

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR  
WAFIA BENSALEM

*MOMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE  
D'UN FERMION DE SPIN  $\frac{1}{2}$   
DANS UNE THÉORIE DE JAUGE GÉNÉRALE*

MAI 1996

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

*AU NOM DE DIEU LE CLÉMENT, LE MISÉRICORDIEUX*

*"Et on ne vous a donné que peu de science"*

[Saint Coran 17:85].

À mes très chers parents,  
à mes frères et soeurs K, D, N, H, H, H, A,  
à tous les autres membres de ma famille,  
et à mon très cher et bien aimé époux, Nouredine.

## REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement mon directeur de recherche, Monsieur Chérif Hamzaoui, et mon co-directeur de recherche, monsieur Gilles Couture.

Je remercie aussi monsieur Elie Boridy et monsieur Heinz König ainsi que monsieur Louis Marchildon et monsieur Luc Marleau pour leurs conseils utiles.

Mes remerciements vont aussi à tous mes professeurs.

Je remercie monsieur Abdelhak Abdellaoui et tout le personnel de l'ambassade de l'Algérie à Ottawa.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	i
TABLE DES MATIÈRES .....	ii
LISTE DES FIGURES .....	v
LISTE DES TABLEAUX.....	vi
LISTE DES ABRÉVIATIONS .....	vii
RÉSUMÉ.....	viii
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE I	
BUT DE LA THÈSE ET MOTIVATIONS .....	12
1.1 Introduction .....	12
1.2 Pourquoi calculer le m.d.e .....	12
CHAPITRE II	
CADRE-FONDEMENTS THÉORIQUES .....	16
2.1 Introduction .....	16
2.2 Qu'est-ce qu'une théorie de jauge.....	16
2.3 Étude théorique.....	18
CHAPITRE III	
LA MÉTHODE DE PROJECTION.....	23
3.1 Introduction .....	23
3.2 Expression du vertex électromagnétique .....	23
3.3 Calcul du projecteur .....	27
3.4 Projecteurs et symétries.....	33

## CHAPITRE IV

CONVENTIONS ET TECHNIQUES DE CALCUL .....	35
4.1 Introduction .....	35
4.2 Conventions.....	36
4.3 Techniques de calcul.....	45

## CHAPITRE V

CALCUL DU M.D.E D'UN FERMION DE SPIN $\frac{1}{2}$ .....	57
5.1 Introduction .....	57
5.2 Premier diagramme .....	58
5.3 Deuxième diagramme .....	63
5.4 Troisième et quatrième diagrammes.....	68
5.5 Cinquième diagramme.....	75
5.6 Sixième diagramme.....	82
5.7 m.d.e intrinsèque d'un fermion dans une théorie de jauge générale... ..	88

## CHAPITRE VI

## APPLICATION: M.D.E DE L'ÉLECTRON ET DU NEUTRON

DANS LE MODÈLE "LEFT- RIGHT SYMMETRIC" .....	97
6.1 Introduction .....	97
6.2 Pourquoi le modèle LRS?.....	98
6.3 Paramètres du modèle .....	99
6.4 m.d.e de l'électron dans le modèle LRS .....	101
6.5 m.d.e du neutron dans le modèle LRS .....	105
6.5 Conclusion	

CONCLUSION .....	110
------------------	-----

## ANNEXE A

TANSFORMATIONS $C$ , $P$ et $T$ .....	112
A.1 Conjugaison de charge.....	112

A.2 Parité .....	112
A.3 Inversion du sens du temps .....	112
ANNEXE B	
CALCUL DE PROPAGATEURS .....	114
B.1 Propagateur fermionique.....	114
B.2 Propagateur d'un scalaire non physique .....	114
B.3 Propagateur d'un scalaire physique .....	115
ANNEXE C	
ALGÈBRE DES MATRICES DE DIRAC.....	118
C.1 Conventions .....	118
C.2 Matrices de Dirac.....	118
C.3 Théorèmes des traces et contractions tensorielles .....	119
BIBLIOGRAPHIE.....	122

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
2.1	Interaction fermion-photon à l'ordre des arbres ..... 19
4.1	Diagrammes de Feynman contribuant au m.d.e d'un fermion $i$ au premier ordre ..... 35
4.2	Vertex utilisés dans le calcul du m.d.e ..... 36
4.3	Propagateurs utilisés dans le calcul du m.d.e ..... 43
5.1	Premier diagramme de Feynman contribuant au m.d.e ..... 58
5.2	Deuxième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e ..... 63
5.3	Troisième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e ..... 68
5.4	Quatrième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e ..... 73
5.5	Cinquième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e ..... 75
5.6	Sixième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e ..... 82
5.7	Diffusion $l\gamma \rightarrow iw$ dans la jauge physique ..... 92
5.8	Diffusion $l\gamma \rightarrow iw$ dans la jauge $R_\xi$ ..... 92
B.1	Diffusion $il \rightarrow il$ dans la jauge physique ..... 115
B.2	Diffusion $il \rightarrow il$ dans la jauge $R_\xi$ ..... 116

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
3.1 Propriétés de symétrie des différents moments électromagnétiques .....	33
4.1 Conventions pour les vertex .....	39
4.2 Propagateurs dans la jauge $R_\xi$ .....	43
4.3 Définitions de quelques jauges .....	44
4.4 Types de divergences .....	47

## LISTE DES ABRÉVIATIONS

c.e	Charge électrique
ie	C'est-à-dire
KG	Klein-Gordon
KM	Kobayashi-Maskawa
LH	"Left-handed", ie gauche
LRS	"Left-right-symmetric", ie Symétrie gauche-droite
m.a	Moment anapolaire
m.d.m	Moment dipolaire magnétique
m.d.e	Moment dipolaire électrique
MQNR	Mécanique quantique non relativiste
MQR	Mécanique quantique relativiste
MS	Modèle standard
NR	Non relativiste
QCD	"Quantum chromodynamics", ie chromodynamique quantique
QED	"Quantum electrodynamics", ie électrodynamique quantique
RH	"Right handed", ie droit
v.e.v	"Vacuum expectation value", ie valeur dans le vide

## RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, j'ai effectué le calcul, au premier ordre, du moment dipolaire électrique intrinsèque d'un fermion  $i$  quelconque, de spin  $\frac{1}{2}$ . Le calcul a été fait dans une théorie de jauge générale de particules de spins 0,  $\frac{1}{2}$  et 1. Je n'ai pas choisi de modèle a priori; les couplages sont donc généraux. Ceci rend le résultat général et applicable à tout modèle renormalisable de la physique des particules.

La méthode utilisée dans les calculs est nouvelle; c'est la méthode de projection. Elle permet d'extraire directement le facteur de forme du moment dipolaire électrique à partir de la partie lorentzienne des amplitudes des diagrammes de Feynman contribuant.

Six diagrammes de Feynman ont été calculés, à l'ordre d'une boucle une fois le résultat général trouvé, j'ai pu l'appliquer au calcul du m.d.e de l'électron et du neutron dans le modèle "Left-right-symmetric" et comparer les valeurs trouvées avec les données expérimentales.

## INTRODUCTION

Les moments dipolaires, électrique et magnétique, sont des quantités physiques assez "anciennes". Ils ont toujours constitué des propriétés électromagnétiques intéressantes de tout système physique. Bien sûr, on les retrouve d'abord en électrodynamique classique où ils jouent un rôle important.

Voyons, en effet, leur définition classique, de façon brève:

### 0.1 M.D.E ET M.D.M EN ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE [10,11]

#### 0.1.1. Le m.d.e:

Soit une distribution de charges électriques localisée, de densité de charge  $\rho(\vec{x}')$ . Elle crée en un point  $\mathbf{P}$  de l'espace, situé en  $\vec{x}$ , un potentiel électrique  $\Phi(\vec{x})$  tel que:

$$\Phi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}') d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (0.1)$$

Faisons un développement de  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$  en puissances de  $\vec{x}'$  :

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots \quad (0.2)$$

Pour trouver l'équation précédente, on écrit:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} \left[ 1 - 2 \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \cos \theta + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{x}$  et  $\vec{x}'$ .

On sait que:

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3}{8}u^2 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} u^n + \dots$$

d'où:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}'|} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ -2 \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \cos \theta + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} \right] + \frac{3}{8} \left[ -2 \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \cos \theta + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^2} \right]^2 + \dots \right\}$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|^2} \cos \theta + \frac{|\vec{x}'|^2}{|\vec{x}|^3} \left[ \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right] + \dots$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{3(\vec{x}' \cdot \vec{x})^2 - |\vec{x}'|^2 |\vec{x}|^2}{2|\vec{x}|^5} + \dots$$

On utilise (0.2) dans (0.1); on trouve:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} \int \rho(\vec{x}') d^3 x' + \frac{1}{|\vec{x}|^2} \int \frac{\vec{x}}{|\vec{x}'|} \cdot \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3 x' + \dots$$

Soit  $|\vec{x}| = r$  et  $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \vec{e}_r$ . On voit que  $\int \rho(\vec{x}') d^3 x' = Q$  où  $Q$  n'est autre que la charge électrique totale de la distribution. Ainsi:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{D} + \dots \quad (0.3)$$

où

$$\vec{D} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3 x' \quad (0.4)$$

est le moment dipolaire électrique de la distribution. L'expression (0.3) exprime le développement du potentiel électrique en multipôles électriques:

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi^{(0)}(\vec{x}) + \Phi^{(1)}(\vec{x}) + \Phi^{(2)}(\vec{x}) + \dots \quad (0.5)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^{(0)} \text{ est le potentiel monopolaire,} \\ \Phi^{(1)} \text{ est le potentiel dipolaire,} \\ \Phi^{(2)} \text{ est le potentiel quadrupolaire... etc .} \end{array} \right.$$

Si  $r$  est beaucoup plus grand que les dimensions de la distribution, alors (0.5) se réduit à:

$$\Phi(\vec{x}) \simeq \Phi^{(0)}(\vec{x}) + \Phi^{(1)}(\vec{x})$$

où

$$\Phi^{(0)} = \frac{Q}{r} \quad (0.6)$$

et

$$\Phi^{(1)} = \frac{\vec{D} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \quad (0.7)$$

REMARQUES:

1) Pour une distribution discrète de charges  $q_\alpha$ , le m.d.e s'écrit:

$$\vec{D} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{x}'_{\alpha}$$

2) Pour un dipôle électrique (deux charges de signes opposés distantes de  $d$ ):

$$\vec{D} = qd\vec{e}$$

où  $\vec{e}$  est le vecteur unitaire de la direction contenant les deux charges. Son sens est de la charge négative vers la charge positive.

3) Le champ électrique créé par le dipôle électrique au point P est:

$$\vec{E}^{(1)}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\vec{D}}{r^3} + (\vec{D} \cdot \vec{x}) \frac{3\vec{x}}{r^5}. \quad (0.8)$$

Donc, à cet ordre, connaître  $\vec{D}$  c'est connaître l'effet électrique du système de charges en tout point de l'espace.

### 0.1.2. Le m.d.m

Soit une distribution de courants électriques localisée de densité  $\vec{J}(\vec{x}')$ . Elle crée en un point P de l'espace, situé en  $\vec{x}$ , une induction magnétique,  $\vec{B}$ , telle que:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}). \quad (0.9)$$

$\vec{A}$  = potentiel vecteur donné par:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}(\vec{x}') d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (0.10)$$

On procède de la même manière que pour le m.d.e; on trouve:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) + \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) + \dots \quad (0.11)$$

Cette dernière équation constitue le développement du potentiel vecteur en multipôles magnétiques. En effet:

$$\begin{cases} \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) & \text{est le potentiel vecteur dipolaire,} \\ \vec{A}^{(2)}(\vec{x}) & \text{est le potentiel vecteur quadrupolaire... etc} \end{cases}$$

Notons que  $\vec{A}^{(0)}(\vec{x}) = 0$  : il n'existe pas de monopôle magnétique en électrodynamique classique. Par conséquent, il n'existe pas de pur dipôle magnétique (car ce serait un ensemble de deux monopôles magnétiques de charges opposées).

Si  $r$  est beaucoup plus grand que les dimensions de la distribution de courants, on a:

$$\vec{A}(\vec{x}) \simeq \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (0.12)$$

où

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}') d^3 x' \quad (0.13)$$

est le moment dipolaire magnétique de la distribution de courants électriques.

Le champ magnétique créé par le dipôle magnétique au point P est:

$$\vec{B}^{(1)}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)}(\vec{x}) = -\frac{\vec{\mu}}{r^3} + (\vec{\mu} \cdot \vec{x}) \frac{3\vec{x}}{r^5}. \quad (0.14)$$

Donc, à cet ordre, connaître  $\vec{\mu}$  c'est connaître l'effet magnétique du système de courants en tout point de l'espace.

### 0.1.3. Interaction du m.d.e avec un champ électrique externe :

Soit une distribution localisée de charges électriques  $\rho(\vec{r})$  placée dans un potentiel externe  $V(\vec{r})$ , correspondant au champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  tel que:  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V$ . L'énergie électrostatique du système est;

$$W = \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d^3r. \quad (0.15)$$

On développe  $V(\vec{r})$  en série de Taylor:

$$V(\vec{r}) = V(\vec{0}) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{r})|_{r=0} + \dots \quad (0.16)$$

On trouve:

$$W = QV(\vec{0}) - \vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{0}) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(\vec{0}) + \dots \quad (0.17)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Q = \int \rho(\vec{r})d^3r & : \text{charge totale;} \\ \vec{D} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})d^3r & : \text{m.d.e;} \\ Q_{ij} = \int (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij})\rho(\vec{r})d^3r & : \text{tenseur moment quadrupolaire.} \end{array} \right.$$

On a donc un développement de l'énergie en multipôles électriques. Ce développement montre la façon dont interagissent les différents multipôles d'un système de charges avec un champ électrique externe  $\vec{E}$ .

*Donc, la charge électrique, le m.d.e, le moment quadrupolaire, ... etc sont des "témoins" des propriétés électriques de toute distribution de charges .*

On peut déduire de l'équation (0.17):

★ l'énergie d'interaction de la charge électrique avec un champ externe:

$$W^Q = QV(0)$$

★ l'énergie d'interaction du m.d.e avec un champ externe:

$$W^{m.d.e} = -\vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (0.18)$$

#### 0.1.4. Interaction du m.d.m avec un champ magnétique externe:

Soit  $\vec{J}(\vec{r})$  une distribution de courants localisée, placée dans une induction magnétique externe  $\vec{B}(\vec{r})$ .

La force, due à  $\vec{B}$ , qui agit sur cette distribution est donnée par :

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3 r .$$

En faisant un développement de Taylor de la composante  $B_k$  de  $\vec{B}$ ; on obtient pour la composante  $F_i$  de  $\vec{F}$  :

$$F_i = \frac{1}{c} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \left[ B_k(0) \int J_j(\vec{r}) d^3 r + \int J_j(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{\nabla} B_k(0) d^3 r + \dots \right]. \quad (0.19)$$

La première contribution non nulle de  $F_i$  vient du deuxième terme, le premier terme étant nul par conservation:

$$F_i \simeq F_i^{(2)} = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} (\vec{\mu} \times \vec{\nabla})_j B_k(0),$$

d'où:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) - \underbrace{\vec{\mu}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}).$$

Par conséquent, l'ordre le plus bas de la force que produit un champ magnétique externe  $\vec{B}$  sur une distribution de courants, de m.d.m,  $\mu$ , est:

$$\vec{F}^{(2)} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}). \quad (0.20)$$

Donc, le m.d.m est un "témoin" des propriétés magnétiques de toute distribution de courants électriques.

On peut déduire l'énergie d'interaction du m.d.m avec un champ magnétique externe  $\vec{B}$ :

$$\begin{cases} \vec{F}^{dip} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ \vec{F}^{dip} = -\vec{\nabla}W^{m.d.m} \end{cases}$$

d'où:

$$W^{m.d.m} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (0.21)$$

En conclusion, si un système physique, de m.d.e  $\vec{D}$  et de m.d.m  $\vec{\mu}$ , est placé dans un champ électromagnétique,  $(\vec{E}, \vec{B})$ , il interagit avec  $\vec{E}$ , avec une énergie  $W^e = -\vec{D} \cdot \vec{E}$  et avec  $\vec{B}$ , avec une énergie  $W^m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .

Dans mon travail, je m'intéresse aux propriétés électromagnétiques des particules élémentaires de spin  $\frac{1}{2}$  et, en particulier, au m.d.e, pour des raisons que j'expliquerai plus tard.

Avant d'examiner ces propriétés en théorie des champs, considérons-les d'abord en mécanique quantique non relativiste.

## 0.2 PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DES FERMIONS EN M.Q.N.R

Pour une charge  $q$ , de masse  $m$ , de moment cinétique  $\vec{L}$  et de vitesse  $v \ll c$ , le m.d.m est proportionnel au moment cinétique:

$$\vec{\mu} = g\vec{L}$$

où  $g = \frac{q}{2mc}$  est le rapport gyromagnétique.

En mécanique quantique, quel est le m.d.m d'un fermion libre, de charge  $q$ , de masse  $m$  et de spin  $\frac{1}{2}$ ?

Soit  $\vec{s}$  = le moment cinétique intrinsèque de la particule (valeurs propres  $\sqrt{s(s+1)}$ , avec  $s = \frac{1}{2}$ ). Il lui correspond un m.d.m  $\vec{\mu}$  tel que:

$$\vec{\mu} = 2g\vec{s} \quad (0.22)$$

où  $g$  est le rapport gyromagnétique et le facteur 2 est appelé facteur de Landé. La loi décrite par l'équation (0.22) est empirique; on n'a pas su expliquer théoriquement l'existence du facteur de Landé, en M.Q.N.R.

Notons que  $\mu = g$ . On écrit  $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$  où  $\vec{\sigma}$  n'est autre que  $2\vec{s}$ .

Et, comme on l'a vu en mécanique classique (ég. (0.21)), l'hamiltonien d'interaction du m.d.m du fermion avec un champ magnétique externe,  $\vec{B}$  est:

$$H_I^{m.d.m} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu\vec{\sigma} \cdot \vec{B}. \quad (0.23)$$

Par analogie, le m.d.e d'un fermion est aussi proportionnel à son spin, ie:

$$\vec{D} = D\vec{\sigma} \quad (0.24)$$

L'énergie d'interaction de ce dernier avec un champ électrique externe,  $\vec{E}$ , est:

$$H_I^{e.d.m} = -\vec{D} \cdot \vec{E} = -D\vec{\sigma} \cdot \vec{E}. \quad (0.25)$$

Maintenant, voyons comment la mécanique quantique relativiste explique le facteur de Landé.

### 0.3 PROPRIÉTÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DES FERMIONS EN M.Q.R

La mécanique quantique relativiste, en particulier l'équation de Dirac, a permis d'expliquer le facteur de Landé théoriquement.

En effet, soit un électron (masse  $m$  et vitesse  $\frac{\vec{p}}{m}$ ) dans un champ électromagnétique faible  $A_\mu$  (A partir de maintenant, nous travaillerons dans le système d'unités:  $\hbar = c = 1$ ):

$$A_\mu = (\Phi, \vec{A})$$

Equation de Dirac:  $(\not{p} - e\not{A} - m)\psi = 0$

Représentation de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix}$$

Les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli. Il est facile de démontrer que l'équation de Dirac se découple en ces deux équations:

$$(E - e\Phi)\theta - [(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}] \omega = m\theta \quad (0.26)$$

$$-(E - e\Phi)\omega + [(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}] \theta = m\omega \quad (0.27)$$

où  $E$  est l'énergie de l'électron.

L'équation (0.27) donne:

$$\omega = \frac{(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}}{E + m - e\Phi} \theta \quad (0.28)$$

Le champ électromagnétique est faible, donc:

1)  $e\Phi \ll E$

2) L'électron est très faiblement accéléré par  $\Phi$  donc sa vitesse est faible;

ie:  $E \approx m$

Alors:  $E + m - e\Phi \approx 2m$

Ainsi l'équation (0.28) devient:

$$\omega \approx \frac{(\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}}{2m} \theta . \quad (0.29)$$

En insérant (0.29) dans (0.26) on obtient :

$$\left[ W - \frac{(\vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\Pi} \cdot \vec{\sigma})}{2m} \right] \theta = e\Phi \theta$$

où

$$\begin{cases} W = E - m \\ \vec{\Pi} = \vec{p} - e\vec{A} . \end{cases}$$

Après quelques transformations on obtient:

$$W\theta = \left\{ \frac{1}{2m} \left[ (\vec{p} - e\vec{A})^2 - e\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] + e\Phi \right\} \theta . \quad (0.30)$$

Dans (0.30),  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  ; c'est le champ magnétique externe. L'équation (0.30) s'écrit encore:

$$W\theta = [W_C + W^{m.d.m} + W^c] \theta$$

$$\text{avec: } \begin{cases} W_C = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 & : \text{énergie cinétique} \\ W^{m.d.m} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} & ; \text{où } \vec{\mu} = 2\frac{e}{2m} \vec{s} \\ W^c = e\Phi & : \text{interaction de la charge} \\ & \text{avec le champ électromagnétique.} \end{cases}$$

$W^{m.d.m}$  est l'énergie d'interaction du m.d.m de l'électron avec le champ magnétique externe. On remarque bien dans son expression l'existence du facteur de Landé, imposé par l'expérience, qui est maintenant bien démontrée.

Maintenant que nous avons eu un aperçu des moments électromagnétiques dans les différentes théories de la physique, nous allons passer au sujet de la thèse, soit le m.d.e des fermions de spin  $\frac{1}{2}$ , en théorie de jauge.

# CHAPITRE I

## BUT DE LA THÈSE ET MOTIVATIONS

### 1.1 INTRODUCTION

Les propriétés électromagnétiques jouent un grand rôle dans notre compréhension de la structure de la matière et des interactions qui la gouvernent. Parmi ces propriétés, les plus importantes sont les moments électromagnétiques. Ils sont très importants pour sonder la structure des particules et leurs interactions et pour tester les nouvelles théories.

Mon travail consiste à calculer le m.d.e des fermions de spin  $\frac{1}{2}$  dans une théorie de jauge renormalisable. Le calcul sera fait à l'ordre d'une boucle, dans une théorie très générale de spins 0,  $\frac{1}{2}$  et 1 et par une nouvelle méthode: la méthode de projection. Cette méthode permet d'extraire exactement le facteur de forme du m.d.e.

Dans les paragraphes et chapitres suivants, nous allons voir les: "POURQUOI?" et "COMMENT?" de ce calcul.

### 1.2 POURQUOI CALCULER LE M.D.E?

Alors que le m.d.m conserve toutes les symétries C, P et T, le m.d.e brise aussi bien la symétrie de parité P que celle d'inversion du sens du temps T. Il brise ainsi la symétrie CP; ce qui rend le m.d.e une quantité fort intéressante.

En effet, l'existence d'un m.d.e permanent chez les fermions et les bosons est l'une des manifestations directes de la brisure de la symétrie CP (et donc celle de T).

Historiquement, le neutron fut un bon candidat expérimental, sa charge électrique étant nulle. En effet, puisque le neutron est électriquement neutre, la contribution dominante à son interaction avec un champ électrique extérieur va être celle de son m.d.e intrinsèque alors que pour une particule chargée c'est sa charge électrique qui va l'emporter (Cf éq. 0.17). Il est donc plus facile, ou pour mieux dire, moins difficile de mesurer le m.d.e d'une particule neutre que de mesurer celui d'une particule chargée.

Jusqu'à présent, on n'a obtenu, dans les laboratoires, que des limites supérieures pour le m.d.e du neutron et de l'électron. On peut citer les récents résultats préliminaires de ILL, Grenoble (France) et Gatchina, Leningrad (Russie) sur le m.d.e du neutron [1] qui ont éveillé l'intérêt dans l'étude de cette quantité. Les résultats de ILL indiquent que

$$D_n = -(1.2 \pm 0.6) \times 10^{-25} e.cm. \quad (1.1)$$

et ceux de Gatchina donnent

$$D_n = -(1.4 \pm 0.6) \times 10^{-25} e.cm. \quad (1.2)$$

Bien que ces deux mesures soient compatibles en signe et en grandeur, il est prématuré de les considérer comme de vrais résultats. Pour ce qui nous concerne, nous allons plutôt prendre les résultats suivants comme limites supérieures:

$$|D_n| \leq 2.5 \times 10^{-25} e.cm. \quad (1.3)$$

pour le neutron, et pour l'électron [2]:

$$|D_e| \leq 3.7 \times 10^{-27} e.cm. \quad (1.4)$$

La contribution du modèle standard au m.d.e du neutron et de l'électron est minuscule, de l'ordre de  $10^{-33} e.cm.$ , au plus [4]. Elle est, en effet, nulle au premier et au second ordres [3] et elle est très inférieure à la limite donnée par l'expérience [1], ce qui nous pousse à faire les calculs au delà du MS.

En effet, si les valeurs mesurées s'avèrent être plus grandes que les prédictions du MS, alors il faut chercher d'autres alternatives pour générer la brisure CP dans les théories de jauge, outre la seule phase dans la matrice de Kobayashi-Maskawa.

De plus, on s'attend à ce que la précision expérimentale aille jusqu'à  $10^{-27} e.cm.$  dans les deux prochaines années de l'expérience de ILL (communication privée). De ce fait, on voit qu'il serait intéressant d'étudier en détail les quantités qui brisent CP, en particulier le m.d.e des fermions.

Jusqu'à présent, le m.d.e des fermions n'a été considéré que dans certains modèles spécifiques et le but de ma thèse est de faire un calcul dans une théorie de jauge générale, renormalisable et indépendante de tout modèle.

Maintenant, voyons comment le m.d.e brise la symétrie CP.

Pour une particule élémentaire de spin:  $\vec{s} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ , on a vu que l'énergie d'interaction de son m.d.e avec un champ électrique externe  $\vec{E}$  est:

$$W^{m.d.e} = -D_E \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$D_E$  est l'amplitude du m.d.e qu'on appelle tout simplement m.d.e. Comment se transforme  $W^{m.d.e}$  sous les symétries  $C$ ,  $P$  et  $T$ ?

$$\star \begin{cases} T \vec{\sigma} T^{-1} = -\vec{\sigma} \\ T \vec{E} T^{-1} = \vec{E} \end{cases} \implies T W^{m.d.e} T^{-1} = -W^{m.d.e}$$

Conservation de  $T \implies -W^{m.d.e} = W^{m.d.e} \implies W^{m.d.e} = 0 \implies$  Pas de m.d.e!

Donc l'existence d'un m.d.e permanent (intrinsèque) implique la brisure de la symétrie  $T$ .

$$\star \begin{cases} P\vec{\sigma}P^{-1} = \vec{\sigma} \\ P\vec{E}P^{-1} = -\vec{E} \end{cases} \implies PW^{m.d.e}P^{-1} = -W^{m.d.e}$$

Conservation de  $P \implies -W^{m.d.e} = W^{m.d.e} \implies W^{m.d.e} = 0 \implies$  Pas de m.d.e!

Donc l'existence d'un m.d.e permanent implique la brisure de la symétrie  $P$ .

$$\star \begin{cases} C\vec{\sigma}C^{-1} = \vec{\sigma} \\ CD_EC^{-1} = -D_E \\ C\vec{E}C^{-1} = -\vec{E} \end{cases} \implies CW^{m.d.e}C^{-1} = W^{m.d.e} \implies \text{le m.d.e conserve } C.$$

Conclusion: le m.d.e brise les symétries  $P$  et  $T$  et conserve  $C$ . Ainsi le m.d.e brise les symétries  $CP$  et  $T$ .

La brisure de  $CP$  a déjà été mise en évidence expérimentalement à Princeton (1964), dans l'expérience de désintégration des mésons  $K_L^0$  en pions. Mais la chose qui n'a pas encore été mise en évidence expérimentalement et qui peut être déduite de l'existence d'un m.d.e, est bien la brisure  $T$ . Ceci constitue donc pour nous une bonne motivation pour l'étude du m.d.e des fermions.

## CHAPITRE II

### CADRE - FONDEMENTS THÉORIQUES

#### 2.1 INTRODUCTION

Comme mentionné auparavant, je dois faire le calcul du m.d.e intrinsèque des particules élémentaires fermioniques de spin  $\frac{1}{2}$ . Ce calcul sera fait dans une théorie de jauge générale, renormalisable, de particules scalaires, fermioniques et vectorielles; avec des constantes de couplages arbitraires. Ceci permettra d'appliquer mes résultats à plusieurs modèles. Mais avant d'entamer les calculs, il serait utile de réviser le cadre où ils vont être faits, à savoir, la théorie de jauge.

#### 2.2 QU'EST-CE QU'UNE THÉORIE DE JAUGE?

Une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur le *principe de jauge*. Selon le principe de jauge, l'interaction physique est dictée par une *invariance de jauge*.

Une invariance de jauge est le fait que notre théorie est invariante sous une *transformation de jauge*.

On appelle transformation de jauge locale, une transformation de phase où la phase même dépend des coordonnées. C'est donc une phase locale.

En QED par exemple,

$$\psi \xrightarrow{\text{Tr.deJauge}} \psi' = e^{iq\chi(x)}\psi$$

où  $q$  est la charge électrique de la particule considérée et  $\psi$ , sa fonction d'état. Le lagrangien fermionique libre est:

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$$

Ce dernier se transforme en  $\mathcal{L}'$ , sous transformation de jauge. ie:

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} \xrightarrow{\text{Tr.deJauge}} \mathcal{L}'$$

Invariance de jauge:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}$$

Or,

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\partial - m)\psi'$$

Après quelques calculs algébriques simples, on trouve:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

$$D_\mu = \partial_\mu + iq\partial_\mu\chi$$

Pour que l'invariance de jauge soit satisfaite ( $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ ), il suffit d'imposer à  $\mathcal{L}_{\text{libre}}$  la transformation dite *substitution minimale*, à savoir:

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

$A_\mu$  est appelé *champ de jauge* et, sous la transformation de jauge, il se transforme comme:

$$A_\mu \xrightarrow{\text{Tr.deJauge}} A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi$$

En effet, appliquons la substitution minimale à  $\mathcal{L}_{\text{libre}}$ , qui devient:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left\{ i\gamma^\mu [\partial_\mu + iqA_\mu] - m \right\} \psi$$

Faisons-lui subir, maintenant, la transformation de jauge:

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\text{Tr.deJauge}} \mathcal{L}'$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' \left\{ i\gamma^\mu [\partial_\mu + iqA'_\mu] - m \right\} \psi'$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} \left\{ i\gamma^\mu [D_\mu + iqA'_\mu] - m \right\} \psi$$

car on vient de voir que pour passer de  $\mathcal{L}$  à  $\mathcal{L}'$  il suffisait de remplacer  $\partial_\mu$  par  $D_\mu$  et  $A_\mu$  par  $A'_\mu$ . On remplace  $A'_\mu$  et  $D_\mu$  par leurs expressions:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} \left\{ i\gamma^\mu [\partial_\mu + iq\partial_\mu\chi + iq\{A_\mu - \partial_\mu\chi\}] - m \right\} \psi$$

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} \left\{ i\gamma^\mu [\partial_\mu + iqA_\mu] - m \right\} \psi = \mathcal{L} .$$

Donc, on part d'une théorie libre (sans interactions) à laquelle on demande de conserver une symétrie de jauge, et on se retrouve avec une théorie où il y a interaction avec le champ de jauge. C'est cela le principe de jauge.

Récapitulation:

Transformation de jauge:  $\mathcal{L}_{libre} \longrightarrow \mathcal{L}'$

Invariance de jauge:  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \implies$  Substitution minimale:  $\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$

$\implies$  Génération du champ de jauge  $A_\mu$

$$\implies \mathcal{L}' = \mathcal{L}_{libre} + \mathcal{L}_{interaction}$$

$$\mathcal{L}_{interaction} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

### 2.3 ÉTUDE THÉORIQUE

On s'intéresse au m.d.e intrinsèque d'un fermion élémentaire de spin  $\frac{1}{2}$ . Son lagrangien libre va être:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}_i(i\rlap{\not{D}} - m)\psi_i \quad (2.1)$$

où  $\psi_i$  est le spineur du fermion considéré (un lepton ou un quark). Si on considère le modèle standard, la substitution minimale est donnée par:

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu - ig_2 T^a W_{\mu a} + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (2.2)$$

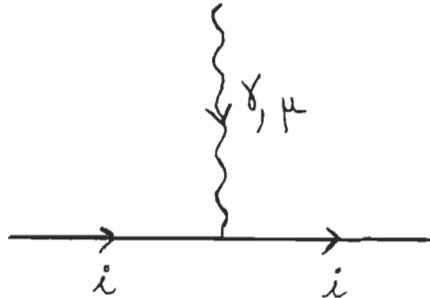
Les bosons  $W_{\mu a}$  et  $B_\mu$  sont des champs de jauge non physiques, dont la combinaison (dont les détails ne nous intéressent pas ici) donne les champs physiques, électromagnétique ( $A_\mu$ ) et faibles ( $W_\mu^+$ ,  $W_\mu^-$  et  $Z^0$ ). L'invariance de jauge engendre le nouveau lagrangien:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{int.} = \mathcal{L}_{int.}^\gamma + \text{autres interactions} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{int.}^\gamma = -q\bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i A_\mu = \text{interaction avec le champ électromagnétique} \quad (2.5)$$

Notons que le lagrangien  $\mathcal{L}$  est parfaitement renormalisable, puisque sa dimension canonique vaut 4 (nous reviendrons plus tard sur la théorie de renormalisation). Le diagramme de Feynman correspondant à sa partie interactive  $\mathcal{L}_{int.}^\gamma$  est le suivant:



**Figure 2.1** Interaction fermion-photon au niveau des arbres

Ce diagramme correspond au niveau des arbres et ne donne, comme paramètre de couplage, que la charge électrique du fermion. Mais, comme nous allons le montrer plus tard, le lagrangien d'interaction dû au m.d.e a pour expression:

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -\frac{i}{2} \bar{\psi}_i [D_E \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i \quad (2.6)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \text{tenseur champ électromagnétique.}$$

Le lagrangien effectif,  $\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e}$  est de dimension canonique 5, il est donc *non renormalisable*. C'est pour cela qu'on ne peut pas générer de m.d.e au niveau des arbres et qu'il faut aller au-delà, à savoir, au niveau d'une boucle et plus.

Dans le MS, les premier et second ordres (correspondant à une et deux boucles dans les diagrammes de Feynman) donnent encore zéro pour le m.d.e; le troisième ordre donne une valeur très faible sinon nulle [4,5]. C'est pour ces raisons que mes calculs vont être faits à l'ordre d'une boucle et d'une façon générale, sans choisir, a priori, un modèle. Ceci, outre la méthode de projection utilisée pour la première fois ici, constituera l'originalité de ma thèse. En effet, le calcul du m.d.e a été fait dans plusieurs modèles; mais un calcul général incluant tout modèle est inexistant.

Voyons maintenant la démonstration de l'équation (2.6):

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -\frac{i}{2} \bar{\psi}_i [D_E \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i \quad (2.6)$$

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu} = \sigma_{00} \gamma_5 F^{00} + \sigma_{0i} \gamma_5 F^{0i} + \sigma_{i0} \gamma_5 F^{i0} + \sigma_{ij} \gamma_5 F^{ij} \quad (2.7)$$

Or  $\sigma_{\mu\nu}$  et  $F^{\mu\nu}$  sont des tenseurs antisymétriques, donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{00} = 0 = \sigma_{00} \\ F^{i0} = -F^{0i} \quad \implies \sigma_{i0} \gamma_5 F^{i0} = \sigma_{0i} \gamma_5 F^{0i} \\ \sigma_{i0} = -\sigma_{0i} \end{array} \right.$$

L'équation (2.7) donne:

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu} = 2\sigma_{0i} \gamma_5 F^{0i} + \sigma_{ij} \gamma_5 F^{ij} \quad (2.8)$$

D'autre part, nous avons:

$$\begin{cases} F^{0i} = -E^i \\ F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B_k \end{cases}$$

où:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \text{champ électrique,} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{champ magnétique.} \end{cases}$$

Limite non relativiste.

Dans cette limite, si le fermion est placé dans le champ électrique  $\vec{E}$ , alors  $\vec{E} \neq 0$  et  $\vec{B} = 0$ , d'où:  $F^{ij} = 0$ . Il reste:

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu} = 2\sigma_{0i} \gamma_5 F^{0i} \quad (2.9)$$

De plus, on a:

$$\sigma_{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où, après quelques calculs simples:

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu} = -2i I \sigma_i E^i \quad (2.10)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{matrice identité}$$

Retournant à l'équation (2.6), en remplaçant  $\psi_i$  par son expression dans le repère propre du fermion, ie:  $\psi_i = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ , et  $\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 F^{\mu\nu}$  par sa dernière expression dans (2.10), on trouve :

$$\lim_{NR} \mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -D_E \bar{\varphi} \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \varphi \quad (2.11)$$

cette dernière équation est bien l'équivalent de l'équation (0.25) qui exprime l'énergie d'interaction du m.d.e avec un champ électrique externe.

REMARQUE:

Le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e}$  a une autre expression, soit:

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = i \bar{\psi}_i [i D_E \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 q^\nu A^\mu] \psi_i \quad (2.12)$$

Démonstration:

Partons de (2.12). Nous avons l'opérateur  $q^\nu$  qui n'est autre que:  $-i\partial^\nu$ ; alors:

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = i(-i)\bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\partial^\nu A^\mu] \psi_i$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \implies \partial^\nu A^\mu = \partial^\mu A^\nu - F^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = \bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\partial^\mu A^\nu] \psi_i - \bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i$$

Or  $\partial^\mu = iq^\mu$ , d'où:

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = i\bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 q^\mu A^\nu] \psi_i - \bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i$$

De plus  $\sigma_{\mu\nu}$  est un tenseur antisymétrique, donc:

$$\sigma_{\mu\nu} q^\mu A^\nu = -\sigma_{\nu\mu} q^\mu A^\nu = -\sigma_{\mu\nu} q^\nu A^\mu$$

Alors:

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -i\bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 q^\nu A^\mu] \psi_i - \bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i$$

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} - \bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i$$

$$2\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -\bar{\psi}_i [iD_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i$$

$$\mathcal{L}_{eff.}^{m.d.e} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_i [D_E\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 F^{\mu\nu}] \psi_i$$

Ainsi les équations (2.12) et (2.6) sont équivalentes.

## CHAPITRE III

### LA MÉTHODE DE PROJECTION

#### 3.1 INTRODUCTION

La méthode de projection est une méthode très efficace pour l'extraction des facteurs de forme électromagnétiques dont celui qui nous intéresse, le m.d.e. Elle permet de se débarrasser dès le début des termes qui ne nous intéressent pas (ceux des autres facteurs de forme) et facilite ainsi le calcul. Il faut remarquer que cette méthode peut être utilisée à n'importe quel ordre de calcul car on verra dans le paragraphe 3.3 qu'on n'a précisé aucun ordre d'approximation au départ.

Dans ce qui suit, je vais fixer l'expression du vertex électromagnétique et élaborer la méthode de projection.

#### 3.2 EXPRESSION DU VERTEX ÉLECTROMAGNÉTIQUE [16]

Soit  $i$  le fermion considéré. Le vertex électromagnétique est celui du couplage  $ii\gamma$  au delà du niveau des arbres, qui renferme les différents facteurs de forme électromagnétiques. Quels sont ces facteurs de forme?

Les quadrivecteurs  $p_1$  et  $q$  sont les seules grandeurs indépendantes qu'on ait;  $p_1$  étant la quadri-impulsion du fermion entrant et  $q$  celle du photon. Donc, pour la particule  $i$  de spin  $\frac{1}{2}$ , l'expression la plus générale de courant électromagnétique covariant, qu'on puisse écrire à partir du diagramme de la figure (2.1), est:

$$\begin{aligned}
 J^\mu = \bar{\psi}(p_2) \left\{ \right. & [A_1 \not{p}_1 p_1^\mu + A_2 \not{p}_1 q^\mu + A_3 \not{q} p_1^\mu + A_4 \not{q} q^\mu \\
 & + A_5 \not{q} \gamma^\mu \not{p}_1 + A_6 \gamma^\mu + A_7 \gamma^\mu q^2 \\
 & + A_8 \gamma^\mu q \cdot p_1 + A_9 \gamma^\mu p_1^2 + A_{10} \gamma^\mu \not{p}_1 \\
 & + A_{11} \gamma^\mu \not{q} + A_{12} p_1^\mu + A_{13} q^\mu] \gamma_L \\
 & + [B_1 \not{p}_1 p_1^\mu + B_2 \not{p}_1 q^\mu + B_3 \not{q} p_1^\mu + B_4 \not{q} q^\mu \\
 & + B_5 \not{q} \gamma^\mu \not{p}_1 + B_6 \gamma^\mu + B_7 \gamma^\mu q^2 \\
 & + B_8 \gamma^\mu q \cdot p_1 + B_9 \gamma^\mu p_1^2 + B_{10} \gamma^\mu \not{p}_1 \\
 & \left. + B_{11} \gamma^\mu \not{q} + B_{12} p_1^\mu + B_{13} q^\mu] \gamma_R \right\} \psi(p_1)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Comme on est intéressé par les propriétés électromagnétiques des fermions, alors:

- (1) La particule  $i$  est un fermion, donc elle vérifie l'équation de Dirac,  
 $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$ , qui implique les conditions dites "on shell" qui sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \not{p}_j \psi(p_j) = m_i \psi(p_j) \\ \bar{\psi}(p_j) \not{p}_j = m_i \bar{\psi}(p_j) \\ p_j^2 = m_i^2 \end{array} \right. \quad \text{avec } j = 1, 2 \text{ et } m_1 = m_2 = m_i \tag{3.2}$$

- (2) On peut appliquer les formules de Gordon:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2p_{1\mu} \gamma_L = (q_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu) \gamma_L + m_i \gamma_\mu \\ 2p_{1\mu} \gamma_R = (q_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu) \gamma_R + m_i \gamma_\mu \end{array} \right. \tag{3.3}$$

(3)  $J^\mu$  doit vérifier la loi de conservation du courant électromagnétique, soit:

$$q_\mu J^\mu = 0 \quad (3.4)$$

Appliquer les conditions (3.2) revient à faire les transformations:

$$\begin{aligned} \not{p}_1 \gamma_{L,R} &\longrightarrow m_i \gamma_{R,L} \\ \not{q} \gamma_{L,R} &\longrightarrow m_i (\gamma_{L,R} - \gamma_{R,L}) \\ \not{q} \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma_{L,R} &\longrightarrow m_i^2 \gamma^\mu - 2m_i \not{p}_1^\mu \gamma_{R,L} \end{aligned}$$

L'équation (3.1) devient alors

$$\begin{aligned} J^\mu = \bar{\psi}(p_2) &\left\{ [C_1 \not{p}_1^\mu + C_2 q^\mu + C_3 \gamma^\mu] \gamma_L \right. \\ &\left. + [D_1 \not{p}_1^\mu + D_2 q^\mu + D_3 \gamma^\mu] \gamma_R + F \gamma^\mu \right\} \psi(p_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où:

$$\begin{cases} C_1 = A_3 m_i + A_{12} + (B_1 - B_3 - 2B_5) m_i \\ C_2 = (A_4 + B_2 - B_4) m_i + A_{13} \\ C_3 = m_i^2 A_9 + A_6 + (A_7 - \frac{A_8}{2}) q^2 + (A_{11} + B_{10} - B_{11}) m_i \\ D_j = C_j (A_j \longrightarrow B_j ; B_j \longrightarrow A_j) \\ F = (A_5 + B_5) m_i^2 \end{cases}$$

Maintenant, on applique les formules (3.3) à (3.5) et l'on obtient, après quelques transformations:

$$\begin{aligned} J_\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}(p_2) &\left\{ F_1 q^\mu + i F_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu + F_3 \gamma^\mu \right. \\ &\left. + [G_1 q^\mu + i G_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu + G_3 \gamma^\mu] \gamma_5 \right\} \psi(p_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{C_1 + D_1}{2} + C_2 + D_2 \\ F_2 = \frac{C_1 + D_1}{2} \\ F_3 = C_3 + D_3 + 2F + m_i(C_1 + D_1) \\ G_1 = \frac{D_1 - C_1}{2} + D_2 - C_2 \\ G_2 = \frac{D_1 - C_1}{2} \\ G_3 = D_3 - C_3 \end{array} \right.$$

On applique, enfin, la condition (3.4) à (3.6) et on en déduit la relation:

$$F_1 + G_1 \gamma_5 = -\frac{1}{q^2} (F_3 + G_3 \gamma_5) \not{q} \quad (3.7)$$

On utilise cette dernière relation dans (3.6), on trouve:

$$J_\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}(p_2) \left\{ F_3 \gamma^\mu + [G_3 \gamma^\mu - \frac{G_3}{q^2} \not{q} q^\mu] \gamma_5 + i F_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right. \\ \left. + i G_2 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 - \frac{1}{q^2} F_3 \not{q} q^\mu \right\} \psi(p_1) \quad (3.8)$$

Or, le dernier terme de (3.8) est nul car:

$$\bar{\psi}(p_2) \not{q} \psi(p_1) = m_i \bar{\psi}(p_2) \psi(p_1) - m_i \bar{\psi}(p_2) \psi(p_1) = 0$$

Alors, on arrive, finalement à:

$$J_\mu^{em} = \bar{\psi}(p_2) \Gamma^\mu \psi(p_1)$$

$$\Gamma^\mu = f(q^2) \gamma^\mu + g(q^2) (q^2 \gamma^\mu - \not{q} q^\mu) \gamma_5 + D_M(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu + i D_E(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 \quad (3.9)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(q^2) = \frac{F_3}{2} \\ g(q^2) = \frac{G_3}{2q^2} \\ D_M(q^2) = i \frac{F_2}{2} \\ D_E(q^2) = \frac{G_2}{2} \end{array} \right.$$

La formule (3.9) donne l'expression la plus générale du vertex électromagnétique  $i\bar{\psi}\gamma$  (figure (3.1)). Ses quatre termes correspondent aux quatre moments électromagnétiques, qui sont:

- Charge électrique, dont le facteur de forme est  $f(q^2)$
- Moment anapolaire, dont le facteur de forme est  $g(q^2)$
- Moment dipolaire magnétique (m.d.m), dont le facteur de forme est  $D_M(q^2)$
- Moment dipolaire électrique (m.d.e), dont le facteur de forme est  $D_E(q^2)$

### 3.3 CALCUL DU PROJECTEUR

Maintenant que nous avons l'expression générale du vertex électromagnétique  $\Gamma^\mu$ , tirée du diagramme de Feynman (formule (3.9)); on définit le projecteur sur le moment électromagnétique de facteur de forme  $X$  (avec  $X = f(q^2), g(q^2), D_M(q^2), D_E(q^2)$ ) comme suit:

$$\Gamma'_\mu = A\gamma_\mu + B(q^2\gamma_\mu - \not{q}q^\mu)\gamma_5 + C\sigma_{\mu\nu}q^\nu + D\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 \quad (3.10)$$

et tel que:

$$T = \sum_{spins} \left\{ [\bar{\psi}(p_2)\Gamma'_\mu\psi(p_1)]^\dagger [\bar{\psi}(p_2)\Gamma^\mu\psi(p_1)] \right\} = X \quad (3.11)$$

Ainsi  $T = f(q^2)$  donnera l'expression du projecteur sur la charge;  $T = g(q^2)$  donnera l'expression du projecteur sur le moment anapolaire;  $T = D_M(q^2)$  donnera l'expression du projecteur sur le m.d.m et  $T = D_E(q^2)$  donnera l'expression du projecteur sur le m.d.e. Chaque projecteur aura son propre ensemble des valeurs des paramètres  $A, B, C$  et  $D$ .

Avant de calculer ces projecteurs, voyons à quoi se réduit l'équation (3.11) en notant que le fermion  $i$  considéré est non polarisé puisqu'on somme sur tous

les spins possibles.

$$T = \sum_{s,s'} \left\{ \left[ \bar{\psi}^s(p_1) \Gamma'_\mu \psi^{s'}(p_2) \right] \left[ \bar{\psi}^{s'}(p_2) \Gamma^\mu \psi^s(p_1) \right] \right\}$$

$$T = \sum_s \left\{ \bar{\psi}^s(p_1) \Gamma'_\mu \left[ \sum_{s'} \psi^{s'}(p_2) \bar{\psi}^{s'}(p_2) \right] \Gamma^\mu \psi^s(p_1) \right\}$$

Or:

$$\sum_{s'} \psi^{s'}(p_2) \bar{\psi}^{s'}(p_2) = \not{p}_2 + m_2$$

Donc:

$$T = \sum_s \left\{ \bar{\psi}_\alpha^s(p_1) (\Gamma'_\mu)^{\alpha\beta} (\not{p}_2 + m_2)_{\beta\delta} (\Gamma^\mu)^{\delta\rho} \psi_\rho^s(p_1) \right\}$$

$$T = \left\{ (\Gamma'_\mu)^{\alpha\beta} (\not{p}_2 + m_2)_{\beta\delta} (\Gamma^\mu)^{\delta\rho} \left[ \sum_s \psi_\rho^s(p_1) \bar{\psi}_\alpha^s(p_1) \right] \right\}$$

D'autre part:

$$\sum_s \psi_\rho^s(p_1) \bar{\psi}_\alpha^s(p_1) = (\not{p}_1 + m_1)_{\rho\alpha}$$

D'où:

$$T = \left\{ (\Gamma'_\mu)^{\alpha\beta} (\not{p}_2 + m_2)_{\beta\delta} (\Gamma^\mu)^{\delta\rho} (\not{p}_1 + m_1)_{\rho\alpha} \right\}$$

$$T = Tr \left[ \Gamma'_\mu (\not{p}_2 + m_2) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_1) \right]$$

Enfin, puisque  $m_1 = m_2 = m_i$ , alors:

$$T = Tr \left[ \Gamma'_\mu (\not{p}_2 + m_i) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_i) \right] \quad (3.12)$$

Je vais maintenant calculer les différents projecteurs:

On commence par réduire l'expression de  $T$ , en utilisant l'algèbre des matrices de Dirac et les théorèmes des traces; les formules utilisées seront citées en appendice. On part donc de l'équation (3.12) en remplaçant  $\Gamma^\mu$  et  $\Gamma'_\mu$  par leurs expressions données dans les équations (3.9) et (3.10), respectivement (en

se gardant de prendre le même indice de sommation pour les deux termes du produit contracté). Tout calcul fait, on arrive à :

$$T = S_1 f(q^2) + S_2 g(q^2) + S_3 D_M(q^2) + S_4 D_E(q^2) \quad (3.13)$$

où :

$$\begin{cases} S_1 = 4 \left\{ (4m_i^2 - 2p_1 \cdot p_2)A + 3im_i q^2 C \right\} \\ S_2 = -4q^2 [2(p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q) + q^2(p_1 \cdot p_2) + 3m_i^2 q^2] B \\ S_3 = -12im_i q^2 A + 4[(3m_i^2 + p_1 \cdot p_2)q^2 - 4(p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q)] C \\ S_4 = 4i [4(p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q) - q^2(p_1 \cdot p_2) + 3m_i^2 q^2] D \end{cases}$$

D'autre part, comme  $p_1^2 = m_i^2 = p_2^2$  et  $p_2 - p_1 = q$ , alors on a les relations :

$$\begin{cases} p_1 \cdot q = -\frac{q^2}{2} \\ p_2 \cdot q = \frac{q^2}{2} \\ p_1 \cdot p_2 = m_i^2 - \frac{q^2}{2} \\ (p_1 + p_2) \cdot q = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

En utilisant les relations (3.14) les  $S_J$  se réduisent à :

$$\begin{cases} S_1 = 4[(2m_i^2 + q^2)A + 3im_i q^2 C] \\ S_2 = -4q^2(4m_i^2 - q^2)B \\ S_3 = -12im_i q^2 A + 4q^2(4m_i^2 + \frac{q^2}{2})C \\ S_4 = 2iq^2(4m_i^2 - q^2)D \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.2.1. Projecteur sur le m.d.e :

Le projecteur sur le m.d.e c'est l'amplitude  $\Gamma'_\mu$ , dont les paramètres  $A, B,$

$C$  et  $D$ , vérifient:  $T = D_E$ . D'après (3.13), on a

$$T = D_E \implies \begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \\ S_4 = 1 \end{cases} \xrightarrow{(3.15)} \begin{cases} (1) & (2m_i^2 + q^2)A + 3im_i q^2 C = 0 \\ (2) & -q^4(4m_i^2 - q^2)B = 0 \\ (3) & -3im_i q^2 A + q^2(4m_i^2 + \frac{q^2}{2})C = 0 \\ (4) & 2iq^2(4m_i^2 - q^2)D = 1 \end{cases}$$

$$(2) \implies B = 0$$

$$(1), (3) \longrightarrow \begin{pmatrix} (2m_i^2 + q^2) & 3im_i q^2 \\ -3im_i q^2 & q^2(4m_i^2 + \frac{q^2}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette dernière équation est différent de zéro\* ; elle a, donc, une solution unique qui est:

$$A = 0 = C$$

Enfin l'équation (4) nous donne:

$$D = \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)}$$

On peut alors conclure (en remplaçant  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  par leurs valeurs, dans (3.10)) que le projecteur sur le m.d.e est:

$$P_\mu^{m.d.e} = \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \quad (3.16)$$

Ainsi, d'après (3.11) et (3.12), on peut enfin écrire l'expression du facteur de forme du m.d.e comme suit:

---

\* Le calcul donne  $Det = \frac{1}{2}q^2(4m_i^2 - q^2)^2$ . Le déterminant est différent de zéro si  $q^2 \neq 0$  et c'est ce qu'on supposera au départ; sinon des polarités (pour  $q^2 = 0$ ) affecteront nos calculs. Ce n'est que tout à fait à la fin (où toutes les polarités disparaîtront) qu'on reviendra à la condition "on shell" pour le photon, soit,  $q^2 = 0$ .

$$D_E = \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_i)] \quad (3.17)$$

### 3.2.2. Projecteur sur le m.d.m:

Le projecteur sur le m.d.m est l'amplitude  $\Gamma'_\mu$  dont les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  vérifient:  $T = D_M$ . D'après (3.13), on a

$$T = D_M \implies \begin{cases} S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 1 \\ S_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(3.15)} \begin{cases} (2m_i^2 + q^2)A + 3im_i q^2 C = 0 \\ -q^4(4m_i^2 - q^2)B = 0 \\ -3im_i q^2 A + q^2(4m_i^2 + \frac{q^2}{2})C = \frac{1}{4} \\ 2iq^2(4m_i^2 - q^2)D = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations est très simple et donne:

$$\begin{cases} A = \frac{-3im_i}{2(4m_i^2 - q^2)^2} \\ B = 0 \\ C = \frac{2m_i^2 + q^2}{2q^2(4m_i^2 - q^2)^2} \\ D = 0 \end{cases}$$

Ainsi le projecteur sur le m.d.m s'écrit:

$$P_\mu^{m.d.m} = \frac{1}{2(4m_i^2 - q^2)^2} \left[ -3im_i \gamma_\mu + \frac{2m_i^2 + q^2}{q^2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \quad (3.18)$$

Et l'expression du facteur de forme du m.d.m sera:

$$D_M = \frac{1}{2(4m_i^2 - q^2)^2} \text{Tr} \left\{ \left[ -3im_i \gamma_\mu + \frac{2m_i^2 + q^2}{q^2} \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \times (\not{p}_2 + m_i) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_i) \right\} \quad (3.19)$$

### 3.2.3. Projecteur sur le moment anapolaire:

Tout calcul fait, la solution de  $T = g$  est:

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{-1}{4q^4(4m_i^2 - q^2)} \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

Ainsi le projecteur sur le moment anapolaire s'écrit:

$$P_\mu^{m.a} = \frac{-1}{4q^4(4m_i^2 - q^2)} [(q^2 \gamma_\mu - \not{q} \gamma^5)] \quad (3.20)$$

Et l'expression du facteur de forme du moment anapolaire va être:

$$g = \frac{-1}{4q^4(4m_i^2 - q^2)} Tr [(q^2 \gamma_\mu - \not{q} \gamma^5) \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_i)] \quad (3.21)$$

### 3.2.4. Projecteur sur la charge électrique:

Tout calcul fait, la solution de  $T = f$  est:

$$\begin{cases} A = \frac{8m_i^2 + q^2}{4(4m_i^2 - q^2)^2} \\ B = 0 \\ C = \frac{3im_i}{2(4m_i^2 - q^2)^2} \\ D = 0 \end{cases}$$

Ainsi le projecteur sur la charge électrique s'écrit:

$$P_\mu^{c.e} = \frac{1}{2(4m_i^2 - q^2)^2} \left[ (4m_i^2 + \frac{q^2}{2}) \gamma_\mu + 3im_i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \quad (3.22)$$

Et, finalement, l'expression du facteur de forme de la charge électrique est:

$$f = \frac{1}{2(4m_i^2 - q^2)^2} \text{Tr} \left\{ \left[ \left( 4m_i^2 + \frac{q^2}{2} \right) \gamma_\mu + 3im_i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] \right. \\ \left. \times (\not{p}_2 + m_i) \Gamma^\mu (\not{p}_1 + m_i) \right\} \quad (3.23)$$

### 3.4 PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

On pouvait prévoir la forme des différents projecteurs par un simple raisonnement sur les propriétés de symétrie du lagrangien d'interaction de chaque moment électromagnétique.

Pour voir cela, dressons un tableau regroupant ces propriétés de symétrie, où le signe "+" signifie que la symétrie est conservée et le signe "-" signifie qu'elle est brisée.

SYMÉTRIES	m.d.e	m.d.m	m.a	c.e
$C$	+	+	-	+
$P$	-	+	-	+
$T$	-	+	+	+
$CP$	-	+	+	+
$CPT$	+	+	+	+

**Tableau 3.1** Propriétés de symétrie des différents moments électromagnétiques

On voit que le terme du m.d.e est le seul qui brise les symétries  $CP$  et  $T$  alors que tous les autres termes les conservent. On s'attend donc à ce que seul

le terme  $\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5$  intervienne dans l'expression du projecteur sur le m.d.e (c'est, en effet le seul terme qui brise  $CP$ ). Ceci signifie que ce projecteur devra être défini par (Cf. éq. (3.10)):  $A = 0$  ;  $B = 0$  ;  $C = 0$  et  $D \neq 0$ .

Le terme du moment anapolaire est le seul qui brise la symétrie  $C$ . Donc le projecteur sur le m.a ne devrait contenir que le terme  $(q^2\gamma_\mu - \not{q}q^\mu)\gamma_5$ . Ce qui veut dire que ce projecteur devra être défini comme suit:  $A = 0$  ;  $B \neq 0$  ;  $C = 0$  et  $D = 0$ .

Enfin, les termes de la charge électrique et du m.d.m ont les mêmes propriétés de symétrie. Alors on s'attend à ce que les projecteurs sur chacun de ces deux moments contiennent tous deux les termes  $\gamma_\mu$  et  $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ . C'est-à-dire que ces projecteurs devront tous deux être définis par:  $A \neq 0$  ;  $B = 0$  ;  $C \neq 0$  et  $D = 0$ .

Comme il se devait, les calculs effectués dans le paragraphe précédent respectent entièrement toutes ces prédictions.

En conclusion, la méthode de projection pour extraire les moments électromagnétiques est très puissante car:

- Elle est directe et rapide.
- Elle est précise (on n'a fait aucune approximation).
- Elle respecte les propriétés de symétrie.
- Elle est utilisable à tous les ordres d'approximation (son utilisation n'est pas restreinte à l'ordre d'une boucle).

## CHAPITRE IV

### CONVENTIONS ET TECHNIQUES DE CALCUL

#### 4.1 INTRODUCTION

Dans une théorie de jauge générale et renormalisable de spins 0,  $\frac{1}{2}$  et 1 il y a, au premier ordre, six boucles possibles pour le calcul du m.d.e d'une particule fermionique  $i$ . Comme on l'a vu au chapitre II, le m.d.e vient purement des boucles car le principe de substitution minimale ne génère pas de m.d.e au niveau des arbres.

Appelons  $V$  le boson vecteur,  $\Phi$  le boson scalaire et  $l$  le fermion interne. Le photon avec lequel interagit le fermion est noté  $\gamma$ .

Voici les six boucles que j'aurai à calculer:

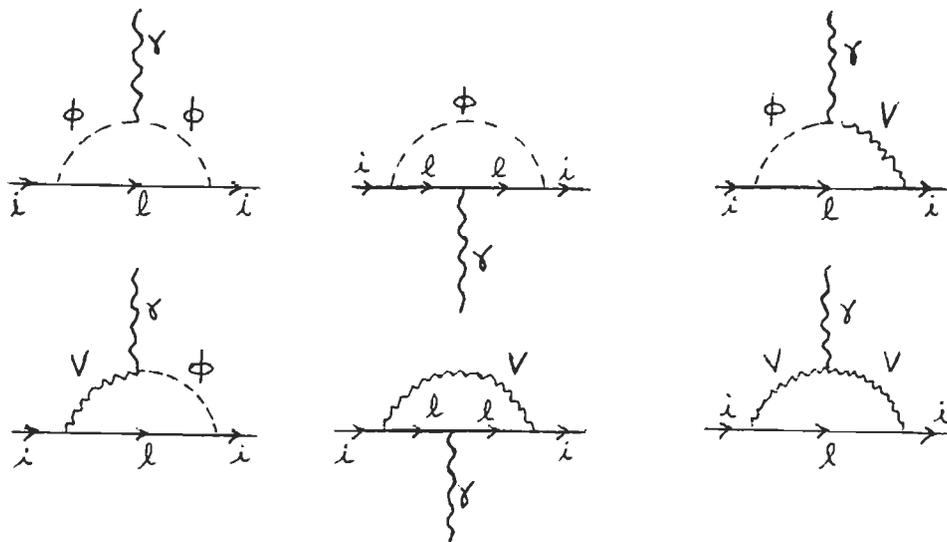


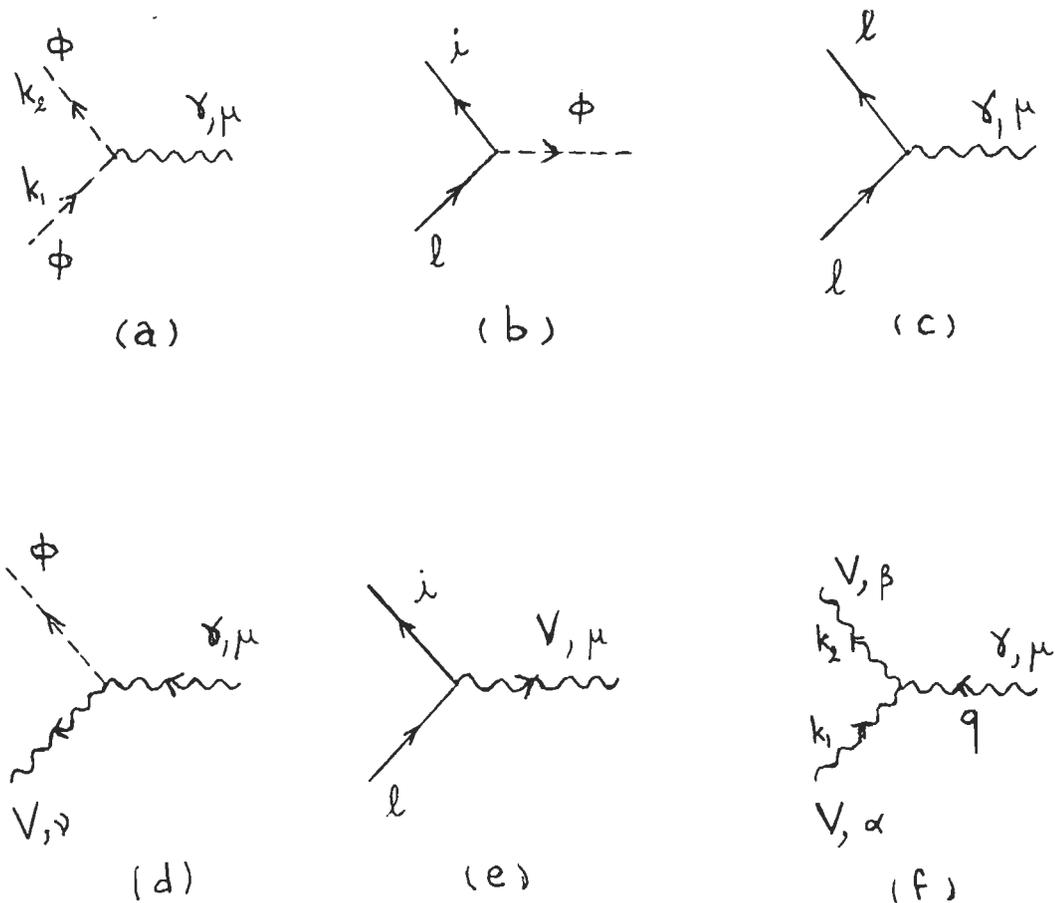
Figure 4.1 Diagrammes de Feynman contribuant au m.d.e du fermion  $i$

Pour faire les calculs, je dois établir les conventions que j'y utiliserai.

## 4.2 CONVENTIONS

### 4.2.1. Vertex:

J'exprimerai les vertex le plus généralement possible, sans me restreindre à un modèle. La seule restriction qu'on ait c'est que la théorie soit renormalisable et donc que le lagrangien soit de dimension 4. Voici les vertex dont nous aurons besoin:



**Figure 4.2** Vertex utilisés dans les calculs du m.d.e

- (a) Vertex  $\Phi\Phi\gamma$ ; (b) Vertex  $i\ell\Phi$ ; (c) Vertex  $l\ell\gamma$   
 (d) Vertex  $V\Phi\gamma$ ; (e) Vertex  $i\ell V$ ; (f) Vertex  $VV\gamma$ .

\* Vertex  $\Phi\Phi\gamma$ : Le lagrangien pour la figure 4.2(a) s'écrit:

$$\mathcal{L} = \bar{\varphi}(k_2)\Lambda^{(a)}\varphi(k_1)A_\mu \quad (4.1)$$

où  $\Lambda^{(a)}$  est le vertex dont on peut tirer l'expression générale par un très simple raisonnement:

$\mathcal{L} = \text{scalaire} \implies \Lambda^{(a)} = \text{vecteur (pour contracter } A_\mu)$ . Il doit donc s'écrire:  $\Lambda_\mu^{(a)}$

D'autre part, si  $[X]$  est la dimension canonique de  $X$ , Nous avons:

$$\begin{cases} [\varphi] = 1 \\ [A_\mu] = 1 \end{cases} \xrightarrow{(4.1)} [\mathcal{L}] = 3 + [\Lambda^{(a)}] = 4 \implies [\Lambda^{(a)}] = 1 .$$

Donc,  $\Lambda^{(a)}$  est un vecteur de dimension 1; par exemple, il ne peut pas avoir la forme de  $A_{\mu\nu}B^\nu$  qui est un vecteur de dimension 3. Comme  $k_1$  et  $k_2$  sont les seules quadri-impulsions indépendantes qu'on ait, alors notre vertex ne peut qu'avoir la forme suivante:

$$\Lambda_\mu^{(a)} = a(k_1 + k_2)_\mu + b(k_1 - k_2)_\mu$$

$$\Lambda_\mu^{(a)} = a(k_1 + k_2)_\mu - bq_\mu .$$

La loi de conservation du courant:  $q^\mu \Lambda_\mu^{(a)} = 0$ , implique:

$$a(k_1 + k_2) \cdot q - bq^2 = 0$$

$$a(k_2^2 - k_1^2) - b(k_2 - k_1)^2 = 0 = a(m_2^2 - m_1^2) - b(m_1^2 + m_2^2 - 2k_1 k_2) .$$

Si  $m_1 \neq m_2$  alors  $a = 0 = b$ , ie pas d'interaction  $\Phi\Phi\gamma$ . En effet,  $\gamma$  ne couple que deux particules identiques. Alors  $m_1 = m_2$ , ce qui implique  $b = 0$ . Il reste donc:

$$\Lambda_\mu^{(a)} = a(k_1 + k_2)_\mu .$$

Le paramètre  $a$  ne peut être que la charge électrique du boson scalaire; ainsi:

$$\Lambda_\mu^{(a)} = ie_\Phi(k_1 + k_2)_\mu \quad (4.2)$$

Le  $i$  dans (4.2) n'est qu'une convention.

★ Vertex  $il\Phi$ : On applique le même raisonnement pour le vertex de la figure 4.2(b); on trouve que  $\Lambda^{(b)}$  doit être une quantité sans dimension. D'où:

$$\Lambda^{(b)} = a_1 + a_2\gamma_5$$

qu'on peut écrire comme:

$$\Lambda^{(b)} = i(a\gamma_L + b\gamma_R) \quad (4.3)$$

Remarque: L'hermitien conjugué de (4.3) est:

$$\Lambda^{(b)\dagger} = i(a^*\gamma_R + b^*\gamma_L) \quad (4.4)$$

★ Vertex  $ll\gamma$ : Toujours par le même raisonnement,  $\Lambda^{(c)}$ , vertex pour la figure 4.2(c), doit être un vecteur de dimension 0. De plus, comme le courant électrique conserve  $CP$ , ce vertex ne peut pas contenir de vecteur axial (donc pas de  $\gamma_5$ ). Alors:

$$\Lambda^{(c)} = a\gamma_\mu$$

Là aussi le paramètre  $a$  ne peut être que la charge électrique du fermion  $l$ ; donc:

$$\Lambda^{(c)} = ie_l\gamma_\mu \quad (4.5)$$

★ Vertex  $\Phi\gamma V$ : Le lagrangien pour la figure 4.2(d) s'écrit:

$$\mathcal{L} = V_\nu\varphi\Lambda^{(d)}A_\mu \quad (4.6)$$

où  $V_\nu$ ,  $\varphi$  et  $A_\mu$  sont chacun de dimension 1; donc  $\Lambda^{(d)}$  doit être de dimension 1 pour que  $\mathcal{L}$  reste de dimension 4 et il doit être un tenseur de rang 2 pour que  $\mathcal{L}$  reste un scalaire. Donc il suffit que  $\Lambda^{(d)}$  soit le produit d'une masse (soit celle de  $V$ ) par un tenseur de rang 2 et de dimension 0 (soit  $g_{\mu\nu}$ ), ie:

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(d)} = igM_V g_{\mu\nu}$$

Et la constante  $g$  ne peut être que la charge du boson  $V$ . Donc:

$$\Lambda_{\mu\nu}^{(d)} = ie_V M_V g_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

★ Vertex  $iV$ : Le lagrangien pour la figure 4.2(e) s'écrit:

$$\mathcal{L} = \bar{u}(p_2)\Lambda^{(e)}u(p_1)V_\mu \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} [u(p_2)] = \frac{3}{2} = [u(p_1)] ; [V_\mu] = 1 \\ [\mathcal{L}] = 4 \end{cases} \implies [\Lambda^{(e)}] = 0$$

De plus,  $\Lambda^{(e)}$  doit être un vecteur pour contracter le vecteur  $V_\mu$  ( $\mathcal{L}$  étant un scalaire). Donc  $\Lambda^{(e)}$  est un vecteur sans dimension de la forme:

$$\Lambda^{(e)} = (c_1 + c_2\gamma_5)\gamma_\mu$$

ou encore,

$$\Lambda^{(e)} = i(c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma_\mu \quad (4.9)$$

★ Vertex  $VV\gamma$ : Le lagrangien pour la figure 4.2(f) s'écrit:

$$\mathcal{L} = V_\beta^*(k_2)\Lambda^{(f)}V_\alpha(k_1)A_\mu(q) \quad (4.10)$$

Or,

$$\begin{cases} V_\beta^*V_\alpha A_\mu = \text{tenseur de rang 3 et de dimension 3} \\ \mathcal{L} = \text{scalaire de dimension 4} \end{cases}$$

Donc  $\Lambda^{(f)}$  ne peut être qu'un tenseur de rang 3 et de dimension 1. Ainsi, comme  $k_1$  et  $k_2$  sont les seuls quadrivecteurs qu'on ait,  $\Lambda^{(f)}$  s'écrit:

$$\Lambda_{\alpha\beta\mu}^{(f)} = if[g_{\alpha\beta}(k_1 + k_2)_\mu + g_{\mu\alpha}(q - k_1)_\beta - g_{\mu\beta}(q + k_2)_\alpha]$$

Les signes sont pris de telle sorte que la conservation de l'impulsion au vertex est respectée. Bien sûr, le paramètre  $f$  ne peut être que la charge électrique du boson  $V$ , donc:

$$\Lambda_{\alpha\beta\mu}^{(f)} = -ie_V [g_{\alpha\beta}(k_1 + k_2)_\mu + g_{\mu\alpha}(q - k_1)_\beta - g_{\mu\beta}(q + k_2)_\alpha] \quad (4.11)$$

Dressons un tableau récapitulatif des différentes expressions trouvées.

Figure	Vertex	Expression
4.2(a)	$\Phi\Phi\gamma$	$ie_\Phi(k_1 + k_2)_\mu$
4.2(b)	$il\Phi$	$i(a\gamma_L + b\gamma_R)$
4.2(c)	$ll\gamma$	$ie_l\gamma_\mu$
4.2(d)	$\Phi\gamma V$	$ie_V M_V g_{\mu\nu}$
4.2(e)	$ilV$	$i(c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma_\mu$
4.2(f)	$VV\gamma$	$-ie_V [g_{\alpha\beta}(k_1 + k_2)_\mu + g_{\mu\alpha}(q - k_1)_\beta - g_{\mu\beta}(q + k_2)_\alpha]$

**Tableau 4.1** Conventions pour les vertex

Dans le tableau ci-dessus,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des paramètres. Leurs expressions dépendront du modèle choisi.

Maintenant que les vertex sont établis d'une façon générale, on pourra appliquer nos résultats à tout modèle renormalisable.

### 4.2.2. Jauge et propagateurs:

Pour écrire le propagateur d'une particule dans une jauge donnée, on suit les étapes suivantes:

- 1- On écrit son équation de mouvement.
- 2- On lui applique la transformation de Fourier.
- 3- On inverse la transformée.

Calculons, par exemple, le propagateur du photon en QED dans la jauge de Lorentz;

- 1- Équation du mouvement dans la jauge de Lorentz ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ):

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = J^\mu$$

- 2- Transformation de Fourier:

$$-q^2 A^\mu = J^\mu$$

- 3- Inversion:

$$A^\mu = \frac{-1}{q^2} J^\mu = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} J^\nu \quad (4.12)$$

De 4.12 on déduit l'expression du propagateur photonique, soit:

$$D_{\mu\nu} = \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} \quad (4.13)$$

L'exemple précédent concerne une jauge bien déterminée alors qu'on est intéressé par un calcul dans une jauge générale.

Voyons ce que nous propose 't Hooft [8]. Soit  $A^\mu$  un boson de jauge; son équation du mouvement est:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = J^\mu \quad (4.14)$$

où  $J^\mu$  est le courant crée par un champ de Higgs:

$$J^\mu = iq[\Phi^*(\partial^\mu \Phi) - (\partial^\mu \Phi^*)\Phi] - 2q^2 A^\mu |\Phi|^2 \quad (4.15)$$

L'équation 4.15 exprime tout simplement un courant de KG rendu invariant de jauge par la substitution minimale:

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$$

$\Phi$  = champ de Higgs non physique.

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} [f + \chi_1(x) + i\chi_2(x)] \quad (4.16)$$

avec:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \frac{f}{\sqrt{2}}$$

ie:  $\langle \chi_1 \rangle_0 = \langle \chi_2 \rangle_0 = 0$ .

Si on remplace, dans 4.14,  $J^\mu$  et  $\Phi$  par leurs expressions dans 4.15 et 4.16 on trouve:

$$\begin{aligned} (\partial_\nu \partial^\nu + M^2)A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = & -M\partial^\mu \chi_2 + q(\chi_2 \partial^\mu \chi_1 - \chi_1 \partial^\mu \chi_2) \\ & -q^2 A^\mu (\chi_1^2 + 2f\chi_1 + \chi_2^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

où  $M = qf$ .

Dans 4.17 on remarque l'existence de 5 degrés de liberté; 3 pour le boson de jauge massif  $A^\mu$  (qui a "mangé" une partie du Higgs pour avoir une masse qui est  $M$ ) et 2 pour  $\Phi$  (ie,  $\chi_1$  et  $\chi_2$ ). Il existe donc un degré de liberté "en trop", car on est parti de seulement 4 degrés de liberté; 2 pour  $A^\mu$  et 2 pour  $\Phi$ . De plus, la transformée de Fourier de 4.17 ne peut pas être inversée pour déterminer le propagateur du boson de jauge; en effet, l'inverse de l'opérateur  $(-q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu)$  n'existe pas. Ceci est en fait dû au degré de liberté "en trop", ie au fait qu'on n'ait pas fixé la jauge au départ. D'où la règle générale:

*Pour définir les propagateurs des quanta de jauge, il faut fixer une jauge.*

't Hooft a eut une idée ingénieuse, à savoir, paramétriser la jauge. Voici la façon très judicieuse dont 't Hooft a paramétrisé la jauge:

$$\partial_\mu A^\mu = M\xi\chi_2 \quad (4.18)$$

où  $\xi$  est un paramètre arbitraire. Ce choix permet de supprimer le degré de liberté "en trop" sans perdre la généralité des calculs. Avec ce choix, 4.17 devient:

$$(\partial_\nu \partial^\nu + M^2)A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) = q(\chi_2 \partial^\mu \chi_1 - \chi_1 \partial^\mu \chi_2) - q^2 A^\mu (\chi_1^2 + 2f\chi_1 + \chi_2^2) \quad (4.19)$$

La transformée de Fourier de l'opérateur de gauche est:

$$\left[(-q^2 + M^2)g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)q_\mu q_\nu\right]A^\mu$$

Maintenant on peut inverser cet opérateur et obtenir le propagateur du boson de jauge:

$$D_{\mu\nu}^\xi = \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(1-\xi)q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi M^2}\right](q^2 - M^2)^{-1} \quad (4.20)$$

4.20 donne l'expression du propagateur du boson de jauge dans la jauge  $R_\xi$ .

Pour le photon, on fait tout simplement  $M^2 \rightarrow 0$  pour obtenir son propagateur dans la jauge  $R_\xi$ :

$$D_{\mu\nu}^{\xi,\gamma} = \left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]q^{-2} \quad (4.21)$$

Pour mes calculs, j'aurai besoin des propagateurs suivants:

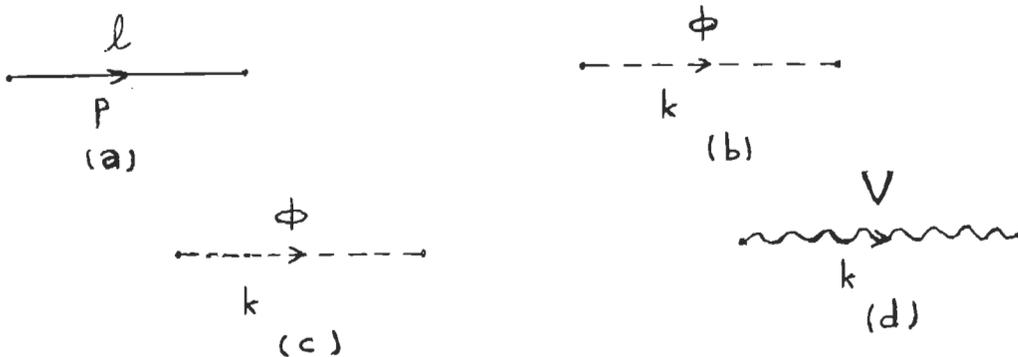


Figure 4.3 Propagateurs utilisés dans les calculs du m.d.e

- (a) Propagateur  $l$  ; (b) Propagateur  $\Phi$  physique  
(c) Propagateur  $\Phi$  non physique ; (d) Propagateur  $V$

Le calcul de ces propagateurs donne les expressions regroupées dans le tableau 4.2.

Figure	propagateur	Expression
4.3(a)	$l$	$\frac{i(\not{p} + m_l)}{(p^2 - m_l^2)}$
4.3(b)	$\Phi$ physique	$\frac{i}{(k^2 - M_\Phi^2)}$
4.3(c)	$\Phi$ non physique	$\frac{i}{(k^2 - \xi M_V^2)}$
4.3(d)	$V$	$-i \left[ \frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2}}{(k^2 - M_V^2)} \right] - i \left[ \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2 (k^2 - \xi M_V^2)} \right]$

**Tableau 4.2** Propagateurs dans la jauge  $R_\xi$

Le calcul des propagateurs du fermion et des scalaires physique et non physique seront exposés en appendice.

Avec les propagateurs donnés dans le tableau 4.2, on pourra faire nos calculs dans la jauge générale  $R_\xi$  et choisir à la fin la jauge qu'on veut. Par exemple, la jauge unitaire correspond à  $\xi = \infty$  ; cette jauge est aussi dite physique car il n'y apparaît que des particules physiques. Le tableau suivant regroupe les jauges les plus connues, où  $A_\mu$  est le champ de jauge et  $\xi$  le paramètre de jauge défini dans 4.18.

Jauge	Définition
Coulomb	$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
Axiale	$A_3 = 0$
Temporelle	$A_0 = 0$
Landau	$\begin{cases} \partial_\mu A^\mu = 0 & \text{pour QED} \\ \xi = 0 & \text{pour un boson massif} \end{cases}$
Feynman	$\xi = 1$
Unitaire	$\xi = \infty$

Tableau 4.3 Définitions de quelques jauges

### 4.3 TECHNIQUES DE CALCUL

#### 4.3.1. Paramétrisation:

Calculons l'intégrale suivante et regardons ce qu'elle donne:

$$I = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{\left\{ [Ax + B(1-x)]y + C(1-y) \right\}^3} \quad (4.22)$$

$$I = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{\left\{ [Ax + B(1-x) - C]y + C \right\}^3}$$

Sachant que

$$\int_0^1 \frac{y dy}{(a + by)^3} = \frac{1}{2a(a+b)^2}$$

on obtient

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{C[Ax + B(1-x)]^2}$$

$$I = \frac{1}{C} \int_0^1 \frac{dx}{[(A-B)x + B]^2}$$

Or

$$\int_0^1 \frac{dy}{(a+by)^2} = \frac{1}{a(a+b)}$$

d'où:

$$I = \frac{1}{C} \frac{1}{B(B+A-B)}$$

$$I = \frac{1}{ABC} \tag{4.23}$$

Les équations 4.22 et 4.23 donnent:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{\left\{ [Ax + B(1-x)]y + C(1-y) \right\}^3} \tag{4.24}$$

Cette dernière équation constitue la formule de paramétrisation de Feynman que j'utiliserai dans mes calculs. Elle permet de passer d'un produit à une somme et d'isoler ainsi la variable d'intégration  $k$ ; ce qui rend le calcul aisé. En effet:

$$\frac{1}{(k^2 - M^2)(p_1^2 - m_1^2)(p_2^2 - m_2^2)} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{y dy dx}{\Delta^3}$$

où

$$\Delta = k^2 + 2P.k + \alpha^2$$

avec  $P$  et  $\alpha$  des fonctions de  $p_1, p_2$  (qui ne dépendent pas de  $k$ ), des masses et des variables  $x$  et  $y$ .

Je finirai ce paragraphe en précisant que j'utiliserai aussi dans mes calculs la translation:

$$k \longrightarrow k' = P + k$$

pour que  $\Delta$  ait une forme simple et soit une fonction paire de  $k$ :

$$\Delta = k'^2 - \omega^2$$

où  $\omega$  sera une fonction de  $p_1, p_2$  et des masses. Comme on intègre sur  $k'$  entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , alors toutes les fonctions impaires en  $k'$  auront une contribution nulle.

### 4.3.2.Régularisation:

Dans mes calculs du m.d.e je rencontrerai les trois types d'intégrales suivants:

$$I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \omega^2)^3} \quad (4.25)$$

$$I_2^{\alpha\beta} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \omega^2)^3} \quad (4.26)$$

$$I_3^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\alpha k^\beta k^\gamma k^\delta}{(k^2 - \omega^2)^3} \quad (4.27)$$

où  $\omega$  est une quadri-impulsion bien déterminée qui ne dépend pas de  $k$ .

Voyons par un simple raisonnement le sens de variation de ces intégrales. On définit le critère de divergence pour l'intégrale:  $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^a}{k^b}$ , par:

$$\Lambda = a - b + 4$$

On peut aussi extraire  $\Lambda$  à partir du diagramme de Feynman, selon la règle:

$$\Lambda = -\frac{3}{2}(\text{nombre de lignes fermioniques externes}) \\ - (\text{nombre de lignes photoniques externes}) + 4$$

Cette règle signifie que le degré de divergence superficiel de tout diagramme de Feynman, quelle que soit sa complexité, ne dépend que des lignes externes fermioniques et photoniques. Le tableau 4.4 regroupe les différents types de divergence qu'on peut rencontrer.

$\Lambda$	<b>divergence</b>
0	logarithmique
1	linéaire
2	quadratique
3	cubique
>3	diagramme non physique
<0	diagramme convergent

**Tableau 4.4** Types de divergences

Maintenant on peut connaître le sens de variation de nos intégrales:

$$I_1 \longrightarrow \Lambda = -2 \implies \text{convergence}$$

$$I_2 \longrightarrow \Lambda = 0 \implies \text{div. logarithmique}$$

$$I_3 \longrightarrow \Lambda = 2 \implies \text{div. quadratique}$$

Donc on peut calculer  $I_1$  directement, alors qu'il faudra régulariser  $I_2$  et  $I_3$ . Je vais donc d'abord faire le calcul de  $I_1$  et, ensuite, voir ce qu'est la régularisation.

**CALCUL DE  $I_1$ :**

Il serait d'abord utile de voir l'expression de l'élément de volume à  $n$  dimensions, en coordonnées sphériques.

$$\prod_{i=1}^n dx_i = r^{n-1} dr \prod_{i=1}^{n-1} \sin^{i-1} \theta_i d\theta_i \quad (4.28)$$

où  $r$  est la première coordonnée sphérique [12], ie:

$$r = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et l'angle  $\theta_i$  est la  $(i + 1)^{ème}$  coordonnée. On peut montrer que:

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \quad (4.29)$$

D'après 4.25 on a:

$$\int d^n x = \int \prod_{i=1}^n dx_i = \int_0^\infty r^{n-1} dr \int \prod_{i=1}^{n-1} \sin^{i-1} \theta_i d\theta_i \quad (4.30)$$

On peut intégrer la partie angulaire de 4.30 en utilisant 4.29. On obtient l'angle solide à n dimensions:

$$\int \Omega_{n-1} = \int \prod_{i=1}^{n-1} \sin^{i-1} \theta_i d\theta_i \stackrel{(4.29)}{=} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (4.31)$$

Alors 4.30 devient:

$$\int d^n x = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty r^{n-1} dr \quad (4.32)$$

Maintenant, à 4 dimensions:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \int_0^\infty k^3 dk$$

Or,

$$d(k^2) = 2k dk$$

Alors:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty k^2 d(k^2) \quad (4.33)$$

Il faut remarquer que le calcul précédent a été fait dans un espace euclidien. Il faut donc appliquer la rotation de Wick pour passer à l'espace de Minkowski. Cette rotation consiste à multiplier les quadrivecteurs par le nombre  $i$ , car dans l'espace euclidien, la norme est définie positive alors qu'elle ne l'est pas dans l'espace de Minkowski.

$$[\text{Espace euclidien}] \xrightleftharpoons{\text{rot. de Wick}} [\text{Espace de Minkowski}].$$

Maintenant le calcul de  $I_1$  est très simple:

$$I_1 = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 d(k^2)}{(k^2 - \omega^2)^3}$$

$$I_1 = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{U dU}{(U - \omega^2)^3}$$

Cette intégrale est très facile à calculer; tout calcul fait on trouve:

$$I_1 = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\omega^2}$$

On applique maintenant la rotation de Wick qui consiste, ici, à multiplier le résultat par  $-i$ :

$$I_1 = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega^2} \quad (4.34)$$

Pour le calcul des autres intégrales nous aurons besoin de la régularisation dimensionnelle; mais avant de la voir il faut d'abord définir ce que l'on entend par régularisation.

**Régularisation** = Séparation des termes finis des termes infinis d'une quantité physique divergente. Les termes infinis étant paramétrisés, ils devront être absorbés dans le cadre de la renormalisation, si la quantité est renormalisable. Sinon, comme c'est le cas pour le m.d.e, les infinités doivent disparaître dans le calcul car la théorie de jauge est renormalisable.

**Renormalisation** = Extraire les infinités des quantités physiques mesurables en les injectant dans les quantités "nues" ("bare quantities"); puisqu'elles sont ni mesurables (en théorie des champs) ni renormalisables. Le problème consiste donc à donner à ces quantités non renormalisables la divergence appropriée pour annuler les divergences provenant de l'interaction.

EXEMPLE: En QED; considérons un électron de masse nue  $m$ . Cet électron interagit constamment avec le champ photonique virtuel, ce qui lui donne une masse renormalisée  $m^*$ . D'une part, la masse nue  $m$  n'est pas mesurable (à

cause de la présence du champ virtuel) et, d'autre part, la différence entre la masse nue  $m$  et la masse renormalisée  $m^*$  est infinie (à cause des diagrammes avec boucles divergents). La renormalisation de la masse de l'électron consiste à redéfinir sa masse nue  $m$  (puisque'elle n'est pas mesurable), de telle façon que sa masse physique  $m^*$  qui, elle, est mesurable, soit finie.

Alors, on retient que dans une théorie quantique des champs relativiste les quantités renormalisées sont physiquement mesurables alors que les quantités "nues" ne le sont pas. Cette technique compliquée, formulée à l'origine pour QED par Feynman (1948), Schwinger (1948, 1949), Tomonaga (1948) et Dyson (1949) a eut un grand succès en QED où l'accord entre théorie et expérience est spectaculaire [12].

Il faut rappeler que je travaille dans une théorie  $\lambda\phi^4$  où jusqu'à présent, les seuls lagrangiens d'interaction qu'on sache renormaliser sont ceux de dimension canonique 4 (ex: terme de masse, terme de charge électrique ... etc). On ne sait donc pas renormaliser le terme du m.d.e qui est de dimension 5 comme on l'a déjà vu. Ceci est dû au fait que le m.d.e a une dimension négative (qui vaut -1). Le m.d.e est donc une quantité non renormalisable. Ainsi, la renormalisabilité de la théorie nous garantit que le facteur de forme du m.d.e sera une quantité finie, ie, **Il ne doit subsister aucune infinité dans le calcul du m.d.e.**

Revenons à la régularisation; il en existe plusieurs méthodes. Voyons brièvement les plus utilisées d'entre elles.

#### a) Méthode de coupure

Comme les infinités dans les calculs de boucles proviennent du fait que la variable impulsion ( $k$ ), dans l'intégrale, prend toutes les valeurs de 0 à  $\infty$ ; la méthode de coupure consiste à couper cet intervalle comme suit:

$$\int_0^{\infty} f(k)d(k^2) \longrightarrow \int_0^{\Lambda} f(k)d(k^2) = F_1 + F_2(\Lambda)$$

Ensuite, on fait:  $\Lambda \longrightarrow \infty$  ce qui donne;

$F_1$ : finie

$F_2$ : divergente.

On a ainsi séparé la partie finie de la partie infinie de notre intégrale.

Il faut remarquer que cette méthode brise l'invariance de jauge.

#### b) Méthode de Pauli-Villars

Dans cette procédure (Pauli et Villars 1949), appelée aussi régularisation covariante, on suppose l'existence de particules fictives de masses  $\Lambda_i$ ; ce qui modifie le propagateur initial comme:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - m^2} + \sum_i \frac{a_i}{p^2 - \Lambda_i^2}$$

où  $\Lambda_i^2 \gg m^2$  et les  $a_i$  sont choisis tels que le critère de divergence soit négatif (ie, le diagramme de Feynman converge). Ensuite, à la fin, on fait tendre les masses  $\Lambda_i$  vers l'infini pour faire disparaître les particules fictives et avoir un résultat régularisé.

Cette méthode est efficace en QED; ailleurs elle brise l'invariance de jauge.

#### c) Régularisation sur réseau

Cette méthode est très utilisée en QCD non perturbative. Elle consiste à prendre l'espace-temps comme un réseau de points discrets disposés en un étalage hypercubique. En fait, on procède à une coupure en passant d'un espace continu à un espace discret. Cette technique brise l'invariance de Lorentz.

#### d) Régularisation dimensionnelle

L'idée de base de cette méthode ('t Hooft et Veltman 1972; Bollini et Giambiagi 1972; Ashmore 1972; Cicuta et Montaldi 1972) est que, puisque les divergences ultraviolettes dans les diagrammes de Feynman proviennent de l'intégration sur l'impulsion interne dans un espace à 4 dimensions, alors on peut rendre les intégrales finies en abaissant la dimension de l'espace-temps. Ainsi les intégrales de Feynman deviennent des fonctions analytiques de la dimension de l'espace-temps  $n$ . Et les divergences vont se manifester comme singularités

quand  $n \rightarrow 4$ . La partie finie est obtenue en extrayant les quelques premiers termes du développement de Taylor du résultat.

Cette méthode de régularisation est très avantageuse car elle préserve les symétries de la théorie. C'est d'ailleurs celle que je vais utiliser dans mes calculs.

Je vais illustrer cette méthode par le calcul de l'intégrale  $I_2$  définie en 4.23. La première étape consiste à faire:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$$

puis on note:

$$n = 4 - \varepsilon$$

pour que:

$$\lim_{n \rightarrow 4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$$

Il faut remarquer que, comme la dimension de l'espace temps est changée, il faut aussi rectifier l'algèbre des matrices de Dirac; par exemple, mettre  $\gamma_\mu \gamma^\mu = n$  au lieu de  $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ . J'ai donné en appendice l'algèbre de Dirac à  $n$  dimension. D'autre part, la constante de couplage doit être multipliée par  $\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}$  (où le paramètre  $\mu$  est de dimension 1) dans le lagrangien, pour que ce dernier ait la bonne dimension, à savoir,  $n$ . Cependant, comme je sais que mes résultats doivent converger pour  $n \rightarrow 4$  (car, comme on l'a vu, le m.d.e n'est pas renormalisable), alors je prendrai directement l'algèbre des matrices de Dirac à 4 dimensions et j'omettrai le terme  $\mu^{\frac{\varepsilon}{2}}$  dès le début. Ceci dit, calculons l'intégrale  $I_2$ :

$$I_2^{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow 4} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^\alpha k^\beta}{(k^2 - \omega^2)^3} \quad (4.26)$$

Puisque l'intégration se fait entre  $-\infty$  et  $+\infty$  pour toutes les composantes de  $k$  alors l'intégrale est nulle si la fonction intégrée est impaire; d'où la relation:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} k^\alpha k^\beta f(k^2) \equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2}{n} g^{\alpha\beta} f(k^2) \quad (4.35)$$

Maintenant, on utilise 4.32 et on applique la rotation de Wick pour aller dans un espace euclidien:

$$k \rightarrow ik$$

cela donne:

$$I_2^{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow 4} \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{(-1)^3 k^{n-1} dk k^2 g^{\alpha\beta}}{(k^2 + \omega^2)^3} \right\}$$

$$I_2^{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow 4} \left\{ - \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\alpha\beta} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{(k^2)^{\frac{n}{2}} d(k^2)}{(k^2 + \omega^2)^3} \right\}$$

$$I_2^{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow 4} \left\{ \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{n(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\alpha\beta} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{(x + \omega^2)^3} \right\}$$

On utilise la formule suivante pour la fonction beta:

$$\int_0^\infty \frac{t^{m-1} dt}{(t + a^2)^\alpha} = \frac{1}{(a^2)^{\alpha-m}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(\alpha - m)}{\Gamma(\alpha)} \quad (4.36)$$

avec:

$$\begin{cases} m = \frac{n}{2} + 1 \\ \alpha = 3 \\ a^2 = \omega^2 \end{cases}$$

Alors,

$$I_2^{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow 4} \left\{ \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{n(2\pi)^n \Gamma(\frac{n}{2})} g^{\alpha\beta} \frac{1}{[\omega^2]^{2-\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{\Gamma(3)} \right\}$$

Or:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\Gamma(3) = 2$$

D'où:

$$I_2^{\alpha\beta} = \lim_{n \rightarrow 4} \left\{ \frac{-\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} g^{\alpha\beta} \frac{1}{[\omega^2]^{2-\frac{n}{2}}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{2} \right\}$$

Maintenant on remplace  $n$  par  $4 - \varepsilon$  et on retourne à l'espace de Minkowski en multipliant le résultat par  $-i$ ; on trouve:

$$I_2^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{32\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{[\omega^2]^{\frac{\varepsilon}{2}}} g^{\alpha\beta} \right\} \quad (4.37)$$

On voit que l'intégrale diverge pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donc il faut toujours garder le  $\varepsilon$  comme paramètre dans la théorie et ne prendre sa limite vers zéro qu'à la fin des calculs. L'expression 4.37 est la **définition régularisée de l'intégrale  $I_2$** . Puisque c'est la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  qui nous intéresse ultimement, alors on fait le développement du terme divergent autour de  $\varepsilon = 0$ :

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots \quad (4.38)$$

$\gamma$  est la constante d'Euler. Et:

$$\left[\frac{4\pi}{\omega^2}\right]^{\frac{\varepsilon}{2}} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left[\frac{\omega^2}{4\pi}\right] + \dots \quad (4.39)$$

Alors on peut écrire:

$$I_2^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{32\pi^2} g^{\alpha\beta} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left[\frac{\omega^2}{4\pi}\right] + 0(\varepsilon) \right] \right\} \quad (4.40)$$

Ainsi la partie divergente (le terme  $\frac{2}{\varepsilon}$ ) est bien séparée de la partie finie.

Le calcul de  $I_3$  donne:

$$I_3^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{32\pi^2} \left[ g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \right] \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right)}{[\omega^2]^{\frac{\varepsilon}{2} - 1}} \right\} \quad (4.41)$$

On développe les termes en  $\varepsilon$  autour de 0:

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) = \frac{-2}{\varepsilon} - 1 + \gamma + \dots \quad (4.42)$$

$$(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}} [\omega^2]^{-\frac{\varepsilon}{2} + 1} = \omega^2 \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln\left[\frac{\omega^2}{4\pi}\right] + \dots \right] \quad (4.43)$$

Alors  $I_3$  peut s'écrire:

$$I_3^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{32\pi^2} \left[ g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} \right] \times \omega^2 \left[ \frac{-2}{\varepsilon} - 1 + \gamma + \ln\left[\frac{\omega^2}{4\pi}\right] + 0(\varepsilon) \right] \right\} \quad (4.44)$$

où il y a aussi séparation des termes finis et infinis.

### **4.3.3.Stratégie:**

Dans le calcul de la contribution de chaque boucle de la figure 4.1 au m.d.e intrinsèque du fermion  $i$ , voici les étapes que je suivrai:

- 1) On prendra les couplages généraux donnés dans le tableau 4.1 pour avoir un calcul indépendant de tout modèle.
- 2) On fera le calcul dans la jauge générale  $R_\xi$  pour déterminer les quantités invariantes de jauge (le tableau 4.2 donne les propagateurs dans cette jauge).
- 3) On extraira le facteur de forme du m.d.e de chaque boucle par la méthode de projection (équation 3.17), et ce pour  $q \neq 0$ , où  $q$  est la quadri-impulsion du photon externe.
- 4) On prendra à la fin du calcul la limite:  $q^2 \rightarrow 0$  qui est la condition "on shell" pour le photon.

## CHAPITRE V

### CALCUL DU M.D.E D'UN FERMION DE SPIN $\frac{1}{2}$

#### 5.1 INTRODUCTION

Nous avons vu qu'il y avait six boucles qui contribuaient, au premier ordre, au m.d.e d'un fermion. Ces six boucles sont représentées dans la figure 4.1. Si je note par  $d_j$  la contribution de la boucle  $j$ , alors le m.d.e de notre fermion s'écrira:

$$M.D.E = \sum_{j=1}^6 d_j \quad (5.1)$$

Le m.d.e partiel  $d_j$  est la limite "on shell" ( $q^2 \rightarrow 0$ ) du facteur de forme  $D_{E_j}$  obtenu par projection de la partie lorentzienne,  $\Gamma_j^\mu$ , de l'amplitude de la  $j^{\text{ème}}$  boucle de Feynman sur le terme du m.d.e. Nous avons déjà défini cette projection au chapitre III (équation 3.17). Nous avons donc:

$$d_j = \lim_{q^2 \rightarrow 0} D_{E_j} \quad (5.2)$$

$$D_{E_j} = \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) \Gamma_j^\mu (\not{p}_1 + m_i)] \quad (5.3)$$

Dans ce chapitre, je vais faire le calcul des  $d_j$ . Mais commençons d'abord par préciser la notation utilisée.

- $m_i$  est la masse du fermion,  $i$ , d'intérêt.
- $p_1$  est son impulsion initiale et  $p_2$ , son impulsion finale.
- $q = p_2 - p_1$  est l'impulsion du photon.

- On notera:  $p = p_1 + p_2$ , en remarquant que:  

$$p \cdot q = m_i^2 - m_i^2 = 0.$$
- $m$  est la masse du fermion interne,  $l$ .
- $M_V$  est la masse du boson vecteur,  $V$ .
- $M_\Phi$  est la masse du boson scalaire,  $\Phi$ .
- $e_l$  est la charge du fermion  $l$ .
- $e_V$  est la charge du boson  $V$ .
- $e_\Phi$  est la charge du scalaire  $\Phi$ .

Les conventions concernant les vertex et propagateurs sont déjà fixées au chapitre IV (tableaux 4.1 et 4.2). Il faut remarquer que le scalaire  $\Phi$  peut représenter à la fois un Higgs physique et un Higgs non physique. En effet, on prendra pour lui le propagateur non physique  $\frac{i}{k^2 - \xi m_\Phi^2}$  et pour considérer le Higgs physique il suffira de remplacer  $\xi$  par 1.

Le fermion externe  $i$  et le fermion interne  $l$  représentent n'importe quel fermion de spin  $\frac{1}{2}$  (soit un lepton, un quark ou une particule fermionique supersymétrique). Et le boson  $V$  représente n'importe quel boson de jauge. On voit ainsi la généralité de mon calcul.

## 5.2 PREMIER DIAGRAMME

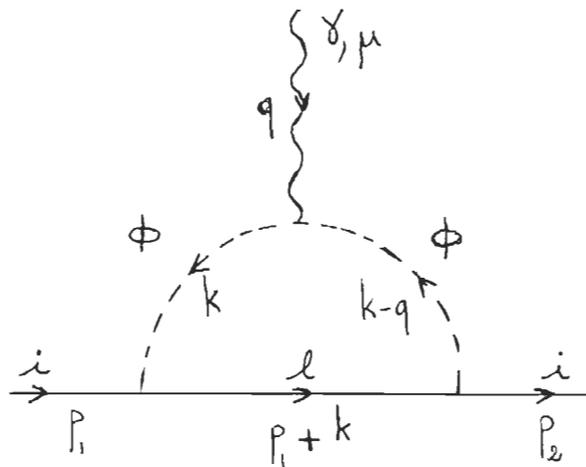


Figure 5.1 Premier diagramme de Feynman contribuant au m.d.e

La partie lorentzienne de l'amplitude de ce diagramme est:

$$\Gamma_1^\mu = -e_\Phi (a\gamma_L + b\gamma_R) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k - q)^\mu (\not{k} + \not{p}_1 + m)}{D_1} (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) \quad (5.4)$$

Avec

$$D_1 = \left[ (k - q)^2 - \xi M_\Phi^2 \right] \left[ k^2 - \xi M_\Phi^2 \right] \left[ (k + p_1)^2 - m^2 \right] \quad (5.5)$$

On applique sur  $\Gamma_1^\mu$  la projection sur le terme du m.d.e:

$$D_{E_1} = -e_\Phi \left[ \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2k - q)^\mu q^\nu}{D_1} T_{\mu\nu}^1 \quad (5.6)$$

$$T_{\mu\nu}^1 = Tr \left[ \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) (a\gamma_L + b\gamma_R) (\not{k} + \not{p}_1 + m) (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) (\not{p}_1 + m_i) \right] \quad (5.7)$$

Or nous avons:

$$(a\gamma_L + b\gamma_R) (\not{k} + \not{p}_1 + m) (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) = (c_1 + c_2 \gamma_5) (\not{k} + \not{p}_1) + m(r - is\gamma_5)$$

Avec,

$$\begin{cases} c_1 = \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \\ c_2 = \frac{|b|^2 - |a|^2}{2} \\ r = Re(ab^*) \\ s = Im(ab^*) \end{cases} \quad (5.8)$$

Le calcul de la trace 5.7 donne:

$$T_{\mu\nu}^1 = 4 \left\{ ic_2 m_i \left[ p_\mu (k + p_1)_\nu - p_\nu (k + p_1)_\mu \right] - ms \left[ p_{1\mu} p_{2\nu} - p_{1\nu} p_{2\mu} \right] \right\}$$

Il faut préciser que j'ai éliminé dès maintenant les termes antisymétriques en  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ , car on a seulement deux impulsions indépendantes et ce n'est pas assez pour avoir une contraction non nulle; ie, le terme qui contractera  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  sera toujours symétrique par rapport à, au moins, deux indices; alors cette contraction sera toujours nulle. Maintenant on contracte  $T_{\mu\nu}^1$  avec  $(2k - q)^\mu q^\nu$  (de l'équation 5.6) et on appelle  $N_1$  le résultat:

$$(2k - q)^\mu q^\nu T_{\mu\nu}^1 = 2k^\mu q^\nu T_{\mu\nu}^1 - q^\mu q^\nu T_{\mu\nu}^1$$

$$N_1 = (2k - q)^\mu q^\nu T_{\mu\nu}^1 = 8 \left\{ ic_2 m_i (p \cdot k) \left[ (k + p_1) \cdot q \right] - m_s \left[ (p_1 \cdot k)(p_2 \cdot q) - (p_1 \cdot q)(p_2 \cdot k) \right] \right\} - 0 \quad (5.9)$$

D'autre part, on effectue la paramétrisation de Feynman de  $\frac{1}{D_1}$  (équation 4.24):

$$\frac{1}{D_1} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx (D'_1)^{-3}$$

$$D'_1 = \left[ (k - q)^2 - \xi M_\Phi^2 \right] xy + \left[ k^2 - \xi M_\Phi^2 \right] (1 - x)y + \left[ (k + p_1)^2 - m^2 \right] (1 - y)$$

$$D'_1 = k^2 + 2p_3 \cdot k + p_4^2$$

où,

$$\begin{cases} p_3 = (1 - y)p_1 - xyq \\ p_4^2 = xyq^2 - y\xi M_\Phi^2 + (1 - y)(m_i^2 - m^2) \end{cases}$$

Maintenant, on effectue sur  $k$  une translation de  $p_3$ :

$$k \longrightarrow k' = k + p_3$$

Alors:

$$\begin{cases} D'_1 = k'^2 - \omega_1^2 \\ \omega_1^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + (\xi M_\Phi^2 - m_i^2 - m^2)y + m^2 \end{cases}$$

On peut résumer le résultat comme suit:

$$\frac{1}{D_1} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{[k'^2 - \omega_1^2]^3} \quad (5.10)$$

avec:

$$\begin{cases} k' = k + p_3 \\ p_3 = (1 - y)p_1 - xyq \\ \omega_1^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + (\xi M_\Phi^2 - m_i^2 - m^2)y + m^2 \end{cases} \quad (5.11)$$

On insère 5.9 et 5.10 dans 5.6:

$$D_{E_1} = \left[ \frac{ie_\Phi}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{N_1}{[k'^2 - \omega_1^2]^3} \quad (5.12)$$

On exprime, maintenant,  $N_1$  en fonction de  $k'$  ( $k = k' - p_3$ ) et on ne garde que les termes pairs en  $k'$ , puisque ceux qui sont impairs auront une contribution nulle (on intègre entre  $-\infty$  et  $+\infty$  et le dénominateur,  $[k'^2 - \omega_1^2]^3$ , est pair). Donc le numérateur, ie  $N_1$ , doit aussi être pair). On trouve, tout calcul fait:

$$N_1^{eff} = 8 \left\{ ic_2 m_i (p \cdot k') (q \cdot k') - \frac{q^2}{4} (4m_i^2 - q^2) (1 - y) [ic_2 m_i y (2x - 1) - ms] \right\}$$

Alors 5.12 devient:

$$D_{E_1} = \left[ \frac{8ie_\Phi}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ ic_2 m_i p^\alpha q^\beta \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'_\alpha k'_\beta}{[k'^2 - \omega_1^2]^3} \right. \\ \left. - \frac{q^2}{4} (4m_i^2 - q^2) (1 - y) [ic_2 m_i y (2x - 1) - ms] \right. \\ \left. \times \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \omega_1^2]^3} \right\} \quad (5.13)$$

Notons:

$$I_{\alpha\beta_1} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'_\alpha k'_\beta}{[k'^2 - \omega_1^2]^3}$$

$$I'_1 = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \omega_1^2]^3}$$

Le calcul de  $I'_1$  est direct (Cf eq. 4.34):

$$I'_1 = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega_1^2}$$

Je vais calculer l'intégrale  $I_{\alpha\beta_1}$  en utilisant la régularisation dimensionnelle. D'après 4.37, on a directement:

$$I_{\alpha\beta_1} = \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{32\pi^2 [\omega_1^2]^{\frac{\varepsilon}{2}}} g_{\alpha\beta} \right\}$$

Mais si on contracte cette intégrale divergente avec  $p^\alpha q^\beta$ , on trouve:

$$I_{\alpha\beta_1} p^\alpha q^\beta = \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{32\pi^2 [\omega_1^2]^{\frac{\varepsilon}{2}}} \right\} p \cdot q$$

Or  $p \cdot q$  est identiquement nul, alors la divergence disparaît.

$$I_{\alpha\beta_1} p^\alpha q^\beta = 0$$

Ainsi 5.13 devient:

$$D_{E_1} = \left[ \frac{8ie_\Phi}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left[ -\frac{q^2}{4}(4m_i^2 - q^2)(1 - y) \right. \\ \left. \times [ic_2 m_i y(2x - 1) - ms] \right] \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega_1^2} \right]$$

On trouve, après simplification:

$$D_{E_1} = \frac{-e_\Phi}{16\pi^2} \int_0^1 \int_0^1 dy dx \frac{y(1-y)}{\omega_1^2} [ic_2 m_i y(2x - 1) - ms] \quad (5.14)$$

Cette dernière équation donne l'expression du facteur de forme du m.d.e partiel correspondant au premier diagramme de Feynman. Pour avoir le m.d.e, il suffit de prendre la limite  $q^2 \rightarrow 0$ :

$$d_1 = \lim_{q^2 \rightarrow 0} D_{E_1}$$

À cette limite  $\omega_1^2$  ne dépend plus de  $x$  (Cf. éq. 5.11); alors l'intégrale, dans 5.14, sur  $x$  de  $(2x - 1)$  donnera zéro, et il va rester:

$$d_1 = \frac{-e_\Phi ms}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{y(1-y)dy}{\omega_1^2}$$

$$d_1 = \frac{-e_\Phi m \text{Im}(ab^*)}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{y(1-y)dy}{m_i^2 y^2 + (\xi M_\Phi^2 - m^2 - m_i^2)y + m^2}$$

Si je note:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m_i^2}{M_V^2} \\ \alpha' = \frac{m_i^2}{M_\Phi^2} \\ \beta = \frac{m^2}{M_V^2} \\ \beta' = \frac{m^2}{M_\Phi^2} \\ \delta = \frac{M_\Phi^2}{M_V^2} \end{cases} \quad (5.15)$$

j'obtiens:

$$d_1 = \frac{e_\Phi m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(ab^*)}{M_\Phi^2} J_1 \quad (5.16)$$

où

$$J_1 = \int_0^1 dy \frac{y(1-y)}{A} \quad (5.17)$$

et

$$A = \alpha'y^2 + (\xi - \beta' - \alpha')y + \beta' \quad (5.18)$$

### 5.3 DEUXIÈME DIAGRAMME

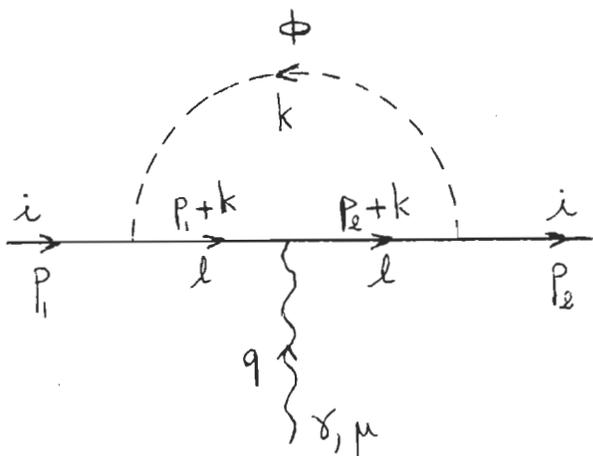


Figure 5.2 Deuxième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e

La partie lorentzienne de l'amplitude de ce diagramme est:

$$\Gamma_2^\mu = -e_l(a\gamma_L + b\gamma_R) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + \not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}_1 + m)}{D_2} \times (a^*\gamma_R + b^*\gamma_L) \quad (5.19)$$

avec

$$D_2 = \left[ (k + p_2)^2 - m^2 \right] \left[ k^2 - \xi M_\Phi^2 \right] \left[ (k + p_1)^2 - m^2 \right] \quad (5.20)$$

La projection sur le m.d.e est:

$$D_{E_2} = -e_l \left[ \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{q^\nu}{D_2} T_\nu^2 \quad (5.21)$$

$$T_\nu^2 = Tr \left[ \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) (a\gamma_L + b\gamma_R) (\not{k} + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu \right. \\ \left. (\not{k} + \not{p}_1 + m) (a^*\gamma_R + b^*\gamma_L) (\not{p}_1 + m_i) \right] \quad (5.22)$$

$$T_\nu^2 = Tr \left\{ \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) \left[ (c_1 + c_2 \gamma_5) \left[ (\not{k} + \not{p}_2) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}_1) + m^2 \gamma^\mu \right] \right. \right. \\ \left. \left. + m(r - is\gamma_5) \left[ \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}_1) + (\not{k} + \not{p}_2) \gamma^\mu \right] \right] (\not{p}_1 + m_i) \right\}$$

où  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $r$  et  $s$  sont définis dans 5.8. Le calcul de cette trace donne, après élimination, ici aussi, des termes de contribution nulle:

$$T_\nu^2 = T_\nu^{21} + m^2 T_\nu^{22} + m(T_\nu^{23} + T_\nu^{24})$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\nu}^{21} = 4ic_2m_i \left\{ p_{\nu} \left[ (k+p_2) \cdot (k+p_1) \right] + (k+p_2)_{\nu} \left[ (k+p_1) \cdot (2p_1-q) \right] \right. \\ \qquad \left. + (k+p_1)_{\nu} \left[ (k+p_2) \cdot (2p_2+q) \right] \right\} \\ T_{\nu}^{22} = -12ic_2m_i p_{\nu} \\ T_{\nu}^{23} = 4s \left\{ -3p_{2\nu} \left[ p_1 \cdot (k+p_1) \right] - p_{1\nu} \left[ p_2 \cdot (k+p_1) \right] \right. \\ \qquad \left. + (k+p_1)_{\nu} p_1 \cdot p_2 - 3m_i^2 (k+p_1)_{\nu} \right\} \\ T_{\nu}^{24} = 4s \left\{ 3p_{1\nu} \left[ p_2 \cdot (k+p_2) \right] + p_{2\nu} \left[ p_1 \cdot (k+p_2) \right] \right. \\ \qquad \left. - (k+p_2)_{\nu} p_1 \cdot p_2 + 3m_i^2 (k+p_2)_{\nu} \right\} \end{array} \right.$$

Dans 5.21, il faut contracter  $T_{\nu}^2$  avec  $q^{\nu}$ ; j'appellerai ce terme  $N_2$ . On a, après calcul:

$$\left\{ \begin{array}{l} q^{\nu} T_{\nu}^{21} = 4ic_2m_i (k \cdot q) \left[ 2(k \cdot p) + 4m_i^2 - q^2 \right] \\ q^{\nu} T_{\nu}^{22} = 0 \\ q^{\nu} (T_{\nu}^{23} + T_{\nu}^{24}) = -4sq^2 (p \cdot k) \end{array} \right.$$

Donc:

$$N_2 = q^{\nu} T_{\nu}^2 = 8ic_2m_i (q \cdot k) (p \cdot k) + \left[ 4ic_2m_i (4m_i^2 - q^2) \right] (q \cdot k) - 4msq^2 (p \cdot k) \quad (5.23)$$

Maintenant, on passe au calcul de  $\frac{1}{D_2}$ :

$$\frac{1}{D_2} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx (D_2')^{-3}$$

$$D_2' = \left[ (k+p_2)^2 - m^2 \right] xy + \left[ k^2 - \xi M_{\Phi}^2 \right] (1-y) + \left[ (k+p_1)^2 - m^2 \right] (1-x)y$$

$$D_2' = k^2 + 2p_5 \cdot k + p_6^2$$

où,

$$\begin{cases} p_5 = yp_1 + xyq \\ p_6^2 = (m_i^2 - m^2 + \xi M_\Phi^2)y - \xi M_\Phi^2 \end{cases}$$

J'effectue la translation  $k \rightarrow k' = k + p_5$ , j'obtiens:

$$\begin{cases} D'_2 = k'^2 - \omega_2^2 \\ \omega_2^2 = (q^2x^2 - q^2x + m_i^2)y^2 + (m^2 - m_i^2 - \xi M_\Phi^2)y + \xi M_\Phi^2 \end{cases}$$

Récapitulons:

$$\frac{1}{D_2} = 2 \int_0^1 \int_0^1 ydydx \frac{1}{[k'^2 - \omega_2^2]^3} \quad (5.24)$$

avec:

$$\begin{cases} k' = k + p_5 \\ p_5 = yp_1 + xyq \\ \omega_2^2 = (q^2x^2 - q^2x + m_i^2)y^2 + (m^2 - m_i^2 - \xi M_\Phi^2)y + \xi M_\Phi^2 \end{cases} \quad (5.25)$$

Il faut remarquer ici aussi que  $\omega_2^2$  ne dépendra plus de  $x$  lorsqu'on fera tendre  $q^2$  vers zéro.

On insère 5.23 et 5.24 dans 5.21:

$$D_{E_2} = \left[ \frac{ie_l}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 ydydx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_2}{[k'^2 - \omega_1^2]^3} \quad (5.26)$$

On exprime, maintenant,  $N_2$  en fonction de  $k'$  ( $k = k' - p_5$ ) en supprimant les termes impairs en  $k'$ :

$$N_2^{eff} = 8ic_2m_i(p.k')(q.k') + 4q^2(4m_i^2 - q^2) \left\{ ic_2m_i \left(x - \frac{1}{2}\right)(y^2 - y) + \frac{ms}{2}y \right\}$$

Alors 5.26 devient, si j'appelle  $\Lambda_2$  le terme qui ne dépend pas de  $k'$ ,

$$D_{E_2} = \left[ \frac{ie_l}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 ydydx \left\{ 8ic_2m_i q^\alpha p^\beta I_{\alpha\beta_2} + \Lambda_2 I'_2 \right\}$$

avec

$$I_{\alpha\beta_2} = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'_\alpha k'_\beta}{[k'^2 - \omega_2^2]^3}$$

et

$$I'_2 = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \omega_2^2]^3}$$

Ces deux intégrales sont les mêmes que  $I_{\alpha\beta_1}$  et  $I'_1$  (paragraphe 5.2) en remplaçant  $\omega_1^2$  par  $\omega_2^2$ . Donc, d'après les résultats du paragraphe 5.2 je peux déduire:

$$I'_2 = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega_2^2}$$

et

$$I_{\alpha\beta_1} p^\alpha q^\beta = 0$$

La divergence, ici encore, disparaît. Il reste:

$$\begin{aligned} D_{E_2} &= \left[ \frac{ie_l}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx 4q^2(4m_i^2 - q^2) \\ &\quad \times \left\{ ic_2 m_i \left(x - \frac{1}{2}\right) (y^2 - y) + \frac{ms}{2} y \right\} \left\{ \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega_2^2} \right\} \\ D_{E_2} &= \left[ \frac{e_l}{8\pi^2} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ ic_2 m_i \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{(y^2 - y)}{\omega_2^2} + \frac{ms}{2} \frac{y}{\omega_2^2} \right\} \quad (5.27) \end{aligned}$$

L'équation 5.27 donne le facteur de forme du m.d.e partiel correspondant au deuxième diagramme de Feynman. Le m.d.e est sa limite quand  $q^2$  tend vers zéro:

$$d_2 = \lim_{q^2 \rightarrow 0} D_{E_2}$$

Dans cette limite  $\omega_2^2$  ne dépend plus de  $x$ ; alors l'intégrale, dans 5.27, sur  $x$  de  $(x - \frac{1}{2})$  donnera zéro et il va rester:

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{e_l m s}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{dy y^2}{\omega_2^2} \\ d_2 &= \frac{e_l m \text{Im}(ab^*)}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{m_i^2 y^2 + (m^2 - m_i^2 - \xi M_\Phi^2) y + \xi M_\Phi^2} \end{aligned}$$

Je ne change rien à l'intégrale si je fais la transformation:  $y \rightarrow 1 - y$ . J'obtiens

$$d_2 = \frac{e_1 m \operatorname{Im}(ab^*)}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{m_i^2 y^2 + (\xi M_\Phi^2 - m^2 - m_i^2)y + m^2}$$

Enfin, j'utilise la paramétrisation 5.15 et j'obtiens:

$$d_2 = \frac{e_1 m}{16\pi^2} \frac{\operatorname{Im}(ab^*)}{M_\Phi^2} J_2 \quad (5.28)$$

avec

$$J_2 = \int_0^1 dy \frac{(1-y)^2}{A} \quad (5.29)$$

et  $A$  est défini dans 5.18.

## 5.4 TROISIÈME ET QUATRIÈME DIAGRAMMES

### 5.4.1 Troisième diagramme

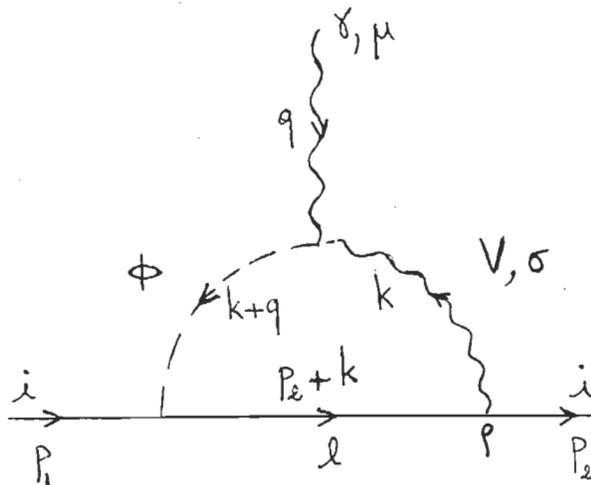


Figure 5.3 Troisième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e

La partie lorentzienne de l'amplitude de ce diagramme est:

$$\Gamma_3^\mu = \frac{e_V g^{\mu\sigma}}{M_V} (c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma^\rho \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (\not{k} + \not{p}_2 + m) \times \left\{ \frac{M_V^2 g_{\rho\sigma} - k_\rho k_\sigma}{D_{31}} + \frac{k_\rho k_\sigma}{D_{32}} \right\} (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) \quad (5.30)$$

avec

$$\begin{cases} D_{31} = [(k + p_2)^2 - m^2] [k^2 - M_V^2] [(k + q)^2 - \xi M_\Phi^2] \\ D_{32} = [(k + p_2)^2 - m^2] [k^2 - \xi M_V^2] [(k + q)^2 - \xi M_\Phi^2] \end{cases} \quad (5.31)$$

On projette sur le m.d.e:

$$D_{E_3} = \frac{e_V}{M_V} \left[ \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{N_{31}}{D_{31}} + \frac{N_{32}}{D_{32}} \right] \quad (5.32)$$

où:

$$\begin{cases} N_{31} = Q_3 - N_{32} \\ N_{32} = k_\rho k_\sigma q^\nu T_{\mu\nu}^{3\rho} g^{\mu\sigma} \\ Q_3 = M_V^2 g_{\rho\sigma} q^\nu T_{\mu\nu}^{3\rho} g^{\mu\sigma} \\ T_{\mu\nu}^{3\rho} = Tr \left[ \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) (c\gamma_L + d\gamma_R) \gamma^\rho (\not{k} + \not{p}_2 + m) \right. \\ \left. \times (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) (\not{p}_1 + m_i) \right] \end{cases} \quad (5.33)$$

Pour calculer  $T_{\mu\nu}^{3\rho}$ , je note:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{da^* - cb^*}{2} \\ \beta_1 = \frac{da^* + cb^*}{2} \\ \alpha_2 = \frac{db^* - ca^*}{2} \\ \beta_2 = \frac{db^* + ca^*}{2} \\ k_2 = p_2 + k \end{cases} \quad (5.34)$$

Le calcul de la trace est assez long, j'obtiens, après de longs calculs, sa contraction avec  $q^\nu g^{\mu\sigma}$  qui vaut (bien sûr je n'ai gardé que les termes à contribution non nulle):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{3\rho} q^\nu g^{\mu\sigma} = & 4i\alpha_1 \left\{ p_2^\sigma \left[ q^\rho (p_1 \cdot k_2) - p_1^\rho (q \cdot k_2) + k_2^\rho (p_1 \cdot q) \right] \right. \\ & - (p_2 \cdot q) \left[ \delta^{\sigma\rho} (p_1 \cdot k_2) - k_2^\sigma p_1^\rho + k_2^\rho p_1^\sigma \right] \\ & \left. + m_i^2 \left[ k_2^\sigma q^\rho - (k_2 \cdot q) \delta^{\rho\sigma} \right] \right\} + 4i\alpha_2 m m_i p^\sigma q^\rho \end{aligned}$$

Je calcule maintenant  $Q_3$ , qui est la contraction de  $T_{\mu\nu}^{3\rho} q^\nu g^{\mu\sigma}$  avec  $M_V^2 g_{\rho\sigma}$  et  $N_{32}$  qui est sa contraction avec  $k_\rho k_\sigma$ . J'obtiens:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_3 = -4i\alpha_1 M_V^2 \left[ q^2 (4m_i^2 - q^2) + 4m_i^2 (q \cdot k) + 2q^2 (p_1 \cdot k) \right] \\ N_{32} = 4i\alpha_1 \left\{ \frac{-q^2}{2} \left[ 2(p_2 \cdot k)^2 + k^2 (p \cdot k) + \frac{k^2}{2} (4m_i^2 - q^2) \right] \right. \\ \quad \left. + 2m_i^2 (p_2 \cdot k) (q \cdot k) \right\} + 4i\alpha_2 m m_i (p \cdot k) (q \cdot k) \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Pour le calcul de  $D_{31}$  et  $D_{32}$ , j'utilise toujours la même méthode de paramétrisation; je trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{D_{31}} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{[k'^2 - \omega_{31}^2]^3} \\ \frac{1}{D_{32}} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{[k'^2 - \omega_{32}^2]^3} \end{array} \right. \quad (5.36)$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} k' = k + p_7 \\ p_7 = (1 - y)p_2 + xyq \\ \omega_{31}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2) y^2 \\ \quad + \left[ (\xi M_\Phi^2 - M_V^2) x + M_V^2 - m^2 - m_i^2 \right] y + m^2 \\ \omega_{32}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2) y^2 \\ \quad + \left[ \xi (M_\Phi^2 - M_V^2) x + \xi M_V^2 - m^2 - m_i^2 \right] y + m^2 \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Il ne reste plus, maintenant, qu'à faire le "shift" dans  $Q_3$  et  $N_{32}$  (équation 5.35) et, bien sûr, ne garder que les termes pairs en  $k'$  et les puissances de  $q$  inférieures à 4 (les autres termes ont une contribution nulle). On trouve, tout calcul fait,

$$Q_3^{eff} = -4i\alpha_1 M_V^2 q^2 (4m_i^2 - q^2)(1-x)y \quad (5.38)$$

$$N_{32}^{eff} = C_{32}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{32} \quad (5.39)$$

avec

$$\begin{cases} C_{32} = C_{32}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = -2i\alpha_1 q^2 (4m_i^2 - q^2)(3y - 1) \\ B_{32} = 4i\alpha_1 q^2 m_i^4 y(1-y)(2x - 1 + y) \\ \quad + 4i\alpha_2 q^2 m m_i^3 (1-y)(2xy + 1 - y) \end{cases} \quad (5.40)$$

On revient, maintenant, à 5.32; et on remplace  $D_{31}$  et  $D_{32}$  par leurs expressions:

$$\begin{aligned} D_{E_3} = \frac{eV}{M_V} \left[ \frac{-i}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ Q_3^{eff} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \omega_{31}^2]^3} \right. \\ \left. + \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} [C_{32}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{32}] \left[ \frac{1}{[k'^2 - \omega_{32}^2]^3} - \frac{1}{[k'^2 - \omega_{31}^2]^3} \right] \right\} \end{aligned}$$

On applique les résultats 4.34 et 4.37 pour l'intégration sur  $k'$  et on trouve:

$$\begin{aligned} D_{E_3} = \frac{eV}{M_V} \left[ \frac{-i}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ Q_3^{eff} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right. \\ \left. + C_{32}^{\alpha\beta} \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{32\pi^2} \right\} \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{32}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{31}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] \right. \\ \left. + B_{32} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \left[ \frac{1}{\omega_{32}^2} - \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right\} \quad (5.41) \end{aligned}$$

On va calculer, tout de suite, le terme en  $\varepsilon$  en utilisant les relations 4.38 et 4.39.

Nous avons:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{32}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{31}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots \right) \\ \times \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{32}^2}{4\pi} \right] - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{4\pi} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{32}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{31}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots\right) \left[\frac{\varepsilon}{2}\right] \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] + \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{32}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{31}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = (1 - \gamma \frac{\varepsilon}{2} + \dots) \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] + \dots$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{32}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{31}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] \quad (5.42)$$

Donc, 5.41 devient:

$$D_{E_3} = \frac{e_V}{M_V} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \left[ \frac{-i}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ Q_3^{eff} \left[ \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right. \\ \left. - C_{32} \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] + B_{32} \left[ \frac{1}{\omega_{32}^2} - \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right\}$$

Maintenant, je remplace  $Q_3^{eff}$ ,  $N_{32}$  et  $B_{32}$  par leurs expressions, données dans 5.38 et 5.40. Le résultat est, après réduction,

$$D_{E_3} = \frac{-e_V}{32\pi^2 M_V} \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ -4i\alpha_1 M_V^2 (1-x)y \left[ \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right. \\ \left. + i\alpha_1 (3y-1) \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] + \frac{4im_i^2(1-y)}{4m_i^2 - q^2} \left[ \alpha_1 m_i^2 y (2x-1+y) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_2 m m_i (2xy+1-y) \right] \left[ \frac{1}{\omega_{32}^2} - \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right\} \quad (5.43)$$

L'équation 5.43 nous donne le facteur de forme du m.d.e extrait du troisième diagramme de Feynman. Le m.d.e correspondant est donné par:

$$d_3 = \lim_{q^2 \rightarrow 0} D_{E_3}$$

Si on regarde les équations 5.37  $\omega_{31}^2$  et  $\omega_{32}^2$  dépendent toujours de  $x$  à cette

limite. On a donc:

$$d_3 = \frac{-ie_V}{32\pi^2 M_V} \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ -4\alpha_1 M_V^2 \frac{(1-x)y}{\omega_{31}^2} + \alpha_1 (3y-1) \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] \right. \\ \left. + \left[ \alpha_1 m_i^2 y (2x-1+y) + \alpha_2 m m_i (2xy+1-y) \right] \right. \\ \left. \times (1-y) \left[ \frac{1}{\omega_{32}^2} - \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right\} \quad (5.44)$$

$\omega_{31}^2$  et  $\omega_{32}^2$  sont donnés dans 5.37 en remplaçant  $q^2$  par zéro.

#### 5.4.2 Quatrième diagramme

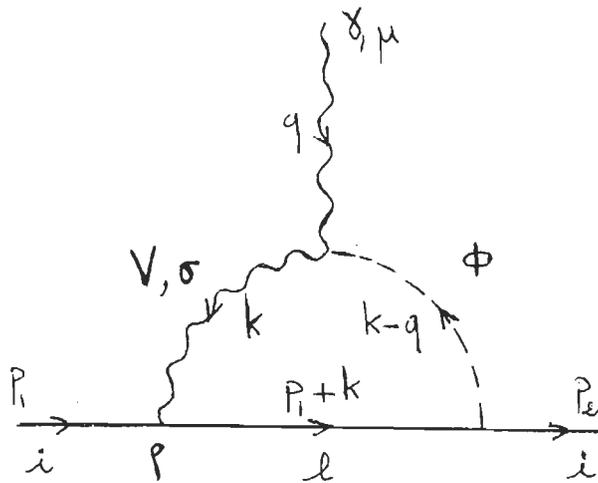


Figure 5.4 Quatrième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e

Pour calculer  $d_4$ , on utilise la même méthode que celle utilisée pour calculer  $d_3$ . Après un long calcul, on trouve:

$$d_4 = \frac{-ie_V}{32\pi^2 M_V} \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ 2\alpha_1^* M_V^2 \frac{(1-2x)y}{\omega_{31}^2} - \alpha_1^* (3y-2) \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] \right. \\ \left. - \left[ \alpha_1^* m_i^2 y (2x-1+y) + \alpha_2^* m m_i (2xy+1-y) \right] \right. \\ \left. \times (1-y) \left[ \frac{1}{\omega_{32}^2} - \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right\} \quad (5.45)$$

### 5.4.3 Somme des deux diagrammes

On fait ici la somme de 5.44 et 5.45; on trouve:

$$d_3 + d_4 = \frac{-ie_V}{32\pi^2 M_V} \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ 2(\alpha_1 - \alpha_1^*) M_V^2 \frac{2(x-1)y}{\omega_{31}^2} - 2M_V^2 \alpha_1^* \frac{y}{\omega_{31}^2} \right. \\ \left. + (\alpha_1 - \alpha_1^*) (3y-2) \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] + \alpha_1 \ln \left[ \frac{\omega_{31}^2}{\omega_{32}^2} \right] \right. \\ \left. + \left[ (\alpha_1 - \alpha_1^*) m_i^2 y (2x-1+y) \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha_2 - \alpha_2^*) m m_i (2xy+1-y) \right] \right. \\ \left. \times (1-y) \left[ \frac{1}{\omega_{32}^2} - \frac{1}{\omega_{31}^2} \right] \right\}$$

Ensuite, on utilise la paramétrisation 5.15 ainsi que:

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} - \alpha_{1,2}^* = 2i \operatorname{Im}(\alpha_{1,2}) \\ \alpha_1 = \operatorname{Re}(\alpha_1) + i \operatorname{Im}(\alpha_1) \\ \alpha_1^* = \operatorname{Re}(\alpha_1) - i \operatorname{Im}(\alpha_1) \end{cases}$$

et on trouve à la fin:

$$d_3 + d_4 = \frac{e_V}{16\pi^2} \left\{ \frac{\operatorname{Im}(\alpha_1)}{M_V} \left[ 2J_3 + J_4 + \alpha J_5 + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \right] + \right. \\ \left. \operatorname{Im}(\alpha_2) \frac{m m_i}{M_V^3} J_6 - \frac{i}{2M_V} \operatorname{Re}(\alpha_1) [J_7 + J_8] \right\} \quad (5.46)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_3 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{2(x-1)y^2}{B} \\ J_4 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y(3y-2) \ln \left\{ \frac{B}{C} \right\} \\ J_5 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y^2(1-y)(2x-1+y) \left\{ \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right\} \\ J_6 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y(1-y)(2xy+1-y) \left\{ \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right\} \\ J_7 = -2 \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{y^2}{B} \\ J_8 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y \ln \left\{ \frac{B}{C} \right\} \end{array} \right. \quad (5.47)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \alpha y^2 + \{(\xi\delta - 1)x + 1 - \beta - \alpha\}y + \beta \\ C = \alpha y^2 + \{\xi(\delta - 1)x + \xi - \beta - \alpha\}y + \beta \end{array} \right. \quad (5.48)$$

### 5.5 CINQUIÈME DIAGRAMME

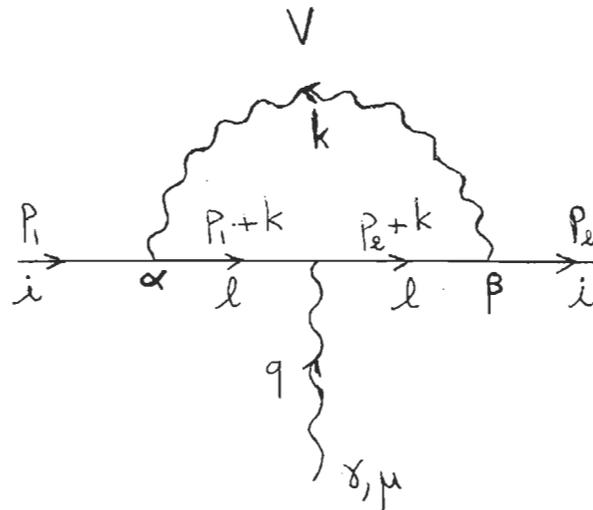


Figure 5.5 Cinquième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e

La partie lorentzienne de l'amplitude de ce diagramme est:

$$\Gamma_5^\mu = \frac{e_l}{M_V^2} (c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma^\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \left\{ \frac{(M_V^2 g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta)(\not{k} + \not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}_1 + m)}{D_{51}} + \frac{k_\alpha k_\beta(\not{k} + \not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}_1 + m)}{D_{52}} \right\} (c^*\gamma_L + d^*\gamma_R)\gamma^\alpha \quad (5.49)$$

avec

$$\begin{cases} D_{51} = [(k + p_2)^2 - m^2] [k^2 - M_V^2] [(k + p_1)^2 - m^2] \\ D_{52} = [(k + p_2)^2 - m^2] [k^2 - \xi M_V^2] [(k + p_1)^2 - m^2] \end{cases} \quad (5.50)$$

On projette sur le m.d.e:

$$D_{E_5} = \frac{e_l}{M_V^2} \left[ \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{N_{51}}{D_{51}} + \frac{N_{52}}{D_{52}} \right] \quad (5.51)$$

où:

$$\begin{cases} N_{51} = Q_5 - N_{52} \\ N_{52} = k_\alpha k_\beta q^\nu T_\nu^{5\alpha\beta} \\ Q_5 = M_V^2 g_{\alpha\beta} q^\nu T_\nu^{5\alpha\beta} \\ T_\nu^{5\alpha\beta} = Tr \left[ \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) (c\gamma_L + d\gamma_R) \gamma^\beta (\not{k} + \not{p}_2 + m) \right. \\ \left. \times \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}_1 + m) (c^*\gamma_L + d^*\gamma_R) \gamma^\alpha (\not{p}_1 + m_i) \right] \end{cases} \quad (5.52)$$

Pour calculer  $T_\nu^{5\alpha\beta}$ , je note:

$$\begin{cases} c_3 = \frac{|c|^2 + |d|^2}{2} \\ c_4 = \frac{|d|^2 - |c|^2}{2} \\ r_1 = Re(cd^*) \\ s_1 = Im(cd^*) \end{cases} \quad (5.53)$$

Le calcul de cette trace est assez long, j'obtiens sa contraction avec  $q^\nu$  qui vaut:

$$T_\nu^{5\alpha\beta} q^\nu = 4m s_1 \left[ q^\beta E^\alpha + q^\alpha F^\beta + q^2 \left[ -G^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(H^{\alpha\beta} - I^{\alpha\beta}) \right] \right] \\ + 4im_i c_4 \left[ q^\beta A^\alpha + q^\alpha B^\beta + [q.(p_1 + k)] C^{\alpha\beta} + [q.(k + p_2)] D^{\alpha\beta} \right]$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^\alpha = 3(k + p_2)^\alpha [p_2.(k + p_1)] + m^2(2p_1 - q)^\alpha \\ \quad + (k + p_1)^\alpha [p_1.(p_2 + k)] - p_1^\alpha [(k + p_1).(k + p_2)] \\ B^\beta = A^\alpha(\alpha \rightarrow \beta ; p_1 \rightarrow p_2) \\ C^{\alpha\beta} = p_1^\alpha (k + p_2)^\beta + p_1^\beta (k + p_2)^\alpha - 3(k + p_2)^\alpha p_2^\beta - g^{\alpha\beta} [(k + p_2).p_1] \\ D^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta}(\alpha \rightarrow \beta ; p_1 \rightarrow p_2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E^\alpha = [p_2.(k + p_2)](3p_1^\alpha) - m_i^2(p_2 + k)^\alpha - p_1^\alpha [(k + p_1).p_2] \\ \quad + p_2^\alpha [(k + p_1).p_1] - (k + p_1)^\alpha (p_1.p_2) + 3m_i^2(k + p_1)^\alpha \\ F^\beta = -E^\alpha(\alpha \rightarrow \beta ; p_1 \rightarrow p_2) \\ G^{\alpha\beta} = 3p_1^\alpha p_2^\beta - m_i^2 g^{\alpha\beta} \\ H^{\alpha\beta} = -3p_1^\alpha (k + p_2)^\beta + p_1^\alpha (k + p_1)^\beta - g^{\alpha\beta} [p_1.(k + p_1)] + (k + p_1)^\alpha p_1^\beta \\ I^{\alpha\beta} = -H^{\alpha\beta}(\alpha \rightarrow \beta ; p_1 \rightarrow p_2) \end{array} \right.$$

Maintenant, il faut calculer  $N_{52}$  qui est la contraction de  $T_\nu^{5\alpha\beta} q^\nu$  avec  $k_\alpha k_\beta$ .

Après 3 pages de calculs je trouve:

$$N_{52} = -4m s_1 \left\{ 4m_i^2 (q.k)^2 + q^2 [k^2(p.k) + 4(p_1.k)(p_2.k)] \right\} + 4im_i c_4 R \quad (5.54)$$

et la contraction de  $T_\nu^{5\alpha\beta} q^\nu$  avec  $M_V^2 g_{\alpha\beta}$  donne:

$$Q_5 = 4m M_V^2 s_1 q^2 [-8m_i^2 + 2q^2 - 3(p.k)] - 4im_i c_4 R' \quad (5.55)$$

On verra plus tard ce que valent  $R$  et  $R'$ . Pour ce qui est du calcul de  $D_{51}$  et  $D_{52}$  on le déduit de celui de  $D_2$ . En effet, si on compare 5.50 à 5.20, on trouve que:

$$\begin{cases} D_{51} = D_2(\xi M_{\Phi}^2 \rightarrow M_V^2) \\ D_{52} = D_2(\xi M_{\Phi}^2 \rightarrow \xi M_V^2) \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} \frac{1}{D_{51}} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{[k'^2 - \omega_{51}^2]^3} \\ \frac{1}{D_{52}} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{[k'^2 - \omega_{52}^2]^3} \end{cases} \quad (5.56)$$

avec:

$$\begin{cases} k' = k + p_5 \\ p_5 = yp_1 + xyq \\ \omega_{51}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + (m^2 - m_i^2 - M_V^2)y + M_V^2 \\ \omega_{52}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + (m^2 - m_i^2 - \xi M_V^2)y + \xi M_V^2 \end{cases} \quad (5.57)$$

Il est à remarquer que  $\omega_{51}^2$  ainsi que  $\omega_{52}^2$  ne dépendront plus de  $x$  lorsqu'on fera tendre  $q^2$  vers zéro.

L'étape suivante consiste à exprimer  $N_{52}$  et  $Q_5$  en fonction de  $k' = k + p_5$  (faire le "shift"). On obtient:

$$Q_5^{eff} = 4mM_V^2 s_1 q^2 (4m_i^2 - q^2) \left( \frac{3}{2}y - 2 \right) + R'$$

où,

$$R' = -im_i c_4 \left[ q^2 y (4m_i^2 - q^2) (2x - 1)(y - 1) + 4p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta \right]$$

Mais on voit bien que ce dernier terme a une contribution nulle, car, quand on fait tendre  $q^2$  vers zéro, l'intégration sur  $x$  du premier terme donne zéro (il contient  $(2x - 1)$  comme seule fonction de  $x$ ). Et on a déjà vu que la contribution de  $p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta$  était nulle (à cause de  $p.q = 0$ ). Il reste donc:

$$Q_5^{eff} = 4mM_V^2 s_1 q^2 (4m_i^2 - q^2) \left( \frac{3}{2}y - 2 \right) \quad (5.58)$$

Le calcul de  $N_{52}$  donne, si je supprime directement les termes en puissances de  $q$  supérieures à 2 (qui vont donner 0, lorsque  $q^2 \rightarrow 0$ ),

$$N_{52}^{eff} = C_{52}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{52} + R \quad (5.59)$$

où

$$\begin{cases} C_{52} = C_{52}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} = -4m_{s1} q^2 (4m_i^2 - q^2)(2 - 3y) \\ B_{52} = 8m_{s1} q^2 m_i^4 y^2 (y - 2) \end{cases} \quad (5.60)$$

et

$$\begin{aligned} R = 4im_i c_4 \left\{ \left[ 2m^2 + 3m_i^2 - \frac{q^2}{2} + 2(p \cdot p_5) + p_5^2 \right] p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta \right. \\ - (6m_i^2 - 2q^2) \left[ 2p_5^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta + k'^2 (q \cdot p_5) \right] - 6(q \cdot p_5)(p_1 k')(p_2 k') \\ - 6 \left[ (p_2 \cdot p_5) p_1^\alpha + (p_1 \cdot p_5) p_2^\alpha \right] q^\beta k'_\alpha k'_\beta \\ + \left[ (p \cdot k')^2 - 6(q \cdot k')^2 + k'^2 (p \cdot p_5) + 2(p_5 \cdot k')(p \cdot k') \right] (q \cdot p_5) \\ + 2(p \cdot p_5) q^\alpha p_5^\beta k'_\alpha k'_\beta + k'^2 p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta \\ + (q \cdot p_5) \left[ (2m^2 + 3m_i^2 - \frac{q^2}{2} + p \cdot p_5)(p \cdot p_5) \right. \\ \left. - (6m_i^2 - 2q^2 + p \cdot p_5)(p_5^2) - 6(p_1 \cdot p_5)(p_2 \cdot p_5) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

$R$  aussi va avoir une contribution nulle. En effet, dans sa première ligne, on a le terme  $p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta$  qui a une contribution nulle. On l'a déjà vu. Dans sa deuxième ligne, on a le terme  $p_5^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta$  qui donnera après intégration sur  $k'$  un terme proportionnel à  $(q \cdot p_5)$ ; on a aussi le terme  $(q \cdot p_5)$  lui même. Or, le calcul de ce terme donne:  $(q \cdot p_5) = 2yq^2(2x - 1)$ , donc quand on fait tendre  $q^2$  vers zéro, ce terme aura la seule dépendance en  $x$ , de sorte que l'intégration sur  $x$  donne zéro. Dans sa troisième ligne, on a les termes  $(p_2 \cdot p_5)$  et  $(p_1 \cdot p_5)$  qui valent respectivement,  $y \left[ m_i^2 + (x - 1) \frac{q^2}{2} \right]$  et  $y \left[ m_i^2 - x \frac{q^2}{2} \right]$ . Donc, pour  $q^2 \rightarrow 0$  ces deux termes sont identiques et on peut les mettre en facteur, de façon à obtenir, à la troisième ligne de  $R$ :

$$-6ym_i^2 \left[ p_1^\alpha + p_2^\alpha \right] q^\beta k'_\alpha k'_\beta = -6ym_i^2 p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta$$

et on sait que ce terme a une contribution nulle.

Dans les lignes qui restent, on a, à part le terme  $k'^2 p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta$ , des termes en  $(q.p_5)$  qui, comme on l'a vu, donnent zéro. Pour le terme  $k'^2 p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta$ , on peut le noter  $p^\alpha q^\beta k'_\alpha k'_\beta k'_\gamma k'_\delta g^{\gamma\delta}$  et si on applique l'équation 4.44 il va donner, après intégration sur  $k'$ , un terme proportionnel à  $p.q$  (contraction de  $p^\alpha q^\beta$  avec  $g^{\gamma\delta} [g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}] = 6g_{\alpha\beta}$ ) qui est identiquement nul. On voit bien que tout le terme  $R$  a une contribution nulle. Il reste alors:

$$N_{52}^{eff} = C_{52}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{52} \quad (5.61)$$

où la contraction de  $C_{52}^{\alpha\beta}$  avec  $g^{\alpha\beta}$  et  $B_{52}$  sont données dans l'équation 5.60.

On revient maintenant à l'équation 5.51, en remplaçant  $N_{51}$  et  $N_{52}$  par leurs dernières expressions.

$$D_{E_5} = \frac{e_l}{M_V^2} \left[ \frac{-i}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ Q_5^{eff} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - \omega_{51}^2]^3} \right. \\ \left. + \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} [C_{52}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{52}] \left[ \frac{1}{[k'^2 - \omega_{52}^2]^3} - \frac{1}{[k'^2 - \omega_{51}^2]^3} \right] \right\}$$

Pour l'intégration sur  $k'$  on utilise les équations 4.34 et 4.37; cela donne:

$$D_{E_5} = \frac{e_l}{M_V^2} \left[ \frac{-i}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ Q_5^{eff} \left[ \frac{-i}{32\pi^2 \omega_{51}^2} \right] \right. \\ \left. + C_{52}^{\alpha\beta} \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{32\pi^2} \right\} \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{52}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{51}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] \right. \\ \left. + B_{52} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \left[ \frac{1}{\omega_{52}^2} - \frac{1}{\omega_{51}^2} \right] \right\} \quad (5.62)$$

Regardons les termes en  $\varepsilon$ ; d'après 4.38 et 4.39 on a:

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{52}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{51}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots \right) \\ \times \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{52}^2}{4\pi} \right] - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{4\pi} \right] + \dots \right\}$$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{52}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{51}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \dots\right) \left[\frac{\varepsilon}{2}\right] \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{\omega_{52}^2} \right] + \dots$$

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{52}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{51}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = (1 - \gamma \frac{\varepsilon}{2} + \dots) \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{\omega_{52}^2} \right] + \dots$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{52}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{51}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] = \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{\omega_{52}^2} \right] \quad (5.63)$$

Donc, 5.62 devient:

$$D_{E_5} = \frac{e_l}{M_V^2} \left[ \frac{-i}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ Q_5^{eff} \left[ \frac{1}{\omega_{51}^2} \right] \right. \\ \left. - C_{52} \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{\omega_{52}^2} \right] + B_{52} \left[ \frac{1}{\omega_{52}^2} - \frac{1}{\omega_{51}^2} \right] \right\}$$

Maintenant, je remplace  $Q_5^{eff}$ ,  $N_{52}$  et  $B_{52}$  par leurs expressions, données dans 5.58 et 5.60 et je réduis le résultat, pour trouver:

$$D_{E_5} = \frac{e_l}{M_V^2} \left[ \frac{-ms_1}{16\pi^2} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ M_V^2 \left[ \frac{3y-4}{\omega_{51}^2} \right] \right. \\ \left. + (2-3y) \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{\omega_{52}^2} \right] + \frac{4m_i^4}{(4m_i^2 - q^2)} y^2 (y-2) \left[ \frac{1}{\omega_{52}^2} - \frac{1}{\omega_{51}^2} \right] \right\} \quad (5.64)$$

Cette dernière équation constitue l'expression du facteur de forme du m.d.e extrait du cinquième diagramme de Feynman. Le m.d.e est donné par:

$$d_5 = \lim_{q^2 \rightarrow 0} D_{E_5}$$

A cette limite il n'y a plus de dépendance en  $x$ ; il reste:

$$d_5 = \frac{-e_l m s_1}{16\pi^2 M_V^2} \left\{ M_V^2 \int_0^1 y dy \left[ \frac{3y-4}{\omega_{51}^2} \right] + \int_0^1 y dy (2-3y) \ln \left[ \frac{\omega_{51}^2}{\omega_{52}^2} \right] \right. \\ \left. + m_i^2 \int_0^1 y dy y^2 (y-2) \left[ \frac{1}{\omega_{52}^2} - \frac{1}{\omega_{51}^2} \right] \right\}$$

$\omega_{51}^2$  et  $\omega_{52}^2$  sont donnés dans 5.57 en prenant  $q^2 = 0$ . J'utilise, enfin, la transformation  $y \rightarrow 1 - y$  et la paramétrisation 5.15, et je trouve:

$$d_5 = -\frac{e_1 m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} [J_9 + J_{10} + \alpha J_{11}] \quad (5.65)$$

avec

$$\begin{cases} J_9 = \int_0^1 dy \frac{(y-1)(3y+1)}{D} \\ J_{10} = \int_0^1 dy (1-y)(3y-1) \ln \left\{ \frac{D}{E} \right\} \\ J_{11} = \int_0^1 dy (1-y)^2 (y^2 - 1) \left\{ \frac{1}{E} - \frac{1}{D} \right\} \end{cases} \quad (5.66)$$

et

$$\begin{cases} D = \alpha y^2 + (1 - \beta - \alpha)y + \beta \\ E = \alpha y^2 + (\xi - \beta - \alpha)y + \beta \end{cases} \quad (5.67)$$

## 5.6 SIXIÈME DIAGRAMME

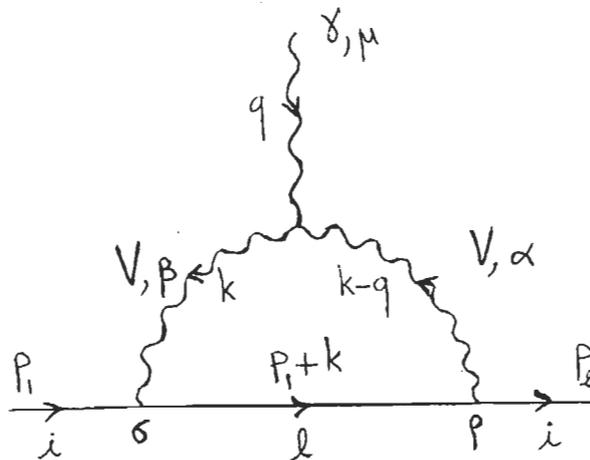


Figure 5.6 Sixième diagramme de Feynman contribuant au m.d.e

La partie lorentzienne de l'amplitude de ce diagramme est:

$$\begin{aligned}
\Gamma_6^\mu = & \frac{eV}{M_V^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma^\rho (\not{k} + \not{p}_1 + m)(c^*\gamma_L + d^*\gamma_R)\gamma^\sigma \\
& \times \left[ g^{\alpha\beta}(2k - q)^\mu + g^{\mu\alpha}(2q - k)^\beta - g^{\mu\beta}(k + q)^\alpha \right] \\
& \times \left\{ \frac{[M_V^2 g_{\rho\alpha} - (k - q)_\rho(k - q)_\alpha][M_V^2 g_{\beta\sigma} - k_\beta k_\sigma]}{D_{61}} \right. \\
& + \frac{[M_V^2 g_{\rho\alpha} - (k - q)_\rho(k - q)_\alpha][k_\beta k_\sigma]}{D_{62}} \\
& + \frac{[(k - q)_\rho(k - q)_\alpha][M_V^2 g_{\beta\sigma} - k_\beta k_\sigma]}{D_{63}} \\
& \left. + \frac{[(k - q)_\rho(k - q)_\alpha][k_\beta k_\sigma]}{D_{64}} \right\} \tag{5.68}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases}
D_{61} = [(k + p_1)^2 - m^2][k^2 - M_V^2][(k - q)^2 - M_V^2] \\
D_{62} = [(k + p_1)^2 - m^2][k^2 - \xi M_V^2][(k - q)^2 - M_V^2] \\
D_{63} = [(k + p_1)^2 - m^2][k^2 - M_V^2][(k - q)^2 - \xi M_V^2] \\
D_{64} = [(k + p_1)^2 - m^2][k^2 - \xi M_V^2][(k - q)^2 - \xi M_V^2]
\end{cases} \tag{5.69}$$

Quand je fais la projection sur le m.d.e, j'obtiens deux termes; l'un facteur de  $c_4$  et l'autre facteur de  $s_1$  ( $s_1$  et  $c_4$  sont définis dans 5.53). Comme le m.d.e intrinsèque brise la symétrie CP, il faut que cela paraisse dans son expression. On voit que les termes en  $Im(cd^*)$ ,  $Im(\alpha_1)$  et  $Im(\alpha_2)$  vérifient bien cette propriété, car ils contiennent une phase complexe ( $Im(x) = |x|\sin\phi$ ). Par contre les termes en  $c_4$  et  $Re(\alpha_1)$ , qui sont réels, n'ont pas cette propriété; donc ils ne contribuent pas au m.d.e. Pour voir cela, on peut se baser sur la littérature sur la brisure CP où les termes qui brisent CP sont toujours paramétrisés par la présence d'une phase ou d'un imaginaire pur.

On peut donc anticiper, au lieu de faire des calculs très longs, et dire que le terme en  $c_4$  du sixième diagramme avec celui qui est en  $Re(\alpha_1)$  de la somme

du troisième et du quatrième diagrammes (équation 5.46) ont une contribution nulle au m.d.e intrinsèque.

Il va donc rester uniquement le terme en  $s_1$  ( $s_1 = Im(cd^*)$ ) qui constituera la contribution du sixième diagramme au m.d.e. Il a la forme suivante:

$$D_{E_6} = \frac{-ie_V m s_1}{M_V^4} \left[ \frac{-i}{2q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{N_{61}}{D_{61}} + \frac{N_{62}}{D_{62}} + \frac{N_{63}}{D_{63}} + \frac{N_{64}}{D_{64}} \right] \quad (5.70)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{61} = R_{61} - Q_{63} - Q_{62} + N_{64} \\ N_{62} = Q_{62} - N_{64} \\ N_{63} = Q_{63} - N_{64} \\ N_{64} = (k - q)_\rho (k - q)_\alpha k_\beta k_\sigma \left[ g^{\alpha\beta} (2k - q)^\mu \right. \\ \left. + g^{\mu\alpha} (2q - k)^\beta - g^{\mu\beta} (k + q)^\alpha \right] q^\nu \left[ T_6 \right]_{\mu,\nu}^{\rho,\sigma} \end{array} \right. \quad (5.71)$$

et  $R_{61}$ ,  $Q_{62}$ ,  $Q_{63}$ ,  $N_{64}$  et  $T_6$  sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{61} = M_V^4 g_{\rho\alpha} g_{\beta\sigma} \left[ g^{\alpha\beta} (2k - q)^\mu + g^{\mu\alpha} (2q - k)^\beta \right. \\ \left. - g^{\mu\beta} (k + q)^\alpha \right] q^\nu \left[ T_6 \right]_{\mu,\nu}^{\rho,\sigma} \\ Q_{62} = M_V^2 g_{\rho\alpha} k_\beta k_\sigma \left[ g^{\alpha\beta} (2k - q)^\mu + g^{\mu\alpha} (2q - k)^\beta \right. \\ \left. - g^{\mu\beta} (k + q)^\alpha \right] q^\nu \left[ T_6 \right]_{\mu,\nu}^{\rho,\sigma} \\ Q_{63} = M_V^2 g_{\beta\sigma} (k - q)_\rho (k - q)_\alpha \left[ g^{\alpha\beta} (2k - q)^\mu + g^{\mu\alpha} (2q - k)^\beta \right. \\ \left. - g^{\mu\beta} (k + q)^\alpha \right] q^\nu \left[ T_6 \right]_{\mu,\nu}^{\rho,\sigma} \\ \left[ T_6 \right]_{\mu,\nu}^{\rho,\sigma} = Tr \left[ \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 (\not{p}_2 + m_i) \gamma_5 \gamma^\rho \gamma^\sigma (\not{p}_1 + m_i) \right] \\ = -4i \left[ p_{2\nu} (g^{\rho\sigma} p_{1\mu} - g_\mu^\sigma p_1^\rho + g_\mu^\rho p_1^\sigma) \right. \\ \left. - p_{2\mu} (g^{\rho\sigma} p_{1\nu} - g_\nu^\sigma p_1^\rho + g_\nu^\rho p_1^\sigma) + m_i^2 (g_\nu^\sigma g_\mu^\rho - g_\mu^\sigma g_\nu^\rho) \right] \end{array} \right. \quad (5.72)$$

Pour ce qui est des dénominateurs (les  $D_{6j}$  ;  $j = 1, 2, 3, 4$ ), on les déduit de ceux du quatrième diagramme. On obtient:

$$\frac{1}{D_{6j}} = 2 \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \frac{1}{[k'^2 - \omega_{6j}^2]^3} \quad (5.73)$$

$k'$  ici est défini dans 5.11 et les  $\omega_{6j}$  sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{61}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + (M_V^2 - m_i^2 - m^2)y + m^2 \\ \omega_{62}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + \left[ [\xi + (1 - \xi)x] M_V^2 - m_i^2 - m^2 \right] y + m^2 \\ \omega_{63}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + \left[ [1 + (\xi - 1)x] M_V^2 - m_i^2 - m^2 \right] y + m^2 \\ \omega_{64}^2 = (q^2 x^2 - q^2 x + m_i^2)y^2 + (\xi M_V^2 - m_i^2 - m^2)y + m^2 \end{array} \right. \quad (5.74)$$

Remarquons que

$$\omega_{62}^2(x \rightarrow 1 - x) = \omega_{63}^2$$

Le calcul de  $R_{61}$ ,  $Q_{62}$ ,  $Q_{63}$  et  $N_{64}$  est très long. J'obtiens, après avoir éliminé les termes en  $q^4$  qui ont une contribution nulle:

$$N_{64} = 4i q^2 m_i^2 (q.k)^2 \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} Q_{63} = -4i M_V^2 \left\{ m_i^2 q^2 (-4q.k - 3k^2) \right. \\ \left. + q^2 \left[ (p_1.k)^2 + k^2 (p_1.k) - \frac{1}{2} k^2 (q.k) \right] \right. \\ \left. + m_i^2 \left[ 4k^2 (q.k) - (q.k)^2 \right] \right\} \quad (5.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{62} = -4i M_V^2 \left\{ q^2 \left[ 4(p_1.k)(q.k) + (p_1.k)^2 - k^2 (p_1.k) + \frac{1}{2} k^2 (q.k) \right] \right. \\ \left. + m_i^2 \left[ 7(q.k)^2 - 4k^2 (q.k) + q^2 k^2 \right] \right\} \quad (5.77) \end{aligned}$$

$$R_{61} = -12i M_V^4 q^2 \left[ 4m_i^2 + p.k \right] \quad (5.78)$$

L'étape suivante est le "shift", ie exprimer  $R_{61}$ ,  $Q_{62}$ ,  $Q_{63}$  et  $N_{64}$  en fonction de  $k' = k + p_3$  tout en omettant les termes impairs en  $k'$  qui ont une contribution nulle. Aussi, pour simplifier les calculs, j'ai tout de suite éliminé les termes en  $q^4$  qui ont, bien sûr, une contribution nulle; puisque, à la fin, on doit faire tendre  $q$  vers zéro et les termes en  $q^4$  ne présentent pas de pôles. J'obtiens:

$$N_{64}^{eff} = 0 \quad (5.79)$$

$$\begin{cases} Q_{63}^{eff} = C_{63}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{63} \\ C_{63}^{eff} = [C_{63}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}]^{eff} = 24iM_V^2 q^2 m_i^2 [y + 1 - 4xy] \\ B_{63}^{eff} = 4iM_V^2 q^2 m_i^4 (1 - y)^2 [1 + y - 4xy] \end{cases} \quad (5.80)$$

$$\begin{cases} Q_{62}^{eff} = C_{62}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{62} \\ C_{62}^{eff} = [C_{62}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}]^{eff} = -C_{63} \\ B_{62}^{eff} = -B_{63}^{eff} \end{cases} \quad (5.81)$$

$$R_{61}^{eff} = -24iM_V^4 q^2 m_i^2 (1 + y) \quad (5.82)$$

En utilisant les équations 5.73 et de 5.79 à 5.82, l'équation 5.70 devient:

$$\begin{aligned} D_{E_6} = & \frac{-e_v m s_1}{M_V^4} \left[ \frac{1}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{R_{61}}{[k'^2 - \omega_{61}^2]^3} \right. \\ & + \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} [C_{62}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{62}] \left[ \frac{1}{[k'^2 - \omega_{62}^2]^3} - \frac{1}{[k'^2 - \omega_{61}^2]^3} \right] \\ & \left. + \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} [C_{63}^{\alpha\beta} k'_\alpha k'_\beta + B_{63}] \left[ \frac{1}{[k'^2 - \omega_{63}^2]^3} - \frac{1}{[k'^2 - \omega_{61}^2]^3} \right] \right\} \end{aligned}$$

Pour intégrer sur  $k'$ , on utilise toujours les relations 3.34 et 3.37; on obtient:

$$\begin{aligned}
D_{E_6} = & \frac{-e_V m s_1}{M_V^4} \left[ \frac{1}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ R_{61}^{eff} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\omega_{61}^2} \right] \right. \\
& + C_{62}^{\alpha\beta} \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{32\pi^2} \right\} \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{62}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{61}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] \\
& - B_{63} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \left[ \frac{1}{\omega_{62}^2} - \frac{1}{\omega_{61}^2} \right] \\
& + C_{63}^{\alpha\beta} \frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{32\pi^2} \right\} \left[ \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{63}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left[ \frac{(4\pi)}{[\omega_{61}^2]} \right]^{\frac{\varepsilon}{2}} \right] \\
& \left. + B_{63} \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \left[ \frac{1}{\omega_{63}^2} - \frac{1}{\omega_{61}^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Pour la limite sur  $\varepsilon$ , on utilise la relation 5.63, en remplaçant les  $\omega_{5j}^2$  par des  $\omega_{6j}^2$ . On utilise aussi les relations 5.81 et 5.82 pour trouver:

$$\begin{aligned}
D_{E_6} = & \frac{-e_V m s_1}{M_V^4} \left[ \frac{1}{q^2(4m_i^2 - q^2)} \right] \left[ \frac{-i}{32\pi^2} \right] \int_0^1 \int_0^1 y dy dx \left\{ \frac{R_{61}^{eff}}{\omega_{61}^2} \right. \\
& \left. + B_{63}^{eff} \left[ \frac{1}{\omega_{63}^2} - \frac{1}{\omega_{62}^2} \right] - \frac{1}{2} C_{63}^{eff} \ln \left[ \frac{\omega_{62}^2}{\omega_{63}^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Maintenant je remplace  $R_{61}^{eff}$ ,  $B_{63}^{eff}$  et  $C_{63}^{eff}$  par leurs expressions; j'effectue la transformation  $x \rightarrow 1 - x$  dans le terme de  $\omega_{62}^2$  ( $\omega_{62}^2$  donnera  $\omega_{63}^2$  comme je l'avais déjà précisé) et je prends la limite nulle pour  $q^2$ . Je trouve:

$$\begin{aligned}
d_6 = & \frac{e_V m \text{Im}(cd^*)}{16\pi^2 M_V^2} \int_0^1 \int_0^1 dy dx \left\{ 3M_V^2 \frac{y(1+y)}{\omega_{61}^2} + 2m_i^2 \frac{y^2(1-y)^2(2x-1)}{\omega_{63}^2} \right. \\
& \left. + 6y^2(2x-1) \ln[\omega_{63}^2] \right\}
\end{aligned}$$

J'utilise la paramétrisation 5.15 pour trouver enfin l'expression de la contribution du sixième diagramme de Feynman au m.d.e du fermion  $i$ :

$$d_6 = \frac{e_V m \text{Im}(cd^*)}{16\pi^2 M_V^2} \left[ 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \quad (5.83)$$

avec

$$\begin{cases} J_{12} = \int_0^1 dy \frac{y(y+1)}{D} \\ J_{13} = \int_0^1 \int_0^1 dy dx (2x-1) \frac{y^2(1-y)^2}{F} \\ J_{14} = 6 \int_0^1 \int_0^1 dy dx (2x-1) y^2 \ln[F] \end{cases} \quad (5.84)$$

$D$  est défini dans 5.67 et:

$$F = \alpha y^2 + \left\{ (\xi - 1)x + 1 - \beta - \alpha \right\} y + \beta \quad (5.85)$$

## 5.7 M.D.E INTRINSÈQUE D'UN FERMION DANS UNE THÉORIE DE JAUGE GÉNÉRALE

Pour avoir le m.d.e du fermion  $i$ , il faut faire la somme des m.d.e des six diagrammes de Feynman tout en sommant sur les fermions internes  $l$ , les bosons  $V$  et les scalaires  $\Phi$ , physiques (et dans ce cas il faudra remplacer  $\xi$  par 1) ou non physiques (et dans ce cas on remplacera  $M_\Phi$  par  $M_V$  et  $e_\Phi$  par  $e_V$ ).

$$E.D.M = \sum_{l,V,\Phi} \sum_{j=1}^6 d_j \quad (5.86)$$

Il serait bon de rappeler ici les résultats trouvés:

$$d_1 = \frac{e_\Phi m}{16\pi^2} \frac{Im(ab^*)}{M_\Phi^2} J_1 \quad (5.16)$$

$$d_2 = \frac{e_l m}{16\pi^2} \frac{Im(ab^*)}{M_\Phi^2} J_2 \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} d_3 + d_4 = \frac{e_V}{16\pi^2} \left\{ \frac{Im(\alpha_1)}{M_V} \left[ 2J_3 + J_4 + \alpha J_5 + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \right] \right. \\ \left. + Im(\alpha_2) \frac{mm_i}{M_V^3} J_6 \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$d_5 = -\frac{e_l m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} [J_9 + J_{10} + \alpha J_{11}] \quad (5.65)$$

$$d_6 = \frac{e_V m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} [3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14}] \quad (5.83)$$

avec:

$$J_1 = \int_0^1 dy \frac{y(1-y)}{A} \quad (5.17)$$

$$J_2 = \int_0^1 dy \frac{(1-y)^2}{A} \quad (5.29)$$

$$J_3 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{2(x-1)y^2}{B} \quad (5.47)$$

$$J_4 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y(3y-2) \ln \left\{ \frac{B}{C} \right\} \quad (5.47)$$

$$J_5 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y^2(1-y)(2x-1+y) \left\{ \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right\} \quad (5.47)$$

$$J_6 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y(1-y)(2xy+1-y) \left\{ \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right\} \quad (5.47)$$

$$J_7 = -2 \int_0^1 \int_0^1 dx dy \frac{y^2}{B} \quad (5.47)$$

$$J_8 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y \ln \left\{ \frac{B}{C} \right\} \quad (5.47)$$

$$J_9 = \int_0^1 dy \frac{(y-1)(3y+1)}{D} \quad (5.66)$$

$$J_{10} = \int_0^1 dy (1-y)(3y-1) \ln \left\{ \frac{D}{E} \right\} \quad (5.66)$$

$$J_{11} = \int_0^1 dy (1-y)^2 (y^2-1) \left\{ \frac{1}{E} - \frac{1}{D} \right\} \quad (5.66)$$

$$J_{12} = \int_0^1 dy \frac{y(1+y)}{D} \quad (5.84)$$

$$J_{13} = \int_0^1 \int_0^1 dx dy (2x-1) \frac{y^2(1-y)^2}{F} \quad (5.84)$$

$$J_{14} = 6 \int_0^1 \int_0^1 dx dy (2x-1) y^2 \ln(F) \quad (5.84)$$

où

$$A = \alpha' y^2 + (\xi - \beta' - \alpha') y + \beta' \quad (5.18)$$

$$B = \alpha y^2 + \{(\xi \delta - 1)x + 1 - \beta - \alpha\} y + \beta \quad (5.48)$$

$$C = \alpha y^2 + \{\xi(\delta - 1)x + \xi - \beta - \alpha\} y + \beta \quad (5.48)$$

$$D = \alpha y^2 + (1 - \beta - \alpha)y + \beta \quad (5.67)$$

$$E = \alpha y^2 + (\xi - \beta - \alpha)y + \beta \quad (5.67)$$

$$F = \alpha y^2 + \{(\xi - 1)x + 1 - \beta - \alpha\}y + \beta \quad (5.85)$$

$$\alpha_1 = \frac{da^* - cb^*}{2} \quad (5.34)$$

$$\alpha_2 = \frac{db^* - ca^*}{2} \quad (5.34)$$

$$\alpha = \frac{m_i^2}{M_V^2} \quad (5.15)$$

$$\alpha' = \frac{m_i^2}{M_\Phi^2} \quad (5.15).$$

$$\beta = \frac{m^2}{M_V^2} \quad (5.15)$$

$$\beta' = \frac{m^2}{M_\Phi^2} \quad (5.15)$$

$$\delta = \frac{M_\Phi^2}{M_V^2} \quad (5.15)$$

**REMARQUE:**

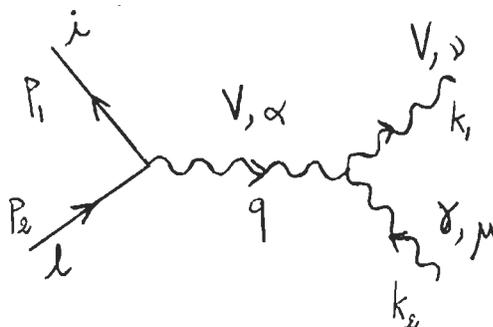
**Relations entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  quand  $\Phi$  est un Higgs non physique**

Lorsque le Higgs  $\Phi$  considéré est non physique, il ne correspond qu'à la partie longitudinale du boson  $V$  (c'est pour cela qu'il a la même masse et la même charge que  $V$ ), donc ses couplages doivent être liés à ceux de  $V$ ; autrement

dit, les paramètres  $a$  et  $b$  doivent être des fonctions des paramètres  $c$  et  $d$  (ces paramètres sont définis dans le tableau 4.1).

Pour voir cela, on considère l'invariance de jauge pour le processus:  $l\gamma \rightarrow iw$ . C'est-à-dire, l'amplitude de cette diffusion dans la jauge  $R_\xi$  est la même que celle dans la jauge physique.

Considérons d'abord la diffusion dans la jauge physique:



**Figure 5.7** Diffusion  $l\gamma \rightarrow iw$  dans la jauge physique

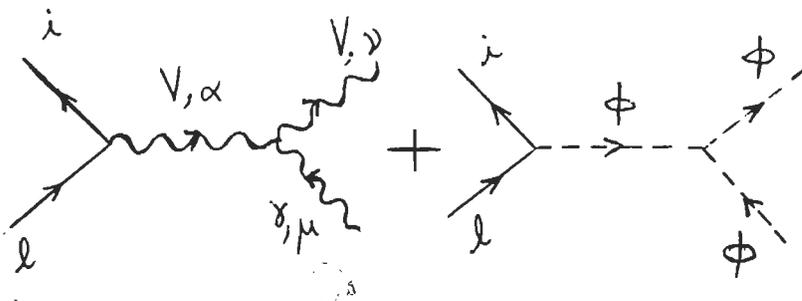
L'amplitude de cette diffusion s'écrit:

$$\mathcal{M} = \epsilon_V^{*\nu}(k_1)\epsilon_\gamma^\mu(k_2)C_{\alpha\mu\nu}\Delta_1^{\alpha\beta}\bar{u}(p_1)[i(c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma_\beta]u(p_2) \quad (5.87)$$

où  $C_{\alpha\mu\nu}$  est le couplage  $VV\gamma$ , dont nous n'avons pas besoin de l'expression, et  $\Delta_1^{\alpha\beta}$  est le propagateur du boson  $V$  dans la jauge physique, soit:

$$\Delta_1^{\alpha\beta} = -i \left[ \frac{g^{\alpha\beta} - \frac{q^\alpha q^\beta}{M_V^2}}{(q^2 - M_V^2)} \right] \quad (5.88)$$

Considérons maintenant la diffusion dans la jauge  $R_\xi$ :



**Figure 5.8** Diffusion  $l\gamma \rightarrow iw$  dans la jauge  $R_\xi$

Son amplitude s'écrit:

$$\mathcal{M}' = \epsilon_V^{*\nu}(k_1)\epsilon_\gamma^\mu(k_2)\bar{u}(p_1) \left[ C_{\alpha\mu\nu} \left[ \Delta_1^{\alpha\beta} + \Delta_2^{\alpha\beta} \right] [i(c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma_\beta] \right. \\ \left. + ie_V g_{\mu\nu} M_V \Delta_\xi [i(a\gamma_L + b\gamma_R)] \right] u(p_2) \quad (5.89)$$

où  $\Delta_1^{\alpha\beta} + \Delta_2^{\alpha\beta} = \Delta_\xi^{\alpha\beta}$  est le propagateur du boson  $V$  dans la jauge  $R_\xi$ ; il est donné dans l'équation 4.20 avec:

$$\begin{cases} \Delta_1^{\mu\nu} = -i \left[ \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_V^2}}{(q^2 - M_V^2)} \right] \\ \Delta_2^{\mu\nu} = -i \left[ \frac{q_\mu q_\nu}{M_V^2 (q^2 - \xi M_V^2)} \right] \end{cases} \quad (5.90)$$

Soulignons que  $\Delta_\xi^{\alpha\beta}$  se décompose en la somme de deux parties, la partie physique et la partie de jauge et c'est cette forme que j'ai utilisée dans tous mes calculs.  $\Delta_\xi$  est le propagateur du Higgs non physique, soit:

$$\Delta_\xi = \frac{i}{(q^2 - \xi M_V^2)} \quad (5.91)$$

L'invariance de jauge impose l'égalité entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$ , d'où l'on obtient:

$$\epsilon_V^{*\nu}(k_1)\epsilon_\gamma^\mu(k_2)C_{\alpha\mu\nu}\Delta_2^{\alpha\beta}\bar{u}(p_1)[i(c\gamma_L + d\gamma_R)\gamma_\beta]u(p_2) \\ = \epsilon_V^{*\nu}(k_1)\epsilon_\gamma^\mu(k_2)ie_V g_{\mu\nu}M_V\Delta_\xi\bar{u}(p_1)[i(a\gamma_L + b\gamma_R)]u(p_2)$$

On utilise la relation  $q = k_1 - k_2 = p_2 - p_1$  et l'équation de Dirac et, après quelques calculs, on aboutit à:

$$-\frac{1}{M_V}\bar{u}(p_1)[(m_l - m_i)(c+d) + (m_l + m_i)(d-c)\gamma_5]u(p_2) = \bar{u}(p_1)[(a+b) + (b-a)\gamma_5]$$

d'où:

$$\begin{cases} a + b = \frac{-(m_l - m_i)(c+d)}{M_V} \\ b - a = \frac{-(m_l + m_i)(d-c)}{M_V} \end{cases}$$

et de ce système d'équations, on tire les relations désirées:

$$\begin{cases} a = \frac{-1}{M_V}(mc - m_i d) \\ b = \frac{-1}{M_V}(md - m_i c) \\ \text{Im}(ab^*) = \frac{m^2 - m_i^2}{M_V^2} \text{Im}(cd^*) = (\beta - \alpha) \text{Im}(cd^*) \end{cases} \quad (5.92)$$

On retourne aux équations 5.34 et on y applique 5.92, pour trouver:

$$\alpha_1 = i \frac{m}{M_V} \text{Im}(cd^*) - \frac{m_i}{2M_V} (|c|^2 - |d|^2) \quad (5.93)$$

$$\text{Im}(\alpha_1) = \frac{m}{M_V} \text{Im}(cd^*) \quad (5.94)$$

$$\alpha_2 = -i \frac{m_i}{M_V} \text{Im}(cd^*) - \frac{m}{2M_V} (|d|^2 - |c|^2) \quad (5.95)$$

$$\text{Im}(\alpha_2) = -\frac{m_i}{M_V} \text{Im}(cd^*) \quad (5.96)$$

D'autre part,

$$M_\Phi = M_V \implies \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \delta = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = C = E \\ B = F \end{cases} \quad (5.97)$$

Alors pour un Higgs non physique les résultats s'écriront:

$$d_1 = \frac{e_V m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} (\beta - \alpha) J_1 \quad (5.98)$$

$$d_2 = \frac{e_I m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} (\beta - \alpha) J_2 \quad (5.99)$$

$$d_3 + d_4 = \frac{e_V m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} \left[ 2J_3 + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \right] \quad (5.100)$$

$$d_5 = -\frac{e_l m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} [J_9 + J_{10} + \alpha J_{11}] \quad (5.101)$$

$$d_6 = \frac{e_V m}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} [3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14}] \quad (5.102)$$

Par conséquent, lorsqu'on est dans un modèle sans Higgs physique, le m.d.e de notre fermion  $i$  s'écrit (je noterai  $m_l$  au lieu de  $m$ , pour être plus précise):

$$\begin{aligned} E.D.M = \sum_{l,V} \frac{m_l}{16\pi^2} \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} & \left\{ e_V \left[ (\beta - \alpha)J_1 + 2J_3 + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) + 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \right. \\ & \left. + e_l \left[ (\beta - \alpha)J_2 - J_9 - J_{10} - \alpha J_{11} \right] \right\} \quad (5.103) \end{aligned}$$

Ecrivons, maintenant le résultat le plus général. En notant par  $S$  les scalaires physiques de la théorie,  $V$  les vecteurs et  $l$  les fermions de spin  $\frac{1}{2}$ , le m.d.e intrinsèque d'un fermion  $i$  de spin  $\frac{1}{2}$  est:

$$\begin{aligned} E.D.M = \sum_{l,V,S} \frac{m_l}{16\pi^2} & \left\{ \frac{\text{Im}(cd^*)}{M_V^2} \left[ e_V \left[ (\beta - \alpha)J_1 + 2J_3 \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \right. \right. \\ & \left. \left. + 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \right. \\ & \left. + e_l \left[ (\beta - \alpha)J_2 - J_9 - J_{10} - \alpha J_{11} \right] \right] \\ & \left. + \frac{\text{Im}(ab^*)}{M_S^2} \left[ e_s J_1^1 + e_l J_2^1 \right] \right\} \quad (5.104) \end{aligned}$$

où  $a$  et  $b$  sont tels que  $i(a\gamma_L + b\gamma_R)$  est le couplage de  $S$  avec  $i$  et  $l$ ; et  $J_1^1$  et  $J_2^1$  sont les valeurs des intégrales  $J_1$  et  $J_2$  (équations 5.17 et 5.29) pour  $\xi = 1$ .

Ainsi, l'équation 5.104 est l'expression la plus générale du m.d.e intrinsèque d'un fermion de spin  $\frac{1}{2}$ , dans une physique des particules de spins 0,  $\frac{1}{2}$  et 1. Elle peut être appliquée dans n'importe quel modèle de cette physique. Il suffira de remplacer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  par les couplages du modèle et de faire la sommation sur les fermions ( $l$ ), les bosons ( $V$ ) et les scalaires ( $S$ ) du modèle choisi.

Une fois le modèle choisi, les paramètres seront fixés ainsi que le nombre et les types de particules, alors l'invariance de jauge nous permettra de prendre la valeur de  $\xi$  qu'on voudra, puisque le résultat sera indépendant de  $\xi$ . On choisira alors le  $\xi$  qui donnera le calcul le plus rapide et le moins difficile.

Il est nécessaire d'avoir un modèle précis pour vérifier si la dépendance en  $\xi$  tombe. Cet aspect dépasse le cadre du présent travail mais sera considéré dans le futur.

## CHAPITRE VI

### APPLICATION: MDE DE L'ÉLECTRON ET DU NEUTRON DANS LE MODÈLE "LEFT-RIGHT SYMMETRIC"

#### 6.1 INTRODUCTION

Les dernières décennies ont connu une révolution dans notre compréhension de la structure de la matière élémentaire, en particulier celle du phénomène de l'interaction électrofaible. Dans les années soixante, Glashow, Salam et Weinberg l'ont décrite par la brisure spontanée de la symétrie d'une théorie de jauge renormalisable, basée sur le groupe de jauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . La découverte expérimentale des courants neutres dans les années soixante-dix et celle des bosons  $W$  et  $Z$  au CERN dans les années quatre-vingts, avec des masses très près de celles prédites par le modèle ont confirmé la théorie de Glashow-Weinberg-Salam.

Malgré ses succès, le modèle standard  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  laisse plusieurs problèmes sans solutions, dont:

- Les masses et les couplages des fermions.
- Le problème de la brisure  $CP$ .
- L'origine de la symétrie de l'interaction faible et de sa brisure.
- L'origine des brisures  $P$  et  $CP$ .

De là, on déduit que le modèle standard ne peut pas être la théorie finale et qu'il faut aller chercher des réponses à nos problèmes au delà du MS. Plusieurs terrains ont été explorés par les physiciens dans leur quête d'une physique au delà du modèle standard dont le modèle technicouleur, la supersymétrie, la

théorie de la grande unification, et la symétrie gauche-droite, plus connue sous le nom de Left-right symmetry (LRS) [13].

Pour faire une application de mes calculs du m.d.e fermionique, j'ai choisi le modèle LRS où je vais évaluer le m.d.e de l'électron.

## 6.2 POURQUOI LE MODÈLE LRS? [13,18]

La motivation à l'origine du modèle LRS, basé sur le groupe de jauge  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ , était d'expliquer l'origine de la brisure de la parité dans l'interaction faible.

Il existe, par ailleurs, plusieurs autres considérations, liées à l'interaction faible, qui trouvent mieux leurs places dans le modèle LRS, plutôt que dans le MS. Parmi eux, il y a la masse du neutrino. On ne sait pas encore si le neutrino a une masse ou non. Mais si le neutrino a réellement une masse de l'ordre de l'électron-volt, le meilleur formalisme expliquant ceci se trouve dans le modèle LRS.

Deuxièmement, si les symétries de l'interaction faible devaient provenir d'une sous-structure plus fondamentale des quarks et leptons, et si les forces au niveau de la sous-structure devaient être similaires à celles de QCD, alors, il existe des arguments convaincants pour que LRS ait la bonne symétrie au lieu du MS.

Une autre déficience du MS est que le générateur  $Y$  du groupe  $U(1)_Y$  n'a aucun sens physique. Dans le modèle LRS,  $Y$  devient  $B-L$  (nombre barionique - nombre leptonique). On a, ainsi, une extension de la formule de Gell-Mann-Nishijima du domaine des interactions fortes à celui des interactions faibles, et tous les générateurs des groupes de symétrie de LRS ont un sens physique.

Ajoutons, enfin, ce commentaire sur le statut de la brisure  $CP$ . Dans le MS, la brisure  $CP$  est paramétrisée par la seule phase de Kobayashi-Maskawa,  $\delta_{KM}$ . Mais le modèle n'explique pas pourquoi la brisure  $CP$  est dans le domaine des faibles énergies de l'interaction faible. Par contre le modèle LRS nous indique que la petitesse de la brisure  $CP$  est liée à la petitesse des courants droits (RH),  $V + A$ , elle-même due à la grandeur de la masse  $M_{W_R}$  du boson RH.

Cette relation est résumée par l'équation:

$$\eta_{+-} \approx \left[ \frac{M_{W_L}}{M_{W_R}} \right]^2 \sin \delta \quad (6.1)$$

D'autre part, dans le MS, les effets de nouvelles phases (autre  $\delta_{KM}$ ) dues au fait que les neutrinos seraient des particules de Majorana sont supprimés à cause de l'absence de courants droits (right-handed). De ce fait, certains auteurs considèrent LRS pour avoir l'apport de ces phases additionnelles au m.d.e.

Mis à part tous ces commentaires, j'ai choisi le modèle LRS pour appliquer mes calculs car, dans le MS, le m.d.e au premier ordre est nul. On le voit bien de l'équation 5.104 où le m.d.e est non nul pour  $Im(cd^*) \neq 0$  et  $Im(ab^*) \neq 0$ . Or, le MS donne, pour  $V = W$ :

$$\begin{cases} c = 0 \\ d = \frac{-g}{\sqrt{2}} K_{il} \end{cases} \quad (6.2)$$

Donc

$$Im(cd^*)_{MS} = 0$$

et on a toujours  $Im(cd^*) = 0$  si on prend  $V = Z$  car, dans ce cas,  $c$  et  $d$  sont réels. Pour le Higgs, on a:

$$a = b = \frac{-e}{2 \sin \theta_W} \frac{m_i}{M_W} \quad (6.3)$$

Donc

$$Im(ab^*)_{MS} = 0$$

Donc, j'ai pris le modèle LRS car il donne un m.d.e non nul au niveau du premier ordre des perturbations, là où j'ai fait mes calculs.

### 6.3 PARAMÈTRES DU MODÈLE [6,13,19]

Le modèle LRS est basé sur le groupe de jauge  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ . Les fermions sont ordonnés comme suit: si on note  $Q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  et  $\psi \equiv \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$ , on a

$$Q_L : \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right) ; \quad Q_R : \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\psi_L : \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) ; \quad \psi_R : \left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$$

La valeur propre du générateur du groupe  $U(1)$  correspond au nombre quantique  $B - L$  du multiplet. La charge électrique est donnée, dans ce modèle par:

$$q = I_{3_L} + I_{3_R} + \frac{B - L}{2} \quad (6.4)$$

Le modèle a, avant la brisure de la symétrie, deux constantes de couplage,  $g_2 \equiv g_L = g_R$  et  $g'$ .

Les Higgs nécessaires pour générer les masses des bosons  $W_R$  et  $W_L$  sont:

$$\Delta_R : (0, 1, 2) \quad \text{et} \quad \Phi : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Les minima (les valeurs des Higgs dans le vide) qui brisent la symétrie de jauge vont être:

$$\langle \Delta_R \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R & 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa' e^{i\eta} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Après brisure de la symétrie,  $W_L$  et  $W_R$  acquièrent les masses:

$$\begin{cases} M_{W_R} = g_R v_R \\ M_{W_L} = \frac{g_L}{\sqrt{2}} (\kappa^2 + \kappa'^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (6.7)$$

Nous avons la relation:

$$v_R \gg \kappa, \kappa' \quad (6.8)$$

Comme  $\Phi$  peut se coupler avec chacun des bosons  $W_L$  et  $W_R$ , ces derniers vont se "mélanger" lorsque  $\Phi$  développe une v.e.v (valeur dans le vide) pour donner les états physiques:

$$\begin{cases} W_1^+ = W_L^+ \cos \zeta + e^{-i\eta} W_R^+ \sin \zeta \\ W_2^+ = -e^{i\eta} W_L^+ \sin \zeta + W_R^+ \cos \zeta \end{cases} \quad (6.9)$$

L'angle de mélange,  $\zeta$ , est donné par:

$$\tan 2\zeta = \frac{2g_L \kappa \kappa'}{g_R v_R^2} \ll 1 \quad (6.10)$$

Les deux bosons physiques  $W_1$  et  $W_2$  se couplent aux fermions comme suit:

$$\mathcal{L} = i \sum_{j=1}^2 W_j^{\mu+} \bar{u}_i (c_{il}^j \gamma_L + d_{il}^j \gamma_R) \gamma_\mu u_l \quad (6.11)$$

Les coefficients  $c$  et  $d$  sont reliés aux paramètres du modèle par:

$$\begin{cases} c_{il}^1 = \frac{ig_R}{\sqrt{2}} e^{i\eta} \sin \zeta K_{il}^R \\ d_{il}^1 = \frac{ig_L}{\sqrt{2}} \cos \zeta K_{il}^L \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} c_{il}^2 = \frac{ig_R}{\sqrt{2}} \cos \zeta K_{il}^R \\ d_{il}^2 = \frac{-ig_L}{\sqrt{2}} e^{-i\eta} \sin \zeta K_{il}^L \end{cases} \quad (6.13)$$

$K_{il}^L$  et  $K_{il}^R$  sont, respectivement, les matrices de mélange droite (LH) et gauche (RH) qui apparaissent dans le processus de diagonalisation des matrices de masses des fermions. Il n'y a pas, a priori, de relation entre  $K_{il}^L$  et  $K_{il}^R$

Comme l'angle de mélange est très faible (équation 6.10), on peut déduire de 6.9 que:

$$\begin{cases} W_L \approx W_1 \\ W_R \approx W_2 \end{cases}$$

et donc, d'après 6.7 et 6.8, que la masse de  $W_1$  est très inférieure à celle de  $W_2$ , ie:

$$M_{W_1} \ll M_{W_2} \quad (6.14)$$

## 6.4 M.D.E DE L'ÉLECTRON DANS LE MODÈLE LRS

Je vais appliquer l'équation 5.104 à l'électron dans le modèle LRS. Donc la particule  $i$  va être l'électron, il y aura un seul fermion interne,  $l$ , qui sera le neutrino électronique et enfin la somme sur  $V$  se fera sur les deux bosons de jauge du modèle  $W_1$  et  $W_2$ . Je vais considérer seulement les états physiques de ces bosons; cela signifie qu'il faudra travailler dans la jauge physique ( $\xi = \infty$ ), car, si on prend une autre jauge (le résultat sera bien sûr le même), il faudra prendre les états non physiques des bosons ( $W_L$  et  $W_R$ ) plus les Higgs non

physiques qui leur donnent leurs masses. C'est donc plus simple de prendre la jauge physique.

Donc, pour avoir le m.d.e de l'électron dans le modèle LRS, je prends l'équation 5.104, avec:

$$\begin{cases} i = e \\ l = \nu_e \\ V = W_1, W_2 \\ \xi = \infty \end{cases}$$

La contribution du secteur scalaire est nulle puisque, d'une part, il n'y a pas de boson scalaire (physique) chargé dans le modèle, donc le terme en  $e_S$  de 5.104 est nul; et d'autre part, le neutrino est électriquement neutre, donc le terme en  $e_l$  de 5.104 est aussi nul. Alors, le m.d.e de l'électron s'écrit:

$$\begin{aligned} d_e = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^2 \frac{m_\nu}{16\pi^2} \frac{\text{Im} [c_{e\nu}^j (d_{e\nu}^j)^*]}{M_{W_j}^2} & \left[ e \left[ (\beta_\nu - \alpha) J_1 + 2J_3 \right. \right. \\ & + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \\ & \left. \left. + 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \right. \\ & \left. + e_\nu \left[ (\beta_\nu - \alpha) J_2 - J_9 - J_{10} - \alpha J_{11} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

Mais le neutrino est électriquement neutre, donc, le terme en  $e_\nu$  est nul. D'autre part, comme  $d_e$  est en  $\frac{1}{M_{W_j}}$ , et  $M_{W_1} \ll M_{W_2}$ , alors la contribution de  $M_{W_2}$  est négligeable. Il va rester:

$$\begin{aligned} d_e = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{em_\nu}{16\pi^2} \frac{\text{Im} [c_{e\nu}^1 (d_{e\nu}^1)^*]}{M_{W_1}^2} & \left[ (\beta_\nu - \alpha) J_1 + 2J_3 \right. \\ & + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \\ & \left. + 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

Ici,  $\beta_\nu = \frac{m_\nu^2}{M_{W_1}^2}$  et  $\alpha = \frac{m_e^2}{M_{W_1}^2}$ . Les paramètres  $c_{e\nu}^1$  et  $d_{e\nu}^1$  sont donnés dans 6.12 (bien sûr avec  $i = e$  et  $l = \nu$ ). Dans le modèle LRS, les neutrinos sont massifs, et

$K^L$  et  $K^R$  sont analogues à la matrice de Kobayashi-Maskawa du MS. D'autre part, je prends  $g_L = g_R = g$ . Donc:

$$Im \left[ c_{e\nu}^1 (d_{e\nu}^1)^* \right] = \frac{g^2}{2} \sin \zeta \cos \zeta Im \left[ e^{i\eta} (K_{e\nu}^L)^* K_{e\nu}^R \right] \quad (6.17)$$

Ainsi

$$d_e = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{em_\nu}{16\pi^2} \frac{g^2 \sin \zeta \cos \zeta Im \left[ e^{i\eta} (K_{e\nu}^L)^* K_{e\nu}^R \right]}{2M_{W_1}^2} \times \left[ (\beta_\nu - \alpha) J_1 + 2J_3 + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) + 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \quad (6.18)$$

Maintenant je vais calculer la limite des intégrales, pour  $\xi \rightarrow \infty$  en notant que j'ai négligé  $\alpha$ . Le calcul par Mathematica donne:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} J_j = 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 13 \quad (6.19)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} J_8 = \frac{-1}{2} \quad (6.20)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} J_{14} = 1 \quad (6.21)$$

$J_{12}$  ne dépend pas de  $\xi$ , son calcul donne:

$$J_{12} = \frac{3 - 5\beta_\nu}{2(\beta_\nu - 1)^2} - \frac{\beta_\nu(1 - 2\beta_\nu)\ln\beta_\nu}{(\beta_\nu - 1)^3} \quad (6.22)$$

J'injecte les équations de 6.19 à 6.22 dans 6.18, et j'obtiens après quelques calculs:

$$d_e = \frac{em_\nu}{32\pi^2} \frac{g^2 \sin \zeta \cos \zeta}{M_{W_1}^2} Im \left[ e^{i\eta} (K_{e\nu}^L)^* K_{e\nu}^R \right] \times 3 \left[ \frac{\beta_\nu^2 - 12\beta_\nu + 7}{4(\beta_\nu - 1)^2} - \frac{(\beta_\nu - 2\beta_\nu^2)\ln\beta_\nu}{(\beta_\nu - 1)^3} \right] \quad (6.23)$$

Je prends:

$$\frac{g^2}{8M_{W_1}^2} = \frac{G_{Fermi}}{\sqrt{2}} \quad (6.24)$$

$$G_{Fermi} \approx 1.166 \times 10^{-5} GeV^{-2} \quad (6.25)$$

Si, en plus, je prends  $\zeta$  égal à la limite supérieure connue jusqu'à présent, soit:

$$\begin{cases} \zeta \approx 10^{-3} \\ \eta \approx 10^{-3} \end{cases} \quad (6.26)$$

et:

$$1 GeV^{-1} = 1.97 \times 10^{-14} cm \quad (6.27)$$

et si je considère aussi la matrice de mélange LH égale à celle RH, ie:

$$K_{e\nu}^L = K_{e\nu}^R = K_{e\nu} \quad (6.28)$$

alors:

$$\begin{aligned} d_e \approx & (1.2 \times 10^{-26}) |K_{e\nu}|^2 m_\nu (GeV) \\ & \times \left[ \frac{\beta_\nu^2 - 12\beta_\nu + 7}{4(\beta_\nu - 1)^2} - \frac{(\beta_\nu - 2\beta_\nu^2) \ln \beta_\nu}{(\beta_\nu - 1)^3} \right] GeV^{-1} ecm \end{aligned}$$

Si on prend les éléments de la matrice de mélange leptonique avec la même magnitude que ceux de la matrice KM, alors ces magnitudes ne dépasseront pas l'unité. Je prends donc la valeur maximale pour  $K_{e\nu}$ , ie:

$$|K_{e\nu}| \approx 1 \quad (6.29)$$

On peut alors avoir le m.d.e de l'électron en fonction de  $\beta_\nu$ , en remplaçant  $m_\nu$  par  $M_{W_1} \sqrt{\beta_\nu}$ , et en prenant:

$$M_{W_1} \approx M_W \approx 80.22 GeV \quad (6.30)$$

Alors:

$$\begin{aligned} d_e \approx & (9.63 \times 10^{-25}) \sqrt{\beta_\nu} \left[ \frac{\beta_\nu^2 - 12\beta_\nu + 7}{4(\beta_\nu - 1)^2} \right. \\ & \left. - \frac{(\beta_\nu - 2\beta_\nu^2) \ln \beta_\nu}{(\beta_\nu - 1)^3} \right] GeV^{-1} ecm \end{aligned} \quad (6.31)$$

Si je prend  $m_\nu = 5 \text{ eV}$  (la limite expérimentale connue jusqu'à présent), je trouve:

$$d_e \approx 1.05 \times 10^{-34} \text{ ecm} \quad (6.32)$$

Cette valeur n'est pas en désaccord avec la limite donnée par l'expérience. (Voir chapitre I, équation 1.4).

## 6.5 M.D.E DU NEUTRON DANS LE MODÈLE LRS

Nous avons l'expression du m.d.e du neutron en fonction de ceux des quarks  $u$  et  $d$ , donnée par le modèle non relativiste des quarks [6]:

$$d_n = \left(\frac{4}{3}\right)d_d - \left(\frac{1}{3}\right)d_u \quad (6.33)$$

Il faut donc calculer  $d_d$  et  $d_u$

### 6.5.1 m.d.e du quark $d$ dans le modèle LRS

On utilise toujours l'équation 5.104, avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} i = d \\ l = u, c, t \\ V = W_1, W_2 \\ \xi = \infty \end{array} \right.$$

Alors:

$$\begin{aligned} d_d = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \sum_{l=u,c,t} \sum_{j=1}^2 \frac{m_l}{16\pi^2} \frac{\text{Im} [c_{dl}^j (d_{dl}^j)^*]}{M_{W_j}^2} & \left[ e \left[ (\beta - \alpha)J_1 + 2J_3 \right. \right. \\ & + J_4 + \alpha(J_5 - J_6) + \frac{1}{2}(J_8 - J_7) \\ & \left. \left. + 3J_{12} + 2\alpha J_{13} + J_{14} \right] \right. \\ & \left. + e_l \left[ (\beta - \alpha)J_2 - J_9 - J_{10} - \alpha J_{11} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.34)$$

On néglige, comme pour l'électron le terme en  $M_{W_2}$ . Pour le calcul des intégrales, on a déjà les équations 6.19, 6.20, 6.21 et 6.22. J'ai aussi calculé par Mathematica (ici aussi j'ai négligé  $\alpha = \frac{m_d^2}{M_{W_1}^2}$ ):

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} J_2 = 0 \quad (6.35)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (J_9 + J_{10}) = \frac{-1}{2} - \frac{2\beta}{(\beta-1)^2} + \frac{(3\beta-1)\ln\beta}{(\beta-1)^3} \quad (6.36)$$

avec,  $\beta = \frac{m_l^2}{M_{W_1}^2}$ ;  $l = u, c, t$ . J'utilise l'équation 6.17, avec  $d$  et  $l$  au lieu de  $e$  et  $\nu$ , les équations de 6.24 à 6.27 ainsi que:

$$e_l = \frac{2}{3}e; \quad l = u, c, t \quad (6.37)$$

D'autre part, je prends les grandeurs des éléments des matrices de mélange LH et RH égales à celles des éléments de la matrice de Kobayashi-Maskawa, ie:

$$|K_{il}^L| = |K_{il}^R| = |V_{il}| \quad (6.38)$$

Je trouve, alors,

$$\begin{aligned} d_d \approx & (4.02 \times 10^{-27}) \sum_{l=u,c,t} |V_{dl}|^2 m_l (GeV) \\ & \times \left\{ 3 \left[ \frac{\beta^2 - 12\beta + 7}{4(\beta-1)^2} - \frac{(\beta - 2\beta^2)\ln\beta}{(\beta-1)^3} \right] \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \left[ \frac{-1}{2} - \frac{2\beta}{(\beta-1)^2} + \frac{(3\beta-1)\ln\beta}{(\beta-1)^3} \right] \right\} GeV^{-1} ecm \\ d_d \approx & (4.02 \times 10^{-27}) \sum_{l=u,c,t} |V_{dl}|^2 m_l (GeV) \left\{ \frac{27 - 37\beta}{6(\beta-1)^2} \right. \\ & \left. + \left[ 6\beta^2 - 5\beta + \frac{2}{3} \right] \frac{\ln\beta}{(\beta-1)^3} + \frac{13}{12} \right\} GeV^{-1} ecm \end{aligned} \quad (6.39)$$

### 6.5.2 m.d.e du quark $u$ dans le modèle LRS

Pour le quark  $u$ , on fait la même chose que pour le quark  $d$ , sauf que la sommation sur  $l$  se fait sur les quarks  $d$ ,  $s$  et  $b$ , et que la charge de ces derniers est:

$$e_l = \frac{-1}{3}e ; l = d, s, b \quad (6.40)$$

Alors le m.d.e du quark  $u$  s'écrit:

$$d_u \approx (4.02 \times 10^{-27}) \sum_{l=d,s,b} |V_{ul}|^2 m_l (GeV) \left\{ \frac{27 - 49\beta}{6(\beta - 1)^2} - \left[ -6\beta^2 + 2\beta + \frac{1}{3} \right] \frac{\ln\beta}{(\beta - 1)^3} + \frac{7}{12} \right\} GeV^{-1} ecm \quad (6.41)$$

### 6.5.3 m.d.e du neutron dans le modèle LRS

On applique l'équation 6.33 et on trouve:

$$d_n \approx (4.02 \times 10^{-27}) \left\{ \frac{4}{3} \sum_{l=u,c,t} |V_{dl}|^2 m_l (GeV) \left\{ \frac{27 - 37\beta}{6(\beta - 1)^2} + \left[ 6\beta^2 - 5\beta + \frac{2}{3} \right] \frac{\ln\beta}{(\beta - 1)^3} + \frac{13}{12} \right\} - \frac{1}{3} \sum_{l'=d,s,b} |V_{ul}|^2 m_{l'} (GeV) \left\{ \frac{27 - 49\beta'}{6(\beta' - 1)^2} - \left[ -6\beta'^2 + 2\beta' + \frac{1}{3} \right] \frac{\ln\beta'}{(\beta' - 1)^3} + \frac{7}{12} \right\} \right\} \quad (6.42)$$

avec:

$$\begin{cases} \beta = \frac{m_l^2}{M_{W_1}^2}; l = u, c, t \\ \beta' = \frac{m_{l'}^2}{M_{W_1}^2}; l' = d, s, b \end{cases} \quad (6.43)$$

Maintenant, on peut évaluer  $d_n$ , en considérant les données expérimentales les plus récentes sur les masses des quarks et la matrice de mélange. Je prends

pour les masses:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_u = 5 \times 10^{-3} \text{ GeV} \\ m_c = 1.3 \text{ GeV} \\ m_t = 180 \text{ GeV} \\ m_d = 10^{-2} \text{ GeV} \\ m_s = 0.2 \text{ GeV} \\ m_b = 4.3 \text{ GeV} \end{array} \right. \quad (6.44)$$

Et pour les grandeurs des éléments de la matrice KM, je prends [7]:

$$\left( \begin{array}{ccc} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccc} 0.975 & 0.221 & 0.003 \\ 0.221 & 0.974 & 0.040 \\ 0.009 & 0.039 & 0.999 \end{array} \right) \quad (6.45)$$

Si j'appelle:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{4}{3} \left[ \frac{27-37x}{6(x-1)^2} + \left[ 6x^2 - 5x + \frac{2}{3} \right] \frac{\ln x}{(x-1)^3} + \frac{13}{12} \right] \\ g(x) = \frac{-1}{3} \left[ \frac{27-49x}{6(x-1)^2} - \left[ -6x^2 + 2x + \frac{1}{3} \right] \frac{\ln x}{(x-1)^3} + \frac{7}{12} \right] \end{array} \right. \quad (6.46)$$

alors:

$$\begin{aligned} d_n \approx (4.02 \times 10^{-27}) & \left\{ |V_{du}|^2 m_u (\text{GeV}) f(\beta_u) + |V_{dc}|^2 m_c (\text{GeV}) f(\beta_c) \right. \\ & + |V_{dt}|^2 m_t (\text{GeV}) f(\beta_t) + |V_{ud}|^2 m_d (\text{GeV}) g(\beta_d) \\ & \left. + |V_{us}|^2 m_s (\text{GeV}) g(\beta_s) + |V_{ub}|^2 m_b (\text{GeV}) g(\beta_b) \right\} \text{ GeV}^{-1} \text{ ecm} \end{aligned} \quad (6.47)$$

En considérant les équations 6.44 et 6.30 je calcule les  $\beta_l$ . Je trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_u = 3.88 \times 10^{-9} \\ \beta_c = 2.63 \times 10^{-4} \\ \beta_t = 5.03 \\ \beta_d = 1.55 \times 10^{-8} \\ \beta_s = 6.21 \times 10^{-6} \\ \beta_b = 2.87 \times 10^{-3} \end{array} \right. \quad (6.48)$$

Ensuite, je calcule  $f(\beta_l)$  pour  $l = u, c, \text{ et } t$ ; et  $g(\beta_l)$  pour  $l = d, s \text{ et } b$ . Je trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\beta_u) \approx 24.66 \\ f(\beta_c) \approx 14.77 \\ f(\beta_t) \approx 3.45 \\ g(\beta_d) \approx 0.30 \\ g(\beta_s) \approx -0.36 \\ g(\beta_b) \approx -1.04 \end{array} \right. \quad (6.49)$$

Enfin j'insère 6.44, 6.45 et 6.49 dans 6.47 et je trouve:

$$d_n \approx 4.46 \times 10^{-27} \text{ ecm} \quad (6.50)$$

Si on retourne au chapitre I, équation 1.3, on trouve que la limite supérieure donnée par l'expérience est  $2.5 \times 10^{-25} \text{ ecm}$ . Donc le résultat que je trouve n'est pas en désaccord avec l'expérience.

## CONCLUSION

J'ai calculé, à l'ordre d'une boucle, le m.d.e d'un fermion de spin  $\frac{1}{2}$ , dans une théorie de jauge générale, renormalisable.

La méthode de projection que j'ai utilisée dans mes calculs est très puissante car elle est rapide, directe, précise (je n'ai fait aucune approximation), respecte les propriétés de symétrie et est applicable à tous les ordres. Ajoutons que cette méthode est aussi utilisable pour calculer d'autres moments électromagnétiques, outre le m.d.e.

Le calcul est très efficace puisqu'il couvre tous les modèles et toutes les jauges. En effet, l'équation 5.104 permet de calculer tout résultat théorique possible sur le m.d.e dans tout modèle et de confronter les résultats avec les données expérimentales. D'ailleurs, j'ai pu l'appliquer dans le calcul du m.d.e de l'électron et du neutron dans le modèle LRS.

Il est à remarquer que durant les calculs, j'ai trouvé que le résultat était fini au niveau de chaque boucle, avant de faire la somme.

Précisons aussi que je n'ai fait, jusqu'au résultat final (équation 5.104), aucune approximation sur les masses des fermions; ce qui rend ce résultat applicable à tous les fermions, qu'ils soient lourds ou légers.

Le m.d.e fermionique a déjà été calculé dans plusieurs modèles. Mais ce calcul est original en deux points; d'abord, la méthode est nouvelle, ensuite, le calcul est indépendant de tout modèle. Il représente donc une analyse détaillée du m.d.e d'un fermion et permet de distinguer entre les différents modèles et mécanismes de brisure  $CP$ .

On peut déjà conclure de l'équation 5.104, que tout modèle ayant des couplages réels ou avec la même phase ou encore avec une seule hélicité (seulement LH ou bien seulement RH), donnera un m.d.e fermionique nul, à l'ordre d'une boucle.

Enfin, ce calcul permettra de mettre à jour les conséquences de l'existence d'un m.d.e, non nul, de électron ou du neutron sur les théories de jauge; et de mettre à jour les contraintes imposées par les limites expérimentales sur les paramètres des modèles.

## ANNEXE A

### TRANSFORMATIONS $C$ , $P$ ET $T$ [9]

#### A.1 CONJUGAISON DE CHARGE

L'opérateur de conjugaison de charge  $C$  est défini tel qu'un état  $|f(\vec{p}, s)\rangle$ , décrivant une particule  $f$  avec une impulsion  $\vec{p}$  et une projection de spin  $s$ , est transformé en un état  $|\bar{f}(\vec{p}, s)\rangle$  décrivant l'antiparticule  $\bar{f}$  avec la même impulsion et la même projection de spin:

$$C|f(\vec{p}, s)\rangle = \eta_C|\bar{f}(\vec{p}, s)\rangle \quad (A.1)$$

où  $\eta_C$  est un facteur de phase.

#### A.2 PARITÉ

Sous la parité, le vecteur position  $\vec{r}$  est transformé en  $-\vec{r}$ . L'impulsion  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$  est donc transformée en  $-\vec{p}$  et le moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  reste invariant. Pour des raisons de consistance, on convient que tout moment cinétique  $\vec{J}$  est invariant sous la parité. Ainsi, on écrit:

$$P|f(\vec{p}, s)\rangle = \eta_P|f(-\vec{p}, s)\rangle \quad (A.2)$$

où  $\eta_P$  est un facteur de phase souvent appelé la parité intrinsèque de la particule  $f$ .

#### A.3 INVERSION DU SENS DU TEMPS

L'opération  $T$  consiste à inverser l'horloge:  $t$  est transformé en  $-t$  alors que  $\vec{r}$  reste invariant. L'impulsion  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$  est donc transformée en  $-\vec{p}$  et le moment cinétique  $\vec{L}$  est transformé en  $-\vec{L}$ . On convient de là que tout moment cinétique  $\vec{J}$  est transformé en  $-\vec{J}$ . L'action de  $T$  sur l'état d'une particule  $f$  est donc décrit par:

$$T|f(\vec{p}, s)\rangle = \eta_T |f(-\vec{p}, -s)\rangle \quad (A.3)$$

où  $\eta_T$  est un facteur de phase qui dépend du spin initial  $s$ .

## ANNEXE B

### CALCUL DE PROPAGATEURS

#### B.1 PROPAGATEUR FERMIONIQUE

Pour un fermion de masse  $m$  et de 4-impulsion  $p$ , en interaction avec un champ  $A$  l'équation de mouvement est

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = -J$$

où

$$J = -eA\psi$$

Pour avoir le propagateur fermionique, il suffit d'inverser la transformée de Fourier de l'équation de mouvement.

Transformée:

$$(\not{p} - m)\psi = -J$$

Inversion et propagateur:

$$L = \frac{i}{\not{p} - m} \tag{B.1}$$

#### B.2 PROPAGATEUR D'UN SCALAIRE PHYSIQUE

Une particule scalaire de masse  $M$  et de 4-impulsion  $k$  vérifie l'équation de Klein-Gordon:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + M^2)\Phi = -J$$

Transformée:

$$(-k^2 + m^2)\Phi = -J$$

Propagateur scalaire physique:

$$\frac{i}{k^2 - M^2} \quad (B.2)$$

### B.3 PROPAGATEUR D'UN SCALAIRE NON PHYSIQUE

Pour calculer le propagateur d'un Higgs non physique  $\Phi$ , j'utilise l'invariance de jauge de l'amplitude du processus:  $il \rightarrow il$  où  $i$  et  $l$  sont les fermions rencontrés aux chapitres précédents. Ils échangent le boson vecteur  $V$  dont la masse est donnée par notre Higgs selon le mécanisme de Higgs.

Écrivons d'abord l'amplitude de diffusion dans la jauge physique:

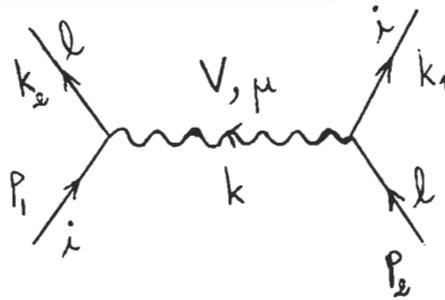


Figure B.1 Diffusion  $il \rightarrow il$  dans la jauge physique

$$M = \bar{u}(k_1) i(c\gamma_L + d\gamma_R) \gamma_\mu u(p_2) \Delta_1^{\mu\nu} \bar{u}(k_2) i(c^* \gamma_L + d^* \gamma_R) \gamma_\nu u(p_1)$$

où  $\Delta_1^{\mu\nu}$  est le propagateur du boson  $V$ , dans la jauge physique. Il est donné par l'équation 5.88.

Maintenant, écrivons l'amplitude de diffusion dans la jauge générale  $R_\xi$ , où on a la contribution de 2 diagrammes de Feynman.

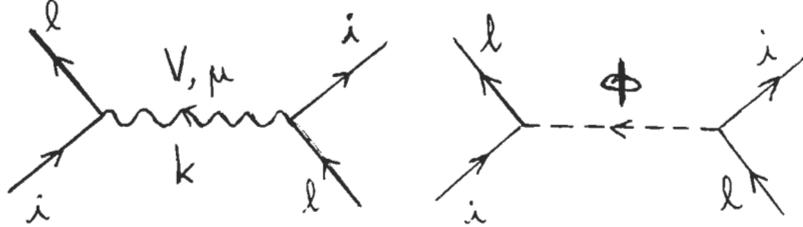


Figure B.2 Diffusion  $il \rightarrow il$  dans la jauge  $R_\xi$

$$M_1 + M_2 = \bar{u}(k_1) i(c\gamma_L + d\gamma_R) \gamma_\mu u(p_2) (\Delta_1^{\mu\nu} + \Delta_2^{\mu\nu}) \bar{u}(k_2) i(c^* \gamma_L + d^* \gamma_R) \gamma_\nu u(p_1) \\ + \bar{u}(k_1) i(a\gamma_L + b\gamma_R) u(p_2) \Delta_\xi \bar{u}(k_2) i(a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) u(p_1)$$

où  $(\Delta_1^{\mu\nu} + \Delta_2^{\mu\nu})$  est le propagateur du boson  $V$  dans la jauge  $R_\xi$  qui figure dans l'équation 4.20 et  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont donnés dans 5.90. Le terme  $\Delta_\xi$  est le propagateur du Higgs non physique qu'on cherche à calculer.

Sachant que:

$$\begin{cases} M_1 = -\bar{u}(k_1) (c\gamma_L + d\gamma_R) \gamma_\mu u(p_2) (\Delta_1^{\mu\nu} + \Delta_2^{\mu\nu}) \bar{u}(k_2) (c^* \gamma_L + d^* \gamma_R) \gamma_\nu u(p_1) \\ M_2 = -\bar{u}(k_1) (a\gamma_L + b\gamma_R) u(p_2) \Delta_\xi \bar{u}(k_2) (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) u(p_1) \end{cases} \quad (B.3)$$

l'invariance de jauge veut que:

$$M = M_1 + M_2$$

d'où: X

$$M_2 = - \left[ \frac{i}{M_V^2(k^2 - \xi M_V^2)} \right] \bar{u}(k_1) (c\gamma_L + d\gamma_R) \not{k} u(p_2) \bar{u}(k_2) (c^* \gamma_L + d^* \gamma_R) \not{k} u(p_1)$$

On utilise la relation  $k = k_1 - p_2 = p_1 - k_2$  et l'équation de Dirac pour trouver:

$$\begin{aligned}
 M_2 = & - \left[ \frac{i}{(k^2 - \xi M_V^2)} \right] \left\{ \bar{u}(k_1) \left\{ \left[ \frac{m_i c - m_l d}{M_V} \right] \gamma_R + \left[ \frac{m_i d - m_l c}{M_V} \right] \gamma_L \right\} u(p_2) \right. \\
 & \left. \times \bar{u}(k_2) \left\{ \left[ \frac{m_i c^* - m_l d^*}{M_V} \right] \gamma_L + \left[ \frac{m_i d^* - m_l c^*}{M_V} \right] \gamma_R \right\} u(p_1) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Or on a vu au chapitre VI, équation (5.92), que:

$$\begin{cases} a = \frac{-1}{M_V} (m_l c - m_i d) \\ b = \frac{-1}{M_V} (m_l d - m_i c) \end{cases}$$

donc B.4 devient:

$$\begin{aligned}
 M_2 = & - \left[ \frac{i}{(k^2 - \xi M_V^2)} \right] \left\{ \bar{u}(k_1) (a \gamma_L + b \gamma_R) u(p_2) \right. \\
 & \left. + \bar{u}(k_2) (a^* \gamma_R + b^* \gamma_L) u(p_1) \right\}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Enfin, de la comparaison entre  $M_2$  de B.3 avec B.5 on déduit l'expression du propagateur du Higgs non physique; soit:

$$\Delta_\xi = \frac{i}{(k^2 - \xi M_V^2)} \tag{B.6}$$

## ANNEXE C

### ALGÈBRE DES MATRICES DE DIRAC

#### C.1 CONVENTIONS

**Métrie:**

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (C.1)$$

**4-vecteurs:**

$$p = (p^\mu) = (p^0, \vec{p}) \quad (C.2)$$

$$p_\mu = (p^0, -\vec{p}) \quad (C.3)$$

$$p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 \quad (C.4)$$

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (C.5)$$

$$\begin{cases} a_0 = a^0 \\ a_k = -a^k \end{cases} \quad (C.6)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (C.7)$$

Notons que les indices grecs ( $\mu, \nu, \rho \dots$  etc) prennent les valeurs de 0 à 3, alors que les indices latins ( $k, l, m \dots$  etc) prennent les valeurs de 1 à 3.

#### C.2 MATRICES DE DIRAC

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (C.8)$$

Les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli.

$$\gamma_5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

$$\not{x} = a_\mu \gamma^\mu \quad (C.10)$$

Les principales relations que j'ai utilisées dans mes calculs sont:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (C.11)$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \quad (C.12)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4.I \quad (C.13)$$

où  $I$  est la matrice identité.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (C.14)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (C.15)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = -2\gamma_\nu \quad (C.16)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu = 4g_{\nu\rho} \quad (C.17)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu = -2\gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu \quad (C.18)$$

### C.3 THÉORÈMES DES TRACES ET CONTRACTIONS TENSORIELLES

J'ai eu besoin aussi des relations suivantes dans mes calculs:

$$\text{tr}(I) = 4 \quad (C.19)$$

$$\text{tr}(\text{produit d'un nombre impair de gammas}) = 0 \quad (C.20)$$

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu} \quad (C.21)$$

$$\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}] \quad (C.22)$$

$$\text{tr}(\gamma_5) = 0 \quad (C.23)$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu) = 0 \quad (C.24)$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = 0 \quad (C.25)$$

$$\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (C.26)$$

Et nous avons la relation [17]:

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\mu\nu} \gamma^\rho + g^{\rho\nu} \gamma^\mu - i\epsilon^{\mu\rho\nu\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5 \quad (C.27)$$

que j'ai utilisée pour calculer la trace d'un produit de six gammas, dont j'ai eu besoin dans le calcul des diagrammes 3, 4, 5 et 6. J'ai trouvé:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho) = & 4 \left[ g_{\alpha\beta}(g_{\mu\nu}g_{\delta\rho} - g_{\mu\rho}g_{\delta\nu} + g_{\nu\rho}g_{\delta\mu}) \right. \\ & - g_{\alpha\delta}(g_{\mu\nu}g_{\beta\rho} - g_{\mu\rho}g_{\beta\nu} + g_{\nu\rho}g_{\beta\mu}) \\ & + g_{\beta\delta}(g_{\mu\nu}g_{\alpha\rho} - g_{\mu\rho}g_{\alpha\nu} + g_{\nu\rho}g_{\alpha\mu}) \\ & \left. + \epsilon_{\alpha\beta\delta}^\theta \epsilon_{\mu\nu\rho\theta} \right] \end{aligned} \quad (C.28)$$

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda \equiv g_\nu^\lambda \quad (C.29)$$

$\delta_\nu^\lambda \equiv g_\nu^\lambda$  car, pour  $\mu$  fixé, on peut considérer  $g^{\mu\nu}$  comme un 4-vecteur et écrire, d'après la relation (C.6),

$$\begin{cases} g_0^\mu = g^{\mu 0} \\ g_k^\mu = -g^{\mu k} \end{cases}$$

On a, par conséquent:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} g_\lambda^\nu \equiv \delta_\nu^\lambda \delta_\lambda^\nu = \sum_{\nu=0}^4 \delta_\nu^\nu = 4 \quad (C.30)$$

Par contre

$$g^{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \delta^{\lambda\mu} = \sum_{\mu=0}^4 g_{\mu\mu} = -2 \quad (C.31)$$

Notons que toutes les relations précédentes sont valables à 4 dimensions. Donc, pour  $n$  dimensions l'algèbre change. Voici quelques relations à  $n$  dimensions [14]:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = n \quad (C.32)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = n \quad (C.33)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = (2 - n) \gamma_\nu \quad (C.34)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu = 4g_{\nu\rho} + (n - 4) \gamma_\nu \gamma_\rho \quad (C.35)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu = -2\gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu + (4 - n) \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \quad (C.36)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] I.S. Altarev et al., Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 44 (1986) 360  
[JETP Lett. 44 (1986) 460];  
K. F. Smith et al., Phys. Lett. B 234 (1990) 191.
- [2] S.K. Lamoureux et al., Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 2275;  
D. Cho et al., Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 2559;  
S.A. Murthy et al., Phys. Rev. Lett. 63 (1989) 965.
- [3] E.P. Shabalin, Yad. Fiz. 28 (1978) 151 (Sov. J. Nucl. Phys. 28 (1978) 75).
- [4] I.B. Khriplovich, Yad. Fiz. 44 (1986) 1019  
(Sov. J. Nucl. Phys. 44 (1986) 659).
- [5] C. Hamzaoui, M.E. Pospelov, Phys. Lett. B357 (1995) 616.
- [6] D. Chang, Fermilab-Conf-90/265-T NUHEP-TH-90/38
- [7] Particle Data Group. Phys. Rev. D 50 (1994)
- [8] I. J. Aitchison et A. J. Hey. 1983. *Gauge theories in particle physics*. Adam Hilger Ltd, Bristol, 341p.
- [9] B. Kayser, F. Gibrat-Debu et F. Perrier. 1989. *The physics of massive neutrinos*. World scientific lecture notes in physics V.25, 115p.
- [10] J. D. Jackson. 1975. *Classical electrodynamics*. J. Wiley, New York;  
Toronto, 848p.

- [11] J. B. Marion. 1965. *Classical electrodynamic radiation*. Academic press, New York, 479p.
- [12] T. P. Cheng et L. F. Li. 1984. *Gauge theory of elementary particle physics*. Clarendon Press, Oxford, 536p.
- [13] R. N. Mohapatra. 1983. *Quarks, leptons and beyond*. H. Fritzsch, R. D. Peccei, H. Saller et F. Wagner, NATO ASI Series, Series B: Physics Vol. 122, pp. 219-290.
- [14] R. Gastmans. *Gauge theories: An introduction*. Bevoegdverklaard navorser, N.F.W.O., Belgium, 171p.
- [15] A. Devoto et D. W. Duke. 1984. *Table of integrals and formulae for Feynman diagram calculations*. La Rivista Del Nuovo Cimento, Vol. 7, No. 6, 39p.
- [16] N. G. Deshpande et M. Nazerimonfared. Nucl. Phys. B 213 (1983), pp. 390-408.
- [17] A. Sirlin. Nucl. Phys. B 192 (1981), pp. 93-99.
- [18] J.F. Nieves, D. Chang et P.B. Pal, Phys. Rev. D 33 (1986) 3324.
- [19] D. Atwood, C.P. Burgess, C. Hamzaoui, B. Irwin et I.A. Robinson Phys. Lett. B 256 (1991) 471.

*Et dis: "Ô mon Seigneur, accrois mes connaissances"*

[Saint Coran 20:114].