

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
APPLIQUÉES

PAR  
CHEIKH BÉCAYE NDONGO

PROCESSUS ALÉATOIRES ET APPLICATIONS EN  
FINANCE

MARS 2012

©Cheikh Bécaye Ndongo, 2012

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

# Table des matières

Liste des figures	iii
<b>Chapitre 1. Introduction</b>	<b>2</b>
<b>Chapitre 2. Notions de processus aléatoires</b>	<b>4</b>
2.1 Processus . . . . .	5
2.1.1 Définition . . . . .	5
2.1.2 Processus continu, dérivables et intégrables . . . . .	5
2.2 Filtration . . . . .	9
2.3 Martingales . . . . .	11
2.4 Mouvement Brownien . . . . .	12
2.4.1 Historique . . . . .	12
2.4.2 Propriétés et exemples . . . . .	14
2.5 Variation totale et quadratique . . . . .	16
2.5.1 Variation bornée . . . . .	17
2.5.2 Cas du mouvement Brownien . . . . .	18
<b>Chapitre 3. Intégration stochastique</b>	<b>20</b>
3.1 Introduction . . . . .	20
3.2 Définition . . . . .	21
3.3 Processus élémentaires . . . . .	23

3.4	Extension de l'intégrale sur $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ . . . . .	28
3.5	Cas d'un processus non aléatoire . . . . .	29
3.6	Cas d'un processus de la forme $f(B)$ . . . . .	30
3.7	Formule d'Itô pour le mouvement Brownien . . . . .	36
3.7.1	Définition des processus d'Itô . . . . .	36
3.7.2	Intégration . . . . .	39
3.7.3	Intégration par parties . . . . .	40
3.7.4	Autres considérations sur la formule d'Itô . . . . .	41
<b>Chapitre 4. Équations différentielles stochastiques</b>		<b>43</b>
4.1	Introduction . . . . .	43
4.2	Équations homogènes en temps . . . . .	45
4.2.1	Équations non homogènes en temps . . . . .	51
4.3	Théorème de Girsanov: applications . . . . .	52
4.4	Approximation d'une équation différentielle stochastique . . . . .	56
4.4.1	Méthode d'Euler . . . . .	57
4.4.2	Méthode de Milstein . . . . .	58
<b>Chapitre 5. Étude et application: modèle Black–Scholes</b>		<b>60</b>
5.1	Historique . . . . .	60
5.2	Description du modèle de Black-Scholes . . . . .	61
5.3	Applications . . . . .	63

## LISTE DES FIGURES

5.1	Simulation avec la méthode d'Euler . . . . .	65
5.2	Simulation avec la méthode de Milstein . . . . .	66
5.3	Sensibilité par rapport au nombre de séries . . . . .	67
5.4	Sensibilité par rapport à l'intervalle de confiance . . . . .	67
5.5	Sensibilité par rapport au pas de discrétisation . . . . .	68

## RÉSUMÉ

La description de plusieurs phénomènes en finance nécessite souvent l'utilisation des outils mathématiques reliés aux processus aléatoires. Dans ce mémoire, l'auteur introduit les notions de base relatives aux processus et aux équations différentielles stochastiques en s'efforçant de présenter les éléments théoriques les plus importants. Il pousse cette étude en examinant une application en finance du très important modèle de Black-Scholes. Il présente ensuite les schémas numériques d'Euler et de Milstein, et les compare à l'aide de simulations. Il offre aussi quelques résultats concernant la sensibilité de l'équation de Black-Scholes selon certains paramètres.

## REMERCIEMENTS

Je remercie toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire. De plus, je tiens à exprimer toute ma gratitude envers mes directeurs de recherche, Mhamed Mesfioui et Jean-François Quessy, professeurs au Département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières, pour leur encadrement précieux et l'ensemble du temps dont ils ont eu l'amabilité de me consacrer. En plus d'avoir accepté de m'encadrer, ils ont su m'encourager et me soutenir tout au long de ce travail. La confiance qu'ils m'ont témoigné, l'aide financière qu'ils m'ont octroyée, leur grande disponibilité et leurs judicieux conseils ont assuré la réussite de ce mémoire. J'ai grandement apprécié travailler avec eux.

Je remercie également l'Institut des Sciences Mathématiques du Québec, la fondation UQTR et le Département de mathématiques et d'informatique de l'UQTR pour les bourses d'études qu'ils m'ont accordées.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leur encouragement et leur soutien tout au long de ces années d'étude.

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

Les spécialistes de la finance ont en général recours, depuis quelques années, à des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (martingales, intégrales stochastiques, ...) pour décrire certains phénomènes et mettre au point des techniques de calcul.

L'intervention du calcul des probabilités en modélisation financière n'est pas récente. En effet, c'est Bachelier qui en tentant de bâtir une "théorie de la spéculation" a découvert, au début du XX<sup>ième</sup> siècle, l'objet mathématique appelé "mouvement Brownien". À partir de 1973 cette théorie a pris une nouvelle dimension avec les travaux de Black-Scholes-Merton sur l'évaluation ("pricing" en anglais) et la couverture des options, voir Geman (1998).

Depuis ces travaux, le monde de la finance a connu de grands bouleversements, les marchés (taux de change, taux d'intérêt, ...) sont devenus plus volatils créant ainsi une demande croissante des produits dérivés (options, contrats à terme, dérivés de crédit) pour contrôler, miser, spéculer et gérer les risques. Les progrès technologiques ont permis aux institutions financières de créer et de mettre sur le marché des produits et des services qui perme-



tront de se prémunir contre les risques et de générer des revenus. La conception, l'analyse et le développement de ces produits et services nécessitent une connaissance approfondie des théories financières avancées, une maîtrise des mathématiques et des calculs numériques sophistiqués.

Il est à rappeler que Black et Scholes en se référant à Geman (1998) ont été les premiers à proposer un modèle conduisant à une formule explicite du prix d'un "call européen" sur une action ne donnant pas de dividendes. Dans ce modèle, la formule obtenue ne dépend que d'un paramètre non directement observable sur le marché et appelé "volatil" par les praticiens.

Le recours à la notion d'intégrale stochastique, pour exprimer les gains et les pertes dans les stratégies de gestion de portefeuille, et surtout l'utilisation du calcul stochastique en finance, a été la motivation de ce mémoire.

Le mémoire est structuré comme suit:

- (i) premièrement, nous présentons une synthèse détaillée des processus aléatoires (processus, filtration, martingale, mouvement Brownien, variation totale et quadratique),
- (ii) ensuite, nous présentons les équations différentielles stochastiques: définitions et propriétés, formule d'Itô, processus d'Itô avec l'étude de quelques schémas numériques,
- (iii) finalement nous étudions en détail un modèle d'application en finance, à savoir le modèle de Black-Scholes pour lequel nous présentons les hypothèses de marché et certaines notions en finance.
- (iv) nous terminons par une conclusion.

## CHAPITRE 2

### NOTIONS DE PROCESSUS ALÉATOIRES

Les fluctuations observées donnent la variation des prix des actions, des taux d'intérêt ... et ne peuvent pas être prédites avec exactitude à un instant ultérieur. Ces variables qualifiées de processus aléatoires se comportent de façon non déterministe.

Nous introduisons les notions de base qui nous permettrons d'étudier en détail les équations différentielles stochastiques.

Pour ce faire, nous commençons par une présentation des définitions et de rappels sur les processus aléatoires. Ensuite, nous aborderons, entre autres les notions de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité d'un processus en donnant certaines caractérisations basées sur des théorèmes connus de la littérature. Les notions de filtration adaptée, engendrée et complète seront aussi abordées, suivi de l'étude des martingales, du mouvement Brownien et de la variation quadratique.

## 2.1 Processus

Un processus aléatoire est une fonction du temps  $X_t$ , telle que pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité, noté  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , où  $\Omega$  est l'espace échantillonnal,  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre, et  $P$  est une mesure de probabilité.

### 2.1.1 Définition

Un processus aléatoire  $X_t$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est une famille de variables aléatoires  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  définies sur le même espace de probabilité. En d'autres termes,  $X$  est une fonction à deux variables telle que  $X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ . Nous remarquons que

- a) l'espace d'arrivée peut être beaucoup plus complexe que  $\mathbb{R}$ ;
- b)  $t$  représente, en général, le temps;
- c) un processus peut être vu comme une fonction qui  $\forall \omega \in \Omega$ , associe une fonction  $X_t(\omega)$  de  $[0, \infty)$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $t \rightarrow X_t(\omega)$  s'appelle la trajectoire du processus.

### 2.1.2 Processus continus, dérivables et intégrables

Un processus  $X_t$  est dit continu si la fonction  $t \rightarrow X_t(\omega)$  est continue pour presque tout  $\omega \in \Omega$ .

Les notions de continuité, dérivabilité et intégrabilité devront être définies selon des critères de convergence. Le critère le plus utilisé est celui de la convergence en moyenne quadratique, car il est bien adapté aux simulations. Spécifiquement, un processus  $X_t$ , dont la variance existe, converge en moyenne quadratique au point  $t_0$  si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{E} \{ (X_t - X_{t_0})^2 \} = 0,$$

où  $\mathbf{E}$  est l'espérance mathématique.

Nous dirons qu'un processus aléatoire est continu en moyenne quadratique sur un intervalle  $[a, b]$  si  $X_t$  est continu en moyenne quadratique pour tout  $t \in [a, b]$ . Le théorème suivant donne une caractérisation de la continuité en moyenne quadratique.

**Théorème 2.1.** *Un processus  $X_t$  est continu en moyenne quadratique si et seulement si sa fonction d'autocorrélation, à savoir*

$$\gamma(t_1, t_2) = \mathbf{E}(X_{t_1} X_{t_2}),$$

*est continue à  $t_1 = t_2 = t, \forall t > 0$ .*

**Démonstration.**

Supposons que  $\gamma(t_1, t_2)$  est continue à  $t_1 = t_2 = t$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ (X_{t_1} - X_{t_2})^2 \} &= \mathbf{E}(X_{t_1}^2) + \mathbf{E}(X_{t_2}^2) - 2\mathbf{E}(X_{t_1} X_{t_2}) \\ &= \mathbf{E}(X_{t_1}^2) + \mathbf{E}(X_{t_2}^2) - 2\gamma(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $t_1 = t_2 = t$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} \{ (X_{t_1} - X_{t_2})^2 \} = 0.$$

Ce qui démontre que le processus  $X_t$  est continu en moyenne quadratique.

Inversement, si le processus est continu en moyenne quadratique, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_t X_t) &= \mathbb{E} \{ (X_{t_1} - X_t)(X_{t_2} - X_t) \} \\ &\quad + \mathbb{E} \{ (X_{t_1} - X_t) X_t \} + \mathbb{E} \{ (X_{t_2} - X_t) X_t \}. \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant trois fois l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_t X_t)| &\leq \sqrt{\mathbb{E} \{ (X_{t_1} - X_t)^2 \}} \sqrt{\mathbb{E} \{ (X_{t_2} - X_t)^2 \}} \\ &\quad + \sqrt{\mathbb{E} \{ (X_{t_1} - X_t)^2 \}} \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2)} \\ &\quad + \sqrt{\mathbb{E} \{ (X_{t_2} - X_t)^2 \}} \sqrt{\mathbb{E}(X_t^2)}. \end{aligned}$$

Puisque  $X_t$  est continu en moyenne quadratique, on en déduit que

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} |\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) - \mathbb{E}(X_t X_t)| = 0,$$

d'où

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} \mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2}) = \mathbb{E}(X_t X_t).$$

Donc,  $\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2})$  est une fonction continue à  $t_1 = t_2 = t$ .  $\diamond$

Le concept de dérivabilité en moyenne quadratique est défini de façon semblable. Nous dirons qu'un processus aléatoire  $X_t$  est dérivable en moyenne quadratique au point  $t_0$  s'il existe un processus  $Y_t$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} \left\{ \left( \frac{X_t - X_{t_0}}{t - t_0} - Y_{t_0} \right)^2 \right\} = 0.$$

Si  $X_t$  est dérivable en moyenne quadratique pour tout  $t \in [a, b]$ , alors il est dérivable en moyenne quadratique sur  $[a, b]$ . Cette dérivabilité est caractérisée par le théorème suivant.

**Théorème 2.2.** *Un processus  $X_t$  est dérivable en moyenne quadratique si et seulement si*

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \gamma(t_1, t_2)$$

*existe et est continue à  $t_1 = t_2 = t$ .*

Nous procédons comme pour l'intégrale de Riemann, en considérant des suites de fonctions en escalier et le passage à la limite sera pris au sens de la moyenne quadratique.

Un processus aléatoire  $X_t$  est dit intégrable en moyenne quadratique sur un intervalle  $[a, b]$  s'il existe une variable aléatoire  $Y$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \left( \Delta_n \sum_{k=0}^n X_{k\Delta_n+a} - Y \right)^2 \right\} = 0,$$

où  $\Delta_n = (b - a)/n$  est la longueur des  $n$  intervalles qui subdivisent  $[a, b]$ . Le théorème ci-dessous caractérise l'intégrabilité en moyenne quadratique.

**Théorème 2.3.** *Un processus aléatoire  $X_t$  est intégrable en moyenne quadratique sur l'intervalle  $[a, b]$  si et seulement si l'intégrale*

$$\int_a^b \int_a^b \gamma(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty.$$

**Remarque 2.1.** Les démonstrations des Théorèmes 2.2 et 2.3 sont semblables à celle du Théorème 2.1 sur la continuité; elles ne sont donc pas présentées. Ces deux théorèmes sont tirés de Huynh et al. (2006).

**Exemple 2.1.** Un processus  $X_t$  est qualifié de Gaussien si toute combinaison linéaire finie de  $(X_t, t \geq 0)$  est une variable aléatoire de loi normale. Autrement dit, pour tout  $t_1, \dots, t_n$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , la loi de la variable aléatoire

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$$

est normale.

Au même titre qu'un vecteur aléatoire de loi normale caractérisé par un vecteur de moyennes et une matrice de covariance, un processus Gaussien est caractérisé par sa fonction espérance, pour tout  $t$ , et par sa fonction de covariance  $\gamma(t_1, t_2)$ .

## 2.2 Filtration

Nous nous intéressons ici aux phénomènes dépendant du temps. Notons que l'information connue à un temps  $t$  sera rassemblée dans une tribu  $\mathcal{A}_t$ . Une filtration  $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{A}$ , c'est à dire que  $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_s$  pour tout  $t \leq s$ . Puisque  $\mathcal{A}_t$  représente la quantité d'informations disponibles à l'instant  $t$ , il est normal que celle-ci augmente avec le temps.

Une tribu est dite complète si elle contient l'ensemble des négligeables  $\mathcal{N}$  de  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui est défini par

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega, \exists A \in \mathcal{A} | N \subset A, P(A) = 0\}. \quad (2.1)$$

Une filtration  $\mathcal{A}$  est complète si tout  $\mathcal{A}_t$  contient l'ensemble des négligeables  $\mathcal{N}$ , ce qui équivaut à  $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}_0$ .

Un processus aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  est dit  $\mathcal{A}$ -adapté si pour tout  $t$ , la variable aléatoire  $X_t$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable.

**Proposition 2.1.** *Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est  $\mathcal{A}$ -adapté, alors la variable aléatoire  $X_s$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable pour tout  $s \leq t$ .*

**Démonstration.**

La proposition est naturelle lorsque nous raisonnons en terme d'information. En effet, la tribu  $\mathcal{A}_t$  est plus grande que la tribu  $\mathcal{A}_s$ , donc, si  $X_s$  est connue avec l'information  $\mathcal{A}_s$ , elle l'est aussi avec l'information  $\mathcal{A}_t$ . Analytiquement, on remarque que l'image réciproque d'un borélien  $\mathcal{B}$  par  $X_s$ , noté  $X_s^{-1}(\mathcal{B})$ , est un élément de  $\mathcal{A}_s$ , donc de  $\mathcal{A}_t$ .  $\diamond$

La filtration engendrée par un processus  $X$ , notée  $\mathcal{A}^X$ , est la suite croissante des tribus  $\mathcal{A}_t^X$  engendrées par  $(X_s)_{s \leq t}$ ; c'est la plus petite filtration qui rend  $X$  adapté. Une filtration  $\mathcal{A}$  est complète lorsque tout  $\mathcal{A}_t$  contient l'ensemble des négligeables  $\mathcal{N}$  défini à l'équation (2.1). En d'autres termes,  $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}_0$ . En général, la filtration complète engendrée par un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est appelée la filtration naturelle du processus. Dans la suite, nous parlerons de filtration naturelle de processus plutôt que de filtration complète.



## 2.3 Martingales

En général, nous rencontrons plus de processus continus que de processus discrets dans les problèmes financiers. L'étude des processus continus est parfois plus difficile, mais beaucoup plus intéressante. En conséquence, les définitions qui suivent vont porter majoritairement sur les processus continus.

**Définition 2.1.** *Un processus aléatoire  $X_t$  est une  $\mathcal{A}$ -martingale si*

- (i)  $X_t$  est  $\mathcal{A}$ -adapté.
- (ii)  $X_t$  est intégrable, c'est à dire  $E(|X_t|) < \infty$ , pour tout  $t$ .
- (iii)  $E[X_t | \mathcal{A}_s] = X_s$ ,  $\forall s \leq t$ .

Il est à noter qu'une sur-martingale est un processus qui vérifie les propriétés (i) et (ii), et qui satisfait  $E[X_t | \mathcal{A}_s] \leq X_s$  pour tout  $s \leq t$ . De façon similaire, une sous-martingale satisfait (i), (ii) et  $E[X_t | \mathcal{A}_s] \geq X_s$  pour tout  $s \leq t$ .

**Remarque 2.2.** Une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale est un jeu perdant, et une sous-martingale est un jeu gagnant.

Si  $X_t$  est une martingale, alors pour tout  $t$ , on a  $E(X_t) = E(X_0)$ . Aussi, si  $(X_t)_{t \leq T}$  est une martingale, alors ce processus est complètement déterminé par sa valeur terminale, à savoir  $X_t = E(X_T | \mathcal{A}_t)$ . Cette propriété est d'un usage très fréquent en finance.

**Proposition 2.2.** *Soit  $X_t$ , une  $\mathcal{A}$ -martingale de carré intégrable, c'est à dire que  $E(X_t^2) < \infty$  pour tout  $t$ . Alors, pour  $s \leq t$ , on a*

$$E\{(X_t - X_s)^2 | \mathcal{A}_s\} = E(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{A}_s).$$

**Démonstration.**

Par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned} E\{(X_t - X_s)^2 | \mathcal{A}_s\} &= E(X_t^2 | \mathcal{A}_s) - 2E(X_s X_t | \mathcal{A}_s) + E(X_s^2 | \mathcal{A}_s) \\ &= E(X_t^2 | \mathcal{A}_s) - 2X_s E(X_t | \mathcal{A}_s) + X_s^2 \\ &= E(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{A}_s), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\diamond$

**Exemple 2.2.** Si  $X$  est une martingale telle que  $E(X^2) < \infty$ , alors  $X^2$  et  $|X|$  sont des sous-martingales. Ceci découle du fait que  $\phi(x) = x^2$  et  $\phi(x) = |x|$  sont convexes. En effet, soit  $\phi$  une fonction convexe, mesurable et intégrable avec  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $\phi(X)$  est une sous-martingale car, d'une application de l'inégalité de Jensen, on a

$$E\{\phi(X_t) | \mathcal{A}_s\} \geq \phi\{E(X_t | \mathcal{A}_s)\} = \phi(X_t).$$

## 2.4 Mouvement Brownien

### 2.4.1 Historique

En 1828, Robert Brown (Brown, 1828) a observé le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Ce mouvement aléatoire, dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion, ou diffusion, du pollen dans l'eau. Par la suite, Delsaux (1877) explique ces changements incessants de direction de trajectoire par les chocs

entre les particules de pollen et les molécules d'eau; ce type de mouvement est qualifié de "mouvement au hasard". Bachelier (1900), en étudiant les cours de la bourse, a mis en évidence le caractère markovien du mouvement Brownien: la position d'une particule à l'instant  $t + s$  dépend de sa position en  $t$  et ne dépend pas de sa position avant  $t$ . En 1905, Einstein, par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur, a déterminé la densité de transition du mouvement Brownien et relie par la suite le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ensuite, Smoluchowski (1906) a décrit ce mouvement comme une limite de promenades aléatoires.

La première étude mathématique rigoureuse sur la continuité et la non-dérivabilité des trajectoires du mouvement Brownien est faite par Wiener (1923). Le mouvement Brownien passionne les probabilistes, tant pour l'étude de ses trajectoires qu'en théorie de l'intégration stochastique.

Pour définir formellement le mouvement Brownien, soit un espace  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  sur lequel nous définissons le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$ .

**Définition 2.2.** *Un mouvement Brownien est un processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  tel que*

$\mathbb{B}_1$ )  $B_0 = 0$  presque sûrement;

$\mathbb{B}_2$ )  $B$  est continu, c'est à dire  $t \rightarrow B_t(\omega)$  est continue pour presque tout  $\omega$ ;

$\mathbb{B}_3$ )  $B$  est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{A}_s^B = \sigma\{(B_s)_{s \leq t}\}$ ;

$\mathbb{B}_4$ ) les accroissements sont stationnaires (pour  $s < t$  l'accroissement  $W_t - W_s$  ne dépend que de la valeur de  $t-s$ ), Gaussiens, et tels que si  $s \leq t$ , on a  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

### 2.4.2 Propriétés et exemples

Soit  $B = (B_t)_{t>0}$  un mouvement Brownien, et  $\mathcal{A}$ , sa filtration naturelle. Alors

- (i)  $(B_t)$ ,  $(B_t^2 - t)$  et  $\exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)$  où  $\sigma \in \mathbb{R}$ , sont des  $\mathcal{A}$ -martingales;
- (ii)  $(-B_t)$ ,  $(B_{c^2 t}/c)$  et  $(tB_{1/t})$  où  $c \in \mathbb{R}$ , sont des mouvements Browniens;
- (iii) les trajectoires de  $B$  sont continues et presque sûrement nulle part différentiables.

**Démonstration.** Les processus définis au-dessus sont  $\mathcal{A}$ -adaptés. Ils sont intégrables car  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , donc l'espérance, la variance et la transformée de Laplace de ces dernières sont finies. Il reste alors à vérifier la dernière condition. Faisons-le, à titre d'exemple, pour les processus  $B_t$  et  $B_{c^2 t}/c$ . Nous avons

$$E(B_t | \mathcal{A}_s) = E(B_s | \mathcal{A}_s) + E(B_t - B_s | \mathcal{A}_s) = B_s + E(B_t - B_s) = B_s + 0 = B_s.$$

D'abord,  $X_t = B_{c^2 t}/c$  est Gaussien car c'est une combinaison linéaire de processus Gaussiens. Ensuite,  $E(X_t) = 0$  et  $E(X_t X_s) = \min(c^2 t, c^2 s)/c^2 = \min(t, s)$ , d'après le théorème qui suit. Nous déduisons de ce même théorème que le processus  $X_t$  est un mouvement Brownien.  $\diamond$

En général pour prouver qu'un processus est un mouvement Brownien, nous utilisons la caractérisation donnée par le théorème ci-dessous.

**Théorème 2.4.** *Un processus  $B$  est un mouvement Brownien si et seulement si c'est un processus Gaussien continu, centré, et de fonction de covariance  $\text{cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$ .*

**Démonstration.**

( $\implies$ ) Les composantes du vecteur  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ , où  $t_1 \leq t_2 \dots \leq t_n$ , sont des variables aléatoires Gaussiennes et indépendantes; il est donc lui-même Gaussien. Par conséquent, toute combinaison linéaire est Gaussienne et le processus  $B$  est Gaussien. Par hypothèse, le processus est continu. Il est aussi centré car  $E(B_t) = E(B_t - B_0) = 0$ . Enfin, sa fonction covariance est, pour  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} \text{cov}(B_s, B_t) &= E(B_s B_t) \\ &= E(B_s (B_t - B_s)) + E(B_s^2) \\ &= E(B_s) E(B_t - B_s) + \text{var}(B_s - B_0) \\ &= 0 + s \\ &= s. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Nous allons montrer une-à-une les propriétés du mouvement Brownien décrites à la définition 2.2. Pour  $\mathbb{B}_1$ , on a  $E(B_0^2) = \text{var}(B_0) = 0$ , ce qui fait que  $B_0 = 0$  presque sûrement. Ensuite,  $B$  est continu, par hypothèse, donc  $\mathbb{B}_2$  est satisfaite. Pour  $\mathbb{B}_3$ , nous remarquons que pour  $r_1 \leq \dots \leq r_n \leq s \leq t$ , le vecteur  $(B_{r_1}, \dots, B_{r_n}, B_t - B_s)$  est Gaussien. De plus,

$$\text{cov}(B_t - B_s, B_{r_i}) = r_i \wedge s - \min(r_i, t) = 0.$$

Donc,  $B_t - B_s$  est indépendante de tout vecteur  $(B_{r_1}, \dots, B_{r_n})$ , et donc indépendante de  $\mathcal{A}_s^B := \sigma\{(B_s)_{s \leq t}\}$ . Finalement, pour montrer  $\mathbb{B}_4$ , nous constatons que pour  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est Gaussienne, et donc déterminée par son

espérance et sa variance, qui sont  $E(B_t - B_s) = 0$  et

$$\begin{aligned}\text{var}(B_t - B_s) &= \text{var}(B_t) + \text{var}(B_s) - 2\text{cov}(B_t, B_s) \\ &= t + s - 2s \wedge t \\ &= t - s.\end{aligned}$$

Donc  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  et la loi de  $B_t - B_s$  ne dépend que de  $t - s$ .  $\diamond$

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$ , un mouvement Brownien. Le processus  $Y(t) := e^{X_t}$  est appelé le mouvement Brownien log-normal. Aussi, si  $Y(t) = \exp(uX_t + \nu t)$ , alors

$$E\{Y(t)\} = \exp\left\{t\left(\nu + \frac{u^2}{2}\right)\right\}$$

et

$$\text{var}\{Y(t)\} = \exp\left\{2t\left(\nu + \frac{u^2}{2}\right)\right\} (e^{tu^2} - 1).$$

En effet,  $E\{Y(t)\} = e^{\nu t} E(e^{uX_t}) = e^{\nu t} g_{X_t}(u)$ , où  $g_{X_t}(u)$  est la fonction génératrice des moments de  $X_t$ , qui vaut  $e^{u^2 t}$ . De plus,

$$E\{Y^2(t)\} = E\{e^{2(\nu t + uX_t)}\} = e^{(2\nu)t} g_{X_t}(2u) = e^{(2\nu)t} e^{(2u)^2 t/2} = e^{2t(\nu + u^2)}.$$

Nous en déduisons que

$$\text{var}\{Y(t)\} = E\{Y^2(t)\} - [E\{Y(t)\}]^2 = e^{2t(\nu + u^2/2)}(e^{tu^2} - 1).$$

## 2.5 Variation totale et quadratique

**Définition 2.3.** La variation infinitésimale d'ordre  $p$  d'un processus  $X_t$  défini sur  $[0, T]$  associée à une subdivision  $\Pi_n = (t_1^n, \dots, t_n^n)$  est définie par

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p.$$

Si  $V_T^p(\Pi_n)$  a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence  $L^p$ ) lorsque

$$\pi_n := \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i \leq n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \longrightarrow 0.$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre  $p$  de  $X_t$  sur  $[0, T]$ . En particulier,

- si  $p = 1$ , la limite s'appelle la variation totale de  $X_t$  sur  $[0, T]$ ;
- si  $p = 2$ , la limite s'appelle la variation quadratique de  $X_t$  sur  $[0, T]$  et est notée  $\langle X \rangle_T$ .

### 2.5.1 Variation bornée

Un processus  $X_t$  est un processus à variation bornée sur  $[0, T]$  s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire que

$$\sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty \quad \text{presque sûrement.}$$

**Remarque 2.3.** Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement, alors elle vaut

$$V_T^1 := \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \quad \text{presque sûrement,}$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des subdivisions possibles de  $[0, T]$ . Réciproquement, si ce supremum est fini, le processus admet une variation totale. La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.

### 2.5.2 Cas du mouvement Brownien

Soit  $(B_t)_{t \in \mathbb{P}}$ , un mouvement Brownien standard que nous noterons  $B(t)$  par la suite. Pour  $t > 0$ , nous définissons

$$\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right\}^2.$$

**Définition 2.4.** Pour tout  $t > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \quad \text{presque sûrement.}$$

Nous définissons la variation quadratique du mouvement Brownien standard  $\langle B \rangle_t$  comme étant donnée par cette limite et on pose  $\langle B \rangle_0 = 0$ .

**Démonstration.**

Soient  $X_i = B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right)$ ,  $1 \leq i \leq 2^n$  et  $t, n$  fixés. Les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées,  $X_i \sim \mathcal{N}(0, t/2^n)$  et  $\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} X_i^2$ . Nous avons alors

$$E\left(\langle B \rangle_t^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{2^n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{t}{2^n} = t$$

et

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\langle B \rangle_t^{(n)}\right) &= \sum_{i=1}^{2^n} \text{var}(X_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \left( E(X_i^4) - E(X_i^2)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2^n} \left( 3 \frac{t^2}{4^n} - \frac{t^2}{4^n} \right) = \frac{t^2}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$



Par conséquent, en appliquant l'inégalité de Chebychev (avec la fonction  $x \mapsto x^2$ ) il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( |\langle B \rangle_t^{(n)} - t| > \frac{1}{k} \right) \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{var} \left( \langle B \rangle_t^{(n)} \right) = k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^2}{2^{n-1}} < \infty.$$

Comme cette somme est finie, nous pouvons utiliser le lemme de Borel-Cantelli qui nous assure que

$$\mathbb{P} \left( \limsup_n \left\{ |\langle B \rangle_t^{(n)} - t| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0.$$

Nous avons ainsi

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \limsup_n \left\{ |\langle B \rangle_t^{(n)} - t| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \quad \text{presque sûrement,}$$

ce qui complète la démonstration.  $\diamond$

**Remarque 2.4.** La variation totale du mouvement Brownien trajectoire par trajectoire est la longueur de son chemin. Un mouvement Brownien oscille en permanence et donc la longueur de ses trajectoires est infinie. Ceci est également lié au fait que les trajectoires du mouvement Brownien, bien que continues ne sont pas régulières. En d'autres termes, presque toutes les trajectoires du mouvement brownien ne sont nulle part différentiables sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Proposition 2.3.** *Si  $X_t$  est un processus, alors*

- *il est à variation bornée si et seulement si il est la différence entre deux processus croissants;*
- *s'il est à variation bornée et à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque sûrement, c'est-à-dire que  $\langle X \rangle_T = 0$ .*

## CHAPITRE 3

# INTÉGRATION STOCHASTIQUE

### 3.1 Introduction

Tel que mentionné auparavant, beaucoup de phénomènes en finance sont aléatoires et peuvent être caractérisés par les outils statistiques du calcul stochastique. Il est à noter que notre objectif n'est pas de faire un exposé en profondeur du calcul stochastique, mais plutôt de mettre en place les outils pour en étudier certaines applications. Ainsi, certains des résultats théoriques qui nécessitent de longues démonstrations ne seront pas abordés; néanmoins, une esquisse de preuve sera parfois fournie.

L'élaboration du calcul différentiel a permis de donner un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire. Cette dernière a permis de modéliser plusieurs phénomènes variables dans le temps. En ajoutant des perturbations aléatoires à ces équations, on rencontre dans le domaine des mathématiques financières des difficultés liées surtout au fait que les trajectoires du mouvement Brownien ne sont nulle part dérivables.

Ici, nous présenterons la construction d'une intégrale par rapport au mouvement Brownien. Nous commençons par définir l'intégrale pour les processus élémentaires. Ensuite, nous étendons la définition aux processus adaptés ayant un moment d'ordre 2, en utilisant un résultat sur les espaces complets. Pour finir, nous regardons la formule d'Itô, de même que l'intégrale par rapport à un processus d'Itô.

### 3.2 Définition

Soit  $\theta = (\theta_t)$ , un processus élémentaire. Nous souhaitons donner un sens à la variable aléatoire

$$\int_0^T \theta_t dB_t, \quad (3.1)$$

où  $B_t$  est un mouvement Brownien. Pour cela, rappelons que lorsque nous intégrons une fonction  $g$  régulière par rapport à une fonction dérivable  $f$ , alors

$$\int_0^T g(t) df(t) = \int_0^T g(t)f'(t) dt.$$

Dans le cas où  $f$  n'est pas dérivable, mais en supposant qu'elle est à variation bornée, alors l'intégrale de Stieltjes, définie par

$$\int_0^T g(t) df(t) = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) \{f(t_{i+1}) - f(t_i)\},$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  et  $\pi_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$  peut être utilisée. Malheureusement, puisque le mouvement Brownien n'est pas à variation bornée, la définition précédente ne s'applique pas à l'intégrale (3.1).

Cependant, puisque  $B_t$  est à variation quadratique finie, car pour tout  $t > 0$  nous avons d'après un résultat du chapitre précédent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \quad \text{p.s.},$$

il semble naturel de définir l'intégrale par rapport au mouvement Brownien comme une limite dans l'espace  $\mathcal{L}^2$  de variables aléatoires dont le moment d'ordre deux existe. Autrement dit,  $X \in \mathcal{L}^2$  si et seulement si  $E(X^2) < \infty$ . Ainsi, on définit

$$\int_0^T \theta_t dB_t = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),$$

où le processus  $\theta_t$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}^2$ . Nous exigeons aussi que  $\theta_t$  soit  $\mathcal{A}$ -adapté, de telle sorte que  $\theta_{t_i}$  soit indépendant de  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . Dans certaines applications financières,  $\theta_t$  désigne la quantité d'actifs risqués dans un portefeuille à l'instant  $t$ , alors que  $dB_t$  représente sa variation infinitésimale.

Pour des raisons techniques, des conditions de régularité sont souvent imposées aux processus étudiés. En général, nous exigeons qu'ils soient presque sûrement *continus à droite avec une limite à gauche* (càdlag). Par la suite, l'espace sur lequel sera construite l'intégrale stochastique sera  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ , qui est l'ensemble des processus càdlag  $\theta_t$  sur  $[0, T]$  qui sont  $\mathcal{A}$ -adaptés et tels que

$$E \left( \int_0^T \theta_s^2 ds \right) < \infty.$$

### 3.3 Processus élémentaires

**Définition 3.5.** Un processus  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  est dit *élémentaire* s'il existe une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  et un processus discret  $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  qui est  $\mathcal{A}_{t_i}$ -adapté et tel que

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbb{I}_{]t_i, t_{i+1}]}(t).$$

En d'autres mots, un processus élémentaire  $(\theta_t)$  prend un nombre fini de valeurs sur des sous-intervalles de  $[0, T]$ . Évidemment, l'ensemble  $\mathcal{E}$  des processus élémentaires est un sous-espace de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ .

**Définition 3.6.** L'intégrale stochastique entre 0 et  $t \leq T$  d'un processus élémentaire  $\theta_t \in \mathcal{E}$  est la variable aléatoire

$$\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}),$$

où  $a \wedge b = \min(a, b)$ .

De cette manière, nous associons à un processus  $\theta \in \mathcal{E}$  le processus

$$\Theta_t = \left( \int_0^t \theta_r dB_r \right)_{0 \leq t \leq T}.$$

De façon naturelle l'intégrale sur un intervalle  $[s, t]$  est définie par

$$\int_s^t \theta_r dB_r = \int_0^t \theta_r dB_r - \int_0^s \theta_r dB_r = \Theta_t - \Theta_s.$$

**Proposition 3.1.** Pour  $\theta, \phi \in \mathcal{E}$ , nous avons

$$(i) \quad \mathbb{E} \left( \int_s^t \theta_r dB_r \middle| \mathcal{A}_s \right) = 0;$$

$$(ii) \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^t \theta_r dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{A}_s \right\} = \mathbb{E} \left( \int_s^t \theta_r^2 dr \middle| \mathcal{A}_s \right);$$

$$(iii) \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^t \theta_r dB_r \right) \left( \int_s^u \phi_r dB_r \right) \middle| \mathcal{A}_s \right\} = \mathbb{E} \left( \int_s^{t \wedge u} \theta_r \phi_r dr \middle| \mathcal{A}_s \right).$$

**Démonstration.**

(i) Nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \int_0^t \theta_r dB_r \middle| \mathcal{A}_s \right) \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_{t_j} \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_{t_j} \right\} + \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} \{ \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_{t_j} \} \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} \{ \theta_i \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{A}_{t_i}) \middle| \mathcal{A}_{t_j} \} \\ &= \int_0^s \theta_r dB_r, \end{aligned}$$

car  $\mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{A}_{t_i}) = 0$ . Enfin, par la linéarité de l'intégrale,

$$\mathbb{E} \left( \int_s^t \theta_r dB_r \middle| \mathcal{A}_s \right) = 0.$$

(ii) Par un calcul direct,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^t \theta_r dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{A}_s \right\} \\
&= \mathbb{E} \left[ \left\{ \sum_{i=j}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right\}^2 \middle| \mathcal{A}_{t_j} \right] \\
&= \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} \{ \theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{A}_{t_j} \} \\
&\quad + 2 \sum_{i < l < k-1} \mathbb{E} \{ \theta_i \theta_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \middle| \mathcal{A}_{t_j} \} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E} [ \theta_i^2 \mathbb{E} \{ (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{A}_{t_i} \} \middle| \mathcal{A}_{t_j} ] \\
&\quad + 2 \sum_{i < l < k-1} \mathbb{E} \{ \theta_i \theta_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mathbb{E} (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) \middle| \mathcal{A}_{t_j} \} \middle| \mathcal{A}_{t_j} \} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E} \{ \theta_i^2 (t_{i+1} - t_i) \middle| \mathcal{A}_{t_i} \} + 0 \\
&= \mathbb{E} \left( \int_s^t \theta_r^2 dr \middle| \mathcal{A}_s \right).
\end{aligned}$$

(iii) Nous avons pour  $u \leq t$  que

$$\begin{aligned}
& 2 \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^t \theta_r dB_r \right) \left( \int_s^u \phi_r dB_r \right) \middle| \mathcal{A}_s \right\} \\
&= \mathbb{E} \left[ \left\{ \int_s^t (\theta_r + \phi_r \mathbb{1}_{r \leq u}) dB_r \right\}^2 \middle| \mathcal{A}_s \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^t \theta_r dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{A}_s \right\} - \mathbb{E} \left\{ \left( \int_s^u \phi_r dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{A}_s \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \int_s^t (\theta_r + \phi_r \mathbb{1}_{r \leq u})^2 dr \middle| \mathcal{A}_s \right\} - \mathbb{E} \left( \int_s^t \theta_r^2 dr \middle| \mathcal{A}_s \right) - \mathbb{E} \left( \int_s^u \phi_r^2 dr \middle| \mathcal{A}_s \right) \\
&= 2 \mathbb{E} \left( \int_s^u \theta_r \phi_r dr \middle| \mathcal{A}_s \right).
\end{aligned}$$

◇

**Proposition 3.2.** *Si  $\theta \in \mathcal{E}$ , alors*

- (i)  $\theta \mapsto \Theta_t$  est linéaire;
- (ii)  $t \mapsto \Theta_t$  est continue presque sûrement et  $\mathcal{A}_t$ -adapté;
- (iii)  $E(\Theta_t) = 0$  et  $\text{var}(\Theta_t) = E\left(\int_0^t \theta_r^2 dr\right)$ ;
- (iv)  $\Theta_t$  est une  $\mathcal{A}_t$ -martingale;
- (v) Le processus  $\Theta_t^2 - \int_0^t \theta_r^2 dr$  est une  $\mathcal{A}_t$ -martingale.

**Démonstration.**

- (i) La linéarité de l'intégrale stochastique est immédiate et sa continuité résulte de la continuité des trajectoires du mouvement Brownien;
- (ii) La variable aléatoire  $\Theta_t$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable pour tout  $t$  car c'est une somme de variables aléatoires  $\mathcal{A}_t$ -mesurables; il s'ensuit que l'intégrale stochastique est un processus  $\mathcal{A}_t$ -adapté;
- (iii) On démontre par des calculs directs que:

$$\begin{aligned} E(\Theta_t) &= \sum_{i=0}^{k-1} E\{\theta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} E\{\theta_i E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} | \mathcal{A}_{t_i})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$



et

$$\begin{aligned}
\text{var}(\Theta_t) = \mathbb{E}(\Theta_t^2) &= \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\{\theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\} \\
&\quad + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}\{\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[\theta_i^2 \mathbb{E}\{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 | \mathcal{A}_{t_i}\}] \\
&\quad + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E}\{\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mathbb{E}(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} | \mathcal{A}_{t_j})\} \\
&= \mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right\} + 0 \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta_r^2 dr\right).
\end{aligned}$$

- (iv) Le processus  $\Theta_t$  est adapté et  $\Theta_t \in \mathcal{L}^2$ ; par conséquent,  $\Theta_t \in \mathcal{L}^1$ . La proposition 3.1 donne la propriété de martingale de l'intégrale stochastique, à savoir que c'est simplement une transformée de martingale;
- (v) Le processus  $\Theta_t^2 - \int_0^t \theta_r^2 dr$  est  $\mathcal{A}$ -adapté car c'est une somme de processus adaptés. Chacun des processus de cette somme est dans  $\mathcal{L}^1$ , car c'est la somme de deux éléments de  $\mathcal{L}^1$ . La proposition 3.1 conduit ensuite à la propriété de martingale.

### 3.4 Extension de l'intégrale sur $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$

Pour étendre la définition de l'intégrale  $\Theta_t = \int_0^t \theta_r dB_r$  pour  $\theta \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ , rappelons d'abord que  $\theta_n$  converge vers  $\theta$  au sens  $\mathcal{L}^2$  si

$$\|\theta_n - \theta\|_2 \rightarrow 0$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . De plus notons que l'application  $\theta \rightarrow \|\theta\|_2$  définit une norme, d'où l'espace  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$  est complet. L'idée consiste d'abord à approximer le processus  $\theta$  par une suite de processus élémentaires  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  de telle sorte que  $\theta_n$  converge vers  $\theta$ . Il s'agit de prendre pour  $i = 0, \dots, n-1$ ,

$$\theta_{n,t} = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{i,n} \mathbb{I}_{\left] \frac{iT}{n}, \frac{(i+1)T}{n} \right]}(t)$$

avec  $t_i = \frac{iT}{n}$  et  $\theta_{i,n} \in \mathcal{A}_{t_i}$ . L'intégrale  $\Theta_t = \int_0^t \theta_r dB_r$  est ensuite définie dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ , par

$$\int_0^t \theta_r dB_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \theta_{n,r} dB_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{i,n} \left\{ B\left(\frac{(i+1)T}{n}\right) - B\left(\frac{iT}{n}\right) \right\}.$$

Cette extension de l'intégrale stochastique possède toutes les propriétés vues à la Section 3.3. L'exemple qui suit, qui est un exemple classique, concerne l'intégration du pont Brownien.

**Exemple 3.1.** Nous pouvons montrer que pour tout  $t$ ,

$$\int_0^t B_r dB_r = \frac{1}{2} (B_t^2 - t).$$

En effet, nous avons, par définition, que

$$\int_0^t B_r dB_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Ensuite, en utilisant l'identité

$$2 \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2,$$

nous obtenons

$$\int_0^t B_r \, dB_r = \frac{1}{2} \left\{ B_t^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right\} = \frac{1}{2} (B_t^2 - t).$$

Cette dernière égalité découle du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

converge dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  vers la variation quadratique du mouvement Brownien, à savoir  $t$ . En effet nous déduisons d'un résultat du chapitre précédent à savoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B \rangle_t^{(n)} = t \quad \text{p.s.},$$

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = t.$$

### 3.5 Cas d'un processus non aléatoire

Soit un processus  $\theta$  qui n'est pas aléatoire, mais simplement une fonction de  $t$ ; nous disons alors que  $\theta$  est déterministe. Dans ce cas, nous pouvons écrire  $\theta_t = f(t)$  pour une certaine fonction  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . En plus des propriétés de l'intégrale stochastique, nous avons le résultat qui suit concernant l'intégrale de Wiener.

**Proposition 3.3.** *Si le processus  $\theta$  est déterministe, alors*

$$\Theta_t = \int_0^t f(r) dB_r \sim \mathcal{N} \left( 0, \int_0^t f^2(r) dr \right).$$

**Démonstration.** Par définition,

$$\Theta_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \rightarrow \int_0^t f(r) dB_r.$$

Or, la variable aléatoire

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

est de loi Normale, puisque c'est une combinaison linéaire d'éléments du vecteur  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ . Puisque la convergence dans  $\mathcal{L}^2$  entraîne la convergence de l'espérance et de la variance, cela assure aussi la convergence de la fonction caractéristique des variables aléatoires Normales. Par conséquent, l'intégrale  $\int_0^t f(r) dB_r$  est de loi Normale, puisqu'elle s'écrit comme une limite dans  $\mathcal{L}^2$  de variables aléatoires Normales.  $\diamond$

### 3.6 Cas d'un processus de la forme $f(B)$

Soit  $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace des fonctions réelles qui sont  $k$  fois continûment différentiables. Nous souhaitons obtenir l'intégrale de processus qui s'écrivent sous la forme  $\theta = f(B)$ , c'est-à-dire comme fonctionnelle du mouvement Brownien. Le candidat le plus naturel pour approximer l'intégrale de  $f(B)$  est

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Voyons sous quelles conditions cette approximation est valide.

**Proposition 3.4.** *Soit  $f$  une fonction dérivable telle que  $f'$  est bornée sur  $[0, T]$ . Alors*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\left(B_{\frac{i}{n}T}\right) \left(B_{\frac{i+1}{n}T} - B_{\frac{i}{n}T}\right) \rightarrow \int_0^T f(B_r) dB_r.$$

**Démonstration.**

Montrons d'abord que l'intégrale stochastique a un sens, c'est à dire que  $f(B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ . Puisque le mouvement Brownien est  $\mathcal{A}$ -adapté et continu presque sûrement, on en déduit que  $f(B)$  est  $\mathcal{A}$ -adapté et càdlàg. Ensuite, pour tout  $t \leq T$ , on a

$$|f(B_t)| \leq |f(B_0)| + \|f'\|_{\infty} \cdot |B_t - B_0| = |f(0)| + \|f'\|_{\infty} \cdot |B_t|.$$

Puisque la constante  $|f(0)|$  est dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$  et que

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T |B_r|^2 dr \right) = \int_0^T \mathbb{E} (|B_r|^2) dr = \int_0^T r dr = \frac{T^2}{2} < \infty,$$

nous déduisons que  $f(B_t) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^2(\Omega, [0, T])$ ; ainsi,  $\int_0^T f(B_r) dB_r$  est bien définie.

Subdivisons maintenant  $[0, T]$  en  $n$  sous-intervalles  $]t_i, t_{i+1}]$ , où  $t_i = iT/n$ , et considérons le processus

$$B_r^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(r).$$

Nous avons alors

$$\int_0^T f(B_r^n) dB_r = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(B_{\frac{i}{n}T}\right) \left(B_{\frac{(i+1)T}{n}} - B_{\frac{i}{n}T}\right),$$

ce qui fait que

$$\begin{aligned}
 \|f(B) - f(B^n)\|_2^2 &= \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (f(B_r) - f(B_r^n))^2 dr \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f(B_r) - f(B_{t_i})\}^2 dr \right\} \\
 &\leq \|f'\|_\infty^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E} \{(B_r - B_{t_i})^2\} dr \\
 &= \|f'\|_\infty^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (r - t_i) dr \\
 &= \|f'\|_\infty^2 \left( n \int_0^{T/n} r dr \right) \\
 &= \frac{T^2 \|f'\|_\infty^2}{2n}.
 \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $\|f'\|_\infty < \infty$ , et donc  $\|f(B) - f(B^n)\|_2 \rightarrow 0$ .  $\diamond$

Nous allons énoncer un résultat important qui permet de calculer les intégrales stochastiques sans utiliser les suites.

**Théorème 3.5.** *Toute fonction  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , telle que  $f''$  est bornée, satisfait presque sûrement,*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_r) dr.$$

**Démonstration.**

Pour  $t$  fixé, soit la subdivision de  $[0, t]$  par les  $n$  intervalles  $]t_{i-1}, t_i]$ , où  $t_i = it/n$ . La continuité presque sûre de  $B$  et un développement de Tay-

lor trajectoire par trajectoire permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \sum_{i=1}^n \{f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})\} \\ &= \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \end{aligned}$$

où  $\theta_1, \dots, \theta_n$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $]t_{i-1}, t_i[$ . Puisque  $f'$  est dérivable et  $f''$  bornée par hypothèse, l'application de la proposition 3.4 conduit à:

$$\left\| \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \int_0^t f'(B_r) dB_r \right\|_2 \rightarrow 0.$$

Soit maintenant;

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \\ V_n &= \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2, \\ W_n &= \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_{i-1} - t_i). \end{aligned}$$

Par une application de l'inégalité du triangle et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on déduit que

$$\begin{aligned} &E(|U_n - V_n|) \\ &\leq E \left( \sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})| \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right) \\ &\leq \sqrt{E \left( \sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})|^2 \right) E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right)^2 \right\}}. \end{aligned}$$

Pour toute trajectoire,  $r \rightarrow f''\{B_r(\omega)\}$  est continue sur un compact, donc uniformément continue; donc, le sup converge vers 0. La convergence vers 0 de l'espérance est assurée par le Théorème de la convergence bornée de Lebesgue, car  $f''$  est bornée. Le deuxième terme est la variation quadratique du mouvement Brownien, qui converge vers  $t$ .

Nous en déduisons que  $\|U_n - V_n\|_1 \rightarrow 0$ . De plus,

$$\begin{aligned}
 E(|V_n - W_n|^2) &= E \left\{ \left( \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}}) ((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) \right)^2 \right\} \\
 &= \sum_{i=1}^n E \left[ \{ f''(B_{t_{i-1}}) ((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) \}^2 \right] \\
 &\leq \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n E \{ (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \}^2 \\
 &\leq \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n 2E \{ (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4 + (t_i - t_{i-1})^2 \} \\
 &= \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n 2 \left[ \text{var} \{ (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \} + 2(t_i - t_{i-1})^2 \right] \\
 &= \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n 2 \{ 2(t_i - t_{i-1})^2 + 2(t_i - t_{i-1})^2 \} \\
 &= 8 \|f''\|_\infty^2 \frac{t^2}{n}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $E(|V_n - W_n|^2) \rightarrow 0$ , car  $\|f''\|_\infty^2 < \infty$ , par hypothèse. Donc,  $\|V_n - W_n\|_2 \rightarrow 0$ . De la définition de l'intégrale de Lebesgue,

$$\left\| W_n - \int_0^t f''(B_r) dr \right\|_1 \rightarrow 0.$$

Puisque la convergence dans  $\mathcal{L}^2$  implique la convergence dans  $\mathcal{L}^1$ ,

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$



converge dans  $\mathcal{L}^1$  vers

$$\int_0^t f'(B_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_r) dr,$$

car

$$\left\| U_n - \int_0^t f''(B_r) dr \right\|_1 \leq \|U_n - V_n\|_1 + \|V_n - W_n\|_1 + \left\| W_n - \int_0^t f''(B_r) dr \right\|_1.$$

Ceci complète la démonstration.  $\diamond$

À noter que de façon infinitésimale, le résultat 3.5 s'écrit, pour tout  $t \leq T$ ,

$$df(B_t) = f'(B_t) dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t) dt.$$

**Exemple 3.2.** Si  $f(x) = x^2$ , nous avons d'après le Théorème 3.5 que

$$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_r dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t 2 dr = 2 \int_0^t B_r dB_r + t.$$

Ainsi, nous déduisons que

$$B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_r dB_r$$

est une martingale. À noter aussi que

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t 2 B_s^2 ds \right) = 2 \left( \int_0^t \mathbb{E}(B_s^2) ds \right) = 2 \int_0^t s ds = t^2 < \infty.$$

**Exemple 3.3.** Pour  $f(x) = e^x$ , nous avons  $f'(x) = f''(x) = e^x$ , et selon le Théorème 3.5,

$$e^{B_t} - 1 = \int_0^t e^{B_r} dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_r} dr.$$

Si nous posons  $X_t = e^{B_t}$ , alors l'égalité précédente devient

$$X_t - 1 = \int_0^t X_r dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t X_r dr.$$

Sous forme différentielle, on a

$$dX_t = X_t dB_t + \frac{1}{2} X_t dt \quad \text{et} \quad X_0 = 1.$$

Cette équation sera étudiée plus en détail au Chapitre 4.

## 3.7 Formule d'Itô pour le mouvement Brownien

### 3.7.1 Définition des processus d'Itô

Ici, une nouvelle classe de processus sera introduite, par rapport à laquelle une intégrale stochastique sera définie : il s'agit de la famille des processus d'Itô. Cette classe permet d'établir plusieurs formules pratiques qui forment la base du calcul différentiel et intégral stochastique. Nous débutons avec la définition d'un processus de Itô.

**Définition 3.7.** Soit  $X_0$ , un processus adapté, et  $\psi, \theta$ , des processus adaptés tels que presque sûrement,

$$\int_0^t |\psi_r| dr < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t |\theta_r|^2 dr < \infty.$$

Un processus  $X_t$  de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_r dr + \int_0^t \theta_r dB_r$$

s'appelle un processus d'Itô.

L'équation précédente est notée de manière infinitésimale par

$$dX_t = \psi_t dt + \theta_t dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = x.$$

En d'autres termes, un processus d'Itô est un processus  $(X_t)$  qui peut se décomposer sous la forme  $X_t = M_t + V_t$ , où

- $M_t$  est une martingale continue de carré intégrable par rapport à une filtration  $\mathcal{A}_t$ ;
- $V_t$  est  $(\mathcal{A}_t)$ -adapté, continu, à variation bornée, et tel que  $V_0 = 0$ .

Par la suite, nous supposons que, presque sûrement,

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t |\psi_r|^2 dr \right) < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left( \int_0^t |\theta_r|^2 dr \right) < \infty. \quad (3.2)$$

Ces conditions sont moins fortes que les conditions d'intégrabilité imposées auparavant sur les processus  $\psi$  et  $\theta$ . À noter que la décomposition en processus d'Itô vérifiant les conditions (3.2) est unique presque sûrement. Nous démontrerons cette unicité à l'aide du lemme suivant.

**Lemme 3.1.** *Si  $M_t$  est une martingale continue qui s'écrit sous la forme  $M_t = \int_0^t \psi_r dr$ , où  $\psi \in \mathcal{L}^2$ , alors pour tout  $t \leq T$ ,  $M_t = 0$  presque sûrement.*

**Démonstration.** Par définition  $M_0 = 0$ , et comme  $M_t$  est une martingale,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2) &= \mathbb{E} \left\{ \left( \sum_{i=1}^n M_{\frac{i t}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}} \right)^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( M_{\frac{i t}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}} \right)^2 \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{i t}{n}} \psi_r dr \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\left( \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{i t}{n}} \psi_r dr \right)^2 \leq \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{i t}{n}} \mathbb{I}^2 dr \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{i t}{n}} \psi_r^2 dr = \frac{t}{n} \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{i t}{n}} \psi_r^2 dr.$$

Il s'ensuit que

$$E(M_t^2) \leq E\left(\sum_{i=1}^n \frac{t}{n} \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \psi_r^2 dr\right) = \frac{t}{n} E\left(\int_0^t \psi_r^2 dr\right).$$

Donc,  $E(M_t^2) \rightarrow 0$ , ce qui fait que  $M_t = 0$  presque sûrement pour tout  $t$ .  $\diamond$

La représentation d'un processus d'Itô est unique. Pour le montrer par l'absurde, supposons que

$$X_t = X_0 + \int_0^t \psi_{r,1} dr + \int_0^t \theta_{r,1} dB_r \quad \text{et} \quad X_t = X_0 + \int_0^t \psi_{r,2} dr + \int_0^t \theta_{r,2} dB_r$$

pour certains processus  $\psi_{r,1}$ ,  $\theta_{r,1}$ ,  $\psi_{r,2}$  et  $\theta_{r,2}$ . Pour tout  $t \leq T$ , on aurait alors

$$\int_0^t (\psi_{r,1} - \psi_{r,2}) dr = \int_0^t (\theta_{r,2} - \theta_{r,1}) dB_r.$$

Le terme de droite est une martingale continue qui s'écrit sous la forme d'une intégrale de Lebesgue; on déduit du lemme 3.1 que le processus est nul presque sûrement. Par conséquent,  $\int_0^t (\psi_{r,1} - \psi_{r,2}) dr$  est presque sûrement nulle. Par différentiation, on déduit que  $\psi_{r,1} = \psi_{r,2}$ . Enfin, la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique implique que

$$E\left(\int_0^t (\theta_{r,2} - \theta_{r,1})^2 dr\right) = E\left(\int_0^t (\theta_{r,2} - \theta_{r,1}) dB_r\right)^2 = E(0) = 0,$$

c'est-à-dire que  $\theta_{r,2} = \theta_{r,1}$  presque sûrement. La représentation est donc unique.

**Définition 3.8.** Soient  $X_t$  et  $Y_t$ , des processus d'Itô. Alors

- les variations quadratiques sur  $[0, t]$  sont données par

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \theta_{r,1}^2 dr \quad \text{et} \quad \langle Y \rangle_t = \int_0^t \theta_{r,2}^2 dr.$$

- la covariation quadratique entre  $X_t$  et  $Y_t$  est donnée par

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \theta_{r,1} \theta_{r,2} dr,$$

$$\text{où } dX_t = \psi_{r,1} dr + \theta_{r,1} dB_r \text{ et } dY_t = \psi_{r,2} dr + \theta_{r,2} dB_r.$$

**Démonstration.** Par définition,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_t &= \frac{1}{2} (\langle X + Y \rangle_t - \langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^t (\theta_{r,1} + \theta_{r,2})^2 dr - \int_0^t \theta_{r,1}^2 dr - \int_0^t \theta_{r,2}^2 dr \right) \\ &= \int_0^t \theta_{r,1} \theta_{r,2} dr. \end{aligned}$$

La conclusion est obtenue en notant que  $\langle X \rangle_t = \langle X, X \rangle_t$ .  $\diamond$

### 3.7.2 Intégration

L'intégrale stochastique d'un processus  $\phi_t$  par rapport à un processus d'Itô

$$dX_t = \psi_t dt + \theta_t dB_t$$

est définie par

$$\int_0^t \phi_r dX_r = \int_0^t \phi_r \theta_r dB_r + \int_0^t \phi_r \psi_r dr.$$

Par la suite, une formule importante d'intégration stochastique par rapport aux processus d'Itô sera établie.

**Théorème 3.6.** Si  $f \in C^2$ , alors

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_r) d\langle X \rangle_r \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_r) \psi_r dr + \int_0^t f'(X_r) \theta_r dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_r) \theta_r^2 dr. \end{aligned}$$

**Démonstration.** Par un développement de Taylor, nous avons

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(X_{\theta_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2.$$

Le premier terme converge vers  $\int_0^t f'(X_r) dX_r$ ; le deuxième converge, par définition de variation quadratique, vers  $(1/2) \int_0^t f''(X_r) d\langle X \rangle_r$ .  $\diamond$

La relation du Théorème 3.6 s'écrit, en notation différentielle,

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t.$$

### 3.7.3 Intégration par parties

La formule d'intégration par parties décrite dans le résultat suivant est une conséquence de la formule d'Itô;

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_r) d\langle X \rangle_r.$$

**Proposition 3.5.** Soient  $X_t$  et  $Y_t$ , des processus d'Itô. Nous avons

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_r dY_r + \int_0^t Y_r dX_r + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_r.$$

**Démonstration.** Les formules d'Itô pour les processus  $X_t^2$ ,  $Y_t^2$  et  $(X+Y)_t^2$  sont respectivement

$$\begin{aligned} dX_t^2 &= 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t, \\ dY_t^2 &= 2Y_t dY_t + d\langle Y \rangle_t, \\ d(X+Y)_t^2 &= 2(X_t + Y_t) d(X_t + Y_t) + d\langle X+Y \rangle_t. \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2} \{d(X+Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2\} \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2} \{d\langle X+Y \rangle_t - d\langle X \rangle_t - d\langle Y \rangle_t\} \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t. \end{aligned}$$

Le résultat annoncé s'obtient en intégrant de part et d'autre de l'égalité.  $\diamond$

En notation différentielle, la preuve précédente permet de constater que la formule d'intégration par partie peut s'écrire  $d(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y \rangle_t$ .

### 3.7.4 Autres considérations sur la formule d'Itô

Si  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , alors

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_r) dr,$$

où  $B_t$  est le mouvement Brownien. L'équivalent de cette formule pour un processus d'Itô  $X_t$  est

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_r) dX_r + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_r) d\langle X \rangle_r.$$

Soit maintenant une fonction  $g : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors nous avons

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} g(r, X_r) dr + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} g(r, X_r) dX_r \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(r, X_r) d\langle X \rangle_r. \end{aligned}$$

Ces formules générales s'obtiennent de façon similaire aux formules développées précédemment. Il s'agit, essentiellement, d'appliquer un développement de

Taylor d'ordre deux par rapport au mouvement Brownien ou au processus d'Itô, et d'utiliser le fait que  $dB_t \approx \sqrt{dt}$  et  $dX_t \approx \theta_t \sqrt{dt}$ .

**Exemple 3.4.** Soient les processus  $X_t = e^{B_t}$  et  $Y_t = e^{-t/2}$ . Nous avons vu à l'Exemple 3.3 que

$$dX_t = X_t dB_t + \frac{1}{2} X_t dt.$$

D'autre part, nous voyons facilement que

$$dY_t = -\frac{1}{2} Y_t dt.$$

Si nous posons  $Z_t = X_t Y_t = e^{B_t - t/2}$ , nous obtenons de la formule d'intégration par parties que

$$Z_t - 1 = \int_0^t X_r dY_r + \int_0^t Y_r dX_r + 0,$$

car  $\langle X, Y \rangle_t = 0$ , puisque  $Y_t$  est à variation bornée. Nous avons donc

$$\begin{aligned} Z_t - 1 &= \int_0^t X_s \left( -\frac{1}{2} Y_r \right) dr + \int_0^t Y_r \left( \frac{1}{2} X_r \right) dr + \int_0^t Y_r X_r dB_r \\ &= \int_0^t Z_r dB_r. \end{aligned}$$

De là,  $dZ_t = Z_t dB_t$  et  $Z_0 = 1$ .



## CHAPITRE 4

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

### 4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons rencontré des exemples d'équations différentielles stochastiques. Il s'agit ici de regarder sous quelles conditions nous avons l'existence d'un processus qui serait une solution d'une telle équation.

**Exemple 4.1.** À l'exemple 3.3, nous avons vu que  $X_t = e^{B_t}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = 1.$$

**Exemple 4.2.** Nous pouvons démontrer que le processus

$$X_t = \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  sont fixés, est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = 1.$$

Pour le montrer, il s'agit d'appliquer la formule d'Itô à la fonction

$$f(t, x) = \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right\}.$$

De là, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) &= \sigma \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right\}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x) &= \sigma^2 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation

$$\begin{aligned} f(t, B_t) - f(0, B_0) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(r, B_r) dr + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(r, B_r) dB_r \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(r, B_r) dr \end{aligned}$$

s'écrit,

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\} - \exp(\sigma B_0) \\ &= \int_0^t \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) r + \sigma B_r \right\} dr \\ &\quad + \int_0^t \sigma \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) r + \sigma B_r \right\} dB_r \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) r + \sigma B_r \right\} dr. \end{aligned}$$

Quelques opérations algébriques nous permettent d'obtenir

$$X_t - X_0 = \mu \int_0^t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) r + \sigma B_r \right\} dr \\ + \sigma \int_0^t \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) r + \sigma B_r \right\} dB_r.$$

En notation différentielle, nous écrivons

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = 1. \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) présentée à l'exemple 4.2 est connue sous le nom d'équation de Black–Scholes; on peut se référer à Joshi (2003) pour de plus amples détails. Dans cette équation,  $\mu$  désigne le *coefficient de dérive*, qui traduit en général la tendance du processus; le paramètre  $\sigma$  est le *coefficient de diffusion*, qui représente la variabilité du processus. Cette équation et ses nombreuses généralisations sont couramment utilisées en mathématiques financières pour décrire l'évolution des prix des actifs.

## 4.2 Équations homogènes en temps

Étant donné un mouvement Brownien  $B_t$  et des fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nous nous demandons sous quelles conditions il existe un processus  $X_t$  telle que

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = x_0,$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}$  est la *condition initiale*. À l'instar de l'équation (4.1), le terme  $f(X_t)$  est appelé la *dérive*, alors que  $g(X_t)$  est la *diffusion*. Décrivons d'abord la classe des fonctions Lipschitz.

**Définition 4.9.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite lipschitzienne s'il existe une constante  $K \geq 0$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|.$$

Si  $f$  est une fonction lipschitzienne, alors  $f$  est uniformément continue, et donc continue sur  $\mathbb{R}$ . À l'inverse, si  $f$  est continûment dérivable de dérivée  $f'$  bornée, alors  $f$  est lipschitzienne car alors,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(z) dz \right| \leq \sup_{z \in [x, y]} |f'(z)| |y - x| = K |y - x|,$$

où  $K = \sup_{z \in [x, y]} |f'(z)| < \infty$ .

Le résultat suivant établit des conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'un processus solution de l'équation homogène en temps.

**Théorème 4.7.** Soient  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien adapté à une filtration  $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f, g$  lipschitziennes. Alors il existe un unique processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  continu et adapté à  $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on ait presque sûrement

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_r) dr + \int_0^t g(X_r) dB_r. \quad (4.2)$$

De plus, pour tout  $T > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2 \right) < \infty.$$

**Démonstration.** La démonstration repose sur le Théorème du point fixe, dont nous allons esquisser les principales propriétés. D'abord, nous définissons

l'espace vectoriel  $\mathcal{X}_T$  des processus continus  $X_t$  définis sur  $[0, T]$  qui sont adaptés à  $\mathcal{A}$  et tels que

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2 \right) < \infty.$$

L'espace  $\mathcal{X}_T$  muni de la norme  $\|X\| = \mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2)$  est complet. Soit maintenant la suite de processus  $X^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , définie récursivement, pour  $t$  fixé, par  $X_t^{(0)} = x_0$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t f(X_r^{(n)}) dr + \int_0^t g(X_r^{(n)}) dB_r.$$

Nous pouvons montrer que  $(X^{(n)})$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{X}_T$ ; par conséquent, elle converge car  $\mathcal{X}_T$  est complet. Il reste à montrer que la limite de cette suite est une solution de l'équation (4.2). De plus, nous pourrions montrer que, si  $X_t$  et  $Y_t$  sont des solutions de l'équation (4.2), alors  $X_t = Y_t$  presque sûrement pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .  $\diamond$

La démonstration complète du Théorème 4.7 utilise l'inégalité de Doob et l'isométrie d'Itô de telle sorte que pour tout  $u \leq T$ , il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, u]} \{ \phi(Y)_t - \phi(Z)_t \}^2 \right) \leq K \mathbb{E} \left( \int_0^u (Y_r - Z_r)^2 dr \right),$$

où

$$\phi(Y)_t = x_0 + \int_0^t f(Y_r) dr + \int_0^t g(Y_r) dB_r.$$

En effet, si

$$g(u) = \mathbb{E} \left( \sup_{t \leq u} \{ \phi(Y)_t - \phi(Z)_t \}^2 \right),$$

alors

$$\phi(Y)_t - \phi(Z)_t = \int_0^t \{ f(Y_r) - f(Z_r) \} dr + \int_0^t \{ f(Y_r) - f(Z_r) \} dB_r.$$

Donc, pour  $u \leq T$ ,

$$\begin{aligned}
 g(u) &\leq 2 \mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq u} \left\{ \int_0^t (f(Y_r) - f(Z_r)) \, dr \right\}^2 \right] \\
 &\quad + 2 \mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq u} \left\{ \int_0^t (g(Y_r) - g(Z_r)) \, dB_r \right\}^2 \right] \\
 &\leq 2 \mathbb{E} \left\{ \sup_{t \leq u} \int_0^t (f(Y_r) - f(Z_r))^2 \, dr \right\} \\
 &\quad + 2 \mathbb{E} \left[ \sup_{t \leq u} \left\{ \int_0^t (g(Y_r) - g(Z_r)) \, dB_r \right\}^2 \right] \\
 &\leq 2 \mathbb{E} \left\{ T \int_0^u (f(Y_r) - f(Z_r))^2 \, dr \right\} \\
 &\quad + 8 \mathbb{E} \left[ \left\{ \int_0^u (g(Y_r) - g(Z_r)) \, dB_r \right\}^2 \right].
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 g(u) &\leq 2T \mathbb{E} \left\{ \int_0^u (f(Y_r) - f(Z_r))^2 \, dr \right\} + 8 \mathbb{E} \left\{ \int_0^u (g(Y_r) - g(Z_r))^2 \, dr \right\} \\
 &\leq 2TK^2 \int_0^u (Y_r - Z_r)^2 \, dr + 8K^2 \int_0^u (Y_r - Z_r)^2 \, dr \\
 &\leq 2(T+4)K^2 \int_0^u (Y_r - Z_r)^2 \, dr,
 \end{aligned}$$

où  $K = \max(K_1, K_2)$  et  $K_1, K_2$  sont les constantes de Lipschitz pour  $f$  et  $g$ , respectivement. Pour plus de détails voir Øksendal (2003).

**Proposition 4.1.** *La solution  $X_t$  de l'équation (4.2) est un processus d'Itô.*

**Démonstration.** Remarquons d'abord que  $X_t$  peut s'écrire sous la forme  $X_t = M_t + V_t$ , où

$$M_t = x_0 + \int_0^t g(X_r) \, dB_r \quad \text{et} \quad V_t = \int_0^t f(X_r) \, dr.$$

Comme  $X_t$  est un élément de  $\mathcal{X}_T$  et que  $g$  est lipschitzienne, l'intégrale stochastique

$$\int_0^t g(X_r) dB_r$$

a un sens; par conséquent,  $(M_t)$  est une martingale continue de carré intégrable. Ensuite, puisque  $t \rightarrow (X_t)$  et  $f$  sont continues, nous en déduisons que le processus  $(V_t)$  est continûment dérivable; il est donc continu et à variation bornée. Ainsi,  $X_t$  est un processus d'Itô.  $\diamond$

**Exemple 4.3.** L'équation de Black–Scholes présentée en (4.1) admet une unique solution  $(X_t)$  car dans ce cas,  $f(x) = \mu x$  et  $g(x) = \sigma x$  sont linéaires, donc lipschitziennes.

**Exemple 4.4.** Pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  fixés, soit l'équation différentielle stochastique  $dX_t = -a X_t dt + \sigma dB_t$ , avec  $X_0 = x_0$ . Ici,  $f(x) = -ax$  et  $g(x) = \sigma$ ; ces fonctions sont lipschitziennes. Il existe donc une unique solution  $X_t$ , appelée processus d'Ornstein–Uhlenbeck.

Premièrement, soit le processus déterministe  $\phi_t$ , qui est solution de l'équation différentielle homogène  $d\phi_t = -a \phi_t dt$  et  $\phi_0 = 1$ . Il est bien connu (voir Geffroy, 1983, par exemple) que  $\phi_t = e^{-at}$ . Soit maintenant le processus  $X_t = \phi_t Y_t$ . La formule d'intégration par parties permet de déduire que

$$dX_t = \phi_t dY_t + (d\phi_t) Y_t + d\langle \phi, Y \rangle_t = \phi_t dY_t - a \phi_t Y_t dt + 0,$$

car  $\phi_t$  est à variation bornée. D'autre part,  $dX_t = -a X_t dt + \sigma dB_t$ . Ainsi,  $\phi_t dY_t = a X_t dt + \sigma dB_t$ , c'est-à-dire que

$$dY_t = \frac{\sigma}{\phi_t} dB_t \quad \text{et} \quad Y_0 = x_0.$$

Par conséquent,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\sigma}{\phi_s} dB_s = x_0 + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s,$$

d'où

$$X_t = e^{-at} x_0 + \sigma \int_0^t \exp\{-a(t-r)\} dB_r.$$

**Exemple 4.5.** Pour  $a \in \mathbb{R}$ , soit l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a X_t dt + \sqrt{X_t} dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = 0.$$

Ici, nous avons  $g(x) = \sqrt{x}$ ; cette fonction n'est pas lipschitzienne en 0 car  $g'(0) = \infty$ . Ainsi, il n'existe pas de solution forte à cette équation. Ce processus est connu sous le nom de processus de Feller. Pour plus de détails, voir Durrett (1996).

Dans l'exemple précédent, on a mentionné l'absence d'une solution forte. Il existe toutefois une solution *faible*, dont la définition sera donnée ultérieurement.

**Définition 4.10.** *Une solution faible de l'équation*

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = x_0$$

*est un processus continu tel que les processus  $M_t$  et  $N_t$  sont définis respectivement par les martingales*

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t f(X_r) dr \quad \text{et} \quad N_t = M_t^2 - \int_0^t g(X_r)^2 dr.$$

À remarquer que le mouvement Brownien  $(B_t)$  n'est pas présent dans la définition d'une solution faible. De plus, une solution faible est une solution



en loi; en d'autres termes, sous certaines conditions, nous avons l'unicité de la solution faible en loi. Dans ce cadre, il existe un autre concept d'unicité appelé solution faible au sens de la trajectoire, c'est-à-dire qu'étant données deux solutions faibles  $X$  et  $Y$  avec une même condition initiale, les processus  $X$  et  $Y$  sont indistinguables.

**Exemple 4.6.** Pour faire suite à l'Exemple 4.5, nous notons que la solution faible de l'équation différentielle stochastique  $dX_t = a X_t dt + \sqrt{X_t} dB_t$  et  $X_0 = 0$  est un processus continu  $(X_t)$  tel que

$$M_t = X_t - a \int_0^t X_r dr \quad \text{et} \quad N_t = M_t^2 - \int_0^t X_r dr$$

sont des martingales.

### 4.2.1 Équations non homogènes en temps

Soit un mouvement Brownien  $(B_t)$ , un nombre réel  $x_0$ , et des fonctions  $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous nous demandons s'il existe un processus  $(X_t)$  tel que

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dB_t \quad \text{et} \quad X_0 = x_0. \quad (4.3)$$

Il faut d'abord définir le concept de fonctions Lipschitz bivariées.

**Définition 4.11.** Une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite lipschitzienne en  $x$  s'il existe une constante  $K \geq 0$  telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq K|y - x|.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette sous-section.

**Théorème 4.8.** *Si les fonctions  $f, g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues par rapport aux deux variables et lipschitziennes en  $x$ , alors il existe un unique processus  $(X_t)$  qui est la solution de l'équation (4.3); on a, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,*

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(r, X_r) dr + \int_0^t g(r, X_r) dB_r.$$

Le processus  $(X_t)$  est appelé la solution forte de l'équation (4.3).

### 4.3 Théorème de Girsanov: applications

La solution de l'équation (4.3) n'est pas, en général, une martingale sous la probabilité  $P$ . Nous pouvons toutefois nous demander s'il existe une mesure de probabilité  $\tilde{P}$  sous laquelle  $(X_t)$  serait une martingale.

**Remarque 4.1.** En mathématiques financières, nous cherchons souvent à évaluer le prix d'une option sur un actif; nous avons alors besoin de la propriété de martingale. Cependant, le prix d'un actif n'est généralement pas une martingale puisqu'il affiche typiquement une tendance à la hausse ou à la baisse. De là vient la motivation de définir une nouvelle mesure de probabilité sous laquelle le processus étudié serait une martingale.

**Définition 4.12.** *Soit  $(M_t)$ , une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{A}_t)$ ; on suppose que le processus  $M_t$  est continu, de carré intégrable, et tel que  $M_0 = 0$  et  $\langle M_t \rangle \leq K t$  pour tout  $(t, K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ . La martingale exponentielle associée à  $(M_t)$  est définie, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , par*

$$Y_t = \exp \left( M_t - \frac{\langle M_t \rangle}{2} \right).$$

Nous définissons, pour tout  $A \in \mathcal{A}_T$ , la mesure de probabilité  $\tilde{P}_T(A) = E(\mathbf{1}_A Y_T)$ .

La définition 4.12 permet de poser le problème sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}_T, \tilde{P}_T)$ . Il est facile de démontrer que  $\tilde{P}_T$  satisfait les axiomes de Kolmogorov. En effet,

- (i)  $\tilde{P}_T(A) \geq 0$  pour tout  $A \in \mathcal{A}_T$ , car  $Y_T > 0$ ;
- (ii)  $\tilde{P}_T(\Omega) = E(Y_T) = E(Y_0) = 1$ , puisque  $(Y_t)$  est une martingale;
- (iii) si  $(A_n)_{n=1}^\infty$  est une famille d'événements dans  $\mathcal{A}_T$ , alors

$$\tilde{P}_T(\cup_{n=1}^\infty A_n) = E\left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} Y_T\right) = \sum_{n=1}^\infty \tilde{P}_T(A_n).$$

Nous notons que  $P(A) = 0$  si et seulement si  $\tilde{P}_T(A) = 0$ . En d'autres termes, ces deux mesures de probabilité sont équivalentes.

**Lemme 4.2.** Si  $Z$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable et tel que  $E(|Z Y_T|) < \infty$ , alors  $\tilde{E}_T(Z) = E(Z Y_t)$ .

**Démonstration.** Comme  $(Y_t)$  est une martingale et que  $Z$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable, alors  $\tilde{E}_T(Z) = E(Z Y_T) = E(Z Y_t)$ .  $\diamond$

**Lemme 4.3.** Le processus  $(X_t)$  est une martingale sous  $\tilde{P}_T$  si et seulement si  $(X_t Y_t)$  est une martingale sous  $P$ .

**Démonstration.** Si  $(X_t)$  est une martingale sous  $\tilde{P}_T$ , alors

- (i)  $X_t$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable et  $\tilde{E}_T(|X_t|) < \infty$  pour tout  $t \in [0, T]$ ;
- (ii) pour tout  $Z$   $\mathcal{A}_s$ -mesurable et borné, on a  $\tilde{E}_T(X_t Z) = \tilde{E}_T(X_s Z)$  pour tout  $s \leq t \in [0, T]$ .

Par conséquent,  $(X_t Y_t)$  est une martingale sous P car

- (i) pour tout  $t \in [0, T]$ ;

$$E(|X_t Y_t|) = E(|X_t| Y_t) = E(|X_t| Y_T) = \tilde{E}_T(|X_t|) < \infty;$$

- (ii) pour tout  $Z$   $\mathcal{A}_s$ -mesurable et borné, et pour tout  $s \leq t \in [0, T]$ , on a

$$E(X_t Y_t Z) = E(X_t Z Y_T) = \tilde{E}_T(X_t Z) = \tilde{E}_T(X_s Z) = E(X_s Y_s Z).$$

Réciproquement, si  $(X_t Y_t)$  est une martingale sous P, alors

- (i) pour tout  $t \in [0, T]$ , le processus  $X_t = X_t Y_t / Y_t$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable et

$$\tilde{E}_T(|X_t|) = E(|X_t| Y_T) = E(|X_t| Y_t) < \infty;$$

- (ii) pour tout  $Z$   $\mathcal{A}_s$ -mesurable et borné, et pour tout  $s \leq t \in [0, T]$ , on a

$$\tilde{E}_T(X_t Z) = E(X_t Z Y_t) = E(X_s Z Y_s) = \tilde{E}_T(X_s Z).$$

Donc,  $(X_t)$  est une martingale sous  $\tilde{P}_T$ , ce qui termine la démonstration.  $\diamond$

Le résultat suivant s'appelle le *Théorème de Girsanov*.

**Théorème 4.9.** *Si  $(Z_t)$  est une martingale continue de carré intégrable sous  $P$ , alors le processus  $Z_t - \langle M, Z \rangle_t$  est une martingale sous  $\tilde{P}_T$ , où  $M_t$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{A}_t)$  qui est continue, de carré intégrable, et telle que  $M_0 = 0$  et  $\langle M_t \rangle \leq K t$  pour tout  $(t, K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ .*

**Démonstration.** Du Lemme 4.3, il suffit de montrer que  $(Z_t - A_t)Y_t$  est une martingale sous  $P$ , où  $A_t = \langle M, Z \rangle_t$ . De la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} (Z_t - A_t)Y_t - (Z_0 - 0)Y_0 &= \int_0^t (Z_r - A_r) dY_r + \int_0^t Y_r dZ_r \\ &\quad - \int_0^t Y_r dA_r + \langle Z - A, Y \rangle_t. \end{aligned}$$

Puisque  $Y$  et  $Z$  sont des martingales sous  $P$ , les termes

$$\int_0^t (Z_r - A_r) dY_r \quad \text{et} \quad \int_0^t Y_r dZ_r$$

sont aussi des martingales sous  $P$ . Il reste à montrer que

$$- \int_0^t Y_r dA_r + \langle Z - A, Y \rangle_t = 0.$$

Par une application de la formule d'Itô, on a  $dY_t = Y_t dM_t$ , et donc que  $dM_t = dY_t/Y_t$ . Ainsi,

$$dA_t = d\langle M, Z \rangle_t = \frac{1}{Y_t} d\langle Y, Z \rangle_t,$$

et donc  $Y_t dA_t = d\langle Y, Z \rangle_t$ . En intégrant, nous obtenons

$$\int_0^t Y_r dA_r = \int_0^t d\langle M, Z \rangle_r = \langle Y, Z \rangle_t.$$

Puisque  $A$  est à variation bornée,  $\langle Z - A, Y \rangle_t = \langle Z, Y \rangle_t$ ; nous déduisons que

$$- \int_0^t Y_r dA_r + \langle Z - A, Y \rangle_t = 0.$$

Ce qui complète la démonstration.  $\diamond$

**Exemple 4.7.** Nous avons vu que l'équation différentielle stochastique associée au modèle de Black-Scholes est  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$  et  $X_0 = x_0$ , où  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma, x_0 > 0$ . Si on définit

$$M_t = - \int_0^t \frac{\mu X_r}{\sigma X_r} dB_r = -\frac{\mu}{\sigma} B_t,$$

alors  $M_t$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$  et  $\langle M \rangle_t = \mu^2 t / \sigma^2$ . Si  $(Y_t)$  est la martingale exponentielle associée à  $M_t$  et que  $\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Y_T)$ , alors du Théorème de Girsanov le processus  $(X_t)$  est une martingale sous  $\tilde{\mathbb{P}}_T$ . De plus, le processus  $(\tilde{B}_T)$  défini par

$$\tilde{B}_T = B_t + \frac{\mu}{\sigma} t$$

est un mouvement Brownien standard sous  $\tilde{\mathbb{P}}_T$  et  $dX_t = \sigma X_t d\tilde{B}_t$ .

## 4.4 Approximation d'une équation différentielle stochastique

Considérons l'équation différentielle stochastique (4.3). Nous avons vu que si  $f$  et  $g$  sont continues en  $(t, x)$  et lipschitziennes en  $x$ , cette équation possède une unique solution forte  $(X_t)$ . Cependant, il est parfois difficile d'obtenir une expression analytique pour cette solution. Il est donc important de développer des méthodes numériques afin de simuler des approximations de la solution de telles équations. Les schémas numériques utilisés pour les équations différentielles ordinaires peuvent, en général, être adaptés au cas aléatoire.

### 4.4.1 Méthode d'Euler

En supposant qu'il existe une unique solution forte à l'équation (4.3), on a pour tout  $s < t \in [0, T]$  que

$$X_t = X_s + \int_s^t f(r, X_r) dr + \int_s^t g(r, X_r) dB_r. \quad (4.4)$$

Pour  $t \approx s$ , nous pouvons utiliser la continuité des fonctions  $r \rightarrow f(r, X_r)$  et  $r \rightarrow g(r, X_r)$  afin de déduire une approximation de (4.4), à savoir

$$X_t \simeq X_s + f(s, X_s)(t - s) + g(s, X_s)(B_t - B_s). \quad (4.5)$$

Soit maintenant  $N \in \mathbb{N}$ . En posant  $s = nT/N$  et  $t = (n+1)T/N$ , où  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , nous obtenons de (4.5) que

$$X_{\frac{(n+1)T}{N}} \simeq X_{\frac{nT}{N}} + f\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right) \frac{T}{N} + g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right) \left(B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}\right).$$

À noter que  $B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}$  est une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, T/N)$  et est indépendante de  $\mathcal{A}_{\frac{nT}{N}}$ , où  $\mathcal{A}_t$  est une filtration à laquelle sont adaptés les processus  $B_t$  et  $X_t$ . Un algorithme numérique est alors obtenu en posant  $X_0^{(N)} = x_0$ , et pour  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,

$$X_{\frac{(n+1)T}{N}}^{(N)} = X_{\frac{nT}{N}}^{(N)} + f\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right) \frac{T}{N} + g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right) \xi_{n+1},$$

où  $\xi_1, \dots, \xi_N$  sont i.i.d.  $\mathcal{N}(0, T/N)$ . Ainsi, le processus  $X_t$  est approximé par  $X_{\frac{(n+1)T}{N}}^{(N)}$  pour  $t \in ]\frac{nT}{N}, \frac{(n+1)T}{N}]$ .

L'approximation précédente sera d'autant meilleure que  $N$  est choisi suffisamment grand. En fait, nous pouvons montrer sous certaines hypothèses qu'il existe une constante  $C_T \in (0, \infty)$  telle que

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left| X_t^{(N)} - X_t \right| \right) \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(N)} - X_t| \right) \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}} = 0.$$

L'approximation de  $X_t$  par  $X_{\frac{(n+1)T}{N}}^{(N)}$  est donc uniformément convergente. Il est intéressant de noter que cette approximation stochastique est d'ordre  $1/\sqrt{N}$ , alors qu'elle est d'ordre  $1/N$  dans le cas d'équations différentielles ordinaires. Cette perte de vitesse de convergence s'explique par l'ajout du facteur  $\sqrt{T/N}$  dans l'intégrale d'Itô.

#### 4.4.2 Méthode de Milstein

Le schéma de Milstein est un raffinement de la méthode d'Euler. En supposant que la fonction  $g$  est continue et deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , nous obtenons de la formule d'Itô;

$$\begin{aligned} g(r, X_r) &= g(s, X_s) + \int_s^r \frac{\partial}{\partial s} g(u, X_u) du \\ &\quad + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x} g(u, X_u) dX_u + \frac{1}{2} \int_s^r \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(u, X_u) d\langle X \rangle_u \\ &= g(s, X_s) + \int_s^r \frac{\partial}{\partial s} g(u, X_u) du + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x} g(u, X_u) f(x, X_u) du \\ &\quad + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x} g(u, X_u) g(x, X_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_s^r \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(u, X_u) g(u, X_u)^2 du. \end{aligned}$$

En d'autres termes nous pouvons écrire  $g$  sous la forme

$$g(r, X_r) = g(s, X_s) + \int_s^r \frac{\partial}{\partial x} g(u, X_u) g(u, X_u) dB_u + \int_s^r G_u du,$$

où  $G_t$  est un processus continu. Nous en déduisons l'approximation

$$g(r, X_r) \simeq g(s, X_s) + \frac{\partial}{\partial x} g(s, X_s) g(s, X_s) (B_r - B_s) + G_s(r - s).$$



Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} X_t &\simeq X_s + f(s, X_s)(t-s) + g(s, X_s)(B_t - B_s) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} g(s, X_s) g(s, X_s) \int_s^t (B_r - B_s) dB_r + G_s \int_s^t (r-s) dB_r. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\int_0^t B_r dB_r = (B_t^2 - t)/2$ , la linéarité de l'intégrale et les propriétés de l'intégrale stochastique, nous pouvons montrer que

$$\int_s^t (B_r - B_s) dB_r = \frac{1}{2} \{(B_t - B_s)^2 + (s-t)\}$$

et

$$\int_s^t (r-s) dB_r \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{s,t}^2),$$

où  $\sigma_{s,t}^2 = \int_s^t (r-s)^2 dr = (t-s)^3/3$ . En négligeant le second terme, nous avons

$$\begin{aligned} X_{\frac{(n+1)T}{N}} &\simeq X_{\frac{nT}{N}} + f\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right) \frac{T}{N} + g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right) (B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right) g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}\right) \frac{1}{2} \left\{ (B_{\frac{(n+1)T}{N}} - B_{\frac{nT}{N}})^2 - \frac{T}{N} \right\}. \end{aligned}$$

L'algorithme consiste à poser  $X_0^{(N)} = x_0$ , et pour  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ,

$$\begin{aligned} X_{\frac{(n+1)T}{N}}^{(N)} &= X_{\frac{nT}{N}}^{(N)} + f\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right) \frac{T}{N} + g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right) \xi_{n+1} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right) g\left(\frac{nT}{N}, X_{\frac{nT}{N}}^{(N)}\right) \frac{1}{2} \left( \xi_{n+1}^2 - \frac{T}{N} \right), \end{aligned}$$

où  $\xi_1, \dots, \xi_N$  sont i.i.d.  $\sim \mathcal{N}(0, T/N)$ . Sous certaines hypothèses, nous pouvons montrer que l'approximation stochastique de Milstein est d'ordre  $1/N$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C_T \in (0, \infty)$  telle que

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t^{(N)} - X_t| \right) \leq \frac{C_T}{N}.$$

## CHAPITRE 5

### ÉTUDE ET APPLICATION : MODÈLE BLACK-SCHOLES

#### 5.1 Historique

Le premier modèle d'évolution des actifs financiers a été proposé par Bachelier (1900). Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle est connu sous le nom de Black-Scholes.

Dans ce chapitre nous allons nous concentrer sur une application des schémas de discrétisation vu dans le chapitre précédent.

## 5.2 Description du modèle de Black-Scholes

Considérons le modèle classique de Black-Scholes:

$$\begin{aligned} B_t &= e^{rt} \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

avec  $S_t, B_t$  deux actifs,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  et  $W = (W_t)$  un mouvement Brownien sur un espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Afin de respecter la tradition financière nous appelons  $B$  l'actif non risqué ( $B$  pour banque), à ne pas confondre avec un mouvement Brownien, et  $S$  l'actif risqué qui seront définis sur une période  $[0, T]$ .

Intuitivement le rendement ou taux de variation de l'actif  $dS_t/S_t$  n'est rien d'autre que la quantité  $\mu dt$  à laquelle on ajoute une perturbation aléatoire  $\sigma dW_t$ . L'amplitude de cette perturbation est mesurée par  $\sigma$ , paramètre difficile à calculer et très important qu'on appelle la volatilité de l'actif  $S_t$ . Le coefficient  $\mu$  est appelé la dérive.

**Définition 5.13.**  $S_t$  est un processus continu adapté défini par l'équation stochastique:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad \text{avec} \quad S_0 = s_0 > 0. \quad (5.1)$$

Maintenant nous tenterons de résoudre l'équation (5.1). Pour ce faire définissons le processus  $Z_t = \ln(S_t)$ , et appliquons la formule d'Itô au processus  $Z_t$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
dZ_t &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) dS_t \times dS_t \\
&= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \times (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\
&= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{S_t^2} \right) (\sigma^2 S_t^2 dt) \\
&= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t.
\end{aligned}$$

Après intégration nous déduisons que

$$Z_t - Z_0 = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

Puisque  $S_t = \exp(Z_t)$ , nous obtenons

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}.$$

Soit un pas de discrétisation  $\Delta$ , le schéma d'Euler de l'équation (5.1) est donné par;

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n \Delta + \sigma S_n \Delta W_n,$$

et celui de Milstein par;

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n \Delta + \sigma S_n \Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma^2 \{(\Delta W_n)^2 - \Delta\},$$

où  $\Delta W_n \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$ .

### 5.3 Applications

Pour illustrer une application des schémas présentés, nous essayons de voir la variation de la qualité des simulations suite à la variation du nombre de simulations, de l'intervalle de confiance, ou du pas de discrétisation. Pour ce faire, nous nous inspirons du livre de Huynh et al. (2006) dans lequel, un exemple d'application est présenté et nous utilisons le logiciel matlab version 7.10.0. Il est à noter que nous travaillons avec un pas de discrétisation fixe et nous regardons l'effet de la variation de certains paramètres en utilisant les schémas présentés, d'où le choix de faire des tests avec différentes valeurs.

Pour chacun des schémas nous effectuons alors 10, 100, 1000, 10000, 100000 séries ( NbSeries ) de NbTraj= 1000 simulations avec un pas de discrétisation fixe  $\Delta = \frac{1}{50}$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\sigma = 0.25$  et  $S_0 = 100$ . En d'autres termes, pour un nombre de trajectoires fixé nous effectuons 10, . . . , 100000 simulations pour obtenir plus de précision, ou vu sous un autre angle, le nombre de jours sur lesquels dure la simulation. Ensuite nous calculons l'erreur absolue d'approximation epsilon avec un intervalle de confiance de  $\alpha = 95\%$  pour chaque schéma.

Pour ce faire, et pour optimiser les programmes, nous allons plutôt utiliser les fonctions logarithmes, donc nous simulons plutôt la variable logarithme

de  $S_{n+1}$ . L'approximation du schéma d'Euler devient;

$$\begin{aligned}\ln(S_{n+1}) &= \log \{S_n(1 + \mu \Delta + \sigma \Delta W_n)\} \\ &= \ln(S_n) + \log(1 + \mu \Delta + \sigma \Delta W_n) \\ &= \ln(S_0) + \sum_{i=0}^n \ln(1 + \mu \Delta + \sigma \Delta W_i),\end{aligned}$$

et pour le schéma de Milstein, il suffit de rajouter le terme  $\frac{1}{2}\sigma^2 \{(\Delta W_i)^2 - \Delta\}$ .

Enfin, en appliquant la même méthode aux solutions exactes, nous avons,

$$\begin{aligned}\ln \{S_t\} &= \log \left[ S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\} \right] \\ &= \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t.\end{aligned}$$

Maintenant, pour obtenir les solutions exactes au point  $t = (n+1)\Delta$ , nous avons,

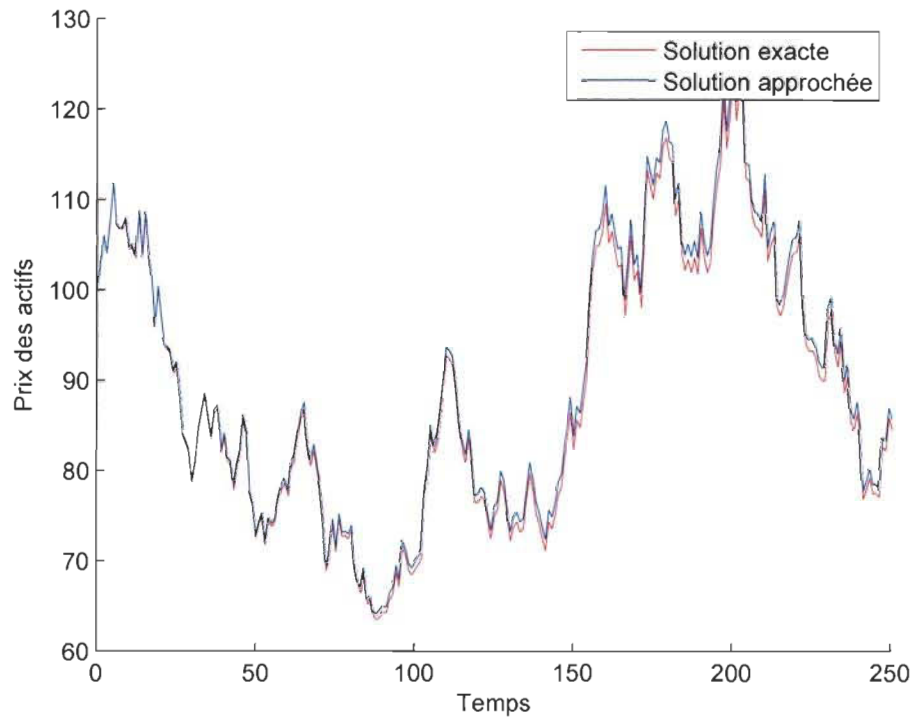
$$\begin{aligned}\ln(S_{n+1}) &= \ln(S_0) + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (n+1)\Delta + \sigma W_{(n+1)\Delta} \\ &= \ln(S_0) + \sum_{i=0}^n \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta + \sigma (W_{(i+1)\Delta} - W_{i\Delta}) \right].\end{aligned}$$

Pour plus de détails concernant ces schémas voir Huynh et al. (2006).

Dans un premier temps nous testons la sensibilité de l'équation par rapport au nombre de séries simulées dans le schéma d'Euler et de Milstein. Avant de présenter les résultats (voir tableau ci-dessous), nous traçons le graphe de la solution approchée et de la solution explicite dans le cas des deux schémas.

Les figures 5.1 et 5.2 représentent une illustration des solutions exactes et approchées et permettent de voir la fluctuation de la variable étudiée,

Figure 5.1: Simulation avec la méthode d'Euler

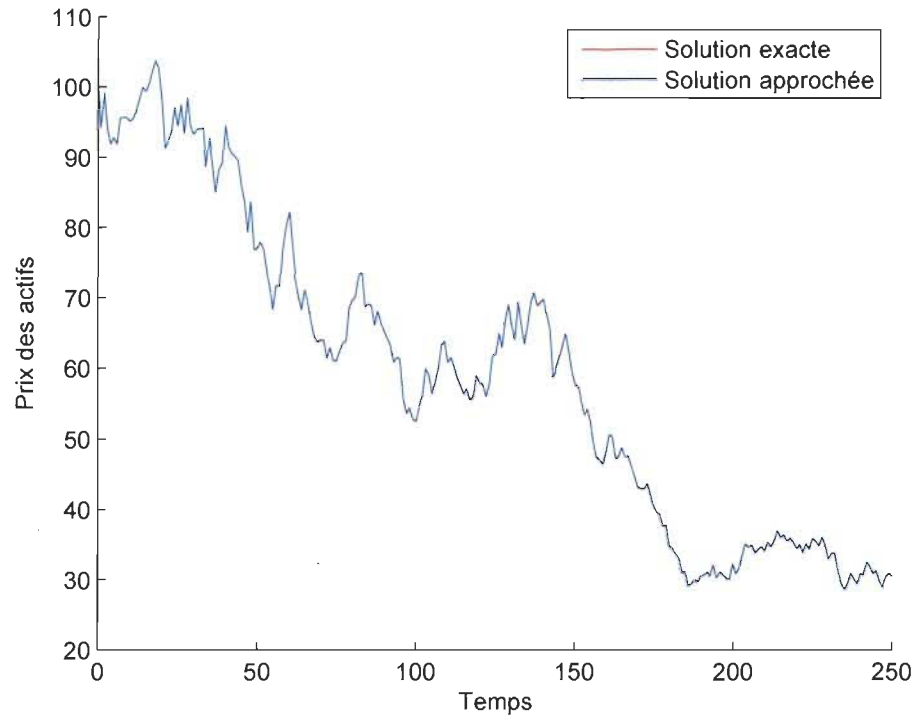


mais par contre elles ne nous donnent pas de renseignements suffisants sur la précision des schémas. Nous remarquons que la solution approchée suit bien celle qui est exacte, mais pour être plus rigoureux nous devons regarder la moyenne des erreurs; c'est que nous faisons par la suite.

Les études de sensibilité présentées ci-dessous permettent de voir la variation de la qualité des simulations suite à la variation du nombre de simulations, de l'intervalle de confiance ou du pas de discrétisation.

Au vu des résultats présentés dans le tableau 5.3 nous pouvons remarquer

Figure 5.2: Simulation avec la méthode de Milstein



que l'augmentation du nombre de simulations donne un résultat plus précis puisque l'intervalle de confiance rétrécit. De plus, la méthode de Milstein confirme la théorie en donnant des résultats plus précis puisque l'erreur est plus petite dans ce dernier cas.

Si nous reprenons l'exemple précédent, au lieu de tester la sensibilité par rapport aux nombres de séries, nous testons celle-ci par rapport à l'intervalle de confiance et au pas de discrétisation.

Les résultats présentés à la figure 5.4 montrent que, selon le niveau de con-



	Euler			Milstein	
NbSeries	epsilon	Intervalle	NbSeries	epsilon	Intervalle
10	0.5265	[0.5225, 0.5305]	10	0.0229	[0.0224, 0.0234]
100	0.5202	[0.5177, 0.5227]	100	0.0233	[0.0231, 0.33]
1000	0.5221	[0.5213, 0.5228]	1000	0.0233	[0.0232, 0.0233]
10000	0.5224	[0.5221, 0.5226]	10000	0.0233	[0.0233, 0.0233]
100000	0.5224	[0.5224, 0.5225]	100000	0.0233	[0.0233, 0.0233]

Figure 5.3: Sensibilité par rapport au nombre de séries

	Euler			Milstein	
alpha	epsilon	Intervalle	alpha	epsilon	Intervalle
0.9	0.5153	[0.5116, 0.5190]	0.9	0.0231	[0.0228, 0.0233]
0.95	0.5264	[0.5196, 0.5331]	0.95	0.0232	[0.0228, 0.0237]
0.99	0.5197	[0.5096, 0.5297]	0.99	0.0234	[0.0229, 0.0239]

Figure 5.4: Sensibilité par rapport à l'intervalle de confiance

fiance désiré, nous obtenons des intervalles de confiance légèrement différents.

Maintenant pour tester la sensibilité par rapport au pas de discrétisation, nous utilisons les paramètres suivants: NbSeries= 1000, NbTraj= 1000,  $\alpha = 95\%$  et calculons l'erreur d'approximation en fonction de  $\Delta = 1/365, 1/52$  et  $1/12$ .

Les résultats de la figure 5.5 montrent que le pas de discrétisation peut avoir une grande influence sur la précision des résultats, nous remarquons que plus le pas discrétisation diminue, plus l'erreur est petite et donc l'intervalle de confiance rétrécit.

	Euler			Milstein	
Delta	epsilon	Intervalle	Delta	epsilon	Intervalle
1/12	1.0531	[1.0516, 1.0546]	1/12	0.0930	[0.0929 , 0.0932]
1/52	0.5124	[0.5117, 0.5131]	1/52	0.0224	[0.0224, 0.0224]
1/365	0.1940	[0.1937, 0.1942]	1/365	0.0032	[ 0.0032 , 0.0032]

Figure 5.5: Sensibilité par rapport au pas de discrétisation

Dans la littérature il existe d'autres méthodes pour simuler les équations différentielles stochastiques, par exemple la simulation avec variables de contrôles, mais l'objectif ici est d'appliquer les schémas vus précédemment.

## CONCLUSION

L'étude détaillée d'une équation différentielle stochastique nécessite certaines notions de base concernant les processus stochastiques. Dans ce mémoire, nous avons mis en place tous les outils qui permettent d'aborder, tant au plan théorique que pratique, le cas d'une équation différentielle stochastique lorsqu'une solution forte explicite est connue. De plus, pour les situations où la solution forte n'est pas connue, ou encore inexistante, nous avons introduit la notion de solution faible et présenté quelques exemples. Ensuite, puisque la solution d'une équation différentielle stochastique n'est pas, en général, une martingale, nous avons présenté le Théorème de Girsanov qui permet de définir une nouvelle mesure de probabilité pour laquelle ce processus solution serait une martingale.

La motivation pour se consacrer à ce sujet de recherche était principalement de se familiariser avec certaines notions théoriques concernant les équations différentielles stochastiques. Par la suite, nous pourrions étudier, les équations aux dérivées partielles stochastiques. Ces dernières servent à modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Ce champ de recherche connaît actuellement un développement important, tant au niveau des concepts que dans l'élaboration des nouveaux résultats en probabilité et en analyse.

# ANNEXES

```
%Cheikh Bécaye Ndong
% Modèle de Black-Scholes

function Euler(NbSeries, NbTraj, NbPas, alpha)
% Cette fonction calcule l'erreur d'approximation en utilisant
% une discrétisation d'Euler et en présentant l'intervalle de confiance
% NbSeries: nombre de séries à simuler
% NbTraj: nombre de trajectoires par série
% NbPas: nombre de pas à simuler
% alpha: niveau de confiance pour l'erreur

% Affichage des données
disp(['Nombre de séries: ', num2str(NbSeries) ]);
disp(['Nombre de trajectoires simulées: ', num2str(NbTraj)]);
disp(['Nombre de pas de discrétisation: ', num2str( NbPas)]);
disp(['Valeur du degré de confiance: ', num2str(alpha)]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Paramètres initiaux
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% X0: valeur initiale du processus
X0 = 100;

% Mu: coefficient traduisant la dérive
Mu = 0.05;

% Sigma: coefficient traduisant la volatilité
Sigma = 0.25;

% Pas de discrétisation
```

```

Delta = 1/NbPas;

%Initialisation de la période
T = 5;

%Nbjours: nombre de jours sur lesquels se déroule la simulation
%Variable utilisée pour un exemple de tracé
NbJours = T*NbPas;

%Vecteur des epsilons moyens pour chaque série
EpsilonSeriesMoy = zeros(NbSeries, 1);

%Pour chaque série on simule les solutions analytiques et les solutions
%approchées
for i= 1:NbSeries
    %Simulation des variables gaussiennes
    DeltaW = sqrt(Delta)*randn(NbTraj,NbJours);

    %Construction des vraies solutions
    Increments = (Mu - Sigma^2/2)*Delta + Sigma*DeltaW;
    LogSolExact = cumsum([log(X0)*ones(NbTraj,1), Increments],2);
    SolExact = exp(LogSolExact);

    %Construction des approximations d'Euler
    LogSolEuler = log ([X0*ones(NbTraj,1), ones(NbTraj,NbJours)+ ...
        Mu*Delta*ones(NbTraj,NbJours)+Sigma*DeltaW]);
    SolEuler = exp(cumsum(LogSolEuler,2));

    if(i==NbSeries )
        TempSolExact = SolExact(NbTraj,:);
        TempSolEuler = SolEuler(NbTraj,:);
        %Tracé de la trajectoire au bout de NbSeries de simulation
        figure
        hold on
        plot(0:1:NbJours,TempSolExact,'r',0:1:NbJours,TempSolEuler,'b');
        xlabel('Temps');
    end
end

```



```
%Cheikh Bécaye Ndongo
% Modèle de Black-Scholes

function Milstein(NbSeries, NbTraj, NbPas, alpha)
%Cette fonction calcule l'erreur d'approximation en utilisant
%une discrétisation d'Euler et en présentant l'intervalle de confiance
%NbSeries: nombre de séries à simuler
%NbTraj: nombre de trajectoires par série
%NbPas: nombre de pas à simuler
%alpha: niveau de confiance pour l'erreur

%Affichage des données
disp(['Nombre de séries: ', num2str(NbSeries) ]);
disp(['Nombre de trajectoires simulées: ', num2str(NbTraj)]);
disp(['Nombre de pas de discrétisation: ', num2str(NbPas)]);
disp(['Valeur du degré de confiance: ', num2str(alpha)]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Paramètres initiaux
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%X0: valeur initiale du processus
X0 = 100;

%Mu: coefficient traduisant la dérive
Mu = 0.05;

%Sigma: coefficient traduisant la volatilité
Sigma = 0.25;

%Pas de discrétisation
Delta = 1/NbPas;

%Initialisation de la période
T = 5;

%Nbjours: nombre de jours sur lesquels se déroule la simulation
```

```

%Variable utilisée pour un exemple de tracé
NbJours = T*NbPas;

%Vecteur des epsilons moyens pour chaque série
EpsilonSeriesMoy = zeros(NbSeries, 1);

%Pour chaque série on simule les solutions analytiques et les solutions
%approchées
for i= 1:NbSeries
    %Simulation des variables gaussiennes
    DeltaW = sqrt(Delta)*randn(NbTraj, NbJours);

    %Ajout pour l'approximation de Milstein
    DeltaW2 = DeltaW .* DeltaW ;

    %Construction des vraies solutions
    Increments = (Mu - Sigma^2/2)*Delta + Sigma*DeltaW;
    LogSolExact = cumsum([log(X0)*ones(NbTraj,1), Increments], 2);
    SolExact = exp(LogSolExact);

    %Construction des approximations de Milstein
    LogSolMilstein = log ([ X0*ones(NbTraj,1), ones(NbTraj, NbJours)+ ...
        Mu*Delta*ones(NbTraj, NbJours)+Sigma*DeltaW+...
        1/2*Sigma^2*(DeltaW2 - Delta*ones(NbTraj, NbJours))]);
    SolMilstein = exp(cumsum(LogSolMilstein, 2));

    if(i==NbSeries )
        TempSolExact = SolExact(NbTraj, :);
        TempSolMilstein = SolMilstein(NbTraj, :);
        %Tracé de la trajectoire au bout de NbSeries de simulation
        figure
        hold on
        plot(0:1:NbJours, TempSolExact, 'r', 0:1:NbJours, TempSolMilstein, 'b');
        xlabel('Temps');
        ylabel('Prix des actifs');
        legend('Solution exacte', 'Solution approchée');
    end
end

```



```
        hold off
    end

    %Variable temporaire pour conserver les erreurs d'approximation
    TempErreur = 0;
    for j=1:NbTraj
        TempErreur = TempErreur + abs(SolMilstein(j, NbPas + 1) - SolExact(j, NbPas + 1));
    end;

    %Calcul de la moyenne des erreurs de la série
    EpsilonSeriesMoy(i,1) = TempErreur /NbTraj;

end

% %Calcul de la moyenne et la variance des erreurs pour les séries
EpsilonMoy = mean(EpsilonSeriesMoy,1);
VarEpsilon = var(EpsilonSeriesMoy);

%Calcul de l'intervalle de confiance
DeltaEpsilon =tinv(alpha, NbSeries -1)*sqrt(VarEpsilon /NbSeries);

%Détermination de l'intervalle de confiance à alpha%
IntConf = [EpsilonMoy - DeltaEpsilon, EpsilonMoy, EpsilonMoy + DeltaEpsilon];

%Affichage des résultats selon la sensibilité du paramètre recherché
disp('Intervalle de confiance, valeur des erreurs moyens au milieu: ');
IntConf

end
```

## Références

- BACHELIER, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Gauthier-Villars.
- BROWN, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827 on the particles contained in the pollen of plants .
- DELSAUX, E. (1877). Sur la respiration des chauves-souris pendant leur sommeil hivernal. *Arch. de biol* **7**, 207–215.
- DURRETT, R. (1996). *Stochastic calculus*. Probability and Stochastics Series. Boca Raton, FL: CRC Press. A practical introduction.
- GEFFROY, J. (1983). *Équations différentielles*. Mathématiques. [Mathematics]. Paris: Presses Universitaires de France.
- GEMAN, H. (1998). De Bachelier à Black-Scholes-Merton. *Gaz. Math.* , 17–30.
- HUYNH, H., LAI, V. & SOUMARÉ, I. (2006). *Simulations stochastiques et applications en finance avec programmes matlab*. Finance (Paris. 2005). Economica.

- JOSHI, M. S. (2003). *The concepts and practice of mathematical finance*. Mathematics, Finance and Risk. Cambridge: Cambridge University Press.
- ØKSENDAL, B. (2003). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Universitext (1979). Springer.
- SMOLUCHOWSKI, M. v. (1906). Investigations on the theory of brownian movement. *Ann. d. Phys.* **21**, 756.
- WIENER, N. (1923). Differential space. *Journal of Mathematical Physics* **2**, 131–174.