
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
PASCAL LEFEBVRE

LES INÉGALITÉS DE BELL CINQUANTE ANS PLUS TARD

OCTOBRE 2014

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

C'est environ trois décennies après qu'Einstein, Podolsky et Rosen eurent formulé leur argument sur la complétude de la mécanique quantique que J. S. Bell a montré, en 1964, que certaines de leurs idées pouvaient être testées expérimentalement. Plusieurs autres inégalités de Bell ont subséquemment été développées et mises à l'essai. Les résultats suggèrent que la mécanique quantique est correcte et ils sont souvent interprétés comme contredisant les théories réalistes locales. Pourtant, il a été montré il y a longtemps que tous les tests sur les inégalités de Bell utilisent des suppositions supplémentaires qui, si montrées fausses, pourraient expliquer les résultats expérimentaux. Nous examinerons de manière critique ces échappatoires, en particulier celles qui impliquent la détection ou des variables cachées dépendantes du temps et des montages. Ce faisant, nous allons montrer la différence entre indépendance physique et logique, distinction cruciale à une bonne compréhension de la localité.

Table des matières

Résumé	iii
Table des matières	v
Liste des figures	vii
1 Introduction	1
1.1 Bref historique	1
1.2 La structure du mémoire	2
2 Les articles fondateurs	5
2.1 Le paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen	5
2.2 La réponse de Bohr	9
2.3 La reformulation de Bohm	11
2.4 Les contributions de Bell	12
2.4.1 L'inégalité de Bell	12
2.4.2 Les beables locales	13
2.4.3 Variables libres et localité causale	18
2.4.4 Sur l'article « Speakable and unspeakable in quantum mechanics »	19
3 Des inégalités et des concepts nouveaux	21
3.1 L'apport de Clauser, Horne, Shimony, Holt et Freedman	21
3.1.1 L'inégalité généralisée de CHSH	22
3.1.2 Théories locales objectives	25
3.1.3 Détections partielles	29

3.2	L'expérience d'Aspect <i>et al.</i>	32
3.3	Localité forte, localité simple et complétude	33
3.4	Les modèles à plusieurs particules	37
3.4.1	Contradiction sans inégalité	37
3.4.2	Modèle sans spin	41
4	Échappatoires	45
4.1	Les modèles de Fine	45
4.1.1	Les modèles prismes	47
4.1.2	Les modèles de synchronisation	48
4.2	L'échantillonnage juste d'Adenier et Khrennikov	49
4.3	Les contributions de De Raedt et Michielsen	51
4.3.1	Rôle des fenêtres de temps	52
4.3.2	De la théorie à l'expérience	53
4.3.3	Localité d'Einstein vs localité de Bell	54
4.3.4	Importance de l'efficacité de détection	56
4.4	Les espaces de Hess et Philipp	57
4.4.1	Espace des paramètres de Bell	58
4.4.2	Espace des paramètres incluant les paramètres d'appareils	59
4.4.3	Espace agrandi	60
4.5	Interprétation statistique	61
4.5.1	Tests de pureté	61
4.5.2	Conditions de localité	63
4.6	Arguments statistiques de Gill, Weihs, Zeilinger et Zukowski	64
5	Conclusion	67
	Bibliographie	69

Table des figures

2.1	Le dispositif de Bohm	11
3.1	Le dispositif à quatre particules de GHSZ	38
3.2	Le dispositif sans spin de GHSZ	42

Chapitre 1

Introduction

1.1 Bref historique

C'est vers 1925 que le formalisme de la mécanique quantique a été complété, suite à plusieurs décennies de travaux par des scientifiques tels que Planck, Bohr, Heisenberg, Einstein et Dirac pour n'en nommer que quelques-uns. Leurs efforts ont décrit plusieurs phénomènes qui échappaient à la mécanique classique et à l'électromagnétisme, incluant certaines quantifications et la dualité onde-particule.

Malgré les impressionnantes prédictions de la mécanique quantique, certains problèmes conceptuels persistent. La fonction d'onde, présente dans la célèbre équation de Schrödinger, est difficile à interpréter : pour Schrödinger, elle est liée à la densité de charge, alors que pour Born, c'est plutôt à la densité de probabilité qu'elle est liée. La plupart des interprétations actuelles donnent raison à Born à ce sujet.

Le concept de mesure est particulier dans le contexte de la mécanique quantique. Contrairement au cas classique où une mesure ne donne qu'un résultat précis, une me-

sure sur un système quantique peut donner plusieurs résultats différents. Ce problème a été en partie résolu par la proposition de Dirac et de von Neumann comme quoi le vecteur d'état s'effondrerait lors de la mesure et qu'il n'en sortirait qu'un seul résultat. Cette solution a un revers : elle paraît fortement non locale. Cette particularité est bien embêtante considérant les multiples prédictions vérifiées de la relativité restreinte. Elle est d'ailleurs à la base du célèbre paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen. La contradiction qu'ils soulèvent implique que la mécanique quantique est incomplète.

Les théories à paramètres cachés corrigeaient intuitivement cette problématique soulevée par Einstein, Podolsky et Rosen. Elles permettaient de prédire avec certitude certaines valeurs inaccessibles par la mécanique quantique. Il a cependant été montré par Bell qu'on ne peut compléter la mécanique quantique que par des paramètres non locaux. Puis des expériences, en particulier celle d'Aspect et de ses collaborateurs, ont montré que les prédictions de la mécanique quantique étaient plus adéquates pour décrire les données obtenues que les prédictions des théories locales à variables cachées.

Il existe cependant de nombreuses échappatoires aux travaux de Bell et plusieurs groupes ont développé des versions différentes des conclusions de Bell. Le problème de la localité et de la complétude de la mécanique quantique n'est donc pas entièrement résolu.

1.2 La structure du mémoire

Ce mémoire vise à présenter de manière critique la problématique de non-localité de Bell, de ses origines aux développements récents sur le sujet.

Le chapitre 2 consiste en un développement plus rigoureux des arguments historiques qui ont mené aux inégalités de Bell. Il inclut les arguments originaux d'Einstein,

Podolsky et Rosen sur la complétude de la mécanique quantique. La réponse de Bohr y est aussi présentée, ainsi que la reformulation de Bohm encore utilisée de nos jours. Les travaux de Bell y sont aussi détaillés, en particulier ceux directement liés à ses inégalités.

Le chapitre 3 présente divers développements faits autour des inégalités de Bell. On y trouve les travaux de Clauser *et al.* sur des inégalités alternatives et plus générales que celles de Bell. Les travaux de Ballentine et Jarrett font la lumière sur différents types de localité et pointent vers les utilisations faites par Bell. De plus, les contradictions du théorème de Bell sont présentées différemment par un modèle faisant intervenir plus que deux particules, tel que publié par Greenberger *et al.*

Le chapitre 4 explore différentes échappatoires au théorème de Bell. Certaines failles expérimentales sont présentées par l'intermédiaire d'un modèle d'Adenier et Khrennikov. Le modèle de Hess et Philipp y est aussi détaillé et porte sur les dépendances temporelles ignorées par Bell. Ce modèle est remis en doute par les propositions statistiques de Gill *et al.*

Le chapitre 5 constitue la conclusion.

Chapitre 2

Les articles fondateurs

2.1 Le paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen

Est-ce que la mécanique quantique est correcte ? Est-ce que la description donnée par la mécanique quantique est complète ? Ces deux questions ont été posées par Einstein, Podolsky et Rosen [1] il y a bien longtemps. Selon eux, pour qu'une théorie soit satisfaisante, on doit répondre à ces deux questions par l'affirmative.

On peut se poser la question : mais qu'est-ce qu'une théorie complète ? Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) répondent par : *une théorie est complète si chaque élément de la réalité physique a une contrepartie dans la théorie physique*. Mais qu'est-ce qu'un élément de réalité physique ?

Un critère jugé suffisant, mais pas nécessaire, pour déterminer ce qu'est un élément de réalité physique est : « si, sans d'aucune manière influencer un système, on peut prédire avec certitude la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette quantité physique ». Ce critère est en accord

avec les idées classiques et quantiques de la réalité.

Un des exemples donnés par EPR consiste à prendre la fonction d'onde :

$$\psi = \exp\left(\frac{ip_0x}{\hbar}\right), \quad (2.1)$$

où \hbar est la constante de Planck divisée par 2π , p_0 une constante, et x la position d'une particule. En appliquant l'opérateur correspondant à la quantité de mouvement sur la fonction d'onde ψ :

$$P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.2)$$

on trouve :

$$P\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_0\psi. \quad (2.3)$$

Ainsi, ψ est une fonction propre de P . C'est dire que la mesure de la quantité de mouvement dans un état représenté par ψ donne nécessairement la valeur p_0 . Comme on a pu prédire avec certitude la valeur de la quantité de mouvement sans perturber le système, par l'argument du dernier paragraphe, on conclut qu'il existe un élément de la réalité physique correspondant à la quantité de mouvement de la particule dans l'état ψ .

Cet argument ne tient plus si la fonction d'onde ψ n'est pas une fonction propre de la quantité qu'on souhaite prédire. Si, par exemple, on cherche la position de la particule, la mécanique quantique va plutôt prédire une probabilité que la position soit incluse entre a et b pour une particule dans une boîte de largeur L . Si ψ est donné par (2.1), on a :

$$P(a, b) = \frac{1}{L} \int_a^b \psi\psi^* dx = \frac{1}{L} \int_a^b dx = \frac{b-a}{L}. \quad (2.4)$$

Il est donc impossible de connaître la position exacte sans effectuer une mesure sur le système. On ne peut donc pas conclure qu'il existe un élément de réalité correspondant à la position de la particule.

De manière générale, lorsque deux opérateurs correspondant à deux quantités physiques différentes ne commutent pas, il est impossible d'avoir une connaissance précise de ces deux quantités physiques simultanément. La mesure de l'une détruit toute information à propos de l'autre.

Cet exemple montre que : ou bien la mécanique quantique est incomplète, ou bien deux quantités physiques n'ont pas de réalité physique simultanée si les opérateurs correspondants ne commutent pas. Il est généralement supposé que la fonction d'onde contient une description complète de la réalité physique. Selon EPR, ceci mène à une contradiction avec le critère de réalité qu'ils utilisent.

En effet, supposons deux sous-systèmes 1 et 2 qui interagissent pendant un temps T et qui sont ensuite séparés. L'état du système global 1 + 2 comprenant les deux sous-systèmes peut être décrit par une fonction Ψ . Supposons une quantité physique A du sous-système 1 ayant pour valeurs propres les valeurs a_n et pour fonctions propres les fonctions $u_n(x_1)$. La fonction Ψ peut donc être décrite comme la série infinie :

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1). \quad (2.5)$$

Une mesure de A qui donne pour résultat la valeur a_n implique donc que le sous-système 1 se trouvera sous l'état $u_n(x_1)$, alors que le sous-système 2 sera sous l'état $\psi_n(x_2)$.

On peut effectuer la même démarche avec une quantité physique B , ayant pour valeurs propres les valeurs b_n et pour fonctions propres les fonctions $v_n(x_1)$. La fonction Ψ sera décrite comme :

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x_2) v_n(x_1). \quad (2.6)$$

Une mesure de B qui donne pour résultat la valeur b_n déterminera donc que le sous-

système I est dans l'état $v_n(x_1)$ et que le sous-système II est dans l'état $\phi_n(x_2)$. En général, les fonctions ϕ et ψ diffèrent. Puisque les deux sous-systèmes n'interagissent plus, il a été possible d'associer deux fonctions d'onde différentes à la réalité physique du sous-système II seulement par un choix de mesure sur le sous-système I .

On peut montrer que ces fonctions propres peuvent appartenir à des opérateurs non commutants. Prenons par exemple l'état :

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (2.7)$$

où x_0 est une constante. La mesure de la quantité de mouvement de la première particule avec résultat p donne la fonction propre :

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1}. \quad (2.8)$$

La fonction $\Psi(x_1, x_2)$ peut-être mise sous la forme :

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \quad (2.9)$$

où

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}. \quad (2.10)$$

La fonction ψ_p correspond à une fonction propre de l'opérateur quantité de mouvement de la seconde particule qui peut être écrit comme :

$$P = P_2 = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (2.11)$$

De manière similaire, il est possible de mesurer la position de la première particule avec pour fonction propre :

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \quad (2.12)$$

ce qui implique donc :

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \quad (2.13)$$

où

$$\phi_x(x_2) = h\delta(x - x_2 + x_0). \quad (2.14)$$

Cette fonction propre correspond à l'opérateur position de la seconde particule qui peut être écrit par :

$$Q = X_2. \quad (2.15)$$

Or, les opérateurs P et Q ne commutent pas, car :

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i}. \quad (2.16)$$

Ceci pose problème puisqu'il a été montré plus tôt que : ou bien la mécanique quantique est incomplète, ou bien deux quantités physiques n'ont pas de réalité physique simultanée si les opérateurs correspondants ne commutent pas. Or P et Q , la quantité de mouvement et la position de la seconde particule, peuvent être prédites avec certitude sans influencer la seconde particule. Selon le critère d'EPR, elles ont donc une réalité physique. Par conséquent, la mécanique quantique est incomplète.

2.2 La réponse de Bohr

En réponse aux arguments d'EPR, Bohr a publié un article [2] présentant un point de vue différent. Selon lui, il faut abandonner la vision classique de la mesure et de la réalité physique.

Au coeur de son argumentation siège le principe d'incertitude de Heisenberg, décrit

par l'équation :

$$\Delta p \Delta q \sim h, \quad (2.17)$$

où Δp est l'incertitude sur la quantité de mouvement, Δq , l'incertitude sur la position, et h , la constante de Planck. Selon Bohr, il y a ambiguïté quant au critère de réalité utilisé par Einstein, Podolsky et Rosen, en particulier en ce qui concerne la partie « sans d'aucune manière perturber le système ».

En effet, tout processus de mesure a une influence sur le système observé. Il faudrait donc inclure les appareils de mesure dans la description du phénomène. Par le principe d'incertitude d'Heisenberg, il peut y avoir perte d'information sur une quantité physique lors de la mesure d'une autre.

Bohr suppose donc que certains aspects de la description d'un phénomène physique sont complémentaires. Ceci vient de l'impossibilité, par exemple, de contrôler le transfert de quantité de mouvement lors d'une mesure de position ou le déplacement lors d'une mesure de quantité de mouvement. La combinaison de ces aspects et, par extension, des procédés expérimentaux qui leur sont liés, correspond à la méthode de la physique classique. La théorie n'est donc pas incomplète : il est plutôt impossible de définir certaines quantités physiques de manière non ambiguë.

Supposons deux particules passant chacune indépendamment par une fente d'un unique diaphragme rigide. Si la quantité de mouvement du diaphragme est mesurée avant et après le passage des particules, il sera possible de connaître la somme des composantes perpendiculaires aux fentes des quantités de mouvement ainsi que la différence des positions initiales des deux particules. Ceci permet, à l'aide d'une seule mesure supplémentaire sur une des particules, de déterminer la position ou la quantité de mouvement de l'autre particule.

L'ambiguïté est la suivante : en choisissant de mesurer la quantité de mouvement

d'une particule, le déplacement incontrôlé de la particule induit par le processus de mesure empêche de déduire la position du diaphragme par rapport au reste du montage, et donc il n'y a plus aucune base pour prédire la position de l'autre particule. C'est là que l'argument d'Einstein, Podolsky et Rosen échoue selon Bohr, puisque l'expression « sans d'aucune manière perturber le système » n'est pas respectée.

2.3 La reformulation de Bohm

Bohm a conçu un dispositif réalisable expérimentalement pour illustrer le problème d'Einstein, Podolsky et Rosen [3]. La situation expérimentale qu'il décrit est illustrée à la Figure 2.1. Supposons une source S qui émet deux particules de spin $\frac{1}{2}$ dans l'état singulet, c'est-à-dire de spin total nul. Cet état du système est décrit par :

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+; \hat{n}\rangle |-\; \hat{n}\rangle - |-\; \hat{n}\rangle |+\; \hat{n}\rangle], \quad (2.18)$$

où $+$ et $-$ sont les signes du spin lorsque mesuré selon un axe \hat{n} . L'état $|\varphi\rangle$ est invariant sous rotation et ne dépend donc pas de l'axe \hat{n} choisi [4]. Les deux particules sont habituellement propulsées dans des directions opposées. En plaçant des détecteurs, tels que des appareils de Stern-Gerlach, à des distances arbitrairement éloignées de la source, il est possible de mesurer une composante donnée du spin des particules émises. La mesure de la composante \hat{n} du spin d'une des particules permet de prédire avec certitude la valeur de la composante \hat{n} du spin de l'autre particule.

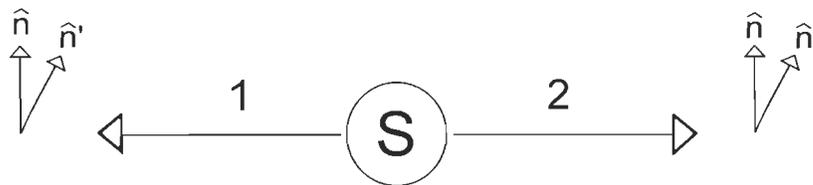


FIGURE 2.1 – Le dispositif de Bohm

2.4 Les contributions de Bell

2.4.1 L'inégalité de Bell

Bell a développé son inégalité [5] (l'article est reproduit dans [6], p. 14), à partir des problématiques soulevées par EPR. Tout comme eux, il débute en supposant la mesure de composantes de spin sur deux particules. Soit \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs unitaires spécifiant les axes selon lesquels les spins des particules sont mesurés. Soit λ des paramètres cachés qui spécifieraient avec plus de précision que les vecteurs unitaires les propriétés de spin. Ceci signifie que les résultats de mesure A et B des composantes du spin (en unités de $\hbar/2$) sont spécifiés par les axes et les paramètres cachés de sorte que :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{a}, \lambda) &= \pm 1, \\ B(\mathbf{b}, \lambda) &= \pm 1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

La moyenne du produit des projections de spin peut alors être définie comme :

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda), \tag{2.20}$$

où $\rho(\lambda)$ est une densité de probabilité normalisée. Par définition de $A(\mathbf{a}, \lambda)$ et de $B(\mathbf{b}, \lambda)$, et puisque $\rho(\lambda)$ est normalisé, il découle que la valeur minimale de $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est -1 . Puisque la mécanique quantique prédit que les spins sont parfaitement anticorrélés lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, on doit avoir :

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda). \tag{2.21}$$

Avec ceci, $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ peut être reformulé comme :

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda). \tag{2.22}$$

En ajoutant un nouveau vecteur unitaire \mathbf{c} , on peut développer l'expression :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)], \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda) - 1], \end{aligned} \quad (2.23)$$

puis, utilisant les propriétés des valeurs absolues :

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)], \\ &\leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

C'est l'inégalité de Bell.

2.4.2 Les beables locales

La théorie des beables [7] est modelée d'après la théorie des observables locales. La terminologie anglaise montre bien la subtilité : *be-able et observ-able*. L'idée est d'exprimer des phénomènes quantiques en termes classiques. Selon Bell, ceci est possible par l'utilisation des beables plutôt que des observables. Malgré la précision mathématique des observables qui sont représentées par des opérateurs hermitiques, il est difficile physiquement d'identifier précisément quels processus sont des observations. Il devrait être possible cependant de décrire les observables par les beables et de donner aux observables une signification physique précise.

Les difficultés en mécanique quantique concernant l'effondrement de la fonction d'onde lors d'une mesure peuvent être évitées par la théorie des beables. Si la fonction d'onde n'est pas considérée comme une beable, mais plutôt comme un outil mathématique, son comportement étrange n'a plus à être expliqué. C'est analogue à l'utilisation des potentiels ajoutés dans les théories de Maxwell (habituellement identifiés par \mathbf{A} et ϕ).

Supposons deux régions éloignées de l'espace-temps 1 et 2. Les événements dans 2 ne devraient pas instantanément influencer les événements dans 1, mais leurs cônes de lumière peuvent se croiser et corrélérer les événements. Soit N la spécification de toutes les beables appartenant au croisement des deux cônes de lumière. Si Λ est la spécification de certaines beables de la région 1, et M , la spécification de certaines beables de la région 2, alors pour une beable A localisée dans 1 et pour une théorie localement causale, on a :

$$\{A|\Lambda, N, M\} = \{A|\Lambda, N\}. \quad (2.25)$$

Ici, le trait droit $|$ indique une probabilité conditionnelle. Bell prétend que la mécanique quantique ordinaire n'est pas localement causale. Son exemple est le suivant : supposons un noyau radioactif qui émet une seule particule α et supposons que ce noyau soit entouré de détecteurs de particules α . Tant qu'aucun détecteur ne perçoit de particule α , il y a une chance que chacun des appareils puisse détecter la particule. Cependant, aussitôt qu'un appareil détecte la particule α , les chances qu'un autre appareil puisse détecter la particule deviennent nulles et ce peu importe la région de l'espace-temps où se trouvaient les appareils. La mécanique quantique n'est donc pas localement causale.

Supposons maintenant deux beables A et B appartenant chacune aux régions 1 et 2 respectivement et ayant comme propriété :

$$\begin{aligned} |A| &\leq 1, \\ |B| &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considérons la distribution :

$$\begin{aligned} \{A, B|\Lambda, M, N\} &= \{A|\Lambda, M, N, B\}\{B|\Lambda, M, N\}, \\ &= \{A|\Lambda, N\}\{B|M, N\}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

où, selon Bell, la seconde égalité est vraie pour une théorie localement causale. On remarque que la corrélation entre A et B n'apparaît que par N .

La valeur moyenne du produit AB est donnée par :

$$\begin{aligned} p(\Lambda, M, N) &= \sum_{A,B} AB\{A, B|\Lambda, M, N\} = \sum_{A,B} AB\{A|\Lambda, N\}\{B|M, N\}, \\ &= \bar{A}(\Lambda, N)\bar{B}(M, N), \end{aligned} \quad (2.28)$$

où

$$|\bar{A}| \leq 1, \quad |\bar{B}| \leq 1. \quad (2.29)$$

Si Λ' et M' sont des spécifications alternatives de Λ et M , alors :

$$\begin{aligned} p(\Lambda, M, N) \pm p(\Lambda, M', N) &= \bar{A}(\Lambda, N)[\bar{B}(M, N) \pm \bar{B}(M', N)], \\ p(\Lambda', M, N) \pm p(\Lambda', M', N) &= \bar{A}(\Lambda', N)[\bar{B}(M, N) \pm \bar{B}(M', N)]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En utilisant les propriétés de \bar{A} et \bar{B} :

$$\begin{aligned} |p(\Lambda, M, N) \pm p(\Lambda, M', N)| &\leq |\bar{B}(M, N) \pm \bar{B}(M', N)|, \\ |p(\Lambda', M, N) \pm p(\Lambda', M', N)| &\leq |\bar{B}(M, N) \pm \bar{B}(M', N)|, \end{aligned} \quad (2.31)$$

puis,

$$|p(\Lambda, M, N) \pm p(\Lambda, M', N)| + |p(\Lambda', M, N) \mp p(\Lambda', M', N)| \leq 2. \quad (2.32)$$

Supposons maintenant que les spécifications Λ , M et N soient chacune données en

deux parties, telles que :

$$\begin{aligned}\Lambda &\equiv (a, \lambda), \\ M &\equiv (b, \mu), \\ N &\equiv (c, \nu).\end{aligned}\tag{2.33}$$

Si seulement a , b et c sont pertinentes, on peut prendre la moyenne de λ , μ et ν sur une distribution de probabilité afin de les éliminer. On peut définir :

$$P(a, b, c) = \overline{p((a, \lambda), (b, \mu), (c, \nu))},\tag{2.34}$$

où la barre représente la moyenne sur les variables (λ, μ, ν) . On suppose que les distributions de ces variables sont localement causales. On a donc :

$$\begin{aligned}|P(a, b, c) \pm P(a, b', c)| &\leq \overline{|p((a, \lambda), (b, \mu), (c, \nu)) \pm p((a, \lambda), (b', \mu'), (c, \nu))|}, \\ |P(a', b, c) \mp P(a', b', c)| &\leq \overline{|p((a', \lambda'), (b, \mu), (c, \nu)) \mp p((a', \lambda'), (b', \mu'), (c, \nu))|}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

On trouve finalement l'inégalité :

$$|P(a, b, c) \mp P(a, b', c)| + |P(a', b, c) \pm P(a', b', c)| \leq 2.\tag{2.36}$$

La mécanique quantique ne satisfait pas toujours cette inégalité. Supposons la décomposition d'un pion neutre en deux photons se propageant dans des directions opposées. Si $|\psi\rangle$ est l'état d'un photon ayant un angle de polarisation θ , alors l'état de spin combiné des deux photons est :

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle |\pi/2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi/2\rangle |0\rangle.\tag{2.37}$$

La projection de $|s\rangle$ sur l'état $\langle t| = \langle \theta| \langle \phi|$, qui représente deux polariseurs à angles θ et ϕ , donne la probabilité que les deux photons passent les polariseurs. Cette probabilité

est :

$$P(1, 1) = |\langle t|s \rangle|^2 = \frac{1}{2} |\sin(\theta - \phi)|^2. \quad (2.38)$$

Les arguments 1 de $P(1, 1)$ représentent la détection du photon, tandis qu'un argument 0 représentera la non-détection. En ajoutant des déphasages de $\frac{\pi}{2}$ aux polariseurs, on peut trouver de manière identique les probabilités des différentes configurations de détection. On trouve donc :

$$\begin{aligned} P(1, 1) &= \frac{1}{2} |\sin(\theta - \phi)|^2, \\ P(1, 0) &= \frac{1}{2} |\cos(\theta - \phi)|^2, \\ P(0, 1) &= \frac{1}{2} |\cos(\theta - \phi)|^2, \\ P(0, 0) &= \frac{1}{2} |\sin(\theta - \phi)|^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

La valeur moyenne est donnée par :

$$\begin{aligned} P(\theta, \phi) &= P(1, 1) + P(0, 0) + P(1, 0) + P(0, 1), \\ &= 1 - \frac{x\Omega}{4\pi} (1 + \cos 2(\theta - \phi)), \end{aligned} \quad (2.41)$$

où ont été ajoutés la probabilité x que la désintégration du pion fonctionne et l'angle solide Ω sous-tendu par chaque appareil. En utilisant cette expression dans l'inégalité (2.36) trouvée précédemment :

$$\begin{aligned} &|P(\theta, \phi) - P(\theta, \phi')| + P(\theta', \phi) + P(\theta', \phi') - 2 \\ &= \frac{x\Omega}{4\pi} \{ |\cos(2(\theta - \phi)) - \cos(2(\theta - \phi'))| - \cos(2(\theta' - \phi)) - \cos(2(\theta' - \phi')) - 2 \}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Considérons certaines valeurs de θ et de ϕ telles que :

$$\phi = 0, \quad 2\theta = \frac{\pi}{4}, \quad -2\phi' = \frac{\pi}{2}, \quad 2\theta' = \frac{3\pi}{4}. \quad (2.43)$$

Ces valeurs impliquent que le facteur entre crochets de l'équation précédente se simplifie à $2(\sqrt{2} - 1)$. Ceci est problématique puisque ce terme devrait être négatif s'il respectait bien l'inégalité.

2.4.3 Variables libres et localité causale

Bell a lui-même admis que sa théorie des beables n'était pas parfaite ([6], p. 100). Il a ajouté les corrections et précisions suivantes suite à des discussions avec Clauser, Horne et Shimony.

Dans sa théorie des beables, Bell suppose que les états des instruments sont des variables libres. Ceci implique pour Bell que les valeurs de ces variables n'ont d'influence que sur le cône de lumière futur et ne contiennent donc aucune information sur ce qui s'est produit avant. Pour a , b et c des variables importantes liées aux appareils, et λ , μ et ν , d'autres variables, on a mathématiquement :

$$\{\nu|a, b, c\} = \{\nu|a', b, c\} = \{\nu|a, b', c\} = \{\nu|a', b', c\}. \quad (2.44)$$

Bell défend cependant que d'autres propositions comme :

$$\{\nu|a, b, c\} = \{\nu|c\}, \quad (2.45)$$

sont trop fortes et donc moins raisonnables.

Bell fait appel à la libre volonté de l'expérimentateur. La critique est que c'est un argument métaphysique qui n'est pas prouvé et qui pourrait être faux. Bell défend son point par l'argument suivant : puisque pour tout système il existe une infinité de variables extérieures et que ces variables extérieures sont totalement incontrôlables, il est impossible de savoir ce qui aurait pu se produire si un de ces éléments avait été

différent. Selon lui, ces changements sont minimes et ne peuvent expliquer un si gros désaccord entre localité et mécanique quantique.

Finalement, Bell décrit un modèle où les variables sont suffisamment libres en ce qui concerne l'expérience en cours. Il remplace les expérimentateurs par des machines déterministes. Selon lui, une machine qui génère aléatoirement une décision est suffisamment libre puisqu'elle fait appel à un processus long et dynamique qui est très sensible à de petits changements dans les conditions initiales.

2.4.4 Sur l'article « *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* »

Les fondements de la mécanique quantique reposent sur les observations. Il n'y a pas de détails sur les phénomènes : la mécanique quantique décrit les réponses des appareils de mesure.

Selon Bell ([6], p. 169), le problème est le suivant : où est la limite entre ce qui peut être décrit et ce qui ne peut pas l'être ? Où est la différence entre phénomène et observation ?

Bell croit qu'il ne devrait pas y avoir de division entre phénomène et observation. Il devrait exister une description uniforme des mondes microscopiques et macroscopiques. De Broglie et Bohm auraient développé un point de vue similaire. Certaines difficultés s'ajoutent cependant à de telles descriptions, comme la propagation instantanée d'information entre deux événements. Il y a donc conflit apparent entre la mécanique quantique et la relativité restreinte. Selon Bell, les théories de la mécanique quantique et de la relativité nécessitent donc un renouveau conceptuel radical.



Chapitre 3

Des inégalités et des concepts nouveaux

Suite aux publications de Bell, plusieurs auteurs ont repris ses arguments pour adapter les concepts présentés à des situations plus réalisables expérimentalement, comme c'est le cas de Clauser *et al.* D'autres ont plutôt adapté les concepts présentés par Bell à des montages bien différents. Il existe donc de nombreuses variations et de nombreux ajouts aux travaux de Bell et cette section en présente une sélection.

3.1 L'apport de Clauser, Horne, Shimony, Holt et Freedman

Le groupe composé de J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt et S. J. Freedman a publié une panoplie d'articles suite aux développements de Bell. Ils ont présenté des généralisations des travaux de Bell et axé leurs inégalités vers des expériences réalisables.

3.1.1 L'inégalité généralisée de CHSH

La première généralisation de ces chercheurs [8] va comme suit. Supposons deux particules telles que la première entre dans l'appareil I_a et la seconde, dans l'appareil II_b , où a et b sont des paramètres d'appareil. Soit $A(a)$ le choix du canal $+1$ ou -1 par la première particule, et $B(b)$, le choix correspondant par la seconde. Supposons de plus qu'il existe une corrélation entre $A(a)$ et $B(b)$ due à une interaction par le passé entre les deux particules. L'information sur cette corrélation est localisée dans chacune des particules et n'est pas de nature exclusivement quantique. Cette information est incluse dans l'ensemble des variables cachées λ .

Les résultats de choix de canaux sont donc les fonctions déterministes $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$, où A est indépendant de b et B , de a par localité. Selon Clauser, Horne, Shimony et Holt (CHSH), puisque les particules sont émises à la source, la distribution normalisée de probabilité $\rho(\lambda)$ est indépendante de a et b .

Soit une fonction de corrélation $P(a, b) = \int_{\Gamma} A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda$, avec Γ comme l'espace total de λ . On a :

$$\begin{aligned} |P(a, b) - P(a, c)| &\leq \int_{\Gamma} |A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(c, \lambda)|\rho(\lambda)d\lambda, \\ &\leq \int_{\Gamma} |A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 - B(b, \lambda)B(c, \lambda)]|\rho(\lambda)d\lambda, \\ &\leq 1 - \int_{\Gamma} B(b, \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Contrairement à Bell, CHSH supposent un cas où la corrélation n'est pas parfaite : $P(b', b) = 1 - \delta$, où $0 \leq \delta \leq 1$. CHSH divisent ensuite l'espace Γ en deux sous-espaces $\Gamma_{\pm} = \{\lambda | A(b', \lambda) = \pm B(b, \lambda)\}$. Ceci implique que :

$$\int_{\Gamma_{-}} \rho(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}\delta. \quad (3.2)$$

On peut développer le dernier terme de (3.1) en divisant l'espace Γ puis en appliquant les transformations appropriées sur $B(b, \lambda)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} B(b, \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda &= \int_{\Gamma_+} A(b', \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda - \int_{\Gamma_-} A(b', \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \\
&= \int_{\Gamma} A(b', \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda - 2 \int_{\Gamma_-} A(b', \lambda)B(c, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \\
&\geq P(b', c) - 2 \int_{\Gamma_-} |A(b', \lambda)B(c, \lambda)|\rho(\lambda)d\lambda, \\
&\geq P(b', c) - \delta.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

En jumelant (3.1), (3.3) et la définition $P(b', b) = 1 - \delta$, on trouve l'inégalité désirée :

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 2 - P(b', b) - P(b', c). \tag{3.4}$$

En principe, les valeurs ± 1 des quantités $A(a)$ et $B(b)$ devraient être interprétées comme la détection ou non d'un photon, par un détecteur après passage dans un filtre. À l'époque de ces développements, les efficacités des détecteurs photoélectriques n'étaient pas suffisantes pour une telle interprétation. Le groupe CHSH a alors considéré $A(a)$ et $B(b)$ comme l'émergence ou la non-émergence du photon après le filtre polariseur, où a et b sont les orientations de ces filtres. Pour $A(\infty)$ et $B(\infty)$ représentant le retrait du filtre correspondant et supposant que la probabilité combinée de détection d'une paire de photons est indépendante de a et b , alors le taux de coïncidence de détection $R(a, b)$ sera proportionnel à $w[A(a)_+, B(b)_+]$. L'expression $w[A(a)_{\pm}, B(b)_{\pm}]$ est la probabilité que $A(a) = \pm 1$ et $B(b) = \pm 1$, puisque $P(a, b)$ est une fonction de corrélation d'émergence. On a donc les relations suivantes :

$$w[A(a)_+, B(\infty)_+] = w[A(a)_+, B(b)_+] + w[A(a)_+, B(b)_-], \tag{3.5}$$

$$w[A(\infty)_+, B(b)_+] = w[A(a)_+, B(b)_+] + w[A(a)_-, B(b)_+], \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
w[A(\infty)_+, B(\infty)_+] &= w[A(a)_+, B(b)_+] + w[A(a)_+, B(b)_-] \\
&\quad + w[A(a)_-, B(b)_+] + w[A(a)_-, B(b)_-].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ces équations peuvent être utilisées conjointement à la définition de $P(a, b)$ pour donner :

$$\begin{aligned}
P(a, b) &= w[A(a)_+, B(b)_+] - w[A(a)_+, B(b)_-] - w[A(a)_-, B(b)_+] + w[A(a)_-, B(b)_-], \\
&= -2w[A(a)_+, B(b)_-] + w[A(a)_+, B(b)_+] - w[A(\infty)_+, B(b)_+] \\
&\quad + w[A(\infty)_+, B(\infty)_+] - w[A(a)_-, B(b)_+], \\
&= 4w[A(a)_+, B(b)_+] - 2w[A(a)_+, B(\infty)_+] - 2w[A(\infty)_+, B(b)_+] \\
&\quad + w[A(\infty)_+, B(\infty)_+].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Or, les taux de coïncidence de détection $R(a, b)$ sont proportionnels aux probabilités $w[A(a)_\pm, B(b)_\pm]$ par la relation :

$$w[A(a)_+, B(b)_+] = \frac{R(a, b)}{R(\infty, \infty)}. \tag{3.9}$$

Ceci mène à la nouvelle relation présentée par CHSH :

$$P(a, b) = \frac{4R(a, b)}{R(\infty, \infty)} - \frac{2R(a, \infty)}{R(\infty, \infty)} - \frac{2R(\infty, b)}{R(\infty, \infty)} + 1. \tag{3.10}$$

Cette expression peut être utilisée pour exprimer l'inégalité trouvée plus tôt en termes des taux de coïncidence de détection :

$$|R(a, b) - R(a, c)| + R(b', b) + R(b', c) - R_1 - R_2 \leq 0, \tag{3.11}$$

où $R_1 = R(a, \infty)$ et $R_2 = R(\infty, b)$ puisque ces termes ont été montrés expérimentalement comme étant constants [9].

3.1.2 Théories locales objectives

Supposons la même expérience que dans [8]. Pendant un certain temps, la source émet N paires de particules. Pour $N_1(a)$, $N_2(b)$ et $N_{12}(a, b)$ le nombre de décomptes au détecteur 1, au détecteur 2 et aux deux détecteurs simultanément, on a les probabilités d'ensemble :

$$\begin{aligned} p_1(a) &= N_1(a)/N, \\ p_2(b) &= N_2(b)/N, \\ p_{12}(a, b) &= N_{12}(a, b)/N. \end{aligned} \tag{3.12}$$

À un temps intermédiaire entre l'émission et la détection de la paire de particules, le système est dans l'état général λ . La forme précise et la complétude de l'état λ n'ont pas à être spécifiées, mais λ doit être suffisant pour déterminer les probabilités $p_1(\lambda, a)$, $p_2(\lambda, b)$ et $p_{12}(\lambda, a, b)$ de décomptes aux appareils 1, 2 et aux deux appareils en simultané, respectivement. Puisque les états initiaux des paires de particules ne sont pas tout le temps identiques, il faut définir une densité de probabilité $\rho(\lambda)$ qui décrit le mélange d'états émis. Toutes ces quantités sont liées par les relations :

$$\begin{aligned} p_1(a) &= \int_{\Gamma} p_1(\lambda, a) \rho(\lambda) d\lambda, \\ p_2(b) &= \int_{\Gamma} p_2(\lambda, b) \rho(\lambda) d\lambda, \\ p_{12}(a, b) &= \int_{\Gamma} p_{12}(\lambda, a, b) \rho(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \tag{3.13}$$

où Γ est encore une fois l'espace des états λ .

Clauser *et al.* se limitent au cas particulier où :

$$p_{12}(\lambda, a, b) = p_1(\lambda, a)p_2(\lambda, b). \tag{3.14}$$

Cette factorisation est, selon eux, une condition de localité acceptable pour deux particules bien localisées sans action à distance. Une théorie qui obéit à cette équation est appelée une théorie locale objective.

Dans le cas où :

$$\begin{aligned}
0 &\leq p_1(\lambda, a) \leq 1, \\
0 &\leq p_1(\lambda, a') \leq 1, \\
0 &\leq p_2(\lambda, b) \leq 1, \\
0 &\leq p_2(\lambda, b') \leq 1,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

pour a et a' deux orientations du polariseur 1 et b et b' deux orientations du polariseur 2, on a l'inégalité développée par Clauser, Horne, Shimony et Holt [8] :

$$-1 \leq p_{12}(a, b) - p_{12}(a, b') + p_{12}(a', b) + p_{12}(a', b') - p_1(a') - p_2(b) \leq 0. \tag{3.16}$$

Cette inégalité se simplifie dans le cas où $p_1(a)$ et $p_2(b)$ sont constants, pour :

$$|b - a| = |a' - b| = \frac{1}{3}|a - b'| = \phi, \tag{3.17}$$

et devient :

$$-1 \leq 3p_{12}(\phi) - p_{12}(3\phi) - p_1 - p_2 \leq 0. \tag{3.18}$$

Cette inégalité peut être testée sans connaissance de N , quantité habituellement déduite des données, mais jamais mesurée, car la mesure de N dépolarise ou détruit le système. Un autre problème surgit : pour des raisons expérimentales, il faut faire une supposition supplémentaire pour pouvoir tester les théories objectives locales. Il est en effet difficile, selon Clauser et Horne [10], d'utiliser les expériences par cascade de photons comme test des théories objectives locales sans utiliser de supposition supplémentaire et les expériences idéales de désintégrations en deux corps nécessitent d'excellentes efficacités de détection qui ne sont technologiquement pas encore ac-

cessibles. Cette supposition consiste en ce que la probabilité d'un décompte avec un polariseur en place soit moindre que la probabilité d'un décompte lorsqu'il n'y a pas de polariseur. Ceci se traduit par :

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1(\lambda, a) \leq p_1(\lambda, \infty) \leq 1, \\ 0 \leq p_2(\lambda, b) \leq p_2(\lambda, \infty) \leq 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ceci est appelé la supposition de non-augmentation. Clauser et Horne montrent que cette supposition n'est pas respectée par les résultats de Freedman et Clauser, et que l'augmentation est nécessaire dans le modèle pour reproduire ces résultats. En tenant compte des inégalités précédentes :

$$-p_{12}(\infty, \infty) \leq p_{12}(a, b) - p_{12}(a, b') + p_{12}(a', b) + p_{12}(a', b') - p_{12}(a', \infty) - p_{12}(\infty, b) \leq 0, \quad (3.20)$$

et, avec les mêmes conditions que précédemment :

$$p_{12}(\infty, \infty) \leq 3p_{12}(\phi) - p_{12}(3\phi) - p_{12}(a', \infty) - p_{12}(\infty, b) \leq 0. \quad (3.21)$$

Ces inégalités sont similaires à celles précédemment développées par Clauser *et al.*, mais ne sont pas limitées aux théories locales déterministes. De plus, la condition de non-augmentation est moins restrictive que la supposition originale de CHSH, comme quoi la probabilité combinée de détection d'une paire de photons émergent des appareils doit être indépendante des paramètres d'appareils a et b .

La dernière inégalité est violée si [10] :

$$\epsilon_+[\sqrt{2}(\epsilon_-/\epsilon_+)^2 F(\theta) + 1] \geq 2, \quad (3.22)$$

où $\epsilon_- = \epsilon_M - \epsilon_m$ et $\epsilon_+ = \epsilon_M + \epsilon_m$ avec ϵ_M l'efficacité du polariseur pour de la lumière polarisée parallèlement à l'axe du polariseur et ϵ_m l'efficacité pour de la lumière polarisée perpendiculairement à ce même axe. La fonction $F(\theta)$ représente la dépolarisation

due à la non-colinéarité des photons.

L'expérience réalisée par Freedman et Clauser [9] satisfaisait (3.22) et les résultats expérimentaux étaient en accord avec les prédictions de la mécanique quantique. Ces résultats violaient cependant (3.21), impliquant donc que toute théorie objective locale satisfaisant la supposition de non-augmentation est intenable et qu'il faut une supposition d'augmentation.

Afin de montrer ce résultat, considérons une expérience de type Bohm ayant une densité isotrope :

$$\rho(\lambda)d\lambda = d\lambda/2\pi. \quad (3.23)$$

et ayant comme probabilités de décompte :

$$\begin{aligned} p_1(\lambda, \infty) &= c_1, \\ p_2(\lambda, \infty) &= c_2, \\ p_1(\lambda, a) &= \frac{1}{2}c_1[\epsilon_+^1 + \epsilon_-^1 \cos(2(\lambda - a))], \\ p_2(\lambda, c) &= \frac{1}{2}c_2\pi\epsilon_+^2/\delta, \end{aligned} \quad (3.24)$$

où δ est défini par la relation $\sin(\delta)/\delta = \epsilon_-^2/\epsilon_+^2$. À noter que ϵ_\pm^i représente les valeurs de ϵ selon l'appareil i . Ceci mène aux probabilités d'ensemble :

$$\begin{aligned} p_{12}(a, b) &= \frac{1}{4}c_1c_2[\epsilon_+^1\epsilon_+^2 + \epsilon_-^1\epsilon_-^2 \cos(2(a - b))], \\ p_{12}(a, \infty) &= \frac{1}{2}c_1c_2\epsilon_+^1, \\ p_{12}(\infty, b) &= \frac{1}{2}c_1c_2\epsilon_+^2, \\ p_{12}(\infty, \infty) &= c_1c_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ceci est en accord avec les prédictions de la mécanique quantique. La fonction $p_1(\lambda, a)$

est sans augmentation de manière générale. Par contre, $p_2(\lambda, b)$ ne l'est que si :

$$\epsilon_+^2 \leq 2\delta/\pi. \quad (3.26)$$

Or, les valeurs expérimentales de Freedman-Clauser [9] ne satisfont pas cette relation, impliquant donc qu'il y a augmentation afin de reproduire les prédictions de la mécanique quantique.

3.1.3 Détections partielles

Dans un article de 1978, Clauser et Shimony (CS) [11] font une revue des travaux portant sur les inégalités de Bell et sur les expériences testant de telles inégalités. Ils débutent par une clarification importante à propos du critère de réalité de EPR. L'expression *peut prédire* est utilisée au sens large où un système a des propriétés définies indépendamment de si elles sont observées ou non. Il est possible de choisir un arrangement pour déterminer ces propriétés. Il ne faut pas considérer une interprétation différente où la valeur d'une quantité peut être prédite seulement si un arrangement est effectivement choisi pour la déterminer. L'argument de EPR ne fonctionne pas avec cette interprétation différente puisque les arrangements pour mesurer les positions et les quantités de mouvement sont incompatibles, tel que montré par Bohr [2].

Les cas étudiés par Bell supposaient que toutes les particules émises par la source étaient détectées. Ce n'est pas le cas expérimentalement. Il faut tenir compte autant du cas où les deux particules sont détectées, que celui où seulement la particule 1 est détectée, celui où seulement la particule 2 est détectée et celui où les deux particules ne sont pas détectées. La densité de probabilité ρ de ces quatre ensembles est indépendante de a et b . Par contre, la composition et la distribution de chacun de ces ensembles peut dépendre de a et b . Il est difficile de comparer directement cette réalité expérimentale aux inégalités de Bell ou de CHSH, qui ne tenaient compte que

d'un seul de ces ensembles. La difficulté, liée à la taille des ensembles, est évitée si on ne considère que les rapports de décomptes [10].

Il est intéressant de généraliser l'hypothèse de localité utilisée jusqu'à maintenant afin d'inclure les systèmes qui évoluent de manière stochastique, en plus des systèmes déterministes qui utilisent des variables aléatoires pour chacun des appareils. Supposons une paire de systèmes corrélés entre eux, ayant comme état combiné λ . Ces deux systèmes sont ensuite séparés. Pour λ , a et b donnés, il est possible de définir les probabilités des différents résultats possibles de mesure à chacun des appareils. Ces probabilités peuvent dépendre du paramètre d'un appareil (a ou b) et de λ , mais ces probabilités sont indépendantes les unes des autres. Cette définition n'exclut pas la possibilité d'avoir de l'information sur le système 2 par une mesure sur le système 1.

La preuve de Bell peut être adaptée à cette définition. La mesure du spin de la particule 1 peut donner comme résultat :

$$A_a(\lambda) = \{+1, -1, 0\}, \quad (3.27)$$

pour, respectivement, la détection d'un spin vers le haut, celle d'un spin vers le bas, ou la non-détection de la particule. Les résultats $B_b(\lambda)$ se rapportent à la particule 2 dans l'appareil B . Les valeurs moyennes de ces résultats sur des paramètres cachés spécifiques aux appareils respectent les inégalités :

$$\begin{aligned} |\bar{A}_a(\lambda)| &\leq 1, \\ |\bar{B}_b(\lambda)| &\leq 1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La valeur moyenne du produit est donnée par :

$$E(a, b) = \int_{\Lambda} \bar{A}_a(\lambda) \bar{B}_b(\lambda) d\rho. \quad (3.29)$$

Ici, $d\rho$ signifie ce que nous notions auparavant $\rho(\lambda)d\lambda$. Clauser et Shimony [11] consi-

dèrent ici que ρ est indépendant de a et b . Afin de s'assurer que c'est bien le cas, ils précisent que chacune des particules passe dans un appareil supplémentaire avant d'atteindre le détecteur. Cet appareil s'assure que la particule est dans un état tel qu'il y aura un décompte au détecteur. Ceci indique donc si la particule sera détectée ou non. De là, ils définissent ρ comme décrivant toutes ces particules, s'assurant une indépendance de a et b , puisque c'est le taux de non-détection qui peut dépendre de a et b . À l'image de la démarche de Bell, considérons :

$$\begin{aligned} E(a, b) - E(a, b') &= \int_{\Lambda} [\bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_b(\lambda) - \bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_{b'}(\lambda)]d\rho, \\ &= \int_{\Lambda} \bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_b(\lambda)[1 \pm \bar{A}_{a'}(\lambda)\bar{B}_{b'}(\lambda)]d\rho \\ &\quad - \int_{\Lambda} \bar{A}_a(\lambda)\bar{B}_{b'}(\lambda)[1 \pm \bar{A}_{a'}(\lambda)\bar{B}_b(\lambda)]d\rho. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Utilisant les conditions (3.28) :

$$\begin{aligned} |E(a, b) - E(a, b')| &\leq \int_{\Lambda} [1 \pm \bar{A}_{a'}(\lambda)\bar{B}_{b'}(\lambda)]d\rho + \int_{\Lambda} [1 \pm \bar{A}_{a'}(\lambda)\bar{B}_b(\lambda)]d\rho, \\ &\leq \pm[E(a', b') + E(a', b)] + 2 \int_{\Lambda} d\rho, \end{aligned} \quad (3.31)$$

et ceci implique :

$$-2 \leq E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') \leq 2. \quad (3.32)$$

C'est une forme de l'inégalité de Bell. Il existe des situations où cette inégalité est contredite par la mécanique quantique [11]. Pearle propose à l'inverse que les cas où seulement une particule est détectée soient ignorés [12].

Il existe des critiques des suppositions faites par CHSH et par Clauser et Horne (CH). La supposition de CHSH est que la probabilité de détection combinée d'une paire de particules est indépendante des orientations a et b des polariseurs. Le problème lié à cette supposition est que, même si on tente de mesurer le taux de détection d'un flux contrôlé de particules polarisées, il est presque certain que la distribution

de ce flux est différente que celle des expériences standard. Il est donc impossible de tester cette supposition directement, selon CS. De plus, certaines théories telles que la théorie semi-classique du rayonnement sont en contradiction avec le concept de passage ou de non-passage des particules dans un polariseur. Cette théorie prédit en effet des passages partiels où l'amplitude de l'onde diminue lors d'un passage. Cette théorie assigne aussi à l'amplitude une dépendance quant à l'orientation des polariseurs, dépendance nécessaire à la détermination des probabilités de détection.

La supposition de CH, que la probabilité de détection est plus élevée quand il n'y a pas de polariseur que quand il y en a un, est réfutée par l'existence de situations où l'ajout d'un obstacle dans un système optique augmente les probabilités de détection. Or, même si la nature de tels systèmes est différente, il n'empêche que la supposition de CH est censée tenir pour tout état λ , ce qui n'est peut-être pas le cas.

Un modèle développé par CH [10] montre des prédictions en accord avec celles de la mécanique quantique, tout en ayant des taux de passage à travers des polariseurs qui sont en accord avec l'inégalité de Bell. Ceci n'est possible que si les efficacités nettes des détecteurs sont plus basses qu'une certaine limite et si les paires de photons détectés sont sélectionnées de manière spéciale. Pour reprendre les mots de CS : ceci semble hautement artificiel et ressemble à une conspiration contre l'expérimentateur.

3.2 L'expérience d'Aspect *et al.*

Dans le cadre d'investigations très sophistiquées, A. Aspect et ses collaborateurs ont réalisé une expérience qui a grandement influencé les recherches sur les inégalités de type Bell ou de type CHSH [13]. L'expérience réalisée semblait presque identique aux expériences de pensée proposées par Einstein. Deux photons étaient propulsés dans des branches séparées où chacun passait dans un polariseur. La grande particu-

larité de cette expérience résidait dans le fait que le choix d'axe de polarisation était effectué tellement tard qu'il n'y avait aucune possibilité pour une particule d'envoyer de l'information à l'autre particule après le choix de l'axe. Il n'y avait donc *a priori* aucune faille en terme de localité.

En comparant les données obtenues à la théorie, Aspect *et al.* ont montré que les inégalités de Bell étaient violées et qu'il y avait un grand accord entre les données et les prédictions de la mécanique quantique. Cette expérience a été la première à réaliser un choix de paramètres aussi tardif.

3.3 Localité forte, localité simple et complétude

L'analyse de Jarrett [14], suivie par la présentation plus pédagogique de Ballentine et Jarrett [15], définit différentes formes de localité. L'inégalité de Bell est obtenue à l'aide d'une hypothèse appelée *localité forte*. Cette hypothèse peut être écrite sous la forme :

$$P(x_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) = Q_L(x_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda) \times Q_R(x_R | d_R, S_L^0, S_R, \lambda), \quad (3.33)$$

où L, R sont des indicateurs de lieux d'expériences (« left » et « right »), d_L, d_R sont les vecteurs unitaires qui définissent les composantes de spin mesurées, x_L, x_R sont les résultats de mesure de spin, S_L, S_R sont les états des appareils avant la mesure et λ est l'état général des deux particules et peut donc contenir des variables cachées. P, Q_L et Q_R sont des probabilités conditionnelles. Cette notation est un peu plus générale que celle de Clauser *et al.* Il y a équivalence entre les paramètres d'appareil a, b et d_L, d_R , mais Ballentine et Jarrett tiennent aussi compte des états des appareils. À noter que la notation S_i^0 représente l'état d'un appareil qui ne fait pas de mesure. Cette forme de la localité est, selon [15] et [14], trop contraignante. À la base, le principe de *localité*

relativiste consiste en l'interdiction d'action instantanée à distance, qui est équivalente à l'interdiction de propagation de signaux à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière. Il faut donc une définition de la localité compatible avec cette définition, mais moins contraignante que la localité forte. La *localité simple* répond à ces critères et est définie par :

$$\begin{aligned} Q_L(x_L|d_L, S_L, S_R^0, \lambda) &= \sum_{x'_R} P(x_L, x'_R|d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda), \\ Q_R(x_R|d_R, S_L^0, S_R, \lambda) &= \sum_{x'_L} P(x'_L, x_R|d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ces conditions n'excluent pas la possibilité d'obtenir de l'information sur la particule L par des mesures effectuées sur la particule R , car cette information sera contenue dans λ si les deux particules sont corrélées. La localité simple montre qu'une mesure combinée sur les deux particules donne les mêmes probabilités sur le résultat d'une des particules que les probabilités données par une mesure sur cette particule seulement. Si cette affirmation était violée et donc que les probabilités pour une particule pouvaient dépendre des paramètres de l'appareil opposé, il serait possible de créer un montage permettant de propager de l'information à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière. On convient donc que la localité simple est en accord avec la localité relativiste.

Il est intéressant d'ajouter un autre concept, celui de la *complétude*. Une description est dite complète en rapport à une mesure M si les résultats de mesures autres que M ne donnent aucune information nouvelle permettant de prédire le résultat de la mesure M . Toute information obtenue ainsi est redondante avec l'information déjà contenue dans la description de l'état λ . Mathématiquement, la condition nécessaire

à la complétude est :

$$\begin{aligned}
 P(x_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) &= \sum_{x'_R} P(x_L, x'_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) \\
 &\quad \times \sum_{x'_L} P(x'_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda). \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Ballentine et Jarrett ont montré que la localité forte est la conjonction de la localité simple et de la complétude. La preuve est simple. Soit une théorie obéissant à la localité forte (3.33). Effectuant la somme sur x_R , on trouve :

$$\begin{aligned}
 \sum_{x'_R} P(x_L, x'_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) &= Q_L(x_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda) \times \sum_{x'_R} Q_R(x'_R | d_R, S_L^0, S_R, \lambda), \\
 &= Q_L(x_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda), \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

car la somme des probabilités sur une des particules est égale à 1. Ceci montre que la localité forte implique la localité simple. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{x'_R} P(x_L, x'_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) \times \sum_{x'_L} P(x'_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda), \\
 &= Q(x_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda) \times \left[\sum_{x'_R} Q(x'_R | d_R, S_L^0, S_R, \lambda) \right] \\
 &\quad \times \left[\sum_{x'_L} Q(x'_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda) \right] \times Q(x_R | d_R, S_L^0, S_R, \lambda), \\
 &= Q(x_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda) \times Q(x_R | d_R, S_L^0, S_R, \lambda), \\
 &= P(x_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda). \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

La localité forte implique donc la complétude. Finalement, en supposant la localité

simple et la complétude :

$$\begin{aligned}
 P(x_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) &= \sum_{x'_R} P(x_L, x'_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda) \\
 &\quad \times \sum_{x'_L} P(x'_L, x_R | d_L, d_R, S_L, S_R, \lambda), \\
 &= Q(x_L | d_L, S_L, S_R^0, \lambda) \times Q(x_R | d_R, S_L^0, S_R, \lambda), \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

on trouve que la conjonction entre localité simple et complétude donne la localité forte. Ceci indique donc que la complétude est peut-être la cause des violations des inégalités de Bell, puisque la localité simple est en excellent accord avec la relativité restreinte.

Il y a de fortes ressemblances entre des idées de Clauser *et al.* et les concepts présentés par Ballentine et Jarrett. Clauser *et al.* parlent d'indépendance des paramètres et d'indépendance des résultats, notions également introduites par Shimony [16]. Ces notions sont naturellement incluses dans la localité forte de Ballentine et Jarrett. Ces concepts sont donc impliqués par la localité simple et par la complétude.

La notion d'indépendance des paramètres est présente dans l'expression de la localité simple (3.34). En effet, la somme sur tous les x_L ou x_R élimine la dépendance en d_L ou d_R . Il reste cependant une dépendance en S_L^0 ou S_R^0 , mais ces paramètres sont différents des paramètres habituels S_L et S_R car ils représentent les états des appareils lorsqu'il n'y a pas de mesure effectuée, plutôt que les états d'appareils servant à la mesure.

L'indépendance des résultats est l'absence de dépendance d'une mesure sur le résultat d'une autre. Elle est incluse dans la complétude puisqu'alors la possibilité d'obtenir x_L et x_R est le produit de probabilités d'obtenir x_L et x_R séparément. Cette description est similaire à celle de la localité forte, mais la localité forte inclut aussi la factorisation par rapport aux paramètres d_L et d_R .

3.4 Les modèles à plusieurs particules

3.4.1 Contradiction sans inégalité

Le modèle de Greenberger, Horne, Shimony et Zeilinger (GHSZ) [17] est une adaptation du plan de EPR pour des situations à trois particules ou plus (voir aussi [18]). Le plan original de EPR utilise les propositions suivantes pour des expériences de type Bohm :

1. *Corrélations parfaites* : Si les spins des deux particules sont mesurés selon un même axe, ils seront forcément de signes opposés.
2. *Localité* : Puisqu'au moment de la mesure les deux systèmes n'interagissent plus, aucun changement ne peut se produire dans un système par une manipulation sur l'autre.
3. *Réalité* : Si on peut prédire avec certitude la valeur d'une quantité physique sans d'aucune manière perturber le système, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette quantité physique.
4. *Complétude* : Chaque élément de réalité physique doit avoir une contrepartie dans la théorie physique.

Il s'en suit le classique argument joignant les trois premières propositions qui ne respectent pas la proposition de complétude dans le cas d'expériences de type Bohm.

Considérons la situation présentée par GHSZ et illustrée à la Figure 3.1. Soit quatre particules de spin $1/2$, produites par la décomposition d'une particule de spin 1 en deux particules de spin 1, chacune se décomposant ensuite en une paire de particules de spin $1/2$. Si une des paires se déplace selon l'axe z , l'autre paire se déplace alors selon ce même axe, mais dans la direction opposée. Dans un tel cas, l'état quantique

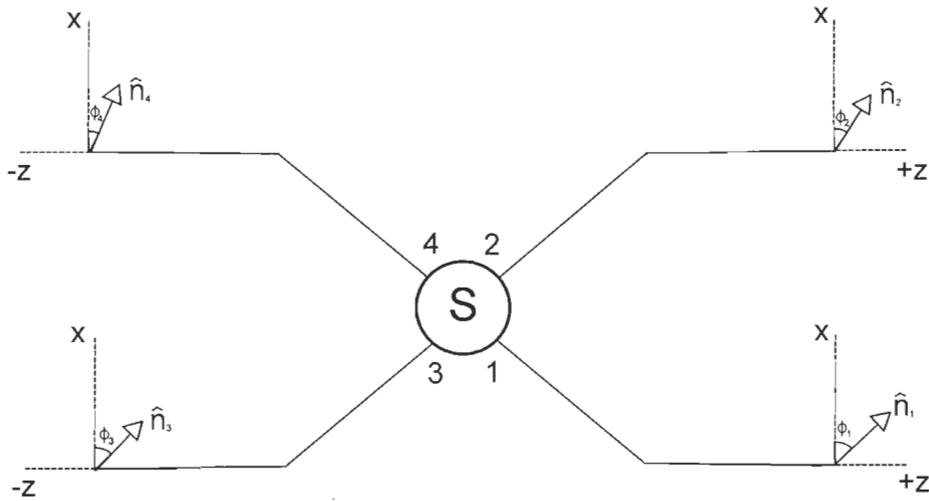


FIGURE 3.1 – Le dispositif à quatre particules de GHZ

de spin des quatre particules sera :

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |-\rangle_3 \otimes |-\rangle_4 - |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |+\rangle_4]. \quad (3.39)$$

La valeur moyenne du produit des résultats de mesure est obtenue en utilisant cet état dans l'équation :

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = \langle \Psi | (\hat{n}_1 \cdot \sigma_1) (\hat{n}_2 \cdot \sigma_2) (\hat{n}_3 \cdot \sigma_3) (\hat{n}_4 \cdot \sigma_4) | \Psi \rangle. \quad (3.40)$$

Si θ et ϕ désignent l'angle polaire et l'angle azimutal du vecteur unitaire \hat{n} , l'effet de l'opérateur $(\hat{n} \cdot \sigma)$ est :

$$\langle + | (\hat{n} \cdot \sigma) | + \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\theta). \quad (3.41)$$

Cette même application mène aux résultats :

$$\langle + | (\hat{n} \cdot \sigma) | - \rangle = \sin(\theta)e^{-i\phi}, \quad (3.42)$$

$$\langle - | (\hat{n} \cdot \sigma) | + \rangle = \sin(\theta)e^{i\phi}, \quad (3.43)$$

$$\langle - | (\hat{n} \cdot \sigma) | - \rangle = -\cos(\theta). \quad (3.44)$$

En simplifiant la notation et en utilisant les propriétés des produits tensoriels :

$$\begin{aligned}
E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) &= \frac{1}{2} [\langle ++-- | (\hat{n}_1 \cdot \sigma_1)(\hat{n}_2 \cdot \sigma_2)(\hat{n}_3 \cdot \sigma_3)(\hat{n}_4 \cdot \sigma_4) | ++-- \rangle \\
&\quad - \langle ++-- | (\hat{n}_1 \cdot \sigma_1)(\hat{n}_2 \cdot \sigma_2)(\hat{n}_3 \cdot \sigma_3)(\hat{n}_4 \cdot \sigma_4) | --++ \rangle \\
&\quad - \langle --++ | (\hat{n}_1 \cdot \sigma_1)(\hat{n}_2 \cdot \sigma_2)(\hat{n}_3 \cdot \sigma_3)(\hat{n}_4 \cdot \sigma_4) | ++-- \rangle \\
&\quad + \langle --++ | (\hat{n}_1 \cdot \sigma_1)(\hat{n}_2 \cdot \sigma_2)(\hat{n}_3 \cdot \sigma_3)(\hat{n}_4 \cdot \sigma_4) | --++ \rangle], \\
&= \frac{1}{2} [2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \\
&\quad - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_4) (e^{-i\phi_1 - i\phi_2 + i\phi_3 + i\phi_4} + e^{i\phi_1 + i\phi_2 - i\phi_3 - i\phi_4})], \\
&= \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \\
&\quad - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \sin(\theta_4) \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4). \tag{3.45}
\end{aligned}$$

La valeur moyenne du produit des résultats de mesure, dans le cas particulier où les axes \hat{n}_i sont limités au plan $x - y$, peut être écrite comme :

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4). \tag{3.46}$$

Cette équation implique des corrélations parfaites lorsque :

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi, \tag{3.47}$$

$$\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0, \tag{3.48}$$

car dans ces cas, $E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = \pm 1$, respectivement. Les propositions de corrélations parfaites de EPR, et dans une moindre mesure celle de localité, doivent être adaptées à cette situation et prennent la forme :

1. *Corrélations parfaites* : Pour quatre appareils de Stern-Gerlach préparés à des angles satisfaisant les conditions (3.47) ou (3.48), la connaissance du résultat de mesure du spin de trois particules permet de prédire avec certitude le résultat de mesure du spin de la quatrième particule.
2. *Localité* : Puisqu'au moment de la mesure les quatre systèmes n'interagissent

plus, aucun changement ne peut se produire dans un système par des manipulations sur les trois autres.

Le point intéressant de la présentation de GHSZ est qu'ils arrivent à montrer, sans utiliser d'inégalités, que les quatre propositions ne sont pas cohérentes. Soit quatre fonctions telles que :

$$E(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = \int_{\Gamma} A(\phi_1)B(\phi_2)C(\phi_3)D(\phi_4)d\rho. \quad (3.49)$$

Ces fonctions ont comme valeur ± 1 et représentent chacune le résultat de mesure du spin d'une des particules quand l'état du système est λ . En utilisant certains angles adéquats pour avoir une corrélation parfaite, on trouve une panoplie d'équations telles que :

$$A(0)B(0)C(0)D(0) = -1, \quad (3.50)$$

$$A(\psi)B(0)C(\psi)D(0) = -1, \quad (3.51)$$

$$A(\psi)B(0)C(0)D(\psi) = -1, \quad (3.52)$$

$$A(2\psi)B(0)C(\psi)D(\psi) = -1. \quad (3.53)$$

On peut jumeler ces équations pour trouver des résultats intéressants. Prenons d'abord le rapport de (3.51) à (3.50) :

$$A(\psi)C(\psi) = A(0)C(0), \quad (3.54)$$

puis, au moyen de (3.50) et (3.52)

$$A(\psi)D(\psi) = A(0)D(0), \quad (3.55)$$

donc,

$$C(\psi)/D(\psi) = C(0)/D(0) \rightarrow C(\psi)D(\psi) = C(0)D(0), \quad (3.56)$$

de par la nature de la fonction D . Utilisant ce résultat dans la dernière équation :

$$A(2\psi)B(0)C(0)D(0) = -1 = A(0)B(0)C(0)D(0), \quad (3.57)$$

et donc finalement :

$$A(2\psi) = A(0). \quad (3.58)$$

Ceci est un résultat surprenant, car il montre que le résultat de mesure du spin ne dépend pas de l'angle ψ . En étudiant l'autre cas de corrélation parfaite, on trouve :

$$A(\psi + \pi)B(0)C(\psi)D(0) = 1. \quad (3.59)$$

En jumelant avec (3.51), on trouve directement :

$$A(\psi + \pi) = -A(\psi). \quad (3.60)$$

Cette équation prédit un changement de signe et une dépendance quant à l'angle. Ceci est en contradiction avec l'autre prédiction ! Il y a donc quelque chose d'incohérent dans les propositions d'EPR.

3.4.2 Modèle sans spin

Le résultat obtenu précédemment est intéressant, mais doit être réalisable expérimentalement. GHSZ présentent un modèle particulier qui ne requiert pas la notion de spin et qui rejoint la précédente démonstration, ainsi que la contradiction qui s'en suivait. Supposons une expérience à trois particules, illustrée à la Figure 3.2. Par conservation de la quantité de mouvement, ces trois particules sont émises avec un angle de $2\pi/3$ entre chacune. La source de ces particules est entourée d'une structure ayant trois fentes a , b et c séparées par un angle de $2\pi/3$, ainsi que de 3 autres fentes a' , b' et c' légèrement décalées des fentes précédentes, mais elles aussi séparées par un

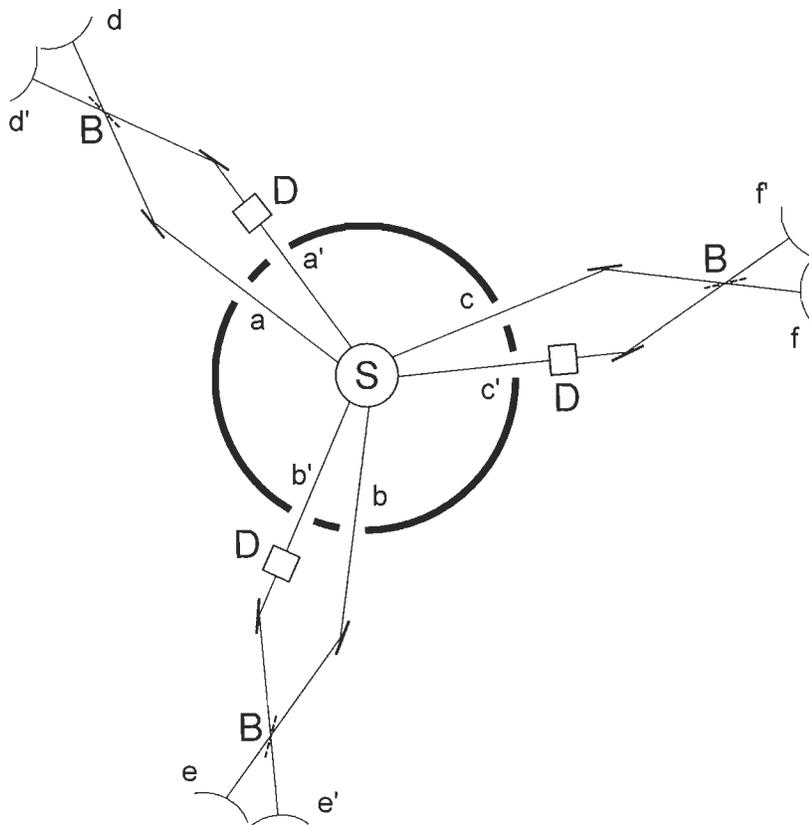


FIGURE 3.2 – Le dispositif sans spin de GHZ

angle de $2\pi/3$. Cet arrangement permet aux particules de passer dans une de ces deux séries de fentes et l'état des particules après le passage sera :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|a\rangle_1 |b\rangle_2 |c\rangle_3 + |a'\rangle_1 |b'\rangle_2 |c'\rangle_3]. \quad (3.61)$$

Cet état ne contient pas les termes composés tels que $|a\rangle |b\rangle |c'\rangle$, puisque ces termes ne respectent pas la conservation de la quantité de mouvement. Chaque ket de l'équation (3.61) peut être réécrit comme la combinaison de détection aux deux détecteurs placés à chaque branche, par exemple :

$$|a\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[|d\rangle_1 + i |d'\rangle_1], \quad (3.62)$$

$$|a'\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\phi}[|d'\rangle_1 + i |d\rangle_1]. \quad (3.63)$$

Les termes i et ϕ sont dus à des spécificités du montage présenté par GHSZ, c'est-à-dire le miroir semi-réfléchissant B et la plaque de déphasage D . L'aspect important de ce modèle réside dans la forme prise par les probabilités de détection. Par exemple :

$$P_{def}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{8}[1 + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)], \quad (3.64)$$

ce qui mène, en utilisant toutes ces probabilités, à :

$$E(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3). \quad (3.65)$$

Cette forme permet de reprendre la démonstration de la dernière section et ainsi de montrer les contradictions dans les propositions d'EPR à travers une expérience réalisable.

Chapitre 4

Échappatoires

Si quelques auteurs ont choisi de développer davantage les inégalités de Bell, d'autres ont plutôt opté vers l'exploitation de certaines ambiguïtés du développement original pour éviter les conclusions de Bell. Ces échappatoires sont habituellement basées sur des variations d'hypothèses utilisées par Bell, comme sa définition de la localité. Selon certains auteurs, les rôles de certaines variables sont négligés et ceci mène à des conclusions erronées de la part de Bell. Des hypothèses expérimentales utilisées depuis des décennies sont même dans certains cas remises en question.

4.1 Les modèles de Fine

Fine présente, dans son article de 1982 [19], deux classes de modèles : les modèles prismes et les modèles de synchronisation. Selon lui, les nombreuses démonstrations des inégalités de Bell font des suppositions supplémentaires en dehors de la localité et du réalisme, ou des suppositions particulières quant au processus expérimental. C'est de ces distinctions que sont construits les modèles prismes et les modèles de

synchronisation, respectivement.

Les modèles exploitent l'expérience standard de Bohm, avec deux particules se déplaçant dans des directions opposées. Chacune des particules passe dans un analyseur, puis dans un détecteur. Si chaque analyseur a deux orientations possibles, alors les angles θ_{ij} entre les orientations i de l'analyseur A et j de l'analyseur B sont choisis tels que :

$$\begin{aligned}\theta_{11} = \theta_{21} = \theta_{22} = \theta, \\ \theta_{12} = \theta' \neq \theta.\end{aligned}$$

On suppose que les statistiques observées représentent approximativement les probabilités prédites par la mécanique quantique. Ces probabilités sont P_{A_i} et P_{B_j} , et représentent la probabilité d'un décompte du côté de la particule adéquate lorsque les appareils identifiés sont dans les positions spécifiées. La probabilité $P_{A_i B_j}$ est la probabilité que des décomptes coïncident pour une paire de particules.

Dans la suite de sa présentation, Fine assume une certaine symétrie qui découle de la forme habituelle du vecteur d'état. C'est dire qu'il suppose un cas où les probabilités de décompte sont égales dans toutes les positions des appareils. Cette symétrie se traduit par :

$$P_{A_i} = P_{B_j} = \frac{1}{2}, \quad (4.1)$$

$$0 \leq P_{\theta} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

$$0 \leq P_{\theta'} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.3)$$

où $P_{\theta} = P_{A_1 B_1} = P_{A_2 B_1} = P_{A_2 B_2}$ et $P_{\theta'} = P_{A_1 B_2}$.

Comme condition de réalisme, Fine suppose que les particules émises par la source viennent en plusieurs types λ , distribués selon une densité continue ρ . Chacune des

paires de particules de type λ possède certaines propriétés qui permettent ou non de passer à travers les analyseurs et ensuite d'être détectées. Pour satisfaire la localité, Fine suppose que ceci est vrai pour chacune des particules d'une paire indépendamment de ce qui arrive à l'autre particule de cette même paire ou de type identique.

Fine ajoute à son argumentation le concept de catégorie. Une particule de type λ appartient à la catégorie $\sigma(A_i)$ si elle est apte à être détectée après un passage dans l'analyseur A_i . Selon Fine, si une particule n'a pas les propriétés physiques requises, il n'existe tout simplement pas de probabilités de détection, même pas la probabilité nulle. Ces cas sont donc exclus de $\sigma(A_i)$.

4.1.1 Les modèles prismes

Les développements standards des inégalités de Bell supposent que toutes les mesures sont issues d'une seule catégorie commune. Or, il est montré dans la littérature qu'il est impossible de reproduire certaines statistiques pour des systèmes corrélés à l'aide d'un modèle local et réaliste à une catégorie. Les modèles prisme utilisent plus d'une catégorie et pourraient ainsi reproduire les statistiques prédites par la mécanique quantique. Selon Fine, la catégorie d'une mesure spécifique à quel type de particules cette mesure est associée. Le résultat de la mesure est ensuite fixé par le type de particule. Ceci est illustré par les fonctions de réponse, définies telles que $A_i(\lambda) = 1$ si et seulement si une particule A de type λ va produire un décompte quand l'analyseur A est dans une de ses positions i , et $A_i(\lambda) = 0$ autrement. Ces deux cas ne sont possibles que sous la condition $\lambda \in \sigma(A_i)$.

Ces fonctions sont habituellement définies pour tout λ , et leurs distributions combinées sont utilisées pour obtenir les statistiques de corrélation. Or, le modèle prisme empêche cette étape du développement, puisque les fonctions $A_i(\lambda)$ et $B_j(\lambda)$ ne sont pas définies pour tout λ . Ceci implique donc qu'il est impossible d'établir les statis-

tiques de corrélation puisque les fonctions de réponse ne sont pas des variables aléatoires. Le modèle prisme reproduit les probabilités prédites par la mécanique quantique sous forme de probabilités conditionnelles.

$$P_{A_i} = \text{Prob}[A_i(\lambda) = 1 | \lambda \in \sigma(A_i)], \quad (4.4)$$

$$P_{B_j} = \text{Prob}[B_j(\lambda) = 1 | \lambda \in \sigma(A_j)], \quad (4.5)$$

$$P_{A_i B_j} = \text{Prob}[A_i(\lambda) = B_j(\lambda) = 1 | \lambda \in \sigma(A_i) \cap \sigma(B_j)]. \quad (4.6)$$

4.1.2 Les modèles de synchronisation

La motivation derrière le modèle de synchronisation réside dans les coïncidences de décompte lorsque les particules d'une paire sont détectées. Il est possible qu'une des particules soit retardée suffisamment lors de son passage dans l'analyseur ou lors de son trajet, empêchant ainsi que les décomptes coïncident. Il est intéressant d'introduire un coefficient de synchronisation $C_{ij}(\lambda)$ qui représente la probabilité qu'une paire de particules de type λ qui traverse les analyseurs A et B placés respectivement dans leurs positions i et j donne lieu à des décomptes qui coïncident.

Si les fonctions de réponse sont définies pour tout λ , alors on a par définition les probabilités :

$$P_A(\lambda, i) = A_i(\lambda), \quad (4.7)$$

$$P_B(\lambda, j) = B_j(\lambda). \quad (4.8)$$

Par l'indépendance stochastique, on devrait avoir :

$$P_{AB}(\lambda, i, j) = P_A(\lambda, i) \cdot P_B(\lambda, j), \quad (4.9)$$

mais le modèle de synchronisation suggère plutôt :

$$P_{AB}(\lambda, i, j) = A_i(\lambda) \cdot B_j(\lambda) \cdot C_{ij}(\lambda). \quad (4.10)$$

Ces probabilités doivent satisfaire :

$$P_{A_i} = \int A_i(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (4.11)$$

$$P_{B_j} = \int B_j(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \quad (4.12)$$

$$P_{A_i B_j} = \int A_i(\lambda) B_j(\lambda) C_{ij}(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (4.13)$$

Puisque la probabilité P_{AB} dépend de C , l'indépendance stochastique ne tient pas, mais la localité est préservée.

4.2 L'échantillonnage juste d'Adenier et Khrennikov

Lors d'une expérience de type Bohm, toutes les particules ne sont pas détectées et il est intéressant de tenir compte des efficacités des différents canaux de détection. Soit $\eta_A^+(\alpha)$ et $\eta_A^-(\alpha)$ les efficacités des canaux + et - pour des décomptes simples. Le paramètre α représente une dépendance en des paramètres expérimentaux locaux. On définit identiquement les efficacités $\eta_B^+(\beta)$ et $\eta_B^-(\beta)$ pour l'autre branche du montage. Afin de simplifier la notation, les paramètres $\epsilon_i = \pm$ seront utilisés pour représenter les canaux.

Les décomptes simples mesurés expérimentalement seront proportionnels aux effi-

cacités et au nombre inconnu de particules émises :

$$\begin{aligned} N_{exp}^{A,\epsilon_1}(\alpha) &\approx \eta_A^{\epsilon_1}(\alpha) \frac{N_A}{2}, \\ N_{exp}^{B,\epsilon_2}(\beta) &\approx \eta_B^{\epsilon_2}(\beta) \frac{N_B}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La quantité d'intérêt est le nombre de paires de particules émises. Cette quantité dépend donc de l'efficacité combinée. Adenier et Khrennikov [20] font l'hypothèse d'échantillonnage juste : c'est dire que l'ensemble des paires de particules détectées est représentatif de l'ensemble des paires de particules émises. Selon eux, ceci implique que les probabilités de non-détection dans une branche du montage devraient être indépendantes de ce qui se passe dans l'autre branche. Les efficacités des canaux devraient donc être les mêmes pour toute particule, qu'elle soit en paire ou non avec une autre particule détectée. Ceci mène à la factorisation suivante :

$$\eta^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta) = \eta_A^{\epsilon_1}(\alpha) \eta_B^{\epsilon_2}(\beta). \quad (4.15)$$

Il est donc possible d'exprimer le nombre de paires détectées en terme des efficacités des canaux pour des décomptes simples :

$$\begin{aligned} N_{exp}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta) &= N_{AB} \eta^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta) P_{QT}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta), \\ &= N_{AB} \eta_A^{\epsilon_1}(\alpha) \eta_B^{\epsilon_2}(\beta) P_{QT}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ici, le terme $P_{QT}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta)$ est la probabilité conjointe de détection prédite par la mécanique quantique et N_{AB} est la quantité inconnue de paires émises.

Afin de vérifier la validité de l'hypothèse d'échantillonnage juste, Adenier et Khrennikov ont développé une nouvelle procédure de normalisation basée uniquement sur cette hypothèse. Soit la quantité expérimentale suivante :

$$f_{exp}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{4} \frac{N_{exp}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta)}{N_{exp}^{A,\epsilon_1}(\alpha) N_{exp}^{B,\epsilon_2}(\beta)} \approx \frac{N_{AB}}{N_A N_B} P_{QT}^{\epsilon_1,\epsilon_2}(\alpha, \beta). \quad (4.17)$$

Or,

$$\sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} P_{QT}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(\alpha, \beta) = 1, \quad (4.18)$$

donc,

$$\sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} f_{exp}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(\alpha, \beta) \approx \frac{N_{AB}}{N_A N_B}. \quad (4.19)$$

En utilisant cette relation dans (4.17), on trouve :

$$P_{QT}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(\alpha, \beta) \approx \frac{f_{exp}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(\alpha, \beta)}{\sum_{\epsilon_1, \epsilon_2} f_{exp}^{\epsilon_1, \epsilon_2}(\alpha, \beta)}. \quad (4.20)$$

Cette expression peut reproduire les probabilités marginales de forme $P_{QT}^{+,+}(\alpha, \beta) + P_{QT}^{+,-}(\alpha, \beta)$, qui devraient coïncider avec les prédictions de la mécanique quantique. Une propriété importante de ces probabilités est le principe de non-signallement : deux de ces probabilités dépendent uniquement du paramètre α , alors que les deux autres dépendent uniquement du paramètre β .

En comparant leur méthode avec les données expérimentales obtenues par Weihs *et al.* à Innsbruck, Adenier et Khrennikov ont découvert que les probabilités marginales varient selon les deux paramètres α et β . Il semble donc y avoir violation du principe de non-signallement ou de l'hypothèse d'échantillonnage juste.

4.3 Les contributions de De Raedt et Michielsen

De Raedt et Michielsen critiquent le critère de localité utilisé par Bell et suggèrent un modèle particulier. Il est entendu que, depuis les débuts de son utilisation, la mécanique quantique sert à prédire les propriétés statistiques de plusieurs événements plutôt que les spécificités d'un seul. L'objectif de De Raedt et Michielsen est de créer un modèle qui pourrait reproduire les résultats statistiques de la mécanique quantique par l'accumulation d'événements uniques. Les processus utilisés sont locaux et causals,

et leur modèle génère les distributions de probabilités de la mécanique quantique. Pour plus de détails sur les spécificités de leur modèle, on peut se référer à [21], [22] et [23].

Les simulations utilisées par De Raedt et Michielsen ont comme avantage qu'elles ne requièrent pas la théorie des probabilités pour comparer les résultats de simulation aux résultats expérimentaux. Ceci évite toute utilisation de l'inférence inductive qui est habituellement requise pour comparer les données expérimentales aux prévisions de la mécanique quantique.

4.3.1 Rôle des fenêtres de temps

Dans une expérience de type Bohm, les données sont colligées sous la forme :

$$\Upsilon_i = \{x_{n,i}, t_{n,i}, \theta_{n,i} | n = 1, \dots, N_i\}, \quad (4.21)$$

où $x_{n,i} = \pm 1$ représente la donnée n prise par le détecteur i , $t_{n,i}$ est le temps de mesure de cette donnée et $\theta_{n,i}$ est l'angle de rotation du polariseur, par exemple. Le nombre de coïncidences entre les détecteurs $D_{x,1}$ et $D_{y,2}$, est donné par :

$$C_{xy}(a, b) = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \delta_{x,x_{n,1}} \delta_{y,x_{m,2}} \delta_{a,\theta_{n,1}} \delta_{b,\theta_{m,2}} \Omega(W - |t_{n,1} - t_{m,2}|), \quad (4.22)$$

où Ω est la fonction de Heaviside, et W , la fenêtre de temps permise.

La plupart des développements de type Bell supposent que la fenêtre de temps W tend vers l'infini. Ceci mène à la simplification :

$$C_{xy}^\infty = \sum_{n=1}^N \delta_{x,x_{n,1}} \delta_{y,x_{n,2}}. \quad (4.23)$$

Selon De Raedt et Michielsen, ce modèle est difficilement justifiable : lors des expé-

riences, les efforts sont généralement mis à diminuer W plutôt qu'à l'augmenter. La simplification est valide, mais peut difficilement être comparée à l'expérience.

Afin de faire coïncider les données expérimentales, il est courant d'ajouter un décalage ΔG à une des séries de données pour maximiser le nombre de coïncidences. Selon De Raedt et Michielsen, cet ajout rend les données explicitement non causales. Ceci s'explique par le fait que la coïncidence d'une paire de données dépend de la coïncidence de toutes les autres paires de données et donc que l'ajout d'un décalage a un effet sur toutes les coïncidences et leurs dépendances. De plus, le décalage détruit l'hypothèse d'échantillonnage juste, puisque seulement une partie des données est analysée, les photons non coïncidants étant rejetés de l'analyse [22].

4.3.2 De la théorie à l'expérience

Le passage des valeurs théoriques aux données expérimentales n'est pas direct. Le modèle probabiliste prédit, pour les variables dichotomiques x et y qui représentent les données et pour le choix d'axes a et b :

$$\tilde{P}(x, y|a, b) = \frac{1 + x\tilde{E}_x(a, b) + y\tilde{E}_y(a, b) + xy\tilde{E}_{xy}(a, b)}{4}. \quad (4.24)$$

Ici, la notation \tilde{P} et \tilde{E} représente les probabilités et les valeurs moyennes des variables x et y du modèle probabiliste. Si x et y sont logiquement indépendants, alors il est possible d'effectuer la factorisation $\tilde{P}(x, y|a, b) = \tilde{P}(x|a, b)\tilde{P}(y|a, b)$, où :

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x|a, b) &= \frac{1 + x\tilde{E}_x(a, b)}{2}, \\ \tilde{P}(y|a, b) &= \frac{1 + y\tilde{E}_y(a, b)}{2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Or, les prédictions de la mécanique quantique sont :

$$\begin{aligned}\hat{P}(\hat{x}|a, b) &= \frac{1 + \hat{x}\hat{E}_1(a)}{2}, \\ \hat{P}(\hat{y}|a, b) &= \frac{1 + \hat{y}\hat{E}_2(b)}{2},\end{aligned}\tag{4.26}$$

où \hat{x} et \hat{y} sont des variables aléatoires logiquement indépendantes. La notation \hat{E} et \hat{P} représente encore les valeurs moyennes et les probabilités, mais cette fois pour les variables \hat{x} et \hat{y} de la mécanique quantique. Pour faire le pont entre le modèle probabiliste et la mécanique quantique, il suffit de poser $\tilde{E}_x(a, b) = \hat{E}_1(a)$ et $\tilde{E}_y(a, b) = \hat{E}_2(b)$. Mais le passage est incomplet, puisque les données x et y ne sont pas forcément égales aux variables logiquement indépendantes \hat{x} et \hat{y} . Donc selon De Raedt et Michielsen [21], si les données x et y ne sont pas logiquement indépendantes, la description de la mécanique quantique est nécessairement incomplète.

4.3.3 Localité d'Einstein vs localité de Bell

Il existe une importante différence entre le critère de localité d'Einstein et celui de Bell. Le critère d'Einstein est aisément défini : la situation d'un système S_2 , spatialement séparé du système S_1 , est indépendante de ce qui est fait au système S_1 . On remarque que le critère d'Einstein s'applique à des événements individuels.

Le critère de Bell est plus subtil : il est basé sur les fondements des probabilités. On a comme axiomes :

1. $0 \leq P(A|Z) \leq 1$.
2. $P(A|Z) + P(\bar{A}|Z) = 1$, où \bar{A} est la négation de A .
3. $P(AB|Z) = P(A|BZ)P(B|Z) = P(B|AZ)P(A|Z)$.

Ces axiomes mènent à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{P(A|BZ)}{P(A|Z)} &= \frac{P(A|BZ)P(B|Z)}{P(A|Z)P(B|Z)}, \\ &= \frac{P(AB|Z)}{P(A|Z)P(B|Z)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Ceci permet de définir l'indépendance logique. Les événements A et B seront considérés comme logiquement indépendants si :

$$\frac{P(AB|Z)}{P(A|Z)P(B|Z)} = 1, \quad (4.28)$$

c'est-à-dire que $P(A|BZ) = P(A|Z)$.

Le cas de Bell est légèrement plus complexe. Il ajoute une distinction d'influence causale : les résultats de mesure A et B deviennent \hat{A} et \check{B} , indiquant que l'un n'a pas d'influence causale sur l'autre. De plus, la condition Z devient $Z = \hat{a}\check{b}z$, où \hat{a} et \check{b} sont les choix d'axes et ont une influence causale seulement sur \hat{A} et \check{B} respectivement. Les probabilités sont donc :

$$P(\hat{A}\check{B}|\hat{a}\check{b}z) = P(\hat{A}|\check{B}\hat{a}\check{b}z)P(\check{B}|\hat{a}\check{b}z). \quad (4.29)$$

À cause de l'indépendance causale, on peut simplifier certaines probabilités telles que :

$$P(\hat{A}|\check{B}\hat{a}\check{b}z) = P(\hat{A}|\hat{a}z), \quad (4.30)$$

et

$$P(\check{B}|\hat{a}\check{b}z) = P(\check{B}|\check{b}z). \quad (4.31)$$

On a donc :

$$P(\hat{A}\check{B}|\hat{a}\check{b}z) = P(\hat{A}|\hat{a}z)P(\check{B}|\check{b}z). \quad (4.32)$$

Le critère de localité de Bell est constitué des équations (4.30) et (4.31). Ces équations montrent aussi que Bell croyait qu'une absence d'influence causale impliquait

l'indépendance logique.

On remarque que le critère de Bell est basé sur les probabilités et s'applique donc à des ensembles. Il y a donc un saut important entre ce critère et celui d'Einstein qui ne s'applique qu'à des événements individuels. Cette différence est liée à la différence entre fréquence et probabilité : l'une est construite par l'accumulation d'événements individuels, l'autre est une construction théorique utilisée pour raisonner à propos de la première.

Selon De Raedt et Michielsen, Bell n'aurait pas considéré la possibilité que son critère de localité soit erroné lorsqu'il a tiré la conclusion que la mécanique quantique est non locale. Ce critère de localité est différent de celui d'Einstein et assume que l'absence d'influence causale implique l'indépendance logique. Selon De Raedt et Michielsen, ceci mène régulièrement à des contradictions logiques en théorie des probabilités.

Le modèle événementiel de simulation de De Raedt et Michielsen reproduit les corrélations de l'état singulet de spin tout en obéissant au critère de localité d'Einstein. Les données produites par leur modèle ne peuvent pas être exprimées par un seul espace de probabilités de Kolmogorov. Selon eux, ceci est en accord avec l'idée que des modèles non Kolmogorov peuvent violer les inégalités de Bell sans faire appel à la non-localité [22], [24].

4.3.4 Importance de l'efficacité de détection

Des efficacités de détection élevées sont requises dans différentes applications du monde de l'information quantique. Selon De Raedt et Michielsen, il est impossible d'obtenir des efficacités de 100% pour diverses raisons. Dans une expérience, l'efficacité de détection est souvent définie comme le ratio de photons détectés par rapport au

nombre de photons émis. Ceci requiert des efficacités d'appareils élevées, ainsi que des configurations expérimentales particulières. De Raedt et Michielsen montrent [22] que certains détecteurs dépendent de la configuration expérimentale et que leur efficacité varie grandement selon la situation.

La méthode d'analyse des données a aussi une grande influence. L'utilisation de fenêtres de temps pour regrouper les données cause quelques problèmes, puisque certaines données seront ignorées afin de maximiser le nombre de décomptes simultanés. Ces photons non considérés dans l'analyse diminuent donc l'efficacité de détection, même si les appareils sont efficaces à 100%.

Qui plus est, l'inclusion dans le modèle des efficacités des détecteurs ne résout pas les contradictions entre les données expérimentales et la théorie des expériences de type Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm [25].

4.4 Les espaces de Hess et Philipp

Hess et Philipp ont démontré [26] que si les paramètres cachés d'une expérience de type Bohm dépendent du temps et des appareils, alors il est impossible de déduire des inégalités de type Bell qui font intervenir des résultats d'expériences réalisables.

Afin de le démontrer, supposons une expérience où des paires de particules corrélées sont émises d'une source S_0 . L'information transportée est identifiée par la variable aléatoire Λ . Les variables aléatoires $A = \pm 1$ et $B = \pm 1$ représentent les mesures de spin dans les stations S_1 et S_2 respectivement. Elles sont des fonctions de Λ et peuvent être indexées par un vecteur unitaire tridimensionnel selon l'état des instruments. Ces vecteurs sont \mathbf{a} et \mathbf{d} dans S_1 , et \mathbf{b} et \mathbf{c} dans S_2 . Les vecteurs unitaires ont un statut particulier : c'est l'expérimentateur qui les contrôle.

Selon Hess et Philipp, certaines étapes du développement de l'inégalité de Bell font des hypothèses supplémentaires. Prenons par exemple l'étape suivante :

$$\begin{aligned} \int [A_a(\Lambda(\omega))B_b(\Lambda(\omega)) - A_a(\Lambda(\omega))B_c(\Lambda(\omega))]P(d\omega) \\ = \int [A_a(\Lambda(\omega))A_b(\Lambda(\omega))[A_b(\Lambda(\omega))A_c(\Lambda(\omega)) - 1]]P(d\omega), \end{aligned} \quad (4.33)$$

où Λ est la variable aléatoire introduite précédemment et ω , un élément indécomposable de l'espace de paramètres lié au temps de mesure t_m . La présence explicite de ω montre que les termes de l'inégalité de Bell doivent être mesurés simultanément. Hess et Philipp font cependant la différence selon ce que contient l'espace des paramètres. Les trois espaces qu'ils présentent sont construits autour des postulats suivants :

1. la vitesse de la lumière est la vitesse limite de propagation d'effets causals, comme dicté par la localité d'Einstein ;
2. les particules émises par la source transportent des éléments de réalité. La mesure implique d'autres éléments de réalité, comme les paramètres des instruments ;
3. la moyenne des informations recueillies pour certaines paires de particules corrélées selon une paire d'états des appareils est égale à la moyenne qui aurait été obtenue si toutes les informations avaient été mesurées selon cette paire d'états.

4.4.1 Espace des paramètres de Bell

L'espace des paramètres utilisé par Bell contient les paramètres de source seulement : c'est dire que Λ est indépendant des axes de mesure. Ceci est possible si les expérimentateurs retardent leurs choix d'axe de mesure de sorte que l'échange d'information entre les deux systèmes est contraint à respecter la localité postulée par Einstein. Puisque les quantités apparaissant dans les inégalités de Bell ne sont pas

mesurées simultanément, il n'est pas possible de développer directement les inégalités de Bell avec cet espace. Hess et Philipp présentent cependant un nouvel argument qui permet de recréer les inégalités de Bell. Il s'agit de la réorganisation des données.

Supposons que le paramètre Λ puisse prendre un nombre fini M de valeurs. Ces valeurs sont dénotées λ_s où $s = 1, \dots, M$ et la probabilité $P(\Lambda = \lambda_s)$ est dénotée p_s . Pour un grand nombre N d'expériences réalisées, le nombre d'occurrences de λ_s sera approximativement $N \cdot p_s$. De plus, supposons que chacune des combinaisons d'axes (a, b) , (a, c) , (d, b) et (d, c) se produise avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Ceci implique que, pour une valeur λ_s , on aura $\frac{1}{4}Np_s$ fois chacune des paires d'axes (a, b) , (a, c) , (d, b) et (d, c) . Il est ainsi possible de réorganiser les données en colonnes pour chaque λ_s , chacune des colonnes obéissant à une équation de la forme :

$$a_a(\lambda_s)b_b(\lambda_s) + a_a(\lambda_s)b_c(\lambda_s) + a_d(\lambda_s)b_b(\lambda_s) - a_d(\lambda_s)b_c(\lambda_s) = \pm 2, \quad (4.34)$$

où les variables aléatoires A et B sont remplacées par les valeurs qu'elles adoptent en minuscule. Ceci complète la preuve pour retrouver les inégalités de Bell à l'aide de la réorganisation des données.

4.4.2 Espace des paramètres incluant les paramètres d'appareils

Les paramètres d'appareils sont parfois ajoutés dans les preuves de Bell. Pour λ_i^* dans S_1 et λ_k^{**} dans S_2 , on a $A = A_i(\lambda, \lambda_i^*)$ et $B_k(\lambda, \lambda_k^{**})$. Bell fait une moyenne sur ces paramètres, mais selon Hess et Philipp, ceci requiert une indépendance conditionnelle telle que :

$$P(\lambda, \lambda_i^*, \lambda_k^{**}) = P(\lambda_i^*|\lambda) \cdot P(\lambda_k^{**}|\lambda) \cdot P(\lambda). \quad (4.35)$$

Il existe d'autres conditions moins contraignantes, mais selon Hess et Philipp, elles ne sont pas physiquement justifiées. Il suffit ensuite d'effectuer les moyennes :

$$\begin{aligned}\bar{A}_i(\lambda) &= \int A_i(\lambda, \lambda_i^*) P(\lambda_i^* | \lambda) d\lambda_i^*, \\ \bar{B}_k(\lambda) &= \int B_k(\lambda, \lambda_k^{**}) P(\lambda_k^{**} | \lambda) d\lambda_k^{**},\end{aligned}\tag{4.36}$$

et de refaire la preuve de Bell avec \bar{A} et \bar{B} . La réorganisation des données est possible avec ces nouvelles variables.

4.4.3 Espace agrandi

L'espace agrandi développé par Hess et Philipp contient des paramètres Λ qui dépendent du temps et du choix des axes. Ceci est l'espace le plus large qui peut être créé en accord avec les trois postulats de Hess-Philipp. En effet, Bell n'a pas considéré la possibilité que les paramètres d'instruments soient indépendants de la source tout en étant stochastiquement dépendants entre eux. Ces paramètres peuvent obéir à l'équation :

$$A_i = -B_i,\tag{4.37}$$

seulement à cause des dépendances temporelles et de la corrélation entre les temps de mesure pour une paire de particules. Ceci se traduit par :

$$A_i(\lambda, \lambda_i^*(t_m)) = -B_i(\lambda, \lambda_i^{**}(t_m)),\tag{4.38}$$

où t_m est le temps de mesure et est supposé le même pour les deux particules d'une même paire. Ces considérations mènent à la manipulation de termes tels que :

$$\begin{aligned}
& a_a(\lambda_s, \lambda_a^*(t_{m1}))b_b(\lambda_s, \lambda_b^{**}(t_{m1})), \\
& a_a(\lambda_s, \lambda_a^*(t_{m2}))b_c(\lambda_s, \lambda_c^{**}(t_{m2})), \\
& a_d(\lambda_s, \lambda_d^*(t_{m3}))b_b(\lambda_s, \lambda_b^{**}(t_{m3})), \\
& a_d(\lambda_s, \lambda_d^*(t_{m4}))b_c(\lambda_s, \lambda_c^{**}(t_{m4})).
\end{aligned}$$

La présence explicite des t_m empêche la réorganisation des données : certaines factorisations des produits $A \cdot B$, telles que (4.33) et (4.35), sont impossibles en vue des dépendances de certains termes en des t_m différents.

4.5 Interprétation statistique

4.5.1 Tests de pureté

Dans un de ses articles [27], Kupczynski présente une variation aux classiques arguments d'EPR. Ces arguments sont légèrement modifiés et laissent place à une interprétation statistique des arguments de complétude d'EPR.

Les principales suppositions de l'interprétation statistique sont :

1. Le vecteur d'état Ψ décrit un ensemble d'états d'un système physique préparés identiquement.
2. Le vecteur d'état Ψ joint à l'opérateur hermitique \hat{O} représentant l'observable O donne la distribution de probabilités des résultats de mesure de l'observable O pour les préparations décrites par Ψ .
3. Un sous-ensemble de Ψ sur lequel une mesure non destructive de O donnant o_i a été faite est décrit par le vecteur d'état réduit Ψ_i tel que $\hat{O}\Psi = o_i\Psi_i$.

4. Concernant le modèle d'EPR, le vecteur d'état représentant le système II obtenu par réduction de l'état intriqué de deux systèmes I+II ne représente que le sous-ensemble des systèmes II ayant comme partenaires les systèmes I pour lesquels la mesure de l'observable O a donné le résultat o_i . À un autre résultat o_j correspondent d'autres sous-ensembles, évitant ainsi le paradoxe d'EPR.
5. La valeur d'une observable associée à un ensemble quantique pur ou à un système physique membre de cet ensemble est une caractéristique de cet ensemble créée par l'interaction avec l'appareil de mesure.

La théorie quantique est donc contextuelle, puisqu'elle ne produit que des distributions de probabilités et celles-ci sont propres à l'expérience, et non pas seulement à des systèmes individuels ou à un appareil de mesure. Comme le dit Kupczynski, la théorie quantique n'est pas une théorie des systèmes quantiques individuels, mais plutôt une théorie de phénomènes quantiques.

Dans l'interprétation statistique, un système individuel est dans un état pur s'il fait partie d'un ensemble quantique pur de systèmes semblablement préparés. Un sous-ensemble d'un ensemble pur est indiscernable de l'ensemble initial. Dans le cas particulier des modèles à variables cachées, l'ensemble quantique pur devient un ensemble statistique mixte par rapport à des variables incontrôlables. Ceci mène à ce que Kupczynski nomme des tests de pureté. Puisqu'on ne contrôle pas les distributions de variables cachées, les données peuvent varier entre chaque répétition de l'expérience. Il est ainsi possible de procéder à un test statistique non paramétrique et d'ainsi vérifier si la théorie quantique est complète.

Kupczynski ajoute une nuance : il est aussi possible de tester la complétude prédictive. Selon lui, la théorie quantique prédit des distributions de probabilités. Les données obtenues lors d'une expérience en sont les moyennes. Or, si une expérience permet de détecter des structures fines dans les données et que ces structures n'étaient pas prédites par la théorie quantique, alors il aura été prouvé que la théorie quantique n'est pas complète par ses prédictions.

4.5.2 Conditions de localité

Kupczynski prend aussi position quant aux définitions de la localité [28]. Plutôt que la factorisation utilisée par Bell :

$$P(a, b|x, y, \lambda) = P(a|x, \lambda)P(b|y, \lambda), \quad (4.39)$$

il propose plutôt la condition de localité :

$$P(a, b|x, y) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{xy}} P(\lambda)P(a, b|x, y, \lambda), \quad (4.40)$$

où a, b sont les valeurs mesurées des variables aléatoires A, B ; x, y sont les appareils de mesure et λ représente les variables locales. La subtilité de la proposition repose sur Λ_{xy} : ce domaine est différent pour chaque paire dans une expérience de type Bohm, puisqu'il contient les variables locales décrivant les instruments de sorte que $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_x, \lambda_y)$. Puisque les variables cachées des appareils sont incontrôlables, elles changent pour chaque itération de l'expérience. Ceci mène donc à l'équation :

$$E(AB) = \int_{\Lambda_{xy}} A(\lambda)B(\lambda)\rho_{xy}(\lambda)d\lambda. \quad (4.41)$$

Cette équation répond aux critères de Kolmogorov puisque chaque expérience a son propre espace de probabilité. Bell avait supposé que les changements $\Lambda_{xy} = \Lambda$ et $\rho_{xy} = \rho$ étaient justifiés par la localité. Ce modèle reproduit les corrélations prédites par la théorie quantique.

4.6 Arguments statistiques de Gill, Weihs, Zeilinger et Zukowski

En réponse aux articles de Hess-Philipp, Gill *et al.* [29] ont développé les inégalités de Bell à partir d'arguments de probabilités et de statistiques. Selon eux, le temps ne joue aucun rôle dans l'obtention d'inégalités de type Bell et leur modèle tente de le prouver.

Soit une expérience de type Bell avec les paramètres A et B pouvant chacun prendre des valeurs dénotées 1 et 2. Ces paramètres sont choisis indépendamment par deux observateurs et influencent les résultats de mesures X et Y de valeurs ± 1 . Les variables A, B, X et Y sont analogues aux choix d'axes et aux résultats de mesure habituellement trouvés dans la littérature.

Le modèle de Gill *et al.* ajoute huit variables cachées supplémentaires X_{ij}, Y_{ij} où $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Selon Gill *et al.*, ces huit variables peuvent être reconstruites dans toutes les théories.

Comme condition de réalisme, ils utilisent la définition suivante : quelqu'un pourrait imaginer ce que les résultats de mesure pourraient être selon n'importe quel paramètre. Mathématiquement :

$$X \equiv X_{AB}, \quad Y \equiv Y_{AB}. \quad (4.42)$$

Ainsi, les huit variables coexistent quelles que soient les expériences réalisées d'un côté ou de l'autre du montage expérimental. La condition de localité est :

$$X_{i1} \equiv X_{i2}, \quad Y_{1j} \equiv Y_{2j}, \quad (4.43)$$

et tient pour tout i, j . Cette condition implique que le résultat de mesure dans une branche de l'expérience ne dépend pas des paramètres de l'autre branche. On peut donc écrire :

$$X_i \equiv X_{ij}, \quad Y_j \equiv Y_{ij}. \quad (4.44)$$

Ces propriétés se jumellent pour donner :

$$X \equiv X_A, \quad Y \equiv Y_B. \quad (4.45)$$

Un des arguments principaux de Gill *et al.* consiste en la liberté de choix des expérimentateurs. Le choix des paramètres A et B est décidé librement par l'expérimentateur, ou choisi aléatoirement. Ces paramètres ne dépendent donc pas de la source et des détecteurs. Ceci justifie l'utilisation de l'équation (4.45).

Afin de développer l'inégalité de Bell, considérons la quantité $X_i Y_j$, où $i, j = 1, 2$. Étant donné que $X_i = \pm 1$ et $Y_i = \pm 1$, on peut exprimer un de ces termes au moyen des trois autres, de sorte que :

$$(X_1 Y_1) = (X_1 Y_2)(X_2 Y_1)(X_2 Y_2). \quad (4.46)$$

Soit l'indicateur $\mathbf{1}\{\dots\}$ donnant 1 lorsque l'événement précisé se produit et 0 s'il ne se produit pas. On a donc :

$$\mathbf{1}\{X_1 = Y_2\} - \mathbf{1}\{X_1 = Y_1\} - \mathbf{1}\{X_2 = Y_1\} - \mathbf{1}\{X_2 = Y_2\} = \Delta, \quad (4.47)$$

où Δ ne peut prendre que les valeurs $\{-2, 0\}$. Comme l'espérance mathématique d'une combinaison linéaire de variables aléatoires est égale à la combinaison linéaire des espérances de ces variables et puisque l'espérance d'un indicateur est la probabilité de l'événement en question, alors l'équation précédente devient :

$$P(X_1 = Y_2) - P(X_1 = Y_1) - P(X_2 = Y_1) - P(X_2 = Y_2) = E(\Delta) \leq 0. \quad (4.48)$$

Les variables (X_1, X_2, Y_1, Y_2) seront statistiquement indépendantes de (A, B) si les procédures de choix de (X_1, X_2, Y_1, Y_2) sont aléatoires. Or, ceci permet de simplifier les probabilités de l'équation (4.48). Par réalisme, la probabilité $P(X = Y|A = i, B = j)$ devient $P(X_i = Y_j|A = i, B = j)$. Or, ceci est équivalent à $P(X_i = Y_j)$ par indépendance statistique. On obtient donc directement l'inégalité de Bell :

$$\begin{aligned}
 &P(X = Y|A = 1, B = 2) - P(X = Y|A = 1, B = 1) \\
 &-P(X = Y|A = 2, B = 1) - P(X = Y|A = 2, B = 2) \leq 0. \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Selon Gill *et al.*, cette méthode passe outre les arguments de Hess-Philipp (ce qui reste controversé). On peut considérer que l'inégalité de Bell est l'agglomération des résultats d'expériences performées simultanément à des milliers d'endroits différents. Selon eux, ceci implique que le temps ne pose aucun problème dans le développement de l'inégalité.

Chapitre 5

Conclusion

Comme l'a montré ce mémoire, beaucoup de contributions ont été apportées aux travaux de Bell. Sa célèbre inégalité a été modifiée par Clauser *et al.* Ceci l'a rendue plus générale et elle peut être plus facilement vérifiée expérimentalement. Ballentine et Jarrett ont fait remarquer d'importantes subtilités quant aux définitions de la localité. Ils ont montré que la définition utilisée par Bell, la localité forte, était en fait la conjonction de la localité simple et de la complétude. Il a ainsi été possible de mettre en évidence la complétude plutôt que la localité comme potentielle cause des violations des inégalités de Bell. De plus, Greenberger *et al.* ont montré qu'il y avait des contradictions dans les propositions d'EPR sans utiliser d'inégalités. Leur modèle s'applique même à des systèmes de trois ou quatre particules.

Il existe cependant de nombreuses échappatoires dans les développements de Bell. Adenier et Khrennikov ont montré que certaines hypothèses de base peuvent mener à des désaccords avec la mécanique quantique, comme celle d'échantillonnage juste. Le processus expérimental doit être remis en cause si cette hypothèse ne tient pas. Plusieurs autres problématiques ont été identifiées par De Raedt et Michielsen, incluant la détermination des fenêtres de temps adéquates pour considérer deux décomptes

comme coïncidants et des subtilités dans les équivalences entre la théorie et les données expérimentales. L'espace des paramètres utilisé par Bell n'est pas aussi général que ceux présentés par Hess et Philipp. L'ajout de dépendances temporelles crée des difficultés dans le développement et dans la vérification expérimentale des inégalités. Ces dépendances sont cependant contestées par Gill *et al.* qui argumentent dans le sens que les inégalités de Bell représentent les distributions statistiques des résultats d'expériences et ne peuvent donc pas dépendre du temps.

La gestion des corrélations à longue distance et de la non-localité varie selon les interprétations, tel qu'illustré dans [30]. Les problèmes de non-localité sont évités dans les interprétations épistémiques telles que celle de Copenhague, puisque le vecteur d'état est interprété comme étant une représentation des connaissances plutôt que l'état d'un objet. Le vecteur d'état n'est donc qu'un outil permettant de prédire les résultats potentiels d'expériences et les corrélations n'ont pas besoin d'être expliquées plus en détail. En mécanique bohémienne [31], [32], des forces non locales affectent une particule lorsqu'une autre interagit avec un appareil de mesure. Cependant, aucune information n'est transférée supraluminalement si l'état des particules est préparé selon une certaine densité de probabilité. L'interprétation transactionnelle [33], [34] explique la non-localité comme la communication par ondes avancées et retardées et évite ainsi toute forme de déplacement supraluminal.

Les inégalités de Bell ont tout de même mené à une panoplie d'applications [35]. Elles ont ouvert la porte à la théorie de l'information. Les inégalités de Bell sont intimement liées au calcul quantique. Il n'est pas encore possible d'utiliser plus que quelques bits quantiques ou de faire plus que quelques calculs simples, mais c'est un domaine en pleine effervescence. On peut aussi utiliser les inégalités plus directement à travers la cryptographie quantique pour vérifier l'intégrité d'un message encodé. Ces applications ont déjà atteint un niveau industriel.

Bibliographie

- [1] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, Phys. Rev., Volume 47, 1935, p. 777
- [2] N. Bohr, Phys. Rev., Volume 48, 1935, p. 696
- [3] D. Bohm, Quantum Theory, Dover Publications, 1989, p. 614
- [4] L. Marchildon, Mécanique quantique, De Boeck Université, 2000
- [5] J.S. Bell, Physics, Volume 1, 1964, p. 195
- [6] J.S. Bell, Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics, Cambridge University Press, 1987
- [7] J.S. Bell, Epistemological Letters, 1976 (reproduit dans [6], p. 52)
- [8] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony et R. A. Holt, Phys. Rev. Letters, Volume 23, 1969, p. 880
- [9] S.J. Freedman et J.F. Clauser, Phys. Rev. Letters, Volume 28, 1972, p. 938
- [10] J.F. Clauser et M.A. Horne, Phys. Rev. D, Volume 10, 1974, p. 526
- [11] J.F. Clauser et A. Shimony, Rep. Prog. Phys., Volume 41, 1978, p. 1881
- [12] P.M. Pearle, Phys. Rev. D, Volume 2, 1970, p. 1418
- [13] A. Aspect, P. Grangier, et G. Roger, Phys. Rev. Letters, Volume 49, 1982, p. 91
- [14] J.P. Jarrett, Noûs, Volume 18, 1984, p. 569
- [15] L.E. Ballentine et J.P. Jarrett, Am. J. Phys., Volume 55, 1987, p. 696
- [16] A. Shimony, Search for a Naturalistic View Volume II : Natural Science and Metaphysics, Cambridge University Press, 1993, p. 140

- [17] D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony et A. Zeilinger, *Am. J. Phys.*, Volume 58, 1990, p. 1131
- [18] R. Clifton, C. Pagonis et I. Pitowsky, *Proc. of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, Volume 1 : Contributed Papers, 1992, p. 114
- [19] A. Fine, *Synthese*, Volume 50, 1982, p. 279
- [20] G. Adenier et A.Y. Khrennikov, *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.*, Volume 40, 2007, p. 131
- [21] H. De Raedt, K. De Raedt, K. Michielsen, K. Keimpema et S. Miyashita, *J. Comp. Theor. Nanosci*, Volume 4, 2007, p. 957
- [22] H. De Raedt et K. Michielsen, *Ann. Phys.*, Volume 524, 2012, p. 393
- [23] K. Michielsen et H. De Raedt, *Proc. of SPIE*, Volume 8832, 2013
- [24] H. De Raedt, K. Hess et K. Michielsen, *J. Comp. Theor. Nanosci.*, Volume 8, 2011, p. 1011
- [25] H. De Raedt, F. Jin et K. Michielsen, *Proc. of SPIE*, Volume 8832, 2013
- [26] K. Hess et W. Philipp, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Volume 101, 2004, p. 1799
- [27] M. Kupczynski, *AIP Conf. Proc.*, Volume 750, 2006, p. 516
- [28] M. Kupczynski, *AIP Conf. Proc.*, Volume 1508, 2012, p. 253
- [29] R.D. Gill, G. Weihs, A. Zeilinger et M. Zukowski, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Volume 99, 2002, p. 14632
- [30] L. Marchildon, *Proc. of the Beyond the Quantum Workshop*, T.M. Nieuwenhuizen *et al.*, eds. World Scientific, 2007, p. 155
- [31] D. Bohm, *Phys. Rev.*, Volume 85, 1952, p. 166
- [32] D. Bohm, *Phys. Rev.*, Volume 85, 1952, p. 180
- [33] J.G. Cramer, *Phys. Rev. D*, Volume 22, 1980, p. 362
- [34] J.G. Cramer, *Rev. Mod. Phys.*, Volume 58, 1986, p. 647
- [35] J. Kofler et A. Zeilinger, *European Review*, Volume 18, Cambridge University Press, 2010, p. 469