

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
JÉRÔME DE WOUTERS D'OPLINTER

SUR LA COMBINATOIRE DES POLYOMINOS SERPENTS

AOÛT 2015

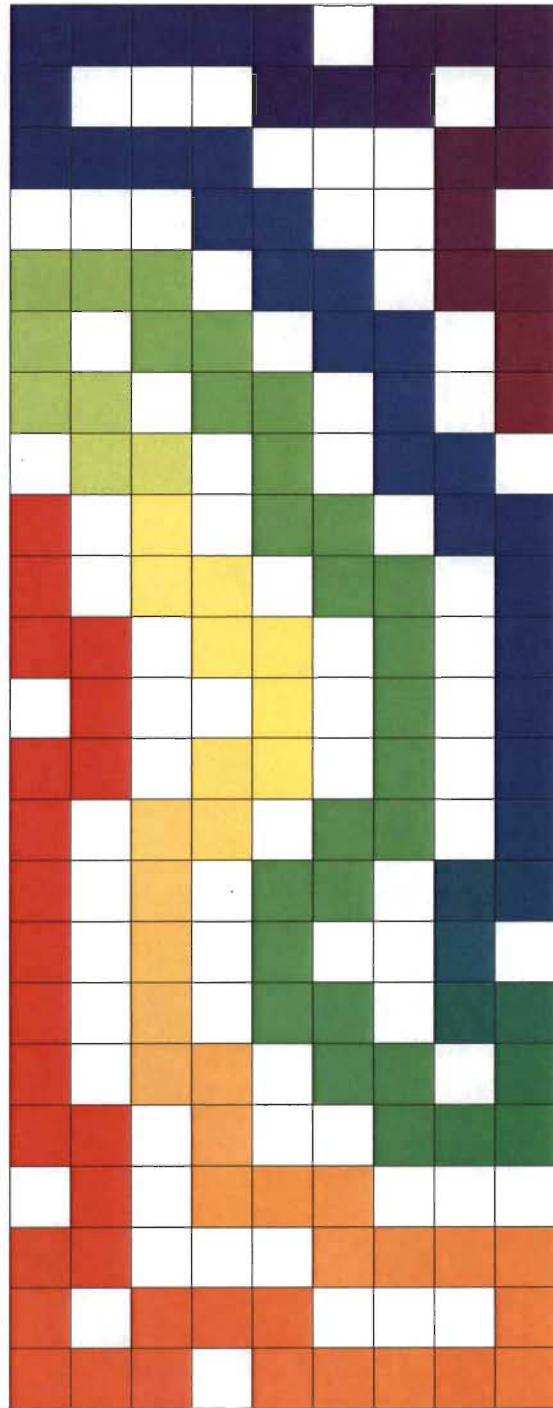
Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.



# Table des matières

Table des figures	iii
Liste des tableaux	vii
<b>1 Introduction à des méthodes combinatoires</b>	<b>1</b>
1.1 Les équations fonctionnelles . . . . .	1
1.2 Polyominos et amis . . . . .	2
1.3 Les séries génératrices . . . . .	8
1.4 Le point de vue des polyominos . . . . .	12
<b>2 Combinatoire des polyominos serpents partiellement dirigés</b>	<b>22</b>
2.1 Serpents partiellement dirigés . . . . .	22
2.2 Les serpents partiellement dirigés inscrits . . . . .	29
2.3 Une bijection . . . . .	47
<b>3 Des serpents un peu plus que minimaux</b>	<b>50</b>
3.1 Serpents d'index 1 . . . . .	50
3.2 Serpents d'index 2 . . . . .	64
3.3 Serpents d'index 3 . . . . .	76
<b>4 Les serpents partiellement dirigés d'index <math>r</math></b>	<b>86</b>
4.1 Construction d'un codage des SPD d'index $r$ . . . . .	87
4.2 Présentation de l'algorithme . . . . .	101
<b>5 Combinatoire des chemins auto-évitants</b>	<b>118</b>
5.1 Les chemins partiellement dirigés . . . . .	118
5.2 Serpents et chemins auto-évitants d'index 0 . . . . .	121
5.3 Serpents et chemins auto-évitants d'index 1 . . . . .	122
5.4 Serpents et chemins auto-évitants d'index 2 . . . . .	124
5.5 SPD et CPD d'index 3 . . . . .	126
5.6 SPD et CPD d'index $r$ . . . . .	128
<b>6 Serpents inscrits et serpents maximaux</b>	<b>129</b>

6.1	Serpents inscrits dans un $2 \times h$	129
6.2	Serpents inscrits dans un $3 \times h$	135
6.3	Serpents inscrits de longueur maximale	140

<b>Bibliographie</b>	<b>152</b>
----------------------	------------

# Table des figures

1.1	Des polyominos à cellules carrées . . . . .	3
1.2	Des polyominos et leurs graphes correspondants . . . . .	3
1.3	Injection des serpents orientés vers les chemins auto-évitant de même longueur . . . . .	5
1.4	Les deux types de $U$ minimaux . . . . .	5
1.5	Un serpent kiss-free et un serpent avec un kiss . . . . .	5
1.6	Deux SPD . . . . .	6
1.7	Une Pokéball et une pioche inscrites . . . . .	6
1.8	Des polyominos d'index $r$ . . . . .	7
1.9	Quelques piliers verticaux . . . . .	13
1.10	Les piliers verticaux et horizontaux de longueur au plus quatre . . . . .	13
1.11	Des serpents Nord-Est-Est . . . . .	14
1.12	Les deux démarrages de SNEE . . . . .	14
1.13	Les 13 SNEE de longueur six . . . . .	15
1.14	La décomposition en colonnes d'un SNEE . . . . .	15
1.15	Des polyominos de $A \times B$ . . . . .	17
1.16	Décomposition combinatoire d'un SPD . . . . .	17
1.17	Accrocher une paire de pas $N$ consécutifs à un pilier horizontal . . . . .	18
1.18	Accrocher un pilier horizontal après une paire de pas $N$ consécutifs . . . . .	18
1.19	Les 14 SPD de longueur quatre . . . . .	18
1.20	Première et dernière cellules d'un serpent minimal . . . . .	20
1.21	Le nombre de pas à faire dans chaque direction . . . . .	20
1.22	Des SPD minimaux commençant dans le coin inférieur gauche . . . . .	21
2.1	Une partition de l'ensemble $SPD\ 3D$ . . . . .	24
2.2	Quatre manières de passer de $x^+$ à $x^-$ ou de $x^-$ à $x^+$ . . . . .	24
2.3	Trois parties de $S_{3D}^2$ . . . . .	26
2.4	Les quatre types fondamentaux de SPD . . . . .	32
2.5	Les quatre familles de $SPD$ où les traverses sont en bleu, les bulles en vert, les extrémités en rouge, les piliers en jaune . . . . .	34
2.6	Des bulles de longueur minimale pour des largeurs fixées . . . . .	35
2.7	Des bulles de largeur deux . . . . .	36
2.8	Des bulles . . . . .	37

2.9	Factorisation combinatoire des bulles de longueur $n$ . . . . .	38
2.10	Des traverses de largeur trois . . . . .	39
2.11	Traverses de largeur $b$ . . . . .	40
2.12	Extrémités . . . . .	43
2.13	Bijection $f : bargraphe(\ell - 1) \rightarrow bulle(\ell)$ . . . . .	48
3.1	Les quatre bancs de longueur cinq . . . . .	51
3.2	Des serpents d'index 1 . . . . .	51
3.3	Les isométries du plan laissant les séries génératrices invariantes . . . . .	53
3.4	Le rectangle circonscrit et la série génératrice esclaves des rotations . . . . .	53
3.5	L'isométrie permutant les $x$ et les $y$ dans la série génératrice . . . . .	54
3.6	Un exemple de chaque structure de base des serpents d'index 1 . . . . .	54
3.7	Des serpents polygames . . . . .	55
3.8	Si le siège du banc ne touche pas un des côtés du rectangle . . . . .	57
3.9	Les pas horizontaux à faire . . . . .	58
3.10	Serpents d'index 1 obtenus par symétries à partir du premier à gauche . . . . .	59
3.11	Le triangle de Pascal . . . . .	62
3.12	Un serpent d'index 2 contenant un petit serpent . . . . .	64
3.13	Les deux familles de petits serpentins horizontaux . . . . .	65
3.14	Un serpent d'index 2 contenant un grand serpent . . . . .	66
3.15	L'escalier entre les deux bancs d'un grand serpent . . . . .	66
3.16	Un escalier de trop pour un serpent d'index 2 . . . . .	67
3.17	Des creux . . . . .	68
3.18	Un $r$ -creux . . . . .	68
3.19	Un serpent d'index 2 contenant un 2-creux . . . . .	69
3.20	Un serpent et son image par une réflexion par rapport à une droite verticale . . . . .	69
3.21	Deux serpents avec l'escalier de hauteur un . . . . .	70
3.22	Deux serpents d'index 2 contenant un gaufrier . . . . .	71
3.23	La structure de petit gaufrier et ses images par des réflexions par rapport à une droite horizontale et par rapport à une droite verticale . . . . .	71
3.24	L'escalier entre les deux bancs d'un grand gaufrier . . . . .	72
3.25	La structure de grand gaufrier . . . . .	72
3.26	La structure de grand gaufrier et ses images par des réflexions par rapport à une droite horizontale et par rapport à une droite verticale . . . . .	73
3.27	Serpents d'index 3 contenant un creux de profondeur 2 et un banc . . . . .	77
3.28	Serpents d'index 3 contenant un petit serpent et un banc . . . . .	78
3.29	Serpents d'index 3 contenant un serpent horizontal et un banc vertical . . . . .	81
3.30	<i>Escalier</i> $\times$ <i>serpentin</i> $H \times$ <i>pilier</i> $V \times$ <i>pilier</i> $V$ . . . . .	81
3.31	<i>Escalier</i> $\times$ <i>serpentin</i> $H \times$ <i>escalier</i> $\times$ <i>pilier</i> $V \times$ <i>pilier</i> $V$ . . . . .	81
3.32	Les structures <i>2-creux horizontal</i> $\times$ <i>banc vertical</i> . . . . .	82
4.1	Les trois types de méandres . . . . .	86

4.2	Deux méandres . . . . .	87
4.3	Illustrations des définitions en référence au SPD de gauche . . . . .	88
4.4	Un SPD d'index 3, son méandre complet d'index 3 et ses sous-méandres d'index 2 et 1 . . . . .	88
4.5	Quelques exemples de SPD et leurs distributions d'index . . . . .	89
4.6	Trois familles de SPD munies de leurs distributions d'index . . . . .	90
4.7	Des polyominos orphelins... pour le moment . . . . .	90
4.8	Quelques familles de SPD . . . . .	91
4.9	Des SPD oubliés... temporairement . . . . .	91
4.10	Des SPD ayant trouvé une famille . . . . .	92
4.11	Illustration de l'utilisation des crochets . . . . .	92
4.12	Des sous-méandres complets . . . . .	93
4.13	Des familles où les méandres s'entrelacent . . . . .	94
4.14	Un codage non adéquat . . . . .	94
4.15	Des méandres entrelacés et leurs distributions d'index . . . . .	95
4.16	Des entrelacements de méandres imbriqués coloriés . . . . .	95
4.17	Deux familles, une distribution d'index . . . . .	96
4.18	La différence entre les deux familles . . . . .	96
4.19	Deux familles, deux distributions d'index . . . . .	97
4.20	Encore deux familles et un seul codage . . . . .	98
4.21	Deux familles, deux distributions d'index . . . . .	99
4.22	La sous-famille commune à une paire de familles de $\mathcal{P}$ . . . . .	100
4.23	Une suite de longueur 3 : problème . . . . .	102
4.24	Une suite de longueur 5 : problème . . . . .	102
4.25	SPD codé par une composition ne contenant que des suites croissantes ou décroissantes	103
4.26	La composition est de longueur paire et évite la suite interdite . . . . .	104
4.27	Un SPD codé par une composition croissante puis décroissante . . . . .	104
4.28	Des SPD minimaux de chaque famille de SPD d'index 6 avec des méandres simples sans escalier . . . . .	106
4.29	Les cas restrictifs locaux pour les escaliers internes . . . . .	107
4.30	Des escaliers ne pouvant s'insérer à cause des structures rouges . . . . .	107
4.31	Des familles d'index 6 avec des méandres simples et des escaliers internes . . . . .	108
4.32	Les deux structures empêchant le placement d'un escalier initial . . . . .	109
4.33	Les structures empêchant le placement d'un escalier final . . . . .	110
4.34	Un SPD minimal de la famille (6, 5, 5, 7) . . . . .	111
4.35	Une substitution non valide et une autre valide . . . . .	111
4.36	Une famille de chaque type de méandre . . . . .	113
4.37	Un SPD minimal de la famille de distribution d'index ( $\leftarrow$ , {1} (3, 1, 1), {2} (2)) . . . . .	114
4.38	Des SPD minimaux des familles d'index 3 . . . . .	115
5.1	Un chemin auto-évitant dans un treillis carré . . . . .	118
5.2	Un SPD et le CPD correspondant . . . . .	119



5.3	Un chemin partiellement dirigé . . . . .	119
5.4	Le « SPD » correspondant au chemin de la figure 5.3 . . . . .	119
5.5	La bijection $f : CPD(\ell) \rightarrow SPD(\ell + 1)$ . . . . .	120
5.6	Des SPD de différentes longueurs donnant des CPD de même longueur . . . . .	121
5.7	Les deux familles de SPD contenant un serpent vertical et les deux familles de CPD correspondantes . . . . .	125
5.8	La famille de SPD contenant un 2-creux et la famille de CPD correspondante . . . . .	125
5.9	Un gaufrier pour lequel soit $g_E$ soit $g_N$ est appliquée et un autre pour lequel $g_E$ et $g_N$ sont appliquées simultanément . . . . .	126
5.10	Un chemin auto-évitant d'index 5 n'ayant pas de serpent homologue par $g_E, g_N$ ou une composition des deux . . . . .	126
5.11	Des SPD admettant respectivement 2 et 3 bancs horizontaux et 4 et 5 bancs verticaux et leurs CPD correspondants . . . . .	128
6.1	Le terme $s(2, h - 1)$ de l'équation (6.1) . . . . .	130
6.2	Le terme $s(2, h - 2)$ de l'équation (6.1) . . . . .	130
6.3	Le terme 2 de l'équation (6.1) . . . . .	130
6.4	Placement des doublons dans un rectangle $2 \times h$ . . . . .	132
6.5	Serpent coin $2 \times h$ . . . . .	132
6.6	Premier doublon dans un serpent $2 \times h$ . . . . .	133
6.7	Les serpents maximaux de largeur deux pour $h = 7$ et $h = 6$ . . . . .	134
6.8	Les trois structures d'extrémités avec leurs séries génératrices . . . . .	135
6.9	Serpents de la classe $G1$ . . . . .	136
6.10	Les extrémités possibles pour les familles $\mathcal{F}_i$ . . . . .	138
6.11	Serpents inscrits de longueur maximale . . . . .	141
6.12	Des serpents maximaux dans un $3 \times h$ . . . . .	142
6.13	Serpents de longueur $3h + 4$ . . . . .	143
6.14	Serpent inscrit dans un $5 \times h$ de longueur $3h + h/7 + constante$ . . . . .	144
6.15	Serpents inscrits dans un rectangle $5 \times h$ de longueur au moins $3h + \lfloor \frac{h}{7} \rfloor$ . . . . .	144
6.16	Serpents maximaux dans un rectangle $7 \times h$ . . . . .	146
6.17	Serpents maximaux dans un rectangle $8 \times h$ . . . . .	147
6.18	Remplissage d'un rectangle avec des serpents diagonaux disjoints et passage à un serpent . . . . .	147
6.19	Un serpent dans un $100 \times 100$ de longueur 6543 . . . . .	148

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
JÉRÔME DE WOUTERS D'OPLINTER

SUR LA COMBINATOIRE DES POLYOMINOS SERPENTS

AOÛT 2015

# Liste des tableaux

1.1	Nombre de serpents non orientés de longueur $n$ . . . . .	4
3.1	Toutes les structures de serpents d'index 1 . . . . .	52
3.2	Nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	57
3.3	Nombre de serpents d'index 1 de longueur $n$ . . . . .	60
3.4	Nombre de serpents d'index 1 de longueur $n$ à symétries près . . . . .	61
3.5	Nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un carré $b \times b$ à symétries près . . . . .	63
3.6	Nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle $b \times h$ à symétries près . . . . .	64
3.7	Nombre de serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle $b \times h$ contenant un serpent . . . . .	67
3.8	Nombre de serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle $b \times h$ contenant un 2-creux . . . . .	70
3.9	Nombre de serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle $b \times h$ contenant un gaufrier . . . . .	74
3.10	Nombre de serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	75
3.11	Nombre de serpents d'index 2 de longueur $n$ . . . . .	75
3.12	Nombre de SPD d'index 3 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	80
3.13	Nombre de serpents d'index 3 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	84
3.14	Nombre de serpents d'index 3 de longueur $n$ . . . . .	85
4.1	Table des compositions de 6 . . . . .	105
4.2	Table des compositions de 6 codant un SPD . . . . .	105
4.3	Table des compositions de 6 codant un SPD sans escalier . . . . .	108
4.4	Table des distributions d'index de 6 munies de leurs escaliers internes . . . . .	108
4.5	Table des familles d'index 6 munies de leurs escaliers internes et externes . . . . .	110
4.9	Les valeurs de $a, b, c, d$ dans les séries génératrices . . . . .	115
5.1	Nombre de chemins auto-évitant d'index 1 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	123
5.2	Nombre de CPD d'index 2 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	125
5.3	Nombre de CPD d'index 3 inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	127
6.1	Nombre de serpents inscrits dans un rectangle $3 \times h$ de longueur $n$ . . . . .	140
6.2	Longueur maximale des serpents inscrits dans un rectangle $b \times h$ . . . . .	145

# Résumé

Ce mémoire se veut une introduction à la combinatoire des polyominos et une référence en ce qui concerne les polyominos serpents et plus particulièrement les polyominos serpents partiellement dirigés (SPD).

Au chapitre 1, nous introduisons les définitions et concepts essentiels pour la bonne compréhension du document. Une partie importante est consacrée à l'utilisation des séries génératrices dans le cadre des polyominos.

Le chapitre 2 parle d'une première approche de la combinatoire des SPD se basant sur leur décomposition en blocs « élémentaires » que nous empilons comme des Lego : les bulles, les traverses, les extrémités et les piliers. Il n'est un prérequis que pour le chapitre 6, les autres s'en passent très bien.

Au chapitre 3, nous présentons les résultats actuels concernant la combinatoire des polyominos serpents. Nous y détaillons des séries génératrices, présentons des formules exactes et introduisons la notion de serpent à symétries près. Il est nécessaire de passer à travers ce chapitre avant de lire le cinquième.

Le chapitre 4 raconte l'histoire d'une seconde approche de la combinatoire des SPD basée sur la notion de méandre et présente un codage des SPD. Nous y retrouvons une « décomposition en facteurs premiers » d'un SPD où les facteurs premiers sont les types de méandres.

Au chapitre 5, nous explorons une partie de la combinatoire des chemins partiellement dirigés dans une étude comparative avec les SPD. Un avantage d'une telle comparaison est que les chemins sont des objets très proches des polyominos et fort étudiés depuis les années 1950<sup>1</sup>.

Au chapitre 6 nous quittons les SPD pour nous intéresser aux serpents maximaux. Déterminer leur nombre et leur longueur dans un rectangle donné est encore un problème ouvert à ce jour. Nous présentons les pistes déjà explorées ainsi que quelques résultats et conjectures.

---

1. Ils furent introduits par le chimiste Paul Flory en 1953 dans son livre *Principles of Polymer Chemistry*.

# Introduction

*Vous n'aurez jamais une deuxième chance de faire une bonne première impression.*

Une histoire, même mathématique, doit commencer quelque part. La présente copie en est la version officielle. Néanmoins, une autre version, écrite sous forme de roman, sera disponible dans le courant de l'année 2016. Elle m'accompagnera dans tous mes dépôts de documents que je rendrai disponibles aux étudiants, collègues et amis.

Le résumé apporte quelques informations sur le contenu du mémoire, mais en quoi est-ce intéressant ? Tout d'abord, l'énumération des polyominos est un problème très difficile et encore ouvert malgré la simplicité des objets étudiés. En vertu de quoi, le présent texte contient des résultats n'existant nulle part ailleurs dans la littérature dont l'auteur principal est Alain Goupil. Ensuite, les polyominos sont des objets amusants. Nous pouvons les voir et les manipuler aisément, ce qui permet à l'imagination de se faire plaisir sans devoir nécessairement s'embourber dans des formules mathématiques compliquées. Enfin, les démonstrations sont souvent purement combinatoires. Ces dernières ont l'art et la manière de faire grincer des dents les habitués des démonstrations d'analyse avec des  $\varepsilon$  partout. Ici, un bon argument combinatoire est précieux et recherché.

Au final, nous nous posons énormément de questions et récoltons un certain nombre de réponses et de nouvelles questions. Qu'est-ce qu'un polyomino ? Un polyomino serpent ? Un polyomino serpent partiellement dirigé ? Combien y en a-t-il ? Et si le polyomino est inscrit dans un rectangle, que se passe-t-il ? Ah, il doit avoir une longueur minimale, quelle est-elle ? Et la longueur maximale ? Combien y a-t-il de polyominos à symétries près, c'est-à-dire qui ne peuvent être obtenus l'un de l'autre par une symétrie laissant le treillis carré invariant ? Existe-t-il un lien mathématique entre les polyominos serpents et les chemins auto-évitants ? Pouvons-nous déterminer des formules exactes, des récurrences ou des séries génératrices pour tout ce beau monde ? Peut-être.

# Chapitre 1

## Introduction à des méthodes combinatoires

*L'art de la citation est l'art de ceux qui ne savent pas réfléchir par eux-mêmes. – Voltaire*

Dans ce chapitre, nous effleurons le domaine des équations fonctionnelles, présentons les concepts de base des polyominos en commençant par leur définition et partons à la découverte des séries génératrices avec un intérêt particulier porté à leur interprétation.

### 1.1 Les équations fonctionnelles

Les équations fonctionnelles sont fort utilisées en combinatoire. Elles permettent de faciliter d'une façon relativement simple le calcul de séries génératrices.

**Définition 1.1.1.** Une *équation fonctionnelle* est une équation dont l'inconnue est une fonction.

*Exemple.* Nous souhaitons résoudre l'équation fonctionnelle  $f(x) + x = f^2(x) - 1$ , c'est-à-dire déterminer quelles fonctions  $f(x)$  respectent cette égalité. Nous ne considérons que les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. L'équation est de degré 2 en  $f(x)$ . Nous utilisons le discriminant, qui vaut  $\Delta = 4x + 5$ , ce qui nous donne une condition d'existence sur les valeurs de  $x$ , soit  $x \geq -\frac{5}{4}$ . Nous nous retrouvons avec deux fonctions,

$$f_1(x) = \frac{1 + \sqrt{4x + 5}}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1 - \sqrt{4x + 5}}{2}$$

dont les domaines sont  $\text{dom } f_1 = \text{dom } f_2 = \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right[$ .

Lorsque nous sommes confrontés à une équation fonctionnelle, l'exercice consiste à déterminer toutes les fonctions qui en sont solutions. Dans le cadre des polyominos, nous ne faisons pas appel à tous les outils existants pour de telles résolutions car souvent il ne s'agit que d'isoler la fonction dans une équation du premier degré. Par exemple, nous allons rencontrer au chapitre 3 l'équation fonctionnelle

$$SPD_{2D}(q) = \left( SPD_{2D}(q) - 1 + \frac{q^2}{1-q} \right) q^2 \left( \frac{2}{1-q-q^2} - 1 \right) + \frac{2}{1-q-q^2} - \frac{1}{1-q} - q^2$$

Il faut isoler  $SPD_{2D}(q)$ , ce qui donne

$$SPD_{2D}(q) = \frac{q^5 + q^3 + q^2 - 2q + 1}{(1-q)(1-2q-q^3)}. \quad (1.1)$$

L'équation (1.1) est une série génératrice. Nous y reviendrons. Il existe une multitude de méthodes pour résoudre des équations plus complexes (voir [5]) dont voici un échantillon.

*Exemple.* Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

a)  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

*Solution.* Soit  $f$  une solution. En posant  $a = x - y$ , nous déduisons de a) que

$$f(a+2y) + f(a) = 2f(a+y)f(y).$$

Fixons  $a$  et faisons tendre  $y$  vers  $+\infty$ , la condition b) nous dit que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(a+2y) = 0$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 0$ , ce qui conduit à  $f(a) = 0$ . Ainsi,  $f$  est la fonction nulle. Réciproquement, il est clair que la fonction nulle est une solution du problème.

## 1.2 Polyominos et amis

*Là où l'humour est partagé, l'amitié n'est pas loin.* – Grégoire Lacroix

Commençons par donner une définition générale de polyomino dans le plan, valide quel que soit le treillis régulier.

**Définition 1.2.1.** Un *polyomino à deux dimensions (2D)* est un ensemble de carrés unitaires, appelés cellules, connectés par les côtés dans un treillis régulier (figure 1.1). Ils sont considérés à translation près. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules le constituant.

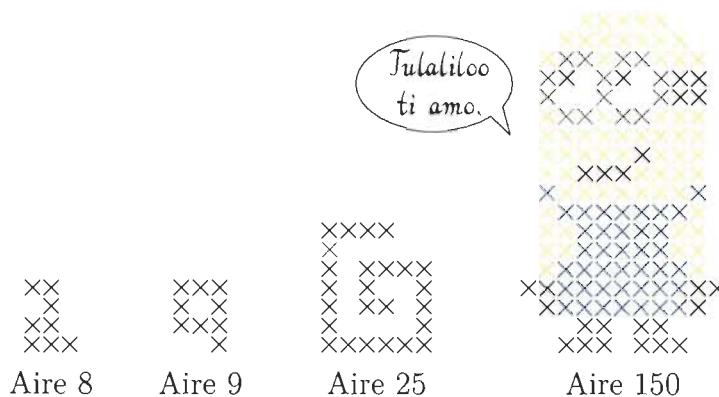


FIGURE 1.1 – Des polyominos à cellules carrées

Nous ne nous intéressons qu'aux amalgames de cellules carrées dont les côtés sont de longueur unitaire. Un polyomino peut être vu comme un graphe avec ses cellules carrées tenant le rôle des sommets et les connexions par les arêtes celui des arêtes du graphe (figure 1.2). Nous empruntons donc du vocabulaire de la théorie des graphes lorsque cela s'avère pertinent.



FIGURE 1.2 – Des polyominos et leurs graphes correspondants

## Polyominos serpents

Compter le nombre de polyominos d'aire  $n$  se révèle très difficile et est encore un problème ouvert exploré par divers groupes de recherche en combinatoire. Plutôt que de rester coincés et de maugréer dans notre coin, décidons d'un plan d'action et utilisons une technique bien connue des militaires et des informaticiens, « Divide ut regnes ». Dans notre contexte, cela signifie partitionner l'ensemble des polyominos en classes dont nous espérons pouvoir calculer la cardinalité. Si c'est le cas, il ne reste alors qu'à additionner tous ces résultats afin de déterminer la taille de l'ensemble de départ. Ceci nous mène vers les polyominos serpents dont la définition requiert la notion de degré d'une cellule.

**Définition 1.2.2.** Le *degré* d'une cellule d'un polyomino est son nombre de connexions par les côtés avec les autres cellules du polyomino.

*Exemple.* À la figure 1.1, le premier polyomino possède deux cellules de degré 1, quatre cellules de degré 2 et deux cellules de degré 3. Le deuxième contient une cellule de degré 1, sept cellules de degré 2 et une de degré 3. Le troisième a deux cellules de degré 1, les autres sont



de degré 2. Le polyomino à droite, Dave de son petit nom, possède quatre cellules de degré 1, dix cellules de degré 2, beaucoup de cellules de degré 3 et encore plus de degré 4, qui est le degré maximal qu'une cellule admet.

**Définition 1.2.3.** Un *polyomino serpent* de longueur  $n$ , appelé un serpent, est un polyomino possédant  $n$  cellules, sans cycle et dont toutes les cellules sont au plus de degré 2.

Une conséquence immédiate de la définition 1.2.3 est qu'un serpent de longueur au moins deux possède deux cellules de degré 1, appelées la tête et la queue, ce qui nous permet de lui donner une orientation si nécessaire. Les premières valeurs de  $s(n)$ , le nombre total de serpents non orientés de longueur  $n$ , sont celles de la suite indexée A182644 de la base de données « The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS) »<sup>1</sup> pour  $n \leq 30$ .

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(n)$	1	2	6	14	34	82	198	470	1122	2662	6334	14970

TABLE 1.1 – Nombre de serpents non orientés de longueur  $n$

**Définition 1.2.4.** Un *serpent orienté* de longueur  $n \geq 2$  est un serpent avec une queue et une tête, identifiées parmi les deux seules cellules de degré 1, dont l'orientation est celle de la queue vers la tête. Sinon, il est dit *non orienté*.

Partons du principe que tout serpent est non orienté tant que nous ne le précisons pas. Les serpents orientés sont des objets similaires aux chemins auto-évitant (Bousquet-Mélou [6]) mais, à notre connaissance il n'existe pas à ce jour de bijection entre ces deux ensembles.

**Définition 1.2.5.** Un *chemin auto-évitant*, abrégé SAW pour self-avoiding walk, est un chemin dans un treillis ne passant pas deux fois par le même sommet.

Compter les serpents selon leur longueur se révèle être une tâche ardue. Nous n'y sommes pas parvenus... pas encore. Reprenons la vision d'un polyomino en tant que graphe (figure 1.2). Nous voyons qu'il existe une injection  $\phi$  de l'ensemble  $\mathcal{OS}(n)$  des serpents orientés de longueur  $n$  vers l'ensemble  $\mathcal{SAW}(n)$  des chemins auto-évitants à  $n$  sommets (figure 1.3). Autrement dit, l'ensemble  $\mathcal{OS}(n)$  est en bijection avec un sous-ensemble de  $\mathcal{SAW}(n)$ . Nous disons que  $\phi$  est un plongement de  $\mathcal{OS}(n)$  dans  $\mathcal{SAW}(n)$ .

1. <http://oeis.org/A182644>

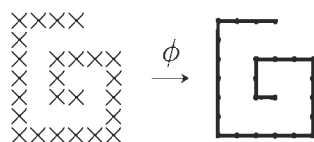


FIGURE 1.3 – Injection des serpents orientés vers les chemins auto-évitants de même longueur

Cette correspondance n'est pas inversible car le nombre minimum de cellules requises pour former un  $U$  dans un serpent est supérieur de un au nombre minimum de sommets dans un  $U$  d'un chemin auto-évitant (figure 1.4). Par un  $U$  nous entendons un serpent, ou un chemin auto-évitant, allant dans une certaine direction, disons l'est, puis tournant dans une direction perpendiculaire, disons le nord, et retournant vers l'ouest, la direction opposée à la direction initiale. Bien sûr, la direction de départ du  $U$  est arbitraire.

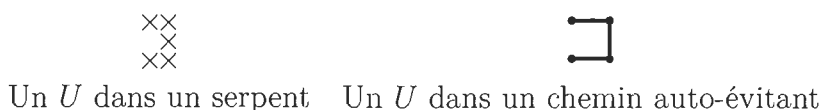


FIGURE 1.4 – Les deux types de  $U$  minimaux

Notre classification des serpents suit de très près celle des chemins auto-évitants présentée dans [6]. Néanmoins, les serpents possèdent une propriété géométrique que les chemins auto-évitants ne peuvent avoir : deux cellules d'un serpent séparées par au moins deux cellules peuvent se toucher en un coin.

**Définition 1.2.6.** Lorsqu'un serpent ne possède pas de paire de cellules se touchant par les coins, nous disons qu'il est *kiss-free* (figure 1.5).



FIGURE 1.5 – Un serpent kiss-free et un serpent avec un kiss

### Polyominos serpents partiellement dirigés

Et si nous continuons de diviser pour régner mais cette fois en partant de l'ensemble des serpents ? Nous trouvons les serpents partiellement dirigés.

**Définition 1.2.7.** Un polyomino serpent est un *serpent partiellement dirigé (SPD)* vers le nord lorsque, en démarrant de la queue, chaque nouvelle cellule est ajoutée dans une des trois directions nord (N), est (E) ou ouest (O) avec la contrainte nécessaire qu'un pas E ne peut suivre immédiatement un pas O et vice-versa.

Comme conséquence, dans un SPD un pas O et un pas E sont obligatoirement séparés par au moins deux pas N (figure 1.6).

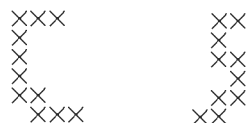


FIGURE 1.6 – Deux SPD

Il s'agit d'une classe bien particulière de l'ensemble des serpents. Nous pourrions en définir une autre, comme les polyominos serpents spirales.

**Définition 1.2.8.** Un polyomino serpent est un *serpent spirale* horaire lorsque tous ses changements de directions se font dans le sens horaire,  $N \rightarrow E \rightarrow S \rightarrow O \rightarrow N \rightarrow \text{etc.}$

Nous reviendrons sur les SPD un peu plus loin. Entre-temps, nous avons investigué et défini les polyominos inscrits.

## Polyominos inscrits

**Définition 1.2.9.** Un polyomino  $P$  est dit *inscrit* dans un rectangle  $R$  lorsque  $P$  est inclus dans  $R$  et que les cellules de  $P$  touchent chacun des quatre côtés de  $R$  (figure 1.7). Sinon il est dit *non inscrit*.

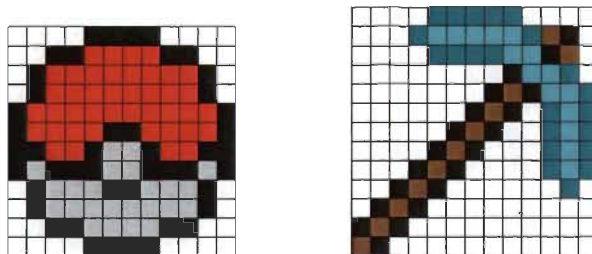


FIGURE 1.7 – Une Pokéball et une pioche inscrites

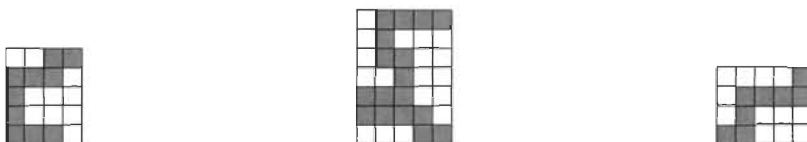
Une question qu'il est légitime de se poser : « Quel est le plus petit polyomino inscriptible dans un rectangle donné, et combien y en a-t-il ? » Des réponses sur l'énumération des polyominos inscrits d'aire minimale, minimale plus un et minimale plus deux sont données dans [11] et [12]. Les polyominos 3D de volume minimal sont étudiés dans [10].

Si nous connaissons la largeur et la hauteur d'un rectangle, nous connaissons l'aire minimale des polyominos s'y inscrivant. Ainsi, tout polyomino est comparable à ceux de longueur minimale en termes de nombre de cellules supplémentaires. Ceci donne une classification des polyominos et une nouvelle notion, celle d'index.

**Définition 1.2.10.** L'*index* d'un polyomino inscrit dans un rectangle  $b \times h$  est le nombre de cellules qu'il faut ajouter à un polyomino d'aire minimale inscrit dans ce même rectangle afin de l'obtenir.

Un polyomino inscrit d'aire minimale  $+ r$  est appelé un polyomino d'index  $r$ .

Notons que la notion d'index d'un polyomino existe indépendamment de la contrainte d'être inscrit. Tout polyomino, inscrit ou non, possède un index.



Un polyomino d'index 2    Un polyomino d'index 6    Un polyomino d'index 0

FIGURE 1.8 – Des polyominos d'index  $r$

Une autre définition de l'index sera donnée au chapitre 4 lorsque nous aurons énoncé ce qu'est un méandre dans le contexte des SPD. Avant de s'envoler vers les séries génératrices, revenons sur les définitions des divers polyominos présentés.

## Polyominos ensemblistes versus polyominos dynamiques

Nous avons défini ce qu'est un polyomino (page 2). Il s'agit d'une description ensembliste, de même pour la définition d'un serpent (page 4). Par contre, la définition d'un SPD (page 5) est une description dynamique. Clarifions ces deux points de vue. La *description ensembliste* dit que le polyomino est un ensemble connexe de cellules respectant certaines contraintes comme l'acyclicité et le degré des cellules pour le serpent. La *description dynamique*, quant à elle, voit le SPD comme un chemin acyclique de cellules qui se construit en ajoutant une cellule à la fois selon des contraintes de direction. Dans cette vision, le SPD est nécessairement orienté. Pour nous, si le sens de lecture n'est pas précisé, il est de bas en haut. Cette dernière description se généralise mal aux polyominos car il n'est pas toujours possible de le construire cellule après cellule en suivant un chemin auto-évitant – qui ne s'intersecte pas avec lui-même (comme la pioche de la figure 1.7).

### 1.3 Les séries génératrices

*Une série génératrice est une corde à linge sur laquelle on suspend une suite de nombres pour en faire un étalage. – H. Wilf*

Les séries génératrices sont un lien entre les mathématiques discrètes et l'analyse, partie des mathématiques qui traite du continu, spécialement l'analyse complexe. Supposons que nous ayons un problème dont la réponse est une suite de nombres  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Nous voulons tout connaître de cette suite. Quel type de réponse sommes-nous en droit d'attendre ?

*Exemple.* Pour la suite  $-2, -1, 6, 25, 62, \dots$  nous trouvons que  $a_n = n^3 - 2$  pour tout  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Il n'y a aucun doute possible, il s'agit d'une très bonne information.

Mais il arrive qu'il n'y ait pas de formule exacte simple pour une suite comme celle des nombres premiers. Les séries génératrices sont une corde que nous pouvons ajouter à notre arc. Même si donner une formule directe pour les éléments d'une suite  $(a_n)$  est impossible, nous pourrions arriver à en donner une pour la somme d'une série entière, dont les coefficients forment la suite recherchée  $(a_n)$ .

*Exemple.* La suite de Fibonacci :  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$ . Nous savons qu'elle satisfait la récurrence

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad \text{avec } f_0 = 0 \text{ et } f_1 = 1.$$

Il existe une belle formule exacte pour  $f_n$ , celle de Binet,

$$f_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

mais la série génératrice est encore plus belle. En effet, en utilisant la bonne formulation, le  $n^{\text{e}}$  nombre de Fibonacci  $f_n$  est le coefficient de  $x^n$  dans l'expansion à l'origine comme une somme de puissances de la fonction suivante ;

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + \dots$$

C'est une bonne réponse... et même très bonne. Nous pouvons faire presque tout ce que bon nous semble avec une telle information sur la suite.

La série génératrice d'une suite  $(a_n)$  permet souvent d'extraire de l'information sur les termes  $a_n$  comme :

- a) Trouver une formule exacte pour  $a_n$ .
- b) Trouver une formule de récurrence – comme celle de Fibonacci.

- c) Trouver des moyennes et autres statistiques sur la suite.
- d) Trouver des formules asymptotiques, c'est-à-dire des formules approximant très bien les bonnes valeurs de la suite pour des indices très grands. Forts utiles pour les suites du nombre de partitions et des nombres premiers, entre autres.

*Exemple.* La formule asymptotique pour le nombre de partitions  $p(n)$  d'un entier  $n$  de G.H. Hardy et S.A. Ramanujan<sup>2</sup> :

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Ils obtinrent également un développement asymptotique pour  $p(n)$  dont l'approximation ci-dessus est le premier terme.

- e) Prouver l'unimodalité, la convexité, etc.
- f) Prouver des identités.

Nous ne détaillons pas ici comment se servir des séries génératrices dans un contexte général car nous ne les utilisons que sur les polyominos et ont donc une interprétation bien particulière. Une bonne référence est *generatingfunctionology* de Herbert Wilf [16]. Pour faire court, une série génératrice est une série formelle dont les coefficients sont les termes  $a_n$  de la suite numérique  $(a_n)$  indexée par les entiers naturels. Il en existe deux grandes familles, les séries génératrices ordinaires et les séries génératrices exponentielles.

**Définition 1.3.1.** La *série génératrice ordinaire* d'une suite  $(a_n)$  est

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

La *série génératrice exponentielle* d'une suite  $(a_n)$  est

$$E(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Nous n'employons que les séries génératrices ordinaires car les cellules des polyominos ne sont pas étiquetées. Il est en effet bien connu (voir [8]) que les séries génératrices ordinaires servent à l'énumération des structures non étiquetées alors que les séries génératrices exponentielles s'intéressent à celles étiquetées. Ainsi lorsque nous parlons de série génératrice, cela sous-entend qu'elle est ordinaire.

<sup>2</sup> *Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis*, <http://plms.oxfordjournals.org/content/s2-17/1/75.full.pdf>

## La série génératrice $\frac{1}{1-x}$

La série génératrice  $\frac{1}{1-x}$  est une pierre angulaire de ce mémoire et pour l'étude des polyominos de manière générale.

**Proposition 1.3.1.** Le développement en série de la fonction rationnelle  $\frac{1}{1-x}$  est

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

*Preuve.* Développons le produit  $(1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots)$  et simplifions.

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x+x^2+x^3+\dots) &= (1+x+x^2+\dots) - (x+x^2+x^3+\dots) \\ &= 1. \end{aligned}$$

En divisant des deux côtés par  $1-x$ , nous trouvons l'égalité voulue.  $\square$

Nous nous intéressons aux séries génératrices car elles possèdent une importante propriété : les manipulations combinatoires correspondent à des calculs sur les séries génératrices associées. C'est une idée qui fut développée systématiquement dans les années 1980 par l'École de combinatoire de l'UQAM, le Lacim, dans sa *Théorie des espèces de structures* exposée dans [3]. Voyons un exemple illustrant le lien existant entre les séries génératrices rationnelles et les récurrences linéaires.

**Définition 1.3.2.** Une suite *récurrente linéaire*  $(u_n)$  d'ordre  $p$  est une suite à valeurs dans un corps commutatif  $K$  définie pour tout  $n \geq n_0$  par la relation de récurrence suivante où  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$  sont  $p$  scalaires fixés de  $K$ , avec  $a_0 \neq 0$  :

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1} \quad \forall n \geq n_0.$$

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée des  $p$  premiers termes de la suite,  $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ , et par la relation de récurrence.

*Exemple.* Soit la récurrence linéaire

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) \quad n \geq 1 \tag{1.2}$$

avec  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Posons

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} f(n) x^n. \tag{1.3}$$

Multiplions chaque membre de (1.2) par  $x^n$  et sommions à partir de  $n = 1$  car la relation de récurrence est bien définie pour  $n \geq 1$ . Le côté gauche de (1.2) donne

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} f(n+1) x^n &= f(2)x + f(3)x^2 + \dots \\ &= \left( \frac{f(0)}{x} + f(1) + f(2)x + f(3)x^2 + \dots \right) - \frac{f(0)}{x} - f(1) \\ &= \frac{f(0) + f(1)x + f(2)x^2 + \dots}{x} - \frac{f(0)}{x} - f(1) \\ &= \frac{F(x)}{x} - \frac{f(1)x}{x} \\ &= \frac{F(x) - x}{x}. \end{aligned}$$

Pour le côté droit de (1.2), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} (f(n) + f(n-1)) x^n &= (f(1)x + f(2)x^2 + f(3)x^3 + \dots) \\ &\quad + (f(0)x + f(1)x^2 + f(2)x^3 + \dots) \\ &= F(x) - f(0) + xF(x) \\ &= F(x) - xF(x). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'équation fonctionnelle

$$\frac{F(x) - x}{x} = F(x) - xF(x)$$

dans laquelle il faut isoler  $F(x)$  pour voir apparaître la série génératrice des nombres de Fibonacci,

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Maintenant que nous avons  $F(x)$ , nous pouvons retrouver la formule exacte de Binet en nous servant de la décomposition en fractions partielles. Commençons par obtenir les deux racines  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  du dénominateur. Pour faciliter l'écriture et la lecture, posons  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  - le nombre d'or. Sachant que  $1 - \varphi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - (1 - \varphi)x} \right).$$

Or la proposition 1.3.1 énonce que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad (1.4)$$



donc en substituant  $x$  par  $\varphi x$  d'une part et  $x$  par  $(1 - \varphi)x$  d'autre part dans l'équation (1.4), nous obtenons le développement en séries de  $F(x)$  :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n \geq 0} \varphi^n x^n - \sum_{n \geq 0} (1-\varphi)^n x^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} (\varphi^n - (1-\varphi)^n) x^n. \end{aligned}$$

Le coefficient de  $x^n$  est le  $n^{\text{e}}$  terme de la suite de Fibonacci,

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - (1-\varphi)^n).$$

Ceci termine notre exemple.

Le théorème suivant lie les séries génératrices rationnelles aux récurrences linéaires. Nous ne le démontrons pas ici<sup>3</sup>.

**Théorème 1.3.1.** Une suite  $(a_n)$  satisfait une récurrence linéaire si et seulement si la série génératrice ordinaire de la suite  $(a_n)$  est rationnelle.

*Exemple.* La série génératrice de la suite de Fibonacci est rationnelle.

## 1.4 Le point de vue des polyominos

Nous utilisons beaucoup les séries génératrices pour l'énumération des polyominos. En vertu de quoi, voici un petit aperçu de ce qui nous attend. Nous allons déterminer les séries génératrices des piliers verticaux et horizontaux, des serpents sans paire de pas N (nord) consécutifs, des SPD et des serpents minimaux dans un rectangle  $b \times h$ . Tout ce beau monde permet d'introduire diverses opérations sur les séries génératrices.

### Les piliers verticaux et horizontaux

La série génératrice  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$  admet une interprétation dans le monde des polyominos, et plus particulièrement dans celui des polyominos serpents. Nous avons la suite des coefficients  $(1, 1, 1, \dots)$ . Disons que l'exposant de  $x$  code la longueur d'un serpent,  $\frac{1}{1-x}$  génère alors une famille de serpents uniques pour une longueur donnée. Il s'agit des piliers verticaux qui sont des serpents dont toutes les cellules sont dans la même colonne (figure 1.9).

3. Voir Théorème 4.1.1. de *Enumerative Combinatorics* par Richard Stanley [14]

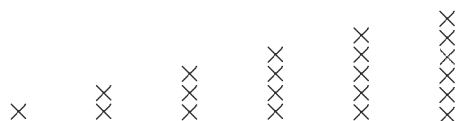


FIGURE 1.9 – Quelques piliers verticaux

Cette série génératrice compte également les piliers horizontaux – il suffit de tourner la tête. Et si nous voulions tous les piliers verticaux et horizontaux distincts (figure 1.10) ?

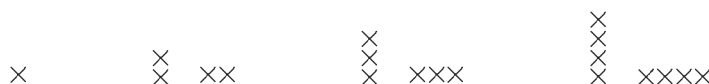


FIGURE 1.10 – Les piliers verticaux et horizontaux de longueur au plus quatre

Il existe un seul pilier vide, un seul pilier de longueur un et un pilier vertical et un pilier horizontal distincts pour les longueurs supérieures ou égales à 2. Ceci nous donne la suite  $(1, 1, 2, 2, 2, \dots)$ . Notons  $P(x)$  la série génératrice des piliers verticaux, nous avons

$$P(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Les piliers horizontaux sont également comptés par  $P(x)$  mais si nous additionnons  $P(x)$  avec elle-même, nous obtenons la suite de coefficients  $(2, 2, 2, 2, \dots)$ . Nous voulons que les deux premiers termes soient 1. Il suffit de soustraire 1 et  $x$  à  $2P(x)$  pour obtenir la série génératrice des piliers verticaux et horizontaux :

$$\begin{aligned} PVH(x) &= 2P(x) - x - 1 = \frac{2}{1-x} - 1 - x \\ &= \frac{x^2 + 1}{1-x} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + \dots \end{aligned}$$

Nous venons d'illustrer deux opérations sur les séries génératrices, la somme et la multiplication par un scalaire.

**Définition 1.4.1.** Soit  $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  et  $G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$  deux séries génératrices. Alors

$$F(x) + G(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

$$c \cdot F(x) = ca_0 + ca_1x + ca_2x^2 + \dots$$

### SPD sans paire de pas N consécutifs

Intéressons-nous aux SPD vers le nord sans paire de pas N consécutifs (figure 1.11). Il est clair qu'ils n'admettent soit que des pas N et E soit que des pas N et O. En effet, pour avoir des pas E et O, il faut deux pas N consécutifs. Les SPD sans paire de pas N consécutifs et avec des pas E sont notés SNEE – serpents Nord-Est-Est – et ceux avec des pas O, SNOO – serpents Nord-Ouest-Ouest.

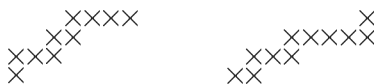


FIGURE 1.11 – Des serpents Nord-Est-Est

Nous désirons déterminer le nombre de SNEE de longueur  $n$ . Plaçons une première cellule. Pour placer la deuxième, nous avons deux directions possibles, au nord ou à l'est de la première. Si elle est placée au nord (à gauche figure 1.12 où le rectangle symbolise n'importe quel SNEE), nous n'avons de choix pour placer la troisième cellule que d'aller vers l'est car nous ne pouvons faire deux pas N consécutifs. Si elle est placée à l'est (à droite figure 1.12), de nouveau s'offrent deux possibilités, au nord et à l'est de la deuxième cellule.



FIGURE 1.12 – Les deux démarrages de SNEE

Donc, si nous voulons construire un SNEE de longueur  $n$ , nous avons deux choix au départ de la première cellule, aller vers le nord ou aller vers l'est. Le premier nous amène, après les deux premières cellules, à un SNEE de longueur  $n - 2$  commençant à l'est de la deuxième cellule. Il y a  $snee(n - 2)$  choix de serpents Nord-Est-Est. Au second choix, la seconde cellule placée à l'est de la première démarre un SNEE de longueur  $n - 1$ . Nous avons  $snee(n - 1)$  choix de serpents Nord-Est-Est. Ainsi il y a autant de SNEE de longueur  $n$  que la somme du nombre de SNEE de longueur  $n - 2$  et de longueur  $n - 1$  :

$$snee(n) = snee(n - 2) + snee(n - 1)$$

avec  $snee(0) = snee(1) = 1$ . Il s'agit de la récurrence des nombres de Fibonacci. La série génératrice  $SNEE(x)$  des serpents Nord-Est-Est est

$$SNEE(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots \quad (1.5)$$

Le terme  $13x^6$  de l'équation (1.5) signifie qu'il y a 13 SNEE de longueur six (figure 1.13).



FIGURE 1.13 – Les 13 SNEE de longueur six

Nous pouvons éviter la récurrence et directement écrire la série génératrice en nous servant de la figure 1.12 et de la série génératrice  $P(x) = \frac{1}{1-x}$ . Nous gardons le numérateur à 1 car nous considérons le SNEE de longueur nulle. Au dénominateur, nous n'ajoutons pas nécessairement une cellule après l'autre. Imaginons que la construction d'un SNEE se fasse colonne par colonne. Pour chacune, nous avons deux possibilités : soit ajouter une cellule soit ajouter un pilier vertical de longueur deux. Prenons le dernier serpent de la ligne du haut de la figure 1.13, il occupe quatre colonnes comme illustré à la figure 1.14.

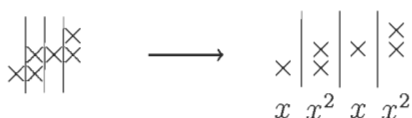


FIGURE 1.14 – La décomposition en colonnes d'un SNEE

Les termes  $x$  et  $x^2$  représentent la contribution d'une colonne à la longueur du SNEE. Ainsi, pour chaque colonne, nous avons le choix entre  $x$  et  $x^2$ , choix caractérisé par la somme  $x + x^2$ . Ceci se traduit par la substitution de  $x$  par  $x + x^2$  dans  $P(x)$ , ce qui donne

$$SNEE(x) = \frac{1}{1 - (x + x^2)} = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Et si nous voulions la série génératrice de tous les serpents sans paire de pas  $N$  consécutifs? Nous avons déjà  $SNEE(x)$ , il nous manque  $SNOO(x)$ , la série génératrice des serpents Nord-Ouest-Ouest. Pour l'obtenir, il suffit de refaire tous les raisonnements précédents en remplaçant le mot « est » par le mot « ouest », ce qui donne  $SNOO(x) = SNEE(x)$ . Mais en les additionnant nous comptons deux fois certains serpents : le serpent vide, le serpent de longueur un, le pilier vertical de longueur deux et tous les piliers horizontaux de longueurs au moins deux. Nous enlevons chacun d'eux une fois, ce qui nous donne la série génératrice des serpents sans paire de pas  $N$  consécutifs  $SS2N(x)$  :

$$\begin{aligned} SS2N(x) &= \frac{2}{1 - x - x^2} - 1 - x - x^2 - \frac{x^2}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x + 2x^3 - x^5}{(1 - x)(1 - x - x^2)} \\ &= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 9x^4 + 15x^5 + 25x^6 + 41x^7 + 67x^8 + 109x^9 + \dots \end{aligned}$$

Le concept de substitution de séries formelles est important.

**Définition 1.4.2.** Si  $A(x) = \sum_n a_n x^n$  et  $B(x) = \sum_n b_n x^n$ , alors  $A(B(x))$  signifie :

$$A(B(x)) = \sum_{n \geq 0} a_n B(x)^n = \sum_{n \geq 0} a_n \left( \sum_{m \geq 0} b_m x^m \right)^n. \quad (1.6)$$

Si le terme constant  $b_0$  est non nul, alors chaque terme de la série en (1.6) contribue au coefficient de chaque puissance  $n$  de  $x$ . Par contre, si  $b_0$  est nul, alors nous pouvons calculer le coefficient de  $x^n$  à l'aide des  $n + 1$  premiers termes de la série puisque

$$\begin{aligned} a_n B(x)^n &= a_n (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^n \\ &= a_n x^n (b_1 + b_2 x + \dots)^n. \end{aligned}$$

Les termes venant après le  $n^{\text{ème}}$  terme ne contiennent que des puissances de  $x$  supérieures à  $n$  et ne contribuent pas au coefficient de  $x^n$ . Ainsi, lorsque  $b_0$  est nul, le calcul de chaque coefficient est un processus fini et chaque coefficient est bien défini ainsi que la série  $A(B(x))$ . Par contre si  $b_0$  est non nul, alors le calcul de chaque coefficient est un processus infini à moins que  $B(x)$  ne soit un polynôme. Dans le cas des SNEE, nous avons la substitution de  $B(x) = x + x^2$  dans  $A(x) = \frac{1}{1-x}$ . Voyons encore une série génératrice très utile pour nous.

**Proposition 1.4.1.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}_0$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{(1-ax)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} a^n x^n. \quad (1.7)$$

*Preuve.* Rappelons le développement de MacLaurin d'une fonction  $F(x)$  :

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Calculons celui de  $\frac{1}{(1-x)^k}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^k} &= \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} x^n. \end{aligned}$$

Il reste à substituer  $x$  par  $ax$  pour obtenir le résultat voulu. □

Il est également nécessaire de bien comprendre l'interprétation de la multiplication de deux séries génératrices. Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles de polyominos, le produit de leurs séries génératrices  $A(x) \cdot B(x)$  nous permet de compter les polyominos qui sont un empilement d'un polyomino de  $A$  et d'un polyomino de  $B$ . Nous verrons plus loin que le produit peut avoir une autre interprétation.

*Exemple.* Soit  $A(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$  la série génératrice des polyominos formant une équerre carrée de longueur au moins trois et  $B(x) = \frac{x^2}{1-x}$  la série génératrice des piliers horizontaux de longueur au moins deux. Le produit

$$A(x) \cdot B(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \cdot \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^5}{(1-x^2)(1-x)}$$

est la série génératrice des polyominos de l'ensemble  $A \times B$  (figure 1.15 où  $A$  est en bleu et  $B$  est en rouge).



FIGURE 1.15 – Des polyominos de  $A \times B$

### SPD de longueur $n$

La prochaine étape est la construction de la série génératrice des SPD de longueur  $n$ . Pour faire un lien avec les serpents Nord-Est-Est, nous pouvons dire qu'un SPD possède soit au moins une paire de pas N consécutifs, soit aucune paire de pas N consécutifs, auquel cas il est un SNEE ou un SNOO. Si un SPD admet au moins une paire de pas N consécutifs, en particulier il y en a une dernière lorsque nous le parcourons. Après celle-ci, il n'y en a plus, nous avons donc un SNEE ou un SNOO. Un SPD ayant deux pas N consécutifs est ainsi constitué d'un SPD quelconque suivi d'une dernière paire de pas N consécutifs et d'un SNEE ou d'un SNOO (figure 1.16 où le SPD quelconque est en rouge, la dernière paire de pas N consécutifs est en bleu et le SNEE est en vert).

$$SPD = SPD \times \text{dernière paire de pas } N \times (SNEE + SNOO)$$

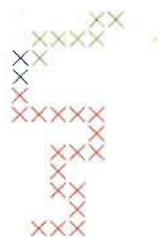


FIGURE 1.16 – Décomposition combinatoire d'un SPD

L'équation fonctionnelle (1.8) est construite à partir de la structure donnée ci-dessus où les couleurs font référence à celles de la figure 1.16 et où la partie en noir à droite est le cas où le SPD est un serpent sans paire de pas N consécutifs,

$$SPD(x) = \left( SPD(x) - 1 + \frac{x^2}{1-x} \right) x^2 \left( \frac{2}{1-x-x^2} - 1 \right) + \frac{2}{1-x-x^2} - \frac{1}{1-x} - x^2. \quad (1.8)$$

Commençons par regarder la partie rouge de l'équation (1.8). Nous voulons que le SPD quelconque ait une longueur d'au moins un – sa série génératrice n'admet pas de terme constant – ce qui justifie la soustraction de 1. Nous ajoutons une fois chaque pilier horizontal de longueur au moins deux car nous pouvons y accrocher la dernière paire de pas N consécutifs de deux manières différentes (figure 1.17).



FIGURE 1.17 – Accrocher une paire de pas N consécutifs à un pilier horizontal

Passons à la partie verte. Nous additionnons  $SNOO(x)$  et  $SNEE(x)$ . Nous enlevons une fois le serpent de longueur nulle sinon il serait compté deux fois. Nous comptons les piliers horizontaux deux fois mais nous n'en enlevons pas car après une paire de pas N consécutifs, le pilier horizontal qui est un SNEE va s'accrocher à droite et le pilier horizontal qui est un SNOO va s'accrocher à gauche (figure 1.18).



FIGURE 1.18 – Accrocher un pilier horizontal après une paire de pas N consécutifs

Il reste à isoler  $SPD(x)$  dans l'équation (1.8) afin d'obtenir

$$SPD(x) = \frac{x^5 + x^3 + x^2 - 2x + 1}{(1-x)(1-2x-x^3)} \quad (1.9)$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 14x^4 + 32x^5 + 72x^6 + 160x^7 + 354x^8 + 782x^9 + \dots \quad (1.10)$$

La suite des coefficients de  $SPD(x)$  est répertoriée sur l'OEIS : A232230. Les 14 SPD de longueur quatre sont représentés à la figure 1.19.

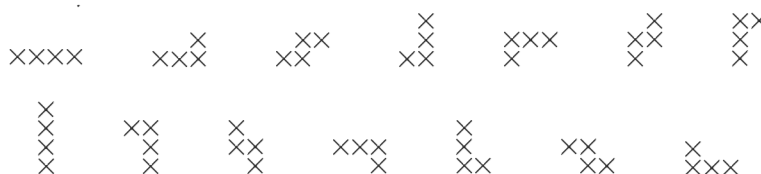


FIGURE 1.19 – Les 14 SPD de longueur quatre

Cette technique de décomposition d'un SPD en éléments que nous empilons est également utilisée aux chapitres 2 et 4. L'étape délicate est de s'assurer que la décomposition nous permet de compter les polyominos recherchés une et une seule fois. Nous l'avons constaté, il faut parfois procéder à des ajustements.

## Les serpents minimaux

Attaquons-nous maintenant aux serpents minimaux inscrits dans un rectangle  $b \times h$ . Ce sont des SPD appelés *escaliers* en raison de leur allure. À la proposition suivante, nous donnons une formule exacte et la série génératrice du nombre de SPD minimaux inscrits dans un rectangle  $b \times h$ . Cette dernière doit donner deux informations sur le serpent, sa largeur et sa hauteur, qui sont également celles du rectangle circonscrit. Ainsi, il nous faut deux variables  $x$  et  $y$  codant respectivement la largeur et la hauteur du serpent. Les cas particuliers  $b = 1$  et  $h = 1$  se traitent séparément. Dans le cas  $b = 1$ , les SPD sont des piliers verticaux de longueur égale à la hauteur du rectangle. Il n'y en a donc qu'un seul pour chaque valeur de  $h$ . Dans le cas  $h = 1$ , les SPD sont des piliers horizontaux.

**Proposition 1.4.2.** Un serpent minimal inscrit dans un rectangle  $b \times h$  est de longueur  $n = b + h - 1$  avec  $b, h \geq 1$ . Il y en a

$$s_{min}(b, h) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 1 \text{ ou } h = 1 \\ 2 \binom{b+h-2}{b-1} & \text{si } b, h \geq 2 \end{cases}$$

et leur série génératrice est

$$\begin{aligned} S_{min}(x, y) &= \sum_{b, h} s_{min}(b, h) x^b y^h \\ &= 2 \left( \frac{xy}{1-x-y} + 1 \right) - 1 - \frac{xy}{1-x} - \frac{xy}{1-y} + xy. \end{aligned}$$

*Preuve.* Soit un rectangle  $b \times h$ . Nous voulons y inscrire un serpent de longueur minimale. Sa première cellule doit être dans un des coins du rectangle. En effet, le serpent doit toucher aux quatre côtés du rectangle et s'il commençait ailleurs, il lui faudrait revenir sur ses pas. Par le même argument, sa dernière cellule doit être aussi dans un coin du rectangle, celui opposé par la diagonale à la première cellule. Pour fixer les idées, disons que le serpent a sa première cellule dans le coin inférieur gauche et la dernière dans le coin supérieur droit. Partant de la première, nous pouvons aller vers l'est (la droite) ou vers le nord (le haut) comme illustré à la figure 1.20.





FIGURE 1.20 – Première et dernière cellules d'un serpent minimal

Nous voulons nous rendre à la cellule supérieure droite. Nous devons faire  $h - 1$  pas N et  $b - 1$  pas E, chacun de ces pas ajoutant une cellule au serpent (figure 1.21). Mais il ne faut pas oublier la cellule de départ, ce qui nous donne une longueur de  $1 + (h - 1) + (b - 1) = b + h - 1$ .

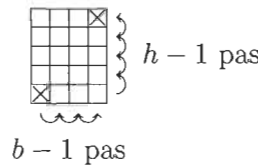


FIGURE 1.21 – Le nombre de pas à faire dans chaque direction

En ce qui concerne le nombre de serpents minimaux dans un rectangle  $b \times h$ . Si  $b = 1$ , il n'y en a qu'un seul, le pilier vertical de hauteur  $h$ . Si  $h = 1$ , il n'y en a aussi qu'un seul, le pilier horizontal de longueur  $b$ . Supposons maintenant que  $b, h \geq 2$ . La décomposition en pas nous donne directement la solution. En effet, nous avons  $b + h - 2$  pas à faire dont  $b - 1$  vers l'est et  $h - 1$  vers le nord. Lorsque nous n'avons pas de pas E, cela signifie que nous avons un pas N. Ainsi, il suffit de savoir où sont placés les  $b - 1$  pas E parmi les  $b + h - 2$  emplacements de pas disponibles. Nous pouvons le faire de  $\binom{b+h-2}{b-1}$  manières. Le même argument est valide pour des pas O et N, ce qui justifie le coefficient multiplicatif 2.

Traisons la série génératrice  $S_{min}(x, y)$  où l'exposant de  $x$  code la largeur du serpent et l'exposant de  $y$  sa hauteur. Nous allons utiliser la substitution dans la série génératrice  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ . Nous avons vu avec les serpents Nord-Est-Est que si à chaque étape de construction du serpent nous avons un choix à faire, alors il suffit de remplacer  $x$  par ce choix. Supposons que nous ayons déjà une cellule. Pour la suivante, nous pouvons aller vers le nord ou vers l'est mais pas les deux. Si nous allons vers le nord, la contribution se fait en  $y$  – la hauteur du serpent – et si nous allons vers l'est, la contribution se fait en  $x$  – la largeur du serpent. Le choix s'écrit  $(x + y)$ , ce qui donne

$$\frac{xy}{1-x-y} = (x^2y + x^3y + \dots) + (x^2y^2 + x^3y^2 + \dots) + (x^2y^3 + x^3y^3 + \dots) + \dots$$

Nous voyons qu'il manque le serpent de longueur nulle (il suffit d'ajouter 1) et les escaliers allant vers l'ouest. Ces derniers sont obtenus par symétrie. Ils ont la même série génératrice que ceux allant vers l'est. Comme pour les SNEE et les SNOO, il existe des éléments communs

aux deux, il faut les enlever une fois chacun. Au final, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 S_{\min}(x, y) &= 2 \left( \frac{xy}{1-x-y} + 1 \right) - 1 - \frac{xy}{1-x} - \frac{xy}{1-y} + xy \\
 &= (1 + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + \dots) \\
 &\quad + (x^2y + 4x^2y^2 + 6x^2y^3 + 8x^2y^4 + 10x^2y^5 + \dots) \\
 &\quad + (x^3y + 6x^3y^2 + 12x^3y^3 + 20x^3y^4 + 30x^3y^5 + \dots) \\
 &\quad + (x^4y + 8x^4y^2 + 20x^4y^3 + 40x^4y^4 + 70x^4y^5 + \dots) \\
 &\quad + (x^5y + 10x^5y^2 + 30x^5y^3 + 70x^5y^4 + 140x^5y^5 + \dots) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

□

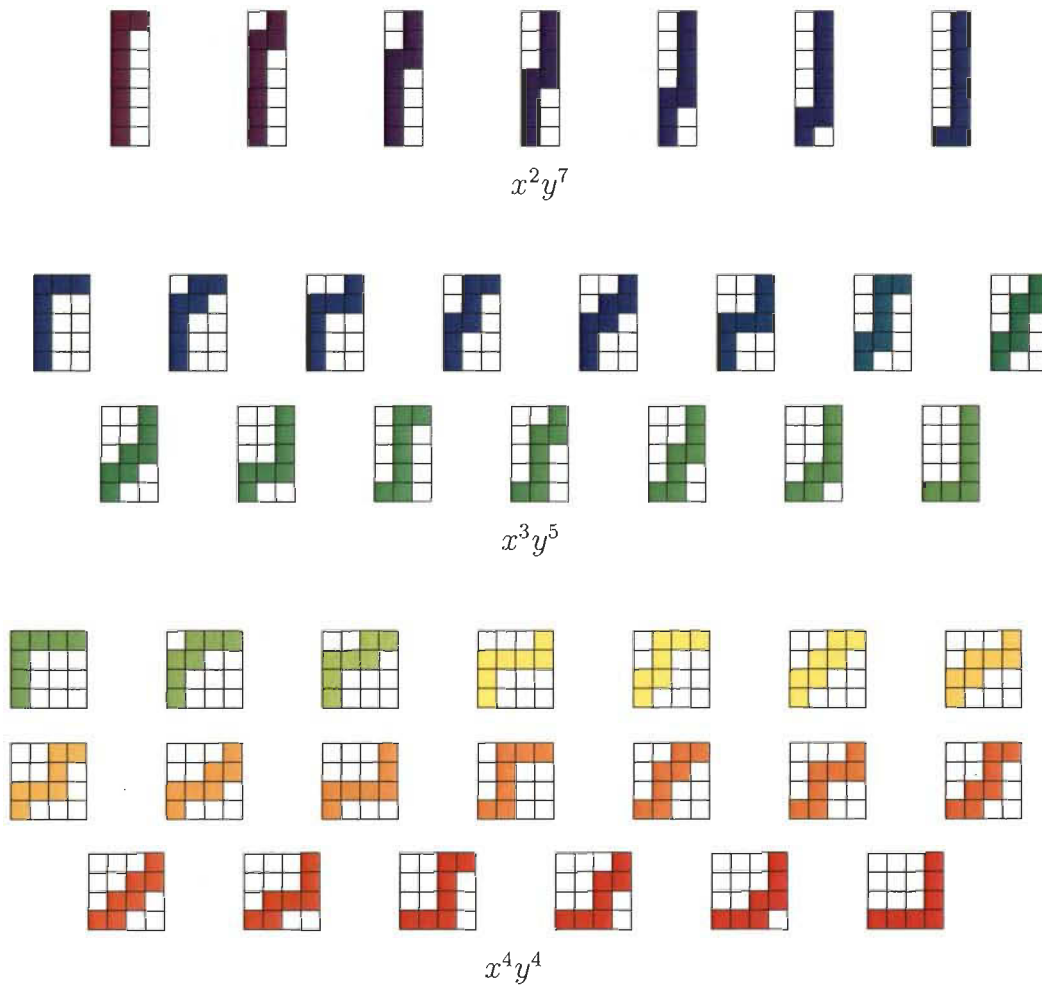


FIGURE 1.22 – Des SPD minimaux commençant dans le coin inférieur gauche

## Chapitre 2

# Combinatoire des polyominos serpents partiellement dirigés

*Light travels faster than sound. This is why some people appear bright until they speak.* – Seen in a bar

Les résultats présentés dans ce chapitre sont très majoritairement dus au professeur Alain Goupil du département de mathématiques et informatique de l'UQTR. Au chapitre 1, nous avons explicité l'idée derrière la notion de serpent et de serpent partiellement dirigé, diviser pour régner. Mais pourquoi avoir choisi d'étudier ces objets en particulier ? Car ils sont en lien avec un concept déjà existant, les chemins auto-évitant (partiellement dirigés) qui, comme nous l'avons souligné dans le résumé, furent introduits en 1953 par le chimiste Paul Flory dans son livre *Principles of Polymer Chemistry*. Nous y revenons au chapitre 5.

Dans le présent chapitre, nous étudions des familles de SPD. Nous présentons tout d'abord des équations fonctionnelles et des séries génératrices pour la longueur des SPD de dimensions deux, trois et  $N$ . Ensuite, nous nous tournons vers les SPD inscrits dans un rectangle  $b \times h$  qui donnent lieu à des séries génératrices à trois variables  $s$ ,  $t$  et  $q$  codant respectivement la largeur  $b$ , la hauteur  $h$  et la longueur  $n$  des SPD. Nous allons adopter une convention d'écriture, nous utiliserons les lettres majuscules  $F(s, t, q)$  pour les séries génératrices, les lettres minuscules  $f(b, h, n)$  pour les coefficients de  $s^b t^h q^n$  et les lettres calligraphiées majuscules  $\mathcal{F}(b, h, n)$  pour l'ensemble correspondant de serpents de longueur  $n$  inscrits dans un rectangle  $b \times h$  ;

$$F(s, t, q) = \sum_{b, h, n} f(b, h, n) s^b t^h q^n$$

### 2.1 Serpents partiellement dirigés

Il s'agit ici des SPD non inscrits, le seul paramètre à considérer pour ces polyominos est leur longueur.

## Deux dimensions

Au chapitre 1, nous avons déterminé la série génératrice des SPD de dimension deux. Rappelons-la car nous en avons besoin afin de déterminer une formule exacte donnant leur nombre pour une longueur  $n$  ;

$$SPD_{2D}(q) = \frac{q^5 + q^3 + q^2 - 2q + 1}{(1 - q)(1 - 2q - q^3)} \quad (2.1)$$

Décomposons (2.1) en fractions partielles. Nous nous retrouvons avec l'expression

$$\frac{A}{1 - q} + \frac{B}{\alpha_1 - q} + \frac{C}{\alpha_2 - q} + \frac{D}{\alpha_3 - q}$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont les racines du polynôme  $1 - 2q - q^3$ . Nous déterminons les valeurs de  $A, B, C$  et  $D$  à l'aide des propriétés des racines et récrivons chacune des fractions sous la forme  $\frac{K}{1 - ax}$  avec  $a, K$  des constantes, qui est une série génératrice connue :

$$\frac{K}{1 - ax} = K \left( 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots \right).$$

Ceci nous donne le nombre de SPD 2D de longueur  $n$ , qui est

$$\begin{aligned} spd_{2D}(n) &= \frac{1}{59} \sum_{\alpha: 1 - 2\alpha - \alpha^3 = 0} (13\alpha^{-1} + 11 - 5\alpha) \alpha^{-n} - 1 \quad n \geq 2, \\ spd_{2D}(0) &= spd_{2D}(1) = 1. \end{aligned}$$

## Trois dimensions

**Définition 2.1.1.** Un *polyomino 3D* est un ensemble de cubes unités connectés par les faces dans l'espace discret à trois dimensions.

Un *SPD 3D* est un polyomino 3D qui commence à l'origine et est formé de pas le long des axes  $x, y$  et  $z$  où les mouvements vers les  $y$  et  $z$  négatifs sont interdits.

Les directions possibles à partir d'une cellule pour aller vers sa voisine sont notées  $x^+, x^-, y^+$  et  $z^+$ . Les SPD 3D sont une extension naturelle des SPD 2D qui sont des serpents ne pouvant suivre que les direction positives et négatives selon l'axe des  $x$  et les directions positives selon l'axe des  $y$  et l'axe des  $z$ . L'ensemble SPD 3D est partitionné en deux sous-ensembles (figure 2.1) :

- les SPD 3D qui n'ont pas deux pas consécutifs dans l'ensemble  $\{y^+, z^+\} : \mathcal{S}_{3D}^1$ ,
- les SPD 3D qui ont au moins une fois deux pas consécutifs pris dans l'ensemble  $\{y^+, z^+\} : \mathcal{S}_{3D}^2$ .

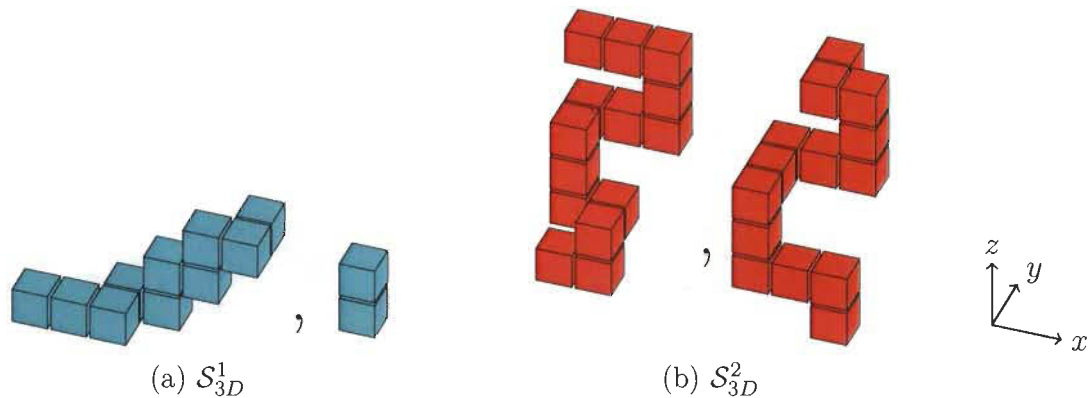


FIGURE 2.1 – Une partition de l'ensemble  $SPD\ 3D$

La figure 2.2 montre les quatre types de directions restreintes dans  $\mathcal{S}_{3D}^1$ . Les serpents ne sont pas autorisés à passer directement de  $x^+$  à  $x^-$ . Comme conséquence de cette restriction, les serpents de  $\mathcal{S}_{3D}^1$  ne peuvent contenir en même temps les directions  $x^+$  et  $x^-$ . Ceci nous amène à considérer les serpents  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^+}$  et  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^-}$  où  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^+}$  est l'ensemble des serpents de  $\mathcal{S}_{3D}^1$  avec des pas  $x^+$  et  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^-}$  est l'ensemble des serpents de  $\mathcal{S}_{3D}^1$  avec des pas  $x^-$ .

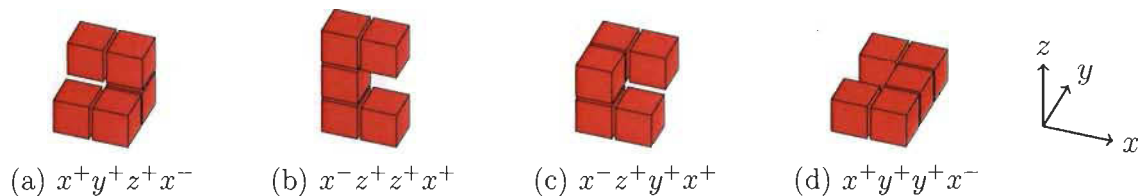


FIGURE 2.2 – Quatre manières de passer de  $x^+$  à  $x^-$  ou de  $x^-$  à  $x^+$

**Proposition 2.1.1.** Le nombre de serpents  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^+}$  de longueur  $n$ , noté  $s_{3D}^{1,x^+}(n)$ , satisfait la relation de récurrence

$$s_{3D}^{1,x^+}(n) = s_{3D}^{1,x^+}(n-1) + 2s_{3D}^{1,x^+}(n-2), \quad (2.2)$$

avec  $s_{3D}^{1,x^+}(0) = s_{3D}^{1,x^+}(1) = 1$ . Leur série génératrice et une formule exacte sont

$$S_{3D}^{1,x^+}(q) = \sum_{n \geq 0} s_{3D}^{1,x^+}(n) q^n = \frac{1}{(1+q)(1-2q)} \quad (2.3)$$

$$s_{3D}^{1,x^+}(n) = \frac{1}{3} (2^{n+1} + (-1)^n). \quad (2.4)$$

*Preuve.* Un serpent  $S_{3D}^{1,x^+}$  de  $S_{3D}^{1,x^+}$  de longueur  $n$  commence par un pas dans l'ensemble  $\{x^+, y^+, z^+\}$ . Si ce premier pas est  $x^+$ , alors le second pas est aussi dans  $\{x^+, y^+, z^+\}$ . Ainsi, le serpent est complété par n'importe quel  $S_{3D}^{1,x^+}$  de longueur  $n - 1$ . Si ce premier pas est  $y^+$  ou  $z^+$ , alors il doit être suivi d'un pas  $x^+$  et, pour compléter le serpent, n'importe quel  $S_{3D}^{1,x^+}$  de longueur  $n - 2$  peut être concaténé, ce qui donne l'équation (2.2).

Pour la série génératrice, nous n'allons pas nous servir d'une interprétation combinatoire mais directement de la récurrence, comme nous l'avons fait pour la suite de Fibonacci. Multiplions chaque membre de la récurrence par  $q^n$  et sommons à partir de  $n = 2$  car la relation n'est bien définie que pour  $n \geq 2$ . Notons  $s(n)$  pour  $S_{3D}^{1,x^+}(n)$ . Le côté gauche donne

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} s(n) q^n &= s(2) q^2 + s(3) q^3 + \dots \\ &= (s(0) + s(1) q + s(2) q^2 + \dots) - s(0) - s(1) q \\ &= S_{3D}^{1,x^+}(q) - 1 - q. \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue grâce aux conditions initiales de la récurrence. Pour le côté droit nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (s(n-1) + 2s(n-2)) q^n &= \sum_{n=2}^{\infty} s(n-1) q^n + 2 \sum_{n=2}^{\infty} s(n-2) q^n \\ &= (s(1) q^2 + s(2) q^3 + \dots) + 2 (s(0) q^2 + s(1) q^3 + \dots) \\ &= q (s(1) q + s(2) q^2 + \dots) + 2q^2 (s(0) + s(1) q + \dots) \\ &= q (s(0) + s(1) q + s(2) q^2 + \dots) - s(0) q + 2q^2 S_{3D}^{1,x^+}(q) \\ &= q S_{3D}^{1,x^+}(q) - q + 2q^2 S_{3D}^{1,x^+}(q). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'équation fonctionnelle

$$S_{3D}^{1,x^+}(q) - 1 - q = q S_{3D}^{1,x^+}(q) - q + 2q^2 S_{3D}^{1,x^+}(q)$$

dans laquelle nous isolons  $S_{3D}^{1,x^+}(q)$  afin d'obtenir l'équation (2.3).

Pour la formule exacte, nous utilisons aussi les fractions partielles. Nous avons

$$\frac{1}{(1+q)(1-2q)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-(-q)} + \frac{2}{1-2q} \right).$$

Chacune de ces deux séries génératrices est obtenue en substituant  $q$  respectivement par  $-q$  et  $2q$  dans  $\frac{1}{1-q}$ , ce qui donne

$$\frac{1}{3} \left( (1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - \dots) + 2(1 + 2q + 4q^2 + 8q^3 + \dots) \right).$$

Les coefficients de  $q^n$  pour chacune sont  $(-1)^n$  et  $2^n$ . □

Les ensembles  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^+}$  et  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^-}$  ne sont pas disjoints. La rangée horizontale de cellules (formée uniquement soit de pas  $x^+$  soit de pas  $x^-$ ), l'unique serpent de longueur 2 avec un pas  $y^+$  et l'unique serpent de longueur 2 avec un pas  $z^+$  appartiennent aux deux ensembles. En conséquence,

$$S_{3D}^1(q) = \frac{2}{(1+q)(1-2q)} - \frac{1}{1-q} - 2q^2. \quad (2.5)$$

Au tour des serpents dans l'ensemble  $\mathcal{S}_{3D}^2$ . Ils peuvent toujours être décomposés en trois parties distinctes respectivement montrées en rouge, vert et turquoise à la figure 2.3 :

1. n'importe quel  $SPD\ 3D$ ,
2. la dernière fois que deux pas sont choisis consécutivement dans l'ensemble  $\{y^+, z^+\}$  lorsque nous allons du bas vers le haut,
3. soit un  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^+}$  soit un  $\mathcal{S}_{3D}^{1,x^-}$ .

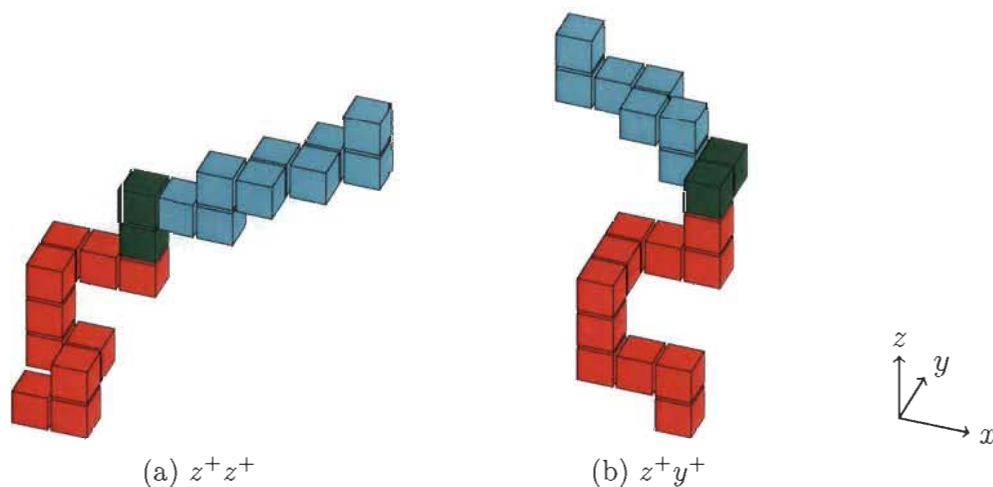


FIGURE 2.3 – Trois parties de  $\mathcal{S}_{3D}^2$

**Définition 2.1.2.** La série génératrice à une variable des  $SPD\ 3D$  est définie par

$$SPD_{3D}(q) = \sum_{n \geq 0} spd_{3D}(n) q^n$$

où  $spd_{3D}(n)$  est le nombre de  $SPD\ 3D$  de longueur  $n$ .

**Proposition 2.1.2.** La série génératrice de l'ensemble  $\mathcal{S}_{3D}^2$  est

$$S_{3D}^2(q) = \left( SPD_{3D}(q) - 1 + \frac{q^2}{1-q} \right) 4q^2 \left( \frac{2}{(1+q)(1-2q)} - 1 \right). \quad (2.6)$$

*Preuve.* Le premier facteur caractérise tous les  $SPD\ 3D$  où 1 est soustrait pour s'assurer que le  $SPD\ 3D$  ne soit pas vide et où  $\frac{q^2}{1-q}$  est ajouté car il y a deux manières de concaténer deux pas consécutifs d'une même direction à une rangée horizontale. C'est un argument équivalent à celui rencontré à la figure 1.17 page 18. Le deuxième facteur représente les quatre possibilités de faire deux pas consécutifs pris dans  $\{y^+, z^+\}$ . Le troisième facteur est deux fois la série génératrice  $S_{3D}^{1,x^+}(q)$  de l'équation (2.3) car après deux pas consécutifs dans  $\{y^+, z^+\}$ , nous pouvons concaténer soit un  $SPD_{x^+}$  soit un  $SPD_{x^-}$ . Il faut enlever 1 car il n'y a qu'une manière de concaténer un serpent vide.  $\square$

Sachant que les ensembles  $\mathcal{S}_{3D}^1$  et  $\mathcal{S}_{3D}^2$  forment une partition de  $SPD\ 3D$ , la somme de (2.5) et (2.6) donne une équation fonctionnelle pour les  $SPD\ 3D$  :

$$\begin{aligned} SPD_{3D}(q) &= \left( SPD_{3D}(q) - 1 + \frac{q^2}{1-q} \right) 4q^2 \left( \frac{2}{(1+q)(1-2q)} - 1 \right) \\ &\quad + \frac{2}{(1+q)(1-2q)} - \frac{1}{1-q} - 2q^2. \end{aligned}$$

Cette équation est résolue directement pour obtenir

$$\begin{aligned} SPD_{3D}(q) &= \frac{4q^5 + 2q^4 + 2q^2 - 3q + 1}{(1-q)(1-3q-4q^3)} \\ &= 1 + q + 3q^2 + 13q^3 + 45q^4 + 153q^5 + 517q^6 + 1737q^7 + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

En décomposant (2.7) en fractions partielles comme nous l'avons fait en  $2D$ , nous obtenons le nombre de  $SPD\ 3D$  de longueur  $n$  donné par

$$\begin{aligned} spd_{3D}(n) &= \frac{1}{12} \sum_{\alpha: 1-3\alpha-4\alpha^3=0} (\alpha^{-1} + 1)\alpha^{-n} - 1 \quad n \geq 2, \\ spd_{3D}(0) &= spd_{3D}(1) = 1. \end{aligned}$$

## $N$ dimensions

Il existe une extension naturelle des  $SPD$  à deux et trois dimensions dans le treillis  $N$ -dimensionnel  $\mathbb{Z}^n$ . Ils sont notés  $SPD\ ND$  et leur ensemble de directions admises le long des axes de coordonnées est  $\{x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_3^+, \dots, x_N^+\}$ . Les pas dans la direction négative sont uniquement admis le long de l'axe  $x_1$ . Nous partitionnons encore une fois l'ensemble  $SPD\ ND$  en deux sous-ensembles :



- les  $SPD$   $ND$  qui ne contiennent pas deux pas consécutifs dans l'ensemble  $\{x_2^+, x_3^+, \dots, x_N^+\}$  :  $\mathcal{S}_{ND}^1$ ,
- les  $SPD$   $ND$  qui contiennent au moins une fois deux pas consécutifs dans l'ensemble  $\{x_2^+, x_3^+, \dots, x_N^+\}$  :  $\mathcal{S}_{ND}^2$ .

**Proposition 2.1.3.** Notons  $\mathcal{S}_{ND}^{1,x_1^+}$  l'ensemble des serpents de  $\mathcal{S}_{ND}^1$  n'ayant pas de pas  $x_1^-$ , sa cardinalité satisfait

$$s_{ND}^{1,x_1^+}(n) = s_{ND}^{1,x_1^+}(n-1) + (N-1)s_{ND}^{1,x_1^+}(n-2) \quad (2.8)$$

avec  $s_{ND}^{1,x_1^+}(0) = s_{ND}^{1,x_1^+}(1) = 1$ . La série génératrice et une formule exacte sont

$$S_{ND}^{1,x_1^+}(q) = \frac{1}{1-q-(N-1)q^2} \quad (2.9)$$

$$s_{ND}^{1,x_1^+}(n) = \frac{(2-2N)\left(\frac{2-2N}{1-\sqrt{4N-3}}\right)^n}{(1-\sqrt{4N-3})\sqrt{4N-3}} + \frac{(2N-2)\left(\frac{2-2N}{1+\sqrt{4N-3}}\right)^n}{(1+\sqrt{4N-3})\sqrt{4N-3}}. \quad (2.10)$$

*Preuve.* La démonstration est équivalente à celle de la proposition 2.1.1. Un  $S_{ND}^{1,x_1^+}$  de longueur  $n$  commence par un pas dans l'ensemble  $\{x_1^+, x_2^+, \dots, x_N^+\}$ . Si ce premier pas est  $x_1^+$ , alors le second pas est aussi dans  $\{x_1^+, x_2^+, \dots, x_N^+\}$ . Ainsi, le serpent est complété par n'importe quel  $S_{ND}^{x_1^+}$  de longueur  $n-1$ . Si ce premier pas est dans  $\{x_2^+, \dots, x_N^+\}$ , alors il doit être suivi d'un pas  $x_1^+$  et, pour compléter le serpent, n'importe quel  $S_{ND}^{x_1^+}$  de longueur  $n-2$  peut être concaténé. Ceci donne l'équation (2.8).

Pour la série génératrice, partons de la récurrence. Notons  $s(n)$  pour  $s_{ND}^{x_1^+}(n)$ , le côté gauche donne

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} s(n) q^n &= (s(0) + s(1)q + s(2)q^2 + \dots) - s(0) - s(1)q \\ &= S_{ND}^{1,x_1^+}(q) - 1 - q. \end{aligned}$$

Le côté droit devient

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (s(n-1) + (N-1)s(n-2)) q^n &= q \sum_{n=0}^{\infty} s(n) q^n - s(0)q + (N-1)q^2 \sum_{n=0}^{\infty} s(n) q^n \\ &= qS_{ND}^{1,x_1^+}(q) - q + (N-1)q^2 S_{ND}^{1,x_1^+}(q), \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation fonctionnelle

$$S_{ND}^{x_1^+}(q) - 1 - q = qS_{ND}^{1,x_1^+}(q) - q + (N-1)q^2S_{ND}^{1,x_1^+}(q).$$

Il reste à isoler  $S_{ND}^{x_1^+}(q)$  pour retrouver l'équation (2.9). La formule exacte s'obtient de la décomposition en fractions partielles.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante à l'aide des mêmes arguments que ceux utilisés pour les serpents  $3D$ .

**Proposition 2.1.4.** Les expressions rationnelles des séries génératrices des deux ensembles  $S_{ND}^1$  et  $S_{ND}^2$  sont

$$S_{ND}^1(q) = \frac{2}{q^2(1-N) - q + 1} - \frac{1}{1-q} - (N-1)q^2, \quad (2.11)$$

$$S_{ND}^2(q) = \left( SPD_{ND}(q) - 1 + \frac{q^2}{1-q} \right) (N-1)^2 q^2 \left( \frac{2}{q^2(1-N) - q + 1} - 1 \right). \quad (2.12)$$

De par la définition de  $S_{ND}^1(q)$  et  $S_{ND}^2(q)$ , nous avons l'équation fonctionnelle

$$SPD_{ND}(q) = S_{ND}^1(q) + S_{ND}^2(q).$$

En remplaçant les membres du côté droit par les expressions (2.11) et (2.12) et en isolant  $SPD_{ND}(q)$ , nous démontrons la proposition suivante.

**Proposition 2.1.5.** La série génératrice des  $SPD_{ND}$  est

$$SPD_{ND}(q) = \frac{(N-1)^2 q^5 + (N-1)(N-2)q^4 - (N-1)(N-3)q^3 + (N-1)q^2 - Nq + 1}{(1-q)(1-Nq - (N-1)^2 q^3)}. \quad (2.13)$$

Les équations (2.1) et (2.7) sont les cas particuliers de dimensions  $N = 2$  et  $N = 3$  de l'équation (2.13).

## 2.2 Les serpents partiellement dirigés inscrits

Nous avons vu au chapitre 1 ce que sont les SPD et les avons généralisés à  $N$  dimensions à la section précédente. Nous allons les coercer, autrement dit, les inscrire dans un rectangle  $b \times h$ .

**Définition 2.2.1.** Soit  $spd(b, h, n)$  le nombre de SPD de longueur  $n$  inscrits dans un rectangle  $b \times h$  et  $SPD(s, t, q)$  la série génératrice correspondante :

$$SPD(s, t, q) = \sum_{b, h, n} spd(b, h, n) s^b t^h q^n.$$

Nous présentons ici des expressions rationnelles pour les séries génératrices  $SPD_b(t, q)$  des SPD de largeur  $b$ . Dans [6] les équations fonctionnelles furent d'abord établies et ensuite solutionnées afin d'obtenir les séries génératrices des polyominos bargraphes. La méthode utilisée ici est différente et consiste à commencer par un serpent primitif dont nous connaissons la série génératrice, à empiler l'un au-dessus de l'autre des pièces fondamentales de SPD qui vont tous les produire pour une largeur  $b$  donnée et à modifier la série génératrice en concordance. Ainsi, les constructions des SPD et des séries génératrices avancent main dans la main.

Les règles pour établir la correspondance sont immédiates :

- i) Empiler une famille de SPD sur une autre correspond au produit de leurs séries génératrices.
- ii) Choisir un nombre quelconque de SPD d'une famille  $\mathcal{A}$  et les empiler sur le SPD déjà présent est représenté par la multiplication de la série génératrice déjà présente par  $\frac{1}{1-A(s, t, q)}$  où  $A(s, t, q)$  est la série génératrice de la famille  $\mathcal{A}$ .

*Exemples.*

1. Empiler un serpent Nord-Est-Est,  $SNEE(q) = \frac{q}{1-q-q^2}$ , sur un pilier vertical,  $P(q) = \frac{q}{1-q}$  donne un serpent dont la série génératrice est

$$P(q) \cdot SNEE(q) = \frac{q^2}{(1-q)(1-q-q^2)}.$$

2. Pour mettre l'emphase sur la substitution, nous allons considérer que le serpent déjà « présent » est vide. La série génératrice des serpents formés d'un pilier horizontal suivi d'un pilier vertical, tous deux de longueurs au moins 2, est

$$\frac{q^2}{1-q} \times \frac{q^2}{1-q} = \left( \frac{q^2}{1-q} \right)^2.$$

Nous voulons énumérer les serpents qui sont un empilement d'un nombre quelconque de serpents décrits ci-dessus. Leur série génératrice est

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{q^2}{1-q}\right)^2} = 1 + q^4 + 2q^5 + 3q^6 + 4q^7 + 6q^8 + 10q^9 + \dots$$

Soit le rectangle circonscrit  $b \times h$ . Nous avons besoin de quatre types de *SPD* non orientés pour construire la série génératrice des SPD : les traverses, les bulles, les extrémités et les piliers. Les piliers sont utilisés pour connecter les trois autres entre eux. Nous allons les empiler selon diverses combinaisons, ce qui va donner naissance à des familles de SPD. Le but est d'en avoir le moins possible et qu'elles soient toutes disjointes, c'est-à-dire qu'un SPD appartenant à une famille n'appartienne à aucune autre.

## Familles fondamentales des serpents partiellement dirigés inscrits

Commençons par définir ce que sont les bulles, les traverses, les extrémités et les piliers. Ces derniers sont connus, certes, mais dans le cadre de ce chapitre, leur définition est sensiblement différente.

**Définition 2.2.2.** Une *bulle* est un SPD de longueur au moins cinq dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne.

Dans le cas présent, nous nous intéressons aux SPD inscrits dans un rectangle, nous choisissons donc d'inclure les bulles dans le rectangle de référence de sorte que les cellules de degré 1 soient adjacentes à un côté et que les autres cellules ne touchent jamais le côté opposé. Ainsi, une bulle n'est pas un SPD inscrit dans le rectangle de largeur  $b$ . L'ensemble des bulles de hauteur  $h$  et de longueur  $n$  avec la tête et la queue touchant le côté gauche du rectangle et occupant  $r$  colonnes ( $r < b$ ) est noté  $\mathcal{B}_r(h, n)$  et  $r$  est appelé la largeur de la bulle. Nous aurions pu choisir le côté droit, cela n'a pas d'importance.

**Définition 2.2.3.** Une *traverse* de largeur  $b$  est un SPD inscrit dont les deux seules cellules touchant les côtés gauche et droit du rectangle sont les cellules de degré 1. Lorsque la tête touche le côté gauche, la queue touche le côté droit et vice versa.

L'ensemble des traverses de longueur  $n$  inscrits dans un rectangle  $b \times h$  avec la cellule du bas dans le coin gauche est noté  $\mathcal{T}(b, h, n)$ .

**Définition 2.2.4.** Une *extrémité* est un SPD dont la seule cellule dans la colonne adjacente à un côté du rectangle est la queue. C'est soit sa première cellule soit sa dernière selon qu'il débute ou finisse le SPD dont il est une partie. Nous lisons toujours de bas en haut.

L'ensemble des extrémités avec la queue adjacente à un côté du rectangle est noté  $\mathcal{E}(b, h, n)$ .

**Définition 2.2.5.** Les rangées verticales de cellules dans une colonne adjacente à un côté du rectangle sont appelées des *piliers*.

L'orientation n'est pas importante pour ces quatre types de SPD, ils sont donc tous non orientés. La figure 2.4 montre un exemple de serpent de chaque type où les cellules bleues dans les figures 2.4b et 2.4c sont des parties d'un pilier nécessaire lorsqu'ils sont empilés sur un SPD existant.

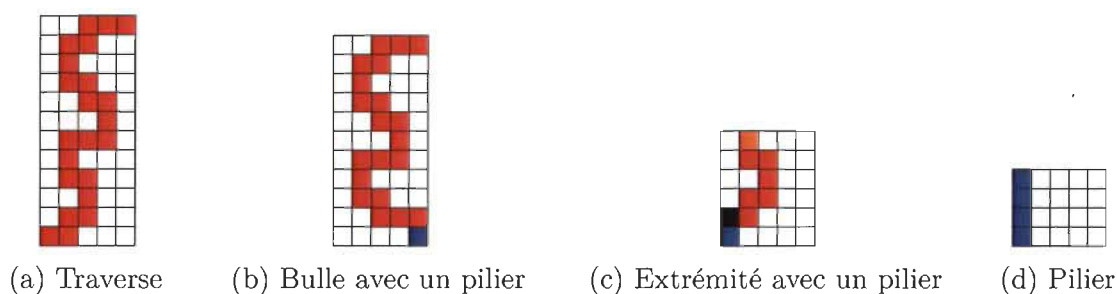


FIGURE 2.4 – Les quatre types fondamentaux de SPD

En utilisant un argument de symétrie, nous pouvons empiler les uns sur les autres des SPD de chacune des familles définies ci-dessous et illustrées à la figure 2.5. Dans ce processus d'empilement, les piliers sont utilisés comme connecteurs entre le SPD d'une des trois autres familles et le SPD déjà présent. Les bulles et les traverses peuvent apparaître un nombre arbitraire de fois dans le SPD mais les extrémités ne peuvent être utilisées qu'une seule fois à chaque extrémité du SPD pour terminer le processus d'empilement. Cette observation permet l'utilisation du produit ordinaire des séries génératrices pour décrire les ensembles de SPD inscrits. En fait, nous allons montrer que tous les SPD sont obtenus de cette manière et qu'ils font partie d'une et une seule des quatre familles de SPD inscrits suivantes.

**Définition 2.2.6.** La famille  $\mathcal{F}_1$  est composée de deux traverses entre lesquelles se trouve un nombre arbitraire de traverses et de bulles. Des extrémités peuvent être ajoutées aux terminaisons des traverses obligatoires.

Ici nous utilisons les traverses et les bulles à réflexion près par rapport à une droite verticale près et le facteur 2 dans l'équation (2.14) réfère, par exemple, aux deux choix offerts pour la traverse du bas, celle de départ : côté gauche ou côté droit du rectangle pour la cellule du bas.

**Définition 2.2.7.** La famille  $\mathcal{F}_2$  est composée d'une traverse et d'une bulle obligatoires. Le processus d'empilement commence par une traverse et se termine par une bulle. Entre ces deux SPD, il y a un nombre arbitraire de traverses et de bulles. De nouveau, des extrémités peuvent être ajoutées à chaque bout de cette structure.

Nous utilisons les réflexions par rapport à une droite verticale et à une droite horizontale pour compter tous les SPD de cette famille, ce qui explique le facteur 4 de l'équation (2.15).

**Définition 2.2.8.** La famille  $\mathcal{F}_3$  est composée d'une traverse comprise entre deux bulles obligatoires. Dans la figure 2.5, c'est la première traverse en partant du bas. D'un côté de la traverse, il y a au moins une bulle et pas de traverse, de l'autre, un nombre arbitraire de traverses et de bulles s'achevant par une bulle. Des extrémités peuvent être ajoutées.

Nous utilisons la réflexion par rapport à une droite horizontale pour compter tous les SPD de cette famille, ce qui explique le facteur 2 de l'équation (2.16).

**Définition 2.2.9.** La famille  $\mathcal{F}_4$  est composée d'une traverse unique, sans bulle, avec possiblement des extrémités.

Nous utilisons la réflexion par rapport à une droite verticale pour compter tous les SPD de cette famille, ce qui explique le facteur 2 de l'équation (2.17). Nous soustrayons le SPD  $H$ , qui est une rangée horizontale, car sinon il serait compté deux fois. Des exemples de ces quatre familles sont montrés à la figure 2.5 et leurs structures sont explicitées par les équations suivantes où la notation  $()^*$  signifie que la famille de SPD à l'intérieur des parenthèses peut être ajoutée un nombre arbitraire de fois<sup>1</sup>.

1. Il s'agit de l'étoile de Kleene, opérateur utilisé pour décrire les langages formels.

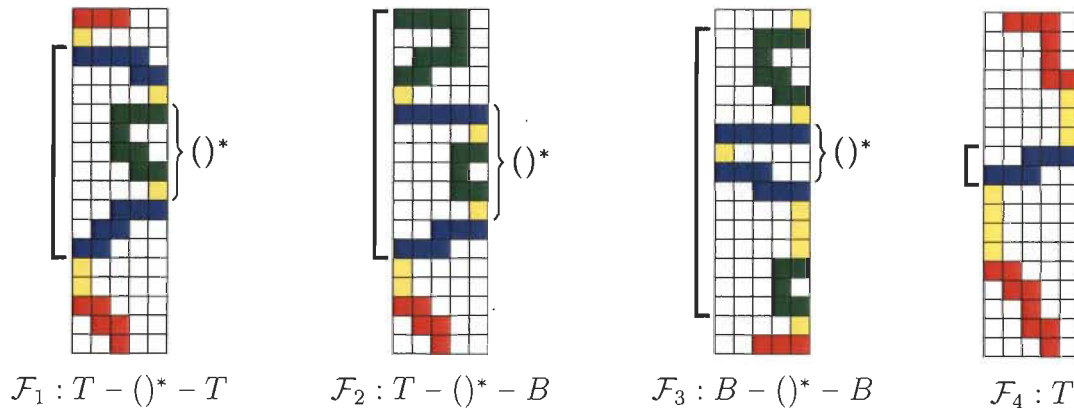


FIGURE 2.5 – Les quatre familles de *SPD* où les traverses sont en bleu, les bulles en vert, les extrémités en rouge, les piliers en jaune

Ce sont les parties centrales, en gras dans les équations (2.14) à (2.17) et délimitées par les crochets à la figure 2.5, qui différencient les quatre familles. Chaque type fondamental est codé par une lettre :  $E$  pour extrémité,  $P$  pour pilier,  $T$  pour traverse et  $B$  pour bulle. Le symbole  $\emptyset$  est là pour permettre qu'il n'y ait rien. En effet, un *SPD* n'admet pas nécessairement d'extrémité, comme l'exemple de la famille  $\mathcal{F}_2$  à la figure 2.5 qui en a une au début (en bas) mais pas à la fin. Le symbole  $\cup$  de l'union ensembliste code le choix. Par exemple,  $T \cup B$  donne le choix d'avoir soit une traverse soit une bulle. Le symbole  $\times$  code l'empilement.

$$\mathcal{F}_1 := 2(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times T \times (P \times (T \cup B))^* \times P \times T \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) \quad (2.14)$$

$$\mathcal{F}_2 := 4(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times T \times (P \times (T \cup B))^* \times P \times B \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) \quad (2.15)$$

$$\mathcal{F}_3 := 2(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times B \times (P \times B)^* \times P \times T \times (P \times (T \cup B))^* \times P \times B \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) \quad (2.16)$$

$$\mathcal{F}_4 := 2(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times T \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) - H \quad (2.17)$$

Nous allons transformer ces équations en séries génératrices un peu plus loin. Continuons d'abord la description de ces quatre familles. Par construction, les familles  $\mathcal{F}_1$  à  $\mathcal{F}_4$  sont disjointes et tout *SPD* inscrit appartient à une et une seule de ces familles.

**Proposition 2.2.1.** Pour tout entier  $b, h$  et  $n \geq b + h - 1$ , nous avons

$$SPD(b, h, n) = \mathcal{F}_1(b, h, n) + \mathcal{F}_2(b, h, n) + \mathcal{F}_3(b, h, n) + \mathcal{F}_4(b, h, n).$$

*Preuve.* La preuve est basée sur les observations suivantes.

- i) Chaque *SPD* inscrit contient au moins une traverse.

- ii) Tout SPD inscrit peut être factorisé de manière unique comme une juxtaposition de traverses, bulles, extrémités et piliers.
- iii) Ajouter une extrémité termine le processus d'empilement dans une direction. La tête du SPD extrémité devient alors la tête ou la queue du SPD entier.
- iv) Tout SPD est la juxtaposition d'une partie centrale avec possiblement des extrémités.

Si la partie centrale commence et se termine par deux traverses distinctes, alors nous avons la famille  $\mathcal{F}_1$ . Si la partie centrale commence par une traverse et se termine par une bulle, alors nous avons la famille  $\mathcal{F}_2$ . Si la partie centrale commence et se termine par des bulles distinctes, alors c'est la famille  $\mathcal{F}_3$ . Enfin, si la partie centrale est exactement une traverse et ne contient pas de bulle, alors nous avons la famille  $\mathcal{F}_4$ . Il n'y a pas d'autre combinaison possible de traverses et de bulles pour la partie centrale.  $\square$

### Les séries génératrices

Rappelons que les variables  $s, t, q$  donnent respectivement la largeur et la hauteur du rectangle et la longueur du SPD. Les colonnes dans lesquelles apparaissent les piliers sont, du point de vue de la largeur, comptées dans les autres familles fondamentales. C'est pour cela que la variable  $s$  est absente de la série génératrice  $P(t, q)$  des piliers contenant au moins une cellule,

$$P(t, q) = \frac{tq}{1 - tq} = tq + t^2q^2 + t^3q^3 + \dots$$

### Les bulles de largeur $r$ fixée

Pour chaque largeur  $r > 1$ , il existe une bulle de longueur (et donc de hauteur) minimale. La figure 2.6 en montre pour les largeurs  $r = 2$  à  $r = 6$ .

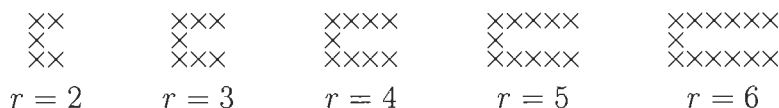


FIGURE 2.6 – Des bulles de longueur minimale pour des largeurs fixées

Leur construction ne présente aucune difficulté. En terme de séries génératrices, ceci impose des exposants minimaux pour les variables  $t$  et  $q$ . Tout d'abord, une bulle est de hauteur au moins trois, donc le plus petit exposant de  $t$  est 3, peu importe la largeur. Par contre, cette dernière a une influence sur la longueur minimale. Le plus petit exposant de  $q$  est  $2r + 1$ . Voilà pourquoi la série génératrice des bulles  $B_2(h, n)$  de largeur deux est

$$B_2(t, q) = \frac{t^3q^5}{1 - tq} = t^3q^5 + t^4q^6 + t^5q^7 + \dots$$



Le numérateur témoigne des dimensions de la plus petite bulle de largeur deux. La seule manière de l'agrandir est d'augmenter sa hauteur. Or, pour augmenter sa hauteur de 1, il faut ajouter une cellule, d'où le  $1 - tq$ . La figure 2.7 donne quelques bulles de largeur deux.

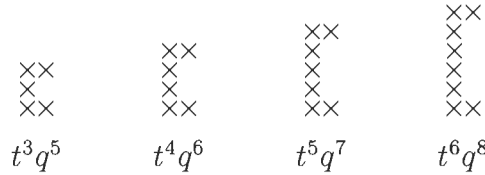


FIGURE 2.7 – Des bulles de largeur deux

La série génératrice des bulles sur un pilier (figure 2.8a) est obtenue par la multiplication de séries génératrices. Ainsi, une bulle de largeur  $r$  avec un pilier en-dessous, notée  $PB_r$ , est le produit  $PB_r = P \times B_r$  des séries génératrices correspondantes. En l'occurrence,

$$PB_2(t, q) = \frac{tq}{1 - tq} \times \frac{t^3 q^5}{1 - tq} = \frac{t^4 q^6}{(1 - tq)^2}.$$

Les bulles de largeur trois sont obtenues par la superposition d'une ou plusieurs bulles de  $PB_2$  au-dessus d'une bulle de  $B_2$ . Ensuite, deux piliers sont ajoutés dans la colonne contenant la queue de la bulle de  $B_2$  et la tête de la dernière bulle de  $PB_2$  ainsi que deux nouvelles cellules dans une nouvelle troisième colonne. Ces dernières deviennent les nouvelles tête et queue de la bulle de  $B_3$ . Cette construction, illustrée à la figure 2.8b, donne

$$\begin{aligned} B_3(t, q) &= \frac{q}{1 - tq} \times \frac{B_2}{1 - PB_2} \times \frac{q}{1 - tq} \\ &= \frac{B_2}{1 - PB_2} \cdot \frac{q^2}{(1 - tq)^2} \\ &= \frac{t^3 q^7}{((1 - tq)^2 - t^4 q^6)(1 - tq)}. \end{aligned}$$

La fraction  $\frac{B_2}{1 - PB_2}$  est obtenue par substitution de  $q$  dans la série  $\frac{1}{1 - q}$  comme nous l'avons vu à la page 30. Cela signifie qu'après une bulle de  $B_2$ , nous ajoutons un nombre quelconque de bulles de  $PB_2$ . Pour construire une bulle  $B_4$ , nous avons besoin d'au moins une bulle  $B_3$  à laquelle nous ajoutons un nombre arbitraire de bulles  $B_2$  et  $B_3$ . Supposons que la bulle  $B_3$  obligatoire soit la première en partant du bas du SPD (figure 2.8c). Alors, en-dessous se trouve un nombre arbitraire de bulles  $B_2$  et au-dessus un nombre arbitraire de bulles  $B_2$  et  $B_3$ . Enfin, à chaque extrémité s'ajoutent possiblement un pilier et obligatoirement une cellule dans une nouvelle quatrième colonne. Toutes les bulles  $B_4$  satisfont cette description qui est traduite en l'expression

$$\begin{aligned} B_4(t, q) &= \frac{q}{1 - tq} \times \frac{B_3}{1 - PB_2} \times \frac{1}{1 - (PB_2 + PB_3)} \times \frac{q}{1 - tq} \\ &= \frac{B_3}{(1 - PB_2)(1 - PB_2 - PB_3)} \cdot \frac{q^2}{(1 - tq)^2}. \end{aligned}$$

La série génératrice  $\frac{1}{1-(PB_2+PB_3)}$  est encore une fois obtenue par une substitution dans  $\frac{1}{1-q}$ . Rappelons que le symbole + est considéré comme un « ou ». À chaque étape de la construction, nous avons le choix entre un élément de  $\mathcal{PB}_2$  et un élément de  $\mathcal{PB}_3$ . La description précédente de l'ensemble  $\mathcal{B}_4$  peut être étendue à tous les ensembles  $\mathcal{B}_r$  avec  $r \geq 3$  de telle manière que nous ayons une série génératrice rationnelle pour chaque bulle de  $\mathcal{B}_r$ .

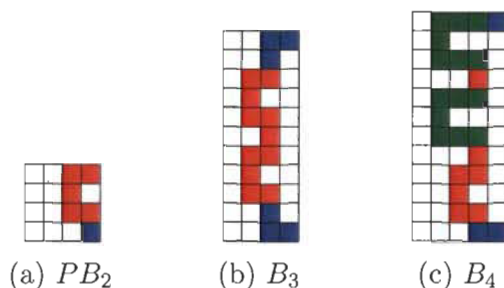


FIGURE 2.8 – Des bulles

**Proposition 2.2.2.** Pour tout entier  $r \geq 3$ ,

$$B_r(t, q) = \frac{B_{r-1}}{\left(1 - \sum_{i=2}^{r-2} PB_i\right) \left(1 - \sum_{i=2}^{r-1} PB_i\right)} \cdot \frac{q^2}{(1-tq)^2}.$$

*Preuve.* Réutilisons le raisonnement fait pour  $B_3(t, q)$  et  $B_4(t, q)$ . Pour construire une bulle  $B_r$ , nous avons besoin d'au moins une bulle  $B_{r-1}$ . Supposons que ce soit la première de cette largeur en partant du bas du SPD. Cela signifie qu'avant nous ne pouvons avoir que des bulles moins larges, c'est-à-dire des bulles  $B_2, B_3, \dots, B_{r-2}$ . Il y en a un nombre arbitraire. La série génératrice de cette construction est

$$\frac{1}{1 - (PB_2 + PB_3 + \dots + PB_{r-2})} = \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{r-2} PB_i}.$$

Après cette première bulle  $B_{r-1}$ , nous pouvons également avoir un nombre quelconque de bulles, y compris d'autres bulles de largeur  $r-1$ , ce qui nous donne comme série génératrice

$$B_{r-1} \times \frac{1}{1 - (PB_2 + PB_3 + \dots + PB_{r-1})} = \frac{B_{r-1}}{1 - \sum_{i=2}^{r-1} PB_i}.$$

Le produit des deux donne le corps de la bulle de largeur  $r$ . Mais lui-même est de largeur  $r-1$ , il nous faut donc, à chaque extrémité, possiblement un pilier et obligatoirement une

cellule dans une nouvelle  $r^e$  colonne. Ceci nous donne la série génératrice des bulles de  $\mathcal{B}_r$  :

$$\begin{aligned}
 B_r(t, q) &= \frac{q}{1-tq} \times \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{r-2} PB_i} \times \frac{B_{r-1}}{1 - \sum_{i=2}^{r-1} PB_i} \times \frac{q}{1-tq} \\
 &= \frac{B_{r-1}}{\left(1 - \sum_{i=2}^{r-2} PB_i\right) \left(1 - \sum_{i=2}^{r-1} PB_i\right)} \cdot \frac{q^2}{(1-tq)^2}.
 \end{aligned}
 \quad \square$$

### Les bulles de longueur $n$

La tâche de trouver une série génératrice  $B(q)$  pour les bulles de longueur  $n$  est rendue possible par l'existence d'une factorisation combinatoire (figure 2.9) rappelant la factorisation des chemins de Dyck (voir [9]). Cette figure nous dit qu'une bulle est soit une bulle minimale soit un empilement de bulles avec des piliers sur une bulle initiale avec possiblement un pilier et une cellule obligatoire dans une nouvelle colonne à chaque extrémité.

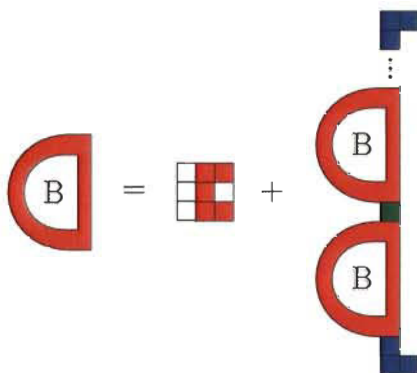


FIGURE 2.9 – Factorisation combinatoire des bulles de longueur  $n$

Cette factorisation combinatoire se traduit en l'équation suivante où  $B$  signifie  $B(t, q, w)$ . Rappelons que les variables  $t$  et  $q$  font référence respectivement à la hauteur et la largeur de la bulle. Nous introduisons une nouvelle statistique appelée la demi-frontière horizontale qui compte la moitié du nombre de segments unitaires horizontaux sur la frontière de la bulle. Par exemple, les bulles de la figure 2.7 ont une demi-frontière horizontale égale à 3. La demi-frontière est une statistique connue dans la littérature sous le sobriquet de demi-périmètre (voir [7]) et est codée par la variable  $w$  dans la série génératrice des bulles :

$$B = \frac{w^3 t^3 q^5}{1-tq} + \frac{wq}{1-tq} \cdot \frac{B}{1-PB} \cdot \frac{wq}{1-tq}.$$

Il faut isoler  $B$  dans cette équation et l'exprimer en fonction des trois variables  $t, q$  et  $w$ . Nous devons donc déterminer l'expression de  $P$ , qui est  $P(t, q, w) = \frac{tq}{1-tq}$  car un pilier ne contribue

pas à la frontière horizontale. Nous obtenons l'équation suivante :

$$B^2(t^2q^2 - tq) + B(1 - 2tq + t^2q^2 - w^2q^2 + w^3t^4q^6) - w^3t^3q^5 + wt^4q^6 = 0.$$

Il suffit de considérer  $B$  comme l'inconnue d'une équation du second degré et de résoudre avec la méthode du discriminant. Nous obtenons deux solutions dont l'une est à rejeter car son développement en séries contient des coefficients négatifs. La série génératrice de  $B$  est

$$B = \frac{1}{2tq(1-tq)}(1 - 2tq + w^3t^4q^6 - w^2q^2 + t^2q^2 - \sqrt{(1 + 2wq - 2tq + w^2q^2 + t^2q^2 - 2wq^2t - w^3t^4q^6)(1 - 2wq - 2tq + w^2q^2 + t^2q^2 + 2wq^2t - w^3t^4q^6)}) \quad (2.18)$$

$$= w^3t^3q^5 + w^3t^4q^6 + w^3t^5q^7 + w^3t^6q^8 + w^3t^7q^9 + w^3t^8q^{10} + w^3t^9q^{11} + w^5t^3q^7 + 3w^5t^4q^8 + 6w^5t^5q^9 + 10w^5t^6q^{10} + 15w^5t^7q^{11} + w^7t^3q^9 + 5w^7t^4q^{10} + 15w^7t^5q^{11} + w^9t^3q^{11} + \dots$$

Poser  $t = 1$  et  $w = 1$  réduit l'équation (2.18) à la série génératrice de la longueur  $B(q)$  :

$$B(q) = \frac{1}{2q} \left( 1 - q - q^2 - q^3 - q^4 - q^5 - \sqrt{(1+q)(1+q+q^2)(1-q+q^2)(1-q-q^2)(1-2q-q^3)} \right).$$

Cette série génératrice, qui est algébrique, décrit la séquence A023422 de l'OEIS. Les bulles appartiennent à la classe des excursions dans la classification des chemins de treillis proposée dans [1]. Cette factorisation combinatoire ne peut pas prendre en compte le paramètre  $r$  car nous empilons des bulles et seule la plus large contribue à la largeur. Il faudrait que l'exposant de  $r$  soit le maximum des largeurs des bulles. Pour cette raison, la série génératrice des bulles de largeur  $r$  fixée ne peut être obtenue avec cette méthode.

### Les traverses

Comme pour les bulles, nous allons explorer les traverses pour certaines largeurs afin d'avoir une bonne compréhension de leur construction. Il est clair qu'il n'y a qu'une traverse de largeur deux - deux cellules côte à côte. Sa série génératrice est donc

$$T_2(t, q) = tq^2.$$

Les traverses de largeur trois ne sont que des piliers avec une cellule à gauche d'une de ses extrémité et une cellule à droite de l'autre (figure 2.10).



FIGURE 2.10 - Des traverses de largeur trois

Ceci nous permet d'écrire leur série génératrice. Comme nous cherchons une récurrence, exprimons-la avec  $T_2(t, q)$ ,

$$T_3(t, q) = q \times \frac{tq}{1-tq} \times q = \frac{tq^3}{1-tq} = \frac{q}{1-tq} \cdot T_2(t, q).$$

Les traverses de largeur  $b = 4$  (figure 2.11c) sont construites de bas en haut et de gauche à droite comme suit. Tout d'abord, il y a une traverse de largeur 3. Au-dessus, un nombre arbitraire possiblement nul de bulles de largeur deux avec leurs piliers sont empilées avec ensuite éventuellement un pilier final et enfin une cellule dans la quatrième colonne. Ce qui donne, de nouveau grâce à la substitution dans  $\frac{1}{1-q}$  énoncée à la définition 2.2 page 30,

$$T_4(t, q) = T_3(t, q) \left( \frac{1}{1-PB_2} \right) \frac{q}{1-tq}.$$

Factorisons la traverse  $T_5$  pour décrire sa série génératrice et obtenir une meilleure compréhension du cas général. En allant du bas vers le haut, le premier facteur est une traverse de largeur quatre (partie verte à la figure 2.11d). Au-dessus de cette traverse se trouve un nombre arbitraire de bulles de largeur deux ou trois avec des piliers (partie rouge). À la fin se trouve possiblement un pilier dans la quatrième colonne et une dernière cellule dans la cinquième colonne (partie bleue). Cette factorisation donne l'expression

$$T_5(t, q) = T_4(t, q) \left( \frac{1}{1-PB_2-PB_3} \right) \frac{q}{1-tq}.$$

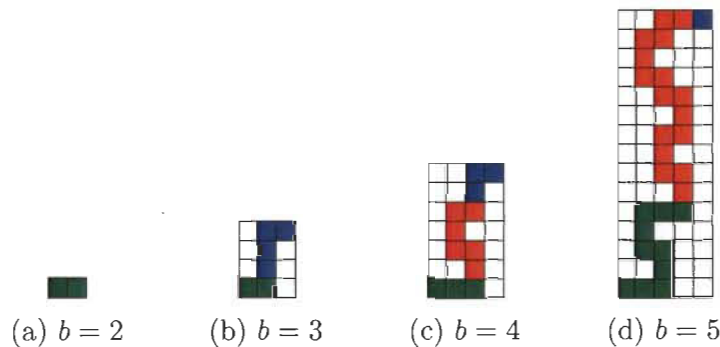


FIGURE 2.11 – Traverses de largeur  $b$

Pour les traverses de largeur arbitraire  $b$ , il y a une factorisation similaire en trois parties :

1. une traverse de largeur  $b - 1$  (cellules vertes à la figure 2.11),
2. un empilement de bulles de largeur deux à  $b - 2$  (cellules rouges),
3. un pilier dans la colonne  $b - 1$  juxtaposé à une cellule dans la colonne  $b$  (cellules bleues).

Ces considérations nous permettent d'écrire la récurrence

$$T_b(t, q) = T_{b-1}(t, q) \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq}.$$

Il est possible de la résoudre assez rapidement. En effet,

$$\begin{aligned} T_b(t, q) &= T_{b-1}(t, q) \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq} \\ &= T_{b-2}(t, q) \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{b-3} PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq} \times \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq} \\ &= T_{b-3}(t, q) \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{b-4} PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq} \times \left( \frac{q}{1 - tq} \right)^2 \frac{1}{\prod_{j=b-3}^{b-2} \left( 1 - \sum_{i=2}^j PB_i \right)} \\ &= \dots \\ &= T_3(t, q) \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^2 PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq} \times \left( \frac{q}{1 - tq} \right)^{b-1} \frac{1}{\prod_{j=3}^{b-2} \left( 1 - \sum_{i=2}^j PB_i \right)} \\ &= T_2(t, q) \times \left( \frac{q}{1 - tq} \right)^{b-2} \frac{1}{\prod_{j=2}^{b-2} \left( 1 - \sum_{i=2}^j PB_i \right)} \\ &= \left( \frac{q}{1 - tq} \right)^{b-2} \frac{tq^2}{\prod_{j=2}^{b-2} \left( 1 - \sum_{i=2}^j PB_i \right)}. \end{aligned}$$

Nous avons démontré le résultat suivant.

**Proposition 2.2.3.** Pour tout  $b \geq 3$ , nous avons

$$T_b(t, q) = T_{b-1}(t, q) \left( \frac{1}{1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i} \right) \frac{q}{1 - tq} = \left( \frac{q}{1 - tq} \right)^{b-2} \cdot \frac{tq^2}{\prod_{j=2}^{b-2} \left( 1 - \sum_{i=2}^j PB_i \right)}.$$

Des propositions 2.2.2 et 2.2.3 naît une expression pour les traverses en fonction des bulles.

**Proposition 2.4.** Pour tout  $b \geq 3$ , nous avons

$$T_{2k+1}(t, q) = \frac{\prod_{i=1}^k B_{2i}(t, q)}{\prod_{i=1}^k B_{2i-1}(t, q)} \cdot \frac{1}{t^2 q^2} \quad \text{et} \quad T_{2k}(t, q) = \frac{\prod_{i=2}^k B_{2i-1}(t, q)}{\prod_{i=1}^{k-1} B_{2i}(t, q)} \cdot \frac{1-tq}{t^2 q^3}.$$

*Preuve.* De la proposition 2.2.2, nous avons

$$\frac{B_{r-1}}{B_r} \cdot \frac{q^2}{(1-tq)^2} = \left(1 - \sum_{i=2}^{r-2} PB_i\right) \left(1 - \sum_{i=2}^{r-1} PB_i\right),$$

ce qui motive la séparation en deux cas  $T_{2k}(t, q)$  et  $T_{2k+1}(t, q)$ . Commençons par développer  $T_{2k+1}(t, q)$ .

$$\begin{aligned} T_{2k+1}(t, q) &= \left(\frac{q}{1-tq}\right)^{2k-1} \frac{tq^2}{\prod_{j=2}^{2k-1} \left(1 - \sum_{i=2}^j PB_i\right)} \\ &= \left(\frac{q}{1-tq}\right)^{2k-1} \frac{tq^2}{\left(1 - \sum_{i=2}^2 PB_i\right) \left(1 - \sum_{i=2}^3 PB_i\right) \cdots \left(1 - \sum_{i=2}^{2k-2} PB_i\right) \left(1 - \sum_{i=2}^{2k-1} PB_i\right)} \\ &= \left(\frac{q}{1-tq}\right)^{2k-1} \frac{tq^2}{\frac{B_3}{B_4} \frac{q^2}{(1-tq)^2} \cdot \frac{B_5}{B_6} \frac{q^2}{(1-tq)^2} \cdots \frac{B_{2k-1}}{B_{2k}} \frac{q^2}{(1-tq)^2}}. \end{aligned}$$

Il est clair qu'il y a  $k-1$  facteurs  $\frac{B_{2i+1}}{B_{2i}} \frac{q^2}{(1-tq)^2}$  au dénominateur. Ainsi,

$$T_{2k+1}(t, q) = \left(\frac{tq^3}{1-tq}\right) \frac{\prod_{i=2}^k B_{2i}(t, q)}{\prod_{i=2}^k B_{2i-1}(t, q)} = \frac{B_2(t, q)}{t^2 q^2} \cdot \frac{\prod_{i=2}^k B_{2i}(t, q)}{\prod_{i=2}^k B_{2i-1}(t, q)} = \frac{\prod_{i=1}^k B_{2i}(t, q)}{\prod_{i=1}^k B_{2i-1}(t, q)} \cdot \frac{1}{t^2 q^2}.$$

Nous procédons de même pour la seconde égalité. □

### Extrémités

La fin d'un *SPD* la plus élémentaire qui n'est ni une bulle ni une traverse est un pilier. Pour fixer les idées, numérotions les colonnes du rectangle de gauche à droite. Comme échauffement,

nous construisons la série génératrice  $E_b^2(t, q)$  des extrémités dans un rectangle de largeur  $b$  avec la dernière cellule sur la deuxième colonne (figure 2.12a) en empilant ses parties vers le haut. Nous commençons avec une traverse de largeur deux (cellules vertes) possiblement suivie d'un pilier (cellules bleues), d'un empilement de bulles de largeur variable mais  $b - 2$  au maximum (cellules rouges) et d'un pilier final au-dessus de la dernière bulle (dernière cellule bleue). Mais la première cellule de la première bulle peut être la dernière cellule de la traverse initiale ce qui signifie que nous divisons la série génératrice de la première bulle par  $tq$ . La série génératrice  $E_b^2(t, q)$  est donc

$$E_b^2(t, q) = tq^2 \times \frac{1}{1 - tq} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-2} B_i}{tq \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i \right)} \times \frac{1}{1 - tq} \right).$$

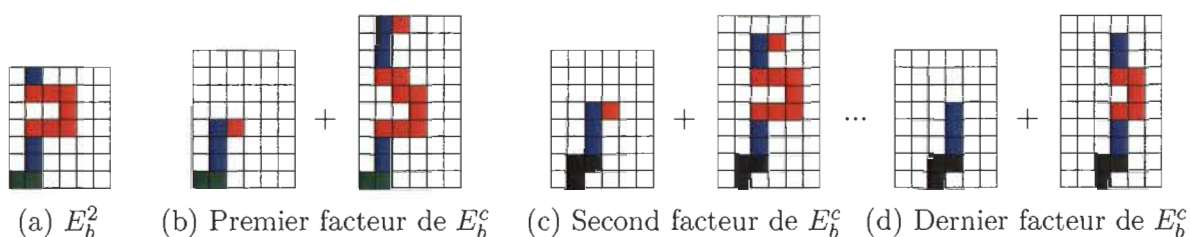


FIGURE 2.12 - Extrémités

Maintenant, regardons le cas général  $E_b^c(t, q)$  où l'extrémité finit dans la colonne  $c$  avec  $1 < c < b$ . Nous allons factoriser le SPD de gauche à droite et de bas en haut. Autrement dit, l'extrémité finissant dans la colonne  $c$  est décomposée en  $c - 1$  parties, la « zéroième », qui est la traverse de largeur deux faisant quitter le bord du rectangle, la première, qui se termine dans la seconde colonne et amène à la troisième colonne, la deuxième qui se termine dans la troisième colonne et amène à la quatrième colonne, ..., la dernière qui se termine dans la  $c^e$  colonne. Dans le cadre des séries génératrices, nous les appelons des facteurs car l'empilement se traduit par une multiplication.

Nous commençons comme dans  $E_b^2(t, q)$  par une rangée horizontale de deux cellules (cellules vertes à la figure 2.12b). Le premier facteur est le mouvement de la deuxième colonne vers la troisième colonne possiblement composé d'un pilier (premier pilier bleu) suivi par une des deux structures suivantes :

- i) une unique cellule dans la troisième colonne (premier rectangle à la figure 2.12b),
- ii) au moins une bulle dans la seconde colonne suivie par un pilier de hauteur au moins deux et une cellule dans la troisième colonne (deuxième rectangle).



De plus, la première cellule de la première bulle peut être la dernière cellule du facteur précédent (qui est ici la traverse de largeur deux).

$$\text{Premier facteur : } \frac{tq^2}{1-tq} \left( q + \frac{\sum_{i=2}^{b-2} B_i}{1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i} \cdot \frac{t^2q^3}{tq(1-tq)} \right). \quad (2.19)$$

Le deuxième facteur commence à la fin du premier facteur et finit avec la première cellule dans la quatrième colonne immédiatement après la dernière présence dans la troisième colonne. Il décrit la partie du SPD allant de la troisième à la quatrième colonne, comme montré à la figure 2.12c, où les cellules noires appartiennent au facteur précédent.

$$\text{Deuxième facteur : } \frac{1}{1-tq} \left( q + \frac{\sum_{i=2}^{b-3} B_i}{1 - \sum_{i=2}^{b-3} PB_i} \cdot \frac{t^2q^3}{tq(1-tq)} \right). \quad (2.20)$$

Comme nous voyons, c'est la même expression que celle du premier facteur avec les bornes supérieures des sommes diminuées de un car nous sommes à la troisième colonne, ce qui nous laisse  $b - 3$  colonnes pour placer des bulles.

Chaque facteur est construit de la même manière, décrivant le mouvement d'une colonne à la suivante. Le  $c - 1^e$  facteur, le dernier, est un peu différent car le SPD ne passe pas à la colonne suivante mais commence et se termine dans la colonne  $c < b$ , comme à la figure 2.12d où les cellules noires appartiennent au facteur précédent.

$$\text{Dernier facteur : } \frac{1}{1-tq} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} B_i}{1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i} \cdot \frac{1}{tq(1-tq)} \right). \quad (2.21)$$

Des équations (2.19), (2.20) et (2.21) et du principe de multiplication, nous déduisons la proposition suivante.

**Proposition 2.2.5.** Pour tous les entiers  $b$  et  $c$  tels que  $1 < c < b$ , la série génératrice des extrémités finissant dans la colonne  $c$  d'un rectangle de largeur  $b$  est

$$E_b^c(t, q) = \frac{tq^c}{(1-tq)^{c-1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=0}^{c-3} \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-2-j} PB_i(t, q) \right)} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} PB_i(t, q)}{t^2q^2 \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i(t, q) \right)} \right).$$

*Preuve.* C'est une démonstration essentiellement calculatoire, un exercice d'écriture. Pour simplifier la lecture, nous écrivons  $B_i$  et  $PB_i$  respectivement pour  $B_i(t, q)$  et  $PB_i(t, q)$ .

$$\begin{aligned}
 E_b^c(t, q) &= \frac{tq^2}{1-tq} \left( q + \frac{\sum_{i=2}^{b-2} B_i}{tq \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i \right)} \cdot \frac{t^2q^3}{1-tq} \right) \cdot \frac{1}{1-tq} \left( q + \frac{\sum_{i=2}^{b-3} B_i}{tq \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-3} PB_i \right)} \cdot \frac{t^2q^3}{1-tq} \right) \cdots \\
 &\quad \frac{1}{1-tq} \left( q + \frac{\sum_{i=2}^{b-c+1} B_i}{tq \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c+1} PB_i \right)} \cdot \frac{t^2q^3}{1-tq} \right) \cdot \frac{1}{1-tq} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} B_i}{tq \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i \right)} \cdot \frac{1}{1-tq} \right) \\
 &= \frac{tq^c}{(1-tq)^{c-1}} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-2} B_i}{\left( 1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i \right)} \cdot \frac{tq}{1-tq} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-3} B_i}{\left( 1 - \sum_{i=2}^{b-3} PB_i \right)} \cdot \frac{tq}{1-tq} \right) \cdots \\
 &\quad \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c+1} B_i}{\left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c+1} PB_i \right)} \cdot \frac{tq}{1-tq} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} B_i}{tq \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i \right)} \cdot \frac{1}{1-tq} \right).
 \end{aligned}$$

Nous savons que  $PB_i = P \times B_i$ , donc  $B_i = \frac{(1-tq)PB_i}{tq}$ . Nous pouvons substituer tous les  $B_i$  dans l'expression de  $E_b^c(t, q)$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
 E_b^c(t, q) &= \frac{tq^c}{(1-tq)^{c-1}} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-2} PB_i}{1 - \sum_{i=2}^{b-2} PB_i} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-3} PB_i}{1 - \sum_{i=2}^{b-3} PB_i} \right) \cdots \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c+1} PB_i}{1 - \sum_{i=2}^{b-c+1} PB_i} \right) \\
 &\quad \cdot \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} PB_i}{t^2q^2 \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i \right)} \right) \\
 &= \frac{tq^c}{(1-tq)^{c-1}} \cdot \frac{1}{\prod_{j=0}^{c-3} \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-2-j} PB_i \right)} \left( 1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} PB_i}{t^2q^2 \left( 1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i \right)} \right).
 \end{aligned}$$

□

Finalement, la série génératrice  $E_b(t, q)$  des extrémités dans un rectangle de largeur  $b \geq 3$  est la somme des séries génératrices  $E_b^c(t, q)$  de toutes les colonnes  $c$  de  $c = 2$  à  $c = b - 1$ . Le

cas  $c = 1$  étant un pilier, nous avons  $E_1(t, q) = \frac{1}{1-tq}$  qui va être incorporé plus tard dans les familles  $\mathcal{F}_i$ .

**Proposition 2.2.6.** La série génératrice  $E_b(t, q)$  pour  $b \geq 3$  des extrémités dans un rectangle  $b \times h$  est

$$E_b(t, q) = \sum_{c=2}^{b-1} E_b^c(t, q) = \sum_{c=2}^{b-1} \frac{tq^c}{(1-tq)^{c-1}} \frac{1}{\prod_{j=0}^{c-3} \left(1 - \sum_{i=2}^{b-2-j} PB_i(t, q)\right)} \left(1 + \frac{\sum_{i=2}^{b-c} PB_i(t, q)}{t^2 q^2 \left(1 - \sum_{i=2}^{b-c} PB_i(t, q)\right)}\right).$$

### Les séries génératrices des serpents partiellement dirigés inscrits

Nous sommes maintenant en état de présenter une série génératrice à trois variables  $F_i(s, t, q)$  pour les familles de *SPD* inscrits dans une structure donnée par les équations (2.14) à (2.17) de la page 34. Nous obtenons

$$F_1(s, t, q) = 2 \sum_{b \geq 2} s^b \left[ \frac{[1 + P(t, q)(1 + E_b(t, q))]^2 \cdot \frac{P(t, q) T_b(t, q)^2}{1 - P(t, q) \left(T_b(t, q) + \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)\right)}}{[1 + P(t, q)(1 + E_b(t, q))]^2 \cdot \frac{P(t, q) T_b(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}{1 - P(t, q) \left(T_b(t, q) + \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)\right)}} \right]$$

$$F_2(s, t, q) = 4 \sum_{b \geq 2} s^b \left[ \frac{[1 + P(t, q)(1 + E_b(t, q))]^2 \cdot \frac{P(t, q) T_b(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}{1 - P(t, q) \left(T_b(t, q) + \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)\right)}}{[1 + P(t, q)(1 + E_b(t, q))]^2 \cdot \frac{P(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}{1 - P(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}} \right]$$

$$F_3(s, t, q) = 2 \sum_{b \geq 2} s^b \left[ \frac{[1 + P(t, q)(1 + E_b(t, q))]^2 \cdot \frac{P(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}{1 - P(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}}{\frac{P(t, q) T_b(t, q) \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)}{1 - P(t, q) \left(T_b(t, q) + \sum_{i=2}^{b-1} B_i(t, q)\right)}} \right]$$

$$F_4(s, t, q) = \sum_{b \geq 2} s^b \left[ 2 \left[ [1 + P(t, q)(1 + E_b(t, q))]^2 \cdot T_b(t, q) \right] - tq^b \right].$$

Ces quatre dernières expressions ne sont pas présentées sous forme rationnelle mais, combinées avec la proposition 2.2.1, elles permettent la production d'expressions rationnelles à deux variables pour chaque valeur de la largeur  $b$ . À l'heure actuelle, nous n'avons pas réussi à obtenir des expressions rationnelles pour la série génératrice à trois variables où le paramètre  $b$  est incorporé et le problème est ouvert.

## 2.3 Une bijection

Les bargraphes sont une classe de polyominos ayant attiré l'attention de certains combinaticiens qui en ont donné les séries génératrices selon divers paramètres (voir [7]).

**Définition 2.3.1.** Les *bargraphes* sont des polyominos colonnes-convexes avec leurs cellules du bas sur l'axe horizontal. Ils sont uniquement caractérisés par la hauteur de leurs colonnes.

En mettant les bargraphes et les bulles en parallèle, on ne peut que constater que les bulles sont les contours des bargraphes. Et en effet, il existe une bijection entre ces deux ensembles que nous décrivons ci-dessous. Dans l'optique d'uniformiser notre présentation, nous appliquons aux bargraphes une rotation de 90 degrés dans le sens trigonométrique. La notation s'adapte en conséquence.

Un bargraphe a une largeur  $\ell$  lorsque sa plus grande rangée horizontale est de longueur  $\ell$  (figure 2.13a). Soit un bargraphe, la bulle correspondante est l'ensemble des cellules sur le périmètre du bargraphe avec des contacts par les côtés ou les coins et la restriction que la bulle n'a pas de cellule du côté droit du bargraphe. Nous pouvons donc voir une bulle comme l'enveloppe d'un bargraphe. Mais avant de pouvoir l'emballoter ainsi, nous devons étirer ses puits.

**Définition 2.3.2.** Un *puits* de hauteur  $h$  est une partie d'un bargraphe formé de deux rangées horizontales de longueurs  $\ell_0$  et  $\ell_2$  telles que les  $h$  rangées situées entre elles soient de la même longueur  $\ell_1$  avec  $\ell_0 > \ell_1 < \ell_2$ .

Par exemple, le bargraphe de la figure 2.13a possède un puits de hauteur deux. Les bargraphes ayant des puits de hauteur au plus deux ne peuvent être directement enveloppés par une bulle. Nous augmentons donc de 2 la hauteur de chaque puits dans un bargraphe pour garantir que tous les puits soient de hauteur au moins trois afin de pouvoir les envelopper avec une unique bulle comme expliqué ci-dessus.

**Proposition 2.3.1.** Il existe une bijection  $f : \text{bargraphe}(\ell - 1) \rightarrow \text{bulle}(\ell)$  de l'ensemble des bargraphes de largeur  $\ell - 1$  vers l'ensemble des bulles de largeur  $\ell$ .

*Preuve.* Soit une bulle. Le bargraphe envoyé sur cette bulle est l'intérieur de cette dernière à laquelle nous enlevons deux rangées dans chaque puits. Donc  $f$  est surjective. Soit un bargraphe. La bulle correspondante est son enveloppe après addition de deux rangées dans chaque puits (figures 2.13b et 2.13c). La construction en deux étapes de  $f$  assure que des bargraphes distincts sont envoyés par  $f$  sur des bulles distinctes donc  $f$  est injective et bijective.  $\square$

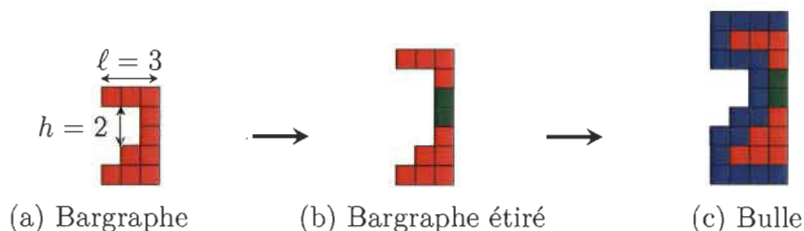


FIGURE 2.13 – Bijection  $f : \text{bargraphe}(\ell - 1) \rightarrow \text{bulle}(\ell)$

### Quelques tableaux

$b \backslash h$	1	2	3	4
1				1
2			6	
3		6		
4	1			

Nombre de SPD de longueur 4 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5
1					1
2			2	8	
3			12		
4		8			
5	1				

Nombre de SPD de longueur 5 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6
1						1
2				6	10	
3			4	20		
4			20			
5		10				
6	1					

Nombre de SPD de longueur 6 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7
1							1
2					12	12	
3			2	16	30		
4			4	40			
5			30				
6		12					
7	1						

Nombre de SPD de longueur 7 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7	8
1								1
2					2	20	14	
3				10	40	42		
4			4	20	70			
5			4	70				
6			42					
7		14						
8	1							

Nombre de SPD de longueur 8  
inscrits dans un rectangle  $b \times h$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									1
2						8	30	16	
3					36	80	56		
4			2	24	60	112			
5			4	24	140				
6			4	112					
7			56						
8		16							
9	1								

Nombre de SPD de longueur 9  
inscrits dans un rectangle  $b \times h$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										1
2							20	42	18	
3					4	100	140	72		
4				14	92	140	168			
5			4	28	84	252				
6			4	28	252					
7			4	168						
8			72							
9		18								
10	1									

Nombre de SPD de longueur 10  
inscrits dans un rectangle  $b \times h$

# Chapitre 3

## Des serpents un peu plus que minimaux

— *My head hurts.*

— *That's your brain trying to comprehend its own stupidity.*

— That '70s Show

L'idée d'explorer les serpents en se servant de l'index est due à Alain Goupil qui a lui-même développé les index 1 et 2. Dans ce chapitre, nous explorons quelques familles de serpents inscrits dans un rectangle  $b \times h$ . Il s'agit des serpents d'index 1, 2 et 3, ceux d'index 0 ayant été traités au chapitre 1. La partie sur les serpents d'index 1 est fort détaillée et donne les outils nécessaires pour explorer soi-même les serpents d'index supérieurs. Il s'agit d'un chapitre un peu répétitif car la même procédure est appliquée pour chaque index. Ce qui change de l'un à l'autre est la décomposition en structures de base. Il n'existe pas de formule générale donnant tous les serpents d'index quelconque  $r$  inscrits dans un rectangle  $b \times h$ , c'est pour le moment hors de notre portée. Comme nous le verrons avec les premiers index, les décompositions sont loin d'être évidentes et nous n'avons pas de recette pour les générer à coup sûr.

### 3.1 Serpents d'index 1

Commençons par compter les serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$ .

#### Le principe d'inclusion-exclusion au service des séries génératrices

Au chapitre 1, nous n'avons eu besoin que des serpents Nord-Est-Est et des piliers horizontaux et verticaux. Munissons-nous d'une nouvelle structure de base, appelée le banc.

**Définition 3.1.1.** Nous appelons *banc vertical* un serpent de longueur au moins cinq inscrit dans un rectangle  $2 \times h$  formé d'un pilier vertical et dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne.

De manière analogue, un *banc horizontal* est un serpent de longueur au moins cinq inscrit dans un rectangle  $b \times 2$  formé d'un pilier horizontal et dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même ligne.

Lorsque nous faisons indifféremment référence à l'une des deux orientations, nous disons simplement un *banc*. Le pilier du banc est appelé le *siège* et les cellules de degré 1 les *pattes*.

*Exemples.* Les quatre bancs de longueur cinq avec les sièges en rouge et les pattes en bleu.



FIGURE 3.1 – Les quatre bancs de longueur cinq

**Proposition 3.1.1.** Les serpents d'index 1 sont le produit de trois composantes : attachés aux pattes d'un banc, en rouge à la figure 3.2, nous avons un pilier d'un côté, en vert, et un escalier de l'autre, en bleu.

*Preuve.* Un serpent minimal emprunte le plus court chemin, ce qui se traduit par l'utilisation d'au maximum deux directions perpendiculaires (nord et est par exemple). Ici, nous devons donc permettre un pas selon une troisième direction (ajout de la direction ouest ou sud à notre exemple). Ceci impose la présence d'un banc dans le serpent et c'est le seul sinon l'index du serpent serait supérieur à 1. De plus, si nous avons un escalier avant et un escalier après le banc, l'index augmenterait. Ainsi, l'unique banc est encadré par un pilier et un escalier.  $\square$

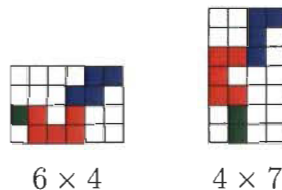


FIGURE 3.2 – Des serpents d'index 1

La figure 3.2 montre un serpent d'index 1 dont le banc est horizontal avec les pattes au nord du siège et un autre dont le banc est vertical avec les pattes à l'est du siège. Tous deux



commencent par un pilier et se terminent par un escalier. Il existe d'autres agencements *pilier*  $\times$  *banc*  $\times$  *escalier* (tableau 3.1). Les lettres dans la première colonne sont des référents utilisés par la suite. La colonne du banc détermine son orientation, horizontale (H) ou verticale (V), celle des pattes donne leur position par rapport au siège du banc et les deux dernières colonnes précisent quelles structures se trouvent avant et après le banc.

	Banc		Pattes ( $\div$ au siège)				Pilier		Escalier	
	H	V	nord	sud	ouest	est	avant	après	avant	après
A	X		X				X			X
B	X		X					X	X	
C	X			X			X			X
D	X			X				X	X	
E		X			X		X			X
F		X			X			X	X	
G		X				X	X			X
H		X				X		X	X	

TABLE 3.1 – Toutes les structures de serpents d'index 1

Le tableau 3.1 invalide-t-il la proposition 3.1.1 ? Que nenni. Tous les serpents listés ont bien comme structure *pilier*  $\times$  *banc*  $\times$  *escalier* ou *escalier*  $\times$  *banc*  $\times$  *pilier*. Le tableau illustre les considérations de symétries. Par exemple, la ligne *B* est obtenue de la ligne *A* par une réflexion par rapport à une droite verticale. Lorsque nous souhaitons déterminer la série génératrice d'une structure de serpents, il suffit donc de développer les arguments pour une orientation de l'assemblage *pilier*  $\times$  *banc*  $\times$  *escalier* et d'appliquer des isométries du plan afin d'obtenir les autres orientations. Que cela implique-t-il au niveau des séries génératrices ? Connaissant celle de *A*, pouvons-nous en déduire celle de *B* ?

### Symétries versus séries génératrices

Les familles du tableau 3.1 sont un cas particulier de l'explication qui suit. Voilà pourquoi les lettres utilisées sont différentes.

Donnons-nous une famille *S* de serpents inscrits dans un rectangle  $b \times h$  et notons sa série génératrice  $S(x, y)$  où  $x$  code la largeur  $b$  et  $y$  la hauteur  $h$  du serpent. Posons *T* la famille de serpents obtenue de *S* par une réflexion par rapport à une droite verticale. Il est clair qu'à tout serpent de *S* correspond un unique serpent de *T* ayant la même largeur et la même hauteur. Ainsi, la série génératrice  $T(x, y)$  de la famille *T* est égale à  $S(x, y)$ . Il en est de même pour la famille *U* obtenue de *S* par une réflexion par rapport à une droite horizontale,

$U(x, y) = S(x, y)$ . Nous pouvons composer ces deux symétries afin d'obtenir la famille  $V$  dont la série génératrice est  $V(x, y) = S(x, y)$ . En effet,  $V$  est obtenue de  $T$  par une réflexion par rapport à une droite horizontale donc  $V(x, y) = T(x, y)$  et nous savons que  $T(x, y) = S(x, y)$ . L'isométrie du plan nous amenant de  $S$  à  $V$  est une rotation de  $180^\circ$  (de centre le centre du rectangle circonscrit). La figure 3.3 illustre ces trois isométries pour les familles du tableau 3.1 où les piliers, bancs et escaliers sont respectivement en vert, rouge et bleu.

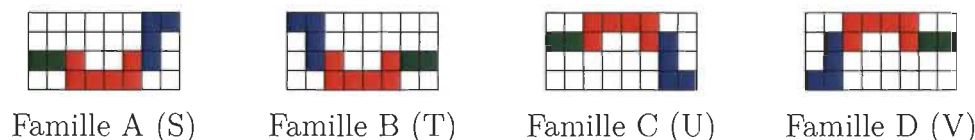


FIGURE 3.3 – Les isométries du plan laissant les séries génératrices invariantes

Il existe une infinité d'isométries ne laissant pas le rectangle invariant, mais nous travaillons dans un treillis carré et nous voulons que lui soit invariant. Cela nous limite à deux rotations, celles de  $90^\circ$  et de  $270^\circ$  (ou de  $-90^\circ$ ). Nous pouvons même nous cantonner à la rotation de  $90^\circ$  car celle de  $270^\circ$  n'est qu'une rotation de  $90^\circ$  suivie d'une autre de  $180^\circ$ , cette dernière laissant le rectangle circonscrit invariant (figure 3.4).

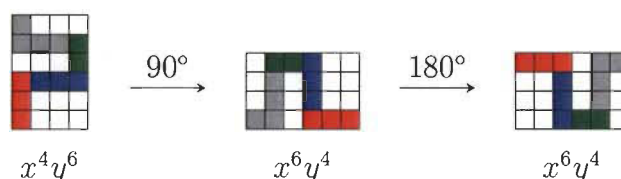


FIGURE 3.4 – Le rectangle circonscrit et la série génératrice esclaves des rotations

Après une rotation de  $90^\circ$ , le rectangle se retrouve tout chamboulé, sa largeur est devenue sa hauteur et réciproquement. Le serpent inscrit suivant le mouvement, il doit en aller de même pour les lettres codant sa largeur et sa hauteur. Par exemple, un serpent de largeur quatre et de hauteur six, codé par le terme  $x^4y^6$ , donne après rotation de  $90^\circ$  un serpent de largeur six et de hauteur quatre, qui lui est codé par  $x^6y^4$  (figure 3.4).

En appliquant la rotation de  $90^\circ$  à chaque famille  $S, T, U$  et  $V$ , nous englobons bien la rotation de  $270^\circ$  car la famille  $V$  est déjà obtenue de  $S$  par une rotation de  $180^\circ$ . Nous obtenons quatre nouvelles familles où la largeur est devenue la hauteur et inversement. Dans le contexte particulier du tableau 3.1, ce sont les lignes  $E, F, G, H$  obtenues respectivement des lignes  $A, B, C, D$  par une rotation de  $90^\circ$  (figure 3.5).

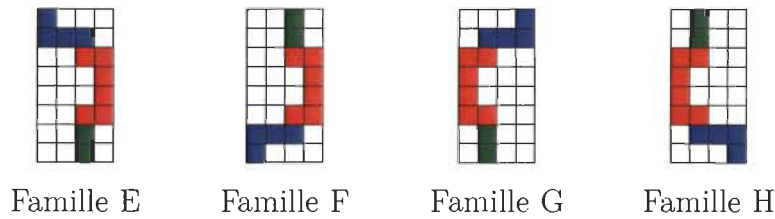


FIGURE 3.5 – L’isométrie permutant les  $x$  et les  $y$  dans la série génératrice

Au final, il suffit de connaître la série génératrice d’une famille de serpents pour connaître celles des familles obtenues de la première par des réflexions ou des rotations. Nous pouvons ne travailler que sur une orientation particulière d’un assemblage donné, facilitant l’explication. Nous aurions pu partir de  $A$ , obtenir  $E$  par la rotation de  $90^\circ$  et ensuite lui appliquer les réflexions par rapport à une droite verticale et à une droite horizontale, c’est équivalent.

### Les symétries au service des serpents

Testons notre nouveau savoir sur les structures constituants les serpents d’index 1 (figure 3.6). Nous déterminons leurs séries génératrices, toujours avec  $x$  codant la largeur et  $y$  la hauteur.

- 1) Pilier horizontal,  $PH(x) = \frac{1}{1-x}$
- 2) Pilier vertical,  $PV(y) = \frac{1}{1-y}$
- 3) Banc horizontal pattes au nord  $t \times 2$ ,  $BHN(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1-x}$
- 4) Banc horizontal pattes au sud  $t \times 2$ ,  $BHS(x, y) = \frac{x^3 y^2}{1-x}$
- 5) Banc vertical pattes à l’ouest  $2 \times t$ ,  $BVO(x, y) = \frac{x^2 y^3}{1-y}$
- 6) Banc vertical pattes à l’est  $2 \times t$ ,  $BVE(x, y) = \frac{x^2 y^3}{1-y}$
- 7) Escalier,  $Esc(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$



FIGURE 3.6 – Un exemple de chaque structure de base des serpents d’index 1

Nous constatons l'effet de la rotation de  $90^\circ$  et remarquons également que la position des pattes par rapport au siège du banc ne modifie pas la série génératrice. L'escalier n'est pas affecté car lorsque mis en rotation ou retourné, c'est encore un escalier, ce qui se vérifie dans sa série génératrice où intervertir le  $x$  et le  $y$  ne change rien.

Nous sommes prêts à nous attaquer aux serpents d'index 1. Choisissons la ligne  $A$  du tableau 3.1 page 52, sa structure et sa série génératrice sont

*pilier horizontal*  $\times$  *banc horizontal pattes au nord*  $\times$  *escalier*,

$$\begin{aligned} A(x, y) &= PH(x) \times BHN(x, y) \times Esc(x, y) \\ &= \frac{1}{1-x} \times \frac{x^3 y^2}{1-x} \times \frac{1}{1-x-y} \\ &= \frac{x^3 y^2}{(1-x)^2 (1-x-y)}. \end{aligned}$$

Nous avons gratuitement  $B(x, y)$ ,  $C(x, y)$  et  $D(x, y)$  qui sont toutes égales à  $A(x, y)$ . Pour obtenir  $E(x, y)$ ,  $F(x, y)$ ,  $G(x, y)$  et  $H(x, y)$ , nous permutons les  $x$  et les  $y$  dans  $A(x, y)$  :

$$E(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(1-y)^2 (1-x-y)}.$$

### Lorsque les symétries nous jouent des tours, le principe d'inclusion-exclusion en action

Ne perdons pas de vue le but final de notre travail, déterminer la série génératrice des serpents d'index 1. Suffit-il d'additionner les séries génératrices  $A(x, y)$  à  $H(x, y)$ ? La réponse est oui si les sous-ensembles de serpents sont disjoints, autrement dit s'ils forment une partition de l'ensemble de départ. En additionnant les séries génératrices, nous comptons bien une fois chaque serpent. La réponse est non si des sous-ensembles ont des serpents en commun. En additionnant les séries génératrices, certains sont comptés plusieurs fois comme pour nos huit familles. La figure 3.7 montre des serpents faisant partie de plusieurs familles en même temps.

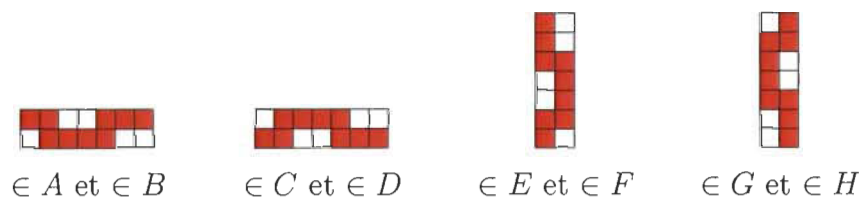


FIGURE 3.7 – Des serpents polygames

En bref, nous voulons compter les éléments distincts d'une réunion finie d'ensembles finis. Nous devons utiliser le principe d'inclusion-exclusion, la partie délicate étant le repérage des

structures qui sont communes à deux familles. Or, les familles  $B$  à  $H$  sont obtenues à partir d'une seule, la famille  $A$ , il suffit donc d'isoler la structure commune à la famille de départ et une des autres. Dans notre cas, ce sont  $A$  et  $B$  qui contiennent des serpents libertins (premier serpent à la figure 3.7). Étant donné que  $D$  est obtenue de  $B$  par la même réflexion par rapport à une droite horizontale que celle menant de  $A$  vers  $C$ , le symétrique de la structure commune à  $A$  et  $B$  est commun à  $C$  et  $D$  (deuxième serpent à la figure 3.7). De même pour  $E$  avec  $F$  et  $G$  avec  $H$  (deux derniers serpents à la figure 3.7).

La structure commune à  $A$  et  $B$  est *pilier*  $\times$  *banc*  $\times$  *pilier*, dont la série génératrice est

$$Libertin(x, y) = \frac{1}{1-x} \times \frac{x^3 y^2}{1-x} \times \frac{1}{1-x}.$$

Lorsque nous additionnons  $A(x, y)$  et  $B(x, y)$ , nous comptons  $Libertin(x, y)$  deux fois, il faut donc le retirer une fois, ce qui donne

$$A(x, y) + B(x, y) - Libertin(x, y) = \frac{2x^3 y^2}{(1-x)^2(1-x-y)} - \frac{x^3 y^2}{(1-x)^3},$$

expression aussi égale à  $C(x, y) + D(x, y) - Libertin(x, y)$ . Ainsi la série génératrice des serpents d'index 1 admettant un banc horizontal est

$$\begin{aligned} SBH_{min+1}(x, y) &= A(x, y) + B(x, y) - Libertin(x, y) + C(x, y) + D(x, y) - Libertin(x, y) \\ &= 2(A(x, y) + B(x, y) - Libertin(x, y)) \\ &= \frac{4x^3 y^2}{(1-x)^2(1-x-y)} - \frac{2x^3 y^2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir  $SBV_{min+1}(x, y)$ , la série génératrice des serpents d'index 1 admettant un banc vertical, il suffit d'intervertir les  $x$  et les  $y$  dans  $SBH_{min+1}(x, y)$  :

$$SBV_{min+1}(x, y) = \frac{4x^2 y^3}{(1-y)^2(1-x-y)} - \frac{2x^2 y^3}{(1-y)^3}.$$

Il est clair que les deux ensembles de serpents générés par  $SBH_{min+1}(x, y)$  et  $SBV_{min+1}(x, y)$  forment une partition de l'ensemble des serpents d'index 1. Nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 3.1.2.** La série génératrice  $S_{min+1}(x, y)$  des serpents inscrits d'index 1 est,

$$S_{min+1}(x, y) = \frac{2x^3 y^2}{(1-x)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-x} \right) + \frac{2x^2 y^3}{(1-y)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-y} \right).$$

$b \backslash h$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	6	12	20	30	42	56
3	2	8	20	44	84	144	228	340
4	6	20	40	84	168	312	540	880
5	12	44	84	168	336	648	1188	2068
6	20	84	168	336	672	1320	2508	4576
7	30	144	312	648	1320	2640	5148	9724
8	42	228	540	1188	2508	5148	10296	20020
9	56	340	880	2068	4576	9724	20020	40040

TABLE 3.2 – Nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$ 

Le raisonnement détaillé ci-dessus est valide pour d'autres structures et familles. Nous y ferons référence par « le principe d'inclusion-exclusion ».

### Une formule exacte pour le nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle $b \times h$

Afin de déterminer une formule exacte pour le nombre  $s_{min+1}(b, h)$  de serpents d'index 1 inscrits dans un  $b \times h$ , nous avons besoin d'un petit résultat.

**Proposition 3.1.3.** Le siège d'un banc d'un serpent d'index 1 touche toujours un côté du rectangle.

*Preuve.* Par l'absurde, supposons que le siège du banc ne touche aucun des cotés du rectangle. Nous nous retrouvons dans une situation similaire à celle de la figure 3.8.

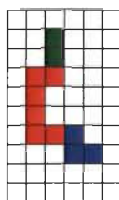


FIGURE 3.8 – Si le siège du banc ne touche pas un des côtés du rectangle

Nous devons aller toucher le côté gauche. Mais cela signifie devoir faire un demi-tour, ce qui donnerait naissance à un second banc. Or, nous avons démontré qu'un serpent d'index 1 ne peut être formé que d'un seul banc, d'un pilier et d'un escalier : contradiction.  $\square$

Nous sommes prêts pour démontrer la formule exacte du nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$ .

**Proposition 3.1.4.** Pour des entiers  $b, h \geq 2$ , nous avons

$$s_{min+1}(b, h) = \begin{cases} 4 \left[ \binom{b+h-3}{b} + \binom{b+h-3}{h} \right] & \text{si } b, h \geq 3 \\ 2 \left[ \binom{b+h-3}{b} + \binom{b+h-3}{h} \right] & \text{si } b = 2 \text{ ou } h = 2 \end{cases}$$

*Preuve.* Partitionnons l'ensemble des serpents d'index 1 en deux sous-ensembles, l'un contenant les serpents dont le banc est vertical et l'autre ceux dont le banc est horizontal. Le principe d'inclusion-exclusion nous permet de ne traiter qu'un seul des deux car il gère les symétries. Travaillons avec les bancs verticaux. Ces derniers se subdivisent encore en quatre sous-ensembles. Choisissons les bancs dont les pattes sont à l'est du siège et commençant par un pilier (famille  $G$  du tableau 3.1). La proposition 3.1.3 affirme que les sièges des bancs doivent être adjacents au côté gauche du rectangle. Une conséquence immédiate est que le pilier se situe dans la deuxième colonne en partant du côté gauche.

Soit un rectangle  $b \times h$  avec  $b, h \geq 3$ . La structure du serpent est *pilier*  $\times$  *banc*  $\times$  *escalier*. Après le pilier, il faut placer le banc, ce qui oblige d'avoir un pas O et un pas E. Pour passer du banc à l'escalier, il y a un pas E. L'escalier étant de largeur  $b - 2$ , il contient  $b - 3$  pas E (figure 3.9 où le pas O est en bleu et les pas E sont en rouge).

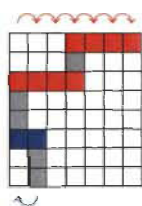


FIGURE 3.9 – Les pas horizontaux à faire

Le serpent est de longueur  $b + h$ , il y a donc  $b + h - 1$  pas à faire dont un O et  $b - 1$  E. Or une fois les pas horizontaux placés, nous n'avons plus le choix pour les pas verticaux. De plus, le pas O est immédiatement suivi de deux pas N. Considérons le pas O comme un petit bloc immuable de trois pas, cela enlève deux emplacements sur les  $b + h - 1$  disponibles. Au final, il suffit de compter le nombre de manières de placer le pas O et les  $b - 1$  pas E parmi les  $b + h - 3$  emplacements disponibles. Il s'agit du coefficient multinomial

$$\binom{b+h-3}{b, 1} = \binom{b+h-3}{b}$$

donnant le nombre de serpent d'index 1 dont le siège du banc vertical touche le côté gauche du rectangle et commençant par un pilier. Il s'agit d'un des quatre sous-ensembles de serpents

dont le banc est vertical, le raisonnement est identique pour chacun d'eux (figure 3.10), ce qui donne en tout

$$4 \binom{b+h-3}{b} \quad (3.1)$$

serpents d'index 1 contenant un banc vertical. Nous procédons de même pour les serpents contenant un banc horizontal dont le nombre est

$$4 \binom{b+h-3}{h}. \quad (3.2)$$

S'agissant d'une rotation de  $90^\circ$ , nous aurions pu dire que (3.2) est obtenue de (3.1) en permutant  $b$  et  $h$ . Le nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  avec  $b, h \geq 3$  est donné par l'addition de (3.1) et (3.2).

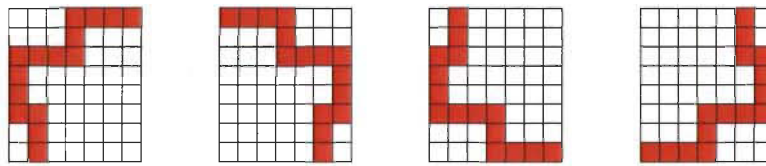


FIGURE 3.10 – Serpents d'index 1 obtenus par symétries à partir du premier à gauche

Il reste à traiter les cas  $b = 2$  et  $h = 2$ . La seule différence avec le développement fait ci-dessus est la structure des serpents qui est *pilier*  $\times$  *banc*  $\times$  *pilier* (figure 3.7 page 55). Le raisonnement reste valide, il faut juste faire attention au coefficient, qui n'est plus 4 mais 2 car leur structure est symétrique selon une droite horizontale – ou verticale dépendant de l'orientation du banc, ce qui donne non pas quatre sous-ensembles mais seulement deux pour chaque orientation de banc. D'où la formule voulue.  $\square$

Nous pouvons donner la série génératrice à trois variables  $S_{min+1}(x, y, z)$  des serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  aisément. Les serpents d'index 1 minimaux sont de longueur cinq et chaque contribution à la largeur ou à la hauteur augmente la longueur de 1, donc

$$S_{min+1}(x, y, z) = \frac{2x^3y^2z^5}{(1-xz)^2} \left( \frac{2}{1-xz-yz} - \frac{1}{1-xz} \right) + \frac{2x^2y^3z^5}{(1-yz)^2} \left( \frac{2}{1-xz-yz} - \frac{1}{1-yz} \right).$$

Nous n'explicitons pas les séries génératrices à trois variables pour les index suivants en raison de la longueur des formules. Le principe reste le même.

## Les serpents d'index 1 de longueur $n$

Déterminons à présent la série génératrice, la formule exacte et une formule de récurrence pour les serpents (non inscrits) d'index 1 de longueur  $n$ . La première s'obtient en substituant



tous les  $y$  par des  $x$  dans la formule de la proposition précédente. En effet, nous voulons la longueur et chaque contribution, en largeur et en hauteur, doit être comptabilisée. La formule exacte s'extrait de la décomposition en fractions partielles de  $S_{min+1}(x)$ . La récurrence... c'est du bidouillage avec la formule exacte.

$$\begin{aligned} S_{min+1}(x) &= \frac{4x^5}{(1-2x)(1-x)^3} \\ &= 2x + \frac{1}{1-2x} - \frac{16}{1-x} + \frac{12}{(1-x)^2} - \frac{4}{(1-x)^3} + 7. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Il n'y a pas de serpent d'index 1 de longueur inférieure à cinq car un banc est de longueur au moins cinq. Les termes  $2x$  et  $7$  de la décomposition en fractions partielles (3.3) sont donc ignorés dans la formule exacte. Grâce à la proposition 1.4.1 de la page 16, nous déterminons le terme général de chacun des termes de (3.3).

**Proposition 3.1.5.** La série génératrice et la formule exacte des serpents d'index 1 de longueur  $n$  sont

$$\begin{aligned} S_{min+1}(x) &= \frac{4x^5}{(1-2x)(1-x)^3} \\ s_{min+1}(n) &= 2^n - 4 + 12n - 4 \binom{n+2}{2}. \end{aligned}$$

Nous vérifions également que

$$s_{min+1}(n) = 2s_{min+1}(n-1) + 4 \binom{n-3}{2}.$$

$n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s_{min+1}(n)$	4	20	64	168	396	876	1864	3872	7924	16068	32400

TABLE 3.3 – Nombre de serpents d'index 1 de longueur  $n$

### Les serpents d'index 1 à symétries près

Nous avons compté les serpents d'index 1, certains sont les images d'autres par des réflexions et des rotations du plan. Combien y en a-t-il de « vraiment » différents? c'est-à-dire de serpents tel qu'aucun n'est l'image d'un autre par une isométrie laissant le treillis carré invariant?

Grâce à notre décomposition en huit familles, ce n'est pas bien compliqué. Il suffit de ne prendre qu'une d'entre elles, disons  $A$ , de substituer tous les  $y$  par des  $x$  et de décomposer en fractions partielles la série génératrice ainsi obtenue afin de déterminer une formule exacte.

**Proposition 3.1.6.** La série génératrice et la formule exacte des serpents d'index 1 de longueur  $n \geq 5$  à symétries près sont

$$S_{min+1}^{sym}(x) = \frac{x^5}{(1-x)^2(1-2x)},$$

$$s_{min+1}^{sym}(n) = 2^{n-2} - 1 + 3n - \binom{n+2}{2}.$$

$n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s_{min+1}(n)$	1	5	16	42	99	219	466	968	1981	4017	8100

TABLE 3.4 – Nombre de serpents d'index 1 de longueur  $n$  à symétries près

### Les serpents d'index 1 à symétrie près inscrits dans un rectangle $b \times h$

Déterminer la série génératrice des serpents d'index 1 à symétries près dans un rectangle  $b \times h$  est plus difficile à cause du cas où la largeur est égale à la hauteur. Dans le cas du carré, la formule exacte est aisée à obtenir, il suffit de remplacer  $b$  par  $h$  dans le coefficient binomial  $\binom{b+h-3}{b}$ , ce qui donne  $\binom{2b-3}{b}$ .

**Proposition 3.1.7.** La série génératrice et la formule exacte des serpents d'index 1 inscrits dans un carré  $b \times b$  à symétries près sont

$$S_{min+1}^{symc}(x) = \frac{x\sqrt{1-4x} - \sqrt{1-4x} - 3x + 1}{2\sqrt{1-4x}},$$

$$s_{min+1}^{symc}(b) = \binom{2b-3}{b}.$$

*Preuve.* La formule exacte vient d'être démontrée. Pour la série génératrice, nous nous servons du triangle de Pascal (figure 3.11).

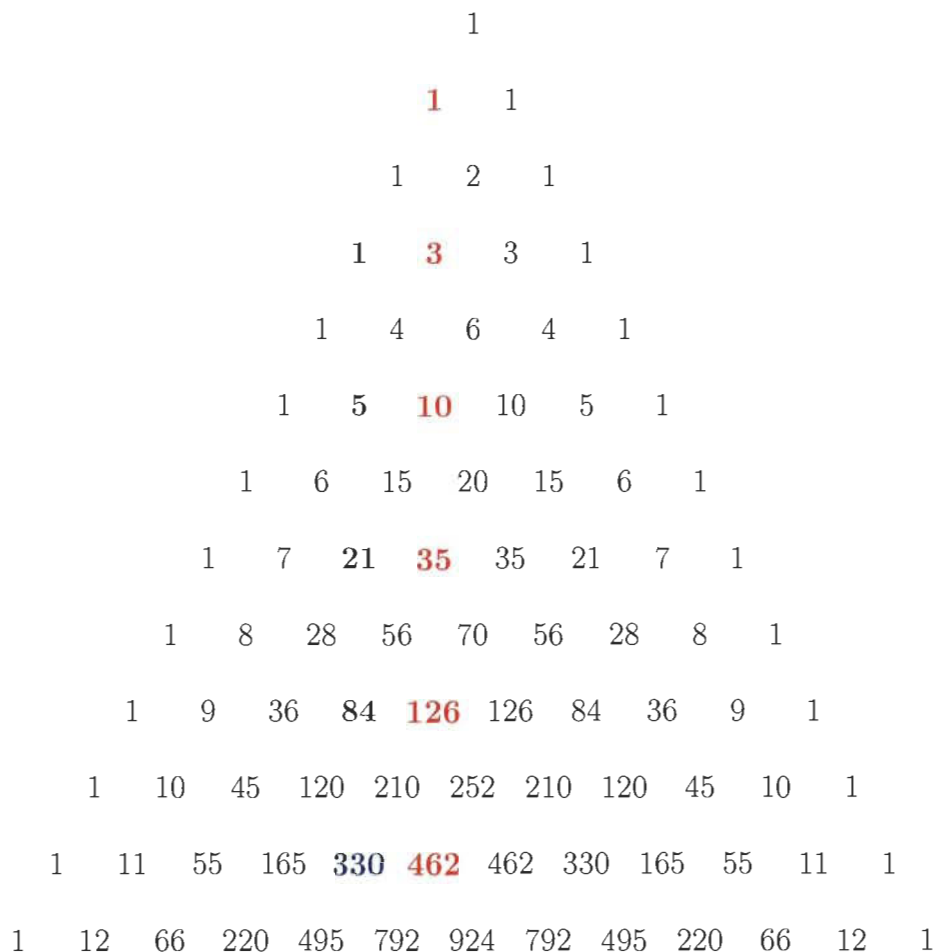


FIGURE 3.11 – Le triangle de Pascal

Les nombres de Catalan sont obtenus en soustrayant les entrées bleues aux entrées rouges adjacentes, les entrées bleues étant des éléments de la suite dont nous cherchons la série génératrice (tableau 3.5). Il suffit donc de connaître la série génératrice des nombres de Catalan  $C(x)$  et celle des nombres rouges  $R(x)$  pour l'obtenir. L'OEIS nous aide en fournissant  $C(x)$  et  $R(x)$ ,

$$\begin{aligned}
 C(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} &&= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \dots && A000108 \\
 R(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1}{2x} &&= 1 + 3x + 10x^2 + 35x^3 + 126x^4 + \dots && A001700 \\
 S_{min+1}^{symc}(x) &&&= 1 + 5x + 21x^2 + 84x^3 + 330x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Il ne s'agit pas de simplement les soustraire entre elles car les termes adjacents n'ont pas le

même indice. Il faut ajuster  $C(x)$ , ce qui nous donne

$$S_{min+1}^{symc}(x) = x^2 \left( R(x) - \frac{C(x) - 1}{x} \right) = \frac{x\sqrt{1-4x} - \sqrt{1-4x} - 3x + 1}{2\sqrt{1-4x}}.$$

La multiplication par  $x^2$  décale la suite vers la droite afin que le premier terme coïncide avec le carré de côté 3. □

La suite de nombres en bleu dans le triangle de Pascal existe aussi dans l’OEIS : A002054. En particulier, cette suite est la même que celle des tableaux standards de forme  $(b-2, b-2, 1)$  (voir [15]).

$b$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s_{min+1}(b)$	1	5	21	84	330	1287	5005	19448	75582	293930

TABLE 3.5 – Nombre de serpents d’index 1 inscrits dans un carré  $b \times b$  à symétries près

Pour un rectangle quelconque  $b \times h$ , nous considérons les familles  $A$  et  $E$  du tableau 3.1 page 52. En additionnant leurs séries génératrices, nous obtenons tous les serpents d’index 1 à symétries près dans un rectangle  $b \times h$  avec  $b \neq h$ . Mais dans un carré, nous avons la rotation de  $90^\circ$  qui permet de passer de la famille  $A$  à la famille  $E$ . Nous en comptons donc deux fois trop. Il faut enlever une fois chaque serpent inscrit dans un carré, ce qui se traduit par la soustraction de  $S_{min+1}^{symc}(x, y)$ .

**Proposition 3.1.8.** La série génératrice et la formule exacte des serpents d’index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  à symétries près sont

$$\begin{aligned}
 S_{min+1}^{sym}(x, y) &= A(x, y) + E(x, y) - S_{min+1}^{symc}(x, y) \\
 &= \frac{x^3 y^2}{(1-x)^2(1-x-y)} + \frac{x^2 y^3}{(1-y)^2(1-x-y)} \\
 &\quad - \frac{xy\sqrt{1-4xy} - \sqrt{1-4xy} - 3xy + 1}{2\sqrt{1-4xy}} \\
 s_{min+1}^{sym}(b, h) &= \begin{cases} \binom{b+h-3}{b} + \binom{b+h-3}{h} & b \neq h \\ \binom{2b-3}{b} & b = h \end{cases}
 \end{aligned}$$

$b \backslash h$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1	3	6	10	15	21	28
3	1	1	5	11	21	36	57	85
4	3	5	5	21	42	78	135	220
5	6	11	21	21	84	162	297	517
6	10	21	42	84	84	330	627	1144
7	15	36	78	162	330	330	1287	2431
8	21	57	135	297	627	1287	1287	5005
9	28	85	220	517	1144	2431	5005	5005

TABLE 3.6 – Nombre de serpents d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  à symétries près

## 3.2 Serpents d'index 2

Attaquons-nous aux serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$ . Nous savons que l'index est pris en charge par les bancs. Ainsi, un serpent d'index 2 peut contenir jusqu'à deux bancs. Partitionnons l'ensemble des serpents d'index 2 en cinq sous-ensembles :

1. les serpents contenant un petit serpentin,
2. les serpents contenant un grand serpentin,
3. les serpents contenant un 2-creux,
4. les serpents contenant un petit gaufrier et
5. les serpents contenant un grand gaufrier.

### Les petits et grands serpentins

Commençons par les serpents contenant un petit serpentin.

**Définition 3.2.1.** Un *petit serpent* est l'assemblage de deux bancs horizontaux ou verticaux qui ont les pattes dans des sens opposés et dont une patte de l'un partage une extrémité du siège de l'autre. Il est mis en évidence en rouge à la figure 3.12.

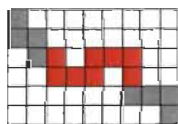


FIGURE 3.12 – Un serpent d'index 2 contenant un petit serpentin

Étant donné que l'index est pris en charge par le petit serpent, un serpent en contenant un a comme structure *escalier*  $\times$  *petit serpent*  $\times$  *escalier*.

**Proposition 3.2.1.** La série génératrice des serpents d'index 2 contenant un petit serpent est

$$S_{min+2}^{pserpentin}(x, y) = \frac{1}{1-x-y} \times \left( \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^2y^5}{(1-y)^2} \right) \times \frac{1}{1-x-y}.$$

*Preuve.* Nous connaissons la série génératrice des escaliers. Intéressons-nous aux petits serpents, nous avons deux possibilités illustrées à la figure 3.13.



FIGURE 3.13 – Les deux familles de petits serpents horizontaux

L'un est obtenu de l'autre par une réflexion soit par rapport à une droite verticale soit par rapport à une droite horizontale. Les petits serpents sont de hauteur deux et de largeur au moins 5 avec deux piliers horizontaux. Leur série génératrice est

$$\frac{2x^5y^2}{(1-x)^2}$$

L'ensemble des serpents contenant un petit serpent horizontal étant disjoint de celui des serpents contenant un petit serpent vertical, la série génératrice de l'ensemble des petits serpents est

$$S_{min+2}^{pserpentin}(x, y) = \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^2y^5}{(1-y)^2}.$$

Ce qui termine la preuve. □

Ce n'est pas pour rien que nous avons utilisé l'appellation petit serpent. Il en existe de plus grands au sens où les deux bancs peuvent loger un escalier entre eux et où le siège du deuxième banc n'est pas sur la même ligne que les pattes du premier.

**Définition 3.2.2.** Un *grand serpent* est l'assemblage de deux bancs horizontaux ou verticaux ayant les pattes dans des sens opposés et partageant les deux extrémités d'un escalier. Si ce dernier est de longueur un, ils se partagent la seule cellule de l'escalier. Les deux bancs sont mis en évidence en rouge à la figure 3.14, l'escalier en bleu et les piliers en vert.

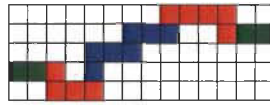


FIGURE 3.14 – Un serpent d’index 2 contenant un grand serpentin

Comme nous le voyons à la figure 3.14, le décalage du siège du second banc impose d’avoir des piliers aux extrémités. La structure d’un grand serpentin est *banc* × *escalier* × *banc*.

**Proposition 3.2.2.** La série génératrice des serpents d’index 2 contenant un grand serpentin est

$$\begin{aligned}
 S_{min+2}^{Gserpentin}(x, y) &= \frac{1}{1-x} \times \left( \frac{2x^3y^2}{1-x} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{x^2y}{1-x} \right) \times \frac{1}{1-x} \\
 &+ \frac{1}{1-y} \times \left( \frac{2x^2y^3}{1-y} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{xy^2}{1-y} \right) \times \frac{1}{1-y} \\
 &= \frac{2x^5y^3}{(1-x-y)(1-x)^4} + \frac{2x^3y^5}{(1-x-y)(1-y)^4}.
 \end{aligned}$$

*Preuve.* Détaillons la partie des grands serpentins horizontaux dont le premier banc a les pattes au nord de son siège. Nous avons la structure *banc* × *escalier* × *banc* à interpréter en termes de séries génératrices. Allons-y morceau par morceau. Le premier est un banc, structure bien connue, dont la série génératrice est  $\frac{x^3y^2}{1-x}$ . Nous connaissons également celle des escaliers,  $\frac{1}{1-x-y}$ . Il ne faut pas oublier qu’au numérateur ne sont présentes que les contributions à la largeur et à la hauteur. Ainsi, l’escalier codé 1 est en réalité de longueur un et peut être vu comme une patte commune aux deux bancs, celui codé  $y$  est un pilier vertical de hauteur deux, celui codé par  $x$  est un pilier horizontal de longueur deux, les deux escaliers codés  $xy$  sont des équerres dans un rectangle  $2 \times 2$ , etc (figure 3.15 avec les escaliers en bleu).



FIGURE 3.15 – L’escalier entre les deux bancs d’un grand serpentin

Le second banc du grand serpentin contribue pour 1 à la hauteur ce qui implique avoir  $y$  au numérateur. De plus, sa patte est partie intégrante de l’escalier et ne contribue pas à la largeur. Ainsi nous avons  $x^2$  au numérateur, ce qui donne au final  $\frac{x^2y}{1-x}$ . Il reste à multiplier toutes ces séries génératrices et à multiplier par 2 afin de compter les grands serpentins

dont les pattes du premier banc sont au sud de son siège (réflexion par rapport à une droite horizontale).

Comme nous l'avons observé à la figure 3.14, la structure d'un serpent d'index 2 contenant un grand serpent est *pilier*  $\times$  *grand serpent*  $\times$  *pilier*. Si nous avons des escaliers, ils augmenteraient l'index du serpent en faisant apparaître des bancs supplémentaires comme illustré à la figure 3.16 avec l'escalier qui devrait être un pilier en bleu. La série génératrice des serpents contenant un grand serpent vertical est obtenue en intervertissant les  $x$  et les  $y$  dans la série génératrice des serpents contenant un grand serpent horizontal.



FIGURE 3.16 – Un escalier de trop pour un serpent d'index 2

□

Il suffit d'additionner les expressions des propositions 3.2.1 et 3.2.2 pour obtenir la série génératrice des serpents contenant un serpent (petit ou grand).

**Proposition 3.2.3.** La série génératrice des serpents d'index 2 contenant un petit ou un grand serpent est

$$\begin{aligned}
 S_{min+2}^{serpentin}(x, y) &= S_{min+2}^{pserpentin}(x, y) + S_{min+2}^{Gserpentin}(x, y) \\
 &= \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2(1-x-y)^2} + \frac{2x^2y^5}{(1-y)^2(1-x-y)^2} \\
 &\quad + \frac{2x^5y^3}{(1-x-y)(1-x)^4} + \frac{2x^3y^5}{(1-x-y)(1-y)^4}
 \end{aligned}$$

$b \backslash h$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	0	2	8	20	40	70
3	0	0	0	6	30	90	210	420
4	0	0	0	8	48	168	448	1008
5	2	6	8	20	82	294	856	2118
6	8	30	48	82	192	558	1600	4158
7	20	90	168	294	558	1260	3190	8118
8	40	210	448	856	1600	3190	7040	16588
9	70	420	1008	2118	4158	8118	16588	36036

TABLE 3.7 – Nombre de serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  contenant un serpent



### Les creux

Deux structures développées, plus que trois à traiter. Penchons-nous sur les creux.

**Définition 3.2.3.** Un *creux* de profondeur  $r \geq 2$ , noté  $r$ -creux, est un banc dont une patte est attachée à un escalier de hauteur  $r$  et l'autre à un pilier horizontal surmonté d'un escalier de hauteur au moins  $r - 1$  (figure 3.17 avec le banc en rouge, le pilier horizontal en vert et les escaliers en bleu).

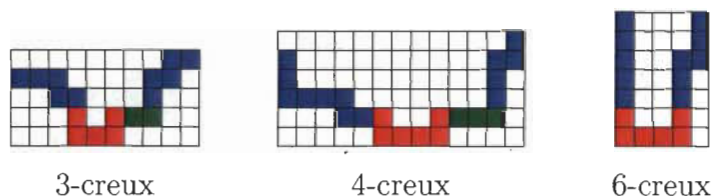


FIGURE 3.17 – Des creux

**Proposition 3.2.4.** La série génératrice des  $r$ -creux est

$$S_{r\text{-creux}}(x, y) = \frac{x^3 y^{r+1}}{(1-x)^{2r} (1-x-y)}$$

*Preuve.* Pour se simplifier la vie, nous considérons qu'un escalier de hauteur  $r$  est un empilement de  $r$  piliers et qu'un escalier de hauteur au moins  $r$  est un empilement de  $r - 1$  piliers et d'un escalier de hauteur au moins un (figure 3.18 où les piliers sont les pointillés l'escalier de hauteur au moins un le rectangle).



FIGURE 3.18 – Un  $r$ -creux

Les piliers formant l'escalier de hauteur  $r$  contribuent pour  $r$  à la hauteur du creux. La série génératrice de cet escalier est donc  $\frac{y^r}{(1-x)^r}$ . Le banc horizontal, nous connaissons sa série génératrice par cœur maintenant,  $\frac{x^3 y^2}{1-x}$ , mais seul son siège contribue à la hauteur donc nous nous retrouvons avec  $\frac{x^3 y}{1-x}$ . La série génératrice de l'escalier de hauteur au moins  $r$  est le

produit de celle des  $r - 1$  piliers avec celle de l'escalier de hauteur au moins un,  $\frac{1}{(1-x)^{r-1}} \cdot \frac{1}{1-x-y}$ . Il reste à tout multiplier ensemble pour trouver la série génératrice des  $r$ -creux.  $\square$

Pour les serpents d'index 2, nous n'avons besoin que d'un 2-creux, qui est un banc dont une patte est attachée à un escalier de hauteur deux et l'autre à un pilier horizontal surmonté d'un escalier de hauteur au moins un.

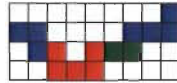


FIGURE 3.19 – Un serpent d'index 2 contenant un 2-creux

**Proposition 3.2.5.** La série génératrice des serpents d'index 2 contenant un 2-creux est

$$\begin{aligned}
 S_{min+2}^{2\text{-creux}}(x, y) &= 2 \left( \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{2x^3y^2}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \times \frac{y}{1-x-y} - \frac{x^3y^3}{(1-x)^5} \right) \\
 &\quad + 2 \left( \frac{1}{(1-y)^2} \times \frac{2x^2y^3}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \times \frac{x}{1-x-y} - \frac{x^3y^3}{(1-y)^5} \right) \\
 &= \frac{4x^3y^3}{(1-x-y)(1-x)^4} - \frac{2x^3y^3}{(1-x)^5} + \frac{4x^3y^3}{(1-x-y)(1-y)^4} - \frac{2x^3y^3}{(1-y)^5}.
 \end{aligned}$$

*Preuve.* Comme d'habitude, il y a deux cas à passer en revue : lorsque le banc est horizontal et lorsqu'il est vertical. Traitons le premier, le serpent a comme structure

*escalier de hauteur 2*  $\times$  *banc*  $\times$  *pilier horizontal*  $\times$  *escalier de hauteur au moins 1*.

La proposition 3.2.4 nous donne la série génératrice des 2-creux :

$$\frac{x^3y^3}{(1-x)^4(1-x-y)}.$$

Ici, l'application du principe d'inclusion-exclusion n'est pas aussi simple que tout multiplier par 4 car nos ensembles de serpents ne sont pas disjoints (même aventure que pour les familles  $A, B, C$  et  $D$  du tableau 3.1 page 52). Tout d'abord, étudions l'ensemble des serpents obtenus par une réflexion par rapport à une droite verticale (figure 3.20).



FIGURE 3.20 – Un serpent et son image par une réflexion par rapport à une droite verticale

Il contient des serpents déjà présents dans l'ensemble de départ, ceux dont l'escalier de hauteur au moins un est exactement de hauteur un (figure 3.21). Il faut les enlever une fois,

$$\frac{2x^3y^3}{(1-x)^4(1-x-y)} - \frac{x^3y^3}{(1-x)^5}$$

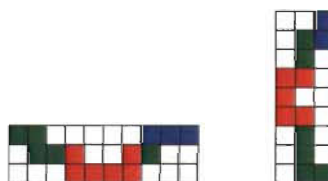


FIGURE 3.21 – Deux serpents avec l'escalier de hauteur un

Nous multiplions le tout par 2 afin d'obtenir les serpents dont le banc a les pattes au sud de son siège (réflexion par rapport à une droite horizontale). L'interversion des  $x$  et  $y$  pour avoir les serpents où le 2-creux est vertical termine la démonstration.  $\square$

$b \backslash h$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	14	34	74	144	256	424	664
4	14	48	112	256	540	1048	1892	3216
5	34	112	224	480	1020	2068	3960	7176
6	74	256	480	960	1980	4048	8008	15184
7	144	540	1020	1980	3960	8008	16016	31200
8	256	1048	2068	4048	8008	16016	32032	63232
9	424	1892	3960	8008	16016	32032	64064	127296
10	664	3216	7176	15184	31200	63232	127296	254592

TABLE 3.8 – Nombre de serpents d'index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  contenant un 2-creux

## Les petits et grands gaufriers

Et nous voilà arrivés aux deux dernières structures, les petits et grands gaufriers. Pourquoi ce mot alléchant? Justification grâce aux figures où il est facile d'imaginer l'emplacement pour la pâte à presser et à faire cuire... et la gaufre est une spécialité belge.

**Définition 3.2.4.** Un *gaufrier* est un serpent qui est l'assemblage d'un banc horizontal (H) et d'un banc vertical (V) éventuellement reliés par un escalier (figure 3.22).

Nous n'avons pas le choix pour le sens des pattes des deux bancs.

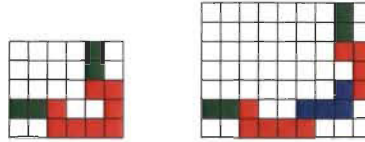


FIGURE 3.22 – Deux serpents d'index 2 contenant un gaufrier

Nous voyons très clairement qu'un serpent contenant un gaufrier ne peut que commencer et se terminer par des piliers, l'un horizontal relié au banc horizontal et l'autre vertical relié au banc vertical. La structure d'un tel serpent est

$$\text{pilier } H \times \text{banc } H \times \text{escalier} \times \text{banc } V \times \text{pilier } V.$$

Nous procédons comme pour les serpentins et partitionnons l'ensemble des gaufriers en deux sous-ensembles.

**Définition 3.2.5.** Un gaufrier n'admettant pas d'escalier entre les deux bancs est appelé un *petit gaufrier* (serpent de gauche à la figure 3.22).  
 Un gaufrier admettant un escalier entre les deux bancs est appelé un *grand gaufrier* (serpent de droite à la figure 3.22).

Affinons la structure pour chacun afin de faciliter l'écriture des séries génératrices. Les petits gaufriers ont comme structure

$$\text{pilier } H \times \text{banc } H \times \text{pilier } V \times \text{pilier } V.$$

La figure 3.23 illustre la structure générale avec les pointillés symbolisant des piliers possiblement vides. En les enlevant, nous retrouvons un petit gaufrier de longueur minimale.



FIGURE 3.23 – La structure de petit gaufrier et ses images par des réflexions par rapport à une droite horizontale et par rapport à une droite verticale

Nous ne devons pas tenir compte du cas où le banc est vertical car il est déjà pris en compte par les réflexions. Ainsi, nous n'avons qu'à multiplier par 4 la série génératrice de la structure de petit gaufrier. Nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 3.2.6.** La série génératrice des serpents d'index 2 contenant un petit gaufrier est

$$S_{min+2}^{pgaufrier} = \frac{4}{1-x} \times \frac{x^3 y^2}{1-x} \times \frac{y}{1-y} \times \frac{1}{1-y}$$

$$= \frac{4x^3 y^3}{(1-x)^2 (1-y)^2}$$

Il nous reste à traiter les grands gaufriers. L'escalier entre les deux bancs est semblable à celui entre les deux bancs d'un grand serpent. La figure 3.24 reprend la figure 3.15 avec le même code couleur mais avec des gaufriers.

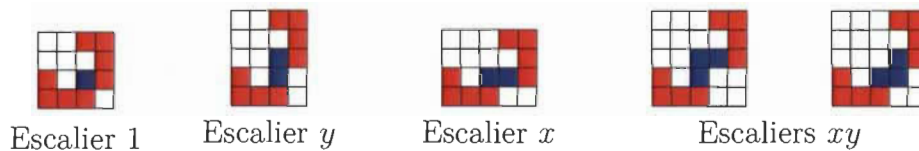


FIGURE 3.24 – L'escalier entre les deux bancs d'un grand gaufrier

Généralisons la structure de grand gaufrier à l'aide de la figure 3.25 où les piliers sont toujours en pointillés et l'escalier un rectangle. Pour obtenir un grand gaufrier de longueur minimale, il suffit de ne garder que les cellules. Sa structure est

$$pilier H \times banc H \times escalier \times pilier V \times pilier V.$$

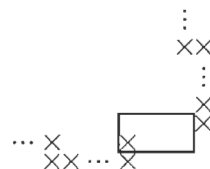


FIGURE 3.25 – La structure de grand gaufrier

Cela peut paraître fastidieux comme décomposition mais elle nous permet de démontrer aisément la proposition suivante, le facteur 4 étant obtenu par les considérations de symétries habituelles (figure 3.26).

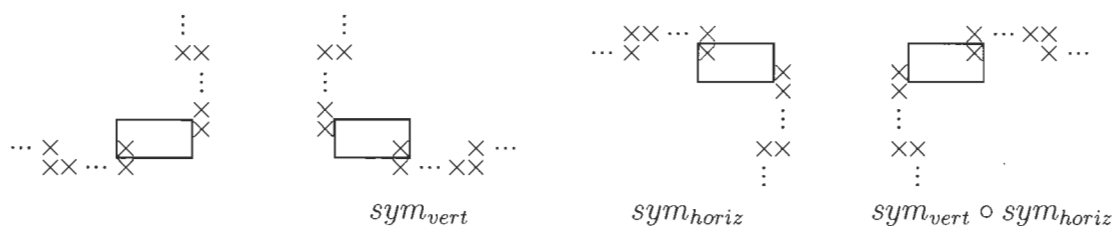


FIGURE 3.26 – La structure de grand gaufrier et ses images par des réflexions par rapport à une droite horizontale et par rapport à une droite verticale

**Proposition 3.2.7.** La série génératrice des serpents d'index 2 contenant un grand gaufrier est

$$\begin{aligned}
 S_{min+2}^{Ggaufrier}(x, y) &= \frac{4}{1-x} \times \frac{x^3 y^2}{1-x} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{xy^2}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \\
 &= \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2 (1-y)^2 (1-x-y)}.
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à additionner  $S_{min+2}^{pgaufrier}(x, y)$  et  $S_{min+2}^{Ggaufrier}(x, y)$  afin d'obtenir  $S_{min+2}^{gaufrier}(x, y)$  la série génératrice des serpents d'index 2 contenant un gaufrier.

**Proposition 3.2.8.** La série génératrice des serpents d'index 2 contenant un gaufrier inscrits dans un rectangle  $b \times h$  est

$$\begin{aligned}
 S_{min+2}^{gaufrier}(x, y) &= S_{min+2}^{Ggaufrier}(x, y) + S_{min+2}^{pgaufrier}(x, y) \\
 &= \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2 (1-y)^2 (1-x-y)} + \frac{4x^3 y^3}{(1-x)^2 (1-y)^2}.
 \end{aligned}$$

b \ h	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	8	12	16	20	24	28	32
4	8	20	36	56	80	108	140	176
5	12	36	76	136	220	332	476	656
6	16	56	136	276	500	836	1316	1976
7	20	80	220	500	1004	1844	3164	5144
8	24	108	332	836	1844	3692	6860	12008
9	28	140	476	1316	3164	6860	13724	25736
10	32	176	656	1976	5144	63232	25736	51476

TABLE 3.9 – Nombre de serpents d’index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  contenant un gaufrier

### La série génératrice des serpents d’index 2

Nous avons les séries génératrices des cinq structures de la page 64. En les additionnant, nous révélons la série génératrice des serpents d’index 2.

**Proposition 3.2.9.** La série génératrice des serpents d’index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  est

$$\begin{aligned}
 S_{min+2}(x, y) = & \frac{4x^4y^4}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)} + \frac{4x^3y^3}{(1-x)^2(1-y)^2} \\
 & + \frac{4x^3y^3}{(1-x-y)(1-x)^4} - \frac{2x^3y^3}{(1-x)^5} + \frac{4x^3y^3}{(1-x-y)(1-y)^4} - \frac{2x^3y^3}{(1-y)^5} \\
 & + \frac{2x^5y^2}{(1-x-y)^2(1-x)^2} + \frac{2x^2y^5}{(1-x-y)^2(1-y)^2} \\
 & + \frac{2x^5y^3}{(1-x-y)(1-x)^4} + \frac{2x^3y^5}{(1-x-y)(1-y)^4}.
 \end{aligned}$$

$b/h$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	0	2	8	20	40	70
3	0	8	22	52	120	254	490	872
4	0	22	68	156	360	788	1604	3040
5	2	52	156	320	698	1534	3256	6554
6	8	120	360	698	1428	3038	6484	13482
7	20	254	788	1534	3038	6224	13042	27298
8	40	490	1604	3256	6484	13042	26748	55480
9	70	872	3040	6554	13482	27298	55480	113824

TABLE 3.10 – Nombre de serpents d’index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

### Les serpents d’index 2 de longueur $n$

L’expression de  $S_{min+2}(x, y)$  n’est pas ce qu’il y a de plus agréable mais nous pouvons en tirer la belle série génératrice  $S_{min+2}(x)$  et la formule exacte des serpents d’index 2 de longueur  $n$ . Il faut ensuite multiplier par  $x$  car les contributions de la largeur et de la hauteur à la longueur ne suffisent pas pour obtenir deux bancs ou un 2-creux, il manque une cellule. La raison est que nous revenons sur nos pas deux fois et que l’un d’eux ne contribue ni à la hauteur ni à la largeur.

**Proposition 3.2.10.** La série génératrice de la longueur et la formule exacte des serpents d’index 2 et de longueur  $n$  sont :

$$S_{min+2}(x) = xS_{min+2}(x, x) = \frac{4x^7(3x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 6x + 2)}{(1 - 2x)^2(1 - x)^5},$$

$$s_{min+2}(n) = 2^{n-4}(n + 11) + 92 - 36n - 16\binom{n+2}{2} + 16\binom{n+3}{3} - 4\binom{n+4}{4}.$$

$n$	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s_{min+2}(n)$	8	48	188	592	1628	4092	9672	21908	48176

TABLE 3.11 – Nombre de serpents d’index 2 de longueur  $n$



### 3.3 Serpents d'index 3

Attaquons-nous aux serpents d'index 3. La difficulté va croissante, non pas dans le passage aux séries génératrices mais dans la construction des diverses structures existantes comme les creux, les serpentins et les gaufriers définis ci-avant. Toutes ont un point en commun, elles sont composées d'un ou plusieurs bancs avec possiblement des escaliers.

1. Les serpents contenant un 3-creux.
2. Les serpents contenant un 2-creux et un banc ayant la même orientation.
3. Les serpents contenant un 2-creux et un banc n'ayant pas la même orientation.
4. Les serpents contenant un petit serpentin et un banc ayant la même orientation.
5. Les serpents contenant un petit serpentin et un banc n'ayant pas la même orientation.

Commençons par explorer les configurations qui ne contiennent que des pas dans trois des quatre directions disponibles (numéros 1, 2 et 4). Il s'agit de serpents partiellement dirigés.

#### Trois directions autorisées sur quatre

##### Un 3-creux

Commençons par les serpents contenant un 3-creux. Leur série génératrice est (par la proposition 3.2.4)

$$\frac{x^3 y^4}{(1-x)^6 (1-x-y)}$$

Nous utilisons le principe d'inclusion-exclusion pour démontrer la proposition suivante, la structure comptée en trop étant lorsque l'escalier de hauteur au moins un est exactement de hauteur un (voir la démonstration de la proposition 3.2.4) :

$$\text{pilier} \times \text{pilier} \times \text{pilier} \times \text{banc} \times \text{pilier} \times \text{pilier} \times \text{escalier de hauteur 1}.$$

**Proposition 3.3.1.** La série génératrice des serpents d'index 3 contenant un creux de profondeur 3 est

$$\begin{aligned} S_{\min+3}^{3\text{-creux}}(x, y) &= 2 \left( \frac{y^3}{(1-x)^3} \times \frac{2x^3 y}{1-x} \times \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1-x-y} - \frac{x^3 y^4}{(1-x)^7} \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{x^3}{(1-y)^3} \times \frac{2xy^3}{1-y} \times \frac{1}{(1-y)^2} \times \frac{1}{1-x-y} - \frac{x^4 y^3}{(1-y)^7} \right) \\ &= \frac{4x^3 y^4}{(1-x)^6 (1-x-y)} - \frac{2x^3 y^4}{(1-x)^7} + \frac{4x^4 y^3}{(1-y)^6 (1-x-y)} - \frac{2x^4 y^3}{(1-y)^7}. \end{aligned}$$

## Un 2-creux et un banc

Planchons sur les serpents contenant un 2-creux et un banc ayant la même orientation (figure 3.27 où les 2-creux sont en rouge, les escaliers en bleu, les piliers en vert et les bancs en gris).

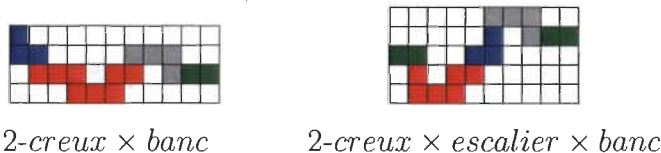


FIGURE 3.27 – Serpents d'index 3 contenant un creux de profondeur 2 et un banc

Le 2-creux peut être considéré comme un banc en raison de la décomposition choisie afin que la série génératrice semble se construire naturellement. La structure  $2\text{-creux} \times \text{banc}$  admet un escalier avant le creux de profondeur 2 et un pilier horizontal après le banc. La série génératrice des serpents d'index 3 contenant cette structure est

$$\begin{aligned} cb(x, y) &= 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^3y^2}{(1-x)^3} \times \frac{x^2y}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{4x^5y^3}{(1-x)^5(1-x-y)}. \end{aligned}$$

Similairement, la structure  $2\text{-creux} \times \text{escalier} \times \text{banc}$  admet un pilier horizontal avant le creux de profondeur 2 et un autre après le banc. Nous obtenons

$$\begin{aligned} ceb(x, y) &= 2 \left( \frac{y}{1-x} \times \frac{2x^3y^2}{(1-x)^3} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{x^2y}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{4x^5y^4}{(1-x)^6(1-x-y)}. \end{aligned}$$

Il n'y a rien à enlever dans ces deux séries génératrices car la structure  $2\text{-creux} \times \text{banc}$  est asymétrique. En additionnant  $cb(x, y)$  et  $ceb(x, y)$ , nous obtenons la série génératrice des serpents d'index 3 contenant un 2-creux et un banc dont les deux bancs sont horizontaux. Pour avoir ceux contenant des bancs verticaux, il faut intervertir les  $x$  et les  $y$ . Nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 3.3.2.** La série génératrice des serpents d'index 3 contenant un creux de profondeur 2 et un banc, tous deux horizontaux ou verticaux, est

$$\begin{aligned}
 S_{\min+3}^{2cb}(x, y) &= \frac{4x^5y^3}{(1-x)^5(1-x-y)} + \frac{4x^5y^4}{(1-x)^6(1-x-y)} + \frac{4x^3y^5}{(1-y)^5(1-x-y)} \\
 &\quad + \frac{4x^4y^5}{(1-y)^6(1-x-y)}. \\
 &= \frac{4x^3y^3}{1-x-y} \left( \frac{x^2}{(1-x)^5} + \frac{x^2y}{(1-x)^6} + \frac{y^2}{(1-y)^5} + \frac{xy^2}{(1-y)^6} \right).
 \end{aligned}$$

### Un petit serpent et un banc

Regardons maintenant la structure *petit serpent*  $\times$  *banc* avec possiblement un escalier entre eux. Le petit serpent et le banc ont la même orientation. Il faut distinguer deux cas (figure 3.28 avec les petits serpents en rouge, les escaliers en bleu, les piliers en vert et les bancs en gris) :

- pas d'escalier logé entre le petit serpent et le banc,
- un escalier de hauteur au moins un logé entre le petit serpent et le banc.



FIGURE 3.28 – Serpents d'index 3 contenant un petit serpent et un banc

Nous détaillons chaque structure de serpent afin de rendre perceptibles les escaliers et les piliers. Commençons par *petit serpent*  $\times$  *banc*. Il peut y avoir un escalier avant le petit serpent, ce qui implique qu'après le banc ne peut se trouver qu'un pilier horizontal sous peine de voir l'index augmenter : *escalier*  $\times$  *petit serpent*  $\times$  *banc*  $\times$  *pilier*.

**Proposition 3.3.3.** La série génératrice des serpents d'index 3 contenant la structure *petit serpent*  $\times$  *banc* est

$$\begin{aligned} S_{\min+3}^{pserp\text{pb}}(x, y) &= 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2} \times \frac{x^2}{1-x} \times \frac{1}{1-x} - \frac{x^7y^2}{(1-x)^5} \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^2y^5}{(1-y)^2} \times \frac{y^2}{1-y} \times \frac{1}{1-y} - \frac{x^2y^7}{(1-y)^5} \right) \\ &= \frac{4x^7y^2}{(1-x)^4(1-x-y)} - \frac{2x^7y^2}{(1-x)^5} + \frac{4x^2y^7}{(1-y)^4(1-x-y)} - \frac{2x^2y^7}{(1-y)^5}. \end{aligned}$$

*Preuve.* La structure vient d'être donnée. Il reste à déterminer la série génératrice de chaque morceau. Le coefficient 2 est là par le principe d'inclusion-exclusion pour la réflexion par rapport à une droite horizontale. L'escalier peut être vide, ce qui justifie l'absence de  $x$  et  $y$  au numérateur de  $\frac{1}{1-x-y}$ . Le petit serpent, nous avons vu sa série génératrice dans la partie sur les serpents d'index 2 :  $\frac{x^5y^2}{(1-x)^2}$ . Par le principe d'inclusion-exclusion appliqué cette fois à la réflexion par rapport à une droite verticale, nous la multiplions par 2 et retirons le terme  $\frac{x^7y^2}{(1-x)^5}$ . Le banc doit contribuer pour au moins 2 à la largeur, ce qui justifie le  $x^2$  au numérateur de  $\frac{x^2}{1-x}$ . Et nous terminons par un pilier. Nous n'oublions pas les cas lorsque les bancs sont verticaux en intervertissant les  $x$  et les  $y$  afin d'obtenir la formule souhaitée.  $\square$

La structure *petit serpent*  $\times$  *escalier*  $\times$  *banc* se justifie similairement. La différence est que nous avons un escalier qui vient s'insérer entre le petit serpent et le banc, ce qui prévient l'apparition de serpents invariants par une réflexion par rapport à une droite verticale (à droite figure 3.28). Il ne faut donc rien enlever dans la série génératrice et la proposition suivante est démontrée.

**Proposition 3.3.4.** La série génératrice des serpents d'index 3 contenant la structure *petit serpent*  $\times$  *escalier*  $\times$  *banc* est

$$\begin{aligned} S_{\min+3}^{pserp\text{epb}}(x, y) &= 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{x^2y}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^2y^5}{(1-y)^2} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{xy^2}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \right) \\ &= \frac{4x^7y^3}{(1-x)^4(1-x-y)^2} + \frac{4x^3y^7}{(1-y)^4(1-x-y)^2}. \end{aligned}$$

C'est tout pour les SPD d'index 3, il est temps de regrouper toutes les séries génératrices obtenues.

**Proposition 3.3.5.** La série génératrice des SPD d'index 3 est

$$\begin{aligned}
 SPD_{min+3}(x, y) &= S_{min+3}^{3\text{-creux}}(x, y) + S_{min+3}^{c2b}(x, y) + S_{min+3}^{pserpb}(x, y) + S_{min+3}^{pserpeb}(x, y) \\
 &= \frac{4x^3y^4}{(1-x)^6(1-x-y)} - \frac{2x^3y^4}{(1-x)^7} + \frac{4x^4y^3}{(1-y)^6(1-x-y)} - \frac{2x^4y^3}{(1-y)^7} \\
 &\quad + \frac{4x^3y^3}{1-x-y} \left( \frac{x^2}{(1-x)^5} + \frac{x^2y}{(1-x)^6} + \frac{y^2}{(1-y)^5} + \frac{xy^2}{(1-y)^6} \right) \\
 &\quad + \frac{4x^7y^2}{(1-x)^4(1-x-y)} - \frac{2x^7y^2}{(1-x)^5} + \frac{4x^2y^7}{(1-y)^4(1-x-y)} - \frac{2x^2y^7}{(1-y)^5} \\
 &\quad + \frac{4x^7y^3}{(1-x)^4(1-x-y)^2} + \frac{4x^3y^7}{(1-y)^4(1-x-y)^2}
 \end{aligned}$$

b \ h	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	0	0	0	2	10	30
3	0	0	2	8	28	96	276	676
4	0	2	28	96	260	696	1724	3912
5	0	8	96	304	732	1852	4528	10400
6	0	28	260	732	1464	3320	7880	18424
7	2	96	696	1852	3320	6648	14568	33176
8	10	276	1724	4528	7880	14568	29216	62656
9	30	676	3912	10400	18424	33176	62656	125840

TABLE 3.12 – Nombre de SPD d'index 3 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

### Quatres directions obligatoires

Lançons-nous à l'assaut des serpents non partiellement dirigés d'index 3 inscrits. Pour l'index 2, il s'agissait des gaufriers. Rappelons les deux structures à considérer :

1. Les serpents contenant un petit serpent et un banc n'ayant pas la même orientation.
2. Les serpents contenant un 2-creux et un banc n'ayant pas la même orientation.

### Un petit serpent et un banc perpendiculaires

Commençons par la première de la liste avec la figure 3.29 où le petit serpent est en rouge, les escaliers en bleu, les piliers en vert et les bancs verticaux en gris. L'absence de grand serpent nous permet d'user du mot serpent sans confusion possible.

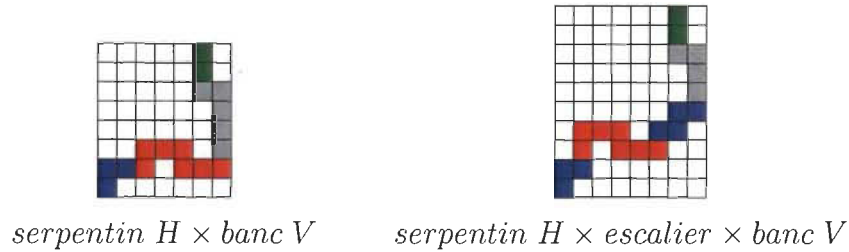


FIGURE 3.29 – Serpents d’index 3 contenant un serpentin horizontal et un banc vertical

Nous avons donc deux structures à considérer et à expliciter, la première (figure 3.30) est *escalier x serpentin H x pilier V x pilier V*.

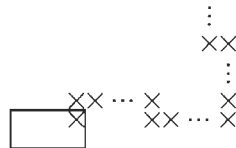


FIGURE 3.30 – *Escalier x serpentin H x pilier V x pilier V*

Le premier escalier peut être vide et le serpentin contribue pour au moins 2 à la hauteur et pour au moins 5 à la largeur. Le premier pilier vertical contribue pour au moins 1 à la hauteur et le dernier pilier peut être vide. Nous en déduisons la série génératrice

$$shbv(x, y) = 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2} \times \frac{y}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \right) = \frac{4x^5y^3}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)}$$

La deuxième structure (figure 3.31) est *escalier x serpentin H x escalier x pilier V x pilier V*.

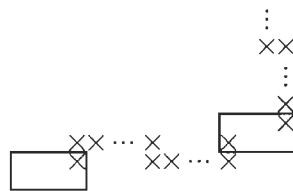


FIGURE 3.31 – *Escalier x serpentin H x escalier x pilier V x pilier V*

De nouveau, le premier escalier peut être vide. La contribution du serpentin ne change pas. Le second escalier contribue pour au moins 1 à la largeur et les piliers sont les mêmes

que ceux de la structure précédente. La série génératrice est donc

$$\begin{aligned} shebv(x, y) &= 2 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{2x^5y^2}{(1-x)^2} \times \frac{x}{1-x-y} \times \frac{y^2}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \right) \\ &= \frac{4x^6y^4}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)^2}. \end{aligned}$$

Il n'y a aucune symétrie à laquelle il faut prêter attention puisque ces structures sont asymétriques. Nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 3.3.6.** La série génératrice des serpents d'index 3 contenant un petit serpent suivi d'un banc dont le siège est perpendiculaire aux sièges des bancs du petit serpent est

$$\begin{aligned} S_{min+3}^{shbv}(x, y) &= \frac{4x^5y^3}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)} + \frac{4x^3y^5}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)} \\ &+ \frac{4x^6y^3}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)^2} + \frac{4x^3y^6}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)^2} \\ &= \frac{4x^3y^3(x^2+y^2)}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)} + \frac{4x^4y^4(x^2+y^2)}{(1-x)^2(1-y)^2(1-x-y)^2}. \end{aligned}$$

### Un 2-creux et un banc perpendiculaires

Concernant la dernière structure à traiter, un creux horizontal de profondeur 2 et un banc vertical, il nous faut être particulièrement attentifs. La figure 3.32 décrit les divers agencements possibles du 2-creux et du banc. Les serpents de longueur minimale de chaque  $s_i$  sont obtenus en ne gardant que les cellules (les croix).

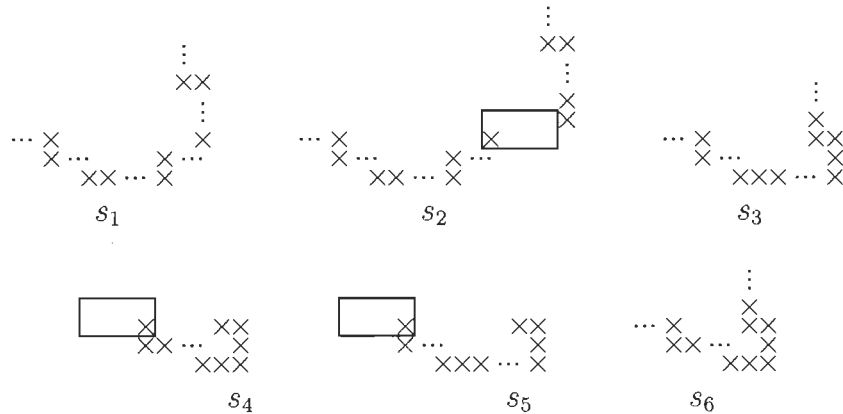


FIGURE 3.32 – Les structures 2-creux horizontal  $\times$  banc vertical

Voici les séries génératrices des structures de la figure 3.32 :

$$\begin{aligned} s_1(x, y) &= 4 \left( \frac{y}{1-x} \times \frac{y}{1-x} \times \frac{x^3 y}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \times \frac{y}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \right) \\ &= \frac{4x^3 y^4}{(1-x)^4 (1-y)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2(x, y) &= 4 \left( \frac{y}{1-x} \times \frac{y}{1-x} \times \frac{x^3 y}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x-y} \times \frac{xy^2}{1-y} \times \frac{1}{1-y} \right) \\ &= \frac{4x^4 y^5}{(1-x)^4 (1-y)^2 (1-x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3(x, y) &= 4 \left( \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x} \times \frac{x^4 y}{1-x} \times y^2 \times \frac{y}{1-y} \right) \\ &= \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^3 (1-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_4(x, y) &= 4 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{x}{1-x} \times x^3 y^3 \right) \\ &= \frac{4x^4 y^3}{(1-x)(1-x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_5(x, y) &= 4 \left( \frac{1}{1-x-y} \times \frac{1}{1-x} \times \frac{x^4 y}{1-x} \times y^2 \right) \\ &= \frac{4x^4 y^3}{(1-x)^2 (1-x-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_6(x, y) &= 4 \left( \frac{1}{1-x} \times \frac{x}{1-x} \times \frac{x^3 y}{1-x} \times y^2 \times \frac{y}{1-y} \right) \\ &= \frac{4x^4 y^4}{(1-x)^2 (1-y)}. \end{aligned}$$

Le coefficient 4 est issu du principe d'inclusion-exclusion pour les réflexions par rapport à une droite horizontale et par rapport à une droite verticale. Il ne faut pas oublier le cas où le creux de profondeur 2 est vertical et le banc horizontal. Cela se traduit, comme nous le savons, par une interversion des  $x$  et des  $y$  dans les expressions de  $s_1(x, y)$  à  $s_6(x, y)$  que nous notons  $s_i(y, x)$ . Nous avons démontré la proposition suivante.



**Proposition 3.3.7.** La série génératrice des serpents d'index 3 contenant un creux de profondeur 2 et un banc dont le siège est perpendiculaire à celui du creux est

$$S_{min+3}^{2chbv}(x, y) = \sum_{i=1}^6 s_i(x, y) + \sum_{i=1}^6 s_i(y, x).$$

### Tous les serpents d'index 3

C'est fini ! Nous avons tous les morceaux de la série génératrice des serpents d'index 3 inscrits dans un rectangle  $b \times h$ . Il suffit de les additionner entre eux.

**Proposition 3.3.8.** La série génératrice des serpents d'index 3 est

$$S_{min+3}(x, y) = SPD_{min+3}(x, y) + S_{min+3}^{shbv}(x, y) + S_{min+3}^{2chbv}(x, y).$$

$b/h$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	0	0	0	2	10	30
3	0	0	14	40	88	192	416	868
4	0	14	92	248	560	1220	2564	5176
5	0	40	248	664	1480	3260	6980	14412
6	0	88	560	1480	3112	6636	14080	29328
7	2	192	1220	3260	6636	13768	28772	59820
8	10	416	2564	6980	14080	28772	59352	122656
9	30	868	5176	14412	29328	59820	122565	252232

TABLE 3.13 – Nombre de serpents d'index 3 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

### Les serpents d'index 3 de longueur $n$

Comme pour les index 1 et 2, déterminons la série génératrice  $S_{min+3}(x)$  et la formule exacte pour les serpents d'index 3.

**Proposition 3.3.9.** La série génératrice et la formule exacte du nombre de serpents d'index 3 sont

$$S_{min+3}(x) = \frac{4x^9(4x^7 - 22x^6 + 34x^5 + 5x^4 - 62x^3 + 67x^2 - 34x + 7)}{(1-x)^7(1-2x)^2}$$

$$s_{min+3}(n) = 33 \cdot 2^{n-5} - 840 + 2^{n-4} \binom{n+1}{1} + 15 \binom{n+1}{1} + 8 \binom{n+2}{2} - 2 \binom{n+3}{3} - 2 \binom{n+4}{4} + 2 \binom{n+5}{5} - \binom{n+6}{6}.$$

*Preuve.* Il s'agit encore une fois de remplacer tous les  $y$  par  $x$  dans  $S_{min+3}(x, y)$  afin que chaque cellule soit comptée pour la longueur et de multiplier par  $x^2$  car les contributions de la largeur et de la hauteur à la longueur ne suffisent pas pour obtenir deux bancs ou un 2-creux, il manque deux cellules. La raison est que nous revenons sur nos pas trois fois et que deux d'entre eux ne contribuent ni à la hauteur ni à la largeur. Une fois la série génératrice obtenue, nous procédons à sa décomposition en fractions partielles et utilisons la substitution pour déterminer les coefficients  $a_n$  de chaque fraction en s'aidant de la proposition 1.4.1 page 16.  $\square$

$n$	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$s_{min+3}(n)$	28	172	676	2188	6292	16636	41288	97616	220893

TABLE 3.14 – Nombre de serpents d'index 3 de longueur  $n$

Nous nous arrêtons là pour la description des serpents d'index  $r$ . Tout d'abord parce que nous avons saisi le concept et qu'il est temps de passer à autre chose, et ensuite parce que le nombre de structures à traiter s'accroît. En théorie, la méthode est relativement simple. Nous déterminons les structures contribuant à l'index et nous les agençons afin de créer tous les serpents voulus. En pratique, c'est difficile.

# Chapitre 4

## Les serpents partiellement dirigés d'index $r$

*Je ne dis pas qu'il faut tuer tous les idiots... je dis juste qu'il faut enlever tous les messages d'avertissement et laisser les choses suivre leur cours.*

Tout le contenu de ce chapitre est de moi. Néanmoins, il ne serait pas ce qu'il est sans les conseils de Alain Goupil. Nous y présentons tout d'abord trois structures (figure 4.1), chacune munie de son codage : les méandres simples, les méandres imbriqués et les entrelacements.

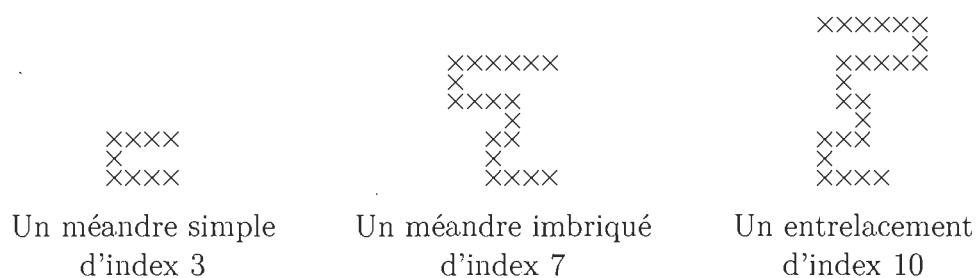


FIGURE 4.1 – Les trois types de méandres

Ensuite, nous explorons une des étapes d'un algorithme permettant de générer les SPD d'index  $r$  se basant sur les empilements de méandres. Tout repose sur la conjecture suivante.

**Conjecture 4.0.1.** Tout SPD est formé exclusivement de méandres simples, de méandres imbriqués, d'entrelacements et/ou d'escaliers.

Cette conjecture est corroborée jusqu'à l'index 9. Sont présentées les séries génératrices et les distributions d'index jusqu'à l'index 5 page 114. Afin d'obtenir la série génératrice des SPD d'index  $r$ , il suffit d'additionner celles de chaque famille d'index  $r$ , familles qu'il s'agit de déterminer.

## 4.1 Construction d'un codage des SPD d'index $r$

Cette partie est écrite comme une exploration. Certaines premières affirmations et définitions seront incomplètes car la notation n'était pas parfaite au départ. Nous la développons au fil du texte.

Un codage, de manière générale, permet de passer d'une représentation d'un ensemble de données à une autre. Ici, il va nous permettre de naviguer entre les SPD eux-mêmes et les distributions d'index (terme précisé un peu plus loin). Nous avons besoin de plusieurs concepts.

**Définition 4.1.1.** Un SPD de longueur au moins cinq est appelé un *méandre* lorsque ses deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne et que toutes les colonnes ont au maximum deux composantes connexes.

Le méandre est dit de *largeur*  $\ell$  lorsque son rectangle circonscrit est de largeur  $\ell + 1$ , c'est-à-dire lorsque le méandre occupe  $\ell + 1$  colonnes du treillis régulier carré.

**Définition 4.1.2.** L'*index* d'un SPD est le nombre de colonnes ayant deux composantes connexes.

Le banc vertical tel que défini au chapitre 3 est un cas particulier de méandre de largeur un et d'index un. La figure 4.2 donne deux exemples de méandres dont le second est de longueur minimale (c'est également un banc).

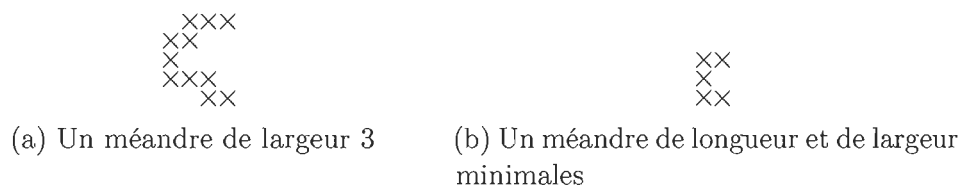


FIGURE 4.2 – Deux méandres

**Définition 4.1.3.**

- Un *sous-SPD* est un sous-ensemble d'un SPD qui est lui-même un SPD.
- Un *sous-méandre* est un sous-ensemble d'un méandre qui est un méandre.
- Un *sous-méandre propre* est un sous-méandre distinct du méandre dans lequel il est inclus.
- Un *méandre complet* est un méandre qui n'est pas un sous-méandre propre.

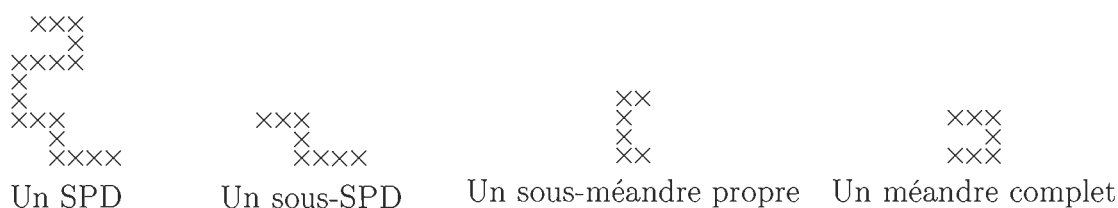


FIGURE 4.3 – Illustrations des définitions en référence au SPD de gauche

À la figure 4.3, le troisième SPD est un sous-méandre propre du premier méandre du SPD (à gauche). Donnons une caractérisation supplémentaire des SPD minimaux en termes de méandres. Un escalier est un SPD qui ne contient aucun méandre. C'est une conséquence immédiate des définitions d'escalier et de méandre.

Une conséquence de la définition de l'index d'un polyomino vue au chapitre 1 page 7 et de l'index d'un méandre est le concept d'index d'un SPD. En effet, étant une succession de méandres empilés les uns sur les autres, un SPD est d'index  $r$  lorsque la somme des index de ses méandres complets vaut  $r$ . Ils doivent être complets sinon nous nous retrouvons à sommer l'index de tous les sous-méandres des méandres du SPD car les colonnes à deux composantes connexes d'un sous-méandre sont aussi celles du méandre lui-même. L'idée sous-jacente est la décomposition d'un SPD en union de méandres complets. Le SPD de la figure 4.4 est bien d'index 3 et non pas d'index 6. Il ne faut considérer que le méandre complet d'index 3. En particulier, un SPD d'index 0 est un escalier. Nous écrivons

$$r = \sum_{i=1}^k r_i \tag{4.1}$$

où  $r_i$  est l'index du méandre complet  $R_i$  à la  $i^e$  position en comptant à partir du bas du SPD et  $k$  est le nombre de méandres complets du SPD.

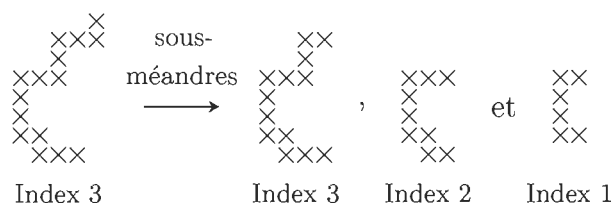


FIGURE 4.4 – Un SPD d'index 3, son méandre complet d'index 3 et ses sous-méandres d'index 2 et 1

La largeur et l'index d'un méandre sont égaux. En effet, sa largeur  $\ell$  est le nombre de colonnes de son rectangle circonscrit moins un et un méandre occupant  $r + 1$  colonnes en admet  $r$  ayant deux composantes connexes. L'objectif de ce chapitre est la détermination de la série génératrice à trois variables  $x, y, z$  codant respectivement la largeur  $b$ , la hauteur  $h$  et l'index  $r$  du SPD. Nous empruntons la piste qui consiste à fixer  $r$  et, pour chaque

valeur, établir la série génératrice à deux variables  $x, y$ . Ainsi,  $r$  joue le rôle du paramètre de départ dans l'algorithme de construction de la série génératrice. Nous voyons aisément que ces informations nous permettent d'extraire la série génératrice des SPD inscrits dans un rectangle  $b \times h$  de longueur  $n$ . En effet,  $n$  est donné par la longueur d'un SPD minimal dans le rectangle  $b \times h$  additionnée à  $r$ . Autrement dit, nous avons l'égalité

$$n = b + h - 1 + r.$$

### Premiers pas d'un codage des SPD

Il serait bon d'avoir une notation contenant les informations suivantes sur le SPD :

1. le nombre  $k$  de méandres complets,
2. l'index  $r_i$  de chaque méandre complet  $R_i$  et donc la composition  $r = r_1 + \dots + r_k$ ,
3. la largeur et la hauteur du SPD,
4. la longueur du SPD.

L'idéal est de voir apparaître toutes ces informations de manière évidente. Les deux premières contraintes se doivent d'être remplies car nous avons décidé de travailler avec l'index. Remarquons au passage que l'équation (4.1) donne une composition de  $r$ .

**Définition 4.1.4.** Une *composition*  $\rho$  d'un entier naturel  $r > 0$  est une suite finie  $(r_1, \dots, r_k)$  d'entiers positifs telle que  $r = r_1 + \dots + r_k$ . Chaque  $r_i$  est appelé une *part*, et l'entier  $k$  est la longueur de la composition.

Jusqu'ici, la notation d'une composition suffit pleinement :  $(r_1, \dots, r_k)$ . Nous l'appelons parfois une *distribution d'index* pour rappeler ce qu'une composition code dans un SPD. Les deux autres contraintes ne feraient qu'alourdir la notation, nous tâcherons de retrouver ces informations notamment à l'aide de la définition 4.1.1 et de l'équation (4.1). Voyons ce que cela donne à l'aide de la figure 4.5.

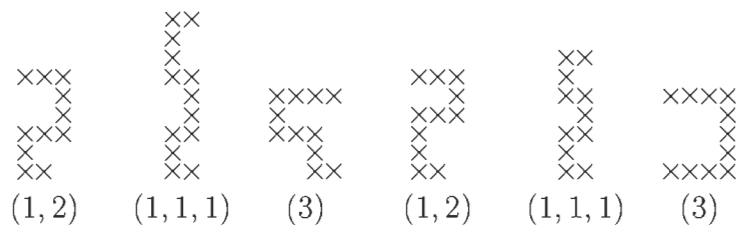


FIGURE 4.5 – Quelques exemples de SPD et leurs distributions d'index

Nous voyons très clairement un problème avec le codage des SPD de la figure 4.5. La même composition est utilisée pour des SPD distincts. Il y a trois couples de SPD, chacun

muni de sa composition,  $(1, 2)$ ,  $(1, 1, 1)$  et  $(3)$ . Nous avons le bon nombre de méandres ainsi que les bons index. C'est la longueur et la hauteur qui varient. Plutôt que de dire qu'une distribution d'index code un SPD, nous dirons qu'elle code une famille de SPD. Pour bien voir ces dernières, nous considérons un cas minimal et représentons par des piliers – les pointillés verticaux dans les figures – l'ajout d'un nombre arbitraire de cellules empilées verticalement (figure 4.6).

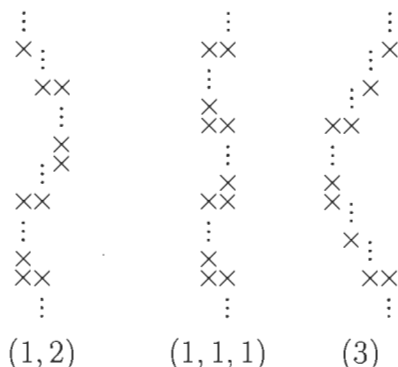


FIGURE 4.6 – Trois familles de SPD munies de leurs distributions d'index

Avons-nous toutes les familles de SPD ? Regardons les SPD de la figure 4.7 et tentons de leur adjoindre une famille et une distribution d'index.

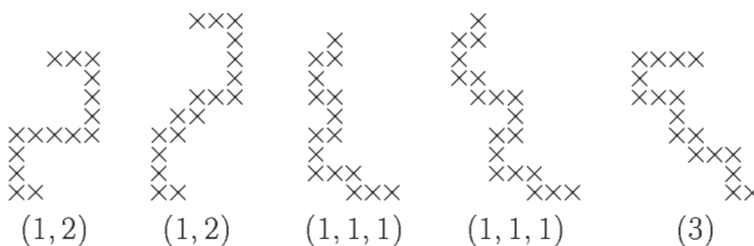


FIGURE 4.7 – Des polyominos orphelins... pour le moment

Nous voyons que les familles de la figure 4.6 n'incluent pas les SPD de la figure 4.7, qui sont trop larges. Il nous faut quelque chose qui fasse varier la largeur sans modifier l'index. Les escaliers sont les candidats idéaux. Ils sont de longueur arbitraire plus grande ou égale à 1 afin d'obtenir des familles disjointes de celles ayant les mêmes index mais pas d'escalier. Choisissons le symbole  $\rightsquigarrow$  fourni par  $\LaTeX$  afin d'indiquer leur présence dans le SPD et représentons-les par un rectangle dans les figures. Reprenons les familles de la figure 4.6 et créons celles manquantes dont les SPD de la figure 4.7 sont des éléments (figure 4.8).

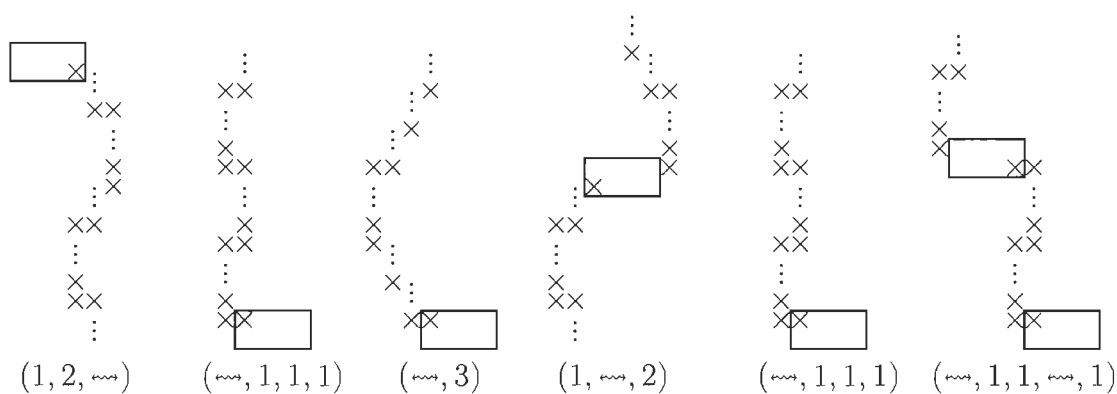


FIGURE 4.8 – Quelques familles de SPD

Les familles de la figure 4.8 ne sont pas construites approximativement. Lorsque les pointillés et les rectangles sont ignorés, nous obtenons un SPD de longueur minimale de la famille. La présence des piliers est plus subtile, nous les retrouvons dans les parts de la distribution d'index. Pour le moment, nous n'avons pas besoin de nous préoccuper de leur nombre, nous y reviendrons au moment d'attaquer les séries génératrices.

### Les méandres imbriqués

Quelles compositions adjoindre aux SPD de la figure 4.9. ?

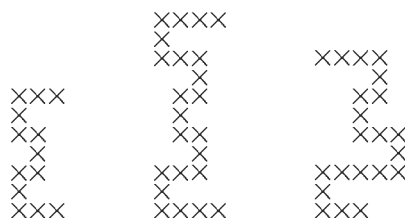


FIGURE 4.9 – Des SPD oubliés... temporairement

Nous sommes bloqués, la notation actuelle ne nous permet pas de coder de telles bêtes. Encore une fois, une solution est d'introduire un nouveau symbole, les crochets  $[ ]$ . Reprenons les SPD de la figure 4.9 et greffons-y la distribution d'index correspondante (figure 4.10).



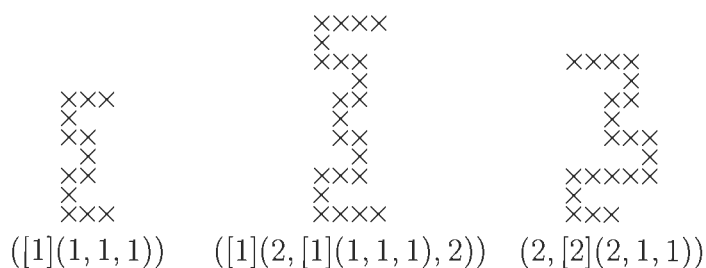


FIGURE 4.10 – Des SPD ayant trouvé une famille

Il nous manquait les SPD contenant la configuration de « méandres à l'intérieur d'un méandre ». Grâce à l'ajout des crochets, nous considérons ces nouveaux cas. De plus, la propriété d'additionner les nombres présents pour retrouver la valeur de l'index  $r$  reste valide. Voici, à la figure 4.11, les SPD de la figure 4.10 avec un code couleur. Il n'y a ni pilier ni escalier pour les besoins de l'explication. Le nombre entre crochets (en rouge et turquoise) est en quelque sorte l'entrée du méandre imbriqué. Une fois à l'intérieur, nous repérons les sous-méandres qui y sont logés (en vert, bleu et orange dans le SPD de gauche).

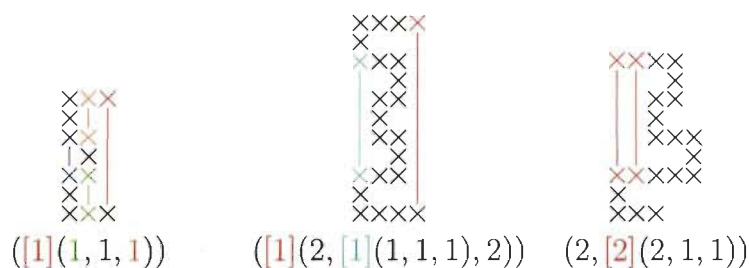


FIGURE 4.11 – Illustration de l'utilisation des crochets

Jusqu'ici nous parlons de méandre pour désigner un simple aller-retour dans le SPD. Nous devons élargir notre vocabulaire et modifier sa définition. Ils seront dorénavant appelés des méandres simples.

**Définition 4.1.5.**

- Un *méandre simple* est un SPD dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne et dont les colonnes du rectangle circonscrit ont au maximum deux composantes connexes.
- Un *méandre imbriqué* est un SPD dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne et formé d'un nombre impair  $p \geq 3$  de méandres simples concaténés.
- Le mot *méandre* désigne indifféremment un méandre simple ou un méandre imbriqué.

*Exemple.* Un méandre de largeur trois désigne aussi bien un méandre simple de largeur trois qu'un méandre imbriqué de largeur trois.

Un méandre imbriqué peut posséder des sous-méandres qui sont des méandres imbriqués, comme le deuxième SPD de la figure 4.11. Nous avons affirmé que la largeur et l'index des méandres sont toujours égaux, affirmation vraie pour les méandres simples mais fausse pour les méandres imbriqués. Introduisons une notation pour différencier l'index de la largeur d'un méandre :

Un SPD d'index  $r \geq 1$  contient  $k \geq 1$  méandres complets d'index  $r_1, r_2, \dots, r_k$  respectivement de largeurs  $\ell(R_i), \dots, \ell(R_k)$  tels que  $\sum_{i=1}^k r_i = r$ .

Avant de généraliser le codage avec les crochets pour les méandres imbriqués, définissons la notion de sous-méandre complet, accrochez-vous.

**Définition 4.1.6.** Un *sous-méandre complet* d'un méandre  $M$  est un sous-méandre de  $M$  qui n'est pas un sous-méandre propre d'un autre sous-méandre de  $M$ . Nous disons aussi un sous-méandre  $M$ -complet.

*Exemple.* Les sous-méandres complets du méandre  $([2](3, [2](1, 1, 1), 4))$  sont  $(3)$ ,  $([2](1, 1, 1))$  et  $(4)$ . Les sous-méandres complets du sous-méandre complet  $([2](1, 1, 1))$  sont  $(1)$ ,  $(1)$  et  $(1)$ . À la figure 4.12, les sous-méandres complets de  $([2](3, [2](1, 1, 1), 4))$  sont en vert, bleu et gras.

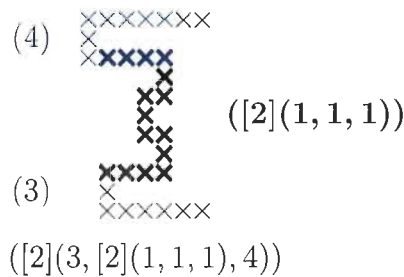


FIGURE 4.12 – Des sous-méandres complets

**Définition 4.1.7.** Un méandre imbriqué formé de  $p$  sous-méandres complets est noté  $[s](s_1, \dots, s_p)$ . Chacun des  $s_i$  est soit l'index d'un méandre simple soit l'index d'un méandre imbriqué. Nous avons  $s \geq 1$  et  $p \geq 3$  impair.

Les entrelacements de méandres imbriqués

Ce n'est pas fini ! Il nous manque encore des familles de SPD (figure 4.13).

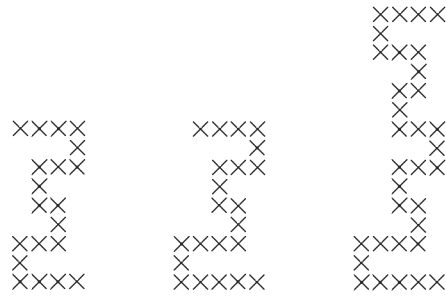


FIGURE 4.13 – Des familles où les méandres s'entrelacent

Nous pouvons voir ces configurations comme des méandres imbriqués qui, plutôt que de se suivre à la queue leu-leu, se retrouvent entrelacés. Malheureusement, elles échappent au codage actuel. Afin de les incorporer, nous avons deux choix. Le premier consiste à légèrement modifier la lecture d'un méandre imbriqué mais ce n'est ni beau ni facile à lire. Regardons brièvement pourquoi. Il s'agit de commencer par le premier méandre imbriqué rencontré et dès qu'un autre commence, même si le premier n'a pas été parcouru dans son entièreté, nous entrons dedans (nouveaux crochets). Testons cette approche à la figure 4.14.

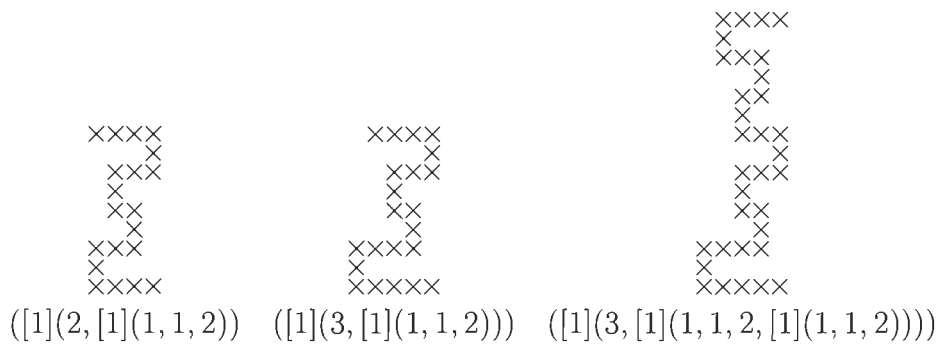


FIGURE 4.14 – Un codage non adéquat

Le problème majeur est la difficulté à reconstruire le SPD générique correspondant à partir de la distribution d'index. De plus, il y a une accumulation rapide de parenthèses à la fin, ce qui n'est pas très glamour. Cherchons, et trouvons, autre chose. À la figure 4.14, nous avons pris le parti de sauter d'un méandre imbriqué à l'autre dès qu'il s'en présente un. Et si nous faisons le contraire ? c'est-à-dire parcourir dans son entièreté un méandre imbriqué avant de passer au suivant.

Comme expliqué un peu plus haut, ces méandres imbriqués sont entrelacés, ce qui motive la dénomination choisie d'*entrelacement de méandres imbriqués* (ou plus succinctement un

entrelacement). Nous allons utiliser la même structure de codage que celle des méandres imbriqués avec des accolades en lieu et place des crochets afin de les différencier. Reprenons les familles de la figure 4.13. La première expression à la figure 4.15 est le SPD lu de bas en haut et la seconde est la lecture de haut en bas. S'il n'y a qu'une expression, c'est que les deux sens de lecture donnent le même résultat.

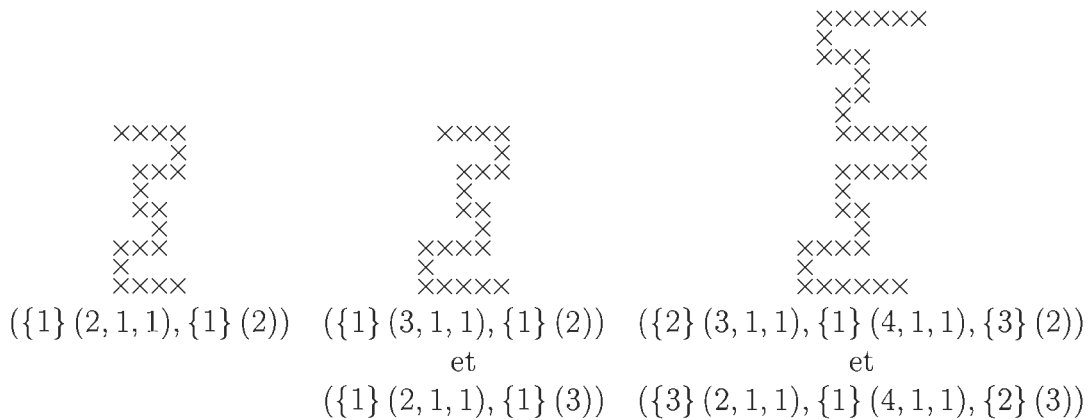


FIGURE 4.15 – Des méandres entrelacés et leurs distributions d'index

Il est temps d'éclairer notre lanterne et de comprendre plus avant le fonctionnement de ce codage. Reprenons encore une fois les mêmes SPD et colorions-les (figure 4.16).

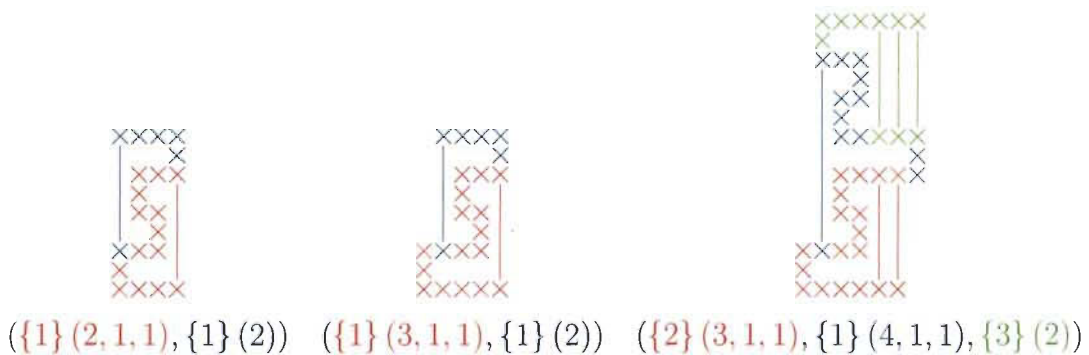


FIGURE 4.16 – Des entrelacements de méandres imbriqués coloriés

Nous entrons par la grande porte dans le premier méandre imbriqué rencontré. Mais en le parcourant, nous visitons aussi une partie du second méandre imbriqué. C'est comme si nous y étions entré en catimini. Une fois sortis du premier, nous sommes toujours coincés dans le second. Il faut également en sortir et pour cela, il faut le parcourir dans son entièreté. Ce faisant, il est possible que nous nous infiltrions dans un troisième méandre imbriqué. Une fois évadés du second, il nous faut sortir du troisième, etc. Nous nous arrêtons lorsque nous réussissons à nous échapper de tout méandre imbriqué et quitter l'entrelacement.

*Exemple.* Détaillons le coloriage du troisième SPD de la figure 4.16. Nous entrons dans le méandre imbriqué rouge  $[2](3, 1, 1)$ . Nous le parcourons mais ce faisant, nous envahissons le méandre imbriqué bleu  $[1](1, 1, 4, 1, 1)$ . Nous sommes donc en présence d'un entrelacement et les crochets deviennent des accolades. En parcourant le méandre imbriqué rouge, nous avons visité les deux premiers sous-méandres complets du méandre imbriqué bleu, (1) et (1). Les trois autres sous-méandres complets ne sont pas communs au méandre imbriqué rouge. Ainsi, une fois arrivés au bout du méandre imbriqué bleu, notre parcours est  $(\{2\}(3, 1, 1), \{1\}(4, 1, 1))$ . Mais un troisième méandre imbriqué,  $[3](1, 1, 2)$ , est entamé pendant que nous cheminons au travers du bleu. Une fois sortis de ce dernier, il reste le sous-méandre complet (2) du méandre imbriqué vert à explorer. Notre parcours a été  $(\{2\}(3, 1, 1), \{1\}(4, 1, 1), \{3\}(2))$ .

Le codage développé jusqu'ici ne suffit pas à différencier les SPD de la figure 4.17 alors qu'ils ne font pas partie de la même famille. En effet, tel qu'illustré à la figure 4.18, le premier SPD est constitué des deux méandres imbriqués  $[1](3, 2, 2, 1, 1)$  et  $[1](2, 2, [1](1, 1, 2, 1, 1))$ , alors que le deuxième est formé de  $[1](3, 2, 2, 1, 1)$  et  $[1](1, 1, [1](2, 1, 1))$ . Pour remédier à cette confusion, nous allons réutiliser la notation  $[s](s_1, \dots, s_p)$ .

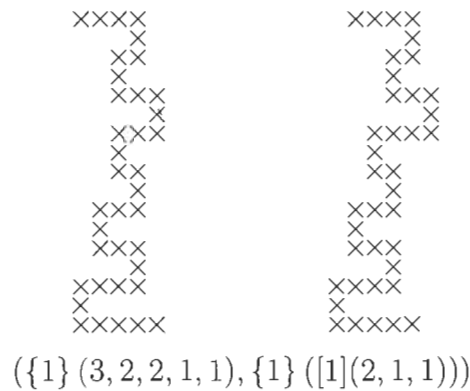


FIGURE 4.17 – Deux familles, une distribution d'index

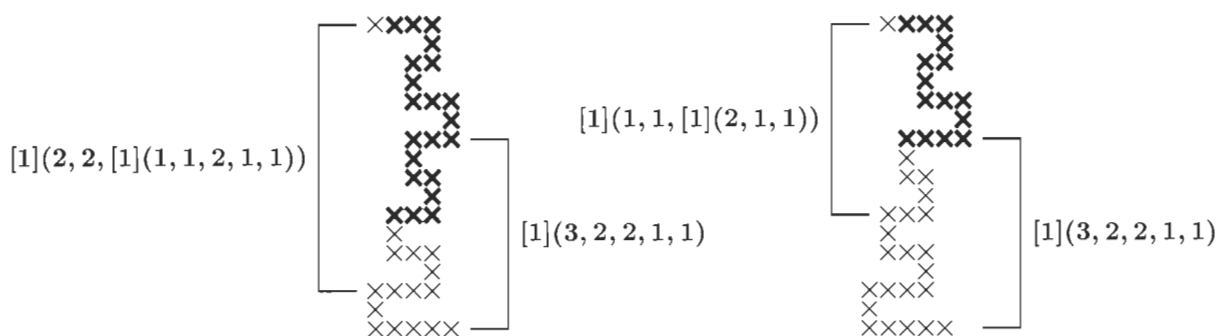


FIGURE 4.18 – La différence entre les deux familles

Dans le premier SPD de la figure 4.18, le méandre imbriqué  $[1](2, 2, [1](1, 1, 2, 1, 1))$  admet comme sous-méandre complet  $[1](1, 1, 2, 1, 1)$ , représenté en gras, qui est lui-même entrelacé avec le premier méandre imbriqué  $[1](3, 2, 2, 1, 1)$ . Dans le second SPD, le méandre imbriqué  $[1](1, 1, [1](2, 1, 1))$  admet comme sous-méandre complet  $[1](2, 1, 1)$ , représenté en gras, qui n'est pas entrelacé avec le premier méandre imbriqué  $[1](3, 2, 2, 1, 1)$ . Il faut caractériser cette différence. Les SPD de la figure 4.18 se voient attribuer respectivement les distributions d'index

$$\begin{aligned} & (\{1\} (3, 2, 2, 1, 1), \{1\} [1](2, 1, 1)) \quad \text{et} \\ & (\{1\} (3, 2, 2, 1, 1), \{1\} ([1](2, 1, 1))). \end{aligned}$$

Lorsque le second méandre imbriqué  $\{t\} (t_1, \dots, t_2)$  de l'entrelacement admet un sous-méandre imbriqué  $t_i = [s](s_1, \dots, s_p)$  dont un sous-méandre est également un sous-méandre du premier méandre imbriqué de l'entrelacement, alors  $[s]$  se place à côté du  $\{t\}$  comme illustré dans le SPD de gauche de la figure 4.19. Visuellement, si l'entrée  $[s]$  d'un méandre imbriqué est partagée par deux méandres imbriqués successifs d'entrées respectives  $\{t^1\}$  et  $\{t^2\}$  d'un entrelacement, alors  $[s]$  se place à côté du  $\{t^2\}$  car il a le même statut d'entrée partagée que  $\{t^1\}$  et  $\{t^2\}$ .

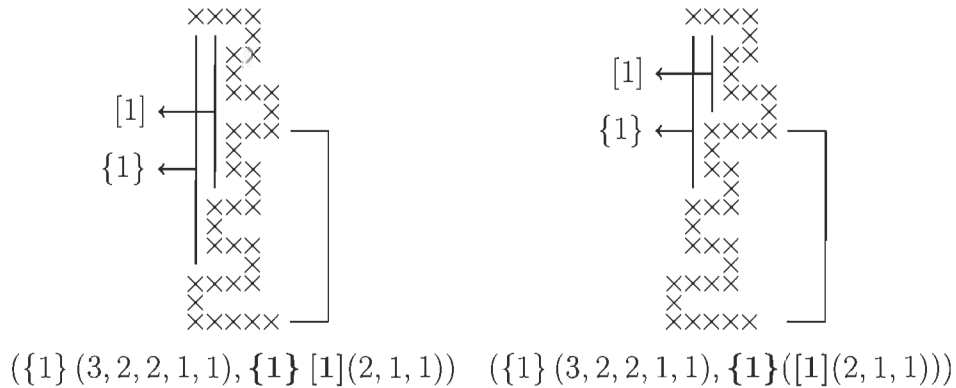


FIGURE 4.19 – Deux familles, deux distributions d'index

Nous avons tous les acteurs, il est temps de faire le point, de définir ce qui ne l'a pas encore été et qui doit l'être. Profitons-en pour rappeler les définitions précédentes.

**Définition 4.1.8.**

- Un *méandre simple* est un SPD dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne et dont les colonnes du rectangle circonscrit ont au maximum deux composantes connexes.
- Un *méandre imbriqué* est un SPD dont les deux cellules de degré 1 sont seules dans la même colonne et formé d'un nombre impair  $p \geq 3$  de méandres simples qui se suivent.
- Un *entrelacement de méandres imbriqués*, plus succinctement un *entrelacement*, est un SPD formé de  $m \geq 2$  méandres imbriqués dont chacun admet un sous-méandre commun avec son ou ses méandres imbriqués voisins.
- Le mot *méandre* désigne indifféremment un méandre simple, un méandre imbriqué ou un entrelacement.

Assurons-nous de couvrir tous les cas. Considérons les SPD de la figure 4.20. Il faut différencier un SPD admettant un seul entrelacement d'un SPD en admettant deux contigus.

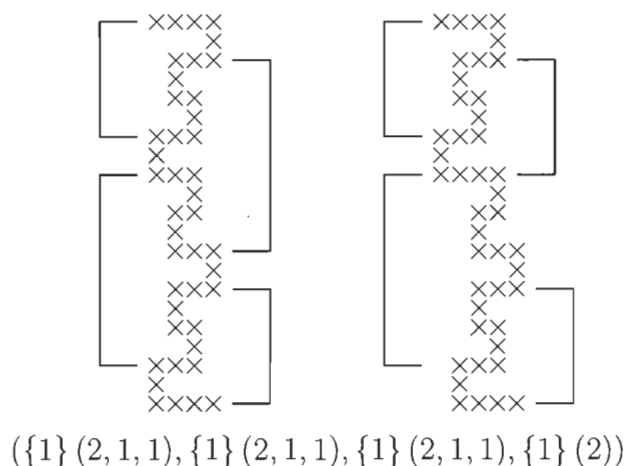
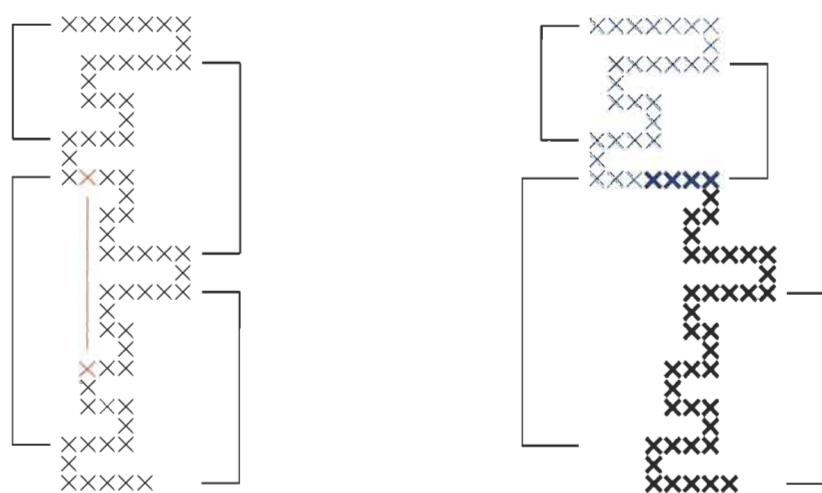


FIGURE 4.20 – Encore deux familles et un seul codage

Nous avons déjà utilisé les parenthèses, les crochets et les accolades. Il reste les chevrons,  $\langle \rangle$ , qui serviront à délimiter les divers entrelacements au sein d'un SPD. Nous n'en mettons pas lorsqu'il s'agit d'un seul entrelacement ou d'entrelacements séparés par des méandres simples et/ou imbriqués, ce qui permet une lecture non équivoque comme l'illustre la figure 4.21.



$$(\{1\} (3, 2, 2, 1, 1), \{1\} [1](4, 1, 1), \{3\} (3, 2, 2), \{1\} (5))$$

$$(\langle \{1\} (3, 2, 2, 1, 1), \{1\} [1](4, 1, 1) \rangle, \langle \{3\} (3, 2, 2), \{1\} (5) \rangle)$$

FIGURE 4.21 – Deux familles, deux distributions d'index

Comme pour les méandres imbriqués, généralisons le codage des entrelacements.

**Définition 4.1.9.** Un *entrelacement* est codé par une expression de la forme

$$(\{t^1\}(t_1^1, \dots, t_v^1), \{t^2\}[s^{2,1}] \dots [s^{2,w}](t_1^2, \dots, t_v^2), \dots, \{t^m\}[s^{m,1}] \dots [s^{m,w}](t_1^m, \dots, t_v^m))$$

avec les indices  $v \geq 1$  impairs et les indices  $w \geq 1$ . Les  $[s^{i,j}]$  sont appelés des *étages* de largeurs  $s^{i,j}$ . Leur position est comptée à partir de l'étage « zéro » qui est  $\{t^i\}$ .

Plusieurs entrelacements contigus sont séparés par des chevrons,

$$(\langle \{t^1\}(t_1^1, \dots, t_v^1), \dots, \{t^m\}(t_1^m, \dots, t_v^m) \rangle, \dots, \langle \{t^n\}(t_1^n, \dots, t_v^n), \dots, \{t^b\}(t_1^b, \dots, t_v^b) \rangle).$$

*Exemple.* À la figure 4.21, le premier étage (et le seul) du second méandre imbriqué est [1] pour les deux SPD. Il est mis en évidence en rouge dans celui de gauche. Ainsi,  $t^2 = 1$  et  $s^{2,w} = s_{2,1} = 1$ . Pour le SPD de gauche, nous avons

$$(\{t^1\} (t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1, t_5^1), \{t^2\} [s^{2,1}] (t_1^2, t_2^2, t_3^2), \{t^3\} (t_1^3, t_2^3, t_3^3), \{t^4\} (t_1^4))$$

$$(\{1\} (3, 2, 2, 1, 1), \{1\} [1] (4, 1, 1), \{3\} (3, 2, 2), \{1\} (5))$$

et pour le SPD de droite,

$$(\langle \{t^1\} (t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1, t_5^1), \{t^2\} [s^{2,1}] (t_1^2, t_2^2, t_3^2) \rangle, \langle \{t^3\} (t_1^3, t_2^3, t_3^3), \{t^4\} (t_1^4) \rangle)$$

$$(\langle \{1\} (3, 2, 2, 1, 1), \{1\} [1] (4, 1, 1) \rangle, \langle \{3\} (3, 2, 2), \{1\} (5) \rangle)$$



Nous avons introduit la notion d'escalier et avons également mis en évidence certaines familles admettant des escaliers de longueur arbitraire entre leurs méandres. Comment être certains d'avoir considéré tous les placements d'escaliers possibles ? Pour répondre à cette question, nous avons besoin des deux définitions suivantes.

**Définition 4.1.10.**

- Un *escalier interne* en position  $q$  est un escalier placé entre les deux méandres  $R_q$  et  $R_{q+1}$  avec  $1 \leq q \leq k - 1$ .
- Un *escalier externe* est un escalier placé au début, en position  $q = 0$ , ou à la fin, en position  $q = k$ , d'un SPD. Nous les appelons respectivement escalier initial et escalier final.

Notre classification en familles ne partitionne pas l'ensemble des SPD mais peu s'en faut comme l'indique la proposition suivante.

**Proposition 4.1.1.** Soit l'ensemble  $\mathcal{P}$  des paires de familles de SPD de distributions d'index  $(\rightsquigarrow, r_1, \dots, r_k)$  et  $(r_1, \dots, r_k, \rightsquigarrow)$ . Chaque paire admet une et une seule sous-famille commune aux deux familles :  $(r_1, \dots, r_k)$ . De plus, toute paire de familles n'appartenant pas à  $\mathcal{P}$  est formée de familles disjointes.

*Preuve.* Soit une paire de familles  $(F_1, F_2)$  appartenant à  $\mathcal{P}$ . La seule différence entre leurs structures est que l'une admet un escalier externe en position 0 et l'autre un escalier externe en position  $k$ . Elles sont schématisées à la figure 4.22 où le rectangle dégradé représente la structure commune aux deux familles. Le dégradé est là pour indiquer que nous ne passons pas de  $F_1$  à  $F_2$  par une réflexion par rapport à une droite horizontale. La seule sous-famille commune à  $F_1$  et  $F_2$  apparaît très clairement.

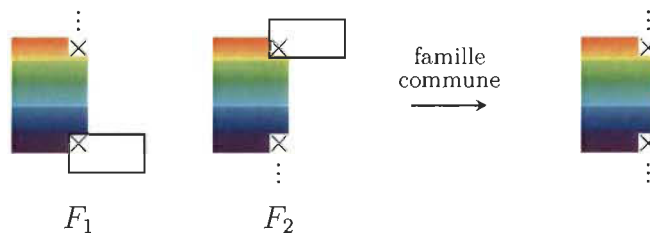


FIGURE 4.22 – La sous-famille commune à une paire de familles de  $\mathcal{P}$

Par l'absurde, supposons qu'il existe une paire de familles n'appartenant pas à  $\mathcal{P}$  telle que ces dernières admettent une sous-famille commune. Elles ont des structures  $(r_1, \dots, r_k)$  différentes sinon elles appartiendraient à  $\mathcal{P}$ . Par là nous entendons que leurs méandres ne

correspondent pas ou que les escaliers internes ne sont pas aux même emplacements. Il est évident qu'elles n'admettent aucune famille commune car cette dernière devrait soit admettre un méandre ayant deux index différents soit un emplacement où se cotoient la présence et l'absence d'un escalier interne.  $\square$

Observons que la classification ne considère que les familles dont le premier méandre est ouvert vers la droite. Les familles dont le premier méandre est ouvert vers la gauche sont obtenues par une réflexion par rapport à une droite verticale.

Revenons à la conjecture de la page 86 et essayons de construire une famille n'admettant aucune distribution d'index. En partant, elle ne peut contenir que des méandres simples car cela signifierait que nous avons trouvé une composition de  $r$  ne faisant pas partie de l'ensemble des compositions de  $r$ . Absurde. Il en est de même pour les familles contenant un méandre imbriqué et/ou un entrelacement. Les méandres sont construits à partir de l'ensemble des compositions d'un nombre, il ne peut en exister d'autres. Pour s'en convaincre, il suffit de voir un méandre imbriqué  $[s](s_1, \dots, s_p)$  d'index  $r$  comme la composition de  $r$  suivante :

$$r = (s, s_1, s_2, \dots, s_p).$$

Nous comptons donc bien toutes les familles contenant un méandre simple, un méandre imbriqué ou un entrelacement. Attention, nous ne disons pas que toutes les compositions codent une famille de SPD mais qu'à toute famille, nous pouvons faire correspondre une composition d'un nombre. Pour infirmer la conjecture, nous devrions créer une famille contenant une nouvelle structure qui se lierait d'amitié avec une composition que nous n'avions pas considérée jusqu'ici. Ne pas en avoir trouvé ne veut pas dire qu'il n'en existe pas.

## 4.2 Présentation de l'algorithme

Nous avons un codage mais comment l'utiliser ? L'algorithme ayant servi à créer les séries génératrices pages 114 à 117 n'est pas présenté dans le détail, ce serait fastidieux à lire. Accrochez-vous, c'est parti.

### Les SPD ne contenant que des méandres simples

Nous avons vu que tout SPD d'index  $r$  formé exclusivement de méandres simples et d'escaliers est codé par une composition de  $r$  dans laquelle nous insérons des  $\leftrightarrow$ . De plus, dans l'optique de vouloir également compter les SPD à symétries près, nous ne considérons pas les compositions obtenues d'une autre en inversant l'ordre des parts.

*Exemple.* Si nous retenons la composition  $(1, 2, 3, 4)$ , nous ne prenons pas  $(4, 3, 2, 1)$ .

Une fois ce tri opéré, nous éliminons les compositions ne pouvant être un codage de SPD.

**Proposition 4.2.1.** Une composition  $\rho = (r_1, \dots, r_k)$  de  $r$  code un SPD ne contenant que des méandres simples si et seulement si elle ne contient aucune suite de longueur impaire de parts consécutives telle que ses premier et dernier termes soient strictement plus grands que tous les autres.

*Preuve.*  $\Rightarrow$  Par l'absurde, supposons que  $\rho$  code un tel SPD et qu'elle contienne une suite de longueur impaire de parts consécutives telle que ses premier et dernier termes soient strictement plus grands que tous les autres. Cette suite peut être de longueur 3, 5, 7, ... Elle ne peut être de longueur 3 (figure 4.23) car en voulant dessiner le dernier méandre, nous n'avons pas le choix d'augmenter l'index du méandre précédent.

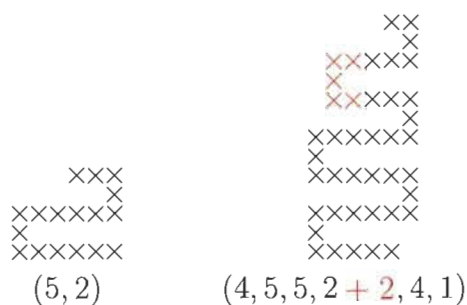


FIGURE 4.23 – Une suite de longueur 3 : problème

Si la suite est de longueur 5, nous savons déjà qu'elle ne peut contenir une sous-suite de longueur 3 dont les premier et troisième termes sont strictement plus grands que le second. Ainsi, les trois termes centraux de la suite de longueur 5 soit sont tous égaux soit l'un est plus grand que les deux autres, qui sont égaux (figure 4.24). Ce sont des structures à éliminer car en voulant dessiner le dernier méandre, nous débordons du méandre le précédant et faisons apparaître un méandre imbriqué (ce que nous ne voulons pas) étant donné que le premier méandre est plus grand que tous les autres (sauf peut-être le dernier). Donc pas de suite de longueur 5 avec les premier et dernier termes strictement plus grands que tous les autres.

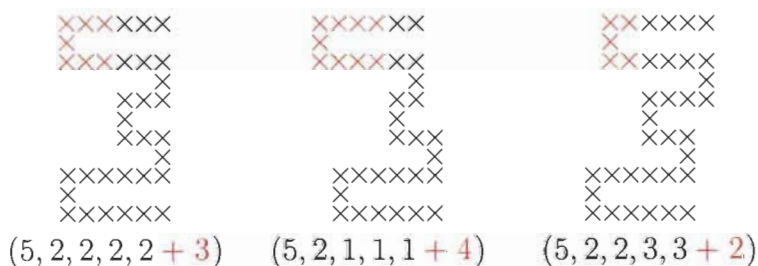


FIGURE 4.24 – Une suite de longueur 5 : problème

Si la suite est de longueur 7, nous savons déjà qu'elle ne peut contenir de sous-suite de longueur 3 ou 5 dont les premier et dernier termes sont strictement plus grands que les autres. Les structures restantes à notre disposition sont à éliminer car en voulant dessiner le dernier méandre, nous débordons du méandre le précédant et faisons apparaître un méandre imbriqué étant donné que le premier méandre est plus grand que tous les autres (sauf peut-être le dernier). Donc pas de suite de longueur 7 avec les premier et dernier termes strictement plus grands que tous les autres. Ce même argument élimine toutes les suites de longueur 9, 11, 13, ... Nous obtenons toujours un méandre imbriqué, ce qui est interdit car nous ne travaillons qu'avec des méandres simples dans cette section.

⇐ Supposons que la composition  $\rho$  n'admette pas de suite de longueur impaire de parts consécutives telle que ses premier et dernier termes soient strictement plus grands que tous les autres (appelons-la la suite interdite). La composition peut être décroissante (à gauche figure 4.25). Dans ce cas, elle code un SPD car aucun de ses méandres n'est plus large que le précédent. La composition peut être croissante (à droite figure 4.25). Elle code un SPD car il suffit de la lire de droite à gauche pour retrouver une composition décroissante, cas qui donne un SPD.

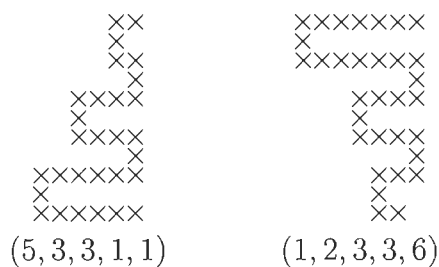


FIGURE 4.25 – SPD codé par une composition ne contenant que des suites croissantes ou décroissantes

La composition peut également être de longueur paire telle que ses premier et dernier termes soient strictement plus grands que tous les autres. Auquel cas,

$$r_1 > r_2 = r_3 \leq r_4 = r_5 \leq \dots \leq r_{n-2} = r_{n-1} < r_n$$

afin d'éviter toute sous-suite interdite. La sous-suite

$$r_2 = r_3 \leq r_4 = r_5 \leq \dots \leq r_{n-2} = r_{n-1}$$

est croissante et donne donc un SPD. Sachant qu'elle est de longueur paire, les méandres  $R_2$  et  $R_{n-1}$  ont des orientations opposées (l'un est ouvert vers la droite et l'autre vers la gauche). Ainsi, il est toujours possible de placer un méandre  $R_1$  avant  $R_2$  tel que  $r_1 > r_2$  et un méandre  $R_n$  après  $R_{n-1}$  tel que  $r_{n-1} < r_n$  (figure 4.26 avec  $R_1$  et  $R_n$  en gras).

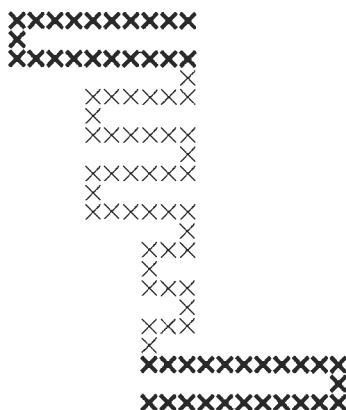


FIGURE 4.26 – La composition est de longueur paire et évite la suite interdite

La composition peut être telle que ses premier et dernier termes soient plus petits ou égaux à tous les autres. Auquel cas,

$$r_1, r_n \leq r_2, \dots, r_{n-1} \text{ et } r_2 \leq \dots \leq r_j \geq r_{j+1} \geq \dots \geq r_{n-1} \geq r_n$$

afin d'éviter toute sous-suite interdite. La sous-suite

$$r_2 \leq \dots \leq r_j \geq r_{j+1} \geq \dots \geq r_{n-1}$$

est croissante puis décroissante et code toujours un SPD. Il est clairement toujours possible de lui adjoindre un méandre avant et un méandre après tous deux d'index inférieurs à tous ceux des autres méandres (figure 4.27 avec  $R_1$  et  $R_n$  en gras).



FIGURE 4.27 – Un SPD codé par une composition croissante puis décroissante

Il existe encore une infinité de structures de compositions codant des SPD mais toutes sont basées sur les deux dernières structures présentées. En effet, les index des méandres d'un SPD forment une suite qui croît, puis décroît, puis croît, etc. Nous savons que toute partie « croissance - décroissance » code un SPD. Le tout est de remarquer que l'absence de la suite interdite assure d'obtenir un SPD en concaténant deux structures « croissance - décroissance ».

□

*Exemple.* Cherchons les compositions de  $r = 6$  et voyons celles qui sont des codages de familles de SPD. Générons déjà toutes les compositions de 6 en ordre lexicographique inverse (table 4.1).

(6)	(5, 1)	(4, 2)	(4, 1, 1)	(3, 3)	(3, 2, 1)
(3, 1, 2)	(3, 1, 1, 1)	(2, 4)	(2, 3, 1)	(2, 2, 2)	(2, 2, 1, 1)
(2, 1, 3)	(2, 1, 2, 1)	(2, 1, 1, 2)	(2, 1, 1, 1, 1)	(1, 5)	(1, 4, 1)
(1, 3, 2)	(1, 3, 1, 1)	(1, 2, 3)	(1, 2, 2, 1)	(1, 2, 1, 2)	(1, 2, 1, 1, 1)
(1, 1, 4)	(1, 1, 3, 1)	(1, 1, 2, 2)	(1, 1, 2, 1, 1)	(1, 1, 1, 3)	(1, 1, 1, 2, 1)
(1, 1, 1, 1, 2)	(1, 1, 1, 1, 1, 1)				

TABLE 4.1 – Table des compositions de 6

Pour chaque composition, rayons celle obtenue en inversant l'ordre de ses termes afin de ne garder que les familles de SPD à symétries près (en noir table 4.2) et ensuite celles admettant une sous-suite interdite (en bleu).

(6)	(5, 1)	(4, 2)	(4, 1, 1)	(3, 3)	(3, 2, 1)
<del>(3, 1, 2)</del>	(3, 1, 1, 1)	<del>(2, 4)</del>	(2, 3, 1)	(2, 2, 2)	(2, 2, 1, 1)
<del>(2, 1, 3)</del>	<del>(2, 1, 2, 1)</del>	(2, 1, 1, 2)	(2, 1, 1, 1, 1)	<del>(1, 5)</del>	(1, 4, 1)
<del>(1, 3, 2)</del>	(1, 3, 1, 1)	<del>(1, 2, 3)</del>	(1, 2, 2, 1)	<del>(1, 2, 1, 2)</del>	(1, 2, 1, 1, 1)
<del>(1, 1, 4)</del>	<del>(1, 1, 3, 1)</del>	<del>(1, 1, 2, 2)</del>	(1, 1, 2, 1, 1)	<del>(1, 1, 1, 3)</del>	<del>(1, 1, 1, 2, 1)</del>
<del>(1, 1, 1, 1, 2)</del>	(1, 1, 1, 1, 1, 1)				

TABLE 4.2 – Table des compositions de 6 codant un SPD

Représentons les SPD minimaux de chaque famille. Ils sont dans le même ordre que les compositions. Les piliers ne sont pas mis en évidence pour des raisons de clarté et d'espace.

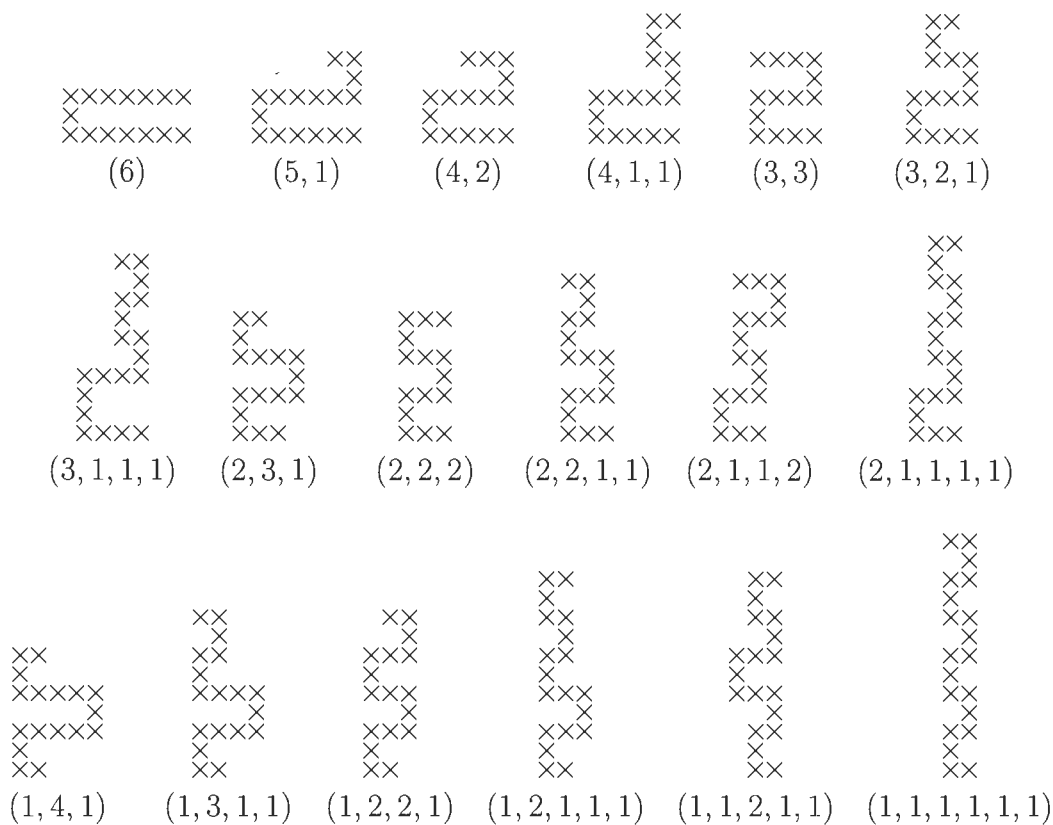


FIGURE 4.28 – Des SPD minimaux de chaque famille de SPD d'index 6 avec des méandres simples sans escalier

### Placement des escaliers internes

Nous avons vu qu'entre deux méandres peut parfois se placer un escalier. Il faut déterminer précisément ces endroits sans en omettre. Prenons les compositions du tableau 4.2, nous remarquons trois choses :

1. Si un méandre  $R_i$  est d'index strictement supérieur à celui du méandre  $R_{i+1}$ , il ne peut y avoir d'escalier après  $R_{i+1}$  (SPD de gauche à la figure 4.29).
2. Si un méandre  $R_i$  est d'index strictement supérieur à celui du méandre  $R_{i-1}$ , il ne peut y avoir d'escalier avant  $R_{i-1}$  (SPD du centre).
3. Si un escalier se trouve déjà entre les méandres  $R_i$  et  $R_{i+1}$ , il ne peut y avoir d'escalier entre les méandres  $R_{i+1}$  et  $R_{i+2}$  (SPD de droite).

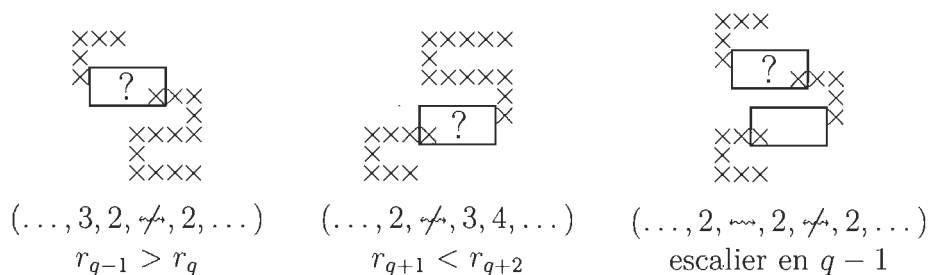


FIGURE 4.29 – Les cas restrictifs locaux pour les escaliers internes

Ces trois conditions ne suffisent pas car nous ne regardons que ce qu'il se passe près de la position où nous souhaitons placer un escalier. Rien n'assure que le reste du SPD se comporte aimablement. Élargissons les trois remarques à tout le SPD et disons que nous voulons placer un escalier entre les méandres  $R_q$  et  $R_{q+1}$  (l'escalier est en position  $q$ ).

- A S'il existe deux méandres consécutifs  $R_{q-1-2i}$  et  $R_{q-2i}$  tels que  $r_{q-1-2i} > r_{q-2i}, i \geq 0$ , alors il n'y a pas d'escalier en position  $q$  (SPD de gauche à la figure 4.30).
- B S'il existe deux méandres consécutifs  $R_{q-1-2i}$  et  $R_{q-2i}$  tels que  $r_{q+1+2i} < r_{q+2+2i}, i \geq 0$ , alors il n'y a pas d'escalier en position  $q$  (SPD du centre).
- C Si un escalier se trouve en position  $q - 1 - 2i$  ou  $q + 1 + 2i, i \geq 0$ , alors il n'y a pas d'escalier en position  $q$  (SPD de droite).

La condition A porte sur ce qu'il se passe avant la position qui nous intéresse, B gère l'après et C se charge des escaliers déjà présents en observant qu'ils doivent tous avoir la même orientation « droite  $\rightarrow$  gauche » ou « gauche  $\rightarrow$  droite » lorsque le SPD est lu de bas en haut. Pour chaque composition, il faut appliquer les trois conditions A, B et C à chaque couple de méandres  $(R_q, R_{q+1})$ . Ensuite, pour chaque distribution d'index ayant un escalier, il faut faire de même jusqu'à ce qu'aucune nouvelle distribution d'index ne voie le jour. Ce faisant, certaines ont la propriété d'être obtenues d'une autre par une inversion de ses termes. Il faut éliminer une des deux distributions comme au tableau 4.2. Par exemple, si  $(3, \rightsquigarrow, 3, 3)$  est retenue,  $(3, 3, \rightsquigarrow, 3)$  ne l'est pas.

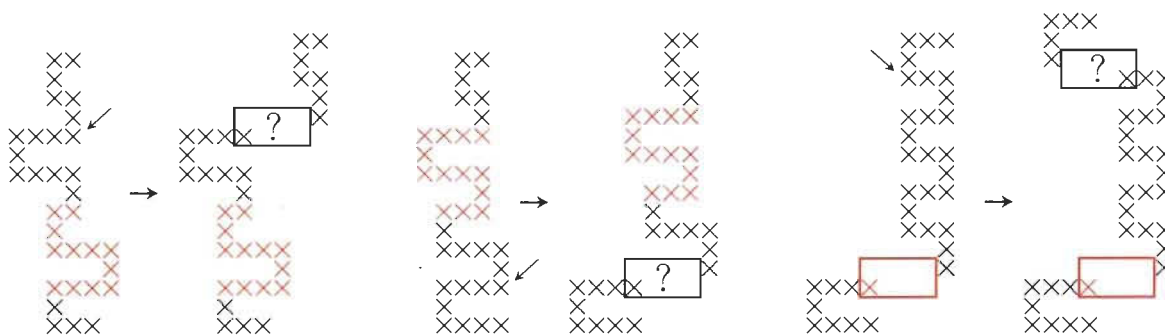


FIGURE 4.30 – Des escaliers ne pouvant s'insérer à cause des structures rouges



*Exemple.* Continuons avec les SPD d'index 6. Nous avons les compositions de la table 4.3.

(6)	(5, 1)	(4, 2)	(4, 1, 1)	(3, 3)	(3, 2, 1)
(3, 1, 1, 1)	(2, 3, 1)	(2, 2, 2)	(2, 2, 1, 1)	(2, 1, 1, 2)	(2, 1, 1, 1, 1)
(1, 4, 1)	(1, 3, 1, 1)	(1, 2, 2, 1)	(1, 2, 1, 1, 1)	(1, 1, 2, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1, 1)

TABLE 4.3 – Table des compositions de 6 codant un SPD sans escalier

S'y ajoutent les familles contenant au moins un escalier interne (table 4.4).

(5, $\rightsquigarrow$ , 1)	(4, $\rightsquigarrow$ , 2)	(4, $\rightsquigarrow$ , 1, 1)	(3, $\rightsquigarrow$ , 3)
(3, $\rightsquigarrow$ , 2, 1)	(3, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1)	(3, 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1)	(3, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1)
(2, $\rightsquigarrow$ , 3, 1)	(2, 3, $\rightsquigarrow$ , 1)	(2, $\rightsquigarrow$ , 2, 2)	(2, $\rightsquigarrow$ , 2, 1, 1)
(2, 2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1)	(2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 2)	(2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 2)	(2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1, 1)
(2, 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1)	(2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 4, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 3, 1, 1)
(1, 3, $\rightsquigarrow$ , 1, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 2, 2, 1)	(1, 2, $\rightsquigarrow$ , 2, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 2, 2, $\rightsquigarrow$ , 1)
(1, $\rightsquigarrow$ , 2, 1, 1, 1)	(1, 2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1)	(1, 2, 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1)	(1, 2, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1)
(1, 1, $\rightsquigarrow$ , 2, 1, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1)
(1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1)	(1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1)	(1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1, 1, $\rightsquigarrow$ , 1)

TABLE 4.4 – Table des distributions d'index de 6 munies de leurs escaliers internes

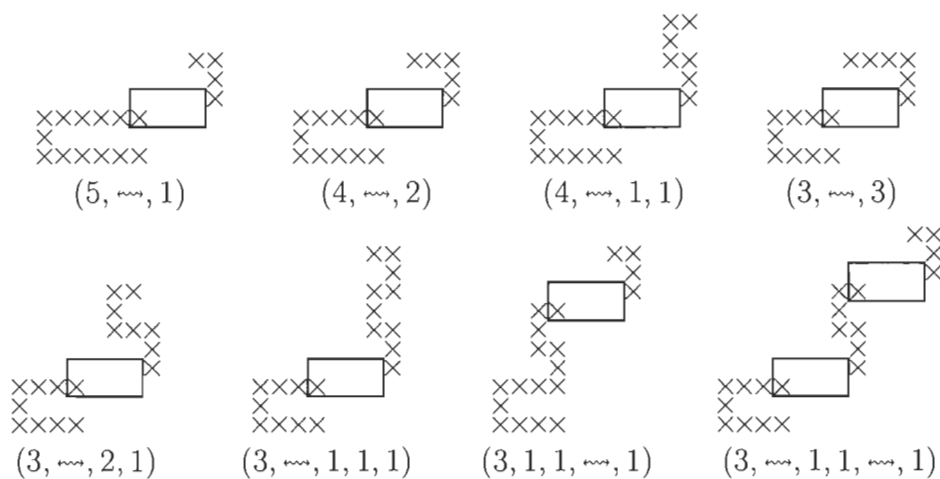


FIGURE 4.31 – Des familles d'index 6 avec des méandres simples et des escaliers internes

### Placement des escaliers externes

Pour chaque distribution d'index obtenue précédemment (avec ou sans escalier interne), nous vérifions la possibilité de lui adjoindre un escalier initial (avant le premier méandre) et/ou un escalier final (après le dernier méandre). Commençons par placer l'escalier initial. Il est clair qu'il doit avoir la même orientation que tout escalier interne présent dans le SPD (à gauche figure 4.32).

1. Une distribution d'index n'admet pas d'escalier initial si elle possède un escalier à une position impaire.

Cette condition n'est pas suffisante (à droite figure 4.32) car, comme pour les escaliers internes, la structure du SPD amène des contraintes. Reprenons la condition B (page 107) et adaptons-la pour l'escalier initial :

2. Il n'y a pas d'escalier initial s'il existe deux méandres  $R_{2i+1}$  et  $R_{2i+2}$  tels que  $r_{2i+1} < r_{2i+2}$ .

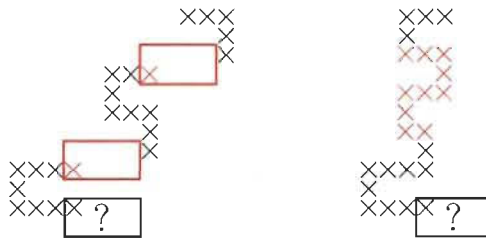


FIGURE 4.32 – Les deux structures empêchant le placement d'un escalier initial

Au tour de l'escalier final. Son orientation dépend du nombre de méandres du SPD. S'il est impair, l'escalier final est orienté « gauche  $\rightarrow$  droite », sinon il est orienté « droite  $\rightarrow$  gauche ». Ceci nous donne deux conditions à vérifier (à gauche figure 4.33) :

3. Lorsque le SPD admet un nombre pair de méandres, il n'y a pas d'escalier final si le SPD admet un escalier en position impaire.
4. Lorsque le SPD admet un nombre impair de méandres, il n'y a pas d'escalier final si le SPD admet un escalier en position paire.

L'entièreté du SPD vient avant l'escalier final, nous nous servons donc de la condition C page 107 et l'adaptions à nos besoins.

5. Il n'y a pas d'escalier final s'il existe deux méandres  $R_{k-1-2i}$  et  $R_{k-2i}$  tels que  $r_{k-1-2i} > r_{k-2i}$  (à droite figure 4.33).

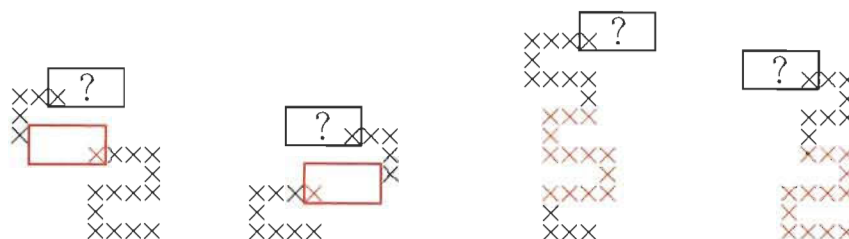


FIGURE 4.33 – Les structures empêchant le placement d'un escalier final

*Exemple.* Nous avons les distributions d'index donnant les SPD d'index 6 avec et sans escalier (tables 4.3 et 4.4). Pour chacune, nous déterminons si elles admettent un escalier initial et/ou final (table 4.5).

$(\rightsquigarrow, 6)$	$(\rightsquigarrow, 5, 1)$	$(5, \rightsquigarrow, 1)$	$(\rightsquigarrow, 4, 2)$
$(4, \rightsquigarrow, 2)$	$(\rightsquigarrow, 4, 1, 1)$	$(4, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(4, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow)$
$(\rightsquigarrow, 3, 3, \rightsquigarrow)$	$(3, \rightsquigarrow, 3)$	$(\rightsquigarrow, 3, 2, 1)$	$(3, \rightsquigarrow, 2, 1)$
$(\rightsquigarrow, 3, 1, 1, 1)$	$(3, \rightsquigarrow, 1, 1, 1)$	$(3, 1, 1, \rightsquigarrow, 1)$	$(3, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1)$
$(2, 3, 1)$	$(2, \rightsquigarrow, 3, 1)$	$(2, 3, \rightsquigarrow, 1)$	$(\rightsquigarrow, 2, 2, 2)$
$(2, \rightsquigarrow, 2, 2, \rightsquigarrow)$	$(\rightsquigarrow, 2, 2, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(2, \rightsquigarrow, 2, 1, 1)$	$(\rightsquigarrow, 2, 2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow)$
$(2, 1, 1, 2)$	$(2, \rightsquigarrow, 1, 1, 2)$	$(2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 2)$	$(\rightsquigarrow, 2, 1, 1, 1, 1)$
$(2, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(2, \rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(2, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow)$
$(1, 4, 1)$	$(1, \rightsquigarrow, 4, 1)$	$(1, 3, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(1, \rightsquigarrow, 3, 1, 1)$
$(1, 3, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(1, 2, 2, 1)$	$(1, \rightsquigarrow, 2, 2, 1)$	$(1, 2, \rightsquigarrow, 2, 1)$
$(1, \rightsquigarrow, 2, 2, \rightsquigarrow, 1)$	$(1, 2, 1, 1, 1)$	$(1, \rightsquigarrow, 2, 1, 1, 1)$	$(1, 2, \rightsquigarrow, 1, 1, 1)$
$(1, 2, 1, 1, \rightsquigarrow, 1)$	$(1, 2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1)$	$(\rightsquigarrow, 1, 1, 2, 1, 1)$	$(\rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 2, 1, 1)$
$(\rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, 1)$	$(\rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(1, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1)$
$(1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1)$	$(1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow, 1)$	$(\rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow)$	$(1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1)$

TABLE 4.5 – Table des familles d'index 6 munies de leurs escaliers internes et externes

### Les SPD contenant un méandre imbriqué et/ou un entrelacement

Déterminer les familles de SPD contenant un méandre imbriqué et/ou un entrelacement est difficile. Il faut partir des distributions d'index obtenues pour les SPD formés exclusivement de méandres simples et d'escaliers et substituer aux méandres simples des méandres imbriqués ou des entrelacements de même index. Un petit exemple sur la recherche des méandres imbriqués va nous convaincre du caractère pénible de la situation.

*Exemple.* Nous voulons obtenir tous les méandres imbriqués issus de la famille  $(6, 5, 5, 7)$  représentée à la figure 4.34.

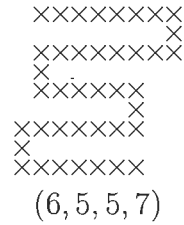


FIGURE 4.34 – Un SPD minimal de la famille (6, 5, 5, 7)

Chaque index génère une famille de méandres imbriqués possibles :

- Index 5 :  $\{[2](1, 1, 1), [1](2, 1, 1), [1](1, 1, 2)\}$ .
- Index 6 :  $\{[3](1, 1, 1), [2](2, 1, 1), [2](1, 1, 2), [1](3, 1, 1), [1](1, 1, 3), [1](1, 1, 1, 1, 1)\}$ .
- Index 7 :  $\{[4](1, 1, 1), [3](2, 1, 1), [3](1, 1, 2), [2](3, 1, 1), [2](1, 1, 3), [2](1, 1, 1, 1, 1), [1](4, 1, 1), [1](1, 1, 4), [1]([1](1, 1, 1), 1, 1), [1](1, 1, [1](1, 1, 1))], [1](2, 2, 2), [1](2, 1, 1, 1, 1), [1](1, 1, 2, 1, 1), [1](1, 1, 1, 1, 2)\}$ .

Ensuite, il faut déterminer toutes les combinaisons de substitutions qui donnent des distributions d'index codant un SPD. Il faut faire attention à la largeur car si nous remplaçons le premier 5 de (6, 5, 5, 7) par un des méandres imbriqués de même index, nous obtenons (6, [2](1, 1, 1), 5, 7), qui ne code aucun SPD (à gauche figure 4.35). Par contre, si nous remplaçons les deux 5 par ce même méandre imbriqué, nous obtenons une distribution d'index (à droite figure 4.35).

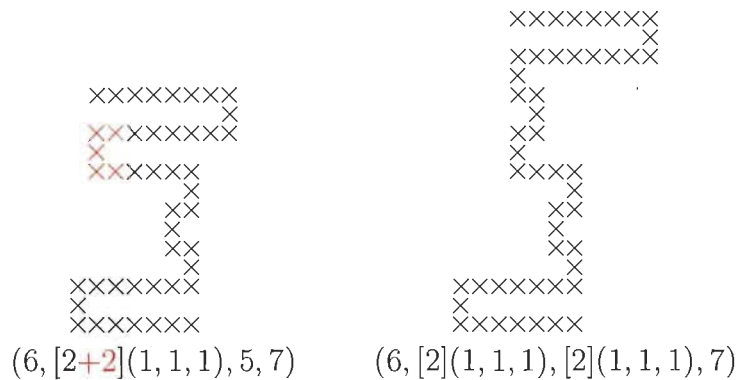


FIGURE 4.35 – Une substitution non valide et une autre valide

Imaginez devoir déterminer tous les cas que nous sommes susceptibles de rencontrer. Et encore n'y a-t-il ni escalier ni entrelacement dans notre exemple. Intéressons-nous aux séries génératrices de ces familles.

**Proposition 4.2.2.** Toute famille  $\mathcal{F}$  de SPD d'index  $r$  admet une série génératrice de la forme

$$\frac{x^a y^b}{(1-x-y)^c (1-y)^d}$$

où  $a$  et  $b$  codent respectivement la largeur et la hauteur des SPD minimaux de  $\mathcal{F}$ ,  $c$  code le nombre d'escaliers et  $d$  code le nombre de piliers de hauteur arbitraire.

*Preuve.* Il suffit de remarquer qu'un méandre  $R_i$  est une succession de piliers tels que deux consécutifs ne sont pas dans la même colonne respectant les contraintes données par la distribution d'index du point de vue de la largeur et de l'index (figure 4.36). Si deux piliers sont consécutifs, alors la dernière cellule du premier et la première cellule du second sont adjacentes sur la même ligne (forment un doublon).

Nous savons que la série génératrice des piliers est  $\frac{1}{1-y}$  donc, par le principe du produit, la série génératrice d'un méandre est rationnelle de la forme

$$\frac{x^a y^b}{(1-y)^d}$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement la largeur et la hauteur d'un méandre minimal de la distribution d'index et  $d$  est le nombre de piliers constituant le méandre.

Or, un SPD est un empilement de méandres éventuellement séparés par des escaliers, donc la série génératrice d'un SPD est également rationnelle et est de la forme

$$\frac{x^a y^b}{(1-x-y)^c (1-y)^d}$$

où  $a$  et  $b$  sont respectivement la largeur et la hauteur d'un SPD minimal de la distribution d'index,  $c$  le nombre d'escaliers et  $d$  le nombre de piliers.  $\square$

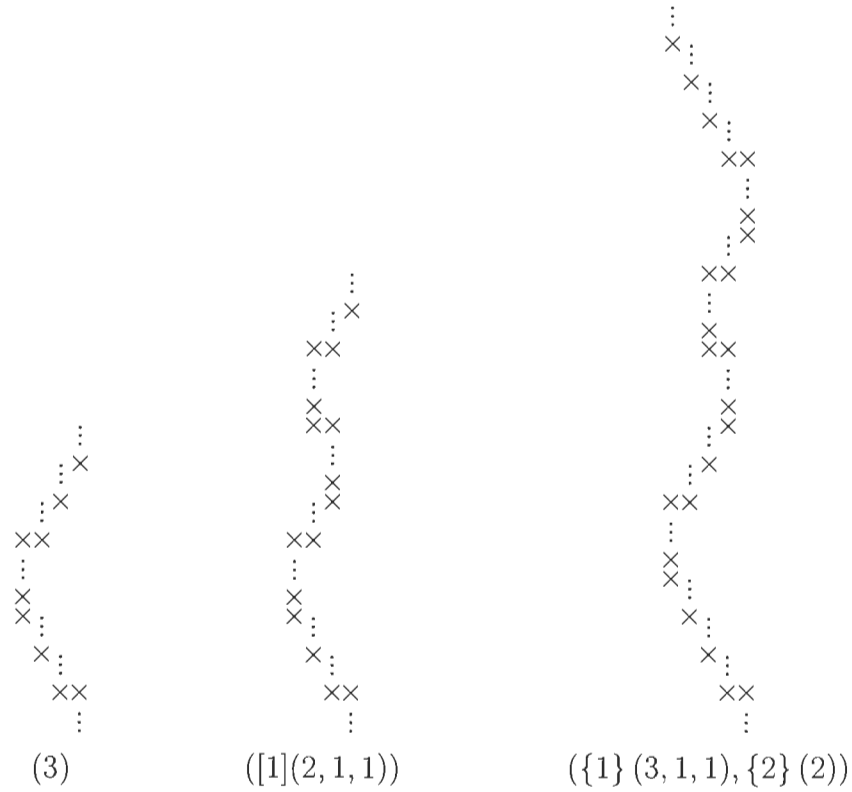


FIGURE 4.36 – Une famille de chaque type de méandre

Remarquons au passage que

$$a + r = c + d$$

qui affirme que la somme de la largeur d'un SPD et de son index est égale à son nombre de positions de piliers et d'escaliers. Le nombre  $c$  est aisé à déterminer, il suffit de compter le nombre de symboles  $\rightsquigarrow$  dans la distribution d'index, de même que le nombre  $b$  qui est le nombre de méandres simples multiplié par deux plus un. Les nombres  $a$  et  $d$  sont plus difficiles à obtenir à partir de la distribution d'index. Une méthode relativement rapide consiste à dessiner un méandre minimal de la famille et de déterminer sa largeur  $a$ . Lorsque nous connaissons  $a, r$  et  $c$ , nous pouvons déterminer  $d$ .

*Exemple.* La distribution d'index  $(\rightsquigarrow, \{1\} (3, 1, 1), \{2\} (2))$  a comme série génératrice

$$\frac{x^5 y^9}{(1 - x - y)(1 - y)^{14}}$$

car nous y voyons un symbole  $\rightsquigarrow$ , quatre méandres simples, (3), (1), (1) et (2) et un SPD minimal est donné à la figure 4.37, qui est de largeur cinq. Nous en déduisons que  $d = 14$ . Nous pouvons vérifier avec la figure 4.36 en considérant que le premier pilier est un escalier.



FIGURE 4.37 – Un SPD minimal de la famille de distribution d'index  $(\rightsquigarrow, \{1\} (3, 1, 1), \{2\} (2))$

Les coefficients multiplicatifs et les termes soustraits apparaissant dans les séries génératrices qui suivent sont dus au principe d'inclusion-exclusion pour les réflexions par rapport à un axe vertical et à un axe horizontal.

La série génératrice des SPD d'index 1 est :

$$\mathcal{F} : (\rightsquigarrow, 1) \quad 2 \left( \frac{2x^2y^3}{(1-x-y)(1-y)^2} - \frac{x^2y^3}{(1-y)^3} \right)$$

Les SPD d'index 2 se partitionnent en 3 familles :

$$\mathcal{F}_1 : (\rightsquigarrow, 2) \quad \dots \quad 2 \left( \frac{2x^3y^3}{(1-x-y)(1-y)^4} - \frac{x^3y^3}{(1-y)^5} \right)$$

$$\mathcal{F}_2 : (\rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) \quad \frac{2x^2y^5}{(1-x-y)^2(1-y)^2}$$

$$\mathcal{F}_3 : (1, \rightsquigarrow, 1) \quad \dots \quad \frac{2x^3y^5}{(1-x-y)(1-y)^4}$$

Les SPD d'index 3 se partitionnent en 5 familles :

$$\mathcal{F}_1 : (\rightsquigarrow, 3) \quad \dots \quad 2 \left( \frac{2x^4y^3}{(1-x-y)(1-y)^6} - \frac{x^4y^3}{(1-y)^7} \right)$$

$$\mathcal{F}_2 : (\rightsquigarrow, 2, 1) \quad \dots \quad \frac{4x^3y^5}{(1-x-y)(1-y)^5}$$

$$\mathcal{F}_3 : (2, \rightsquigarrow, 1) \quad \dots \quad \frac{4x^4y^5}{(1-x-y)(1-y)^6}$$

$$\mathcal{F}_4 : (\rightsquigarrow, 1, 1, 1) \quad \dots \quad 2 \left( \frac{2x^2y^7}{(1-x-y)(1-y)^4} - \frac{x^2y^7}{(1-y)^5} \right)$$

$$\mathcal{F}_5 : (1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) \quad \frac{4x^3y^7}{(1-x-y)^2(1-y)^4}$$

Voyons comment nous avons obtenu les séries génératrices des 5 familles de SPD d'index 3. Tout d'abord, voici des SPD minimaux pour chacune des familles, dans l'ordre, afin de pouvoir vérifier (figure 4.38). Les escaliers internes sont représentés afin de mettre l'emphase sur leur présence. Pour avoir les minimaux, il suffit de les effacer.

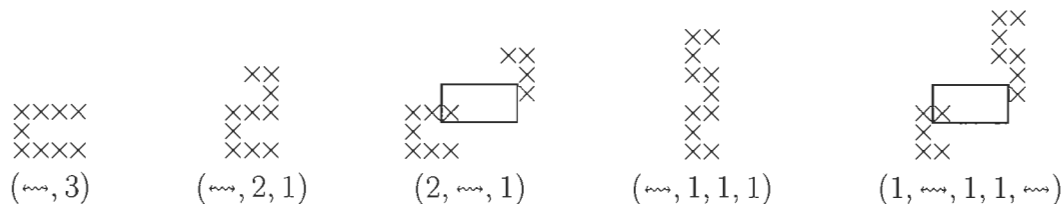


FIGURE 4.38 – Des SPD minimaux des familles d'index 3

Pour déterminer  $a$ , nous utilisons la figure 4.38. Les valeurs de  $b$  et  $c$  sont trouvées à l'aide des distributions d'index respectivement en additionnant un au double du nombre de méandres simples et en comptant le nombre de symboles  $\curvearrowright$ . Pour déterminer  $d$ , nous nous servons de la relation  $a + r = c + d$ . Ici,  $r = 3$ .

Famille	a	b	c	d
$(\curvearrowright, 3)$	4	3	1	6
$(\curvearrowright, 2, 1)$	3	5	1	5
$(2, \curvearrowright, 1)$	4	5	1	6
$(\curvearrowright, 1, 1, 1)$	2	7	1	4
$(1, \curvearrowright, 1, 1, \curvearrowright)$	3	7	2	4

TABLE 4.9 – Les valeurs de  $a, b, c, d$  dans les séries génératrices

Les soustractions et les coefficients multiplicatifs sont obtenus par le principe d'inclusion-exclusion.

Les SPD d'index 4 se partitionnent en 15 familles dont certaines sont regroupées :

$$\mathcal{F}_1 : (\curvearrowright, 4) \dots\dots\dots 2 \left( \frac{2x^5y^3}{(1-x-y)(1-y)^8} - \frac{x^5y^3}{(1-y)^9} \right)$$

$$\mathcal{F}_2 : (\curvearrowright, 3, 1), (2, \curvearrowright, 2) \dots\dots\dots \frac{6x^4y^5}{(1-x-y)(1-y)^7}$$

$$\mathcal{F}_3 : (3, \curvearrowright, 1) \dots\dots\dots \frac{4x^5y^5}{(1-x-y)(1-y)^8}$$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_4 : (\rightsquigarrow, 2, 2, \rightsquigarrow) & \dots\dots\dots \frac{2x^3y^5}{(1-x-y)^2(1-y)^5} \\
 \mathcal{F}_5 : (\rightsquigarrow, 2, 1, 1), (2, 1, 1, \rightsquigarrow), & 4 \left( \frac{3x^3y^7}{(1-x-y)(1-y)^6} - \frac{x^3y^7}{(1-y)^7} \right) \\
 (1, 2, 1), (\rightsquigarrow, [1](1, 1, 1)) & \\
 \mathcal{F}_6 : (1, \rightsquigarrow, 2, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^4y^7}{(1-x-y)(1-y)^7} \\
 \mathcal{F}_7 : (2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) & \dots\dots\dots \frac{4x^4y^7}{(1-x-y)^2(1-y)^6} \\
 \mathcal{F}_8 : (\rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow) & \dots\dots\dots \frac{2x^2y^9}{(1-x-y)^2(1-y)^4} \\
 \mathcal{F}_9 : (1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^3y^9}{(1-x-y)(1-y)^6} \\
 \mathcal{F}_{10} : (\rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) & \dots\dots \frac{2x^3y^9}{(1-x-y)^3(1-y)^4} \\
 \mathcal{F}_{11} : (1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1) & \dots\dots\dots \frac{2x^4y^9}{(1-x-y)^2(1-y)^6}
 \end{aligned}$$

Les SPD d'index 5 se partitionnent en 29 familles dont certaines sont regroupées :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1 : (\rightsquigarrow, 5) & \dots\dots\dots 2 \left( \frac{2x^6y^3}{(1-x-y)(1-y)^{10}} - \frac{x^6y^3}{(1-y)^{11}} \right) \\
 \mathcal{F}_2 : (\rightsquigarrow, 4, 1), (3, \rightsquigarrow, 2) & \dots\dots\dots \frac{8x^5y^5}{(1-x-y)(1-y)^9} \\
 \mathcal{F}_3 : (4, \rightsquigarrow, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^6y^5}{(1-x-y)(1-y)^{10}} \\
 \mathcal{F}_4 : (\rightsquigarrow, 3, 2) & \dots\dots\dots \frac{4x^4y^5}{(1-x-y)(1-y)^8} \\
 \mathcal{F}_5 : (\rightsquigarrow, 3, 1, 1), (3, 1, 1, \rightsquigarrow), (1, 3, 1), & 6 \left( \frac{4x^4y^7}{(1-x-y)(1-y)^8} - \frac{x^4y^7}{(1-y)^9} \right) \\
 (2, \rightsquigarrow, 2, 1), (\rightsquigarrow, [1](2, 1, 1)), & \\
 ([1](2, 1, 1), \rightsquigarrow), (\rightsquigarrow, [2](1, 1, 1)) & \\
 \mathcal{F}_6 : (1, \rightsquigarrow, 3, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^5y^7}{(1-x-y)(1-y)^9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_7 : (3, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) & \dots\dots\dots \frac{4x^5y^7}{(1-x-y)^2(1-y)^8} \\
 \mathcal{F}_8 : (\rightsquigarrow, 2, 2, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^3y^7}{(1-x-y)(1-y)^7} \\
 \mathcal{F}_9 : (\rightsquigarrow, 2, 2, \rightsquigarrow, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^4y^7}{(1-x-y)^2(1-y)^7} \\
 \mathcal{F}_{10} : (\rightsquigarrow, 2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1, \rightsquigarrow), & \dots\dots \frac{8x^3y^9}{(1-x-y)(1-y)^7} \\
 & (1, [1](1, 1, 1), \rightsquigarrow) \\
 \mathcal{F}_{11} : (2, \rightsquigarrow, 1, 1, 1), (2, 1, 1, \rightsquigarrow, 1), & \frac{16x^4y^9}{(1-x-y)(1-y)^8} \\
 & (1, \rightsquigarrow, 2, 1, 1), (1, \rightsquigarrow, [1](1, 1, 1)) \\
 \mathcal{F}_{12} : (1, 2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) & \dots\dots\dots \frac{4x^4y^9}{(1-x-y)^2(1-y)^7} \\
 \mathcal{F}_{13} : (2, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1) & \dots\dots\dots \frac{4x^5y^9}{(1-x-y)^2(1-y)^8} \\
 \mathcal{F}_{14} : (\rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, 1) & \dots\dots\dots \frac{2x^2y^{11}}{(1-x-y)(1-y)^6} \\
 \mathcal{F}_{15} : (1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1, 1, \rightsquigarrow), & \dots\dots\dots \frac{8x^3y^{11}}{(1-x-y)^2(1-y)^7} \\
 & (\rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, 1) \\
 \mathcal{F}_{16} : (1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow, 1, 1, \rightsquigarrow) & \dots\dots\dots \frac{4x^4y^9}{(1-x-y)^3(1-y)^6}
 \end{aligned}$$

## Chapitre 5

# Combinatoire des chemins auto-évitants

*Je hais la prudence, elle ne vous amène à rien.* – Jacques Brel

L'idée de comparer les serpents et les chemins a été suggérée par Alain Goupil. La comparaison effective est issue de mon travail. Dans ce chapitre, nous comparons les serpents et les chemins auto-évitants. Ces derniers sont traités dans l'article de Mireille Bousquet-Mélou, *Families of prudent self-avoiding walks* [6]. Nous développons en particulier les chemins partiellement dirigés d'index 0 à 3 à des fins de comparaisons avec les SPD explorés au chapitre 3. Cette comparaison, bien que peu ardue, n'existe pas à notre connaissance dans la littérature mathématique.

### 5.1 Les chemins partiellement dirigés

**Définition 5.1.1.** Un *chemin auto-évitant*, abrégé SAW pour self-avoiding walk, est un chemin dans un treillis ne passant pas deux fois par le même sommet (figure 5.1).

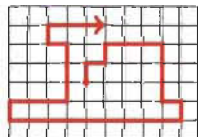


FIGURE 5.1 – Un chemin auto-évitant dans un treillis carré

Étant donné que les polyominos avec lesquels nous travaillons sont à cellules carrées, nous

nous cantonnons au treillis carré et aux pas nord (N), sud (S), est (E) et ouest (O) pour les chemins.

**Définition 5.1.2.** Un *chemin partiellement dirigé* (CPD) vers le nord est un chemin auto-évitant formé exclusivement de pas N, E et O.

La définition des CPD ressemble fort à celle des SPD et pour cause, l'appellation SPD est issue de celle de CPD, antérieure de quelques années. Mais existe-t-il une bijection entre l'ensemble des SPD et celui des CPD ?



FIGURE 5.2 – Un SPD et le CPD correspondant

Comme l'illustre la figure 5.2, à tout SPD donné correspond un CPD. L'opération inverse est-elle tout aussi agréable ? Vérifions avec le chemin de la figure 5.3.

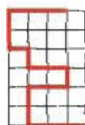


FIGURE 5.3 – Un chemin partiellement dirigé

Il débute avec trois pas O, suivis de deux pas N, de deux pas E et un pas N. Jusqu'ici, pas de problème. Ensuite viennent deux pas O... nous sommes bloqués car si nous procédons ainsi pour dessiner un polyomino, nous n'avons pas un SPD (figure 5.4 avec en rouge les pas non-autorisés et en turquoise le CPD). Pour faire un demi-tour dans un SPD, il faut au moins deux pas N consécutifs, comme nous l'avons vu au chapitre 1.



FIGURE 5.4 – Le « SPD » correspondant au chemin de la figure 5.3

C'est raté pour une bijection directe utilisant les pas à effectuer. Pourtant, nous sommes tentés de dire qu'il doit en exister une. Partitionnons les chemins en groupes de pas dans une même direction.

*Exemple.* Le chemin de la figure 5.3 est composé de neuf groupes de pas : O, N, E, N, O, N, O, N, E. Bien sûr, pour le dessiner, il faut également la donnée du nombre de pas dans chaque groupe.

Afin de lier un CPD à un et un seul SPD, nous ajoutons un pas dans chaque groupe de pas N entouré d'un groupe de pas E et d'un groupe de pas O. La figure 5.5 reprend le chemin de la figure 5.3 et représente le SPD lui correspondant à l'aide de notre transformation avec en vert les pas ajoutés. L'opération inverse consiste à prendre le SPD et lui enlever un pas N dans chaque groupe de pas N entouré d'un groupe de pas E et d'un groupe de pas O.

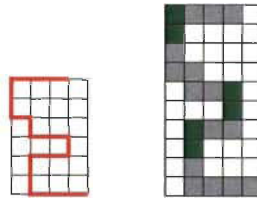


FIGURE 5.5 – La bijection  $f : CPD(\ell) \rightarrow SPD(\ell + 1)$

**Proposition 5.1.1.** Il existe une bijection  $f : CPD(\ell) \rightarrow SPD(\ell + 1)$  de l'ensemble des CPD vers le nord de largeur  $\ell$  vers l'ensemble des SPD vers le nord de largeur  $\ell + 1$ .

*Preuve.* Soit un SPD. Le CPD correspondant est obtenu en lui enlevant un pas N dans chaque groupe de pas N entouré d'un groupe de pas E et d'un groupe de pas O. Donc  $f$  est surjective.

Soit un CPD. Le SPD correspondant est obtenu en lui ajoutant un pas N dans chaque groupe de pas N entouré d'un groupe de pas E et d'un groupe de pas O. La construction assure que des CPD distincts sont envoyés par  $f$  sur des SPD distincts, donc  $f$  est injective et bijective.  $\square$

Nous pouvons également donner une information sur la hauteur.

**Corollaire 5.1.1.** Soit  $u$  le nombre de demi-tours d'un CPD  $C$  de hauteur  $h$  – c'est-à-dire le nombre de groupes de pas N entourés d'un groupe de pas E et d'un groupe de pas O. Le SPD correspondant  $f(C)$  est de hauteur  $h + 1 + u$ .

*Preuve.* Soit un CPD admettant  $u$  demi-tours. Par la proposition 5.1.1, le SPD correspondant est obtenu en ajoutant un pas N dans chaque demi-tour. Nous ajoutons donc  $u$  pas N, ce qui a pour conséquence d'augmenter la hauteur du SPD de  $u$ .  $\square$

À la lumière de la proposition 5.1.1, nous pouvons affiner la bijection  $f$  présentée à la proposition 5.1.1 en donnant des bornes pour la hauteur des SPD et des CPD.

**Proposition 5.1.2.** Il existe une bijection  $g : CPD(\ell, h) \rightarrow SPD(\ell + 1, \leq 2h + 1)$  de l'ensemble des CPD vers le nord de largeur  $\ell$  et de hauteur  $h$  vers l'ensemble des SPD vers le nord de largeur  $\ell + 1$  et de hauteur au plus  $2h + 1$ .

*Preuve.* Le nombre maximum de demi-tours qu'un CPD de hauteur  $h$  peut contenir est  $h$  car un demi-tour dans un CPD est de hauteur au moins un. Nous pouvons donc ajouter au maximum  $h$  pas N au SPD correspondant, ce qui se traduit par une augmentation de  $h + 1$  de sa hauteur.  $\square$

Nous connaissons la série génératrice des SPD (équation (1.10) page 18) et celle des CPD de longueur  $n$  :

$$SPD(x) = \frac{x^5 + x^3 + x^2 - 2x + 1}{(1-x)(1-2x-x^3)}, \quad CPD(x) = \frac{1+x}{1-2x-x^2}.$$

Une comparaison de ces séries génératrices apparaît peu pertinente car des CPD de même longueur peuvent être en lien avec des SPD de longueurs différentes (figure 5.6).



FIGURE 5.6 – Des SPD de différentes longueurs donnant des CPD de même longueur

## 5.2 Serpents et chemins auto-évitant d'index 0

Nous avons déterminé la série génératrice à deux variables des serpents d'index 0 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  :

$$S_{min}(x, y) = \sum_{b,h} s_{min}(b, h) x^b y^h = \frac{2xy}{1-x-y} - \frac{xy}{1-x} - \frac{xy}{1-y} + xy + 1$$

Les serpents minimaux sont des SPD, ils doivent donc chacun avoir un CPD correspondant. La définition de l'index d'un chemin auto-évitant est équivalente à celle de l'index d'un polyomino vue au chapitre 1.

**Définition 5.2.1.** L'index d'un chemin auto-évitant inscrit dans un rectangle  $b \times h$  est le nombre d'arêtes qu'il faut ajouter à un chemin auto-évitant de longueur minimale inscrit dans ce même rectangle afin de l'obtenir.

**Proposition 5.2.1.** La série génératrice des chemins auto-évitant d'index 0 inscrits dans un rectangle  $b \times h$  est

$$C_{min}(x, y) = \frac{S_{min}(x, y)}{xy} - \frac{1}{xy} = \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-y} + 1.$$

*Preuve.* La division de  $S_{min}(x, y)$  par  $xy$  est due à la vision que nous avons de la longueur d'un chemin. Nous ne comptons pas le nombre de sommets du chemin mais son nombre d'arêtes, qui est également son nombre de pas. Pour un SPD minimal, la largeur est égale au nombre de pas E plus un et la hauteur au nombre de pas N plus un. Ainsi, en divisant par  $xy$ , nous ne comptons que le nombre de pas du SPD, ce qui revient à compter le nombre de CPD. Il faut soustraire  $\frac{1}{xy}$  car comme l'indique la bijection, le SPD vide n'a pas d'homologue chez les CPD. En effet, une largeur négative n'a pas de sens.  $\square$

Bien sûr, si nous considérons les chemins du point de vue des sommets plutôt que des arêtes, il y aurait égalité entre les deux séries génératrices mais ce n'est pas ainsi que la longueur d'un chemin est comptée dans la littérature. Nous savons qu'un serpent d'index 0 inscrit dans un rectangle  $b \times h$  contient  $b + h - 2$  pas et que sa longueur est  $b + h - 1$ , ce qui nous permet de conclure qu'il y en a  $2^{\binom{b+h-2}{b-1}}$  lorsque  $b, h \geq 2$ . Les chemins étant de longueur  $b + h$ , qui est également leur nombre de pas, il y en a  $2^{\binom{b+h}{b}}$  lorsque  $b, h \geq 1$ .

### 5.3 Serpents et chemins auto-évitant d'index 1

Nous connaissons la série génératrice des serpents d'index 1 :

$$S_{min+1}(x, y) = \frac{2x^3y^2}{(1-x)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-x} \right) + \frac{2x^2y^3}{(1-y)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-y} \right). \quad (5.1)$$

Traisons la partie dans laquelle les bancs sont verticaux :

$$\frac{2x^2y^3}{(1-y)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-y} \right).$$

Nous savons que les CPD correspondants, par la bijection  $g$ , ont des largeurs d'une unité plus petite que celles des SPD. Nous pouvons également déterminer leurs hauteurs avec précision car nous savons que les SPD d'index 1 ne sont constitués que d'un seul banc. Par la proposition 5.1.1, le CPD correspondant d'un SPD d'index 1 admettant un banc vertical de hauteur  $h$  est de hauteur  $h - 2$ . En termes de séries génératrices, cela se traduit par une division par  $xy^2$ , ce qui donne

$$\frac{2xy}{(1-y)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-y} \right).$$

Et si le banc est horizontal? La bijection  $g$  ne prend pas ce cas en compte mais il suffit de remplacer les occurrences du mot nord par le mot est ou ouest. Choisissons le mot est pour fixer les idées. Nous avons la proposition suivante (qui reprend la proposition 5.1.2).

**Proposition 5.3.1.** Il existe une bijection  $g_N : CPD(\ell, h) \rightarrow SPD(\ell + 1, \leq 2h + 1)$  de l'ensemble des CPD vers le nord de largeur  $\ell$  et de hauteur  $h$  vers l'ensemble des SPD vers le nord de largeur  $\ell + 1$  et de hauteur au plus  $2h + 1$ .

Il existe une bijection  $g_E : CPD(\ell, h) \rightarrow SPD(\leq 2\ell + 1, h + 1)$  de l'ensemble des CPD vers l'est de largeur  $\ell$  et de hauteur  $h$  vers l'ensemble des SPD vers l'est de largeur  $\ell + 1$  et de hauteur au plus  $2\ell + 1$ .

Nous pourrions également définir les bijections pour les CPD vers l'ouest et vers le sud mais ce n'est pas nécessaire grâce aux considérations de symétrie. Nous choisissons de lire nos chemins et serpents soit de bas en haut soit de gauche à droite selon leur orientation. Pour les CPD d'index 1 admettant un banc horizontal, nous devons diviser la première partie de l'équation (5.1) par  $x^2y$ , ce qui donne

$$\frac{2xy}{(1-x)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-x} \right).$$

**Proposition 5.3.2.** La série génératrices des CPD d'index 1 est

$$C_{min+1}(x, y) = \frac{2xy}{(1-x)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-x} \right) + \frac{2xy}{(1-y)^2} \left( \frac{2}{1-x-y} - \frac{1}{1-y} \right).$$

$b \setminus h$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	10	16	24	34	46	60	76
2	10	32	60	104	168	256	372	520
3	16	60	120	224	392	648	1020	1540
4	24	104	224	448	840	1488	2508	4048
5	34	168	392	840	1680	3168	5676	9724
6	46	256	648	1488	3168	6336	12012	21736
7	60	372	1020	2508	5676	12012	24024	45760
8	76	520	1540	4048	9724	21736	45760	91520

TABLE 5.1 – Nombre de chemins auto-évitant d'index 1 inscrits dans un rectangle  $b \times h$



## 5.4 Serpents et chemins auto-évitants d'index 2

Jusqu'ici, nous n'avions affaire qu'à des SPD et des CPD. Avec l'index 2 apparaissent des chemins auto-évitants et des serpents non partiellement dirigés (ceux admettant la structure de gaufrier vue au chapitre 3).

### CPD d'index 2

Commençons par nous intéresser aux structures partiellement dirigées, c'est-à-dire celles contenant un petit serpent, un grand serpent ou un 2-creux.

**Proposition 5.4.1.** Les séries génératrices des CPD admettant un petit serpent, un grand serpent ou un 2-creux sont respectivement

$$C_{min+2}^{pserpentin}(x, y) = \frac{2}{(1-x-y)^2} \left( \frac{x^2y}{(1-x)^2} + \frac{xy^2}{(1-y)^2} \right),$$

$$C_{min+2}^{Gserpentin}(x, y) = \frac{2}{1-x-y} \left( \frac{x^2y^2}{(1-x)^4} + \frac{x^2y^2}{(1-y)^4} \right),$$

$$C_{min+2}^{2-creux}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^4} \left( \frac{2xy^2}{1-x-y} - \frac{xy^2}{1-x} \right) + \frac{2}{(1-y)^4} \left( \frac{2x^2y}{1-x-y} - \frac{x^2y}{1-y} \right).$$

*Preuve.* Nous avons les séries génératrices correspondantes pour les SPD :

$$S_{min+2}^{pserpentin}(x, y) = \frac{2}{(1-x-y)^2} \left( \frac{x^5y^2}{(1-x)^2} + \frac{x^2y^5}{(1-y)^2} \right),$$

$$S_{min+2}^{Gserpentin}(x, y) = \frac{2}{1-x-y} \left( \frac{x^5y^3}{(1-x)^4} + \frac{x^3y^5}{(1-y)^4} \right),$$

$$S_{min+2}^{2-creux}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^4} \left( \frac{2x^3y^3}{1-x-y} - \frac{x^3y^3}{1-x} \right) + \frac{2}{(1-y)^4} \left( \frac{2x^3y^3}{1-x-y} - \frac{x^3y^3}{1-y} \right).$$

Traisons les cas où les bancs sont verticaux. Les SPD de largeur  $\ell$  et de hauteur  $h$  contenant un petit ou un grand serpent admettent deux bancs (figure 5.7 où le rectangle indique la présence d'un escalier et les pointillés celle d'un pilier) donc, par la bijection  $g_N$ , les chemins correspondants sont de hauteur  $h-3$  et de largeur  $\ell-1$ . Nous divisons par  $xy^3$  les deux séries génératrices

$$\frac{2x^2y^5}{(1-x-y)^2(1-y)^2} \quad \text{et} \quad \frac{2x^3y^5}{(1-x-y)(1-y)^4}.$$

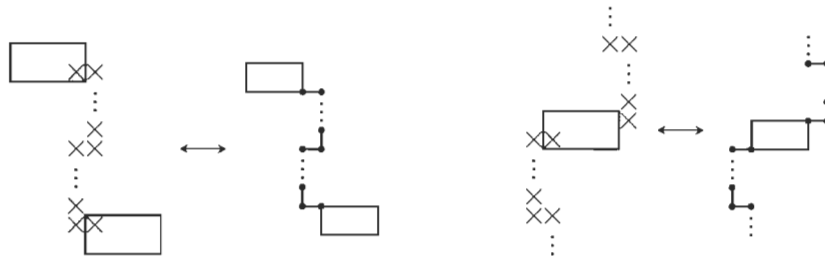


FIGURE 5.7 – Les deux familles de SPD contenant un serpent vertical et les deux familles de CPD correspondantes

La série génératrice des 2-creux verticaux, quant à elle, est divisée par  $xy^2$  car il n'y a qu'un banc, et donc qu'un demi-tour (figure 5.8). Lorsque les bancs sont horizontaux, il faut diviser les parties correspondantes dans  $S_{min+2}^{pserpentin}(x, y)$ ,  $S_{min+2}^{Gserpentin}(x, y)$  et  $S_{min+2}^{2-creux}(x, y)$  par  $x^3y$  et  $x^2y$ . Il reste à additionner le tout pour obtenir le résultat.

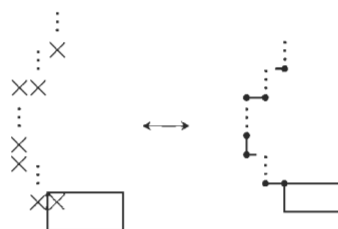


FIGURE 5.8 – La famille de SPD contenant un 2-creux et la famille de CPD correspondante

□

$b \setminus h$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	4	12	24	44	74	116	172
2	4	32	92	198	394	722	1232	1982
3	12	92	264	574	1192	2322	4244	7326
4	24	198	574	1232	2592	5238	10076	18436
5	44	394	1192	2592	5520	11418	22748	43472
6	74	722	2322	5238	11418	24156	49478	97812
7	116	1232	4244	10076	22748	49478	104104	211926
8	172	1982	7326	18436	43472	97812	211926	443972

TABLE 5.2 – Nombre de CPD d'index 2 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

### Chemins auto-évitant d'index 2 non partiellement dirigés

En ce qui concerne les chemins non partiellement dirigés, il faut faire attention. En effet, nous avons un banc horizontal et un banc vertical (les gaufriers). Quelle bijection utiliser ?  $g_N$ ,

$g_E$  ou les deux en même temps ? Utiliser les deux simultanément n'est pas toujours possible (serpent de gauche à la figure 5.9). Pire, en permettant l'utilisation des deux bijections, deux serpents distincts peuvent engendrer le même chemin (ceux entourés).



FIGURE 5.9 – Un gaufrier pour lequel soit  $g_E$  soit  $g_N$  est appliquée et un autre pour lequel  $g_E$  et  $g_N$  sont appliquées simultanément

Il est temps de se rappeler qu'il n'existe pas de bijection de l'ensemble des serpents vers l'ensemble des chemins (voir chapitre 1), seulement une injection. Ainsi, il est vain d'espérer obtenir tous les chemins d'index 2 à partir des serpents d'index 2. De plus, les deux bijections  $g_E$  et  $g_N$  ne sont pas suffisantes car certains chemins ne peuvent être obtenus à partir d'un serpent ni par l'une ni par l'autre ni par une composition des deux (figure 5.10). Nous nous en tenons donc aux serpents et chemins partiellement dirigés.



FIGURE 5.10 – Un chemin auto-évitant d'index 5 n'ayant pas de serpent homologue par  $g_E$ ,  $g_N$  ou une composition des deux

## 5.5 SPD et CPD d'index 3

Reprenons les séries génératrices des structures de SPD d'index 3 (voir chapitre 3).

$$S_{min+3}^{3-creux}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^6} \left( \frac{2x^3y^4}{1-x-y} - \frac{x^3y^4}{1-x} \right) + \frac{2}{(1-y)^6} \left( \frac{2x^4y^3}{1-x-y} - \frac{x^4y^3}{1-y} \right),$$

$$S_{min+3}^{2cb}(x, y) = \frac{4}{1-x-y} \left( \frac{x^5y^3}{(1-x)^5} + \frac{x^5y^4}{(1-x)^6} + \frac{x^3y^5}{(1-y)^5} + \frac{x^4y^5}{(1-y)^6} \right),$$

$$S_{min+3}^{pserp}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^4} \left( \frac{2x^7y^2}{1-x-y} - \frac{x^7y^2}{1-x} + \frac{2x^7y^3}{(1-x-y)^2} \right) + \frac{2}{(1-y)^4} \left( \frac{2x^2y^7}{1-x-y} - \frac{x^2y^7}{1-y} + \frac{2x^3y^7}{(1-x-y)^2} \right).$$

Forts de l'expertise acquise au fil des sections précédentes de ce chapitre, nous déterminons aisément ce par quoi il faut diviser chacune de ces séries génératrices afin d'obtenir l'équivalent pour les CPD. Travaillons avec les bancs horizontaux. Les SPD admettant un 3-creux n'ont qu'un banc, il faut diviser leur série génératrice par  $x^2y$ . Les SPD admettant un 2-creux et un banc ont deux bancs, il faut diviser leur série génératrice par  $x^3y$ . Et ceux admettant un

petit ou un grand serpent in ont trois bancs, ce qui se traduit par une division par  $x^4y$  de leur série génératrice. Lorsque les bancs sont verticaux, il suffit d'intervertir  $x$  et  $y$ . Nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 5.5.1.** Les séries génératrices des CPD contenant un 3-creux, un 2-creux et un banc, un petit serpent in et un banc sont respectivement

$$C_{min+3}^{3-creux}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^6} \left( \frac{2xy^3}{1-x-y} - \frac{xy^3}{1-x} \right) + \frac{2}{(1-y)^6} \left( \frac{2x^3y}{1-x-y} - \frac{x^3y}{1-y} \right),$$

$$C_{min+3}^{2cb}(x, y) = \frac{4}{1-x-y} \left( \frac{x^2y^2}{(1-x)^5} + \frac{x^2y^3}{(1-x)^6} + \frac{x^2y^2}{(1-y)^5} + \frac{x^3y^2}{(1-y)^6} \right),$$

$$C_{min+3}^{pserp}(x, y) = \frac{2}{(1-x)^4} \left( \frac{2x^3y}{1-x-y} - \frac{x^3y}{1-x} + \frac{2x^3y^2}{(1-x-y)^2} \right) + \frac{2}{(1-y)^4} \left( \frac{2xy^3}{1-x-y} - \frac{xy^3}{1-y} + \frac{2x^2y^3}{(1-x-y)^2} \right).$$

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	4	14	34	74	144	256
2	0	8	54	172	436	1000	2068	3920
3	4	54	248	700	1700	3936	8444	16808
4	14	172	700	1792	4056	9288	20460	42592
5	34	436	1700	4056	8400	18348	40348	86372
6	74	1000	3936	9288	18348	38016	81224	173888
7	144	2068	8444	20460	40348	81224	168168	354068
8	256	3920	16808	42592	86372	173888	354068	732160

TABLE 5.3 – Nombre de CPD d'index 3 inscrits dans un rectangle  $b \times h$

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser le lien entre les séries génératrices des SPD et celles des CPD de même index.

### 5.6 SPD et CPD d'index $r$

**Proposition 5.6.1.** Soit  $SH(x, y)$  et  $SV(x, y)$  les séries génératrices respectivement d'une famille de SPD admettant  $u$  bancs horizontaux et d'une famille de SPD admettant  $u$  bancs verticaux. Les séries génératrices  $CH(x, y)$  et  $CV(x, y)$  des familles de CPD correspondantes sont

$$CH(x, y) = \frac{SH(x, y)}{x^{u+1}y},$$

$$CV(x, y) = \frac{SV(x, y)}{xy^{u+1}}.$$

*Preuve.* Soit un élément d'une famille de SPD admettant  $u$  bancs verticaux. Disons que le SPD est de hauteur  $h$  et de largeur  $\ell$ . Par la proposition 5.1.1 page 120, nous savons que son chemin correspondant par la bijection  $f$  est de hauteur  $h - 1 - u$  et de largeur  $\ell - 1$ . En termes de séries génératrices, cela se traduit par un décalage de 1 pour les  $x$  et un décalage de  $u + 1$  pour les  $y$ , autrement dit une division par  $xy^{u+1}$ . L'argument est similaire lorsque les bancs sont horizontaux. □

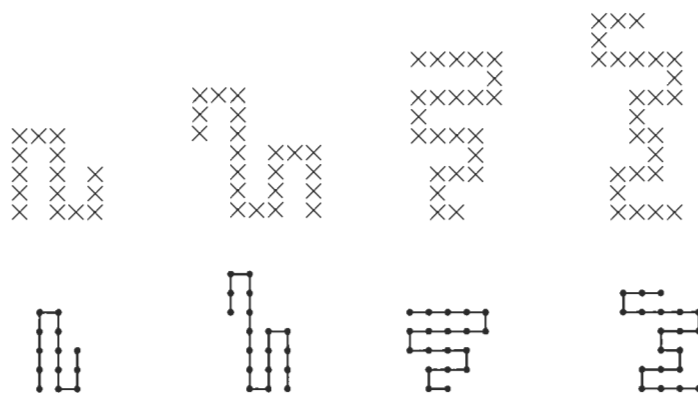


FIGURE 5.11 – Des SPD admettant respectivement 2 et 3 bancs horizontaux et 4 et 5 bancs verticaux et leurs CPD correspondants

# Chapitre 6

## Serpents inscrits et serpents maximaux

Le contenu de ce chapitre, dont la majeure partie vient du travail d'Alain Goupil, n'existe pas dans la littérature mathématique. Pour ma part, j'ai complété et clarifié les démonstrations et modifié certaines structures de serpents afin de simplifier les arguments.

Explorons quelques familles de serpents inscrits en commençant par des rectangles dont une des dimensions, disons la largeur, est fixée. La plus petite largeur pour un rectangle, qui est 1, impose aux serpents d'être des piliers verticaux dont nous connaissons la série génératrice  $P(x) = \frac{1}{1-x}$ . Nous continuons ensuite en donnant les quelques informations en notre possession concernant les serpents de longueur maximale. Nous trouvons ici quelques pistes peu débroussaillées et des conjectures. Peut-être certaines sont-elles déjà résolues au moment de votre lecture. Si l'année est supérieure à 2017, il est très probable qu'il faille mettre ce chapitre à jour.

### 6.1 Serpents inscrits dans un $2 \times h$

Les serpents de largeur deux sont des SPD et satisfont, tout comme les polyominos de largeur deux, une récurrence particulièrement simple. Cette simplicité structurelle disparaît lorsque nous passons à des largeurs plus grandes.

**Proposition 6.1.1.** Appelons  $s(2, h)$  le nombre total de serpents inscrits dans un rectangle  $2 \times h$ . Nous avons la récurrence

$$s(2, h) = s(2, h - 1) + s(2, h - 2) + 2 \quad \forall h \geq 4. \quad (6.1)$$

*Preuve.* Un serpent inscrit dans un rectangle  $2 \times h$  admet soit une cellule soit deux cellules

dans la dernière ligne en haut du rectangle. Commençons par les serpents de hauteur  $h - 1$ , comptés par  $s(2, h - 1)$ . À chacun d'eux, il est possible d'adjoindre une ligne ne contenant qu'une cellule après leur dernière, la  $h - 1^e$  (figure 6.1 où la cellule rouge est celle ajoutée). Ainsi, chaque serpent inscrit dans un rectangle  $2 \times (h - 1)$  génère un serpent inscrit dans un rectangle  $2 \times h$  à une cellule sur la ligne du haut.



FIGURE 6.1 – Le terme  $s(2, h - 1)$  de l'équation (6.1)

Les serpents de hauteur  $h$  se finissant par une ligne contenant deux cellules sont obtenus à partir des serpents de hauteur  $h - 2$ , comptés par  $s(2, h - 2)$  (figure 6.2 où les cellules rouges sont celles ajoutées à un serpent de hauteur  $h - 2$ ). Ainsi, chaque serpent de hauteur  $h - 2$  génère un serpent de hauteur  $h$  à deux cellules sur la ligne du haut.

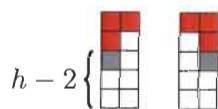


FIGURE 6.2 – Le terme  $s(2, h - 2)$  de l'équation (6.1)

Il ne faut pas oublier les serpents formés d'une colonne de cellules de hauteur  $h - 1$  avec deux cellules à la ligne  $h$ . Il y en a exactement deux (figure 6.3).

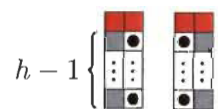


FIGURE 6.3 – Le terme 2 de l'équation (6.1)

Au final, les serpents inscrits dans un rectangle  $2 \times h$  sont obtenus de ceux inscrits dans un  $2 \times (h - 1)$  et dans un  $2 \times (h - 2)$  et des des deux serpents de la figure 6.3, ce qui donne la récurrence voulue.  $\square$

Nous pouvons également faire intervenir la longueur du serpent. Définissons une nouvelle structure qui nous sera utile par la suite afin de simplifier les propos.

**Définition 6.1.1.** Un *doublon* est le serpent formé de deux cellules placées l'une à côté de l'autre dans une rangée horizontale d'un rectangle  $2 \times h$ .

**Proposition 6.1.2.** Appelons  $s(2, h, n)$  le nombre de serpents de longueur  $n$  inscrits dans un rectangle  $2 \times h$ . Nous avons la récurrence

$$s(2, h, n) = s(2, h - 1, n - 1) + s(2, h - 2, n - 3) \quad \forall h \geq 3, n \geq h + 2$$

$$s(2, h, n) = s(2, h - 1, n - 1) + 2 \quad \forall h \geq 2, n = h + 1$$

avec  $s(2, 2, x) = s(2, 1, y) = 0 \quad \forall x \geq 4, y \geq 3$  et  $s(2, 1, 2) = 2$ . et une formule exacte,

$$s(2, h, n) = 2 \binom{2h - n + 1}{n - h} = 2 \binom{h - r}{r + 1} \quad \forall h \geq 2, n \geq h + 1$$

où  $n = h + r + 1 = \min + r$ .

*Preuve.* La récurrence se démontre comme celle de la proposition 6.1.1. Reprenons les figures 6.1 et 6.2. Dans la première, si nous enlevons la cellule rouge, nous nous retrouvons avec les serpents comptés par  $s(2, h - 1, n - 1)$ . En procédant de même à la deuxième figure, nous nous retrouvons avec les serpents comptés par  $s(2, h - 2, n - 3)$ . Chacun d'eux génère un serpent de largeur deux, de hauteur  $h$  et de longueur  $n$ . La condition  $n \geq h + 1$  est issue de la longueur minimale d'un serpent dans un rectangle  $2 \times h$  qui est  $2 + h - 1 = h + 1$ . Lorsque  $n \geq h + 2$ , il n'y a pas de serpent du type illustré à la figure 6.3 car leur longueur est strictement inférieure à  $h + 2$ , voilà pourquoi nous séparons la récurrence en deux cas. Les égalités  $s(2, 2, x) = s(2, 1, y) = 0, \forall x \geq 4, y \geq 3$  sont justifiées par le fait que dans un rectangle  $2 \times 2$ , un serpent est de longueur 3 au maximum et dans un  $2 \times 1$  de longueur 2 au maximum. Nous définissons  $s(2, 1, 2) = 2$  même si en réalité il n'y a qu'un seul SPD inscrit dans un rectangle de hauteur un car cela permet d'écrire la seconde partie de la récurrence agréablement.

La formule exacte se démontre à l'aide de l'index  $r$ . Disons que la première cellule en partant du bas du serpent est dans la colonne de gauche. Le nombre de doublons du serpent est égal à son index plus un. Ainsi, lorsque  $r = 0$ , il y a un doublon à placer. Afin d'obtenir les serpents commençant dans la colonne de droite, il suffit d'appliquer une réflexion par rapport à une droite verticale, ce qui se traduit par une multiplication par 2.

Pour un index  $r$ , nous avons  $r + 1$  doublons à placer mais nous n'avons que  $h - r$  emplacements disponibles car entre chaque doublon doit être présente une ligne à une seule cellule. Retirons  $r$  des  $h$  lignes disponibles, chacune représentant le pas N obligatoire entre un pas E et un pas O. Plaçons nos doublons parmi les  $h - r$  emplacements restants et après chacun d'eux, insérons une ligne contenant une seule cellule afin de s'assurer qu'il n'y ait pas deux lignes consécutives de doublons. Le processus est bijectif et est illustré pour  $r = 5$  à la figure 6.4 avec les doublons en bleu, les lignes ajoutées en rouge et le reste du serpent en gris.



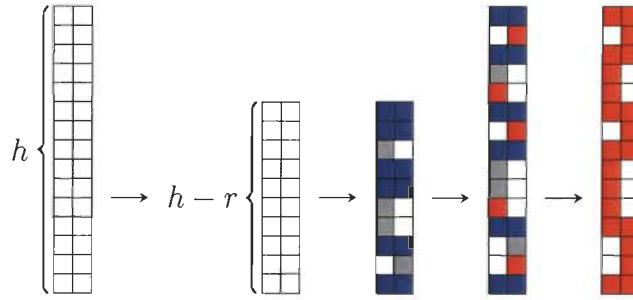


FIGURE 6.4 – Placement des doublons dans un rectangle  $2 \times h$

Ainsi, il y a  $\binom{h-r}{r+1}$  placements possibles des  $r + 1$  doublons dans un rectangle de hauteur  $h$ . Nous comptons les serpents dont la première cellule est en bas à droite de la même manière, d'où le coefficient multiplicatif 2. L'égalité  $n = h + r + 1$  découle de la définition d'index. La longueur du serpent est bien donnée par sa hauteur plus le nombre de doublons qui est  $r + 1$ .  $\square$

Intéressons-nous maintenant à la série génératrice  $S_2(y, z)$  des serpents de longueur  $n$  inscrits dans un  $2 \times h$ . Cherchons la série génératrice à deux variables

$$S_{2,c}(y, z) = \sum_{h,n} s_{2,c}(h, n) y^h z^n$$

où  $s_{2,c}(h, n)$  est le nombre de serpents de longueur  $n$  inscrits dans un rectangle  $2 \times h$  démarrant avec une seule cellule située à gauche sur la première rangée. Un tel serpent contient au moins un doublon et est appelé un *serpent coin*. Si nous parcourons le serpent de bas en haut, à un moment donné nous allons rencontrer le premier doublon. Il faut savoir ce qu'il se passe avant et après. Avant, il y a un pilier non vide dont la série génératrice est  $\frac{yz}{1-yz}$ . Après, il y a soit rien, soit un pilier non vide, soit un serpent coin (figure 6.5). Le premier doublon est en bleu, les cellules noires sont obligatoires, les pointillés représentent un pilier, le rond noir indique qu'il n'y a pas de cellule à cet endroit et le rectangle grisé est un serpent coin  $2 \times h$ .

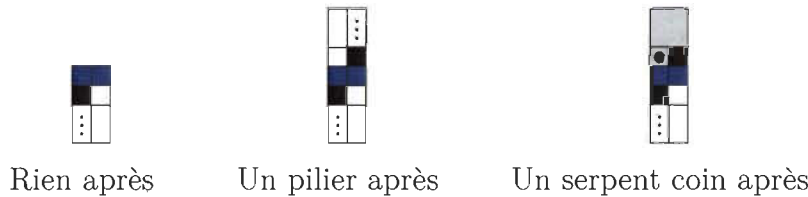


FIGURE 6.5 – Serpent coin  $2 \times h$

Nous obtenons l'équation fonctionnelle

$$S_{2,c}(y, z) = \left( \frac{yz}{1-yz} \right) yz^2 \left( \frac{1}{1-yz} + S_{2,c}(y, z) \right)$$

que nous résolvons en isolant  $S_{2,c}(y, z)$  :

$$S_{2,c}(y, z) = \frac{y^2 z^3}{(1 - yz)(1 - yz - y^2 z^3)}. \quad (6.2)$$

Nous pouvons maintenant construire la série génératrice  $S_2(y, z)$  des serpents inscrits dans un rectangle  $2 \times h$ . De nouveau, considérons le premier doublon rencontré lorsque nous parcourons le serpent de bas en haut tel qu'illustré à la figure 6.6 avec les mêmes conventions de couleur qu'à la figure 6.5.



Avant le doublon      Après le doublon

FIGURE 6.6 – Premier doublon dans un serpent  $2 \times h$

Avant le premier doublon, nous avons soit rien, soit un pilier. Après, nous avons soit rien, soit un serpent coin. Lorsqu'il n'y a rien avant, nous pouvons placer un serpent coin de deux façons différentes. Cette décomposition nous permet d'écrire l'équation fonctionnelle

$$S_2(y, z) = \overbrace{yz^2 (1 + 2S_{2,c}(y, z))}^{\text{rien avant}} + \overbrace{\left(\frac{2yz}{1 - yz}\right) yz^2 (1 + S_{2,c}(y, z))}^{\text{un pilier avant}}.$$

dans laquelle nous isolons  $S_2(y, z)$ . Nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 6.1.3.** La série génératrice des serpents de longueur  $n$  inscrits dans un rectangle  $2 \times h$  est

$$S_2(y, z) = \frac{yz^2 (1 + 2yz - y^2 z^2 + y^2 z^3 - y^3 z^4)}{(1 - yz)(1 - yz - y^2 z^3)}.$$

Les serpents inscrits dans un rectangle  $2 \times h$  de longueur maximale sont aisés à obtenir. Ce sont des SPD, donc il faut avoir le plus grand nombre de doublons. Dans un rectangle  $2 \times h$ , un serpent en admet au maximum  $\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor$ .

**Proposition 6.1.4.** La longueur maximale  $n_{max}(2, h)$  d'un serpent inscrit dans un rectangle  $2 \times h$  et le nombre  $s_{max}(2, h)$  de ces serpents sont donnés par :

$$n_{max}(2, h) = h + \left\lfloor \frac{h+1}{2} \right\rfloor,$$

$$s_{max}(2, h) = \begin{cases} 2 & h \geq 3 \text{ impair} \\ h + 2 & h \text{ pair} \end{cases}.$$

*Preuve.* La longueur maximale se déduit immédiatement du nombre de doublons. En effet, le serpent est de hauteur  $h$ , donc doit contenir  $\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor$  doublons. Chaque doublon contribue pour deux à la longueur. Il reste  $h - \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor$  lignes contenant une seule cellule. Ainsi, la longueur maximale est

$$2 \left\lfloor \frac{h+1}{2} \right\rfloor + h - \left\lfloor \frac{h+1}{2} \right\rfloor = h + \left\lfloor \frac{h+1}{2} \right\rfloor.$$

Le nombre de serpents de longueur maximale maintenant. Deux démonstrations s'offrent à nous. L'une utilise un argument combinatoire semblable à celui de la démonstration de la proposition 6.1.2 et l'autre utilise le coefficient binomial de cette même proposition. Ne soyons pas mesquins et faisons les deux ! L'argument combinatoire d'abord. Idéalement, il n'y a qu'une rangée contenant une seule cellule entre chaque paire de doublons consécutifs et le serpent commence et se termine par un doublon. Cette configuration n'est possible que lorsque  $h$  est impair. Tous les doublons sont donc fixés. Il n'y a que deux serpents de longueur maximale dans un rectangle de hauteur au moins trois impaire (à gauche figure 6.7). Pour  $h = 1$ , il n'y en a qu'un seul. Par contre, lorsque  $h$  est pair, soit il y a une et une seule paire de doublons consécutifs séparés par deux lignes contenant une seule cellule, soit le serpent commence ou se termine par un ligne qui n'est pas un doublon (à droite figure 6.7). Ainsi, déterminer leur nombre revient à déterminer le nombre d'emplacements possibles de la ligne à une seule cellule « de trop ». Il y a  $\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor$  doublons, donc  $\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor + 1$  emplacements disponibles. Comme  $h$  est pair,  $\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor = \frac{h}{2}$ . Ainsi, il y a  $2 \left( \frac{h}{2} + 1 \right) = h + 2$  serpents de longueur maximale et de hauteur  $h$  paire.

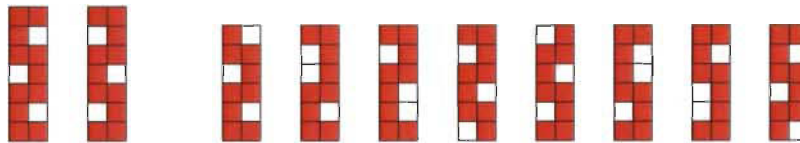


FIGURE 6.7 – Les serpents maximaux de largeur deux pour  $h = 7$  et  $h = 6$

Partons maintenant du coefficient binomial de la proposition 6.1.2 :

$$\begin{aligned} 2 \binom{2h - n + 1}{n - h} &= 2 \binom{2h - h - \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor + 1}{h + \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor - h} \\ &= 2 \binom{h - \lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor + 1}{\lfloor \frac{h+1}{2} \rfloor} \\ &= \begin{cases} 2 \binom{\frac{h+1}{2}}{\frac{h+1}{2}} & h \geq 3 \text{ impair} \\ 2 \binom{\frac{h}{2} + 1}{\frac{h}{2}} & h \text{ pair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 & h \geq 3 \text{ impair} \\ h + 2 & h \text{ pair} \end{cases} \end{aligned}$$

□

## 6.2 Serpents inscrits dans un $3 \times h$

Comme lorsque nous avons augmenté l'index pour les serpents (aux chapitres 3 et 4), nous élargissons le rectangle circonscrit. Commençons par déterminer la série génératrice

$$S_3(y, z) = \sum_{h,n} s_3(h, n) y^h z^n$$

de tous les serpents inscrits dans un  $3 \times h$  de longueur  $n$ . Nous commençons par construire la série génératrice de la classe  $G1$  qui regroupe les serpents dont la partie centrale (en référence au chapitre 2) n'est pas un SPD. Les serpents de  $G1$  possèdent un pilier horizontal de longueur 3 tel que leurs deux extrémités sont du même côté de ce pilier. Ensuite, nous explorons ceux dont la partie centrale est un SPD.

### La classe $G1$

Nous subdivisons la classe  $G1$  en quatre sous-classes disjointes (figure 6.9). Procédons à la description de chacune d'elles mais auparavant, définissons deux objets que nous utilisons à plusieurs reprises.

**Définition 6.2.1.** Nous appelons *cavité*, notée  $C$ , une partie de serpent formée d'un pilier horizontal de longueur 3 et de deux pattes à ses extrémités faites d'un nombre égal de cellules (en turquoise à la figure 6.9).

Nous appelons *extrémité*, notée  $E$ , une partie possiblement vide de serpent commençant dans une colonne adjacente à un côté du rectangle et qui ni ne touche le côté opposé ni ne revient dans sa colonne de départ si elle la quitte.

Les extrémités sont soit un pilier, soit un serpent coin minimal de largeur deux (figure 6.8 en vert). Il faut différencier le cas où cette dernière doit commencer par un pilier non vide (serpent du milieu) et le cas où elle peut commencer par un pilier vide (serpent de droite).

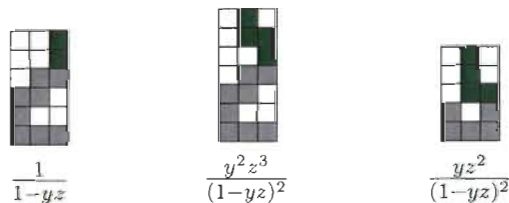


FIGURE 6.8 – Les trois structures d'extrémités avec leurs séries génératrices

Les séries génératrices des cavités  $C(y, z)$  et des extrémités avec un pilier non vide  $EP(y, z)$  et sans pilier non vide  $EnP(y, z)$  sont respectivement

$$C(y, z) = yz^3 \cdot \frac{yz^2}{1 - yz^2},$$

$$EP(y, z) = \frac{1}{1 - yz} + \frac{y^2z^3}{(1 - yz)^2},$$

$$EnP(y, z) = \frac{1}{1 - yz} + \frac{yz^2}{(1 - yz)^2}.$$

Les serpents de  $G1A$  contiennent une cavité (en bleu à la figure 6.9) suivie d'une extrémité (en vert). Nous pouvons accrocher une extrémité non vide de deux manières différentes à une cavité, à la patte droite ou à la patte gauche. Nous devons donc multiplier  $EnP(y, z)$  par 2 sans oublier de retirer 1 car accrocher une extrémité vide ne peut se faire que d'une façon. Nous obtenons la série génératrice  $G1A(y, z)$  :

$$G1A(y, z) = C(y, z) \times (2 \cdot EnP(y, z) - 1)$$

$$= \frac{y^2z^5(1 + 2yz^2 - y^2z^2)}{(1 - yz^2)(1 - yz)^2}.$$

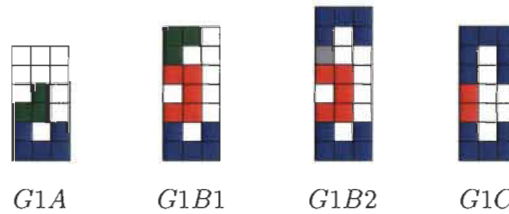


FIGURE 6.9 – Serpents de la classe  $G1$

La classe  $G1B1$  est caractérisée par une cavité suivie d'au moins une bulle de largeur deux notée  $B_2$  (en rouge à la figure 6.9) puis d'une extrémité de type  $EP$  (en vert). Nous pouvons accrocher une bulle à une des deux pattes de la cavité, ce qui justifie le facteur 2. Nous obtenons

$$G1B1(y, z) = cavité \times \frac{B_2}{1 - PB_2} \times EP$$

$$= \frac{y^2z^5}{1 - yz^2} \times \frac{2y^3z^5}{(1 - yz)^2 - y^4z^6} \times \left( 1 + \frac{yz}{1 - yz} + \frac{y^2z^3}{(1 - yz)^2} \right)$$

$$= \frac{2y^5z^{10}}{(1 - yz^2)(1 - yz)^2(1 - yz - y^2z^3)}$$

où  $PB_2$  est un pilier suivi d'une bulle  $B_2$ .

La classe  $G1B2$  est caractérisée par deux cavités dont les pattes se font face avec au moins une bulle  $B_2$  entre elles. Il peut y avoir un pilier après la dernière bulle (en gris à la figure 6.9). Nous avons

$$\begin{aligned} G1B2(z, y) &= \text{cavité} \times \frac{B_2}{1 - PB_2} \times \text{pilier} \times \text{cavité} \\ &= \frac{y^2 z^5}{1 - yz^2} \times \frac{2y^3 z^5}{(1 - yz)^2 - y^4 z^6} \times \frac{1}{1 - yz} \times \frac{y^2 z^5}{1 - yz^2} \\ &= \frac{2y^7 z^{15}}{(1 - yz^2)^2 (1 - yz) (1 - 2yz + y^2 z^2 - y^4 z^6)}. \end{aligned}$$

Il reste la classe  $G1C$  caractérisée par deux cavités dont les pattes se font face et n'ayant pas de bulle  $B_2$  entre elles. Nous obtenons

$$\begin{aligned} G1C(y, z) &= \text{cavité} \times \text{pilier} \times \text{cavité} \\ &= \frac{y^2 z^5}{1 - yz^2} \times \frac{2yz}{1 - yz} \times \frac{y^2 z^5}{1 - yz^2} \\ &= \frac{2y^5 z^{11}}{(1 - yz^2)^2 (1 - yz)}. \end{aligned}$$

La contribution totale des serpents de la classe  $G1$  est la somme des quatre sous-classes précédentes avec  $G1A$  et  $G1B1$  qui sont munies d'un facteur 2 pour tenir compte des cas où la cavité est orientée vers le bas. Nous obtenons

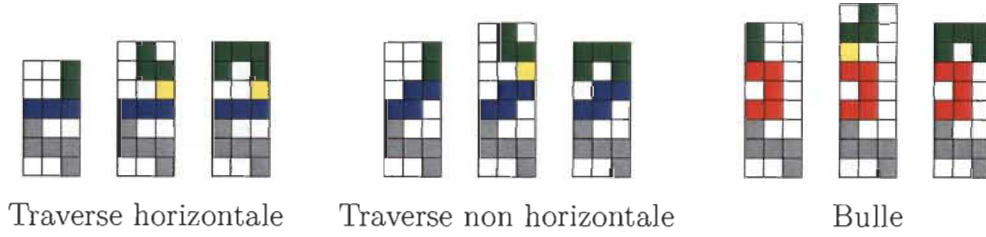
$$\begin{aligned} G1(y, z) &= 2G1A(y, z) + 2G1B1(y, z) + G1B2(y, z) + G1C(y, z) \\ &= \frac{2y^2 z^5 (1 + yz^2 - y^2 z^2 - 2y^2 z^4 + y^3 z^4 + 2y^3 z^5 + y^3 z^6 + y^4 z^6 - 3y^4 z^7 - y^5 z^8 + y^5 z^{10} + y^6 z^{11})}{(1 - 2yz + y^2 z^2 - y^4 z^6) (1 - yz^2)^2}. \end{aligned}$$

## Les serpents issus d'un SPD

Il reste à traiter les serpents dont la partie entre les extrémités est elle-même un SPD inscrit dans le rectangle  $3 \times h$ , contrairement aux parties centrales de la famille  $G1$  qui ne le sont pas. Rappelons que dans la classification du chapitre 2, il y a quatre familles notées  $\mathcal{F}_1$  à  $\mathcal{F}_4$ , chacune constituée d'une partie centrale  $PCi$ ,  $1 \leq i \leq 4$  et de deux extrémités.

Nous notons  $\mathcal{FS}_1, \mathcal{FS}_2, \mathcal{FS}_3$  et  $\mathcal{FS}_4$  les familles de serpents dont la partie centrale est un SPD appartenant respectivement aux familles  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  et  $\mathcal{F}_4$ .

Les parties centrales commencent et se terminent toujours soit par une traverse soit par une bulle. Ainsi, nous ne pouvons avoir l'extrémité de droite de la figure 6.8. Nous devons également considérer le cas où le serpent a comme extrémité une cavité. La figure 6.10 montre toutes les possibilités d'extrémités (en vert avec le pilier non vide obligatoire en jaune) selon que la partie centrale commence/se termine par une traverse (en bleu) ou une bulle (en rouge).


 FIGURE 6.10 – Les extrémités possibles pour les familles  $\mathcal{F}_i$ 

Rappelons la structure des familles de SPD où  $E, P, T, B$  sont les extrémités, piliers, traverses et bulles tels que définis au chapitre 2 :

$$\mathcal{F}_1 := 2(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times T \times (\mathbf{P} \times (\mathbf{T} \cup \mathbf{B}))^* \times \mathbf{P} \times T \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) \quad (6.3)$$

$$\mathcal{F}_2 := 4(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times T \times (\mathbf{P} \times (\mathbf{T} \cup \mathbf{B}))^* \times \mathbf{P} \times B \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) \quad (6.4)$$

$$\mathcal{F}_3 := 2(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times B \times (\mathbf{P} \times B)^* \times \mathbf{P} \times T \times (\mathbf{P} \times (\mathbf{T} \cup \mathbf{B}))^* \times \mathbf{P} \times B \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) \quad (6.5)$$

$$\mathcal{F}_4 := 2(\emptyset \cup [(\emptyset \cup E) \times P]) \times T \times (\emptyset \cup [P \times (\emptyset \cup E)]) - H \quad (6.6)$$

Écrivons toutes les séries génératrices dont nous allons avoir besoin pour constituer les familles de serpents  $\mathcal{FS}_i$ .

$T(y, z) = \frac{yz^3}{1 - yz}$	Traverse quelconque de largeur 3
$TH(y, z) = yz^3$	Traverse horizontale de largeur 3
$TnH(y, z) = \frac{y^2z^4}{1 - yz}$	Traverse non horizontale de largeur 3
$B(y, z) = \frac{y^3z^5}{1 - yz}$	Bulle de largeur 2
$PC(y, z) = \frac{(1 - yz)yz}{1 - 2yz + y^2z^2 - y^2z^4 - y^4z^6}$	Partie centrale
$P(y, z) = \frac{yz}{1 - yz}$	Pilier non vide

$PC(y, z)$  est la partie en gras commune aux trois familles (équations (6.3), (6.4) et (6.5)). Il est clair que  $T(y, z) = TH(y, z) + TnH(y, z)$ . Il y a également deux ensembles d'extrémités à considérer, celles où le pilier accroché à une patte de la cavité est non vide et celles où le pilier peut être vide :

$$\begin{aligned} E_{Pnonvide}(y, z) &= EP + \frac{y^3z^6}{(1 - yz^2)(1 - yz)} \\ &= \frac{1 - yz - yz^2 + 2y^2z^3 - y^3z^5 + y^3z^6 - y^4z^7}{(1 - yz^2)(1 - yz)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{Pvide}(y, z) &= EP + \frac{y^2 z^5}{(1 - yz^2)(1 - yz)} \\
&= \frac{1 - yz - yz^2 + 2y^2 z^3 + y^2 z^5 - y^3 z^5 - y^3 z^6}{(1 - yz^2)(1 - yz)^2}.
\end{aligned}$$

Les parties centrales sont mises en évidence en gras dans les équations qui suivent. La famille  $\mathcal{F}_1$  commence et se termine par des traverses, il faut donc considérer trois cas disjoints pour la famille de serpents  $\mathcal{FS}_1$ . Nous travaillons directement avec les séries génératrices. Les coefficients multiplicatifs sont présents pour tenir compte des symétries (principe d'inclusion-exclusion du chapitre 1).

$\mathcal{FS}_{1,1}$  : Les deux traverses sont horizontales,

$$FS_{1,1}(y, z) = 2E_{Pnonvide}(y, z) \times TH(y, z) \times \mathbf{PC}(y, z) \times TH(y, z) \times E_{Pnonvide}(y, z).$$

$\mathcal{FS}_{1,2}$  : Une traverse est horizontale et l'autre ne l'est pas

$$FS_{1,2}(y, z) = 4E_{Pnonvide}(y, z) \times TH(y, z) \times \mathbf{PC}(y, z) \times TnH(y, z) \times E_{Pvide}(y, z).$$

$\mathcal{FS}_{1,3}$  : Les deux traverses sont non horizontales

$$FS_{1,3}(y, z) = 2E_{Pvide}(y, z) \times TnH(y, z) \times \mathbf{PC}(y, z) \times TnH(y, z) \times E_{Pvide}(y, z).$$

Nous procédons de même pour  $FS_2(y, z)$ ,  $FS_3(y, z)$  et  $FS_4(y, z)$  dans cet ordre :

$\mathcal{FS}_{2,1}$  : La traverse est horizontale,

$$FS_{2,1}(y, z) = 4E_{Pnonvide}(y, z) \times TH(y, z) \times \mathbf{PC}(y, z) \times B(y, z) \times E_{Pnonvide}(y, z).$$

$\mathcal{FS}_{2,2}$  : La traverse n'est pas horizontale,

$$FS_{2,2}(y, z) = 4E_{Pvide}(y, z) \times TnH(y, z) \times \mathbf{PC}(y, z) \times B(y, z) \times E_{Pnonvide}(y, z).$$

$\mathcal{FS}_3$  : Il y a deux bulles,

$$\begin{aligned}
FS_3(y, z) &= 2E_{Pnonvide}(y, z) \times B(y, z) \times \frac{P(y, z)T(y, z)}{1 - P(y, z)B(y, z)} \times \mathbf{PC}(y, z) \\
&\quad \times B(y, z) \times E_{Pnonvide}(y, z).
\end{aligned}$$

$\mathcal{FS}_{4,1}$  : La traverse est horizontale,

$$FS_{4,1}(y, z) = 2E_{Pnonvide}(y, z) \times TH(y, z) \times E_{Pnonvide}(y, z) - TH(y, z).$$



$FS_{4,2}$  : La traverse n'est pas horizontale,

$$FS_{4,2}(y, z) = 2E_{Pvide}(y, z) \times TnH(y, z) \times E_{Pvide}(y, z).$$

Afin d'obtenir la série génératrice de tous les serpents inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  dont la partie centrale est un SPD, il faut additionner chacune des quatre familles

$$F_{SPD}(y, z) = FS_1(y, z) + FS_2(y, z) + FS_3(y, z) + FS_4(y, z).$$

Enfin, la série génératrice de tous les serpents inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  est

$$S_3(y, z) = G1(y, z) + F_{SPD}(y, z).$$

Grâce à la série  $S_3(y, z)$ , nous construisons le tableau 6.1 donnant le nombre de serpents inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  de longueur  $n$ .

$h \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1															
2		6	2													
3			12	8	8											
4				20	20	22	14									
5					30	44	52	40	18							
6						42	84	120	88	60	26	2				
7							56	144	254	192	162	92	40	4		
8								72	228	490	416	406	260	138	58	6

TABLE 6.1 – Nombre de serpents inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  de longueur  $n$

### 6.3 Serpents inscrits de longueur maximale

Durant nos recherches sur les polyominos serpents, nous nous sommes également intéressés aux serpents inscrits de longueur maximale. De là est apparu le besoin de définir les serpents kiss-free, effleurés au chapitre 1.

**Définition 6.3.1.** Un *serpent kiss-free* est un serpent qui ne contient pas deux cellules sur une diagonale du carré  $2 \times 2$  et deux cellules vides dans l'autre diagonale (figure 6.11b).

Il est aisé d'obtenir une valeur pour la longueur maximale des *SPD* inscrits dans un rectangle  $b \times h$ . qui est  $\lfloor \frac{(b+1)(h+1)}{2} \rfloor - 1$  (figure 6.11a). Nous avons conjecturé que cette longueur est aussi la longueur maximale pour n'importe quel serpent kiss-free inscrit, comme montré à

la figure 6.11b. Cette observation fut généralisée récemment aux polyominos arbres et prouvée par un autre groupe d'auteurs (voir [4]). En voici l'énoncé.

**Théorème 6.3.1.** L'aire maximale d'un polyomino arbre kiss-free inscrit dans un rectangle  $b \times h$  est

$$\left\lfloor \frac{(h+1)(b+1)}{2} \right\rfloor - 1.$$

De plus, cette valeur maximale est atteinte par un serpent pour tout  $b$  et  $h$ .

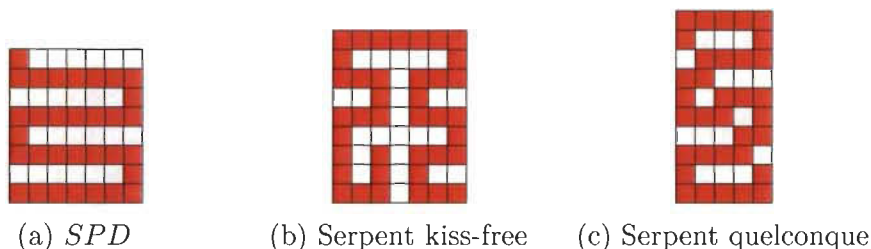


FIGURE 6.11 – Serpents inscrits de longueur maximale

En d'autres termes, lorsque nous relaxons la condition d'être un *SPD*, il n'y a aucun gain lorsque le but est de remplir un rectangle avec le serpent le plus long tant qu'il est kiss-free. Pour des serpents arbitraires, cette conjecture n'est pas vraie (figure 6.11c). Les serpents maximaux inscrits dans un rectangle  $2 \times h$  (ou  $b \times 2$ ) ne sont pas très intéressants car ce sont des *SPD* et nous avons une formule exacte. Un rectangle  $3 \times h$  par contre...

### Longueur maximale des serpents inscrits dans un $3 \times h$

Commençons modestement et voyons ce que nous arrivons à dire sur la longueur maximale des serpents inscrits dans un rectangle  $3 \times h$ .

**Proposition 6.3.1.** La longueur maximale  $\ell_{max}(3, h)$  des serpents inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  et le nombre  $n_{max}(3, h)$  de ces serpents sont donnés par :

$$\ell_{max}(3, h) = 2(h + 1) \quad h \geq 6 \tag{6.7}$$

$$n_{max}(3, h) = 2(h - 5) \quad h \geq 6. \tag{6.8}$$

*Preuve.* D'abord, observons qu'il est possible de construire des serpents de longueur  $2(h + 1)$  dans un rectangle  $3 \times h$  à partir de  $h = 6$  (figure 6.12) et que ses première et dernière lignes

contiennent trois cellules et toutes les autres deux. Il y a en moyenne  $2 + \frac{2}{h}$  cellules par ligne (pour  $h \leq 5$ , la moyenne est  $2 + \frac{1}{h}$ ).

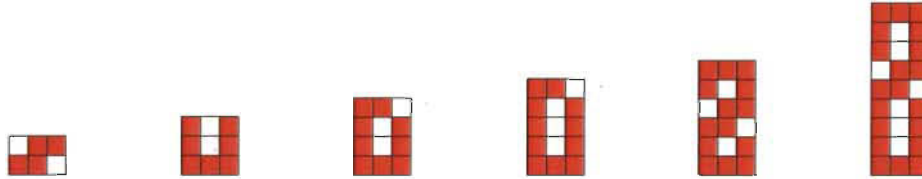


FIGURE 6.12 – Des serpents maximaux dans un  $3 \times h$

Nous savons qu'il n'existe pas de serpent de longueur  $\geq 2h + 2$  avec une ligne du rectangle qui n'est ni la première ni la dernière contenant 3 cellules du serpent (aisé à vérifier, les nombres sont petits). Par contradiction, supposons qu'il existe un tel serpent, alors il en existe un de hauteur minimale. Les deux lignes adjacentes à la ligne de trois cellules contiennent chacune une seule cellule du serpent et donc trois lignes du rectangle contiennent 5 cellules du serpent. De plus, ces trois lignes coupent le serpent en deux serpents de hauteurs plus petites. Or, il nous faut une moyenne strictement supérieure à 2 de cellules par ligne. Pour le petit bloc de hauteur trois, elle vaut  $\frac{5}{3} < 2$ . Il faut que le reste du serpent comble cette perte. Ainsi, un des deux petits serpents doit avoir une moyenne de cellules par ligne strictement supérieure à  $2 + \frac{2}{h}$ , ce qui implique avoir au moins trois lignes de trois cellules du serpent. Nous nous retrouvons donc avec un serpent de longueur  $\geq 2h + 2$  admettant une ligne de trois cellules qui n'est ni la première ni la dernière du rectangle et inscrit dans un rectangle plus petit que celui de départ. Nous avons supposé que nous travaillions avec le serpent de hauteur minimale admettant une ligne de trois cellules qui n'est ni la première ni la dernière, contradiction.

Nous pouvons maintenant compter le nombre  $n_{max}(3, h)$  de serpents maximaux sachant que les serpents maximaux doivent avoir une pleine ligne à chaque extrémité du rectangle et que toutes les autres lignes contiennent deux cellules du serpent. Ces deux cellules sont soit adjacentes soit à chaque extrémité de la ligne et à partir d'en haut, elles sont aux extrémités des lignes. Lorsqu'une ligne contenant deux cellules adjacentes apparaît, la ligne suivante a aussi deux cellules adjacentes suivie de lignes qui ont des cellules non adjacentes. Finalement, en assemblant toutes ces contraintes, nous voyons que tous les serpents maximaux inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  ont la forme illustrée à la figure 6.12 lorsque  $h \geq 6$ . En comptant les possibilités, nous arrivons à  $2(h - 5)$  serpents maximaux.  $\square$

Une petite remarque en passant,

$$\ell_{max}(3, h) = \frac{(3 + 1)(h + 1)}{2}$$

qui est la longueur maximale des SPD inscrits dans un rectangle  $3 \times h$  plus un.

### Longueur maximale d'un serpent inscrits dans un $5 \times h$

Voyons ce que les rectangles  $5 \times h$  nous réservent.

**Proposition 6.3.2.** Pour tout  $h \geq 10$ , il existe des serpents de longueur  $3h + 4$  inscrits dans un rectangle  $5 \times h$ .

*Preuve.* La figure 6.13 montre des échantillons de serpents de longueur  $3h + 4$ . Nous observons que nous pouvons insérer dans le rectangle une ou plusieurs lignes à trois cellules (en rouge) entre les cinquième et sixième lignes qui préservent le serpent et la longueur  $3h + 4$  pour tout  $h \geq 10$ .

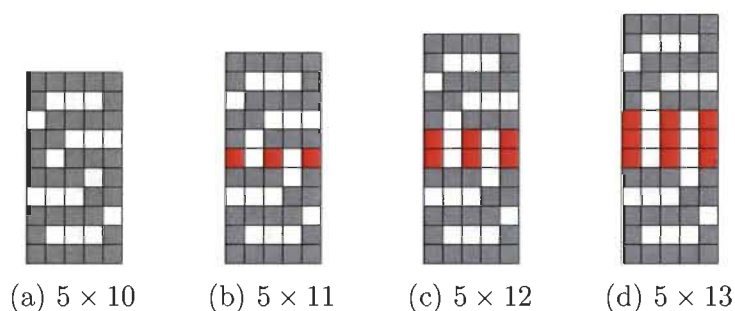


FIGURE 6.13 – Serpents de longueur  $3h + 4$

□

**Proposition 6.3.3.** Pour tout  $h \geq 7$ , il existe des serpents inscrits dans un rectangle  $5 \times h$  de longueur  $3h + \lfloor \frac{h}{7} \rfloor$ .

*Preuve.* La preuve apparaît à la figure 6.14 où nous avons exhibé des morceaux de serpent  $5 \times 7$  contenant  $3 \cdot 7 + 1$  cellules et constitués de deux serpents parallèles. Ces morceaux de serpent peuvent être superposés en échangeant les serpents parallèles auxquels nous imposons une réflexion afin d'obtenir des bouts de serpents avec  $3 \cdot 7k + k$  cellules.

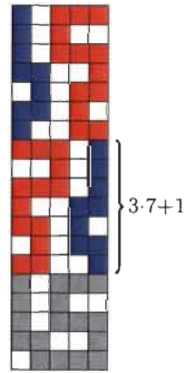


FIGURE 6.14 – Serpent inscrit dans un  $5 \times h$  de longueur  $3h + h/7 + \text{constante}$

Nous avons donc une construction qui permet d'obtenir un excédent d'une cellule au nombre  $3 \times 7$  à chaque superposition de ces tuiles de hauteur sept. Pour les valeurs intermédiaires entre deux multiples de 7, il est toujours possible de compléter avec une moyenne d'au moins trois cellules par rangée supplémentaire. La figure 6.15 montre tous les cas possibles.  $\square$

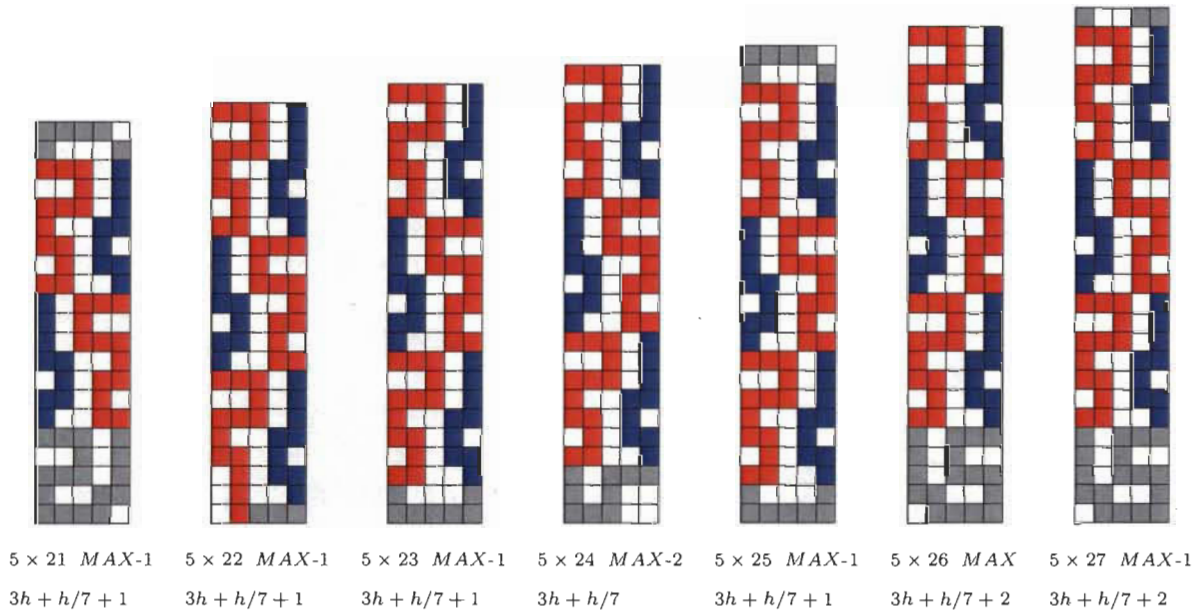


FIGURE 6.15 – Serpents inscrits dans un rectangle  $5 \times h$  de longueur au moins  $3h + \lfloor \frac{h}{7} \rfloor$

### Quelques conjectures

Une conjecture est faite concernant les serpents inscrits dans un rectangle  $5 \times h$  en relation avec la proposition 6.3.3.

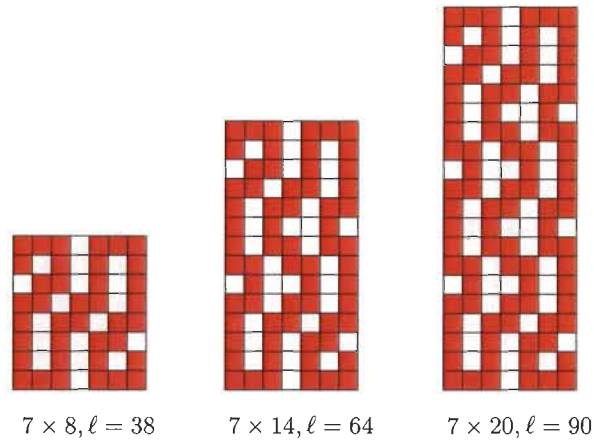
**Conjecture 6.3.1.** Les serpents inscrits dans un rectangle  $5 \times h$  sont de longueur maximale  $3h + \lfloor \frac{h}{7} \rfloor + cste$  où  $cste \leq 2$  est un entier non négatif.

$b \backslash h$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21
3	3	5	7	9	11	14	16	18	20	22	24	26	28	30
4	4	6	9	11	14	17	20	22	25	28	30	33	36	38
5	5	8	11	14	17	21	24	27	30	34	37	40	43	46
6	6	9	14	17	21	24	29	32	36	40	44	47	51	55
7	7	11	16	20	24	29	33	38	42	46	50	55	59	64
8	8	12	18	22	27	32	38	42	48	52	57	62	67	72
9	9	14	20	25	30	36	42	48	53	58	64	70	75	81
10	10	15	22	28	34	40	46	52	58	64	71	77	84	89
11	11	17	24	30	37	44	50	57	64	71	77	86	92	98
12	12	18	26	33	40	47	55	62	70	77	86	92	100	107
13	13	20	28	36	43	51	59	67	75	84	92	100	107	115
14	14	21	30	38	46	55	64	72	81	89	98	107	115	123

TABLE 6.2 – Longueur maximale des serpents inscrits dans un rectangle  $b \times h$

**Conjecture 6.3.2.** Pour tout entier positif  $h$  de la forme  $h = 8 + 6k, k \geq 0$ , les serpents de longueur maximale inscrits dans le rectangle  $7 \times h$  sont uniques à symétrie près et leur longueur est  $\ell_{max}(7, 8 + 6k) = 26k + 38$ .

*Idée de preuve.* Nous avons compté informatiquement les serpents inscrits dans un rectangle  $7 \times h$  pour  $h \leq 42$  et notre conjecture est corroborée par les valeurs obtenues. De plus, nous savons produire les serpents de longueur et format indiqués dans la conjecture pour des valeurs arbitraires de  $k$ . Si la conjecture est fautive, c'est qu'il existe des serpents plus longs dans ces rectangles. Il n'existe pas de serpent de longueur supérieure à celle donnée dans la conjecture pour  $h \leq 42$ .

FIGURE 6.16 – Serpents maximaux dans un rectangle  $7 \times h$ 

La figure 6.16 vérifie la conjecture précédente pour  $k = 0, 1, 2$ . Nous nous imaginons bien comment progresser pour les valeurs suivantes.

**Conjecture 6.3.3.** Pour tout entier positif  $h$  de la forme  $h = 7 + 8k, k \geq 0$ , les serpents de longueur maximale inscrits dans le rectangle  $8 \times h$  sont de longueur  $\ell_{max}(8, 7 + 8k) = 39k + 38$ . De plus, le serpent maximal inscrit dans le rectangle  $8 \times 7$  de longueur  $n = 38$  est unique à symétries près.

*Idée de preuve.* Cette conjecture est vérifiée pour les valeurs  $k = 0, 1, 2$ . En général ces serpents ne sont pas uniques à symétries près. Par contre, un des serpents maximaux inscrits dans ces rectangles possède une propriété géométrique intéressante et unique à notre connaissance. Ils sont caractérisés par leur périodicité et la présence d'une courbe discrète qui détermine uniquement ces serpents, c'est-à-dire qu'à partir de la courbe, nous pouvons reconstruire le polyomino complet (figure 6.17).

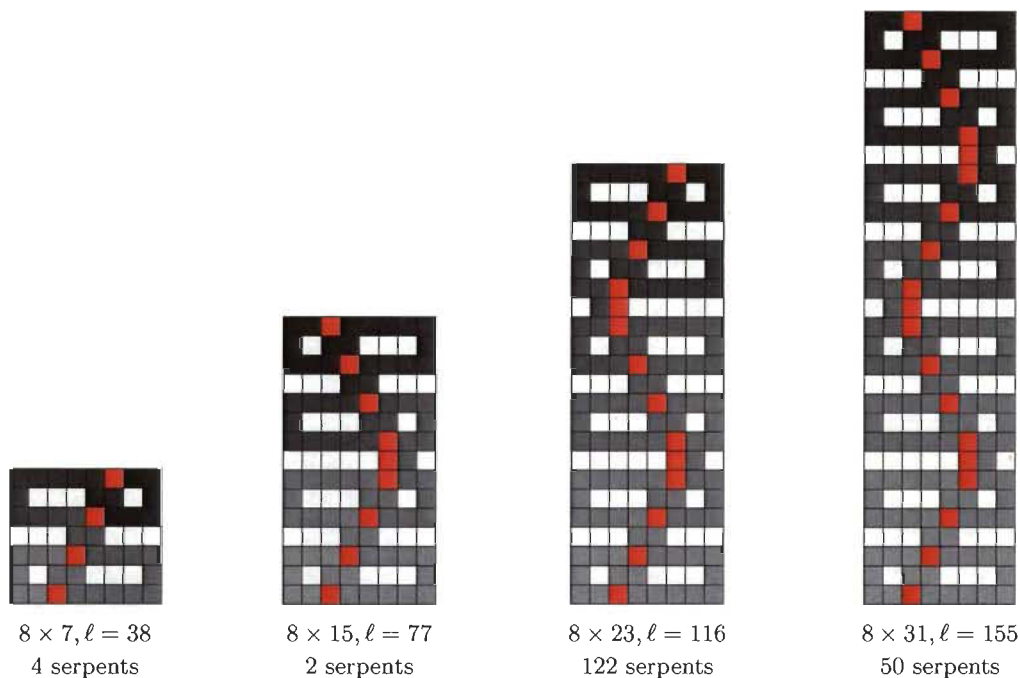


FIGURE 6.17 – Serpents maximaux dans un rectangle  $8 \times h$

Voici encore quelques conjectures sur les serpents maximaux inscrits.

**Conjecture 6.3.4.** Lorsque les dimensions du rectangle tendent vers l'infini, la densité de cellules occupées est de  $\frac{2}{3}$ . C'est une limite supérieure pour la longueur maximale des serpents inscrits.

*Idée de preuve.* Remplissons tout d'abord le rectangle avec des diagonales de cellules comme illustré à la figure 6.18. Ensuite, ajoutons et supprimons des cellules afin de connecter tous les serpents, le but étant bien entendu de supprimer le moins de cellules possibles afin de rester proche de la densité maximale. La figure 6.18 illustre cette méthode avec en bleu les changements. L'idée est d'arriver à caractériser ce passage afin de minimiser la perte de cellules.

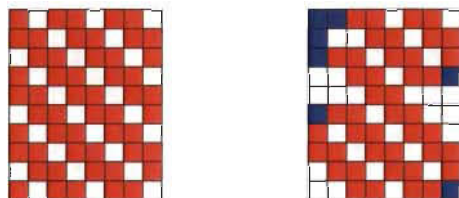


FIGURE 6.18 – Remplissage d'un rectangle avec des serpents diagonaux disjoints et passage à un serpent



Voici un serpent inscrit dans un rectangle  $100 \times 100$  montrant que lorsque les dimensions du rectangle deviennent importantes, la perte de cellules devient négligeable. Il contient 6543 cellules.

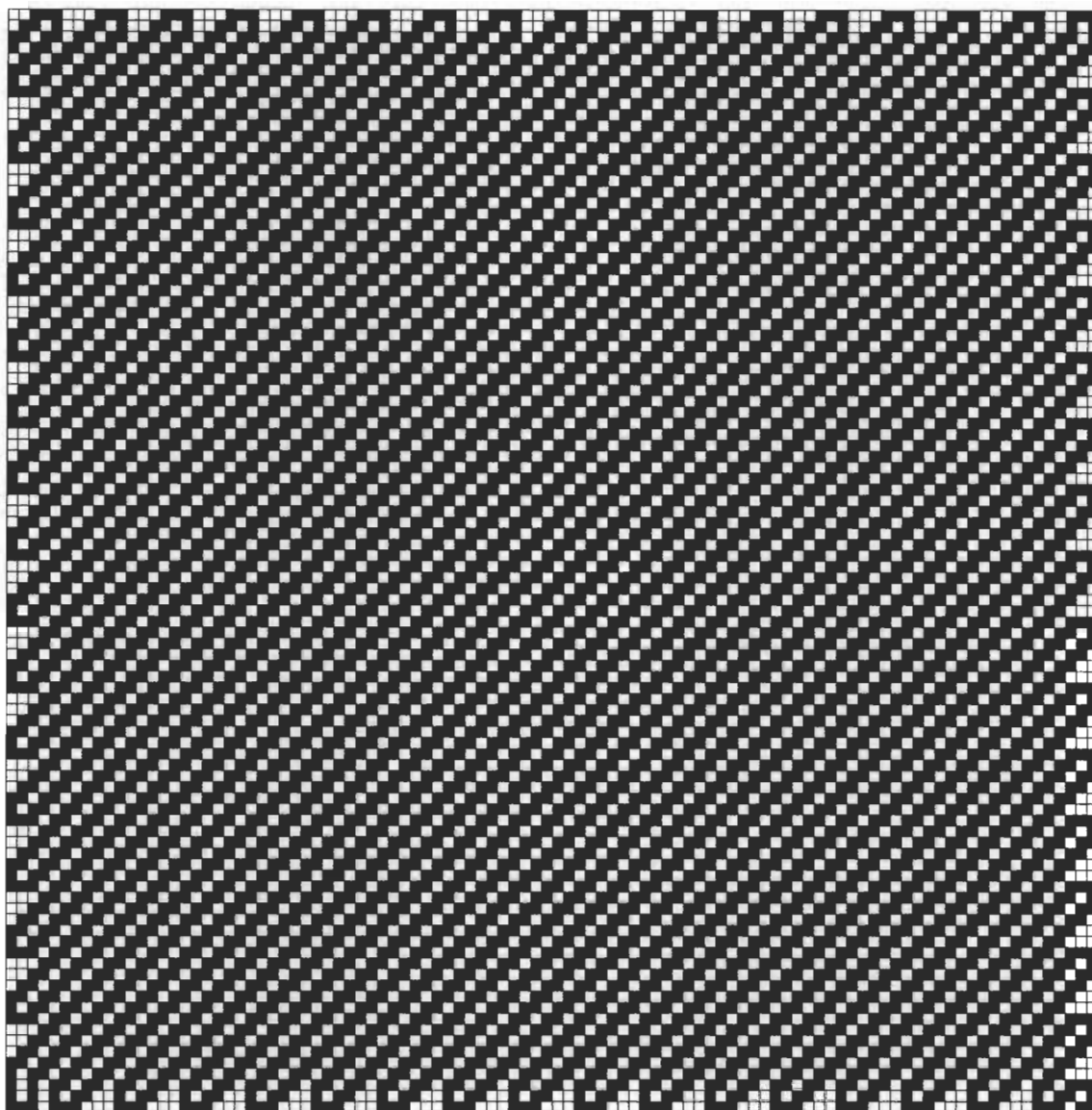


FIGURE 6.19 – Un serpent dans un  $100 \times 100$  de longueur 6543

Et une dernière conjecture pour la route mettant en scène une borne inférieure et une borne supérieure pour la longueur maximale des serpents inscrits.

**Conjecture 6.3.5.** Pour des entiers  $b \geq 6$  et  $h \geq 6$ , la longueur maximale des serpents inscrits dans un rectangle  $b \times h$  est strictement inférieure à

$$\left\lfloor \frac{2bh}{3} \right\rfloor + 1$$

et supérieure à

$$\left\lfloor \frac{2bh + 2}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{b + h - 8}{3} \right\rfloor + 2.$$

*Idée de preuve.* D'abord, remarquons que maximiser la longueur d'un serpent est équivalent à maximiser le nombre de contacts par les coins de ses cellules (nombre de « kiss »). Supposons que cette remarque soit vraie, nous observons que les bandes diagonales de cellules formées de pas disons N et E alternants dans un rectangle  $b \times h$ , tel qu'illustré à la figure 6.18, forment un ensemble de cellules de degrés un ou deux. Ces cellules maximisent le nombre de contacts par les coins des cellules occupées dans ce rectangle avec la propriété que ces diagonales forment un ensemble de serpents disjoints. Il est assez direct que cet ensemble de serpents couvre les deux tiers de l'aire du rectangle à l'entier près. De plus, l'ajout d'une cellule connecte nécessairement deux cellules de diagonales voisines (sauf si la cellule vide est dans un coin du rectangle). Cet ajout soit crée un cycle soit joint deux bandes diagonales pour former un serpent plus long. Il y a une seule position dans le rectangle qui peut joindre deux bandes diagonales pour en former une. Ceci montre qu'un serpent inscrit ne peut avoir plus de cellules que cette structure diagonale plus une cellule. La borne supérieure est donc  $\left\lfloor \frac{2bh}{3} \right\rfloor + 1$ .

Maintenant, si nous voulons former un serpent à partir de ces bandes diagonales, nous devons les connecter et cette connexion a un coût. C'est-à-dire que dans le pire des cas, pour connecter deux diagonales consécutives, nous devons éliminer deux cellules. Le nombre de connexion à faire dépend du demi-périmètre  $b + h$ . Il y a entre  $\frac{b-4}{3} + \frac{h-4}{3}$  et  $\frac{b-5}{3} + \frac{h-5}{3}$  de ces connexions à faire dans un rectangle selon la valeur du reste de la division de  $b + h$  par 3. Les deux diagonales adjacentes à la diagonale du rectangle constituent un cas différent : nous ajoutons deux cellules pour les connecter. Ces considérations procurent la borne inférieure énoncée dans la proposition.

C'est sur cette conjecture que se termine le chapitre final de ce mémoire et notre aventure commune sur les polyominoes serpents.

# Conclusion

*Arrêtons-nous un moment et remercions le ciel  
que les araignées ne volent pas.*

Nous voilà arrivés à la fin inéluctable, là où l'histoire se termine... mais pas l'aventure ! Avons-nous répondu à certaines des questions posées à l'introduction ? Nous connaissons maintenant beaucoup de choses sur les serpents partiellement dirigés inscrits et non inscrits. Il nous manque encore une expression rationnelle pour la série génératrice des serpents inscrits. En ce qui concerne les serpents, nous avons le détail des structures pour certaines dimensions de rectangles (chapitre 3). Le chapitre 6 quant à lui donne certaines pistes concernant la longueur et le nombre de serpents maximaux. Il y a énormément de travail en perspective. Nous avons également mis en évidence une bijection entre les chemins partiellement dirigés et les serpents partiellement dirigés.

En conclusion, j'espère que ce mémoire vous a fait vous poser des questions sur ces objets d'apparence enfantine que sont les polyominoes. Peut-être certains passages vous laissent sur votre faim comme le chapitre 4 ou le chapitre 6. C'est normal. Pour ce dernier, certaines conjectures sont vieilles de quelques jours seulement et n'ont pas eu le temps d'être aiguisées.

# Remerciements

*J'ai atteint l'âge où mon cerveau est passé de « je ne devrais pas dire ça » à « rien à foutre, voyons ce qu'il se passe ».*

C'est donc ici qu'il faut dire merci. Merci à Alain Goupil pour sa patience infinie et pour m'avoir introduit au monde des mathématiques discrètes. Voilà également quelques centaines de mercis pour ceux qui croient en mériter.



# Bibliographie

- [1] C. Banderier, P. Flajolet, *Basic analytic combinatorics of Directed Lattice paths*, Theoret. Comp. Sci., 281(1-2), 37-80, 2002. Article sélectionné en l'honneur de Maurice Nivat.
- [2] A.T. Benjamin, J.J. Quinn, *Proofs that Really Count : The Art of Combinatorial Proof*, Dolciani Mathematical Expositions, Mathematical Association of America, 2003.
- [3] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*, LaCIM, Montréal, 1994
- [4] A. Blondin-Massé, A. Goupil, M. Lapointe, *Tree and snake polyominoes of maximal area*, 9e Conférence internationale sur la génération aléatoire de structures combinatoires (GASCom 2014), Bertinoro, Italie, 23-25 juin 2014.
- [5] P. Bornsztein, M. Omarjee, *Cours - Equations fonctionnelles*, Stage olympique de Saint-Malo, juillet 2003.
- [6] M. Bousquet-Mélou, *Families of prudent self-avoiding walks*, J. of Comb. Theory, Series A, 117, 313-344, 2010.
- [7] M. Bousquet-Mélou, A. Rechnitzer, *The site perimeter of bargraphs*, Adv. in Applied Math., vol. 31, n°1, 86-112, 2003.
- [8] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.
- [9] I.M. Gessel, *An Introduction to lattice path enumeration*, tutorial monograph, 2007.
- [10] A. Goupil, H. Cloutier, *Enumeration of 3D polyominoes inscribed in a rectangular prism*, DMTCS proc. FPSAC 2011, 2012.
- [11] A. Goupil, H. Cloutier, F. Nouboud, *Enumeration of polyominoes inscribed in a rectangle*, Discrete Appl. math., vol 158(18), 2014-2023, 2010.
- [12] A. Goupil, H. Cloutier, M-E. Pellerin, *Generating functions for inscribed polyominoes*, Discrete Appl. math., vol 161(1-2), 151-166, 2013.
- [13] A. Goupil, M-E. Pellerin, J. de Wouters, *Partially directed snake polyominoes*, <http://arxiv.org/abs/1307.8432v2>, 2014.

- [14] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 1*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [15] R. P. Stanley, *Polygon dissections and standard Young tableaux*, J. Comb. Theory, Ser. A, 76, 175-177, 1996.
- [16] H.S. Wilf, *generatingfunctionology*, internet edition, Academic Press Inc, 1994.