

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR  
CLAUDIA MATTEAU

LA MÉTHODE D'ITÉRATION INVERSE POUR LES ENSEMBLES DE JULIA  
DU PLAN ET DE L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL

JANVIER 2014

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Dominic Rochon, directeur du mémoire  
Département de mathématiques et d'informatique

M. Sébastien Tremblay, juré  
Département de mathématiques et d'informatique

M. Jean-François Quessy, juré  
Département de mathématiques et d'informatique

# LA MÉTHODE D'ITÉRATION INVERSE POUR LES ENSEMBLES DE JULIA DU PLAN ET DE L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL

Claudia Matteau

## SOMMAIRE

Depuis ses fondements dans les années 1970, la géométrie fractale ne cesse de captiver de nombreux chercheurs. Que ce soit d'un point de vue théorique, appliqué ou purement visuel, les résultats sont fascinants de par leur beauté et leurs infinies possibilités. Les fractales peuvent être abordées à partir de nombreuses approches. Dans ce mémoire, un type d'ensembles fractals particulier est étudié : les ensembles de Julia construits par itérations d'un polynôme de la forme  $z^2 + c$ . De façon plus spécifique, ces ensembles sont explorés en regard de la méthode d'itération inverse permettant de les visualiser dans le plan complexe et dans l'espace tridimensionnel.

La méthode d'itération inverse est d'abord présentée à partir de résultats fondamentaux dans le plan complexe, ce qui correspond à son contexte traditionnel. Puis, les ensembles de Julia sont définis dans l'espace des nombres bicomplexes. L'utilisation de ces nombres conduit à une généralisation de certains résultats du plan complexe et à une caractérisation importante des ensembles de Julia bicomplexes. Celle-ci entraîne une adaptation intéressante de la méthode d'itération inverse qui mène à une visualisation de ces ensembles dans l'espace tridimensionnel habituel. La convergence des algorithmes d'itération inverse est discutée en lien avec une autre méthode bien documentée pour générer des fractales, soit celle des systèmes de fonctions itérées.

# THE INVERSE ITERATION METHOD FOR JULIA SETS IN THE COMPLEX PLANE AND THE 3-DIMENSIONAL SPACE

Claudia Matteau

## ABSTRACT

Since the 1970's, fractal geometry has kept numerous researchers busy. From a theoretical, an applied or a visual point of view, results are fascinating and beautiful. There are various interesting ways to approach fractals. In this memoir, a particular class of fractal sets is studied : Julia sets that arise from iterating a polynomial map of the form  $z^2 + c$ . More precisely, these sets are analyzed with regards to the inverse iteration method that allows an easy display in the complex plane and the three-dimensional space.

The inverse iteration method is firstly presented through main results in its traditional context that is the complex plane. Then, Julia sets are defined using bicomplex numbers. This leads to an extension of some results from the complex plane and the demonstration of an important characterization of bicomplex Julia sets. The inverse iteration method is adapted to generate and display these sets in the usual three-dimensional space. At last, algorithm convergence is discussed considering some results from iterated function systems, another well documented method for generating fractals.

## AVANT-PROPOS

Les défis, les possibilités et la rigueur qu'offrent les mathématiques m'ayant toujours intéressée, il semblait naturel de poursuivre mes études dans cette discipline. Le domaine des fractales s'est imposé à moi lorsque j'ai découvert leurs vastes champs d'étude, d'applications et d'influences. Il fallait cependant se restreindre à un sujet précis dans le cadre de ce mémoire. Le sujet des ensembles de Julia et de la méthode d'itération inverse s'est révélé à la fois motivant et surprenant.

Je tiens à remercier Dr. Dominic Rochon qui m'a proposé ce sujet et a dirigé les recherches. Son soutien, sa confiance et son expérience ont été grandement appréciés, tant pendant mes études au premier et deuxième cycle que lors des recherches et de la rédaction du mémoire.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude envers certains organismes pour leur support financier : le Fonds de recherche du Québec - Nature et technologie (FRQNT), l'Institut des sciences mathématiques (ISM) et le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie du Canada (CRSNG). J'aimerais remercier le Département de mathématiques et informatique et l'Université du Québec à Trois-Rivières pour leur encadrement stimulant.

Enfin, j'aimerais remercier ma famille et mes amis pour leur support et encouragements constants pendant mes études.

# Table des matières

Sommaire	i
Abstract	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vi
Table des figures	vii
Introduction	1
<b>1 Notions fondamentales</b>	<b>4</b>
1.1 Les espaces . . . . .	4
1.2 Les transformations . . . . .	9
1.3 La mesure . . . . .	11
<b>2 La dimension de Hausdorff-Besicovitch</b>	<b>16</b>
2.1 La mesure de Hausdorff . . . . .	17
2.2 La dimension de Hausdorff-Besicovitch . . . . .	26
2.3 La dimension fractale de l'ensemble triadique de Cantor . . . . .	33
<b>3 Les ensembles de Julia dans le plan complexe</b>	<b>39</b>
3.1 Définitions classiques . . . . .	40
3.2 Redéfinitions par les familles normales . . . . .	47

3.3	La méthode d'itération inverse . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Les ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel</b>	<b>60</b>
4.1	Les nombres bicomplexes et leurs propriétés . . . . .	61
4.2	Les ensembles bicomplexes . . . . .	69
4.2.1	Les ensembles classiques . . . . .	70
4.2.2	Les ensembles de Julia bicomplexes . . . . .	71
4.3	Caractérisation des ensembles de Julia . . . . .	75
4.4	La méthode d'itération inverse adaptée . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Justification des méthodes probabilistes</b>	<b>96</b>
5.1	Les systèmes de fonctions itérées . . . . .	97
5.2	Convergence de l'algorithme probabiliste pour les IFS . . . . .	101
5.2.1	L'intégrale généralisée . . . . .	102
5.2.2	Un espace de mesures . . . . .	104
5.2.3	Convergence de la méthode probabiliste . . . . .	105
5.3	La méthode probabiliste et les ensembles de Julia . . . . .	110
	<b>Conclusion</b>	<b>116</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>118</b>
<b>A</b>	<b>Procédures dans le plan complexe</b>	<b>122</b>
A.1	Informations générales . . . . .	122
A.2	Les ensembles de Julia remplis . . . . .	122
A.3	Les ensembles de Julia . . . . .	124
<b>B</b>	<b>Procédures dans l'espace tridimensionnel</b>	<b>127</b>
B.1	Informations générales . . . . .	127
B.2	Les ensembles de Julia par la caractérisation du corollaire 4.1 . . . . .	127
B.3	Les ensembles de Julia par la méthode d'itération inverse . . . . .	137

# Liste des tableaux

3.1	Points initiaux pour la méthode d'itération inverse . . . . .	57
-----	---	----

# Table des figures

2.1	Comportement de $\mathcal{H}^s(E)$ en fonction de $s$ . . . . .	29
2.2	Construction de l'ensemble triadique de Cantor . . . . .	33
2.3	Comportement de $\mathcal{H}^s(\mathcal{C})$ en fonction de $s$ . . . . .	37
3.1	Ensembles de Julia remplis du plan complexe . . . . .	46
3.2	Ensembles de Julia du plan complexe . . . . .	58
4.1	Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel $c = 0,25$ . . . . .	83
4.2	Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel $c = -0,123 + 0,745\mathbf{i}_1$ .	84
4.3	Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel $c = 0,0635 + 0,3725\mathbf{i}_1 +$ $0,3725\mathbf{i}_2 + 0,1865\mathbf{j}$ . . . . .	85
4.4	Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel $c = \mathbf{i}_1$ . . . . .	94
5.1	Sphère de Riemann . . . . .	111
5.2	Ensemble de Julia $c = -0,123 + 0,745\mathbf{i}$ . . . . .	113

# Introduction

*La possibilité de créer du complexe avec une règle simple permet de penser qu'il est possible de saisir une partie de la complexité du monde sans caractériser tous ses détails. (Bernard Sapoval, [40])*

Les objets extrêmement irréguliers, dont les parties ont à peu près la même structure que le tout et contenant des éléments discernables dans une large gamme d'échelles sont aujourd'hui bien connus sous les nom de *fractales*. Ce terme, introduit en 1975 par Benoît Mandelbrot (1924-2010) et dérivé du latin *fractus* signifiant brisé et irrégulier, décrit à la fois des formes naturelles et des objets mathématiques complexes. La géométrie fractale constitue une branche des mathématiques en pleine expansion et dont les applications touchent des domaines aussi variés que la biologie, l'économie, la physique, l'infographie et l'art.

Les fractales peuvent être explorées à partir de différentes approches. Dans ce mémoire, une classe de fractales particulière est étudiée, soit celle des ensembles de Julia. Construits par processus itératifs, ces objets mathématiques sont apparus avec l'étude de la dynamique de fonctions complexes proposée par Gaston Julia (1893-1978) en 1918 dans *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles* [24]. À la même époque, Pierre Fatou (1878-1929) s'était aussi intéressé à ce sujet. Difficiles à visualiser en raison de l'impossibilité de calculs informatisés, les ensembles de Julia sont redevenus un sujet d'étude important suite aux travaux de Mandelbrot dans les années 1970. Depuis, plusieurs auteurs dont Barnsley, Carleson, Devaney, Falconer, Gamelin, Peit-

gen, Saupe et Dietmar les ont revisités en complétant les résultats du début du siècle (références [3], [7], [8], [12], [33], [34] et [35]).

Jusqu'alors limités au plan complexe, les ensembles de Julia ont ensuite été générés dans l'espace tridimensionnel. Puisqu'aucun système de nombres à trois composantes n'admettait les propriétés adéquates à cet égard, des nombres définis par quatre composantes réelles ont été utilisés. Les ensembles de Julia ont donc été créés dans l'espace à quatre dimensions avant d'être ramenés dans l'espace tridimensionnel habituel. Le premier système de nombres employé fut celui des quaternions et en 1982, dans [32], Alan Norton fut le premier à fournir des algorithmes pour générer ces fractales tridimensionnelles à partir des quaternions. D'autres chercheurs s'y sont ensuite consacrés (références [18], [19], [20] et [22]). Cependant, dans [5], les auteurs ont démontré que l'approche utilisant les quaternions n'amène pas de dynamique intéressante, contrairement au cas complexe. Les ensembles de Julia tridimensionnels ont donc été analysés à partir d'un autre système de nombres plus adéquat : les nombres bicomplexes introduits en 1892 dans [43] et approfondis dans [36]. Les articles [27], [37] et [38] traitent de deux méthodes pour visualiser les ensembles de Julia remplis et l'ensemble de Mandelbrot bicomplexes dans l'espace tridimensionnel.

Dans ce travail, les résultats des chercheurs mentionnés précédemment sont abordés en lien avec la méthode d'itération inverse. Il s'agit en fait d'étudier en détails cette méthode qui permet de visualiser les ensembles de Julia dans le plan complexe et d'étendre son utilisation à l'espace tridimensionnel. Avant d'y parvenir, deux chapitres préliminaires sont proposés afin de mieux comprendre les informations présentées ensuite.

Le chapitre 1 expose des notions fondamentales sur les espaces et transformations importantes, de même que des résultats de base en théorie de la mesure.

Le chapitre 2 traite de la dimension de Hausdorff-Besicovitch qui permet de définir et d'étudier les fractales de façon rigoureuse. En fait, elle amène à mieux concevoir ce

qu'est une fractale et pour cette raison, elle est étudiée brièvement dans ce travail.

Le chapitre 3 est consacré aux ensembles de Julia du plan complexe produits par l'itération d'un polynôme particulier. Les définitions et résultats classiques sont repris pour bien comprendre ces objets. Puis, la définition de ces ensembles à l'aide du concept de familles normales de fonctions est énoncée et conduit aux justifications théoriques de la méthode d'itération inverse.

L'essentiel des nouveaux résultats élaborés dans ce mémoire se retrouvent au chapitre 4. À ce titre, les conclusions du chapitre 3 sont généralisés afin de visualiser les ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel à partir des nombres bicomplexes. Cette structure de nombres est d'abord introduite puis quelques ensembles classiques sont mentionnés. Une caractérisation importante des ensembles de Julia bicomplexes permet ensuite de développer une adaptation de la méthode d'itération inverse.

Enfin, le chapitre 5 contient les justifications théoriques concernant la convergence des algorithmes utilisés aux chapitres 3 et 4.

Le logiciel *Maple 16* est utilisé pour visualiser les différents ensembles de Julia. Bien que ce ne soit pas la plateforme la plus performante à cet égard, elle apparaît un choix pertinent puisqu'il est aisé d'y manipuler des objets tridimensionnels. Par ailleurs, ce logiciel est facilement accessible aux étudiants collégiaux et universitaires québécois qui désirent étudier les ensembles de Julia. Toutes les procédures créées se trouvent à l'annexe avec de brèves explications.

# Chapitre 1

## Notions fondamentales

La lecture de ce mémoire nécessite la connaissance de notions fondamentales en mathématiques concernant notamment certains espaces et transformations. Quelques résultats de base en théorie de la mesure sont aussi intégrés dans ce chapitre. Le lecteur déjà familier avec ces éléments peut passer directement au chapitre suivant. Les résultats proviennent principalement des références [3], [12], [31] et [45] et sont fournis dans un contexte général.

### 1.1 Les espaces

L'espace le plus important en regard de l'étude des fractales est l'espace métrique. Les définitions d'espace topologique et d'espace mesurable sont aussi présentées à partir d'un ensemble  $X$  quelconque et des ensembles classiques leur étant liés sont aussi indiqués. Rappelons d'abord que deux ensembles  $E, F \subseteq X$  sont égaux si  $E \subseteq F$  et  $F \subseteq E$ . Ils sont disjoints si  $E \cap F = \emptyset$ .

**Définition 1.1.** Une *métrique* sur un ensemble  $X$  associe à toute paire  $x, y \in X$  une distance  $d(x, y)$  telle que

$$(i) \quad 0 \leq d(x, y) < \infty \quad \forall x, y \in X ;$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X ;$$

$$(iii) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y ;$$

$$(iv) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

L'ensemble  $X$  muni d'une métrique  $d$  forme un **espace métrique**  $(X, d)$ . Pour  $X = \mathbb{R}^n$ , la métrique usuelle est donnée par la norme euclidienne :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . L'espace  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , soit celui sur lequel la plupart des résultats de ce travail se situent, constitue un espace métrique. Dans  $\mathbb{R}$ , la métrique euclidienne est fournie par la valeur absolue :  $d(x, y) = |x - y|$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ . Le concept de métrique mène à celui de boule et de voisinage autour d'un point.

**Définition 1.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $x_0 \in X$  et  $V \subseteq X$ .

(i) La **boule ouverte centrée en  $x_0$  de rayon  $\delta > 0$**  est l'ensemble

$$B(x_0, \delta) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \delta\}.$$

(ii) L'ensemble  $V$  est un **voisinage de  $x_0$**  s'il contient une boule ouverte centrée en  $x_0$  : il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x_0, \delta) \subseteq V$ .

Le concept de métrique mène aussi à celui de suite d'éléments de  $X$  adoptant des propriétés particulières. Il est entendu que les éléments de la suite sont indexés par les valeurs  $n = 1, 2, \dots$

**Définition 1.3.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

(i) Une suite  $\{x_n\}$  **converge vers  $x \in X$**  si  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$  tel que si  $n > N(\epsilon)$ , alors  $d(x_n, x) < \epsilon$ . On écrit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Sinon, la suite diverge.

(ii) Une suite  $\{x_n\}$  de  $X$  est une **suite de Cauchy** si  $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$  tel que si  $n, m > N$ , alors  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ .

(iii) Une suite  $\{x_{n_k}\}$  est une **sous-suite** de la suite  $\{x_n\}$  si  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$  et  $x_{n_k} \in \{x_n\}$  pour  $k = 1, 2, \dots$

L'espace métrique  $(X, d)$  est dit **complet** si chaque suite de Cauchy dans  $X$  converge vers un élément  $x \in X$ . Entre autres,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  est un espace métrique complet.

**Définition 1.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $E \subseteq X$ .

(i) L'ensemble des points intérieurs de  $E$  est donné par

$$\text{int}(E) = \{x \in X \mid \exists \delta > 0 \text{ tel que } B(x, \delta) \subseteq E\}.$$

(ii) L'ensemble des points d'accumulation de  $E$  est donné par

$$\text{acc}(E) = \{x \in X \mid \forall \delta > 0, (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset\}.$$

(iii) L'ensemble des points adhérents de  $E$  ou la fermeture de  $E$  est

$$\overline{E} = \{x \in X \mid \forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset\} = E \cup \text{acc}(E).$$

(iv) La frontière de  $E$  est  $\partial E = \overline{E} \setminus \text{int}(E)$ .

Ces éléments permettent de définir certains concepts classiques. L'ensemble  $E$  est **ouvert** si chaque élément de  $E$  est un point intérieur de  $E$  ou  $\text{int}(E) = E$ . L'ensemble  $E$  est **fermé** si son complément  $E^c$  est ouvert. De façon équivalente,  $E$  est fermé s'il contient tous ses points d'accumulation :  $\text{acc}(E) \subseteq E$ . L'ensemble  $E$  est **borné** s'il est contenu dans une certaine boule ouverte : il existe  $x_0 \in X$  et  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, x_0) < \delta$ . L'ensemble  $E$  est **compact** si de tout recouvrement de  $E$  par des ouverts de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini. Dans  $\mathbb{R}^n$ , cet énoncé est équivalent à dire que  $E$  est borné et fermé, ou que toute suite dans  $E$  a une sous-suite qui converge dans  $E$ . De plus, un espace métrique compact est automatiquement complet. Enfin,  $E$  est **connexe** s'il ne peut pas s'exprimer comme l'union de deux ensembles ouverts disjoints non vides.

**Définition 1.5.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $E \subseteq X$ . Le **diamètre de l'ensemble**  $E$  est donné par  $\text{diam}(E) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\}$ .

Le diamètre d'un ensemble correspond donc à la plus grande distance entre deux éléments de celui-ci.

**Remarque 1.1.**

1.  $\text{diam}(\emptyset) = 0$ .
2.  $\text{diam}(E) < \infty$  si et seulement si  $E \subseteq X$  est borné.
3. Le diamètre d'un ensemble, de sa fermeture et de son enveloppe convexe sont les mêmes.

**Définition 1.6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Soit  $\delta > 0$ ,  $E \subseteq X$  et  $\{U_k\}$  un recouvrement fini ou dénombrable de  $E$  par des ensembles dont le diamètre est d'au plus  $\delta$ . On dit alors que  $\{U_k\}$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ .

De façon symbolique,  $\{U_k\}$  est un  $\delta$ -recouvrement fini de  $E$  si  $E \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_k$  et  $0 \leq \text{diam}(U_k) \leq \delta$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$  et une valeur fixée  $n \in \{1, 2, \dots\}$ . Il s'agit d'un  $\delta$ -recouvrement dénombrable de  $E$  si  $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$  et  $0 \leq \text{diam}(U_k) \leq \delta$  pour  $k = 1, 2, \dots$ .

Les ensembles ouverts d'un espace métrique  $(X, d)$ , définis avec la notion de point intérieur, forment une topologie sur  $X$ . De façon plus générale, une **topologie pour un ensemble**  $X$  est une famille  $\mathcal{O}$  de sous-ensembles de  $X$  possédant les propriétés suivantes :

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  et  $X \in \mathcal{O}$ ;
- (ii) Si  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{O}$  pour une valeur fixée  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , alors  $\bigcap_{k=1}^n E_k \in \mathcal{O}$ ;
- (iii) Si  $\{E_k\}_{k \in I}$  est une famille d'ensembles de  $\mathcal{O}$  indexée par un ensemble  $I$  quelconque, alors  $\bigcup_{k \in I} E_k \in \mathcal{O}$ .

Les éléments de  $X$  sont alors appelés les **ensembles ouverts de  $X$**  et  $X$  muni d'une topologie forme un **espace topologique** noté  $(X, \mathcal{O})$ . La propriété (ii) indique que l'intersection de toute famille finie d'ensembles de  $\mathcal{O}$  est dans  $\mathcal{O}$  alors que la propriété (iii) stipule que l'union de toute famille d'ensembles de  $\mathcal{O}$  est dans  $\mathcal{O}$ .

**Définition 1.7.** Soit  $X$  un ensemble quelconque. Une famille  $\mathcal{T}$  de sous-ensembles de  $X$  est une **tribu** ou une  **$\sigma$ -algèbre sur  $X$**  si elle possède les propriétés suivantes :

- (i)  $X \in \mathcal{T}$ ;

(ii) Si  $E \in \mathcal{T}$ , alors  $E^c = X \setminus E \in \mathcal{T}$  ;

(iii) Si  $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{T}$ , alors  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{T}$ .

Les éléments de  $\mathcal{T}$  constituent les **parties mesurables** de  $X$  et  $X$  muni d'une tribu  $\mathcal{T}$  forme un **espace mesurable**. Il est noté  $(X, \mathcal{T})$ . Dans ce travail, le terme tribu est privilégié.

### Remarque 1.2.

Deux conclusions découlent de la définition d'une tribu :

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}$ .

2. Si  $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{T}$ , alors  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{T}$ . En effet, de (ii), si  $E_k \in \mathcal{T}$  alors  $E_k^c \in \mathcal{T}$  pour  $k = 1, 2, \dots$ . D'où  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c \in \mathcal{T}$  de (iii). Des lois de De Morgan,  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c = \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \in \mathcal{T}$ . De (ii), on déduit ainsi que  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{T}$ .

Rappelons que pour une suite d'ensembles  $A_1, A_2, \dots$ , les lois de De Morgan stipulent que

$$\left( \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \quad \text{et} \quad \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c.$$

**Définition 1.8.** Soit  $X$  un ensemble quelconque et  $\mathcal{F}$  une famille de sous-ensembles de  $X$ . La **tribu engendrée par  $\mathcal{F}$**  est l'intersection de toutes les tribus contenant  $\mathcal{F}$ .

La tribu engendrée par  $\mathcal{F}$  est en fait la plus petite tribu contenant  $\mathcal{F}$ . Il s'agit bel et bien d'une tribu puisque les trois propriétés qui la définissent sont automatiquement satisfaites. Elle est notée  $\sigma(\mathcal{F})$  ou  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ . Considérons quelques exemples de tribus engendrées par différentes familles  $\mathcal{F}$  de sous-ensembles de  $X$  :

1. Pour  $\mathcal{F}_1 = \{X\}$ , la tribu engendrée est  $\sigma(\mathcal{F}_1) = \{X, \emptyset\}$ .

2. Pour  $\mathcal{F}_2 = \{E\}$  où  $E \subsetneq X$ , la tribu engendrée est  $\sigma(\mathcal{F}_2) = \{X, \emptyset, E, E^c\}$ .

3. Pour  $\mathcal{F}_3 = \{E_1, E_2\}$  où  $E_1, E_2 \subsetneq X$  et  $E_1 \neq E_2$ , la tribu engendrée est  $\sigma(\mathcal{F}_3) = \{X, \emptyset, E_1, E_2, E_1^c, E_2^c, E_1 \cup E_2, (E_1 \cup E_2)^c, E_1 \cap E_2, (E_1 \cap E_2)^c\}$  en supposant que

$E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$  et  $E_1 \cup E_2 \neq X$ . De la remarque 1.2, si deux ensembles sont dans une tribu alors leur intersection doit l'être aussi.

**Définition 1.9.** Soit  $(X, \mathcal{O})$  un espace topologique. La **tribu de Borel sur  $X$**  est la tribu engendrée par les ouverts de  $X$ .

La tribu de Borel sur  $X$  est notée  $\mathcal{B}(X)$  et  $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$  où  $\mathcal{O}$  représente l'ensemble des ouverts de  $X$ . Les éléments de cette tribu sont les ensembles de Borel ou les boréliens. Ils comprennent notamment tous les ouverts et les fermés de  $X$ , de même que tous les ensembles formés à partir de ceux-ci par les opérations d'union et de complémentarité. Les notions de tribu et de tribu de Borel jouent un rôle important dans la définition d'une mesure.

## 1.2 Les transformations

Considérons maintenant quelques transformations importantes définies à partir d'un espace métrique. Rappelons qu'une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est une transformation qui associe à chaque  $x \in X$  un seul élément  $f(x) \in Y$ .

**Définition 1.10.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $E \subseteq X$ . La **fonction caractéristique ou indicatrice associée à  $E$**  est  $\mathbb{1}_E : X \rightarrow \{0, 1\}$  définie par

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

**Définition 1.11.** Soit  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métrique. La fonction  $f : X \rightarrow Y$  est **continue au point**  $x_0 \in X$  si  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ .

Par ailleurs,  $f$  est **injective** si pour tout  $x, y \in X$ ,  $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ . La fonction est **surjective** si  $f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\} = Y$ . La fonction  $f$  est **bijjective** si elle est injective et surjective. Elle est alors inversible et son inverse est  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  telle que  $f^{-1}(x_2) = x_1$  si  $f(x_1) = x_2$ .

**Définition 1.12.** Soit  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  deux espaces topologiques. Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est un **homéomorphisme** si c'est une fonction bijective, continue et dont la fonction inverse est continue.

Les deux espaces peuvent alors être vus comme les mêmes et les ensembles  $X$  et  $Y$  sont dits homéomorphes. La définition demeure valide si  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont deux espaces métriques puisqu'ils induisent chacun un espace topologique.

**Définition 1.13.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f : X \rightarrow X$  une fonction. Un élément  $x_0 \in X$  tel que  $f(x_0) = x_0$  est un **point fixe** de la fonction  $f$ .

**Définition 1.14.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $f : X \rightarrow X$  une fonction. Les **itérées avant de  $f$**  sont notées  $f^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et sont définies de manière récursive comme suit :

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x \\ f^1(x) &= (f(x))^{\circ 1} = f(x) \\ f^2(x) &= (f(x))^{\circ 2} = (f \circ f)(x) = f(f(x)) \\ f^3(x) &= (f(x))^{\circ 3} = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) \\ &\vdots \\ f^k(x) &= (f(x))^{\circ k} = (f \circ f^{k-1})(x) = f(f^{k-1}(x)). \end{aligned}$$

Si  $f$  est inversible, les **itérées arrières de  $f$**  sont notées  $f^{-m}$  pour  $m = 1, 2, \dots$  et sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= (f(x))^{\circ(-1)} \\ f^{-m}(x) &= (f(x))^{\circ(-m)} = (f^m(x))^{\circ(-1)} = (f^{-1}(x))^{\circ m}. \end{aligned}$$

Rappelons que l'inverse de  $f$  est la fonction  $f^{-1}$  telle que  $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ . Les notions d'itérées et de point fixe sont indispensables pour appréhender la définition des ensembles de Julia donnée aux chapitres suivants.

### 1.3 La mesure

En dernier lieu, il convient d'introduire certains concepts de base en mesure. Bien que la théorie de la mesure comporte une multitude d'éléments qui méritent d'être considérés, seules les notions fondamentales sont abordées dans cette section. Celles-ci permettent de mieux comprendre ce qu'est la dimension de Hausdorff-Besicovitch de même que le phénomène de convergence des algorithmes permettant de visualiser les ensembles de Julia. Elles sont de nouveau présentées à partir d'un ensemble  $X$  quelconque.

**Définition 1.15.** Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable. Une *mesure sur  $\mathcal{T}$*  est une fonction  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque ensemble  $E \in \mathcal{T}$  une valeur  $\mu(E)$  telle que

$$(i) \mu(\emptyset) = 0;$$

(ii) Pour toute famille finie ou dénombrable  $\{E_k\}$  d'ensembles de  $\mathcal{T}$  disjoints deux à deux,

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \quad \text{ou} \quad \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

où  $n \in \{1, 2, \dots\}$  est fixé.

On dit que  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  est un **espace mesuré**. La propriété (ii) est connue sous le nom de  *$\sigma$ -additivité*. La mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{T}$  est dite

1. Finie si  $\mu(X) < \infty$ ;
2. Infinie si  $\mu(X) = \infty$ ;
3. Une mesure de probabilité ou normalisée si  $\mu(X) = 1$ ;
4. Une mesure de Borel si  $\mathcal{T} = \mathcal{B}(X)$ .

Si  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  est un espace mesuré et que  $E \subseteq F \subseteq \mathcal{T}$ , alors  $\mu(E) \leq \mu(F)$ . La preuve de cette affirmation se trouve notamment aux références [15] et [31].

La définition d'une mesure sur  $\mathcal{T}$  est assez restrictive puisqu'elle repose sur la notion de tribu sur  $X$ . Le concept de mesure extérieure est cependant moins contraignant, car il est défini pour tous les sous-ensembles d'un ensemble  $X$ .

**Définition 1.16.** Soit  $X$  un ensemble quelconque. Une *mesure extérieure sur  $X$*  est une fonction  $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque sous-ensemble  $E$  de  $X$  une valeur  $\mu^*(E)$  telle que

$$(i) \mu^*(\emptyset) = 0;$$

$$(ii) \text{ Si } E \subseteq F \subseteq X, \text{ alors } \mu^*(E) \leq \mu^*(F);$$

(iii) Pour toute famille finie ou dénombrable  $\{E_k\}$  de sous-ensembles de  $X$ ,

$$\mu^* \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k) \quad \text{ou} \quad \mu^* \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

où  $n \in \{1, 2, \dots\}$  est fixé.

Rappelons que  $P(X)$  est l'ensemble puissance de  $X$  et qu'il contient tous les sous-ensembles de  $X$ . La propriété (ii) est dite la propriété de croissance ou de monotonie et la propriété (iii) est appelée la  $\sigma$ -sous-additivité. Elle est moins forte que la  $\sigma$ -additivité énoncée dans la définition d'une mesure. Le concept d'ensemble mesurable est aussi important puisqu'il permet de définir la mesure de Hausdorff traitée au chapitre suivant.

**Définition 1.17.** Soit  $X$  un ensemble sur lequel est définie une mesure extérieure  $\mu^*$ . Un ensemble  $E \subseteq X$  est *mesurable par rapport à  $\mu^*$*  si pour tout  $S \subseteq X$ ,

$$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c).$$

Si la mesure  $\mu^*$  est clairement définie dans le contexte, alors il est possible de parler uniquement d'ensembles mesurables et non d'ensembles mesurables par rapport à  $\mu^*$ . Deux théorèmes importants peuvent maintenant être introduits. Puisque l'objectif de ce chapitre est d'énoncer et non de démontrer certains résultats préliminaires, les

preuves de ces deux théorèmes sont omises. Elles sont par contre disponibles à la référence [31].

**Théorème 1.1.** *Soit  $X$  un ensemble sur lequel est définie une mesure extérieure  $\mu^*$ . La famille  $\mathcal{M}$  des ensembles mesurables par rapport à  $\mu^*$  forme une tribu sur  $X$ . De plus, la restriction de  $\mu^*$  à  $\mathcal{M}$  est une mesure sur  $\mathcal{M}$ .*

**Théorème 1.2.** *Soit  $\mu^*$  une mesure extérieure définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que  $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$  pour tout  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  non vides et tels que  $d(A, B) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in A \text{ et } y \in B\} > 0$ . Alors, tous les ensembles de Borel de  $\mathbb{R}^n$  sont mesurables selon  $\mu^*$ .*

En vertu du théorème 1.1, il y aura égalité à la propriété (iii) de la définition d'une mesure extérieure (définition 1.16) si la famille  $\{E_k\}$  est constituée d'ensembles de  $X$  mesurables par rapport à  $\mu^*$  et disjoints deux à deux. En particulier, cela se produit si la famille  $\{E_k\}$  est constituée d'ensembles de Borel mesurables par rapport à  $\mu^*$  et disjoints deux à deux. Pour mieux comprendre ce qu'est une mesure, quelques exemples classiques sont considérés.

### Exemple 1.1. La mesure de dénombrement ou cardinale

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable. La mesure de dénombrement est la fonction  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à  $E \in \mathcal{T}$  une valeur  $\mu(E)$  telle que

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{card}(E) & \text{si } E \text{ est fini} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une mesure puisque l'ensemble vide est fini et ne contient aucun élément, d'où  $\mu(\emptyset) = \text{card}(\emptyset) = 0$ . De plus, si  $\{E_k\}$  est une famille (finie avec  $n \in \{1, 2, \dots\}$  fixé ou dénombrable) d'ensembles de  $\mathcal{T}$  disjoints deux à deux, alors aucun ensemble de cette famille n'a d'élément commun avec un autre ensemble de la même famille. L'union de tous les ensembles constitue donc un regroupement d'ensembles bien distincts. La taille du nouvel ensemble formé correspond ainsi à la somme

des tailles de chaque ensemble qui le compose, d'où

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k) \quad \text{ou} \quad \mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

### Exemple 1.2. La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$

Dans  $\mathbb{R}$ , il est aisé de définir la longueur d'un intervalle. Pour un intervalle borné  $I = [a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b]$  ou  $]a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a \leq b$ , la longueur est donnée par  $L(I) = b - a$ . Dans le cas où l'intervalle  $I$  n'est pas borné, soit quand l'une ou l'autre des bornes est  $\infty$  ou  $-\infty$ , alors la longueur est  $L(I) = \infty$ . La mesure de Lebesgue généralise l'idée de longueur à une large famille de sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  qui ne sont pas nécessairement des intervalles. Deux notions doivent d'abord être définies avant de la décrire : la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  et les ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

La *mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$*  est la fonction  $\mu^* : P(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  une valeur  $\mu^*(E)$  telle que

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) \mid E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ et } \{I_k\} \text{ est une famille d'intervalles ouverts de } \mathbb{R} \right\}.$$

Ainsi, il faut considérer tous les recouvrements dénombrables de  $E$  par des intervalles ouverts et prendre la plus petite longueur totale possible. Les propriétés d'une mesure extérieure sont toutes vérifiées. Un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  est *mesurable au sens de Lebesgue* si pour tout  $S \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mu^*(S) = \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c)$ . Il s'agit en fait de la définition d'un ensemble mesurable avec  $X = \mathbb{R}$  et où  $\mu^*$  est la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{M}$  la famille de tous les ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Cet ensemble contient  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$ , de même que tous les intervalles et les ensembles de Borel de  $\mathbb{R}$ . En vertu du théorème 1.1, il constitue une tribu. La **mesure de Lebesgue** est la fonction  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque ensemble  $E \in \mathcal{M}$  une valeur  $\mu(E)$  telle que  $\mu(E) = \mu^*(E)$  où  $\mu^*$  est la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est parfois notée  $\mathcal{L}$  ou  $\lambda$  et les propriétés d'une mesure peuvent être vérifiées. Pour tout

intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mu(I) = L(I)$ . De plus, les ensembles dénombrables sont mesurables et de mesure nulle : si  $E$  est dénombrable, alors  $\mu(E) = 0$ .

**Exemple 1.3. La mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$**

La mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  se construit de façon similaire à celle dans  $\mathbb{R}$  et étend la notion de volume à une large famille de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Au lieu de considérer des recouvrements d'ensembles par des intervalles ouverts, il faut plutôt s'intéresser aux pavés ouverts. Il faut aussi examiner ce qui correspond à leur volume, soit ce qui caractérise leur grandeur.

Un *pavé ouvert*  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  qui est le produit cartésien de  $n$  intervalles ouverts bornés de  $\mathbb{R}$  :

$$P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_k < x_k < b_k \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n\}$$

où  $I_k$  est un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$  d'extrémités  $a_k < b_k$ . Un pavé est un intervalle si  $n = 1$ , un rectangle si  $n = 2$  et un prisme rectangulaire si  $n = 3$ . Le *volume d'un pavé*  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est le produit des longueurs des intervalles qui le composent. Il est noté  $vol^n$  et  $vol^n(P) = L(I_1) \times L(I_2) \times \dots \times L(I_n) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$ . Ce volume correspond à une longueur si  $n = 1$ , une aire si  $n = 2$  et au volume usuel si  $n = 3$ .

Comme à l'exemple précédent, la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  est d'abord précisée. Il s'agit de la fonction  $\mu^* : P(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  une valeur  $\mu^*(E)$  telle que

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} vol^n(P_k) \mid E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ et } \{P_k\} \text{ est une famille de pavés ouverts de } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Soit  $\mathcal{M}$  la famille de tous les ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Cet ensemble contient de nouveau tous les ensembles de Borel de  $\mathbb{R}^n$  et constitue une tribu. La **mesure de Lebesgue** ou la **mesure de Lebesgue de dimension  $n$**  est une fonction  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque ensemble  $E \in \mathcal{M}$  une valeur  $\mu(E)$  telle que  $\mu(E) = \mu^*(E)$  où  $\mu^*$  est la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Elle est parfois notée  $\mathcal{L}^n$  ou  $\lambda^n$  et les propriétés d'une mesure sont vérifiées.

## Chapitre 2

# La dimension de Hausdorff-Besicovitch

La dimension d'un objet permet de le décrire et de le quantifier. Pour un objet fractal, la dimension fractale fournit plus spécifiquement une mesure sur son niveau d'irrégularité et sur la densité dans l'espace qu'il occupe. En ce sens, une valeur élevée indique un haut niveau d'irrégularité et une occupation dense de l'espace. La dimension fractale peut donc fournir un critère de comparaison entre deux objets : celui ayant la dimension fractale la plus élevée est considérée comme le plus « grand ».

La dimension de Hausdorff-Besicovitch est la dimension fractale qui revêt du plus grand intérêt d'un point de vue mathématique. Elle peut être déterminée pour tout sous-ensemble d'un espace métrique et est fondée sur le concept de mesure. C'est une mesure particulière, la mesure de Hausdorff, qui la définit. Cette mesure permet d'ailleurs de comparer deux objets fractals de même dimension : si deux objets ont une dimension de Hausdorff-Besicovitch  $d$ , alors l'objet le plus « grand » est celui dont la mesure de Hausdorff de dimension  $d$  admet la plus grande valeur. De plus, la dimension fractale peut être utilisée pour définir ce qu'est une fractale : un objet est fractal s'il est décrit par une dimension de Hausdorff-Besicovitch non entière (référence [26]). Bien que cette définition ne soit pas parfaite puisqu'elle omet certains ensembles comme la frontière de l'ensemble de Mandelbrot (référence [44]), elle permet

d'appréhender la plupart des objets irréguliers considérés traditionnellement comme fractals.

Afin de mieux comprendre les concepts introduits ici et de développer un point de vue rigoureux sur les fractales, il convient de s'intéresser en détails à la dimension de Hausdorff-Besicovitch. La mesure de Hausdorff est d'abord présentée puis la dimension de Hausdorff-Besicovitch est définie. Celle-ci est ensuite obtenue pour un ensemble particulier, soit l'ensemble triadique de Cantor. Bien qu'il existe d'autres définitions intéressantes de dimension fractale, comme la dimension des boîtes, celles-ci ne sont pas considérées dans ce travail. Les résultats et preuves proviennent des références [12], [31] et [45].

## 2.1 La mesure de Hausdorff

Bien que fondamentaux d'un point de vue général, les concepts de base en mesure tels qu'abordés au chapitre 1 ne sont pas adéquats pour décrire les objets fractals. La mesure de Hausdorff, une mesure particulière, se révèle beaucoup plus appropriée. Elle est construite à partir d'un quelconque espace métrique  $(X, d)$ . Dans le cadre de ce travail, la mesure de Hausdorff est présentée uniquement pour l'espace métrique  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , car c'est l'espace le plus utilisé pour étudier les fractales. Certains auteurs mentionnent *les mesures de Hausdorff* puisque plusieurs approches mènent à des définitions équivalentes de la dimension de Hausdorff-Besicovitch. Quelques-unes sont décrites à la référence [12]. La mesure présentée ici est celle qui prévaut le plus souvent dans la littérature. Elle est construite à partir d'une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$  définie à partir du concept de  $\delta$ -recouvrement. Puis, son domaine est restreint aux boréliens de  $\mathbb{R}^n$  et c'est à ce moment qu'il s'agit de la mesure de Hausdorff. Le mathématicien Constantin Carathéodory (1873-1950) avait été le premier, en 1914 dans [6], à définir des mesures en utilisant des recouvrements. En 1919 dans [21], Félix Hausdorff (1868-1942) a repris cette idée pour définir la mesure qui porte aujourd'hui son nom. Il a par ailleurs étudié l'ensemble triadique de Cantor en regard de celle-ci. Plusieurs

propriétés ont depuis été observées, notamment par Abram Besicovitch (1891-1970) et ses étudiants. La construction de la mesure de Hausdorff et certaines de ses propriétés sont analysées dans cette section. Notons que les définitions et les preuves demeurent similaires dans le cas où un espace métrique  $(X, d)$  quelconque est considéré.

**Définition 2.1.** Soit  $s \geq 0$ . Pour tout  $\delta > 0$ , la fonction  $\mathcal{H}_\delta^s : P(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  associe à chaque sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  une valeur  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  telle que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

Il faut donc considérer tous les  $\delta$ -recouvrements de  $E$  et prendre la plus petite somme des diamètres à la puissance  $s$ . Certains notent cette fonction  $\mathcal{H}_\delta^{n,s}$  plutôt que  $\mathcal{H}_\delta^s$  pour spécifier l'espace sur lequel la fonction est définie. Comme le diamètre d'un ensemble est identique à celui de son enveloppe convexe fermée (de la remarque 1.1), on peut supposer que les ensembles qui forment les recouvrements dans la définition 2.1 sont fermés et convexes.

**Théorème 2.1.** Pour tout  $s \geq 0$ , la fonction  $\mathcal{H}_\delta^s$  est une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$ .

PREUVE.

Soit  $\delta > 0$  et  $s \geq 0$ . Il faut vérifier les trois propriétés d'une mesure extérieure telles qu'énoncées à la définition 1.16.

(i)  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$ .

De la définition 2.1,

$$\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } \emptyset \right\}.$$

Puisque l'ensemble vide ne contient aucun élément, il peut être recouvert par n'importe quelle famille non vide d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . En particulier,  $\{x_0\}$  avec  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  quelconque constitue un recouvrement de l'ensemble vide et  $\text{diam}(\{x_0\}) = 0$ . L'infimum recherché est atteint pour ce type de recouvrement puisqu'il s'agit du plus petit recouvrement de  $\emptyset$  par une famille non vide. Ainsi,  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = (\text{diam}(\{x_0\}))^s = 0$ .

(ii) Si  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$ .

Soit  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si  $\{U_k\}$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $F$ , alors il s'agit aussi d'un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ , car  $E \subseteq F \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ . L'ensemble des  $\delta$ -recouvrements de  $F$  est donc inclus dans l'ensemble des  $\delta$ -recouvrements de  $E$ . En conséquence,

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\} \\ & \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^*))^s \mid \{U_k^*\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}. \end{aligned}$$

Puisque l'infimum d'un ensemble est inférieur ou égal à l'infimum de l'une de ses parties, on trouve

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^*))^s \mid \{U_k^*\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\} \\ & \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\} \end{aligned}$$

d'où  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$ .

(iii) Si  $\{E_1, E_2, \dots\}$  est une famille d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k)$ .

Soit  $\{E_1, E_2, \dots\}$  une famille d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathcal{H}_\delta^s(E_m) = \infty$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$  fixé, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) + \mathcal{H}_\delta^s(E_m) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) = \infty.$$

Par ailleurs,

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\}.$$

Or, tout  $\delta$ -recouvrement de  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  recouvre chacun des ensembles de la famille

$\{E_k\}$ . En particulier, il recouvre l'ensemble  $E_m$ . Ainsi,

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\} \\ \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^*))^s \mid \{U_k^*\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E_m \right\}.$$

En reprenant l'argument sur les infimums énoncés en (ii), on obtient  $\infty \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_m) \leq \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)$ . D'où  $\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) = \infty$ .

Supposons maintenant que  $\mathcal{H}_\delta^s(E_k) < \infty$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$  et soit  $\epsilon > 0$ . Par propriété de l'infimum, pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots\}$  il doit exister un  $\delta$ -recouvrement de  $E_k$  noté  $\{U_j^k\}$  tel que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(U_j^k))^s < \mathcal{H}_\delta^s(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}. \quad (2.1)$$

Sinon,  $\mathcal{H}_\delta^s(E_k)$  ne serait pas l'infimum des sommes des diamètres à la puissance  $s$  des  $\delta$ -recouvrements de  $E_k$ . Par construction, la famille  $\{U_j^1, U_j^2, U_j^3, \dots\}$  avec  $j \in \{1, 2, \dots\}$  forme un  $\delta$ -recouvrement de  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Ainsi,

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right\} \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam}(U_j^k))^s \quad \text{par définition de l'infimum} \\ < \sum_{k=1}^{\infty} \left( \mathcal{H}_\delta^s(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k} \right) \quad \text{de l'expression (2.1)} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) + \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k.$$

Par propriété de la série géométrique<sup>1</sup>, on trouve  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k - 1 \right) =$

---

1. Pour  $|r| < 1$ , la série géométrique  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  converge et  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ .

$\left(\frac{1}{1-1/2} - 1\right) = 1$ . D'où  $\mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) + \epsilon$ . Puisque cette expression est vraie pour tout  $\epsilon > 0$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k)$ . ■

La transformation  $\mathcal{H}_\delta^s$  ne constitue pas en soi la mesure de Hausdorff. Par contre, son comportement en fonction de  $\delta > 0$  permet de définir une mesure extérieure  $\mathcal{H}^s$  qui mène directement à la mesure désirée. Examinons de plus près le comportement de  $\mathcal{H}_\delta^s$  et voyons comment obtenir la mesure de Hausdorff.

**Proposition 2.1.** *Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $s \geq 0$ . La fonction  $\mathcal{H}_\delta^s$  qui associe à  $\delta > 0$  la valeur  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \in [0, \infty]$  est décroissante.*

PREUVE.

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  fixé. Supposons que  $0 < \delta_1 \leq \delta_2$  et montrons que  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(E) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(E)$ . Supposons que  $\{U_k\}$  est un  $\delta_1$ -recouvrement de  $E$ . Alors, il s'agit aussi d'un  $\delta_2$ -recouvrement de  $E$  puisque par hypothèse,  $\text{diam}(U_k) \leq \delta_1 \leq \delta_2$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . L'ensemble des  $\delta_1$ -recouvrements de  $E$  est donc inclus dans l'ensemble des  $\delta_2$ -recouvrements de  $E$  et ainsi

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^1))^s \mid \{U_k^1\} \text{ est un } \delta_1\text{-recouvrement de } E \right\} \\ & \subseteq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^2))^s \mid \{U_k^2\} \text{ est un } \delta_2\text{-recouvrement de } E \right\}. \end{aligned}$$

Par propriété de l'infimum, on obtient

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^2))^s \mid \{U_k^2\} \text{ est un } \delta_2\text{-recouvrement de } E \right\} \\ & \leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k^1))^s \mid \{U_k^1\} \text{ est un } \delta_1\text{-recouvrement de } E \right\} \end{aligned}$$

d'où,  $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(E) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(E)$ . ■

Soit  $\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$ . Comme la fonction  $\mathcal{H}_\delta^s$  est décroissante,  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  augmente vers le suprémum lorsque  $\delta$  s'approche de 0. En conséquence,

$$\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Dans ce cas,  $\delta \rightarrow 0$  doit être compris comme  $\delta \rightarrow 0^+$  puisque  $\delta > 0$ .

**Théorème 2.2.** *Pour tout  $s \geq 0$ , la fonction  $\mathcal{H}^s : P(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  qui associe à chaque sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  la valeur  $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$  est une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$ .*

PREUVE.

Soit  $s \geq 0$ . Il faut de nouveau vérifier les trois propriétés de la définition 1.16. Ces vérifications s'effectuent facilement en utilisant le résultat que  $\mathcal{H}_\delta^s$  est une mesure extérieure.

(i)  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ .

Par définition,  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset)$ . Du théorème 2.1, on sait que  $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$  pour tout  $\delta > 0$ . D'où,  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 0 = 0$ .

(ii) Si  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ .

Soit  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ . Du théorème 2.1, on a  $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$  pour tout  $\delta > 0$ .

Ainsi,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \Rightarrow \mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$  par propriété de la limite.

(iii) Si  $\{E_1, E_2, \dots\}$  est une famille d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_k)$ .

Soit  $\{E_1, E_2, \dots\}$  une famille d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Du théorème 2.1, on a

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) \quad \text{pour tout } \delta > 0. \quad (2.2)$$

Or pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$  et par définition du suprémum, on a  $\mathcal{H}_\delta^s(E_k) \leq \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) = \mathcal{H}^s(E_k)$ . Donc,  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_k)$ . De l'expression (2.2),

on déduit

$$\mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_k) \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_k).$$

Puisque le terme de droite de cette dernière inégalité ne dépend pas de  $\delta$ , alors

$$\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_k). \blacksquare$$

Du fait que les ensembles de Borel interviennent souvent dans les notions développées en géométrie fractale, il convient de s'intéresser à un résultat les concernant.

**Théorème 2.3.** *Pour tout  $s \geq 0$ , les ensembles de Borel de  $\mathbb{R}^n$  sont mesurables par rapport à  $\mathcal{H}^s$ .*

PREUVE.

Du théorème 1.2, il suffit de montrer que si  $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$  sont non vides et tels que  $d(E, F) > 0$ , alors  $\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$ . Soit  $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$  non vides et tels que  $d(E, F) > 0$ . Puisque que  $\mathcal{H}^s$  est une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{H}^s(E \cup F) \leq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$ . Il reste donc à montrer que  $\mathcal{H}^s(E \cup F) \geq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$  pour avoir l'égalité.

Soit  $\delta > 0$  tel que  $d(E, F) > \delta$  et  $\{U_k\}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $E \cup F$ . Soit  $J = \{k \in \mathbb{N} \mid U_k \cap E \neq \emptyset\}$  l'ensemble des indices des éléments du recouvrement de  $E \cup F$  qui ont des points communs avec  $E$  et  $K = \{k \in \mathbb{N} \mid U_k \cap F \neq \emptyset\}$  l'ensemble des indices des éléments du recouvrement de  $E \cup F$  qui ont des points communs avec  $F$ . Il faut alors avoir  $J \cap K = \emptyset$ . En effet, si  $J \cap K \neq \emptyset$ , alors  $\exists k^* \in J \cap K \Rightarrow k^* \in J$  et  $k^* \in K$ . Par définition des ensembles  $J$  et  $K$ ,  $\exists x_0 \in U_{k^*} \cap E$  et  $\exists y_0 \in U_{k^*} \cap F$ . Or,

$$\delta < d(E, F) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \leq \|x_0 - y_0\|$$

par hypothèse et définition de l'infimum. Il existerait donc deux éléments de  $x_0, y_0 \in U_{k^*}$  tels que  $\delta < \|x_0 - y_0\|$ . Par hypothèse,  $\text{diam}(U_{k^*}) \leq \delta$  et il y a contradiction, car le diamètre d'un ensemble représente la plus grande distance entre deux éléments de celui-ci. Il faut rejeter  $J \cap K \neq \emptyset$  et accepter  $J \cap K = \emptyset$ . Ainsi,  $\{U_k\}_{k \in J}$  est un

$\delta$ -recouvrement de  $E$  et  $\{U_k\}_{k \in K}$  est un  $\delta$ -recouvrement de  $F$ . On trouve alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s &= \sum_{k \in J} (\text{diam}(U_k))^s + \sum_{k \in K} (\text{diam}(U_k))^s + \sum_{k \notin J, k \notin K} (\text{diam}(U_k))^s \\
&\geq \sum_{k \in J} (\text{diam}(U_k))^s + \sum_{k \in K} (\text{diam}(U_k))^s \\
&\geq \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\} \\
&\quad + \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\} \\
&= \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F).
\end{aligned}$$

D'où,  $\mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \cup F \right\} \geq \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Puisque cette expression est vraie pour tout  $\delta$  suffisamment proche de 0, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \\
\Rightarrow \mathcal{H}^s(E \cup F) &\geq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F).
\end{aligned}$$

En conséquence,  $\mathcal{H}^s(E \cup F) \leq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$  et  $\mathcal{H}^s(E \cup F) \geq \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$  d'où  $\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$ . Du théorème 1.2, on conclut que chaque sous-ensemble de Borel de  $\mathbb{R}^n$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{H}^s$ . ■

**Définition 2.2.** *Pour  $s \geq 0$ , la fonction  $\mathcal{H}^s$  est la mesure extérieure de Hausdorff de dimension  $s$  sur  $\mathbb{R}^n$ . La restriction de cette mesure aux boréliens de  $\mathbb{R}^n$  constitue la mesure de Hausdorff de dimension  $s$ .*

Puisque les boréliens de  $\mathbb{R}^n$  sont mesurables par rapport à  $\mathcal{H}^s$ , alors du théorème 1.1 ils forment une tribu. De plus, la restriction de  $\mathcal{H}^s$  à cette tribu est une mesure. La définition précédente est donc valide.

Plusieurs propriétés de la mesure et de la mesure extérieure de Hausdorff de dimension  $s$  se révèlent intéressantes. Le théorème suivant en présente quelques-unes sans toutefois les démontrer. Il apparaît ici important d'utiliser la notation  $\mathcal{H}^{n,s}$  quand il

convient d'identifier l'espace sur lequel la mesure repose.

**Théorème 2.4.**

(i) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une similitude de facteur  $\lambda > 0$ , c'est-à-dire si  $\|f(x) - f(y)\| = \lambda\|x - y\|$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\mathcal{H}^s(f(E)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$  pour tout  $s \geq 0$ .

(ii) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une fonction qui satisfait une condition de Hölder, c'est-à-dire s'il existe des constantes  $c, \alpha > 0$  telles que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|^\alpha \quad \text{pour tout } x, y \in E,$$

alors  $\mathcal{H}^{m, s/\alpha}(f(E)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^{n, s}(E)$  pour tout  $s \geq 0$ .

(iii) La mesure  $\mathcal{H}^0$  correspond à la mesure de dénombrement.

(iv) Sur  $\mathbb{R}$ , la mesure  $\mathcal{H}^1$  correspond à la mesure de Lebesgue.

(v) Si  $E \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\mathcal{H}^n(E) = c_n^{-1} \text{vol}^n(E)$  où

$$c_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{2^n (n/2)!} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \pi^{(n-1)/2} \cdot \frac{((n-1)/2)!}{n!} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et  $\text{vol}^n$  correspond au volume usuel dans  $\mathbb{R}^n$ , soit la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n(E)$ .

Les deux premières propriétés font référence à la mesure extérieure de Hausdorff alors que les suivantes font plutôt référence à la mesure de Hausdorff. De (i), on remarque que si  $f$  est une isométrie ( $\lambda = 1$ ), alors  $\mathcal{H}^s(f(E)) = \mathcal{H}^s(E)$  pour tout  $s \geq 0$ . La mesure  $\mathcal{H}^s$  est donc invariante sous les isométries comme les translations et les rotations. De (ii), on remarque que si  $f$  satisfait la condition de Lipschitz ( $\alpha = 1$ ), alors  $\mathcal{H}^{m, s}(f(E)) \leq c^s \mathcal{H}^{n, s}(E)$  pour tout  $s \geq 0$ . Les propriétés (iii), (iv) et (v) montrent que la mesure de Hausdorff constitue une généralisation d'autres mesures déjà connues. En ce sens, elle prouve sa validité et apparaît d'une grande utilité. La dimension de Hausdorff-Besicovitch en est un exemple remarquable.

## 2.2 La dimension de Hausdorff-Besicovitch

Avant de définir formellement la dimension de Hausdorff-Besicovitch d'un ensemble, il convient de s'intéresser au comportement de la mesure extérieure  $\mathcal{H}^s$  en fonction de  $s \geq 0$ . C'est en effet ce comportement qui déterminera la dimension fractale de l'ensemble. Les notions sont de nouveau introduites sur l'espace métrique  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  et ses sous-ensembles **bornés**.

**Proposition 2.2.** *Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  borné. Pour tout  $s \geq 0$ ,*

(i) *Si  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$  et  $t > s$ , alors  $\mathcal{H}^t(E) = 0$ ;*

(ii) *Si  $\mathcal{H}^s(E) > 0$  et  $t < s$ , alors  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$ ;*

(iii) *Pour tout ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , il existe une unique valeur  $s \in [0, \infty[$  telle que  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  si  $t > s$  et  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$  si  $t < s$ .*

PREUVE.

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\delta \in ]0, 1[$  et  $\{U_k\}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $E$ .

(i) *Si  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$  et  $t > s$ , alors  $\mathcal{H}^t(E) = 0$ .*

Soit  $s, t \in \mathbb{R}$  tels que  $0 \leq s < t$ . Par définition,  $0 \leq \text{diam}(U_k) \leq \delta \Rightarrow 0 \leq \frac{\text{diam}(U_k)}{\delta} \leq 1$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . Or, pour  $r \in [0, 1]$  et  $s < t$ ,  $r^t \leq r^s$ . Alors,  $\left(\frac{\text{diam}(U_k)}{\delta}\right)^t \leq \left(\frac{\text{diam}(U_k)}{\delta}\right)^s$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . On déduit ainsi que

$$\begin{aligned} (\text{diam}(U_k))^t &= \delta^t \left(\frac{\text{diam}(U_k)}{\delta}\right)^t \\ &\leq \delta^t \left(\frac{\text{diam}(U_k)}{\delta}\right)^s \\ &= \delta^{t-s} (\text{diam}(U_k))^s \end{aligned}$$

pour tout  $\delta$ -recouvrement  $\{U_k\}$  de  $E$ . Par propriété de l'infimum, on trouve que

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^t \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}$$

$$\leq \delta^{t-s} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}$$

d'où  $\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E)$  par définition de  $\mathcal{H}_\delta^s$ . En supposant que  $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) < \infty$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(E) &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \\ \Rightarrow \mathcal{H}^t(E) &\leq 0 \cdot \mathcal{H}^s(E) = 0 \end{aligned}$$

car  $\lim_{r \rightarrow 0} r^n = 0$  pour  $r \in ]0, 1[$  et  $n > 0$ . Ainsi,  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  pour tout  $t > s$ .

(ii) Si  $\mathcal{H}^s(E) > 0$  et  $t < s$ , alors  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$ .

Supposons que  $0 \leq t < s$  et  $\mathcal{H}^s(E) > 0$ . Alors pour tout  $\delta$ -recouvrement  $\{U_k\}$  de  $E$ ,

$$\begin{aligned} (\text{diam}(U_k))^t &= \delta^t \left( \frac{\text{diam}(U_k)}{\delta} \right)^t \\ &\geq \delta^t \left( \frac{\text{diam}(U_k)}{\delta} \right)^s \\ &= \delta^{t-s} (\text{diam}(U_k))^s \quad \text{pour tout } k \in \{1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Du même raisonnement que précédemment, on déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^t(E) &\geq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E) \\ \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(E) &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \\ \Rightarrow \mathcal{H}^t(E) &\geq \infty \cdot \mathcal{H}^s(E) \end{aligned}$$

puisque  $\lim_{r \rightarrow 0} r^n = \infty$  avec  $r \in ]0, 1[$  et  $n < 0$ . Ainsi,  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$  pour tout  $t < s$ .

(iii) Il existe une unique valeur  $s \in [0, \infty[$  telle que  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  si  $t > s$  et  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$  si  $t < s$ .

De (i) et (ii), on sait qu'une telle valeur  $s \in [0, \infty[$  existe. Montrons qu'elle est unique. Procédons par contradiction en supposant qu'il existe deux valeurs  $s_1, s_2 \in [0, \infty[$  telles que  $s_1 \neq s_2$  et

1.  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  si  $t > s_1$  et  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$  si  $t < s_1$  ;
2.  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  si  $t > s_2$  et  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$  si  $t < s_2$ .

Puisque  $s_1 \neq s_2$ , supposons sans perte de généralité  $s_1 < s_2$ . Alors, il existe un nombre  $t$  tel que  $s_1 < t < s_2$ . Par hypothèse,  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  car  $t > s_1$ . Mais puisque  $t < s_2$ , alors  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$ . Par définition de  $\mathcal{H}^t(E)$  comme la limite de  $\mathcal{H}_\delta^t(E)$  quand  $\delta$  tend vers 0,  $\mathcal{H}^t(E)$  ne peut pas prendre les valeurs 0 et  $\infty$  simultanément. Il y a donc une contradiction et il existe une unique valeur  $s \in [0, \infty[$  telle que  $\mathcal{H}^t(E) = \infty$  si  $t < s$  et  $\mathcal{H}^t(E) = 0$  si  $t > s$ . ■

Il existe donc une valeur critique de  $s$  à laquelle  $\mathcal{H}^s(E)$  passe directement de  $\infty$  à 0. C'est cette valeur qui correspond à la dimension de Hausdorff-Besicovitch d'un ensemble  $E$  telle que donnée par la définition suivante.

**Définition 2.3.** Pour tout  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  borné, la **dimension de Hausdorff-Besicovitch** de  $E$  est la valeur  $\dim_H(E) \in [0, n]$  telle que

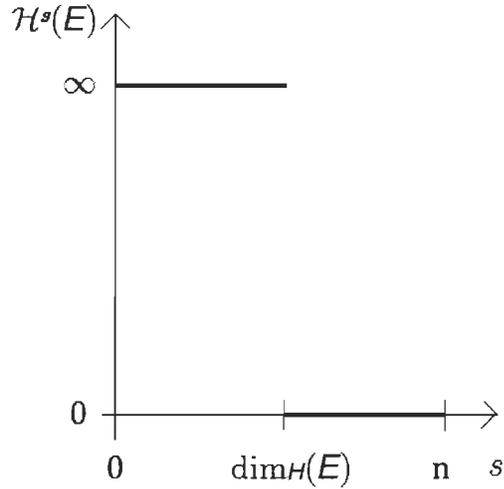
$$\dim_H(E) = \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Puisque la dimension de Hausdorff-Besicovitch est définie pour tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$ , la mesure  $\mathcal{H}^s$  correspond à la mesure extérieure de Hausdorff de dimension  $s$ . Le comportement de  $\mathcal{H}^s$  est tel que

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(E) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(E). \end{cases}$$

La figure 2.1 illustre le comportement décrit.

Si  $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ , alors  $s = \dim_H(E)$ . Par contre, si  $s = \dim_H(E)$ , alors on peut avoir  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ ,  $\mathcal{H}^s(E) = \infty$  ou  $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ . Notons que dans certaines références dont [31], la dimension de Hausdorff-Besicovitch est définie en considérant  $s > 0$  et non  $s \geq 0$ . Plusieurs propriétés découlent directement de celles de la mesure de Hausdorff et de la définition de la dimension de Hausdorff-Besicovitch.

FIGURE 2.1 – Comportement de  $\mathcal{H}^s(E)$  en fonction de  $s$ 

En ce sens, tous les ensembles rencontrés doivent être considérés comme bornés pour respecter la définition énoncée précédemment. Quelques propriétés sont présentées dans le théorème suivant. Ce sont d'ailleurs les principales propriétés d'une définition raisonnable de dimension.

**Théorème 2.5.**

- (i) *Monotonie* : Si  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ , alors  $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ .
- (ii) *Stabilité dénombrable* : Si  $\{E_1, E_2, \dots\}$  est une famille de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\dim_H\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\}$ .
- (iii) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  est dénombrable, alors  $\dim_H(E) = 0$ .
- (iv) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  est ouvert, alors  $\dim_H(E) = n$ .

PREUVE.

- (i) Si  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$ , alors  $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ .

Soit  $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $s_1 \geq 0$  tel que  $\mathcal{H}^{s_1}(F) = 0$ . Puisque  $\mathcal{H}^s$  est une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^n$ , on sait que  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$  pour tout  $s \geq 0$ . En particulier,  $\mathcal{H}^{s_1}(E) \leq \mathcal{H}^{s_1}(F) = 0$  d'où  $\mathcal{H}^{s_1}(E) = 0$ . On déduit donc que si  $s_1 \in \{s \geq 0 \mid$

$\mathcal{H}^s(F) = 0$ }, alors  $s_1 \in \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}$ . Ainsi,

$$\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} \subseteq \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

$$\Rightarrow \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(E) = 0\} \leq \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\}.$$

Par définition de la dimension de Hausdorff-Besicovitch, on conclut que  $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ .

(ii) Si  $\{E_1, E_2, \dots\}$  est une famille de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\}$ .

Soit  $\{E_1, E_2, \dots\}$  est une famille de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On veut montrer

$$(a) \dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \geq \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\};$$

$$(b) \dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\}.$$

Par propriété de l'union, on sait que  $E_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots\}$ .

De (i), on déduit  $\dim_H(E_j) \leq \dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots\}$ . Ainsi,  $\sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\} \leq \dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)$  et on obtient la première inégalité.

Supposons maintenant que  $\dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = s$  et  $s > \dim_H(E_j)$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots\}$ . Il faut avoir  $s \neq 0$ , car sinon  $\dim_H(E_j) < 0$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots\}$  ce qui est impossible en vertu de la définition de la dimension de Hausdorff-Besicovitch. On déduit que  $\mathcal{H}^s(E_j) = 0$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots\}$ . Par propriété de  $\mathcal{H}^s$ , on sait que

$$\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_k) = 0$$

d'où  $\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = 0$ . Ainsi,  $s > \dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)$ . Or, cela contredit l'hypothèse de départ et il doit exister un élément  $j^* \in \{1, 2, \dots\}$  tel que  $\dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \dim_H(E_{j^*})$ . On conclut donc que  $\dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\}$ .

$\infty$ . De (a) et (b), on déduit  $\dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\}$ .

(iii) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  est dénombrable, alors  $\dim_H(E) = 0$ .

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  dénombrable. Alors, on peut écrire  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  où  $E_k$  est un élément de  $E$  tel que  $E_k \neq E_j$  si  $k \neq j$ . On remarque que  $\mathcal{H}^0(E_k) = 1$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$  du théorème 2.4 (iii). Puisque  $0 < \mathcal{H}^s(E_k) < \infty$  pour  $s = 0$ , alors  $\dim_H(E_k) = 0$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . De (ii), on sait que  $\dim_H \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sup\{\dim_H(E_k) \mid 1 \leq k < \infty\}$  d'où  $\dim_H(E) = \sup\{0 \mid 1 \leq k < \infty\} = 0$ .

(iv) Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  est ouvert, alors  $\dim_H(E) = n$ .

Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert. Il faut montrer que

$$(a) \dim_H(E) \geq n;$$

$$(b) \dim_H(E) \leq n.$$

Soit  $x_0 \in E$ . Puisque  $E$  est ouvert, alors il existe  $r > 0$  tel que  $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\} \subseteq E$ . De (i), on obtient  $\dim_H(B(x_0, r)) \leq \dim_H(E)$ . Or, comme  $B(x_0, r)$  est une boule de  $\mathbb{R}^n$  de rayon non nul, alors son volume est aussi non nul. Du théorème 2.4 (v), on déduit donc  $0 < \mathcal{H}^n(B(x_0, r)) < \infty$  et  $\dim_H(B(x_0, r)) = n$ . Ainsi,  $\dim_H(E) \geq n$ .

Considérons maintenant l'ensemble des boules ouvertes centrées en un élément de  $\mathbb{Z}^n$  et de rayon 1, soit  $\{B(x, 1) \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$ . Puisque  $\mathbb{Z}^n$  est dénombrable, cette ensemble l'est aussi. Par ailleurs, il recouvre  $\mathbb{R}^n$  et par le fait même, il recouvre  $E$ . Ainsi,  $E \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} B(x, 1)$ . De (i) et (ii), on déduit

$$\dim_H(E) \leq \dim_H \left( \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} B(x, 1) \right) = \sup\{\dim_H(B(x, 1)) \mid x \in \mathbb{Z}^n\}.$$

D'un raisonnement précédent, on sait que  $B(x, 1)$  est une boule de volume non nul et donc que  $\dim_H(B(x, 1)) = n$  pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ . En conséquence,  $\dim_H(E) \leq \dim_H \left( \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} B(x, 1) \right) = n$  et on obtient la seconde inégalité. De (a) et (b), on conclut que  $\dim_H(E) = n$ . ■

**Remarque 2.1.**

Du théorème précédent, il découle directement que  $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$ . Ainsi, la valeur de la dimension de Hausdorff-Besicovitch d'un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  doit être inférieure ou égale à  $n$ . D'où  $0 \leq \dim_H(E) \leq n$  tel qu'énoncé à la définition 2.3 et illustré à la figure 2.1.

D'autres propriétés méritent d'être mentionnées sans toutefois être démontrées. Certaines découlent directement du théorème 2.4. De nouveau, les ensembles considérés sont bornés.

**Théorème 2.6.**

(i) Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction qui satisfait une condition de Hölder  $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|^\alpha$  pour tout  $x, y \in E$  avec  $c, \alpha > 0$ . Alors  $\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)$  ou de façon équivalente  $\alpha \dim_H(f(E)) \leq \dim_H(E)$ .

(ii) Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction bi-Lipschitz

$$c_1\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2\|x - y\| \quad \text{pour tout } x, y \in E$$

et avec  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ . Alors  $\dim_H(f(E)) = \dim_H(E)$ .

(iii) Soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  non vide tel que  $\dim_H(E) < 1$ . Alors  $E$  est totalement non connexe (ses seuls sous-ensembles connexes sont des singletons).

De (i), si  $f$  satisfait la condition de Lipschitz ( $\alpha = 1$ ), alors  $\dim_H(f(E)) \leq \dim_H(E)$ . De (ii), on remarque que la dimension de Hausdorff-Besicovitch est invariante sous les transformations bi-Lipschitz. En ce sens, deux ensembles fractals sont considérés de même type s'il existe une transformation bi-Lipschitz entre eux. De plus, tel que mentionné auparavant, un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  est considéré plus « grand » qu'un ensemble  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  si  $\dim_H(E) > \dim_H(F)$  ou  $\mathcal{H}^s(E) > \mathcal{H}^s(F)$  lorsque  $s = \dim_H(E) = \dim_H(F)$ . La mesure de Hausdorff et la dimension de Hausdorff-Besicovitch constituent donc des outils pertinents pour aborder et saisir les objets fractals.

## 2.3 La dimension fractale de l'ensemble triadique de Cantor

Après avoir défini et énoncé certaines propriétés de la dimension de Hausdorff-Besicovitch, il convient de trouver sa valeur pour un ensemble particulier : l'ensemble triadique de Cantor. Rappelons d'abord la façon dont il est construit.

Soit  $E_0 = [0, 1]$ . Soit  $E_1$  l'ensemble obtenu en retirant le tiers central de  $E_0$ , sans les extrémités :  $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ . Soit  $E_2$  l'ensemble obtenu en retirant le tiers central des intervalles de  $E_1$  :  $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . On poursuit ainsi de façon que l'ensemble  $E_k$  est formé en retirant le tiers central des intervalles de  $E_{k-1}$ . On remarque que les intervalles retirés sont tous de longueur  $(\frac{1}{3})^k = 3^{-k}$ . En conséquence, à l'itération  $k$ , l'ensemble  $E_k$  est constitué de l'union de  $2^k$  intervalles fermés de longueur  $3^{-k}$ . L'ensemble triadique de Cantor, noté  $\mathcal{C}$ , est défini par  $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ . Il s'agit d'un ensemble infini non-dénombrable. De plus, il est compact puisqu'il est borné par l'intervalle  $[0, 1]$  et il est fermé, car l'intersection d'ensembles fermés demeure fermée. La figure 2.2 illustre le processus de construction de  $\mathcal{C}$  tel que décrit.

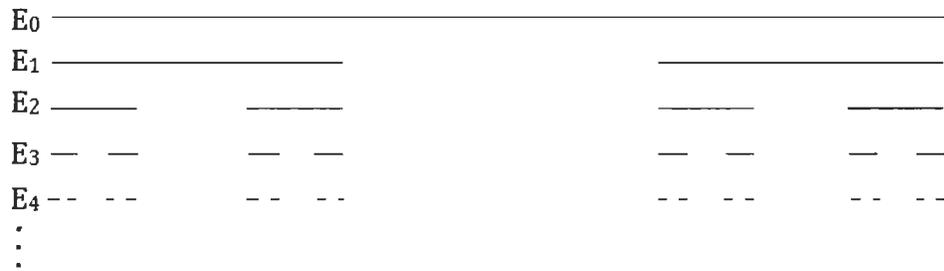


FIGURE 2.2 – Construction de l'ensemble triadique de Cantor

Tel qu'énoncé dans la définition de la dimension de Hausdorff-Besicovitch,  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = \infty$  si  $0 \leq s < \dim_H(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = 0$  si  $s > \dim_H(\mathcal{C})$ . Puisque  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ , alors  $\dim_H(\mathcal{C}) \leq 1$ . Pour trouver la dimension fractale de  $\mathcal{C}$ , il suffit de trouver la valeur de  $s$  telle que la mesure de Hausdorff de dimension  $s$  de  $\mathcal{C}$  est bornée et non nulle.

Cette valeur correspond à la dimension de Hausdorff-Besicovitch de l'ensemble. Le théorème suivant conduit au résultat recherché.

**Théorème 2.7.** *Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble triadique de Cantor. Si  $s = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309$  alors  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1$  et  $\dim_H(\mathcal{C}) = s$ .*

PREUVE.

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble triadique de Cantor et  $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ . Pour borner supérieurement  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C})$ , il suffit de trouver un  $\delta$ -recouvrement de  $\mathcal{C}$  approprié pour chaque valeur de  $\delta$  et de déduire une borne supérieure. Pour borner inférieurement  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C})$ , il faut considérer tous les  $\delta$ -recouvrements possibles de  $\mathcal{C}$  et trouver une borne inférieure qui les satisfait tous. Procédons en deux étapes :

(a)  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1$ .

Soit  $\delta > 0$ . Il existe un entier  $n$  tel que  $3^{-n} < \delta$ . Par construction de  $\mathcal{C}$ , les  $2^n$  intervalles qui constituent  $E_n$  forment un  $\delta$ -recouvrement de  $\mathcal{C}$ . Ainsi, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } \mathcal{C} \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^n} (3^{-n})^s \quad \text{par propriété de l'infimum} \\ &= 2^n \cdot 3^{-ns} = (2 \cdot 3^{-s})^n. \end{aligned}$$

Puisque  $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ , alors  $3^{-s} = 3^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} = 2^{-1}$  de la propriété des exposants  $a^c = b^{c \frac{\ln a}{\ln b}}$ . D'où,  $\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \leq (2 \cdot 2^{-1})^n = 1$  pour tout  $\delta > 0$ . On trouve donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1.$$

(b)  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{2}$ .

Un raisonnement préliminaire s'impose avant démontrer le résultat voulu.

.....  
 Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle tel que  $0 < \text{diam}(I) < \frac{1}{3}$ . Alors, il existe un unique

entier  $k \geq 2$  tel que

$$3^{-k} \leq \text{diam}(I) < 3^{-(k-1)}. \tag{2.3}$$

En effet, un tel  $k$  doit exister car les intervalles  $[\frac{1}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}[$  forment une partition de  $]0, \frac{1}{3}[$  pour  $n \geq 2$ . La valeur  $\text{diam}(I)$  doit donc se trouver dans l'un de ces intervalles. On sait que  $E_{k-1}$  est formé de  $2^{k-1}$  intervalles fermés de longueur  $3^{-(k-1)}$  et que la distance qui sépare ces intervalles est supérieure ou égale à  $3^{-(k-1)}$  par construction de  $\mathcal{C}$ . Alors, de l'expression (2.3), l'intervalle  $I$  ne peut intersecter qu'au plus un de ces  $2^{k-1}$  intervalles.

Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $m > k$ . Alors,  $-m < -k \Rightarrow 3^{-m} < 3^{-k} \leq \text{diam}(I)$ . On sait que  $E_m$  est constitué de  $2^m$  intervalles fermés de longueur  $3^{-m}$ . Par construction de  $\mathcal{C}$ , chaque intervalle de  $E_{k-1}$  contient un certain nombre de ces intervalles de  $E_m$ . En fait, il en contient  $\frac{2^m}{2^{k-1}} = 2^{m-(k-1)} = 2^{m-k+1}$  (si  $k = 2$  et  $m = 4$ , on voit bien que chaque intervalle de  $E_{k-1} = E_1$  contient 8 intervalles de  $E_m = E_4$  et  $2^{m-k+1} = 2^3 = 8$ ). Ainsi,  $I$  intersecte au plus  $2^{m-k+1}$  des intervalles de  $E_m$  puisqu'il intersecte au maximum un intervalle de  $E_{k-1}$ . Or,

$$\begin{aligned} 2^{m-k+1} &= 2^{m+1} \cdot 2^{-k} && \text{par propriété des exposants} \\ &= 2^{m+1} \cdot 3^{-k \frac{\ln 2}{\ln 3}} && \text{de } a^c = b^{c \frac{\ln a}{\ln b}} \\ &= 2^{m+1} \cdot (3^{-k})^s && \text{par hypothèse et propriété des exposants} \\ &\leq 2^{m+1} \cdot (\text{diam}(I))^s && \text{de l'expression (2.3)}. \end{aligned}$$

En conséquence,  $I$  intersecte au plus  $2^{m+1} \cdot (\text{diam}(I))^s$  des intervalles de  $E_m$ .

.....  
 Montrons maintenant que  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{2}$ . Soit  $a \geq 1$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{3a} < \frac{1}{3}$  et  $\{U_k\}$  un  $\delta$ -recouvrement de  $\mathcal{C}$ . Pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , soit  $T_k$  un intervalle ouvert tel que  $U_k \subseteq T_k$  et  $\text{diam}(T_k) = a \cdot \text{diam}(U_k)$ . Puisque  $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$  par hypothèse, alors  $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ . Comme l'ensemble triadique de Cantor est compact, alors on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini. Notons les ensembles de

ce sous-recouvrement  $T_1, T_2, \dots, T_n$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  tel que

$$3^{-(m-1)} < \text{diam}(T_k) \quad \text{pour tout } k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Alors du raisonnement préliminaire et car  $3^{-m} < 3^{-(m-1)}$ , chacun des intervalles  $T_k$  contient au plus  $2^{m+1} \cdot (\text{diam}(T_k))^s$  des intervalles de  $E_m$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ . Donc, le recouvrement  $\{T_k\}_{k=1}^n$  contient au plus  $\sum_{k=1}^n 2^{m+1} \cdot (\text{diam}(T_k))^s$  des intervalles de  $E_m$ . Mais de l'expression (2.4), le recouvrement  $\{T_k\}_{k=1}^n$  doit contenir tous les intervalles de  $E_m$ , soit  $2^m$  intervalles. Ainsi,

$$2^m \leq \sum_{k=1}^n 2^{m+1} \cdot (\text{diam}(T_k))^s.$$

Par hypothèse,

$$\sum_{k=1}^n 2^{m+1} \cdot (\text{diam}(T_k))^s = \sum_{k=1}^n 2^{m+1} \cdot (a \cdot \text{diam}(U_k))^s = a^s \cdot 2^{m+1} \sum_{k=1}^n (\text{diam}(U_k))^s$$

d'où

$$\begin{aligned} 2^m &\leq a^s \cdot 2^{m+1} \sum_{k=1}^n (\text{diam}(U_k))^s \\ \Rightarrow \frac{2^m}{a^s 2^{m+1}} &\leq \sum_{k=1}^n (\text{diam}(U_k))^s \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \\ \Rightarrow \frac{1}{2a^s} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s. \end{aligned}$$

Cette expression est vraie pour tout  $a \geq 1$  et pour tout  $\delta$ -recouvrement de  $C$  avec  $\delta < \frac{1}{3}$ . En conséquence,

$$\mathcal{H}_\delta^s(C) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\text{diam}(U_k))^s \mid \{U_k\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } C \right\} \geq \frac{1}{2a^s}$$

et en prenant la limite lorsque  $a$  tend vers 1, on obtient  $\mathcal{H}_\delta^s(C) \geq \frac{1}{2}$ . Ainsi,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(C) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{ et } \mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}.$$

En somme, si  $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ , alors  $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(\mathcal{C}) \leq 1$  et on déduit que  $\dim_H(\mathcal{C}) = s$ . ■

**Corollaire 2.1.** *Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble triadique de Cantor. Si  $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ , alors  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}) = 1$ .*

PREUVE.

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble triadique de Cantor et  $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ . Du théorème précédent, on sait que  $\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \leq 1$  pour tout  $\delta > 0$ . Donc 1 est une borne supérieure de l'ensemble  $\{\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \mid \delta > 0\}$ . De plus,  $1 \in \{\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) \mid \delta > 0\}$ . En effet, si  $\delta = 3^{-N}$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ , alors  $E_N$  constitue le plus petit  $\delta$ -recouvrement de  $\mathcal{C}$ . L'infimum des sommes des diamètres à la puissance  $s$  est atteint pour ce recouvrement particulier. Ainsi,  $\mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) = 2^N(3^{-N})^s = 1$ . On conclut que  $1 = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(\mathcal{C}) = \mathcal{H}^s(\mathcal{C})$ . ■

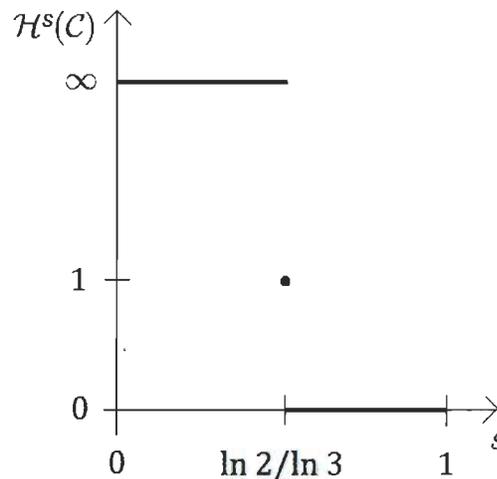


FIGURE 2.3 – Comportement de  $\mathcal{H}^s(\mathcal{C})$  en fonction de  $s$

Puisque  $\dim_H(\mathcal{C}) < 1$ , le théorème 2.6 (iii) confirme l'observation que l'ensemble triadique de Cantor est totalement non connexe. Les précédents raisonnements démontrent bien que les valeurs de la mesure de Hausdorff et de la dimension de Hausdorff-Besicovitch peuvent s'avérer difficiles à obtenir et ce, même pour des ensembles simples comme l'ensemble triadique de Cantor. Observons cependant l'importance des valeurs 2 et 3 dans l'expression de la dimension fractale de l'ensemble triadique de Cantor. Le 2 fait référence au nombre de sous-intervalles obtenus à partir

d'un intervalle de l'itération précédente dans la construction de  $\mathcal{C}$ . Le 3, quant à lui, fait référence au facteur de réduction de la longueur des intervalles entre les itérations,  $3 = \frac{1}{1/3}$ . Cette observation fournit un bon indice de la valeur de la dimension fractale de l'ensemble considéré uniquement à partir de sa structure.

Bref, la dimension fractale de Hausdorff-Besicovitch permet de décrire et de mieux comprendre la structure des objets irréguliers comme les fractales. Elle amène à les quantifier et à les caractériser d'une façon rigoureuse, avec des propriétés mathématiques pertinentes. Les ensembles de Julia introduits aux chapitres suivants peuvent être considérés comme fractals en ce sens qu'ils sont non seulement très irréguliers, mais aussi décrits par une dimension de Hausdorff-Besicovitch non entière.

# Chapitre 3

## Les ensembles de Julia dans le plan complexe

Les ensembles de Julia sont apparus pour la première fois dans les travaux du mathématicien Gaston Julia au début des années 1900. L'étude du comportement des itérées de fonctions complexes rationnelles l'a amené à définir différents ensembles, dont les ensembles de Julia qui adoptent un caractère fractal intéressant et des propriétés parfois suprenantes. Ce chapitre rappelle les notions de base relatives à ces ensembles avant de présenter les fondements de la méthode d'itération inverse utilisée pour les visualiser dans le plan complexe.

Avant de s'intéresser aux ensembles de Julia, il convient de réexaminer quelques éléments essentiels à leur compréhension, tels que les itérées d'un polynôme et le comportement des suites formées par celles-ci. Ces notions constituent l'objet de la première partie du chapitre et mènent à la définition classique des ensembles de Julia en relation avec celles des ensembles de Julia remplis, des ensembles de Fatou et de l'ensemble de Mandelbrot. Le reste du chapitre est consacré à l'étude de la méthode d'itération inverse et à ses justifications théoriques. Une définition équivalente des ensembles de Julia est fournie par les familles normales de fonctions et permet de démontrer le théorème lié à la méthode d'itération inverse. Des exemples d'ensembles divers sont insérés dans le texte afin d'illustrer les notions introduites. Les procédures

employées avec le logiciel *Maple 16* sont à l'annexe A.

Les résultats présentés dans ce chapitre utilisent la définition et les propriétés des nombres et fonctions complexes. Seules les notions nécessaires sont reprises. Rappelons cependant que la métrique dans  $\mathbb{C}$  est le module complexe qui correspond à la métrique euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$  : pour  $z_1 = a_1 + b_1\mathbf{i}$  et  $z_2 = a_2 + b_2\mathbf{i}$  avec  $\mathbf{i}^2 = -1$ ,  $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ . De plus,  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$ ,  $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\mathbf{i}$  et  $z_1 = z_2$  si et seulement si  $a_1 = a_2$  et  $b_1 = b_2$ .

### 3.1 Définitions classiques

La classe des fonctions rationnelles complexes à partir de laquelle les ensembles de Julia sont définis est très vaste. Dans ce travail, l'étude est restreinte à la dynamique d'un polynôme particulier : le polynôme  $P_c(z) = z^2 + c$  où  $z, c \in \mathbb{C}$  et  $c$  est fixé. L'analyse du comportement des itérées de ce polynôme amène des avantages certains. D'abord, elle permet de constater que des fonctions très simples produisent des ensembles fractals compliqués et détaillés. Par ailleurs, le système dynamique engendré par le polynôme  $P_c$  est équivalent à celui de tout polynôme complexe du deuxième degré<sup>1</sup>. Finalement, il est possible de déduire une expression très simple pour l'inverse de  $P_c$ . Cette dernière propriété s'avère particulièrement importante pour la méthode d'itération inverse.

Revoyons d'abord l'expression des itérées du polynôme  $P_c$ . La notion de point fixe est aussi approfondie.

Les **itérées avant de**  $P_c$  sont notées  $P_c^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et sont définies de manière récursive :

---

1. Soit  $R(z) = az^2 + 2bz + d$  un polynôme complexe du deuxième degré. Ce polynôme est analytiquement conjugué à  $P_c$  puisqu'il existe une transformation de Möbius  $M(z) = az + b$  telle que  $(M \circ R \circ M^{-1})(z) = z^2 + c$  avec  $c = ad + b - b^2$ . En conséquence,  $R$  et  $P_c$  génèrent des systèmes dynamiques considérés comme équivalents

$$\begin{aligned}
P_c^0(z) &= z \\
P_c^1(z) &= (P_c(z))^{\circ 1} = P_c(z) = z^2 + c \\
P_c^2(z) &= (P_c(z))^{\circ 2} = (P_c \circ P_c)(z) = P_c(P_c(z)) = (z^2 + c)^2 + c \\
&\vdots \\
P_c^k(z) &= (P_c(z))^{\circ k} = (P_c \circ P_c^{k-1})(z) = P_c(P_c^{k-1}(z))
\end{aligned}$$

Les **itérées arrières** de  $P_c$  sont définies à partir de l'image inverse de  $P_c$  et notées  $P_c^{-m}$  pour  $m = 1, 2, \dots$  :

$$\begin{aligned}
P_c^{-1}(z) &= (P_c(z))^{\circ(-1)} = \{w \in \mathbb{C} \mid P_c(w) = z\} \\
P_c^{-m}(z) &= (P_c(z))^{\circ(-m)} = (P_c^m(z))^{\circ(-1)} = \{w \in \mathbb{C} \mid P_c^m(w) = z\}.
\end{aligned}$$

Bien que  $P_c$  ne soit pas une fonction bijective, une transformation apparentée à la notion d'inverse peut lui être associée. Il s'agit de la fonction multiforme  $\sqrt{z - c}$ . L'expression détaillée de l'inverse est exposée dans une prochaine section. Un **point fixe** de  $P_c$  est un élément  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $P_c(z_0) = z_0$ . Il suffit de résoudre l'équation du deuxième degré  $z_0^2 + c = z_0$ . Ainsi,  $z_0$  est un point fixe de  $P_c$  si et seulement si  $z_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ . Il y a donc deux points fixes, notés

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Comme tout polynôme complexe  $P$  est dérivable, il est possible d'évaluer sa dérivée à un point fixe  $z_0$ , soit  $P'(z_0)$ . Une caractérisation des points fixes est fournie selon le module de ce nombre.

**Définition 3.1.** Soit  $P$  un polynôme complexe quelconque et  $z_0$  un point fixe de  $P$ . Le point fixe est

1. **Attractif** si  $0 \leq |P'(z_0)| < 1$  (*Superattractif* si  $|P'(z_0)| = 0$ );
2. **Répulsif** si  $|P'(z_0)| > 1$ ;

3. *Neutre ou indifférent* si  $|P'(z_0)| = 1$ .

Lorsqu'il s'agit d'un point fixe neutre, deux cas sont distingués :  $z_0$  est rationnellement neutre si  $(P'(z_0))^n = 1$  pour un certain entier  $n$  et irrationnellement neutre sinon.

Pour le polynôme considéré dans ce travail, la dérivée est donnée par  $P'_c(z) = 2z$ . On remarque que  $|P'_c(\alpha)| + |P'_c(\beta)| \geq |P'_c(\alpha) + P'_c(\beta)| = 2$ . Si  $c = \frac{1}{4}$  alors  $P_c$  n'a qu'un point fixe  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  et il est rationnellement neutre. Si  $c \neq \frac{1}{4}$  alors  $P_c$  a deux points fixes distincts. Puisque  $|P'_c(\alpha)| = |P'_c(\beta)| = 1$  si et seulement si  $c = \frac{1}{4}$ , alors  $P_c$  possède toujours un point fixe répulsif lorsque  $c \neq \frac{1}{4}$  (référence [33]). Introduisons une dernière notion liée aux points fixes avant de définir les ensembles de Julia.

**Définition 3.2.** *Soit  $P$  un polynôme complexe quelconque et  $q \geq 2$  un entier. Un élément  $z_0 \in \mathbb{C}$  est un **point périodique de période  $q$**  si  $P^q(z_0) = z_0$  et  $P^j(z_0) \neq z_0$  pour  $j = 1, 2, \dots, q - 1$ .*

Il s'agit donc d'un point fixe du polynôme  $P^q$  où  $q$  est le plus petit entier tel que  $P^q(z_0) = z_0$ . Puisqu'il s'agit d'un point fixe, il est aussi possible de le qualifier d'attractif, de répulsif ou de neutre. L'ensemble  $\{z_0, P(z_0), \dots, P^{q-1}(z_0)\}$  est le cycle associé au point périodique  $z_0$  et il admet aussi les qualificatifs attractif, répulsif ou neutre. L'utilité des points fixes apparaîtra avec la description de la méthode d'itération inverse.

Il est maintenant possible de définir les ensembles de Julia remplis, les ensembles de Julia et les ensembles de Fatou associés au polynôme complexe  $P_c(z) = z^2 + c$  en lien avec le comportement de la suite des itérées  $\{P_c^n(z)\}$  en chaque valeur  $z \in \mathbb{C}$ .

**Définition 3.3.** *L'ensemble de Julia rempli associé à  $c$  est noté  $\mathcal{K}_c$  et correspond à l'ensemble des points  $z_0 \in \mathbb{C}$  tels que la suite des itérées  $\{P_c^n(z_0)\}$  est bornée.*

La suite est bornée s'il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $|P_c^n(z_0)| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout polynôme complexe  $P$  de degré  $d \geq 2$ , le lemme 14.1 de la référence [12] indique que la suite des itérées  $\{P^n(z_0)\}$  est soit bornée, soit divergente à l'infini. En conséquence, l'ensemble de Julia rempli associé à  $c$  correspond à l'ensemble des éléments  $z_0 \in \mathbb{C}$  tels que la suite  $\{P_c^n(z_0)\}$  ne diverge pas à l'infini.

**Définition 3.4.** *L'ensemble de Julia associé à  $c$  est noté  $\mathcal{J}_c$  et correspond à la frontière de l'ensemble de Julia rempli pour la même valeur de  $c$  :  $\mathcal{J}_c = \partial\mathcal{K}_c$ .*

**Définition 3.5.** *L'ensemble de Fatou associé à  $c$  est noté  $\mathcal{F}_c$  et correspond au complément de l'ensemble de Julia pour la même valeur de  $c$  :  $\mathcal{F}_c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_c$ .*

Incidentement, il y a autant d'ensembles de Julia remplis, d'ensembles de Julia et d'ensembles de Fatou qu'il y a de nombres complexes puisque chaque ensemble est associé à une valeur  $c \in \mathbb{C}$  particulière. Lorsque ces ensembles sont définis à partir des itérées d'un polynôme  $P$  quelconque, ils sont notés  $\mathcal{K}_P$ ,  $\mathcal{J}_P$  et  $\mathcal{F}_P$ . Cependant, il est plus pratique d'utiliser la notion insérée ici puisque les ensembles dépendent uniquement de la constante  $c$ .

Au chapitre 1, la frontière d'un ensemble a été définie. La description suivante est aussi valide et révèle la structure de  $\mathcal{J}_c$  d'une façon plus spécifique.

**Définition 3.6.** *Soit  $E \subseteq \mathbb{C}$  non vide. La **frontière de  $E$**  est notée  $\partial E$  et correspond à l'ensemble des éléments  $z \in \mathbb{C}$  tels que tout voisinage centré en  $z$  contient des éléments de  $E$  et de  $E^c$ .*

Ainsi,  $z \in \mathcal{J}_c = \partial\mathcal{K}_c$  si pour tout voisinage centré en  $z$ , il existe des éléments  $z_1$  et  $z_2$  tels que  $\{P_c^n(z_1)\}$  est bornée et  $\{P_c^n(z_2)\}$  diverge à l'infini ( $z_1 \in \mathcal{K}_c$  et  $z_2 \notin \mathcal{K}_c$ ). L'ensemble de Julia associé à  $c$  peut donc être vu comme la limite entre les deux types de comportement possibles de la suite  $\{P_c^n(z)\}$ .

Bien qu'il ne sera pas étudié spécifiquement ici, il apparaît pertinent de faire mention de l'ensemble de Mandelbrot puisqu'il existe une relation étroite entre les éléments de cet ensemble et la structure des ensembles de Julia.

**Définition 3.7.** *L'ensemble de Mandelbrot associé à  $c$  est noté  $\mathcal{M}$  et correspond à l'ensemble des points  $c \in \mathbb{C}$  tels que la suite des itérées  $\{P_c^n(0)\}$  est bornée.*

Il s'agit donc d'itérer le polynôme  $P_c$  en  $z = 0$ , ce qui revient à itérer  $c$ . Cette situation engendre un ensemble unique bien connu. Le théorème suivant propose des résultats relatifs à  $\mathcal{K}_c$ ,  $\mathcal{J}_c$  et  $\mathcal{M}$  sans qu'ils ne soient démontrés.

**Théorème 3.1.** Soit  $P_c(z) = z^2 + c$  où  $z, c \in \mathbb{C}$ .

(i)  $\mathcal{K}_c$  et  $\mathcal{J}_c$  sont non vides, bornés et fermés (compacts).

(ii)  $\mathcal{J}_c \subseteq \mathcal{K}_c$ .

(iii)  $\mathcal{J}_c$  est complètement invariant, c'est-à-dire  $P_c(\mathcal{J}_c) = P_c^{-1}(\mathcal{J}_c) = \mathcal{J}_c$ .

(iv)  $z_0 \in \mathcal{K}_c$  si et seulement si  $|P_c^n(z_0)| \leq \max\{|c|, 2\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(v)  $\mathcal{K}_c$  est connexe si et seulement si  $c \in \mathcal{M}$ .

(vi)  $\mathcal{K}_c$  est totalement non connexe si et seulement si  $c \notin \mathcal{M}$ . Alors,  $\mathcal{J}_c = \mathcal{K}_c$  et  $\mathcal{J}_c$  est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Les résultats (v) et (vi) correspondent au théorème de Fatou-Julia présentés aux références [8] et [30]. Notons que l'homéomorphisme entre  $\mathcal{J}_c$  et l'ensemble triadique de Cantor n'assure pas que la dimension fractale soit conservée. La propriété (iv) démontrée à la référence [34] indique que  $\mathcal{K}_c$  est contenu dans un disque de rayon  $R = \max\{|c|, 2\}$  et permet de visualiser l'ensemble à partir du raisonnement suivant.

Il faut d'abord fixer la valeur de  $c$  et un pas de discrétisation du disque de rayon  $R = \max\{|c|, 2\}$ . Pour chaque point  $z_0$  à l'intérieur du disque de rayon  $R$ , il faut calculer  $P_c^n(z_0)$  jusqu'à une certaine valeur  $n = N$  maximale fixée. À chaque itération, le module de l'itérée  $P_c^n(z_0)$  est comparé à  $R$ . Si celui-ci est supérieur à  $R$ , alors le point  $z_0$  n'appartient pas à  $\mathcal{K}_c$  et on passe au point suivant. Si le module est inférieur à  $R$ , alors le processus itératif est poursuivi jusqu'à ce que le module dépasse cette valeur ou que l'itération  $N$  soit atteinte. À ce moment, si le module est toujours inférieur à la valeur de référence  $R$ , le point  $z_0$  est supposé dans  $\mathcal{K}_c$ . Après avoir balayé tous les points du disque, les éléments de  $\mathcal{K}_c$  sont affichés en noir, procurant une approximation de l'ensemble de Julia rempli associé au paramètre  $c$ . En augmentant la valeur de  $N$  et en diminuant le pas de discrétisation, l'approximation devient plus précise.

En pratique, il s'avère plus simple de discrétiser le carré circonscrit au disque de rayon  $R$  plutôt que le disque lui-même. Par ailleurs, il s'avère intéressant d'afficher les points qui ne font pas partie de l'ensemble de Julia rempli d'une couleur qui indique

la vitesse à laquelle les itérées prises en ces points excèdent  $R$ . Ces couleurs forment des couches de divergence autour de  $\mathcal{K}_c$ . Cet affichage met davantage en lumière la structure de l'ensemble et permet de connaître rapidement le comportement des itérées à l'extérieur de celui-ci. Les couches près de l'ensemble de Julia rempli indiquent une divergence lente alors que les couches externes indiquent une divergence plus rapide.

Afin de vérifier l'efficacité de cette méthode de façon empirique, une procédure a été implémentée pour produire des exemples d'ensembles de Julia remplis. Le nombre d'itérations maximal a été fixé à  $N = 50$ . L'utilisateur entre lui-même le pas de discrétisation du carré. Pour les images de la figure 3.1, il a été fixé à  $1/500$ , c'est-à-dire que le carré est divisé en 500 points à l'horizontale et à la verticale. Le carré a d'ailleurs été réduit pour mieux observer les ensembles de Julia remplis, en rouge, et les couches de divergence, en bleu. Le contour de l'ensemble rouge correspond à l'ensemble de Julia.

Pour  $c = 0,25$  et  $c = -0,75$ , l'ensemble de Julia rempli est symétrique. C'est d'ailleurs le cas pour tout  $c \in \mathbb{R}$ . L'ensemble pour  $c = -0,75$  est parfois nommé *fractale de San Marco* en raison de sa forme qui rappelle celle de la basilique San Marco à Venise. Les ensembles représentés sont tous connexes, à l'exception de l'image (d) qui est totalement non connexe. L'image (b) est connue sous le nom de *lapin de Douady* en l'honneur du mathématicien Adrien Douady (1935 - 2006). Enfin, l'image (c) est une *dendrite*. De la référence [7], une dendrite est définie mathématiquement comme suit.

**Définition 3.8.** *Un ensemble  $E$  est une **dendrite** si c'est un ensemble compact, connexe par arcs<sup>2</sup>, localement connexe<sup>3</sup>, nulle part dense et qui ne sépare pas le plan complexe.*

La propriété d'être nulle part dense se traduit par  $\text{int}(\overline{E}) = \emptyset$ . En conséquence,  $\partial E = E$  puisque  $\partial E = \overline{E} \setminus \text{int}(E)$  et  $E = \overline{E}$  car  $E$  est fermé. Pour les ensembles de

2. Deux éléments quelconques  $z_1, z_2 \in E$  peuvent être reliés par un chemin, soit une fonction continue  $\alpha : [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $\alpha(0) = z_1$  et  $\alpha(1) = z_2$ .

3. Un espace topologique  $E$  est localement connexe si et seulement si toute composante connexe d'un ensemble ouvert de  $E$  est un ouvert de  $E$ .

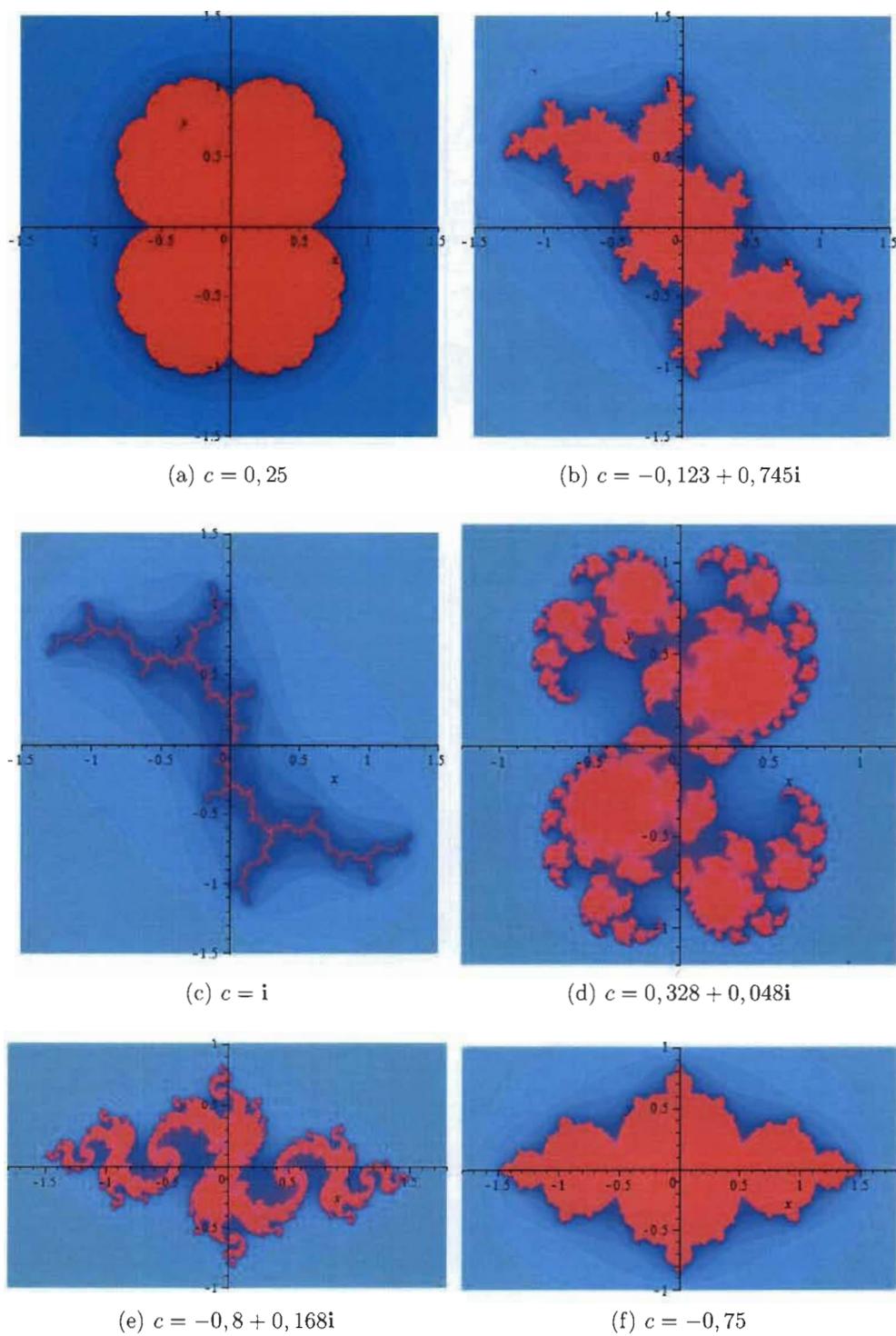


FIGURE 3.1 – Ensembles de Julia remplis du plan complexe

Julia, une dendrite peut aussi être vue comme un ensemble pour lequel la constante  $c$  est sur la frontière de l'ensemble de Mandelbrot (références [12] et [14]). C'est notamment le cas avec  $c = \mathbf{i}$ . Pour un ensemble de Julia rempli qui est une dendrite,  $\mathcal{K}_c = \mathcal{J}_c$  tel qu'observé à l'image (c) de la figure 3.1.

Bien que ce raisonnement produise de belles images d'ensembles de Julia remplis, il ne permet pas de visualiser directement les ensembles de Julia associés aux même valeurs de  $c$ . En effet, il est impossible de distinguer immédiatement l'ensemble  $\mathcal{K}_c$  de sa frontière puisque  $\mathcal{J}_c \subseteq \mathcal{K}_c$ . Or, ce sont les ensembles de Julia qu'il est pertinent d'étudier puisque ce sont eux qui possèdent un caractère fractal. Notons cependant que  $\mathcal{J}_c$  sera de nature fractale si  $c \neq 0$  et  $c \neq -2$ . En effet, pour  $c = 0$ ,  $\mathcal{J}_c$  coïncide avec le cercle unité et pour  $c = -2$ ,  $\mathcal{J}_c = [-2, 2]$  tel qu'indiqué à la référence [7]. Pour visualiser les ensembles de Julia, la méthode d'itération inverse est donc privilégiée et expliquée en détails dans les sections suivantes.

## 3.2 Redéfinitions par les familles normales

Il est possible de décrire les ensembles de Julia d'une façon équivalente à la définition introduite dans la section précédente. Celle-ci fait intervenir les familles normales de fonctions et permet de démontrer le résultat menant à la méthode d'itération inverse. Les principaux éléments théoriques concernant les familles normales proviennent des références [12] et [41]. Ils ne sont pas démontrés, à l'exception du théorème 3.2.

**Définition 3.9.** *Un **domaine**  $\Omega$  est un ensemble  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ouvert et connexe.*

**Définition 3.10.** *Une suite de fonctions  $\{f_n\}$  **converge uniformément vers une fonction**  $f$  sur  $E \subseteq \mathbb{C}$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $n > n_0$ , alors  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  pour tout  $z \in E$ .*

**Définition 3.11.** *Une suite de fonctions  $\{f_n\}$  **converge uniformément sur les sous-ensembles compacts** d'un domaine  $\Omega$  vers une fonction  $f$  si pour tout compact  $K \subseteq \Omega$*

et  $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(K, \epsilon)$  tel que si  $n > n_0(K, \epsilon)$ , alors  $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$  pour tout  $z \in K$ . On dit alors que  $\{f_n\}$  converge normalement dans  $\Omega$ .

**Définition 3.12.** Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$ . La famille  $\mathcal{F}$  est **normale dans**  $\Omega$  si pour chaque suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ , il existe une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ .

Rappelons qu'une fonction holomorphe sur un domaine  $\Omega$  est une fonction dérivable au sens complexe en tout élément de  $\Omega$ . Tel que l'indique le résultat suivant, la normalité d'une famille de fonctions n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'un nombre fini de fonctions holomorphes.

**Théorème 3.2.** Soit  $\mathcal{F}$  une famille infinie de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$  et  $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subsetneq \mathcal{F}$  une famille finie de fonctions. La famille  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$  si et seulement si la famille  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ .

PREUVE.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille infinie de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$  et  $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_k\} \subsetneq \mathcal{F}$  une famille finie de fonctions. La preuve s'effectue en deux parties.

(a) Si  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ , alors  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ .

Supposons que la famille  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ . Il faut montrer que pour chaque suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ , il existe une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ . Soit  $\{f_n\}$  une suite quelconque de fonctions de  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ . Puisque  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , alors  $\{f_n\}$  est une suite quelconque de  $\mathcal{F}$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ , alors  $\{f_n\}$  a une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ . Ainsi, la famille  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ .

(b) Si  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ , alors  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .

Supposons que la famille  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ . Soit  $\{f_n\}$  une suite quelconque de fonctions de  $\mathcal{F}$ . Il faut montrer que  $\{f_n\}$  a une sous-suite qui converge

uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ . Si la suite  $\{f_n\}$  prend un nombre fini de fonctions de  $\mathcal{F}$ , alors l'une de celles-ci doit se répéter une infinité de fois. La suite  $\{f_n\}$  a alors une sous-suite constante qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  vers une fonction  $f \neq \infty$ . Si la suite  $\{f_n\}$  prend un nombre infini de fonctions de  $\mathcal{F}$ , il y a deux cas possibles :

- (1) La suite  $\{f_n\}$  ne contient aucune fonction de la famille  $\mathcal{G}$ . Alors  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  et puisque  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ ,  $\{f_n\}$  doit avoir une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ .
- (2) La suite  $\{f_n\}$  contient au moins une fonction de  $\mathcal{G}$ . La suite  $\{h_n\} = \{f_n\} \setminus \mathcal{G}$  se trouve dans  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  et comme cette famille est normale dans  $\Omega$ , la suite  $\{h_n\}$  possède une sous-suite  $\{h_{n_k}\}$  qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ . Or,  $\{h_{n_k}\}$  est aussi une sous-suite de  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ . En conséquence, la suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  a une sous-suite qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ .

Puisque pour chaque suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  l'un des deux cas se produit, la famille  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .

Par (a) et (b), la famille  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$  si et seulement si la famille  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$  est normale dans  $\Omega$ . ■

La normalité d'une famille de fonctions peut aussi être définie en un point du domaine.

**Définition 3.13.** Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$ . La famille  $\mathcal{F}$  est **normale au point**  $z_0 \in \Omega$  si elle est normale dans un certain voisinage de  $z_0$ .

Le théorème suivant lie les concepts de normalité dans un domaine et de normalité en un point d'un domaine.

**Théorème 3.3.** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions holomorphes dans un domaine  $\Omega$ . La famille  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$  si et seulement si elle est normale en chaque point de  $\Omega$ .*

Ainsi, une famille n'est pas normale dans un domaine dès qu'elle n'est pas normale en un point de ce domaine. Le précédent théorème permet donc de déterminer rapidement qu'une famille n'est pas normale. Pour conclure qu'une famille est normale dans un domaine, il existe plusieurs critères. Le critère fondamental de normalité et le théorème de Montel en sont deux exemples.

**Théorème 3.4 (Critère fondamental de normalité).** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$ . Si  $\mathcal{F}$  ne prend pas deux valeurs fixes  $a, b \in \mathbb{C}$ , alors  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .*

**Théorème 3.5 (Théorème de Montel).** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$ . Si  $\mathcal{F}$  n'est pas normale dans  $\Omega$ , alors il existe au plus une valeur  $a_0 \in \mathbb{C}$  qui n'est pas prise par  $\mathcal{F}$  sur  $\Omega$ .*

Le dernier résultat provient de la référence [12] et permet de justifier la méthode d'itération inverse. Dans d'autres références dont [41], le théorème de Montel peut correspondre à des résultats différents équivalents.

Avant de décrire la méthode d'itération inverse, il convient de redéfinir les ensembles de Julia et les ensembles de Fatou en regard des familles normales de fonctions. Notons que le polynôme  $P_c(z) = z^2 + c$  avec  $z, c \in \mathbb{C}$  et où  $c$  est fixé est bien une fonction holomorphe et la suite de ses itérées forme une famille de fonctions holomorphes.

**Définition 3.14.** *L'ensemble de Julia associé à  $c$  correspond à l'ensemble des éléments  $z_0 \in \mathbb{C}$  tels que la famille des itérées  $\{P_c^n\}$  n'est pas normale en  $z_0$ .*

**Définition 3.15.** *L'ensemble de Fatou associé à  $c$  est le complément de l'ensemble de Julia associé à même valeur de  $c$ .*

De façon symbolique, on a

$$\mathcal{J}_c = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n\} \text{ n'est pas normale en } z_0\}$$

$$\mathcal{F}_c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_c = \{z_0 \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n\} \text{ est normale en } z_0\}.$$

De la définition de la normalité en un point, l'ensemble de Fatou est ouvert. L'ensemble de Julia est donc fermé tel que mentionné au théorème 3.1. Du théorème 3.2 et de la définition de la normalité en un point, la famille  $\{P_c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est normale en  $z_0$  si et seulement si la famille  $\{P_c^n \mid n \geq k_1\}$  est normale en  $z_0$  pour tout entier  $k_1 \geq 0$ . En conséquence, il est possible de considérer la famille des itérées de  $P_c$  à partir d'un certain entier  $k_1 \geq 0$ .

### 3.3 La méthode d'itération inverse

La nouvelle définition des ensembles de Julia conduit à la méthode d'itération inverse. Le théorème 3.8 tel que présenté à la référence [16] justifie son utilisation. On y considère l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}_P$  associé à un polynôme complexe unitaire  $P$  de degré  $d \geq 2$  (le coefficient associé à  $z^d$  est 1). Le résultat est donc valide pour le polynôme particulier  $P_c(z) = z^2 + c$ . Deux théorèmes sont d'abord énoncés et permettent de prouver le théorème central du chapitre. Ceux-ci se trouvent aussi à la référence [16]. Des ensembles générés à l'aide de la méthode d'itération inverse sont présentés suite aux résultats théoriques. Les références [9], [12], [33] et [35] contiennent aussi des résultats qui concernent la méthode d'itération inverse.

**Théorème 3.6 (*Open Mapping Theorem*).** *Si  $f$  est une fonction holomorphe non constante sur un domaine  $\Omega$ , alors pour tout ensemble ouvert  $U \subseteq \Omega$ ,  $f(U)$  est aussi un ensemble ouvert.*

Tout polynôme complexe  $P$  de degré  $d \geq 2$  est une fonction holomorphe et non constante puisque  $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ . Par ailleurs, ses itérées admettent les mêmes propriétés.

**Théorème 3.7 (Théorème fondamental de l'algèbre).** *Tout polynôme complexe  $P$  de degré  $d \geq 1$  admet la factorisation*

$$P(z) = c(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k}$$

où  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $z_i \neq z_j$  pour  $i \neq j$ ,  $m_i \in \{1, 2, \dots, d\}$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$  et  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = d$ . Cette factorisation est unique à l'exception de l'ordre des termes du produit.

Les nombres complexes  $z_1, z_2, \dots, z_k$  correspondent aux racines de  $P$ , soit aux valeurs telles que  $P(z) = 0$ . Les nombres entiers  $m_1, m_2, \dots, m_k$  indiquent la multiplicité de chaque solution. Tout polynôme complexe de degré supérieur ou égal à 1 admet donc au moins une et au plus  $d$  racines complexes distinctes.

**Lemme 3.1.** *Soit  $P$  un polynôme complexe unitaire de degré  $d \geq 2$ . Si  $z_0 \in \mathcal{J}_P$  et que  $V$  est un voisinage ouvert quelconque de  $z_0$ , alors pour tout entier  $k_1 \geq 0$ , il existe un entier  $N > k_1$  tel que*

$$\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{k=k_1}^N P^k(V) = P^{k_1}(V) \cup P^{k_1+1}(V) \cup \dots \cup P^N(V).$$

PREUVE.

Soit  $P$  un polynôme complexe unitaire de degré  $d \geq 2$  et  $k_1 \geq 0$  un entier quelconque. Soit  $z_0 \in \mathcal{J}_P$  et  $V$  un voisinage ouvert quelconque de  $z_0$ . Par définition de l'ensemble de Julia par les familles normales, la famille des itérées  $\{P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  n'est pas normale en  $z_0$ . Ainsi, elle n'est pas normale dans tous les voisinages contenant  $z_0$  et en particulier, la famille  $\{P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  n'est pas normale dans  $V$ . Du théorème 3.2, la famille  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  n'est pas normale dans  $V$ . Du théorème de Montel, il existe au plus une valeur qui n'est pas prise par  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  sur  $V$ . Distinguons les deux cas possibles.

(a) Supposons qu'aucune valeur complexe n'est omise par  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  sur  $V$ .

Alors  $\forall w \in \mathbb{C}$ , il existe  $z \in V$  et un entier  $k \geq k_1$  tels que  $P^k(z) = w$ . Ainsi, il existe un certain  $z^* \in V$  et un entier  $k^* \geq k_1$  tels que  $P^{k^*}(z^*) = z_0$ . Donc, si  $z_0 \in \mathcal{J}_P$  alors  $z_0 \in P^{k^*}(V)$  pour un certain entier  $k^* \geq k_1$ , d'où  $\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V)$ . Puisque  $V$  est un ensemble ouvert, alors du théorème 3.6  $P^k(V)$  l'est aussi  $\forall k \in \mathbb{N}$ . En particulier,  $P^k(V)$  est ouvert pour tout  $k \geq k_1$ . Comme  $\mathcal{J}_P$  est compact, alors du recouvrement de  $\mathcal{J}_P$  par la famille d'ensembles ouverts  $\{P^k(V) \mid k \geq k_1\}$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini à  $M \geq 1$  éléments. On a  $\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{j=1}^M P^{k_j^*}(V)$  avec  $k_1 \leq k_1^* < k_2^* < \dots < k_M^*$ . Ainsi, il existe un entier  $N = k_M^* + 1 > k_1$  tel que

$$\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{j=1}^M P^{k_j^*}(V) \subseteq \bigcup_{k=k_1}^N P^k(V).$$

(b) Supposons qu'il existe exactement une valeur  $w_0 \in \mathbb{C}$  qui n'est pas prise par la famille  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  sur  $V$ .

Alors  $w_0 \notin \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V)$  et  $\bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V) = \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ . De ce fait, la seule solution à l'équation  $P(z) = w_0$  est  $z = w_0$ . En effet, du théorème fondamental de l'algèbre, l'équation  $P(z) - w_0 = 0$  doit posséder au moins une solution. De plus, s'il existait  $z^* \neq w_0$  tel que  $P(z^*) - w_0 = 0$ , alors  $z^* \in \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$  et  $z^* \in P^m(V)$  pour un certain entier  $m \geq k_1$ . On aurait alors  $P(z^*) = w_0 \in P^{m+1}(V)$  pour un certain entier  $m \geq k_1$  ce qui contredit l'hypothèse de départ. La seule solution possible à l'équation  $P(z) = w_0$  est donc  $z = w_0$  et celle-ci doit être de multiplicité  $d$ . Ainsi, on peut écrire  $P(z) - w_0 = (z - w_0)^d$  ou  $P(z) = w_0 + (z - w_0)^d$ . On vérifie facilement par induction que  $P^n(z) = w_0 + (z - w_0)^{d^n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et en particulier pour tout entier  $n \geq k_1$ .

Considérons le disque ouvert suivant centré en  $w_0$  :  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w_0| < 1\}$ .

Montrons que la famille  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  converge uniformément vers  $w_0$  sur les sous-ensembles compacts de  $D$ . Soit  $K \subseteq D$  un ensemble compact non vide,

$z \in K$  et  $\epsilon > 0$  quelconque. Alors pour tout entier  $n \geq k_1$ , on a

$$|P^n(z) - w_0| = |w_0 + (z - w_0)^{d^n} - w_0| = |z - w_0|^{d^n}.$$

Puisque  $|z - w_0| < 1$  pour tout  $z \in K$ , alors  $|z - w_0|^{d^n}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ . Ainsi, pour tout compact  $K \subseteq D$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il doit exister un entier  $n_0 \geq k_1$  tel que si  $n > n_0$  alors  $|P^n(z) - w_0| < \epsilon$  pour tout  $z \in K$ . La famille  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  converge donc normalement dans un voisinage  $D$  de  $w_0$  et la famille est normale en  $w_0$ . De la définition de l'ensemble de Fatou associé à  $P$ , on a  $w_0 \in \mathcal{F}_P$ .

En conclusion, pour  $w_1 \in \mathbb{C}$  quelconque tel que  $w_1 \notin \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V)$ , il faut avoir  $\bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V) = \mathbb{C} \setminus \{w_1\}$  par le théorème de Montel puisque  $\{P^n \mid n \geq k_1\}$  n'est pas normale sur  $V$ . D'où,  $w_1 \in \mathcal{F}_P$  du raisonnement précédent. La contrapositive amène que si  $w_1 \in \mathcal{J}_P$ , alors  $w_1 \in \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V)$  d'où  $\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^k(V)$ . Comme en (a), il doit exister un entier  $N > k_1$  tel que  $\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{k=k_1}^N P^k(V)$ .

Dans les deux cas, il existe un entier  $N > k_1$  tel que  $\mathcal{J}_P \subseteq \bigcup_{k=k_1}^N P^k(V)$  où  $V$  est un voisinage ouvert quelconque d'un élément de  $\mathcal{J}_P$ . ■

Avant d'introduire le théorème au coeur de cette section, il convient de s'attarder à l'image inverse d'un polynôme  $P$  quelconque de degré  $d \geq 2$ .

Soit  $w_0 \in \mathbb{C}$  fixé. Il faut trouver les valeurs  $z \in \mathbb{C}$  telles que  $P(z) = w_0$ . Celles-ci correspondent à l'image inverse du polynôme  $P$  en  $w_0$  et on écrit  $z \in P^{-1}(w_0)$ . Du théorème fondamental de l'algèbre, le polynôme  $P(z) - w_0$  admet l'unique factorisation

$$P(z) - w_0 = c(z - w_1)^{m_1}(z - w_2)^{m_2} \dots (z - w_k)^{m_k}$$

avec  $w_i \neq w_j$  pour  $i \neq j$ ,  $m_i \in \{1, 2, \dots, d\}$  et  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = d$  pour  $i, j = 1, 2, \dots, k$ . Les nombres  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  correspondent aux solutions de  $P(z) - w_0 = 0$  et  $P^{-1}(w_0) = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ . Ainsi, l'inverse du polynôme  $P$  en un point  $w_0$  est un

ensemble constitué d'une à  $d$  valeurs complexes.

**Théorème 3.8.** *Soit  $P$  un polynôme complexe unitaire de degré  $d \geq 2$ . Pour tout  $z_1 \in \mathcal{J}_P$ , l'ensemble des itérées inverses  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^{-k}(z_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_P$  pour tout entier  $k_1 \geq 1$ .*

PREUVE.

Soit  $P$  un polynôme complexe unitaire de degré  $d \geq 2$ . Soit  $z_1 \in \mathcal{J}_P$  quelconque et  $k_1 \geq 1$  un entier. Il faut montrer que pour tout élément de  $\mathcal{J}_P$ , tout ensemble ouvert contenant cet élément de  $\mathcal{J}_P$  contient aussi un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^{-k}(z_1) \right\}$ . Soit  $z_2 \in \mathcal{J}_P$  et  $U$  un ensemble ouvert quelconque qui contient  $z_2$ . Du lemme 3.1, il existe un entier  $m \geq k_1$  tel que  $z_1 \in P^m(U)$  puisque  $z_1 \in \mathcal{J}_P$ . En d'autres termes, il existe  $z \in U$  et un entier  $m \geq k_1$  tel que  $z_1 = P^m(z)$ . Or, l'inverse du polynôme  $P^m$  en  $z_1$ , c'est-à-dire  $P^{-m}(z_1)$ , doit admettre entre une et  $d^m$  valeurs. L'une de celles-ci doit se trouver dans  $U$  puisque  $z_1 \in P^m(U)$ . L'ensemble ouvert  $U$  contient donc un élément de  $\mathcal{J}_P$  et un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^{-k}(z_1) \right\}$ . Ainsi, pour tout  $z_1 \in \mathcal{J}_P$ , l'ensemble des itérées inverses  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P^{-k}(z_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_P$ . ■

Ce théorème permet de développer la **méthode d'itération inverse** afin de visualiser les ensembles de Julia. Voyons d'abord l'expression générale de l'inverse du polynôme  $P_c(z) = z^2 + c$ . On remarque facilement que  $\sqrt{z - c}$  peut agir à titre d'inverse puisque  $P_c(\sqrt{z - c}) = z$ . Tel que mentionné précédemment, l'inverse du polynôme doit admettre entre une et deux valeurs pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . L'expression de la racine carrée d'un nombre complexe confirme cette caractéristique.

La racine carrée du nombre complexe  $a + bi \in \mathbb{C}$  peut être donnée par

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left[ \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \operatorname{sign}(b) \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right] \quad (3.1)$$

où  $\operatorname{sign}(b) = 1$  si  $b \geq 0$  et  $\operatorname{sign}(b) = -1$  si  $b < 0$ .

On retrouve facilement le nombre  $a + b\mathbf{i}$  en élevant l'expression (3.1) au carré, ce qui indique que la racine carré complexe peut bien être exprimée tel qu'indiqué. Si  $a + b\mathbf{i} = 0$ , alors  $\sqrt{a + b\mathbf{i}} = 0$ . Dans le cas où  $a + b\mathbf{i} \neq 0$ , il y a deux racines admissibles : une branche positive et une branche négative. Ainsi, on conclut que le polynôme  $P_c$  admet deux inverses :  $f_1(z) = \sqrt{z - c}$  qui correspond à la branche positive et  $f_2(z) = -\sqrt{z - c}$  qui correspond à la branche négative. Pour  $z = z_1 + z_2\mathbf{i}$  et  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}$ , la racine carrée de  $z - c$  est donnée par l'expression (3.1) où  $a = z_1 - c_1$  et  $b = z_2 - c_2$ .

Comme son nom le suggère, la méthode d'itération inverse implique qu'il faille itérer l'inverse de  $P_c$ . Puisque le polynôme admet deux inverses, il faut considérer chacune de celles-ci à toutes les itérations. Les lignes suivantes relatent les étapes principales de la méthode :

1. Fixer une constante  $c \in \mathbb{C}$ , un point initial  $z_0 \in \mathcal{J}_c$  et un nombre maximal d'itérations  $N$ .
2. À la première itération, calculer  $f_1(z_0) = \sqrt{z_0 - c}$  et  $f_2(z_0) = -\sqrt{z_0 - c}$ .
3. À la deuxième itération, calculer  $f_1(f_1(z_0))$ ,  $f_1(f_2(z_0))$ ,  $f_2(f_1(z_0))$  et  $f_2(f_2(z_0))$ .
4. Poursuivre jusqu'à l'itération  $N$  tel qu'à l'itération  $k$ , les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont évaluées aux points de l'itération  $(k - 1)$ .
5. Afficher les points obtenus à toutes les itérations.

Le résultat de cette procédure est un nuage de points qui approxime  $\mathcal{J}_c$ . Plus le nombre d'itérations est grand, plus l'approximation se rapproche de l'ensemble de Julia. À chaque itération, le nombre de points générés double. À la fin de la procédure, il faut donc en afficher un nombre très important, soit  $\sum_{n=0}^N 2^n = 2^{N+1} - 1$  points. Afin de réduire ce nombre, il est possible de modifier l'algorithme classique qui vient d'être présenté. À chaque itération, il suffit de choisir au hasard l'une des deux branches de l'inverse. Le choix de chaque branche est associé à une probabilité  $p = \frac{1}{2}$ . Ce faisant, on génère et affiche  $N$  nombres complexes. La mémoire et le temps de calculs sont alors moindres qu'avec l'approche précédente et l'approximation est aussi intéressante.

Le chapitre 5 contient des résultats qui décrivent les raisons pour lesquelles les deux algorithmes produisent le même ensemble.

Pour débiter l'algorithme, il faut choisir un nombre  $z_0 \in \mathcal{J}_c$ . Pour ce faire, le résultat suivant s'avère très utile. Il est notamment énoncé aux références [9] et [12].

**Théorème 3.9.** *L'ensemble de Julia associé à  $c$  correspond à la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs de  $P_c$ .*

En fait, tel que mentionné dans [35], les points fixes attractifs appartiennent à  $\mathcal{F}_c$  et les points fixes répulsifs ou rationnellement neutres appartiennent à  $\mathcal{J}_c$ . Cette dernière conclusion était d'ailleurs déjà connue de Fatou et Julia au début des années 1900. En conséquence, un point fixe répulsif de  $P_c$  constitue un choix judicieux pour initier l'algorithme. Lorsque  $c \neq \frac{1}{4}$ , un tel point fixe existe toujours. Si les deux points fixes de  $P_c$  sont répulsifs, il suffit de choisir celui qui est le plus répulsif, soit celui qui admet la plus grande valeur du module de la dérivée. Si  $c = \frac{1}{4}$ , alors le seul point fixe est  $z_0 = \frac{1}{2}$  et puisqu'il est rationnellement neutre, il appartient à l'ensemble de Julia. Une simple procédure permet de déterminer rapidement le point de départ de l'algorithme selon la valeur de  $c$ .

Valeur de $c$	Point initial $z_0$
$c = 0,25$	$z_0 = 0,5$
$c = -0,123 + 0,745i$	$z_0 = 1,276581949 - 0,4796660549i$
$c = i$	$z_0 = 1,30024259 - 0,6248105338i$
$c = 0,328 + 0,048i$	$z_0 = 0,5824197341 - 0,2911923979i$
$c = -0,8 + 0,168i$	$z_0 = 1,527948216 - 0,08171617863i$
$c = -0,75$	$z_0 = 1,5$

TABLE 3.1 – Points initiaux pour la méthode d'itération inverse

Une procédure permettant de visualiser les ensembles de Julia a été implémentée. Le point initial a été choisi parmi les points fixes répulsifs de  $P_c$  et est donné dans le tableau 3.1 pour chaque valeur de  $c$ . Le nombre d'itérations a été fixé à  $N = 100\,000$ . Les images suivantes correspondent aux mêmes valeurs de  $c$  que les ensembles de Julia remplis proposés à la première section du chapitre.

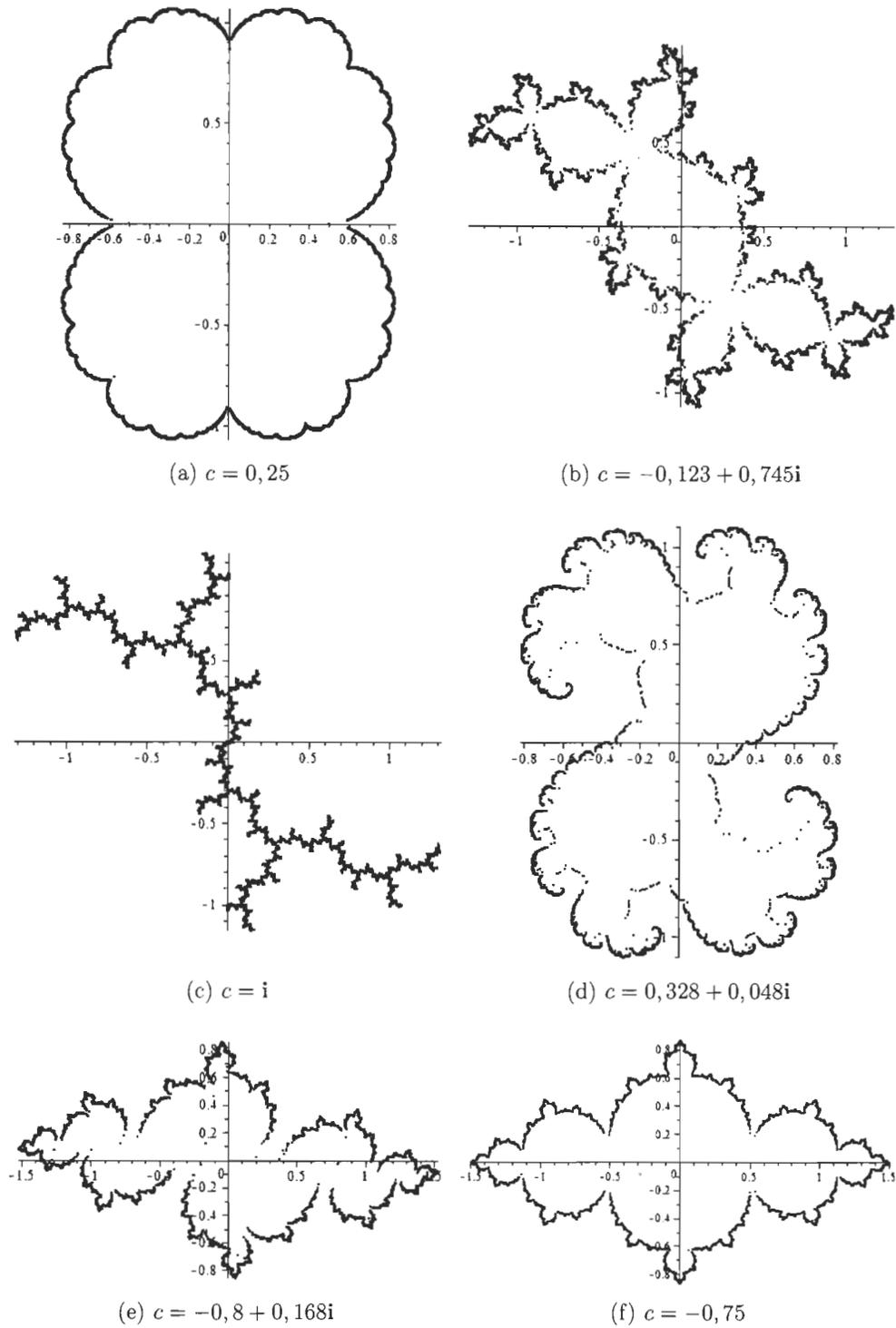


FIGURE 3.2 – Ensembles de Julia du plan complexe

En observant ces images, il est facile de constater qu'elles ne correspondent pas complètement à la frontière des ensembles de Julia remplis de la figure 3.1. L'augmentation du nombre d'itérations peut pallier en partie ce problème. Par contre, pour certaines valeurs de  $c$ , un nombre élevé d'itérations entraîne tout de même une distribution non uniforme des itérées inverses sur l'ensemble de Julia. Cette situation est relevée notamment aux références [3], [12] et [28]. Certaines régions sont davantage atteintes par l'algorithme alors que d'autres semblent oubliées. Dans ce cas, l'approximation de l'ensemble s'avère moins précise. Quelques solutions sont proposées :

1. Affecter des probabilités différentes aux deux branches de la racine carrée ;
2. À chaque itération, calculer les deux branches de la racine carrée et afficher celle qui ne se trouvent pas déjà dans une région densément occupée du plan.

Bien que ces solutions soient intéressantes, les images présentées jusqu'à maintenant paraissent suffisantes pour illustrer les principes et l'efficacité de la méthode d'itération inverse. Elles n'ont donc pas été tentées. La distribution non uniforme des points générés est discutée et éclaircie au chapitre 5.

En somme, les résultats de ce chapitre permettent de mieux concevoir les ensembles de Julia du plan complexe associés au polynôme  $P_c(z) = z^2 + c$ . D'abord introduits à partir de la définition classique, c'est-à-dire comme la frontière des ensembles de Julia remplis, ils ont ensuite été redéfinis avec les familles normales de fonctions. Cette redéfinition a mené à la démonstration d'un théorème justifiant la méthode d'itération inverse pour une visualisation directe des ensembles de Julia. Bien que celle-ci ne soit pas parfaite, elle apparaît assez adéquate pour bien cerner ces ensembles fractals particuliers.

Au prochain chapitre, les définitions classiques des ensembles présentés sont reprises à partir d'un autre système de nombres : les nombres bicomplexes. Cette adaptation conduit à l'observation des ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel et à l'établissement de relations étroites entre les ensembles du plan et de l'espace.

# Chapitre 4

## Les ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel

Avant d'être visualisés dans l'espace tridimensionnel habituel, les ensembles de Julia sont générés dans l'espace à quatre dimensions. Pour ce faire, il apparaît pertinent d'utiliser les nombres bicomplexes puisqu'ils admettent des propriétés intéressantes pour étudier rigoureusement ces fractales. Ce chapitre propose d'examiner d'un point de vue théorique les ensembles de Julia générés par ces nombres avant d'exposer une méthode efficace pour les visualiser dans l'espace tridimensionnel.

Dans un premier temps, il convient d'introduire formellement les nombres bicomplexes et quelques propriétés essentielles à la compréhension des résultats de ce chapitre. Puis, de manière analogue au cas complexe, les ensembles de Julia remplis, les ensembles de Julia et l'ensemble de Mandelbrot sont définis du point de vue de la dynamique bicomplexe. De nouveau, il est question d'itérer un polynôme de la forme  $w^2 + c$ . L'étude de ce polynôme particulier fait ressortir quelques liens entre la structure des ensembles complexes et des ensembles bicomplexes. Enfin, une adaptation de la méthode d'itération inverse est proposée à partir, entre autres, des nouveaux résultats énoncés dans ce chapitre. Le logiciel *Maple 16* est de nouveau employé pour visualiser les ensembles de Julia. Les procédures sont à l'annexe B.

## 4.1 Les nombres bicomplexes et leurs propriétés

Avant de définir formellement les nombres bicomplexes, il convient d'introduire deux ensembles adoptant la même structure algébrique que  $\mathbb{C}$ , soit

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) &= \{a + b\mathbf{i}_1 \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{i}_1^2 = -1\}, \\ \mathbb{C}(\mathbf{i}_2) &= \{a + b\mathbf{i}_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{i}_2^2 = -1\}.\end{aligned}$$

La différence entre ces ensembles et  $\mathbb{C}$  vient uniquement de la notation de l'unité imaginaire. Toutes les propriétés usuelles observées dans  $\mathbb{C}$  demeurent valides. Ainsi, les ensembles de Julia remplis, de Julia et de Mandelbrot peuvent être définis dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  ou  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$  comme au chapitre précédent et les résultats énoncés sont vérifiés. Considérons maintenant l'ensemble des nombres bicomplexes.

**Définition 4.1.** *L'ensemble des nombres bicomplexes est défini comme*

$$\mathbb{BC} = \{a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_1^2 &= -1, & \mathbf{i}_2^2 &= -1, & \mathbf{j}^2 &= 1, \\ \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 = \mathbf{j}, \\ \mathbf{i}_2\mathbf{j} &= \mathbf{j}\mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \\ \mathbf{i}_1\mathbf{j} &= \mathbf{j}\mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2.\end{aligned}$$

Notons que cet ensemble est noté  $\mathbb{T}$  ou  $\mathbb{C}_2$  dans certaines références. Les unités  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$  correspondent à des unités imaginaires complexes alors que  $\mathbf{j}$  est appelée une unité hyperbolique. Il est possible d'exprimer les nombres bicomplexes sous une forme équivalente en utilisant les propriétés de ces unités. En effet, on a

$$w = a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j} = (a + b\mathbf{i}_1) + (c + d\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$$

où  $z_1 = a + b\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $z_2 = c + d\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{BC} &= \{a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)\}.\end{aligned}$$

La deuxième représentation indique que  $\mathbb{BC}$  constitue une complexification de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Il est généralement plus pratique d'utiliser cette représentation.

**Définition 4.2.** Soit  $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $w_2 = s_1 + s_2\mathbf{i}_2$  deux nombres bicomplexes. On définit

(i) **L'égalité** :  $w_1 = w_2$  si et seulement si  $z_1 = s_1$  et  $z_2 = s_2$ .

(ii) **L'addition** :  $w_1 + w_2 = (z_1 + s_1) + (z_2 + s_2)\mathbf{i}_2$ .

(iii) **La multiplication** :  $w_1 \cdot w_2 = (z_1s_1 - z_2s_2) + (z_1s_2 + z_2s_1)\mathbf{i}_2$ .

Des propriétés des nombres complexes, on déduit pour les nombres bicomplexes que :

1. L'addition et la multiplication sont des opérations fermées, commutatives et associatives ;
2. La multiplication est distributive sur l'addition ;
3. L'élément  $w = 0 + 0\mathbf{i}_2 = 0$  est l'élément neutre de l'addition ;
4. L'élément  $w = 1 + 0\mathbf{i}_2 = 1$  est l'élément neutre de la multiplication ;
5. L'inverse additif de  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  est l'élément  $-w = -z_1 - z_2\mathbf{i}_2$ .

En conséquence,  $(\mathbb{BC}, +, \cdot)$  forme un anneau commutatif avec unité. En écrivant les nombres bicomplexes avec les unités  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  et  $\mathbf{j}$ , l'addition s'effectue aussi terme à terme et les propriétés énoncées ci-haut sont encore respectées.

Certains nombres bicomplexes admettent des propriétés particulièrement intéressantes : les éléments idempotents.

**Définition 4.3.** Un élément  $w \in \mathbb{BC}$  est un **élément idempotent** si  $w^2 = w$ .

**Théorème 4.1.** *L'ensemble des nombres bicomplexes contient uniquement quatre éléments idempotents, soit*

$$0, 1, \frac{1+\mathbf{j}}{2} \text{ et } \frac{1-\mathbf{j}}{2}.$$

PREUVE.

Soit  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Pour que  $w$  soit un élément idempotent, il faut que

$$\begin{aligned} w^2 = w &\Leftrightarrow (z_1^2 - z_2^2) + 2z_1z_2\mathbf{i}_2 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_1^2 - z_2^2 = z_1 \\ 2z_1z_2 = z_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Il faut donc trouver les valeurs de  $z_1$  et  $z_2$  qui satisfont ces deux équations. La solution  $z_2 = 0$  satisfait immédiatement la deuxième équation. Examinons les cas  $z_2 = 0$  et  $z_2 \neq 0$ .

(a) Supposons  $z_2 = 0$ . Alors, la première équation devient  $z_1^2 = z_1$  et des propriétés des nombres complexes, on déduit  $z_1 = 0$  ou  $z_1 = 1$ . Les nombres  $w = 0 + 0\mathbf{i}_2 = 0$  et  $w = 1 + 0\mathbf{i}_2 = 1$  sont ainsi deux solutions des équations présentées.

(b) Supposons  $z_2 \neq 0$ . Alors de la deuxième équation, on trouve  $z_1 = \frac{1}{2}$ . La première équation devient alors  $\frac{1}{4} - z_2^2 = \frac{1}{2}$  ou  $z_2^2 = -\frac{1}{4}$ . Puisque  $\mathbf{i}_1^2 = -1$ , on obtient

$$z_2^2 = \frac{\mathbf{i}_1^2}{4} \Rightarrow z_2 = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{i}_1^2}{4}} \Rightarrow z_2 = \pm \frac{\mathbf{i}_1}{2}.$$

Les nombres  $w = \frac{1}{2} + \frac{\mathbf{i}_1}{2}\mathbf{i}_2 = \frac{1+\mathbf{j}}{2}$  et  $w = \frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}_1}{2}\mathbf{i}_2 = \frac{1-\mathbf{j}}{2}$  correspondent aussi à deux solutions des équations initiales.

Puisque les cas précédents amènent toutes les solutions possibles, l'ensemble des nombres bicomplexes contient bien quatre et uniquement quatre éléments idempotents. ■

Les deux éléments idempotents différents de 0 et de 1 sont notés

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1+\mathbf{j}}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1-\mathbf{j}}{2}$$

et admettent les propriétés suivantes.

**Théorème 4.2.**

(i)  $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2$ .

(ii)  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$ .

(iii)  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 = 1$ .

(iv)  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont linéairement indépendants sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

PREUVE.

(i)  $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2$ .

Ces propriétés proviennent directement de la définition d'un élément idempotent.

(ii)  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0$ .

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \frac{1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \cdot \frac{1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} = \frac{(1 - 1) + (-\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2}{4} = \frac{0 + 0\mathbf{i}_2}{4} = 0$$

par définition du produit et  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$  par commutativité.

(iii)  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 = 1$ .

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \frac{1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} + \frac{1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} = \frac{(1 + 1) + (\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2}{2} = \frac{2 + 0\mathbf{i}_2}{2} = 1 + 0\mathbf{i}_2 = 1$$

par définition de l'addition et  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$  par commutativité.

(iv)  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont linéairement indépendants sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

Soit  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  tels que  $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = 0$ . Il faut montrer que  $c_1 = c_2 = 0$ . Or,

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = 0 &\Leftrightarrow c_1 \left( \frac{1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \right) + c_2 \left( \frac{1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1(1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) + c_2(1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (c_1 + c_2) + (c_1 - c_2)\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ (c_1 - c_2)\mathbf{i}_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

De la première équation, on déduit  $c_1 = -c_2$ . De la deuxième équation, on obtient  $c_1 = c_2$ . La seule solution possible est  $c_1 = c_2 = 0$  et  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  sont linéairement indépendants sur l'espace vectoriel  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . ■

**Théorème 4.3.** *Tout élément  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$  admet une représentation unique sur la base idempotente  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  :*

$$w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 = (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2.$$

PREUVE.

Soit  $z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$  quelconque et  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  tels que  $c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ . Il faut montrer que  $c_1 = z_1 - z_2\mathbf{i}_1$  et  $c_2 = z_1 + z_2\mathbf{i}_1$ . On trouve

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 &\Leftrightarrow c_1 \left( \frac{1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \right) + c_2 \left( \frac{1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \right) = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{c_1 + c_2}{2} \right) + \left( \frac{c_1 - c_2}{2} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c_1 + c_2}{2} = z_1 \\ \frac{c_1 - c_2}{2} \mathbf{i}_1 = z_2. \end{cases} \end{aligned}$$

De la première équation, on déduit  $c_1 = 2z_1 - c_2$ . En substituant cette expression dans la deuxième équation, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{2z_1 - 2c_2}{2} \mathbf{i}_1 = z_2 &\Leftrightarrow (z_1 - c_2)\mathbf{i}_1 = z_2 \\ &\Leftrightarrow z_1\mathbf{i}_1 - z_2 = c_2\mathbf{i}_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z_1\mathbf{i}_1 - z_2}{\mathbf{i}_1} = c_2 \\ &\Leftrightarrow z_1 - z_2(\overline{\mathbf{i}_1}) = z_1 + z_2\mathbf{i}_1 = c_2. \end{aligned}$$

Ainsi,  $c_1 = 2z_1 - (z_1 + z_2\mathbf{i}_1) = z_1 - z_2\mathbf{i}_1$ . Ces solutions sont uniques puisque le déterminant de la matrice des coefficients représentant ce problème est non nul. En conséquence, le nombre bicomplexe  $z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  admet l'unique représentation sur la base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  telle que présentée. ■

Les éléments  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1$  correspondent aux composantes idempotentes de  $z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ . Il est possible de passer d'une représentation à une autre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_1 &= a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j} \\ &= [(a + d) + (b - c)\mathbf{i}_1] \mathbf{e}_1 + [(a - d) + (b + c)\mathbf{i}_1] \mathbf{e}_2 \\ w_2 &= (a_1 + b_1\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2 \\ &= \frac{1}{2} [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}_1 + (-b_1 + b_2)\mathbf{i}_2 + (a_1 - a_2)\mathbf{j}]. \end{aligned}$$

La décomposition sur la base idempotente s'avère essentielle puisque les opérations d'addition et de multiplication peuvent être effectuées selon les composantes.

**Théorème 4.4.** *Soit  $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $w_2 = s_1 + s_2\mathbf{i}_2$  deux nombres bicomplexes.*

$$(i) \quad w_1 \pm w_2 = [(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \pm (s_1 - s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \pm (s_1 + s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2.$$

$$(ii) \quad w_1 \cdot w_2 = [(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)(s_1 - s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)(s_1 + s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2.$$

$$(iii) \quad w_1^n = (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)^n \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)^n \mathbf{e}_2 \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

PREUVE.

Soit  $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $w_2 = s_1 + s_2\mathbf{i}_2$  deux nombres bicomplexes quelconques.

$$(i) \quad w_1 \pm w_2 = [(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \pm (s_1 - s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \pm (s_1 + s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2.$$

Par définition de l'addition dans  $\mathbb{BC}$ , on a  $w_1 \pm w_2 = (z_1 \pm s_1) + (z_2 \pm s_2)\mathbf{i}_2$ . Du théorème 4.3, on déduit

$$\begin{aligned} w_1 \pm w_2 &= [(z_1 \pm s_1) - (z_2 \pm s_2)\mathbf{i}_1] \mathbf{e}_1 + [(z_1 \pm s_1) + (z_2 \pm s_2)\mathbf{i}_1] \mathbf{e}_2 \\ &= [(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \pm (s_1 - s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \pm (s_1 + s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad w_1 \cdot w_2 = [(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)(s_1 - s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)(s_1 + s_2\mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2.$$

Par définition du produit dans  $\mathbb{BC}$ , on a  $w_1 \cdot w_2 = (z_1s_1 - z_2s_2) + (z_1s_2 + z_2s_1)\mathbf{i}_2$ .

Du théorème 4.3 et de la définition du produit dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , on obtient

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 &= [(z_1 s_1 - z_2 s_2) - (z_1 s_2 + z_2 s_1) \mathbf{i}_1] \mathbf{e}_1 + [(z_1 s_1 - z_2 s_2) + (z_1 s_2 + z_2 s_1) \mathbf{i}_1] \mathbf{e}_2 \\ &= [(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

(iii)  $w_1^n = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^n \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^n \mathbf{e}_2$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

Cette propriété se démontre par induction. Pour  $n = 0$ , on a  $w_1^0 = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^0 = 1$  et  $(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^0 \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^0 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 1$  du théorème 4.2. Supposons  $w_1^k = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^k \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^k \mathbf{e}_2$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Montrons que la propriété est vraie pour  $k + 1$ . On a

$$\begin{aligned} w_1^{k+1} &= w_1^k \cdot w_1 \\ &= [(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^k \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^k \mathbf{e}_2] \cdot [(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2] \end{aligned}$$

de l'hypothèse d'induction et du théorème 4.3. De (ii), on déduit

$$\begin{aligned} w_1^{k+1} &= [(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^k (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_1 + [(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^k (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)] \mathbf{e}_2 \\ &= (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^{k+1} \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^{k+1} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée pour  $k + 1$ . Par le principe d'induction, on conclut  $w_1^n = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)^n \mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)^n \mathbf{e}_2$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$  ■

Deux applications importantes sont définies sur  $\mathbb{BC}$  et renvoient chacune des composantes idempotentes d'un nombre bicomplexe.

**Définition 4.4.** Soit  $P_1 : \mathbb{BC} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $P_2 : \mathbb{BC} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  deux **projections de  $\mathbb{BC}$  vers  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  telles que :**

$$P_1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) = z_1 - z_2 \mathbf{i}_1 \quad \text{et} \quad P_2(z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) = z_1 + z_2 \mathbf{i}_1.$$

Contrairement aux nombres complexes, les nombres bicomplexes peuvent être conjugués de plusieurs façons. Cette situation est due à la pluralité des unités imaginaires complexes et hyperbolique. Ces différents types de conjugués mènent à des

définitions différentes de module à valeur complexe. Dans le cadre de ce travail, seul le module réel apparaît pertinent. Les autres types de modules sont présentés à la référence [39].

**Définition 4.5.** Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Le **module réel de  $w$**  est défini comme  $\|w\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$  où  $|\cdot|$  correspond au module complexe.

Avec  $z_1 = a + b \mathbf{i}_1$  et  $z_2 = c + d \mathbf{i}_1$ , le module réel de  $w$  devient

$$\|w\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

ce qui correspond à la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^4$ . En fait, de la même façon que  $(\mathbb{C}, +)$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}^2, +)$ , l'espace vectoriel  $(\mathbb{BC}, +)$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}^4, +)$  et il peut être vu comme  $(\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}, +)$ . Tel qu'énoncé à la référence [36], le module réel peut s'écrire de la façon suivante en fonction des composantes idempotentes et du module dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

**Théorème 4.5.** Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Alors,

$$\|w\| = \|z_1 + z_2 \mathbf{i}_2\| = \sqrt{\frac{|z_1 - z_2 \mathbf{i}_1|^2 + |z_1 + z_2 \mathbf{i}_1|^2}{2}}.$$

PREUVE.

Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  avec  $z_1 = a_1 + b_1 \mathbf{i}_1$  et  $z_2 = a_2 + b_2 \mathbf{i}_1$ . Alors,

$$z_1 - z_2 \mathbf{i}_1 = (a_1 + b_1 \mathbf{i}_1) - (a_2 + b_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 = (a_1 + b_2) + (b_1 - a_2) \mathbf{i}_1$$

$$z_1 + z_2 \mathbf{i}_1 = (a_1 + b_1 \mathbf{i}_1) + (a_2 + b_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1 = (a_1 - b_2) + (b_1 + a_2) \mathbf{i}_1.$$

Des propriétés du module dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{|z_1 - z_2\mathbf{i}_1|^2 + |z_1 + z_2\mathbf{i}_1|^2}{2} &= \frac{[(a_1 + b_2)^2 + (b_1 - a_2)^2] + [(a_1 - b_2)^2 + (b_1 + a_2)^2]}{2} \\
&= \frac{a_1^2 + 2a_1b_2 + b_2^2 + b_1^2 - 2b_1a_2 + a_2^2}{2} \\
&\quad + \frac{a_1^2 - 2a_1b_2 + b_2^2 + b_1^2 + 2b_1a_2 + a_2^2}{2} \\
&= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 = \|z_1 + z_2\mathbf{i}_2\|^2
\end{aligned}$$

d'où  $\|z_1 + z_2\mathbf{i}_2\| = \sqrt{\frac{|z_1 - z_2\mathbf{i}_1|^2 + |z_1 + z_2\mathbf{i}_1|^2}{2}}$ . ■

Avant de terminer cette section, il convient de voir l'expression de la racine carrée d'un nombre bicomplexe.

**Définition 4.6.** Soit  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . La racine carrée de  $w$  est donnée par

$$\sqrt{w} = \sqrt{z_1 - z_2\mathbf{i}_1} \mathbf{e}_1 + \sqrt{z_1 + z_2\mathbf{i}_1} \mathbf{e}_2.$$

Ainsi, la racine carrée bicomplexe est déterminée par la racine carrée complexe des composantes idempotentes. Tel que mentionné au chapitre précédent, la racine carrée d'un nombre complexe admet une ou deux valeurs. En conséquence, pour  $w \in \mathbb{BC}$ ,  $\sqrt{w}$  doit admettre entre une et quatre valeurs bicomplexes.

## 4.2 Les ensembles bicomplexes

Les notions de base relatives aux nombres bicomplexes permettent de considérer certains ensembles bicomplexes classiques. Dans cette catégorie, notons les boules ouvertes et fermées et les ensembles cartésiens bicomplexes. Les ensembles de Julia remplis et les ensembles de Julia bicomplexes sont ensuite présentés. Une caractérisation importante est démontrée à la section suivante et permet de mieux comprendre la structure des ensembles de Julia bicomplexes et d'établir une façon de les visualiser

dans l'espace tridimensionnel.

### 4.2.1 Les ensembles classiques

Les notions de boules, d'ensembles ouverts et de frontière sont reprises dans le contexte propre à  $\mathbb{BC}$ .

**Définition 4.7.** Soit  $a \in \mathbb{BC}$  et  $r > 0$  fixés.

La boule ouverte centrée en  $a$  de rayon  $r$  correspond à

$$B^2(a, r) = \{w \in \mathbb{BC} \mid \|w - a\| < r\}.$$

La boule fermée centrée en  $a$  de rayon  $r$  correspond à

$$\overline{B^2(a, r)} = \{w \in \mathbb{BC} \mid \|w - a\| \leq r\}.$$

**Remarque 4.1.**

Dans les sections suivantes, il faut utiliser à la fois les boules de  $\mathbb{BC}$  et de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Pour éviter toute confusion, celles dans  $\mathbb{BC}$  sont notées avec l'exposant 2 tel qu'indiqué dans la précédente définition. Celles dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  sont notées avec l'exposant 1 :  $B^1(a, r)$  pour la boule ouverte et  $\overline{B^1(a, r)}$  pour la boule fermée avec  $a \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $r > 0$ .

Avec cette notation, un ensemble  $V \subseteq \mathbb{BC}$  est **ouvert** si pour tout  $a \in V$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B^2(a, r) \subseteq V$ . Par ailleurs, la **frontière** d'un ensemble  $E \subseteq \mathbb{BC}$ , soit  $\partial E$ , correspond à l'ensemble des éléments  $w \in \mathbb{BC}$  tels que pour tout  $r > 0$ ,  $B^2(w, r) \cap E \neq \emptyset$  et  $B^2(w, r) \cap E^c \neq \emptyset$ . De façon équivalente, il s'agit des éléments  $w \in \mathbb{BC}$  pour lesquels il existe une suite  $\{p_n\} \subseteq E$  et une suite  $\{q_n\} \subseteq E^c$  qui convergent toutes deux vers  $w$ . La définition suivante décrit un ensemble dont l'importance est constatée avec les résultats qui suivent.

**Définition 4.8.** Soit  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  non vides. L'ensemble cartésien bicomplexe  $X \subseteq \mathbb{BC}$  déterminé par  $X_1$  et  $X_2$  est défini comme

$$X = X_1 \times_e X_2 = \{w \in \mathbb{BC} \mid w = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \text{ où } (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\}.$$

La notation  $\times_e$  se distingue du produit cartésien usuel noté par  $\times$ . Un exemple classique d'ensemble cartésien bicomplexe est celui formé par deux disques de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Il est formellement défini comme suit.

**Définition 4.9.** Soit  $a = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \in \mathbb{BC}$  et  $r_1, r_2 > 0$  fixés.

Le *disque bicomplexe ouvert de centre  $a$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2$*  est noté  $D(a; r_1, r_2)$  et correspond à

$$D(a; r_1, r_2) = B^1(a_1, r_1) \times_e B^1(a_2, r_2).$$

Le *disque bicomplexe fermé de centre  $a$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2$*  est noté  $\overline{D(a; r_1, r_2)}$  et correspond à

$$\overline{D(a; r_1, r_2)} = \overline{B^1(a_1, r_1)} \times_e \overline{B^1(a_2, r_2)}.$$

Le théorème suivant lie les boules et les disques bicomplexes tel qu'énoncé à la référence [36].

**Théorème 4.6.** Soit  $a \in \mathbb{BC}$  et  $0 < r_1 \leq r_2$ .

- (i)  $B^2\left(a, \frac{r_1}{\sqrt{2}}\right) \subsetneq D(a; r_1, r_2) \subsetneq B^2\left(a, \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}\right)$ ;
- (ii)  $\overline{B^2\left(a, \frac{r_1}{\sqrt{2}}\right)} \subsetneq \overline{D(a; r_1, r_2)} \subsetneq \overline{B^2\left(a, \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}}\right)}$ .

Notons que les ensembles ne peuvent pas être égaux. De plus,  $D(a; r_1, r_1) \subsetneq B^2(a, r_1)$  et il en est de même pour les ensembles fermés.

### 4.2.2 Les ensembles de Julia bicomplexes

Les ensembles de Julia bicomplexes sont définis de façon similaire aux ensembles de Julia complexes. Avant de les introduire, il faut de nouveau s'attarder aux ensembles de Julia remplis, cette fois du point de vue de la dynamique bicomplexe. Comme dans le cas complexe, c'est le polynôme de la forme  $P_c(w) = w^2 + c$  qui est considéré avec  $w, c \in \mathbb{BC}$ . L'inverse du polynôme est donné par l'image inverse et associé à  $P_c^{-1}(w) = \sqrt{w - c}$  qui admet plusieurs valeurs bicomplexes. Les itérées avant et arrière de  $P_c$  sont définies de la même façon que précédemment. Observons que si  $w, c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , alors le polynôme  $P_c$  devient un polynôme complexe en  $\mathbf{i}_1$ . Le lemme suivant indique

une façon d'exprimer les itérées avant de  $P_c$  en termes du même polynôme dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , évalué selon les composantes idempotentes de  $c$  et  $w$ .

**Lemme 4.1.** *Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ , les itérées avant de  $P_c$  peuvent s'exprimer comme suit :*

$$P_c^n(w) = P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2.$$

PREUVE.

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  et  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  quelconques. La propriété se démontre par induction. Du théorème 4.3 et par définition des itérées du polynôme, on a  $P_c^0(w) = w$  et

$$P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^0(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^0(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 = (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2 = w.$$

Supposons maintenant que la propriété est vérifiée pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire

$$P_c^k(w) = P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2.$$

Par définition des itérées avant du polynôme, de l'hypothèse d'induction et du théorème 4.4, on trouve

$$\begin{aligned} P_c^{k+1}(w) &= P_c(P_c^k(w)) \\ &= (P_c^k(w))^2 + c \\ &= [P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2]^2 \\ &\quad + [(c_1 - c_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2] \\ &= \left[ (P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 - z_2\mathbf{i}_1))^2 + (c_1 - c_2\mathbf{i}_1) \right] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left[ (P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 + z_2\mathbf{i}_1))^2 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1) \right] \mathbf{e}_2 \\ &= [P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}(P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 - z_2\mathbf{i}_1))] \mathbf{e}_1 + [P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}(P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^k(z_1 + z_2\mathbf{i}_1))] \mathbf{e}_2 \\ &= P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}^{k+1}(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}^{k+1}(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie pour  $k + 1$ . Par le principe d'induction, la propriété est valide pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . ■

Les ensembles de Julia remplis, les ensembles de Julia, les ensembles de Fatou et l'ensemble de Mandelbrot bicomplexes peuvent maintenant être définis.

**Définition 4.10.** *L'ensemble de Julia rempli bicomplexe associé à  $c$  est noté  $\mathcal{K}_{2,c}$  et correspond à l'ensemble*

$$\mathcal{K}_{2,c} = \{w_0 \in \mathbb{BC} \mid \{P_c^n(w_0)\} \text{ est bornée}\}.$$

La notation avec l'indice 2 permet de distinguer l'ensemble bicomplexe de l'ensemble complexe. Le concept d'ensemble borné revient à celui du cas complexe : il existe un nombre  $M > 0$  tel que  $\|P_c^n(w_0)\| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 4.11.** *L'ensemble de Julia bicomplexe associé à  $c$  est noté  $\mathcal{J}_{2,c}$  et correspond à la frontière de l'ensemble de Julia rempli :  $\mathcal{J}_{2,c} = \partial\mathcal{K}_{2,c}$ .*

**Définition 4.12.** *L'ensemble de Fatou associé à  $c$  est noté  $\mathcal{F}_{2,c}$  et correspond au complément de l'ensemble de Julia :  $\mathcal{F}_{2,c} = \mathbb{BC} \setminus \mathcal{J}_{2,c}$ .*

**Définition 4.13.** *L'ensemble de Mandelbrot bicomplexe est noté  $\mathcal{M}_2$  et correspond à l'ensemble  $\mathcal{M}_2 = \{c \in \mathbb{BC} \mid \{P_c^n(0)\} \text{ est bornée}\}$ .*

Le théorème 4.7 permet de caractériser l'ensemble  $\mathcal{K}_{2,c}$  comme un ensemble cartésien bicomplexe défini par deux ensembles de Julia remplis de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Ce résultat permet de décrire  $\mathcal{J}_{2,c}$  d'une façon bien particulière.

**Théorème 4.7.** *L'ensemble de Julia rempli bicomplexe associé à  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  s'exprime comme l'ensemble cartésien bicomplexe suivant :*

$$\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}.$$

PREUVE.

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Du théorème 4.3, on sait que  $c = (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$ . Puisque  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_1$  et  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_1$  sont deux éléments de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ ,

le produit cartésien est bien défini. Il faut montrer que  $\mathcal{K}_{2,c} \subseteq \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1} \subseteq \mathcal{K}_{2,c}$ .

$$(a) \mathcal{K}_{2,c} \subseteq \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$$

Soit  $w_0 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathcal{K}_{2,c}$  quelconque. Par définition de l'ensemble de Julia rempli, la suite  $\{P_c^n(w_0)\}$  est bornée. Ainsi,  $\exists M > 0$  tel que  $\|P_c^n(w_0)\| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Du lemme 4.1 et du théorème 4.5, on déduit que

$$\begin{aligned} & \|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2\| \leq M \\ \Rightarrow & \sqrt{\frac{|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)|^2 + |P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)|^2}{2}} \leq M \\ \Rightarrow & \sqrt{|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)|^2 + |P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)|^2} \leq \sqrt{2}M. \end{aligned}$$

En conséquence,  $|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)| \leq \sqrt{2}M$  et  $|P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)| \leq \sqrt{2}M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puisque  $\sqrt{a} \leq \sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$  pour  $a, b \geq 0$ . Les suites  $\{P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\}$  et  $\{P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\}$  de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  sont donc bornées. Ainsi,  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$ . Puisque  $w_0 = (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2$ , alors  $w_0 \in \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{2,c} \subseteq \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$ .

$$(b) \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1} \subseteq \mathcal{K}_{2,c}$$

Soit  $w_0 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$  quelconque. Puisque  $w_0 \in \mathbb{BC}$ , on a  $w_0 = (z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_1 + (z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\mathbf{e}_2$ . Par hypothèse,  $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$  et les suites  $\{P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)\}$  et  $\{P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)\}$  de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  sont bornées. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \exists M_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad |P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)| \leq M_1 \\ & \text{et } \exists M_2 > 0 \quad \text{tel que} \quad |P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)| \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|P_c^n(w_0)\| &= \|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2\| \\
&= \sqrt{\frac{|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)|^2 + |P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)|^2}{2}} \\
&\leq \sqrt{|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)|^2 + |P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)|^2} \\
&\leq \sqrt{|P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)|^2} + \sqrt{|P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)|^2} \\
&= |P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 - z_2\mathbf{i}_1)| + |P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^n(z_1 + z_2\mathbf{i}_1)| \\
&\leq M_1 + M_2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Soit  $M = M_1 + M_2$ . Alors,  $\exists M > 0$  tel que  $\|P_c^n(w_0)\| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et la suite  $\{P_c^n(w_0)\}$  est bornée. En conséquence,  $w_0 \in \mathcal{K}_{2,c}$  et  $\mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1} \subseteq \mathcal{K}_{2,c}$ .

De (a) et (b), on conclut  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$ . ■

Similairement, il est possible de montrer que l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe correspond à un produit cartésien particulier :  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \times_e \mathcal{M}_1$  où  $\mathcal{M}_1 = \{c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \mid \{P_c^n(0)\} \text{ est bornée}\}$  (référence [37]).

Comme dans le cas complexe, il existe plusieurs liens entre les ensembles de Julia remplis et l'ensemble de Mandelbrot de l'espace bicomplexe. Ceux-ci font notamment référence à la connexité de ces ensembles. Les articles [37] et [38] contiennent des résultats intéressants en ce sens.

### 4.3 Caractérisation des ensembles de Julia

Au chapitre précédent, il a été démontré que l'ensemble des itérées inverses du polynôme complexe  $P_c$  est dense dans  $\mathcal{J}_c$ . Pour adapter la méthode d'itération inverse au cas bicomplexe, un énoncé analogue doit exister. Pour le vérifier, il faut s'attarder davantage à la structure de  $\mathcal{J}_{2,c}$  comme la frontière d'un ensemble cartésien bicomplexe. Les résultats suivants permettent de mieux comprendre celle-ci.

**Lemme 4.2.** Soit  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  non vides et  $X \subseteq \mathbb{BC}$  tel que  $X = X_1 \times_e X_2$ .

Si  $z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \partial X$ , alors  $z_1 - z_2 \mathbf{i}_1 \in \partial X_1$  ou  $z_1 + z_2 \mathbf{i}_1 \in \partial X_2$ .

PREUVE.

Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \partial X$  quelconque. Puisque  $w \in \mathbb{BC}$ , alors du théorème 4.3 on peut écrire  $w = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2$  avec  $w_1 = z_1 - z_2 \mathbf{i}_1$  et  $w_2 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_1$ . Par définition de la frontière de  $X$ , on sait que

$$\forall r > 0, \underbrace{B^2(w, r) \cap X \neq \emptyset}_{(1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{B^2(w, r) \cap X^c \neq \emptyset}_{(2)}.$$

Il faut montrer que

$$\begin{aligned} \forall r > 0, B^1(w_1, r) \cap X_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B^1(w_1, r) \cap X_1^c \neq \emptyset \\ \text{ou} \quad \forall r > 0, B^1(w_2, r) \cap X_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B^1(w_2, r) \cap X_2^c \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Soit  $r > 0$  fixé quelconque. De (1), il existe  $s \in B^2(w, \frac{r}{\sqrt{2}}) \cap X$ . Par définition de l'ensemble cartésien bicomplexe, on peut écrire  $s = s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2$  avec  $s_1 \in X_1$  et  $s_2 \in X_2$ . Puisque  $s \in B^2(w, \frac{r}{\sqrt{2}})$ , on a  $\|s - w\| < \frac{r}{\sqrt{2}}$  d'où

$$\begin{aligned} \|(s_1 \mathbf{e}_1 + s_2 \mathbf{e}_2) - (w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2)\| &< \frac{r}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \|(s_1 - w_1) \mathbf{e}_1 + (s_2 - w_2) \mathbf{e}_2\| &< \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{du théorème 4.4} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{|s_1 - w_1|^2 + |s_2 - w_2|^2}{2}} &< \frac{r}{\sqrt{2}} \quad \text{du théorème 4.5} \\ \Rightarrow \sqrt{|s_1 - w_1|^2 + |s_2 - w_2|^2} &< r. \end{aligned}$$

Ainsi,  $|s_1 - w_1| < r$  et  $|s_2 - w_2| < r$  d'où  $s_1 \in B^1(w_1, r) \cap X_1$  et  $s_2 \in B^1(w_2, r) \cap X_2$ .

Examinons maintenant ce qui découle de l'expression (2). Pour la même valeur  $r > 0$ , il existe  $t \in B^2(w, \frac{r}{\sqrt{2}}) \cap X^c$  tel que  $t = t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2$ . Puisque  $t \in B^2(w, \frac{r}{\sqrt{2}})$ , alors comme précédemment on déduit  $t_1 \in B^1(w_1, r)$  et  $t_2 \in B^1(w_2, r)$ . Comme  $t \notin X$  et que  $X$  est un ensemble cartésien bicomplexe, il y a trois possibilités pour  $t_1$  et  $t_2$  :

(1)  $t_1 \notin X_1$  et  $t_2 \in X_2$  d'où  $t_1 \in B^1(w_1, r) \cap X_1^c$ ;

(2)  $t_1 \in X_1$  et  $t_2 \notin X_2$  d'où  $t_2 \in B^1(w_2, r) \cap X_2^c$ ;

(3)  $t_1 \notin X_1$  et  $t_2 \notin X_2$  d'où  $B^1(w_1, r) \cap X_1^c$  et  $B^1(w_2, r) \cap X_2^c$ .

On a donc

$(B^1(w_1, r) \cap X_1 \neq \emptyset \text{ et } B^1(w_1, r) \cap X_1^c \neq \emptyset)$  ou  $(B^1(w_2, r) \cap X_2 \neq \emptyset \text{ et } B^1(w_2, r) \cap X_2^c \neq \emptyset)$

pour un certain  $r > 0$  quelconque. En conséquence, on déduit que  $\forall r > 0$

$$B^1(w_1, r) \cap X_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B^1(w_1, r) \cap X_1^c \neq \emptyset \quad (4.1)$$

$$\text{ou} \quad B^1(w_2, r) \cap X_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B^1(w_2, r) \cap X_2^c \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Considérons l'ensemble des valeurs de  $r$  suivant :  $\{r_n = \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ . Pour chaque valeur de  $n$ , le cas (4.1) ou (4.2) est vérifié. Puisque l'ensemble  $\{r_n\}$  est infini et dénombrable, l'un de ces cas doit se produire un nombre infini de fois. Supposons sans perte de généralité qu'il s'agit du cas (4.1). Alors, il doit exister une sous-suite infinie  $\{r_{n_k} \mid k = 1, 2, \dots\}$  telle que  $B^1(w_1, r_{n_k}) \cap X_1 \neq \emptyset$  et  $B^1(w_1, r_{n_k}) \cap X_1^c \neq \emptyset$ . Soit  $r' > 0$  quelconque. Par la propriété archimédienne, il existe  $n' \in \{1, 2, \dots\}$  tel que  $\frac{1}{n'} < r'$ . Or, il doit aussi exister une valeur  $k \in \{1, 2, \dots\}$  telle que  $r_{n_k} = \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n'} < r'$ . Ainsi,  $B^1(w_1, r') \cap X_1 \neq \emptyset$  et  $B^1(w_1, r') \cap X_1^c \neq \emptyset$  pour un certain  $r' > 0$  quelconque. On conclut alors que pour tout  $r > 0$ ,  $B^1(w_1, r) \cap X_1 \neq \emptyset$  et  $B^1(w_1, r) \cap X_1^c \neq \emptyset$  d'où  $w_1 \in \partial X_1$ . Similairement, on déduit  $w_2 \in \partial X_2$  en supposant que le cas (4.2) se reproduit un nombre infini de fois. En conséquence,  $w_1 \in \partial X_1$  ou  $w_2 \in \partial X_2$  lorsque  $w = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in \partial X$ . ■

**Lemme 4.3.** Soit  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  non vides et  $X \subseteq \mathbb{BC}$  tel que  $X = X_1 \times_e X_2$ .

(i) Si  $w_1^0 \in \partial X_1$ , alors  $w \in \partial X$  pour tout  $w \in \{w_1^0\} \times_e X_2$ .

(ii) Si  $w_2^0 \in \partial X_2$ , alors  $w \in \partial X$  pour tout  $w \in X_1 \times_e \{w_2^0\}$ .

PREUVE.

(i) Si  $w_1^0 \in \partial X_1$ , alors  $w \in \partial X$  pour tout  $w \in \{w_1^0\} \times_e X_2$ .

Soit  $w_1^0 \in \partial X_1$  et  $w = w_1^0 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2$  pour un certain  $w_2 \in X_2$ . Il faut montrer

que  $w \in \partial X$ , c'est-à-dire que  $\forall r > 0$ ,  $B^2(w, r) \cap X \neq \emptyset$  et  $B^2(w, r) \cap X^c \neq \emptyset$ .  
 Puisque  $w_1^0 \in \partial X_1$ , alors

$$\forall r > 0, \quad \underbrace{B^1(w_1^0, r) \cap X_1 \neq \emptyset}_{(3)} \quad \text{et} \quad \underbrace{B^1(w_1^0, r) \cap X_1^c \neq \emptyset}_{(4)}.$$

Soit  $r > 0$  fixé quelconque. De (3), il existe  $s_1 \in B^1(w_1^0, \frac{r}{2}) \cap X_1$  d'où  $|s_1 - w_1^0| < \frac{r}{2}$  et  $s_1 \in X_1$ . Soit  $s'_2 \in X_2$  tel que  $|s'_2 - w_2| < \frac{r}{2}$ . Alors  $s = s_1 \mathbf{e}_1 + s'_2 \mathbf{e}_2 \in X$  et

$$\begin{aligned} \|s - w\| &= \|(s_1 \mathbf{e}_1 + s'_2 \mathbf{e}_2) - (w_1^0 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2)\| \\ &= \|(s_1 - w_1^0) \mathbf{e}_1 + (s'_2 - w_2) \mathbf{e}_2\| \\ &= \sqrt{\frac{|s_1 - w_1^0|^2 + |s'_2 - w_2|^2}{2}} \\ &\leq \sqrt{|s_1 - w_1^0|^2 + |s'_2 - w_2|^2} \\ &\leq \sqrt{|s_1 - w_1^0|^2} + \sqrt{|s'_2 - w_2|^2} \\ &= |s_1 - w_1^0| + |s'_2 - w_2| < r. \end{aligned}$$

D'où  $s \in B^2(w, r)$  et  $B^2(w, r) \cap X \neq \emptyset$ . Pour la même valeur  $r > 0$ , de (4) on sait qu'il existe  $t_1 \in B^1(w_1^0, \frac{r}{2}) \cap X_1^c$  d'où  $|t_1 - w_1^0| < \frac{r}{2}$  et  $t_1 \notin X_1$ . Alors  $t = t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 \notin X$  pour tout  $t_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Soit  $t = t_1 \mathbf{e}_1 + t'_2 \mathbf{e}_2$  avec  $t'_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  tel que  $|t'_2 - w_2| < \frac{r}{2}$ . On trouve  $\|t - w\| \leq |t_1 - w_1^0| + |t'_2 - w_2| < r$  du même raisonnement que précédemment. Ainsi,  $t \in B^2(w, r)$  et  $t \notin X$  d'où  $B^2(w, r) \cap X^c \neq \emptyset$ . En conséquence, on déduit que  $\forall r > 0$ ,  $B^2(w, r) \cap X \neq \emptyset$  et  $B^2(w, r) \cap X^c \neq \emptyset$  et ainsi  $w \in \partial X$ .

(ii) Si  $w_2^0 \in \partial X_2$ , alors  $w \in \partial X$  pour tout  $w \in X_1 \times_e \{w_2^0\}$ .

Le même raisonnement qu'en (i) est utilisé. ■

**Théorème 4.8.** Soit  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  non vides et  $X \subseteq \mathbb{B}\mathbb{C}$  tel que  $X = X_1 \times_e X_2$ . La frontière de  $X$  est déterminée par l'union de trois ensembles cartésiens bicomplexes :

$$\partial X = (\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2).$$

PREUVE.

Il faut montrer que

$$\begin{aligned}\partial X &\subseteq (\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2) \\ \text{et } \partial X &\supseteq (\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2).\end{aligned}$$

$$(a) \partial X \subseteq (\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2).$$

Le résultat du lemme 4.2 peut être écrit sous cette forme impliquant des ensembles cartésiens bicomplexes :

$$\partial X \subseteq (\partial X_1 \times_e \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)) \cup (\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2).$$

Il suffit de restreindre l'ensemble  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  des deux premiers ensembles cartésiens bicomplexes aux ensembles  $X_2$  et  $X_1$  respectivement. Soit  $w = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \in \partial X$ . Il y a trois possibilités pour  $w_1$  et  $w_2$  :

- (1)  $w_1 \in \partial X_1$  et  $w_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  ;
- (2)  $w_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $w_2 \in \partial X_2$  ;
- (3)  $w_1 \in \partial X_1$  et  $w_2 \in \partial X_2$ .

Examinons les deux premiers cas.

- (1) Supposons  $w_1 \in \partial X_1$  et  $w_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Il faut avoir  $w_2 \in \partial X_2$  ou  $w_2 \notin \partial X_2$ . Si  $w_2 \in \partial X_2$ , alors  $w \in \partial X_1 \times_e \partial X_2$  ce qui revient au cas (3). Si  $w_2 \notin \partial X_2$ , supposons que  $w_2 \notin X_2$ . Alors,  $w_2 \in X_2^c$  et  $w_2 \in B^1(w_2, r)$  pour tout  $r > 0$ . Ainsi,  $\forall r > 0, B^1(w_2, r) \cap X_2^c \neq \emptyset$ . Comme  $w \in \partial X$ , alors  $B^1(w_2, r) \cap X_2 \neq \emptyset$  tel que déduit dans la première partie de la preuve du lemme 4.2. D'où  $w_2 \in \partial X_2$  ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ainsi,  $w_2 \in X_2$  et  $w \in \partial X_1 \times_e X_2$ .
- (2) Supposons  $w_2 \in \partial X_2$  et  $w_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Il faut avoir  $w_1 \in \partial X_1$  ou  $w_1 \notin \partial X_1$ . Si  $w_1 \in \partial X_1$ , alors  $w \in \partial X_1 \times_e \partial X_2$  ce qui revient au cas (3). Si  $w_1 \notin \partial X_1$ , alors de façon similaire au cas (1), on déduit  $w_1 \in X_1$  et  $w \in X_1 \times_e \partial X_2$ .

Les cas présentés se réduisent donc aux possibilités suivantes :  $w \in \partial X_1 \times_e X_2$  ou  $w \in X_1 \times_e \partial X_2$  ou  $w \in \partial X_1 \times_e \partial X_2$ . Ainsi,  $\partial X \subseteq (\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2)$ .

$$(b) (\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2) \subseteq \partial X.$$

Du lemme 4.3, on sait que

$$(\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \subseteq \partial X.$$

Il reste à montrer que si  $w \in \partial X_1 \times_e \partial X_2$ , alors  $w \in \partial X$ . Soit  $w = w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2$  avec  $w_1 \in \partial X_1$  et  $w_2 \in \partial X_2$ . Utilisons la définition d'une frontière à partir des suites. Puisque  $w_1 \in \partial X_1$ , alors il existe une suite  $\{p_n^1\} \subseteq X_1$  qui converge vers  $w_1$  et une suite  $\{q_n^1\} \subseteq X_1^c$  qui converge aussi vers  $w_1$ . Comme  $w_2 \in \partial X_2$ , il existe une suite  $\{p_n^2\} \subseteq X_2$  qui converge vers  $w_2$  et une suite  $\{q_n^2\} \subseteq X_2^c$  qui converge aussi vers  $w_2$ . Ainsi, il est possible de construire une suite  $\{p_n = p_n^1 \mathbf{e}_1 + p_n^2 \mathbf{e}_2\} \subseteq X$  qui converge vers  $w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 = w$ . De même, il existe une suite  $\{q_n = q_n^1 \mathbf{e}_1 + q_n^2 \mathbf{e}_2\} \subseteq X^c$  qui converge vers  $w$ . En conséquence,  $w \in \partial X$  et  $(\partial X_1 \times_e X_2) \cup (X_1 \times_e \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times_e \partial X_2) \subseteq \partial X$ .

Par (a) et (b), on conclut que la frontière de  $X$  correspond à l'union de trois ensembles cartésiens bicomplexes tel qu'énoncé. ■

Ce théorème entraîne une conséquence très importante concernant la structure des ensembles de Julia bicomplexes puisque  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{J}_{2,c} = \partial \mathcal{K}_{2,c}$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ .

**Corollaire 4.1.** Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  et  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . L'ensemble de Julia bicomplexe associé à  $c$  s'exprime comme suit :

$$\mathcal{J}_{2,c} = \underbrace{(\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})}_{(I)} \cup \underbrace{(\mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})}_{(II)} \cup \underbrace{(\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1})}_{(III)}.$$

Un ensemble de Julia bicomplexe est donc déterminé par les ensembles de Julia

remplis et les ensembles de Julia complexes associés aux composantes idempotentes de  $c$ .

**Remarque 4.2.**

Du théorème 3.1, on sait que  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \subseteq \mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1} \subseteq \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . La décomposition de  $\mathcal{J}_{2,c}$  pourrait donc se réduire aux parties (I) et (II). Or, il apparaît pertinent de conserver l'ensemble  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  en raison des résultats de la section suivante.

Le corollaire 4.1 contribue à l'élaboration d'une méthode pour visualiser les ensembles de Julia bicomplexes dans l'espace tridimensionnel en utilisant les procédures existantes dans le cas complexe. Les lignes suivantes relatent les principales étapes de cette procédure.

D'abord, il faut générer les points de  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  par la méthode d'itération inverse et les garder en mémoire. Il faut aussi conserver la position des points de  $\mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  générés par la méthode des itérées bornées. Pour obtenir le morceau (I) de  $\mathcal{J}_{2,c}$ , il suffit de combiner chaque élément de  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  à chacun de ceux de  $\mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  sous la représentation idempotente :  $\{w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 \mid w_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \text{ et } w_2 \in \mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}\}$ . Les morceaux (II) et (III) s'obtiennent de la même façon en utilisant les ensembles appropriés. Le résultat final est un ensemble de points qui approxime  $\mathcal{J}_{2,c}$  et dont les éléments sont réécrits sous la représentation à quatre composantes réelles pour faciliter l'affichage tridimensionnel.

Cet affichage est effectué au moyen d'une coupe fournie par une valeur  $\epsilon > 0$  suffisamment proche de 0. Parmi les points générés, ceux dont la valeur absolue de la partie imaginaire en  $\mathbf{j}$  est inférieure ou égale à  $\epsilon$  sont conservés. Les valeurs associées aux trois autres composantes constituent les coordonnées des points dans l'espace déterminé par la partie réelle, la partie imaginaire en  $\mathbf{i}_1$  et la partie imaginaire en  $\mathbf{i}_2$ . Les points générés qui n'admettent pas cette propriété ne sont donc pas affichés.

Les images suivantes ont été obtenues à partir de ce raisonnement avec  $\epsilon = 0,01$ .

La couleur rouge identifie les morceaux (I) et (II). La couleur bleue est aussi associée aux morceaux (I) et (II) où les points sont pris dans une couche de divergence des ensembles de Julia remplis et non dans les ensembles eux-mêmes. La couleur noire est liée à la partie (III) de la caractérisation de  $\mathcal{J}_{2,c}$ . Pour réduire le temps de calculs, le nombre de points générés dans chaque ensemble complexe a dû être réduit. Pour les ensembles  $\mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$ , le pas de discrétisation est de 75 pour les figures 4.1 et 4.3 et de 100 pour la figure 4.2. Pour les ensembles  $\mathcal{J}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{J}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$  des morceaux (I) et (II), le nombre d'itérations a été fixé à 75 pour les figures 4.1 et 4.3 et à 100 pour la figure 4.2. Pour le morceau (III), le nombre d'itérations a été fixé à 300 pour les deux premières figures et à 400 pour la dernière afin de mieux cerner la structure des ensembles générés. Les ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel sont présentés sous différents angles de vue afin de bien saisir leur forme globale et leur complexité. Notons que la forme des ensembles de Julia complexes de la figure 3.2 se retrouvent facilement dans les ensembles de Julia bicomplexes. De plus, pour  $c = 0,0635 + 0,3725\mathbf{i}_1 + 0,3725\mathbf{i}_2 + 0,1865\mathbf{j}$ , on a  $c_1 - c_2\mathbf{i}_1 = 0,25$  et  $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 = -0,123 + 0,745\mathbf{i}_1$ . L'ensemble de la figure 4.3 constitue donc une combinaison des ensembles des deux figures précédentes.

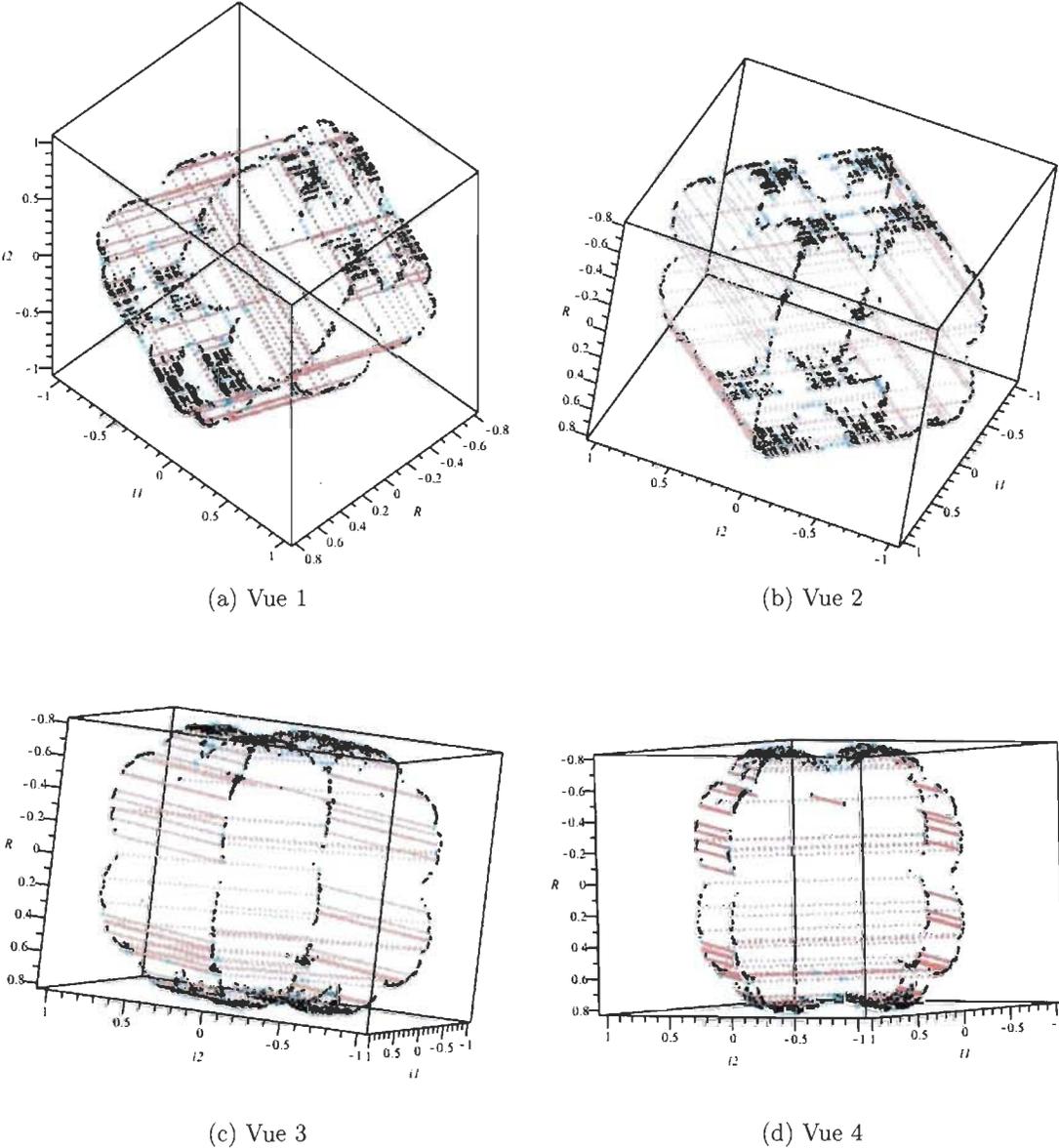
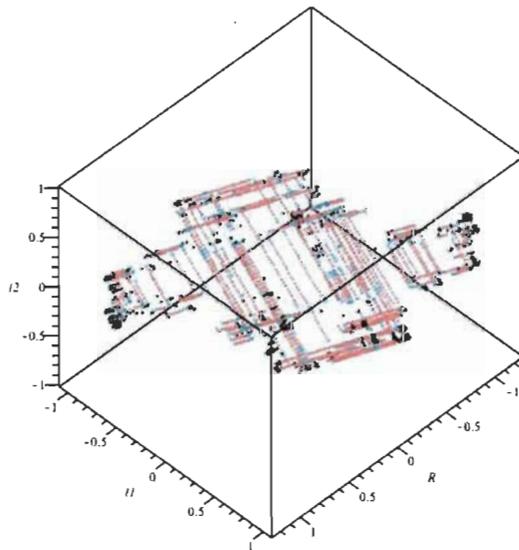
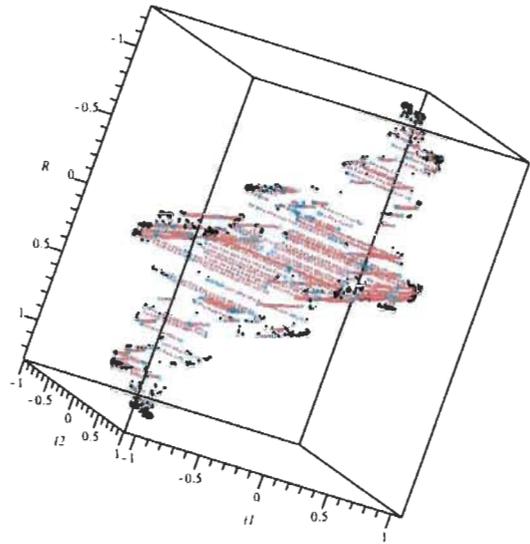


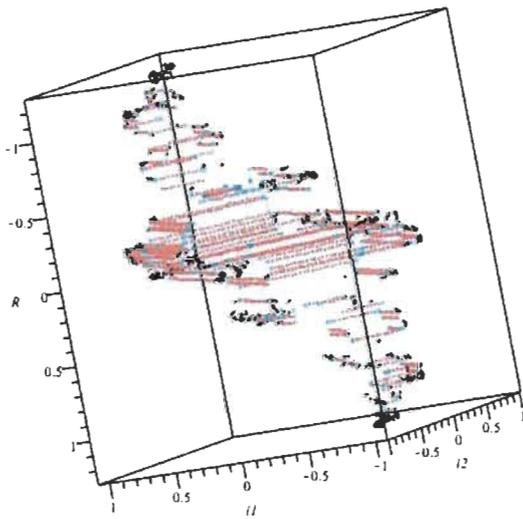
FIGURE 4.1 – Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel  $c = 0,25$



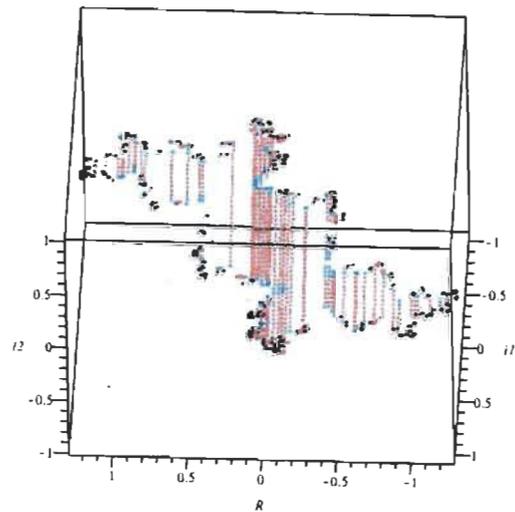
(a) Vue 1



(b) Vue 2

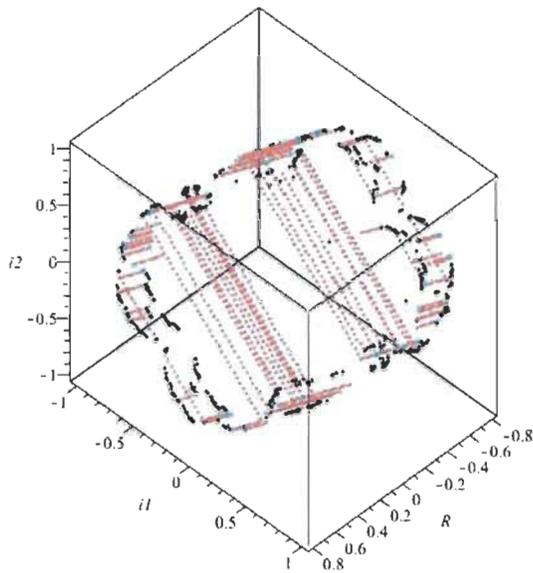


(c) Vue 3

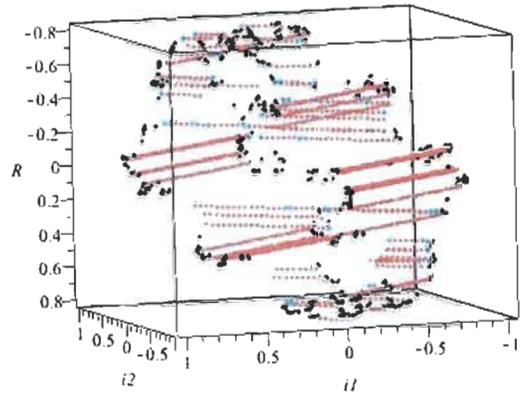


(d) Vue 4

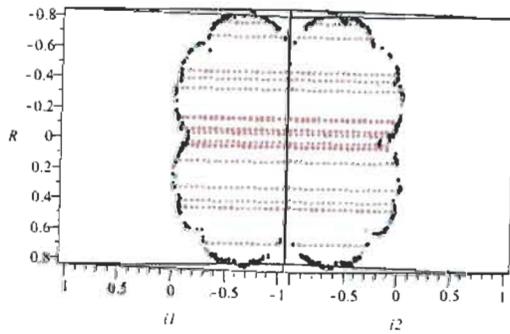
FIGURE 4.2 – Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel  $c = -0,123 + 0,745i_1$



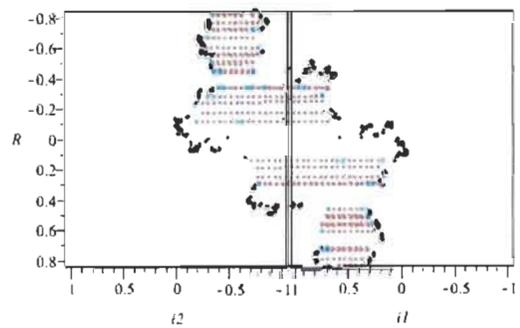
(a) Vue 1



(b) Vue 2



(c) Vue 3



(d) Vue 4

FIGURE 4.3 – Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel  
 $c = 0,0635 + 0,3725i_1 + 0,3725i_2 + 0,1865j$

## 4.4 La méthode d'itération inverse adaptée

Le corollaire 4.1 s'avère intéressant puisqu'il conduit à une méthode assez simple pour observer les ensembles de Julia bicomplexes dans l'espace tridimensionnel. Cependant, il ne s'agit pas d'une adaptation complète de la méthode d'itération inverse. D'ailleurs, la structure de  $\mathcal{J}_{2,c}$  amène à conclure qu'il est impossible de déduire exactement le théorème de la méthode d'itération inverse dans le cas bicomplexe. La présence des ensembles  $\mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}$  explique ce problème. Par contre, il semble pertinent d'adapter le résultat à l'ensemble cartésien bicomplexe  $\mathcal{J}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1+c_2\mathbf{i}_2}$ . Avant d'y parvenir, il convient de s'intéresser à l'inverse du polynôme  $P_c$  et en particulier, aux itérées arrières de  $P_c$ .

Tel que mentionné auparavant, l'inverse du polynôme est donnée par  $P_c^{-1}(w) = \sqrt{w-c}$  et les itérées arrières sont définies comme  $P_c^{-n}(w) = (P_c^n(w))^{o(-1)}$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . Comme dans  $\mathbb{C}$ , ces itérées arrières correspondent à un ensemble de valeurs bicomplexes, données par l'image inverse du polynôme, et non à une valeur précise. Néanmoins, il est possible de déduire un résultat semblable au lemme 4.1.

**Lemme 4.4.** *Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  et  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Pour tout  $n \in \{1, 2, \dots\}$  et pour tout  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ , les itérées arrières de  $P_c$  peuvent s'exprimer comme suit :*

$$P_c^{-n}(w) = P_{c_1-c_2\mathbf{i}_1}^{-n}(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}^{-n}(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2.$$

PREUVE.

Soit  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  et  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  quelconques. La propriété se démontre de nouveau par induction. Par définition de la racine carrée bicomplexe et du théorème 4.4, on a

$$\begin{aligned} P_c^{-1}(w) &= \sqrt{w-c} \\ &= \sqrt{(z_1 - z_2\mathbf{i}_1) - (c_1 - c_2\mathbf{i}_1)} \mathbf{e}_1 + \sqrt{(z_1 + z_2\mathbf{i}_1) - (c_1 + c_2\mathbf{i}_2)} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

De l'inverse du polynôme  $P_c$  dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ , on a

$$\begin{aligned} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) &= \sqrt{(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) - (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1)} \\ \text{et } P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) &= \sqrt{(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) - (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1)}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $P_c^{-1}(w) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-1}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$  et la propriété est vérifiée pour  $n = 1$ . Supposons que la propriété est vraie pour un certain  $k \in \{1, 2, \dots\}$ , c'est-à-dire

$$P_c^{-k}(w) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2.$$

Il faut montrer que l'expression est valide pour  $k+1$ . Par définition des itérées arrières, on déduit  $P_c^{-(k+1)}(w) = P_c^{-k-1}(w) = P_c^{-1}(P_c^{-k}(w))$ . De l'hypothèse d'induction et de la première partie de la preuve, on trouve

$$\begin{aligned} P_c^{-(k+1)}(w) &= P_c^{-1} \left( P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 \right) \\ &= P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-1} \left( P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \right) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-1} \left( P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \right) \mathbf{e}_2 \\ &= P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-(k+1)}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-(k+1)}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée pour  $k+1$  et par le principe d'induction, les itérées arrières s'expriment telles que mentionnées selon les composantes idempotentes pour  $n = 1, 2, \dots$  ■

### Remarque 4.3.

Pour  $n \in \{1, 2, \dots\}$ , on a  $P_c^{-n}(w) \subseteq \mathbb{B}\mathbb{C}$ ,  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-n}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-n}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2$  et  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ . Il est alors possible d'exprimer les itérées arrières de  $P_c$  sous la forme d'un ensemble cartésien bicomplexe :

$$P_c^{-n}(w) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-n}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \times_e P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-n}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1).$$

Considérons maintenant l'ensemble cartésien bicomplexe formé à partir de deux itérées arrières quelconques du polynôme  $P_c$  dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ .

**Définition 4.14.** Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$ . Soit  $n_1, n_2 \in \{1, 2, \dots\}$  fixés. Pour tout  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$ , l'ensemble cartésien bicomplexe déterminé par deux itérées arrières du polynôme  $P_c$  dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  est noté  $P_c^{-(n_1, n_2)}(w)$  et donné par

$$P_c^{-(n_1, n_2)}(w) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-n_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \times_e P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-n_2}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1).$$

On constate que

$$\bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w) = \left\{ \bigcup_{k_1=1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k_1}(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \right\} \times_e \left\{ \bigcup_{k_2=1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k_2}(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \right\}$$

ce qui correspond à l'ensemble formé par toutes les combinaisons des itérées arrières du polynôme  $P_c$  dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  déterminé par les composantes idempotentes. De plus,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w) \subseteq \bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w)$$

puisque le premier ensemble est formé uniquement des combinaisons des itérées arrières du polynôme dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  prises à la même itération. Il est maintenant possible de déduire un premier résultat apparenté à celui de la méthode d'itération inverse.

**Théorème 4.9.** Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$ . Pour tout  $w_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , l'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ .

PREUVE.

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$ . Soit  $w_1 = s_1 + s_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  quelconque. Il faut montrer que pour tout  $w \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , tout ensemble ouvert contenant  $w$  contient aussi un élément de  $\left\{ \bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w_1) \right\}$ .

Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  quelconque et  $V \subseteq \mathbb{B}\mathbb{C}$  un ensemble ouvert contenant  $w$ . Il faut trouver un élément  $v \in V$  tel que  $v \in \left\{ \bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w_1) \right\}$ . Par hypothèse,  $w_1 = (s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$  avec  $s_1 - s_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $s_1 + s_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . Du théorème 3.8, on sait que

(1) L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$ , c'est-à-dire que pour tout  $z \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$ , tout ensemble ouvert contenant  $z$  contient aussi un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$ .

(2) L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , c'est-à-dire que pour tout  $z \in \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , tout ensemble ouvert contenant  $z$  contient aussi un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$ .

Puisque  $V$  est ouvert et  $w \in V$ , alors il existe  $R > 0$  tel que  $B^2(w, R) \subseteq V$ . Du théorème 4.6, on sait que  $D(w; R, R) \subsetneq B^2(w, R) \subseteq V$  et  $D(w; R, R) = B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R) \times_e B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  par définition du disque bicomplexe. De plus,  $B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  et  $B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  sont deux ensembles ouverts dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Comme  $z_1 - z_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et que  $B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  est ouvert, alors  $B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  doit contenir un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$ . Notons cet élément  $v_1$ . De la même façon, il doit exister un élément  $v_2 \in B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  tel que  $v_2 \in \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$ . Ainsi, il existe un élément  $v = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 \in B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R) \times_e B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R) \subseteq V$ . Par ailleurs,

$$v \in \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\} \times_e \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\} = \bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w_1).$$

Ainsi, pour tout  $w_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , l'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k_1, k_2=1}^{\infty} P_c^{-(k_1, k_2)}(w_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . ■

Bien que ce résultat apparaisse pertinent, il ne constitue pas une adaptation satisfaisante de la méthode d'itération inverse. En effet, il serait préférable d'obtenir un résultat sur la densité de l'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$  dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . Pour ce faire, il faut considérer les points fixes de  $P_c$  dans le cas bicomplexe. Rappelons qu'un élément  $w \in \mathbb{BC}$  est un point fixe de  $P_c$  si  $P_c(w) = w$ .

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Du chapitre précédent, il est connu que les polynômes  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  possèdent chacun au moins un point fixe. Les lemmes suivants établissent des relations entre les points fixes de ces polynômes et ceux de  $P_c$  dans  $\mathbb{BC}$ .

**Lemme 4.5.** *Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Alors  $p = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 \in \mathbb{BC}$  est un point fixe de  $P_c$  si et seulement si  $p_1$  est un point fixe de  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $p_2$  est un point fixe de  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ .*

PREUVE.

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Soit  $p = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 \in \mathbb{BC}$  avec  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Le résultat est démontré à l'aide d'une chaîne d'équivalences :  $p$  est un point fixe de  $P_c$  si et seulement si

$$\begin{aligned}
 P_c(p) = p &\Leftrightarrow p^2 + c = p \\
 &\Leftrightarrow (p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2)^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2 = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 \\
 &\Leftrightarrow (p_1^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1)) \mathbf{e}_1 + (p_2^2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1)) \mathbf{e}_2 = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) = p_1 \\ p_2^2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) = p_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}(p_1) = p_1 \\ P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}(p_2) = p_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

En conséquence,  $p = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2$  est un point fixe de  $P_c$  si et seulement si  $p_1$  est un point fixe de  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $p_2$  est un point fixe de  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . ■

Puisque les polynômes  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  possèdent chacun au moins un point fixe, alors le polynôme  $P_c$  doit avoir au moins un point fixe dans  $\mathbb{BC}$ . Le prochain lemme renseigne davantage sur les points fixes bicomplexes.

**Lemme 4.6.** *Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Le polynôme  $P_c$  a au moins un point fixe dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ .*

PREUVE.

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Examinons les points fixes associés à  $P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$  et  $P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ .

(a) Si  $c_1 - c_2\mathbf{i}_1 \neq \frac{1}{4}$ , alors  $P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$  possède au moins un point fixe répulsif et il est dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$ . Si  $c_1 - c_2\mathbf{i}_1 = \frac{1}{4}$ , alors  $P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$  a un unique point fixe rationnellement neutre et il est aussi dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$ .

(b) Si  $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \neq \frac{1}{4}$ , alors  $P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$  possède au moins un point fixe répulsif et il est dans  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ . Si  $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 = \frac{1}{4}$ , alors  $P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$  a un unique point fixe rationnellement neutre et il est aussi dans  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ .

Dans tous les cas,  $P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$  a au moins un point fixe  $p_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$  et  $P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$  a au moins un point fixe  $p_2 \in \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ . Du lemme précédent, il existe un point fixe  $p = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2$  de  $P_c$  tel que  $p \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ . ■

Pour trouver un point fixe de  $P_c$  dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ , il suffit donc de trouver les points fixes de  $P_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1}$  et  $P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$  à partir des formules données au chapitre précédent. En choisissant un point fixe répulsif ou rationnellement neutre pour chacun des deux polynômes de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  et en les combinant sous la représentation idempotente, un point fixe de  $P_c$  est créé dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ . Il est maintenant possible d'énoncer et de démontrer le résultat tant attendu de la méthode d'itération inverse dans le cas bicomplexe.

**Théorème 4.10.** *Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Soit  $w_1$  un point fixe de  $P_c$  tel que  $w_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ . L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ .*

PREUVE.

Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ . Soit  $w_1 = s_1 + s_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  tel que  $P_c(w_1) = w_1$  et  $w_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ . La preuve s'effectue de façon similaire à celle du théorème 4.9 : il faut montrer que pour tout  $w \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}$ , tout ensemble ouvert contenant  $w$  contient aussi un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$ .

Soit  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  quelconque et  $V \subseteq \mathbb{B}\mathbb{C}$  un ensemble ouvert tel que  $w \in V$ . Il faut trouver un élément  $v \in V$  tel que  $v \in \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$ . Par hypothèse, on a  $w_1 = (s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_1 + (s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \mathbf{e}_2$  avec  $s_1 - s_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $s_1 + s_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . Du théorème 3.8, on sait que

(1) L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  pour tout entier  $k_1 \geq 1$ , c'est-à-dire que pour tout  $z \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$ , tout ensemble ouvert contenant  $z$  contient un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$ .

(2) L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  pour tout entier  $k_1 \geq 1$ , c'est-à-dire que pour tout  $z \in \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , tout ensemble ouvert contenant  $z$  contient un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=k_1}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$ .

Puisque  $V$  est ouvert et que  $w \in V$ , alors il existe  $R > 0$  tel que  $B^2(w, R) \subseteq V$ . Du théorème 4.6, on sait que  $D(w; R, R) \subsetneq B^2(w, R) \subseteq V$  et  $D(w; R, R) = B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R) \times_e B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  par définition du disque bicomplexe. De plus,  $B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  et  $B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  sont deux ensembles ouverts de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . Comme  $z_1 - z_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  est ouvert, alors  $B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  doit contenir un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$  de (1) avec  $k_1 = 1$ . Ainsi, il existe  $v_1 \in B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  tel que  $v_1 \in P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k'}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)$  pour un certain entier  $k' \geq 1$ . De même,  $B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  doit contenir un élément de  $\left\{ \bigcup_{k=k'}^{\infty} P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) \right\}$  de la propriété (2) avec  $k_1 = k'$ . Il existe donc un élément  $v_2 \in B^1(z_1 + z_2 \mathbf{i}_1, R)$  tel que  $v_2 \in P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k''}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1)$  pour un certain entier  $k'' \geq k' \geq 1$ . Distinguons deux cas :

(a) Si  $k'' = k'$ , alors il existe  $v = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$  tel que  $v \in D(w; R, R) \subseteq V$  et  $v \in P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k'}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) \times_e P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{-k'}(s_1 + s_2 \mathbf{i}_1) = P_c^{-k'}(w_1)$  pour un certain entier  $k' \geq 1$ . Il existe donc  $v \in V$  tel que  $v \in \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$ .

(b) Supposons  $k'' > k'$ . Puisque  $w_1$  est un point fixe de  $P_c$ , alors  $s_1 - s_2 \mathbf{i}_1$  est un point fixe de  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$ . On vérifie facilement par induction que  $s_1 - s_2 \mathbf{i}_1 = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Soit  $m = k'' - k' \geq 1$ . Puisque  $v_1 \in B^1(z_1 - z_2 \mathbf{i}_1, R)$  et  $v_1 \in P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k'}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)$ , on peut écrire  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{k'}(v_1) = s_1 - s_2 \mathbf{i}_1$ . En conséquence,

$$P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{k''}(v_1) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{m+k'}(v_1) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m \left( P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{k'}(v_1) \right) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^m(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1) = s_1 - s_2 \mathbf{i}_1$$

et  $v_1 \in P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{-k''}(s_1 - s_2 \mathbf{i}_1)$ . Il existe donc un élément  $v = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 \in D(w; R, R) \subseteq V$  tel que  $v \in P_c^{-k''}(w_1)$  pour un certain entier  $k'' > 1$ . L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$  contient un élément de  $V$ .

Ces deux cas permettent de conclure que si  $w_1$  est un point fixe de  $P_c$  dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , alors l'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . ■

La méthode d'itération inverse peut être utilisée pour visualiser l'ensemble bicomplexe  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  dans l'espace tridimensionnel à partir de la coupe décrite précédemment. En particulier, elle peut être employée pour observer les ensembles de Julia bicomplexes que l'on dénote ici par le terme **dendrite bicomplexe**.

Dans le cas complexe, une dendrite consiste en un ensemble aux propriétés spécifiques de la définition 3.8. Les ensembles de Julia remplis qui sont des dendrites ont les caractéristiques suivantes :  $c \in \partial \mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}_c = \mathcal{J}_c$ . Une dendrite bicomplexe est considérée comme un ensemble cartésien bicomplexe dont chacune de ses composantes est une dendrite dans  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ . En conséquence, pour  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ , l'ensemble  $\mathcal{K}_{2,c}$  est une dendrite quand  $\mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  sont des dendrites complexes. Alors  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1} = \mathcal{J}_{2,c}$  et le théorème précédent est directement applicable pour observer complètement l'ensemble  $\mathcal{J}_{2,c}$ .

**Corollaire 4.2.** *Soit  $P_c(w) = w^2 + c$  avec  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  tel que  $\mathcal{K}_{2,c}$  est une dendrite bicomplexe. Soit  $w_1$  un point fixe de  $P_c$  tel que  $w_1 \in \mathcal{J}_{2,c}$ . L'ensemble  $\left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_c^{-k}(w_1) \right\}$  est dense dans  $\mathcal{J}_{2,c}$ .*

Soit  $c = \mathbf{i}_1$ , c'est-à-dire  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  avec  $c_1 = \mathbf{i}_1$  et  $c_2 = 0$ . Alors  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_1 = c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1$ . En conséquence,  $\mathcal{K}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{K}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  sont des dendrites complexes et  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{J}_{2,c} = \mathcal{J}_{\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{\mathbf{i}_1}$ . Pour visualiser cet ensemble, la méthode d'itération inverse adaptée aux nombres bicomplexes est utilisée et fournit les images de la figure 4.4. Le point de départ de l'algorithme est déterminé à partir du point fixe répulsif dans  $\mathcal{J}_{\mathbf{i}_1}$  :  $w_0 = z_1 \mathbf{e}_1 + z_1 \mathbf{e}_2$  où  $P_{\mathbf{i}_1}(z_1) = z_1$  et  $z_1 \in \mathcal{J}_{\mathbf{i}_1}$ . Les calculs de  $\sqrt{w - c}$  sont effectués dans les composantes idempotentes. À chaque itération, l'une des quatre branches de la racine carrée bicomplexe est choisie au hasard et les résultats sont gardés en

mémoire sous la forme à quatre composantes réelles. Une coupe tridimensionnelle est réalisée avec  $\epsilon = 0,01$  pour observer l'ensemble. Le nombre d'itérations est de 100 000.

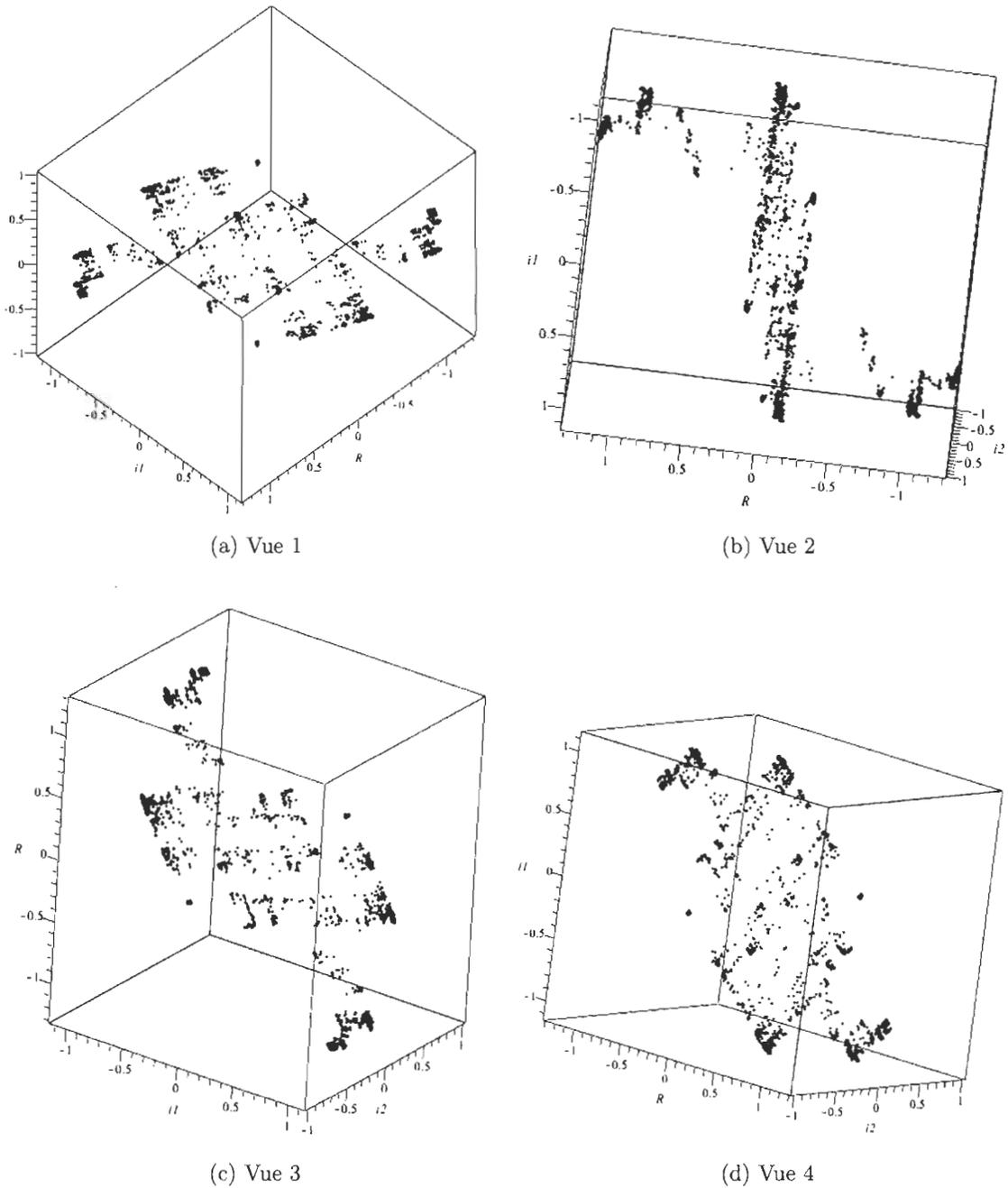


FIGURE 4.4 – Ensemble de Julia dans l'espace tridimensionnel  $c = i_1$

Les résultats de ce chapitre constituent une extension de certains concepts classiques associés aux ensembles de Julia du plan complexe. Les propriétés des nombres bicomplexes ont permis de définir et de caractériser les ensembles de Julia bicomplexes d'une façon bien particulière. Celle-ci a d'ailleurs mené à une première méthode pour visualiser ces ensembles dans l'espace tridimensionnel. Une discussion sur les points fixes du polynôme bicomplexe  $w^2 + c$  et ses itérées inverses ont permis de développer un résultat similaire à la méthode d'itération inverse pour observer complètement un type précis d'ensembles de Julia, soit les dendrites bicomplexes. L'efficacité de cette méthode a pu être constatée avec la figure 4.4.

Au premier abord, la méthode d'itération inverse nécessite que toutes les valeurs fournies par l'inverse du polynôme complexe ou bicomplexe soient considérées à chaque itération. Or, dans ce travail, seulement l'une des branches de l'inverse a été employée à chaque étape du processus et l'approximation des ensembles est demeurée adéquate. Le chapitre suivant contient des résultats qui amènent à mieux comprendre les raisons pour lesquelles l'algorithme d'itération inverse tend à recouvrir aussi fidèlement les ensembles de Julia dans ce cas précis.

# Chapitre 5

## Justification des méthodes probabilistes

Aux chapitres précédents, une méthode probabiliste a été développée pour visualiser les ensembles de Julia du plan et de l'espace ; à chaque itération, l'une des transformations possibles était choisie au hasard puis appliquée. Cette méthode s'est révélée très efficace puisqu'elle a permis de représenter rapidement les ensembles désirés. Dans le présent chapitre, les justifications théoriques de ce processus sont énoncées en lien avec une méthode bien connue pour générer des fractales, soit celle des systèmes de fonctions itérées. Les fondements de l'algorithme probabiliste pour les systèmes de fonctions itérées fournissent une meilleure compréhension des méthodes utilisées pour les ensembles de Julia.

Les systèmes de fonctions itérées sont d'abord définis et les résultats importants les concernant sont présentés sans être démontrés. Par la suite, des notions complémentaires sur la mesure sont introduites. Celles-ci sont essentielles puisque les résultats au coeur de cette section reposent principalement sur les propriétés d'une mesure particulière. Finalement, le lien est établi avec la méthode d'itération inverse pour générer les ensembles de Julia du plan et de l'espace tridimensionnel.

## 5.1 Les systèmes de fonctions itérées

Dans [25], Benoît Mandelbrot a introduit les systèmes de fonctions itérées ou IFS (pour *Iterated Function Systems*) comme façon unifiée de générer et de classer une grande famille de fractales incluant notamment les ensembles de Cantor. Depuis, l'étude de la théorie des IFS a été bien couverte, entre autres dans [3]. Elle a aussi été généralisée à des concepts plus vastes. Un algorithme probabiliste a été développé et permet de produire rapidement plusieurs fractales issues des IFS. Puisqu'un lien étroit existe entre cet algorithme et la méthode d'itération inverse, il convient de s'y intéresser davantage. Les résultats principaux sur les systèmes de fonctions itérées sont exposés dans cette section, pour un espace métrique quelconque  $(X, d)$ . Ils demeurent donc valides sur l'espace  $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$  ou  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ .

Voyons d'abord quelques notions fondamentales avant d'introduire la définition des IFS. Les preuves se trouvent dans [3].

**Définition 5.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. L'ensemble  $\mathcal{H}(X)$  est l'ensemble de tous les sous-ensembles compacts non vides de  $X$ .

**Définition 5.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $x \in X$  et  $A, B \in \mathcal{H}(X)$ .

(i) La **distance de l'élément  $x$  à l'ensemble  $B$**  est donnée par

$$d(x, B) = \min\{d(x, y) \mid y \in B\}.$$

(ii) La **distance de l'ensemble  $A$  à l'ensemble  $B$**  est donnée par

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\}.$$

(iii) La **distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$**  est donnée par

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Il est important de ne pas confondre la distance de Hausdorff  $h$ , qui satisfait aux propriétés d'une métrique, à la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  décrite au chapitre 2. Les deux termes font référence à des concepts très différents et sont utilisés dans des contextes distincts.

**Théorème 5.1.** *Si  $(X, d)$  est un espace métrique complet, alors  $(\mathcal{H}(X), h)$  est un espace métrique complet.*

Ce théorème indique que si  $\{A_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{H}(X)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \in \mathcal{H}(X)$ . L'espace  $(\mathcal{H}(X), h)$  est celui sur lequel reposent les fractales.

Une transformation importante doit être définie en lien avec les systèmes de fonctions itérées, soit la contraction.

**Définition 5.3.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une transformation  $f : X \rightarrow X$  est une **contraction** s'il existe une constante  $0 \leq r < 1$  telle que  $d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$  pour tout  $x, y \in X$ . La constante  $r$  est le **facteur de contraction**.*

Une contraction est donc une transformation qui réduit la distance entre les éléments de l'espace et il s'agit d'une fonction continue. De plus, si  $f : X \rightarrow X$  et  $g : X \rightarrow X$  sont deux contractions de facteur  $r$  et  $t$  respectivement, alors  $f \circ g$  est une contraction de facteur  $r \cdot t$ . Le théorème suivant énonce une propriété fondamentale des contractions et justifie le théorème central des systèmes de fonctions itérées.

**Théorème 5.2 (Théorème du point fixe de Banach<sup>1</sup>).** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $f : X \rightarrow X$  une contraction. Alors  $f$  possède exactement un point fixe  $x_f \in X$ . De plus, pour tout  $x \in X$ , la suite des itérées avant  $\{f^n(x) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$  converge vers  $x_f : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f$  pour tout  $x \in X$ .*

Puisque  $(\mathcal{H}(X), h)$  est l'espace des fractales, il convient de déterminer des contractions qui agissent spécifiquement sur  $\mathcal{H}(X)$ , soit sur des sous-ensembles compacts non vides de  $X$ .

**Théorème 5.3.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $w : X \rightarrow X$  une contraction de facteur  $r$ . Alors  $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  définie telle que  $w(B) = \{w(x) \mid x \in B\}$  pour tout  $B \in \mathcal{H}(X)$  est une contraction de facteur  $r$  sur  $(\mathcal{H}(X), h)$ .*

---

1. Énoncé par Stefan BANACH dans *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3 (1922), p. 133-181.

**Théorème 5.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $w_k$  une contraction de facteur  $r_k$  sur  $(\mathcal{H}(X), h)$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$ . Soit  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  définie par

$$W(B) = \bigcup_{k=1}^m w_k(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_m(B)$$

pour tout  $B \in \mathcal{H}(X)$ . Alors  $W$  est une contraction de facteur  $r = \max\{r_1, \dots, r_m\}$  sur  $(\mathcal{H}(X), h)$ .

Ce résultat conduit aux définitions des systèmes de fonctions itérées et au théorème central des IFS.

**Définition 5.4.** Un système de fonctions itérées ou IFS consiste en un espace métrique complet  $(X, d)$  et un ensemble fini de contractions  $w_k : X \rightarrow X$  de facteurs  $r_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$ . L'IFS est noté  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$  et son facteur de contraction est  $r = \max\{r_1, \dots, r_m\}$ .

**Théorème 5.5.** Soit  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$  un IFS de facteur de contraction  $r$ . La transformation  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  définie par  $W(B) = \bigcup_{k=1}^m w_k(B)$  pour tout  $B \in \mathcal{H}(X)$  est une contraction de facteur  $r$  sur  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Elle a un unique point fixe  $A \in \mathcal{H}(X)$ , d'où  $A = W(A) = \bigcup_{k=1}^m w_k(A)$ . Il est donné par  $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) = A$  pour tout  $B \in \mathcal{H}(X)$ .

Le point fixe  $A \in \mathcal{H}(X)$  est l'**attracteur** de l'IFS et il est souvent de nature fractale.

**Définition 5.5.** Un système de fonctions itérées avec probabilités est un IFS  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$  où une probabilité  $p_k > 0$  est associée à chaque contraction  $w_k$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$  telle que  $\sum_{k=1}^m p_k = 1$ . Il est noté  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ .

**Exemple 5.1.** Soit  $(X, d) = ([0, 1], |\cdot|)$  et les contractions  $w_1(x) = \frac{1}{3}x$  et  $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Alors  $\{[0, 1]; w_1, w_2\}$  est un IFS de facteur de contraction  $r = \frac{1}{3}$  et son attracteur est l'ensemble triadique de Cantor  $\mathcal{C}$ . En ajoutant les probabilités  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\{[0, 1]; w_1, w_2; p_1, p_2\}$  est un IFS avec probabilités.

Les deux types d'IFS conduisent à des méthodes distinctes pour générer des fractales : un algorithme déterministe et un algorithme probabiliste. Ces algorithmes s'avèrent particulièrement utiles dans  $X = \mathbb{R}$  et  $X = \mathbb{R}^2$  avec la métrique euclidienne. Leur fonctionnement est expliqué ici :

### 1. L'algorithme déterministe

Soit  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$  un IFS. Il faut choisir un ensemble compact non vide  $A_0 \subseteq X$  et obtenir successivement  $A_n = \bigcup_{k=1}^m w_k(A_{n-1})$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . Un nouvel ensemble est ainsi généré par l'union de toutes les contractions appliquées à l'ensemble précédent, c'est-à-dire à chaque point de cet ensemble. Du théorème 5.5, la suite  $\{A_n\}$  ainsi créée converge vers l'attracteur de l'IFS. En pratique, un nombre d'itérations maximal  $N$  est fixé et l'ensemble  $A_N$  correspond à une bonne approximation de l'attracteur pour  $N$  suffisamment grand. Pour l'ensemble triadique de Cantor, on peut choisir  $A_0 = [0, 1]$ . On obtient alors  $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ ,  $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ , ... et on retrouve le processus de construction de  $\mathcal{C}$ . Il est facile de constater que l'algorithme converge vers cet ensemble.

### 2. L'algorithme probabiliste

Soit  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$  un IFS avec probabilités. Il faut choisir un élément  $x_0 \in X$  et obtenir successivement  $x_n \in \{w_1(x_{n-1}), \dots, w_m(x_{n-1})\}$  de façon indépendante pour  $n = 1, 2, \dots$ . La probabilité de l'événement  $x_n = w_k(x_{n-1})$  est  $p_k$ . De façon équivalente, on peut écrire  $x_n = w_{\sigma_n}(x_{n-1}) = w_{\sigma_n} \circ w_{\sigma_{n-1}} \circ \dots \circ w_{\sigma_1}(x_0)$  où la probabilité de l'événement  $\sigma_n = k$  est  $p_k$ . On remarque que la suite  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$  est une suite de variables indépendantes identiquement distribuées. La suite  $\{x_n\}$  créée converge vers l'attracteur  $A$  de l'IFS  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$ . De nouveau, un nombre d'itérations maximal  $N$  est fixé et cette fois, l'ensemble  $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$  correspond à l'approximation de l'attracteur. Lorsque celui-ci est déjà connu, le choix  $x_0 \in A$  est souvent privilégié. Pour  $\mathcal{C}$ , on peut choisir  $x_0 = 1$ . La suite  $\{x_n\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \frac{7}{27}, \frac{7}{81}, \frac{169}{243}, \dots\}$  est associée à  $\{\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1, \sigma_5 = 2, \dots\}$ . L'ensemble des points générés est bien dans  $\mathcal{C}$ .

L'algorithme probabiliste se révèle plus pratique puisqu'il est plus rapide que l'algorithme déterministe et requiert moins d'espace mémoire. Les raisons pour lesquelles le processus converge vers l'attracteur du théorème 5.5 sont expliquées dans la section suivante.

**Remarque 5.1.**

Notons qu'il existe d'autres façons de définir un système de fonctions itérées, notamment avec des transformations  $w_k$  qui ne sont pas de contractions. Elles peuvent être des fonctions de Lipschitz ou d'autres types de transformations adoptant des propriétés particulières. Le terme *hyperbolique* est parfois ajouté pour spécifier que les transformations sont des contractions. Cet aspect est davantage abordé dans la dernière section de ce chapitre.

## 5.2 Convergence de l'algorithme probabiliste pour les IFS

Les justifications théoriques de l'algorithme probabiliste pour les IFS sont basées sur des résultats de la théorie de la mesure et de la théorie ergodique. Cette dernière étudie les systèmes dynamiques en regard d'ensembles invariants dont la mesure est de 0 ou de 1, avec une mesure de probabilité. L'idée générale est la suivante. À chaque IFS avec probabilités est associée une certaine mesure invariante qui repose sur l'attracteur de l'IFS défini sans probabilité. Les points produits par l'algorithme probabiliste sont distribués sur cet attracteur d'une façon qui approxime cette mesure.

Pour mieux comprendre ce raisonnement, un complément des notions de mesure est fourni. Puis, un espace métrique composé de mesures est défini et la mesure invariante associée à un IFS avec probabilités est présentée. Les résultats démontrant le comportement de l'algorithme probabiliste sont ensuite énoncés. Les éléments de cette section proviennent principalement de la référence [3] qui s'appuie sur les travaux de [10] et [23]. L'article [4] contient aussi des résultats intéressants. On suppose que les

transformations de l'IFS sont des contractions.

Rappelons qu'une mesure est une fonction définie sur une tribu  $\mathcal{T}$  d'un espace  $X$  d'une façon précise (définition 1.15). On suppose que l'espace  $X$  est muni d'une topologie  $\mathcal{O}$  et la tribu  $\mathcal{T} = \mathcal{B}(X)$ , soit la tribu de Borel sur  $X$ , est considérée. Notons que  $\mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{B}(X)$ . Enfin, une mesure  $\mu$  est normalisée ou une mesure de probabilité si  $\mu(X) = 1$ . Le terme *normalisée* est privilégié ici pour alléger la lecture puisque des mesures de Borel sont utilisées.

### 5.2.1 L'intégrale généralisée

La définition de l'intégration d'une fonction selon une certaine mesure  $\mu$  doit d'abord être introduite pour saisir la définition de la métrique  $d_H$  ensuite présentée. Cette définition fait intervenir la notion de fonction simple.

**Définition 5.6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Une fonction à valeurs réelles  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est *simple* si elle s'écrit sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^M y_k \mathbb{1}_{I_k}(x)$$

où  $M$  est un entier positif,  $y_k \in \mathbb{R}$  pour  $k = 1, 2, \dots, M$  et  $I_k \in \mathcal{B}(X)$  tel que  $\bigcup_{k=1}^M I_k = X$  et  $I_i \cap I_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ .

**Définition 5.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure de Borel. L'*intégrale d'une fonction simple  $f$  selon  $\mu$*  est donnée par

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu = \sum_{k=1}^M y_k \mu(I_k).$$

L'intégrale d'une fonction simple selon une mesure  $\mu$  est donc fournie par la mesure des boréliens qui la définissent. L'intégration d'une classe de fonctions plus vaste nécessite que le concept de partition soit repris et qu'une suite de fonctions simples particulières soit générée.

**Définition 5.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $\mu$  une mesure de Borel. Une **partition de  $X$**  est un ensemble fini de sous-ensembles de Borel non vides  $\{A_k \in \mathcal{B}(X) \mid k = 1, 2, \dots, M\}$  tel que  $X = \bigcup_{k=1}^M A_k$  et  $A_i \cap A_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . Le **diamètre de la partition** est donné par  $\max\{\text{diam}(A_k) \mid k = 1, 2, \dots, M\}$ .

Rappelons que  $\text{diam}(A_k) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A_k\}$ . Le théorème suivant mène à la définition de l'intégrale d'une fonction continue quelconque selon une mesure de Borel  $\mu$ .

**Théorème 5.6.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $\mu$  une mesure de Borel. Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- (i) Soit  $n$  un entier positif fixé. Il existe une partition de  $X$  de diamètre  $1/n$ . La partition est donnée par  $B_n = \{A_{n,k} \in \mathcal{B}(X) \mid k = 1, 2, \dots, M(n)\}$ .
- (ii) Soit  $x_{n,k} \in A_{n,k}$  pour  $k = 1, 2, \dots, M(n)$  et  $\{f_n\}$  la suite de fonctions simples donnée par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M(n)} f(x_{n,k}) \mathbb{1}_{A_{n,k}}(x)$$

pour  $n = 1, 2, \dots$ . La suite  $\{f_n\}$  converge uniformément vers  $f$ .

- (iii) La suite  $\{\int_X f_n d\mu\}$  converge. La valeur de la limite est indépendante du choix des partitions de diamètre  $1/n$  et du choix de  $x_{n,k} \in A_{n,k}$  pour  $n = 1, 2, \dots$  et  $k = 1, 2, \dots, M(n)$ .

**Définition 5.9.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact,  $\mu$  une mesure de Borel et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'**intégrale de la fonction  $f$  selon  $\mu$**  est la limite de la suite des intégrales du théorème 5.6 :

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Voyons plus en détails ce que signifie le théorème 5.6. Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Pour  $n = 1$ , il existe une partition de  $X$  de diamètre 1 donnée par  $B_1 = \{A_{1,k} \in \mathcal{B}(X) \mid k = 1, 2, \dots, M(1)\}$ . Il en va de même pour  $n = 2, 3, \dots$ . Chaque fonction  $f_n$  de la suite du théorème 5.6 (ii) est une fonction simple déterminée par  $f$

et une partition de  $X$  de diamètre  $1/n$  :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_{1,1})\mathbb{1}_{A_{1,1}}(x) + f(x_{1,2})\mathbb{1}_{A_{1,2}}(x) + \cdots + f(x_{1,M(1)})\mathbb{1}_{A_{1,M(1)}}(x) \\ f_2(x) &= f(x_{2,1})\mathbb{1}_{A_{2,1}}(x) + f(x_{2,2})\mathbb{1}_{A_{2,2}}(x) + \cdots + f(x_{2,M(2)})\mathbb{1}_{A_{2,M(2)}}(x) \\ &\vdots \\ f_n(x) &= f(x_{n,1})\mathbb{1}_{A_{n,1}}(x) + f(x_{n,2})\mathbb{1}_{A_{n,2}}(x) + \cdots + f(x_{n,M(n)})\mathbb{1}_{A_{n,M(n)}}(x). \end{aligned}$$

Puisque les fonctions simples sont intégrables selon une mesure  $\mu$ , il est possible de construire la suite des intégrales de ces fonctions. De (iii), cette suite converge. La limite donnée par la précédente définition est donc fondée et généralise le concept d'intégration pour des fonctions continues.

## 5.2.2 Un espace de mesures

Avant de considérer la mesure associée à un IFS avec probabilités, il faut s'intéresser à l'espace métrique sur lequel elle est définie. De la référence [3], cet espace est d'ailleurs celui où les fractales existent réellement.

**Définition 5.10.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure de Borel. Le **support** de  $\mu$  est noté  $\text{supp } \mu$  et correspond au plus petit ensemble fermé dont le complément est de mesure nulle.*

Il est donc défini comme  $\text{supp } \mu = X \setminus V$  tel que  $V$  est l'union de tous les ensembles ouverts de mesure nulle. De façon équivalente,  $\text{supp } \mu = \{x \in X \mid \mu(B(x, \epsilon)) > 0 \ \forall \epsilon > 0\}$ . Le support de la mesure  $\mu$  peut être vu comme l'ensemble sur lequel la mesure repose.

**Définition 5.11.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. L'**ensemble**  $\mathcal{P}(X)$  est l'ensemble de toutes les mesures de Borel normalisées sur  $X$ .*

Il s'agit donc de l'ensemble formé de toutes mesures définies sur la tribu de Borel pour lesquelles la mesure de  $X$  est 1. La fonction suivante définie sur  $\mathcal{P}(X)$  a été introduite pour la première fois dans [23] et fournit une notion de distance entre deux mesures. Les propriétés d'une métrique sont toutes vérifiées.

**Définition 5.12.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. La **métrique de Hutchinson**  $d_H$  est définie sur  $\mathcal{P}(X)$  comme suit :

$$d_H(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X f d\mu - \int_X f d\nu \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue et } |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \forall x, y \in X \right\}.$$

**Théorème 5.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. Alors  $(\mathcal{P}(X), d_H)$  est un espace métrique compact. De plus, si  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  alors  $\text{supp } \mu \in \mathcal{H}(X)$ .

La seconde propriété affirme que le support d'une mesure de Borel normalisée est un sous-ensemble compact non vide de  $X$ . Un lien avec les IFS semble donc réaliste à partir de cette constatation. Il doit cependant être précisé davantage.

### 5.2.3 Convergence de la méthode probabiliste

Les résultats précédents permettent de définir un opérateur associé à un IFS probabiliste d'après la définition qui suit. Cet opérateur, l'opérateur de Markov, est lié à la mesure invariante de l'IFS. Sa définition tient compte des propriétés suivantes démontrées dans [3] :

1. Si  $(X, d)$  est un espace métrique compact et  $w : X \rightarrow X$  est une transformation continue, alors  $w^{-1} : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{B}(X)$  où  $w^{-1}(B) = \{x \in X \mid w(x) \in B\}$  pour tout  $B \in \mathcal{B}(X)$ ;
2. Si  $\nu$  est une mesure de Borel normalisée sur  $\mathcal{B}(X)$ , alors  $\nu \circ w^{-1}$  l'est aussi.

**Définition 5.13.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et un IFS avec probabilités  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ . L'**opérateur de Markov associé à l'IFS** est la fonction  $M : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  qui associe à chaque mesure de Borel normalisée  $\nu \in \mathcal{P}(X)$  la mesure  $M(\nu)$  définie par

$$M(\nu) = \sum_{k=1}^m p_k(\nu \circ w_k^{-1}) = p_1(\nu \circ w_1^{-1}) + p_2(\nu \circ w_2^{-1}) + \dots + p_m(\nu \circ w_m^{-1}).$$

Cette mesure est ainsi construite à partir des contractions et des probabilités de l'IFS. De la remarque précédant la définition, elle est définie sur  $\mathcal{B}(X)$  et peut être appliquée à un sous-ensemble de Borel de  $X$ .

**Lemme 5.1.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et un IFS avec probabilités  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ . Soit  $M$  l'opérateur de Markov associé à l'IFS et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction simple ou continue. Si  $\nu \in \mathcal{P}(X)$ , alors*

$$\int_X f d(M(\nu)) = \sum_{k=1}^m p_k \int_X (f \circ w_k) d\nu.$$

**Théorème 5.8.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et un IFS avec probabilités  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$  de facteur de contraction  $0 < r < 1$ . Soit  $M$  l'opérateur de Markov associé à l'IFS. Alors  $M$  est une contraction de facteur  $r$  sur  $(\mathcal{P}(X), d_H)$ , c'est-à-dire*

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq r \cdot d_H(\nu, \mu) \quad \forall \nu, \mu \in \mathcal{P}(X).$$

*Il existe une unique mesure  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  telle que  $M(\mu) = \mu$ . De plus, pour tout  $\nu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(\nu) = \mu$ .*

**Définition 5.14.** *La mesure  $\mu$  du théorème précédent est la **mesure invariante de l'IFS avec probabilités**.*

L'existence d'une telle mesure invariante est assurée par le théorème du point fixe de Banach puisque tout espace métrique compact est complet. Le résultat suivant démontre le lien spécifique entre cette mesure et l'attracteur d'un IFS.

**Théorème 5.9.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et un IFS avec probabilités  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ . Soit  $\mu$  la mesure invariante de l'IFS. Alors le support de  $\mu$  est l'attracteur  $A$  de l'IFS  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$ .*

Ainsi,  $\mu(X) = 1$  puisque  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  et  $\mu(A) = 1$  du précédent théorème. La mesure de l'attracteur est donc la même que celle de l'espace où il existe. Le théorème suivant est attribué à Elton qui l'a démontré dans [10] dans un cas plus général que celui présenté ici. Il découle de résultats de la théorie ergodique qui ne sont pas mentionnés dans ce travail.

**Théorème 5.10.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et un IFS avec probabilités  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ . Soit  $\mu$  la mesure invariante de l'IFS et  $\{x_n\}$  une suite produite par l'algorithme probabiliste en débutant à  $x_0 \in X$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \int_X f(x) d\mu(x) \quad (5.1)$$

presque partout, pour toute fonction continue  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $x_0 \in X$ .

Dans ce contexte, la *convergence presque partout* signifie que pour toutes suites  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$  de variables indépendantes sauf pour un ensemble de suites de probabilité nulle, la suite  $\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) \right\}$  converge vers  $\int_X f(x) d\mu(x)$ . Le membre de gauche de l'équation (5.1) est la *moyenne temporelle (time average)* de la fonction  $f$  et correspond à la moyenne de la fonction évaluée aux points de  $\{x_n\}$ . Le terme de droite est la *moyenne spatiale (space average)* de la fonction  $f$  et correspond à la moyenne des valeurs de la fonction évaluée en tout point de l'espace. En conséquence, la suite  $\{f(x_0), f(x_1), \dots\}$  visite chaque point de  $X$  d'une façon uniforme.

Il existe une autre approche pour mieux comprendre le principe de *convergence presque partout*, soit celle des suites  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ . Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$  un IFS avec probabilités. Soit  $\Sigma$  l'ensemble des suites infinies créées à partir des  $m$  symboles de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, m\}$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  avec  $\sigma_k \in \{1, 2, \dots, m\}$  pour  $k = 1, 2, \dots$ . L'élément  $\sigma$  est un *code*. Considérons la fonction  $d_c$  qui fournit la distance entre deux codes :

$$d_c(\sigma, \tilde{\sigma}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sigma_k - \tilde{\sigma}_k|}{(m+1)^k} \quad \forall \sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma$$

où  $|\cdot|$  désigne la valeur absolue. L'espace  $(\Sigma, d_c)$  est alors un espace métrique compact. En conséquence, à tout IFS  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$  est associé un espace métrique de codes  $(\Sigma, d_c)$ . Il est possible d'établir plusieurs liens entre l'attracteur  $A$  de cet IFS et l'espace des codes. En particulier, tout élément de l'attracteur  $A$  apparaît comme la limite du

processus de composition des contractions de l'IFS associée au code  $\sigma$  à partir d'un élément  $x_0 \in X$ .

Par ailleurs, soit  $u_k : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tel que  $u_k(\sigma) = k\sigma = (k, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$  pour  $k = 1, 2, \dots, m$ . Chacune de ces transformations constitue une contraction de facteur  $1/(m+1)$  avec la métrique  $d_c$ . En conséquence,  $\{\Sigma; u_1, \dots, u_m; p_1, \dots, p_m\}$  est un IFS avec probabilités et il doit exister une unique mesure invariante  $\rho \in \mathcal{P}(\Sigma)$  associée à cet IFS. Soit  $j$  un entier positif fixé et

$$C(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j) = \{\omega \in \Sigma \mid \omega_1 = \sigma_1, \omega_2 = \sigma_2, \dots, \omega_j = \sigma_j\}$$

l'ensemble des codes dont les  $j$  premiers termes sont donnés par  $\sigma_1, \dots, \sigma_j$ . La mesure  $\rho$  est telle que

$$\rho(C(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j)) = p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \dots p_{\sigma_j}$$

pour chaque entier  $j \geq 1$  et pour tout  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Cette mesure fournit une façon de décrire les probabilités des événements possibles en utilisant l'algorithme probabiliste de l'IFS  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ . En effet, un code  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma$  est produit par l'application de cet algorithme. En fixant  $x_0 \in X$  et en répétant l'algorithme à partir de ce point initial, il devient possible de décrire les probabilités des suites  $\{x_n\}$  débutant à  $x_0$  grâce aux probabilités des codes. Pour  $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ , la probabilité que l'algorithme probabiliste produise un code  $\sigma \in B$  est donnée par  $\rho(B)$ . Grâce à ces constatations, il est possible de réécrire le théorème 5.10 de cette façon :

*Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$  un IFS avec probabilités. Soit  $\mu$  la mesure invariante de l'IFS. Soit  $x_0 \in X$  et soit  $B$  l'ensemble des codes  $\sigma \in \Sigma$  tels que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

*pour toute fonction continue  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $x_0 \in X$  où  $x_n = w_{\sigma_n} \circ \dots \circ w_{\sigma_1}(x_0)$ . Alors  $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$  et  $\rho(B) = 1$ .*

La probabilité que l'algorithme probabiliste produise un code parmi ceux qui induisent la propriété désirée est de 1, ce qui confirme le résultat de *convergence presque partout* énoncé avec le théorème 5.10.

Ainsi, la distribution des points de la suite  $\{x_n\}$  produite par l'algorithme probabiliste est fournie par la mesure  $\mu$  qui dépend des probabilités de l'IFS. Puisque cette mesure a pour support l'attracteur  $A$  de l'IFS  $\{X; w_1, \dots, w_m\}$ , alors les points générés par l'algorithme probabiliste recouvrent  $A$  d'une façon qui illustre la densité de la mesure sur celui-ci (pour un petit nombre d'itérations). Lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, le processus tend à recouvrir complètement et uniformément l'attracteur peu importe les probabilités choisies et le point de départ  $x_0$ .

Le corollaire suivant détermine une façon d'obtenir la mesure d'un sous-ensemble de Borel de  $X$  à partir de l'algorithme probabiliste.

**Corollaire 5.1.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et un IFS avec probabilités  $\{X; w_1, \dots, w_m; p_1, \dots, p_m\}$ . Soit  $\mu$  la mesure invariante de l'IFS et  $\{x_n\}$  une suite produite par l'algorithme probabiliste en débutant à  $x_0 \in X$ . Soit  $B \in \mathcal{B}(X)$  dont  $\mu(\partial B) = 0$ . Alors*

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(B, n)}{n + 1} \quad \text{presque partout}$$

où  $N(B, n)$  est le nombre d'éléments de la suite  $\{x_n\}$  dans l'ensemble  $B$ .

La mesure d'un ensemble  $B$  correspond donc à la proportion de points produits par l'algorithme probabiliste qui se situent dans  $B$ .

Notons que dans [4] et [10], les auteurs ont associés la suite de points produite par l'algorithme probabiliste à un processus de Markov en définissant une probabilité de transition. Bien que cette avenue apparaisse intéressante, elle n'est pas traitée dans ce travail.

### 5.3 La méthode probabiliste et les ensembles de Julia

Les résultats énoncés jusqu'ici permettent de tisser des liens avec la méthode utilisée pour générer les ensembles de Julia. En effet, l'idée de fonder un processus itératif sur le choix aléatoire de transformations selon certaines probabilités est commun à l'algorithme probabiliste des IFS et à la méthode d'itération inverse. Le cas complexe est d'abord étudié puis étendu au cas bicomplexe. Les résultats proviennent des références [3] et [4].

En premier lieu, il convient d'introduire un espace grandement lié à  $\mathbb{C}$ , soit le plan complexe étendu  $\overline{\mathbb{C}}$  associé à la sphère de Riemann  $\Sigma$ . Les définitions et résultats du chapitre 3 auraient aussi pu être décrits sur cet espace. Or, pour représenter les ensembles de Julia dans le plan complexe à partir de la méthode d'itération inverse, il semblait plus pertinent de se restreindre d'abord à  $\mathbb{C}$ . Le théorème 5.11 présenté dans ce qui suit nécessite cependant de se situer sur  $\overline{\mathbb{C}}$  et non sur  $\mathbb{C}$ .

La **sphère de Riemann** (voir la figure 5.1) est la sphère  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ . Elle est de rayon  $\frac{1}{2}$ , centrée en  $(0, 0, \frac{1}{2})$  et tangente au plan  $xy$  associé au plan complexe  $\mathbb{C}$  à l'origine. Le point  $N(0, 0, 1)$  est le pôle nord de  $\Sigma$ . Toute droite tracée à partir du point  $N$  et passant par un point  $z_1 = x_1 + y_1i$  du plan complexe intercepte la sphère de Riemann en un unique point  $P_1$  de coordonnées  $(a, b, c)$ . Il existe donc une correspondance biunivoque entre les nombres complexes et les points de  $\Sigma \setminus \{N\}$ . En associant  $N$  à  $\infty$ , alors la correspondance biunivoque associe chaque point de la sphère  $\Sigma$  à un élément du plan complexe étendu  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , parfois noté  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Soit  $P_1$  et  $P_2$  deux points de la sphère de Riemann associés respectivement aux points  $z_1$  et  $z_2$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ . La distance de la corde entre les points  $P_1$  et  $P_2$  définit une

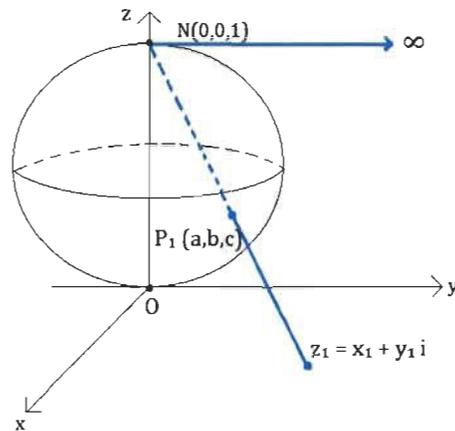


FIGURE 5.1 – Sphère de Riemann

distance  $\chi$  dans  $\overline{\mathbb{C}}$  de la façon suivante :

$$\chi(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \text{si } z_1 \in \mathbb{C} \text{ et } z_2 = \infty \end{cases}$$

avec  $\|P_1 - P_2\| = \chi(z_1, z_2)$ . Cette distance satisfait aux propriétés d'une métrique et correspond à la **métrique sphérique**. En conséquence, les notions de boules et de convergence de suites sur  $\overline{\mathbb{C}}$  sont définies à partir de cette métrique.

Reprenons  $P_c(z) = z^2 + c$  avec  $c \in \mathbb{C}$  mais  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  avec le raisonnement probabiliste de la méthode d'itération inverse. Le polynôme  $P_c$  possède deux inverses donnés par  $f_1(z) = \sqrt{z - c}$  et  $f_2(z) = -\sqrt{z - c}$ . L'ensemble de Julia  $\mathcal{J}_c$  associé à  $c$  est produit à partir d'un point  $z_0 \in \mathcal{J}_c$ , en générant une suite de points complexes  $\{z_n\}$  telle que chaque nouvel élément est obtenu en évaluant au hasard l'un des deux inverses au point précédent. Un système de fonctions avec probabilités  $\{\overline{\mathbb{C}}; f_1, f_2; p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}\}$  est ainsi créé. Or, puisque les transformations  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas des contractions, le système ne peut être assimilé directement à un IFS *hyperbolique* avec probabilités, tel que décrit dans les sections précédentes. Il ne possède donc pas nécessairement d'attracteur unique dans  $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}})$ . Le terme IFS peut cependant lui être associé d'un

point de vue plus général et il semble bien posséder un attracteur tel que le démontre l'utilisation de la méthode d'itération inverse. Dans [3], l'auteur introduit le résultat suivant analogue à celui obtenu avec les systèmes de fonctions itérées hyperboliques. Des conditions particulières sur l'espace  $\overline{\mathbb{C}}$  sont cependant ajoutées afin d'assurer l'unicité de l'attracteur.

Soit  $c \in \mathbb{C}$ . Supposons que le système dynamique induit par  $P_c(z) = z^2 + c$  sur  $\overline{\mathbb{C}}$  possède un point périodique attractif  $s_0 \in \mathbb{C}$  de période  $q$  dont le cycle est donné par  $\{s_0, s_1 = P_c(s_0), \dots, s_{q-1} = P_c^{q-1}(s_0)\} \subseteq \mathbb{C}$ . Soit  $\epsilon > 0$  petit. L'ensemble  $X_1$  dénote l'espace  $\overline{\mathbb{C}}$  auquel ont été retirées  $q + 1$  boules ouvertes de rayon  $\epsilon$  :

$$X_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{B^1(s_0, \epsilon) \cup B^1(s_1, \epsilon) \cup \dots \cup B^1(s_{q-1}, \epsilon) \cup B^1(\infty, \epsilon)\}.$$

La distance est évaluée avec la métrique sphérique. Considérons l'IFS

$$\{X_1; f_1(z) = \sqrt{z - c}, f_2(z) = -\sqrt{z - c}\}.$$

Une transformation  $W$  est définie sur  $\mathcal{H}(X_1)$  à partir de cet IFS :

$$W(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X_1).$$

**Théorème 5.11.** *Soit l'IFS  $\{X_1; f_1(z) = \sqrt{z - c}, f_2(z) = -\sqrt{z - c}\}$  et la transformation  $W$  précédemment définie. Alors  $W$  renvoie  $\mathcal{H}(X_1)$  dans lui-même et est continue (avec la métrique de Hausdorff). De plus,  $W$  possède un unique point fixe correspondant à  $\mathcal{J}_c$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B) = \mathcal{J}_c, \forall B \in \mathcal{H}(X_1)$ .*

Les conclusions demeurent valides si  $\{P_c^n(0)\}$  converge vers  $\infty$  et  $X_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus B(\infty, \epsilon)$ , c'est-à-dire s'il n'y a pas de cycle attractif.

En associant les probabilités  $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$  à cet IFS, on obtient un IFS avec probabilités. Le théorème précédent étant semblable au théorème 5.5 par l'existence d'un point fixe comme limite de suites d'itérées, l'algorithme probabiliste peut être utilisé pour générer les ensembles de Julia complexes. Un phénomène de même nature

que celui avec les IFS hyperboliques intervient. La suite de points  $\{z_n\}$  produite par la méthode d'itération inverse en débutant à  $z_0 \in \mathcal{J}_c$  recouvre l'ensemble de Julia complexe. La distribution des points approxime une certaine mesure invariante, au sens de la définition 5.14, qui repose sur  $\mathcal{J}_c$ . Au chapitre 3, il a été mentionné que la méthode d'itération inverse n'entraîne pas toujours une distribution uniforme des points sur l'ensemble de Julia. Cette situation révèle des zones de différentes densités avec la mesure invariante pour un nombre d'itérations faible. Par exemple, pour  $c = -0,123 + 0,745i$ , les extrémités des différentes boucles ont une mesure plus élevée que leur intersection tel qu'observé à la figure 5.2.

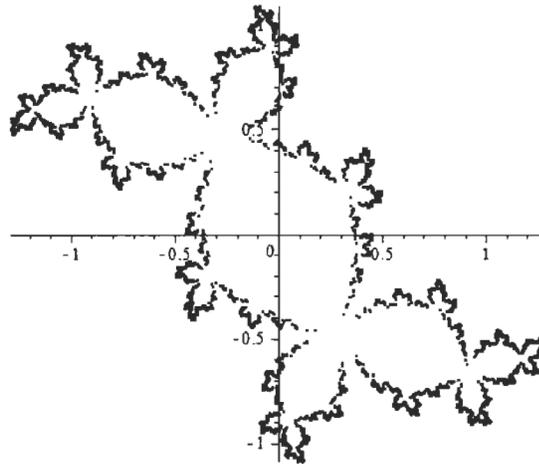


FIGURE 5.2 – Ensemble de Julia  $c = -0,123 + 0,745i$

Pour visualiser les ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel, les nombres bicomplexes ont été utilisés. Ces nombres à quatre composantes, définis à partir des éléments de  $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$  qui admet la même structure que  $\mathbb{C}$ , admettent une propriété qui s'est avérée essentielle : la représentation en base idempotente. Cette décomposition a mené à la caractérisation suivante des ensembles de Julia bicomplexes pour  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$  :

$$\mathcal{J}_{2,c} = (\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{K}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}) \cup (\mathcal{K}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}) \cup (\mathcal{J}_{c_1 - c_2\mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1}).$$

Puis, la méthode d'itération inverse a été déduite pour des ensembles de Julia

spécifiques, soit les dendrites ou plus simplement, les ensembles tels que  $\mathcal{J}_{2,c} = \mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ .

Soit  $g_1, g_2, g_3$  et  $g_4$  les quatre branches de  $\sqrt{w - c}$  dans  $\mathbb{BC}$ , associées aux probabilités  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{1}{4}$ . À partir de  $w_0 \in \mathcal{J}_{2,c}$ , une suite de points est produite en choisissant au hasard l'une des quatre transformations inverses et en l'appliquant au point précédent. Comme dans le cas complexe, le système de fonctions avec probabilités  $\{\mathbb{BC}; g_1, g_2, g_3, g_4; p_1, p_2, p_3, p_4\}$  ne correspond pas à un IFS *hyperbolique* avec probabilités.

Or, en raison de la structure de  $\mathcal{J}_{2,c}$  comme ensemble cartésien bicomplexe, il semble logique de croire qu'un phénomène similaire à celui du cas complexe se produit. Un résultat semblable au théorème 5.11 doit pouvoir être déduit par transformation de l'IFS  $\{\mathbb{BC}; g_1, g_2, g_3, g_4; p_1, p_2, p_3, p_4\}$ . En effet, ce théorème peut être appliqué à partir de  $\overline{\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)}$  pour chacune des deux composantes de  $\mathcal{J}_{2,c}$  soit  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  et  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$  (dans le cas d'une dendrite bicomplexe). Puisque  $w_0 \in \mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1} \times_e \mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ , alors sa composante en  $\mathbf{e}_1$  est l'élément de départ d'une suite de points de  $\overline{\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)}$  qui recouvre  $\mathcal{J}_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}$  par le processus itératif probabiliste. Une suite débutant à la composante idempotente en  $\mathbf{e}_2$  de  $w_0$  est aussi générée et elle tend à recouvrir  $\mathcal{J}_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}$ . La combinaison de ces deux comportements selon le produit cartésien bicomplexe doit produire une suite d'éléments bicomplexes à partir de  $w_0$  recouvrant  $\mathcal{J}_{2,c}$  d'une façon qui approxime une certaine mesure sur cet ensemble. Bien qu'aucun résultat en ce sens ne soit formellement démontré, les fondements théoriques présentés dans ce chapitre et dans les précédents encouragent à penser qu'il soit possible de le faire. La définition de l'espace  $X_1$  du théorème 5.11 devrait être précisée.

En somme, la méthode d'itération inverse pour les ensembles de Julia du plan et de l'espace tridimensionnel est intimement liée à l'algorithme probabiliste des systèmes de fonctions itérées avec probabilités. Les résultats théoriques concernant cet algorithme permettent de déduire qu'il existe des conclusions similaires à celles obtenues pour les IFS. Ainsi, les points produits par la méthode d'itération inverse tendent à recouvrir

les ensembles de Julia d'une façon qui révèle une mesure reposant sur ceux-ci. Cette situation apparaît valide à la fois dans le plan complexe et dans l'espace bicomplexe à la base de la visualisation tridimensionnelle.

# Conclusion

La méthode d'itération inverse a été étudiée pour visualiser les ensembles de Julia dans le plan complexe et développer une adaptation originale pour les ensembles de Julia bicomplexes observés dans l'espace tridimensionnel.

Dans un premier temps, la dimension de Hausdorff-Besicovitch a été approfondie afin d'aborder la notion de fractales avec une approche rigoureuse. La présentation de la mesure de Hausdorff a conduit à la définition de la dimension de Hausdorff-Besicovitch comme indicateur de l'irrégularité et de la densité d'un objet. La valeur d'un ensemble fractal particulier, l'ensemble triadique de Cantor, a été déduite.

Les ensembles de Julia ont ensuite été introduits à partir de la dynamique du polynôme complexe  $z^2 + c$ . Les définitions et résultats classiques, c'est-à-dire ceux en lien avec les ensembles de Julia remplis, ont été présentés. Puis, l'approche des familles normales de fonctions a mené à la méthode d'itération inverse et à ses justifications théoriques. Son utilisation a permis de constater son efficacité et d'observer des ensembles de Julia dans le plan complexe.

La définition et les propriétés des nombres bicomplexes ont par la suite mené aux définitions d'ensembles classiques de cet espace, tels que les ensembles cartésiens bicomplexes. Les ensembles de Julia associés au polynôme bicomplexe  $w^2 + c$  ont pu être introduits dans cet espace à quatre dimensions et une caractérisation de ceux-ci à partir d'ensembles complexes particuliers a été démontrée. Celle-ci a conduit à une méthode de visualisation reprenant les algorithmes établis dans le cas complexe.

Pour développer une adaptation de la méthode d'itération inverse, il a fallu étudier les points fixes et les itérées inverses du polynôme. La représentation des nombres bicomplexes sur la base idempotente s'est avérée très utile et a mené à l'adaptation recherchée. Une coupe tridimensionnelle a été réalisée pour observer les ensembles générés.

Enfin, quelques explications sur la convergence des algorithmes utilisés ont été fournies. Celles-ci ont été établies en lien avec l'algorithme probabiliste pour les systèmes de fonctions itérées. Les justifications théoriques du cas complexe ont été étendues à l'espace bicomplexe sans qu'une démonstration formelle ne soit réalisée.

Bien que les résultats présentés dans ce mémoire soient satisfaisants, plusieurs éléments auraient mérités d'être étudiés. Notons entre autres la dimension fractale des ensembles de Julia complexes. D'autres approches pour visualiser les ensembles de Julia bicomplexes dans l'espace tridimensionnel auraient aussi pu être approfondies. Par exemple, d'autres coupes auraient pu être privilégiées. Ces différents sujets pourront faire l'objet de recherches subséquentes. Par ailleurs, il serait intéressant d'implémenter la méthode d'itération inverse avec un logiciel plus performant afin d'obtenir des images plus détaillées des ensembles de Julia du plan et de l'espace tridimensionnel. Ceci permettrait probablement de poursuivre l'étude de ces ensembles, notamment dans l'espace bicomplexe, et de déterminer de nouvelles propriétés. En particulier, une preuve formelle du théorème 5.11 dans le cadre bicomplexe pourrait être explorée.

Les ensembles de Julia, construits à partir d'une règle simple mais à la complexité évidente, ont encore beaucoup à offrir pour améliorer notre compréhension de certains concepts mathématiques et peut-être même, de problèmes concrets.

# Bibliographie

- [1] *Chapter 1 - Lebesgue Measure*, Mathematical Database [En ligne], [www.eng.mathdb.org/notes\\_download/advanced/analysis/e\\_real\\_1.pdf](http://www.eng.mathdb.org/notes_download/advanced/analysis/e_real_1.pdf) (Page consultée en juin 2012)
- [2] *Les fractales : Art, nature et modélisation*, Tangente, Éditions Pôles, Hors série no 8 (2004), 156 p.
- [3] Michael BARNESLEY. *Fractals everywhere*, 3<sup>e</sup> édition, New York, Dover Publications Inc., 2012, 531 p.
- [4] Michael BARNESLEY et Steven DEMKO. *Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical and Physical Sciences, vol. 399, no 1817 (1985), p. 243-275.
- [5] Stephen BEDDING et Keith BRIGGS. *Iteration of Quaternion Maps*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 5, no 3 (1995), p. 877-881.
- [6] Constantin CARATHÉODORY. *Über das lineare Mass von Punktmengen-eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1914), p. 406-426.
- [7] Lennart CARLESON et Theodore W. GAMELIN. *Complex Dynamics*, New York, Springer-Verlag, 1993, 174 p.
- [8] Robert L. DEVANEY. *Complex Dynamical Systems : The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, vol. 49 (1994), p. 34-36.

- [9] Robert L. DEVANEY et Linda KEEN, dir. *Chaos and Fractals : The Mathematics Behind the Computer Graphics*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society, Providence, vol. 39 (1989), 148 p.
- [10] John H. ELTON. *An ergodic theorem for iterated maps*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 7, no 4 (1987), p. 481-488.
- [11] Kenneth FALCONER. *Techniques in Fractal Geometry*, Angleterre, John Wiley & Sons Ltd., 1997, 256 p.
- [12] Kenneth FALCONER. *Fractal geometry - Mathematical Foundations and Applications*, 2<sup>e</sup> édition, Angleterre, John Wiley & Sons Ltd., 2003, 337 p.
- [13] Michael FRAME et Maureen ANGERS. *Some nonlinear iterated function systems*, Computer & Graphics, vol. 18, no 1 (1994), p. 119-125.
- [14] Jonathan FRASER. *An Introduction to Julia Sets* [En ligne], [http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/fraktaly/linearni\\_system/julia.pdf](http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/GeoGebra/matematika/fraktaly/linearni_system/julia.pdf) (Page consultée en septembre 2012)
- [15] Thierry GALLAY. *Théorie de la mesure et de l'intégration* [En ligne], <http://www-irma.u-strasbg.fr/~fock/integrationa.pdf>, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009 (Page consultée en mai 2012)
- [16] Theodore W. GAMELIN. *Complex analysis*, New York, Springer-Verlag New York Inc., 2001, 478 p.
- [17] Vincent GARANT-PELLETIER. *Ensembles de Mandelbrot et de Julia remplis classiques, généralisés aux espaces multicomplexes et théorème de Fatou-Julia généralisé*, Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières (2011), 136 p.
- [18] Jagannathan GOMATAM, John DOYLE, Bonnie STEVES et Isobel McFARLANE. *Generalization of the Mandelbrot set : Quaternionic quadratic maps*, Chaos, Solitons and Fractals, vol. 5, no 6 (1995), p. 971-989.
- [19] John C. HART, Louis H. KAUFFMAN et Daniel J. SANDIN. *Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals*, Computer Graphics, vol. 23, no 3 (1989), p. 289-296.

- [20] John C. HART, Louis H. KAUFFMAN et Daniel J. SANDIN. *Interactive Visualization of Quaternion Julia Sets*, Proceedings of the 1st conference on Visualization '90 (1990), p. 209-218.
- [21] Felix HAUSDORFF. *Dimension und äusseres Mass*, Mathematische Annalen, vol. 79 (1919), p. 157-179.
- [22] John A.R. HOLBROOK. *Quaternionic Fatou-Julia sets*, Annales des sciences mathématiques du Québec, vol. 11, no 1 (1987), p. 79-94.
- [23] John E. HUTCHINSON. *Fractals and self-similarity*, Indiana University Mathematics Journal, vol. 30, no 5 (1981), p. 713-747.
- [24] Gaston JULIA. *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 8<sup>e</sup> série, tome 1 (1918), p. 47-246.
- [25] Benoît MANDELBROT. *The fractal geometry of nature*, New York, W. H. Freeman, 1982, 468 p.
- [26] Benoît MANDELBROT. *Fractales, hasard et finance*, France, Flammarion, 1997, 246 p.
- [27] Étienne MARTINEAU et Dominic ROCHON. *On a bicomplex distance estimation for the Tetraebrot*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 15, no 9 (2005), p. 3039-3050.
- [28] Mark McCLURE. *Inverse Iteration Algorithms for Julia Sets* [En ligne], <http://facstaff.unca.edu/mcmclur/class/FractalILS/JuliaSets.pdf>, University of North Carolina at Ashville (Page consultée en octobre 2012)
- [29] G. H. MEISTERS. *Lebesgue measure on the real line* [En ligne], [www.math.unl.edu/~gmeisters1/papers/Measure/measure.pdf](http://www.math.unl.edu/~gmeisters1/papers/Measure/measure.pdf), University of Nebraska - Lincoln (Page consultée en juin 2012)
- [30] Shunsuke MOROSAWA, Yasuhiro NISHIMURA, Masahiko TANIGUCHI et Tetsuo UEDA. *Holomorphic Dynamics*, United Kingdom, Cambridge University Press, 2000, 350 p.
- [31] Ole A. NIELSEN. *An Introduction to Integration and Measure Theory*, Canada, John Wiley & Sons Inc., 1997, 473 p.

- [32] Alan NORTON. *Generation and Display of Geometric Fractals in 3-D*, Computer Graphics, vol. 16, no 3 (1982), p. 61-67.
- [33] Heinz-Otto PEITGEN, Dietmar SAUPE et Michael F. BARNESLEY. *The Science of Fractal Images*, New York,, Springer-Verlag, 1988, 312 p.
- [34] Heinz-Otto PEITGEN, Hartmut JÜRGENS et Dietmar SAUPE. *Chaos and Fractals : New Frontiers of Science*, 2<sup>e</sup> édition, États-Unis, Springer-Verlag, 2004, 864 p.
- [35] Heinz-Otto PEITGEN et Peter H. RICHTER. *The Beauty of Fractals : Images of Complex Dynamical Systems*, Berlin, Springer-Verlag, 1986, 199 p.
- [36] Griffith Baley PRICE. *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, New York, Marcel Dekker Inc., 1991, 402 p.
- [37] Dominic ROCHON. *A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers*, Fractals, vol. 8, no 4 (2000), p. 355-368.
- [38] Dominic ROCHON. *On a generalized Fatou-Julia theorem*, Fractals, vol. 11, no 3 (2003), p. 213-219.
- [39] Dominic ROCHON et Michael V. SHAPIRO. *On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers*, Annals of the University of Oradea - Fascicle of Mathematics, vol. 11 (2004), p. 71-110.
- [40] Bernard SAPOVAL. *Universalités et fractales*, France, Flammarion, 1997, 275 p.
- [41] Joel L. SCHIFF. *Normal Families*, New York, Springer-Verlag, 1993, 236 p.
- [42] Dierk SCHLEICHER. *Hausdorff Dimension, Its Properties, and Its Surprises*, American Mathematical Monthly, vol. 114, no 6 (Juin-Juillet 2007), p. 509-528.
- [43] Corrado SEGRE. *Le Rappresentazioni Reali delle Forme Complesse a Gli Enti Iperalgebrici*, Mathematische Annalen, vol. 40 (1892), p. 413-467.
- [44] Mitsuhiro SHISHIKURA. *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Annals of Mathematics, vol. 147, no 2 (1998), p. 225-267.
- [45] Claude TRICOT. *Géométries et mesures fractales : une introduction*, Paris, Ellipses Édition Marketing, 2008, 439 p.

# Annexe A

## Procédures dans le plan complexe

### A.1 Informations générales

Les procédures ont été réalisées avec le logiciel *Maple 16*. Chaque ligne de commandes ou bloc de commandes est précédé du symbole `>`. Pour tester les procédures, ce symbole ne doit pas être recopié dans la fenêtre de commandes du logiciel. Le symbole `#` identifie les commentaires. La commande `restart` ramène le système à l'état initial. Elle assure qu'aucune ancienne affectation ou définition n'est encore valide. La commande `with(plots)` permet d'utiliser certaines fonctions d'affichage dont `densityplot` et `pointplot`.

Les nombres complexes sont pris en charge sous la forme  $z := a + b*I$ . La partie réelle est retournée par  $\operatorname{Re}(z)$  et la partie imaginaire par  $\operatorname{Im}(z)$ . Le module est obtenu avec  $|z|$  et la commande `sqrt(z)` retourne la branche positive de la racine carrée complexe. La commande `evalf(expression)` évalue numériquement une expression. Son utilisation est nécessaire pour comparer des valeurs fournies notamment par des racines carrées.

Les points générés pour visualiser les ensembles sont gardés en mémoire dans des listes identifiées par des crochets `[ ]`. La commande `[op(L), v]` ajoute l'élément `v` à la liste `L`.

Un exemple de chaque procédure est fourni pour constater son utilisation.

### A.2 Les ensembles de Julia remplis

La procédure `Iteration` effectue les itérations du polynôme  $z^2 + c$  où le point de départ est  $x + y*I$ . Elle retourne le plus grand nombre d'itérations pour lequel le

résultat du calcul reste borné, jusqu'à une valeur maximale de 50.

La procédure `JuliaRempliC` retourne l'image en couleur de l'ensemble de Julia rempli associé à  $c$ . Chaque point d'une grille déterminée par les valeurs  $x$  et  $y$  est introduit dans la procédure `Iteration`. La valeur retournée détermine la couleur associée au point. Le terme `nbpt` identifie le pas de discrétisation, soit le nombre de points à l'horizontal et à la vertical qui constituent la grille d'observation.

```
> restart:
> with(plots):
> Iteration := proc(c,x,y)

    local R: # le rayon maximal
    local N: # le nombre d'itérations
    local z0, i:

    # Initialisation des valeurs

    R := max(evalf(|c|),2):
    N := 50:
    z0 := x + y*I:

    # Itérations du polynôme

    for i from 1 to N while (evalf(|z0|) <= R) do;
        z0 := z0^2 + c:
    end do:

    return i:

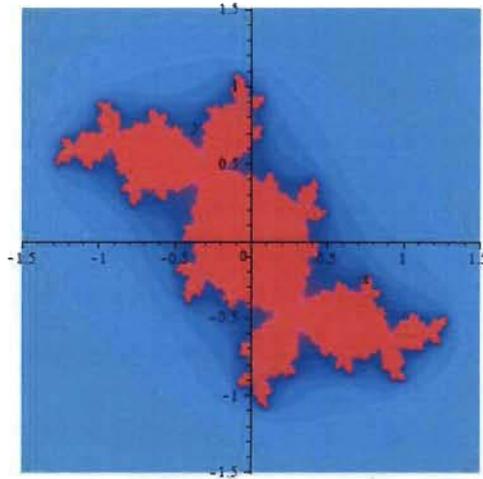
end proc:

> JuliaRempliC := proc(c::complex, nbpt::integer)

    densityplot('Iteration'(c,x,y), x = -1.5 .. 1.5, y = -1.5 .. 1.5,
        grid = [nbpt,nbpt], style = PATCHNOGRID, scaling = constrained,
        colorstyle = HUE, scaletorange = -25 .. 25):

end proc:

> JuliaRempliC(-0.123 + 0.745*I, 500)
```



### A.3 Les ensembles de Julia

La procédure `PtFixe` retourne le point fixe du polynôme  $z^2 + c$  qui sert de point de départ à l'algorithme d'itération inverse, soit  $0,5$  si  $c = \frac{1}{4}$  et un point fixe répulsif sinon. S'il y a deux points fixes répulsifs, celui dont le module est le plus élevé est renvoyé.

La procédure `JuliaC` retourne un nuage de  $N$  points noirs qui approxime l'ensemble de Julia associé à  $c$  avec la méthode d'itération inverse.

```
> restart:
> with(plots):
> PtFixe:= proc(c::complex)

  local sol: # les 2 points fixes

  if (c = 0.25) then
    return 0.5 + 0*I:
  else
    sol := fsolve(z^2 + c = z, z, complex):
    if ( (|2*sol[1]| > 1 and |2*sol[2]| > 1 and |2*sol[1]| > |2*sol[2]|)
        or (|2*sol[1]| > 1 and |2*sol[2]| < 1) ) then
      return sol[1]:
    else
      return sol[2]:
    end if:
  end if:

end proc:
```

```
> PtFixe(-0.123 + 0.745*I)

1.276581949 - 0.4796660549 I

> JuliaC := proc(c::complex, N::integer)

local Points : # les positions des points générés
               # sous forme complexe
local z, r, i:

if ( N <= 0 ) then
  print('Il faut itérer au moins une fois'):
else

  # Initialisation des valeurs et vecteurs

  z := PtFixe(c):
  Points := []:

  # Algorithme d'itération inverse

  for i from 1 to N do

    # Nombre aléatoire pour déterminer la branche de la racine carrée
    r := rand(1..2):

    z := (-1)^r() * evalf(sqrt(z-c)):
    Points := [op(Points), z]:

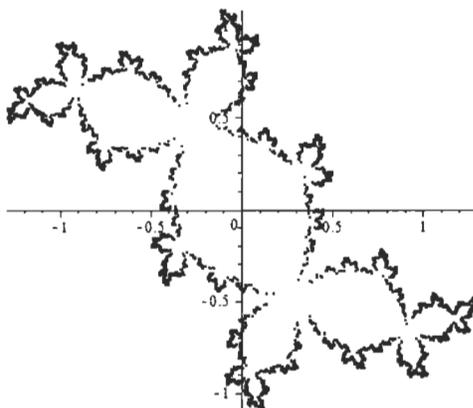
  end do:

  # Affichage de l'ensemble

  return pointplot({seq([Re(Points[i]), Im(Points[i])], i = 1 .. N)},
    scaling = constrained, symbol = point):

end if:
end proc:

> JuliaC(-0.123 + 0.745*I, 100000)
```



# Annexe B

## Procédures dans l'espace tridimensionnel

### B.1 Informations générales

Les procédures pour générer les ensembles de Julia remplis et les ensembles de Julia du plan complexe sont reprises de l'annexe précédente à la différence qu'elles retournent la position des points générés et non l'image des ensembles. Elles sont dénotés `JuliaRempli2D` et `Julia2D` pour les distinguer des procédures antérieures.

Les nombres bicomplexes sont manipulés principalement sous la forme à quatre composantes réelles pour faciliter l'affichage des ensembles générés. Puisque ces nombres ne sont pas pris en charge directement par le logiciel, il est plus pratique de travailler avec des listes qui contiennent les valeurs des différentes composantes.

### B.2 Les ensembles de Julia par la caractérisation du corollaire 4.1

Les procédures reprises de l'annexe précédente sont d'abord présentées. Pour les ensembles de Julia remplis, la discrétisation doit être effectuée manuellement pour conserver la position des points générés. Une seule couche de divergence est conservée et le nombre d'itérations maximal est réduit à 20. La procédure `Julia2D` est identique à la procédure `JuliaC` de l'annexe A à la différence qu'elle retourne la position des points générés et non le nuage de points lui-même.

```
> restart:
> with(plots):
> PtFixe:= proc(c::complex)

    local sol: # les 2 points fixes
```

```

if (c = 0.25) then
  return 0.5 + 0*I:
else
  sol := fsolve(z^2 + c = z, z, complex):
  if ( (|2*sol[1]| > 1 and |2*sol[2]| > 1 and |2*sol[1]| > |2*sol[2]|)
      or (|2*sol[1]| > 1 and |2*sol[2]| < 1) ) then
    return sol[1]:
  else
    return sol[2]:
  end if:
end if:

end proc:

> JuliaRempli2D := proc(c::complex, nbpt::integer)

  local Points: # les positions des points générés
                # sous forme complexe
  local Couche: # les positions des points d'une couche de divergence
                # sous forme complexe
  local R: # le rayon maximal
  local N: # le nombre d'itérations
  local i, j, k:
  local z0:

  if (nbpt <= 10) then
    print('Il faut choisir un pas de discrétisation supérieur à dix'):
  else

    # Initialisation des valeurs et vecteurs

    N := 20:
    R := max(evalf(|c|),2):
    Points := []:
    Couche := []:

    # Itérations du polynôme à chaque point de la fenêtre

    for i from 0 to nbpt do
      for j from 0 to nbpt do

        z0 := (-R + (i/nbpt)*2*R) + (R - (j/nbpt)*2*R)*I:

        for k from 1 to N while ( evalf(|z0|)<=R ) do;
          z0 := z0^2 + c:

```

```

end do:

# Conservation de la position des points dont les itérées
# restent bornées ou dans une première couche de divergence

if ( k = (N+1) ) then
  Points := [op(Points), (-R+(i/nbpt)*2*R) + (R-(j/nbpt)*2*R)*I]:
elif ( 7 <= k <= N ) then
  Couche := [op(Couche), (-R+(i/nbpt)*2*R) + (R-(j/nbpt)*2*R)*I]:
end if:

end do:
end do:

# Retour des positions des points

return Points, Couche:

end if:
end proc:

> Julia2D := proc(c::complex, N::integer)

local Points : # les positions des points générés
local z, r, i:

if ( N <= 0 ) then
  print('Il faut itérer au moins une fois'):
else

  # Initialisation des valeurs et vecteurs

  z := PtFixe(c):
  Points := []:

  # Algorithme d'itération inverse

  for i from 1 to N do

    # Nombre aléatoire pour déterminer la branche de la racine carrée
    r := rand(1..2):

    z := (-1)^r() * evalf(sqrt(z-c)):
    Points := [op(Points), z]:

```

```

end do:

# Retour des positions des points

return Points:

end if:
end proc:

```

Les procédures suivantes correspondent à chacun des morceaux de la caractérisation des ensembles de Julia bicomplexes selon le corollaire 4.1. Des listes différentes sont utilisées pour garder en mémoire les points générés et ceux qui sont affichés selon la coupe tridimensionnelle. La constante  $c$  doit être entrée sous la forme d'une liste à quatre éléments. Pour les procédures `MorceauI` et `MorceauII`, la variable  $N$  représente le nombre d'itérations associé à la procédure `Julia2D` et la variable  $nbpt$  correspond au pas de discrétisation de la procédure `JuliaRempli2D`. Pour la procédure `MorceauIII`, la variable  $N1$  fournit le nombre d'itérations pour les ensembles de Julia complexes. La valeur  $eps$  est liée à la coupe tridimensionnelle et a été fixée à 0,01 dans les exemples présentés. La commande `display` permet d'afficher plusieurs images dans une même figure. Les différents morceaux de la caractérisation ont été créés afin de pouvoir les visualiser séparément si désiré. La procédure `JuliaBC3D` les combine pour observer les ensembles de Julia dans l'espace tridimensionnel.

```

> MorceauI := proc(c::list, N::integer, nbpt::integer, eps)

local JR, JI1, JI2, JJ: # les 4 composantes des nombres générés
local JRD, JI1D, JI2D, JJD: # les 4 composantes des nombres générés
                                # dans la couche de divergence
local axeR, axeI1, axeI2: # les points affichés
local axeRD, axeI1D, axeI2D: # les points de la couche de divergence
                                # affichés

local c1, c2: # les nombres complexes associés à c
local a, b:
local i, j:
local p1, p2: # les deux nuages de points de l'image
                # (l'ensemble et la couche de divergence)

if ( nops(c) <> 4 ) then
    print('Il faut spécifier une constante bicomplexe à quatre composantes'):
elif ( N <= 0 ) then
    print('Il faut itérer au moins une fois'):
elif ( nbpt <= 10 ) then
    print('Il faut choisir un pas de discrétisation supérieur à dix'):

```

```

elif ( eps >= 1 or eps < 0 ) then
  print('Il faut choisir une précision de coupe entre zéro et un'):
else

  # Initialisation des vecteurs

  JR := []:
  JI1 := []:
  JI2 := []:
  JJ := []:
  JRD := []:
  JI1D := []:
  JI2D := []:
  JJD := []:

  axeR := []:
  axeI1 := []:
  axeI2 := []:
  axeRD := []:
  axeI1D := []:
  axeI2D := []:

  # Création des ensembles du plan complexe

  c1 := c[1] + c[2]*I:
  c2 := c[3] + c[4]*I:
  a := Julia2D(c1 - c2*I, N):
  b := JuliaRempli2D(c1 + c2*I, nbpt):

  # Combinaison des 2 ensembles (sans la couche de divergence)

  for i from 1 to nops(a) do
    for j from 1 to nops(b[1]) do
      JR := [op(JR), 0.5*(Re(a[i]) + Re(b[1][j]))]:
      JI1 := [op(JI1), 0.5*(Im(a[i]) + Im(b[1][j]))]:
      JI2 := [op(JI2), 0.5*(-Im(a[i]) + Im(b[1][j]))]:
      JJ := [op(JJ), 0.5*(Re(a[i]) - Re(b[1][j]))]:
    end do:
  end do:

  # Combinaison de l'ensemble de Julia et de la couche de divergence

  for i from 1 to nops(a) do
    for j from 1 to nops(b[2]) do
      JRD := [op(JRD), 0.5*(Re(a[i]) + Re(b[2][j]))]:
    end do:
  end do:

```

```

        JI1D := [op(JI1D), 0.5*(Im(a[i]) + Im(b[2][j]))]:
        JI2D := [op(JI2D), 0.5*(-Im(a[i]) + Im(b[2][j]))]:
        JJD := [op(JJD), 0.5*(Re(a[i]) - Re(b[2][j]))]:
    end do:
end do:

# Coupe tridimensionnelle

for i from 1 to nops(JR) do
    if ( abs(JJ[i]) <= eps ) then
        axeR := [op(axeR), JR[i]]:
        axeI1 := [op(axeI1), JI1[i]]:
        axeI2 := [op(axeI2), JI2[i]]:
    end if:
end do:

for i from 1 to nops(JRD) do
    if ( abs(JJD[i]) <= eps ) then
        axeRD := [op(axeRD), JRD[i]]:
        axeI1D := [op(axeI1D), JI1D[i]]:
        axeI2D := [op(axeI2D), JI2D[i]]:
    end if:
end do:

# Affichage de l'ensemble dans l'espace tridimensionnel

p1 := pointplot3d({seq([axeR[i], axeI1[i], axeI2[i]],
    i=1..nops(axeR))}, scaling = constrained, symbol = point,
    axes = boxed, labels = [R, i1, i2], color = "Salmon"):

p2 := pointplot3d({seq([axeRD[i], axeI1D[i], axeI2D[i]],
    i=1..nops(axeRD))}, scaling = constrained, symbol = point,
    axes = boxed, labels = [R, i1, i2], color = "Cyan"):

display(p1,p2):

end if:
end proc:

> MorceauII := proc(c::list, N::integer, nbpt::integer, eps)

local JR, JI1, JI2, JJ: # les 4 composantes des nombres générés
local JRD, JI1D, JI2D, JJD: # les 4 composantes des nombres générés
                        # dans la couche de divergence
local axeR, axeI1, axeI2: # les points affichés

```

```

local axeRD, axeI1D, axeI2D: # les points de la couche de divergence
                             # affichés

local c1, c2: # les nombres complexes associés à c
local a, b:
local i, j:
local p1, p2: # les deux nuages de points de l'image
               # (l'ensemble et la couche de divergence)

if ( nops(c) <> 4 ) then
  print('Il faut spécifier une constante bicomplexe à quatre composantes'):
elif ( N <= 0 ) then
  print('Il faut itérer au moins une fois'):
elif ( nbpt <= 10 ) then
  print('Il faut choisir un pas de discrétisation supérieur à dix'):
elif ( eps >= 1 or eps < 0 ) then
  print('Il faut choisir une précision de coupe entre zéro et un'):
else

  # Initialisation des vecteurs

  JR := []:
  JI1 := []:
  JI2 := []:
  JJ := []:
  JRD := []:
  JI1D := []:
  JI2D := []:
  JJD := []:

  axeR := []:
  axeI1 := []:
  axeI2 := []:
  axeRD := []:
  axeI1D := []:
  axeI2D := []:

  # Création des ensembles du plan complexe

  c1 := c[1] + c[2]*I:
  c2 := c[3] + c[4]*I:
  a := JuliaRempli2D(c1 - c2*I, nbpt):
  b := Julia2D(c1 + c2*I, N):

  # Combinaison des 2 ensembles (sans la couche de divergence)

```

```

for i from 1 to nops(a[1]) do
  for j from 1 to nops(b) do
    JR := [op(JR), 0.5*(Re(a[1][i]) + Re(b[j]))]:
    JI1 := [op(JI1), 0.5*(Im(a[1][i]) + Im(b[j]))]:
    JI2 := [op(JI2), 0.5*(-Im(a[1][i]) + Im(b[j]))]:
    JJ := [op(JJ), 0.5*(Re(a[1][i]) - Re(b[j]))]:
  end do:
end do:

# Combinaison de l'ensemble de Julia et de la couche de divergence

for i from 1 to nops(a[2]) do
  for j from 1 to nops(b) do
    JRD := [op(JRD), 0.5*(Re(a[2][i]) + Re(b[j]))]:
    JI1D := [op(JI1D), 0.5*(Im(a[2][i]) + Im(b[j]))]:
    JI2D := [op(JI2D), 0.5*(-Im(a[2][i]) + Im(b[j]))]:
    JJD := [op(JJD), 0.5*(Re(a[2][i]) - Re(b[j]))]:
  end do:
end do:

# Coupe tridimensionnelle

for i from 1 to nops(JR) do
  if ( abs(JJ[i]) <= eps ) then
    axeR := [op(axeR), JR[i]]:
    axeI1 := [op(axeI1), JI1[i]]:
    axeI2 := [op(axeI2), JI2[i]]:
  end if:
end do:

for i from 1 to nops(JRD) do
  if ( abs(JJD[i]) <= eps ) then
    axeRD := [op(axeRD), JRD[i]]:
    axeI1D := [op(axeI1D), JI1D[i]]:
    axeI2D := [op(axeI2D), JI2D[i]]:
  end if:
end do:

# Affichage de l'ensemble dans l'espace tridimensionnel

p1 := pointplot3d({seq([axeR[i], axeI1[i], axeI2[i]],
  i=1..nops(axeR))}, scaling = constrained, symbol = point,
  axes = boxed, labels = [R, i1, i2], color = "Salmon"):

```

```

p2 := pointplot3d({seq([axeRD[i], axeI1D[i], axeI2D[i]],
    i=1..nops(axeRD))}, scaling = constrained, symbol = point,
    axes = boxed, labels = [R, i1, i2], color = "Cyan"):

display(p1,p2):

end if:
end proc:

> MorceauIII := proc(c::list, N1::integer, eps)

local JR, JI1, JI2, JJ: # les 4 composantes des nombres générés
local axeR, axeI1, axeI2: # les points affichés
local c1, c2: # les nombres complexes associés à c
local a, b:
local i, j:

if ( nops(c) <> 4 ) then
    print('Il faut spécifier une constante bicomplexe à quatre composantes'):
elif ( N1 <= 0 ) then
    print('Il faut itérer au moins une fois'):
elif ( eps >= 1 or eps < 0 ) then
    print('Il faut choisir une précision de coupe entre zéro et un'):
else

    # Initialisation des vecteurs

    JR := []:
    JI1 := []:
    JI2 := []:
    JJ := []:
    axeR := []:
    axeI1 := []:
    axeI2 := []:

    # Création des ensembles du plan complexe

    c1 := c[1] + c[2]*I:
    c2 := c[3] + c[4]*I:
    a := Julia2D(c1 - c2*I, N1):
    b := Julia2D(c1 + c2*I, N1):

    # Combinaison des 2 ensembles et application de la coupe

    for i from 1 to N1 do

```

```

    for j from 1 to N1 do
      JR := [op(JR), 0.5*(Re(a[i]) + Re(b[j]))]:
      JI1 := [op(JI1), 0.5*(Im(a[i]) + Im(b[j]))]:
      JI2 := [op(JI2), 0.5*(-Im(a[i]) + Im(b[j]))]:
      JJ := [op(JJ), 0.5*(Re(a[i]) - Re(b[j]))]:
    end do:
end do:

# Coupe tridimensionnelle

for i from 1 to nops(JR) do
  if ( abs(JJ[i]) <= eps ) then
    axeR := [op(axeR), JR[i]]:
    axeI1 := [op(axeI1), JI1[i]]:
    axeI2 := [op(axeI2), JI2[i]]:
  end if:
end do:

# Affichage de l'ensemble dans l'espace tridimensionnel

return pointplot3d({seq([axeR[i], axeI1[i], axeI2[i]],
  i=1..nops(axeR))}, scaling = constrained, symbol = point,
  axes = boxed, labels = [R, i1, i2], color = black):

end if:
end proc:

> JuliaBC3D := proc(c::list, N::integer, nbpt::integer, N1::integer, eps)

if ( nops(c) <> 4 ) then
  print('Il faut spécifier une constante bicomplexe à quatre composantes'):
elif ( N <= 0 ) then
  print('Il faut itérer au moins une fois'):
elif ( nbpt <= 10 ) then
  print('Il faut choisir un pas de discrétisation supérieur à dix'):
elif ( N1 <= 0 ) then
  print('Il faut itérer au moins une fois'):
elif ( eps >= 1 or eps < 0 ) then
  print('Il faut choisir une précision de coupe entre zéro et un'):
else

  display(MorceauI(c, N, nbpt, eps), MorceauII(c, N, nbpt, eps),
    MorceauIII(c, N1, eps)):

end if:

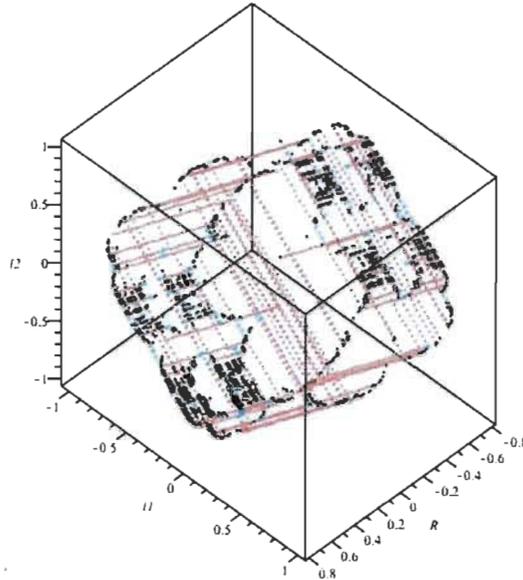
```

```

end proc:

> JuliaBC3D([0.25,0,0,0],75,75,300,0.01)

```



### B.3 Les ensembles de Julia par la méthode d'itération inverse

Pour la procédure `JuliaBC3DInverse`, la variable `N` représente le nombre d'itérations de l'algorithme d'itération inverse et `eps` identifie de nouveau la coupe tridimensionnelle. La procédure `PtFixe` est utilisée pour déterminer le point de départ de l'algorithme. Les calculs sont effectués dans les composantes idempotentes puis les résultats sont transférés sous la représentation à quatre composantes réelles pour l'affichage.

```

> JuliaBC3DInverse := proc(c::list, N::integer, eps)

local JR, JI1, JI2, JJ: # les 4 composantes des nombres générés
local axeR, axeI1, axeI2: # les points affichés
local w1, w2:
local c1, c2: # les nombres complexes associés à c
local r1, r2: # deux nombres aléatoires
local i:

if ( nops(c) <> 4 ) then
  print('Il faut spécifier une constante bicomplexe à quatre composantes'):
elif ( N <= 0 ) then

```

```

    print('Il faut itérer au moins une fois'):
elif ( eps >= 1 or eps < 0 ) then
    print('Il faut choisir une précision de coupe entre zéro et un'):
else

    # Initialisation des vecteurs et valeurs

    JR := []:
    JI1 := []:
    JI2 := []:
    JJ := []:
    axeR := []:
    axeI1 := []:
    axeI2 := []:

    c1 := c[1] + c[2]*I:
    c2 := c[3] + c[4]*I:
    w1 := PtFixe(c1 - c2*I):
    w2 := PtFixe(c1 + c2*I):

    # Algorithme d'itération inverse

    for i from 1 to N do

        r1 := rand(1..2):
        r2 := rand(1..2):

        w1 := (-1)^r1() * evalf(sqrt( w1 - (c1 - c2*I))):
        w2 := (-1)^r2() * evalf(sqrt( w2 - (c1 + c2*I))):

        JR := [op(JR), 0.5*(Re(w1) + Re(w2))]:
        JI1 := [op(JI1), 0.5*(Im(w1) + Im(w2))]:
        JI2 := [op(JI2), 0.5*(-Im(w1) + Im(w2))]:
        JJ := [op(JJ), 0.5*(Re(w1) - Re(w2))]:

    end do:

    # Coupe tridimensionnelle

    for i from 1 to nops(JR) do
        if ( abs(JJ[i]) <= eps ) then
            axeR := [op(axeR), JR[i]]:
            axeI1 := [op(axeI1), JI1[i]]:
            axeI2 := [op(axeI2), JI2[i]]:
        end if:
    end for:

```

```
end do:  
  
# Affichage de l'ensemble dans l'espace tridimensionnel  
  
return pointplot3d({seq([axeR[i], axeI1[i], axeI2[i]],  
    i=1..nops(axeR))}, scaling = constrained, symbol = point,  
    axes = boxed, labels = [R, i1, i2], color = black):  
  
end if:  
end proc:  
  
> JuliaBC3DInverse([0,1,0,0], 100000, 0.01)
```

