Analisi del trasferimento di calore per radiazione attraverso N tubi concentrici

Erminia Leonardi
26/09/00

Il modello fisico

Si consideri un sistema costituito da N tubi concentrici di lunghezza infinita e raggi definiti come:

$$R_i = R_{\min} + \frac{(R_{\max} - R_{\min})}{N-1}(i-1), \tag{1}$$

con i=1,…,N, dove $R_{\min}$ e'il raggio del tubo piu' interno, e $R_{\max}$ e' il raggio del tubo piu' esterno. Inoltre, il tubo di raggio R_{min} ha la temperatura fissa T_{max}, ed il tubo di raggio R_{max} la temperatura fissa T_{minx}.

Per ogni tubo compreso tra quello di raggio minimo e quello di raggio massimo possiamo definire una condizione di equilibrio dinamico (temperatura costante nel tempo) come:

$$\Delta Q = Q_{emesso} - Q_{assorbito} = 0 \tag{2}$$

Per calcolare correttamente il calore emesso e quello assorbito da ogni tubo si dovrebbe tenere in considerazione il fatto che i materiali dei tubi sono caratterizzati da un certo valore di emissivita', la quale, a sua volta, dipende dalla temperatura del materiale, dalla lunghezza d'onda e dall'angolo ϕ che la radiazione emessa o riflessa forma con la normale alla superficie.

Abbiamo considerato, in prima approssimazione, tutti i tubi costituiti dello stesso materiale non trasmissivo (trasmissivita' pari a zero), e l'emissivita' costante rispetto alla lunghezza d'onda, all'angolo ϕ, ed alla temperatura.
Indicando con $\varepsilon, \rho,$ e α, i coefficienti di emissivita', riflettivita' ed assorbanza, rispettivamente, per un mezzo non trasmissivo valgono le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$\alpha = \varepsilon$$
$$\rho = 1 - \varepsilon$$

Il tubo *i*-esimo emette sia verso il tubo (*i*-1)-esimo che verso il tubo (*i*+1)-esimo. Dell'energia emessa verso il tubo $(i$-1), solo una frazione, pari a $\frac{R_{i-1}}{R_i}$ [1] raggiunge effettivamente il tubo (*i*-1)-esimo. Questa frazione di energia, dunque, raggiunge il tubo *i*-1 e viene in parte assorbita ed in parte riflessa di nuovo verso il tubo *i*, e cosi' via, continuando a rimbalzare tra le due pareti, finche' non si estingue assorbita in parte dal tubo *i*-1 ed in parte dal tubo *i*.[2]:

$$Q_{i\to i-1} = \sigma T_i^4 \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \frac{R_{i-1}}{R_i} \frac{1}{1-(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i-1})\frac{R_{i-1}}{R_i}} 2\pi R_i, \tag{4}$$

dove $\sigma = 5.67051\times 10^{-8}$ Watt/m^{2}K^{-4} e' la costante di Stefan-Boltzmann.

Tutta l'energia emessa dal tubo *i* verso il tubo $(i+1)$, raggiunge quest'ultimo , il quale ne assorbe una parte e ne riflette indietro la restante, ma di questa restante solo una frazione pari a $\frac{R_i}{R_{i+1}}$ ritorna sul tubo *i*, e, come prima, la radiazione rimbalza tra il tubo *i* ed *i*+1 fino ad esaurimento:

$$Q_{i\to i+1} = \sigma T_i^4 \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \frac{1}{1-(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i+1})\frac{R_i}{R_{i+1}}} 2\pi R_i \tag{5}$$

Per quanto riguarda la radiazione assorbita dal tubo *i* si deve fare un ragionamento del tutto analogo, ottenendo:

$$Q_{i\leftarrow i-1} = \sigma T_{i-1}^4 \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \frac{1}{1-(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i-1})\frac{R_{i-1}}{R_i}} 2\pi R_{i-1} \tag{6}$$

$$Q_{i\leftarrow i+1} = \sigma T_{i+1}^4 \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \frac{R_i}{R_{i+1}} \frac{1}{1-(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i+1})\frac{R_i}{R_{i+1}}} 2\pi R_{i+1} \tag{7}$$

dove $Q_{i\leftarrow i-1}$,e $Q_{i\leftarrow i+1}$ sono l'energia che il tubo *i* assorbe dai tubi *i*-1 ed *i*+1, rispettivamente.

Dunque, all'equilibrio la quantita':

$$\Delta Q = Q_{i\to i-1} + Q_{i\to i+1} - Q_{i\leftarrow i-1} - Q_{i\leftarrow i+1} \tag{8}$$

deve essere pari a zero.
Il calore perso dal sistema e'pari a quello assorbito dall' N-esimo tubo, cioe':

$$Q_{perso} = Q_{N-1 \to N} - Q_{N-1 \leftarrow N} \tag{9}$$

Il codice di calcolo

Le formule 1-8 sono state implementate in un codice, che, dati come input, il numero totale di tubi, la temperatura del tubo piu' interno e quella del tubo piu' esterno, i raggi di tutti i tubi e le loro emissivita', iterativamente calcola le temperature di equilibrio per ogni tubo. Poiche' non e' stato ancora definito il tipo di materiale utilizzato, le emissivita' sono state considerate uguali per tutti i tubi e indipendenti da temperatura, lunghezza d'onda ed angolo di incidenza.
Tuttavia, in vista di una piu' accurata trattazione delle emissivita', il calore assorbito ed emesso da ogni tubo e' calcolato integrando la funzione di distribuzione di Planck su tutto lo spettro delle frequenze, ottenendo la legge di Stefan-Boltzmann, e le emissivita' sono dunque, per ora, dei semplici coefficienti costanti.

In Figura 1 viene graficata la potenza per unita' di lunghezza che emette un singolo tubo che si trova alla temperatura di 800 K ed ha un raggio di 0.05 m al variare dell'emissivita'.

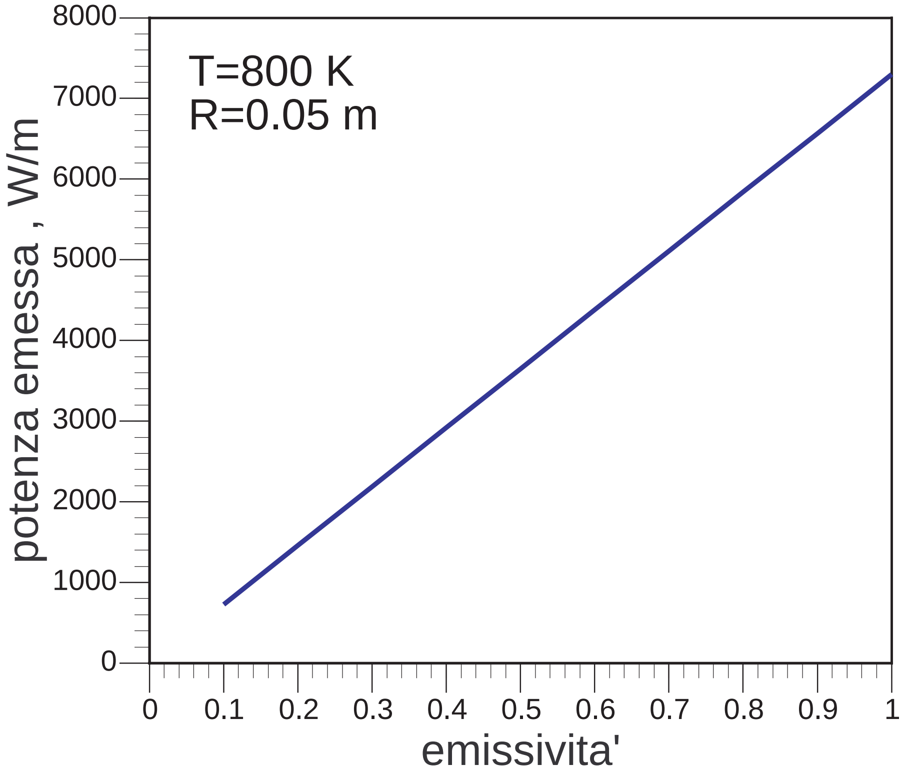

Figura 1: *Potenza emessa da un tubo avente una temperatura di 800 K ed un raggio di 0.05 m in funzione dell'emissivita'.*

In Figura 2 viene considerato un sistema costituito da tre tubi concentrici, e sia il calore perso dal sistema, che la temperatura del tubo intermedio sono graficati in funzione dell'emissivita'.In questo caso il raggio dei tubi e' R_1=0.05 m, R_2=0.1 m, ed R_3=0.15 m; la temperatura del tubo interno e' 800 K e quella del tubo esterno 300 K.

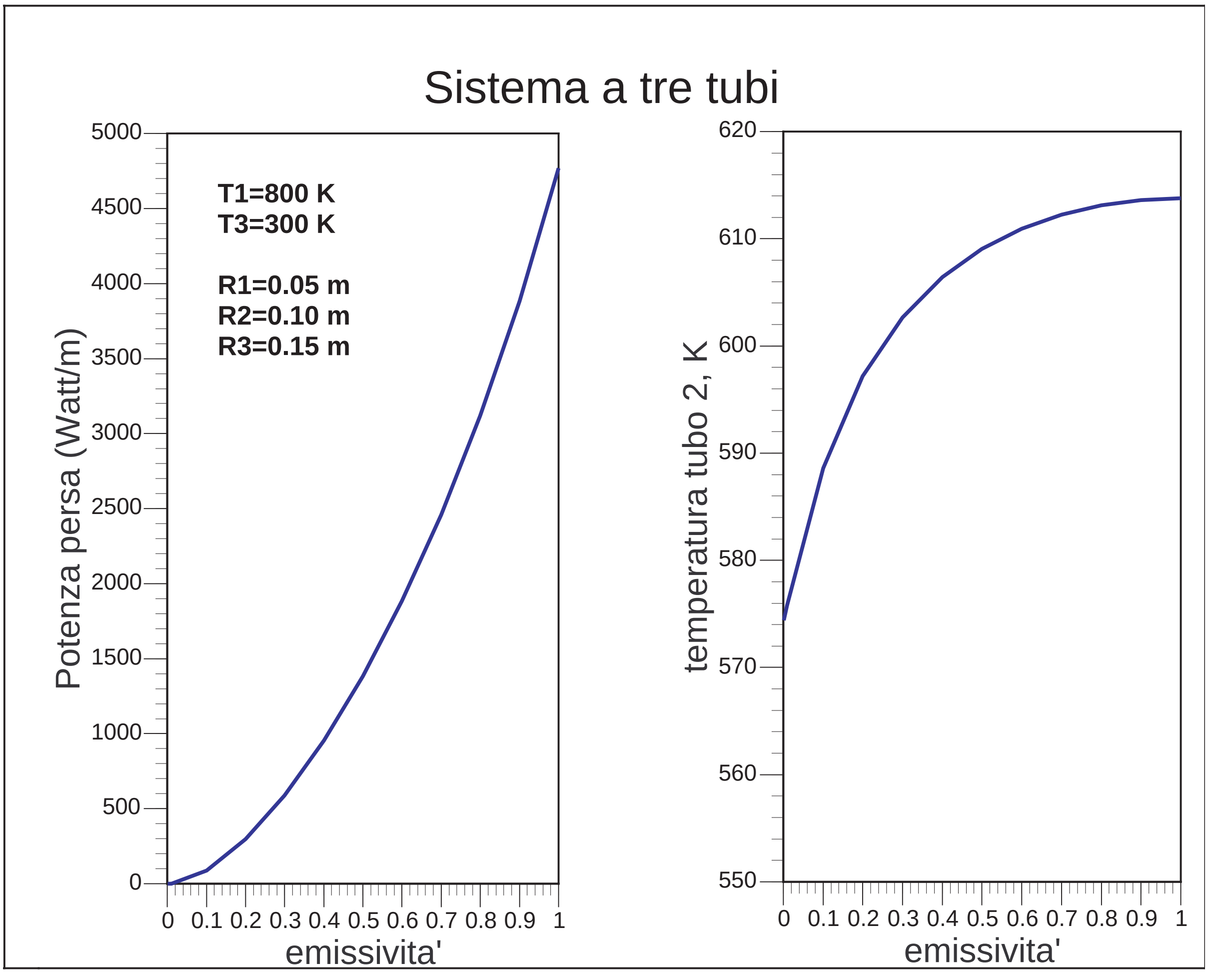

Figura 2. *A sinistra e' indicata la dipendenza della potenza persa per lunghezza unitaria di tubo in funzione dell'emissivita'. A destra e' indicata la dipendenza della temperatura del tubo intermedio in funzione dell'emissivita'.*

La figura 3 mostra, invece, la dipendenza della potenza persa in funzione del numero di tubi, per valori diversi dell'emissivita'. La temperatura del tubo piu' interno e' 800 K e quella del tubo piu' esterno 300 K.

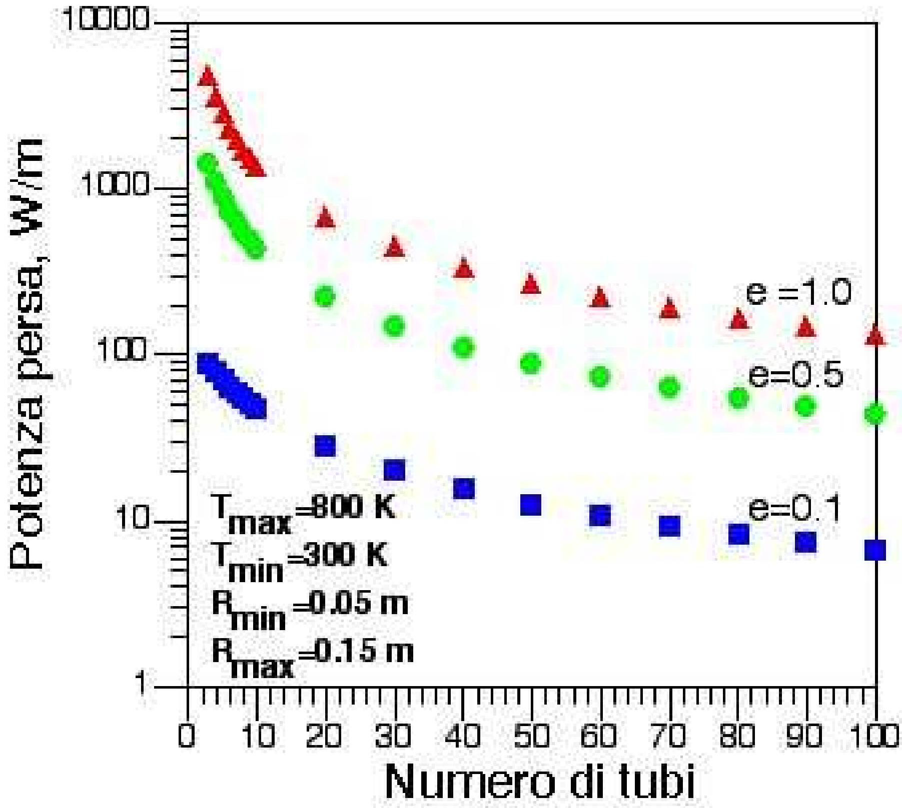

Figura 3. *Potenza persa per lunghezza unitaria del tubo in funzione del numero di tubi per diversi valori dell'emissivita'.*

Nota 1. Per ricavare la frazione di energia f_1 che va dal tubo *i* al tubo *i*-1 e quella f_2 che va dal tubo *i*+1 al tubo *i* si puo' fare la seguente considerazione: poniamo l'emissivita' uguale ad 1 e consideriamo una situazione di equilibrio termico ($T_i = T_{i+1} = T_{i-1}$). Allora possiamo scrivere

$$2\pi R_i \sigma T_i^4 f_1 + 2\pi R_i \sigma T_i^4 = 2\pi R_{i-1} \sigma T_{i-1}^4 + 2\pi R_{i+1} \sigma T_{i+1}^4 f_2 \Rightarrow R_i f_1 + R_i = R_{i-1} + R_{i+1} f_2, \qquad (10)$$

e, perche' questa equazione sia soddisfatta si deve avere: $f_1 = \dfrac{R_{i-1}}{R_i}$, $f_2 = \dfrac{R_i}{R_{i+1}}$.

Tale relazione vale anche quando nell'eq. 10 vengono introdotte le emissivita' del tubo *i*, *i*-1, ed *i*+1.

Nota 2: le formule 4-7 riportate sopra sono state ottenute ricordando che $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$;

Per esempio, nell'eq. 1, si ha :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i-1}) \frac{R_{i-1}}{R_i} \right]^k = \frac{1}{1-(1-\varepsilon_i)(1-\varepsilon_{i-1})\dfrac{R_{i-1}}{R_i}}$$