2011). Finalmente se verificó su calidad predictiva mediante *cross validation*. De la base de ecuaciones disponibles (32 para AMD y G, y 8 para Población), se seleccionaron aquellas que obtuvieron los tres primeros lugares en el ranking final (valores más bajos de *RECM*, *AIC* y un mayor valor del R_{aj}^2), las cuales pasaron a la evaluación gráfica en el mismo orden que entraron al ranking.

Se empleó el módulo Proc Model del programa estadístico SAS (SAS, 2007) para el ajuste y evaluación de los modelos. Para el arreglo de datos y trayectorias se confeccionaron macros mediante Proc SQL (SAS, 2007).

3.1.1 Altura media dominante

Para cuantificar la ganancia en calidad de ajuste se probaron dos estructuras de datos: *TIP* (Huang 1997) y variables *dummy* (Cieszewski, 2002), mediante programación utilizando Proc SQL (SAS, 2007). Los Cuadros 6 y 8 presentan los modelos seleccionados. En los Cuadros 7 y 9 se presentan los estadísticos de ajuste y posiciones en los rankings para *TIP* y *dummy* respectivamente.

Cuadro 6. Ecuaciones base y dinámicas seleccionadas para modelizar la Altura media dominante (*TIP*).

Ecuación base	Solución para X^1	Ecuación dinámica	Nro.
Korf $y = ae^{(-bt^{-c})}$	$X_0 = \frac{1}{2}(\ln(Y_0) + L_0)$ $L_0 = \sqrt{4b_2t_0^{b_3} + [-b_1 - t_0^{b_3}\ln(Y_0)]^2}$	$Y = e^{X_0}e^{-(b_1+b_2/X_0)t^{-b_3}}$	(43)
Korf $y = ae^{(-bt^{-c})}$	$X_0 = -\ln(Y_0b_1^{-1})t_0^{b_3}$	$Y = b_1(Y_0b_1^{-1})\left(\frac{t_0}{t_1}\right)^{b_3}$	(42)
Hossfeld $y = \frac{a}{1+bt^{-c}}$	$X_0 = t_0^{-b_3}(b_1Y_0^{-1} - 1)$	$Y = b_1/\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{b_1}{Y_0}\right)\right]\left(\frac{t_0}{t}\right)^{b_3}\right\}$	(44)

¹ Para Ecuaciones en *GADA*

Cuadro 7. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados (*TIP*)

Ecuación número	R^2_{aj}	RECM	AIC	R_1	R_2	R_3	R_4
(43)	94.88	1,425	19.091	1	1	1	1
(42)	94.01	1,501	19097	2	2	2	2
(44)	93.85	1,562	20079	3	3	3	3

R_1 : Ranking para coeficiente de determinación
 R_2 : Ranking según la raíz del error cuadrático medio
 R_3 : Ranking para criterio de información de Akaike
 R_4 : Ranking general final.

Cuadro 8. Ecuaciones base y dinámicas seleccionadas para modelizar la Altura media dominante (*dummy*).

Ecuación base	Solución para X^1	Ecuación dinámica	Nro.
Korf $y = ae^{(-bt^{-c})}$	$X_0 = \frac{1}{2}(\ln(Y_0) + L_0)$ $L_0 = \sqrt{4b_2t_0^{b_3} + [-b_1 - t_0^{b_3}\ln(Y_0)]^2}$	$Y = e^{X_0}e^{-(b_1+b_2/X_0)t^{-b_3}}$	(43)
Schumacher $y = e^{(a-\frac{b}{t^c})}$	-----	$Y = e^{\ln(Y_0)(\frac{t_0}{t})^b + a*(1-(\frac{t_0}{t})^b)}$	(24)
Korf $y = ae^{(-bt^{-c})}$	$X_0 = -\ln(Y_0b_1^{-1})t_0^{b_3}$	$Y = b_1(Y_0b_1^{-1})(\frac{t_0}{t_1})^{b_3}$	(42)

¹ Para Ecuaciones en GADA

Cuadro 9. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados (*dummy*)

Ecuación número	R^2_{aj}	RECM	AIC	R_1	R_2	R_3	R_4
(43)	97,8	0,953	201,4	1	1	1	1
(24)	97,5	0,976	214,6	2	2	2	2
(42)	97,5	0,977	215,2	3	3	3	3

R₁: Ranking para coeficiente de determinación
 R₂: Ranking según la raíz del error cuadrático medio
 R₃: Ranking para criterio de información de Akaike
 R₄: Ranking general final.

Se aprecian diferencias en los estadísticos de ajuste para ambas estructuras de datos, cuando se usan variables *dummy* se obtienen mayores valores de R^2_{aj} y menores valores en el RECM. El AIC no es comparable entre estructuras de datos ya que no se trabaja con el mismo número de parámetros ni de observaciones, este criterio es útil para comparar modelos dentro de la misma estructura, así, una reducción en 10 unidades de este estadístico indica diferencias significativas (Burnham y Anderson, 2002).

Para ambas estructuras la ecuación (43) se ubica en el primer lugar del ranking total, los valores de los estimadores y sus errores estándar se presentan en el Cuadro 10.

Cuadro 10. Parámetros estimados y error estándar (*EE*) para estructura de datos *TIP* y *dummy*

Estructura	β_1		β_2		β_3	
	Estimación	<i>EE</i>	Estimación	<i>EE</i>	Estimación	<i>EE</i>
<i>TIP</i>	-10,390	3,688	49,120	13,870	0,745	0,020
<i>Dummy</i>	-9,717	4,364	48,754	16,317	0,765	0,030

Las dos estructuras de datos utilizadas brindan diferentes estimaciones de los parámetros y de sus respectivos errores estándar, resultados coincidentes con los obtenidos por Ni y Zhang (2007) quienes compararon diversas estructuras de datos. En la estructura *TIP* al ordenar los datos en los correspondientes intervalos de años, el número de observaciones se incrementa artificialmente a un total de 5382. Esto tiene como resultado que los errores estándar de las estimaciones de los parámetros sean subestimados, resultando inapropiados para la prueba de hipótesis o inferencia estadística (Ni y Zhang, 2007).

En las Figuras 1 y 2 se presentan las distribuciones de los valores residuales frente a los predichos y las trayectorias generadas por la ecuación seleccionada (para *TIP* y *dummy* respectivamente).

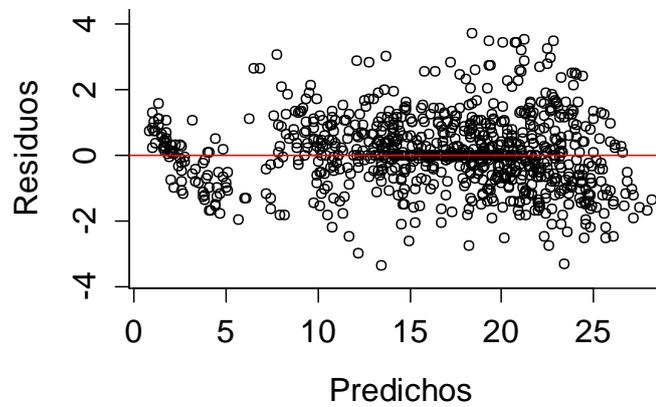
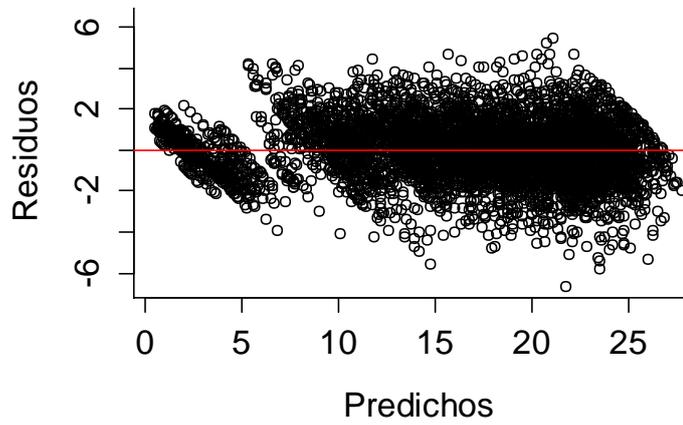


Figura 1. Dispersión de los valores residuales versus los valores predichos generados por la ecuación 43. Superior: estructura de datos *TIP*. Inferior: estructura de datos *dummy*.

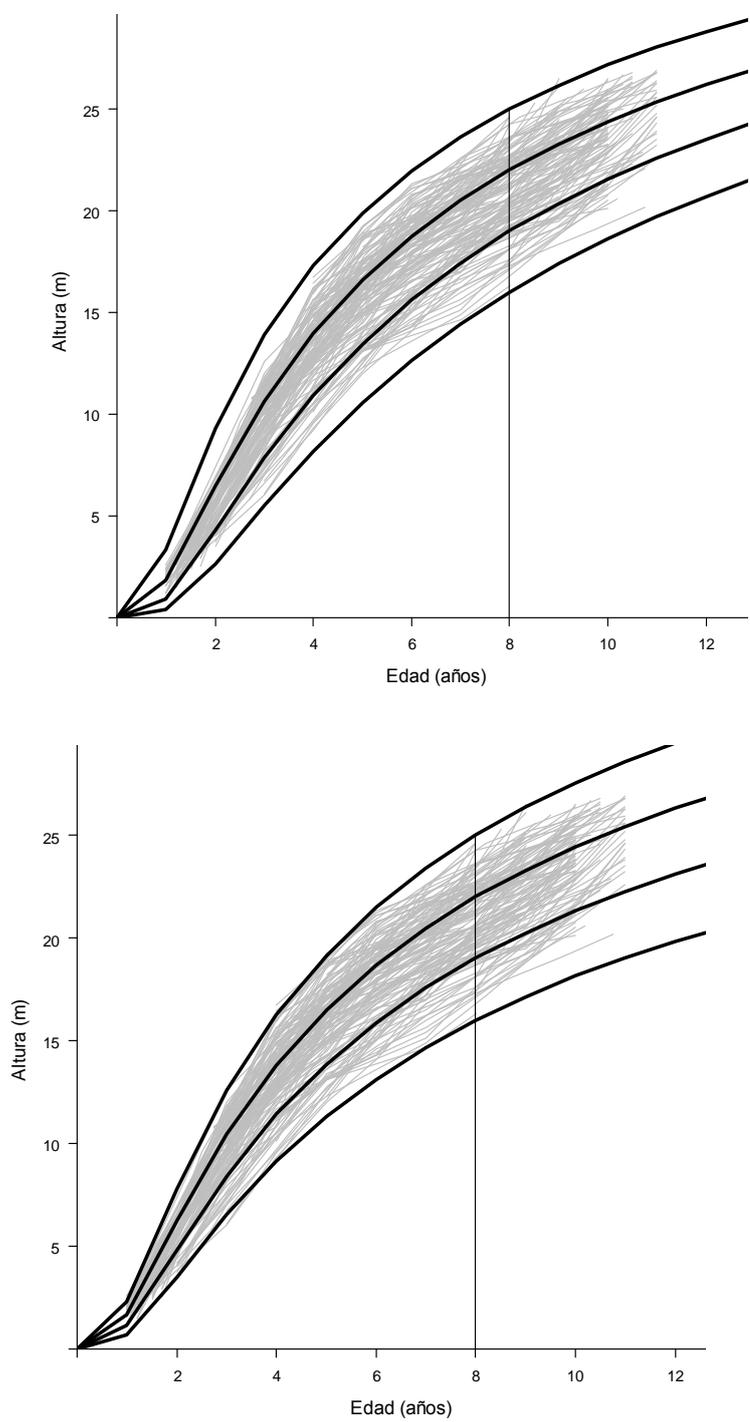


Figura 2. Curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia), producidas por el modelo de Korf (43) en GADA (líneas en negro) y las trayectorias reales de AMD (líneas en gris). Superior: estructura de datos *TIP*. Inferior: estructura de datos *dummy*.

Dada la ganancia en precisión (Cuadros 7 y 9) y el mejor ajuste de las curvas de sitio, generadas en la estructura *dummy*, para las variables de estado restantes (área basal y población) no se utilizó *TIP*.

Son escasos los trabajos sobre modelos dinámicos para *E. globulus* en Uruguay, Methol (2006) trabajando con esta especie y con una estructura de datos de intervalos ascendentes (Huang, 1997) identifica el modelo de Schumacher (1939), en su versión polimórfica (*ADA*) como el de mejor ajuste para la evolución de *AMD*, mientras que en este estudio dicho modelo obtuvo el segundo lugar en el ranking total para *TIP*. Amaro *et al.*, (1997) y García y Ruiz (2003), señalan al modelo de Bertalanffy-Richards (Richards, 1959) en su versión polimórfica, como el más utilizado para modelar *AMD*. Por su parte, Inions (1992), Wong *et al.*, (2000) y Strandgard *et al.*, (2005) seleccionaron la versión polimórfica (*ADA*) del modelo base de Bertalanffy-Richards en Australia para esta especie.

No hay registros de trabajos anteriores que utilicen el modelo de Korf (1939) modificado por Cieszewski (2004) para modelar *AMD* en especies de *Eucalyptus*. Por su parte Vargas *et al.*, (2013) y Sharma *et al.*, (2011) trabajado con *Pinus pseudostrobus* y *Pinus sylvestris* respectivamente, señalan que esta ecuación presenta buenos estadísticos de ajuste y tendencia aceptables para *AMD*. Castedo *et al.*, (2007b) ajustaron esta ecuación a la evolución del área basal, empleando variables *dummy*, para *Pinus radiata* en Galicia.

3.1.2 Área basal

Para el ajuste de esta variable se empleó la metodología de variables *dummy* su ganancia en ajuste y precisión quedó demostrado en el apartado anterior (3.1.1 Altura Media Dominante). Son pocos los registros sobre el empleo de esta metodología para el modelado de área basal (Castedo *et al.*, 2007a, 2007b).

En los Cuadros 11 y 12 se presentan las ecuaciones seleccionadas y los estadísticos utilizados para construir los rankings para la evolución del área basal en el tiempo.

Cuadro 11. Ecuaciones base y dinámicas seleccionadas para modelizar el área basal

Ecuación base	Ecuación dinámica	Nro.
Levakovic $y = a \left(\frac{t^2}{b+t^2} \right)^c$	$Y_2 = Y_1 \left[\left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 \frac{(b+t_1^2)}{(b+t_2^2)} \right]^c$	(38)
Schumacher $y = e^{a - \frac{b}{t^c}}$	$Y_2 = e^{-b \left[\left(\frac{1}{t_2} \right)^c - \left(\frac{1}{t_1} \right)^c \right]}$	(34)
Bertalanffy-Richardss $y = a(1 - e^{-bt})^c$	$Y_2 = Y_1 \left[\frac{1 - e^{-bt_2}}{1 - e^{-bt_1}} \right]^c$	(31)

Cuadro 12. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados

Ecuación número	R^2_{aj}	RECM	AIC	R_1	R_2	R_3	R_4
(38)	97,4	1,217	649,6	1	1	1	1
(34)	96,1	1,364	668,9	3	2	2	2
(31)	96,3	1,369	675,9	2	3	3	3

R_1 : Ranking para coeficiente de determinación
 R_2 : Ranking según la raíz del error cuadrático medio
 R_3 : Ranking para criterio de información de Akaike
 R_4 : Ranking general final.

Los tres modelos que obtuvieron las mejores posiciones generan curvas anamórficas, siendo el modelo base de Levakovic (citado por Zeide, 1993) el de mejor ajuste para área basal. Methol (2006), identifica la ecuación propuesta por Draper y Smith (1981), con base en el modelo Monomolecular en versión polimórfica como la de mejor ajuste para esta variable para *E. globulus* en Uruguay, por su parte, Cordero *et al.*, (2004) ajustan el modelo de Clutter (1963) para área basal de *E. globulus* en Chile.

En las Figuras 3 y 4 se observa la distribución de los residuos y las curvas desarrolladas por el modelo junto a las trayectorias de los datos reales.

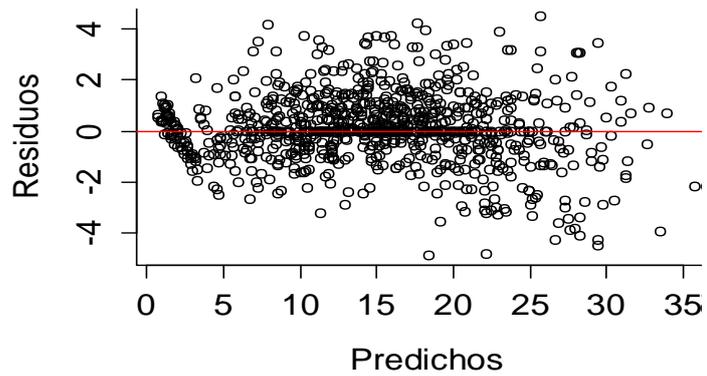


Figura 3. Dispersión de los residuos frente a los valores predichos generados por el modelo anamórfico de Levakovic, para el ajuste en área basal empleando variables *dummy*.

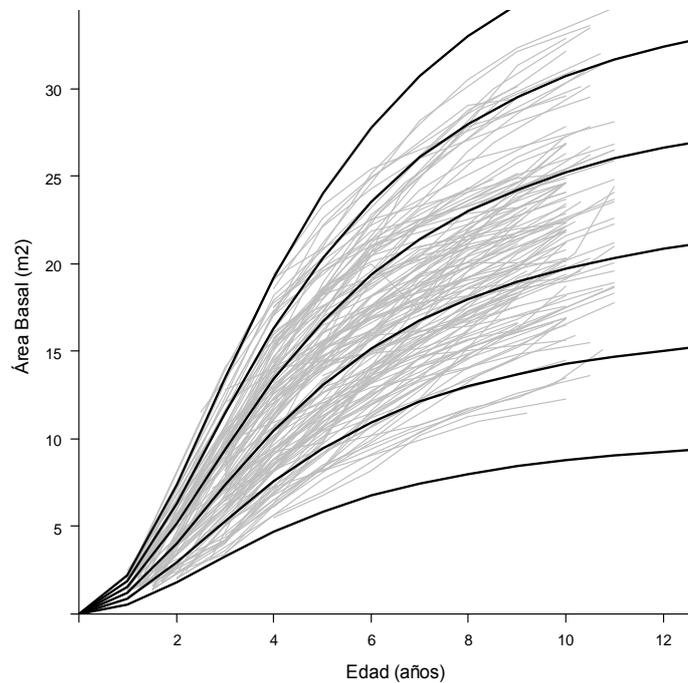


Figura 4. Curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m²ha⁻¹ a la edad de referencia (líneas en negro) y trayectorias de los valores observados en el tiempo (líneas en gris).

3.1.3 Número de árboles por hectárea

En el ajuste de la densidad de población (evolución del número de árboles por hectárea) se utilizaron datos de parcelas con y sin mortalidad, mediante variables *dummy*.

En los Cuadros 13 y 14 se presentan las ecuaciones seleccionadas y los estadísticos utilizados para construir los rankings para la evolución del número de árboles en el tiempo.

Cuadro 13. Ecuaciones dinámicas seleccionadas para modelizar el número de árboles por hectárea

Ecuación dinámica	Nro.
Pienaar y Shiver (1981)	(53)
$Y_2 = Y_1 e^{a(t_2^b - t_1^b)}$	
Woollons citado por Methol (2008)	(50)
$Y_2 = \left\{ Y_1^{-0.5} + a \left[\left(\frac{t_2}{100} \right)^b - \left(\frac{t_1}{100} \right)^b \right] \right\}^{-b}$	
Tomé <i>et al.</i> , (1997)	(58)
$Y_2 = Y_1 e^{[(t_2 - t_1)]}$	

Cuadro 14. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados

Ecuación número	R^2_{aju}	RECM	AIC	R_1	R_2	R_3	R_4
(53)	92,60	63,69	8033,2	1	1	1	1
(50)	92,04	66,23	8106,2	2	2	2	2
(58)	91,84	67,06	8130,4	3	3	3	3

R_1 : Ranking para coeficiente de determinación
 R_2 : Ranking según la raíz del error cuadrático medio
 R_3 : Ranking para criterio de información de Akaike
 R_4 : Ranking general final.

El modelo que obtuvo el primer lugar en el ranking total fue el propuesto por Pienaar y Shiver (1981). En las Figuras 5 y 6 se observan la distribución de los residuos y las curvas desarrolladas por el modelo seleccionado junto a las trayectorias de las poblaciones reales.

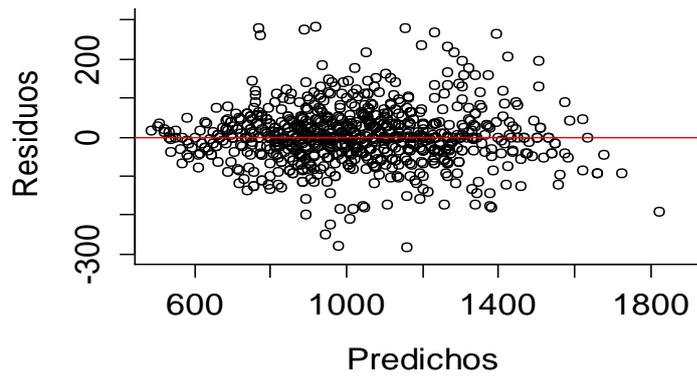


Figura 5. Dispersión de los residuos frente a predichos generados por el modelo Pienaar y Shiver, para el ajuste de densidad empleando variables *dummy*.

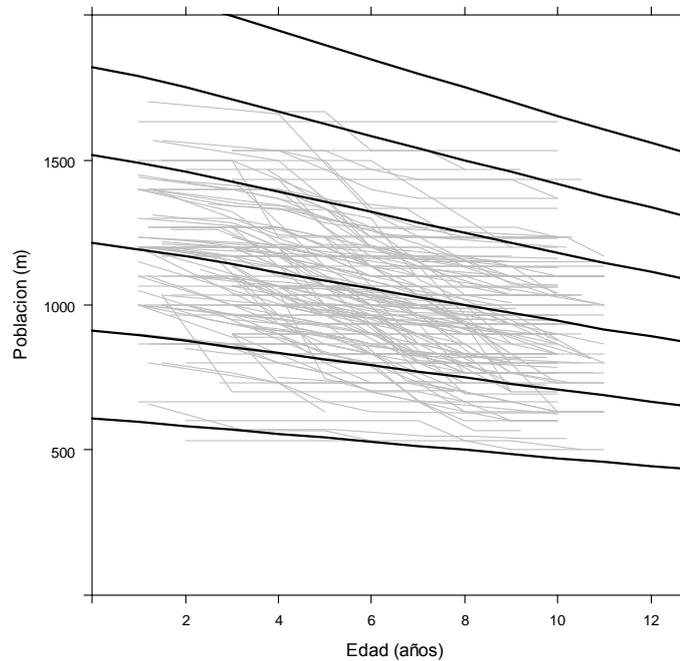


Figura 6. Curvas de evolución del número de árboles por hectárea (líneas en negro) y trayectorias reales (líneas en gris) para 750, 1000, 1250, 1500, 1750 árboles ha^{-1} a los 8 años (edad de referencia).

Methol (2006) ajustó la ecuación propuesta por Clutter y Jones (1980), para esta especie en Uruguay, por su parte Álvarez *et al.*, (2004) lograron buenos estadísticos de ajuste para el modelo de Pienaar trabajando con *P. radiata* en Galicia al igual que Diéguez *et al.*, (2005) al trabajar con *P. sylvestri*.

En la evaluación gráfica los residuos de las tres variables de estado, no mostraron patrones que indicaran heterocedasticidad.

3.2 AJUSTE DE SISTEMAS DE ECUACIONES

En este trabajo se empleó regresión *SUR* para ajustar simultáneamente el sistema de ecuaciones formado por el conjunto de modelos seleccionados anteriormente para cada una de las variables de estado, ya que se evidenció la presencia de correlación entre sus residuales (Cuadro 15). Para el ajuste simultáneo se usó el Proc Model del programa estadístico SAS (SAS, 2007).

Cuadro 15. Valores de correlación entre los residuales (¹)

	AMD	N	G
AMD	1	0,2951	0,2718
N	<2,2e-16	1	0,2605
G	<2,2e-16	6,66e-16	1

¹ Valores de *rho* por encima de la diagonal superior y de *p-value* por debajo de la diagonal.

En el Cuadro 16 se aprecian los estadísticos de calidad y precisión del ajuste *SUR*.

Cuadro 16. Calidad y precisión del ajuste *SUR*

Ecuación	Tipo	Variable	R^2 aj	<i>RECM</i>	<i>AIC</i>
Korf (43)	<i>GADA</i>	<i>AMD</i>	97,7	0,951	198,6
Levakovic (38)	<i>ADA</i>	<i>G</i>	97,1	1,213	646,7
Pienaar y Shiver (53)	-	<i>N</i>	92,6	63,52	8028,4

Para las tres variables en estudio (*AMD*, *G* y *N*), *SUR* generó estadísticos similares que *OLS* (Cuadros 9, 12 y 14 respectivamente), y no se registró variación de magnitud significativa en la precisión o en la calidad de la estimación. La ganancia en eficiencia es alta si los errores entre las diferentes ecuaciones están correlacionados (Judge *et al.*, 1988), en dichos casos podría incrementarse la precisión de las predicciones del modelo. La precisión alcanzada en el sistema concuerda con lo reportado por Galán *et al.*, (2008), quienes trabajando con *Cedrela odorata* L. y *Tabebuia donnell-smithii* R., lograron una precisión de 89,6 a 94,8 % con ajuste *SUR* para altura dominante y área basal respectivamente. Por su parte Amaro *et al.*, (1997) usaron datos de *Eucalyptus* para construir un modelo de rodal para altura media dominante y área basal empelando *SUR* para evitar la correlación entre los residuales de los modelos. Sullivan y Clutter (1972), empelando datos de índice de sitio, edades iniciales y finales así como valores de área basal, modelaron dicha interdependencia mediante un sistema de ecuaciones de crecimiento y producción empleando el método de *OLS*. Este enfoque produjo estimadores ineficientes ya que *OLS* no tiene en cuenta las interrelaciones entre las ecuaciones del sistema (Borders y Bailey, 1986). El empleo de métodos alternativos soluciona este inconveniente, Van Deusen (1988) sugiere que si el sistema de ecuaciones cae en el dominio de regresión *SUR*, las estimaciones de los parámetros estructurales será consistente y asintóticamente eficiente.

Gallant (1975), Murphy (1983) y Borders (1989) emplearon un sistema de ecuaciones no lineales para ajustar volumen actual y futuro, así como

densidades de rodal, estimando los parámetros mediante *SUR*. Por su parte, Borders y Bailey (1986) usaron *2SLS* y *3SLS* para resolver un sistema de cinco ecuaciones y comparar sus resultados con las estimaciones obtenidas para las mismas empelando *OLS*, mostrando que *3SLS* explica un poco menos de la variación observada que *OLS*, pero aumenta la ganancia en consistencia de los estimadores.

El Cuadro 17 muestra los valores estimados de los parámetros y sus correspondientes errores estándar para ambos métodos de ajuste (*OLS* y *SUR*).

Cuadro 17. Estimaciones de los parámetros, errores estándares (*EE*) y significancia (*valor-p*), para *OLS* y *SUR*

Ecuación	Parámetros	Método de estimación					
		<i>SUR</i>			<i>OLS</i>		
		Valor	<i>ES</i>	<i>valor-p</i>	Valor	<i>ES</i>	<i>valor-p</i>
Pienaar y Shiver (53)	b_1	-0,028	0,041	0,0002	-0,027	0,088	0,0016
	b_2	0,990	0,007	<,0001	0,991	0,117	<,0001
Levakovic (38)	b_1	22,665	1,844	<,0001	22,659	2,338	<,0001
	b_2	0,943	0,041	<,0001	0,944	0,053	<,0001
Korf (43)	b_1	-9,719	4,117	0,0185	-9,717	4,361	0,0264
	b_2	48,928	15,470	0,0016	48,754	16,321	0,0029
	b_3	0,759	0,024	<,0001	0,765	0,030	<,0001

3.3 ESTIMACIÓN DE VOLUMEN

Las ecuaciones de volumen ensayadas son modelos de predicción, así, el volumen estimado se predice con los valores proyectados de las variables de estado (AMD , G y N) para una edad determinada. Se evaluaron una serie de relaciones y transformaciones de las variables mencionadas (logarítmicas, exponenciales, inversos y varias combinaciones de las mismas), utilizando el método *Stepwise* del procedimiento para regresiones (Proc Reg) del SAS (SAS, 2007).

La regresión seleccionada fue:

$$V = \exp(a_0 + a_2 \log(AMD) + a_3 \log(G) + a_6 \log(G/N)) \quad (64)$$

donde, \log es logaritmo natural, V es el volumen total por hectárea; AMD es Altura media dominante; G , área basal; N , número de árboles en pie y $a_1, a_2 \dots a_6$, parámetros a estimar. Al igual que la ecuación ajustada por Methol (2006), para parcelas de *E. globulus*, la estimación del volumen se efectuó mediante una ecuación exponencial que incluye la transformación \log del área basal, el número de árboles y la altura media dominante a la edad de interés, como variables explicativas. Para detectar el desvío de la homocedasticidad de los residuales se realizaron graficas de residuales crudos y de Pearson frente a los valores predichos de los modelos seleccionados. Para corregir la heterocedasticidad se ajustó la ecuación [14], empleando una función potencia del área basal de la parcela. La función x_i y el parámetro α se estimaron mediante el Proc Reg (SAS, 2007), siguiendo la metodología descrita anteriormente (Harvey, 1976 en Parresol, 2001). La ponderación de las observaciones se realizó utilizando la siguiente ecuación:

$$resi.y = \frac{resid.y}{\sqrt{x_i^\alpha}} \quad (65)$$

disponible en SAS Proc Model del programa estadístico SAS (SAS, 2007), siendo y la variable dependiente del modelo.

3.4 VALIDACIÓN Y COMPARACIÓN

3.4.1 Cross validation

Una vez seleccionados y ajustados los modelos se procedió a su validación (*cross validation*), En el Cuadro 18 se presentan los valores del sesgo, la raíz del error cuadrático medio y la eficiencia ajustada del modelo para cada variable de estado.

Cuadro 18. Estadísticos de la *cross validation*

Modelo	Variable	EF_{aj}	$RECM$	\bar{E}
Korf (43)	AMD	0,98	0,86	-0,007
Levakovic (38)	G	0,96	1,11	-0,043
Pienaar y Shiver (53)	N	0,94	58,31	-1,045

Los valores observados no difieren en gran magnitud de los obtenidos en el ajuste de cada modelo, como se prestaron en su capítulo correspondiente. Siendo de muy buen calidad tanto en ajuste como en precisión.

3.4.2 Comparación

Para evaluar la capacidad predictiva del sistema de ecuaciones ajustado (de aquí en adelante *AP. globulus 2016*), y comparar sus resultados con los obtenidos utilizando la herramienta SAG *globulus* (Methol, 2006), disponible en <http://www.iniaforestaluy.com>, se procedió a comparar el crecimiento de parcelas reales con proyecciones realizadas en ambos sistemas. Para esto se utilizaron 10 parcelas de prueba pertenecientes a INIA que no formaron parte de los sets iniciales. En el Cuadro 19 se muestran los

estadísticos descriptivos de las parcelas para las edades de mediciones (3, 5,7 y 9 años).

Cuadro 19. Estadísticos de las parcelas utilizadas para la comparación.

Variable	Media	Mínimo	Máximo	Desviación estándar
<i>Edad</i> (años)	6	3	9	2,4
<i>AMD</i> (m)	19,2	9,1	26,7	5,3
<i>N</i> (árb ha ⁻¹)	974	876	1100	92,7
<i>Dg</i> (cm)	16,3	7,9	21	3,7
<i>G</i> (m ² ha ⁻¹)	19,7	6,9	28,91	7,1
<i>V</i> (m ³ ha ⁻¹)	127,5	13,9	244,7	67,9

Edad: Edad de medición; *AMD*: altura media dominante; *N*: densidad del rodal; *Dg*: diámetro medio cuadrático; *G*: área basal total; *V*: volumen total estimados

3.4.2 .1 Trayectorias reales, curvas de índice de sitio y altura media dominante

El índice de sitio es definido como la *AMD* a una edad de referencia determinada (Clutter *et al.*, 1983, Torres y Magaña 2001), siendo 8 años en el caso de *E. globulus* con destino celulosa (Methol, 2006). La *AMD* posee buena correlación con la producción volumétrica (Clutter *et al.*, 1983), razón por la cual el potencial de crecimiento o calidad de sitio se suele expresar mediante el *IS*. La calidad de sitio se refiere a la capacidad de un lugar determinado para sustentar el crecimiento de los árboles siendo un indicador de la productividad forestal (Van Laar y Akca, 2007). La edad de referencia permite obtener diferentes curvas de *IS*, pudiendo establecerse como la edad a turno final (Clutter *et al.*, 1983) o el máximo de la curva de incremento medio en altura (Zepeda y Rivero, 1984). Estas curvas funcionan como herramienta gráfica en la evaluación de sitios potenciales y especies a utilizar.

Se procedió a graficar las curvas de *IS* utilizando los modelos de transición de *AMD*: modelo polimórfico en *ADA* de Schumacher (1939) y Korf (1939) modificado por Cieszewski (2004) en *GADA* para *SAG globulus*

(Methol, 2006) y *AP. globulus 2016* respectivamente. Las diferentes curvas representan distintas calidades de sitio, las curvas superiores corresponden a sitios de mayor productividad que las inferiores. El índice de sitio es un atributo fijo del rodal no presentando variaciones a lo largo del tiempo (Huang, 1997), así, la *AMD* inicial de un rodal ubicado en un sitio de alta calidad se desplazará en las proximidades de dicha curva a medida que avanza en edad.

| El la Figura 7 y 8 se observan las trayectorias reales de las parcelas para *AMD* y las curvas de Índice de Sitio desarrolladas por ambos sistemas de ecuaciones, *AP. globulus 2016* y *SAG globulus* (Methol, 2006) respectivamente.

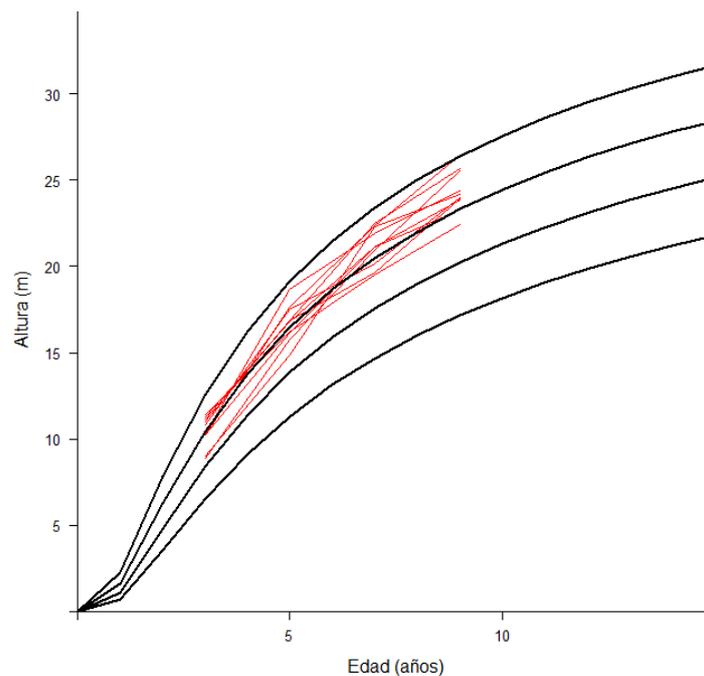


Figura 7. *AP. globulus 2016*. En negro: curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia); en rojo: trayectorias reales de *AMD* para las parcelas de comparación.

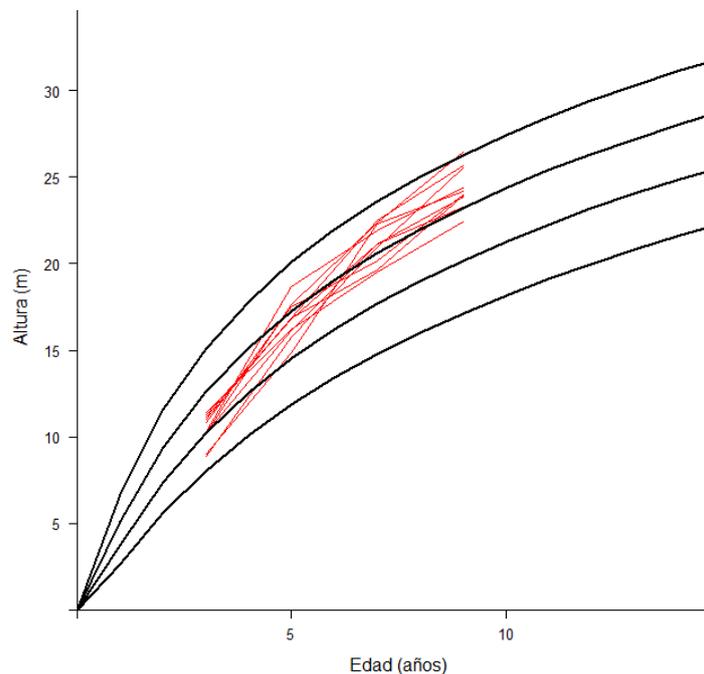


Figura 8. *SAG globulus* (Methol, 2006). En negro: curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia); en rojo: trayectorias reales de *AMD* para las parcelas de comparación.

Al igual que en el caso de las parcelas de ajuste, las curvas desarrolladas por el modelo ajustado en el presente trabajo reflejan de manera más fiel el comportamiento real de las mismas. En el caso de *AP. globulus 2016* la mayoría de las parcelas se encuentran entre las curvas de mejor calidad durante toda su evolución. Para *SAG globulus* (Methol, 2006) hay un salto desde curvas de menor calidad a curvas de mayor calidad, lo cual no corresponde con un comportamiento lógico. No es de esperar que una parcela establecida en un sitio pobre cambie a uno de mayor producción a medida que avanza en edad, puesto que el índice de sitio es un atributo fijo, (Huang, 1997) si bien hay que tener en cuenta las oscilaciones debidas al efecto año (clima) y a la base de ajuste de cada sistema de ecuaciones.

3.4.2.2 Trayectorias y evolución del área basal

Al trabajar con Área Basal, se observa que si bien ambos sistemas de ecuaciones cumplen las condiciones de *path invariance* y *base-age invariance* (Bailey y Clutter 1974, Cieszewski y Bailey 2000), las curvas obtenidas para diferentes valores de área basal a la edad de referencia presentan comportamientos muy diferentes entre los sistemas de ecuaciones comparados. *AP. globulus 2016* desarrolla curvas anamórficas de acuerdo al modelo ajustado (Levakovic), mientras *SAG globulus* (Methol, 2006) presenta curvas con trayectorias sin comportamiento lógico inicial que obedecen a la estructura interna del modelo. En *SAG globulus* (Methol, 2006) el modelo utilizado es Draper y Smith (1981), con base en el modelo Monomolecular en versión polimórfica y considera el número de árboles iniciales e *IS* para expandir uno de sus parámetros. Esto último dificulta graficar trayectorias generales que cumplan con la respuesta lógica establecida para las ecuaciones de transición (Bailey y Clutter 1974, Cieszewski y Bailey 2000). En la Figura 9 y 10 se prestan las curvas de crecimiento en área basal y el comportamiento de las parcelas en el tiempo.

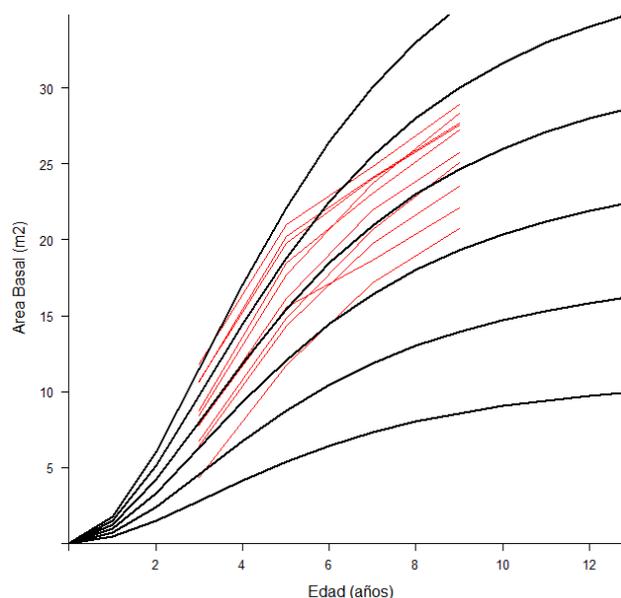


Figura 9. *AP. globulus 2016*. En negro: curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m^2ha^{-1} a la edad de referencia (8 años); en rojo: trayectorias de los valores observados en el tiempo.

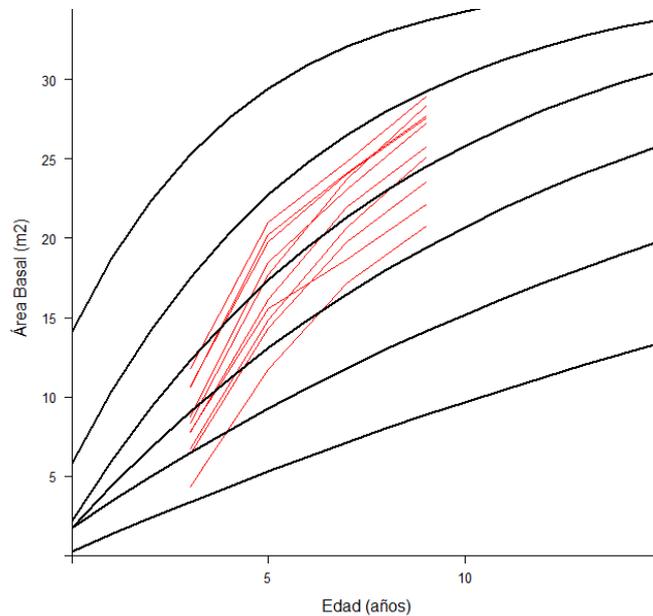


Figura 10. *SAG globulus* (2006). En negro: curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m²ha⁻¹ a la edad de referencia (8 años); en rojo: trayectorias de los valores observados en el tiempo.

3.4.2.3 Número de árboles

La evolución del número de árboles vivos por hectárea es uno de los aspectos más difíciles de modelizar, las curvas para la edad de referencia proyectadas por *SAG globulus* (Methol, 2006) corresponden a la ecuación propuesta por Clutter y Jones (1980) y las de *AP. globulus 2016* al modelo de Pienaar y Shiver (1981) mediante el empleo de variables *dummy*. La Figura 11 presenta las trayectorias reales de las parcelas de comparación y las curvas desarrolladas por ambos sistemas de ecuaciones.

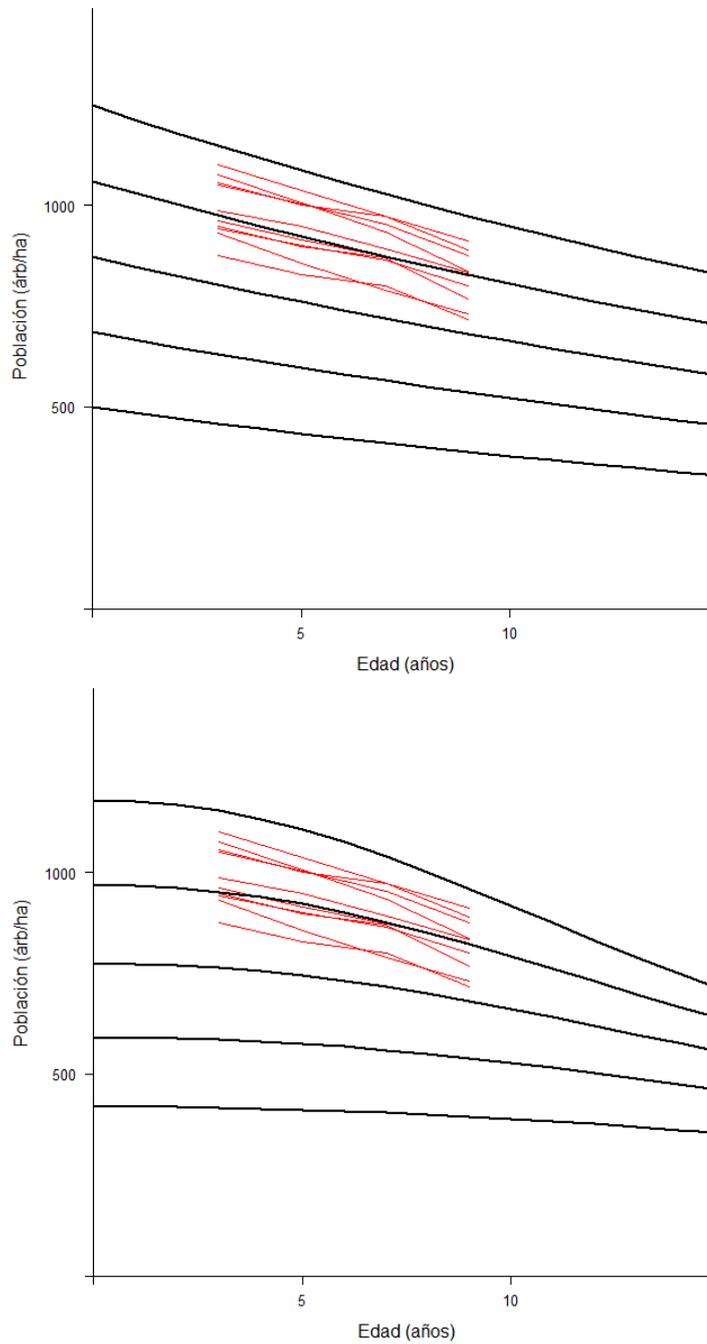


Figura 11. En negro: curvas de evolución del número de árboles para 400, 550, 700, 850 y 1000 árboles por hectárea para la edad de referencia; en rojo: trayectorias de los valores observados en el tiempo. Superior: *AP. globulus* 2016. Inferior: *SAG globulus* (Methol, 2006).

En ambos sistemas de ecuaciones las trayectorias reales se ubican entre las curvas correspondientes a 750 y 1000 árboles ha^{-1} , lo cual indica

que ninguna de las parcelas llega a los 8 años con menos de 750 árboles ha⁻¹ ni con más de 1000 árboles ha⁻¹. Las curvas desarrolladas por *SAG globulus* (Methol, 2006) muestran una caída a partir de la edad de referencia, esto se refleja en una marcada mortalidad luego de esa edad, mientras que las curvas de *AP. globulus 2016* presentan una caída más desacelerada.

Una ventaja del modelo de mortalidad desarrollado es su posibilidad de uso para plantaciones de cualquier densidad inicial y edad final, lo cual lo vuelve más flexible en sus aplicaciones.

En relación a la evolución de las curvas de *SAG globulus* (Methol, 2006) en el tiempo se observa que tienden a un valor común. En términos prácticos indica que fuese cual fuese la densidad de plantación inicial las parcelas tienden a la misma población final. Por su parte *AP. globulus 2016* desarrolla curvas que mantienen sus proporciones a lo largo de los años, presentando una tendencia a estabilizar el número de árboles lo cual posee un significado biológico más aceptable.

Estos ejemplos demuestran que el *AP. globulus 2016*, mediante las metodologías *dummy* y los nuevos modelos ajustados, permite levantar algunas de las limitantes del SAG INIA.

3.4.2.4 Trayectorias reales individuales de *AMD* por parcela y curvas de índice de sitio

El *IS* es considerado un indicador de la calidad o productividad del sitio en su totalidad, sin embargo, varios rodales ubicados en el mismo sitio podrán alcanzar producciones distintas, según la calidad del material genético y de la silvicultura utilizada (Methol, 2006). Para evidenciar el comportamiento individual de cada parcela y aislar los componentes externos, se procedió a simular el crecimiento de cada parcela con ambos *SAG* y se graficó junto con la evolución real. En el caso de SAG INIA, el cual utiliza para proyectar el área basal futura el número de árboles iniciales y el *IS* de cada parcela, las comparaciones gráficas individuales resultan más claras que las globales.

En la Figura 12 se presentan la evolución de la AMD en las parcelas individuales y los resultados de su proyección con ambos SAG.

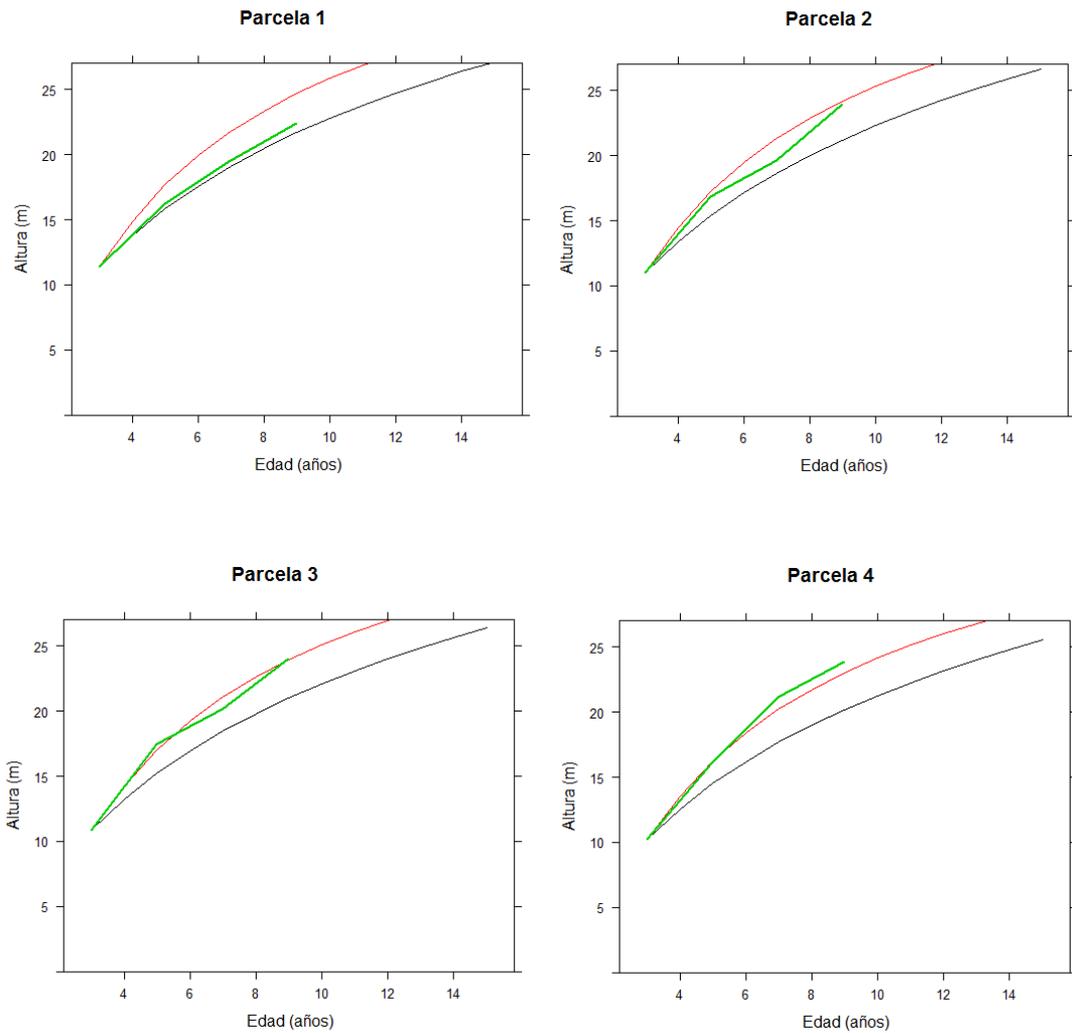


Figura 12. Altura media dominante real y simulada. En verde: trayectoria reales, en rojo trayectoria simulada con AP. globulus 2016, en gris: trayectoria simulada con SAG globulus (Methol, 2006).

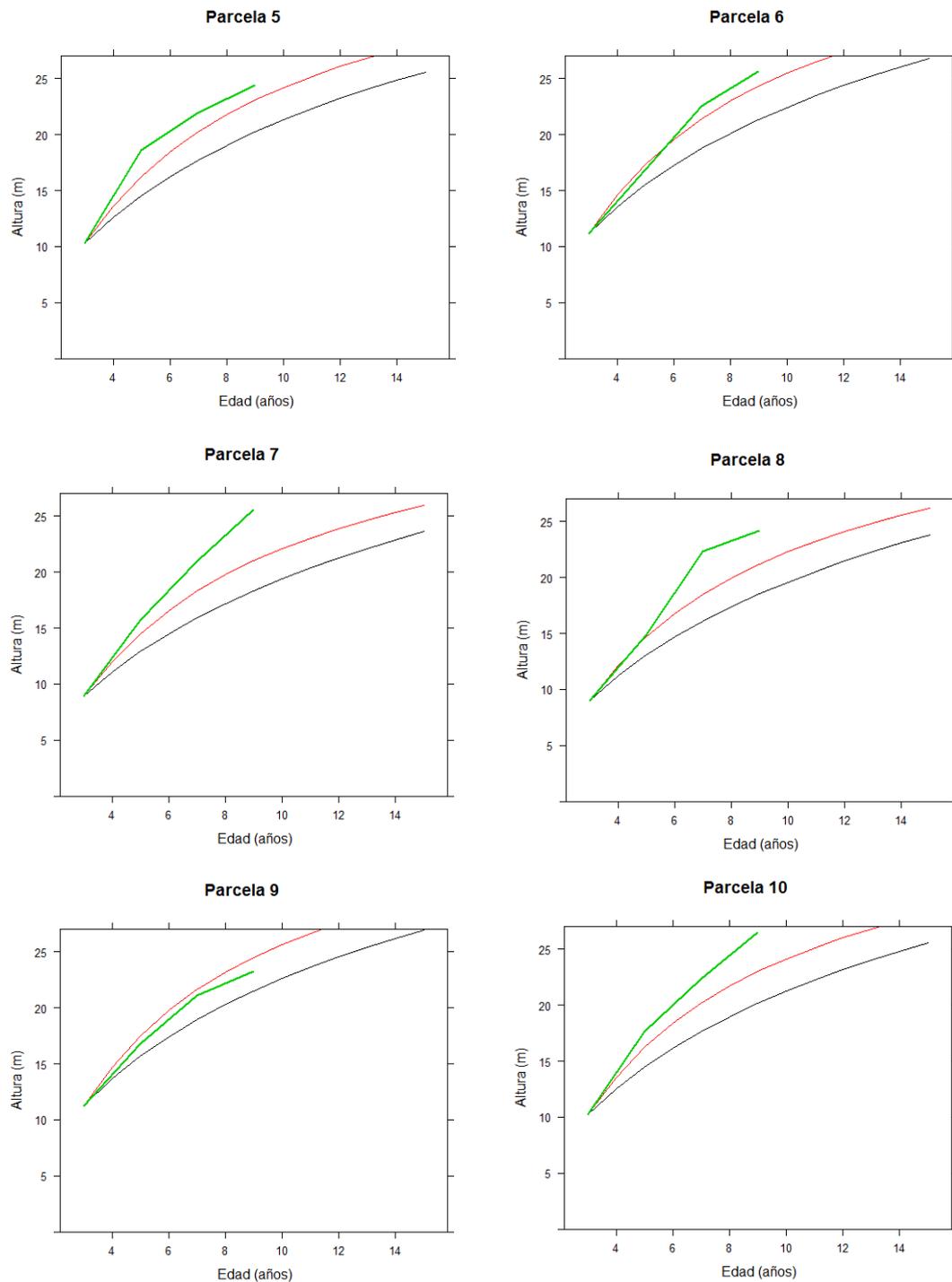


Figura 12. Continuación... Altura media dominante real y simulada. En verde: trayectoria reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus (Methol, 2006)*.

En todos los ejemplos se parte de la misma situación inicial para las proyecciones con ambos SAG hasta los 15 años, en el caso de los valores reales solo se tiene datos que alcanzan los 9 años. La similitud entre proyecciones de distintas parcelas, parcelas 4 y 5 por ejemplo, obedecen a que ambas poseen la misma edad inicial y la misma AMD

Las parcelas 1, 2 y 7 se ubican en una situación intermedia entre ambas proyecciones, en términos prácticos, los resultados obtenidos utilizando *AP. globulus 2016* sobrestimarían los incrementos en AMD y los de *SAG globulus (2006)* los subestimarían. Las parcelas 3, 4, 6, 9 y 10 son bien representadas por los modelos ajustados en este trabajo y claramente subestimados por el modelo anterior.

Las parcelas 5 y 8 presentan incrementos superiores a los obtenidos en ambos sistemas de ecuaciones, sin embargo la subestimación de *AP. globulus 2016* es menor.

Para la mayoría de los casos las proyecciones realizadas por el *AP. globulus 2016* se asemejan más al comportamiento real de las parcelas.

3.4.2.5 Área basal real y simulaciones

La evolución del área basal en cada parcela y las obtenidas por simulación se pueden observar en la Figura 13.

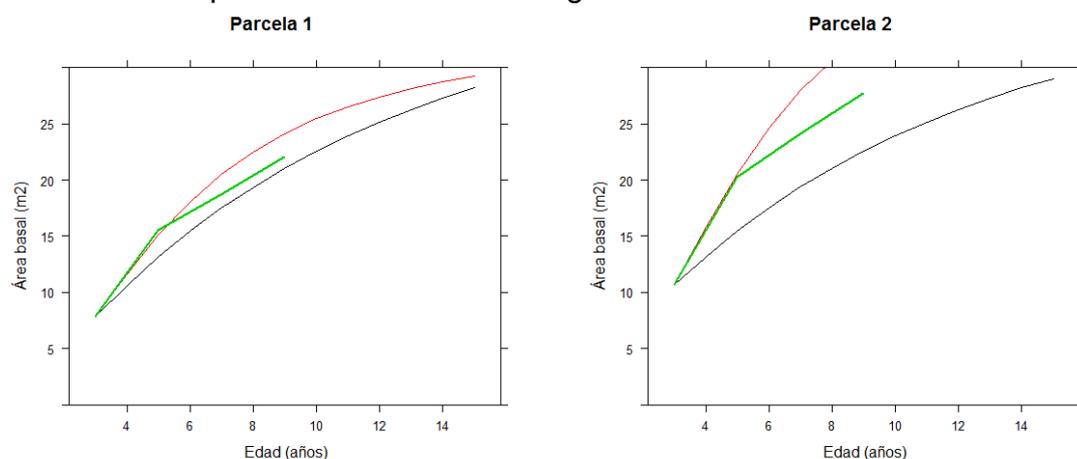


Figura 13. Área basal real y simulada. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus (Methol, 2006)*.

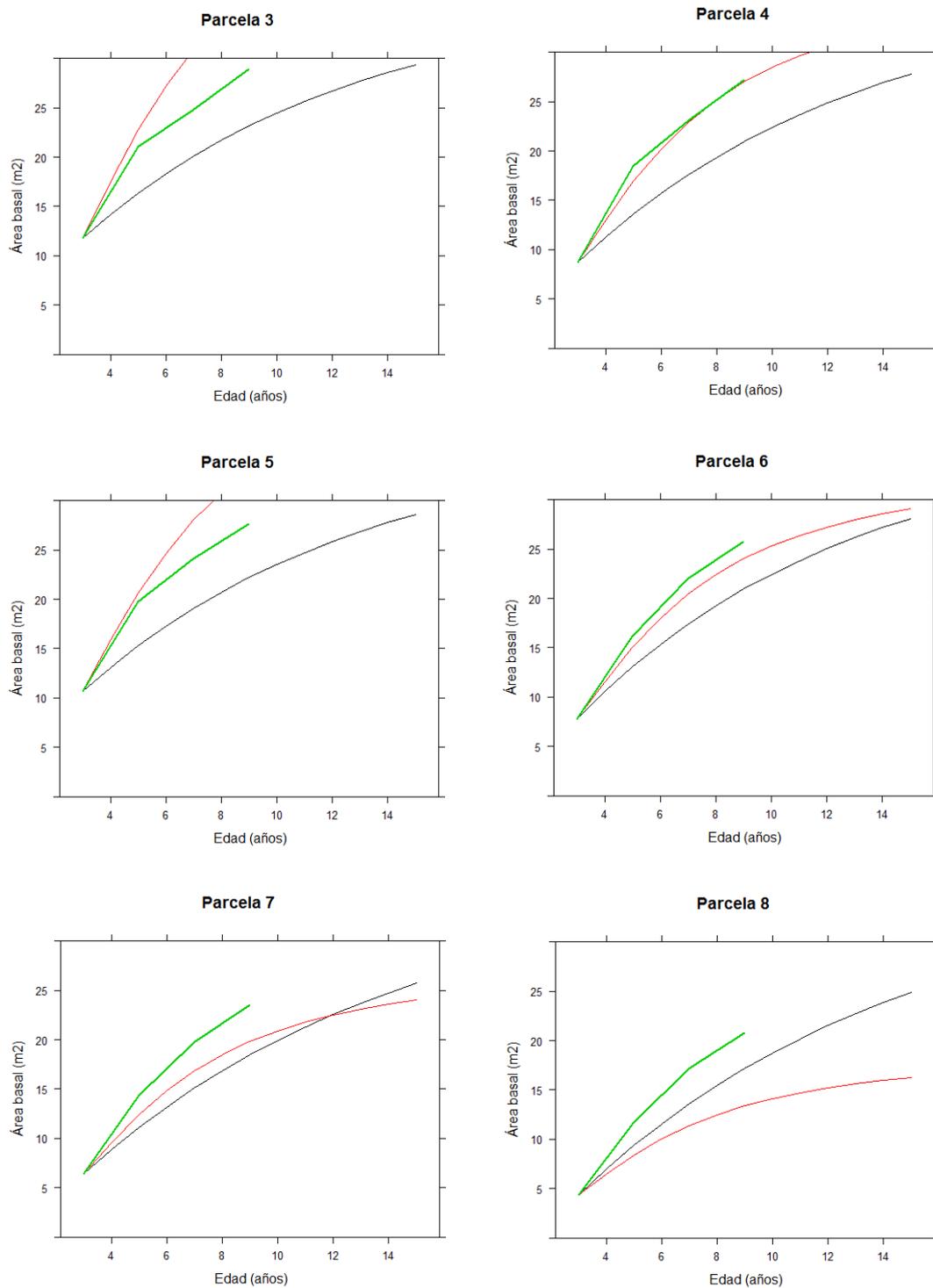


Figura 13. Continuación... Área basal real y simulada. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP.globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus* (Methol, 2006).

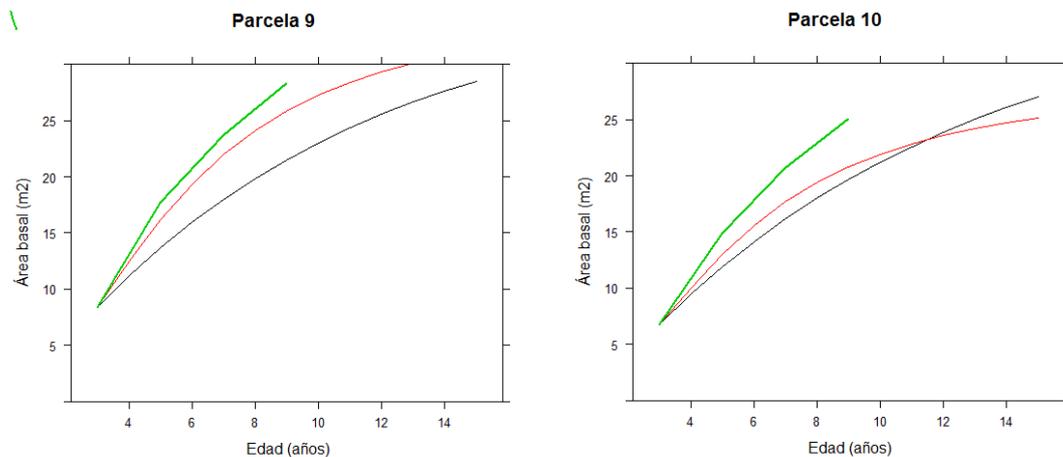


Figura 13 Continuación... Área basal real y simulada. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus* (Methol, 2006).

Los resultados obtenidos en la simulación de *AP. globulus 2016* para la evolución del área basal de las parcelas 1, 2, 3 y 5 coinciden con los valores reales hasta aproximadamente los 5 años. A partir de dicha edad los valores reales pasan a una situación intermedia entre las proyecciones de los SAG, es decir, los valores simulados por *AP. globulus 2016* sobrestimarían en los años finales y los de *SAG globulus (2006)* subestimarían en toda la proyección. Ello tiene un impacto directo en los resultados de volumen por hectárea ya que el área basal se relaciona directamente con esta variable.

Las parcelas 4 y 7 están bien representadas por *AP. globulus 2016* y resultan subestimadas en sus valores por SAG INIA.

Por su parte las parcelas 6, 9 y 10 presentan incrementos superiores a los proyectados por ambos SAG. Sin embargo al igual que en el caso de *AMD*, las proyecciones obtenidas por *AP. globulus 2016* resultan en una menor subestimación que las obtenidas por SAG INIA.

3.4.2.6 Evolución real y simulada del número de árboles por hectárea

En la Figura 14 se aprecia la evolución del número de árboles en cada parcela y los resultados de las simulaciones en ambos SAG

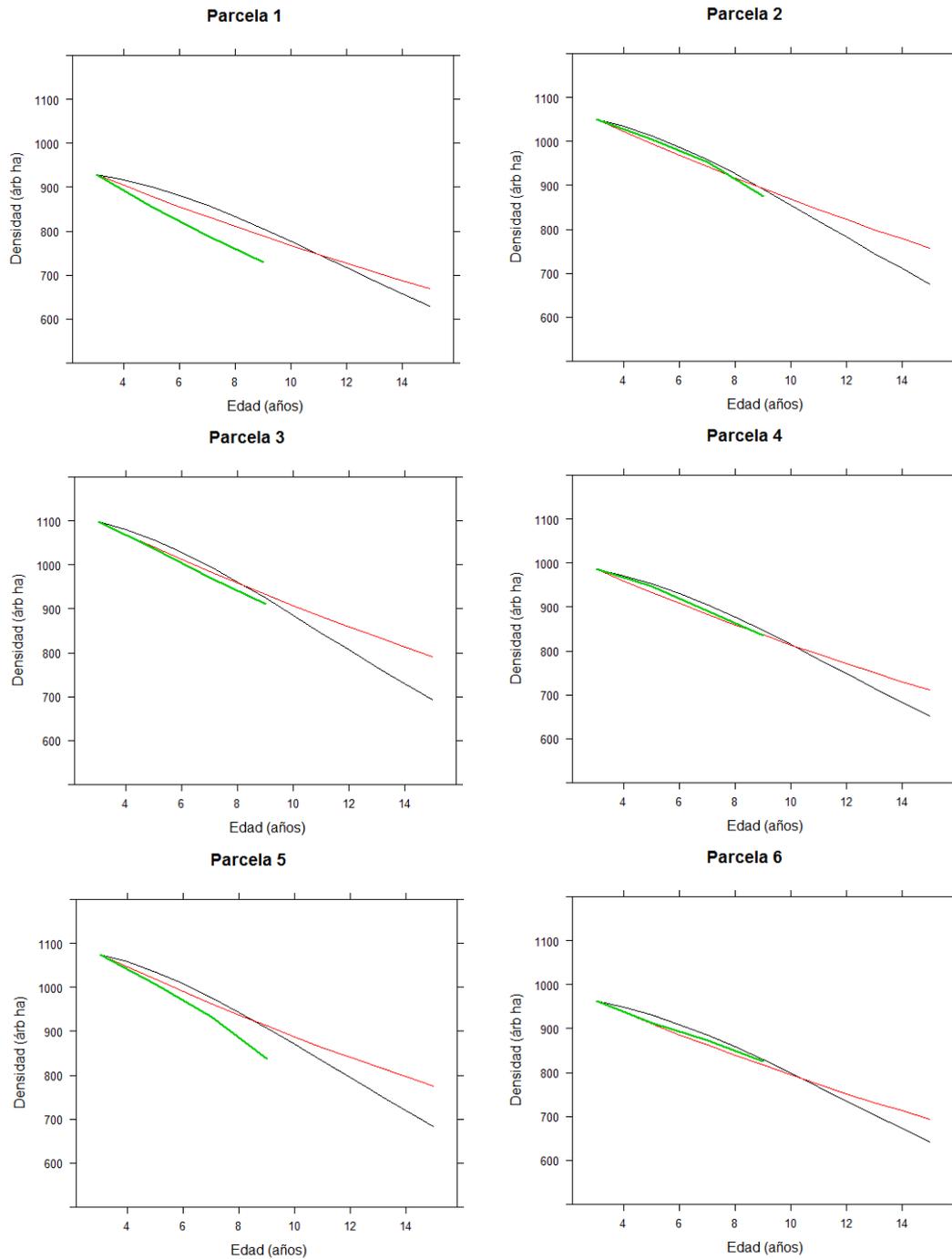


Figura 14. Evolución del número de árboles por hectárea reales y simulados. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus* 2016, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus* (Methol, 2006).

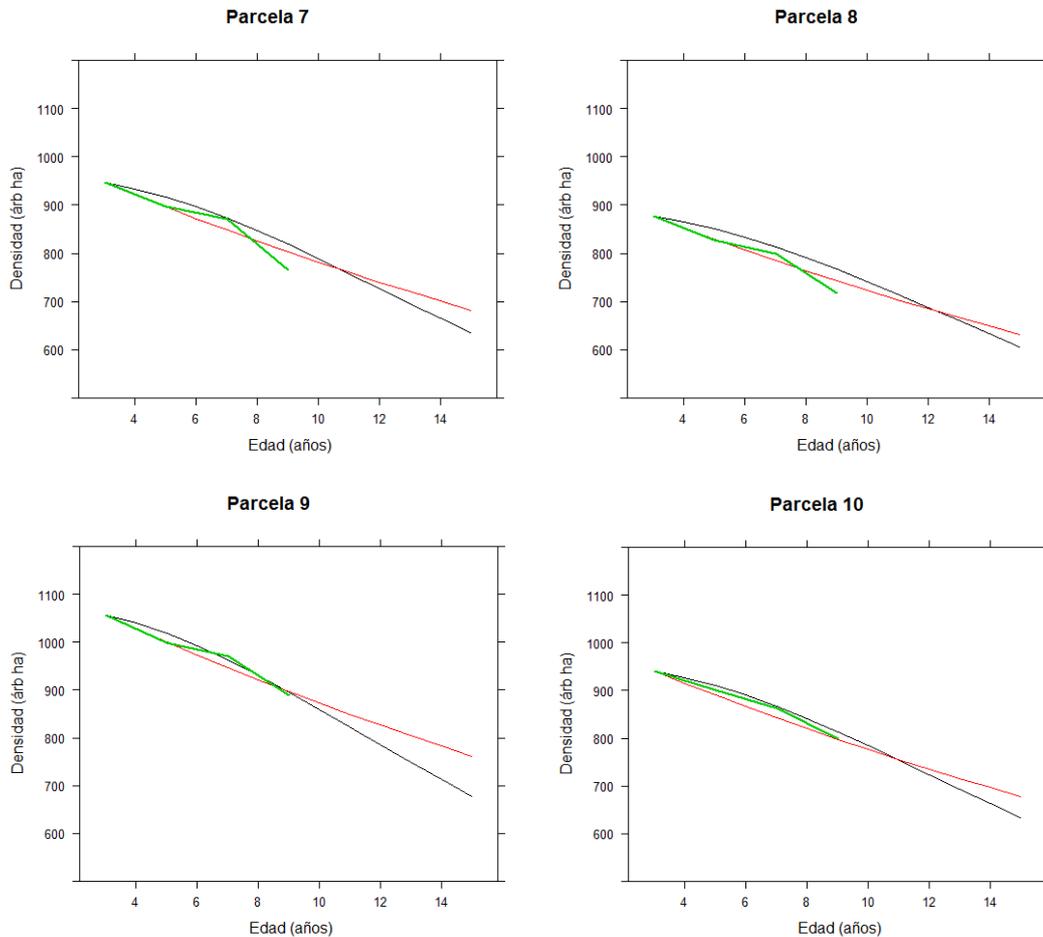


Figura 14. Continuación... Evolución del número de árboles por hectárea reales y simulados. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus (Methol, 2006)*.

Los valores reales de las parcelas 1, 3 y 5 están por debajo de las proyecciones de *AP. globulus 2016*, el resto se ubican en una situación intermedia con cierta tendencia clara hacia los resultados de *AP. globulus 2016*.

Las gráficas individuales corroboran lo observado en las gráficas globales, *SAG globulus (2006)* presenta una rápida caída del número de árboles por hectárea luego de los 8 años, siendo superiores los valores proyectados por *AP. globulus 2016*. En su uso práctico, *SAG globulus (2006)* sobrestimaría el número de árboles por hectárea antes de los 9 años (edad máxima de la parcelas) mientras *AP. globulus 2016* se aproximaría más a los

valores reales. En términos de mortalidad se deduce de las gráficas que *SAG globulus (2006)* subestima la mortalidad durante los primeros años y proyecta un mayor número de árboles por hectárea en comparación con *AP. globulus 2016* hasta aproximadamente los 9 años, posteriormente presenta un rápido aumento de mortalidad mientras que *AP. globulus 2016* es más desacelerado en el tiempo.

3.4.2.7 Volumen final por hectárea

Con el fin de obtener una medida de la producción de las parcelas, en el Cuadro 20 se presentan los valores de volumen por hectárea obtenidos en ambas simulaciones. Debe tenerse presente que en ambos sistemas de ecuaciones los modelos empleados son ecuaciones de estimación (y no de proyección), los cuales tiene en cuenta la magnitud de las variables de estado en un momento dado (en este caso a los 3, 8 y 15 años). Si las variables de estado han sido estimadas de manera poca precisa, el volumen presentará una sumatoria de estas imprecisiones ya que no es una variable proyectada desde su propio valor inicial (como si sucede con el resto de las variables).

Cuadro 20. Volumen ($m^3 ha^{-1}$) proyectado para las parcelas de comparación en tres edades.

Edad	PARCELAS										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
INIA	3	31,0	42,5	45,0	32,9	40,2	31,4	30,4	14,0	33,6	25,0
	8	126,1	137,5	141,4	120,1	130,1	123,2	137,2	84,0	127,3	109,0
	10	157,9	168,9	172,4	150,2	160,3	154,5	171,1	110,0	158,6	138,6
AP.2016	3	31,0	42,5	45,0	32,9	40,2	31,4	30,4	14,0	33,6	25,0
	8	173,6	209,1	221,1	172,3	197,7	168,3	171,6	93,3	176,0	141,9
	10	216,6	261,4	276,5	216,1	248,0	210,3	212,2	117,8	219,7	178,0

A los 3 años los valores utilizados por ambos sistemas de ecuaciones son los mismos ya que son los datos reales de partida de la simulación,

mientras que para el resto de las edades cada SAG arroja sus valores proyectados. Así, los volúmenes estimados, en este caso a los 8 y 10 años, son mayores en *AP. globulus 2016* que en SAG INIA. Esto es esperable, ya que como se vio anteriormente el *AP. globulus 2016* proyecta mayores valores de *AMD* y *AB* que el *SAG globulus (2006)* y, a partir de los 9 o 10 años, proyecta menores mortalidades.

4. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo dinámico de crecimiento y producción para plantaciones de *Eucalyptus globulus* con destino pasta de celulosa. La base de datos utilizada comprendía parcelas de entre 1 y 11 años, sobrepasando la edad de turno (8 años).

Se seleccionó el modelo propuesto por Korf modificado por Cieszewski (2004) para la altura media dominante en su versión *GADA*, que produce curvas polimórficas de asíntotas variables, con un R^2_{aj} de 97,8% y *RECM* de 0,953 m. Para área basal el modelo seleccionado fue el de Levakovic en su versión *ADA* anamórfica, con un R^2_{aj} de 97,4% y *RECM* de 1,217 m², mientras que el modelo de Pieneer y Shiver (1981) fue el seleccionado para la evolución de la población, con un R^2_{aj} de 92,6% y *RECM* de 63,69 árboles.

El ajuste simultáneo (*SUR*) realizado debido la presencia de correlación entre los residuales de las ecuaciones seleccionadas, no reveló cambios en la significancia de los parámetros ajustados.

Las ecuaciones ajustadas usando métodos invariantes respecto a la edad de referencia (*ADA*, *GADA* y variables *dummy*) proporcionaron curvas con mayor flexibilidad y representan con mayor fidelidad las trayectorias reales, levantando algunas de las limitantes de los modelos utilizados anteriormente.

El empleo de la función de estimación de volumen permite la utilización de los modelos seleccionados en sistemas de apoyo a la gestión.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Alder D. 1980. Forest volume estimation and yield prediction. FAO Forestry Paper 22:2, 194.
- Álvarez JG, Castedo F, Ruiz AD, López CA, Gadow KV. 2004. A two-step mortality model for even-aged stands of *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwestern Spain). *Annals of Forest Science* 61, 439–448.
- Amaro A, Reed DD, Themido I, Tomé M. 1997. Stand growth modeling for first rotation *Eucalyptus globulus* Labill in Portugal. En: Amaro A, Tomé M. (Eds.), *Empirical and process based models for forest tree and stand growth simulation*. Oeiras, Lisboa (Portugal) Ediciones Salamandra. 99-110.
- Amateis RL, McDill ME. 1989. Developing growth and yield models using dimensional analysis. *Forest Science*. 35:329-337.
- Bailey RL, Cieszewski CJ. 2000. Development of a well-behaved site-index equation: jack pine in north-central Ontario: Comment. *Canadian Journal of Forest Research*. 30:1667-1668.
- Bailey RL, Borders BE, Ware KD, Jones EP. 1985. A compatible model relating slash pine plantation survival to density, age, site index, and type and intensity of thinning. *Forest Science*. 31(1):180-189.
- Bailey RL, Clutter JL. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*. 20(2): 155-159.

- Balboa MA. 2005. Biomasa arbórea y estabilidad nutricional de los sistemas forestales de *Pinus pinaster* ait., *Eucalyptus globulus* labill. y *Quercus robur* L. en Galicia. Tesis Doctoral. Santiago de Compostela, España. Universidad Santiago de Compostela. 256 p.
- Balmelli G. 2014. Impacto de *Mycosphaerella* en Uruguay y variabilidad genética para resistencia a la enfermedad en *Eucalyptus globulus* y *Eucalyptus maidenii*. Tesis de Doctorado. Valladolid, España. Universidad de Valladolid. 136 p.
- Barrio M, Castedo-Dorado F, Diéguez-Aranda U, Álvarez JG, Parresol BR, Rodríguez R. 2006. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Canadian Journal of Forest Research*. 36(6): 1461–1474.
- Borders BE. 1989. Systems of equations in forest stands modeling. *Forest Science*. 35(2):548-556.
- Borders BE, Souter RA, Bailey RL, Ware KD. 1987. Percentile- based distributions characterize forest stand tables. *Forest Science*. 33:570–576.
- Borders BE, Bailey RL. 1986. A compatible system of growth and yield equations for slash pine fitted with restricted three stage least squares. *Forest Science* 32:185–201.
- Brussa C. 1994. *Eucalyptus*; especies de cultivo más frecuente en Uruguay y regiones de clima templado. Montevideo, Hemisferio Sur. 314 p.

- Buckman RE. 1962. Growth and yield of red pine in Minnesota. Technical Bulletin. Washington, United States Department Agriculture. 1272: 1-50.
- Burkhart HE. 1986. Fitting analytically related models to forestry data. En Proceedings of the XIII International Biometric Conference. Seattle, Wash
- Burnham KP, Anderson DR. 2002. Model selection and inference: a practical information theoretic approach. New York. Springer-Verlag.353 p.
- Cailliez F. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. FAO- Roma. Volumen 1. Estimación del volumen. 92 pp.
- Cao QV. 1993. Estimating coefficients of base-age-invariant site index equations. Canadian Journal of Forest Research. 23: 2343–2347.
- Castedo F, Diéguez U, Álvarez JG. 2007a. A growth model for *Pinus radiata* D. Don stands in north-western Spain. Annals of Forest Science. 64: 453-465.
- Castedo F, Diéguez U, Barrio M, Álvarez JG. 2007b. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in Northwestern Spain using the GADA. Annals of Forest Science. 64:609-619.
- Castedo F, Álvarez JG. 2000. Construcción de una tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Pinus radiata* D. Don en Galicia basada en una función de perfil del tronco. Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales. 9: 253-268.

- Cieszewski CJ. 2004. GADA derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richardss, Weibull, and other exponential functions. Athens, Georgia. University of Georgia PMRC- Technical Report 2004-5. 16 p.
- Cieszewski CJ. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3=(axm)/(c + xm-1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *Forest Science*. 49: 539–554.
- Cieszewski CJ. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Science*. 48: 7-23
- Cieszewski CJ, Bailey RL. 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*. 46:116-126.
- Cieszewski CJ, Harrison M, Martin SW. 2000. Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. Athens, Georgia. University of Georgia PMRC-Technical Report 2000-7. 16p
- Clutter JL, Forston JC, Pienaar LV, Brister GH, Bailey RL. 1983. *Timber management: a quantitative approach*. New York, Wiley. 333 p.
- Clutter JL, Jones EP. 1980. Prediction of growth after thinning in old-field slash pine plantations. USDA Forest Service Research. Paper SE-217
- Clutter JL. 1963. Compatible growth and yield models for Loblolly pine. *Forest Science*. 9 (3):354–371.

- Cordero R, Velilla E, Aedo D. 2004. A Nonlinear Growth and Yield System of Equations for *Eucalyptusglobulus* Using Multistage Methods. Lugo, Spain . En: Proceedings Symposium The Economics and Management of High Productivity Plantations..
- Costas R, Mac Donagh P, Weber E, Figueredo S, Gómez C, Irschick P. 2006. Modelos predictivos de la producción de *Pinus taeda* empleando variables vinculadas con las podas. *Bosque*. 27: 98-107.
- Cunia T. 1986. Construction of tree biomass tables by linear regression techniques. New York .En: Estimating tree biomass regressions and their error. Proceedings of the Workshop on tree biomass regression functions and their contribution to the error of forest inventory estimates. Syracuse. 27-37 p.
- Davis LS, Johnson KN, Bettinger PS, Horwar TE. 2001. Forest Management: to sustain ecological, economic and social values. New York .Series in Forest Resources.
- DIEA (Dirección de Estadísticas Agropecuarias) 2014. Montevideo, Uruguay. En: Anuario Estadístico Agropecuario. MGAP (Ministerio de Ganadería, Agricultura y Pesca) 270p.
- Diéguez U, Rojo A, Castedo F, Álvarez JG, Barrio M, Crecente F, González, JM, Pérez C, Rodríguez R, López CA, Balboa MA, Gorgoso JJ, Sánchez F. 2009. Herramientas selvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Consellería do Medio Rural, Xunta de Galicia. 268 p.

- Diéguez U, Castedo F, Álvarez JG, Rodríguez, R. 2005. Modelling mortality of Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) plantations in the northwest of Spain. *European Journal of Forest Research*. 124 (2):143–153.
- Doldán J. 2007. Evaluación de parámetros de calidad de *Eucalyptus globulus* y *Eucalyptus maidenii* de plantaciones uruguayas para pulpa de celulosa. Nota técnica (LATU), 8: 8p.
- Draper NR, Smith H. 1981. *Applied regression analysis*. John Wiley y Sons, New York, 709 pp.
- Eerikäinen K. 2002. A site dependent simultaneous growth projection model for *Pinus kesiya* plantations in Zambia and Zimbabwe. *Forest Science*. 48:518-529.
- FAO (Food And agricultura Organization). 1981. El Eucalyptus en la repoblación forestal. (En línea). Roma. pp. 1 -50. Consultado oct. 2015. Disponible en <http://www.fao.org/docrep/004/AC459S/AC459S00.htm>
- Furnival GM. 1961. An index for comparing equations used in constructing volume tables. *Forest Science*. 7: 337-341.
- Furnival, GM, Wilson R W Jr. 1971. Systems of equations for predicting forest growth and yield. *Statistical Ecology*. 3:43-55.
- Gadow KV, Real P, Álvarez González JG. 2001. Modelización del crecimiento y la evolución de los bosques. Viena. IUFRO World Series Vol. 12:242 p.
- Gadow, K. V., S. Sánchez y O. Aguirre C. 2004. Manejo forestal con bases científicas. *Madera y Bosques*. 10(2):3-16.

- Galán R, de los Santos HM, Valdez JI. 2008. Crecimiento y rendimiento maderable de *Cedrela odorata* L. y *Tabebuia donnell-smithii* Rose en San José Chacalapa, Pochutla, Oaxaca. *Madera y Bosques* 14(2):65-82.
- Gallant AR. 1975. Seemingly unrelated nonlinear regressions. *Journal Econometrics*. 3: 35–50.
- García O, Ruiz F. 2003. A growth model for eucalypt in Galicia, Spain. *Forest Ecology and Management*. 173: 49-62.
- García O. 1994. The state-space approach in growth modelling. *Canadian Journal of Forest Research* 24(9):1894-1903.
- García O. 1988. Growth modelling – a (re)view. *New Zealand Journal of Forestry*. 33(3):14-17.
- Goelz JCG, Burk TE. 1996. Measurement error causes bias in site index equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 26:1586-1593.
- Goelz JCG, Burk TE. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Canadian Journal of Forest Research*. 22:776-784.
- Golfari, L. 1985. Distribución regional y condiciones ecológicas de los eucaliptos cultivados en Argentina; problemas inherentes. Centro de Investigaciones y Experiencias Forestales. *Publicación Técnica* 1. 19 p.
- Greene WH. 2000. *Econometric Analysis*. Prentice Hall. New York.

- Gregoire TG, Schabenberger O. 1996. A non-linear mixed-effects model to predict cumulative bole volume of standing trees. *Journal of Applied Statistics*. 23: 257-271.
- Gujarati D. 1996. *Basic Econometrics*. McGraw-Hill, New York.
- Hausman, J.A. 1975. An instrumental variable approach to full- information estimators for linear and certain nonlinear econometric models. *Econometrica*. 43: 727–738.
- Hossfeld JW. 1882. *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten*. Gotha, 4 Bd. pp 310.
- Huang S. 2002. Validating and localizing growth and yield models: procedures, problems and prospects. Sesimbra, Portugal. En: *Proceedings of IUFRO workshop "Reality, models and parameter estimation - the forestry scenario"*.
- Huang S. 1997. Development of compatible height and site index models for young and mature stands within an ecosystem-based management framework. Lisboa, Portugal. En: Amaro A, Tomé M (eds). *Empirical and process-based models for forest tree and stand growth simulation*. Edicoes Salamandra–Novas Tecnologias, pp 61–98.
- Inions GB. 1992. *Studies on the growth and yield of plantation Eucalyptus globulus in southwest Western Australia*. Perth, Australia. Ph.D. thesis, Universidad de Western Australia.

- Judge G, Hill C, Griffiths W, Lütkepohl H, Lee T. 1988. Introduction to the theory and practice of econometrics. 2nd Sub edition New York: John Wiley & Sons.
- Knoebel BR, Burkhart HE, Beck DE. 1986. A growth and yield model for thinned stands of yellow-poplar. *Forest Science*. 32(2):1-48.
- Korf V. 1939. Príspevek k matematické definici vzrusto- vého zákona hmot lesních porostu. *Lesnicka Prace* 18:339-379.
- Kozak A, Kozak RA. 2003. Does cross validation provide additional information in the evaluation of regression models? *Canadian Journal of Forest Research*. 33(6): 976-987
- Krumland B, Eng, H. 2004. Site index systems for major young-growth forest and woodland species in northern California. *California Forestry Report No. 4*. Cal. Dep. Forestry and Fire Protection, Sacramento. 215 p.
- LeMay VM. 1988. Comparisons of fitting techniques for systems of forestry equations. Ph.D. dissertation, University of British Columbia, Vancouver.
- López CA, Gorgoso JJ, Castedo F, Rojo A, Rodríguez R, Álvarez- González JG, Sánchez f. 2003. A height-diameter model for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Annals of Forest Science* 60:237-245.
- Lundqvist B. 1957. On the height growth in cultivated stands of pine and spruce in Northern Sweden. *Medd Fran Statens Skogfoesk Band* 47. pp 1-64.
- Mäkinen A. 2009. Uncertainty in forest simulators and forest planning systems. *Dissertationes Forestales* 97. Helsinki, Finlandia. Department of Forest

Resource Management, Faculty of Forestry and Agriculture, Universidad de Helsinki. 38 p.

McDill ME, Amateis RL. 1992. Measuring forest site quality using the parameters of a dimensionally compatible height growth function. *Forest Science* 38: 409-429.

Methol R. 2008. *SAG Eucalyptus: Sistema de apoyo a la gestión de plantaciones orientadas a la producción de celulosa en Uruguay*. Montevideo, Uruguay. Serie Técnica 173.

Methol R. 2006. *SAG globulus: Sistema de apoyo a la gestión de plantaciones de Eucalyptus globulus*. Montevideo, Uruguay. Serie Técnica 158. INIA,

Methol R. 2003. *SAG grandis: Sistema de apoyo a la gestión de plantaciones de Eucalyptus grandis*. Montevideo, Uruguay. Serie Técnica 131. INIA.

Methol R. 2001. Comparisons of approaches to modelling tree taper, stand structure and stand dynamics in forest plantations. Ph.D. thesis. University of Canterbury. 298 pp.

Murphy PA. 1983. A nonlinear timber yield equation system for loblolly pine. *Forest Science*. 29: 582–591.

Murphy PA, Beltz C. 1981. Growth and yield of shortleaf pine in the West Gulf region. USDA Forest Service Research Papers. SO- 169.

Myers RH. 1986. *Classical and modern regression with applications*. Second edition. Duxbury Press, Belmont, California.

- Neter J, Kutner MH, Nachtsheim CJ, Wasserman W. 1998. Applied linear statistical models. 4th edition. New York. McGraw-Hill.
- Newnham R. 1992. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. Canadian Journal of Forest Research. 22(2): 210-223.
- Ni C, Zhang L. 2007. An analysis and comparison of estimation methods for self-referencing equations. Canadian Journal of Forest Research. 37(8): 1472-1484.
- Palahí M, Pukkala T, Pérez E, Trasobares A. 2004. Herramientas de soporte a la decisión en la planificación y gestión forestal. Presentación del Sistema de Planificación MONTE. Divulgación 78: 40-48.
- Parresol BR. 2001. Additivity of nonlinear biomass equations. Canadian Journal of Forest Research. 31(5): 865-878.
- Parresol BR. 1999. Assessing tree and stand biomass: a review with examples and critical comparisons. Forest Science. 45(4): 573-593.
- Peng CH, Wen X. 2006. Forest Simulation Models. En: Shao, G. and Reynolds, K.M. (eds.). Computer Applications in Sustainable Forest Management: Including Perspectives on Colaboration and Integration. Springer. Netherlands. 276 p
- Pienaar LV, Page HH, Rheney JW. 1990. Yield prediction for mechanically site-prepared slash pine plantations. Southern Journal of Applied Forest. 14(3):104-109.

- Pienaar LV, Shiver BD. 1981. Survival functions for site-prepared slash pine plantations in the flatwoods of Georgia and northern Florida. *South Journal Applied Forestry*. 5:59-62.
- Prodan M, Peters R, Cox F, Real P. 1997. *Mensura Forestal. Serie Investigación y Educación en Desarrollo Sostenible*. San José, Costa Rica, 561 p.
- Pyndyck R. Rubinfeld, D. 1981. *Econometric models and econometric forecasts*. Mc Graw Hill.
- Reed DD. 1987. Estimation procedures for analytically related growth and yield models. En: Annual Meeting of the Society of American Foresters held at Birmingham, AL:89-92
- Richards FJ. 1959. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10: 290-300.
- Rose Jr CE, Lynch TB. 2001. Estimating parameters for tree basal area growth with a system of equation and seemingly unrelated regressions .*Forest Ecology Managements*. 148: 51-61.
- Sanquetta CR. 1996. *Fundamentos biométricos dos modelos de simulação florestal*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná/FUPEF. 49p.
- SAS (Statistical Analysis System Institute). 2007. *User's guide release 9.2 edition*. Cary: SAS Institute Inc.
- Schumacher FX.1939. A new growth curve and its application to timber yield studies. *Journal of Forestry*. 37:819-820

- Sharma RP, Brunner A, Eid T, Øyen BH. 2011. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age errors. *Forest Ecology and Management*. 262(12): 2162-2175.
- Skolmen R, Ledig T. 1990. *Eucalyptusglobulus* Labill. Bluegum eucalyptus. En: Burns, R.; Honkala, B. (eds). *Silvics of North America; 2. Hardwoods*. Washington, D. C., USDA. Forest Service. Pp 299-304.
- Soares P, Tomé M. 2002. Height-diameter equation for first rotation eucalyptus plantations in Portugal. *Forest Ecology Managements*. 166: 99-109.
- Soares P, Tomé M, Skovsgaard JP, Vanclay JK. 1995. Evaluating a growth model for forest management using continuous forest inventory data. *Forest Ecology and Management*. 71(3): 251-265
- Somers GL, Farrar RM. 1991. Biomathematical growth equations for natural longleaf pine stands. *Forest Science* 18, 76-86.
- Strand L. 1964. Numerical construction of site curves. *Forest Science*. 10(4): 410–414.
- Strandgard M, Wang Y, Chong D, Wild I, Baker T. 2005. Blue gum plantation management system. Final Report for Project 03.3903. Melbourne, Australia. Forest and Wood Products Research and Development Corporation
- Strub M, Cieszewski CJ. 2006. Base–age invariance properties of two techniques for estimating the parameters of site index models. *Forest Science*. 52(2):182–186.

- Sullivan AD, Clutter JL. 1972. A simultaneous growth and yield model for loblolly pine. *Forest Science* 18:76-86
- Tait DE, Cieszewski CJ, Bella IE. 1988. The stand dynamics of lodgepole pine. *Canadian Journal of Forest Research*. 18(10):1255-1260.
- Theil, H. 1953. Repeated least squares applied to complete equation systems. The Hague: Center Planning Bureau, Netherlands.
- Tiwari VP, Singh B. 2009. Site index model for *Tecomella undulata* (Sm.) Seem. (Bignoniaceae) plantations in a hot arid region of India. *Journal of Arid Environments*. 43:490– 493
- Tomé M, Ribeiro F, Soares P. 2001. O modelo globulus 2.1. Relatorios Técnico-científicos do GIMREF, nº1/2001. Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior de Agronomia, Departamento de Engenharia Florestal. 69 pp.
- Tomé M, Falçao A, Amaro A. 1997. globulus v.1.0.0: a regionalized growth model for Eucalyptus plantations in Portugal. En: Ortega A, Gezan S (eds) IUFRO conference: modelling growth of fast-grown tree species.
- Tomé M, Falçao A, Carvalho A, Amaro A. 1995. A global growth model for eucalypt plantations in Portugal. *Lesnictvi-Forestry* 41(4): 197-205.
- Torres JM, Magaña OS. 2001. Evaluación de Plantaciones Forestales. Ed. Limusa, México. 472 p.

- Van Deusen PC. 1988. Simultaneous estimation with a squared error loss function. *Canadian Journal of Forest Research*.18: 1093–1096.
- Van Laar A, Akça A. 2007 *Forest Mensuration. Managing Forest Ecosystems, Volume 13*. Springer. 383 p.
- Vanclay JK, Skovsgaard JP. 1997. Evaluation of forest growth models. *Ecological Modeling* 98: 1-12.
- Vanclay, J.K. 1994. *Modelling forest growth and yield applications to mixed tropical forest* Wallingford: CAB International. 312 p.
- Valsta L. 1993. Stand management optimization based on growth simulators. The Finnish Forest Research Institute, Research Papers 453. p 31.
- Vargas B, Aguirre O, Corral J, Crecente F, Diéguez-Aranda U. 2013. A dominant height growth and site index model for *Pinus pseudostrobus* Lindl. in northeastern Mexico. *Agrociencia*. 47(1): 91-106.
- Wang Y, Baker TG. 2007. A regionalised growth model for *Eucalyptusglobulus* plantations in south-eastern Australia. *Australian Forestry*. 70 (2):93-107.
- Wong J, Baker T, Duncan M, Mcguire D, Bulman P. 2000. Forecasting growth of key agroforestry species in south-eastern Australia. Rural Industries Research and Development Corporation. Australia. Publ. 00/68.
- Zeide B.1993. Analysis of Growth Equations. *Forest Science*. 39(3): 594-616.
- Zellner A. 1962. An efficient method of estimating seemingly unrelated regressions and tests for aggregation bias. *Journal American Statistical Association*. 57(298): 348–368.

Zellner A, Theil H. 1962. Three stage least squares: simultaneous estimation of simultaneous equations. *Econometrica*. 30:63–68.

Zepeda B EM, Rivero DPB. 1984. Construcción de curvas anamórficas de índice de sitio: ejemplificación del método de la curva guía. *Ciencia Forestal* 51 (9): 3-36

Zunino CA, Ferrando MT. 1997. Modelación del crecimiento y rendimiento de plantaciones de Eucalyptus en Chile. Una primera etapa. En: Ortega A, Gezan S (eds) IUFRO conference: modelling growth of fast-grown tree species, 5–7 September.

6. ANEXOS

6.1 LISTA DE CUADROS

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos del set de ajuste.....	23
Cuadro 2. Ecuaciones <i>ADA</i> polimórficas.....	24
Cuadro 3. Ecuaciones <i>ADA</i> anamórficas.....	25
Cuadro 4. Ecuaciones <i>GADA</i>	26
Cuadro 5. Ecuaciones de mortalidad.....	29
Cuadro 6. Ecuaciones base y dinámicas seleccionadas para modelizar la altura media dominante (<i>TIP</i>).....	34
Cuadro 7. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados (<i>TIP</i>).....	34
Cuadro 8. Ecuaciones base y dinámicas seleccionadas para modelizar la altura media dominante (<i>dummy</i>).....	35
Cuadro 9. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados (<i>dummy</i>).....	35
Cuadro 10. Parámetros estimados y error estándar (<i>EE</i>) para estructura de datos <i>TIP</i> y <i>dummy</i>	36
Cuadro 11. Ecuaciones base y dinámicas seleccionadas para modelizar el área basal.....	40
Cuadro 12. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados.....	40
Cuadro 13. Ecuaciones dinámicas seleccionadas para modelizar el número de árboles por hectárea.....	42
Cuadro 14. Estadísticos de bondad de ajuste y posiciones en los rankings para los tres modelos seleccionados.....	42
Cuadro 15: Valores de correlación entre los residuales.....	45
Cuadro 16. Calidad y precisión del ajuste <i>SUR</i>	45
Cuadro 17. Estimaciones de los parámetros, errores estándares (<i>ES</i>)	

y significancia (<i>valor-p</i>), para <i>OLS</i> y <i>SUR</i>	47
Cuadro 18. Estadísticos de la <i>cross validation</i>	49
Cuadro 19. Estadísticos de las parcelas utilizadas para la comparación.....	50
Cuadro 16. Volumen ($\text{m}^3 \text{ ha}^{-1}$) proyectado para las parcelas de comparación en tres edades.....	64

6.2 LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Dispersión de los valores residuales versus los valores predichos generados por la ecuación 43. Superior: estructura de datos *TIP*. Inferior: estructura de datos *dummy*.....37

Figura 2. Curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia), producidas por el modelo de Korf (43) en *GADA* (líneas en negro) y las trayectorias reales de *AMD* (líneas en gris). Superior: estructura de datos *TIP*. Inferior: estructura de datos *dummy*.....38

Figura 3. Dispersión de los residuos frente a los valores predichos generados por el modelo anamórfico de Levakovic, para el ajuste en área basal empleando variables *dummy*.....41

Figura 4. Curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m^2ha^{-1} a la edad de referencia (líneas en negro) y trayectorias de los valores observados en el tiempo (líneas en gris).....41

Figura 5. Dispersión de los residuos frente a predichos generados por el modelo Pienaar y Shiver, para el ajuste de densidad empleando variables *dummy*.....43

Figura 6. Curvas de evolución del número de árboles por hectárea (líneas en negro) y trayectorias reales (líneas en gris) para 750, 1000, 1250, 1500, 1750 árboles ha^{-1} a los 8 años (edad de referencia).....43

Figura 7. *AP. globulus* 2016. En negro: curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia); en rojo: trayectorias reales de *AMD* para las parcelas de comparación.....51

Figura 8. *SAG globulus* (Methol, 2006). En negro: curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia); en rojo: trayectorias reales de *AMD* para las parcelas de comparación.....52

Figura 9. *AP. globulus* 2016. En negro: curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m^2ha^{-1} a la edad de referencia (8 años); en rojo: trayectorias de los valores observados en el tiempo.....53

Figura 10. *SAG globulus* (2006). En negro: curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m²ha⁻¹ a la edad de referencia (8 años); en rojo: trayectorias de los valores observados en el tiempo.....54

Figura 10. En negro: curvas de evolución del número de árboles para 400, 550, 700, 850 y 1000 árboles por hectárea para la edad de referencia; en rojo: trayectorias de los valores observados en el tiempo. Superior: *AP. globulus 2016*. Inferior: *SAG globulus* (Methol, 2006).....55

Figura 12. Altura media dominante real y simulada. En verde: trayectoria reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus* (Methol, 2006).....58

Figura 13. Área basal real y simulada. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus* (Methol, 2006).....61

Figura 14. Evolución del número de árboles por hectárea reales y simulados. En verde: trayectorias reales, en rojo trayectoria simulada con *AP. globulus 2016*, en gris: trayectoria simulada con *SAG globulus* (Methol, 2006).....63

6.3 TABLA DE ACRÓNIMOS

Acrónimo	Descripción
DAP	Diámetro a la altura del pecho
N	Número de árboles por hectárea
IS	Índice de sitio
<i>BAI</i>	<i>Base age invariance</i>
<i>BAS</i>	<i>Base age specific</i>
<i>ADA</i>	<i>Algebraic difference approach</i>
<i>GADA</i>	<i>Generalized algebraic difference approach</i>
TIP	Todos los intervalos posibles
<i>OLS</i>	<i>Ordinary least squares</i>
<i>Cov</i>	Covarianza
<i>SUR</i>	<i>Seemingly unrelated regression</i>
<i>2SLS</i>	<i>Two stage least squares</i>
<i>3SLS</i>	<i>Three stage least squares</i>
<i>FIML</i>	<i>Full information of maximum likelihood</i>
SAG	Sistema de apoyo a la gestión
G	Área Basal
V	Volumen por hectárea
\bar{E}	Sesgo
R_{aj}^2	Coeficiente de determinación ajustado
<i>REMC</i>	Raíz del error cuadrático medio
<i>AIC</i>	Criterio de información de Akaike
<i>PRESS</i>	<i>Predicted residual sum of squares</i>
EF_{aj}	eficiencia del modelo ajustada
Dg	Diámetro cuadrático medio
m^2ha^{-1}	Metros cuadrados por hectárea

EE	Error estándar
m	Metros
σ_i^2	Varianza de la i-ésima observación
\hat{e}	Estimación del error
cm	Centímetros

6.4 Modelo dinámico de rodal para *Eucalyptus globulus* (L.) en Uruguay¹

Hirigoyen Andrés¹, Diéguez Ulises², Franco Jorge³

¹ Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA) Tacuarembó. Ruta 5 Km 386, Tacuarembó, Uruguay. E-mail: andreshirigoyen@gmail.com

² Departamento de Ingeniería Agroforestal, Universidad de Santiago de Compostela, Lugo, España

³ Departamento de Biometría, Facultad de Agronomía, Universidad de la Republica, Paysandú, Uruguay

Resumen

Los modelos dinámicos a nivel de rodal son ampliamente usados en el ámbito forestal. Para su ajuste se emplean datos empíricos que se integran en un conjunto de ecuaciones que describen las relaciones entre diferentes variables. Las metodologías clásicas para desarrollar ecuaciones de transición invariantes con respecto al intervalo de simulación (*path invariance*) e invariantes respecto a la edad de referencia empleadas son *algebraic difference approach* (ADA) y *generalized algebraic difference approach* (GADA). El objetivo del presente trabajo fue desarrollar un modelo dinámico de rodal para *Eucalyptus globulus*, empleando ecuaciones de transición para área basal, altura media dominante y mortalidad, utilizando enfoque de variables *dummy*. Los datos utilizados provienen de 168 parcelas permanentes. Las ecuaciones evaluadas individualmente fueron luego ajustadas simultáneamente mediante *seemingly unrelated regression* (SUR). En base al análisis de bondad de ajuste y de la capacidad predictiva, se seleccionó el modelo propuesto por Korf, modificado por Cieszewski (2004), para la altura media dominante; el modelo de Levakovic (1935) para el área basal y el modelo de Pienaar y Shiver (1981) para la mortalidad. El modelo de simulación desarrollado es más flexible y permite levantar algunas de las limitantes del modelo utilizado anteriormente.

¹ Artículo presentado para su publicación en Agrocencia (Uruguay).

Su integración a un Sistema de Apoyo a la Gestión (SAG), constituirá una herramienta de gran utilidad para la planificación y toma de decisiones en el sector forestal.

Palabras claves: *Eucalyptus globulus*, ecuaciones dinámicas, SUR, GADA, ADA

Dynamic stand model for *Eucalyptus globulus* L. in Uruguay

Summary

Stand level dynamic models are widely used in forestry. Fitting empirical data that is integrated into a set of equations is used to describe the relationships between different variables. The classic methodologies to develop equations invariant with respect to transition simulation interval (path invariance) and invariant respect to the reference age are employed algebraic difference approach (ADA) and generalized algebraic difference approach (GADA). The aim of this study was to develop a dynamic model for *Eucalyptus globulus* stand using transition equations for basal area, dominant average height and mortality, using dummy variables approach. The data used are from 168 permanent plots. The equations were then evaluated individually adjusted simultaneously by seemingly unrelated regression (SUR). Based on the analysis of goodness of fit and predictive ability, the model proposed by Korf, as amended by Cieszewski (2004), for the dominant average height was selected; Levakovic model (1935) for the basal area and the model Pienaar and Shiver (1981) for mortality. The simulation model developed is more flexible and can lift some of the limitations of the model used previously. Its integration into a decision support system (DSS), constitute a useful tool for planning and decision making in the forestry sector.

Palabras claves: *Eucalyptus globulus*, dynamic equations, SUR, GADA, ADA

Introducción

La modelización forestal, permite simular los efectos de los tratamientos silvícolas y proyectar las consecuencias de una determinada decisión sobre la producción final. Un modelo es una abstracción simplificada de la realidad, en la cual se representan algunas de las propiedades del sistema original, el cual pasa a ser expresado en términos de ecuaciones matemáticas que lo describen de forma más sencilla (Vanclay, 1994; Sanquetta, 1996). La dinámica forestal se representa mediante ecuaciones que explican de manera cuantitativa las tasas de cambio en crecimiento y densidad del rodal a través del tiempo. Las ecuaciones integradas en un sistema describen las relaciones entre un conjunto de variables, bajo el supuesto de simultaneidad (Borders y Bailey, 1986); presentan una lógica interna de manera de ser fieles a la biología del sistema, la calidad de las estimaciones realizadas están directamente relacionadas con la calidad de la información suministrada. Las características de los ciclos del cultivo forestal hacen de la modelización una de las herramientas más útiles para el sector, por lo cual el desarrollo de modelos para el pronóstico del crecimiento, producción y aprovechamiento es tema central de investigación e innovación del sector forestal (Gaow *et al.*, 2001).

En el ámbito forestal los modelos de simulación operan a nivel de árboles individuales o a nivel de grupos de árboles o rodales, utilizando como variables predictoras las variables de estado que defiende a la unidad de modelación: edad, diámetro a la altura del pecho (DAP), densidad (N), calidad o índice de sitio (IS), mortalidad y cambios de estructura y composición como los generados, por ejemplo, por podas y raleos (Alder, 1980; Costas *et al.*, 2006). Los modelos de mayor difusión en el ámbito forestal para *Eucalyptus globulus L.* son determinísticos y operan a nivel de rodal, empelando para su ajuste bases de datos empíricas

(Tomé *et al.*, 1995; García y Ruiz 2003; Methol, 2006; Wang y Baker, 2007). Dichos modelos posibilitan la simulación de diferentes escenarios y la toma de decisiones, mediante el uso de una estructura de inventarios forestales que facilita su actualización a medida que crece la base de datos. La evolución de un rodal se representa mediante ecuaciones dinámicas o de transición, que explican las tasas de cambio en crecimiento y densidad de la estructura de la masa forestal (Alder, 1980).

Las funciones de transición deben de cumplir una serie de propiedades, entre las que destacan las siguientes: polimorfismo (curvas de diferentes formas, no proporcionales entre sí y asíntota común o diferente), pauta de crecimiento sigmoideo con un punto de inflexión, capacidad de alcanzar una asíntota horizontal a edades avanzadas, respuesta lógica, ser invariantes con respecto al intervalo de simulación (*path invariance*) e invariantes respecto a la edad de referencia (*base age invariance*) (Bailey y Clutter 1974; Cieszewski y Bailey, 2000).

El objetivo del presente trabajo es desarrollar un modelo dinámico de rodal *para E. globulus* mediante ecuaciones de transición para área basal, altura dominante y mortalidad. Utilizando un método invariante respecto a la edad de referencia para estimar los efectos específicos del sitio: mediante el enfoque de las variables *dummy* (*dummy approach*) propuesto por Cieszewski *et al.*, (2000) el cual asume que los datos contienen errores de medición y errores aleatorios que deben ser modelados. Las ecuaciones seleccionadas para integrar el modelo se ajustarán con un método adecuado para contemplar su simultaneidad. Junto con la estimación del volumen por hectárea las ecuaciones ajustadas permitirán el empleo del modelo dinámico desarrollado en Sistemas de Apoyo a la Gestión (SAG) para plantaciones de *E. globulus* en Uruguay.

Materiales y métodos

Datos

Los datos empelados en este estudio corresponden a mediciones de inventario realizadas a 168 parcelas pertenecientes al Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria (INIA Uruguay), ubicadas en el Sur y Sur-Este del Uruguay. En el Cuadro 1 se presentan los estadísticos resumen del conjunto de datos.

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos de los datos utilizados en el estudio

Variable	Media	Mínimo	Máximo	Desviación estándar
<i>Edad</i> (años)	6,1	1	11	2,7
<i>AMD</i> (m)	16,3	1,2	26,9	6,1
<i>N</i> (árb ha ⁻¹)	1022	500	1700	237,4
<i>Dg</i> (cm)	13,5	2,6	22,4	3,9
<i>G</i> (m ² ha ⁻¹)	15,1	0,8	34,6	7,1

AMD: altura media dominante; *N*: densidad del rodal; *Dg*: diámetro medio cuadrático;

G: área basal total.

Ajuste de ecuaciones de transición

Las ecuaciones dinámicas empleadas fueron desarrolladas siguiendo dos metodologías clásicas, *algebraic difference approach* (*ADA*) propuesta por Bailey y Clutter (1974), y *generalized algebraic difference approach* (*GADA*) desarrollada por Cieszewski y Bailey (2000). *ADA* genera tanto curvas anamórficas (curvas de igual forma y diferentes asíntotas proporcionales entre sí) como polimórficas, siendo su principal limitante que la mayoría de los modelos derivados son anamórficos o polimórficos con asíntota común (Bailey y Clutter 1974; Cieszewski y Bailey 2000). *GADA* posee como principal ventaja la obtención de ecuaciones dinámicas a partir de un modelo de crecimiento base permitiendo que más de un parámetro dependa de las condiciones específicas del sitio forestal, con lo cual las familias de curvas obtenidas son más flexibles (Cieszewski y Bailey 2000; Cieszewski 2002; 2003). Con esta

generalización se obtienen familias de curvas polimórficas y con múltiples asíntotas, que resultan invariantes con respecto a la edad de referencia e invariantes al intervalo de simulación (Cieszewski, 2002; 2004).

Se ajustaron 32 ecuaciones *ADA* y *GADA* para las variables altura media dominante y área basal, derivadas de funciones base existentes en la literatura forestal (Hossfeld, 1882; Schumacher, 1939; Lundqvist, 1957; Richards, 1959; McDill y Amateis, 1992; Amaro *et al.*, 1997; Tomé *et al.*, 2001; Methol, 2001; Cieszewski, 2002; Diéguez *et al.*, 2005; Methol, 2006; 2008; Barrio *et al.*, 2006). Las ecuaciones seleccionadas para cada variable de estado integraron un sistema para su ajuste simultáneo, aplicando el método adecuado según las relaciones analíticas que se presentaron.

En los Cuadros 2 y 3 se presenta las ecuaciones *ADA* de transición polimórficas y anamórficas respectivamente.

Cuadro 2. Ecuaciones ADA polimórficas

Modelo	Ecuación dinámica	Nro.
Bertalanffy –Richards I	$Y_2 = a \left(\frac{Y_1}{a} \right)^{\frac{\ln[1-e^{-bt_2}]}{\ln[1-e^{-bt_1}]}}$	1
Bertalanffy –Richards II	$Y_2 = a \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{Y_1}{a} \right)^{1-\nu} \right]^{\frac{t_2}{t_1}} \right\}^{\frac{1}{1-\nu}}$	2
Bertalanffy –Richards III	$Y_2 = a \left\{ 1 + \left[\left(\frac{a}{Y_1} \right)^\nu - 1 \right] e^{-b(t_2-t_1)} \right\}^{\frac{1}{\nu}}$	3
Gompertz I	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)e^{-b(t_2-t_1)+a(t_2^2-t_1^2)}} e^{a \left[1 - e^{-b(t_2-t_1)+a(t_2^2-t_1^2)} \right]}$	4
Gompertz II	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)e^{-b(t_2-t_1)}e^{a[1-b(t_2-t_1)]}}$	5
Schumacher I	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)+a\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)}$	6
Schumacher II	$Y_2 = e^{\ln(Y_1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c+a\left[1-\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c\right]}$	7
Schumacher III	$Y_2 = Y_1^{\left(\frac{t_1}{t_2}\right)} e^{a\left[1-\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c\right]}$	8
Hossfeld	$Y_2 = Y_1 e^{-b(t_2^c-t_1^c)} + a[1-b(t_2^c-t_1^c)]$	9
Weibull I	$Y_2 = \frac{1}{\frac{1}{Y_2} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^b + a \left[1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^b \right]}$	10
Weibull II	$Y_2 = a - b \left[\frac{a - Y_1}{b} \right]^{\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^c}$	11
Levakovic	$Y_2 = \left\{ Y_1^c \left[\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 + a \left(1 - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{c}}$	12
Monomolecular	$Y_2 = Y_1 e^{-b(t_2-t_1)} + a[1 - e^{-b(t_2-t_1)}]$	13

Cuadro 3. Ecuaciones ADA anamórficas.

Modelo	Ecuación dinámica	Nro.
Bertalanffy –Richards	$Y_2 = Y_1 \left[\frac{1 - e^{(-bt_2)}}{1 - e^{(-bt_1)}} \right]^c$	14
Gompertz	$Y_2 = Y_1 e^{-b\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)}$	15
Schumacher I	$Y_2 = Y_1 \frac{e^{-be^{(-ct_2)}}}{e^{-be^{(-ct_1)}}}$	16
Schumacher II	$Y_2 = Y_1 e^{-b\left[\left(\frac{1}{t_2}\right)^c - \left(\frac{1}{t_1}\right)^c\right]}$	17
Hossfeld	$Y_2 = Y_1 \frac{1 - e^{(-bt_2^c)}}{1 - e^{(-bt_1^c)}}$	18
Weibull	$Y_2 = \frac{1}{\frac{1}{Y_1} + b\left(\frac{1}{t_2}\right)^c - \left(\frac{1}{t_1}\right)^c}$	19
Monomolecular	$Y_2 = Y_1 \left[\frac{1 - be^{(-ct_2)}}{1 - be^{(-ct_1)}} \right]$	20
Levakovic	$Y_2 = Y_1 \left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{b + t_1^2}{b + t_2^2}\right) \right]^c$	21

El Cuadro 4 presenta las ecuaciones en GADA y las ecuaciones base de donde derivan.

Cuadro 4. Ecuaciones GADA.

Ecuación base	Parámetro relativo al sitio	Solución para X con valores iniciales (t_0, Y_0)	Ecuación dinámica	Nro.
Bertalanffy-Richardss $Y = a_1[1 - e^{(-a_2t)^{a_3}}$	$a_1 = X$ $a_2 = X$	$X_0 = \frac{Y_0}{[1 - e^{(-b_2t_0)^{b_3}}]}$ $X_0 = -\ln \left[1 - \left(\frac{Y_0}{b_1} \right)^{1/b_3} \right] / t_0$	$Y = Y_0 \left[\frac{1 - e^{(-b_2t)} }{1 - e^{(-b_2t_0)} } \right]^{b_3}$ $Y = b_1 \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{Y_0}{b_1} \right)^{1/b_3} \right]^{t/t_0} \right\}^{b_3}$	22 23
	$a_1 = e^X$ $a_3 = b_2 + b_3/X$	Con $X_0 = \frac{1}{2} \left[\ln Y_0 - b_2 L_0 + \sqrt{(\ln Y_0 - b_2 L_0)^2 - 4b_3 L_0} \right]$ $L_0 = \ln(1 - e^{-b_1 t_0})$	$Y = Y_0 \left[\frac{1 - e^{(-b_1 t)}}{1 - e^{(-b_1 t_0)}} \right]^{(b_2 + b_3/X_0)}$	24
Korf $Y = a_1 e^{(-a_2 t^{-a_3})}$	$a_2 = X$ $a_1 = e^X$ $a_2 = b_1 + b_2/X$	$X_0 = -\ln \left(\frac{Y_0}{a_1} \right) t_0^{a_3}$ $X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-b_3} \left\{ b_1 + t_0^{b_3} \ln(Y_0) + \sqrt{4b_2 t_0^{b_3} + [-b_1 - t_0^{b_3} \ln(Y_0)]^2} \right\}$	$Y = b_1 \left(\frac{Y_0}{b_1} \right)^{\left(\frac{t_0}{t} \right)^{b_3}}$ $Y = e^{X_0} e^{[-(b_1 + \frac{b_2}{X_0}) t^{-b_3}]}$	25 26

Cuadro 4. Ecuaciones GADA continuación...

Ecuación base	Parámetro relativo al sitio	Solución para X con valores iniciales t_0, Y_0	Ecuación dinámica	Nro.
Hossfeld	$a_2 = X$	$X_0 = t_0^{-a_3} \left(\frac{a_1}{Y_0} - 1 \right)$	$Y = b_1 / \left[1 - \left(1 - b_1/Y_0 \right) (t_0/t)^{b_3} \right]$	27
$Y = \frac{a_1}{1 + a_2 t^{-a_3}}$	$a_1 = b_1 + X$ $a_2 = b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[Y_0 - b_1 + \sqrt{(Y_0 - b_1)^2 + 4b_2 Y_0 t_0^{-b_3}} \right]$	$Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2/X_0 t^{-b_3}}$	29
	$a_1 = b_1 + X$ $a_2 = b_2 X$	$X_0 = \frac{Y_0 - b_1}{1 - b_2 Y_0 t_0^{-b_3}}$	$Y = \frac{b_1 + X_0}{1 + b_2 X_0 t^{-b_3}}$	29
Cieszewski (2003)	$a_1 = b_1 + X$ $a_3 = \frac{1}{2} b_2/X$	$X_0 = \frac{1}{2} \left[Y_0^3 t_0^{-1} - b_1 \pm \sqrt{(Y_0^3 t_0^{-1} - b_1)^2 + 2b_3 Y_0^3} \right]$	$Y = Y_0 \left[\frac{(b_3 + t_0^{b_2-1} X_0) t^{b_2}}{(b_3 + t_0^{b_2-1} X_0) t_0^{b_2}} \right]^{1/3}$ $b_2 \leq 1:$ $Y = Y_0 \left[\frac{(b_3 t_0^{1-b_2} + X_0) t}{(b_3 t_0^{1-b_2} + X_0) t_0} \right]^{1/3}$	30

Cuadro 4. Ecuaciones GADA continuación...

Ecuación base	Parámetro relativo al sitio	Solución para X con valores iniciales (t_0, Y_0)	Ecuación dinámica	Nro.
King Prodan $Y = \frac{t^{a_1}}{a_2 + a_3 t^{a_1}}$	$\begin{aligned} a_2 &= b_2 + b_3 X \\ a_3 &= X \end{aligned}$	$X_0 = \frac{t_0^{b_1} / Y_0 - b_2}{b_3 + t_0^{b_1}}$	$Y = \frac{t^{b_1}}{b_2 + b_3 X_0 + X_0 t_0^{b_1}}$	(48)
Strand (1964) $Y = \left(\frac{t}{a_1 + a_2 t} \right)^{a_3}$	$\begin{aligned} a_1 &= X \\ a_2 &= b_1 + b_3 X \end{aligned}$	$X_0 = \frac{t_0 \left(Y_0^{-1/b_3} - b_1 \right)}{1 + b_2 t_0}$	$Y = \left[\frac{t}{X_0 + t(b_1 + b_2 X_0)} \right]^{b_3}$	(49)

X es la variable no observable, a_i se emplea para denotar parámetros en los modelos de base, mientras que b_i , se utiliza para los parámetros globales en formulaciones GADA.

Para modelar la evolución del número de árboles por hectárea se evaluaron 8 ecuaciones presentadas en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Ecuaciones de mortalidad.

Modelo	Ecuación	Nro.
Woollons(1998) modificado por Methol (2008)	$N_2 = \left\{ N_1^{-0.5} + b \left[\left(\frac{t_2}{100} \right)^b - \left(\frac{t_1}{100} \right)^b \right] \right\}^{-b}$	33
Bailey <i>et al.</i> , (1985)	$N_2 = N_1 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^a e^{(b+c \cdot IS)(t_2-t_1)}$	34
Pienaar <i>et al.</i> , (1990)	$N_2 = N_1^a + b IS^{-1} \left\{ \left(\left(\frac{t_2}{10} \right)^c - \left(\frac{t_1}{10} \right)^c \right)^{\frac{1}{a}} \right\}$	35
Pienaar y Shiver (1981)	$N_2 = N_1 e^{a(t_2^b - t_1^b)}$	36
Clutter <i>et al.</i> , 1983	$N_2 = N_1 \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^b e^{a(t_2 - t_1)}$	37
Tomé <i>et al.</i> , (1997)	$N_2 = N_1 e^{-b(t_2 - t_1)}$	38
Van Laar y Akca (2007)	$N_2 = N_1 e^{[a(b t_2^2 - b t_1^2)]}$	39
Clutter y Jones (1980)	$N_2 = [N_1^a + b(t_2^b - t_1^b)]^{1/a}$	40

Estimación de volumen por hectárea

Las ecuaciones de volumen evaluadas fueron modelos predictivos que emplean como predictoras las variables de estado (AMD, G y N) y varias relaciones y transformaciones de las mismas (logarítmicas, exponenciales, inversos, etc.). Para la evaluación de la homocedasticidad se realizaron chequeos gráficos de residuales crudos y de Pearson frente a los valores predichos de los modelos seleccionados. La heterocedasticidad influye en el modelo ya que si ocurre los estimadores son consistentes pero no son eficientes y las fórmulas de las varianzas de los estimadores de los parámetros no son correctas lo cual invalida las pruebas de significación. Las metodologías utilizadas para corregir la falta de homogeneidad de varianza son: transformación de variables implicadas en las ecuaciones o análisis ponderado (Cunia, 1986; Parresol 1999, 2001).

Neter *et al.*, (1998) sugieren emplear una función potencia en el análisis ponderado de la siguiente forma:

$$\sigma_i^2 = x_i^\alpha \quad (41)$$

Para estimar el valor α (término de potencia), siguiendo a Harvey (citado por Parresol, 1999), se usaron los errores obtenidos con el modelo sin ponderar (\hat{e}_i) como variable dependiente en el modelo potencial de la varianza del error:

$$\hat{e}_i^2 = x_i^\alpha \quad (42)$$

O su forma linealizada:

$$\ln(\hat{e}_i^2) = \alpha \ln(x_i) \quad (43)$$

Donde:

\hat{e}_i , es el residuo sin ponderar, x_i nueva variable, \ln logaritmo natural y α parámetro a estimar

Calidad de ajuste

La selección de los modelos se basó en el análisis de su capacidad de ajuste y su capacidad predictiva, empleando métodos analíticos y métodos gráficos. Los estadísticos empleados para comparar calidad de ajuste tienen su base en el cálculo de los residuos (Clutter *et al.*, 1983; Prodan *et al.*, 1997; Castedo y Álvarez, 2000): a) el sesgo (\bar{E}), evalúa la desviación de la predicción del modelo respecto de los valores observados; b) la raíz del error medio cuadrático ($RECM$) analiza la precisión de las estimaciones (Newnham, 1992); c) el coeficiente de determinación ajustado (R_{aj}^2), representa la fracción de la variación total en los valores de la variable dependiente que es explicada por el modelo, teniendo en cuenta el número total de parámetros a estimar y el número de observaciones; d) el criterio de información de Akaike (AIC). Las fórmulas de cálculo son:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (44)$$

$$RECM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}} \quad (45)$$

$$R_{aj}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \left(\frac{n-1}{n-p} \right) \quad (46)$$

$$AIC = -2 \log Lik + 2 * p$$

Donde:

y_i representa los valores observados, \hat{y}_i son los valores predichos, \bar{y} es el valor promedio de la variable dependiente, n es el número de observaciones, p es el número de parámetros del modelo y $\log Lik$ es el logaritmo de la máxima verosimilitud. Así, según estos estadísticos un modelo será mejor que otro si presenta un menor valor de \bar{E} , $RECM$, AIC y un mayor valor del R_{aj}^2 .

El análisis gráfico de los residuales, permitió detectar fácilmente errores o comportamientos anómalos (Soares *et al.*, 1995; Gadow *et al.*, 2001; Huang, 2002). Se construyeron curvas de índice de Sitio para evaluar el comportamiento lógico de las predicciones frente a la evolución real de las variables.

Capacidad predictiva

El proceso de validación es utilizado para corroborar si la bondad del ajuste refleja también la calidad de las predicciones (Huang, 2002), ya que la calidad de éste no refleja necesariamente su capacidad predictiva lo cual influye en la selección del mejor modelo (Vanclay y Skovsgaard, 1997; Kozak y Kozak, 2003). Las metodologías de validación más usadas son: validación con división aleatoria de datos (*split validation*) y validación cruzada (*cross validation*). La primer metodología consiste en probar la capacidad predictiva del modelo en un conjunto de datos independiente del utilizado para su ajuste .

La *cross validation* se realiza con los mismos datos que el ajuste (Myers, 1986) y consiste en el cálculo de los residuos eliminados, es decir, calcular los residuos de la *i-ésima* observación empleando los parámetros estimados al ajustar el modelo con todos los datos excepto la *i-ésima* observación. Esta técnica es similar a la *split validation* en la cual se parte de un set de datos iniciales y se obtienen dos subconjuntos, salvo que en ella la proporción de los dos conjuntos se mantiene constante, los datos de validación tienen una observación y el resto de datos se usan para el ajuste (Huang, 2002). El uso de *cross validation* en el ámbito forestal es una práctica común (Tomé *et al.*, 2001; López *et al.*, 2003; Soares y Tomé, 2002)

A la suma de cuadrados de los residuos eliminados se denomina *PRESS* (*predicted residual sum of squares*) y se utilizó para calcular los criterios de selección: el sesgo, la raíz del

error cuadrático medio (de manera indicada anteriormente por las fórmulas empleadas en el ajuste), y la eficiencia del modelo ajustada (EF_{aj}) cuyas formas de cálculo se presentan a continuación:

$$PRESS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{(i-1)})^2 \quad (47)$$

$$EF_{aj} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_{(i-1)})^2} \left(\frac{n-1}{n-p} \right) \quad (48)$$

Donde:

y_i representa los valores observados, \hat{y}_i son los valores predichos, $\bar{y}_{(i-1)}$ es el valor promedio de la variable dependiente sin la i -ésima observación, n es el número de observaciones y p los parámetros estimados. La eficiencia del modelo representa la proporción de variabilidad observada en los datos originales que es explicada por el modelo, variando entre 0 (sin ajuste) y 1 (ajuste perfecto) (Vanclay y Skovsgaard, 1997), siendo equivalente al coeficiente de determinación de la fase de ajuste.

Resultados y discusión

La bondad de ajuste de los modelos se evaluó a través de estadísticos numéricos (\bar{E} , $REMC$, R_{aj}^2 , AIC) con los cuales se confeccionaron rankings de posición y del gráfico de los residuos, analizando las trayectorias predichas para comprobar si son biológicamente adecuados para los datos utilizados (Goelz y Burk, 1992; 1996; Sharma et al., 2011). Finalmente se verificó su calidad predictiva mediante cross validation.

De la base de ecuaciones disponibles (32 para AMD y G, y 8 para Población), se seleccionaron aquellas que obtuvieron los tres primeros lugares en el ranking final (valores más bajos de $RECM$, AIC y un mayor valor del R_{aj}^2), las cuales pasaron a la evaluación gráfica en el mismo orden que entraron al ranking. (ANEXO I)

Se empleó el módulo Proc MODEL del programa estadístico SAS (SAS, 2007) para el ajuste y evaluación de los modelos. Para el arreglo de datos y trayectorias se confeccionaron macros mediante Proc SQL (SAS, 2007).

Altura media dominante

Para cuantificar la ganancia en calidad de ajuste se probaron dos estructuras de datos: todos los intervalos posibles (TIP) (Huang, 1997) y variables *dummy* (Cieszewski, 2002), mediante programación utilizando Proc SQL (SAS, 2007). Para ambas estructuras la ecuación [26], se ubica en el primer lugar del ranking total, y presenta un comportamiento gráfico adecuado. El Cuadro 6 presenta los estadísticos de ajuste; los valores de los estimadores y sus errores estándar se presentan en el Cuadro 7.

Cuadro 6. Estadísticos de bondad de ajuste para el modelo seleccionado para AMD, según estructura de datos utilizada.

Ecuación base	Estructura de datos	n	R2aj	RECM	AIC
Korf	TIP	5382	94,8	1,425	19.091
$y = ae^{(-bt^{-c})}$	Dummy	1738	97,8	0,953	201,4

Se aprecian diferencias en los estadísticos de ajuste para ambas estructuras de datos, cuando se usan variables *dummy* se obtienen mayores valores de R_{aj}^2 y menores valores en el *RECM*.

Cuadro 7. Parámetros estimados y error estándar (*EE*) para AMD según estructura de datos *TIP* y *dummy*.

Estructura de datos	β_1		β_2		β_3	
	Estimación	<i>EE</i>	Estimación	<i>EE</i>	Estimación	<i>EE</i>
<i>TIP</i>	-10,390	3,688	49,120	13,870	0,7456	0,0209
<i>Dummy</i>	-9,717	4,364	48,754	16,317	0,7652	0,0307

Las dos estructuras de datos utilizadas brindan diferentes estimaciones de los parámetros y de sus respectivos errores estándar, resultados coincidentes con los obtenidos por Ni y Zhang (2007) quienes compararon diversas estructuras de datos. En la estructura *TIP* al ordenar los datos en los correspondientes intervalos de años, el número de observaciones se incrementa artificialmente a un total de 5382. Esto tiene como resultado que los errores estándar de las estimaciones de los parámetros sean subestimados, resultando inapropiados para la prueba de hipótesis o inferencia estadística (Ni y Zhang, 2007).

En las Figuras 1 y 2 se presentan las distribuciones de los valores residuales frente a los predichos y las trayectorias generadas por la ecuación seleccionada (para *TIP* y *dummy* respectivamente).

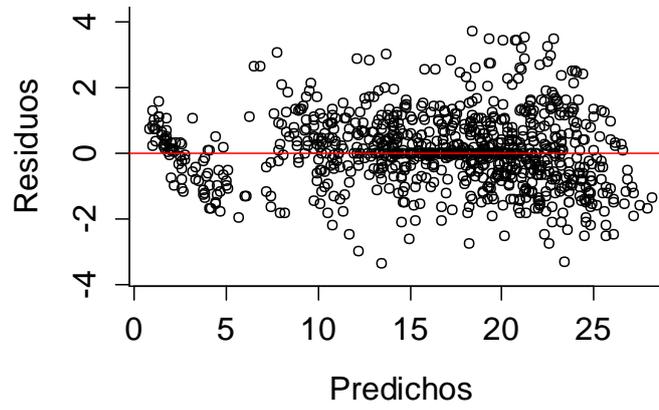
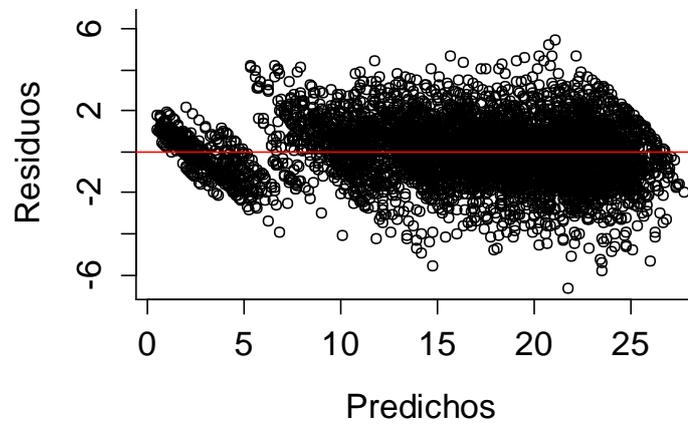


Figura 1. Dispersión de los valores residuales versus los valores predichos generados por la ecuación 43. Superior: estructura de datos *TIP*. Inferior: estructura de datos *dummy*.

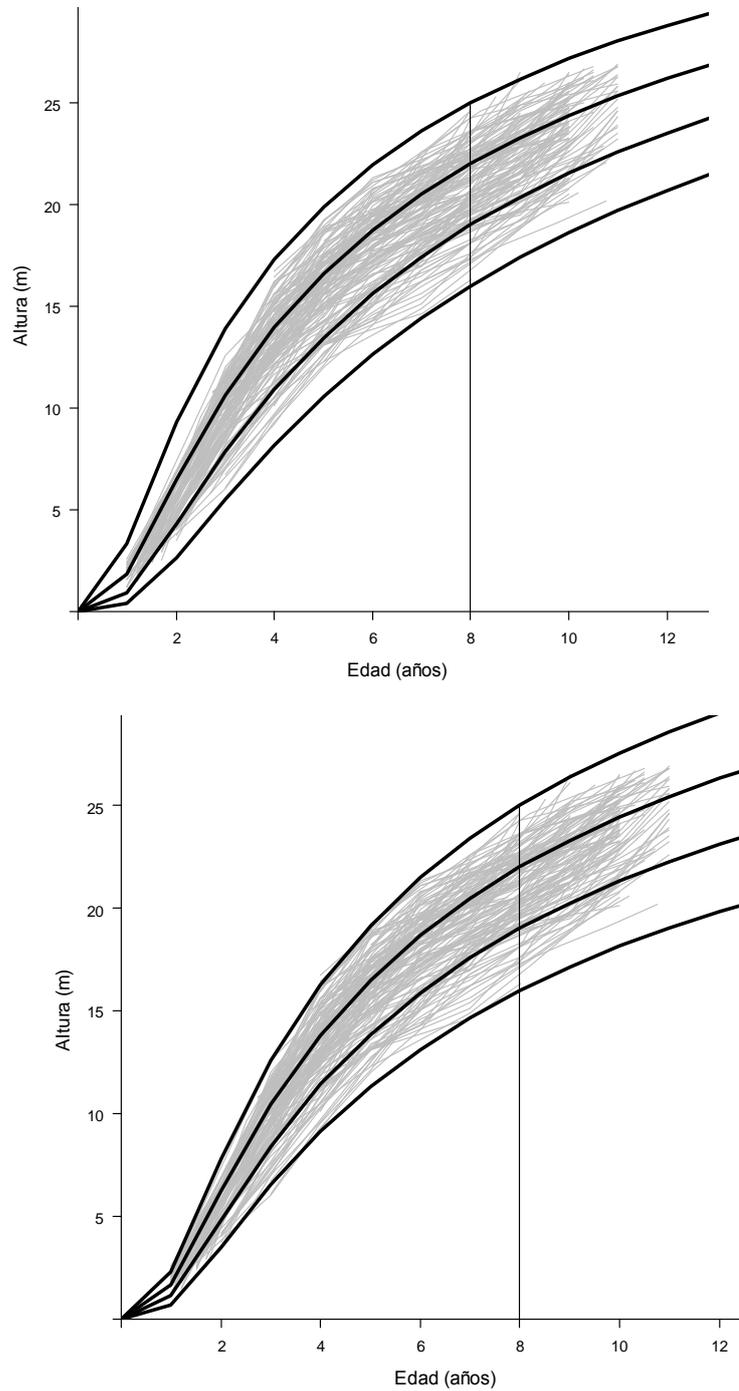


Figura 2. Curvas para índices de sitio de 16, 19, 22 y 25 m a los 8 años (edad de referencia), producidas por el modelo de Korf (43) en *GADA* (líneas en negro) y las trayectorias reales de *AMD* (líneas en gris). Superior: estructura de datos *TIP*. Inferior: estructura de datos *dummy*.

Dada la ganancia en precisión (Cuadros 6 y 7) y el mejor ajuste de las curvas de sitio, generadas para *AMD* en la estructura *dummy*, para las variables de estado restantes (área basal y población) no se utilizó *TIP*.

Son escasos los trabajos sobre modelos dinámicos para *E. globulus* en Uruguay, Methol (2006) trabajando con esta especie y con una estructura de datos de Intervalos ascendentes (Huang, 1997) identifica el modelo de Schumacher (1939), en su versión polimórfica (*ADA*) como el de mejor ajuste para la evolución de *AMD*, mientras que en este estudio dicho modelo obtuvo el segundo lugar en el ranking total para *TIP* (ANEXO I). Amaro *et al.*, (1997) y García y Ruiz (2003), señalan al modelo de Bertalanffy-Richards (Richards, 1959) en su versión polimórfica, como el más utilizado para modelar *AMD*. Por su parte, Inions (1992), Wong *et al.*, (2000) y Strandgard *et al.*, (2005), seleccionaron la versión polimórfica (*ADA*) del modelo base de Bertalanffy-Richards en Australia para esta especie.

No hay registros de trabajos anteriores que utilicen la versión *GADA* de Korf (1939) para modelar *AMD* en especies de *Eucalyptus*. Por su parte Vargas *et al.*, (2013) y Sharma *et al.*, (2011) trabajado con *Pinus pseudostrobus* y *Pinus sylvestris* respectivamente, señalan que esta ecuación presenta buenos estadísticos de ajuste y tendencia aceptables para *AMD*. Castedo *et al.*, (2007b) ajustaron esta ecuación a la evolución del área basal, empleando variables *dummy*, para *Pinus radiata* en Galicia.

Área basal

Para el ajuste de esta variable se empleó únicamente la metodología de variables *dummy*. Son pocos los registros sobre el empleo de esta metodología para el modelado de área basal (Castedo *et al.*, 2007a, 2007b). Las ecuaciones que obtuvieron los primeros 3 lugares en los

rankings de estadísticos fueron: Levakovic III (1935), Schumacher (1939) y Bertalanffy-Richard (1959), todos ellos en su versión anamórfica. (ANEXO I).

Siendo el modelo base de Levakovic III el de mejor ajuste para área basal y el de mejor comportamiento gráfico. En las Figuras 3 y 4 se observa la distribución de los residuos y las curvas desarrolladas por el modelo junto a las trayectorias de los datos reales.

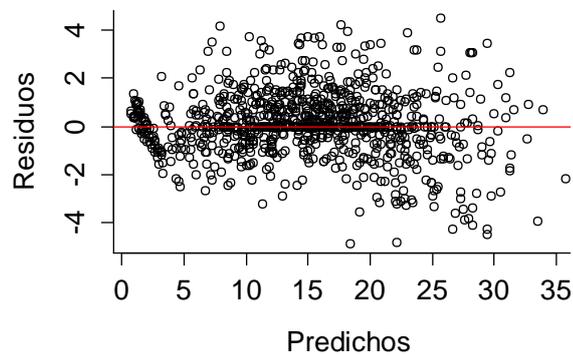


Figura 3. Dispersión de los residuos frente a los valores predichos generados por el modelo anamórfico de Levakovic, para el ajuste en área basal empleando variables *dummy*.

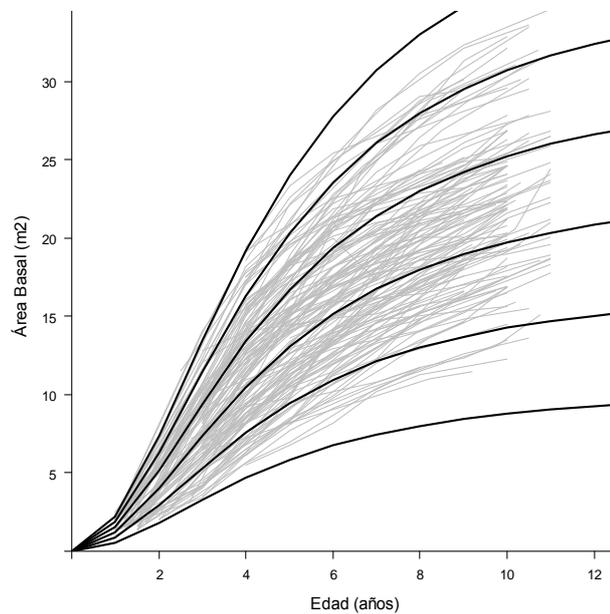


Figura 4. Curvas de crecimiento en área basal de 8, 13, 18, 23, 28, 33 m²ha⁻¹ a la edad de referencia (líneas en negro) y trayectorias de los valores observados en el tiempo (líneas en gris).

Methol (2006), identifica la ecuación propuesta por Draper y Smith (1981), con base en el modelo Monomolecular en versión polimórfica como la de mejor ajuste para esta variable para *E. globulus* en Uruguay, por su parte, Cordero *et al.*, (2004) ajustan el modelo de Clutter (1963) para área basal de *E. globulus* en Chile.

Número de árboles por hectárea

En el ajuste de la densidad de población (evolución del número de árboles por hectárea) se utilizaron datos de parcelas con y sin mortalidad empleando variables *dummy*. Las ecuaciones seleccionadas para su evaluación gráfica fueron Pienaar y Shiver (1981), Woollons (1998) modificada por Methol (2008) y Tomé *et al.*, (1997); las cuales lograron las tres primeras posiciones en el ranking final. (ANEXO I)

El modelo que obtuvo el primer lugar en el ranking total, Pienaar y Shiver (1981), demostró un comportamiento gráfico adecuado. En las Figuras 5 y 6 se observan la distribución de los residuos y las curvas desarrolladas por el modelo seleccionado junto a las trayectorias de las poblaciones reales.

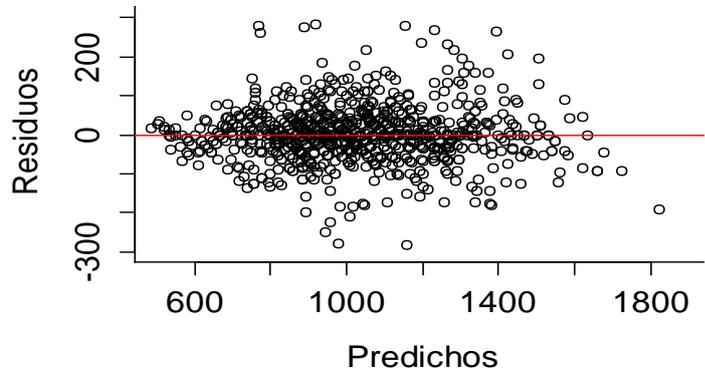


Figura 5. Dispersión de los residuos frente a predichos generados por el modelo Pienaar y Shiver, para el ajuste de densidad empleando variables *dummy*.

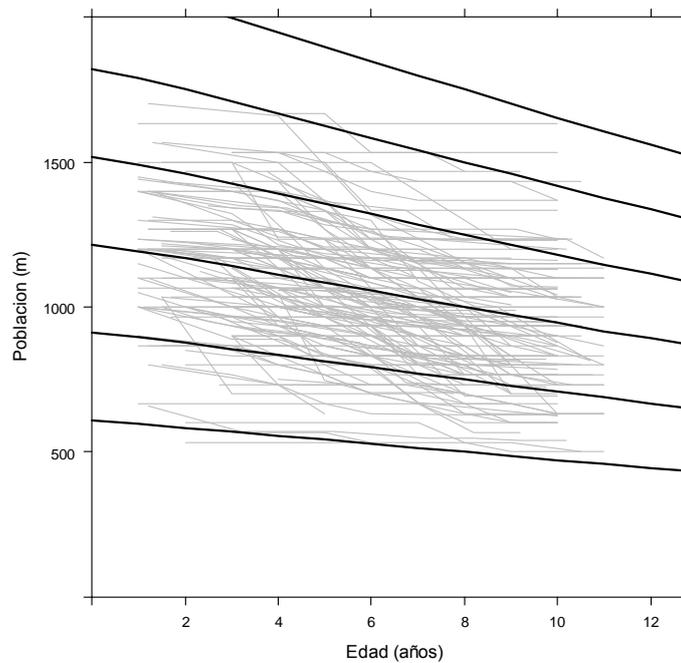


Figura 6. Curvas de evolución del número de árboles por hectárea (líneas en negro) y trayectorias reales (líneas en gris) para 750, 1000, 1250, 1500, 1750 árboles ha^{-1} a los 8 años (edad de referencia).

Methol (2006) ajustó la ecuación propuesta por Clutter y Jones (1980), para esta especie en Uruguay, por su parte Álvarez *et al.*, (2004) logran buenos estadísticos de ajuste para el modelo de Pienaar trabajando con *P. radiata* en Galicia al igual que Diéguez *et al.*, (2005) al trabajar con *P. sylvestri*.

En la evaluación gráfica los residuos AMD y N, no mostraron patrones que indicaran heterocedasticidad, en el caso de AB si bien se visualiza una leve tendencia no presentó problemas.

Ajuste simultáneo

En este trabajo se empleó la metodología de regresión aparentemente no relacionada (*seemingly unrelated regression, SUR*) ya que se evidenció la presencia de correlación entre residuales (Cuadro 8) de las ecuaciones individuales. El ajuste simultáneo del sistema de ecuaciones formado por el conjunto de modelos seleccionados anteriormente para cada una de las variables de estado, se hizo con Proc Model del programa estadístico SAS (SAS, 2007).

Cuadro 8. Valores de correlación entre los residuales de las ecuaciones individuales

	AMD	N	G
AMD	1	0,2951	0,2718
N	<2,2e-16	1	0,2605
G	<2,2e-16	6,66e-16	1

¹ Valores de *rho* por encima de la diagonal superior y de *p-value* por debajo de la diagonal

En el Cuadro 9 se aprecian los estadísticos de calidad y precisión del ajuste *SUR*.

Cuadro 9. Calidad y precisión del ajuste *SUR* para las variables de estado

Ecuación	Tipo	Variable	R^2_{aj}	RMSE
Korf (26)	GADA	AMD	97,7	0,951
Levakovic (21)	ADA	G	97,1	1,213
Pienaar y Shiver (36)	-	N	92,6	63,52

Para las tres variables en estudio (AMD, G y N), *SUR* generó estadísticos similares que *Ordinary least squares (OLS)*, y no se registró variación de magnitud significativa en la precisión o en la calidad de la estimación. La ganancia en eficiencia es alta si los errores entre las diferentes ecuaciones están correlacionados (Judge *et al.*, 1988), en dichos casos *SUR* podría incrementarse la precisión de las predicciones del modelo. La precisión alcanzada en el sistema concuerda con lo reportado por Galán *et al.*, (2008), quienes trabajando con *Cedreia odorata* L. y *Tabebuia donnell-smithii* R., lograron una precisión de 89,6 a 94,8 % con ajuste *SUR* para altura dominante y área basal respectivamente. Por su parte Amaro *et al.*, (1997) usaron datos de *Eucalyptus globulus* para construir un modelo de rodal para altura media dominante y área basal empleando *SUR* para evitar la correlación entre los residuales de los modelos. Sullivan y Clutter (1972), empleando datos de índice de sitio, edades iniciales y finales así como valores de área basal, modelaron dicha interdependencia mediante un sistema de ecuaciones de crecimiento y producción empleando el método de *OLS*. Este enfoque produjo estimadores ineficientes ya que *OLS* no tiene en cuenta las interrelaciones entre las ecuaciones del sistema (Borders y Bailey, 1986; Borders, 1989). El empleo de métodos alternativos soluciona este inconveniente, Van Deusen (1988) sugiere que si el sistema de ecuaciones cae en el dominio de regresión *SUR*, la estimación de los parámetros estructurales será consistente y asintóticamente eficiente.

Gallant (1975), Murphy (1983) y Borders (1989) emplearon un sistema de ecuaciones no lineales para ajustar volumen actual y futuro, así como densidades de rodal, estimando los parámetros mediante *SUR*. Por su parte, Borders y Bailey (1986) usaron *2SLS* y *3SLS* para resolver un sistema de cinco ecuaciones y comparar sus resultados con las estimaciones obtenidas para las mismas empleando *OLS*, mostrando que *3SLS* explica un poco menos de la variación observada que *OLS*, pero aumenta la ganancia en consistencia de los estimadores.

El Cuadro 10 muestra los valores estimados de los parámetros y sus correspondientes errores estándar para ambos métodos de ajuste (*OLS* y *SUR*).

Cuadro 10. Estimaciones de los parámetros, errores estándares (*EE*) y significancia (*valor-p*), para *OLS* y *SUR*

Ecuación	Parámetros	Método de estimación					
		<i>SUR</i>			<i>OLS</i>		
		Valor	<i>EE</i>	<i>valor-p</i>	Valor	<i>EE</i>	<i>valor-p</i>
Pienaar y Shiver 36	b_1	-0,028	0,041	0,0002	-0,027	0,088	0,002
	b_2	0,990	0,007	<,0001	0,991	0,117	<,0001
Levakovic 21	b_1	22,665	1,844	<,0001	22,659	2,338	<,0001
	b_2	0,943	0,041	<,0001	0,944	0,053	<,0001
Korf 26	b_1	-9,719	4,117	0,0185	-9,717	4,361	0,0264
	b_2	48,928	15,470	0,0016	48,754	16,321	0,0029
	b_3	0,759	0,024	<,0001	0,765	0,030	<,0001

Estimación de volumen por hectárea.

Las ecuaciones de volumen ensayadas son modelos de predicción, así, el volumen estimado se predice con los valores proyectados de las variables de estado (AMD , G y N) para una edad determinada. Se evaluaron una serie de relaciones y transformaciones de las variables mencionadas (logarítmicas, exponenciales, inversos y varias combinaciones de las mismas), utilizando el método *Stepwise* del procedimiento para regresiones (Proc Reg) del SAS (SAS, 2007).

La regresión seleccionada fue:

$$V = \exp(a_0 + a_1 \ln(AMD) + a_2 \ln(G) + a_3 \ln(G/N)) \quad (49)$$

Donde:

\ln es logaritmo natural, V es el volumen total por hectárea; AMD es Altura media dominante; G , área basal; N , número de árboles en pie y a_0, a_1, a_2, a_3 , parámetros a estimar. Al igual que la ecuación ajustada por Methol (2006), para parcelas de *E. globulus*, la estimación del volumen se efectuó mediante una ecuación exponencial que incluye la transformación \log del área basal, el número de árboles y la altura media dominante a la edad de interés, como variables explicativas. Para detectar el desvío de la homocedasticidad de los residuales se realizaron graficas de residuales crudos y de Pearson frente a los valores predichos de los modelos seleccionados.

Para corregir la heterocedasticidad presente, se ajustó la ecuación [43], empleado una función potencia del área basal de la parcela. La función x_i y el parámetro α se estimaron mediante el Proc Reg (SAS, 2007), siguiendo la metodología descrita anteriormente (Harvey, 1976 en Parresol, 2001). La ponderación de las observaciones se realizó utilizando la siguiente ecuación:

$$resi.y = \frac{resid.y}{\sqrt{x_i^\alpha}} \quad (50)$$

disponible en SAS Proc Model del programa estadístico SAS (SAS, 2007), siendo y la variable dependiente del modelo.

Validación

Una vez seleccionados y ajustados los modelos se procedió a su validación (*cross validation*). En el Cuadro 11 se presentan los valores del sesgo, la raíz del error cuadrático medio y la eficiencia ajustada del modelo para cada variable de estado.

Cuadro 11. Estadísticos de *cross validation* para el sistema de ajuste simultáneo

Ecuación	Variable	EF_{aj}	$RMSE$	\bar{E}
Korf (26)	AMD	0,98	0,86	-0,007
Levakovic (21)	G	0,96	1,11	-0,043
Pienaar y Shiver (36)	N	0,94	58,31	-1,045

Los valores observados no difieren en gran magnitud de los obtenidos en el ajuste de cada modelo, como se presentaron en el capítulo correspondiente a cada variable de estado. Siendo de muy buen calidad tanto en ajuste como en precisión.

Conclusiones

Los sub-modelos seleccionados para integrar el modelo dinámico de crecimiento y producción para plantaciones de *Eucalyptus globulus* con destino pasta de celulosa, han sido ajustados siguiendo metodologías invariantes respecto a la edad de referencia (*ADA*, *GADA* y variables *dummy*). Proporcionan curvas con mayor flexibilidad y representan con mayor fidelidad las trayectorias reales, levantando algunas de las limitantes de los modelos utilizados tradicionalmente.

Se seleccionó el modelo propuesto por Korf modificado por Cieszewski (2004) para la altura media dominante en su versión *GADA*, que produce curvas polimórficas de asíntotas variables, con un R^2_{aj} de 97,8% y $RCEM$ de 0,953 m. Cuya expresión es:

$$AMD_2 = e^{X_0} e^{\left[-\left(-9,719 + \frac{48,928}{X_0}\right)t^{-0,759}\right]}$$

Con:

$$X_0 = \frac{1}{2} t_0^{-0,759} \left\{ -9,719 + t_0^{0,759} \ln(AMD_0) + \sqrt{4 * 48,928 t_0^{0,759}} \right. \\ \left. + \left[-(-9,719) - t_0^{0,759} \ln(AMD_0) \right]^2 \right\}$$

Para área basal el modelo seleccionado fue el de Levakovic en su versión *ADA* anamórfica, con un R^2_{aj} de 97.4% y $RCEM$ de 1.217 m². Su expresión es la siguiente:

$$G_2 = G_1 \left[\left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 + \left(\frac{22,665 + t_1^2}{22,665 + t_2^2} \right) \right]^{0,943}$$

El modelo de Pieneer y Shiver (1981) fue el seleccionado para la evolución de la población, con un R^2_{aj} de 92.6% y $RCEM$ de 63,69 árboles.

$$N_2 = N_1 e^{-0,028(t_2^{0,990} - t_1^{0,990})}$$

El ajuste simultáneo (*SUR*) realizado debido la presencia de correlación entre los residuales de las ecuaciones seleccionadas, no reveló cambios en la significancia de los parámetros ajustados.

El empleo de la función de estimación de volumen permite la utilización de los modelos seleccionados en sistemas de apoyo a la gestión. La ecuación de predicción para el volumen por hectárea ajustada es:

$$V = \exp(0,922 + 0,599 * \log(AMD) + 1,005 * \log(G) + 0,243 * \log(G/N))$$

Donde

AMD= altura media dominante, G= área basal y N= número de árboles

La base de datos utilizada comprendía parcelas de entre 1 y 11 años, sobrepasando la edad de turno (8 años).

Bibliografía

- Alder D. 1980. Forest volume estimation and yield prediction. FAO Forestry Paper 22:2, 194.
- Álvarez JG, Castedo F, Ruiz AD, López CA, Gadov KV. 2004. A two-step mortality model for even-aged stands of *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwestern Spain). *Annals of Forest Science* 61, 439–448.
- Amaro A, Reed DD, Themido I, Tomé M. 1997. Stand growth modeling for first rotation *Eucalyptus globulus* Labill in Portugal. En: Amaro A, Tomé M. (Eds.), *Empirical and process based models for forest tree and stand growth simulation*. Oeiras, Lisboa (Portugal) Ediciones Salamandra. 99-110.
- Bailey RL, Borders BE, Ware KD, Jones EP. 1985. A compatible model relating slash pine plantation survival to density, age, site index, and type and intensity of thinning. *Forest Science*. 31(1):180-189.
- Bailey RL, Clutter JL. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*. 20(2): 155-159.
- Barrio M, Castedo F, Diéguez U, Álvarez JG, Parresol BR, Rodríguez R. 2006. Development of a basal area growth system for maritime pine in northwestern Spain using the generalized algebraic difference approach. *Canadian Journal of Forest Research*. 36(6): 1461–1474.
- Borders BE. 1989. Systems of equations in forest stands modeling. *Forest Science*. 35(2):548-556.
- Borders BE, Bailey RL. 1986. A compatible system of growth and yield equations for slash pine fitted with restricted three stage least squares. *Forest Science* 32:185–201.
- Castedo F, Diéguez U, Álvarez JG. 2007a. A growth model for *Pinus radiata* D. Don stands in north-western Spain. *Annals of Forest Science*. 64: 453-465.
- Castedo F, Diéguez U, Barrio M, Álvarez JG. 2007b. Modelling stand basal area growth for radiata pine plantations in Northwestern Spain using the GADA. *Annals of Forest Science*. 64:609-619.

- Castedo F, Álvarez JG. 2000. Construcción de una tarifa de cubicación con clasificación de productos para *Pinus radiata* D. Don en Galicia basada en una función de perfil del tronco. *Investigación Agraria: Sistemas y Recursos Forestales*. 9: 253-268.
- Cieszewski CJ. 2004. GADA derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richardss, Weibull, and other exponential functions. Athens, Georgia. University of Georgia PMRC- Technical Report 2004-5. 16 p.
- Cieszewski CJ. 2003. Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3=(axm)/(c + xm-1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *Forest Science*. 49: 539–554.
- Cieszewski CJ. 2002. Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *Forest Science*. 48: 7-23
- Cieszewski CJ, Bailey RL. 2000. Generalized Algebraic Difference Approach: Theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*. 46:116-126.
- Cieszewski CJ, Harrison M, Martin SW. 2000. Practical methods for estimating non-biased parameters in self-referencing growth and yield models. . Athens, Georgia. University of Georgia PMRC-Technical Report 2000-7. 16p
- Clutter JL, Forston JC, Pienaar LV, Brister GH, Bailey RL. 1983. *Timber management: a quantitative approach*. Wiley, New York. 333 p.
- Clutter JL, Jones EP. 1980. Prediction of growth after thinning in old-field slash pine plantations. USDA Forest Service Research. Paper SE-217
- Clutter JL. 1963. Compatible growth and yield models for Loblolly pine. *Forest Science*. 9 (3):354–371.
- Cordero R, Velilla E, Aedo D. 2004. A nonlinear growth and yield system of equations for *Eucalyptus globulus* using multistage methods. Lugo, España. En: Proceedings symposium the economics and management of high productivity plantations.
- Costas R, Mac Donagh P, Weber E, Figueredo S, Gómez C, Irschick P. 2006. Modelos predictivos de la producción de *Pinus taeda* empleando variables vinculadas con las podas. *Bosque*. 27: 98-107.

- Diéguez U, Castedo F, Álvarez JG, Rodríguez, R. 2005. Modelling mortality of Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) plantations in the northwest of Spain. *European Journal of Forest Research*. 124 (2):143–153.
- Draper NR, Smith H. 1981. *Applied regression analysis*. John Wiley y Sons, New York, 709 pp.
- Gadow KV, Real P, Álvarez JG. 2001. Modelización del crecimiento y la evolución de los bosques. Viena. IUFRO World Series Vol. 12:242 p.
- Galán R, de los Santos HM, Valdez JI. 2008. Crecimiento y rendimiento maderable de *Cedrela odorata* L. y *Tabebuia donnell-smithii* Rose en San José Chacalapa, Pochutla, Oaxaca. *Madera y Bosques* 14(2):65-82.
- Gallant AR. 1975. Seemingly unrelated nonlinear regressions. *Journal Econometrics*. 3: 35–50.
- García O, Ruiz F. 2003. A growth model for eucalypt in Galicia, Spain. *Forest Ecology and Management*. 173: 49-62.
- Goelz JCG, Burk TE. 1992. Development of a well-behaved site index equation: jack pine in north central Ontario. *Canadian Journal of Forest Research*. 22:776-784.
- Goelz JCG, Burk TE. 1996. Measurement error causes bias in site index equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 26:1586-1593.
- Inions GB. 1992. Studies on the growth and yield of plantation *Eucalyptus globulus* in southwest Western Australia. Perth, Australia. Ph.D. thesis, Universidad de Western Australia.
- Judge G, Hill C, Griffiths W, Lütkepohl H, Lee T. 1988. *Introduction to the theory and practice of econometrics*. 2nd Sub edition New York: John Wiley & Sons.
- Kozak A, Kozak RA. 2003. Does cross validation provide additional information in the evaluation of regression models? *Canadian Journal of Forest Research*. 33(6): 976-987
- López CA, Gorgoso JJ, Castedo F, Rojo A, Rodríguez R, Álvarez JG, Sánchez F. 2003. A height-diameter model for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Annals of Forest Science* 60:237-245.
- McDill ME, Amateis RL. 1992. Measuring forest site quality using the parameters of a dimensionally compatible height growth function. *Forest Science* 38: 409-429.

- Methol R. 2008. SAG Eucalyptus: Sistema de apoyo a la gestión de plantaciones orientadas a la producción de celulosa en Uruguay. Montevideo, Uruguay. Serie Técnica 173.
- Methol R. 2006. SAG globulus: Sistema de apoyo a la gestión de plantaciones de Eucalyptus globulus. Montevideo, Uruguay. Serie Técnica 158. INIA.
- Murphy PA. 1983. A nonlinear timber yield equation system for loblolly pine. *Forest Science*. 29: 582–591.
- Myers RH. 1986. *Classical and modern regression with applications*. Second edition. Duxbury Press, Belmont, California.
- Neter J, Kutner MH, Nachtsheim CJ, Wasserman W. 1998. *Applied linear statistical models*. 4th edition. McGraw-Hill, New York.
- Ni C, Zhang L. 2007. An analysis and comparison of estimation methods for self-referencing equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 37(8): 1472-1484.
- Parresol BR. 2001. Additivity of nonlinear biomass equations. *Canadian Journal of Forest Research*. 31(5): 865-878.
- Parresol BR. 1999. Assessing tree and stand biomass: a review with examples and critical comparisons. *Forest Science*. 45(4): 573-593.
- Pienaar LV, Shiver BD. 1981. Survival functions for site-prepared slash pine plantations in the flatwoods of Georgia and northern Florida. *South Journal Applied Forestry*. 5:59-62.
- Pienaar LV, Page HH, Rheney JW. 1990. Yield prediction for mechanically site-prepared slash pine plantations. *Southern Journal of Applied Forest*. 14(3):104-109.
- Prodan M, Peters R, Cox F, Real P. 1997. *Mensura Forestal. Serie Investigación y Educación en Desarrollo Sostenible*. San José, Costa Rica, 561 p.
- Richards FJ. 1959. A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany* 10: 290-300.
- Sanquetta CR. 1996. *Fundamentos biométricos dos modelos de simulação florestal*. Curitiba: Universidade Federal do Paraná/FUPEF. 49p.

- SAS (Statistical Analysis System Institute). 2007. User's guide release 9.2 edition. Cary: SAS Institute Inc.
- Schumacher FX. 1939. A new growth curve and its application to timber yield studies. *Journal of Forestry*. 37:819-820
- Sharma RP, Brunner A, Eid T, Øyen BH. 2011. Modelling dominant height growth from national forest inventory individual tree data with short time series and large age errors. *Forest Ecology and Management*. 262(12): 2162-2175.
- Soares P, Tomé M. 2002. Height-diameter equation for first rotation eucalyptus plantations in Portugal. *Forest Ecology and Management*. 166: 99-109.
- Soares P, Tomé M, Skovsgaard JP, Vanclay JK. 1995. Evaluating a growth model for forest management using continuous forest inventory data. *Forest Ecology and Management*. 71(3): 251-265
- Strandgaard M, Wang Y, Chong D, Wild I, Baker T. 2005. Blue gum plantation management system. Final Report for Project 03.3903. Melbourne, Australia. Forest and Wood Products Research and Development Corporation.
- Sullivan AD, Clutter JL. 1972. A simultaneous growth and yield model for loblolly pine. *Forest Science* 18:76-86
- Tomé M, Falção A, Amaro A. 1997. globulus v.1.0.0: a regionalized growth model for Eucalyptus plantations in Portugal. En: Ortega A, Gezan S (eds) IUFRO conference: modelling growth of fast-grown tree species.
- Tomé M, Falção A, Carvalho A, Amaro A. 1995. A global growth model for eucalypt plantations in Portugal. *Lesnictvi-Forestry* 41(4): 197-205.
- Tomé M, Ribeiro F, Soares P. 2001. O modelo globulus 2.1. Relatórios Técnico-científicos do GIMREF, nº1/2001. Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior de Agronomia, Departamento de Engenharia Florestal. 69 pp.
- Van Deusen PC. 1988. Simultaneous estimation with a squared error loss function. *Canadian Journal of Forest Research*. 18: 1093–1096.

- Van Laar A, Akça A. 2007 Forest Mensuration. Managing Forest Ecosystems, Volume 13. Springer. 383 p.
- Vanclay JK, Skovsgaard JP. 1997. Evaluation of forest growth models. *Ecological Modeling* 98: 1-12.
- Vanclay, J.K. 1994. Modelling forest growth and yield applications to mixed tropical forest Wallingford: CAB International. 312 p.
- Vargas B, Aguirre O, Corral J, Crecente F, Diéguez-Aranda U. 2013. A dominant height growth and site index model for *Pinus pseudostrobus* Lindl. in northeastern Mexico. *Agrociencia*. 47(1): 91-106.
- Wang Y, Baker TG. 2007. A regionalised growth model for *Eucalyptus globulus* plantations in south-eastern Australia. *Australian Forestry*. 70 (2):93-107.
- Wong J, Baker T, Duncan M, Mcguire D, Bulman P. 2000. Forecasting growth of key agroforestry species in south-eastern Australia. Rural Industries Research and Development Corporation. Australia. Publ. 00/68.