Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna

Un Modelo de Planificación para mejorar la eficiencia de una actividad comercial

TRABAJO FIN DE GRADO

presentado por

HIMAR GONZÁLEZ PACHECO

La Laguna, 15 de junio de 2016

La memoria “Un Modelo de planificación para mejorar la eficiencia de una actividad comercial” ha sido realizada en el curso 2015–2016 por Dña. Himar González Pacheco al objeto de ser presentada por ésta como “Trabajo de Fin de Grado”. Como director del trabajo, otorgo el visto bueno a su defensa pública.

En La Laguna, a 15 de junio de 2016.

Fdo. David Alcaide López de Pablo

Índice general

Introducción

Este trabajo viene motivado por la realidad existente en una empresa que podemos considerar de la categoría de Pequeña y Mediana empresa. Estamos interesados en optimizar el funcionamiento de la empresa en el sentido de obtener mejores rendimientos y beneficios con un mayor descanso y calidad de vida de los trabajadores.

Con este propósito se ha pretendido construir un modelo científico que caracterice y represente adecuadamente la empresa y su funcionamiento. Hemos utilizado para ello los conocimientos obtenidos en los estudios de Grado, especialmente en el área de Estadística e Investigación Operativa. Con la construcción del modelo científico se pretende sugerir a la empresa posibles alternativas de actuación en su eficiencia y rendimiento facilitando una mejor calidad de vida de los trabajadores de dicha empresa.

El presente trabajo se estructura en cinco capítulos. En el capítulo 1 hacemos una introducción a los conceptos básicos en la construcción de modelos de planificación. En el capítulo 2 nos centramos en la formulación del problema, donde describimos el funcionamiento de una actividad comercial y de las labores para dicho funcionamiento. En el capítulo 3 desarrollamos los casos estudiados y modelos planteados. En él realizaremos una descripción de los trabajos, descripción de las máquinas y descripción de los objetivos a conseguir en cada uno de las empresas consideradas. En el siguiente capítulo, capítulo 4 planteamos un algoritmo y sugerimos una solución óptima para implantar en dichas empresas. En el capítulo 5 se presentan algunas conclusiones de este estudio y posibles líneas de investigación futura.
La Memoria termina con un apéndice donde se detalla el proceso de obtención de soluciones para el problema de la actividad comercial del abastecimiento de víveres.

Abstract

This report deals with the problem of improving the performance of a small-medium size business. The management is interested in providing better rest conditions for their employees, in order to increase efficiency and productivity.

Scheduling Models are used to characterise and solve the considered problems. As a result, solutions are proposed which could be easily applied to the considered commercial business.

The ideas and developments done in this report could be also extended and applied to other commercial companies that could be interested.

Capítulo 1

Conceptos básicos de Planificación.

1.1. Introducción a la Planificación.

Cuando hablamos de *Planificación* hacemos referencia a un conjunto de modelos y técnicas de Investigación Operativa que permiten resolver muchos problemas de la vida cotidiana como los que surgen en: la industria, el comercio, las actividades financieras, la sanidad, los sectores administrativos, etc. En todos estos ámbitos surgen de manera frecuente situaciones en las que se precisa asignar, a lo largo de un periodo de tiempo, un conjunto de tareas, trabajos o actividades a ciertas entidades, sean éstas personas o máquinas, capaces de realizarlas, describiendo la mejor manera (óptima) o la forma más adecuada de asignar dichas entidades a dichas tareas, trabajos o actividades.

En *los problemas de Planificación* siempre aparecen tres componentes muy bien diferenciadas que podemos resumir como ¿qué?, ¿quién? y ¿para qué?.

El ¿qué? hace referencia a qué es lo que hay que hacer, qué trabajos o actividades se pretenden realizar. El ¿quién? indica quién o quienes, qué personas o qué máquinas en concreto tienen que hacer dichos trabajos o actividades. Finalmente el ¿para qué? explica los objetivos que se persiguen haciendo dichas actividades o trabajos. Sobre este esquema de tres componentes resulta que muchos problemas reales admiten una aproximación que puede ajustarse bien con un modelo de planificación.

Estas tres componentes de los problemas de *Planificación* aparecen tanto en los problemas que en la literatura en inglés denominamos *"Project Management"* (Planificación de Proyectos) como en la que denominamos *"Scheduling"*. En este sentido, tanto unos como otros son problemas de Planificación. Lo que ocurre es que, a la hora de modelizarlos, usualmente se han adoptado esquemas de modelización distintos.

En el presente trabajo nos centramos en los modelos de *"Scheduling"*, sin que ellos excluyan que muchas de las ideas que desarrollemos sean también aplicables al otro gran grupo de modelos de planificación *"Project Management"*.

Las entidades capaces de realizar los trabajos o actividades reciben el nombre genérico en la literatura de *"máquinas"*, independientemente de que éstas sean físicamente personas, máquinas, fases de un proceso productivo, u otras entidades de cualquier naturaleza. Por su parte, las actividades o trabajos a realizar reciben en la literatura especializada el nombre genérico de *"trabajos"*.

Finalmente el criterio o criterios de optimización se suele denominar simplemente de dicha manera, es decir, como *criterio o criterios de optimización*. Esta separación en tres componentes bien diferenciadas de los problemas de planificación dio pie a que, en 1979, Graham y colaboradores propusieran un esquema triparamétrico $\alpha|\beta|\gamma$. Este esquema sirve tanto para modelizar los problemas como para catalogar los diferentes modelos de Planificación. Dicho esquema ha sido ampliamente aceptado entre los investigadores y por la literatura especializada pues, además, tiene la ventaja de que los nuevos problemas y modelos de Planificación que han ido sucesivamente apareciendo han podido clasificarse y catalogarse dentro de este mismo esquema triparamétrico.

Los problemas de Planificación pueden, en la mayoría de los casos, modelizarse de la siguiente manera: se precisan realizar n trabajos, tareas o procesos J_j $(j = 1, \ldots, n)$ para lo que se dispone de m máquinas o procesadores M_i $(i = 1, \ldots, m)$. Siempre que no haya lugar a confusión hablaremos de *"trabajo j"* en lugar de J_j y de *"máquina i"* en vez de M_i.

Suponemos unas hipótesis básicas de no simultaneidad, es decir, se supone que cada máquina es incapaz de procesar varios trabajos simultáneamente y que, en un instante dado, cada trabajo puede realizarse en a lo sumo en una máquina. Nótese que éstas últimas hipótesis de no simultaneidad de trabajos distintos en una misma máquina, y de no simultaneidad de varias máquinas distintas actuando sobre un mismo trabajo, pueden en ocasiones relajarse para facilitar la construcción de algoritmos para la resolución de determinados problemas. Estos algoritmos se *"mueven"* por soluciones no factibles. La solución que finalmente proponen dichos algoritmos se reconvierte posteriormente en una solución alternativa con mismo valor de la función objetivo y que se respeta las hipótesis básicas de no simultaneidad, es decir, es una solución factible.

Obviamente, diferentes características de los trabajos y de las máquinas junto con distintos criterios de optimalidad, originan una gran variedad de modelos de Planificación de los catalogamos con la clasificación triparamétrica propuesta por Graham et al. $(\alpha|\beta|\gamma)$. En el primer parámetro se recogen las características de las *máquinas* i; en el segundo las de los *trabajos* j a procesar; y el último indica los *criterios* y el modo de *optimización* considerados.

Cada *trabajo* J_j tiene asociado los siguientes datos (véase Figura 1.1):

- Un número m_j de *operaciones* $O_{1j}, O_{2j}, \ldots, O_{m_j j}$ en las que puede dividirse el *trabajo* J_j, de manera que cada operación es realizada por una única máquina. Definimos $\mu_{ij} = k$ si la operación O_{ij} debe realizarse en la máquina M_k. Si el *trabajo j* consta de una operación $(m_j = 1)$ podemos denotar con $\mu_j = k$ el hecho de que dicha operación se asigna a la máquina M_k.

- Unos *tiempos de proceso* p_j ó p_{ij} $(i = 1, \ldots, m)$ necesarios para procesar el *trabajo j* en cualquier máquina $(p_{ij} = p_j \ \forall i)$ o en la máquina M_i $(i = 1, \ldots, m)$.

- Una *fecha de disponibilidad* r_j, a partir de la cual puede comenzar a procesarse el *trabajo j*. Si $r_j = 0 \ \forall j$, todos los trabajos están disponibles desde el mismo instante de tiempo y estaremos ante un problema de planificación estático, mientras que en caso de distintas fechas de disponibilidad, nos encontramos ante problemas de planificación dinámicos.

- Una *fecha de comienzo* S_j, que indica el instante de tiempo en el que comienza el procesamiento del *trabajo j*, no es una constante, depende de la planificación.

- Una *fecha límite o de vencimiento* d_j, en la que el *trabajo j* debería estar terminado para no incurrir en tardanza. Dicha fecha se denomina *"due date"* en la literatura en inglés. Si dicha fecha debe cumplirse estrictamente para obtener factibilidad la denominamos *"fecha límite estricta" ("deadline")*.

- Un *peso o ponderación* ${\omega_j}^k$ que indica la importancia relativa del *trabajo j* con respecto a los otros trabajos en el criterio k con $1 < k < K$, siendo K el número de criterios considerados.

- Una *función de coste real* ${f_j}^k$ por cada criterio k con $1 < k < K$, donde ${f_j}^k(t)$ es el coste asociado, según el criterio k, al *trabajo j* cuando se completa en el instante de tiempo t. Dicha función dependerá, en general, de los parámetros anteriores.

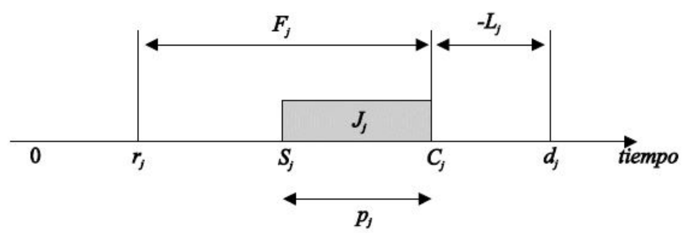


Figura 1.1: Datos y variables asociados a un *trabajo j*

En el caso determinístico los datos m_j, p_j, r_j, d_j, ω_j^k de cada *trabajo j* son constantes conocidas mientras que en el caso estocástico pueden aleatorizarse dichos valores. En este proyecto estamos en el caso determinístico.

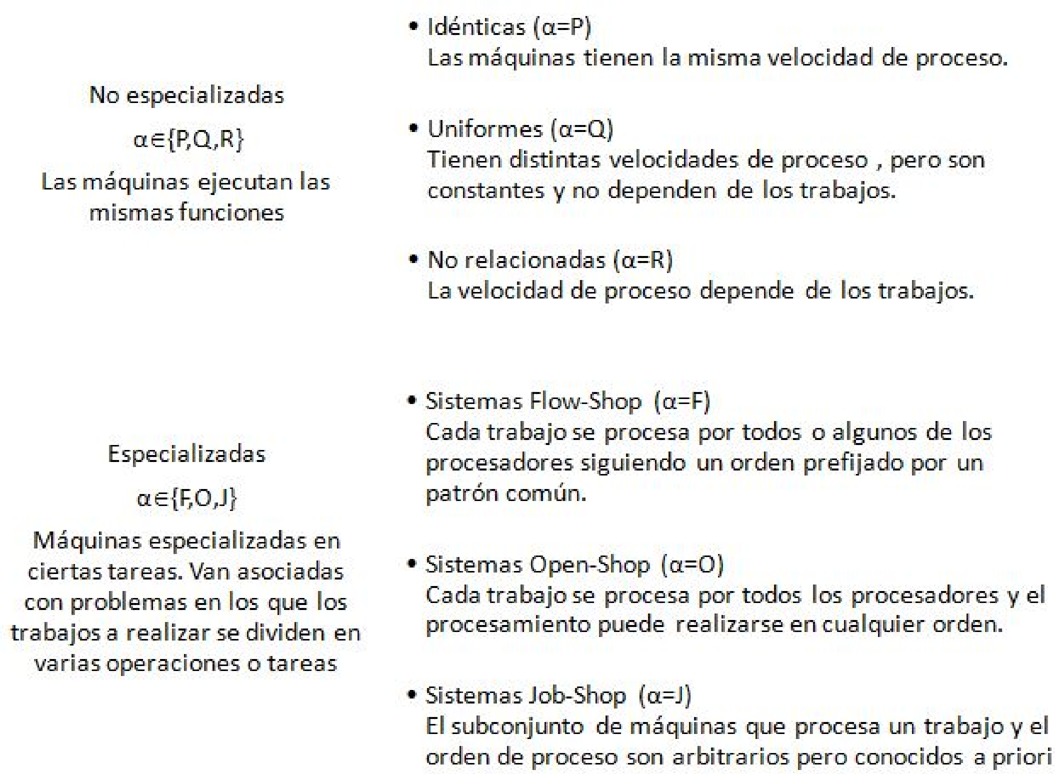
La Figura 1.1 es un ejemplo sencillo de diagrama de Gantt. Un diagrama de Gantt es una herramienta gráfica que se emplea en la gestión de proyectos para representar las soluciones, es decir, el modo de planificar y programar tareas, trabajos o actividades a lo largo de un periodo determinado de tiempo. Plasma de manera muy visual, a través de un cronograma de barras horizontales, los trabajos que forman parte de un proyecto y su temporalización, es decir, su duración y secuencia y la fecha de finalización prevista. También indica que máquina hace cada trabajo.

Además, esta herramienta gráfica permite verificar si los trabajos o actividades se están realizando según la programación, cronograma o planificación que se ha establecido para la realización de los trabajos y de los recursos destinados al proyecto. Este tipo de diagramas los utilizaremos en la presente memoria.

Comentamos ahora más específicamente los valores de los parámetros $\alpha|\beta|\gamma$ que hacen referencia a los diferentes *problemas de planificación.*

1.2. Características de las máquinas.

Podemos distinguir *los problemas de planificación* en los que se dispone de una única máquina ($\alpha = 1$) de aquellos problemas en los que podemos utilizar varias máquinas. Desde que se dispongan dos o más máquinas cabe la posibilidad de que varias de ellas ejecuten trabajos u operaciones de diferentes trabajos simultáneamente, y entonces podremos hablar de paralelismo. Además, será conveniente distinguir los problemas en los que las máquinas ejecutan las mismas funciones *(máquinas no especializadas)* de aquellos problemas en los que ciertas máquinas están especializadas en tareas determinadas y no pueden realizar otras *(máquinas especializadas)*. Veamos estas distinciones con el siguiente esquema:



En el siguiente apartado comentamos más detalladamente las características de las máquinas no especializadas.

1.2.1. Máquinas no especializadas $\alpha \in \{1, P, Q, R\}$.

En el caso de máquinas no especializadas se considera que cada trabajo consta de una única operación que se puede ejecutar en cualquier máquina, $m_j = 1 \; \forall j$. Pero aunque haya una sola operación, el tiempo de procesamiento p_{ij} del *trabajo j* en la *máquina i* puede variar de una máquina a otra.

- $\alpha = 1$: Es el caso de una *única máquina*, $m = 1$, y por tanto $p_{1j} = p_j \; \forall j$ que denota el tiempo de proceso del *trabajo j* en dicha máquina.

- $\alpha = P$: Es el caso de *Máquinas no especializadas en paralelo e idénticas*, es decir, con la misma velocidad de proceso y, por tanto, $p_{ij} = p_j \; \forall i$. Esto quiere decir que, fijado un trabajo a procesar, cualquier máquina es capaz de ejecutarlo y el tiempo que emplea en ello es el mismo para todas las máquinas.

- $\alpha = Q$: Es el caso de *Máquinas no especializadas en paralelo y uniformes* en el sentido de que el tiempo que tarda la máquina M_i en procesar completamente el *trabajo* j es $p_{ij} = \frac{p_j}{q_i}$, donde q_i es la velocidad constante de la máquina M_i que no depende de j. En este caso p_j denota el tiempo de procesamiento del *trabajo* j por una máquina M que se toma como referencia, q_i es el número de veces que M_i es más veloz que M de manera que p_{ij} es el tiempo de proceso del *trabajo* j en la máquina M_i. Esto quiere decir que cada máquina tiene distinta velocidad de proceso, pero éstas son constantes características de las máquinas y no depende de los trabajos. De manera que, si una máquina es dos veces más rápida que otra para un trabajo, será también dos veces más rápida para cualquier otro trabajo.

- $\alpha = R$: Es el caso de *Máquinas no especializadas en paralelo y no relacionadas* donde la velocidad de proceso de cada máquina depende, no solo de la máquina, sino también de los trabajos. Esto quiere decir que las velocidades de ejecución difieren de una máquina a otra y depende también del trabajo en ejecución. Por ejemplo, fijado un trabajo a procesar, todas las máquinas son capaces de ejecutarlo, pero si una máquina A es más rápida que otra B, para un determinado trabajo, puede ocurrir que para otro trabajo B sea más rápida que A.

Ahora veamos las características de las máquinas especializadas.

1.2.2. Máquinas especializadas $\alpha \in \{F, O, J\}$.

En el caso de *máquinas especializadas*, no todas las máquinas son capaces de realizar todas los trabajos, sino que están especializadas en algunos de ellos. Estos modelos van asociados a problemas donde cada trabajo j se divide en m_j operaciones $O_{1j}, O_{2j}, \ldots, O_{mj}$ que requieren máquinas especializadas para su realización. En estos problemas m_j no tiene que ser necesariamente 1, e incluso puede presentarse el caso $m_j \geq m$ con lo que habrá alguna máquina que realice varias operaciones de una mismo trabajo.

- $\alpha = F$: Se tiene un *sistema flow-shop* en el que cada *trabajo* j consiste en una cadena de $m_j = m$ operaciones $O_{1j}, O_{2j}, \ldots, O_{mj}$. O_{ij} se procesa en la máquina M_i en un tiempo p_{ij}. Dicho orden es relevante, todos los trabajos tienen que seguir la misma trayectoria de máquinas. No es necesario que un *trabajo* j pase por todas las máquinas, si el *trabajo* j no se procesa por la *máquina* i consideramos $p_{ij} = 0$.

- $\alpha = O$: Se tiene un *sistema open-shop* en el que cada *trabajo* j consiste en una cadena de $m_j = m$ operaciones $O_{1j}, O_{2j}, \ldots, O_{mj}$, donde O_{ij} se procesa en la *máquina* i en un tiempo p_{ij}. Es decir, se han numerado las operaciones del *trabajo* j de modo que la operación O_{ij} se realiza en la *máquina* i, $\mu_{ij} = i \; \forall j$. A diferencia con los problemas flow shop, el orden en que se realicen las operaciones es irrelevante.

- $\alpha = J$: Se tiene un *sistema job-shop* en el que cada *trabajo* j consiste en una cadena de m_j operaciones $O_{1j}, O_{2j}, \ldots, O_{mj}$. No tiene porque ser $m_j = m$. Puede presentarse la situación en la que alguna máquina procese dos o más operaciones de un mismo trabajo. La trayectoria de máquinas de cada trabajo está dada pero no tiene que ser la misma para todos los trabajos. Es decir, O_{ij} se procesa en la máquina μ_{ij} en un tiempo p_{ij}. Si una máquina realizase más de una operación de un trabajo dado, es lógico pensar que no ejecutaría dos operaciones seguidas de un mismo trabajo porque de lo contrario dichas operaciones podrían condensarse en una sola. Es decir, $\mu_{i-1,j} \neq \mu_{i,j}$ $\forall i = 2, \ldots, m_j$ y $\forall j = 1, \ldots, n$.

Cuando el parámetro α tome alguno de los valores anteriores, a excepción de $\alpha = 1$, entenderemos que el número m de máquinas es arbitrario pero fijo. Así, por ejemplo, si $\alpha = P$ estamos ante un problema en el que el número m de máquinas puede ser cualquier valor fijo que elijamos, pero si $\alpha = P2$ estamos ante un problema con dos máquinas.

A continuación veamos los parámetros que caracterizan a los trabajos.

1.3. Características de los trabajos.

Las condiciones impuestas por los trabajos para su ejecución se recogen en el segundo campo β, que se estructura a su vez en diversos parámetros en relación, entre otros, a los siguientes conceptos característicos de los trabajos:

- *Interrupciones.* Permitir interrupciones significa que el procesamiento de cualquier operación puede interrumpirse y continuarse más tarde. Las interrupciones tienen sentido sólo si se puede retomar el trabajo en el estado en el que se había dejado. No interesa dejar un trabajo si retomarlo nos obliga a repetir lo que de él habíamos hecho. Los modelos con interrupciones se denotan con el término *pmtn* en el campo β. Cabe destacar que en los casos estudiados en este proyecto los trabajos son interrumpibles.

- *Relaciones de precedencia.* Caracterizan las relaciones de dependencia o precedencia entre trabajos. Dos trabajos serán dependientes si el comienzo de la ejecución de uno de ellos está condicionada a la conclusión previa del otro. Estas relaciones se suelen representar con un grafo dirigido acíclico que, en ocasiones, puede ser tipo árbol dirigido o arborescencia. Un árbol dirigido es del tipo "*outtree*" (o de ramificación) cuando a lo sumo tiene un vértice con grado interior igual a cero (vértice raíz), el resto de vértices tiene grado interior igual a 1. Cuando se invierte la orientación de los árboles dirigidos tipo outtree tenemos los árboles dirigidos tipo "*intree*" (o de ensamble). Las precedencias se representan en los modelos con el término *prec*. Cuando el grafo G de precedencias es un árbol se denota como *tree*, especificándose intree ó outtree, según que dicho árbol sea un árbol de ensamble (de cada vértice sale a lo sumo un arco), ó un árbol de ramificación (a cada vértice llega a lo sumo un arco), respectivamente. En capítulos siguientes representamos mediante grafos las relaciones de precendencia que existen en los trabajos a realizar en las empresas consideradas.

- Existencia de *fechas de disponibilidad.* Permite distinguir entre los problemas estáticos , en los cuales todos los trabajos están disponibles desde el instante inicial, de los problemas dinámicos, en los que cada trabajo tiene su propio instante de disponibilidad.

- *Cotas al número de operaciones.* Especialmente en los problemas job-shop donde el número de operaciones puede ser superior al número de máquinas, puede ser conveniente acotar superiormente al número de operaciones. En los problemas planteados no hay cotas al número de operaciones

- *Tiempos de proceso.* Se distingue cuando los tiempos de proceso son unitarios de cuando son generales. Algunos problemas son resolubles en tiempo polinomial cuando los tiempos de proceso son unitarios y no lo son con tiempos de proceso generales. En las empresas consideradas los tiempos de proceso de los diferentes trabajos son conocidos y difieren entre ellos.

- *Recursos adicionales.* En ocasiones, se puede considerar en un modelo de planificación la existencia de recursos adicionales. Cabe destacar que las máquinas y los recursos adicionales son conceptos distintos desde el mismo momento en que se empieza a construir el modelo de planificación, ya que, lo que podemos considerar como *máquina* en un modelo, quizás en otro modelo lo podamos considerar como *recurso adicional*, y viceversa. En los casos que vamos a estudiar en este proyecto no disponemos de recursos adicionales en el sentido en el que estos recursos son considerados en los modelos de planificación.

1.4. Criterios de optimalidad.

El tercer y último campo del esquema triparamétrico propuesto por Graham et al.(1979) expresa el número de funciones objetivo a considerar, sus características y, en caso de más de un criterio, el tipo de optimización en el que se está interesado, es decir, si se buscan puntos eficientes, puntos extremos, realizar una optimización simultánea o una optimización jerárquica. Recordamos que, fijada la planificación, podemos calcular para cada *trabajo* j las siguientes variables (véase la Figura 1.1):

- *Tiempo de completación* C_j, que indica el instante de tiempo en el que el procesamiento del *trabajo* j concluye.

- *La demora* $L_j = C_j - d_j$, donde si es positiva indica la tardanza en la completación del *trabajo* j, mientras que, la conclusión del trabajo anticipadamente a su fecha límite d_j se indica por una demora negativa ó adelanto, cuyo valor absoluto es la cantidad de tiempo anticipada.

- *La tardanza* $T_j = max\{0, L_j\}$, indica el retraso que hay en la ejecución del *trabajo* j. El indicador de trabajo tardío que valdrá 1 si el trabajo no se concluye antes de su fecha límite, es decir:

$$U_j = \begin{cases} 1, & si\ C_j > d_j \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En función de las variables anteriores se definen las funciones objetivo a minimizar. Estas pueden hacer referencia al coste máximo o al coste total. Sea pues γ^k uno de los criterios considerados, con $1 \leq k \leq K$, siendo K el número total de criterios que intervienen en el problema. Dicha función será, en general, una función $\gamma^k = \gamma^k(C_1, \ldots, C_n)$ de los tiempos de completación $(C_j,\ j = 1, \ldots, n)$. Usualmente, aunque no siempre, se trabaja con funciones crecientes de los tiempos de completación. Este tipo de funciones se denominan funciones regulares. Dependiendo de la naturaleza del problema interesará o no incorporar tiempo ocioso en la máquina. Normalmente suelen ser funciones de tipo máximo ($\gamma^k = f^k_{max} = max_{j=1,\ldots,n}\{f^k_j\}$), o de tipo suma ($\gamma^k = \sum_{j=1}^{n} f^k_j$), donde $f^k_j = f^k_j(C_j)$ es el costo asociado, en el criterio k, a terminar el *trabajo* j en el instante de tiempo C_j. Entre estas funciones de tipo máximo a minimizar es especialmente importante el denominado en la terminología anglosajona *"makespan"*, o tiempo de completación de todos los trabajos $C_{max} = max_{j \in J}\{C_j\}$, siendo J el conjunto de trabajos a planificar.

Cabe destacar que la clasificación triparamétrica $\alpha|\beta|\gamma$ es una clasificación abierta. Los nuevos problemas de planificación que se han investigado a lo largo de los años, y que se siguen investigando hoy en día, se han ido incorporado a versiones extendidas y ampliadas de dicha clasificación.

Capítulo 2

Ejemplos sencillos de formulación de problemas de planificación

Toda actividad comercial conlleva una prestación de servicio y/o una venta de bienes o productos a un público interesado o necesitado de dichos bienes y/o servicios. Para un desarrollo de la actividad se precisa básicamente la realización adecuada de tres tipos de labores principales:

- Labores de abastecimiento y previas a la apertura (previo a la apertura del comercio o actividad comercial).
- Labores de atención al público (durante el desarrollo de la actividad comercial propiamente dicha).
- Labores de balance (labores de cierre y posteriores al cierre).

Por ello, a la hora de formular un modelo que represente adecuadamente la realidad inherente en cualquier actividad comercial, tenemos que caracterizar y formalizar las labores comentadas previamente siguiendo las conocidas pautas de cualquier proceso de modelización.

Entendemos por labores de abastecimiento aquellas destinadas a abastecer y dotar al comercio de lo necesario para su apertura y venta o prestación de servicio al público, son labores previas a la apertura del comercio o de la actividad.

Por ejemplo, en una tienda de ropa una labor de abastecimiento sería disponer en la tienda de el género que se va a vender. En el trabajo de taxista podemos considerar como abastecimiento el disponer de gasolina suficiente antes de empezar la jornada y tener el coche en buen estado.

Otras labores de abastecimiento que podemos mencionar serían: contacto con proveedores y petición de materias primas, transporte al centro de venta, incorporación de los trabajadores al puesto de trabajo, apertura del establecimiento, compra de utensilios y productos de limpieza, cambio de moneda, papel para el datáfono y facturas, etc.

Entendemos por labores de atención al público a aquellas labores, tareas o trabajos realizados durante el desarrollo de la actividad comercial. Dichas actividades tienen como propósito atender o recibir directamente las demandas generadas por los clientes, lo cual incluye el buen mantenimiento del establecimiento para ofrecer los servicios necesarios.

Por ejemplo, en una tienda de ropa la labor de atención al público es mantener colocada la ropa en sus respectivos expositores y percheros, y atender a los clientes que soliciten asistencia del trabajador. En el trabajo de taxista recoger y dejar a los clientes en el destino solicitado lo podemos considerar como labor de atención al público.

Otras labores de atención al público pueden ser: el mantenimiento y limpieza del local, la confección o preparación de bienes o productos de consumo, la colocación de los productos, tener a punto los datáfonos, etc.

Por último entendemos por labores de balance a todas aquellas actividades que se realizan después de finalizar la actividad comercial como pueden ser labores de venta, facturación, caja, contabilidad, inventario y planificación de las nuevas jornadas de trabajo.

Como ejemplo, tanto en la tienda de ropa como en el ejemplo de taxista una labor de balance puede ser realizar el cierre de caja y contabilidad, respectivamente.

Otras labores de balance que podemos citar serían: cobro en efectivo, cobro con datáfono, emisión de facturas, contabilidad, cierre de caja, inventario, planificación para la nueva jornada, limpieza del local, etc.

Las labores comentadas de abastecimiento, atención al público y balance son tareas o labores que hay qué hacer, y pueden entenderse como respuesta a la pregunta ¿qué?.

Por ejemplo, ¿qué tiene que hacer el taxista?: poner gasolina en el coche (labor de abastecimiento), llevar al cliente al destino solicitado (labor de atención al público), hacer la contabilidad al final de la jornada (labor de balance). ¿Qué tiene que hacer el dependiente de la tienda de ropa?: llegar a la tienda y ponerse el uniforme (labor de abastecimiento), tener cambio en la caja (labor de atención al público), cierre de caja (labor de balance).

En el modelo que estamos construyendo para formular el problema no sólo se pretende contestar a la pregunta ¿qué? sino también a las preguntas ¿quién? y ¿para qué?.

El ¿quién? hace referencia a las personas, entidades, máquinas o dispositivos que deben realizar las diferentes tareas, actividades, labores o trabajos. Así, en el ejemplo del taxista está claro que el propio taxista es quién tiene que hacer todas las actividades propias de su trabajo. Y en el ejemplo de la tienda de ropa pueden ser vendedores y encargados de comercio quiénes tienen que hacer el trabajo en dicha tienda.

El ¿para qué? se refiere a los objetivos que se pretenden conseguir con los diversos trabajos. En una actividad comercial se busca mejorar la eficiencia, productividad y rentabilidad de la empresa y de alguna manera el bienestar del trabajador. Así, en el ejemplo del taxista, el objetivo que tiene dicho profesional es conseguir realizar el mayor número de trayectos para de esta forma tener mayor beneficio. De la misma manera, en una tienda de ropa el objetivo es vender el mayor número de prendas y que el cliente quede satisfecho de ello.

Este tipo de modelos con los que se representa y se responde a las preguntas ¿qué?, ¿quién? y ¿para qué? se conocen en la literatura científica especializada como Modelos de Planificación de actividades o trabajos o, simplemente como Modelos de Planificación. Estos modelos incluyen lo que en la terminología anglosajona se denomina “Scheduling Models” y “Project Management” (Modelos de Programación y Gestión de Proyecto).

Las personas, entidades, máquinas o dispositivos qué realizan las actividades se suelen conocer en la literatura con el nombre genérico de máquinas. Mientras que las labores o actividades a realizar se denotan con el nombre genérico de trabajos. Y el motivo o motivos por el cual se realizan dichos trabajos se menciona como criterio o criterios de optimización.

Así, los modelos de planificación pueden establecerse con las respuestas a las preguntas ¿qué?, ¿quién? y ¿para qué?, y suelen considerarse de manera triparamétrica con tres parámetros $\alpha|\beta|\gamma$. Donde el parámetro α recoge las características de las máquinas, el parámetro β la de los trabajos y el parámetro γ la de criterio o criterios de optimización.

Así, por ejemplo, en la actividad profesional de taxista podemos considerar un modelo de planificación con $n = 5$ trabajos donde cada trabajo j con $j = 1, 2, 3, 4, 5$ lo podemos describir con el siguiente Cuadro 2.1.

Trabajo j	Descripción
$j = 1$	Poner gasolina
$j = 2$	Ir a su parada
$j = 3$	Transportar a los clientes
$j = 4$	Hacer contabilidad al fin de la jornada
$j = 5$	Regresar a su casa

Cuadro 2.1: Descripción de los trabajos en el ejemplo del taxista

En este modelo es el propio taxista el que tiene que hacer todo, luego se considera $m = 1$ una única máquina.

En el segundo ejemplo de la tienda de ropa, podemos considerar $n = 9$ trabajos y $m = 2$ máquinas. El Cuadro 2.2 describe los trabajos a realizar, y el Cuadro 2.3 describe las máquinas.

Trabajo j	Descripción
$j = 1$	Llegar
$j = 2$	Ponerse el uniforme
$j = 3$	Comprobar que la tienda está en buenas condiciones para su apertura
$j = 4$	Verificar que hay cambio de caja
$j = 5$	Abrir tienda
$j = 6$	Atención al público
$j = 7$	Cerrar caja
$j = 8$	Recoger tienda
$j = 9$	Volver a casa

Cuadro 2.2: Descripción de los trabajos en el ejemplo de la tienda de ropa

Máquina i	Descripción
$i = 1$	Encargado
$i = 2$	Dependiente

Cuadro 2.3: Descripción de las máquinas en el ejemplo de la tienda de ropa

En la próxima sección nos dedicaremos a plantear modelos de planificación para los problemas que han motivado la realización de la presente memoria. Dichos modelos tendrán un rango de aplicabilidad para cualquier otra actividad comercial.

Capítulo 3

Casos estudiados y modelos propuestos.

En esta sección se consideran diferentes actividades comerciales en las que hemos aplicado los conceptos básicos de planificación y las líneas generales de formulación de problema descritos en secciones anteriores, para ello caracterizamos en cada caso las correspondientes labores de abastecimiento, labores de atención al público y labores de balance, que nos referiremos a ellas como trabajos del ANTES, trabajos del DURANTE EL SERVICIO, y como trabajos del DESPUÉS.

3.1. Caso específico de una cafetería y un kiosco.

Se ha considerado la situación existente en una Pequeña y Mediana Empresa que gestiona una cafetería y un kiosco. Ambos negocios son de la misma empresa pero podemos darle un tratamiento independiente y diferenciado a cada uno de ellos.

Hay dos personas responsables al frente de cada uno de los negocios. En la práctica es como si hubiera dos problemas de planificación, uno de ellos para la cafetería con $m = 2$ y otro para el kiosco con $m = 2$.

En lo que respecta a los trabajos a realizar, y tanto para la cafetería como para el kiosco, podemos considerar tres grandes grupos de trabajos: los trabajos del ANTES, del DURANTE EL SERVICIO, y del DESPUÉS.

3.1.1. Características de los trabajos a realizar en la cafetería.

Trabajos del ANTES en la cafetería.

En el caso de la cafetería, como trabajos del antes podemos considerar los que se detallan en el Cuadro 3.1:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 1$	Llegar	-	$15'$	$6:00$
$j = 2$	Aparcar	-	$20'$	$6:00$
$j = 3$	Encender cafetera	-	$1/4'$	$6:00$
$j = 4$	Colocar mobiliario de la terraza	-	$15'$	$6:00$
$j = 5$	Preparar caja	-	$5'$	$6:00$
$j = 6$	Recibir pan	-	$1/4'$	$6:00$
$j = 7$	Recibir vino	-	$1/4'$	$6:00$
$j = 8$	Abrir	-	-	$6:00$

Cuadro 3.1: Características de los trabajos del ANTES en la cafetería

Para todos estos trabajos, observamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Hay relación de precedencia entre los trabajos modelizada con el siguiente grafo $G_a = (V_a, A_a)$ (Figura 3.1). Siendo el conjunto de vértices o nodos $V_a = \{1, \ldots, 8\}$ los trabajos a realizar. Un arco $(i, j) \in A_a$ indica que para realizar el *trabajo j* debe haberse completado previamente el *trabajo i*.

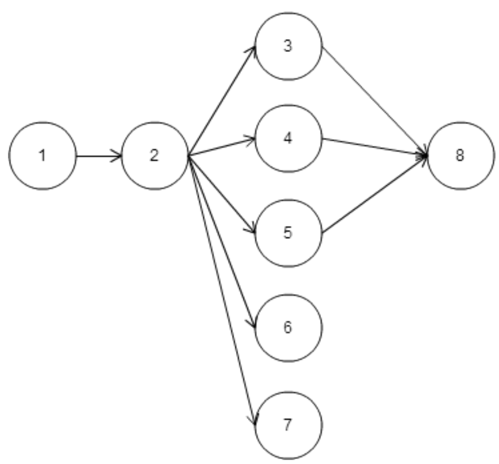


Figura 3.1: Grafo $G_a = (V_a, A_a)$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del ANTES en la cafetería

Trabajos del DURANTE EL SERVICIO en la cafetería.

Como trabajos del durante el servicio podemos considerar los que se describen en el siguiente Cuadro 3.2:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 9$	Cocinar	-	-	-
$j = 10$	Atención al publico	-	-	-
$j = 11$	Realizar pedidos	-	1h30'	-
$j = 12$	Recibir y colocar pedidos	-	50'	-
$j = 13$	Acondicionamiento continuo del local	-	10'	-
$j = 14$	Control de víveres y enseres	-	30'	-

Cuadro 3.2: Características de los trabajos del DURANTE EL SERVICIO en la cafetería

Para dichos trabajos del durante el servicio, contemplamos que se cumples las siguientes propiedades:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) En este caso las relaciones de precedencia quedan modelizadas con el siguiente grafo $G_s = (V_s, A_s)$ (Figura 3.2). Donde $V_s = \{9, \ldots, 14\}$ son los trabajos a realizar, e $(i, j) \in A_s$ significa que para realizar el *trabajo j* debe haberse terminado el *trabajo i*.

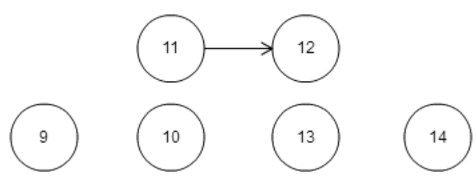


Figura 3.2: Grafo $G_s = (V_s, A_s)$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DURANTE EL SERVICIO en la cafetería

Trabajos del DESPUÉS en la cafetería.

Como trabajos del después podemos considerar los que se detallan en el Cuadro 3.3:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 15$	Limpieza y acondicionamiento del espacio de los clientes	-	20'	-
$j = 16$	Limpieza y acondicionamiento del interior del local	-	60'	-
$j = 17$	Reponer mercancía	-	15'	-
$j = 18$	Cierre de caja y balance económico	-	10'	-
$j = 19$	Cierre	-	-	-

Cuadro 3.3: Características de los trabajos del DESPUÉS en la cafetería

En este caso al igual que en los anteriores, también observamos que los trabajos cumplen las siguientes condiciones:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Las relaciones de precedencia entre los trabajos quedan modelizadas mediante el siguiente grafo $G_d = (V_d, A_d)$ (Figura 3.3). En el cual los nodos $V_d = \{15, \ldots, 19\}$ representan los trabajos y los arcos $(i, j) \in A_d$ indican que para realizar el *trabajo j* debe haberse finalizado el *trabajo i*.

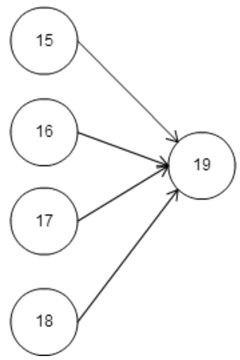


Figura 3.3: Grafo $G_d = (V_d, A_d)$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DESPUÉS en la cafetería

A continuación vamos a modelizar los trabajos correspondientes al kiosco.

3.1.2. Características de los trabajos a realizar en el kiosco.

Trabajos del ANTES en el kiosco.

Como trabajos del antes en el kiosco consideramos los descritos en el siguiente Cuadro 3.4:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 21$	Llegar	-	25'	7:00
$j = 22$	Aparcar	-	15'	-
$j = 23$	Colocar expositores	-	15'	-
$j = 24$	Preparar caja	-	5'	-
$j = 25$	Colocar mercancía diaria	-	10'	-
$j = 26$	Control víveres y enseres	-	15'	-

Cuadro 3.4: Características de los trabajos del ANTES en el kiosco

Los cuales cumplen las siguientes propiedades:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Hay relación de precedencia entre los trabajos novelizada con el siguiente grafo $G'_a = (V'_a, A'_a)$ (Figura 3.4), siendo $V'_a = \{21, \ldots, 26\}$ el conjunto de nodos los trabajos a realizar. Un arco $(i, j) \in A'_a$ indica que para realizar el *trabajo* j debe haberse completado previamente el *trabajo* i.

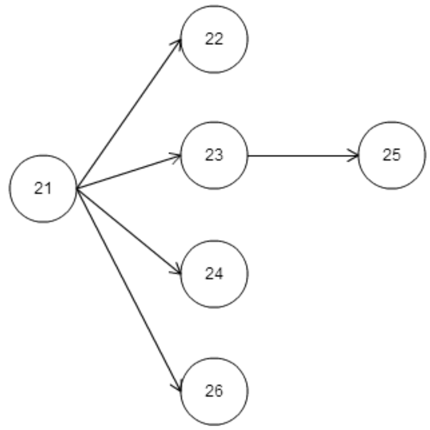


Figura 3.4: Grafo $G'_a = (V'_a, A'_a)$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del ANTES en el kiosco

Trabajos del DURANTE EL SERVICIO en el kiosco.

Los trabajos del durante el servicio en el kiosco se describen en el siguiente Cuadro 3.5:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 27$	Realizar pedidos	-	1h	-
$j = 28$	Recibir y reponer pedidos	-	1h	-
$j = 29$	Atención al público	-	-	-
$j = 30$	Limpieza interior local	-	30'	-

Cuadro 3.5: Características de los trabajos del DURANTE EL SERVICIO en el kiosco

Para dichos trabajos observamos que se cumplen las posteriores condiciones:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) En este caso las relaciones de precedencia de los trabajos quedan modelizadas con el siguiente grafo $G'_s = (V'_s, A'_s)$ (Figura 3.5), donde $V'_s = \{27, \ldots, 30\}$ son los trabajos, e $(i, j) \in A'_s$ significa que poder realizar el *trabajo* j hay primero que finalizar el *trabajo* i.

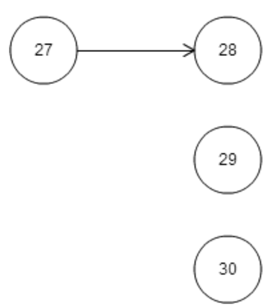


Figura 3.5: Grafo $G'_s = (V'_s, A'_s)$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DURANTE EL SERVICIO en el kiosco

Trabajos del DESPUÉS en el kiosco.

Por último describimos los trabajos del DESPUÉS en el kiosco mediante el Cuadro 3.6:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 31$	Recoger mercancía de expositores	-	10’	-
$j = 32$	Realizar devoluciones de mercancía	-	15’	-
$j = 33$	Limpieza suelo local	-	10’	-
$j = 34$	Hacer caja + balance económico	-	10’	-
$j = 35$	Recoger expositores y plegar puertas	-	20’	-
$j = 36$	Cerrar	-	2”	21:00

Cuadro 3.6: Características de los trabajos del DESPUÉS en el kiosco

En este caso también observamos que los trabajos cumples las siguientes propiedades:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) En este caso las relaciones de precedencia de los trabajos quedan modelizadas con el siguiente grafo $G'_d = (V'_d, A'_d)$ (Figura 3.6), donde $V'_d = \{31, \ldots, 36\}$ son los trabajos, e $(i, j) \in A'_d$ significa que poder realizar el *trabajo* j hay primero que finalizar el *trabajo* i.

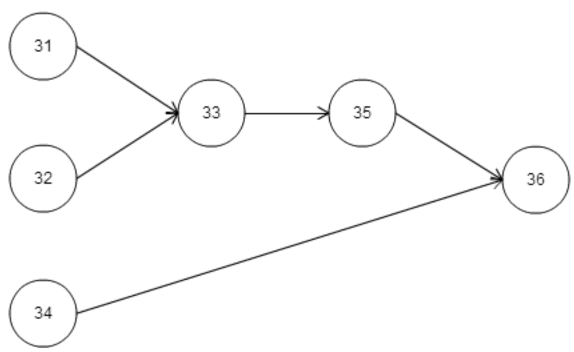


Figura 3.6: Grafo $G'_s = (V'_d, A'_d)$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DESPUÉS en el kiosco

Como hemos dicho anteriormente tanto en la cafetería como en el kiosco se disponen de *2 máquinas* ($\alpha = 2$), veamos a continuación las características de las máquinas tanto en la cafetería como en el kiosco.

3.1.3. Características de las máquinas en la cafetería.

Si consideramos globalmente las actividades del ANTES, del DURANTE EL SERVICIO, y del DESPUÉS, observamos que la velocidad de proceso de las dos máquinas es idéntica en todos los trabajos salvo para el *trabajo* $j = 9$ (*cocinar*). Con lo cual un modelo de planificación adecuado podría ser de la forma $R2|\beta|\gamma$ según la terminología estándar de estos modelos.

No obstante como quiere que nuestro objetivo es el bienestar de los trabajadores nos tenemos que centrar en los trabajos previos a la apertura y los trabajos de balance, o lo que es lo mismo, del ANTES y del DESPUÉS, por tanto en la cafetería disponemos de *máquinas no especializadas idénticas* ($\alpha = P$) $P2|\beta|\gamma$.

3.1.4. Características de las máquinas en el kiosco.

Al igual que en la cafetería, cada *trabajo* j consta de una única operación que se puede realizar por cualquier máquina, por eso en este caso concreto las máquinas son *no especializadas idénticas* ($\alpha = P$), $P2|\beta|\gamma$, esto quiere decir que para un trabajo concreto cualquiera de las dos máquinas son capaces de realizarlo y el tiempo que emplea en ello es el mismo para una u otra máquina, $p_{ij} = p_j \ \forall i$.

A continuación nos centramos en nuestro objetivo principal que es mejorar la calidad de vida de los trabajadores. En concreto, en maximizar su tiempo de descanso, puesto que con un mejor descanso todo va mejor, incluso la productividad siempre que se respeten los horarios de apertura y cierre.

Según esto, en los epígrafes siguientes caracterizamos los *criterios de optimalidad* para los problemas de la cafetería y el kiosco.

3.1.5. Caracterización de los criterios de optimalidad en la cafetería y formulación matemática del problema.

La función objetivo a minimizar es la siguiente:

$$f(C_1, \ldots, C_{19}) = -\omega_6 C_6 - \omega_7 C_7$$

Como ocurre en muchos problemas de planificación esta función objetivo está definida en función de los tiempos de completación y sus pesos.

Así, el problema puede plantearse como:

$$\begin{array}{ll} min & -\omega_6 C_6 - \omega_7 C_7 \\ s.a: & C_6 \leq d_6 \\ & C_7 \leq d_7 \\ & \text{Se respeten las precedencias} \end{array}$$

Donde $d_6 = 6:00h$ y $d_7 = 6:00h$.

Observamos que, a diferencia con otros problemas de planificación, no es una función regular, es decir, no es creciente en todos los tiempos de completación, lo cual hace el problema que nos ocupa más diferente aún de otros de planificación.

3.1.6. Caracterización de los criterios de optimalidad en el kiosco y formulación matemática del problema.

En el caso del Kiosco, la función objetivo a minimizar es la siguiente:

$$f(C_{21}, \ldots, C_{36}) = -\omega_{21} C_{21}$$

Al igual que en caso de la cafetería, la función objetivo anterior está definida en función de los tiempos de completación y sus respectivos pesos. De tal forma planteamos el problema siguiente:

$$\begin{array}{ll} min & -\omega_{21}C_{21} \\ s.a: & C_{21} \leq d_{21} \\ & \text{Se respeten las precedencias} \end{array}$$

Donde $d_{21} = 7:00h$.

Se trata de una función objetivo no regular, es decir, no es creciente en todos los tiempos de completación, como sucede en la situación de la cafetería.

A continuación desarrollamos el caso de otra actividad comercial con más de dos máquinas siguiendo los conceptos de planificación y formulación del problema utilizados anteriormente para el caso específico.

3.2. Caso específico de una actividad comercial de abastecimiento de víveres.

Esta sección se dedica al estudio y modelización de una actividad comercial dedicada al abastecimiento de víveres. Como ocurre en los casos estudiados anteriormente los trabajos que se realizan en esta actividad comercial pueden agruparse en un ANTES, un DURANTE EL SERVICIO y un DESPUÉS.

Esta actividad comercial de abastecimiento de víveres se divide en tres módulos o secciones especializadas, que comparten el mismo local pero que trabajan independientemente unas de otras. Los recursos que comparten son básicamente el espacio físico del local. Dicho espacio es suficientemente grande para que las diferentes secciones puedan realizar su labor sin interferir unas con otras. Es decir, trabajan realmente de manera independiente.

Dichas secciones son las siguientes:

- La sección S_1 es la dedicada a preparados para llevar. En ella trabajan 2 personas, las cuales cocinan, preparan y venden diferentes platos culinarios en el formato que todos conocemos como preparados para llevar.
- La sección S_2 se dedica a la venta de embutidos/charcutería y algunos productos lácteos . En ella trabajan 2 personas.
- La sección S_3 es la dedicada a la venta de productos frescos y derivados de origen animal. En esta sección trabajan 4 personas.

Como cada una de las secciones trabaja de manera independiente a las demás, en realidad tenemos tres problemas de planificación, uno en cada sección. Como quiera que, en cada sección todos los trabajadores son capaces de realizar todos los trabajos de dicha sección y, además, puede suponerse que lo hacen con la misma habilidad y velocidad, resulta entonces que, en cada sección, tenemos un problema de planificación con *máquinas no especializadas idénticas ($\alpha = P$).* Las máquinas del modelo serán los trabajadores de la sección.

Por tanto, los problemas de planificación que tenemos en las diferentes secciones son: en la sección S_1 un problema $P2|\beta|\gamma$; en la sección S_2, otro problema $P2|\beta|\gamma$; y en la sección S_3 un problema $P4|\beta|\gamma$.

Como quiera que el criterio principal de optimización adoptado es el bienestar de los trabajadores, y como también ocurría en los casos estudiados anteriormente, nos centraremos en los trabajos que se realizan antes de la apertura y depués del cierre al público, ya que son los más relevantes para el criterio considerado.

3.2.1. Características de los trabajos en la actividad comercial de abastecimiento de víveres.

Trabajos del ANTES en la actividad comercial de abastecimiento de víveres.

Como trabajos del antes para la sección S_1 podemos considerar los que se describen en el Cuadro 3.7:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 11$	Aparcar y personarse en el establecimiento	-	20’	-
$j = 12$	Ponerse uniforme	-	10’	-
$j = 13$	Colocar bandejas (vacías) en los mostradores	-	10	-
$j = 14$	Preparar comida caliente y colocar en los mostradores	-	45’	-
$j = 15$	Preparar comida fría y colocar en los mostradores	-	35’	-
$j = 16$	Preparar comida precocinada y colocar en los mostradores	-	30’	-
$j = 17$	Preparar caja	-	5’	-
$j = 18$	Abrir	-	1’	6:00

Cuadro 3.7: Características de los trabajos del ANTES en la sección S_1 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Para todos estos trabajos, observamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Hay relación de precedencia entre los trabajos modelizada con el siguiente grafo $G_a^{S_1} = (V_a^{S_1}, A_a^{S_1})$ (Figura 3.7). Siendo el conjunto de vértices o nodos $V_a^{S_1} = \{11, \ldots, 18\}$ los trabajos a realizar, y un arco $(i, j) \in A_a^{S_1}$ indica que para realizar el *trabajo* j debe haberse completado previamente el *trabajo* i.

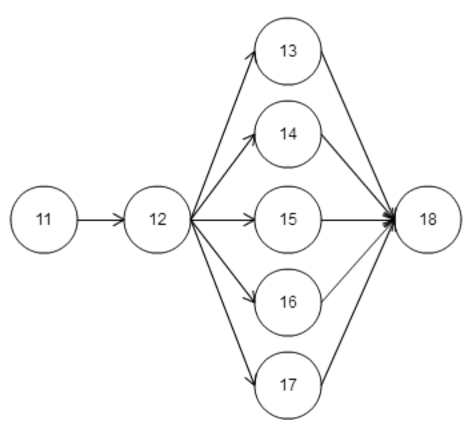


Figura 3.7: Grafo $G_a^{S_1} = (V_a^{S_1}, A_a^{S_1})$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del ANTES en la sección S_1 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Como trabajos del antes para la sección S_2 podemos considerar los que se describen en el Cuadro 3.8:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 21$	Aparcar y personarse en el establecimiento	-	20'	-
$j = 22$	Ponerse uniforme	-	10'	-
$j = 23$	Recepción de la mercancía	-	20'	-
$j = 24$	Rellenar los mostradores(si es necesario)	-	15'	-
$j = 25$	Preparar caja	-	5'	-
$j = 26$	Abrir	-	1'	6:00

Cuadro 3.8: Características de los trabajos del ANTES en la sección S_2 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Para todos estos trabajos, observamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Hay relación de precedencia entre los trabajos modelizada con el siguiente grafo $G_a^{S_2} = (V_a^{S_2}, A_a^{S_2})$ (Figura 3.8). Siendo el conjunto de vértices o nodos $V_a^{S_2} = \{21, \ldots, 26\}$ los trabajos a realizar, y un arco $(i, j) \in A_a^{S_2}$ indica que para realizar el *trabajo* j debe haberse completado previamente el *trabajo* i.

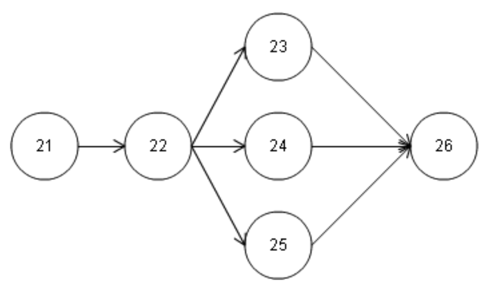


Figura 3.8: Grafo $G_a^{S_2} = (V_a^{S_2}, A_a^{S_2})$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del ANTES en sección S_2 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Como trabajos del antes para la sección S_3 podemos considerar los que se describen en el Cuadro 3.9:

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 31$	Aparcar y personarse en el establecimiento	-	20'	-
$j = 32$	Ponerse uniforme	-	10'	-
$j = 33$	Recepción de la mercancía	-	20'	-
$j = 34$	Colocar bandejas (vacías) en los mostradores	-	10'	-
$j = 35$	Colocar la mercancía en las bandejas	-	30'	-
$j = 36$	Preparar caja	-	5'	-
$j = 37$	Abrir	-	1'	6:00

Cuadro 3.9: Características de los trabajos del ANTES en la sección S_3 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Para todos estos trabajos, observamos que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Hay relación de precedencia entre los trabajos modelizada con el siguiente grafo $G_a^{S_3} = (V_a^{S_3}, A_a^{S_3})$ (Figura 3.9). Siendo el conjunto de vértices o nodos $V_a^{S_3} = \{31, \ldots, 37\}$ los trabajos a realizar, y un arco $(i, j) \in A_a^{S_3}$ indica que para realizar el *trabajo* j debe haberse completado previamente el *trabajo* i.

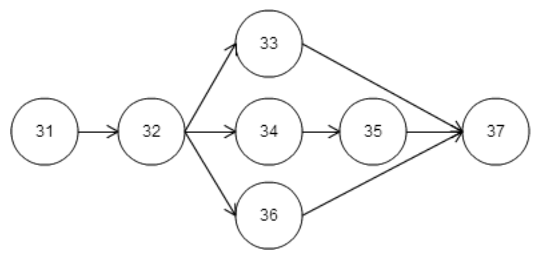


Figura 3.9: Grafo $G_a^{S_3} = (V_a^{S_3}, A_a^{S_3})$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del ANTES en la sección S_3 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Trabajos del DESPUÉS en la actividad comercial de abastecimiento de víveres.

Como trabajos del DESPUÉS en la sección S_1 podemos considerar los que se describen en el Cuadro 3.10

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 41$	Se retiran los productos de los mostradores a las cámaras de frío	14:00	15’	-
$j = 42$	Se limpian los mostradores y suelo del establecimiento	14:00	30’	-
$j = 43$	Cierre de caja y balance económico diario	14:00	15’	-
$j = 44$	Planificación menú siguiente día	14:00	15’	-
$j = 45$	Cierre	14:00	1’	-

Cuadro 3.10: Características de los trabajos del DESPUÉS en la sección S_1 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

En este caso también observamos que los trabajos cumplen las siguientes propiedades:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Las relaciones de precedencia entre los trabajos quedan modelizadas mediante el siguiente grafo $G_d^{S_1} = (V_d^{S_1}, A_d^{S_1})$ (Figura 3.10). Donde los nodos $V_d^{S_1} = \{41, \ldots, 45\}$ representan los trabajos y los arcos $(i, j) \in A_d^{S_1}$ indican que para realizar el *trabajo* j debe haberse finalizado el *trabajo* i.

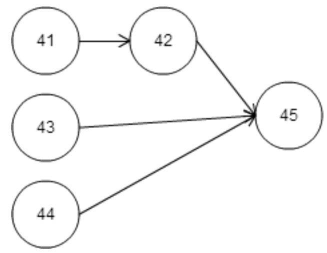


Figura 3.10: Grafo $G_d^{S_1} = (V_d^{S_1}, A_d^{S_1})$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DESPUÉS en la sección S_1 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Como trabajos del DESPUÉS en la sección S_2 podemos considerar los que se describen en el Cuadro 3.11

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 51$	Se limpian los productos que se quedan en los mostradores y se ordenan	14:00	20'	-
$j = 52$	Se limpian los mostradores y suelo del establecimiento	14:00	15'	-
$j = 53$	Cierre de caja y balance económico diario	14:00	15'	-
$j = 54$	Cierre	14:00	1'	-

Cuadro 3.11: Características de los trabajos del DESPUÉS en la sección S_2 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

En este caso también observamos que los trabajos cumplen las siguientes propiedades:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Las relaciones de precedencia entre los trabajos quedan modelizadas mediante el siguiente grafo $G_d^{S_2} = (V_d^{S_2}, A_d^{S_2})$ (Figura 3.11 Donde los nodos $V_d^{S_2} = \{51, \ldots, 54\}$ representan los trabajos y los arcos $(i, j) \in A_d^{S_2}$ indican que para realizar el *trabajo j* debe haberse finalizado el *trabajo i*.

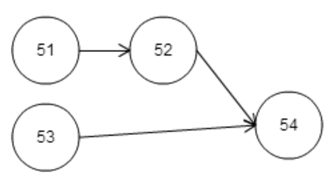


Figura 3.11: Grafo $G_d^{S_2} = (V_d^{S_2}, A_d^{S_2})$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DESPUÉS en la sección S_2 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Como trabajos del DESPUÉS en la sección S_3 podemos considerar los que se describen en el Cuadro 3.12

Trabajo j	Descripción	r_j	p_j	d_j
$j = 61$	Se retiran los productos de los mostradores a las cámaras de frío	14:00	25'	-
$j = 62$	Se limpian los mostradores y suelo del establecimiento	14:00	20'	-
$j = 63$	Cierre de caja y balance económico diario	14:00	15'	-
$j = 64$	Cierre	14:00	1'	-

Cuadro 3.12: Características de los trabajos del DESPUÉS en la sección S_3 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

En este caso también observamos que los trabajos cumplen las siguientes propiedades:

a) Los trabajos son interrumpibles.

b) Las relaciones de precedencia entre los trabajos quedan modelizadas mediante el siguiente grafo $G_d^{S_3} = (V_d^{S_3}, A_d^{S_3})$ (Figura 3.12). Donde los nodos $V_d^{S_3} = \{61, \ldots, 64\}$ representan los trabajos y los arcos $(i, j) \in A_d^{S_3}$ indican que para realizar el *trabajo* j debe haberse finalizado el *trabajo* i.

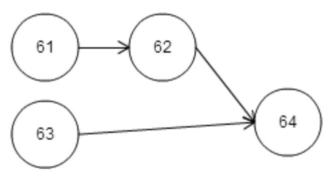


Figura 3.12: Grafo $G_d^{S_3} = (V_d^{S_3}, A_d^{S_3})$ que modeliza las relaciones de precedencia de los trabajos del DESPUÉS en sección S_3 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Veamos en la próxima sección cómo caracterizamos las máquinas que realizan estos trabajos.

3.2.2. Características de las máquinas en la actividad comercial de abastecimiento de víveres.

Los tres módulos o secciones en los que se divide la actividad comercial de abastecimiento de víveres trabajan de manera independientes sin interferir unos con otros. Se tienen por tanto 3 problemas de planificación, uno en cada sección. Como quiera que, en cada sección todos los trabajadores son capaces de realizar todos los trabajos de dicha sección y, además, lo hacen a la misma velocidad, tenemos en cada sección un problema de planificación con *máquinas no especializadas idénticas ($\alpha = P$)*. Las máquinas del modelo serán los trabajadores de la sección. Es decir, en la sección S_1 tenemos un problema $P2|\beta|\gamma$; en la sección S_2, otro problema $P2|\beta|\gamma$; y en la sección S_3 un problema $P4|\beta|\gamma$.

Según esto, en los epígrafes siguientes caracterizamos los *criterios de optimalidad* para este problema.

3.2.3. Caracterización del criterio de optimalidad en la actividad comercial de abastecimiento de víveres y formulación matemática del problema.

Como tenemos tres secciones, tenemos tres problemas. En la sección S_1 tenemos un problema $P2|\beta|\gamma$ donde el conjunto de trabajos a realizar es $J_1 = \{11, \ldots, 18, 41, \ldots, 45\}$ con $card(J_1) = 13$.

Para la sección S_2 tenemos un problema $P2|\beta|\gamma$ donde el conjunto de trabajos a realizar es $J_2 = \{21, \ldots, 27, 51, \ldots, 54\}$ con $card(J_2) = 11$. Finalmente, para la sección S_3 tenemos un problema $P4|\beta|\gamma$ donde el conjunto de trabajos a realizar es $J_3 = \{31, \ldots, 37, 61, \ldots, 64\}$ con $card(J_3) = 11$.

Los problemas en las secciones S_1, S_2 y S_3, se resuelven resolviendo dos problemas en cada una de las secciones, un problema para el ANTES y otro para el DESPUÉS.

Como nos interesa hacer todos los trabajos del ANTES en el menor tiempo posible, el problema del ANTES en S_1 y S_2 es de la forma $P2|pmtn, intree|C_{max}$ y en la sección S_3 es de la forma $P4|pmtn, intree|C_{max}$, donde los conjuntos de trabajos a considerar es $J_1^{ANTES} = \{13, \ldots, 18\}$ con $card(J_1^{ANTES}) = 6$ para la sección S_1, $J_2^{ANTES} = \{23, \ldots, 27\}$ con $card(J_2^{ANTES}) = 5$ para la sección S_2 y $J_3^{ANTES} = \{33, \ldots, 37\}$ con $card(J_3^{ANTES}) = 5$ para la sección S_3. Luego la función objetivo para cada sección es la siguiente:

- $f(C_{13}, \ldots, C_{18}) = C_{max} = max\{C_j\}$, $j \in J_1^{ANTES}$ para S_1
- $f(C_{23}, \ldots, C_{27}) = C_{max} = max\{C_j\}$, $j \in J_2^{ANTES}$ para S_2
- $f(C_{33}, \ldots, C_{37}) = C_{max} = max\{C_j\}$, $j \in J_3^{ANTES}$ para S_3

Como interesa hacer los trabajos del DESPUÉS en el menor tiempo posible, el problema del DESPUÉS en S_1 y S_2 es de la forma $P2|pmtn, intree|C_{max}$ y en la sección S_3 es de la forma $P4|pmtn, intree|C_{max}$, donde los conjuntos de trabajos a considerar son: $J_1^{DESPUES} = \{41, \ldots, 45\}$ con $card(J_1^{DESPUES}) = 5$ para la sección S_1, $J_2^{DESPUES} = \{51, \ldots, 54\}$ con $card(J_2^{DESPUES}) = 4$ para la sección S_2 y $J_3^{DESPUES} = \{61, \ldots, 64\}$ con $card(J_3^{DESPUES}) = 4$ para la sección S_3. Luego la función objetivo para cada sección es la siguiente:

- $f(C_{41}, \ldots, C_{45}) = C_{max} = max\{C_j\}$, $j \in J_1^{DESPUES}$ para S_1
- $f(C_{51}, \ldots, C_{54}) = C_{max} = max\{C_j\}$, $j \in J_2^{DESPUES}$ para S_2
- $f(C_{61}, \ldots, C_{64}) = C_{max} = max\{C_j\}$, $j \in J_3^{DESPUES}$ para S_3

Tanto el problema del ANTES como del DESPUÉS pueden resolverse por el algoritmo de *Muntz y Coffman*$(1969, 1970)$ como veremos en el capítulo 4.

En el próximo capítulo presentamos los algoritmos con los que pretendemos buscar una solución para los problemas planteados en este proyecto.

Capítulo 4

Algoritmos propuestos.

De acuerdo a la formulación matemática de los problemas propuestos, a la hora de diseñar un algoritmo para resolver estos problemas resulta útil representar gráficamente mediante diagramas de *Gantt* las soluciones actualmente implementadas en la empresa considerada. Dichas representaciones nos facilitarán el diseño de un algoritmo para resolver los problemas planteados.

4.1. Para el caso estudiado de la cafetería y el kiosco.

4.1.1. Para el problema de la cafetería.

El problema a resolver en la cafetería recordemos que es $P2|\beta|\gamma$, dado que tenemos dos trabajadores. Si hacemos el diagrama de *Gantt* para la solución implementada hoy en día tenemos las siguientes figuras 4.1 y 4.2. El significado de estas figuras es análogo al de la Figura 1.1. En ellas, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja.

En la Figura 4.1 el origen de tiempo son las $4:45h$ de la mañana, y los instantes marcados en los ejes el tiempo transcurrido desde el origen de tiempo. La longitud de la base de cada caja es la duración del correspondiente trabajo.

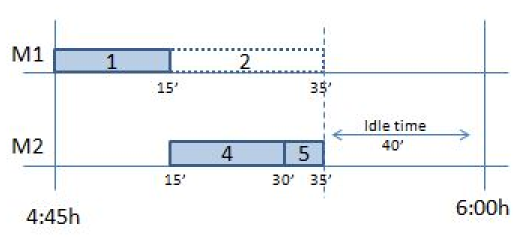


Figura 4.1: Diagrama de Gantt que representa la situación actual para las actividades del ANTES en la cafetería

Se observa un tiempo ocioso (*"idle time"*) de 40 *minutos*. Esto es así porque la solución actual viene obligada por el hecho de que a las $5:00h$ es la *recepción del pan* ($j = 6$) y a las $5:15h$ la *recepción del vino* ($j = 7$).

Según esta solución la máquina $M1$ empieza su actividad a las $4:45h$ con el trabajo $j = 1$ (*conducir*). En el minuto 15, llegan al lugar y, mientras $M1$ busca aparcamiento ($j = 2$), la máquina $M2$ empieza su actividad con el trabajo $j = 4$ (*colocar mobiliario de la terraza*) y continua con el trabajo $j = 5$ (*preparar caja*). La caja para el trabajo $j = 2$ está con trazo discontinuo indicando que su duración podría variar.

En la siguiente Figura 4.2 se representa la situación actual para las actividades del después en la cafetería, en ella se indica la hora de cierre, las $17:00h$, y la hora a la que suelen salir, las $17:30h$. Las horas indicadas en los ejes horizontales es cuando comienzan ambas máquinas a desarrollar los diferentes trabajos.

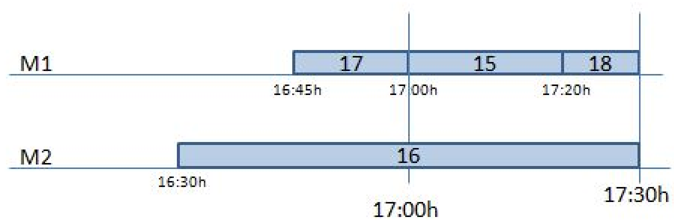


Figura 4.2: Diagrama de Gantt que representa la situación actual para las actividades del DESPUÉS en la cafetería

Se puede observar que mientras que la máquina $M2$ hace el trabajo $j = 16$ (*limpieza y acondicionamiento del interior del local*) a partir de las $16:30h$, la máquina $M1$ comienza a las $16:45h$ con el trabajo $j = 17$ (*reponer mercancía*) continúa con el trabajo $j = 15$ (*limpieza y acondicionamiento del espacio de los clientes*) y finaliza la jornada con el trabajo $j = 18$ (*cierre de caja y balance económico*).

Seguiremos los pasos del siguiente algoritmo:

Algoritmo 1:

Paso 1: Generar una solución factible inicial.

Paso 2: Desplazar las actividades del ANTES lo más posible a la derecha (posponer) para retrasar su comienzo, siempre y cuando se respete el horario de apertura.

Paso 3: Desplazar las actividades del DESPUÉS lo más posible a la izquierda (anticipar) siempre y cuando se puede prestar el servicio hasta la hora de cierre y se respete dicha hora.

Implementando dicho algoritmo, la solución propuesta puede representarse con el diagrama de Gantt ilustrado en las Figuras 4.3 y 4.4.

Cabe observar que la aplicación del algoritmo lleva a que el origen de tiempo sea a las $5:25h$. De esta forma se evita tener tiempo ocioso ("idle time"), ya que el algoritmo desplaza hacia la derecha todas los trabajos. Dicho de otra manera, los trabajadores pueden descansar $40'$ más cada día.

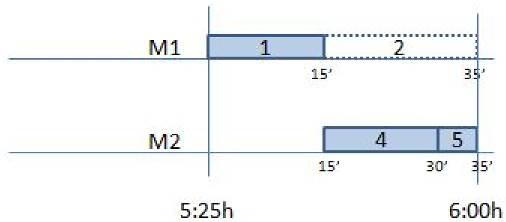


Figura 4.3: Diagrama de Gantt que representa la solución propuesta para las actividades del ANTES en la cafetería

Como podemos ver en la Figura 4.3 la solución propuesta es la siguiente: La máquina $M1$ comienza la jornada a las $5:25h$ con el trabajo $j = 1$ (*conducir*) y continua con el trabajo $j = 2$ (*aparcar*), esta caja se representa con trazo discontinuo porque podría variar su duración. Mientras que la máquina $M2$ comienza su jornada al *minuto 15* del origen de tiempo y hace el trabajo $j = 4$ y el trabajo $j = 5$ (*colocar mobiliario de la terraza y preparar caja*).

De esta forma las máquinas tendrían mayor tiempo de descanso, ya que comienza su jornada a las $5:25h$ y no a las $4:45h$ como en la situación actual, y así se evitaría tener 40 minutos de tiempo ocioso. Por lo tanto para llevar a cabo esta propuesta, tendríamos que solicitar que el trabajo $j = 6$ (*recibir pan*) y el trabajo $j = 7$ (*recibir vino*) se hagan a partir de las $5:40h$.

Veamos que ocurre cuando aplicamos el algoritmo en los trabajos del DESPUÉS en la cafetería mediante la siguiente Figura 4.4.

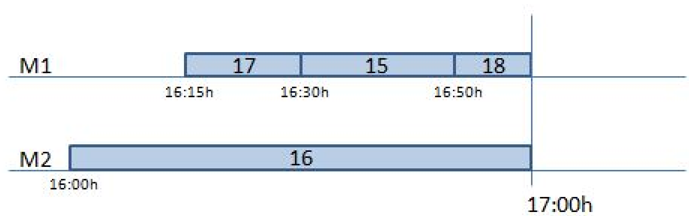


Figura 4.4: Diagrama de Gantt que representa la solución propuesta para las actividades del DESPUÉS en la cafetería

Se puede observar en la Figura 4.4 que los trabajos clasificados del DESPUÉS en la cafetería se anticipan, cabe destacar que las máquinas son intercambiables, los trabajos que realiza la máquina $M1$ pueden ser ejecutados de igual forma por la máquina $M2$ ($\alpha = P$).

En esta solución la máquina $M2$ hace el trabajo $j = 16$ (*limpieza y acondicionamiento del interior del local*) a partir de las $16:00h$, y la máquina $M1$ comienza a las $16:15h$ con el trabajo $j = 17$, a las $16:30h$ con el trabajo $j = 15$ y a las $16:50h$ con el trabajo $j = 18$, así ambas máquinas terminan su jornada a las $17:00h$.

Si en vez de salir a las $17:00h$ quisieran salir a las $16:30h$, la máquina $M1$ debe hacer los trabajos ($j = 17$, $j = 15$ y $j = 18$) a partir de 45 minutos antes de la hora de cierre, es decir, comenzar con los trabajos anteriores a las $15:45$; y la máquina $M2$ debe empezar el trabajo

$j = 16$ unos 60 minutos antes de las $16 : 30h$, por tanto realizar dicho trabajo a partir de las $15 : 30$

4.1.2. Para el problema de el kiosco.

Al igual que en la cafetería en el kiosco disponemos de dos personas por tanto tenemos un problema $P2|\beta|\gamma$. Si hacemos el diagrama de GANTT para la situación de hoy en día tenemos la Figura 4.5 para el ANTES y la Figura 4.6 para el DESPUÉS.

En esta ocasión en la Figura 4.5 el eje de tiempo tiene como origen las $6 : 10h$ y se representan en la parte inferior de las cajas rectangulares el tiempo transcurrido a partir de dicho origen. Cabe destacar que para abrir el público el kiosco necesitamos obligatoriamente realizar ciertos trabajos antes de las $7 : 00h$, sin embargo hay otras actividades que pueden hacerse después de las $7 : 00h$ y no influyan al funcionamiento de la actividad.

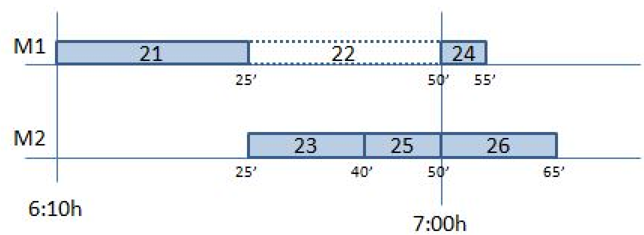


Figura 4.5: Diagrama de Gantt que representa la situación actual para las actividades del ANTES en el kiosco

Según esta solución la máquina $M1$ empieza a las $6 : 10h$ con el trabajo $j = 21$ (*conducir*), y continua con el trabajo $j = 22$ (*aparcar*) que podría ser un valor variable, una vez que finaliza esta actividad hace el trabajo $j = 24$ (*preparar caja*) a partir de las $7 : 00h$. Mientras que la máquina $M2$ comienza su actividad en el minuto 25 con el trabajo $j = 23$ (*colocar expositores*), en el minuto 40 hace el trabajo $j = 25$ (*colocar mercancía diaria*) estas dos actividades son imprescindibles para poder empezar la jornada, y a partir de las $7 : 00h$ en el minuto 50 hace el trabajo $j = 26$ (*control de víveres y enseres*).

Ahora representamos la situación actual llevada a cabo en los trabajos del DESPUÉS en la Figura 4.6. En ella indicamos las actividades a realizar por cada máquina y el instante de tiempo de su comienzo:

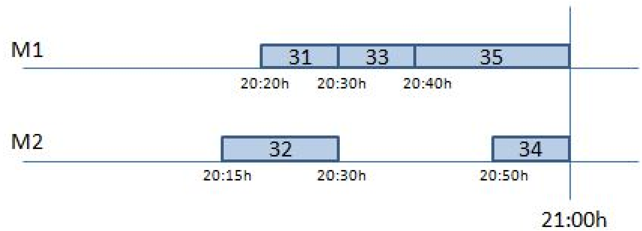


Figura 4.6: Diagrama de Gantt que representa la situación actual para las actividades del DESPUÉS en el kiosco

Tanto la máquina $M1$ como la máquina $M2$ desempeñan los diferentes trabajos para terminar la jornada a las $21:00h$. La máquina $M2$ comienza el trabajo $j = 32$ (*realizar devoluciones de mercancía*) a las $20:15h$, a las $20:20h$ la máquina $M1$ comienza con el trabajo $j = 31$ (*recoger mercancía de expositores*) y pasado 10 minutos continua con el trabajo $j = 33$ (*limpieza del suelo del local*) y a las $20:40h$ hace el trabajo $j = 35$ (*recoger expositores y plegar puertas*). 10 minutos antes del cierre la máquina $M2$ hace (*caja y balance económico diario*) con el trabajo $j = 34$.

El algoritmo que planteamos a continuación busca comenzar lo más tarde posible los trabajos previos a la apertura (el ANTES) y terminar los trabajos de balance (el DESPUÉS) lo más temprano posible respetando los horarios de apertura y cierre al público:

Algoritmo 2:

Paso 1: Generar una solución factible inicial.

Paso 2: Desplazar las actividades del ANTES lo más posible a la derecha (posponer) para conseguir un mayor descanso siempre que se respete el horario de apertura.

Paso 3: Desplazar las actividades del DESPUÉS lo más posible a la izquierda (anticipar) siempre y cuando se pueda prestar el servicio hasta la hora de cierre y se respete dicha hora.

Al aplicar el algoritmo en la situación del ANTES y del DESPUÉS comprobamos que la situación implementada hoy en día coincide con la solución propuesta, ya que todos los trabajos se desarrollan de la mejor manera. Cabe destacar que las máquinas son totalmente intercambiables, es decir, que las actividades que hace la máquina $M1$ las podría ejecutar sin ningún problema la máquina $M2$, y las que hace la máquina $M2$ las podría hacer la máquina $M1$ ($\alpha = P$).

En la Figura 4.7 se pueden diferenciar los trabajos que se realizan antes de las $7:00h$ y los que se pueden hacer a partir de las $7:00h$, así si se cambiara la hora de apertura a las $8:00h$, como ocurre los fines de semana, los trabajos ($j = 21$ y $j = 22$) deben hacerse por una de las máquinas a partir de 50 minutos antes de las $8:00h$, es decir, hacer los trabajos ($j = 21$ y $j = 22$) a partir de las $7:10h$. Y los trabajos ($j = 23$ y $j = 25$) deben realizarse por la otra máquina a partir de 25 minutos antes de las $8:00h$, luego empezar a hacer dichos trabajos a las $7:35h$. Así se consigue dar el mejor instante de comienzo de los diferentes trabajos para respetar los horarios establecidos.

Veamos que ocurre con la situación del DESPUÉS en el kiosco mediante la siguiente Figura 4.8:

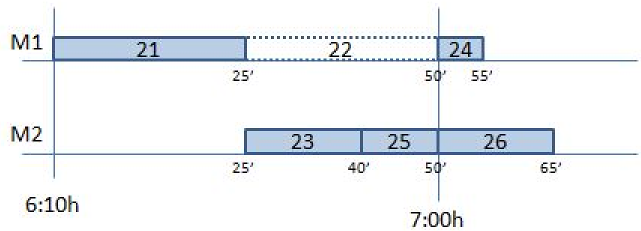


Figura 4.7: Diagrama de Gantt que representa la solución propuesta para las actividades del ANTES en el kiosco

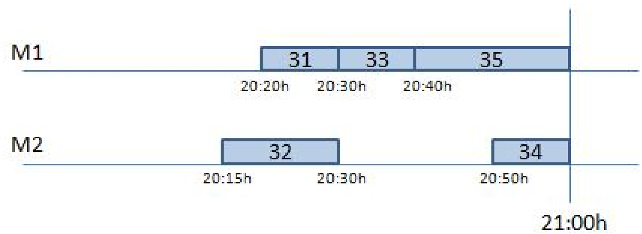


Figura 4.8: Diagrama de Gantt que representa la solución propuesta para las actividades del DESPUÉS en el kiosco

Como hemos dicho anteriormente la situación propuesta coincide con la situación actual desempeñada por ambas máquinas. Si quisiéramos cambiar el horario de cierre solo tendríamos que tener en cuenta la duración de los trabajos a realizar, por ejemplo, si el horario de cierre es a las $14:30h$, como ocurre los fines de semana, una de las máquinas debe hacer los trabajos ($j = 31$, $j = 33$ y $j = 35$) a partir de 40 minutos antes de las $14:30h$, por tanto empezar a desempeñar tales trabajos a partir de las $13:50$. Y la otra máquina debe hacer el trabajo $j = 32$ a partir de 45 minutos antes de las $14:30h$, es decir, a las $13:45h$; y hacer el trabajo $j = 34$, 10 minutos antes de la hora de cierre, es decir, a partir de las $14:20h$.

De esta forma hemos obtenido una solución que puede implementarse de manera inmediata en la empresa estudiada. Consiguiendo así el objetivo de este proyecto, que los empleados de dicha empresa optimicen los tiempos, y así lograr un mayor descanso.

4.2. Para el caso estudiado de la actividad comercial de abastecimiento de víveres

Como se ha comentado en el epígrafe 3.2.3 del capítulo anterior, los problemas a resolver en las diferentes secciones de la actividad comercial de abastecimiento de víveres son los siguientes:

- dos problemas $P2|pmtn, intree|C_{max}$ para la sección S_1 (preparados para llevar)
- dos problemas $P2|pmtn, intree|C_{max}$ para la sección S_2 (embutidos/charcutería y algunos productos lácteos)

- dos problemas $P4|pmtn, intree|C_{max}$ para la sección S_3 (productos frescos y derivados de origen animal)

Todos estos problemas pueden resolverse con el algoritmo *Muntz y Coffman* (1969, 1970), diseñado para el problema $P|pmtn, intree|C_{max}$. Dicho algoritmo se ayuda del concepto de *"processor sharing"* (procesador compartido), gracias al cual, a un trabajo dado se le puede asignar una capacidad de recurso $\rho \leq 1$. De esta manera se incorpora al modelo la circunstancia de permitir que el trabajo se procese por sólo *"parte de una máquina"*. Si se le asigna al trabajo j la capacidad de recurso $\rho(0 < \rho \leq 1)$, el tiempo de realización del trabajo en la máquina sería p_j/ρ. Si $\rho = 1$ la máquina se dedica solamente a realizar este trabajo. Es decir, ρ indica el radio en el cual un trabajo es procesado por una máquina en particular.

Permitiendo *"processor sharing"* temporalmente, el algoritmo de *Muntz y Coffman* (1969, 1970) para $P|pmtn, intree|C_{max}$ queda como un algoritmo en 2 etapas. La primera etapa es una etapa de etiquetado en la que cada trabajo j se etiqueta son la suma de los tiempos de procesamiento de los trabajos del único camino desde j a la raíz del arbol de ensamble (intree). Esta etapa permite ordenar los trabajos en orden decreciente de etiquetas. Considerando esa ordenación, y actualizando convenientemente los radios de procesamiento, se determina una planificación óptima en la segunda etapa o etapa de planificación.

A continuación detallamos dicho algoritmo.

Algoritmo de Muntz y Coffman para $P|pmtn, intree|C_{max}$

Etapa de etiquetado:

Paso 1.- Asignar a cada trabajo terminal i la etiqueta p_i.

Paso 2.- Asignar a cada trabajo j la etiqueta

$$\alpha_j = max\{\alpha_i / j \textit{ predecesor directo de } i\} + p_j$$

donde, inicialmente, p_j es el tiempo de proceso del trabajo j; pero, en las fases intermedias de la etapa de planificación, la cantidad p_j se interpretará, en el caso de que el trabajo j haya sido previamente interrumpido, como el tiempo de proceso que resta para realizarlo completamente.

Etapa de planificación:

Paso 3.- Asignar una máquina a cada uno de los trabajos j con etiquetas maximales α_j. Si hay un empate entre k trabajos compitiendo por r máquinas $(r < k)$, entonces asignar un radio de capacidad de procesamiento de r/k a cada uno de estos trabajos.

Paso 4.- Mantener la asignación hasta que ocurra una de las siguientes cosas:

a) Un trabajo se completa

b) Aparece una situación en la cual existen dos trabajos, i y j, cuyas etiquetas verifican $\alpha_i \geq \alpha_j$; pero cuyos radios satisfacen $\rho_i < \rho_j$ en la asignación actual.

En cualquier caso, si es necesario, ir a la etapa de etiquetado y crear una nueva asignación, hasta completar todo el procesamiento.

Para ilustrar como trabaja el algoritmo en el problema que nos ocupa lo describiremos con detalle para el problema del ANTES y del DESPUÉS en la sección S_1. Para las secciones S_2 y S_3 mostraremos las soluciones encontradas, dejando la explicación detallada de su cálculo para los apéndices finales.

Resolución del problema de la sección S_1 para el ANTES.

El problema a resolver en este caso es $P2|pmtn, intree|C_{max}$. En el siguiente cuadro 4.1 se muestran los trabajos $j \in J_1^{ANTES}$, donde tenemos $n = 6$ trabajos y $m = 2$ máquinas. El parámetro p_j denota el tiempo de proceso del trabajo j en cualquiera de las máquinas y S_j el conjunto de sucesores directos del trabajo j.

Trabajo j	13	14	15	16	17	18
Tiempo p_j	10	45	35	30	5	1
Sucesor S_j	18	18	18	18	18	-

Cuadro 4.1: Tiempos de procesos(en minutos) y relación de sucesores para los trabajos del antes en la sección S_1

En primer lugar etiquetamos el trabajo terminal, $j = 18$, por tanto $\alpha_{18} = p_{18} = 1$.

Seguidamente hacemos la asignación de etiquetas de los demás trabajos:

$$\begin{aligned}
\alpha_{13} &= max_{i \in S_{13}}\{\alpha_i\} + p_{13} = \alpha_{18} + p_{13} = 1 + 10 = 11 \\
\alpha_{14} &= max_{i \in S_{14}}\{\alpha_i\} + p_{14} = \alpha_{18} + p_{14} = 1 + 45 = 46 \\
\alpha_{15} &= max_{i \in S_{15}}\{\alpha_i\} + p_{15} = \alpha_{18} + p_{15} = 1 + 35 = 36 \\
\alpha_{16} &= max_{i \in S_{16}}\{\alpha_i\} + p_{16} = \alpha_{18} + p_{16} = 1 + 30 = 31 \\
\alpha_{17} &= max_{i \in S_{17}}\{\alpha_i\} + p_{17} = \alpha_{18} + p_{17} = 1 + 5 = 6
\end{aligned}$$

La solución propuesta por el algoritmo se va construyendo desde el instante $t = 0$ y se ilustra en la Figura 4.9.

- $t = 0$

En la siguiente tabla se recogen los trabajos que se planificarán desde el instante $t = 0$, las etiquetas asignadas a cada trabajo j, el tiempo remanente de cada trabajo j y el radio de proceso asociado a cada trabajo j:

j planificable	14	15
α_j	46	36
$p_{jremanente}$	45	35
ρ_j	1	1

Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En el cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$\begin{aligned}
p'_{14} &= 45 - \rho_{14}t = 45 - t = 0 \to t = 45 \\
p'_{15} &= 35 - \rho_{15}t = 35 - t = 0 \to t = 35
\end{aligned}$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso:

$$\alpha'_{14} = 46 - \rho_{14}t = 46 - t \leq \alpha_{16} = 31 \rightarrow t = 15$$
$$\alpha'_{15} = 36 - \rho_{15}t = 36 - t \leq \alpha_{16} = 31 \rightarrow t = 5$$

Como el menor de estos instantes es $t = 5$, la decisión tomada en el instante $t = 0$ se mantiene hasta el instante $t = 5$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 5$

j planificable	14	15	16
α_j	41	31	31
$p_{jremanente}$	40	30	30
ρ_j	1	1/2	1/2

Como hay 2 trabajos con la misma etiqueta $\alpha_{15} = \alpha_{16}$ y disponemos de 1 máquina, dado que el trabajo de etiqueta maximal tiene radio de proceso 1, se comparten los procesadores con radio de proceso $\frac{1}{2}$. Y se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En el cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{14} = 40 - t = 0 \rightarrow t = 40$$
$$p'_{15} = p'_{16} = 30 - t = 0 \rightarrow t = 30$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso:

$$\alpha'_{14} = 41 - t = 0 \leq \alpha_{13} = 11 \rightarrow t = 30$$
$$\alpha'_{15} = \alpha'_{16} = 36 - t \leq \alpha_{13} = 11 \rightarrow t = 20$$

Como el menor de estos instantes es $t = 20$, la decisión tomada en el instante $t = 5$ se mantiene hasta el instante $t = 25$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 25$

j planificable	14	15	16
α_j	21	21	21
$p_{jremanente}$	20	20	20
ρ_j	2/3	2/3	2/3

Como hay 3 trabajos con la misma etiqueta maximal y disponemos de 2 máquinas, se comparten los procesadores con radio de proceso $\frac{2}{3}$. Y se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En el cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{14} = p'_{15} = p'_{16} = 20 - \frac{2}{3}t = 0 \rightarrow t = 30$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso:

$$\alpha'_{14} = \alpha'_{15} = \alpha'_{16} = 21 - \frac{2}{3}t \leq \alpha_{13} = 11 \rightarrow t = 15$$

Como el menor de estos instantes es $t = 15$, la decisión tomada en el instante $t = 25$ se mantiene hasta el instante $t = 40$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 40$

j planificable	14	15	16	13
α_j	11	11	11	11
$p_{jremanente}$	10	10	10	10
ρ_j	1/2	1/2	1/2	1/2

Como hay 4 trabajos con la misma etiqueta maximal y disponemos de 2 máquinas, se comparten los procesadores con radio de proceso $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Y se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En el cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{13} = p'_{14} = p'_{15} = p'_{16} = 10 - \tfrac{1}{2}t = 0 \rightarrow t = 20$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso:

$$\alpha'_{13} = \alpha'_{14} = \alpha'_{15} = \alpha'_{16} = 11 - \tfrac{1}{2}t \leq \alpha_{17} = 6 \rightarrow t = 10$$

Como el menor de estos instantes es $t = 10$, la decisión tomada en el instante $t = 40$ se mantiene hasta el instante $t = 50$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 50$

j planificable	13	14	15	16	17
α_j	6	6	6	6	6
$p_{jremanente}$	5	5	5	5	5
ρ_j	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5

Hay 5 trabajos para 2 máquinas, por tanto se comparten los procesadores equitativamente con radio de proceso $\frac{2}{5}$. Y se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. Donde hay que detectar el menor instante t en el cual ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{13} = p'_{14} = p'_{15} = p'_{16} = p'_{17} = 5 - \tfrac{2}{5}t = 0 \rightarrow t = 12,5$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Esto no puede ocurrir dado que el siguiente trabajo a realizar es $j = 18$ y para poder hacerlo tienen que acabar todos los trabajos anteriores puesto que deben respetarse las relaciones de precedencia.

Como el menor de estos instantes es $t = 12,5$, la decisión tomada en el instante $t = 50$ se mantiene hasta el instante $t = 62,5$, momento en que se acaban los trabajos (13 14) y hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 62,5$

j planificable	18
α_j	1
$p_{jremanente}$	1
ρ_j	1

En este instante solo queda el trabajo 18 por planificar. Se le asigna $\rho_{18} =$. Como $p'_{18} = 1 - t = 0 \rightarrow t = 1$. Se mantiene dicha asignación durante ese minuto. Finalmente en el instante $t = 63,5$, es decir, a los 63 minutos y 30 segundos quedan concluidos todos los trabajos del ANTES. Luego $C_{max} = 63'30''$.

En la figura 4.9 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo de Muntz y Coffman $(1969, 1970)$ usando procesador en tiempo compartido, y en la figura 4.10 tenemos dicha planificación reconvertida en una planificación factible sin usar procesador compartido. Esto se hace con el algoritmo de McNaughton (1959) para $P|pmtn|C_{max}$ como también describen Muntz y Coffman en sus artículos (1969,1970). En dichas figuras, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es $63'30''$, luego $C_{max} = 63,5$ minutos.

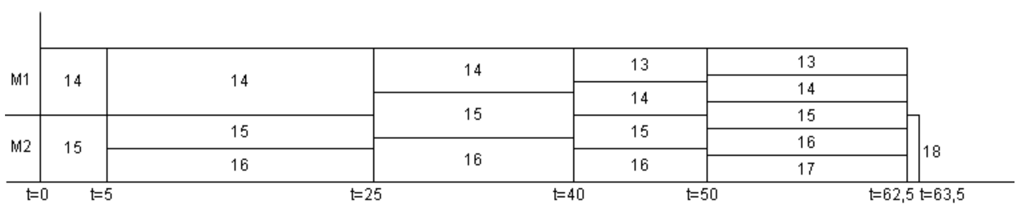


Figura 4.9: Aplicación del algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ usando procesador compartido para el problema del ANTES en S_1

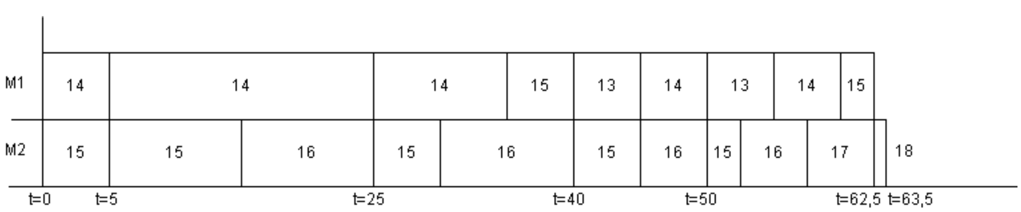


Figura 4.10: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ ya reconvertida a una solución factible óptima sin usar procesador compartido para el problema del ANTES en S_1

Como observamos en la figura 4.10, las máquinas $M1$ y $M2$ realizan los trabajos, 14 y 15, respectivamente, durante los primeros 5 minutos. A partir del minuto 5 la máquina $M1$ continúa con el trabajo 14 hasta el minuto 25, mientras que la máquina $M2$ dedica a los trabajos 15 y 16 unos 10 minutos a cada uno de ellos. En lo siguientes 15 minutos, la máquina $M1$ hace los trabajos 14 y 15, en cambio la máquina $M2$ hace en primer lugar el trabajo 15 y después el trabajo 16, de esta forma no se hace el mismo trabajo en las dos máquinas. A continuación la primera máquina dedica 5 minutos al trabajo 13 y otros 5 minutos al trabajo 14, y la segunda máquina de igual forma dedica 5 minutos el trabajo 15 y otros 5 minutos al trabajo 16. Así hasta que aparece el trabajo 17 para comenzar a hacer, entonces la máquina $M1$ hace los trabajos (13, 14, y parte del 15, no hecha por la segunda máquina) y el máquina $M2$ hace los trabajos (parte del 15, el 16 y el 17). Y se termina con el trabajo 18 en el minuto $t = 63,5$, es decir, los trabajadores tienen que estar en el establecimiento con su uniforme puesto $62,5$ minutos antes de abrir al público. Cabe destacar que las máquinas son intercambiables ($\alpha = P$)

Ahora mostramos los pasos de resolución para el problema del DESPUÉS en la sección S_1.

Resolución del problema de la sección S_1 para el DESPUÉS.

El problema a resolver en este caso es también $P2|pmtn, intree|C_{max}$. En el siguiente cuadro 4.2 se muestran los trabajos $j \in J_1^{DESPUES}$, donde tenemos $n = 5$ trabajos y $m = 2$ máquinas. Igual que en caso anterior, el parámetro p_j denota el tiempo de proceso del trabajo j en cualquiera de las máquinas y S_j el conjunto de sucesores directos del trabajo j.

Trabajo j	41	42	43	44	45
Tiempo p_j	15	30	15	15	1
Sucesor S_j	42	45	45	45	-

Cuadro 4.2: Tiempos de procesos(en minutos) y relación de sucesores para los trabajos del después en la sección S_1

Primero etiquetamos el trabajo terminal, $j = 45$, por tanto $\alpha_{45} = p_{45} = 1$.

Hacemos la asignación de etiquetas es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha_{42} &= max_{i \in S_{42}}\{\alpha_i\} + p_{42} = \alpha_{45} + p_{42} = 1 + 30 = 31\\
\alpha_{43} &= max_{i \in S_{43}}\{\alpha_i\} + p_{43} = \alpha_{45} + p_{43} = 1 + 15 = 16\\
\alpha_{44} &= max_{i \in S_{44}}\{\alpha_i\} + p_{44} = \alpha_{45} + p_{44} = 1 + 15 = 16\\
\alpha_{41} &= max_{i \in S_{41}}\{\alpha_i\} + p_{41} = \alpha_{42} + p_{41} = 31 + 15 = 46
\end{aligned}$$

Se comienza con los trabajos de mayor etiqueta y que no tengan un trabajo predecesor que dependa de él: $\alpha_{41} = 46$ y $\alpha_{43} = \alpha_{44}$.

La solución propuesta por el algoritmo se va construyendo desde el instante $t = 0$ y se ilustra en la Figura 4.11.

- $t = 0$

j planificable	41	43	44
α_j	46	16	16
$p_{jremanente}$	15	15	15
ρ_j	1	1/2	1/2

Como hay dos trabajos con igual etiqueta se comparte un procesador con radio de proceso $\frac{1}{2}$. Y al trabajo de etiqueta maximal se le asigna una única máquina con radio de proceso 1. Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{41} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$$
$$p'_{43} = p'_{44} = 15 - \frac{1}{2}t = 0 \rightarrow t = 30$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Este supuesto no ocurre ya que los siguientes trabajos a realizar necesitan de la finalización de sus predecesores.

Como el menor de estos instantes es $t = 15$, la decisión tomada en el instante $t = 0$ se mantiene hasta el instante $t = 15$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 15$

j planificable	42	43	44
α_j	31	17/2	17/2
$p_{jremanente}$	30	15/2	15/2
ρ_j	1	1/2	1/2

Como hay dos trabajos con igual etiqueta se comparte un procesador con radio de proceso $\frac{1}{2}$. Y al trabajo con etiqueta maximal se le asigna un procesador con radio de proceso 1. Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{42} = 30 - t = 0 \rightarrow t = 30$$
$$p'_{43} = p'_{44} = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}t = 0 \rightarrow t = 15$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Este supuesto no ocurre ya que los siguientes trabajos a realizar necesitan de la finalización de sus predecesores. Por tanto hasta que no finalice el trabajo 42 no se puede comenzar con el trabajo 45.

Como el menor instante es $t = 15$, la decisión tomada en el instante $t = 15$ se mantiene hasta el instante $t = 30$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 30$

j planificable	42
α_j	16
$p_{jremanente}$	15
ρ_j	1

Solo se puede hacer el trabajo 42, con $\rho_{42} = 1$, como hemos dicho anteriormente tiene que finalizar este trabajo para poder hacer el trabajo 45, por tanto, $p'_{42} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$, en el minuto $t = 45$ se toma una nueva decisión.

- $t = 45$

j planificable	45
α_j	1
$p_{jremanente}$	1
ρ_j	1

En este instante solo queda el trabajo 45 por planificar. Se le asigna $\rho_{45} = 1$. Como $p'_{45} = 1 - t = 0 \to t = 1$. Se mantiene dicha asignación durante ese minuto. Finalmente en el instante $t = 46$, es decir, a los 46 minutos quedan concluidos todos los trabajos del DESPUÉS. Luego $C_{max} = 46'$.

En la figura 4.11 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo de Muntz y Coffman (1969, 1970) usando procesador en tiempo compartido, y en la figura 4.12 tenemos dicha planificación reconvertida en una planificación factible sin usar procesador compartido. Esto se hace con el algoritmo de McNaughton (1959) para $P|pmtn|C_{max}$ como también describen Muntz y Coffman en sus artículos (1969,1970). En dichas figuras, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es 46 minutos, luego $C_{max} = 46'$.

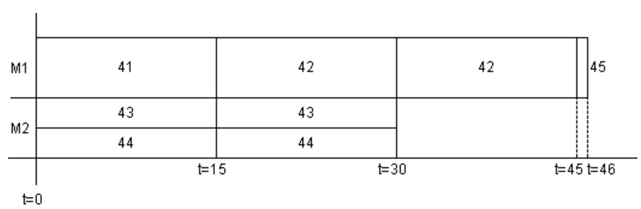


Figura 4.11: Aplicación del algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ usando procesador compartido para el problema del DESPUÉS en S_1

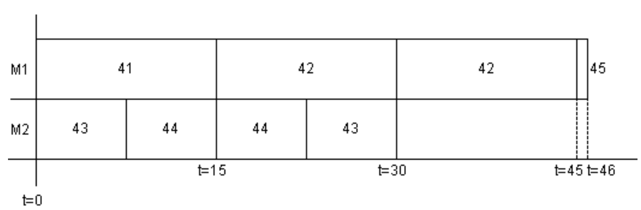


Figura 4.12: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ ya reconvertida a una solución factible óptima sin usar procesador compartido para el problema del DESPUÉS en S_1

Como se muestra en la figura 4.12, la máquina $M1$ hace los trabajos 41, 42 y 45, terminando su jornada en el instante $t = 46$. Mientras que la máquina $M2$ hace los trabajos 43 y 44 terminando su jornada en el instante $t = 30$. Destacar que la solución de este algoritmo, permite que uno de los trabajadores salga más tarde que el otro, por tanto sería recomendable alternar los días entre los trabajadores, así los dos disfrutan del mismo tiempo de descanso.

A continuación mostramos las soluciones para las secciones S_2 y S_3:

Solución del problema de la sección S_2 ***para el ANTES***.

Como se puede observar en la figura 4.13 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo sin usar procesador compartido. Esto se hace con el algoritmo de McNaughton (1959) para $P|pmtn|C_{max}$ como también describen Muntz y Coffman en sus artículos (1969,1970). En dicha figura, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. En ella observamos que el valor del objetivo para el problema del antes en la sección S_2 es 21 minutos, luego $C_{max} = 21'$.

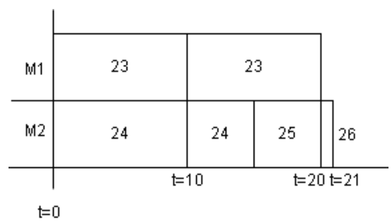


Figura 4.13: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ ya reconvertida a una solución factible óptima sin usar procesador compartido para el problema del ANTES en S_2

Como se muestra en la figura anterior, la máquina $M1$ hace el trabajo 23, y la máquina $M2$ hace los trabajos 24 y 25. Así ambas máquinas en el minuto 20 han terminado los trabajos del ANTES en la sección S_2. Esto quiere decir que los trabajadores de esta sección deben estar con el uniforme puesto 20 minutos antes de la hora de apertura.

Solución del problema de la sección S_2 ***para el DESPUÉS***.

En la figura 4.14 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo sin usar procesador compartido. Esto se hace con el algoritmo de McNaughton (1959) para $P|pmtn|C_{max}$ como también describen Muntz y Coffman en sus artículos (1969,1970). En dicha figura, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. En ella observamos que el valor del objetivo para el problema del después en la sección S_2 es 36 minutos, luego $C_{max} = 36'$.

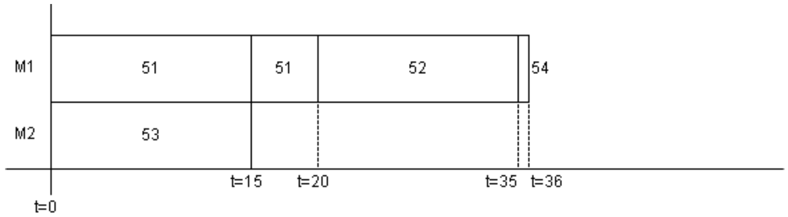


Figura 4.14: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ para el problema del DESPUÉS en S_2

En el problema del después la máquina $M1$ hace los trabajos 51, 52 y 54 finalizando su jornada en el minuto 36. Y la máquina $M2$ hace el trabajo 53 que finaliza en el minuto $t = 15$. De esta forma pueden realizarse dos turnos para facilitar un mayor descanso entre los empleados, y así ambos trabajan el mismo tiempo y descansan el mismo tiempo que es nuestro objetivo principal.

Solución del problema de la sección S_3 ***para el ANTES***.

En la figura 4.15 mostramos la planificación óptima de los trabajos del antes de la sección S_3 dada por el algoritmo de *Muntz y Coffman (1969,1970).* Y en la figura 4.16 proponemos otra solución óptima que beneficia al objetivo de este proyecto, que es mejorar el descanso de los trabajadores. En ellas, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$, $M2$, $M3$ y $M4$ representan las cuatro máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es en esta ocasión $C_{max} = 41'$.

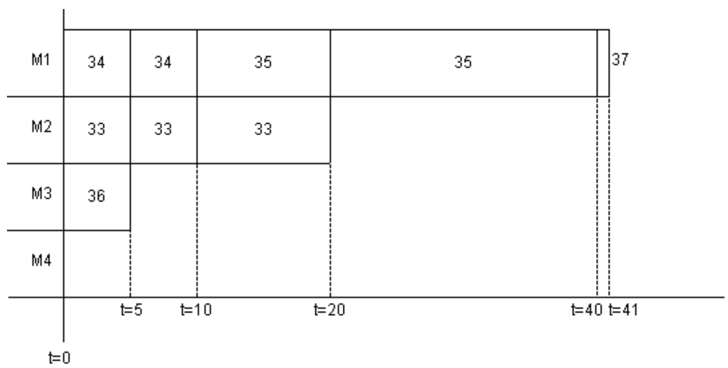


Figura 4.15: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P4|pmtn, intree|C_{max}$ para el problema del ANTES en S_3

Según la planificación dada por el algoritmo, la máquina $M1$ hace los trabajos (34, 35 y 37) acabando así en el minuto 41. La máquina $M2$ hace el trabajo 33 hasta el minuto 20 teniendo así $20'$ de tiempo ocioso. Y la máquina $M3$ hace el trabajo 36 hasta el minuto 5 teniendo así $35'$ de tiempo ocioso. Debemos observar que la cuarta máquina no tiene ningún trabajo a realizar por tanto tiene 40 minutos de tiempo ocioso.

Por esto, nosotros proponemos una nueva solución óptima alternativa representada en la figura siguiente (figura 4.16):

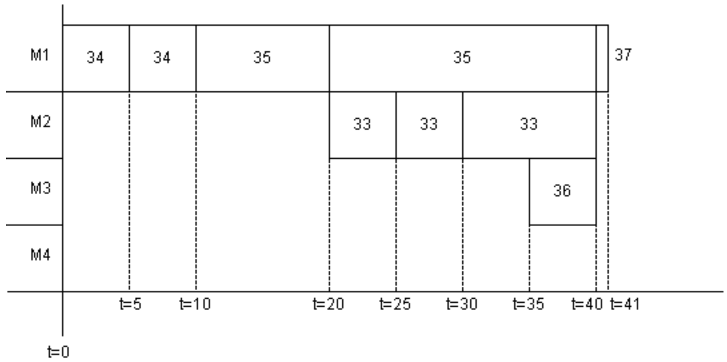


Figura 4.16: Solución propuesta alternativa para el problema del ANTES en la S_3

Las soluciones propuestas en las Figuras 4.15 y 4.16 son óptimas alternativas para el criterio C_{max}. La de la Figura 4.16 "justifica" los trabajos hacia la derecha facilitando así que determinados trabajadores puedan incorporarse al trabajo más tarde, siempre respetando el horario establecido de apertura.

Se puede por tanto establecer 4 turnos distintos de llegada al lugar del trabajo:

- Turno 1 (T1): el trabajador comienza su jornada $40'$ antes de la apertura $(5:20h)$.
- Turno 2 (T2): el trabajador comienza su jornada $20'$ antes de la apertura $(5:40h)$.
- Turno 3 (T3): el trabajador comienza su jornada $5'$ antes de la apertura $(5:55h)$.
- Turno 4 (T4): el trabajador comienza su jornada en el momento de la apertura $(5:59h)$.

Destacar que cuando hacemos referencia a que el trabajador comienza su jornada, suponemos que ya está en el establecimiento con su uniforme correspondiente puesto.

Puesto que no se desea generar agravios entre los trabajadores, se propone una planificación cíclica o periódica con periodo $T = 4$ semanas en la que los turnos vayan rotando entre los trabajadores de acuerdo con la siguiente tabla:

	$T1$	$T2$	$T3$	$T4$
Semana 1	$M1$	$M4$	$M3$	$M2$
Semana 2	$M2$	$M1$	$M4$	$M3$
Semana 3	$M3$	$M2$	$M1$	$M4$
Semana 4	$M4$	$M3$	$M2$	$M1$

Cuadro 4.3: Turnos

Veamos por último la solución del problema de la sección S_3 para los trabajos del después.

Solución del problema de la sección S_3 ***para el DESPUÉS.***

En la figura 4.17 mostramos la planificación óptima de los trabajos del después de la sección S_3 dada por el algoritmo de *Muntz y Coffman (1969,1970)*. En ella, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$, $M2$, $M3$ y $M4$ representan las cuatro máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es en esta ocasión $C_{max} = 46'$.

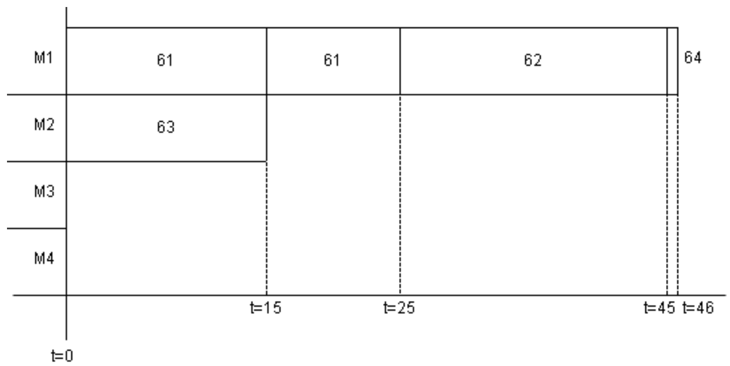


Figura 4.17: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P4|pmtn, intree|C_{max}$ para el problema del DESPUÉS en S_3

Como se muestra en la figura anterior, sólo dos máquinas son necesarias para realizar los trabajos posteriores al cierre. La máquina $M1$ hace los trabajos 61, 62 y 64 hasta el instante $t = 46$. Mientras que la máquina $M2$ hace hasta el minuto 15 el trabajo 63, y a partir de dicho minuto finaliza su jornada laboral. Así quedan 2 máquinas sin ningún trabajo que hacer.

Por tanto se puede plantear unos turnos similares a los anteriores, de forma que todos los trabajadores disfruten cada dos semanas de un mayor tiempo de descanso después de su jornada laboral. Dichos turnos serían: $T1 = 14 : 46h$, $T2 = 14 : 15h$, $T3 = 14 : 00h$ y $T4 = 14 : 00h$.

De esta forma hemos planificado de la mejor manera todos los trabajos del ANTES y del DESPUÉS tanto de la cafetería, como del kiosco, como de la actividad comercial de abastecimiento de víveres.

Capítulo 5

Conclusiones

La idea de este proyecto nace con el objetivo de resolver el problema de planificación de una pequeña y mediana empresa que gestiona una cafetería y un kiosco. La empresa está interesada en mejorar el bienestar de sus trabajadores. Por ello se preocupa especialmente de optimizar los procesos previos a la apertura y posteriores al cierre de sus establecimientos.

Se han abordado estos problemas desde la óptica de los procesos de modelización científica, y más concretamente con los modelos de Estadística e Investigación Operativa conocidos como modelos de *Planificación*.

Como resultado de este trabajo se han propuesto soluciones a los problemas que lo motivaron. Dichas soluciones han resultado ser satisfactorias y aceptadas por los decisores de la pequeña y mediana empresa considerada.

De manera complementaria se ha emprendido la resolución de una problema de planificación de una empresa de abastecimiento de víveres que dispone de un número mayor de empleados. Este problema se ha resuelto también satisfactoriamente utilizando para ello el algortimo de Muntz y Coffman que resuelve determinados problemas de planificación.

Las soluciones propuestas pueden implementarse de manera inmediata en ambas empresas.

Creemos que este tipo de planteamientos pueden extenderse y aplicarse también a otras empresas que pudieran estar interesadas.

Apéndice A

Resolución del problema de las secciones S_2 y S_3 de la actividad comercial de abastecimiento de víveres.

A.1. Resolución del problema del ANTES para la sección S_2.

El problema a resolver en este caso es $P2|pmtn, intree|C_{max}$. En el siguiente cuadro 4.1 se muestran los trabajos $j \in J_2^{ANTES}$, donde tenemos $n = 4$ trabajos y $m = 2$ máquinas. El parámetro p_j denota el tiempo de proceso del trabajo j en cualquiera de las máquinas y S_j el conjunto de sucesores directos del trabajo j.

Trabajo j	23	24	25	26
Tiempo p_j	20	15	5	1
Sucesor S_j	26	26	26	-

Cuadro A.1: Tiempos de procesos(en minutos) y relación de sucesores para los trabajos del antes en la sección S_2

En primer lugar etiquetamos el trabajo terminal, $j = 26$, por tanto $\alpha_{26} = p_{26} = 1$.

Seguidamente hacemos la asignación de etiquetas de los demás trabajos:

$$\alpha_{23} = max_{i \in S_{23}}\{\alpha_i\} + p_{23} = \alpha_{26} + p_{23} = 1 + 20 = 21$$
$$\alpha_{24} = max_{i \in S_{24}}\{\alpha_i\} + p_{24} = \alpha_{26} + p_{24} = 1 + 15 = 46$$
$$\alpha_{25} = max_{i \in S_{25}}\{\alpha_i\} + p_{25} = \alpha_{26} + p_{25} = 1 + 5 = 6$$

La solución propuesta por el algoritmo se va construyendo desde el instante $t = 0$ y se ilustra en la Figura A.1.

- $t = 0$

En la siguiente tabla se recogen los trabajos que se planificarán desde el instante $t = 0$, las etiquetas asignadas a cada trabajo j, el tiempo remanente de cada trabajo j y el radio de proceso asociado a cada trabajo j:

j planificable	23	24
α_j	21	16
$p_{jremanente}$	20	15
ρ_j	1	1

Los dos trabajos planificables tienen etiqueta maximal, y su radio de proceso es 1. Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En el cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{23} = 20 - t = 0 \rightarrow t = 20$$
$$p'_{24} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso:

$$\alpha'_{23} = 21 - t \leq \alpha_{25} = 6 \rightarrow t = 15$$
$$\alpha'_{24} = 16 - t \leq \alpha_{25} = 6 \rightarrow t = 10$$

Como el menor de estos instantes es $t = 10$, la decisión tomada en el instante $t = 0$ se mantiene hasta el instante $t = 10$. En ese momento hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 10$

j planificable	23	24	25
α_j	11	6	6
$p_{jremanente}$	10	5	5
ρ_j	1	1/2	1/2

Dado que hay dos trabajos con misma etiqueta, luego se comparte un procesador con radio de proceso $\frac{1}{2}$. El otro trabajo tiene etiqueta maximal por tanto su radio de proceso es 1. Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. Donde hay que detectar el menor instante t en el cual ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{23} = 10 - t = 0 \rightarrow t = 10$$
$$p'_{24} = p'_{25} = 5 - \frac{1}{2}t = 0 \rightarrow t = 10$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Este supuesto no ocurre dado que para hacer el siguiente trabajo, el $j = 26$, tienen que finalizar todos los trabajos anteriores.

En $t = 20$ se terminan todos los trabajos anteriores, por tanto hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 20$

j planificable	26
α_j	1
$p_{jremanente}$	1
ρ_j	1

En este instante solo queda el trabajo 26 por planificar. Se le asigna $\rho_{26} = 1$. Como $p'_{26} = 1 - t = 0 \rightarrow t = 1$. Se mantiene dicha asignación durante ese minuto. Finalmente en el instante $t = 21$, es decir, a los 21 minutos quedan concluidos todos los trabajos del ANTES. Luego $C_{max} = 21'$.

En la figura A.1 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo de Muntz y Coffman (1969, 1970) usando procesador en tiempo compartido, y en la figura A.2 tenemos la planificación óptima dada por dicho algoritmo sin usar procesador compartido. En ellas, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es 21 minutos, luego $C_{max} = 21'$.

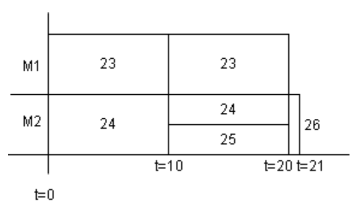


Figura A.1: Aplicación del algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ usando procesador compartido para el problema del ANTES en S_2

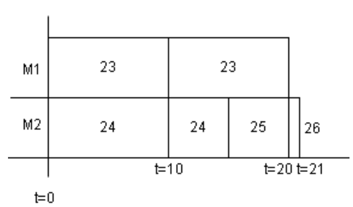


Figura A.2: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ ya reconvertida a una solución factible óptima sin usar procesador compartido para el problema del ANTES en S_2

A.2. Resolución del problema del DESPUÉS para la sección S_2.

El problema a resolver en este caso es también $P2|pmtn, intree|C_{max}$. En el siguiente cuadro A.2 se muestran los trabajos $j \in J_2^{DESPUES}$, donde tenemos $n = 4$ trabajos y $m = 2$ máquinas. Igual que en caso anterior, el parámetro p_j denota el tiempo de proceso del trabajo j en cualquiera de las máquinas y S_j el conjunto de sucesores directos del trabajo j.

Trabajo j	51	52	53	54
Tiempo p_j	20	15	15	1
Sucesor S_j	52	54	54	-

Cuadro A.2: Tiempos de procesos(en minutos) y relación de sucesores para los trabajos del después en la sección S_2

En primer lugar etiquetamos el trabajo terminal, $j = 54$, por tanto $\alpha_{54} = p_{54} = 1$.

En el segundo lugar hacemos la asignación de etiquetas siguiente:

$$\alpha_{52} = max_{i \in S_{52}}\{\alpha_i\} + p_{52} = \alpha_{54} + p_{52} = 1 + 15 = 16$$
$$\alpha_{53} = max_{i \in S_{53}}\{\alpha_i\} + p_{53} = \alpha_{54} + p_{53} = 1 + 15 = 16$$
$$\alpha_{51} = max_{i \in S_{51}}\{\alpha_i\} + p_{51} = \alpha_{52} + p_{51} = 16 + 20 = 36$$

Se comienza con los trabajos de mayor etiqueta y que no tengan un trabajo predecesor que dependa de él: $\alpha_{51} = 36$ y $\alpha_{53} = 16$.

La solución propuesta por el algoritmo se va construyendo desde el instante $t = 0$ y se ilustra en la Figura A.3.

- $t = 0$

j planificable	51	53
α_j	36	16
$p_{jremanente}$	20	15
ρ_j	1	1

Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{51} = 20 - t = 0 \rightarrow t = 20$$
$$p'_{53} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Este supuesto no ocurre ya que los siguientes trabajos a realizar necesitan de la finalización de sus predecesores.

Como el menor instante es $t = 15$, en $t = 15$ hay que tomar una nueva decisión.

- $t = 15$

j planificable	51
α_j	21
$p_{jremanente}$	5
ρ_j	1

En este instante el trabajo 53 queda finalizado. Y hay que hacer el trabajo 51 hasta que termine éste y poder hacer el trabajo 52. Por tanto buscamos el instante donde finaliza el trabajo 51: $p'_{51} = 5 - t = 0 \rightarrow t = 5$, en $t = 20$ hay que tomar una decisión.

- $t = 20$

j planificable	52
α_j	16
$p_{jremanente}$	15
ρ_j	1

Para finalizar los trabajos del después en esta sección con el trabajo 54 hay que terminar todos los trabajos anteriores, por tanto veamos cuando termina el trabajo 52: $p'_{52} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$, por tanto en $t = 35$ hay una nueva decisión que tomar.

- $t = 35$

j planificable	54
α_j	1
$p_{jremanente}$	1
ρ_j	1

En este instante solo queda el trabajo 54 por planificar. Se le asigna $\rho_{54} = 1$. Como $p'_{54} = 1 - t = 0 \rightarrow t = 1$. Se mantiene dicha asignación durante ese minuto. Finalmente a los 36 minutos quedan concluidos todos los trabajos del DESPUÉS. Luego $C_{max} = 36'$.

En la figura A.3 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo de Muntz y Coffman (1969, 1970). En ellas, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$ y $M2$ representan las dos máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es 36 minutos, luego $C_{max} = 36'$.

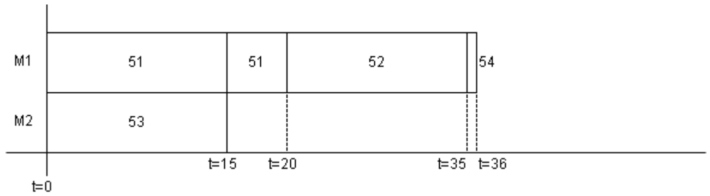


Figura A.3: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P2|pmtn, intree|C_{max}$ para el problema del DESPUÉS en S_2

A.3. Resolución del problema del ANTES para la sección S_3.

El problema a resolver en este caso es $P4|pmtn, intree|C_{max}$. En el siguiente cuadro A.3 se muestran los trabajos $j \in J_3^{ANTES}$, donde tenemos $n = 5$ trabajos y $m = 4$ máquinas. El parámetro p_j denota el tiempo de proceso del trabajo j en cualquiera de las máquinas y S_j el conjunto de sucesores directos del trabajo j.

Trabajo j	33	34	35	36	37
Tiempo p_j	20	10	30	5	1
Sucesor S_j	37	35	37	37	-

Cuadro A.3: Tiempos de procesos(en minutos) y relación de sucesores para los trabajos del antes en la sección S_3

En primer lugar etiquetamos el trabajo terminal, $j = 37$, por tanto $\alpha_{37} = p_{37} = 1$.

Seguidamente hacemos la asignación de etiquetas de los demás trabajos:

$$\alpha_{33} = max_{i \in S_{33}}\{\alpha_i\} + p_{33} = \alpha_{37} + p_{33} = 1 + 20 = 21$$
$$\alpha_{35} = max_{i \in S_{35}}\{\alpha_i\} + p_{35} = \alpha_{37} + p_{35} = 1 + 30 = 31$$
$$\alpha_{36} = max_{i \in S_{36}}\{\alpha_i\} + p_{36} = \alpha_{37} + p_{36} = 1 + 5 = 6$$
$$\alpha_{34} = max_{i \in S_{34}}\{\alpha_i\} + p_{34} = \alpha_{35} + p_{34} = 31 + 10 = 41$$

La solución propuesta por el algoritmo se va construyendo desde el instante $t = 0$ y se ilustra en la Figura A.4.

- $t = 0$

En la siguiente tabla se recogen los trabajos que se planificarán desde el instante $t = 0$, las etiquetas asignadas a cada trabajo j, el tiempo remanente de cada trabajo j y el radio de proceso asociado a cada trabajo j:

j planificable	34	33	36
α_j	41	21	6
$p_{jremanente}$	10	20	5
ρ_j	1	1	1

Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En el cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{34} = 10 - t = 0 \rightarrow t = 10$$
$$p'_{33} = 20 - t = 0 \rightarrow t = 20$$
$$p'_{36} = 5 - t = 0 \rightarrow t = 5$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Los siguientes trabajos a realizar necesitan que terminen los predecesores.

Como el menor de estos instantes es $t = 5$, la decisión tomada en el instante $t = 0$ se mantiene hasta el instante $t = 5$. En ese momento se termina el trabajo 36.

- $t = 5$

j planificable	34	33
α_j	36	16
$p_{jremanente}$	5	15
ρ_j	1	1

Se mantiene hasta que finalice alguno de los dos:

$$p'_{34} = 5 - t = 0 \rightarrow t = 5$$
$$p'_{33} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$$

Por tanto se mantiene esta asignación hasta el minuto 10.

- $t = 10$

j planificable	35	33
α_j	31	11
$p_{jremanente}$	30	10
ρ_j	1	1

Una vez termina el trabajo 34 se puede empezar el trabajo 35. Y hasta que no finalice el $j = 35$, no se puede hacer el $j = 37$. Veamos cuando finalice alguno de los trabajos:

$$p'_{35} = 30 - t = 0 \rightarrow t = 30$$
$$p'_{33} = 10 - t = 0 \rightarrow t = 10$$

Por tanto el siguiente instante de decisión es $t = 20$, en ese instante el trabajo 33 ha terminado.

- $t = 20$

j planificable	35
α_j	21
$p_{jremanente}$	20
ρ_j	1

En este instante queda finalizado el trabajo 33. Ahora tiene que terminar el trabajo 35 para hacer el 37, es decir: $p'_{35} = 20 - t = 0 \rightarrow t = 20$. En $t = 40$, se toma una decisión.

- $t = 40$

j planificable	37
α_j	1
$p_{jremanente}$	1
ρ_j	1

En este instante solo queda el trabajo 37 por planificar. Se le asigna $\rho_{37} = 1$. Como $p'_{37} = 1 - t = 0 \rightarrow t = 1$. Se mantiene dicha asignación durante ese minuto. Finalmente en el instante $t = 41$ quedan concluidos todos los trabajos del ANTES. Luego $C_{max} = 41'$.

En la figura A.4 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo de Muntz y Coffman (1969, 1970). En ella, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$, $M2$, $M3$ y $M4$ representan las cuatro máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es 21 minutos, luego $C_{max} = 41'$.

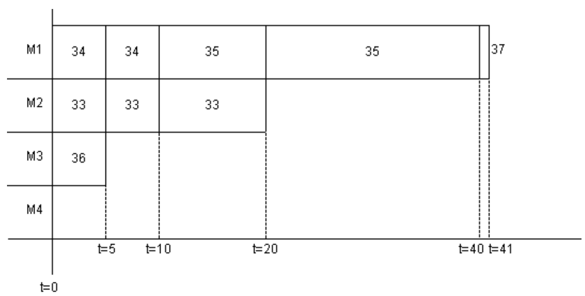


Figura A.4: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P4|pmtn, intree|C_{max}$ para el problema del ANTES en S_3

A.4. Resolución del problema del DESPUÉS para la sección S_3.

El problema a resolver en este caso es también $P4|pmtn, intree|C_{max}$. En el siguiente cuadro A.4 se muestran los trabajos $j \in J_3^{DESPUES}$, donde tenemos $n = 4$ trabajos y $m = 4$ máquinas. Igual que en caso anterior, el parámetro p_j denota el tiempo de proceso del trabajo j en cualquiera de las máquinas y S_j el conjunto de sucesores directos del trabajo j.

Trabajo j	61	62	63	64
Tiempo p_j	25	20	15	1
Sucesor S_j	62	64	64	-

Cuadro A.4: Tiempos de procesos(en minutos) y relación de sucesores para los trabajos del después en la sección S_3

En primer lugar etiquetamos el trabajo terminal, $j = 64$, por tanto $\alpha_{64} = p_{64} = 1$.

En el segundo lugar hacemos la asignación de etiquetas siguiente:

$$\alpha_{62} = max_{i \in S_{62}}\{\alpha_i\} + p_{62} = \alpha_{64} + p_{62} = 1 + 20 = 21$$
$$\alpha_{63} = max_{i \in S_{63}}\{\alpha_i\} + p_{63} = \alpha_{64} + p_{63} = 1 + 15 = 16$$
$$\alpha_{61} = max_{i \in S_{61}}\{\alpha_i\} + p_{61} = \alpha_{62} + p_{61} = 21 + 25 = 46$$

Se comienza con los trabajos de mayor etiqueta y que no tengan un trabajo predecesor que dependa de él: $\alpha_{61} = 46$ y $\alpha_{63} = 16$.

La solución propuesta por el algoritmo se va construyendo desde el instante $t = 0$ y se ilustra en la Figura A.5.

- $t = 0$

j planificable	61	63
α_j	46	16
$p_{jremanente}$	25	15
ρ_j	1	1

Se mantiene esta asignación hasta que ocurra alguno de los supuestos del **paso** 4. En cual hay que detectar el menor instante t en el que ocurre dicho supuesto, es decir:

a) Se acaba algún trabajo:

$$p'_{61} = 25 - t = 0 \rightarrow t = 25$$
$$p'_{63} = 15 - t = 0 \rightarrow t = 15$$

b) Aparece un nuevo trabajo con mayor etiqueta y menor radio de proceso. Este supuesto no ocurre ya que los siguientes trabajos a realizar necesitan de la finalización de sus predecesores.

Como el menor instante es $t = 15$, hay que tomar una nueva decisión en el minuto 15.

- $t = 15$

j planificable	61
α_j	31
$p_{jremanente}$	10
ρ_j	1

En este instante queda finalizado el trabajo 63. Para hacer el trabajo 62 debe terminar el trabajo 61, por tanto buscamos el instante donde finaliza: $p'_{61} = 10 - t = 0 \rightarrow t = 10$, en $t = 25$ hay que tomar una decisión.

- $t = 25$

j planificable	62
α_j	21
$p_{jremanente}$	20
ρ_j	1

En este instante termina el trabajo 61. Para finalizar los trabajos del después en esta sección con el trabajo 64 hay que terminar todos los trabajos anteriores, por tanto veamos cuando termina el trabajo 62: $p'_{62} = 20 - t = 0 \rightarrow t = 20$, por tanto en $t = 45$ hay una nueva decisión que tomar.

- $t = 45$

j planificable	64
α_j	1
$p_{jremanente}$	1
ρ_j	1

En este instante solo queda el trabajo 64 por planificar. Se le asigna $\rho_{64} = 1$. Como $p'_{64} = 1 - t = 0 \rightarrow t = 1$. Se mantiene dicha asignación durante ese minuto. Finalmente a los 46 minutos quedan concluidos todos los trabajos del ANTES. Luego $C_{max} = 46'$.

En la figura A.5 tenemos la planificación óptima dada por el algoritmo de Muntz y Coffman (1969, 1970). En ella, el eje horizontal es el eje de tiempo. Y $M1$, $M2$, $M3$ y $M4$ representan las cuatro máquinas existentes. Las cajas rectangulares son los trabajos cuyo índice j está en el centro de la caja. Observamos que el valor del objetivo es 46 minutos, luego $C_{max} = 46'$.

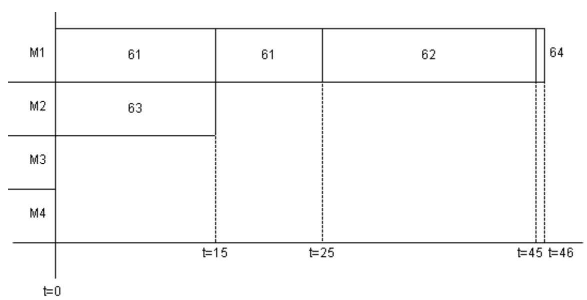


Figura A.5: Solución propuesta por el algoritmo de Muntz y Coffman para $P4|pmtn, intree|C_{max}$ para el problema del DESPUÉS en S_3

Bibliografía

[1] Alcaide López de Pablo, D.(1995). *Problemas de Planificación y Secuenciación Determinística: Modelización y Técnicas de Resolución*, Tesis Doctoral. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de La Laguna. Tenerife. España. Publicado también por el Servicio de Publicaciones de La Laguna. Soportes Audiovisuales e Informáticos. Serie Tesis Doctorales. Curso 1995/96. Ciencias y Tecnologías. Vol. 10. Servicio de Publicaciones Universidad de La Laguna, 2004.

[2] Alcaide López de Pablo, D. (1997). *Docencia en Programación Combinatoria y Modelos Matemáticos Combinatorios*. Proyecto Docente para optar a Profesor Titular de Universidad. Universidad de La Laguna.

[3] Alcaide López de Pablo, D. (2008). *On Scheduling Models*. Boletín de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, 24(2), 11-21.

[4] Baker, K.R. (1974). *Introdution to Sequencing and Scheduling*. John Wiley.

[5] French, S. (1982). *Sequencing and Scheduling, an Introduction to the Mathematics of the Job Shop*. Ellis Horwood Series.

[6] Graham, R.L, E.L Lawler, J.K Lenstra, A.H.G. Rinnoy Kan (1979). *Optimization and approximation in deterministc sequencing and scheduling; a survey*. Annals of discrete mathematics, 5,287-326.

[7] Hu, T.C. (1961). *Parallel sequencing and assembly line problems*. Oper. Res. 9,841-848.

[8] Lawler, E.L., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys. (1993). Sequencing and scheduling: algorithms and complexity. Graves, S.C., A.H.G. Rinnooy Kan, P.H. Zipkin (eds.) *Handbooks in Operations Research and Management Science*, capítulo 9, vol. 4, North Holland.

[9] McNaughton, R. (1959). Scheduling with deadlines and loss functions. *Management Sci.*,6,1-12.

[10] Muntz, R.R, E.G. Coffman Jr. (1969). Optimal preemptive scheduling on two processor systems. *IEEE Trans. Computers C*, 18, 1014-1020.

[11] Muntz, R.R, E.G. Coffman Jr. (1970). Preemptive scheduling of real time tasks on multiprocessor systems. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 17, 324-338.