

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ A  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC A TROIS-RIVIERES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAITRISE EN PHYSIQUE

PAR

MARIO LEMELIN

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES  
POUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES DE KLEIN-GORDON

Octobre 1993

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous faisons une étude sur les différentes formes de l'équation Klein-Gordon non linéaire dont les solutions seront obtenues par la méthode de séparation des variables.

Nous nous intéresserons aux solutions de l'équation Klein-Gordon non linéaire qui peuvent s'exprimer de façon explicite et qui auront une forme solitonique<sup>1</sup>.

Plus particulièrement, nous nous intéresserons aux solutions qui peuvent s'exprimer sous une forme compacte et qui représentent, du point de vue de la physique, des superpositions d'ondes solitoniques. Ce sera le cas, entre autres, des équations Sine-Gordon et double Sine-Gordon.

Nous introduirons une nouvelle méthode d'utilisation de la séparation des variables. Cette technique nous permettra de trouver certaines classes de solutions de Sine-Gordon, incluant les solutions simple solitonique, "kink" et "anti-kink", "bump", "breather" et double solitonique.

---

<sup>1</sup> Un soliton est une onde qui conserve sa forme intrinsèque de départ même après être entré en collision avec un autre soliton.

Une des questions qui se pose est de trouver comment classifier l'équation Klein-Gordon en fonction de son terme non linéaire. La nouveauté introduite dans ce mémoire réside dans la classification des termes non linéaires, et des solutions s'y rattachant, qui admettront la séparation des variables.

Pour ce faire, nous allons examiner dans le premier chapitre l'équation non linéaire Klein-Gordon en 1+1 dimensions. Nous verrons qu'avec un choix approprié de séparation des variables, nous pourrions arriver à des solutions qui impliquent la superposition d'ondes solitoniques. Nous nous attarderons plus particulièrement sur l'équation Sine-Gordon comme exemple d'application de cette méthode.

Puis, dans le second chapitre, nous tenterons de généraliser cette méthode pour  $n+1$  dimensions. Nous pourrions ainsi classifier les catégories de solutions qui admettent une séparation des variables.

Enfin, fort de ces résultats, nous aborderons la construction de solutions explicites des équations Sine-Gordon et double Sine-Gordon. A cet effet, nous utiliserons la transformation de Burt (BURT[3]) permettant de construire ces solutions sur la base des solutions des équations des champs classiques  $\phi^4$  et

$\phi^6$  obtenues par la méthode de réduction par symétrie (GRUNDLAND[1]). Ce lien entre les équations Sine-Gordon, double Sine-Gordon et les champs classiques était déjà connu. Toutefois, nous avons trouvé de nouvelles solutions de l'équation double Sine-Gordon qui possèdent un intérêt en optique non linéaire (fibre optique (BULLOUGH[1])).

Finalement, nous pourrions conclure sur les solutions trouvées, sur la force et les limitations de ces transformations ainsi que sur la méthode de séparation des variables pour résoudre l'équation non linéaire de Klein-Gordon et ses différentes variantes.

## REMERCIEMENTS

Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier chaleureusement le professeur Alfred Michel Grundland qui a dirigé ce mémoire. Son support constant et sa grande disponibilité ont été pour moi essentiels pendant la rédaction de ce mémoire.

Son aide et ses conseils toujours judicieux furent très appréciés et surtout indispensables à la réalisation de ce travail. C'est avec beaucoup d'estime et de respect que je lui dis: Merci!

## TABLE DES MATIERES

	Page
RÉSUMÉ . . . . .	ii
REMERCIEMENTS . . . . .	v
TABLE DES MATIERES . . . . .	vi
LISTE DES FIGURES . . . . .	viii
INTRODUCTION . . . . .	1
 CHAPITRE 1	
L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON POUR 1+1 DIMENSIONS	
1.1 Méthode de construction des solutions en 1+1 dimensions.	
1.1a) Séparation de la forme $u(x,t)=\phi(X*T)$	5
1.1b) Séparation de la forme $u(x,t)=\phi(X+T)$	13
1.2 Exemple d'application: l'équation Sine-Gordon.	
1.2a) Solution double-solitonique . . . . .	19
1.2b) Solution soliton-anti-soliton . . . . .	21
1.2c) Solution simple solitonique . . . . .	24
1.2d) Comportement asymptotique des solutions	36
1.3 L'équation Laplace-Gordon . . . . .	37
 CHAPITRE 2	
L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON POUR N+1 DIMENSIONS	
2.1 Construction des classes de fonctions . . . . .	39
 CHAPITRE 3	
SOLUTIONS EXPLICITES DES ÉQUATIONS SINE-GORDON ET DOUBLE SINE-GORDON	
3.1 Introduction . . . . .	55
3.2 Transformation de Burt	
3.2a) L'équation Sine-Gordon . . . . .	56
3.2b) L'équation double Sine-Gordon . . . . .	62

3.3	Lien entre les solutions des champs et les équations Sine-Gordon et double Sine-Gordon . . . . .	65
	CONCLUSION . . . . .	72
	TABLEAU 1 SOLUTION DE L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON EN 1+1 DIMENSIONS AVEC $u(x,t)=\phi(X*T)$ . . . . .	75
	TABLEAU 2 SOLUTION DE L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON EN 1+1 DIMENSIONS AVEC $u(x,t)=\phi(X+T)$ . . . . .	80
	TABLEAU 3 SOLUTION DE L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON EN N+1 DIMENSIONS AVEC $u(x,t)=\phi(X*T)$ . . . . .	85
	TABLEAU 4 SOLUTION TRANSLATIONNELLEMENT INVARIANTE DU CHAMP $\phi^6$ . . . . .	87
	TABLEAU 5 TABLES DES ÉQUATIONS DÉTERMINANTES . . . . .	91
	ANNEXE 1 EXEMPLE DE CALCUL AVEC MAPLE V . . . . .	94
	ANNEXE 2 CALCUL DIRECT DES SOLUTIONS SIMPLES SOLITONIQUES . . . . .	101
	BIBLIOGRAPHIE . . . . .	105



## LISTE DES FIGURES

	Page
FIGURE 1	
Solution double solitonique . . . . .	22
FIGURE 2	
Solution soliton-antisoliton . . . . .	24
FIGURE 3	
Solution soliton-antisoliton avec état lié . . . . .	25
FIGURE 4	
Onde solitonique . . . . .	37
FIGURE 5	
Solution (3.52) en deux dimensions . . . . .	70
FIGURE 6	
Solution (3.52) en trois dimensions . . . . .	71
FIGURE 7	
Portrait de phase de l'équation (8) . . . . .	103

**Dieu n'a pas besoin  
de concepts généraux,  
Il connaît tous les cas particuliers.....**

P. OLVER

## INTRODUCTION

Les équations différentielles aux dérivées partielles (E.D.P.) se retrouvent dans plusieurs applications de la physique. Il est important d'avoir des solutions explicites qui nous permettent de prévoir les événements physiques décrits par ces E.D.P..

Une classe de solutions qui est particulièrement intéressante sont celles obtenues par la méthode de séparation des variables. Ceci peut se faire aussi bien pour les E.D.P. hyperboliques que celles elliptiques.

Une des formes les plus simples d'E.D.P. non linéaire d'ordre un s'écrira:

$$\phi_t \mp c(\phi) \phi_x = 0 \quad (1)$$

Cette équation a été élaborée par Leonhard Euler (1707-1783) (KLINE[1], volume 2) dans le contexte de la mécanique des fluides et plus particulièrement pour un flot unidimensionnel. Sa première solution fut construite en 1808 par Denis Poisson (1781-1840) sous une forme implicite soit:

$$\phi = F(x \pm c(\phi) t) \quad (2)$$

où  $F$  est une fonction arbitraire d'une variable  $x \pm c(\phi)t$ .

Elle fut justifiée en 1858 par Bernhard Riemann (1826-1866) à l'aide du théorème des fonctions implicites. Cette solution est connue dans la littérature sous le nom d'onde simple ou onde de Riemann. On remarque que cette E.D.P. (1) possède une solution de forme dispersive avec profil arbitraire.

Une généralisation de l'équation (1) mais d'ordre deux est l'équation Klein-Gordon non linéaire (K.G.N.L.)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + V'(\phi) = 0 \quad (3)$$

Cet équation est un exemple classique de problème hyperbolique avec effet dispersif et qui admet des solutions sous la forme de propagation d'onde.

Cette dernière équation a été beaucoup étudiée, et particulièrement dans le cas où  $V'(\phi) = \sin(\phi)$ . En effet, nous retrouvons alors des solutions de type solitonique.

De plus, ses applications sont nombreuses (BULLOUGH[1]). Pour n'en citer que quelques-unes, nous avons:

- les jonctions de Josephson dans les lignes de

transmission: le terme  $\sin(\phi)$  représente le courant de Josephson à travers l'isolant de deux supraconducteurs.

- la dislocation dans les cristaux: le terme  $\sin(\phi)$  est dû à la structure périodique des rangées d'atomes.
- la propagation d'onde dans les matériaux ferromagnétiques.

Les E.D.P. de type Klein-Gordon sont surtout étudiées depuis 1960 grâce au développement de la méthode de diffusion inverse ("Inverse scattering") qui a permis de trouver des solutions explicites de ces E.D.P..

Plusieurs autres méthodes ont été développées telles que la transformation de Bäcklund, la théorie des groupes, la séparation des variables et les invariants de Riemann. Nous pouvons, par exemple, vérifier l'existence d'ondes de propagation ("travelling waves") dispersives en posant une solution de K.G.N.L. (3) de la forme  $\phi = \Psi(\theta)$  avec  $\theta = kx - \omega t$ .

Cette forme, introduite dans K.G.N.L., nous permet d'obtenir une équation aux dérivées ordinaires pour le profil d'onde

$$(\omega^2 - k^2) \Psi_{\theta\theta} + V'(\Psi) = 0 \quad (4)$$

qui, après une intégration, donne

$$\frac{1}{2} (w^2 - k^2) (\Psi_\theta)^2 + V(\Psi) = A \quad (5)$$

où A est une constante d'intégration.

Nous arrivons finalement à

$$\theta = \left[ \frac{1}{2} (w^2 - k^2) \right]^{1/2} \int \frac{d\Psi}{(A - V(\Psi))^{1/2}} \quad (6)$$

Ainsi, si  $V(\Psi)$  est cubique, quartique ou trigonométrique, il existera alors une solution exprimée par des fonctions elliptiques.

Dans ce mémoire, nous examinerons le problème de classier le terme non linéaire des équations de type Klein-Gordon en 1+1 dimensions, afin que les solutions explicites soient obtenues à l'aide de la séparation des variables. Nous généraliserons par la suite cette classification des termes non linéaires des équations Klein-Gordon pour n+1 dimensions.

## CHAPITRE 1

### L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON POUR 1+1 DIMENSIONS

#### 1.1 Méthode de construction des solutions en 1+1 dimensions

##### 1.1a) Séparation de la forme $u(x,t)=\phi(X \cdot T)$ <sup>1</sup>

Soit l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2) u = b(u). \quad (1.1)$$

Nous allons chercher les classes de fonctions  $b(u)$  qui admettent une solution de l'équation (1.1) par la méthode de séparation des variables. Pour ce faire, nous proposons d'effectuer une séparation des variables sous la forme

$$u(x, t) = \Phi(X \cdot T) \quad \text{où} \quad X = X(x) , T = T(t). \quad (1.2)$$

De plus, nous supposons l'existence de fonctions  $\xi$  et  $\tau$  (fonctions de  $X$  et  $T$  respectivement) de façon telle que les dérivées des fonctions  $X$  et  $T$ , par rapport à  $x$  et  $t$ , puissent s'exprimer par:

---

<sup>1</sup> Cette section est basée sur les calculs obtenus par GRUNDLAND[2].

$$\frac{dX}{dx} := X' = \epsilon |\xi(X)|^{1/2}, \quad \frac{dT}{dt} := T' = \epsilon |\tau(T)|^{1/2} \quad \text{où } \epsilon = \pm 1. \quad (1.3)$$

Les équations (1.3) signifient que les fonctions X et T sont localement monotones.

En substituant ces nouvelles variables (1.2) dans l'équation de base (1.1), tout en tenant compte des relations (1.3), nous obtenons

$$\phi''(S) [\xi T^2 - \tau X^2] + \frac{\phi'(S)}{2} [\xi' T - X \tau'] = (b \cdot \phi)(S), \quad (1.4)$$

où nous avons utilisé la notation  $S=X \cdot T$ .

Tout d'abord, nous voulons trouver toutes les classes de la fonction  $(b \cdot \phi)(S)$  de l'équation (1.4) qui admettent la séparation des variables. A cet effet, il sera approprié d'introduire à ce stade les deux opérateurs différentiels suivants:

$$A_1 := X \partial_X - T \partial_T \quad \text{et} \quad A_2 := X \partial_X + T \partial_T, \quad (1.5)$$

dont le commutateur sera

$$[A_1, A_2] = 0.$$

Nous remarquons que, pour toutes fonctions arbitraires d'une variable  $M(S)$  et  $N(R)$  (où  $R:=X/T$ ), les opérateurs différentiels



(1.5) possèdent les propriétés suivantes:

$$A_1 M(S) = 0 \quad , \quad A_2 N(R) = 0 \quad , \quad (1.6)$$

ce qui implique que ces opérateurs différentiels forment une algèbre abélienne. A partir de maintenant, ces opérateurs seront appelés des **annihilateurs**.

Si nous appliquons  $A_1$  sur l'équation (1.4), nous obtenons l'équation aux dérivées ordinaires

$$\Phi''(S) + \frac{1}{2} \theta(S) \Phi'(S) = 0 \quad , \quad (1.7)$$

où nous avons posé

$$\theta(S) = S^{-1} (A_2 \ln |F| + 2) \quad , \quad (1.8)$$

$$F = (2 \xi X^{-2} - \xi' X^{-1}) + (2 \tau T^{-2} - \tau' T^{-1}) \quad . \quad (1.9)$$

L'équation (1.4) est rendue homogène en vertu des propriétés (1.6) des annihilateurs. Aussi, comme  $\phi$  est fonction de  $S$  seulement,  $\theta$  doit aussi être une fonction de  $S$  seulement. A cet effet, appliquons encore une fois l'annihilateur  $A_1$  sur l'équation (1.7) résultante pour obtenir la relation suivante;

$$A_1 \theta(S) = 0 \quad , \quad (1.10a)$$

qui garantit que  $\theta$  est fonction de  $S$  seulement.

Ainsi, en utilisant l'équation (1.8) et (1.10a), il faudra donc

que

$$A_1 A_2 \ln|F| = 0 , \quad (1.10b)$$

ce qui, après qu'on aura effectué une double intégration, nous permettra de conclure que

$$F = H_1(S) H_2(R) , \quad (1.11)$$

où  $H_1(S)$  et  $H_2(R)$  sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Maintenant, si nous appliquons l'opérateur  $\partial^2/\partial T \partial X$  sur l'équation (1.9) tout en considérant l'équation (1.11), nous obtenons, après séparation des variables, le système suivant d'équations différentielles d'Euler-Cauchy:

$$S^2 H_1'' + S H_1' - \lambda H_1 = 0 ,$$

$$R^2 H_2'' + R H_2' - \lambda H_2 = 0 , \quad (1.12)$$

où  $\lambda$  est une constante de séparation.

La solution du système (1.12) dépendra naturellement du signe que nous donnerons à la constante de séparation  $\lambda$ . Nous distinguerons trois cas: a)  $\lambda > 0$ , b)  $\lambda < 0$  et c)  $\lambda = 0$ .

a) Le cas  $\lambda > 0$ :

Dans ce premier cas, nous obtenons alors les deux solutions des équations (1.12) soit

$$H_1(S) = C_1 S^{\sqrt{\lambda}} + C_2 S^{-\sqrt{\lambda}} ,$$

$$H_2(R) = D_1 R^{\sqrt{\lambda}} + D_2 R^{-\sqrt{\lambda}} , \quad (1.13)$$

où  $C_1$  ,  $D_1$  ( $i=1,2$ ) sont des constantes d'intégration

En utilisant ce dernier résultat, et en considérant les égalités (1.11) et (1.9), nous obtenons, après séparation des variables, les deux équations aux dérivées ordinaires suivantes:

$$\xi' - 2 \frac{\xi}{X} + C_{11} X^{2\sqrt{\lambda}+1} + C_{22} X^{-2\sqrt{\lambda}+1} - \mu X = 0 ,$$

$$\tau' - 2 \frac{\tau}{T} + C_{12} T^{2\sqrt{\lambda}+1} + C_{21} T^{-2\sqrt{\lambda}+1} + \mu T = 0 , \quad (1.14)$$

où  $C_{ij} = C_i D_j$  sont des constantes d'intégration et  $\mu$  est une constante de séparation. Après l'intégration des équations (1.14), nous trouvons

$$\xi = X^2 \left[ - \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} + \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu L n|X| + \xi_0 \right] ,$$

$$\tau = T^2 \left[ - \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} + \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} T^{2\sqrt{\lambda}} + \mu L n|T| + \tau_0 \right] , \quad (1.15)$$

avec  $\xi_0$  et  $\tau_0$  comme constantes d'intégration.

Nous utilisons par la suite les relations (1.3) pour obtenir

$$x = \epsilon \int \left[ \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln}|X| + \xi_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|X|) , \quad (1.16)$$

$$t = \epsilon \int \left[ \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} T^{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln}|T| + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|T|) . \quad (1.17)$$

Ces intégrales peuvent se résoudre analytiquement (voir RYZHIK[1]) par un choix approprié des constantes.

A l'étape suivante, nous voulons trouver les classes de fonctions  $b(u)$  qui nous permettront d'arriver à des solutions basées sur la séparation des variables proposée en (1.2).

En effet, si nous insérons, dans l'équation (1.8), la valeur de  $F$  trouvée en (1.11), nous obtenons

$$\theta(S) = \frac{2}{S} \left( 1 + S \frac{H_1'}{H_1} \right) , \quad (1.18)$$

qui, introduit dans l'équation (1.7), nous donnera une équation aux dérivées ordinaires (E.D.O.) pour la grandeur  $S$ , c'est-à-dire;

$$\phi'' + \frac{1}{S} \left( 1 + S \frac{H_1'}{H_1} \right) \phi' = 0 . \quad (1.19)$$

Cette équation, par réduction d'ordre en posant  $\phi' = W$ , se ramènera à

$$W' + \frac{1}{2} \theta(S) W = 0 .$$

Finalement, on trouve comme résultat

$$\phi(S) = \frac{E}{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}} \arctan \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} S^{\sqrt{\lambda}} \right) + \phi_0 , \quad (1.20)$$

où  $E$  ainsi que  $\phi_0$  sont des constantes d'intégration.

En remplaçant le résultat (1.20) et les valeurs (1.15) dans l'équation (1.4), on obtient finalement la forme  $b(S)$  suivante;

$$(b \cdot \phi) (S) = \frac{E}{H_1} \left[ \mu - S \frac{H_1'}{H_1} (\mu \operatorname{Ln}|S| + \xi_0 - \tau_0) \right]. \quad (1.21)$$

Or, de l'équation (1.20) nous pouvons, en vertu du théorème des fonctions inverses, trouver  $S$  comme une fonction de  $\phi$  soit;

$$S^{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \tan \left( \frac{\phi - \phi_0}{E} \sqrt{C_1 C_2 \lambda} \right). \quad (1.22)$$

En remplaçant la valeur (1.22) dans l'équation (1.21), nous trouvons la forme  $b(\phi)$  égale à;

$$b(\phi) = (\sqrt{\lambda}/2A) \sin 2A(\phi - \phi_0) \cdot [\mu + \sqrt{\lambda} \cos 2A(\phi - \phi_0) \times \\ \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Ln} | B \arctan A(\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0 \right) ] , \quad (1.23)$$

où nous avons noté

$$A = \sqrt{C_1 C_2 \lambda} / E \quad , \quad B = \sqrt{C_2 / C_1} .$$

Remarquons que les classes de fonctions  $b(\phi)$  que nous trouvons contiennent 10 paramètres soit huit constantes d'intégrations et deux constantes de séparations.

Pour toute fonction qui, par un choix de constantes, peut s'exprimer à partir de l'équation (1.23), nous parviendrons à trouver une solution qui admettra la séparation des variables et qui sera donnée par l'équation (1.20) ainsi que les équations (1.16) et (1.17), en autant que ces deux dernières intégrales se solutionnent. Le tableau 1 contient un résumé de tous ces résultats.

Cette méthode nous a permis d'obtenir certaines classes de la fonction  $b(u)$ , pour  $\lambda > 0$ , sous les formes trigonométrique et logarithmique. Ce cas couvre les équations Sine-Gordon et les équations avec non-linéarité logarithmique de type gaussienne qui apparaissent dans diverses applications de la physique-mathématique.

De plus, pour le cas  $\lambda < 0$ , nous retrouvons les équations Sinh-Gordon et Cosh-Gordon tandis que, pour  $\lambda = 0$ , nous aurons les équations de Liouville généralisées. Tous ces résultats sont présentés dans le tableau 1.

1.1b) Séparation de la forme  $u(x,t) = \phi(X+T)$

Nous proposons maintenant une séparation des variables sous la forme

$$u(x,t) = \Phi(X + T) \quad \text{où} \quad X = X(x) , T = T(t) . \quad (1.24)$$

Nous supposons toujours l'existence de fonctions  $\xi$  et  $\tau$  telles que

$$\frac{dX}{dx} := X' = \epsilon |\xi(X)|^{1/2} , \quad \frac{dT}{dt} := T' = \epsilon |\tau(T)|^{1/2} \quad \text{où} \quad \epsilon = \pm 1. \quad (1.25)$$

Nous obtenons donc, après substitution de l'équation (1.24) et des dérivées (1.25) dans l'équation (1.1), l'équation aux dérivées ordinaires

$$\phi''(S) (\xi - \tau) + \frac{\phi'(S)}{2} (\xi' - \tau') = (b \cdot \phi) (S) , \quad (1.26)$$

où nous avons introduit la notation  $S=X+T$ .

Nous introduisons aussi les annihilateurs suivants:

$$A_1 := \partial_X - \partial_T \quad , \quad A_2 := \partial_X + \partial_T \quad ,$$

dont le commutateur sera

$$[A_1 , A_2] = 0 .$$

Pour toutes les fonctions arbitraires d'une variable  $M(S)$  et  $N(R)$  (où  $R=X-T$ ), les annihilateurs posséderont la propriété

$$A_1 M(S) = 0 \quad , \quad A_2 N(R) = 0 .$$

Ainsi, si nous appliquons  $A_1$  sur (1.26), nous arrivons à

$$\phi''(S) + \frac{1}{2} \theta(S) \phi'(S) = 0 \quad , \quad (1.27)$$

où nous avons posé

$$\theta(S) = A_2 \operatorname{Ln}|F| \quad \text{où} \quad F = \xi' + \tau' . \quad (1.28)$$

Nous appliquons ensuite  $A_1$  sur l'E.D.O. (1.27) pour obtenir

$$A_1 A_2 \operatorname{Ln}|F| = 0 \quad ,$$

ce qui nous amène à conclure que

$$F = H_1(S) H_2(R) \quad , \quad (1.29)$$

où  $H_1(S)$  et  $H_2(R)$  sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Maintenant, si nous appliquons

l'opérateur  $\partial^2/\partial T \partial X$  sur l'équation (1.29), tout en tenant compte de (1.28), nous obtenons, après séparation des



variables, le système suivant d'équations différentielles d'Euler-Cauchy:

$$\begin{aligned} H_1'' - \lambda H_1 &= 0 , \\ H_2'' - \lambda H_2 &= 0 , \end{aligned} \tag{1.30}$$

où  $\lambda$  est une constante de séparation.

La solution du système (1.30) dépendra naturellement du signe que nous donnerons à la constante de séparation  $\lambda$ . Nous distinguerons les trois cas suivants: a)  $\lambda > 0$ , b)  $\lambda < 0$  et c)  $\lambda = 0$ .

a) Le cas  $\lambda > 0$ :

Dans ce premier cas, nous obtenons les deux solutions suivantes pour les équations (1.30) soit:

$$\begin{aligned} H_1(S) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda} S} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} S} , \\ H_2(R) &= D_1 e^{\sqrt{\lambda} R} + D_2 e^{-\sqrt{\lambda} R} , \end{aligned} \tag{1.31}$$

où  $C_1$ ,  $D_1$  ( $i=1,2$ ) sont des constantes d'intégration.

En utilisant ce dernier résultat et en utilisant les égalités (1.29) et (1.28), nous trouvons, après séparation des variables, les deux équations aux dérivées ordinaires suivantes:

$$\begin{aligned}\xi' - C_{12} e^{2\sqrt{\lambda} x} - C_{21} e^{-2\sqrt{\lambda} x} - \mu &= 0, \\ \tau' - C_{11} e^{2\sqrt{\lambda} \tau} - C_{22} e^{-2\sqrt{\lambda} \tau} - \mu &= 0,\end{aligned}\tag{1.32}$$

où  $C_{ij} = C_i D_j$  sont des constantes d'intégration et  $\mu$  une constante de séparation. Après l'intégration des équations (1.32), nous arrivons à

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} e^{2\sqrt{\lambda} x} - \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-2\sqrt{\lambda} x} - \mu X + \xi_0, \\ \tau &= \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} e^{2\sqrt{\lambda} \tau} - \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-2\sqrt{\lambda} \tau} - \mu T + \tau_0,\end{aligned}\tag{1.33}$$

avec  $\xi_0$  et  $\tau_0$  comme constantes d'intégration.

Nous utilisons par la suite les relations (1.3) pour obtenir

$$x = \epsilon \int \left[ \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} e^{2\sqrt{\lambda} x} - \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-2\sqrt{\lambda} x} + \mu X + \xi_0 \right]^{-1/2} dX,\tag{1.34}$$

$$t = \epsilon \int \left[ \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} e^{2\sqrt{\lambda} \tau} - \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-2\sqrt{\lambda} \tau} + \mu T + \tau_0 \right]^{-1/2} dT.\tag{1.35}$$

Nous arrivons donc à

$$\theta(S) = \frac{2 H_1'}{H_1}.\tag{1.36}$$

Placant (1.36) dans l'équation (1.27), et réduisant l'ordre en posant  $\phi' = W$ , on obtient

$$W' + \frac{H_1'}{H_1} W = 0.$$

De cette dernière équation aux dérivées ordinaires, nous pouvons tirer le résultat suivant;

$$\phi = \frac{E}{\sqrt{C_1 C_2} \lambda} \arctan \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} e^{\sqrt{\lambda} s} \right) + \phi_0, \quad (1.37)$$

où  $E$  et  $\phi_0$  sont des constantes d'intégration.

En remplaçant la valeur (1.37) et le résultat (1.33) dans l'équation (1.26), on obtient finalement la forme  $b(S)$  suivante;

$$(b \cdot \phi) (S) = \frac{E}{H_1} \left[ \mu - \frac{H_1'}{H_1} (\mu S - \xi_0 + \tau_0) \right]. \quad (1.38)$$

Or, de la valeur (1.37), nous pouvons, en vertu du théorème des fonctions inverses, exprimer  $S$  comme une fonction de  $\phi$ ;

$$S = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Ln} | B \tan [A (\phi - \phi_0)] |, \quad (1.39)$$

avec

$$A = \frac{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}}{E} \quad , \quad B = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} .$$

En substituant la valeur (1.39) dans l'équation (1.38), nous arrivons à la forme  $b(\phi)$  suivante;

$$b(\phi) = (\sqrt{\lambda}/2A) \sin 2A(\phi - \phi_0) \cdot [\mu + \sqrt{\lambda} \cos 2A(\phi - \phi_0) \times \\ \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{Ln} | B \arctan A(\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0 \right) ] . \quad (1.40)$$

Nous remarquons que les classes de fonctions  $b(u)$  que nous trouvons à l'aide de l'équation (1.40) sont identiques à celles trouvées grâce à l'équation (1.23). Nous pouvons prévoir ce résultat puisqu'il est toujours possible de faire une substitution dans  $X^*T$  pour obtenir  $X+T$  à l'aide des logarithmes.

Toutefois, l'avantage de la séparation de la forme  $u(x,t)=\phi(X+T)$  réside dans le fait que les intégrales (1.34) et (1.35) sont, dans bien des cas, plus facile à résoudre. Le tableau 2 contient un résumé de tous ces résultats.

## 1.2 Exemple d'application: l'équation Sine-Gordon

Nous utiliserons maintenant les résultats obtenus dans la section 1.1 et, plus particulièrement, ceux trouvés à partir de l'équation (1.12) où nous avons analysé le cas  $\lambda > 0$  (voir tableau un).

En effet, nous ferons un choix de constantes de manière à pouvoir solutionner les intégrales (1.16) et (1.17) pour obtenir la solution de l'équation Sine-Gordon qui est donnée par;

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2) u = \sin(u) . \quad (1.41)$$

1.2a) Solution double solitonique.

Intégrons les équations (1.16) et (1.17) après avoir substitué les valeurs suivantes aux constantes, soit:

$$\mu = 0 \quad , \quad \sqrt{\lambda} = 1 \quad , \quad D_1 = 0 \quad , \quad \epsilon = 1 \quad ,$$

$$C_2 D_2 = \frac{2}{1 - \beta^2} \quad , \quad C_1 D_2 = \frac{-2 \beta^2}{1 - \beta^2} \quad , \quad (1.42)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad , \quad \tau_0 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} .$$

Nous obtenons alors

$$x = \sqrt{1 - \beta^2} \int \frac{1}{\sqrt{1 + X^2}} dX = \sqrt{1 - \beta^2} \sinh^{-1} (X) , \quad (1.43)$$

et

$$t = - \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \int \frac{1}{T \sqrt{1 - T^2}} dT = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \operatorname{sech}^{-1} (T) , \quad (1.44)$$

d'où nous tirons

$$X = \sinh\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) , \quad (1.48a)$$

$$T = \operatorname{sech}\left(\frac{\beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) . \quad (1.48b)$$

En utilisant les valeurs des constantes établies en (1.42), et en les remplaçant dans l'équation (1.40), nous arrivons à

$$b(\phi) = \frac{1}{2A} \sin[2A(\phi - \phi_0)] \cos[2A(\phi - \phi_0)] .$$

Si nous substituons  $A=1/4$  et utilisons l'identité

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ,$$

nous avons, à un facteur de phase près,

$$b(\phi) = \sin(\phi) . \quad (1.49)$$

Sachant que  $S = X \cdot T$ , nous parvenons à résoudre l'équation (1.20) en y insérant les valeurs (1.48a) et (1.48b), ce qui donne

$$\phi = 4 \arctan (\beta X \cdot T) \quad (1.50)$$

avec

$$\phi_0 = 0 \quad , \quad \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \beta .$$

Il en résulte donc (voir Figure 1) la solution double solitonique qui représente une superposition de deux solitons,

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \left( \frac{\beta \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma \beta t)} \right) , \quad (1.51)$$

avec

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

### 1.2b) Solution soliton-antisoliton.

Nous pouvons, de la même façon, arriver à la solution soliton-antisoliton (SA). En effet, intégrons les équations (1.16) et (1.17) en substituant les valeurs suivantes aux constantes:

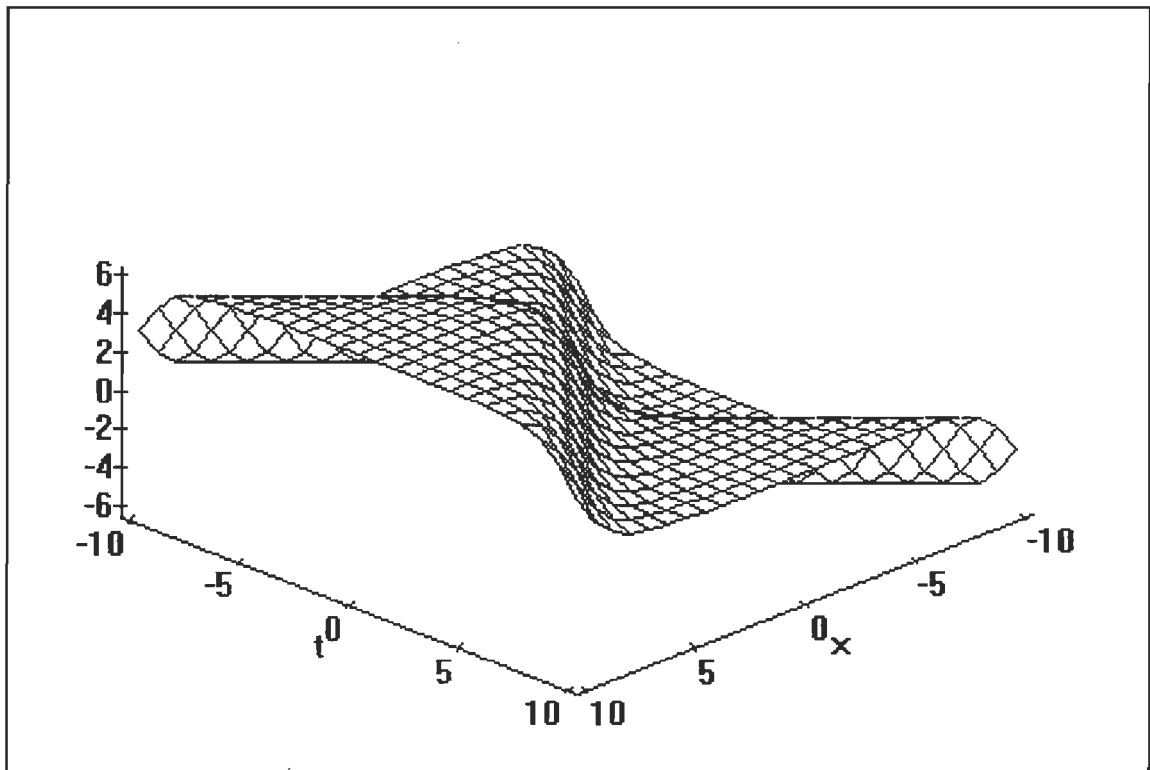


Figure 1

Solution double solitonique

$$\mu = 0 \quad , \quad \sqrt{\lambda} = 1 \quad , \quad D_2 = 0 \quad , \quad e = 1 \quad ,$$

$$C_1 D_1 = \frac{2}{1 - \beta^2} \quad , \quad C_2 D_1 = \frac{-2 \beta^2}{1 - \beta^2} \quad , \quad (1.52)$$

$$\xi_0 = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad , \quad \tau_0 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \quad .$$

Nous obtenons alors



$$t = \sqrt{1 - \beta^2} \int \frac{1}{\sqrt{1 + T^2}} dT = \sqrt{1 - \beta^2} \sinh^{-1} (T) , \quad (1.53)$$

et

$$x = - \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \int \frac{1}{X \sqrt{1 - X^2}} dX = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \operatorname{sech}^{-1} (X) , \quad (1.54)$$

d'où nous tirons

$$X = \operatorname{sech} \left( \frac{\beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) , \quad (1.55a)$$

$$T = \sinh \left( \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) . \quad (1.55b)$$

Il en résulte finalement, de la même façon qu'avec la solution double solitonique (voir Figure 2), que

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \left( \frac{\beta \cosh(\gamma x)}{\sinh(\gamma \beta t)} \right) . \quad (1.56)$$

Pour  $\beta$  purement imaginaire, nous retrouvons la solution SA avec état lié ("breather") (voir Figure 3);

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \left( \frac{\beta \cosh(\gamma x)}{\sin(\gamma \beta t)} \right) , \quad (1.57)$$

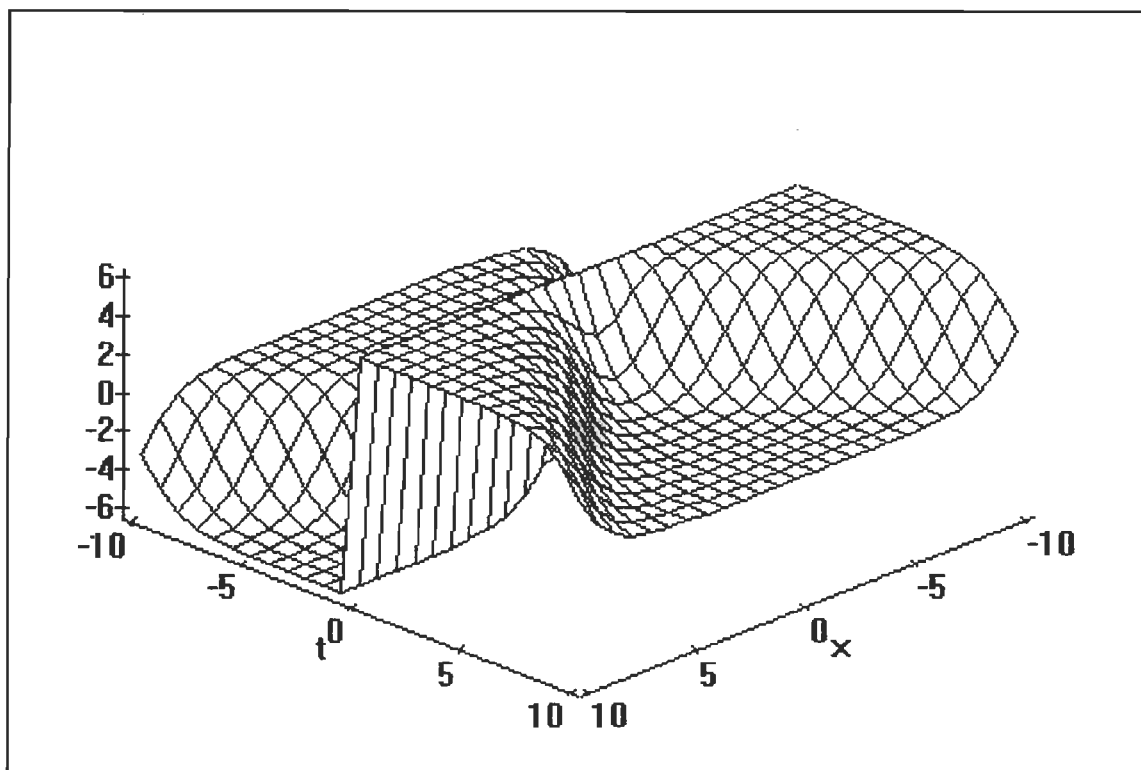


Figure 2

Solution soliton-antisoliton

Tous ces résultats sont bien connus dans la littérature sur le sujet, et particulièrement dans WHITHAM[1], BRYAN[1] et BULLOGH[1].

1.2c) Solution simple solitonique.

Pour cette solution, nous ne pouvons pas recourir aux résultats du tableau 1. Pour l'obtenir, nous utiliserons une façon indirecte en considérant l'équation (1.7) d'un autre point de

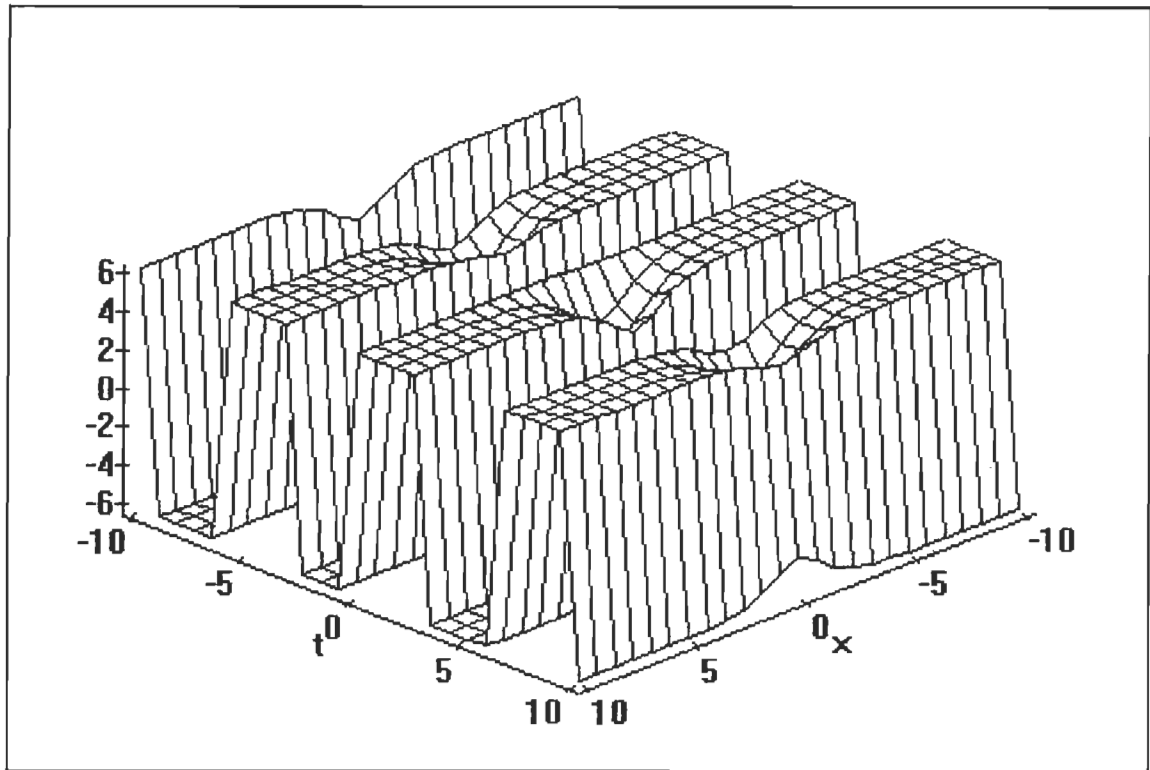


Figure 3

Solution soliton-antisoliton avec état lié

vue. On se rappelle que cette dernière s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \phi'' (2 X^2 \tau + 2 T^2 \xi - TX (X \tau' + T \xi')) + \\ \frac{1}{2} \phi' (\tau' X + \xi' T - TX (\tau'' + \xi'')) = 0 . \end{aligned} \quad (1.58)$$

Le cas où  $\phi'=0$  n'est pas intéressant car il correspond à des solutions constantes ou simplement linéaires. Nous analyserons plutôt le cas où simultanément

$$2 X^2 \tau + 2 T^2 \xi - TX (X \tau' + T \xi') = 0 , \quad (1.59a)$$

$$\tau' X + \xi' T - TX (\tau'' + \xi'') = 0 . \quad (1.59b)$$

Nous tirerons de (1.59a), après séparation des variables, le système d'équations d'Euler-Cauchy

$$T \tau' - 2 \tau - \lambda T^2 = 0 , \quad (1.60)$$

$$X \xi' - 2 \xi + \lambda X^2 = 0 , \quad (1.61)$$

où  $\lambda$  est une constante de séparation.

Ce système a comme solution les deux équations suivantes:

$$\tau = T^2 (C_1 + \lambda \operatorname{Ln}|T|) , \quad (1.62)$$

$$\xi = X^2 (C_2 - \lambda \operatorname{Ln}|X|) , \quad (1.63)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration.

Si nous examinons maintenant le cas où

$$\tau' X + \xi' T - TX (\tau'' + \xi'') = 0 , \quad (1.64)$$

nous obtenons, comme précédemment,

$$\xi = X^2 \left[ \frac{D_2}{2} - \frac{\mu}{4} + \frac{\mu}{2} \operatorname{Ln}|X| \right] + E_1 , \quad (1.65)$$

$$\tau = T^2 \left[ \frac{D_1}{2} + \frac{\mu}{4} - \frac{\mu}{2} \operatorname{Ln}|T| \right] + E_2 , \quad (1.66)$$

où  $D_1, D_2, E_1, E_2$  sont des constantes d'intégration et  $\mu$  est une constante de séparation.

Parce que les équations (1.62) et (1.63) sont moins générales que les équations (1.65) et (1.66), nous utiliserons les résultats de (1.62) et (1.63). Ceci nous amène à

$$t = -\frac{2}{\lambda} \sqrt{C_1 + \lambda \operatorname{Ln}|T|} + t_0 , \quad (1.67)$$

$$x = \frac{2}{\lambda} \sqrt{C_2 - \lambda \operatorname{Ln}|X|} + x_0 , \quad (1.68)$$

et où  $x_0$  et  $t_0$  sont des constantes d'intégration.

Ce qui nous permet d'écrire  $X$  et  $T$  comme suit;

$$X = e^{\frac{1}{4\lambda} (-(x - x_0)^2 \lambda^2 + 4C_2)} , \quad (1.69)$$

$$T = e^{\frac{1}{4\lambda} ((t - t_0)^2 \lambda^2 - 4C_1)} . \quad (1.70)$$

Puisque nous avons effectué une séparation des variables de la forme  $u(x,t)=\phi(X*T)$ , nous aurons donc, en tenant compte des résultats (1.69) et (1.70), que  $S$  sera;

$$\phi(S) = \phi \left( B e^{\frac{1}{4\lambda} (-(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2)} \right), \quad (1.71)$$

$$B := e^{\frac{c_2}{\lambda} - \frac{c_1}{\lambda}}.$$

Remarquons pour l'instant que la fonction  $\phi$  demeure indéterminé. Toutefois, pour obtenir la solution simple solitonique, nous analyserons le cas où  $\lambda=0$ . Les équations (1.62) et (1.63) nous permettent d'arriver à

$$t = \frac{\text{Ln}|T|}{\sqrt{C_1}} + t_0, \quad (1.72)$$

$$x = \frac{\text{Ln}|X|}{\sqrt{C_2}} + x_0, \quad (1.73)$$

d'où nous tirons

$$T = e^{\sqrt{C_1} (t - t_0)}, \quad (1.74a)$$

$$X = e^{\sqrt{C_2} (x - x_0)}. \quad (1.74b)$$

Finalement, nous obtenons la solution

$$u(x, t) = \phi \left( B e^{\sqrt{C_1} t + \sqrt{C_2} x} \right), \quad (1.75)$$

avec

$$B := e^{-\sqrt{C_1} t_0 - \sqrt{C_2} x_0}.$$

Nous avons remarqué avec les résultats précédents (voir (1.51), (1.56) et (1.57)) que la fonction arbitraire  $\phi$  était de la forme  $4 \tan^{-1}(S)$ , ce qui nous suggère de poser que la solution simple solitonique sera de la forme

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \left[ B e^{\sqrt{c_1} t + \sqrt{c_2} x} \right]. \quad (1.76)$$

Et effectivement, nous pouvons vérifier que la fonction (1.76) est solution de l'équation Sine-Gordon (1.41). Mais cette façon de procéder est quelque peu arbitraire. Le lecteur retrouvera, dans l'annexe deux, une méthode basée sur la séparation (1.24) pour obtenir le résultat (1.76).

A ce stade, nous allons plutôt utiliser une transformation qui nous permettra d'obtenir plus facilement la solution simple-solitonique et bien d'autres directement à partir de l'équation Sine-Gordon.

Nous nous souvenons qu'une des solutions (voir 1.51) était de la forme suivante;

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} [\Psi(x, t)]. \quad (1.77)$$

La forme de cette solution nous suggère que la transformation de l'équation S-G originellement en  $u(x, t)$ , en une équation impliquant  $\psi$  pourrait s'avérer intéressante car elle transforme

le terme  $\sin(u)$  en polynôme en  $u$ .

Si nous remplaçons la transformation (1.77) dans l'équation S-G suivante

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0 , \quad (1.78)$$

nous obtenons

$$(1 + \psi^2) (\psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi) - 2 \psi (\psi_t^2 - \psi_x^2 + \psi^2) = 0 . \quad (1.79)$$

Nous obtiendrons plusieurs classes de solutions si nous considérons simplement l'hypothèse (BRYAN[1]) que

$$\psi = X(x) * T(t) . \quad (1.80)$$

En substituant la nouvelle définition (1.80) dans l'équation (1.79), nous voyons que la fonction  $\psi$  sera solution de l'équation S-G si  $X(x)$  et  $T(t)$  sont simultanément solutions du système d'équations (LAMB[1])

$$(X')^2 = p X^4 + m X^2 + q ,$$

$$(T')^2 = -q T^4 + (m - 1) T^2 - p , \quad (1.81)$$

où  $p$ ,  $q$  et  $m$  sont des constantes de séparation.

Les solutions de ce système (1.81) sont bien connues (BRYAN[1],



LAMB[1], BURT[3]). Nous aurons plusieurs cas à considérer individuellement: d'abord le cas  $p=q=0$ , puis celui où  $p*q=0$  et ce, peut importe que ce soit  $p$  ou  $q$  qui soit égal à zéro et finalement le cas où  $p*q \neq 0$ .

Dans ce mémoire, nous n'aborderons pas le cas où  $p*q \neq 0$  car les solutions impliquent les fonctions elliptiques de Jacobi avec périodes couplées. Nous renvoyons le lecteur intéressé à ce cas à l'article BRYAN[1] (page 19 et suivantes).

De plus, la solution dans chacun de ces cas dépendra aussi du signe de la constante de séparation  $m$ . Nous examinerons les effets de cette dernière en analysant chacun des cas.

a) Cas où  $p=q=0$

Dans ce cas, les équations (1.81) deviennent

$$(X')^2 - m X^2 = 0 , \quad (1.82)$$

$$(T')^2 - (m - 1) T^2 = 0 . \quad (1.83)$$

Si nous intégrons directement les équations (1.82) et (1.83), nous obtenons la solution suivante

$$\tan \left( \frac{u(x, t)}{4} \right) = A \exp \left( \pm \sqrt{m} \left[ x \pm \sqrt{\frac{1-m}{m}} t \right] \right), \quad (1.84)$$

où  $A$  est une constante d'intégration.

Remarquons que nous retrouvons ici la branche simple solitonique. La solution  $u(x, t)$  dépendra de trois choix possible de la constante  $m$ :  $m > 1$ ,  $0 < m < 1$  et  $m < 0$ .

Considérons maintenant le cas où  $p \cdot q = 0$  (indistinctement  $p$  ou  $q = 0$ ). Le choix de  $p$  ou  $q = 0$  n'ayant aucun effet significatif sur les résultats, nous choisirons  $p = 0$ . Si  $q > 0$ , nous faisons le changement d'échelle  $X \rightarrow \sqrt{q} X$  et  $T \rightarrow T / \sqrt{q}$ . Si nous remplaçons ces nouvelles variables dans l'équation (1.81), nous obtenons le système d'équations suivant:

$$(X')^2 = m X^2 + 1, \quad (1.85)$$

$$(T')^2 = T^4 + (1 - m) T^2. \quad (1.86)$$

Ainsi, les solutions de (1.85) et (1.86) sont indépendantes du signe de  $q$ . Toutefois, si  $q < 0$ , nous faisons le changement d'échelle  $X \rightarrow i \sqrt{q} X$  et nous obtenons

$$(X')^2 = m X^2 - 1, \quad (1.87)$$

$$(T')^2 = T^4 + (m - 1) T^2. \quad (1.88)$$

En ce qui nous concerne, nous considèrerons principalement les équations (1.85) et (1.86). L'équation (1.85) est de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a + b y + c y^2 .$$

Considérons le discriminant  $\Delta = b^2 - 4 a c$ . Nous aurons respectivement pour  $\Delta < 0$  et  $\Delta > 0$

$$y = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2 c} \sin(\sqrt{-c} x + p) - \frac{b}{2 c} \quad c < 0 , \quad (1.89a)$$

$$y = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2 c} \sin(\sqrt{c} x + p) - \frac{b}{2 c} \quad c > 0 . \quad (1.89b)$$

où  $p$  est une constante d'intégration. Dans ces deux cas, le discriminant est égal à  $-4m$ . La solution dépendra du signe de  $m$ , c'est-à-dire si  $m < 0$  ou si  $m > 0$ . Considérons maintenant l'équation (1.86). Elle est de forme plus générale,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a + b y + c y^2 + d y^3 + e y^4 ,$$

et est appelée équation binomiale. Ces équations sont traitées et classifiées par Ince (INCE[1] p. 312 et suivantes). Nous pouvons intégrer directement cette équation pour obtenir

$$\int \frac{dT}{T \sqrt{T^2 + (1 - m)}} = t . \quad (1.90)$$

Cette intégrale dépendra du signe du terme  $(1-m)$ . On considère

les trois cas possibles: soient  $m > 1$ ,  $0 < m < 1$  et  $m < 0$ , car il faut tenir compte simultanément des équations (1.85) et (1.86).

Nous avons trouvé les solutions suivantes:

a) Cas  $m > 1$

Nous aurons donc la solution de (1.85) suivante

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sinh[ \sqrt{m} x ] . \quad (1.91a)$$

Quant à l'équation (1.86), sa solution est

$$T(t) = \sqrt{m-1} \operatorname{sech}[ \pm \sqrt{1-m} t ] . \quad (1.91b)$$

et si nous effectuons le changement de variables suivant,

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{1/2} = \mu \quad \text{et} \quad \gamma = (1 - \mu^2)^{-1/2} , \quad (1.92)$$

alors nous aurons comme solution, en considérant la transformation (1.80) et les résultats (1.91a) et (1.91b),

$$\tan\left( \frac{u(x, t)}{4} \right) = X(x) * T(t) = \mu \frac{\sinh(\gamma x)}{\cosh(\mu \gamma t)} . \quad (1.93)$$

Nous reconnaissons, dans l'équation (1.93), la solution trouvée initialement lorsque nous avons élaborée notre méthode.

b) Cas  $0 < m < 1$

Pour ce cas, nous posons le changement de variable suivant

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{1/2} = i w \quad \text{et} \quad \sigma = (1 + w^2)^{-1/2} ,$$

et nous obtenons comme solution

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \frac{w \cosh(\sigma x)}{\sin(\sigma w t)} , \quad (1.94)$$

qui est une solution soliton-antisoliton (communément appelée "breather") comme nous avons trouvé précédemment (voir (1.57)).

c) Cas  $m < 0$

Après avoir solutionné (1.87a) et (1.87b), il en résulte que

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \frac{i v \sin(\beta x)}{\sin(\beta v t)} . \quad (1.95)$$

où nous avons posé,

$$v = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{1/2} .$$

Nous pouvons conclure qu'avec cette transformation, il a été possible de retrouver toutes les solutions connues de l'équation Sine-Gordon. Toutefois, nous devons constater que cette transformation ne fonctionne que pour une dimension d'espace et une de temps. Il n'est pas possible de trouver des solutions pour des dimensions d'espace et/ou de temps

supérieure à une.

### 1.2d) Comportement asymptotique des solutions.

Afin de s'assurer que la solution (1.51) est bien le résultat de l'interaction de deux solitons, nous examinerons le comportement de la fonction lorsque  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Récrivons donc la solution (1.51) comme suit;

$$\Psi = \tan\left(\frac{u(x,t)}{4}\right) = \frac{\beta \sinh(\alpha x)}{\cosh(\alpha \beta t)}, \quad (1.95)$$

ou sous une forme équivalente

$$\Psi = \beta \frac{(e^{\alpha(x+\beta t)} - e^{\alpha(x-\beta t)} - e^{-\alpha(x-\beta t)} + e^{-\alpha(x+\beta t)})}{e^{2\alpha\beta t} - e^{-2\alpha\beta t}}. \quad (1.96)$$

Alors, pour  $t = +\infty$ , nous aurons (voir Figure 4) que

$$\Psi \sim \beta (e^{\alpha(x+\beta t)} - e^{-\alpha(x-\beta t)}), \quad (1.97)$$

et pour  $t = -\infty$

$$\Psi \sim \beta (-e^{\alpha(x-\beta t)} + e^{-\alpha(x+\beta t)}). \quad (1.98)$$

On retrouve donc la forme d'une onde solitonique bien connue dans la littérature.

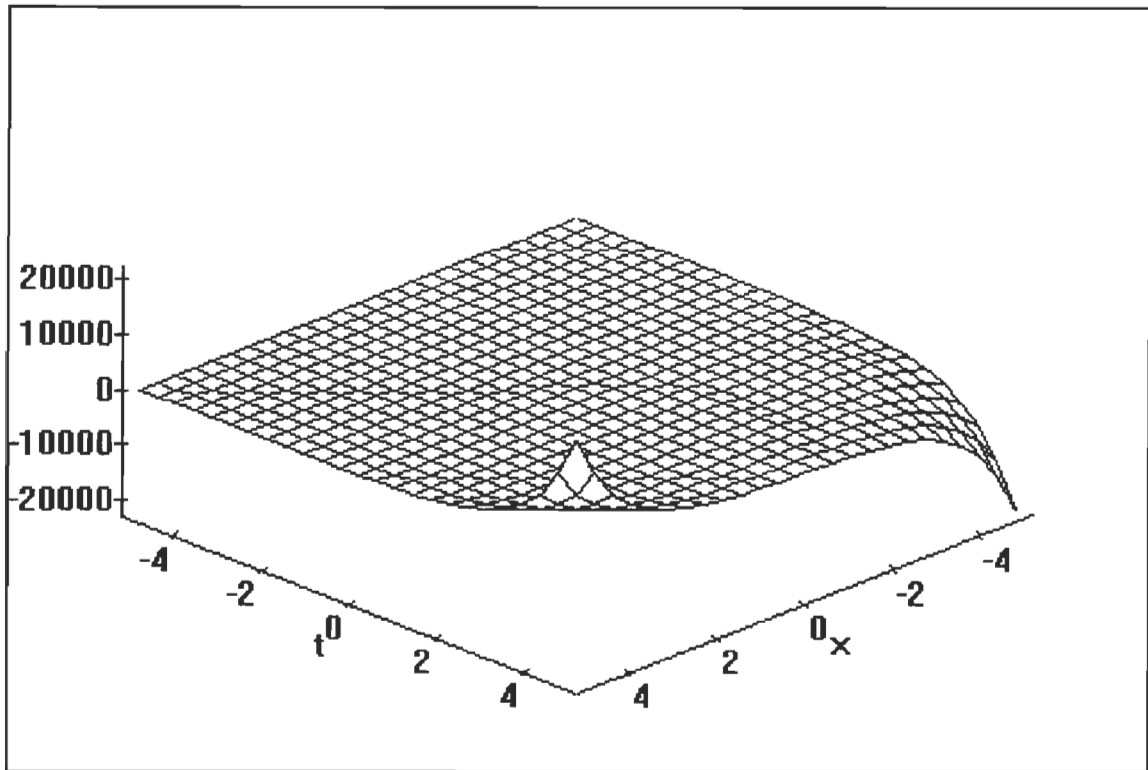


Figure 4  
Onde solitonique

### 1.3 L'équation Laplace-Gordon

Il est également possible de retrouver toutes les classes de fonctions  $b(u)$  qui admettront des solutions de l'équation Laplace-Gordon

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = b(u) \quad \text{où } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.99)$$

par la méthode de séparation des variables.

L'étude de l'équation (1.99) par notre méthode de séparation des variables dans le cas de deux dimensions, nous conduit aux mêmes classes de fonctions  $b(u)$  que pour le cas de Klein-Gordon en 1+1 dimensions.

Ceci était à prévoir, car il est toujours possible de faire la transformation  $t \rightarrow it$  dans l'équation (1.99) et remplacer, dans les résultats du tableau 1, la variable temporelle  $t$  par une variable dimensionnelle comme  $y$  par exemple. Nous renvoyons donc le lecteur au tableau 1 pour les résultats.



## CHAPITRE 2

## L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE KLEIN-GORDON POUR N+1 DIMENSIONS

## 2.1 Construction des classes de fonctions

Dans ce chapitre, nous tenterons de généraliser la méthode étudiée au chapitre précédent pour des dimensions supérieures à 1+1. Pour cela, considérons l'équation aux dérivées partielles de Klein-Gordon en n+1 dimensions

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = b(u) . \quad (2.1)$$

Notre problème consiste à déterminer les classes de fonctions  $b(u)$  qui nous permettront de trouver une solution de (2.1) par la méthode de séparation des variables. A cet effet, nous appliquerons une séparation des variables de la forme

$$u(t, x) = \phi(S) \quad \text{avec} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) , \quad (2.2)$$

et

$$S = T \cdot X_n \quad \text{où} \quad X_n := \prod_{i=1}^n X_i . \quad (2.3)$$

Comme dans le cas précédent, nous posons l'hypothèse que les

dérivées des fonctions  $X$  et  $T$ , par rapport à  $x$  et  $t$  respectivement, sont exprimées par des fonctions localement monotones  $\xi$  et  $\tau$  (fonctions de  $X$  et  $T$  respectivement) c'est-à-dire vérifiant:

$$X'_i = \epsilon |\xi_i(X_i)|^{1/2} \quad \text{et} \quad T' = \epsilon |\tau(T)|^{1/2} \quad ; \quad \epsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad i = 1 \dots n . \quad (2.4)$$

En substituant ces nouvelles variables (2.2) dans l'équation (2.1) et ce, tout en tenant compte des fonctions (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \phi''(S) \left[ \sum_i^n \xi_i (T X_{n/i})^2 - \tau (X_n)^2 \right] + \\ & \frac{\phi'(S)}{2} \left[ \sum_i^n \xi'_i T X_{n/i} - \tau' X_n \right] = (b \cdot \phi) (S) , \end{aligned} \quad (2.5)$$

où nous avons introduit la notation:

$$\partial_{x_i} X_n = X_{n/i} ,$$

afin de simplifier l'écriture.

Pour trouver les classes de la fonction  $b(u)$  qui admettront une solution par séparation des variables, il sera approprié d'introduire ici les opérateurs différentiels suivants:

$$A_1 = \frac{1}{n} \left[ \sum_i^n X_i \partial_{x_i} \right] - T \partial_T , \quad (2.6)$$

$$A_2 = \frac{1}{n} \left[ \sum_i^n X_i \partial_{x_i} \right] + T \partial_T ,$$

dont la propriété est que leur commutateur est

$$[A_1 , A_2] = 0 .$$

En particulier, pour toute fonction arbitraire M dépendant de la variable S, nous aurons que l'annihilateur (2.6) vérifiera la propriété  $A_1 M(S)=0$ . Suivant le même cheminement que dans le chapitre un, appliquons  $A_1$  sur l'équation (2.5). Nous obtenons:

$$\phi''(S) + \frac{1}{2} \phi'(S) \theta(S) = 0 , \quad (2.7)$$

avec la notation

$$\theta(S) = \frac{1}{T X_n} \left[ \frac{\frac{1}{n} \sum_i^n (\xi_i'' - \xi_i' X_i^{-1}) + (\tau'' - \tau' T^{-1})}{\frac{1}{n} \sum_i^n (\xi_i' X_i^{-1} - 2 \xi_i X_i^{-2}) + (\tau' T^{-1} - 2 \tau T^{-2})} \right] , \quad (2.8)$$

que l'on réécrit sous la forme équivalente suivante;

$$\theta(S) = \frac{1}{S} [ (n A_2 - (n - 1) T \partial_T ) \text{Ln}|F| + 2 ] , \quad (2.9)$$

avec

$$F = \frac{1}{n} \sum_i^n (\xi_i' X_i^{-1} - 2 \xi_i X_i^{-2}) + (\tau' T^{-1} - 2 \tau T^{-2}) . \quad (2.10)$$

L'équation (2.7) est homogène en vertu des propriétés de

l'opérateur  $A_1$ . Etant donné que  $\phi$  est une fonction dépendant de  $S$ , il faut que  $\theta$  soit aussi une fonction de la variable  $S$ . Pour nous en assurer, nous appliquerons  $A_1$  à l'équation (2.7) pour obtenir, en considérant (2.9), la relation

$$A_1 [ (n A_2 - (n - 1) T \partial_T ) Ln |F| ] = 0 ,$$

laquelle peut se réécrire sous la forme équivalente,

$$A_1 ( L_1 Ln |F| ) = 0 , \quad (2.11)$$

où  $L_1$  est l'opérateur différentiel suivant

$$L_1 = \sum_i^n X_i \partial_{x_i} + T \partial_T . \quad (2.12)$$

Pour toute fonction arbitraire  $G$  dépendant de la variable  $R$  définie par:

$$R = \frac{X_n}{T^n} , \quad (2.13)$$

cet annihilateur (2.12) vérifie la propriété que  $L_1 G(R)=0$ .

De la relation (2.11), après une double intégration, on montre que

$$F = H_1 (S) H_2 (R) , \quad (2.14)$$

où  $H_1(S)$  et  $H_2(R)$  sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Appliquons l'opérateur différentiel  $\partial_{x_i} T$

à la fonction (2.14). En tenant compte de l'égalité (2.10), nous obtenons

$$\frac{H_1'}{H_1} S + \frac{H_1''}{H_1} S^2 + R S (1-n) \frac{H_1' H_2'}{H_1 H_2} = n \left[ \frac{H_2'}{H_2} R + \frac{H_2''}{H_2} R^2 \right]. \quad (2.15)$$

Nous allons maintenant procéder à la séparation des variables de (2.15) en termes de S et R. Remarquons tout d'abord que si nous posons  $n=1$ , nous retrouvons le cas traité dans le chapitre un. En effet, pour  $n=1$ , l'équation (2.15) nous permet de retrouver immédiatement le système d'équations (1.12).

Mais pour  $n \neq 1$ , le cas est plus sophistiqué. Nous constatons que l'équation (2.15) n'est pas séparable sous la forme où nous la voyons actuellement. Nous devons donc effectuer une opération supplémentaire afin de rendre le système séparable et donc solutionnable en termes de  $H_1(S)$  et  $H_2(R)$ .

Pour cela, appliquons l'opérateur différentiel  $\partial_{SR}^2$  à l'équation (2.15) et ainsi obtenir

$$(S [Ln H_1]_S)_S \cdot (R [Ln H_2]_R)_R = 0.$$

Cette équation nous conduit à l'étude de deux cas distincts suivants:

$$a) \quad S [ \text{Ln } H_1 ]_S = C_1 ,$$

$$b) \quad R [ \text{Ln } H_2 ]_R = D_1 , \quad (2.16)$$

où  $C_1$  et  $D_1$  sont des constantes d'intégration.

Etant donné la symétrie du problème, nous pouvons considérer un seul de ces cas, puisque l'autre fournira des solutions identiques.

Du premier cas, il en résulte

$$H_1 (S) = C_2 S^{C_1} , \quad (2.17)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration.

Si nous introduisons la valeur donnée par (2.17) dans l'équation (2.15), nous pouvons résoudre cette dernière et obtenir

$$H_2 (R) = C_3 R^{\frac{C_1}{n}} + C_4 R^{-C_1} , \quad (2.18)$$

où  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes d'intégration

En substituant les résultats obtenues en (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.14), et en tenant compte de (2.10), nous obtenons (après séparation des variables) le système d'équations

$$\tau' T^{-1} - 2 \tau T^{-2} - C_2 C_4 T^{C_1 (1+n)} = -\sigma, \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{n} \sum_i^n (\xi'_i X_i^{-1} - 2 \xi_i X_i^{-2}) - C_2 C_3 X_n^{C_1 (1 + \frac{1}{n})} = \sigma, \quad (2.20)$$

où  $\sigma$  est une constante de séparation. L'équation (2.19) possède comme solution

$$\tau = T^2 \left[ -\sigma \ln|T| + \frac{C_2 C_4}{C_1 (n+1)} T^{C_1 (n+1)} + \tau_0 \right], \quad (2.21)$$

où  $\tau_0$  est une constante d'intégration.

A cause du terme  $X_n$ , l'équation (2.20) ne peut être résout de la même façon que l'équation (2.19). Toutefois, une analyse de l'équation (2.20) nous permet de remarquer que si nous appliquons l'opérateur  $\partial_{X_i X_j}^2$  ( $i \neq j$ ) à cette dernière, nous devons satisfaire

$$C_1^2 C_2 C_3 X_n^{C_1 (1 + \frac{1}{n})} \left[ 1 + \frac{1}{n} \right]^2 = 0. \quad (2.22)$$

Puisque de toute évidence nous cherchons des solutions non triviales ( $X_i \neq 0$ ) de l'équation (2.20), nous considèrerons les trois cas suivants: 1)  $C_1=0$ , 2)  $C_3=0$  et 3)  $C_2=0$ .

Nous pouvons éliminer le troisième cas, car en vertu de l'équation (2.17), si  $C_2 = 0$  nous aurons que  $H_1$  sera égal à zéro. Ceci aura comme conséquence de donner à  $F$  une valeur nulle. Or, si  $F=0$ , nous obtiendrons un cas indéterminé dans l'équation (2.8). Conséquemment, nous devons donc avoir  $F \neq 0$ . Examinons alors les deux autres cas.

1) Cas  $C_1=0$

En vertu de l'équation (2.17), nous avons

$$H_1(S) = C_2 , \quad (2.23)$$

et en remplaçant ce résultat dans l'équation (2.15), nous obtenons l'équation aux dérivées ordinaires suivante;

$$R^2 H_2''(R) + R H_2'(R) = 0 , \quad (2.24)$$

laquelle admet comme solution

$$H_2(R) = B_1 \text{Ln}|R| + B_2 , \quad (2.25)$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont des constantes d'intégration.

Si nous utilisons les résultats (2.23) et (2.25) et tenons compte des équations (2.10) et (2.14), nous obtenons

$$\frac{1}{N} \sum_i^n (\xi' X_i^{-1} - 2 \xi_i X_i^{-2}) - C_2 B_1 \sum_i^n \text{Ln}|X_i| = \sigma , \quad (2.26)$$

sachant que



$$\text{Ln}|X_n| = \sum_i^n \text{Ln}|X_i| ,$$

et nous obtenons aussi

$$\tau' T^{-1} - 2 \tau T^{-2} + C_2 B_1 \text{Ln}|T^n| - C_2 B_2 = -\sigma . \quad (2.27)$$

Nous allons tout d'abord effectuer l'intégration de l'équation (2.27):

$$\tau(T) = T^2 \left[ -C_2 B_1 \frac{n}{2} (\text{Ln}|T|)^2 + C_2 B_2 \text{Ln}|T| - \sigma \text{Ln}|T| + \tau_0 \right] , \quad (2.28)$$

où  $\tau_0$  est une constante d'intégration.

Toutefois, remarquons ici que le signe de la constante de séparation  $\sigma$  dans la solution (2.28) prend la même valeur que celle prise dans l'équation différentielle (2.27).

Si nous solutionnons l'équation (2.26), il en résulte que

$$\xi_i(X) = X_i^2 \left[ \frac{n}{2} C_2 B_1 (\text{Ln}|X_i|)^2 + n \lambda_i \text{Ln}|X_i| + \xi_{i0} \right] , \quad (2.29)$$

où  $\xi_{i0}$  est une constante d'intégration et  $\lambda_i$  possède la propriété suivante;

$$\sigma = \sum_i^n \lambda_i .$$

En vertu des relations (2.4), nous pouvons, par intégration des

équations (2.28) et (2.29), obtenir

$$x_i = \epsilon \int \left[ \frac{n}{2} C_2 B_1 (\text{Ln}|X_i|)^2 + n \lambda_i \text{Ln}|X_i| + \xi_{i0} \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|X_i|) \quad (2.30)$$

et

$$t = \epsilon \int \left[ -C_2 B_1 \frac{n}{2} (\text{Ln}|T|)^2 + C_2 B_2 \text{Ln}|T| - \sum_i^n \lambda_i \text{Ln}|T| + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|T|) \quad (2.31)$$

Ces intégrales peuvent se résoudre de façon analytique par un choix approprié des constantes. En effet, nous avons  $2n+4$  paramètres donnés par  $n+4$  constantes d'intégration ( $C_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\tau_0$  et  $\xi_i$ ) et  $n$  constantes de séparation ( $\lambda_i$ ).

A l'étape suivante, nous désirons caractériser les classes de fonction  $b(u)$  qui admettent des solutions de l'équation (2.1) basées sur la séparation des variables proposée en (2.2).

Nous obtenons comme résultat que  $F$  est une fonction qui dépend uniquement de la variable  $R$  soit;

$$F = H_1(S) H_2(R) = C_2 (B_1 \text{Ln}|R| + B_2) . \quad (2.32)$$

Si on introduit celle-ci dans l'équation (2.9), et en vertu du fait que  $L_1 F(R) = 0$ , alors

$$\theta(S) = \frac{2}{S} . \quad (2.33)$$

Suivant la méthodologie exposée dans la section deux du chapitre un, nous devons calculer à cette étape la forme de la fonction  $\phi(S)$ . En remplaçant le résultat (2.33) dans l'équation (2.7), et en utilisant la réduction d'ordre, nous arrivons à

$$\phi(S) = C_5 \operatorname{Ln}|S| + \phi_0 , \quad (2.34)$$

où  $C_5$  et  $\phi_0$  sont des constantes d'intégrations.

En substituant les résultats (2.28), (2.29) et (2.34) dans l'équation (2.5), nous obtiendrons les classes de fonction  $b(\phi)$  qui admettent une séparation des variables.

En effet, nous trouvons que

$$b(S) = \frac{n}{2} C_5 C_2 B_1 \operatorname{Ln}|S| + b_0 , \quad (2.35)$$

où nous avons noté

$$b_0 = n C_5 \sum_i^n \lambda_i - \frac{C_5}{2} C_2 B_2 - \tau_0 C_5 .$$

Or, de l'équation (2.34), nous pouvons, en vertu du théorème des fonctions inverses, trouver  $S$  comme une fonction de  $\phi$  soit;

$$S = e^{\left(\frac{\phi - \phi_0}{C_5}\right)} .$$

Nous obtenons donc finalement

$$b(\phi) = A (\phi - \phi_0) + b_0 , \quad (2.36)$$

où nous avons noté

$$b_0 = n C_5 \sum_i^n \lambda_i - \frac{C_5}{2} C_2 B_2 - \tau_0 C_5 ,$$

$$A = \frac{n}{2} C_2 B_1 .$$

## 2) Cas où $C_3 = 0$

En référence au résultat (2.18), nous avons que

$$H_2(R) = C_4 R^{-C_1} , \quad (2.37)$$

et en substituant dans l'équation (2.15), on obtient l'équation aux dérivées ordinaires

$$S^2 H_1''(S) + H_1'(S) [S - S C_1 (1 - n)] - n C_1^2 H_1(S) = 0 ,$$

dont la solution est

$$H_1(S) = D_1 S^{C_1} + D_2 S^{-C_1 n} . \quad (2.38)$$

On a donc comme expression de F

$$F = C_4 (D_1 T^{C_1 (n+1)} + D_2 X_n^{-C_1 (n+1)}) , \quad (2.39)$$

qui, si nous considérons les équations (2.10) et (2.39), nous permet de tirer, après séparation des variables, les deux équations suivantes:

$$\tau T^{-1} - 2 \tau T^{-2} - D_1 C_4 T^{C_1 (1+n)} = -\gamma , \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{n} \sum_i^n (\xi'_i X_i^{-1} - 2 \xi_i X_i^{-2}) - D_2 C_4 X_n^{-C_1 (n+1)} = \sum_i^n \lambda_i , \quad (2.41)$$

et où

$$\gamma = \sum_i^n \lambda_i .$$

L'équation (2.40) se résout ainsi

$$\tau = T^2 \left[ - \sum_i^n \lambda_i \ln|T| + \frac{D_1 C_4}{C_1 (n+1)} T^{C_1 (n+1)} + \tau_0 \right] , \quad (2.42)$$

tandis que (2.41) n'est pas séparable directement. Nous devons donc appliquer l'opérateur  $\partial_{X_i X_j}$ , pour  $i \neq j$ , à l'équation (2.41) puisque, par hypothèse,  $C_4$  et  $C_1$  sont différent de zéro.

Nous avons finalement

$$D_2 C_4 C_1^2 (n+1)^2 X_n^{-C_1 (n+1)} = 0 .$$

La seule possibilité d'avoir autre chose qu'une solution triviale (c'est-à-dire  $X_i \neq 0$ ) est d'avoir  $D_2 = 0$ .

Suite à cette dernière affirmation, nous pouvons intégrer l'équation (2.41) pour obtenir

$$\xi_i = X_i^2 ( n \lambda_i \text{Ln}|X_i| + \xi_{i0} ) . \quad (2.43)$$

L'équation (2.39) devient donc

$$F = C_4 D_1 T^{C_1(n+1)} . \quad (2.44)$$

En vertu des relations (2.4), nous pouvons, par intégration des équations (2.42) et (2.43), obtenir

$$t = \epsilon \int \left[ -\sum_i^n \lambda_i \text{Ln}|T| + \frac{D_1 C_4}{C_1 (n+1)} T^{C_1 (n+1)} + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|T|) , \quad (2.45)$$

$$x_i = \epsilon \int ( n \lambda_i \text{Ln}|X_i| + \xi_{i0} )^{-1/2} d(\text{Ln}|X_i|) . \quad (2.46)$$

Si nous substituons la valeur de F donnée par l'équation (2.44) dans l'équation (2.9), nous obtenons

$$\theta(S) = \frac{(n+1) C_1 + 2}{S} . \quad (2.47)$$

Cette dernière expression introduite dans l'équation (2.7), nous permet de trouver

$$\phi(S) = \frac{-2 C_5 S^{-\frac{C_1}{2}(n+1)}}{C_1 (n+1)} - \phi_0 . \quad (2.48)$$

Connaissant les valeurs (2.42), (2.43), (2.47) et (2.48), nous pouvons, à l'aide de l'équation (2.5), trouver

$$(b\phi)(S) = C_5 S^{-\frac{P}{2}} \left[ -\frac{P}{2} \left( n \sum_i^n \lambda_i \text{Ln}|X_i| + \sum_i^n \lambda_i \text{Ln}|T| \right) + b_0 \right] , \quad (2.49)$$

où nous avons noté

$$b_0 = -\frac{P}{2} \sum_i^n \xi_{i0} + \frac{P}{2} \tau_0 + \frac{n}{2} (n+1) \lambda ,$$

$$P = C_1 (n+1) .$$

De par nos hypothèses de départ, nous savons que  $b(\phi)$  doit être une fonction de  $S$ . Or, si nous observons le terme entre parenthèses de l'équation (2.49) c'est-à-dire

$$n \sum_i^n \lambda_i \text{Ln}|X_i| + \sum_i^n \lambda_i \text{Ln}|T| , \quad (2.50)$$

nous aurons une fonction de  $S$  que si

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda .$$

Ainsi, nous trouvons que

$$(b\phi)(S) = C_5 S^{-\frac{P}{2}} \left[ \frac{-P \lambda n}{2} \text{Ln}|S| + b_0 \right]. \quad (2.51)$$

Or, de l'équation (2.48), nous pouvons, en vertu du théorème des fonctions inverses, trouver S comme une fonction de  $\phi$  soit;

$$S = A^{-P/2} (\phi - \phi_0)^{-P/2}, \quad (2.52)$$

et où nous avons noté

$$A = \frac{-P}{2 C_5}.$$

Nous obtenons donc finalement pour l'équation (2.51)

$$b(\phi) = -\frac{P}{2} (\phi - \phi_0) \left[ \frac{P^2}{4} \lambda n \text{Ln}|A (\phi - \phi_0)| + b_0 \right]. \quad (2.53)$$

$$P = C_1 (n + 1).$$

Nous avons reproduit dans le tableau 3 les classes de fonctions  $b(u)$  qui admettent des solutions par la séparation des variables et ce, pour  $n+1$  dimensions. Remarquons que le cas  $C_1=0$  est inclus dans le cas  $C_3=0$ .



## CHAPITRE 3

SOLUTIONS EXPLICITES DES ÉQUATIONS  
DE SINE-GORDON ET DOUBLE SINE-GORDON

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons des solutions explicites de l'équation Sine-Gordon (S-G) et double Sine-Gordon (D S-G). Pour cela, nous utiliserons les résultats déjà obtenus pour les équations de la théorie des champs classiques  $\phi^4$  et  $\phi^6$  à l'aide de la méthode de réduction par symétrie.

Une analyse systématique et détaillée du point de vue de la théorie des groupes a déjà été réalisée pour ces champs classiques (GRUNDLAND[3]) et de nombreuses solutions ont été construites.

Ces solutions appartiennent aux types suivants:

- solution élémentaire (constante, algébrique avec 1 ou plusieurs pôles),
- solution périodique en termes de fonctions trigonométriques,
- solution hyperbolique,
- solution cylindrique, sphérique et conique,

- solution hélicoïdale,
- solution par similarité,
- solution doublement périodique exprimée par des fonctions elliptiques de Jacobi.

Grâce à la transformation de Burt (BURT[3]), nous pouvons établir le lien entre les équations des champs classiques ( $\phi^4$  et  $\phi^6$ ) et les équations S-G et D S-G. Ceci est rendu possible suivant certaines hypothèses (conditions supplémentaires). Conséquemment, ces hypothèses nous permettront de trouver certaines classes de solutions sous une forme explicite.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur les solutions élémentaires, périodiques, hyperboliques, de similarité et sur les solutions localisées. Nous ne considérerons pas les solutions double périodiques.

### 3.2 Transformation de Burt

#### 3.2a) L'équation Sine-Gordon.

Considérons l'équation S-G suivante

$$\square w(x) + \frac{m^2}{a} \sin(a w(x)) = 0 , \quad (3.1)$$

où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} ,$$

$$x = (x_0 , x_1 , \dots , x_n) ,$$

avec  $m^2$  et  $a$  constants.

Effectuons la transformation suivante proposée par Phillip B. Burt (BURT[3])

$$w(x) = \frac{2}{a} \sin^{-1} u(x) . \quad (3.2)$$

Remplaçons la transformation (3.2) dans l'équation (3.1). Nous obtenons alors

$$u (1 - u^2)^{-3/2} (\nabla u)^2 + (1 - u^2)^{-1/2} u + m^2 u (1 - u^2)^{1/2} = 0 , \quad (3.3)$$

où

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_i^n \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Si nous ajoutons puis retranchons le terme " $a u^3 (1-u^2)^{1/2}$ " dans l'équation (3.3), nous pouvons tirer les deux équations suivantes:

$$\square u + m^2 u + a u^3 = 0 , \quad (3.4)$$

qui est l'équation du champ  $\phi^4$  , et

$$(\nabla u)^2 - (1 - u^2) (m^2 + a) u^2 = 0 , \quad (3.5)$$

qui sera une condition supplémentaire.

Ainsi, pour toute fonction  $u(x)$  qui est simultanément solution de l'équation (3.4) et de la condition supplémentaire (3.5), nous obtiendrons la solution de (3.1) par la transformation (3.2).

L'équation (3.4) est l'équation de base tandis que (3.5) est une condition imposée sur les courbes de niveau de la fonction  $u(x)$ . Cette condition signifie que le gradient au carré  $(\nabla u(x))^2$  est constant sur les courbes de niveaux de la fonction  $u(x)$ . Il est possible d'utiliser encore une autre transformation pour trouver des solutions de l'équation (3.4). Ces solutions seront exprimées en termes de solutions de l'équation de Helmholtz qui s'écrit:

$$\square \phi + \lambda \phi = 0 .$$

En effet, utilisons la transformation suivante:

$$u(x) = \frac{v(x)}{\left(1 - \frac{a v(x)^2}{8 m^2}\right)} . \quad (3.6)$$

Si nous introduisons cette dernière dans l'équation (3.4), nous obtenons

$$64 m^4 [ \square v + m^2 v ] + 48 m^2 a v [ (\nabla v)^2 + m^2 v^2 ] + v^3 a^2 [ 2 (\nabla v)^2 + m^2 v^2 - v \square v ] = 0 \quad (3.7)$$

Nous pouvons poser l'hypothèse que ce sont les termes entre crochet de l'équation (3.7) qui sont nuls et dans ce cas, cette équation n'a de solution que si

$$\square v + m^2 v = 0 , \quad (3.8)$$

$$(\nabla v)^2 + m^2 v^2 = 0 . \quad (3.9)$$

Ces deux dernières équations signifient que, si  $v(x)$  est solution simultanément des équations (3.8) et (3.9), nous aurons alors la solution de (3.4) à l'aide de la transformation (3.6). On remarquera que l'équation (3.8) est justement l'équation de Helmholtz.

Toutefois, il faut que  $u(x)$  soit en même temps la solution de l'équation (3.5) et de (3.4). Si nous remplaçons la transformation (3.6) dans l'équation (3.5), nous obtenons

$$- (\nabla v)^2 m^4 [ \lambda v^2 + 8 ]^2 + m^4 (m^2 v^2) (1 + \lambda) \times [ (\lambda v^2 + 8 v - 8) (\lambda v^2 - 8 v - 8) ] = 0 , \quad (3.10)$$

où  $a = \lambda m^2$ .

Nous devons ajouter la restriction additionnelle  $\lambda = -2$  (voir annexe 1c)) afin que

$$-[\lambda v^2 + 8]^2 = (1 + \lambda) [(\lambda v^2 + 8 v - 8) (\lambda v^2 - 8 v - 8)] \quad (3.11)$$

et finalement, nous obtenons

$$-4 m^4 (v - 2)^2 (v + 2)^2 [(\nabla v)^2 + m^2 v^2] = 0 ,$$

ou tout simplement

$$(\nabla v)^2 + m^2 v^2 = 0 , \quad (3.12)$$

qui est l'équation (3.9).

Ainsi, la transformation (3.6) devient

$$u(x) = \frac{4 v(x)}{(4 + v(x)^2)} . \quad (3.13)$$

Pour  $v(x)$  solution simultanée des équations (3.8) et (3.9), nous aurons comme solution de l'équation de départ (3.1)

$$w(x) = -\frac{2}{a} \sin^{-1} [4 v(x) (4 + v(x)^2)^{-1}] . \quad (3.14)$$

D'autres solutions équivalentes à (3.14) peuvent être trouvées. En effet, si nous posons  $v(x) = 2 \alpha(x)$ , et utilisons la relation suivante (RYZHIK[1] p.50):

$$\sin^{-1} \left( \frac{2 x}{1 + x^2} \right) = -2 \tan^{-1} x ,$$

nous aurons que

$$w(x) = \frac{4}{a} \tan^{-1} \alpha(x) , \quad (3.15)$$

et

$$w(x) = \frac{4}{a} \cotan^{-1} \alpha(x) , \quad (3.16)$$

et ce, pour toute fonction  $v(x)$  qui satisfait le système d'équations (3.8) et (3.9).

Une autre façon de procéder est la suivante: Soit l'équation S-G

$$\square w(x) + \frac{m^2}{a} \sin(a w(x)) = 0 ,$$

et la transformation (3.2). Alors

$$u(x) = \sin\beta \quad \text{où} \quad \beta := \frac{a w(x)}{2} , \quad (3.17)$$

d'où

$$\square u = \frac{a}{2} \cos\beta \square w - \frac{\sin\beta}{\cos^2\beta} (\nabla u)^2 . \quad (3.18)$$

Nous obtiendrions donc, de l'équation (3.18), que

$$\square w = \frac{2}{a} \left[ \frac{\square u}{\cos\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos^3\beta} (\nabla u)^2 \right] . \quad (3.19)$$

Or, de la transformation (3.2), nous obtenons

$$\square w = \frac{2}{a} \left[ (1 - u^2)^{-\frac{3}{2}} u (\nabla u)^2 + (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}} \square u \right], \quad (3.20)$$

qui, introduit dans l'équation S-G, donne l'équation (3.3).

$$u (\nabla u)^2 + (1 - u^2) \square u + m^2 u (1 - u^2)^2 = 0. \quad (3.21)$$

Nous retiendrons ce dernier procédé pour l'analyse de l'équation D S-G.

3.2b) L'équation double Sine-Gordon.

Soit l'équation suivante:

$$\square w(x) + \frac{m^2}{a} \sin(aw(x)) + \frac{b}{2a} \sin(2aw(x)) = 0, \quad (3.22)$$

où  $m^2$ ,  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles quelconques.

Employons la transformation suivante, soit:

$$w(x) = \frac{2}{a} \sin^{-1}(u(x)), \quad (3.23)$$

d'où nous aurons que  $u(x) = \sin(aw(x)/2)$ . De cette dernière, nous obtenons

$$\square u = \frac{a}{2} \cos \frac{aw}{2} \square w - \frac{a^2}{4} \sin \frac{aw}{2} (\nabla w)^2, \quad (3.24)$$

et aussi



$$(\nabla u)^2 = \frac{a^2}{4} (\nabla w)^2 \cos^2 \left( \frac{aw}{2} \right) . \quad (3.25)$$

Des équations (3.24), (3.25) ainsi que (3.22), nous obtenons finalement

$$\square w = \frac{2}{a \cos \frac{aw}{2}} \square u + \frac{2 \sin \frac{aw}{2}}{a \cos^3 \frac{aw}{2}} (\nabla u)^2 . \quad (3.26)$$

Le résultat (3.26) possède la même forme que l'équation (3.19). Ceci nous suggère de faire les hypothèses suivantes.

Premièrement, il faut que  $u(x)$  satisfasse l'équation non linéaire de Klein-Gordon des champ  $\phi^6$ , soit

$$\square u = -2 a_2 u - 4 a_4 u^3 - 6 a_6 u^5 , \quad (3.27)$$

et, deuxièmement, la condition

$$(\nabla u)^2 = b_1 u^2 (1 - u^2) + b_2 u^4 (1 - u^2) , \quad (3.28)$$

où  $a_2, a_4, a_6, b_1$  et  $b_2$  sont des constantes

Nous utilisons les équations (3.27) et (3.28) que nous introduisons dans (3.26). Il en résulte

$$\square w = \frac{2 \sin \frac{aw}{2}}{a \cos \frac{aw}{2}} \left[ -2a_2 + (b_1 - 4a_4) \sin^2 \frac{aw}{2} + (b_2 - 6a_6) \sin^4 \frac{aw}{2} \right]. \quad (3.29)$$

En utilisant les identités suivantes soit;  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  et  $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$ , l'équation D S-G (3.22) peut se réécrire comme suit

$$\square w = \frac{2 \sin \frac{aw}{2}}{a \cos \frac{aw}{2}} \left[ -m^2 - b + (3b + m^2) \sin^2 \frac{aw}{2} - 2b \sin^4 \frac{aw}{2} \right]. \quad (3.30)$$

Puisque les équations (3.29) et (3.30) doivent être égales et que les constantes  $a_2$ ,  $a_4$  et  $a_6$  sont connues, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} b &= 2 a_2 - m^2 \\ b_1 &= 4 a_4 + 6 a_2 - 2 m^2 \\ b_2 &= 6 a_6 - 4 a_2 + 2 m^2 . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Le résultat final pour les équations (3.27) et (3.28) est

$$\square u = -2 a_2 u - 4 a_4 u^3 - 6 a_6 u^5 , \quad (3.32)$$

et

$$(\nabla u)^2 = (4a_4 + 6a_2 - 2m^2) u^2 (1 - u^2) + (6a_6 - 4a_2 + 2m^2) u^4 (1 - u^2) \quad (3.33)$$

En conséquence, pour toute solution  $u(x)$  qui satisfait l'équation non linéaire de Klein-Gordon du champ  $\phi^6$  (3.32) et la condition supplémentaire (3.33) et ce, *simultanément*, alors

$$w(x) = \frac{2}{a} \sin^{-1} u(x) \quad , \quad (3.34)$$

est une solution de l'équation D S-G.

### 3.3 Lien entre les solutions des champs et les équations Sine-Gordon et double Sine-Gordon

Avant d'utiliser les résultats de l'article GRUNDLAND[3], nous allons résumer les résultats obtenus. Pour le cas particulier où  $a = m = 1$ , on a que si  $u(x)$  est solution simultanément de

$$\square u = -2a_2 u - 4a_4 u^3 - 6a_6 u^5 \quad , \quad (3.35)$$

et

$$(\nabla u)^2 = (4a_4 + 6a_2 - 2) u^2 (1 - u^2) + (6a_6 - 4a_2 + 2) u^4 (1 - u^2) \quad , \quad (3.36)$$

alors

$$w(x) = 2 \sin^{-1} u(x) \quad , \quad (3.37)$$

est une solution de l'équation D S-G

$$\square w(x) + \sin(w(x)) + \frac{b}{2} \sin(2 w(x)) = 0 . \quad (3.38)$$

Afin d'utiliser ces résultats, nous allons effectuer le changement de variable  $u(x) = F(\xi)$  en définissant

$$\xi = k_0 t - \sum_i^n k_i x_i , \quad (3.39)$$

d'où

$$u_{x_i x_i} = \ddot{F} (\xi_{x_i})^2 . \quad (3.40)$$

L'équation (3.35) devient alors

$$\ddot{F} = -2 \lambda (a_2 F + 2 a_4 F^3 + 3 a_6 F^5) , \quad (3.41)$$

$$\lambda = \frac{1}{k^2} , \quad k^2 = k_0^2 - \sum_{i=0}^n k_i^2 .$$

Multiplions chaque coté de l'équation (3.41) par  $\dot{F}$ . Après intégration, nous en tirons

$$(\nabla F)^2 = -2 \lambda (a_2 F^2 + a_4 F^4 + a_6 F^6 + 2 C) , \quad (3.42)$$

où C est une constante d'intégration. Réécrivons l'équation (3.42) de la façon suivante:

$$(\nabla F)^2 = \frac{A}{4} (\beta F^2 + \alpha F^4 + F^6 + \gamma) , \quad (3.43)$$

$$A = -8 \lambda a_6 \quad , \quad \alpha = \frac{a_4}{a_6} \quad , \quad \beta = \frac{a_2}{a_6} \quad , \quad \gamma = \frac{2 C}{a_6} . \quad (3.44)$$

Considérons maintenant l'effet qu'aura sur la condition (3.36) le changement de variable  $u(x) = F(\xi)$  proposé au début. En utilisant les notations (3.44) et en posant  $\delta=1/a_6$ , nous aurons

$$(\nabla F)^2 = \frac{A}{4} [ (\delta - 3 \beta - 2 \alpha) F^2 + (5 \beta - 2 \delta + 2 \alpha - 3) F^4 + (3 - 2 \beta + \delta) F^6 ] \quad (3.45)$$

Ainsi, si nous comparons (3.43) avec (3.45), nous voyons que nous pourrions satisfaire simultanément les équations (3.35) et (3.36) si et seulement si

$$\begin{aligned} \delta - 3 \beta - 2 \alpha &= \beta \\ 5 \beta - 2 \delta + 2 \alpha - 3 &= \alpha \\ 3 - 2 \beta + \delta &= 1 \\ \gamma &= 0 . \end{aligned} \quad (3.46)$$

De ce système, nous tirons, pour toutes les valeurs de  $\beta$ , que

$$\begin{aligned} \alpha &= -\beta - 1 \\ \delta &= 2\beta - 2 \\ \beta &= \beta \\ \gamma &= 0 . \end{aligned} \quad (3.47)$$

La solution est alors paramétrisée par  $\beta$  qui est arbitraire et réel.

De plus, en utilisant l'équation (3.43) avec les restrictions (3.47), nous vérifions si une solution du champ  $\phi^6$  peut être une solution de l'équation D S-G à l'aide de la transformation  $u(x) = F(\xi)$ .

En se référant à l'article GRUNDLAND[3], nous voyons que la condition  $\gamma=0$  impose que  $F_1$ ,  $F_2$  ou  $F_3$  soit égal à zéro. Par exemple, vérifions si

$$F = \frac{\epsilon_0 F_1}{(1 + e^{\epsilon_1 F_1 \sqrt{A} (\xi - \xi_0)})^{1/2}} \quad \text{où } \epsilon_0 = \pm 1, \quad (3.48)$$

sera une bonne solution de l'équation D S-G.

Ici, la constante  $\epsilon_1 = \pm 1$  détermine si la solution (3.48) est un "kink" ou un "anti-kink" respectivement. Si nous introduisons la solution (3.48) dans (3.43), nous aurons le système d'équations suivant à résoudre:

$$- F_1^2 \epsilon_1^2 + \beta = 0$$

$$\frac{1}{8} \beta + \frac{1}{16} \alpha \epsilon_0^2 F_1^2 = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{16} \beta + \frac{1}{16} \alpha \epsilon_0^2 F_1^2 + \frac{1}{16} \epsilon_0^4 F_1^4 = 0,$$

dont la solution est

$$\alpha = -2 e_1^2 \quad , \quad \beta = e_1^4 \quad , \quad F_1 = \pm 1 \quad (3.50)$$

(voir annexe 1d).

Les valeurs trouvées en (3.50) respectent bien les conditions imposées par (3.47) et plus spécifiquement celle où

$$\alpha = -\beta - 1 .$$

Nous avons donc que la solution de départ (3.48) devient

$$F = \pm (1 + e^{\pm (\xi - \xi_0)})^{-1/2} , \quad (3.51)$$

et, en utilisant la transformation (3.37), nous arrivons à la solution finale (voir Figure 5 et 6 pour le cas positif)

$$w(x) = 2 \sin^{-1} [ (1 + e^{\pm (\xi(x) - \xi_0)})^{-1/2} ] . \quad (3.52)$$

Nous retrouvons au tableau 4 la liste des nouvelles solutions de l'équation Sine-Gordon et double Sine-Gordon que nous avons obtenues grâce à la transformation de Burt (3.2).

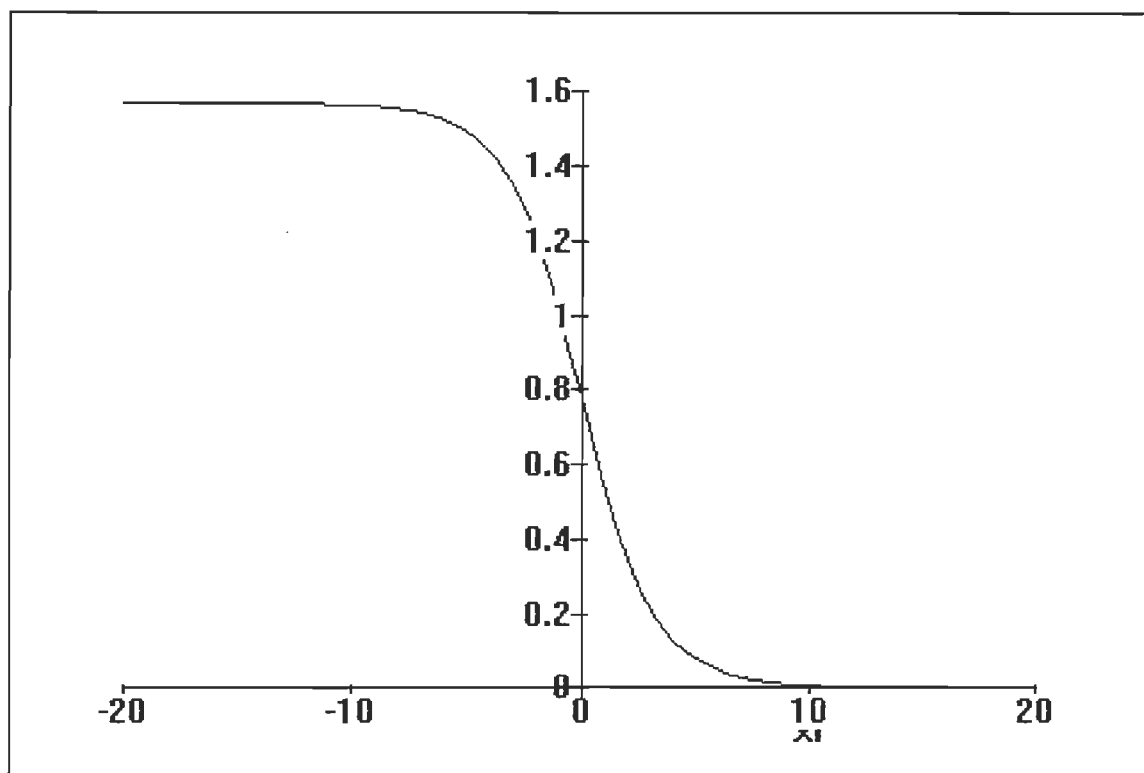


Figure 5

Solution (3.52) en deux dimensions



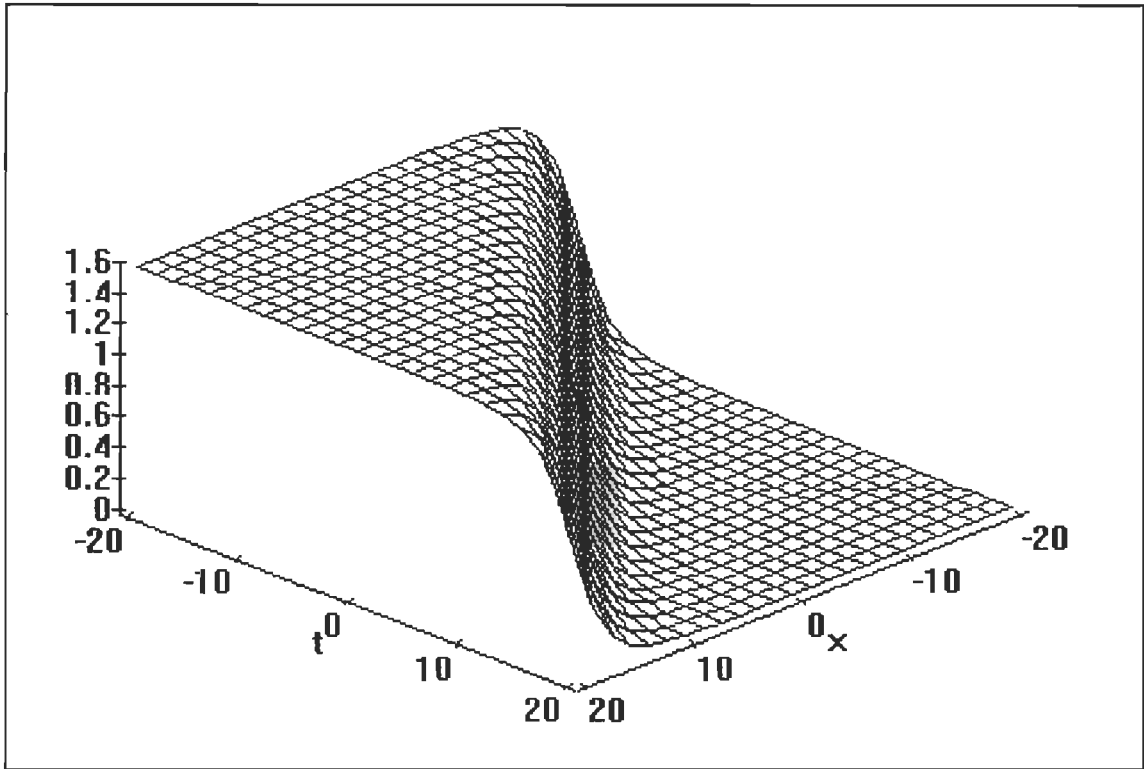


Figure 6

Solution (3.52) en trois dimensions

## CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons tenté de généraliser une méthode de séparation des variables pour les équations non linéaires de Klein-Gordon. Nous avons ainsi réalisé une classification des termes non linéaires (dans notre cas  $b(u)$ ) admettant une forme de séparation des variables spécifique comme solution de K.G.N.L..

Pour le cas 1+1 dimensions, nous avons retrouvé les solutions bien connues et, plus particulièrement, les solutions de l'équation Sine-Gordon impliquant des ondes solitoniques ainsi que leur superposition. De nouvelles fonction  $b(u)$  ont aussi été trouvées et classifiées avec leurs solutions respectives.

Nous avons appliqué cette méthode pour  $n+1$  dimensions. Nous avons démontré que nous pouvons faire une classification de la fonction  $b(u)$ . Nous avons obtenu des fonctions polynomiales et logarithmique c'est-à-dire

$$b(u) = -\frac{P}{2} (u - u_0) \left[ \frac{P^2}{4} n \lambda \ln |A (u - u_0)| + b_0 \right],$$

et où les constantes  $A$ ,  $P$  et  $b_0$  sont définies dans le tableau trois. Bien qu'à première vue ce résultat peut sembler restrictif, nous devons voir là un avancement. En effet, les méthodes puissantes telles que la diffusion inverse ("Inverse

scattering") et la transformation de Bäcklund n'ont montré leur pleine efficacité que pour 1+1 dimensions.

La méthode de séparation des variables devient un outil puissant si nous pouvons utiliser une transformation préalable qui simplifiera l'équation différentielle de départ. Une de ces transformations (transformation de Burt) nous a permis de trouver des solutions de l'équation Sine-Gordon et double Sine-Gordon à partir des équations des champs  $\phi^4$  et  $\phi^6$  obtenues par la réduction par symétrie (tableau 4). Ces dernières possèdent des solutions connues et, de plus, font partie des tables de solutions que nous avons trouvées par la séparation des variables (voir tableaux 1 à 3).

Pour la méthode généralisée de séparation des variables, nous nous sommes restreint à l'équation non linéaire de Klein-Gordon et à une séparation de la forme  $u(x,t)=\phi(X*T)$ . Naturellement, ces formes ne sont pas les seules possibles, pas plus que les équations différentielles. Actuellement, les équations suivantes:

$$c(u) u_{xx} = u_{tt} ,$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2} (u^2)_{tt} ,$$

$$u_t + \Delta u = b(u) ,$$

font l'objet de recherches avec l'aide de séparations des variables de la forme

$$S = Y + \alpha(T + X) ,$$

où  $\alpha$  est une fonction arbitraire de la variable  $X+T$ ,

$$S = Y + \lambda \operatorname{Ln}|T + X| ,$$

où  $\lambda$  est une constante arbitraire, et

$$S = T + \lambda \tan^{-1} \frac{X}{Y} ,$$

pour n'en nommer que quelques unes.

Bien qu'exigeant plusieurs calculs symboliques sur ordinateur à l'aide de logiciels spécialisés (MAPLE, Mathematica, etc), la nouvelle façon d'utiliser la méthode de séparation des variables que nous avons utilisée est avantageuse par sa simplicité.

Nous pensons que la méthode de séparation des variables présentée dans ce mémoire démontre que celle-ci est un outil efficace dans le cas des équations de Klein-Gordon non linéaires parce qu'elle nous conduit à de nouveaux résultats intéressants autant du point de vue mathématique que de celui de la physique.

## TABLEAU 1

Solution de l'équation non linéaire de Klein-Gordon en 1+1 dimensions avec  $\phi(X^*T)$

$C_1$  et  $C_2 \neq 0, \lambda > 0$

$$H_1(S) = C_1 S^{\sqrt{\lambda}} + C_2 S^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$H_2(R) = D_1 R^{\sqrt{\lambda}} + D_2 R^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$\xi = X^2 \left[ -\frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} + \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln}|X| + \xi_0 \right]$$

$$x = e \int \left[ \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln}|X| + \xi_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|X|)$$

$$\tau = T^2 \left[ -\frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} T^{2\sqrt{\lambda}} + \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln}|T| + \tau_0 \right]$$

$$t = e \int \left[ \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} T^{2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln}|T| + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|T|)$$

pour  $C_1, C_2 > 0$

$$b(\phi) = (\sqrt{\lambda}/2A) \sin 2A(\phi - \phi_0) \cdot [\mu + \sqrt{\lambda} \cos 2A(\phi - \phi_0) \times \\ \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln}|B \arctan A(\phi - \phi_0)| + \xi_0 - \tau_0 \right) ]$$

$$A = \sqrt{C_1 C_2 \lambda} / E \quad , \quad B = \sqrt{C_2 / C_1}$$

pour  $C_1, C_2 < 0$

$$b(\phi) = (\sqrt{\lambda}/2A) \tanh 2A(\phi - \phi_0) \cdot [\mu + \sqrt{\lambda} \cos 2A(\phi - \phi_0) \times \\ (\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln} | B \arctan A(\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0) ]$$

$$A = \sqrt{-C_1 C_2 \lambda} / E \quad , \quad B = \sqrt{-C_2 / C_1}$$

pour  $C_1 = 0$

$$H_1(S) = C_2 S^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$H_2(R) = D_1 R^{\sqrt{\lambda}} + D_2 R^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$\xi = X^2 \left[ \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln} |X| + \xi_0 \right]$$

$$x = \epsilon \int \left[ \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln} |X| + \xi_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln} |X|)$$

$$\tau = T^2 \left[ \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln} |T| + \tau_0 \right]$$

$$t = \epsilon \int \left[ \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln} |T| + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln} |T|)$$

$$b(\phi) = \sqrt{\lambda} (\phi - \phi_0) \times [\mu + \sqrt{\lambda} (\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln} | \frac{\sqrt{\lambda}}{E} (\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0) ]$$

pour  $C_2 = 0$

$$H_1(S) = C_1 S^{\sqrt{\lambda}}$$

$$H_2(R) = D_1 R^{\sqrt{\lambda}} + D_2 R^{-\sqrt{\lambda}}$$

$$\xi = X^2 \left[ -\frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln}|X| + \xi_0 \right]$$

$$x = e \int \left[ \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} + \mu \text{Ln}|X| + \xi_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|X|)$$

$$\tau = T^2 \left[ -\frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln}|T| + \tau_0 \right]$$

$$t = e \int \left[ \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} T^{-2\sqrt{\lambda}} - \mu \text{Ln}|T| + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\text{Ln}|T|)$$

$$b(\phi) = -\sqrt{\lambda} (\phi - \phi_0) \times \left[ \mu + \sqrt{\lambda} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{E} (\phi - \phi_0) \right| - \xi_0 + \tau_0 \right) \right]$$

$C_1$  et  $C_2 \neq 0$ ,  $\lambda < 0$

$$H_1(S) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} \text{Ln}|S|) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|} \text{Ln}|S|)$$

$$H_2(R) = D_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} \text{Ln}|R|) + D_2 \sin(\sqrt{|\lambda|} \text{Ln}|R|)$$

$$\xi = X^2 [S_1 \sin \alpha + S_2 \cos \alpha + \mu \text{Ln}|X| + \xi_0]$$

$$S_1 = \frac{C_{22} - C_{11}}{4\sqrt{|\lambda|}} \quad , \quad S_2 = \frac{C_{12} + C_{21}}{4\sqrt{|\lambda|}} \quad , \quad \alpha = 2 \sqrt{|\lambda|} \text{Ln}|X|$$

$$x = e \int [S_1 \sin \alpha + S_2 \cos \alpha + \mu \operatorname{Ln}|X| + \xi_0]^{-1/2} d(\operatorname{Ln}|X|)$$

$$\tau = T^2 [-S_3 \sin \beta + S_4 \cos \beta - \mu \operatorname{Ln}|T| + \tau_0]$$

$$S_3 = \frac{C_{11} + C_{22}}{4\sqrt{|\lambda|}} \quad , \quad S_4 = \frac{C_{21} - C_{12}}{4\sqrt{|\lambda|}} \quad , \quad \alpha = 2 \sqrt{|\lambda|} \operatorname{Ln}|T|$$

$$t = e \int [-S_3 \sin \alpha + S_4 \cos \alpha - \mu \operatorname{Ln}|T| + \tau_0]^{-1/2} d(\operatorname{Ln}|T|)$$

$$b(\phi) = (\sqrt{|\lambda|}/K \cosh(K(\phi - \phi_0))) [\mu + \sqrt{|\lambda|} \sinh(K(\phi - \phi_0)) (\delta + \xi_0 + \tau_0)]$$

$$K = \frac{\sqrt{|\lambda|} (C_1^2 + C_2^2)}{E} \quad , \quad \delta = \frac{\mu}{2 \sqrt{|\lambda|}} (2 \arctan[e^{K(\phi - \phi_0)}] - \alpha)$$

$C_2 \neq 0, \lambda = 0;$

$$H_1(S) = C_1 + C_2 \operatorname{Ln}|S|$$

$$H_2(R) = D_1 + D_2 \operatorname{Ln}|R|$$

$$\xi = X^2 [\xi_0 + (\mu + C_{11}) \operatorname{Ln}|X| + \frac{1}{2} (C_{21} + C_{12}) \operatorname{Ln}^2|X| + \frac{1}{3} C_{22} \operatorname{Ln}^3|X|]$$

$$x = e \wp \left( + \frac{C_{22}}{12} \operatorname{Ln}|X| + \frac{C_{21} + C_{12}}{24} , \omega_1 , \omega_2 \right)$$

où  $\wp$  est la fonction de Weierstrass avec période  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{(C_{21} + C_{12})^2}{48} + \frac{C_{22}}{12} (\mu - C_{11})$$



$$g_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{(C_{21} + C_{12})^3}{1728} + \frac{C_{22}}{72} (\mu - C_{11}) (C_{21} + C_{12}) - \xi_0 \frac{(C_{22})^2}{144}$$

$$t = \epsilon \rho \left( + \frac{C_{22}}{12} \text{Ln}|T| + \frac{C_{12} - C_{21}}{24} , \omega_1 , \omega_2 \right)$$

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{(C_{12} - C_{21})^2}{48} + \frac{C_{22}}{12} \mu$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = -\frac{(C_{12} + C_{21})^3}{1728} + \frac{C_{22}}{72} (C_{12} - C_{21}) - \tau_0 \frac{(C_{22})^2}{144}$$

$$b(\phi) = E e^{-2(C_2/E)(\phi-\phi_0)} \left[ -\frac{D_2}{6 C_2} e^{3(C_2/E)(\phi-\phi_0)} + G - C_2 (\xi_0 - \tau_0) \right]$$

$$G = \frac{C_1^3 D_2}{6 C_2} - \frac{C_1^2 D_1}{2} + C_1 \mu$$

TABLEAU 2

Solution de l'équation non linéaire de Klein-Gordon en 1+1 dimensions avec  $\phi(X+T)$ .

$C_1$  et  $C_2 \neq 0, \lambda > 0$

$$H_1(S) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} S} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} S}$$

$$H_2(R) = D_1 e^{\sqrt{\lambda} R} + D_2 e^{-\sqrt{\lambda} R}$$

$$\xi = \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} X} - \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} X} + \mu X + \xi_0$$

$$x = e \int \left[ \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} X} - \frac{C_{22}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} X} + \mu X + \xi_0 \right]^{-1/2} dX$$

$$\tau = \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} T} - \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} T} - \mu T + \tau_0$$

$$t = e \int \left[ \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} T} - \frac{C_{21}}{2\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} T} - \mu T + \tau_0 \right]^{-1/2} dT$$

pour  $C_1, C_2 > 0$

$$b(\phi) = (\sqrt{\lambda}/2A) \sin 2A(\phi - \phi_0) \cdot [\mu + \sqrt{\lambda} \cos 2A(\phi - \phi_0) \times \\ \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \ln | B \arctan A(\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0 \right) ]$$

$$A = \sqrt{C_1 C_2 \lambda} / E \quad , \quad B = \sqrt{C_2 / C_1}$$

pour  $C_1, C_2 > 0$

$$b(\phi) = (\sqrt{\lambda}/2A) \tanh 2A(\phi - \phi_0) \cdot [\mu + \sqrt{\lambda} \cos 2A(\phi - \phi_0) \times \\ (\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln} | B \arctan A(\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0) ]$$

$$A = \sqrt{-C_1 C_2 \lambda} / E \quad , \quad B = \sqrt{-C_2 / C_1}$$

pour  $C_1 = 0$

$$H_1(S) = C_2 e^{-\sqrt{\lambda} S}$$

$$H_2(R) = D_1 e^{\sqrt{\lambda} R} + D_2 e^{-\sqrt{\lambda} R}$$

$$\xi = - \frac{C_{22}}{2 \sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} X} + \mu X \xi_0$$

$$x = \epsilon \int \left[ - \frac{C_{21}}{2 \sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} X} + \mu X + \xi_0 \right]^{-1/2} dX$$

$$\tau = - \frac{C_{22}}{2 \sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} T} - \mu T + \tau_0$$

$$t = \epsilon \int \left[ - \frac{C_{22}}{2 \sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda} T} - \mu T + \tau_0 \right]^{-1/2} dT$$

$$b(\phi) = \sqrt{\lambda} (\phi - \phi_0) \times [\mu + \sqrt{\lambda} (\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln} | \frac{\sqrt{\lambda}}{E} (\phi - \phi_0) | + \xi_0 - \tau_0) ]$$

pour  $C_2 = 0$

$$H_1 (S) = C_1 e^{\sqrt{\lambda} S}$$

$$H_2 (R) = D_1 e^{\sqrt{\lambda} R} + D_2 e^{-\sqrt{\lambda} R}$$

$$\xi = \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} X} + \mu X + \xi_0$$

$$x = e \int \left[ \frac{C_{12}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} X} + \mu X + \xi_0 \right]^{-1/2} dX$$

$$\tau = \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} T} - \mu T + \tau_0$$

$$t = e \int \left[ \frac{C_{11}}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda} T} - \mu T + \tau_0 \right]^{-1/2} dT$$

$$b(\phi) = -\sqrt{\lambda} (\phi - \phi_0) \times \left[ \mu + \sqrt{\lambda} \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{E} (\phi - \phi_0) \right| - \xi_0 + \tau_0 \right) \right]$$

$C_1$  et  $C_2 \neq 0$ ,  $\lambda < 0$

$$H_1 (S) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} S) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} S)$$

$$H_2 (R) = D_1 \cos(\sqrt{\lambda} R) + D_2 \sin(\sqrt{\lambda} R)$$

$$\xi = \frac{S_3}{4\sqrt{\lambda}} \sin \beta - \frac{S_4}{4\sqrt{\lambda}} \cos \beta - \mu X + \xi_0$$

$$S_3 = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{22}) \quad , \quad S_4 = \frac{1}{2} (C_{21} + C_{12}) \quad , \quad \beta = 2 \sqrt{\lambda} X$$

$$x = e \int \left[ \frac{S_3}{4 \sqrt{\lambda}} \sin \beta - \frac{S_4}{4 \sqrt{\lambda}} \cos \beta - \mu X + \xi_0 \right]^{-1/2} dX$$

$$\tau = \frac{S_1}{4 \sqrt{\lambda}} \sin \alpha - \frac{S_2}{4 \sqrt{\lambda}} \cos \alpha - \mu T + \tau_0$$

$$S_1 = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22}) \quad , \quad S_2 = \frac{1}{2} (C_{21} - C_{12}) \quad , \quad \alpha = 2 \sqrt{\lambda} T$$

$$t = e \int \left[ \frac{S_1}{4 \sqrt{\lambda}} \sin \alpha - \frac{S_2}{4 \sqrt{\lambda}} \cos \alpha - \mu T + \tau_0 \right]^{-1/2} dT$$

$$b(\phi) = \frac{E}{H_1} (-\mu + \mu S - \xi_0 + \tau_0)$$

$$S = -2 \tan^{-1} \left( \frac{B \tanh(\phi B/2 E) - C_2}{-C_1} \right) \quad , \quad B = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$C_1$  et  $C_2 \neq 0, \lambda = 0$

$$H_1 = C_1 + C_2 S$$

$$H_2 = D_1 + D_2 R$$

$$\xi = \frac{S_1}{2} X^2 + \frac{C_{22}}{3} X^3 + C_{11} X + \mu X + \xi_0$$

$$S_1 = C_{12} + C_{21}$$

$$x = e \int \left[ \frac{S_1}{2} X^2 + \frac{C_{22}}{3} X^3 + C_{11} X + \mu X + \xi_0 \right]^{-1/2} dX$$

$$\tau = \frac{S_2}{2} T^2 - \frac{C_{22}}{3} T^3 - \mu T + \tau_0$$

$$S_2 = C_{21} - C_{12}$$

$$t = e \int \left[ \frac{S_2}{2} T^2 - \frac{C_{22}}{3} T^3 - \mu T + \tau_0 \right]^{-1/2} dT$$

$$b(\phi) = E e^{\frac{-2 C_2}{E} (\phi - \phi_0)} \left[ \frac{C_2^2 D_2}{6} P(\phi)^3 + \frac{C_1^2 D_2}{2} P(\phi) + \frac{C_{22} C_1}{2} P(\phi)^2 + b_0 \right]$$

$$P(\phi) = \frac{1}{C_2} \left( e^{\frac{C_2}{E} (\phi - \phi_0)} - C_1 \right)$$

$$b_0 = C_2 \tau_0 + C_2 \xi_0 + C_1 \mu + \frac{C_1^2 D_1}{2}$$

TABLEAU 3

Solution de l'équation non linéaire de Klein-Gordon en  $n+1$  dimensions avec  $\phi(X^*T)$

$$\underline{C_1, C_2 \neq 0, \lambda \neq 0^1}$$

$$H_1 (S) = D_1 S^{C_1}$$

$$H_2 (R) = C_4 R^{-C_1}$$

$$\xi_i (X) = X_i^2 [ n \lambda \operatorname{Ln}|X_i| + \xi_{i0} ] \quad i = 1 \dots n$$

$$x_i = e \int [ n \lambda \operatorname{Ln}|X_i| + \xi_{i0} ]^{-1/2} d(\operatorname{Ln}|X_i|)$$

$$\tau (T) = T^2 \left[ \frac{D_1 C_4}{C_1 (n+1)} T^{C_1 (n+1)} - n \lambda \operatorname{Ln}|T| + \tau_0 \right]$$

$$t (T) = e \int \left[ \frac{D_1 C_4}{C_1 (n+1)} T^{C_1 (n+1)} - n \lambda \operatorname{Ln}|T| + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\operatorname{Ln}|T|)$$

$$b (\phi) = -\frac{P}{2} (\phi - \phi_0) \left[ \frac{P^2}{4} n \lambda \operatorname{Ln}|A (\phi - \phi_0)| + b_0 \right]$$

$$b_0 = -\frac{P}{2} \sum_i \xi_{i0} + \frac{P}{2} \tau_0 + \frac{n}{2} (n+1) \lambda$$

$$P = C_1 (n+1) \quad , \quad A = \frac{-P}{2 C_5}$$

---

<sup>1</sup>le signe  $\pm$  tient compte des cas  $\lambda > 0$  et  $\lambda < 0$ , respectivement.

pour  $\lambda = 0$

$$H_1 (S) = D_1 S^{C_1}$$

$$H_2 (R) = C_4 R^{-C_1}$$

$$\xi_i (X) = X_i^2 \xi_{i0} \quad i = 1 \dots n$$

$$x_i = e \operatorname{Ln}|X_i| \xi_{i0}^{-1/2} + x_0$$

$$\tau (T) = T^2 \left[ \frac{D_1 C_4}{P} T^P + \tau_0 \right]$$

$$t (T) = e \int \left[ \frac{D_1 C_4}{P} T^P + \tau_0 \right]^{-1/2} d(\operatorname{Ln}|T|)$$

$$b (\phi) = -\frac{P}{2} (\phi - \phi_0) b_0$$

$$b_0 = -\frac{P}{2} \sum_i \xi_{i0} + \frac{P}{2} \tau_0$$

$$P = C_1 (n + 1) \quad , \quad A = \frac{-P}{2 C_5}$$



## TABLEAU 4

Nous retrouvons dans ce tableau, les nouvelles solutions que nous avons trouvées pour l'équation de D S-G. Nous avons utilisé les solutions trouvées par GRUNDLAND[3]. Malheureusement, nous n'avons pas pu utiliser les solutions translationnelles invariantes du champ  $\phi^4$  pour trouver de nouvelles solutions pour l'équation de S-G. Chaque solution de l'article (satisfaisant la condition que F1 ou F2 ou F3 soit égal à zéro) a été remplacée dans l'équation (3.43) avec  $\gamma=0$ . Après avoir solutionné, nous avons vérifié si la condition  $\alpha = -\beta - 1$  était respectée.

Solution translationnellement invariante du champ  $\phi^6$ :

a) Cas  $A < 0$ ,  $F_2 = F_3 = 0$ .

$$F = \frac{2\epsilon_0 F_1}{\sqrt{4 + (-A) F_1^2 (\xi - \xi_0)^2}} \quad (1)$$

est solution pour les valeurs suivantes:

a)  $F_1 = 0$  ,  $\beta = 0$  ,  $\alpha = \alpha$

b)  $\beta = 0$  ,  $\alpha = -\frac{1}{\epsilon^2}$  ,  $F_1 = \frac{1}{\epsilon^2}$

$$c) \quad \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{1}{\epsilon^2}, \quad F_1 = -\frac{1}{\epsilon^2}$$

b) Cas  $A < 0$ ,  $F_3 = 0 < F_1$ ,  $F_2 = iR$ .

$$F = \frac{\epsilon_0 \sqrt{2} R F_1}{\sqrt{(F_1^2 + R^2) \cosh[\sqrt{-A} F_1 R (\xi - \xi_0)] - (F_1^2 - R^2)}} \quad (2)$$

est solution pour les valeurs suivantes:

$$a) \quad R = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{F_1^2}{\epsilon^2}, \quad \beta = 0$$

$$b) \quad R = \mathfrak{z}1, \quad \alpha = -\frac{-F_1^2 + \mathfrak{z}1^2}{\epsilon^2}, \quad \beta = F_1^2 \mathfrak{z}1^2$$

avec

$$\mathfrak{z}1 := \text{RootOf}(Z^4 + \gamma Z^2 + F_1^4)$$

et

$$\gamma = -6 F_1^2 + 4 \epsilon^4 F_1^2$$

Nous avons que  $\mathfrak{z}1$  dépendra des racines du polynôme de degré 4 en  $Z$ . Nous avons tout simplement repris ici la notation de MAPLE pour garder la solution sous une forme compacte.

c) Cas  $A > 0$ ,  $F_3 = 0 < F_1 = F_2$ .

$$F = \frac{\epsilon_0 F_1}{\left[1 + e^{\epsilon_1 F_1 \sqrt{A} (\xi - \xi_0)}\right]^{1/2}} \quad (3)$$

est solution pour les valeurs suivantes:

$$a) F_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \alpha$$

$$b) \alpha = -2 \frac{\mu}{\epsilon^2}, \quad F_1 = \frac{\mu}{\epsilon^2}, \quad \beta = \frac{\mu^4}{\epsilon^4}$$

$$c) \alpha = -2 \frac{\mu}{\epsilon^2}, \quad F_1 = -\frac{\mu}{\epsilon^2}, \quad \beta = \frac{\mu^4}{\epsilon^4}$$

avec  $\mu$  ici équivalent à  $\epsilon_1$ .

d) Cas  $A > 0$ ,  $F_3 = 0 < F_1 = F_2$ .

$$F = \frac{\epsilon_0 \sqrt{2} F_1 F_2}{\left[F_1^2 + F_2^2 + (F_2^2 - F_1^2) \sin(\sqrt{-A} F_1 F_2 (\xi - \xi_0))\right]^{1/2}} \quad (4)$$

est solution pour les valeurs suivantes;

$$a) F_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha = \alpha$$

$$b) F_1 = \xi_1, \quad \alpha = -\frac{F_2^2 + \xi_1^2}{\epsilon^2}, \quad \beta = F_2^2 \xi_1^2$$

où

$$\mathfrak{z}_1 := \text{RootOf}(F_2^2 Z^6 + \gamma Z^4 + \delta Z^2 - F_2^4)$$

avec

$$\gamma = 2 F_2^4 - 1 \quad , \quad \delta = F_2^6 - 2 F_2^2 \epsilon^4$$

e) Cas  $A > 0$ ,  $F_3 = 0 < F_1 < F_2$ .

$$F = \frac{\epsilon_0 \sqrt{2} F_1 F_2}{\left[ F_1^2 + F_2^2 + (F_2^2 - F_1^2) \cosh(\sqrt{-A} F_1 F_2 (\xi - \xi_0)) \right]^{1/2}} \quad (5)$$

est solution pour les valeurs suivantes:

$$a) \quad F_1 = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \alpha = \alpha$$

$$b) \quad F_1 = \mathfrak{z}_1 \quad , \quad \alpha = -\frac{F_2^4 + \mathfrak{z}_1^4}{\epsilon^2} \quad , \quad \beta = F_2^2 \mathfrak{z}_1^2$$

où

$$\mathfrak{z}_1 := \text{RootOf}(F_2^2 Z^8 + F_2^4 Z^6 + \gamma Z^4 + \delta Z^2 + F_2^4)$$

avec

$$\gamma = -F_2^6 + 1 \quad , \quad \delta = -F_2^8 - 2F_2^2 \epsilon^4$$

## TABLEAU 5

Si nous résumons les calculs de la section 3.3, nous avons que soit l'équation de D S-G suivante

$$\square\phi = + \sin\phi + \frac{b}{2} \sin 2\phi = 0$$

Nous avons que si  $\psi$  est solution de

$$\square\psi = -2a_2 \psi - 4a_4 \psi^3 - 6a_6 \psi^5 \quad (2)$$

et simultanément de

$$(\nabla\psi)^2 = b_1 \psi^2 + (b_2 - b_1) \psi^4 - b_2 \psi^6 \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} b &= 2a_2 - 1 \\ b_1 &= 4a_4 + 6a_2 - 2 \\ b_2 &= 6a_6 - 4a_2 + 2 \end{aligned} \quad (4)$$

alors

$$\phi = 2 \sin^{-1}(\psi) \quad (5)$$

est solution de D S-G.

Il est toujours possible et même souhaitable de faire certains changements de variables (par exemple comme en (3.39)). Le cas  $a_6 \neq 0$  a été traité dans la section 3.3. Nous allons ici résumer les autres options possibles pour l'équation de S-G et D S-G. Nous aurons trois cas à considérer pour l'équation de double

Sine-Gordon.

a)  $a_6=0, a_4, a_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} b &= 2a_2 - 1 \\ b_1 &= 4a_4 + 6a_2 - 2 \\ b_2 &= -4a_4 + 2 \end{aligned}$$

alors la fonction  $\Psi$  devra satisfaire les deux équations

$$\square \Psi = -2a_2 \Psi - 4a_4 \Psi^3$$

$$(\nabla \Psi)^2 = (4a_4 + 6a_2 - 2) \Psi^2 + (4 - 4a_4 - 10a_2) \Psi^4 + (4a_2 - 2) \Psi^6$$

pour être solution de D S-G.

b)  $a_6 = a_4 = 0, a_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} b &= 2a_2 - 1 \\ b_1 &= 6a_2 - 2 \\ b_2 &= -4a_2 - 2 \end{aligned}$$

alors la fonction  $\Psi$  devra satisfaire les deux équations

$$\square \Psi = -2a_2 \Psi$$

$$(\nabla \Psi)^2 = (6a_2 - 2) \Psi^2 + (4 - 10a_2) \Psi^4 + (4a_2 - 2) \Psi^6$$

pour être solution de D S-G.

c)  $a_6 = a_4 = a_2 = 0$

$b = 1, b_1 = -2$  et  $b_2 = 2$

alors la fonction  $\Psi$  devra satisfaire les deux équations

$$\square \psi = 0$$

$$(\nabla\psi)^2 = -2\psi^2 + 4\psi^4 + -2\psi^6$$

pour être solution de D S-G.

Maintenant, si nous posons  $a_2=1/2$ , nous obtenons l'équation de Sine-Gordon. Nous aurons 2 cas à considérer.

a)  $a_6 = 0$

alors  $b = b_2 = 0$  et  $b_1 = 4a_4 + 1$ . Et si  $\Psi$  satisfait les deux équations suivantes

$$\square \psi = -\psi - 4a_4 \psi^3$$

$$(\nabla\psi)^2 = (1 + 4a_4) \psi^2 - (4a_4 + 1) \psi^4$$

alors  $\Psi$  est solution de S-G.

b)  $a_6 = a_4 = 0$

alors  $b = b_2 = 0$  et  $b_1 = 1$ . Et si  $\Psi$  satisfait les deux équations suivantes

$$\square \psi = -\psi$$

$$(\nabla\psi)^2 = \psi^2 - \psi^4$$

alors  $\Psi$  est solution de S-G.

## ANNEXE 1

Dans ce mémoire, il a été fait un très grand usage de logiciels de calcul symbolique. Plusieurs logiciels sont actuellement sur le marché tels que MAPLE, MATEMATICA, MACSYMA et REDUCE pour n'en nommer que quelques-uns.

L'avantage indéniable de l'utilisation d'un logiciel de ce type est qu'il permet d'éliminer le côté fastidieux des longs calculs. De plus, ils nous permettent d'éliminer du même coup les erreurs de calculs possibles qui surviennent lors de longs calculs. Notre choix s'est porté sur MAPLE.

Et parce qu'un exemple vaut mille mots, nous allons montrer certaines possibilités de MAPLE utilisées dans ce mémoire.

a) Calcul symbolique avec programmation:

D'abord, programmons les annihilateurs (1.5),

```
>A1:=proc(eqn) X*diff(eqn,X)-T*diff(eqn,T) end:
```

et la variable S,

```
>S:=(X,T) -> X*T:
```

Ainsi, pour toute fonction arbitraire phi de S, nous aurons

```
>A1(phi(S));
```



Définissons l'équation (1.4) puis appliquons A1 sur ce dernier.

```
>eq14:=diff(phi(S(X,T)),X,X)*(xi(X)*T^2-tau(T)*X^2)+diff
(phi(S(X,T)),X)/2*(diff(xi(X),X)*T-X*diff(tau(T),T))=b(S(X,T));
```

$$\begin{aligned} \text{eq14} &:= \frac{1}{2} D(\phi)(X T) T \left( \left( \frac{\partial}{\partial X} \xi(X) \right) T - \left( \frac{\partial}{\partial T} \tau(T) \right) \right) \\ &\quad + D^{(2)}(\phi)(X T) T^2 \left( \xi(X) T^2 - \tau(T) X^2 \right) = b(X T) \end{aligned}$$

```
>A1(eq14):
```

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} X D(\phi)(X T) T^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} \xi(X) \right) + X D^{(2)}(\phi)(X T) T^4 \left( \frac{\partial}{\partial X} \xi(X) \right) \\ &\quad - D(\phi)(X T) \left( \frac{\partial}{\partial X} \xi(X) \right) T^2 + \frac{1}{2} T D(\phi)(X T) \left( \frac{\partial}{\partial T} \tau(T) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} D(\phi)(X T) T^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial T^2} \tau(T) \right) - 4 D^{(2)}(\phi)(X T) T^4 \xi(X) \\ &\quad + D^{(2)}(\phi)(X T) T^3 \left( \frac{\partial}{\partial T} \tau(T) \right) X^2 = 0 \end{aligned}$$

b) Solution des équations différentielles:

MAPLE offre la possibilité de solutionner les équations différentielles ordinaires linéaires et certaines équations non linéaires. A l'aide de la fonction "assume" qui nous permet de dire à l'ordinateur si une variable doit être considérée positive ou négative, nous pourrons faire une analyse des cas distincts. Par exemple, soit l'équation (1.12)

```
>deq:=S^2*diff(H1(S),S,S)+S*diff(H1(S),S)-λ*H1(S)=0;
```

$$deq := S^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial S^2} H1(S) \right) + S \left( \frac{\partial}{\partial S} H1(S) \right) - \lambda H1(S) = 0$$

```
>assume(λ>0):
```

```
>dsolve(deq,H1(S));
```

$$H1(S) = \_C1 S^{\sqrt{\lambda}} + \_C2 S^{-\sqrt{\lambda}}$$

```
>assume(λ<0):
```

```
>dsolve(deq,H1(S));
```

$$H1(S) = I\_C1 \sinh(\sqrt{\lambda} \ln(S)) + \_C2 \cosh(\sqrt{\lambda} \ln(S))$$

```
>λ:=0;
>dsolve(deq,H1(S));
```

$$H1(S) = \_C1 + \_C2 \ln(S)$$

c) Factorisation de polynômes:

Si nous regardons l'équation (3.11), nous avons

$$- [a v^2 + 8]^2 = (1 + a) [(a v^2 + 8 v - 8) (a v^2 - 8 v - 8)]$$

Posons donc que

```
>eq1:=(1+a)*((a*v^2+8*v-8)*(a*v^2-8*v-8))+(a*v^2+8)^2;
```

$$eq1 := (1+a) (a v^2 + 8 v - 8) (a v^2 - 8 v - 8) + (a v^2 + 8)^2$$

```
>eq2:=expand(eq1);
```

$$eq2 := 2 a^2 v^4 - 64 a v^2 - 64 v^2 + 128 + a^3 v^4 - 16 a^2 v^2 + 64 a$$

```
>eq3:=factor(eq2);
```

$$eq3 := (a+2) (a^2 v^4 - 16 a v^2 - 32 v^2 + 64)$$

Or l'équation eq3 doit être égale à zéro. Le terme de la deuxième parenthèse n'a de solution que lorsque  $v$  est une constante quelconque. Or c'est une fonction ( $v(x)$ ). La seule solution restante sera pour  $a = -2$ . C'est ainsi que la restriction  $\lambda = -2$  a été trouvé pour obtenir finalement (3.12).

d) Solution de système d'équations:

Nous pouvons aussi utiliser MAPLE pour solutionner un système d'équations tel que celui que nous retrouvons (3.49). Ainsi, nous programmons les trois équations

```
>eq1:=-F1^2*e1^2+beta=0;
```

$$eq1 := -F1^2 e1^2 + \beta = 0$$

```
>eq2:=1/8*beta+1/16*alpha*e0^2*F1^2=0;
```

$$eq2 := \frac{1}{8} \beta + \frac{1}{16} \alpha e0^2 F1^2 = 0$$

```
>eq3:=1/16*beta+1/16*alpha*e0^2*F1^2+1/16*e0^4*F1^4=0;
```

$$eq3 := \frac{1}{16} \beta + \frac{1}{16} \alpha e0^2 F1^2 + \frac{1}{16} e0^4 F1^4 = 0$$

puis nous demandons de solutionner pour les variables  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $F1$ .

Nous obtenons

```
>solve({eq1,eq2,eq3},{alpha,beta,F1});
```

$$\{F1 = 0, \beta = 0, \alpha = \alpha\}, \left\{ \alpha = -2 \frac{el^2}{e0^2}, F1 = \frac{el}{e0^2}, \beta = \frac{el^4}{e0^4} \right\},$$

$$\left\{ F1 = -\frac{el}{e0^2}, \alpha = -2 \frac{el^2}{e0^2}, \beta = \frac{el^4}{e0^4} \right\}$$

Nous avons que le premier ensemble est à rejeter car il faut que  $F1$  soit différent de zéro. Nous obtenons des deux autres ensembles la solution (3.50)

e) Graphique des solutions:

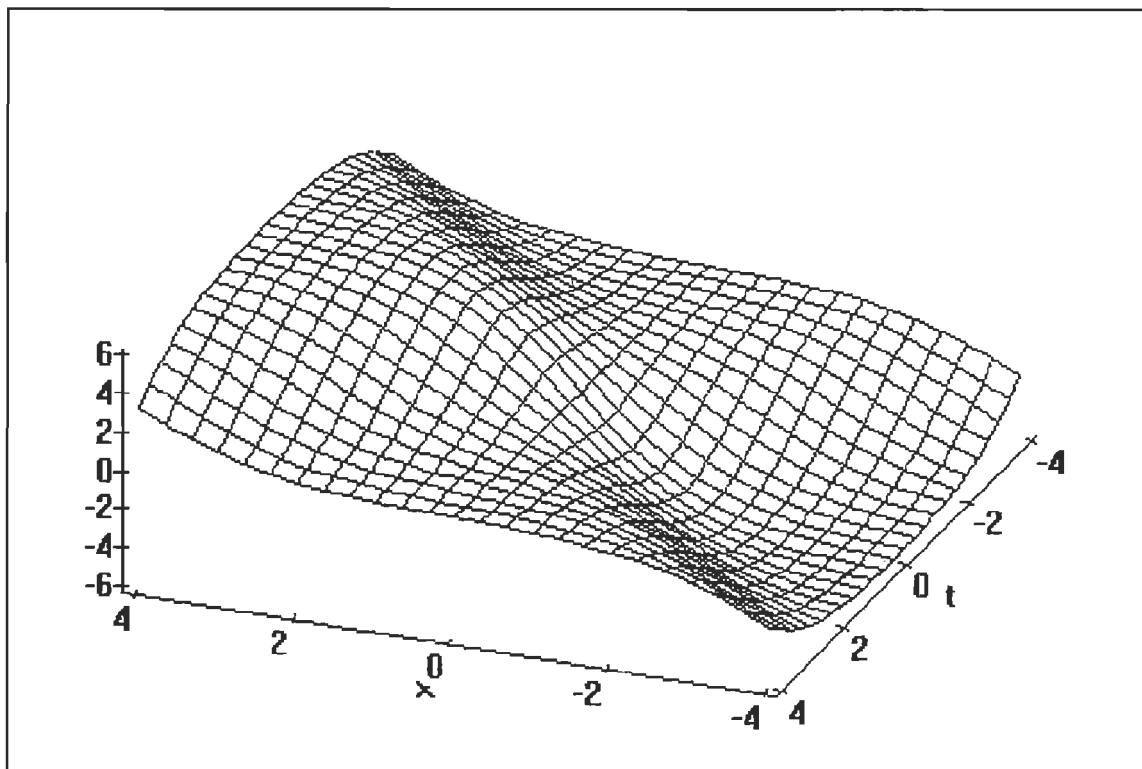
Mous pouvons aussi utiliser les fonctions avancées pour dessiner le graphique de la fonction. Par exemple, si nous prenons la solution (3.69) avec  $\mu$  et  $\gamma = 1$ , nous obtenons

```
>eq1:=4*arctan(sinh(x)/cosh(t));
```

$$eq1 := 4 \arctan\left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(t)}\right)$$

Demandons maintenant le graphique en trois dimensions

```
>plot3d(eq1,x=-4..4,t=-4..4);
```



Ces exemples ne sont qu'une infime partie des possibilités offertes par les logiciels de calcul symbolique.

## ANNEXE 2

Dans cette annexe, nous allons élaborer une façon plus directe de trouver les solutions simples solitoniques de l'équation S-G en 3+1 dimensions

$$\square u(x) = \sin u(x) , \quad (1)$$

où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} , \quad x = (x_0 , x_1 , x_2 , x_3) . \quad (2)$$

Nous allons effectuer le changement de variable suivant;

$$u = u(s) , \quad s = \sum_{i=0}^3 c_i x_i , \quad (3)$$

qui est bien de la forme de l'équation (1.24)

Si nous substituons notre nouvelle variable (3) dans l'équation (1), on obtient

$$\ddot{u} = k \sin u , \quad k = c_0^2 - \sum_{i=1}^3 c_i^2 , \quad \ddot{u} = \frac{d^2 u}{ds^2} . \quad (4)$$

Réduisons l'ordre en réécrivant cette dernière équation sous la forme d'un système E.D.O. d'ordre un. Nous aurons alors

$$\frac{du}{ds} = v , \quad (5)$$

$$\frac{dv}{ds} = k \sin u . \quad (6)$$

Nous pouvons changer la variable et écrire  $\frac{du}{ds} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{ds}$ . Nous

avons alors

$$v = \frac{du}{dv} k \sin u , \quad (7)$$

qui, après intégration, nous donne

$$\frac{1}{2} v^2 = k (A - \cos u) , \quad (8)$$

où A est une constante d'intégration.

En utilisant la relation (5) et la branche positive de l'équation (8), nous obtenons

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2} k} \frac{du}{\sqrt{A - \cos u}} , \quad (9)$$

qui est une intégrale elliptique<sup>1</sup> du premier genre. Les solutions de cette dernière équation sont des fonctions elliptiques (doublements périodiques) de la forme "cn", "sn" et "dn".

Les solutions du système des équations (5) et (6) sont appelés

---

<sup>1</sup> Voir RYZHIK[1] page 154 ainsi que la section 8.11



des solitons si les trajectoires intégrales joint, dans le portrait de phase (voir Figure 7), les points  $(u,v) = (0, 2n\pi)$  avec  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

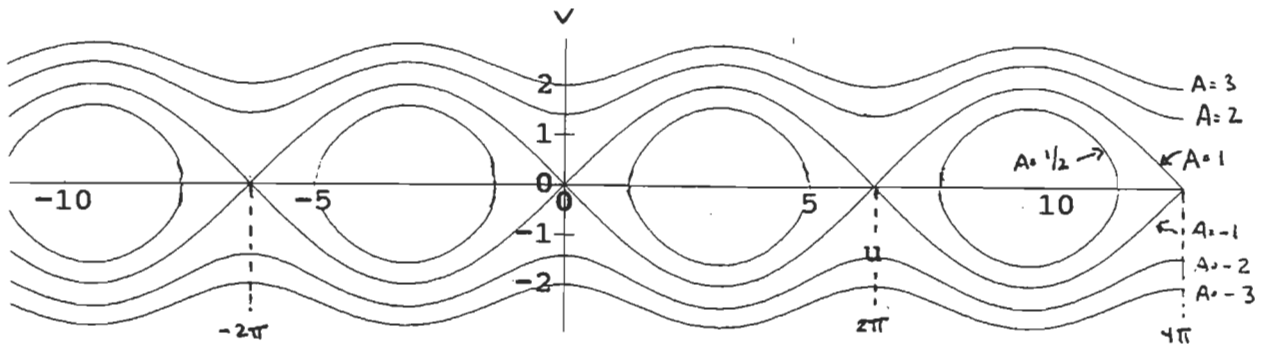


Figure 7

Portrait de phase de l'équation 8

En se référant à la figure sept, nous pouvons satisfaire cette condition lorsque  $A$  est égal à  $\pm 1$ . Si nous prenons  $A = (-1)^p$ , nous aurons le cas où  $p$  est un entier pair et on obtient

$$v = \pm \sqrt{2k} \sqrt{1 - \cos u} \quad k > 0, \quad (10)$$

et si  $p$  est un entier impair, on obtient

$$v = \pm \sqrt{-2k} \sqrt{1 + \cos u} \quad k < 0. \quad (11)$$

En choisissant  $A=1$  et en utilisant la relation

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 u, \quad (12)$$

l'intégrale (9) devient

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2} k} \frac{du}{\sin \frac{u}{2}} , \quad (13)$$

d'où nous obtenons

$$u = 4 \tan^{-1} [ e^{\sqrt{k} (s - s_0)} ] .$$

Cette dernière équation est la solution simple solitonique bien connue LAMB[1].

## BIBLIOGRAPHIE

## BRYAN

1. Bryan A. C., Haines C. R. et Stuart A. E. G., 1980, "A classification of the separable solutions of the two-dimensional Sine-Gordon equation and of its Laplacian variant", *NUOVO CIMENTO*, 58 B, p. 1-33.

## BULLOGH

1. Bullogh R. K., Caudrey P. J., 1980, *Solitons*, Springer Verlag, New York.

## BURT

1. Burt P. B. et Reid J. L., 1976, "Exact solution to a nonlinear Klein-Gordon equation", *Journal of mathematical analysis and applications*, 55, p. 43-45.
2. Burt P. B. et Reid J. L., 1974, "Solution of nonlinear partial differential equations from base equation", *Journal of mathematical analysis and applications*, 47, p. 520-530.
3. Burt P. B., 1978, "Exact solutions of nonlinear generalizations of the Klein-Gordon and Schrodinger equations", *Journal of mathematical analysis and applications*, 66, p. 135-142.

## GRUNDLAND

1. Grundland A. M., Winternitz P. et Tuszynski J. A., 1987, "Exact solutions of multidimensional classical  $\phi^6$ -field equations obtained by symmetry reduction", *J. Math. Phys.*, 28, p. 2194-2212.
2. Grundland A. M., Infeld E., 1992, "A family of nonlinear Klein-Gordon equations and their solutions", *J. Math. Phys.*, 33, p. 2498-2503.
3. Grundland A. M., Winternitz P. et Tuszynski J. A., 1993, "Group theory and solutions of classical field theories with polynomial nonlinearities", à paraître.
4. Grundland A. M., Harnad J. et Winternitz P., 1982, "Solutions of the multidimensional Sine Gordon equation obtained by symmetry reduction", *Kinam*, p. 333-344.

**HASEGAWA**

1. Hasegawa A., *Optical Solitons in Fibers*, 1990, Springer-Verlag, New York.

**INCE**

1. Ince E. L., *Ordinary Differential Equations*, 1956 Dover, New York.

**KLINE**

1. Kline Moris, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, 1972, Oxford Press, New York.

**LAMB**

1. Lamb G. L. Jr., *Elements of Soliton Theory*, 1980, John Wiley & Sons, New York.

**OLVER**

1. Olver Peter J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 1986, Springer Verlag, New York.

**RYZHIK**

1. Ryzhik I. M. et Gradshteyn I. S., *Table of Integrals, Series, and Products*, (corrected and enlarged edition), 1979, Academic press, New York.

**WHITHAM**

1. Whitham G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, 1974, John Wiley & Sons, New York.

**ZWILLINGER**

1. Zwillinger Daniel, *Handbook of Differential Equations*, 1989, Academic press inc, New York.