

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE

**PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES**

**COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉLECTRONIQUE INDUSTRIELLE**

**PAR
SEYED MOHAMMAD JAVAD SADR**

**COMMANDE D'UN MANIPULATEUR AVEC ARTICULATIONS
FLEXIBLES PAR UNE APPROCHE DE PASSIVITÉ**

DÉCEMBRE 1996

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Résumé

Dans ce mémoire, nous proposons une loi de commande basée sur l'énergie et la passivité pour un robot avec articulations flexibles. Il n'est pas nécessaire de mesurer l'accélération pour la loi de commande proposée, et une boucle d'état réduit (l'état du moteur) est suffisante pour stabiliser le robot à articulations flexibles. Mais afin d'améliorer la performance et la précision, il est préférable d'utiliser l'état complet du système. Nous présentons le modèle d'un manipulateur SCARA à deux articulations flexibles qui est employé pour évaluer les correcteurs par simulation. Nous concevons deux contrôleurs en supposant que l'état partiel ou complet est mesurable, et analysons leurs performances. Les conditions nécessaires sont prises en compte pour obtenir un système d'erreur passif en présence du frottement du moteur et du lien, et également pour démontrer la stabilité locale asymptotique de l'état à l'aide d'un argument de Lyapunov. Les résultats de simulation montrent que la loi de commande de l'état complet permet d'obtenir des performances nettement supérieures que la loi de commande avec retour d'état réduit. Les résultats confirment que cette loi de commande est robuste vis-à-vis la variation de la constante de rigidité et des conditions initiales.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon Directeur de recherche, le Professeur Pierre Sicard, pour m'avoir fait l'honneur de diriger mon sujet de recherche et pour avoir su faire naître en moi la passion du travail bien fait.

Sa clairvoyance, sa compétence, alliées à une grande disponibilité et à un suivi pédagogique régulier, ont été un guide précieux au cours des nombreuses conversations scientifiques qui ont porté sur l'ensemble de ce sujet de recherche.

Je tiens à remercier particulièrement mon grand ami Nicolas Léchevin pour ces longues heures qu'on a passées ensemble à échanger nos idées. Ses suggestions et ses critiques ont beaucoup aidé à franchir tant de difficultés. Je remercie aussi mon collègue Éric Le courtois, pour m'avoir accompagné pendant ces années.

Je voudrais remercier tous les membres de ma famille et tout spécialement mes parents pour leur patience durant mes longues années d'étude, leurs encouragements incessants, et leur support moral. Je remercie aussi mes grands frères, Masoud et Reza; sans eux et sans leurs inestimables

conseils et soutien financier je n'aurais pas été en mesure de contribuer à la recherche scientifique.

Enfin, je tiens à remercier toute personne qui m'a aidé de près ou de loin et dont ma mémoire n'a pu restituer le nom.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	i
REMERCIEMENTS.....	ii
TABLE DES MATIÈRES.....	iv
LISTE DES SYMBOLES	viii
LISTE DES FIGURES.....	xii
LISTE DES TABLEAUX.....	xv

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET REVUE DE LA LITTÉRATURE	1
1.1 Introduction.....	1
1.2 Revue de la littérature	3
1.2.1 Technique des perturbations singulières.....	3
1.2.2 Linéarisation par rétroaction	5
1.2.3 Commande par mode de glissement.....	7
1.2.4 Conditionnement de l'entrée	8
1.2.5 Méthode de la commande H_{∞}	9
1.2.6 Technique de la passivité et d'énergie	11
1.3 Problématique et objectif.....	13
1.4 Organisation.....	14

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU MANIPULATEUR SCARA.....	16
2.1 Introduction.....	16
2.2 Modèle général du robot	17
2.3 Détermination du modèle du robot SCARA à l'aide du logiciel CINDYN	21
2.3.1 Résumé du logiciel CINDYN	21
2.3.2 Convention Denavit-Hartenberg modifiée	23
2.3.3 Modèle du manipulateur SCARA	24
2.3.3.1 Définition des paramètres du manipulateur	29
2.3.3.1.1 Paramètres des membres.....	29
2.3.3.1.2 Paramètres des actionneurs.....	29
2.3.3.2 Décomposition du robot	30
2.3.3.3 Constante de rigidité.....	37
2.3.3.4 Normalisation du modèle du manipulateur	39

CHAPITRE 3

DÉFINITIONS ET THÉORÈMES.....	43
-------------------------------	----

CHAPITRE 4

COMMANDE DE MANIPULATEURS AVEC JOINTS FLEXIBLES PAR RETOUR D'ÉTAT PARTIEL BASÉE SUR LA PASSIVITÉ.....	47
4.1 Introduction.....	47
4.2 Approche de conception.....	48

4.2.1	Étape 1 - Conception de signal d'anticipation	49
4.2.2	Étape 2 - Stabilisation par rétroaction	49
4.3	Signal d'anticipation proposé	51
4.3.1	Solution du signal d'anticipation proposé.....	52
4.4	Stabilité de la loi de commande proposée	60
4.4.1	Évaluation de la stabilité et du taux de convergence.....	66
4.4.1.1	Système d'erreur en boucle fermée.....	68
4.4.2	Discussion de la stabilité	78
4.5	Conclusion.....	79

CHAPITRE 5

	LOI DE COMMANDE AVEC RETOUR DE L'ÉTAT COMPLET	81
5.1	Introduction.....	81
5.2	Système d'erreur	82
5.3	Contrôleur strictement passif.....	82
5.4	Évaluation de l'état désiré	84
5.5	Conclusion	85

CHAPITRE 6

	VALIDATION DES RÉSULTATS.....	86
6.1	Retour d'état partiel (état des moteurs).....	87
6.1.1	Augmentation de la pulsation de l'état des moteurs	92
6.1.2	Augmentation du frottement des membres	94

6.2 Retour d'état complet (état des moteurs et des membres)	96
6.3 Robustesse de la performance de la loi de commande.....	102
6.3.1 Variation de la constante de torsion	102
6.3.2 Variation des conditions initiales	103
6.4 Conclusion	106

CHAPITRE 7

CONCLUSION GÉNÉRALE	107
7.1 Contributions de ce travail.....	108
7.2 Résumé du travail effectué	109
7.3 Mise en œuvre.....	110
7.4 Travaux futures	111
RÉFÉRENCES	112
ANNEXES	117
ANNEXE A : RÉOLUTION DES MODÈLES CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU ROBOT SCARA ÉTUDIÉ.....	117
ANNEXE B : CONDITIONS DE POSITIVITÉ ET DE SEMI- POSITIVITÉ DE \mathbf{K}_{w_1}	156
ANNEXE C : LISTE DES PROGRAMMES DE SIMULATION RÉALISÉS À L'AIDE DE MATLAB®	159
ANNEXE D : RÉSULTATS DE SIMULATION	172

LISTE DES SYMBOLES

- $(\cdot)^c$: Représente l'élément ramené du côté membre de l'élément de transmission.
- $\|\cdot\|$: La norme Euclidienne d'une matrice ou d'un vecteur.
- B** : Matrice d'entrée du modèle d'état.
- C**(\cdot, \cdot) : La matrice des coefficients des forces/couples de Coriolis et centrifuge.
- D** : La matrice des coefficients des forces/couples de frottement visqueux.
- D**(\cdot) : Le vecteur des forces/couples de frottement visqueux.
- DH : La convention Denavit-Hartenberg modifiée pour représenter la configuration du manipulateur.
- F_{li} : La force appliqué au membre i .
- G**(\cdot) : Le vecteur des forces/couples de gravité.
- $g_y(\mathbf{q})$: La coefficient de la gravité le long de l'axe y .
- $g_z(\mathbf{q})$: La coefficient de la gravité le long de l'axe z .
- k_i : La constante de rigidité de l'articulation i .
- K** : L'énergie cinétique du système.
- K** : La matrice de rigidité du système.
- K**^c : La matrice de rigidité après avoir fait la normalisation.

- \mathbf{K}_e : La matrice de rigidité normalisée des membres 1 et 2.
- \mathbf{K}_{pl} : La matrice diagonale du gain proportionnel du correcteur du membre.
- \mathbf{K}_{pm} : La matrice diagonale du gain proportionnel du correcteur du moteur.
- \mathbf{K}_{vl} : La matrice diagonale du gain dérivatif du correcteur du membre.
- \mathbf{K}_{vm} : La matrice diagonale du gain dérivatif du correcteur du moteur.
- L : Le Lagrangien.
- m : Le nombre d'articulations flexibles.
- $\mathbf{M}(\cdot)$: La matrice de masses-inerties.
- n : Le nombre total d'articulations.
- P : L'énergie potentielle du système.
- q_l : La position du membre.
- q_m : La position du moteur.
- \mathbf{q} : Le vecteur de position.
- $\dot{\mathbf{q}}$: Le vecteur de vitesse.
- $\ddot{\mathbf{q}}$: Le vecteur d'accélération.
- $\mathbf{q}^{(i)}$: La dérivée $i^{\text{ième}}$ de \mathbf{q} .
- \mathbf{q}_{ch} : Le vecteur de position de la charge.
- \mathbf{q}_l : Le vecteur des positions des membres.

- \mathbf{q}_{ld} : Le vecteur des positions désirées des membres.
- \mathbf{q}_m : Le vecteur des positions des moteurs.
- \mathbf{q}_{md} : Le vecteur des positions désirées des moteurs.
- r_1 : Le rayon de la poulie du côté du moteur.
- r_2 : Le rayon de la poulie du côté du membre.
- \mathbf{T} : Le vecteur des couples du robot .
- T_{ch} : Le couple appliqué à la charge.
- T_{li} : Le couple appliqué au membre i .
- \mathbf{T}_m : Le vecteur des couples délivrés pas les actionneurs du manipulateur.
- T_{mi} : Le couple délivré par le moteur i .
- $\mathbf{u}(t)$: Le vecteur du couple d'entrée.
- \mathbf{u}_{ff} : Le signal de la commande d'anticipation d'entrée.
- \mathbf{u}_0 : La commande d'entrée stabilisatrice.
- $\mathbf{y}(t)$: Le vecteur de la sortie.
- $\mathbf{y}_d(t)$: Le vecteur de la trajectoire de sortie désirée.
- $\mathbf{y}_p(t)$: Le vecteur de la sortie de position du moteur.
- $\mathbf{y}_v(t)$: Le vecteur de la sortie de vitesse du moteur.
- $\mathbf{y}_{pv}(t)$: Le vecteur de la combinaison entre la position et la vitesse du moteur.
- $\underline{\sigma} = \max \sigma(\cdot)$: La valeur singulière maximum d'une matrice.

$\bar{\sigma} = \min \sigma(\cdot)$: La valeur singulière minimum d'une matrice.

LISTES DES FIGURES

Figure 2.1	Schéma du robot SCARA.....	17
Figure 2.2	Structure mécanique et définition des variables.....	26
Figure 2.3	Rapport entre les positions du moteur 4, de la charge et du membre 2	33
Figure 2.4	Entraînement du membre 2.....	37
Figure 4.1	Structure du contrôleur proposé.....	50
Figure 6.1	Schéma du système pour le retour d'état partiel.....	37
Figure 6.2	Erreur de position des membres 1 et 2; consigne échelon, état partiel.....	88
Figure 6.3	Erreur de position des actionneurs 1 et 2; consigne échelon, état partiel.....	89
Figure 6.4	Couple des moteurs 1 ('o') et 2 ('x'); état partiel, consigne échelon.....	89
Figure 6.5	Position des membres 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état partiel.....	90
Figure 6.6	Position des actionneurs 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état partiel.....	91
Figure 6.7	Couple de moteurs 1 ('o') et 2 ('x'); état partiel, entrée cosinus.....	92
Figure 6.8	Erreur de position des membres 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec \mathbf{K}'_{pm} , \mathbf{K}'_{vm}	93

Figure 6.9	Erreur de position des actionneurs 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec \mathbf{K}'_{pm} , \mathbf{K}'_{vm}	94
Figure 6.10	Erreur de position des membres 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec \mathbf{K}''_{pm} , \mathbf{K}''_{vm} et \mathbf{D}'_l	95
Figure 6.11	Erreur de position des actionneurs 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec \mathbf{K}''_{pm} , \mathbf{K}''_{vm} et \mathbf{D}'_l	95
Figure 6.12	Schéma du système pour le retour d'état complet.....	96
Figure 6.13	Position des membres 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; consigne échelon, état complet....	97
Figure 6.14	Position des actionneurs 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; consigne échelon, état complet.	98
Figure 6.15	Couple des moteurs 1 ('o') et 2 ('x'); état partiel, consigne échelon.....	99
Figure 6.16	Position des membres 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état complet.....	100
Figure 6.17	Position des actionneurs 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état complet..	101
Figure 6.18	Couples des moteurs 1 ('o') et 2 ('x'); état partiel, consigne cosinus.....	101
Figure 6.19	Position des membres 1 et 2 avec ses erreurs; état complet, consigne échelon, [1(-);0.75('o');1.25('x')] \mathbf{K}_e	102

Figure 6.20	Position des membres 1 et 2 avec ses erreurs; état complet, consigne échelon, conditions initiales: [0.02(-); -0.02('o'); -0.05('x')] rad.....	103
Figure 6.21	Position des membres 3 et 4 avec ses erreurs; état complet, consigne échelon, conditions initiales: [0.02(-); -0.02('o'); -0.05('x')] rad.....	104
Figure 6.22	Position des membres 1 et 2; état complet, consigne échelon, conditions initiales: [0.02(-); 0.5('o'); -0.5('x')] rad.....	105
Figure 6.23	Position des membres 1 et 2; avec ses erreurs, état complet, entrée cosinus, conditions initiales: [0.02(-); 0.5('o'); 0.5('x')] rad.....	105

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Paramètres géométriques et massiques du manipulateur.....	30
Tableau 2.2	Paramètres géométriques et massiques des actionneurs	30

CHAPITRE 1

INTRODUCTION ET REVUE DE LA LITTÉRATURE

1.1 Introduction

La conception d'un robot plus rapide et plus léger demande que des compromis soient faits au niveau du choix des matériaux des actionneurs et des éléments de transmission. Par exemple, les réducteurs harmoniques sont très efficaces pour la transmission de couples élevés et présentent un faible retour de dent ainsi qu'un poids assez léger, mais ils possèdent une flexibilité inhérente [SweetG85]. Les chercheurs ont montré l'effet déstabilisateur de la flexibilité sur les lois de commande qu'ils ont conçues pour des robots rigides [SweetG85, CetinkuntB90]. Pour assurer la stabilité et de bonnes performances, la loi de commande doit prendre en compte la flexibilité.

Les résultats de simulations, confirmés par des expériences, ont montré que plusieurs algorithmes de contrôle développés pour les robots rigides ne fonctionnent pas de manière satisfaisante en présence d'une rigidité réduite au niveau des articulations qui cause des oscillations. Ces oscillations se produisent avec les lois de commande continues et discontinues conçues pour un robot rigide. Pour les cas donnant des résultats satisfaisants, les résultats sont critiques et ne sont pas robustes.

Plusieurs lois de commande ont été proposées pour la commande des manipulateurs avec articulations flexibles: techniques des perturbations singulières; linéarisation par rétroaction [Spong92]; commande robuste [Qu95]; commande adaptative [ChenF89, LozanoB92], technique de H_∞ [Lin91], et techniques d'énergie et de passivité (incluant la commande par mode de glissement) [ChenF89, LozanoB92, PadenRB90]. La plupart des lois de commande qui ont été proposées requiert la connaissance de l'état complet et même quelque fois la mesure de l'accélération. Aussi, une caractéristique linéaire pour la flexibilité est normalement considérée. De plus, la rigidité des articulations doit être suffisamment élevée pour utiliser le mode de séparation par la méthode des perturbations singulières. Ces restrictions ne s'appliquent pas ou peuvent être évitées avec la technique de passivité. Spécifiquement, un retour d'état réduit est suffisant pour stabiliser un robot avec articulations flexibles. De plus, la linéarisation n'est pas nécessaire pour l'approche de passivité, parce que les propriétés d'énergie du système sont exploitées pour définir des lois de commande linéaire ou non linéaire. Alors que la loi de commande passive garantit la stabilité et la robustesse de stabilité, elle ne garantit pas les performances. Afin d'améliorer la performance et la précision, il est préférable d'utiliser l'état complet du système par mesure ou à l'aide d'observateurs lorsque certaines grandeurs ne sont pas mesurables [SicardL95].

Nous présentons brièvement quelques approches qui ont été considérées depuis plusieurs années comme étant capables de résoudre le problème de commande des robots avec joints flexibles incluant la technique des perturbations singulières, la linéarisation par rétroaction, le conditionnement de l'entrée, la commande par mode de glissement et la technique de H_{∞} . Les atouts, les inconvénients, et les limites d'application de chacune de ces méthodes sont présentés.

1.2 Revue de la littérature

1.2.1 Technique des perturbations singulières

Cette approche est basée sur une formulation du modèle dynamique du système comme deux sous-systèmes dont un représente une perturbation singulière [Spong87]. Dans cette méthode lorsque le coefficient de perturbation singulière tend vers zéro, le modèle du système coïncide avec celui du robot manipulateur rigide [MarinoN84, SicilianoB88].

Même lorsque seulement la position et la vitesse du lien sont disponibles pour le retour, cette loi de commande fournit l'amortissement naturel à l'articulation du système. Pratiquement, cette méthode s'applique lorsque la rigidité est élevée, comme dans les réducteurs harmoniques, et le couple de

torsion et ses dérivées temporelles constituent une série de variables d'état '*rapides*'.

Les résultats de cette technique sont très satisfaisants si la commande est faite dans deux parties additives: commandes lente et rapide avec le retour de l'état lent et rapide respectivement. En fait dans ce cas, le modèle réduit lent coïncide avec celui du même robot à articulations rigides et évidemment nous faisons la commande selon les techniques existantes pour un robot rigide. Le modèle réduit rapide est un système linéaire paramétrisé dans les variables d'état lentes et nous pouvons le commander par la méthode des commandes rapides. Par conséquent, si la commande rapide peut stabiliser le modèle réduit rapide, i.e. les oscillations de l'élément élastique, les trajectoires du système réduit vont approximer les trajectoires des joints flexibles contrôlés du robot.

Pour obtenir de bons résultats, il doit y avoir une séparation temporelle suffisante entre les modes des modèles lent et rapide. Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser la méthode du *manifold* d'intégral pour obtenir un modèle réduit lent plus précis [SpongKK87]. Donc cette méthode n'est pas applicable pour une élasticité importante pour un ressort de torsion non linéaire et le retour de l'état complet (position et vitesse du moteur et du membre) est nécessaire pour avoir de bons résultats. Aussi, le calcul du *manifold* d'intégral est complexe et

il utilise beaucoup d'approximations afin d'obtenir les paramètres de son espace. De plus, il est nécessaire de connaître les paramètres du système ou la mesure des variables rapides et de leurs dérivées en fonction du temps mais il ne donne pas la robustesse vis-à-vis les incertitudes des paramètres du système.

1.2.2 Linéarisation par rétroaction

Une des méthodes de commande des manipulateurs avec articulations flexibles sur laquelle beaucoup de chercheurs travaillent également est l'approche de linéarisation par rétroaction [Spong92].

Cette méthode est basée sur la linéarisation par rétroaction des variables d'état du système. Pratiquement, les remarques suivantes sont observées dans l'application de cette méthode:

- La commande par cette approche requiert la mesure de l'état complet qui comprend la position et la vitesse des moteurs et des membres.
- L'évaluation des équations aux dérivées partielles et la conception de la loi de commande finale par rétroaction sont complexes.
- En employant la technique de commande adaptative, nous obtenons des résultats satisfaisants.

- Elle demande la connaissance du modèle non linéaire exact du système, et l'implantation coûtera cher (en terme de mémoire et de temps de calcul).
- La robustesse de la loi de commande vis-à-vis l'incertitude des paramètres du système comme la matrice de masses-inerties, la caractéristique de rigidité, la charge, et en général les perturbations demande d'être évaluée.
- Obtenir la commande pour un système linéaire qui donne la robustesse n'est déjà pas facile. Mais si les bornes de variations des paramètres sont données, le système en boucle fermée peut être considéré comme un objet linéaire pour une classe de perturbations qui sont bornées dans l'entourage du point équilibre.
- L'application de cette méthode dans le cas où tous les paramètres du système sont inconnus nous rend un système plus difficile à contrôler et nous pouvons peut être concevoir une loi de commande pour faire converger l'erreur vers l'origine avec des commandes supplémentaires. Une autre façon de régler ce problème est d'employer un algorithme d'identification non linéaire.
- Cette méthode s'applique pour une caractéristique de rigidité linéaire.

- En général, la linéarisation par rétroaction exacte est difficile à appliquer pour un manipulateur avec joints flexibles et pour cette raison les chercheurs l'emploient soit pour le modèle d'approximatif soit pour la linéarisation par rétroaction avec l'état partiel [Lin91, Sicard93].
- Si les paramètres du système sont inconnus, quelques algorithmes de commande demanderont l'accélération et la troisième dérivée de la position du membre [Spong87]. En pratique, elles sont difficiles à mesurer ou à reconstituer et même si c'est le cas, elles sont bruitées et demandent un filtre supplémentaire.

Pour les raisons mentionnées, la méthode de linéarisation par rétroaction n'est pas conseillée pour être employée pour les manipulateurs avec articulations flexibles.

1.2.3 Commande par mode de glissement

La commande par mode de glissement est une des commandes entrée-sortie robustes pour les systèmes non linéaires et flexibles. Pour la loi de commande proposée dans [MradA91], nous n'avons pas besoin de calculer la dérivée du signal de la vitesse (accélération) ou d'inverser la matrice de masses-inerties. Aussi, la mesure de l'accélération et la dérivée supérieure ne sont pas nécessaires. En plus, la stabilité asymptotique globale est garantie par

cette méthode de commande pour la position et la vitesse du membre. La commutation du signal de commande peut exciter la fréquence naturelle de l'élément flexible du système [MradA91].

La conception de certaines lois de commande robuste requiert seulement les informations de position et de vitesse des membres. Elle donne une grande région d'attraction. La loi de commande est applicable et robuste dans le cas de l'incertitude des paramètres autonomes non linéaires du système, d'une erreur du modèle, de la variation de la charge, et d'une caractéristique de rigidité inconnue [Qu95].

1.2.4 Conditionnement de l'entrée

Une autre méthode qui est présentée pour la génération de la commande d'entrée est le conditionnement de l'entrée pour réduire ou éliminer la vibration au niveau de l'effecteur. Dans cette méthode de commande, la durée du signal d'entrée doit être conçue afin d'empêcher les vibrations du système [SingerS88a, SingerS88b]. Ce temps doit être aussi optimisé. Cette approche est robuste pour une faible plage d'incertitudes des paramètres du système et peut être appliquée pour les systèmes en boucle fermée et ouverte. Elle est basée sur une des méthodes de profils de came (*cam profiles*) ou contrôle posicat (*posicat control*) [SingerS89]. En fait, elle emploie comme couple

d'entrée une fonction du type versinus (i.e. $1-\cos(\omega t)$) ou une sinusoïde avec une variation initiale de type rampe [MecklS88].

Cette méthode élimine l'oscillation due au couple d'entrée mais elle emploie le modèle découplé des joints alors elle ne peut pas résoudre le problème des oscillations à cause de la force de Coriolis et la force de contact de l'effecteur avec les obstacles dans l'environnement [Sicard93].

1.2.5 Méthode de la commande H_∞

Dans [Lin91], cette approche est appliquée pour un manipulateur avec deux joints et liens flexibles. Elle est basée sur deux parties principales: 1) une linéarisation par rétroaction partielle et 2) un retour d'état du membre.

D'après Lin, la solution facile et la plus efficace pour poursuivre la trajectoire désirée de l'effecteur est de concevoir une loi de commande basée sur le retour d'état qui simultanément stabilise l'oscillation due à la flexibilité et découple le système en deux parties. La partie linéaire non autonome inclut la dynamique de chaque moteur avec le couple d'entrée et la sortie désirée (position du moteur). La partie inobservable non linéaire contient la dynamique de l'élément flexible. La partie découplée de la dynamique du moteur est conçue de façon à poursuivre précisément la trajectoire de l'effecteur. Le

retour partiel de l'état du système est basé sur un algorithme de géométrie différentielle.

Mais en l'absence d'amortissement dissipatif du membre, n'importe quel retour d'état qui fait une poursuite exacte au niveau de l'état du moteur n'est pas capable de stabiliser l'oscillation de l'effecteur. Ce problème est relié à la dynamique de l'état zéro qui est instable. Par conséquent, afin de stabiliser la dynamique non linéaire inobservable de la flexion, il est nécessaire que le sous système linéaire de la dynamique du moteur et le sous système non linéaire de la flexibilité se fusionnent. Autrement dit pour éliminer complètement la vibration de l'élément flexible, il faut sacrifier la perfection de poursuite de l'état du moteur en introduisant un contrôle de perturbation dans le voisinage de la trajectoire désirée.

La commande de la stabilisation perturbée peut être effectuée avec une des commandes robustes par retour d'état pour systèmes multivariables linéaires, e.g. la technique Nyquist-Lien, LQG/LTR, la commande optimale \mathbf{H}_∞ .

La commande \mathbf{H}_∞ , normalement, demande énormément de calculs et de résoudre des équations assez difficiles parce qu'elle résulte du domaine fréquentiel. Lin a présenté une loi de commande \mathbf{H}_∞ optimale basée sur le

retour d'état qui requiert de résoudre seulement une équation algébrique de Riccati, avec un intégrateur qui permet d'éliminer d'erreur stationnaire. Elle amortit l'oscillation et donne une poursuite robuste de la trajectoire du moteur.

Les résultats ne dépendent pas du modèle exact du manipulateur et il ne demande pas une bonne connaissance de la constante de rigidité et des paramètres du système. Et aussi, nous pouvons considérer une rigidité non linéaire aux joints et également aux liens (flexibilité articulaire et de la structure).

1.2.6 Technique de la passivité et d'énergie

La technique de la passivité est basée sur le formage de l'énergie naturelle du robot via un retour d'état. Comme la mesure de la vitesse est bruitée en général, il est préférable de ne pas utiliser cette grandeur directement pour le retour d'état pour obtenir de bonnes performances pour le système. Dans [BerghuisN93], cette technique a été exploitée pour la conception d'un contrôleur-observateur dans le cas d'un robot rigide en tenant compte seulement de la mesure de la position. Dans ce travail, la fonction d'énergie du système avec l'observateur et le contrôleur en boucle fermée garantit la stabilité asymptotique.

La conception d'une loi de commande pour un robot manipulateur flexible via le retour d'état requiert les informations des quatre variables d'état pour chacun de joint, soit la position et la vitesse du moteur et du membre, ou la position, la vitesse, l'accélération et la dérivée de l'accélération des membres. Tomei a proposé d'utiliser un observateur basé sur la propriété de l'énergie et de la passivité pour les joints flexibles afin de mesurer seulement l'état des moteurs [Tomei90]. Cette technique est également exploitée pour concevoir un contrôleur pour des systèmes flexibles [KarlVL94]. Malgré toutes les contraintes qui existent dans ces systèmes, la robustesse de la stabilité de ce contrôleur est assurée en employant la technique de passivité.

Une bonne combinaison de la commande adaptative et de la technique de passivité est aussi présentée dans [Darmaren96] pour contrôler le robot du SRMS ('Shuttle Remote Manipulator System') dont les membres sont flexibles. Le choix de la fonction candidate de Lyapunov a été importante afin de démontrer la stabilité asymptotique globale. Les conclusions de stabilité sont valides même pour une charge massive.

Dans [Sicard93], une étude est présentée pour la commande de robots avec joints flexibles, en particulier le robot du SRMS en négligeant la flexibilité des membres. L'approche de commande requiert les étapes suivantes : trouver

un signal d'anticipation qui permet d'obtenir un système d'erreur passif ou pouvant être rendu passif par retour d'état statique; trouver un retour d'état statique pour rendre le système observable et passif; trouver un retour d'état strictement passif pour stabiliser le système. L'étude de stabilité et de robustesse de la loi de commande permet de justifier des approximations effectuées dans le signal d'anticipation pour l'implantation. Cette thèse de doctorat constitue la référence de base pour ce travail.

1.3 Problématique et objectif

Considérons un manipulateur avec joints rigides et flexibles et avec membres rigides se déplaçant librement dans l'espace.

Considérons la trajectoire de sortie désirée décrite par $y_d(t)$ qui est le vecteur des positions angulaires désirées des membres et ses dérivées temporelles, pour $t \geq t_0$

Nous désirons concevoir une loi de commande $u(t)$ telle que la sortie $y(t)$ suive la consigne $y_d(t)$, et que la stabilité interne soit garantie.

$u(t)$ est le vecteur des couples d'entrée des moteurs et $y(t)$ est une fonction du vecteur des positions angulaires des membres ($y(t) = h(q(t))$).

Nous voulons concevoir un contrôleur qui stabilise le système par l'approche d'énergie et de passivité en supposant que l'état partiel (position et vitesse de moteur) est disponible et d'analyser la robustesse et la performance du système vis-à-vis la flexibilité au niveau des articulations. Nous négligeons le frottement Coulomb du système qui est non linéaire dans les étapes suivantes.

Afin d'améliorer la performance et la précision, il est préférable d'utiliser l'état complet du système, soit la position et la vitesse des membres et des moteurs. Dans ce cas, nous allons voir au chapitre 5 que nous ne pouvons pas résoudre le signal d'anticipation de façon analytique, alors nous emploierons une approximation du signal d'anticipation. L'approximation sera justifiée par une analyse de robustesse et par simulation. Pour aboutir à cette fin, nous nous proposons de suivre les étapes décrites à la section suivante.

1.4 Organisation

Au chapitre 2, nous présentons le modèle d'un manipulateur à articulations flexibles. Pour ceci, nous expliquons rapidement le logiciel qui évalue la cinématique directe et la dynamique inverse du manipulateur. La procédure pour déterminer le modèle, et aussi les hypothèses sont décrites. Finalement le modèle du robot avec joints flexibles normalisé du côté des membres des éléments de transmission est présenté.

Dans le chapitre 3, nous rappelons les définitions et les théorèmes que nous utiliserons aux prochains chapitres.

Dans le chapitre 4, nous présentons la procédure de conception de la loi de commande basée sur la passivité. Les hypothèses nécessaires pour avoir un système d'erreur passif en présence du frottement du moteur et du lien sont décrites. Une loi de commande avec retour d'état réduit, incluant un signal d'anticipation basé sur le modèle et un signal de rétroaction indépendant du modèle, est développée. La stabilité asymptotique de l'état du système est démontrée par l'approche d'énergie de Lyapunov et par la propriété de passivité de l'équation d'erreur.

La loi de commande est étendue à la rétroaction de l'état complet au chapitre 5, afin d'améliorer les performances dynamiques et statique du système.

Les résultats de simulation et la stabilité du système en tenant compte des deux lois de commandes, retour d'état réduit et complet, et leur robustesse et performances pour plusieurs constantes de rigidité sont présentés au chapitre 6.

Finalement au chapitre 7, nous dressons une conclusion pour ce travail.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DU MANIPULATEUR SCARA

2.1 Introduction

Le choix convenable d'un modèle mathématique, pour la conception de la loi de commande, est une étape cruciale pour le développement de la loi de commande d'un système. Étant donné que la flexibilité aux joints est une des sources majeures de perturbation pour la commande d'un robot, sa bonne connaissance nous permettra d'obtenir de meilleurs résultats avec la loi de commande appliquée au robot. Nous avons besoin du modèle détaillé pour la conception de la commande et son implantation. Il est préférable d'étudier la partie la plus significative de la dynamique du système afin de simplifier et de minimiser les calculs requis. Dans ce chapitre, nous présentons les étapes nécessaires pour obtenir le modèle d'un manipulateur avec articulations flexibles. Nous avons fait appel à un logiciel basé sur l'approche de Newton-Euler pour obtenir ce modèle [MontignyS94].

Nous analyserons un robot du type SCARA avec 4 degrés de liberté en tenant compte de la flexibilité dans les deux premières articulations et pour lequel l'actionneur du deuxième membre est positionné sur le premier membre. Ce manipulateur est illustré à la figure 2.1.

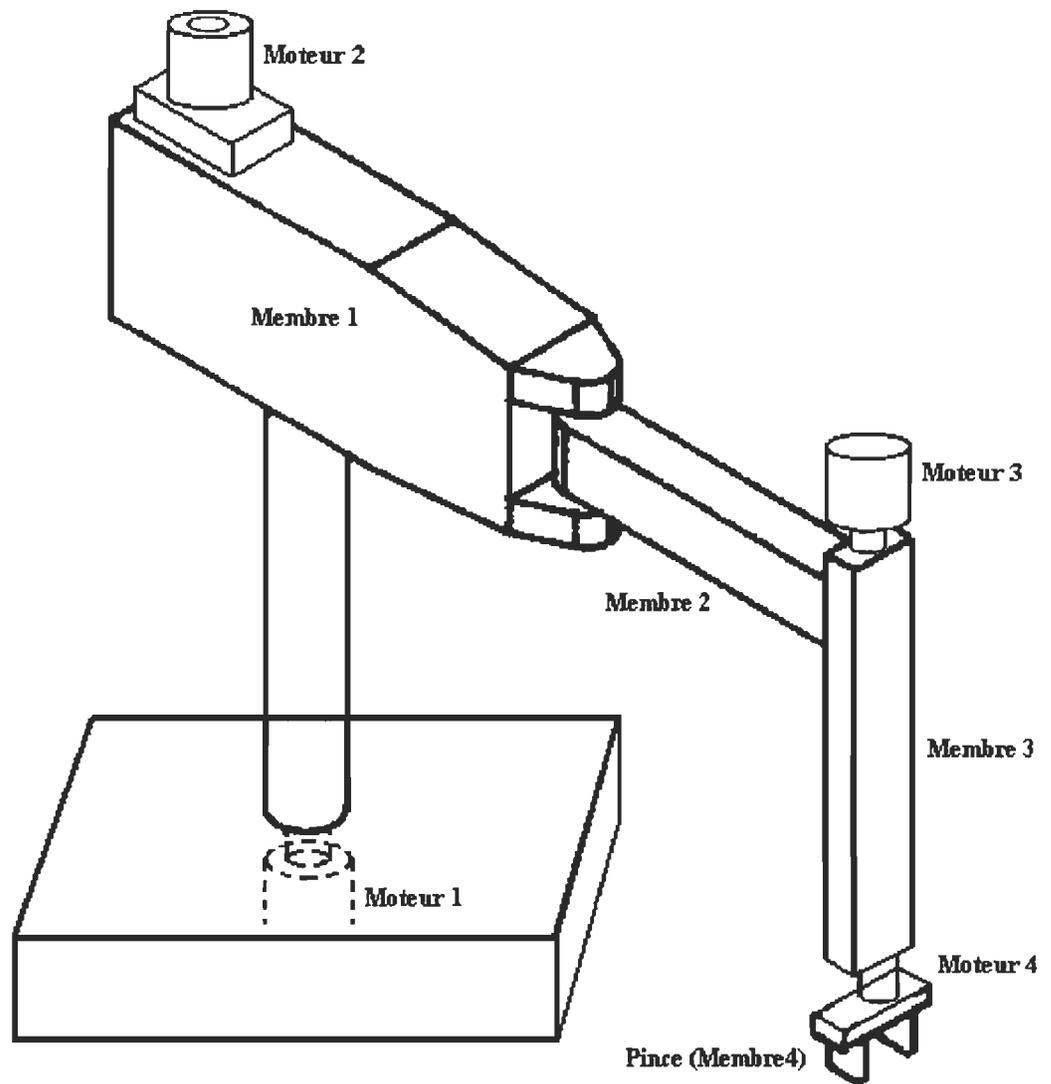


Figure 2.1 Schéma du robot SCARA.

2.2 Modèle général du robot

Nous pouvons tirer le modèle dynamique d'un manipulateur rigide via les équations de Lagrange-Euler.

$$\frac{d}{dt} \frac{dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{d\dot{\mathbf{q}}} - \frac{dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{d\mathbf{q}} = \mathbf{u} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ est le vecteur de dimension n des angles d'articulations pour le système; L , le Lagrangien, est la différence $K-P$, entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentielle P ; et $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ est le vecteur de dimension n du couple d'entrée du système. Lorsque nous appliquons cette équation pour un robot manipulateur, nous supposons généralement que l'énergie potentielle $P=P(\mathbf{q})$ est indépendante de $\dot{\mathbf{q}}$ alors que l'énergie cinétique est une fonction quadratique du vecteur $\dot{\mathbf{q}}$. Cette équation conduit au modèle suivant du manipulateur rigide [Spong89]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

où $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur de position; $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur du couple d'entrée avec $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n}$ où \mathbf{I} est la matrice unité; \mathbf{M} est la matrice de masses-inerties; \mathbf{D} est le vecteur des forces/couples de frottement visqueux et de Coulomb des moteurs et des membres; \mathbf{C} correspond à la matrice des coefficients des forces de Coriolis et centrifuge (peut être représentée en utilisant les symboles de Christoffel); \mathbf{G} est le vecteur des forces/couples de gravité.

Rappel : L'équation dynamique (2.2) d'un robot rigide définit un système passif le long des trajectoires $\mathbf{u} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}$, i.e.

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{u} \rangle_T = \int_0^T \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{u} dt \geq -\beta$$

pour tout T et pour un $\beta > 0$ [OrtegaS88].

Après avoir obtenu le modèle du robot rigide, nous ajoutons l'énergie stockée dans le système due à la flexibilité et alors nous obtenons le modèle du système complet. Dans [Sicard93], Sicard a employé le modèle du robot avec joints flexibles sous la forme suivante

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m) & \mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m) \\ \mathbf{M}_{12}^T(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m) & \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1(\dot{\mathbf{q}}_1) \\ \mathbf{D}_m(\dot{\mathbf{q}}_m) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_m) & \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_m) \\ \mathbf{C}_{21}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_m) & \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m) \\ \mathbf{G}_m(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_m) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e & -\mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e \\ -\mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e & \mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_m^T]^T \in \mathcal{R}^{2n}$ avec $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{R}^n$ le vecteur de position des membres et

$\mathbf{q}_m \in \mathcal{R}^n$ le vecteur de position des actionneurs; $\mathbf{K}_e = \text{diag}\{k_i\}$ est la matrice

des constantes de rigidité des ressorts de torsion, et \mathbf{N} est la matrice diagonale des rapports de transmission. Nous définissons la sortie d'intérêt $y(t)$ comme

$$y(t) = h(\mathbf{q}_1) \quad (2.4)$$

Puisque la sortie est généralement une fonction de l'état des liens (\mathbf{q}_1).

Pour un robot manipulateur avec n articulations dont les m premières (en débutant à la base du robot) sont flexibles, nous définissons $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{q}_m \in \mathcal{R}^n$

les positions des membres et des moteurs avec $\mathbf{q}_{mi} = N_i \mathbf{q}_{li}$, $i = m + 1, \dots, n$, pour les membres rigides avec N_i le rapport de transmission. Alors, dans (2.3) et

(2.4), pour $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_{1F} \ \mathbf{q}_m]^T$, $\mathbf{q}_{1F} \in \mathcal{R}^m$ sont les coordonnées des articulations

flexibles, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{C}_{11}, \mathbf{N}, \mathbf{K}_e \in \mathcal{R}^{m \times m}$, $\mathbf{M}_{12}, \mathbf{C}_{12} \in \mathcal{R}^{m \times n}$,

$\mathbf{M}_{22}, \mathbf{C}_{22} \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $\mathbf{D}_1, \mathbf{G}_1 \in \mathcal{R}^{m \times 1}$, $\mathbf{D}_m, \mathbf{G}_m \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{0}_{n \times m} \ \mathbf{I}_{n \times n}]^T$ et

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e & -\mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ -\mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e & \mathbf{N}^2 \mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \\ \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} & \mathbf{0}_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix}$$

Bien que (2.3) soit complexe et non linéaire en général, il existe plusieurs propriétés fondamentales qui peuvent être exploitées pour faciliter la conception de la loi de commande pour un robot flexible avec contante de

torsion linéaire. Nous traitons maintenant de ces propriétés [OrtegaS88, TangA94].

Propriété 1 : La matrice de masses-inerties $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ est symétrique, définie positive, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ et $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})$ sont bornées ($\underline{\sigma} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q}) \leq \bar{\sigma}$, pour des constantes bornées $\underline{\sigma}$ et $\bar{\sigma} > 0$) en fonction de $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^{n+m}$. \square

Propriété 2 : Tous les paramètres sont constants: masse de liens, moments d'inertie, etc. Ils apparaissent comme des coefficients de fonctions connues des coordonnées des articulations (position, vitesse, et accélération). \square

Propriété 3 : Peu importe le choix de la matrice $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, nous avons

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{2} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \text{ [Misawa92]}. \quad \square$$

2.3 Détermination du modèle du robot SCARA à l'aide du logiciel CINDYN

2.3.1 Résumé du logiciel CINDYN

Afin de trouver le modèle du manipulateur avec joints flexibles et de diminuer la charge de calcul manuel, nous employons un logiciel qui résout symboliquement la cinématique directe et la dynamique inverse des manipulateurs avec n joints à l'aide de Matlab[®]-Maple[®]. Ce logiciel a été

développé dans le cadre d'un projet du groupe de recherche en électronique industrielle (GRÉI) de l'UQTR [MontignyS94].

Ce logiciel est exploité pour trouver la cinématique directe et la dynamique inverse pour un ensemble de corps rigide sous forme symbolique, dans le cas d'un manipulateur comportant n joints rotatifs ou prismatiques. Il utilise la convention Denavit-Hartenberg (D-H) modifiée pour représenter la configuration du bras, et caractériser la location des masses constituant chacun des membres. Dans cette suite d'idées le logiciel Matlab[®]-Maple[®] a été utilisé comme outil de programmation.

Dans la première étape, le logiciel détermine la matrice de transformation et de rotation de chacun des référentiels par rapport au précédent. Les vecteurs de position et les matrices de rotation de chacun des référentiels joint par rapport au référentiel zéro sont aussi déterminés. Pour évaluer le Jacobien de vitesse de chacune des articulations par rapport à la base, il utilise une approche vectorielle. À la deuxième étape, une formulation récursive basée sur les équations de Newton-Euler est utilisée pour déterminer les vitesses, accélérations, forces et couples.

Les équations qui résultent de ce logiciel, décrivent le comportement dynamique du manipulateur et sont données sous forme analytique.

2.3.2 Convention Denavit-Hartenberg modifiée

La méthode D-H se pratique comme suit [Craig89]:

1. *Numération des segments constitutifs du bras manipulateur*, à partir du support de base. Le statif ou socle est le référentiel indice 0, tandis que la « pince » constitue le référentiel d'ordre n . Le segment i est mobile par rapport au segment $i-1$, soit qu'il se translate, soit qu'il rote dans le référentiel du segment $i-1$.
2. *Définition du système d'axes* de chacun des segments en appliquant les règles qui suivent :
 - a. L'axe Z_i correspond à l'axe de déplacement du segment i dans le référentiel $i-1$. Dans le cas d'une charnière, Z_i définit l'axe de translation du segment i ; pour une rotation, Z_i définit l'axe de rotation du segment i dans O_{i-1} .
 - b. L'axe X_i est choisi perpendiculaire à Z_i d'une part et Z_{i+1} d'autre part. Si Z_i et Z_{i+1} ne se coupent pas, on choisit X_i colinéaire avec la perpendiculaire commune à Z_i et Z_{i+1} . Si Z_i et Z_{i+1} se coupent, l'orientation de X_i n'est pas définie, et l'on peut choisir celle qu'on veut. Si d'autre part Z_i et Z_{i+1} sont colinéaire, X_i peut être choisi quelconque dans le plan perpendiculaire à Z_i .

- c. L'axe Y_i est choisi de façon à obtenir un trièdre $X_i Y_i Z_i$ trirectangle direct.
- d. *Définition des paramètres de chaque articulation* à savoir les quantités a_{i-1} , α_{i-1} , d_i , θ_i . Selon cette convention, les 4 paramètres de chaque articulation rigide qui représentent la position et l'orientation de l'articulation se définissent comme suit

a_{i-1} : distance de Z_{i-1} à Z_i mesurée le long de X_{i-1} .

α_{i-1} : angle entre Z_{i-1} à Z_i mesuré par rapport à X_{i-1} .

d_i : distance de X_{i-1} à X_i mesurée le long de Z_i .

θ_i : angle entre X_{i-1} à X_i mesuré par rapport à Z_i .

Pour les membres prismatiques et rotatifs, trois paramètres sont fixes et un est variable.

2.3.3 Modèle du manipulateur SCARA

Nous considérons un robot de type SCARA qui est illustré aux figures 2.1 et 2.2, mais dont l'actionneur du premier membre est installé à la base et le deuxième membre est entraîné par un moteur monté sur le premier membre. En conséquence, le moteur 2 agit indirectement sur le membre 2. Ceci nous permet d'obtenir une structure plus légère et des mouvements rapides. La transmission de l'énergie des actionneurs 1 et 2 vers leurs membres est

effectuée par des poulies et des courroies. Nous considérerons qu'une flexibilité apparaît au niveau de ces articulations.

La troisième articulation est prismatique et son actionneur est fixé sur le dessus du membre trois. Le poignet correspond à la quatrième articulation qui est rotative. Les troisième et quatrième articulations sont considérées rigides. Le rotor des moteurs est considéré comme un solide de révolution uniforme par rapport à son axe de rotation. Les inerties et frottements des poulies sont négligés.

Dans la plupart des publications, les auteurs ne considèrent que le frottement visqueux du moteur et du membre (frottement linéaire). Mais, cela n'a aucun l'effet sur la structure du modèle du manipulateur. La propriété de linéarisabilité demeure toujours la même en considérant ce frottement, mais avec un changement possible sur l'entrée [Spong87].

En ajoutant le frottement de Coulomb, frottement non linéaire discontinu, la propriété de linéarisation du modèle n'est plus valide. Si le frottement de Coulomb est présent au niveau du moteur, il sera compensé par la commande

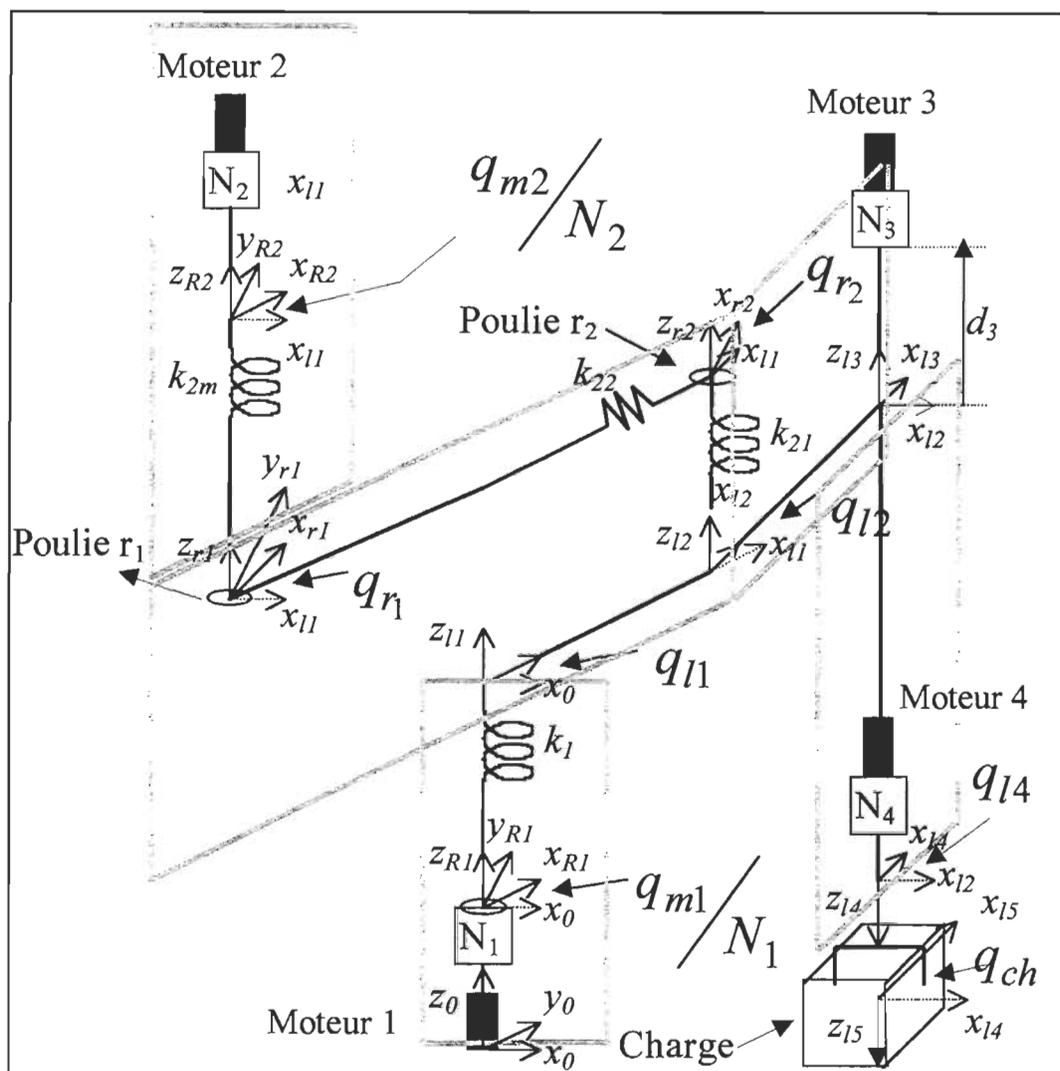


Figure 2.2 Structure mécanique et définition des variables.

d'anticipation. Mais la compensation exacte du frottement de Coulomb du membre n'est pas possible. Elle requiert un couple discontinu à la sortie de l'élément flexible. Ceci engendrerait une discontinuité au niveau de la position du membre ou du moteur. Par conséquent, le système n'est pas linéarisable [Sicard93].

À cause des effets mentionnés, nous avons ignoré le frottement de Coulomb au niveau des moteurs et des membres dans le modèle du manipulateur afin de trouver la loi de commande.

Les hypothèses suivantes seront considérées afin d'obtenir le modèle du manipulateur.

Hypothèse 2.1 : Chaque actionneur est directement couplé à son membre, possiblement par un réducteur de vitesse ou autre élément de transmission, tel que l'élément i du vecteur \mathbf{k} de la force élastique peut être représenté comme

$$k_{[i]}(q_l, q_m) = k_{[i]}(q_{l[i]}, q_{m[i]}) \quad i = 1, \dots, m \quad \square$$

Hypothèse 2.2 : Le frottement des moteurs et des membres est indépendant de la position des moteurs et des membres. Aussi, nous supposons que le frottement de Coulomb est nul. □

Hypothèse 2.3 : La caractéristique linéaire du ressort de torsion sera supposée comme modèle de la flexibilité. □

Hypothèse 2.4 : L'inertie de chaque moteur est symétrique par rapport à son axe de rotation. Ainsi la force de la gravité et la matrice des masses du système sont indépendantes de la position des rotors. De même, la vitesse du centre de la masse des rotors est indépendante de la position des moteurs [Spong87]. □

Hypothèse 2.5 : L'effet de la force gyroscopique sera considérée, i.e. la matrice $\mathbf{M}_{12} \neq \mathbf{0}$. Dans ce cas l'énergie cinétique des liens ne dépend pas seulement de la rotation des liens. \square

Hypothèse 2.6 : L'énergie potentielle est indépendante de $\dot{\mathbf{q}}$ alors que l'énergie cinétique est une fonction quadratique de la vitesse (i.e. $\dot{\mathbf{q}}$). \square

Hypothèse 2.7 : Le stator du moteur i , $i=1,\dots,n$, est monté sur le membre l , $l < i$, de telle façon que le premier bloc de \mathbf{M}_{12} est strictement triangulaire. Cependant, pour les liens prismatiques, le moteur i peut être monté sur le lien i . \square

À cause de la structure particulière du robot, comme la flexibilité et des contraintes pour l'assignation des référentiels, les étapes suivantes doivent être accomplies pour obtenir le modèle final.

- i) Décomposer le robot en trois parties, en s'assurant que chaque masse n'apparaît pas plus d'une fois.
- ii) Trouver le modèle dynamique de chaque partie à l'aide du logiciel CINDYN.

- iii) Combiner les résultats des deux étapes en respectant les variables appliquées pour chaque partie pour évaluer la contribution au couple total de chacune des masses.
- iv) Ajouter les couples d'inertie et de frottement des moteurs aux équations concernées à l'étape précédente.
- v) Ajouter le couple emmagasiné dans les éléments flexibles.
- vi) Normaliser les équations finales de telle manière que tous les couples se trouvent du côté des membres.

2.3.3.1 Définition des paramètres du manipulateur

2.3.3.1.1 Paramètres des membres

Les paramètres des membres et de la charge sont spécifiés au tableau 2.1. Dans le tableau 2.1, POH indique que les membres 2 et 3 sont représentés par des poutres en H et PRI représente un prisme.

2.3.3.1.2 Paramètres des actionneurs

Les paramètres des actionneurs 1, 2, 3 et 4 sont présentés au tableau 2.2. CPU représente la forme d'un cylindre plein uniforme.

Tableau 2.1 Paramètres géométriques et massiques du manipulateur.

unité	Masse totale (Kg)	Longueur (m)	Hauteur de la section centrale pour la POH (m)	Largueur (m)	Épaisseur de la section centrale (m)	Épaisseur des sections parallèles (m)	Masse de la partie centrale de la poutre (Kg)
Membre 1 POH	$m_1=3.71$	$L=0.5$	$H=0.15$	$c=0.15$	$a=0.00635$	$b=0.00635$	1.24
Membre 2 POH	$m_2=3.71$	$L=0.5$	$H=0.15$	$c=0.15$	$a=0.00635$	$b=0.00635$	1.24
Membre 3 PRI	$m_3=4$	$a=0.5$	$b=0.15$	$c=0.15$			
Charge PRI	$m_c=20$	$a=0.15$	$b=0.15$	$c=0.15$			

Tableau 2.2 Paramètres géométriques et masses des actionneurs.

Actionneurs	Masses (Kg)	Largueur (m)	Rayon (m)
Stator (CPU)	$m_S=2$	$h=0.2$	$r=0.03$
Rotor (CPU)	$m_R=1$	$h=0.2$	$r=0.02$

2.3.3.2 Décomposition du robot

Dans les équations suivantes, g_y et g_z sont les coefficients de la gravité le long des axes y et z par rapport au référentiel monde. Les frottements des moteurs et des liens, les constantes de rigidité, les rapports de transmission, et

les autres paramètres du robot illustré aux figures 2.1 et 2.2 sont choisis comme écrits à l'annexe A.4.

Partie 1 : Cette partie inclut respectivement les membres 1, 2, 3 et le moteur 3. Afin d'obtenir les résultats de cette partie nous considérons les masses des membres 1 et 2; pour le membre 3, nous considérons la masse de ce membre, le stator du moteur 3, et le stator du moteur 4; et finalement nous considérons le rotor du moteur 3 pour le membre fictif numéro 4. Les résultats de cette décomposition sont obtenus en employant le logiciel CINDYN (tous les détails sont présentés à l'annexe A.1). Les couples obtenus sont donnés par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
 T_{11,1} &= (6.09769 + 5.4275 \cos(q_{12}))\ddot{q}_{11} + (2.711375 \cos(q_{12}) + 2.5935)\ddot{q}_{12} \\
 &\quad + 2e - 4\ddot{q}_{m3} - 5.4275 \sin(q_{12})\dot{q}_{11}\dot{q}_{12} - 2.71375 \sin(q_{12})\dot{q}_{12}^2 \\
 &\quad + 7.2825g_y \cos(q_{11}) + 5.4275g_y \cos(q_{11} + q_{12}) \\
 T_{12,1} &= (2.71375 \cos(q_{12}) + 2.59359)\ddot{q}_{11} + 2.59359\ddot{q}_{12} + 2e - 4\ddot{q}_{m3} \\
 &\quad + 2.71375 \sin(q_{12})\dot{q}_{11}^2 + 5.4275g_y \cos(q_{11} + q_{12}) \\
 F_{13,1} &= 9(\ddot{d}_3 + g_z) \\
 T_{m3} &= 2e - 4(\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{m3})
 \end{aligned}$$

où les équations $T_{11,1}$, $T_{12,1}$ et $F_{13,1}$ représentent respectivement les couples et la force appliqués aux membres 1, 2 et 3; T_{m3} est le couple délivré par le moteur 3; q_{11} , q_{12} représentent respectivement les positions des membres un

et deux; d_3 est le déplacement linéaire du membre prismatique avec la relation $d_3 = M_3 q_{m3}$ (M_3 est l'inverse du rapport du réducteur attaché au moteur 3); q_{m3} est la position du rotor du moteur 3 par rapport au membre 2 selon la convention D-H modifiée.

Partie 2 : Cette partie contient les membres 1, 2, 3, le moteur 4, et aussi la charge. Nous employons une masse nulle pour les 3 premiers membres. Pour le membre 4 et cinquième élément de cette configuration, le rotor du moteur 4 et la charge sont respectivement considérés. Les résultats détaillés sont présentés à l'annexe A.2. Les couples finaux de cette chaîne sont exprimés ci-dessous:

$$\begin{aligned}
T_{11,2} &= (0.5002 + 0.5mc \cos(q_{12}) + 0.50375mc + 0.5 \cos(q_{12}))\ddot{q}_{11} \\
&\quad + (0.2502 + 0.25mc \cos(q_{12}) + 0.25 \cos(q_{12}) + 0.25375mc)\ddot{q}_{12} \\
&\quad + (2e-4 + 3.75e-3mc)\ddot{q}_{m4} + 3.75e-3mc\ddot{q}_{ch} \\
&\quad - 0.5(1+mc) \sin(q_{12})\dot{q}_{11}\dot{q}_{12} - 0.25(1+mc) \sin(q_{12})\dot{q}_{12}^2 \\
&\quad + 0.5g_y(1+mc)(\cos(q_{11}) + \cos(q_{11} + q_{12})) \\
T_{12,2} &= (0.2502 + 0.25375mc + 0.25 \cos(q_{12})(1+mc))\ddot{q}_{11} + \\
&\quad + (0.25375mc + 0.2502)\ddot{q}_{12} + (2e-4 + 3.75e-3mc)\ddot{q}_{m4} \\
&\quad + 3.75e-3mc\ddot{q}_{ch} \\
&\quad + 0.25mc \sin(q_{12})(1+mc)\dot{q}_{11}^2 + 0.5g_y(1+mc) \cos(q_{11} + q_{12}) \\
F_{13,2} &= (1+mc)(\ddot{d}_3 + g_z) \\
T_{m4} &= (2e-4 + 3.75e-3mc)(\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{14}) + 3.75e-3mc\ddot{q}_{ch} \\
T_{ch} &= 3.75e-3mc(\ddot{q}_{11} + \ddot{q}_{12} + \ddot{q}_{14} + \ddot{q}_{ch})
\end{aligned}$$

où T_{m4} est le couple délivré par le moteur 4; T_{ch} est le couple appliqué à la charge; q_{m4} est la position du moteur 4; et q_{ch} est la position de la charge. Les autres variables sont telles que définies dans la partie 1.

La figure 2.3 montre la relation entre les variables employées pour la configuration présentée à la partie 2.

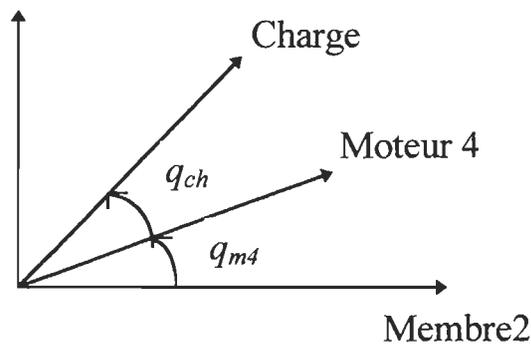


Figure 2.3 Rapport entre les positions du moteur 4, de la charge et du membre 2.

Pour éliminer la variable q_{ch} dans les équations précédentes, nous optons pour le changements des variables suivants:

$$\alpha = \frac{q_{m4}}{N_4} \quad (2.5)$$

$$\alpha = q_{m4} + q_{ch} \quad (2.6)$$

où N_4 est le rapport de transmission attaché au moteur 4; α définit la position de la charge par rapport du membre 2. Nous obtenons ainsi

$$q_{ch} = q_{m4} \left(\frac{1 - N_4}{N_4} \right) \quad (2.7)$$

Pour éliminer T_{ch} , nous appliquons la loi de conservation du travail suivante

$$T_{ch,2} \Delta\alpha = T_{ch} \Delta q_{ch} + T_{m4} \Delta q_{m4} \quad (2.8)$$

$T_{ch,2}$ est le couple de la charge par rapport au membre 2.

En substituant (2.5) et (2.7) dans (2.8), nous obtenons:

$$T_{ch,2} \frac{\Delta q_{m4}}{N_4} = T_{ch} \Delta q_{m4} \left(\frac{1 - N_4}{N_4} \right) + T_{m4} \Delta q_{m4}$$

$$T_{ch,2} = (1 - N_4) T_{ch} + N_4 T_{m4} \quad (2.9)$$

Cependant, nous savons que:

$$T_{m4,2} = \frac{T_{ch,2}}{N_4} \quad (2.10)$$

$T_{m4,2}$ est le couple du moteur quatre fixé au poignet par rapport au membre 2.

De (2.10) et (2.9), nous obtenons le couple délivré par le moteur 4 dû à la charge et au membre 4:

$$T_{m4,2} = \left(\frac{1 - N_4}{N_4} \right) T_{ch} + T_{m4} \quad (2.11)$$

Partie 3 : La dernière partie contient le membre 1 et le moteur 2. Seulement les masses du stator (fixé sur le membre 1) et du rotor du moteur 2 sont considérées et les autres masses sont considérées nulles.

Les résultats détaillés sont présentés à l'annexe A.3 et les couples qui suivent en sont tirés.

$$T_{l1,3} = 0.1211\ddot{q}_{l1} + 2e - 4\ddot{q}_{m2} - 0.6g_y \cos(q_{l1})$$

$$T_{m2} = 2e - 4\ddot{q}_{l1} + 2e - 4\ddot{q}_{m2}$$

où $T_{l1,3}$ est le couple appliqué au membre 1 et T_{m2} est le couple délivré par le moteur 2.

Dans l'étape qui suit, nous combinons les couples obtenus pour les trois configurations traitées et les couples d'inertie et de frottement des moteurs.

Les résultats finaux sont:

$$\begin{aligned} T_{l1} = & (6.719 + 0.50375mc + 5.9275 \cos(q_{l2}) + 0.5mc \cos(q_{l2}))\ddot{q}_{l1} \\ & + (2.8438 + 0.25375mc + 2.96375 \cos(q_{l2}) + 0.25 \cos(q_{l2}))\ddot{q}_{l2} \\ & + 2e - 4(\ddot{q}_{m2} + \ddot{q}_{m3}) + (2e - 4 + 3.75e - 3mc/N_4)\ddot{q}_{m4} + D_{l1}\dot{q}_{l1} \\ & - (5.9275 + 0.5mc)\sin(q_{l2})\dot{q}_{l2}\dot{q}_{l1} - (2.96375 + 0.25mc)\sin(q_{l2})\dot{q}_{l2}^2 \\ & + (7.2825 + 0.5mc)g_y \cos(q_{l1}) + (5.9275 + 0.5mc)g_y \cos(q_{l1} + q_{l2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{l2} = & (2.8438 + 0.25375mc + 2.96375 \cos(q_{l2}) + 0.25mc \cos(q_{l2}))\ddot{q}_{l1} \\
& + (2.8438 + 0.25375mc)\ddot{q}_{l2} + 2e - 4\ddot{q}_{m3} + (2e - 4 + 3.75e \\
& - 3mc/N_4)\ddot{q}_{m4} + (2.96375 + 0.25mc)\sin(q_{l2})\dot{q}_{l1}^2 + (5.9275 + 0.5mc)g_y \\
& * \cos(q_{l1} + q_{l2}) + D_{l2}\dot{q}_{l2}
\end{aligned}$$

$$T_{m1} = 2e - 4\ddot{q}_{m1} + D_{m1}\dot{q}_{m1}$$

$$T_{m2} = 2e - 4(\ddot{q}_{l1} + \ddot{q}_{m2}) + D_{m2}\dot{q}_{m2}$$

$$\begin{aligned}
T_{m3} = & 2e - 4(\ddot{q}_{l1} + \ddot{q}_{l2}) + ((mc + 10)/N_3^2 + 2e - 4)\ddot{q}_{m3} + (mc + 10)g_z M_3 \\
& + D_{m3}\dot{q}_{m3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{m4} = & (2e - 4 + 3.75e - 3mc/N_4)(\ddot{q}_{l1} + \ddot{q}_{l2}) + (2e - 4 + 3.75e - 3mc/N_4^2)\ddot{q}_{l4} \\
& + D_{m4}\dot{q}_{m4}
\end{aligned}$$

Le modèle final pour le manipulateur avec joints flexibles résulte des relations suivantes:

$$T_{l1} = k_1(q_{m1} - q_{l1})$$

$$T_{l2} = k_2(q_{m2} - q_{l2})$$

$$T_{m1} = T_{em1} - k_1(q_{m1} - q_{l1})$$

$$T_{m2} = T_{em2} - k_2(q_{m2} - q_{l2})$$

$$T_{m3} = T_{em3}$$

$$T_{m4} = T_{em4}$$

(2.12)

La forme de chacune des matrices du modèle est présentée à l'annexe

A.4.

2.3.3.3 Constante de rigidité

Le couple du moteur 1 est transmis par un réducteur de vitesse et un ressort de torsion vers le membre 1. Dans ce cas la flexion est due à un ressort de torsion. Par conséquent, la constante de rigidité de l'articulation 1 est une constante k_1 .

Par contre le moteur 2 est placé sur le membre 1 et son couple est transmis vers l'articulation 2 par deux ressorts de torsion, une courroie et un réducteur de vitesse tel que montré à la figure 2.4.

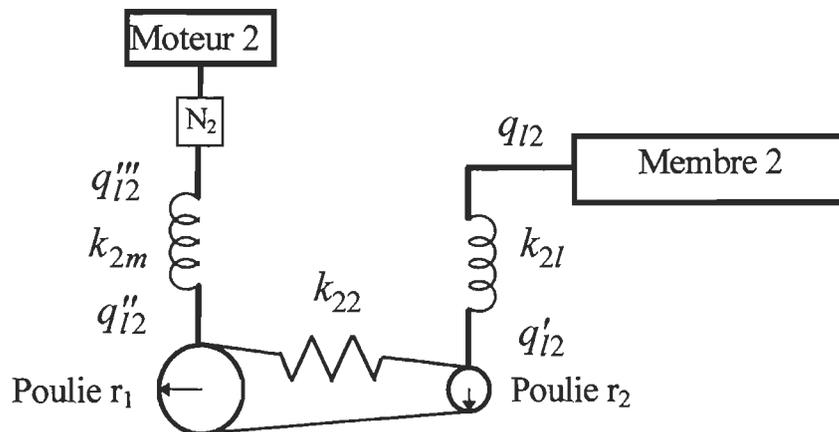


Figure 2.4 Entraînement du membre 2.

La procédure pour trouver la rigidité équivalente de l'articulation 2 est la suivante.

En utilisant la loi de la force et du travail, du côté moteur nous avons

$$\left. \begin{array}{l} T_{21} = k_{2m}(q_{l2}''' - q_{l2}''') \\ T_{21} = F_1 \cdot r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow F_1 = \frac{k_{2m}}{r_1}(q_{l2}''' - q_{l2}''') \quad (2.13)$$

Aussi pour le côté membre nous avons

$$\left. \begin{array}{l} T_{22} = k_{2l}(q_{l2}' - q_{l2}) \\ T_{22} = F_1 \cdot r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow F_1 = \frac{k_{2l}}{r_2}(q_{l2}' - q_{l2}) \quad (2.14)$$

Pour l'élément flexible entre les deux poulies nous avons aussi

$$F_1 = k_{22}(q_{l2}''r_1 - q_{l2}'r_2) \quad (2.15)$$

De (2.13), (2.14), (2.15) il résulte que

$$T_{l2} = k_2 \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{q_{m2}}{N_2} - q_{l2} \right) \quad (2.16)$$

$$T_{m2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{k_2}{N_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{q_{m2}}{N_2} - q_{l2} \right) \quad (2.17)$$

avec la constante de la rigidité

$$k_2 = \frac{1}{\frac{r_1^2}{r_2^2 k_{2m}} + \frac{1}{k_{2l}} + \frac{1}{r_2^2 k_{22}}} \quad (2.18)$$

De ce fait, la matrice de rigidité du manipulateur est de la forme suivante:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \frac{-k_1}{N_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \frac{-k_2 r_1}{N_2 r_2} & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{N_1} & 0 & \frac{k_1}{N_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_2 r_1}{N_2 r_2} & 0 & \frac{k_2}{N_2^2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.3.4 Normalisation du modèle du manipulateur

Afin de ramener toutes les variables du côté ‘membre’, nous effectuons quelques changements de variables. Ces changements nous permettront de travailler avec des valeurs du même ordre de grandeur et donc ça nous donnera un système plus facile à simuler et à analyser. Cette procédure est appelée *mise à l'échelle* ou *normalisation*. Définissons donc

$$q_{m1} = q_{m1}^c N_1$$

$$q_{m2} = q_{m2}^c N_2 \frac{r_2}{r_1}$$

$$q_{m3} = q_{m3}^c N_3$$

$$q_{m4} = q_{m4}^c N_4$$

où N_i , $i=1,2,3,4$ sont les rapports de transmission et l'indice ‘c’ identifie les grandeurs mises à l'échelle côté ‘membre’. Donc si nous définissons \mathbf{Q}_{22}

comme

$$\mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 \frac{r_2}{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

nous avons $\mathbf{q}_m = \mathbf{Q}_{22} \cdot \mathbf{q}_m^c$, où \mathbf{q}_m est le vecteur de la position du moteur côté charge ou lien.
 et $\mathbf{q}_m^c = [q_{m1}^c \ q_{m2}^c \ q_{m3}^c \ q_{m4}^c]^T$ est le vecteur de la position du moteur côté

Alors nous pouvons dire que $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q}^c = \mathbf{Q} \mathbf{q}^c$ avec

$$\mathbf{Q}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tel que } \mathbf{q}^c = \begin{bmatrix} q_{l1} & q_{l2} & \mathbf{q}_m^c \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_{l1} & q_{l2} & q_{m1}^c & q_{m2}^c & q_{m3}^c & q_{m4}^c \end{bmatrix}^T.$$

Ce changement de variables est également valable pour les couples du moteur. Cette synthèse aboutit aux résultats suivants .

$$\mathbf{T}^c = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^c \quad (2.20)$$

Le modèle du manipulateur robotique avec joints flexibles est obtenu ci-dessous.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{T} \quad (2.21)$$

avec $\mathbf{T} = [0 \ 0 \ \mathbf{T}_m^T]^T$.

Si nous substituons (2.19) et (2.20) dans (2.21), nous obtenons le modèle du robot ramené au côté du membre.

$$\begin{aligned} \mathbf{QM}(\mathbf{Q}\mathbf{q}^c)\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{QC}(\mathbf{Q}\mathbf{q}^c, \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}^c)\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{QDQ}\dot{\mathbf{q}}^c \\ + \mathbf{QG}(\mathbf{Q}\mathbf{q}^c) + \mathbf{QKQ}\mathbf{q}^c = \mathbf{QT} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mais nous savons que les matrices $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ ne dépendent pas des positions des moteurs aux articulations flexibles. Nous écrivons donc

$$\begin{aligned} \mathbf{QM}(\mathbf{q}_1)\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{QC}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{QDQ}\dot{\mathbf{q}}^c \\ + \mathbf{QG}(\mathbf{q}_1) + \mathbf{QKQ}\mathbf{q}^c = \mathbf{T}^c \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les détails sont présentés à l'annexe A.5. De (2.23), la matrice de rigidité prend la forme suivante.

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{QKQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

avec

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Finalement le modèle du manipulateur ramené du côté 'membre' est de la forme

$$\mathbf{M}^c(\mathbf{q}_1)\ddot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{C}^c(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)\dot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{D}^c\dot{\mathbf{q}}^c + \mathbf{G}^c(\mathbf{q}_1) + \mathbf{K}^c\mathbf{q}^c = \mathbf{B}\mathbf{u}^c \quad (2.26)$$

où \mathbf{K}^c est donné par (2.24) et $\mathbf{M}^c(\mathbf{q}_1)$, $\mathbf{C}^c(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)$, $\mathbf{G}^c(\mathbf{q}_1)$, et \mathbf{D}^c sont présentés à l'annexe A.5. De plus, nous définissons .

$$\mathbf{q}^c = \begin{bmatrix} q_{l1} & q_{l2} & q_{m1}^c & q_{m2}^c & q_{l3} & q_{l4} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} q_{l1} & q_{l2} & q_{m1}^c & q_{m2}^c & q_{m3}^c & q_{m4}^c \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{u}^c = \mathbf{T}_m^c \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{I}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Aussi, $\mathbf{q}_1 = [q_{l1} \ q_{l2} \ q_{l3} \ q_{l4}]^T$, $\mathbf{q}_{1_F} = [q_{l1} \ q_{l2}]^T$ et $\mathbf{q}_m^c = [q_{m1}^c \ q_{m2}^c \ q_{m3}^c \ q_{m4}^c]^T$.

Finalement notons que pour obtenir les valeurs réelles d'état du système, nous employons:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{T}^c$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^c$$

Important: Pour la suite, nous laissons tomber l'indice 'c' et emploierons le modèle mis à l'échelle côté moteur.

CHAPITRE 3

DÉFINITIONS ET THÉORÈMES

Nous fournissons dans ce chapitre quelques définitions et théorèmes reliés à la passivité, aux fonctions de Lyapunov et à la stabilité. Ceux-ci seront utiles pour la compréhension et les démonstrations aux chapitres suivants. Les informations présentées ici sont tirées de [VidyasagarD75, Vidyasagar93, ByrnesIW91, NarendraA89].

Définition 3.1 : [*Fonction élément de L_p*] Pour $p > 0$, $f(\cdot): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est un élément de $L_p[0, \infty) = L_p$ si et seulement si,

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty \quad \square$$

Définition 3.2 : [*Norme p d'une fonction*] Pour $p > 0$, la fonction

$\|\cdot\|_p: L_p(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+)$ est définie par

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\int_0^{\infty} |f(t)|^p dt \right]^{1/p} \quad \square$$

La *norme infinie* de la fonction $\|\cdot\|_{\infty}: L_{\infty}(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+)$ est définie par

$$\|f(\cdot)\|_{\infty} = \operatorname{ess\,Sup}_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)| \quad \square$$

Définition 3.3 : [*Norme p d'un vecteur*] Pour $p > 0$, la norme p d'un vecteur

$\|\cdot\|_p : L_p(\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+)$ est définie par

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{1/p}$$

La norme deux est appelée *norme Euclidienne* et la *norme infinie* d'un vecteur

$\|\cdot\|_\infty : L_\infty(\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}_+)$ est définie par

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad \square$$

Définition 3.4 : [*Stabilité en L_p*] Un système dynamique H est stable en L_p si lorsque $u \in L_p$, alors $y \in L_p$ (u et y sont l'entrée et la sortie du système H respectivement). Le terme **BIBO** ('*bounded input-bounded output*') est employé pour identifier un système qui est stable en L_∞ (entrée et sortie sont bornées). Ce type de stabilité est un type de *stabilité entrée-sortie*. □

Définition 3.5 : [*Système passif*] Un système dynamique

$H(L_2 \rightarrow L_2) : u \rightarrow y$ est dit passif si $\forall T > 0$, il existe un $\beta > 0$ tel que

$$\langle y, u \rangle_T = \int_0^T y^T(\rho)u(\rho)d\rho \geq -\beta$$

Le terme $w = \langle y, u \rangle_T$ est appelé le *taux d'alimentation* du système H. □

Définition 3.6 : [*Système strictement passif*] Un système dynamique

$H(L_2 \rightarrow L_2): u \rightarrow y$ est dit strictement passif si $\forall T > 0$, il existe $\beta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\langle y, u \rangle_T = \int_0^T y^T(\rho) u(\rho) d\rho \geq -\beta + \varepsilon \int_0^T \|u(\rho)\|^2 d\rho \quad \square$$

Définition 3.7 : [Fonction decrescent] V est *decrescent*, s'il existe une fonction $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui est continue et strictement croissante avec $\beta(0) = 0$ tel que

$$V(\mathbf{x}(t), t) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|), \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \beta_r \text{ et } r > 0 \quad \square$$

Définition 3.8 : [Fonction définie positive] Une fonction $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction définie positive (fdp) s'il existe une fonction continue croissante $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

- i) $\alpha(0) = 0, \alpha(p) > 0$ lorsque $p > 0$
- ii) $\alpha(p) \rightarrow \infty$ lorsque $p \rightarrow \infty$
- iii) $V(0, t) = 0,$ $\forall t > 0$
- iv) $V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|)$ $\forall t > 0$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ \square

Théorème de Lyapunov : [Stabilité asymptotique globale] Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ du système $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t)$, avec $t \geq 0$, est *globalement asymptotiquement stable* s'il existe une fonction V continue, différentiable,

decreascent et définie positive tel que, pour une fonction $\gamma : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ continue et strictement croissante avec $\gamma(\mathbf{0})=0$,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t), t) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}(t)\|), \quad \forall t \geq t_0, \forall \mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n. \quad \square$$

Remarque : Si un système est strictement passif avec la fonction d'énergie V définie positive, le point équilibre $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ de ce système est asymptotiquement stable, au sens de Lyapunov.

Théorème de passivité : Considérons un système formé par la connexion en rétroaction négative d'un système dynamique passif et d'un système strictement passif avec gain fini en L_2 . Alors ce système *est stable en L_2* .

CHAPITRE 4

COMMANDE DE MANIPULATEURS AVEC JOINTS FLEXIBLES PAR RETOUR D'ÉTAT PARTIEL BASÉE SUR LA PASSIVITÉ

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous voulons concevoir un contrôleur robuste pour le manipulateur avec joints flexibles décrit au Chapitre 2. Les manipulateurs rigides sont toujours passifs entre la paire du couple d'entrée et de la vitesse du moteur [Spong87]. Dans le cas des manipulateurs avec joints flexibles, nous supposons que nous pouvons établir un système d'erreur en injectant un signal d'anticipation, et que nous pouvons rendre ce système d'erreur passif via un retour d'état [Sicard93]. Nous employons le théorème de passivité pour démontrer la stabilité en L_2 , stabilité entrée-sortie, du système passif en utilisant un contrôleur strictement passif avec gain fini (Théorème de passivité, Chapitre 3). Ensuite, nous démontrons que l'état interne sera asymptotiquement stable si nous pouvons satisfaire certains critères associés au lemme de Barbalat et si la fonction d'énergie du système satisfait les conditions de la fonction d'énergie de Lyapunov [ByrnesIW91, Sicard93]. Finalement, nous trouvons une loi de commande approximative, i.e. nous éliminons tous les termes qui sont des fonctions de l'accélération des membres et de ses dérivées et qui apparaissent

lors du calcul de la vitesse et de l'accélération désirées du moteur. Ces approximations sont justifiées par les propriétés de robustesse de la loi de commande.

Nous poursuivons la conception de la loi de commande basée sur l'approche de passivité en considérant seulement l'état du moteur (position et vitesse) et aussi une caractéristique de flexion constante linéaire. La propriété de la robustesse est exploitée pour cette loi de commande. Les notions théoriques de ce chapitre sont tirées de [Sicard93]. Notons que nous considérons toujours du frottement visqueux au moteur dans le modèle du système présenté au chapitre 2.

4.2 Approche de conception

Considérons le modèle du manipulateur obtenu au chapitre 2.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.1)$$

Nous suivons une procédure de conception de la loi de commande qui est basée sur deux étapes: i) définir un signal d'anticipation basé sur le modèle du système afin de former un système d'erreur; ii) ajouter un retour d'état statique indépendant du système afin de stabiliser le système.

4.2.1 Étape 1 - Conception de signal d'anticipation

Nous décomposons le signal de commande d'entrée comme

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{\text{ff}} \quad (4.2)$$

où \mathbf{u}_{ff} est le signal de la commande d'anticipation d'entrée et \mathbf{u}_0 est la commande d'entrée stabilisatrice. Le signal d'anticipation est choisi tel que la paire $(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_{pv})$ soit passive, ou puisse être rendue passive par un retour d'état statique en \mathbf{y}_p (figure 4.1). Dans [OrtegaS88, ByrnesIW91], ils ont trouvé une paire passive entre la vitesse du moteur ($\dot{\mathbf{q}}_m$) et le couple d'entrée (\mathbf{u}_0). Cependant, en considérant le signal de commande que nous allons définir plus tard, nous pouvons trouver une paire passive entre \mathbf{y}_{pv} (une combinaison entre la vitesse et la position du moteur) et le couple d'entrée (preuve donnée à l'annexe A de [Sicard93]).

4.2.2 Étape 2 - Stabilisation par rétroaction

Nous choisissons un retour d'état statique \mathbf{R}_p (boucle interne) pour obtenir la passivité pour la paire $(\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_{pv})$, et l'observabilité de l'état interne du système. L'observabilité sera utile pour obtenir la stabilité asymptotique de l'état du système. Ensuite, nous choisissons un retour d'état strictement passif \mathbf{R}_v avec gain fini (boucle externe). Le théorème de passivité

[VidyasagarD75] garantit la stabilité en L_2 du système de \mathbf{u}_2 à \mathbf{y}_{pv} . Nous employons ensuite l'analyse de stabilité par méthode d'énergie basée sur la théorie de Lyapunov pour démontrer que l'erreur de l'état du système et l'erreur de sortie convergent vers zéro asymptotiquement. Donc la sortie d'intérêt $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_d$ asymptotiquement.

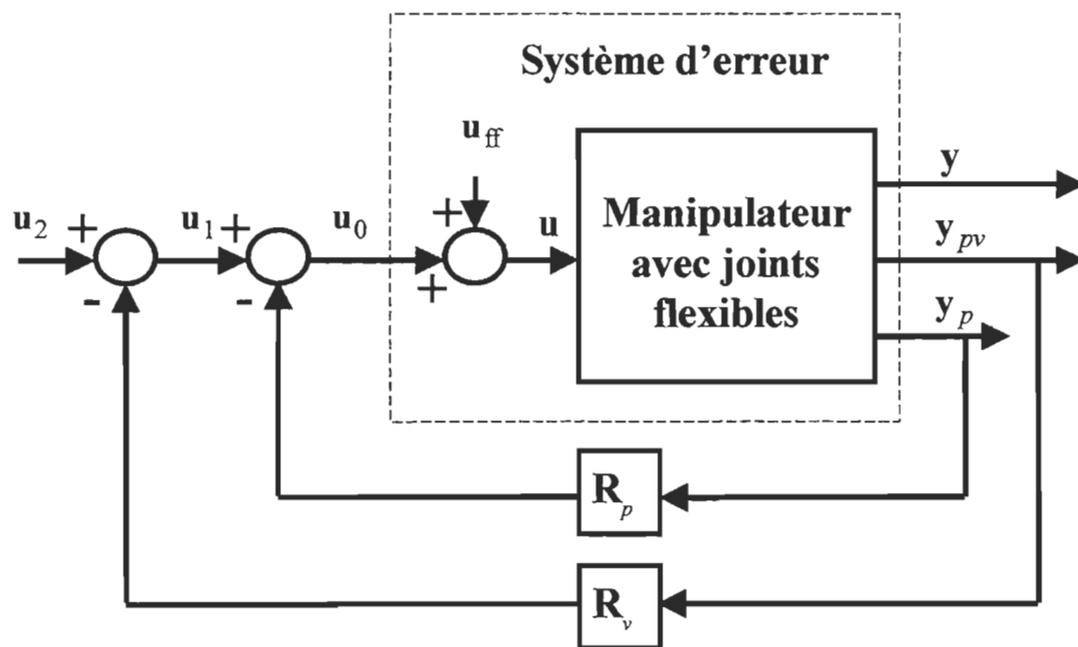


Figure 4.1 Structure du contrôleur proposé.

Les trois sorties dans le cas d'un robot avec joints flexibles sont choisies comme: la sortie d'intérêt \mathbf{y} est généralement définie en terme de la position du membre $\{\mathbf{y}(t) = h(\mathbf{q}_l)\}$; la paire passive (\mathbf{u}_1, y_{pv}) est choisie comme le couple du moteur et une combinaison entre la vitesse et la position du moteur

$\mathbf{y}_{pv} = (c\mathbf{q}_m + \dot{\mathbf{q}}_m)$ (ou dans le système d'erreur $\mathbf{y}_{pv} = (c\bar{\mathbf{q}}_m + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_m)$); et \mathbf{q}_m (ou $\bar{\mathbf{q}}_m$) a été utilisée comme \mathbf{y}_p . Nous avons défini l'erreur de position comme

$$\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d.$$

Il peut exister d'autres paires passives. Trouver les paires passives est toujours un problème difficile qui a été exploré dans Annexe A.2 de [Sicard93].

Cette approche possède les caractéristiques intéressantes suivantes:

- \mathbf{R}_v peut être un contrôleur de retour d'état strictement passif quelconque avec gain fini.
- Seulement \mathbf{y}_{pv} est nécessaire pour stabiliser le système, e.g. la position et la vitesse du moteur.
- Une erreur faible dans le signal d'anticipation ne cause pas l'instabilité.
- Applicable pour la stabilisation d'une consigne de position fixe et la poursuite d'une trajectoire.

4.3 Signal d'anticipation propos

Dans [Sicard93], Sicard a présenté plusieurs formes du signal d'anticipation et leur solution. Il a aussi démontré les conditions qui garantissent les bornes des signaux proposés pour le modèle général du robot

avec joints flexibles. La plupart des signaux d'anticipation proposés sont basés sur la dynamique inverse du système ou son approximation.

Nous présentons dans cette section un signal d'anticipation qui est basé seulement sur l'état désiré avec le modèle complet. Il est défini par:

$$\mathbf{B}u_{ff} = \mathbf{M}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d \quad (4.3)$$

où \mathbf{B} est définie par (2.27) et \mathbf{K} est définie par (2.24) et représente la matrice des constantes de rigidité avec coefficients finis.

Bien que le signal d'anticipation basé sur l'état mesuré soit plus près du modèle réel du robot, il ne faut pas oublier que l'erreur due à la mesure (ou construction, surtout que la mesure de la vitesse est toujours bruitée) ajoute une erreur dans le signal d'anticipation et ceci causera une diminution de stabilité. Dans le modèle (2.26), la matrice des masses-inerties contient les couplages gyroscopiques et la solution proposée est tirée de [Sicard93].

4.3.1 Solution du signal d'anticipation proposé

Considérons que $\mathbf{y}_{d[i]} = \mathbf{q}_{1d[i]}(t)$, $i = 1, \dots, n$ et $\mathbf{y}_{d[i]}$ est la $i^{\text{ème}}$ sortie désirée, et que ses k_i premières dérivées temporelles existent et sont continues (i.e. $\mathbf{y}_{d[i]} \in C^{k_i}$) pour k_i suffisamment élevé. Afin de trouver l'état désiré du moteur pour évaluer le signal d'anticipation, nous avons besoin de la trajectoire

désirée de la sortie et de ses dérivées temporelles, et du modèle complet du robot. Considérant que le signal d'anticipation \mathbf{u}_{ff} , $\mathbf{q}_{md}(t)$ évalué et ses dérivées temporelles doivent être bornés avec les trajectoires de sortie désirée $\mathbf{q}_{ld}(t)$, et pour le modèle du manipulateur présenté en (4.3), nous devons établir des hypothèses: 1) sur la sortie désirée et ses dérivées temporelles; 2) sur le modèle afin de résoudre $\mathbf{q}_{md}(t)$ et ses dérivées. Pour obtenir un signal d'anticipation borné, les hypothèses suivantes sont posées.

Hypothèse 4.1 : Le signal de position désirée est borné dans le temps par une

constante finie $\gamma_t = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{q}_{ld}(t)\|$. □

Hypothèse 4.2 : Le signal de vitesse désirée est borné dans le temps par une

constante finie $\gamma_{td} = \sup_{t \geq 0} \|\dot{\mathbf{q}}_{ld}(t)\|$. □

Hypothèse 4.3 : Le signal d'accélération désirée est bornée dans le temps par

une constante finie $\gamma_{td\dot{d}} = \sup_{t \geq 0} \|\ddot{\mathbf{q}}_{ld}(t)\|$. □

Hypothèse 4.4 : La caractéristique du frottement (\mathbf{D}) est continue et constante,

e.g. seulement le frottement visqueux est considéré et le frottement de Coulomb

est nul. □

Les hypothèses précédentes sont nécessaires pour que le signal d'anticipation soit borné pour le modèle général du robot (2.3) avec joint flexibles. La preuve est donnée à l'annexe D de [sicard93].

Actuellement, nous voulons résoudre pour $\mathbf{q}_{\text{md}}(t)$ et démontrer que les conditions mentionnées pour que \mathbf{u}_{ff} soit borné sont rencontrées.

Les hypothèses suivantes seront employées pour résoudre $\mathbf{q}_{\text{md}}(t)$.

Hypothèse 4.5 : Les k_{t_i} premières dérivées temporelle de $\mathbf{q}_{\text{ld}}(t)$ sont données et sont uniformément bornées dans le temps par des constantes finies γ_{td_i} ,

$$\gamma_{td_i} = \sup_{t \geq 0} \left\| \mathbf{q}_{\text{ld}[i]}^{(k_{t_i})} \right\| \quad i = 1, \dots, n \quad \square$$

Hypothèse 4.6 : La caractéristique de la rigidité est linéaire et telle que, pour les articulations flexibles,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_1(\mathbf{q}_{\text{lf}}, \mathbf{q}_{\text{mf}}) \\ -\mathbf{k}_1(\mathbf{q}_{\text{lf}}, \mathbf{q}_{\text{mf}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{K}_e \\ -\mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\text{lf}} \\ \mathbf{q}_{\text{mf}} \end{bmatrix}$$

où \mathbf{K}_e est définie positive [Tomei91]. □

Nous résoudrons ci-dessous pour $\mathbf{q}_{\text{md}}(t)$ dans le cas du modèle du robot avec le premier bloc de \mathbf{M}_{12} strictement triangulaire supérieur en tenant

compte du signal d'anticipation proposé (4.3). Ensuite nous allons appliquer les résultats de cette section au modèle **SCARA** représenté par (2.26).

Pour le modèle (2.26) les matrices \mathbf{C}_{12} , \mathbf{C}_{21} , \mathbf{C}_{22} sont nulles et $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^T$ (avec le premier bloc de \mathbf{M}_{12} strictement triangulaire supérieur). Si le premier bloc de \mathbf{M}_{12} était nonsingulier, alors le choix des conditions initiales pour \mathbf{q}_{md} , $\dot{\mathbf{q}}_{md}$ serait libre.

Par l'hypothèse (2.1), nous avons, pour les m articulations flexibles:

$$k_{[i]}(q_l, q_m) = k_{[i]}(q_{l[i]}, q_{m[i]}) \quad i = 1, \dots, m$$

où l'indice $[i]$ identifie la i^{ieme} rangée du vecteur ou de la matrice.

Sous ces conditions (4.3) s'écrit comme suit:

$$\mathbf{0} = \mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}_{ld})\ddot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{q}}_{md} + \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld})\dot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{D}_l\dot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{G}_l(\mathbf{q}_{ld}) + \mathbf{k}_1(\mathbf{q}_{ld}, \mathbf{q}_{md}) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u}_{ff} = \mathbf{M}_{12}^T\ddot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{q}}_{md} + \mathbf{D}_m\dot{\mathbf{q}}_{md} - \mathbf{k}_2(\mathbf{q}_{ld}, \mathbf{q}_{md}) \quad (4.5)$$

où $\mathbf{k}_2(\mathbf{q}_{ld}, \mathbf{q}_{md}) = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T(\mathbf{q}_{ld}, \mathbf{q}_{md}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Afin d'obtenir la forme analytique pour le signal d'anticipation d'entrée \mathbf{u}_{ff} avec $(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{ld})$ imposées, nous devons d'abord trouver

$(\mathbf{q}_{md}, \dot{\mathbf{q}}_{md}, \ddot{\mathbf{q}}_{md})$. En évaluant (4.4) avec la trajectoire désirée \mathbf{q}_{ld} et ses dérivées temporelles, nous allons obtenir $\mathbf{q}_{md}, \dot{\mathbf{q}}_{md}, \ddot{\mathbf{q}}_{md}$.

Pour les articulations rigides, la consigne pour les moteurs est équivalente à celle des membres et est donc supposée connue *a priori*. Nous pouvons résoudre pour \mathbf{q}_{md} et ses dérivées temporelles pour les articulations flexibles de façon itérative du $m^{ième}$ élément au premier si les hypothèses 4.4 et 4.5 sont satisfaites avec $k_{t_i} = 2(i + 1)$ avec $i=1, \dots, m$. De plus, l'hypothèse 4.7 garantit que (4.4) est définie pour tout $(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{ld})$. Alors pour \mathbf{q}_{ld} et ses dérivées données, nous exprimons la $m^{ième}$ rangée de (4.4) comme

$$k_{[m]}(q_{ld[m]}, q_{md[m]}) = -\chi_1(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{md}) \quad (4.6)$$

où $k_{[m]}$ est la constante de rigidité du $m^{ième}$ membre et

$$\begin{aligned} \chi_1(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{md}) = & \mathbf{M}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{ld})\ddot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{M}_{12[m,]}\ddot{\mathbf{q}}_{md} + \mathbf{D}_{1[m]}\dot{\mathbf{q}}_{ld} \\ & + \mathbf{C}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld})\dot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{G}_{1[m]}(\mathbf{q}_{ld}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où $[m,]$ identifie les éléments de la $m^{ième}$ rangée avec toutes les colonnes correspondantes de la matrice.

En considérant l'hypothèse 4.6, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\text{md}[m]} = \mathbf{q}_{\text{ld}[m]} + (k_{[m]})^{-1} & \left[\mathbf{M}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}) \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{M}_{12[m,]} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}} \right. \\ & \left. + \mathbf{C}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{D}_{\text{I}[m]} \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{G}_{\text{I}[m]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Des hypothèses 4.5 à 4.7, nous pouvons démontrer que la solution de $\mathbf{q}_{\text{md}[m]}$ donnée par (4.8) existe et est unique puisque le terme en $\mathbf{M}_{12[m,]}$ ne dépend que des trajectoires désirées des articulations rigides.

Les dérivées temporelles supérieures de $\mathbf{q}_{\text{md}[m]}$ s'obtiennent de (4.6):

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} k_{[m]}(q_{\text{ld}[m]}, q_{\text{md}[m]}) &= -\frac{d}{dt} \chi_1(\mathbf{q}_{\text{ld}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}}) \\ &= -\chi_{1d}(\mathbf{q}_{\text{ld}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}}, \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

alors $\dot{\mathbf{q}}_{\text{md}[m]}$ s'obtient

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{\text{md}[m]} = \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}[m]} + (k_{[m]})^{-1} \frac{d}{dt} & \left[\mathbf{M}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{M}_{12[m,]} \dot{\mathbf{q}}_{\text{md}} \right. \\ & \left. + \mathbf{C}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{D}_{\text{I}[m]} \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{G}_{\text{I}[m]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

De la même manière nous pouvons obtenir $\ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}[m]}$ par

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}[m]} = \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ld}[m]} + (k_{[m]})^{-1} \frac{d^2}{dt^2} & \left[\mathbf{M}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}) \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{M}_{12[m,]} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}} \right. \\ & \left. + \mathbf{C}_{11[m,]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}}) \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{D}_{\text{I}[m]} \dot{\mathbf{q}}_{\text{ld}} + \mathbf{G}_{\text{I}[m]}(\mathbf{q}_{\text{ld}}) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Considérant la $(m-1)^{\text{ième}}$ rangée de (4.4), nous pouvons écrire

l'expression suivante

$$k_{[m-i]}(\mathbf{q}_{ld}, \mathbf{q}_{md[m-1]}) = -\chi_2(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{md}) \quad (4.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_2(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{ld}, \ddot{\mathbf{q}}_{md}) = & \mathbf{M}_{11[m-1]}(\mathbf{q}_{ld})\ddot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{M}_{12[m-1,m]}\ddot{\mathbf{q}}_{md[m]} \\ & + \mathbf{M}_{12[m-1,m+1:n]}^R \ddot{\mathbf{q}}_{md[m+1:n]} + \mathbf{C}_{11[m-1]}(\mathbf{q}_{ld}, \dot{\mathbf{q}}_{ld})\dot{\mathbf{q}}_{ld} \\ & + \mathbf{D}_{1[m-1]}\dot{\mathbf{q}}_{ld} + \mathbf{G}_{1[m-1]}(\mathbf{q}_{ld}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

où $[m-1, m]$ identifie l'élément de la $(m-1)^{i\text{ème}}$ rangée et $m^{i\text{ème}}$ colonne de la matrice ; l'indice 'R' sur \mathbf{M}_{12}^R indique que le terme \mathbf{M}_{12} multiplie des grandeurs associées aux articulations rigides seulement.

Si nous procédons comme précédemment, nous trouverons $\mathbf{q}_{md[m-1]}$, $\dot{\mathbf{q}}_{md[m-1]}$, $\ddot{\mathbf{q}}_{md[m-1]}$ et de la même façon, nous poursuivons récursivement jusqu'au premier actionneur.

Pour le modèle du manipulateur de type SCARA présenté au chapitre 2, i.e. avec les deux premiers membres flexibles et les deux derniers rigides, la solution qui est donnée par (4.6)-(4.13) pour les membres 1 et 2 est la suivante (en grandeurs réelles).

$$\begin{aligned} q_{md2}(t) = & N_2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \left\{ q_{ld2} + k_2^{-1} \left([(2.96375 + 0.25mc) \cos(q_{ld2}) + [0.25375mc \right. \right. \\ & + 2.8438] \ddot{q}_{ld1} + [0.25375mc + 2.8438] \ddot{q}_{ld2} + 2e - 4\ddot{q}_{md3} \\ & + [2e - 4 + 3.75e - 3mc/N_4] \ddot{q}_{md4} + [(2.96375 + 0.25mc) \dot{q}_{ld1}^2 \sin(q_{ld2})] \\ & \left. \left. + D_{l2} \dot{q}_{ld2} + [5.9275 + 0.5mc] g_y \cos(q_{ld1} + q_{ld2}) \right\} \end{aligned}$$

$$\dot{q}_{md2}(t) = \frac{d}{dt} q_{md2}$$

$$\ddot{q}_{md2}(t) = \frac{d^2}{dt^2} q_{md2}$$

$$\begin{aligned} q_{md1}(t) = N_1 \{ & q_{ld1} + k_1^{-1} \left([(5.9275 + 0.5mc) \cos(q_{ld2}) + 0.50375mc + 6.719] \ddot{q}_{ld1} \right. \\ & + [(2.96375 + 0.25mc) \cos(q_{ld2}) + 0.25375mc + 2.8438] \ddot{q}_{ld2} \\ & + 2e - 4\ddot{q}_{md2} + 2e - 4\ddot{q}_{md3} + [2e - 4 + 3.75e - 3mc/N_4] \ddot{q}_{md4} \\ & - [(5.9275 + 0.5mc) \dot{q}_{ld1} \dot{q}_{ld2} + (2.96375 + 0.25mc) \dot{q}_{ld2}^2] \sin(q_{ld2}) + D_{l1} \dot{q}_{ld1} \\ & \left. + [(7.1825 + 0.5mc) \cos(q_{ld1}) + (5.9275 + 0.5mc) g_y \cos(q_{ld1} + q_{ld2})] \right\} \end{aligned}$$

$$\dot{q}_{md1}(t) = \frac{d}{dt} q_{md1}$$

$$\ddot{q}_{md1} = \frac{d^2}{dt^2} q_{md1}$$

Notons que pour évaluer $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{md}[m]}$, nous avons besoin de $\mathbf{q}_{\mathbf{ld}}^{(4)}$; pour évaluer $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{md}[m-1]}$, nous avons besoin de $\mathbf{q}_{\mathbf{ld}}^{(6)}$ et $\mathbf{q}_{\mathbf{md}[m]}^{(4)}$; et pour évaluer $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{md}[1]}$, il faut connaître $\mathbf{q}_{\mathbf{ld}}^{(2(i+1))}$, et $\mathbf{q}_{\mathbf{md}[m]}^{(2i)}$, $i=1, \dots, m$ [Sicard93].

Alors, le choix de la trajectoire désirée est important et elle doit être souple pour avoir la continuité sur les dérivées plus élevées.

Dans le cas des articulations rigides, il n'y a pas de déformation élastique. Alors l'état du membre est égal à celui de l'actionneur correspondant, tel que, en grandeurs réelles,

$$\begin{aligned} q_{md3} &= N_3 q_{ld3} & , & & q_{md4} &= N_4 q_{ld4} \\ \dot{q}_{md3} &= N_3 \dot{q}_{ld3} & , & & \dot{q}_{md4} &= N_4 \dot{q}_{ld4} \\ \ddot{q}_{md3} &= N_3 \ddot{q}_{ld3} & , & & \ddot{q}_{md4} &= N_4 \ddot{q}_{ld4} \end{aligned}$$

En sachant que tous les coefficients des matrices masses-inerties et de Coriolis et centrifuge sont bornés (les coefficients des matrices sont des sommes et produits de sinus et cosinus), il résulte que l'état interne désiré $(\mathbf{q}_{md}(t), \dot{\mathbf{q}}_{md}(t), \ddot{\mathbf{q}}_{md}(t))$ est borné si la sortie désirée $\mathbf{q}_{ld}(t)$ et ses dérivées temporelles sont bornées comme dans l'hypothèse 4.5 avec $k_{i_i} = 2(i+1), i=1, \dots, m$.

Finalement, en substituant $\mathbf{q}_{md}, \dot{\mathbf{q}}_{md}, \ddot{\mathbf{q}}_{md}, \mathbf{q}_{ld}$ et $\ddot{\mathbf{q}}_{ld}$ dans (4.5), nous obtenons le signal d'anticipation d'entrée.

4.4 Stabilité de la loi de commande proposée

Nous considérons le signal d'anticipation qui est défini en (4.3) avec \mathbf{C} représenté par les symboles de Christoffel.

Afin de trouver le système d'erreur, nous écrivons (4.3) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}u_{\text{ff}} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d \\
&+ [\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d] \\
&- [\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous pouvons exprimer (4.14) comme

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}u_{\text{ff}} &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d \\
&+ \{ [\mathbf{M}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{M}(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}}_d + [\mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}}_d \\
&+ [\mathbf{G}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{G}(\mathbf{q})] \}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Si nous définissons \mathbf{e} comme l'erreur du signal d'anticipation,

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} &= [\mathbf{M}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{M}(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}}_d + [\mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}}_d \\
&+ [\mathbf{G}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{G}(\mathbf{q})]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

alors (4.15) va s'écrire

$$\mathbf{B}u_{\text{ff}} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d + \mathbf{e} \tag{4.17}$$

Nous rappelons le modèle dynamique du manipulateur avec joints flexibles.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4.18}$$

Définissons

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{\text{ff}} \tag{4.19}$$

ou

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ff} \quad (4.20)$$

Combinons (4.17), (4.18), et (4.20), ce qui nous donne l'équation d'erreur du manipulateur en boucle ouverte.

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{D}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{e} \quad (4.21)$$

où $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ est le vecteur de l'erreur de position.

Retour statique : Considérons un retour statique de l'erreur d'état du moteur comme

$$\mathbf{R}_p \mathbf{y}_p = \mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{q}}$$

Alors, pour la loi de commande suivante

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{q}} \quad (4.22)$$

l'équation d'erreur (4.21) devient:

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{D}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \left[\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T \right] \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{e} \quad (4.23)$$

Fonction candidate de Lyapunov : Nous présentons une *fonction candidate de Lyapunov* définie dans [Sicard93] et dont le dernier terme est utilisé pour éliminer un terme croisé en $\bar{\mathbf{q}}$ et $\dot{\bar{\mathbf{q}}}$ dans \dot{V} .

$$V_1 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{K} + \mathbf{B} \mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T \right] \bar{\mathbf{q}} + c \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{c}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{q}} \quad (4.24)$$

Pour permettre la positivité de V_1 indépendamment de c nous posons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.7 : \mathbf{K}_{pm} doit être choisi symétrique et doit satisfaire

$$\left[\mathbf{K} + \mathbf{B} \mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T \right] > 0 \quad \square$$

Cette fonction candidate de Lyapunov est exprimée en considérant \mathbf{u}_0 tel qu'il est défini dans (4.22). Nous évaluons la dérivée temporelle de V_1 en tenant compte de l'hypothèse 4.7 et de la caractéristique symétrique de \mathbf{D} et de \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{K} + \mathbf{B} \mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} + c \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + c \bar{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + c \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\bar{\mathbf{q}}} \\ & + \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + c \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

et l'évaluons le long des trajectoires du système d'erreur défini par (4.23). En substituant $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\bar{\mathbf{q}}}$ de (4.23) dans (4.25) et considérant la caractéristique d'antisymétrie de $\left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{C} \right)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = & -\dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \{ \mathbf{D} - c\mathbf{M}(\mathbf{q}) \} \dot{\bar{\mathbf{q}}} - c\bar{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T) \bar{\mathbf{q}} \\
& + c\bar{\mathbf{q}}^T \{ \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \\
& + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Nous remplaçons \mathbf{e} dans (4.26) par son expression (4.16) et nous obtenons

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = & -\dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \{ \mathbf{D} - c\mathbf{M}(\mathbf{q}) \} \dot{\bar{\mathbf{q}}} - c\bar{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T) \bar{\mathbf{q}} \\
& + c\bar{\mathbf{q}}^T \{ \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \\
& + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \{ [\mathbf{M}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{M}(\mathbf{q})] \dot{\bar{\mathbf{q}}}_d + [\mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\bar{\mathbf{q}}}_d \\
& + [\mathbf{G}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{G}(\mathbf{q})] \}
\end{aligned}$$

Nous écrivons \dot{V}_1 sous la forme

$$\dot{V}_1 = \eta + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \mathbf{B}\mathbf{u}_1 \tag{4.27}$$

avec

$$\begin{aligned}
\eta = & -\dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \{ \mathbf{D} - c\mathbf{M}(\mathbf{q}) \} \dot{\bar{\mathbf{q}}} - c\bar{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T) \bar{\mathbf{q}} \\
& + c\bar{\mathbf{q}}^T \{ \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \} \dot{\bar{\mathbf{q}}} + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \{ [\mathbf{M}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{M}(\mathbf{q})] \dot{\bar{\mathbf{q}}}_d \\
& + [\mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\bar{\mathbf{q}}}_d + [\mathbf{G}(\mathbf{q}_d) - \mathbf{G}(\mathbf{q})] \}
\end{aligned}$$

Hypothèse 4.8 : Supposons que $c > 0$, pour c à définir plus tard (section 4.4.1), de telle manière que $V_1 > 0$ et $\eta \leq 0$. Pour ce, il faut que l'amortissement visqueux satisfasse

$$[\mathbf{D} - c\mathbf{M}(\mathbf{q})] \geq 0.$$

□

Proposition 4.1 : Si les hypothèses 4.7 et 4.8 sont satisfaites, l'entrée \mathbf{u}_1 et la sortie $(c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T)\mathbf{B}$ constituent une paire passive pour le système en boucle fermée (4.23). \square

Preuve : Évaluons l'intégrale temporelle de (4.27).

$$\begin{aligned} V_1(\mathbf{q}, t) - V_1(\mathbf{q}_0, t_0) &= \int_{t_0}^t (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T)\mathbf{B}\mathbf{u}_1 dt + \int_{t_0}^t \eta dt \\ \int_{t_0}^t (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T)\mathbf{B}\mathbf{u}_1 dt &= V_1(\mathbf{q}, t) - V_1(\mathbf{q}_0, t_0) - \int_{t_0}^t \eta dt \\ \int_0^t (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T)\mathbf{B}\mathbf{u}_1 dt &\geq V_1(\mathbf{q}, t) - V_1(\mathbf{q}_0, t_0) \end{aligned} \quad (4.28)$$

où \mathbf{q}_0 est l'état du système à l'instant t_0 .

Alors en respectant les hypothèses 4.7 et 4.8, (4.28) satisfait la définition 3.5, i.e. la paire $(\mathbf{u}_1, \mathbf{B}^T(c\bar{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}))$ est passive. \square

Cette paire est passive mais pas nécessairement strictement passive. Notons aussi que la présence du frottement est nécessaire pour satisfaire l'hypothèse 4.8, et la proposition 4.1. Pour obtenir un système strictement passif et tirer des résultats plus forts, nous fermons la boucle suivante.

Retour strictement passif : Choisissons un retour d'état strictement passif avec gain fini $\mathbf{R}_v = \mathbf{K}_{vm}$ entre \mathbf{u}_1 et $\mathbf{B}^T(c\bar{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}})$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{K}_{vm} \mathbf{B}^T (c\bar{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}) \quad (4.29)$$

où $\mathbf{y}_{pv} = \mathbf{B}^T (c\bar{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = c\bar{\mathbf{q}}_m^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}_m^T$ est la sortie passive (la sortie passive est une combinaison des erreurs de position et de vitesse du moteur).

Avec le théorème de passivité, nous avons la stabilité en L_2 de \mathbf{u}_2 à $\mathbf{B}^T (c\bar{\mathbf{q}} + \dot{\bar{\mathbf{q}}})$. Donc, nous pouvons déduire la stabilité en L_2 de \mathbf{u}_2 à $\bar{\mathbf{q}}_m$ et $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m$. \mathbf{R}_v peut être quelconque, mais défini positif.

4.4.1 Évaluation de la stabilité et du taux de convergence

Nous pouvons montrer que si l'origine est localement exponentiellement stable, les conditions suivantes sont satisfaites (e.g. [Sicard93]).

Dans le voisinage de $(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, il existe une fonction scalaire V , $V(t, \bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = 0$ pour $(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ pour tout $t > t_0$, et des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tel que

$$V \geq \alpha \|\mathbf{x}\|^2 \quad (4.30)$$

$$\dot{V} \leq -\gamma \|\mathbf{x}\|^2 \quad (4.31)$$

$$\|\nabla_x V\| \leq \beta \|\mathbf{x}\| \quad (4.32)$$

où $\mathbf{x} = [\bar{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T]^T$.

Preuve (que ces conditions impliquent la stabilité exponentielle) : l'équation (4.32) avec $V=0$ pour $(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ implique que pour une certaine constante $\kappa > 0$

$$V \leq \kappa \|\mathbf{x}\|^2 \quad (4.33)$$

où nous pouvons choisir $\kappa = \frac{\beta}{2}$. Le taux de convergence sera évalué de (4.31)

et (4.33):

$$\dot{V} \leq -\gamma_1 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 - \gamma_2 \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (4.34a)$$

$$V \leq \kappa_1 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + \kappa_2 \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (4.34b)$$

Si nous choisissons $\kappa = \max(\kappa_1, \kappa_2)$ et $\gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2)$ nous allons obtenir

$$\dot{V} \leq -\frac{\gamma}{\kappa} V \quad (4.35)$$

Tel que $\sigma = \frac{\gamma}{\kappa}$ représente la borne inférieure du taux de convergence de V dans

l'équation précédente.

$$\dot{V} \leq -\sigma V \quad (4.36)$$

□

Notons qu'une bonne évaluation du taux de convergence est donnée par

$$\sigma = \min \left\{ \frac{\gamma_1}{\kappa_1}, \frac{\gamma_2}{\kappa_2} \right\}$$

4.4.1.1 Système d'erreur en boucle fermée

Nous considérons le système d'erreur en boucle fermée qui est donné par l'équation suivante en substituant (4.29) dans (4.23)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \left[\mathbf{K} + \mathbf{B}(c\mathbf{K}_{vm} + \mathbf{K}_{pm})\mathbf{B}^T \right] \bar{\mathbf{q}} \\ + \left[\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nous voulons exprimer les conditions pour des valeurs fixes des gains \mathbf{K}_{pm} et \mathbf{K}_{vm} du système afin de prouver la stabilité locale exponentielle et de trouver son taux de convergence σ .

Nous écrivons la fonction candidate de Lyapunov suivante basée sur la commande par retour d'état réduit:

$$\begin{aligned} V_2 = \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}\mathbf{B}^T \right] \bar{\mathbf{q}} + c \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ + \frac{c}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Évaluons la dérivée de V_2 par rapport au temps le long des trajectoires du système donné par son équation d'erreur (4.37) et en considérant $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, la caractéristique d'antisymétrie de $(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}} - \mathbf{C})$ et que la matrice \mathbf{K} est symétrique:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 = & -c\bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}\mathbf{B}^T + c\mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T \right] \bar{\mathbf{q}} - c\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\
& + c\bar{\mathbf{q}}^T \left[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \left[\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T - c\mathbf{M}(\mathbf{q}) \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\
& + \left(c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \right) \mathbf{e}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Donc, nous procédons afin que V_2 et \dot{V}_2 satisfassent (4.30), (4.31), (4.32), (4.33).

Premièrement, nous voulons garantir que V_2 est positive. Nous écrivons le terme croisé de (4.38) sous la forme ci-dessous

$$\begin{aligned}
c\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} = & \frac{c}{2} \left(-\varepsilon^2 \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{q}} - \varepsilon^{-2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}} + \right. \\
& \left. (\varepsilon \bar{\mathbf{q}}^T + \varepsilon^{-1} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \mathbf{M}(\mathbf{q}) (\varepsilon \bar{\mathbf{q}} + \varepsilon^{-1} \dot{\bar{\mathbf{q}}}) \right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

De (4.39) nous trouvons qu'il est nécessaire que $c > 0$.

Substituant (4.40) dans (4.38), en négligeant le terme positif $(\varepsilon \bar{\mathbf{q}}^T + \varepsilon^{-1} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T) \mathbf{M}(\mathbf{q}) (\varepsilon \bar{\mathbf{q}} + \varepsilon^{-1} \dot{\bar{\mathbf{q}}})$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
V_2 \geq & \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}\mathbf{B}^T + c \left\{ \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T - \varepsilon^2 \mathbf{M}(\mathbf{q}) \right\} \right] \bar{\mathbf{q}} \\
& + \frac{1}{2} \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \left[1 - c\varepsilon^{-2} \right] \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\bar{\mathbf{q}}}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Ainsi de (4.41),

$$(1 - c\varepsilon^{-2}) > 0 \Rightarrow \varepsilon^2 > c \tag{4.42}$$

et pour avoir $V_2 > 0$, la condition suivante doit être respectée

$$\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T + c\{\mathbf{D} + \mathbf{BK}_{vm}\mathbf{B}^T - \varepsilon^2\mathbf{M}(\mathbf{q})\} > \mathbf{0}.$$

Dans la commande par retour d'état réduit (juste l'état du moteur), cette condition correspond à

$$\mathbf{W} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{W}_1 & -c\varepsilon^2\mathbf{M}''_{12} \\ \hline -c\varepsilon^2\mathbf{M}''_{21} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \middle| \left. \begin{array}{c} \mathbf{K}''_{pm} + c\{\mathbf{D}''_{\mathbf{m}} - \varepsilon^2\mathbf{M}''_{22} + \mathbf{K}''_{vm}\} \end{array} \right\} \right] > \mathbf{0}$$

où

$$\mathbf{W}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_e + c\{\mathbf{D}_1 - \varepsilon^2\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q})\} & -\mathbf{N}'^{-1}\mathbf{K}_e - c\varepsilon^2\mathbf{M}'_{12} \\ \hline -\mathbf{N}'^{-1}\mathbf{K}_e - c\varepsilon^2\mathbf{M}'_{21} & \mathbf{N}'^{-2}\mathbf{K}_e + \mathbf{K}'_{pm} + c\{\mathbf{D}'_{\mathbf{m}} - \varepsilon^2\mathbf{M}'_{22} + \mathbf{K}'_{vm}\} \end{array} \right] > \mathbf{0} \quad (4.43)$$

Avec, tel que présenté à l'annexe A.4, $\mathbf{M}'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2e-4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}'_{21}^T$,

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}'_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} D_{m1} & 0 \\ 0 & D_{m2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}''_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} D_{m3} & 0 \\ 0 & D_{m4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}''_{12} = \begin{bmatrix} 2e-4 & 2e-4 + 3.75e - 3mc/N_4 \\ 2e-4 & 2e-4 + 3.75e - 3mc/N_4 \end{bmatrix} = \mathbf{M}''_{21}^T, \quad \mathbf{M}'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 2e-4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}''_{22} = \begin{bmatrix} 2e-4 + (10 + mc)/N_3^2 & 0 \\ 0 & 2e-4 + 3.75e - 3mc/N_4^2 \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$$\mathbf{K}_{pm} = \begin{bmatrix} K'_{pm} & 0 \\ 0 & K''_{pm} \end{bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{K}'_{pm} = \begin{bmatrix} K_{pm1} & 0 \\ 0 & K_{pm2} \end{bmatrix}, \mathbf{K}''_{pm} = \begin{bmatrix} K_{pm3} & 0 \\ 0 & K_{pm4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{vm} = \begin{bmatrix} K'_{vm} & 0 \\ 0 & K''_{vm} \end{bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{K}'_{vm} = \begin{bmatrix} K_{vm1} & 0 \\ 0 & K_{vm2} \end{bmatrix}, \mathbf{K}''_{vm} = \begin{bmatrix} K_{vm3} & 0 \\ 0 & K_{vm4} \end{bmatrix}$$

Nous notons que la matrice de \mathbf{K} est définie semi-positive. Donc, si le terme additionnel est positif, alors \mathbf{W} est définie positive. Ceci conduit à une valeur très faible de c puisque nous devons nous fier au frottement des membres pour obtenir la positivité. Afin d'obtenir les contraintes sur c pour la loi commande de l'état réduit, nous allons utiliser la procédure suivante.

Selon le théorème de Sylvester, il est nécessaire que tous les termes de la diagonale de \mathbf{W} soient positifs pour que \mathbf{W} soit positif. Aussi, tous les mineurs principaux doivent être positifs. Analysons donc \mathbf{W}_1 .

Considérons la matrice symétrique \mathbf{W}_1 . Nous désirons la factoriser sous la forme d'une sommation de deux matrices, $\mathbf{W}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, dont \mathbf{A} est symétrique et semi-positive. Maintenant si la matrice \mathbf{B} est symétrique et positive, \mathbf{W}_1 sera positive et la condition $\mathbf{W}_1 > 0$ est satisfaite. \mathbf{K} est symétrique et semi-définie positive, et la sous matrice \mathbf{K}_e de cette matrice est diagonale et positive.

Considérons la somme suivante de matrices:

$$\mathbf{K}_{W_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_e & -\mathbf{N}'^{-1}\mathbf{K}_e - c\varepsilon^2\mathbf{M}'_{12} \\ -\mathbf{N}'^{-1}\mathbf{K}_e - c\varepsilon^2\mathbf{M}'_{21} & \mathbf{K}''_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e - \mathbf{K}'_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}'^{-2}\mathbf{K}_e - \mathbf{K}''_e \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Les variables de \mathbf{K}'_e et \mathbf{K}''_e sont choisies pour que la première matrice soit semi-définie positive (les critères sont présentés à l'annexe B).

Récrivons \mathbf{W}_1 comme

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_e & -\mathbf{N}'^{-1}\mathbf{K}_e - c\varepsilon^2\mathbf{M}'_{12} \\ -\mathbf{N}'^{-1}\mathbf{K}_e - c\varepsilon^2\mathbf{M}'_{21} & \mathbf{K}''_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{K}'_e + c\{\mathbf{D}_l - \varepsilon^2\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q})\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta\mathbf{K}''_e + \mathbf{K}'_{pm} + c\{\mathbf{D}'_m + \mathbf{K}'_{vm} - \varepsilon^2\mathbf{M}'_{22}\} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.45)$$

où $\Delta\mathbf{K}'_e = \mathbf{K}_e - \mathbf{K}'_e$ et $\Delta\mathbf{K}''_e = \mathbf{N}'^{-2}\mathbf{K}_e - \mathbf{K}''_e$.

De la discussion précédente, \mathbf{W}_1 est positive si la deuxième matrice est positive. Le terme inférieur sur la diagonale peut toujours être rendu positif avec \mathbf{K}'_{pm} et \mathbf{K}'_{vm} suffisamment grands, pour toute valeur de c . Pour l'autre terme, nous écrivons

$$\Delta\mathbf{K}'_e + c\mathbf{D}_l - c\varepsilon^2\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) > \mathbf{0}$$

$$\min \sigma(\Delta \mathbf{K}'_e) + c \min \sigma(\mathbf{D}_l) - c \varepsilon^2 \max \sigma(\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q})) > \mathbf{0} \quad (4.46)$$

où $\sigma(\cdot)$ représente la valeur singulière de la matrice.

De (4.46) et la condition (4.42) nous obtenons la première limite de c_{\max} .

$$c_{\max} < \frac{\alpha_{D_l}}{2\gamma_M} + \frac{\sqrt{\alpha_{D_l}^2 + 4\gamma_M \alpha_K}}{2\gamma_M} \quad (4.47)$$

où nous définissons $\alpha_K = \min \sigma(\Delta \mathbf{K}'_e)$, $\gamma_M = \max \sigma(\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}))$

$\alpha_{D_l} = \min \sigma(\mathbf{D}_l)$.

Si nous négligeons α_{D_l} , qui est souvent faible, nous obtenons

$$c_{\max} \cong \sqrt{\frac{\alpha_K}{\gamma_M}}$$

Nous obtenons \mathbf{W} positive en posant \mathbf{K}''_{pm} et \mathbf{K}''_{vm} suffisamment grands.

Donc la condition (4.30) est satisfaite avec c_{\max} .

De (4.38) et la relation suivante

$$c\gamma_M \|\bar{\mathbf{q}}\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\| = c \frac{\gamma_M}{2} \left[-(\varepsilon_1 \|\bar{\mathbf{q}}\| - \varepsilon_1^{-1} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|)^2 + \varepsilon_1^2 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + \varepsilon_1^{-2} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \right]$$

nous pouvons exprimer la borne supérieure de V_2 comme

$$V_2 \leq k_1 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + k_2 \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2$$

tel que $k_1 = \frac{1}{2}(\gamma_P + c\gamma_V + c\gamma_M \varepsilon_1^2) > 0$, et $k_2 = \frac{1}{2}(\gamma_M + c\gamma_M \varepsilon_1^{-2}) > 0$

où $\gamma_V = \|\mathbf{D} + \mathbf{BK}_{vm}\mathbf{B}^T\|$ et $\gamma_P = \|\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T\|$.

De (4.39) et la propriété suivante [Sicard93]: il existe γ_I tel que

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq \gamma_I \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \gamma_I \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \|\dot{\mathbf{q}}\|$$

Nous pouvons écrire (4.39) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V} + (c\bar{\mathbf{q}}^T + \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T)e \\ &\leq \dot{V} + \left(\|c\bar{\mathbf{q}}^T\| + \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}^T\| \right) \|\mathbf{e}\| \\ &\leq \dot{V} + \beta \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{e}\| \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec $\beta = (c + 1)$ [Sicard93] et

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -c\bar{\mathbf{q}}^T \left[\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T + c\mathbf{BK}_{vm}\mathbf{B}^T \right] \bar{\mathbf{q}} - c\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{BK}_{vm}\mathbf{B}^T \dot{\bar{\mathbf{q}}} \\ &\quad + c\bar{\mathbf{q}}^T \left[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} - \dot{\bar{\mathbf{q}}}^T \left[\mathbf{D} + \mathbf{BK}_{vm}\mathbf{B}^T - c\mathbf{M}(\mathbf{q}) \right] \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Donc nous trouvons les conditions suffisantes pour que \dot{V} soit négative et ceci nous conduit à celles pour \dot{V}_2 .

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\{\alpha_V - c\gamma_M\} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 - (\alpha_P + c\alpha_{vm}) \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + c\gamma_I \|\bar{\mathbf{q}}^T\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \\ &\quad + c\gamma_I \|\bar{\mathbf{q}}^T\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}_d\| + c\alpha_{vm} \|\bar{\mathbf{q}}\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\| \end{aligned} \quad (4.50)$$

où $\alpha_P = \min\sigma(\mathbf{K} + \mathbf{BK}_{pm}\mathbf{B}^T)$ et $\alpha_{vm} = \min\sigma(\mathbf{BK}_{vm}\mathbf{B}^T)$.

De (4.50), nous devons satisfaire les conditions suivantes

$$\alpha_P + c\alpha_{vm} > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_V - c\gamma_M > 0$$

La première conditions est satisfaite par l'hypothèse 4.7. Pour la deuxième condition, nous imposons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 4.9 : Pour $c > 0$, il faut choisir \mathbf{K}_{vm} tel que

$$\left[\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{vm}\mathbf{B}^T - c\mathbf{M}(\mathbf{q}) \right] > 0 \quad \square$$

Ainsi avec

$$c\gamma_I \|\bar{\mathbf{q}}\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\| \|\dot{\mathbf{q}}_d\| = \frac{c\gamma_I}{2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \left[-(\varepsilon_3 \|\bar{\mathbf{q}}\| - \varepsilon_3^{-1} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|)^2 + \varepsilon_3^2 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + \varepsilon_3^{-2} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \right]$$

et

$$c\alpha_{vm} \|\bar{\mathbf{q}}\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\| = \frac{c\alpha_{vm}}{2} \left[-(\varepsilon_2 \|\bar{\mathbf{q}}\| - \varepsilon_2^{-1} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|)^2 + \varepsilon_2^2 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + \varepsilon_2^{-2} \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \right]$$

nous pouvons écrire (4.50) comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left[\alpha_P + c\alpha_{vm} - \frac{c\alpha_{vm}}{2} \varepsilon_2^2 - \frac{c\gamma_I}{2} \varepsilon_3^2 \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \right] \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 + c\gamma_I \|\bar{\mathbf{q}}\| \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \\ & - \left[\alpha_V - c\gamma_M - \frac{c\alpha_{vm}}{2} \varepsilon_2^{-2} - \frac{c\gamma_I}{2} \varepsilon_3^{-2} \|\dot{\mathbf{q}}_d\| \right] \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \end{aligned}$$

Supposons que $\gamma_{td} = \max_t \|\dot{\mathbf{q}}_d\|$ est la vitesse désirée maximale du système

(bornée et connue) et $\gamma_e = \sup_t \|\bar{\mathbf{q}}\|$ est uniformément borné tel que

$$\alpha_V - c\gamma_M - c\gamma_I\gamma_e > 0$$

En fait, la région d'attraction limitée par γ_e pourrait être agrandie arbitrairement en fixant c . De toute façon, le taux de convergence dépend des conditions initiales. Le frottement dissipatif du membre est une condition essentielle pour garantir que $\gamma_V > 0$.

Alors nous pouvons écrire

$$\dot{V} \leq -\gamma_1 \|\bar{\mathbf{q}}\|^2 - \gamma_2 \|\dot{\bar{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (4.51)$$

où

$$\gamma_1 = \left[\alpha_P + c\alpha_{vm} - \frac{c\alpha_{vm}}{2} \varepsilon_2^2 - \frac{c\gamma_I}{2} \varepsilon_3^2 \gamma_{td} \right] \text{ et}$$

$$\gamma_2 = \alpha_V - c\gamma_M - c\gamma_I\gamma_e - \frac{c\alpha_{vm}}{2} \varepsilon_2^{-2} - \frac{c\gamma_I}{2} \varepsilon_3^{-2} \gamma_{td}$$

Donc \dot{V} est négatif si γ_1 et γ_2 sont positifs. Alors pour une valeur fixe

de ε_2 choisie telle que $\alpha_V - c\gamma_M - c\gamma_I\gamma_e - \frac{c\alpha_{vm}}{2} \varepsilon_2^{-2} > 0$, nous avons

$$\frac{\frac{c\gamma_I}{2}\gamma_{td}}{\alpha_V - c\gamma_I\gamma_e - c\gamma_M - \frac{c\gamma_{vm}}{2}\varepsilon_2^{-2}} < \varepsilon_3^2 < \frac{\alpha_P + c\alpha_{vm} - \frac{c\alpha_{vm}}{2}\varepsilon_2^2}{\frac{c\gamma_I}{2}\gamma_{td}} \quad (4.52)$$

De (4.52) et pour une erreur maximale de position imposée (i.e. γ_e), γ_{td} doit satisfaire la condition suivante

$$\gamma_{td} < \frac{\left[(\alpha_V - c\gamma_I\gamma_e - c\gamma_M - c\frac{\gamma_{vm}}{2}\varepsilon_2^{-2})(\alpha_P + c\alpha_{vm}(1 - \frac{\varepsilon_2^2}{2})) \right]^{1/2}}{c\frac{\gamma_I}{2}} \quad (4.53)$$

Nous pouvons déterminer le taux de convergence par

$$\sigma = \min \left\{ \frac{\gamma_1}{\kappa_1}, \frac{\gamma_2}{\kappa_2} \right\}$$

En choisissant des gains du moteur suffisamment grands, nous pouvons élargir la région d'attraction pour un robot rigide. Si le maximum de la vitesse désirée γ_{td} augmente, la borne permise d'erreur de la trajectoire γ_e décroît rapidement avec des gains et c fixés, i.e. la région d'attraction de convergence diminue aussi.

Aussi les conditions de l'hypothèse 4.8 sont établies par la même démonstration en remplaçant V par η .

Dans (4.48), plus le terme $\|\mathbf{e}\|$ sera grand (correspondant à l'effet d'une erreur de suivi de trajectoire) plus les conditions seront sévères pour assurer $\dot{V}_2 \leq 0$. Il s'en suivra une diminution des performances.

4.4.2 Discussion de la stabilité

Considérons le lemme suivant:

Lemme 4.1 [Sicard93] : Considérons $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$, une fonction continue et différentiable. Supposons qu'il existe des constantes finies $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ tel que

$$|\dot{\phi}(t)| < \gamma_1 \quad \forall t > t_0$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t |\phi(s)| ds < \gamma_2$$

Alors, $\phi \rightarrow 0$ uniformément en t , i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon) > t_0$ indépendant de t_0 tel que $|\phi(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t > T(\varepsilon)$. □

1) D'un côté, nous avons déjà conclu que $\mathbf{q}_{\text{md}}(t), \dot{\mathbf{q}}_{\text{md}}(t), \ddot{\mathbf{q}}_{\text{md}}(t)$ sont bornés (section 4.3.1), et que les trajectoires du système sont bornées par l'argument de Lyapunov de la section 4.4.1. Ainsi la dérivée de la sortie passive

$|\dot{\mathbf{y}}_{pv}| = |c\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m^T + \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_m^T|$ est également bornée. Donc par le lemme 4.1, pour $\phi(t) = \mathbf{y}_{pv}$, $\mathbf{y}_{pv} \rightarrow 0$ uniformément et ainsi $\bar{\mathbf{q}}_m \rightarrow 0$ et $\dot{\bar{\mathbf{q}}}_m \rightarrow 0$ et la stabilité interne est garantie.

2) D'un autre côté, si V_2 et $-V_2$ sont définies positives, nous pouvons établir une stabilité asymptotiquement locale plus forte par le théorème de Lyapunov. Cela est possible en choisissant une valeur convenable de c .

De 1 et 2, il résulte que *l'origine est un point stable* pour le système si $\|\mathbf{e}\|$ est suffisamment faible.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une loi de commande pour un manipulateur avec joints flexibles par retour d'état partiel, seulement l'état du moteur, qui est basée sur la passivité.

Cette loi de commande prend en compte la caractéristique linéaire de flexibilité et le modèle général du robot qui comprend l'effet gyroscopique.

La loi de commande proposée est constituée de deux parties: la première partie, le signal d'anticipation qui est indépendant du modèle du système, et la deuxième partie, le stabilisateur, qui est basée sur le retour de l'état du moteur.

Le signal d'anticipation s'obtient avec l'état désiré du manipulateur. Donc pour implanter cette loi de commande, le signal d'anticipation se calcule de façon hors-ligne pour sauver beaucoup de temps de calcul au niveau de l'implantation.

La solution du signal d'anticipation est donnée pour le modèle d'un robot SCARA en tenant compte des conditions nécessaires que nous avons décrites dans la section 4.3.1.

Nous avons démontré la stabilité asymptotique locale par le théorème de Lyapunov et déterminé le taux de convergence en présence du frottement dissipatif des liens.

CHAPITRE 5

LOI DE COMMANDE AVEC RETOUR DE L'ÉTAT COMPLET

5.1 Introduction

Nous avons employé seulement l'état du moteur dans le chapitre précédent pour stabiliser le robot. En effet, l'état du lien a été utilisé seulement pour évaluer le signal d'anticipation. Afin d'améliorer la performance en poursuite de trajectoires d'état du système, nous ajoutons le retour d'état du lien au signal d'anticipation en supposant qu'il est disponible par mesure (ou reconstruction). Ainsi, nous changeons la forme de la trajectoire désirée du moteur afin d'obtenir une meilleure performance pour la position du membre. Alors le nouveau signal d'anticipation basé sur (4.3) employé au chapitre 4 s'exprime comme suit:

$$\mathbf{B}u_{\text{ffc}} = \mathbf{M}(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}_d) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{pl} \tilde{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{vl} \tilde{\mathbf{B}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} \quad (5.1)$$

où $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{I}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{2 \times 4}]$; $\mathbf{K}_{pl} = \text{diag}(k_{pl1}, k_{pl2})$ et $\mathbf{K}_{vl} = \text{diag}(k_{vl1}, k_{vl2})$ sont les matrices diagonales du correcteur proportionnel et dérivatif des liens respectivement.

5.2 Système d'erreur

Combinons les équations (4.16), (4.18), (4.20) et (5.1) et tenons compte le retour statique d'état du moteur \mathbf{K}_{pm} ; il résulte l'équation d'erreur du manipulateur en boucle ouverte :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = & \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{e} \\ & + \left[\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}\mathbf{B}^T + \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{K}_{pl}\tilde{\mathbf{B}} \right] \bar{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{K}_{vl}\tilde{\mathbf{B}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pour démontrer la passivité et la stabilité du système, nous exprimons le signal d'anticipation sous la forme :

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_{ffc} - \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{u}_l = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q}_d + \mathbf{e} \quad (5.3)$$

avec $\tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{u}_l = -\left(\tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{K}_{pl}\tilde{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{K}_{vl}\tilde{\mathbf{B}}\dot{\bar{\mathbf{q}}}\right)$ tel que le système d'erreur peut s'écrire

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{u}_l = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{pm}\mathbf{B}^T)\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{e} \quad (5.4)$$

où $-\tilde{\mathbf{B}}^T\mathbf{u}_l$ est strictement passif pour $\mathbf{K}_{pl} > 0$ et $\mathbf{K}_{vl} > 0$.

5.3 Contrôleur strictement passif

Nous avons aussi déjà trouvé à la section 4.4 que l'équation d'erreur du système en employant le retour d'état partiel \mathbf{K}_{pm} est passive. De la caractéristique des systèmes passifs, nous savons que la fermeture d'une boucle passive sur un système passif nous donne un système passif. Donc, en ajoutant

$\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{u}_l$ au signal d'anticipation, la propriété de passivité du système reste toujours la même. En conséquence le système d'erreur (5.2) possède la paire passive $(\mathbf{u}_1, \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{q}})$.

D'avoir ajouté le terme $\tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{pl} \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{q}}$ au signal d'anticipation modifie le choix de la fonction d'énergie V_1 (4.24) qui devient

$$V_3 = V_1 + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{pl} \tilde{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{q}} \quad (5.5)$$

Considérons que \mathbf{K}_{pl} est symétrique. Donc la dérivée de la fonction V_3 est donnée par:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_1 + \bar{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{pl} \tilde{\mathbf{B}} \dot{\bar{\mathbf{q}}} \quad (5.6)$$

Considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.1 : \mathbf{K}_{pl} doit satisfaire la condition suivante

$$[\mathbf{K} + \mathbf{B} \mathbf{K}_{pm} \mathbf{B}^T + \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{K}_{pl} \tilde{\mathbf{B}}] > 0 \quad \square$$

Ceci est facile à satisfaire en ayant $\mathbf{K}_{pl} > 0$ et $\mathbf{K}_{pm} > 0$ d'amplitudes suffisantes.

Nous pouvons démontrer que pour le système représenté avec la fonction d'énergie V_3 , l'erreur de la position et de la vitesse de l'état du système convergent uniformément vers zéro de façon exponentielle.

5.4 Évaluation de l'état désiré

Nous considérons que $\mathbf{q}_{\text{ld}[i]}(t)$, $i = 1, \dots, n$ et ses k premières dérivées temporelles existent et sont continues (i.e. $\mathbf{q}_{\text{ld}[i]}(t) \in C^k$) pour k suffisamment élevé. Afin d'évaluer le signal d'anticipation (5.1), nous avons ainsi besoin de l'état désiré du moteur. Cet état est toujours disponible avec la mesure ou la reconstitution pour les positions et les vitesses de moteurs. En injectant les erreurs de position et de vitesse lors du calcul de l'état désiré du moteur, nous changeons la forme de la trajectoire désirée du moteur.

Mais l'existence de la force/couple gyroscopique ne permet pas d'évaluer l'état désiré du moteur $\mathbf{q}_{\text{md}[i]}^{[k]}(t)$ pour le $k > 1$ avec une méthode analytique. Par conséquent, lors de l'évaluation du signal d'anticipation nous employons une méthode approximative et nous négligeons les termes de \mathbf{K}_{pl} et \mathbf{K}_{vl} qui contiennent l'état réel des membres avec dérivées supérieures à 1.

Par exemple pour l'état désiré des moteurs 1 et 2, nous avons

$$\begin{aligned}
q_{md1} &= q'_{md1} - \text{inv}(k_1)N_1 \left\{ k_{pl1}(q_{l1} - q_{ld1}) + k_{vl1}(\dot{q}_{l1} - \dot{q}_{ld1}) \right\} \\
\dot{q}_{md1} &= \dot{q}'_{md1} - \text{inv}(k_1)N_1 \left\{ k_{pl1}(\dot{q}_{l1} - \dot{q}_{ld1}) \right\} \\
\ddot{q}_{md1} &= \ddot{q}'_{md1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{md2} &= q'_{md2} - \text{inv}(k_2)N_2 \left\{ k_{pl2}(q_{l2} - q_{ld2}) + k_{vl2}(\dot{q}_{l2} - \dot{q}_{ld2}) \right\} \\
\dot{q}_{md2} &= \dot{q}'_{md2} - \text{inv}(k_2)N_2 \left\{ k_{pl2}(\dot{q}_{l2} - \dot{q}_{ld2}) \right\} \\
\ddot{q}_{md2} &= \ddot{q}'_{md2}
\end{aligned}$$

où $q_{l1}, \dot{q}_{l1}, q_{l2}, \dot{q}_{l2}$ sont les valeurs mesurées de l'état des moteurs 1 et 2;

$q_{md1}, \dot{q}_{md1}, \ddot{q}_{md1}$ et $q_{md2}, \dot{q}_{md2}, \ddot{q}_{md2}$ sont les résultats de l'évaluation de l'état désiré des moteurs 1 et 2 par retour d'état complet et $q'_{md1}, \dot{q}'_{md1}, \ddot{q}'_{md1}$ et $q'_{m2}, \dot{q}'_{m2}, \ddot{q}'_{m2}$ représentent l'état désiré des moteurs 1 et 2 évalué par retour d'état partiel.

5.5 Conclusion

Nous avons employé le retour d'état du membre afin d'améliorer la poursuite de la trajectoire désirée et la performance du système. Pour ce, nous avons ajouté le retour d'état du membre au signal d'anticipation. Étant donné que nous n'avons pas réussi à résoudre l'état du moteur, nous avons utilisé une méthode approximative et nous négligeons les termes en \mathbf{K}_{pl} et \mathbf{K}_{vl} qui contiennent l'état réel des membres avec dérivées supérieures à 1.

CHAPITRE 6

VALIDATION DES RÉSULTATS

Nous illustrons dans ce chapitre les résultats de la simulation par les méthodes de retour d'état partiel et complet. La simulation numérique est effectuée pour une charge constituée d'un cube avec une masse de 20 kg attachée au quatrième membre. Nous considérons les paramètres du système comme présentés à l'annexe A.

Nous présentons les résultats de simulation sous les conditions suivantes:

(i) les conditions initiales: $\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_m = 0.02 \text{ rad}$ pour chacune des articulations, i.e. aucune déformation élastique; (ii) la consigne est un échelon avec la valeur finale de 0.1 rad, ou la consigne d'entrée pour la position du membre est du type cosinus: $0.0125 \cdot (1 - \cos(5t))^3$ (une entrée suffisamment souple avec une pulsation de 5 rad/s). La vitesse et l'accélération désirées pour le cas d'entrée échelon sont nulles.

Nous considérons l'état du moteur ramené du côté membre. Donc les grandeurs sont présentées mises à l'échelle. Dans tous les cas le frottement visqueux des membres et des moteurs est considéré $\mathbf{D}_l = \text{diag}\{0.01, 0.01\}$ et $\mathbf{D}_m = \text{diag}\{0.4096, 0.4096, 0.6169, 0.4096\}$ (mise à l'échelle) respectivement. Les résultats complets de simulation sont présentés à l'annexe D.

6.1 Retour d'état partiel (état des moteurs)

Nous employons le modèle présenté à la figure 6.1 afin de simuler le robot manipulateur décrit au chapitre 4 en tenant compte du retour de l'état partiel.

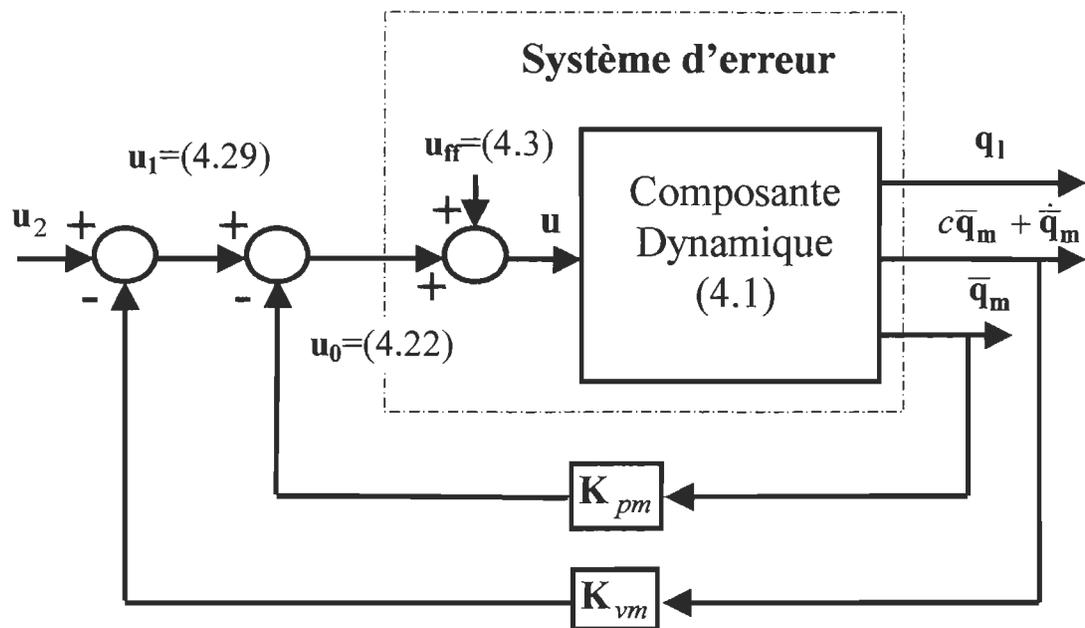
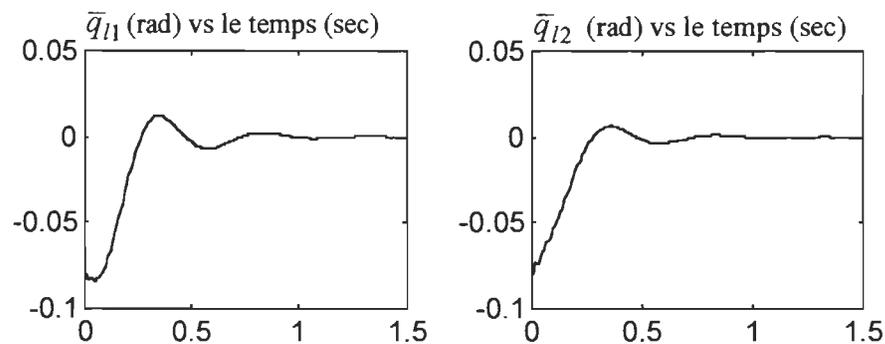


Figure 6.1 Structure du système pour le retour d'état partiel.

Un échelon de consigne d'entrée résulte en une position désirée constante du moteur (q_{md}). Les gains du retour d'état partiel sont choisis comme $K_{pm} = \text{diag}\{1.5, 1.5, 1.5, 1.5\}$ et $K_{vm} = \text{diag}\{0.25, 0.2, 0.17, 0.1\}$ (grandeurs réelles). Le choix des gains du contrôleur est important pour obtenir l'amortissement voulu des réponses de la position du membre (Figure 6.2). La

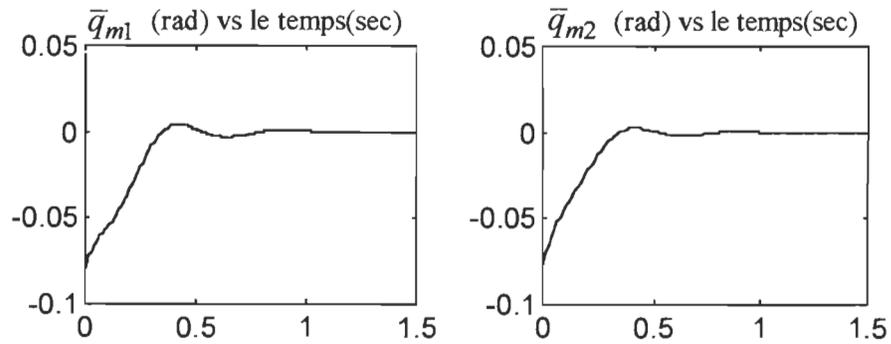
source principale de cet amortissement est le frottement visqueux des membres. Pour obtenir des réponses plus amorties du membre, la bande passante d'asservissement du moteur doit être faible pour éviter d'exciter les modes naturels de la structure mécanique.



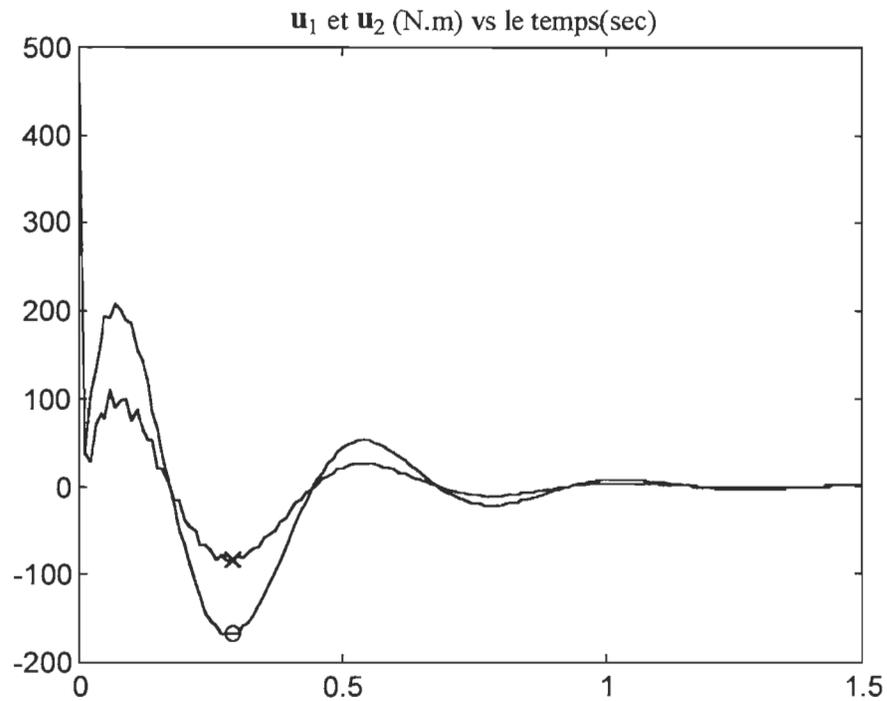
**Figure 6.2 Erreur de position des membres 1 et 2;
consigne échelon, état partiel.**

La figure 6.3 montre l'erreur de position des actionneurs 1 et 2. Le temps de réponse est environ 0.3 sec. Nous remarquons que la réponse des moteurs est initialement en avance sur celle des membres par l'effet du ressort qui doit être bobiné.

La figure 6.4 présente les couples délivrés par les moteurs 1 et 2. Ceci décrit une caractéristique importante du moteur, soit le couple maximum fourni. Dans notre cas, le couple maximum pour les moteurs 1 et 2 est égal 491.5 Nm. Nous remarquons aussi qu'après le régime transitoire, le couple converge vers une constante.



**Figure 6.3 Erreur de position des actionneurs 1 et 2;
consigne échelon, état partiel.**



**Figure 6.4 Couple des moteurs 1 ('o') et 2 ('x');
état partiel, consigne échelon.**

La position des membres et des actionneurs sont montrées aux figures 6.5 et 6.6 pour une entrée du type cosinus. Cette forme est plus souple par

rapport à l'échelon, donc la trajectoire de l'état est moins oscillatoire. Nous observons la convergence des trajectoires vers la consigne et l'apparition d'oscillations amorties lorsque la dérivée de la consigne varie rapidement.

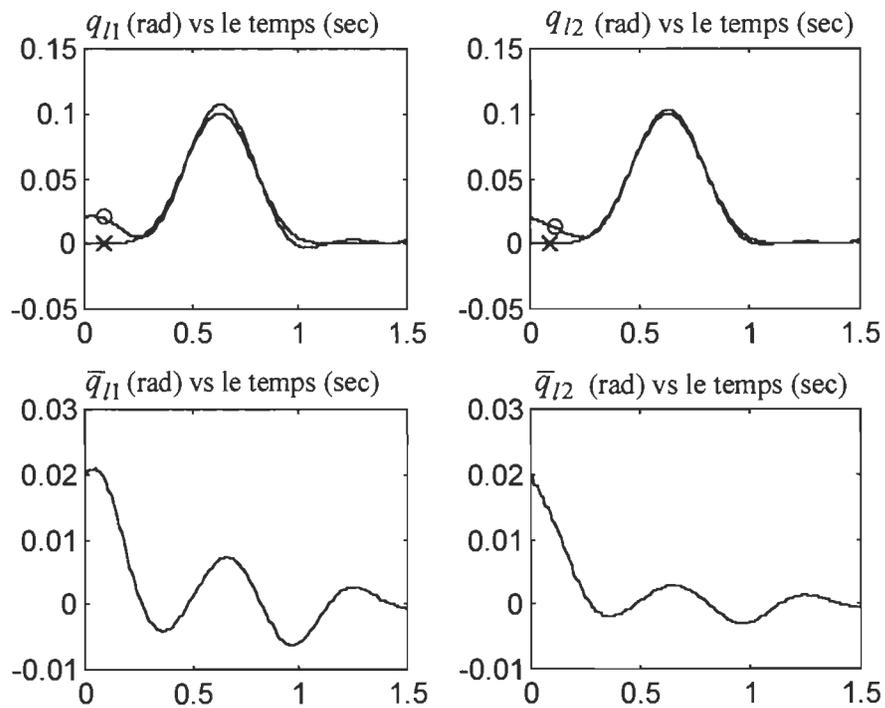


Figure 6.5 Position des membres 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état partiel.

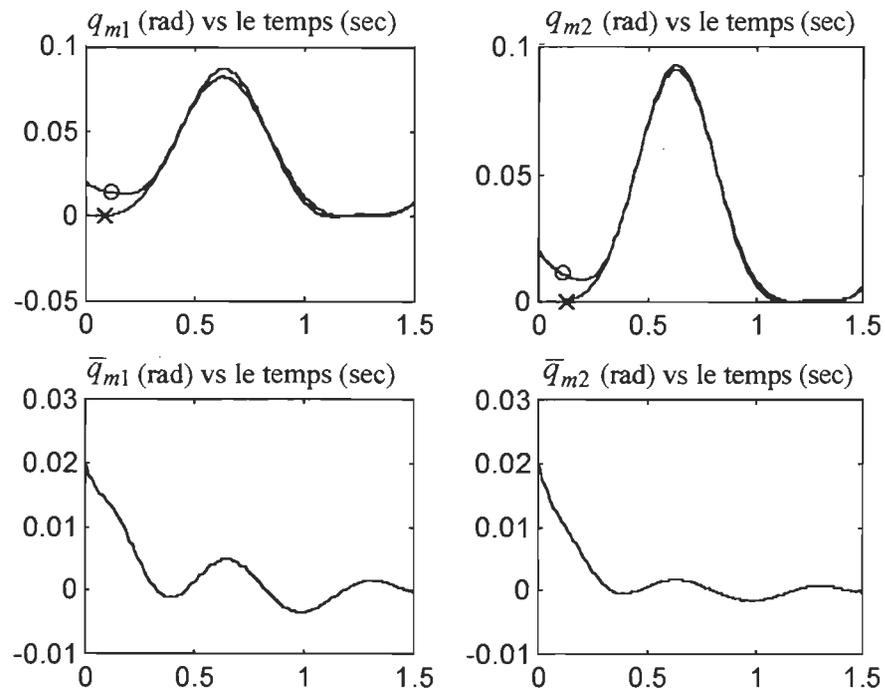


Figure 6.6 Position des actionneurs 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état partiel.

La figure 6.7 illustre le couple fourni par les actionneurs 1 et 2. Le couple maximum délivré du moteur 1 est de 206.41 Nm et celui du moteur 2 est de 122.88 Nm.

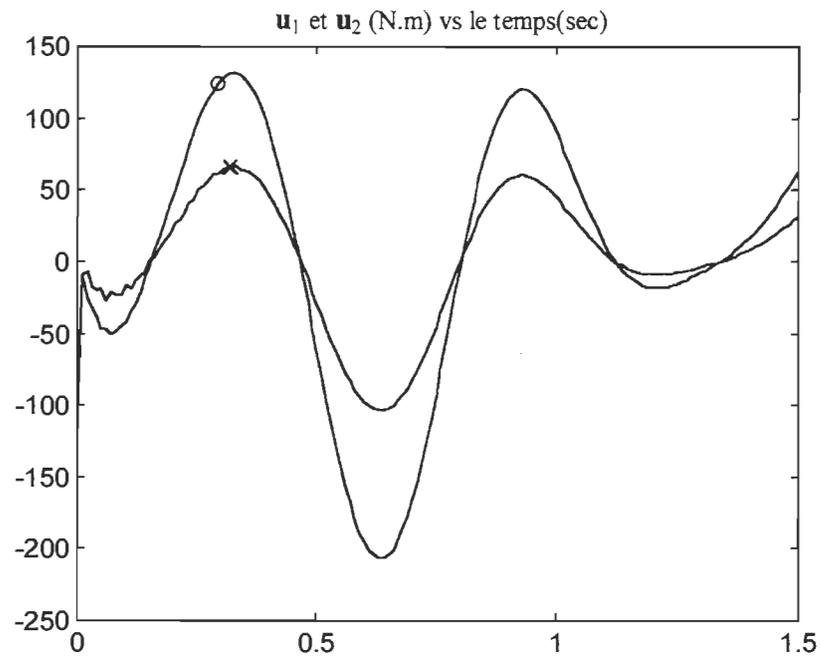


Figure 6.7 Couple des moteurs 1 ('o') et 2 ('x'); état partiel, entrée cosinus.

6.1.1 Augmentation de la pulsation de l'état des moteurs

Pour accélérer la réponse dynamique du système, il faut augmenter la bande passante du moteur. Ceci sera faisable en choisissant les gains plus élevés pour le correcteur proportionnel du moteur et évidemment en augmentant les gains du correcteur dérivatif afin d'amortir les oscillations du moteur. Dans ce cas, pour obtenir un temps de réponse d'environ 0.15 seconde pour la position des actionneurs du système, nous choisissons $\mathbf{K}'_{pm} = \text{diag}\{5, 5, 5, 5\}$ et $\mathbf{K}'_{vm} = \text{diag}\{0.7, 0.65, 0.5, 0.2\}$ (grandeurs réelles).

Les figures 6.8 et 6.9 illustrent l'état du système dans ce cas. Notons que nous n'injectons aucun amortissement aux membres du manipulateur sauf du frottement naturel. Ainsi les oscillations des membres sont dues à l'excitation de la partie mécanique du système. Dans ce cas, le temps de réponse du système a légèrement diminué mais le temps de stabilisation a augmenté (comparer aux figures 6.2 et 6.3).

Les trajectoires obtenues pour les troisième et quatrième membres sont très semblables à celles de la section précédente (Voir annexe D. L'effet gyroscopique cause du dépassement au niveau du membre trois. Ce problème se règle facilement en ajoutant du gain dérivatif à ce moteur.

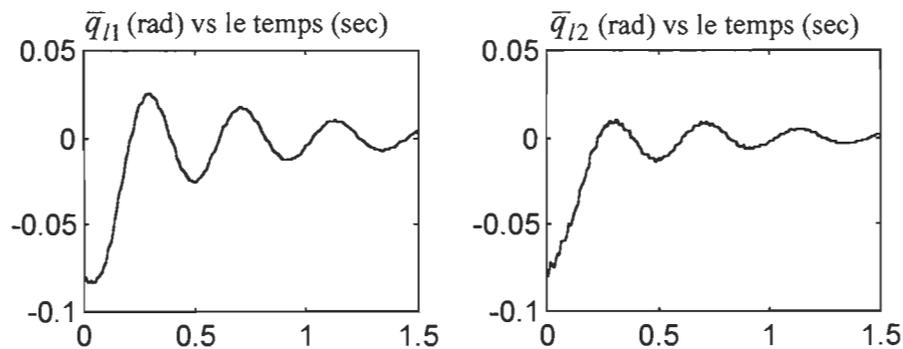


Figure 6.8 Erreurs de position des membres 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec K'_{pm} , K'_{vm} .

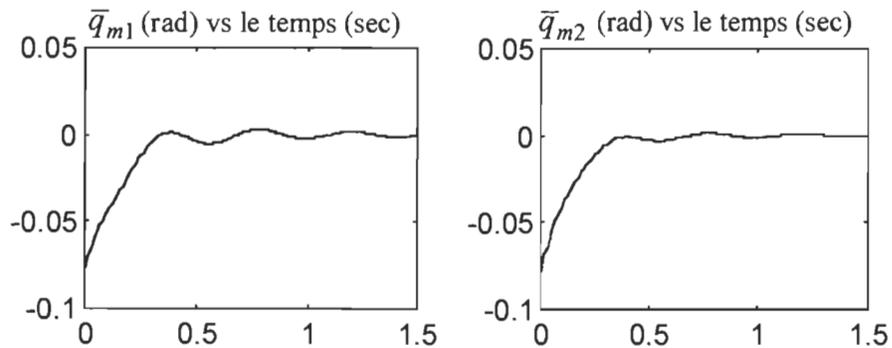


Figure 6.9 Erreur de position des actionneurs 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec K'_{pm} , K'_{vm} .

6.1.2 Augmentation du frottement des membres

Comme nous avons vu par les résultats de la section précédente, la passivité ne garantit pas la performance. Nous supposons que nous pouvons manipuler le frottement du membre afin d'améliorer la performance de la trajectoire de l'état du système. Nous choisissons le frottement des membres 1 et 2 à 100, i.e. $\mathbf{D}'_i = \text{diag}\{100, 100\}$ (mise à l'échelle), et les gains des correcteurs du moteur à $\mathbf{K}''_{pm} = \text{diag}\{5, 5, 5, 5\}$ et $\mathbf{K}''_{vm} = \text{diag}\{0.63, 0.52, 0.3, 0.1\}$ (grandeurs réelles). Nous présentons les positions des membres et des moteurs du système aux figures 6.10 et 6.11.

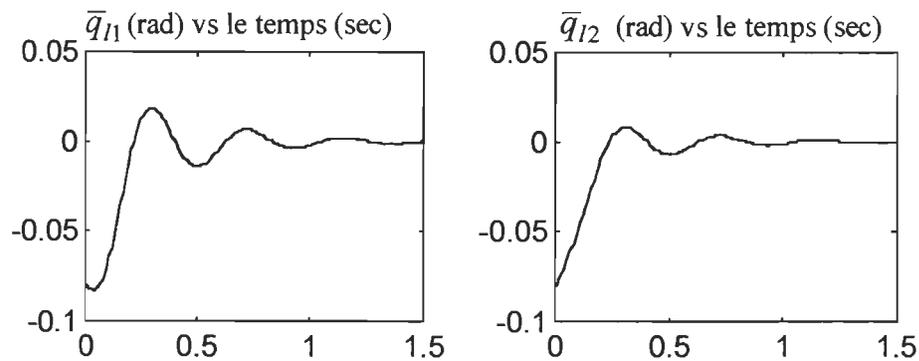


Figure 6.10 Erreur de position des membres 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec K''_{pm} , K''_{vm} et D'_l .

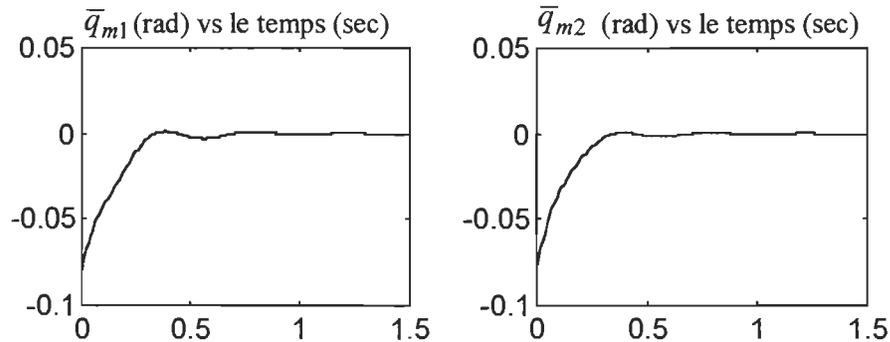


Figure 6.11 Erreur de position des actionneurs 1 et 2; consigne échelon, état partiel avec K''_{pm} , K''_{vm} et D'_l .

Nous constatons que pour accélérer la réponse dynamique du système dans la section précédente, le temps de stabilisation de l'état des membres et des moteurs a aussi augmenter. Cependant en ajoutant le frottement des membres, le système (l'état du moteur et du membre) se stabilise plus rapidement. En d'autres termes, l'effet d'ajouter du frottement aux membres

est d'améliorer la performance dynamique du système.

6.2 Retour d'état complet (état des moteurs et des membres)

Le problème de stabilité de l'état des membres peut être réglé en ajoutant du frottement aux membres. Mais en pratique, l'ajout d'un amortisseur mécanique augmente les pertes. Dans ce cas, nous ajoutons le retour d'état du lien au signal d'anticipation afin d'augmenter le frottement dissipatif du lien et finalement d'amortir les oscillations de l'état du membre (Schéma 6.12).

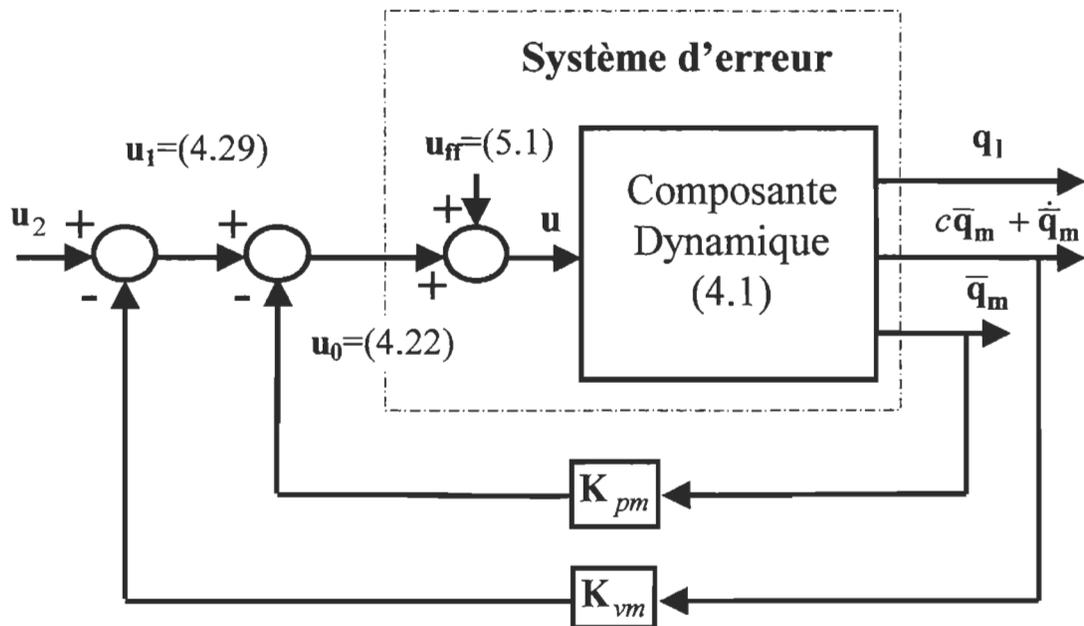


Figure 6.12 Schéma du système pour le retour d'état complet.

Avec la commande d'état complet, le signal de la consigne du moteur est tel qu'il injecte de l'amortissement. Notons cependant qu'une approximation du signal d'anticipation est employée afin de ne pas devoir mesurer les dérivées

des vitesses et pour trouver une expression analytique du signal d'anticipation.

Les gains des correcteurs des moteurs choisis sont $\mathbf{K}_{pm}''' = \text{diag}\{5, 5, 5, 5\}$ et $\mathbf{K}_{vm}''' = \text{diag}\{1.2, 0.5, 0.4, 0.2\}$ (grandeurs réelles) et les gains des correcteurs des membres choisis sont $\mathbf{K}_{pl} = \text{diag}\{3200, 800\}$ et $\mathbf{K}_{vl} = \text{diag}\{670, 70\}$ (grandeurs réelles).

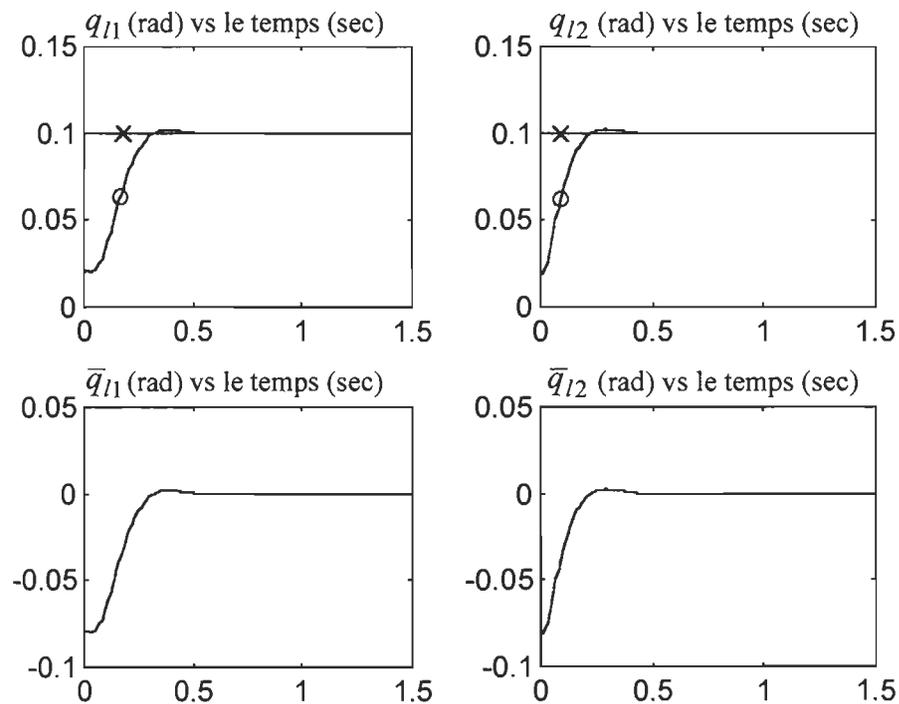


Figure 6.13 Position des membres 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; consigne échelon, état complet.

La figure 6.13 montre la position et l'erreur de position des membres. Alors, nous réussissons à améliorer le dépassement et le temps de stabilisation ainsi que le temps de réponse par rapport au retour d'état partiel. L'ajout du

retour d'état du lien au signal d'anticipation déforme la trajectoire désirée du moteur (Figure 6.14). Ce changement nous permet d'améliorer la trajectoire obtenue du membre.

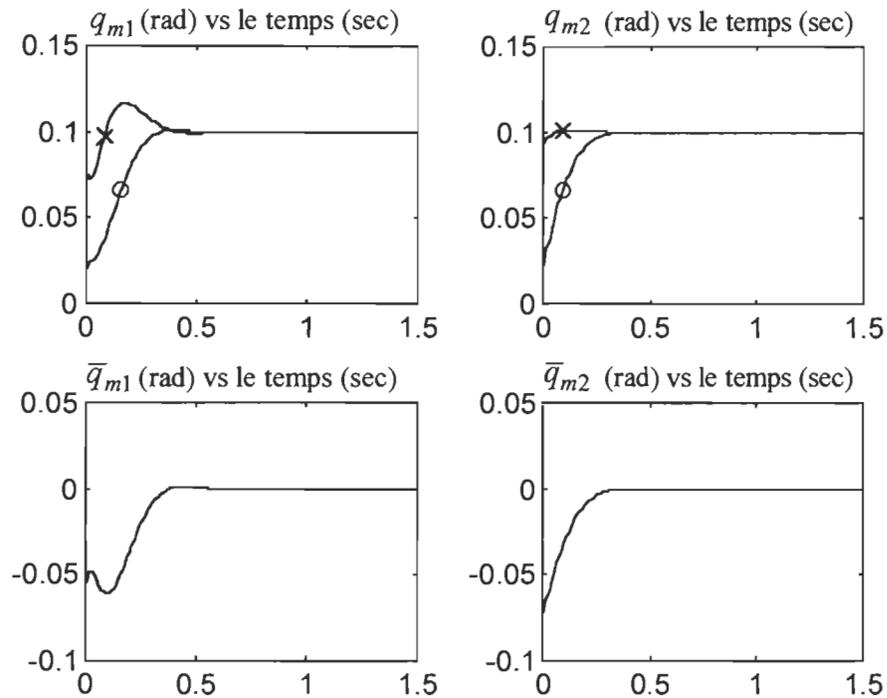
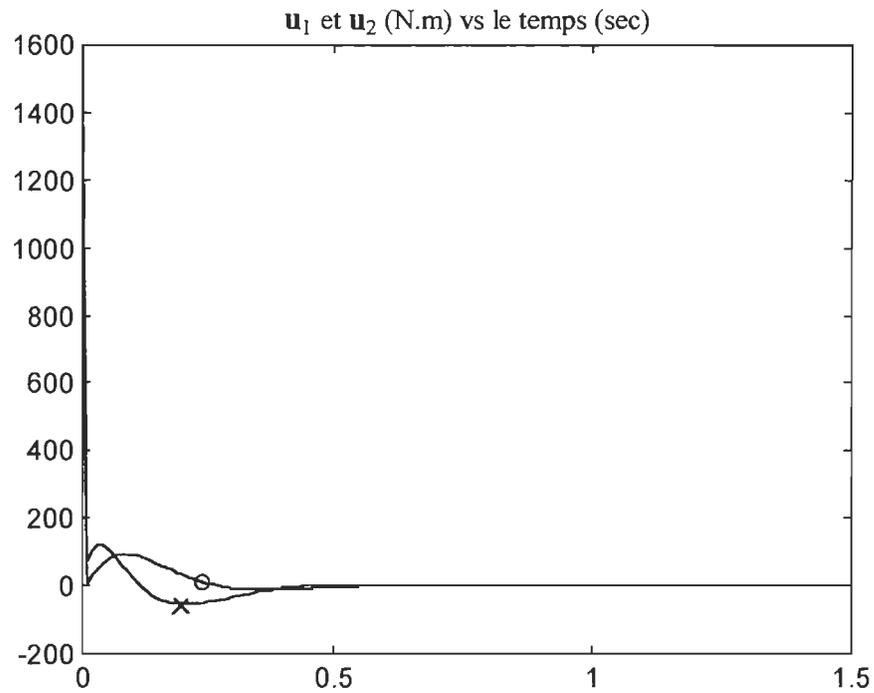


Figure 6.14 Position des actionneurs 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; consigne échelon, état complet.

Les couples fournis par les actionneurs 1 et 2 dans ce cas sont donnés par la figure 6.15. Le couple maximal du moteur 1 est de 858.11 Nm et celui du moteur 2 est de 1443.3 Nm. Le couple instantané a augmenté mais par contre le temps de stabilisation a énormément diminué par rapport au cas de l'état partiel.



**Figure 6.15 Couple des moteurs 1 ('o') et 2 ('x');
état complet, consigne échelon.**

Les réponses de l'entrée du type cosinus sont montrées aux figures 6.16 et 6.17. Nous notons un meilleur amortissement des oscillations de l'erreur de trajectoire des membres et un meilleur suivi des trajectoires qu'aux figures 6.6 et 6.7 (état partiel).

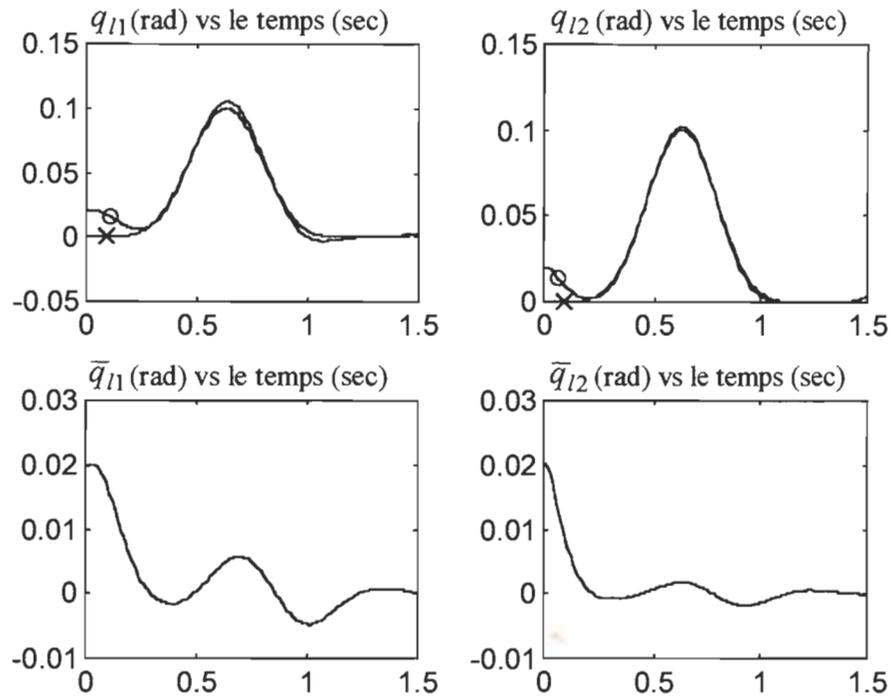


Figure 6.16 Position des membres 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état complet.

Dans le cas de l'entrée du type de cosinus, le couple maximum de démarrage fourni par le premier moteur est de 211.72 N.m et celui de deuxième est de 360.83 N.m (figure 6.18). Cette augmentation de l'effet de commande est le prix à payer pour obtenir un meilleur suivi des trajectoires.

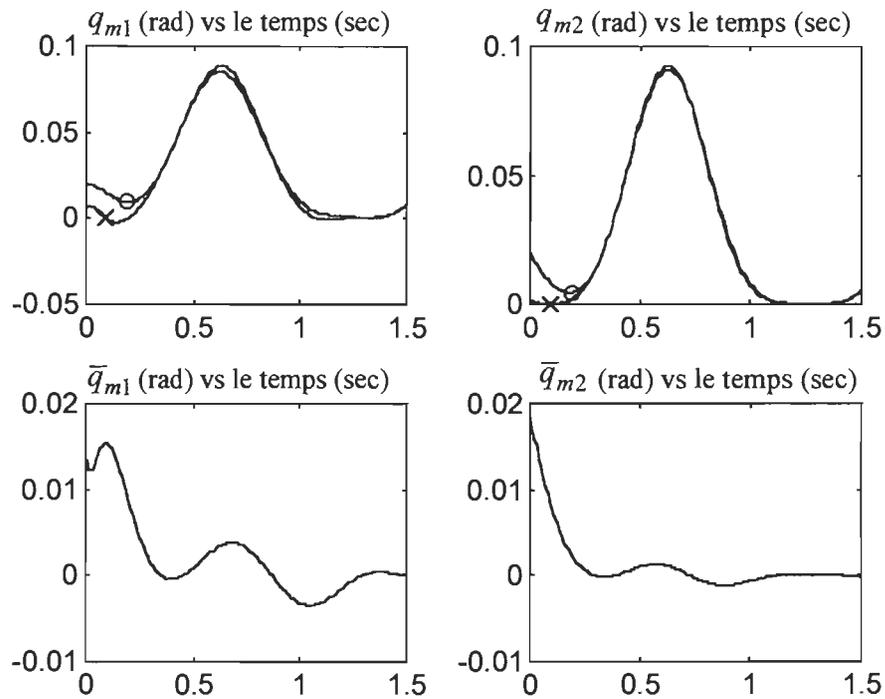


Figure 6.17 Position des actionneurs 1 et 2 ('o': obtenue; 'x': désirée) avec les erreurs correspondantes; entrée cosinus, état complet.

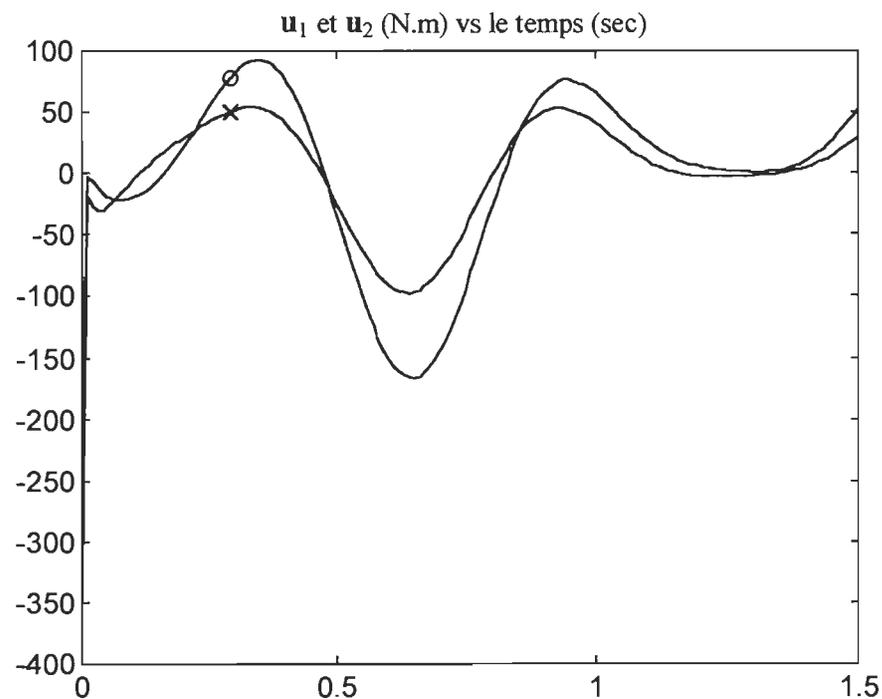


Figure 6.18 Couple des moteurs 1 ('o') et 2 ('x'); état partiel, consigne cosinus.

6.3 Robustesse de la performance de la loi de commande

6.3.1 Variation de la constante de torsion

Nous employons une constante de torsion 25% inférieure et 25% supérieure à celle de la valeur exacte pour évaluer le signal d'anticipation et étudier la performance du système vis-à-vis la variation de la constante de rigidité (généralement la constante de torsion n'est pas connue précisément).

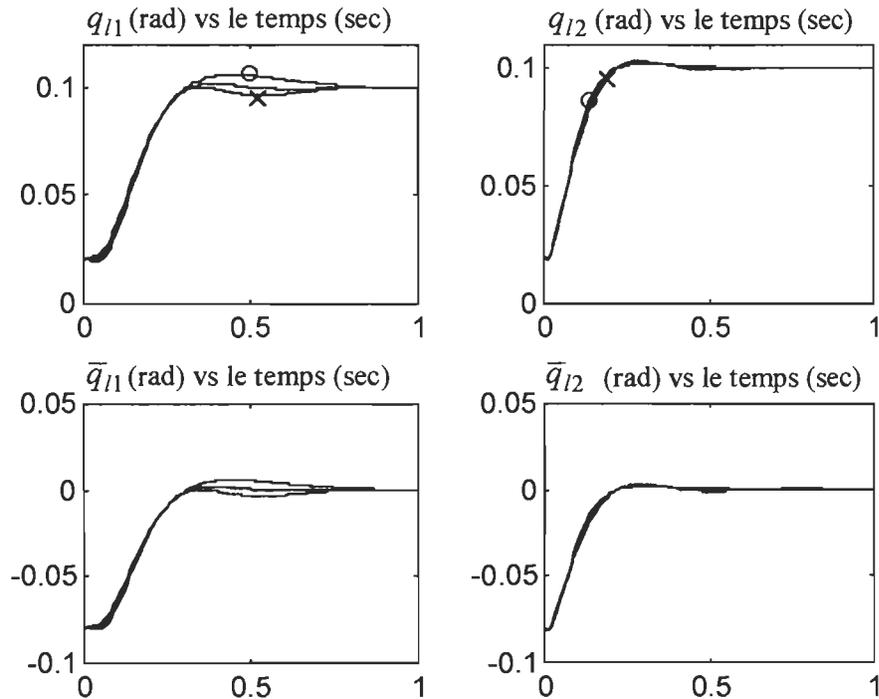


Figure 6.19 Position des membres 1 et 2 avec ses erreurs; état complet, consigne échelon, $[1(-); 0.75('o'); 1.25('x')] K_e$.

La figure 6.19 illustre les résultats de simulation pour la loi de commande avec retour d'état complet en tenant compte de la variation de la constant de

rigidité. La stabilité est aussi maintenue avec une variation de la constante de torsion. Le temps de réponse change peu mais le dépassement et le temps de stabilisation sont affectés (Les gains des correcteurs sont les mêmes qu'à la section 6.2, l'état complet).

6.3.2 Variation des conditions initiales

Nous comparons les résultats de la simulation avec les conditions initiales de 0.02, -0.02, et -0.05 rad pour les positions de l'état du système. Les vitesses initiales de l'état du système sont toujours considérées nulles.

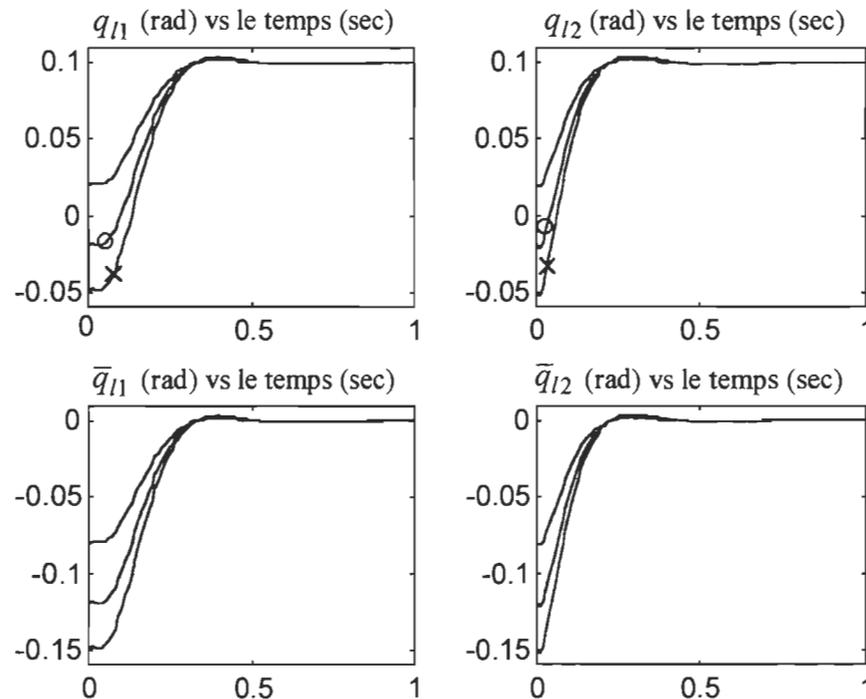


Figure 6.20 Position des membres 1 et 2 avec ses erreurs; état complet, consigne échelon, conditions initiales:[0.02(-); -0.02('o'); -0.05('x')] rad.

Les figures 6.20 et 6.21 montrent que le système demeure toujours stable même en ayant les différentes conditions d'initiales.

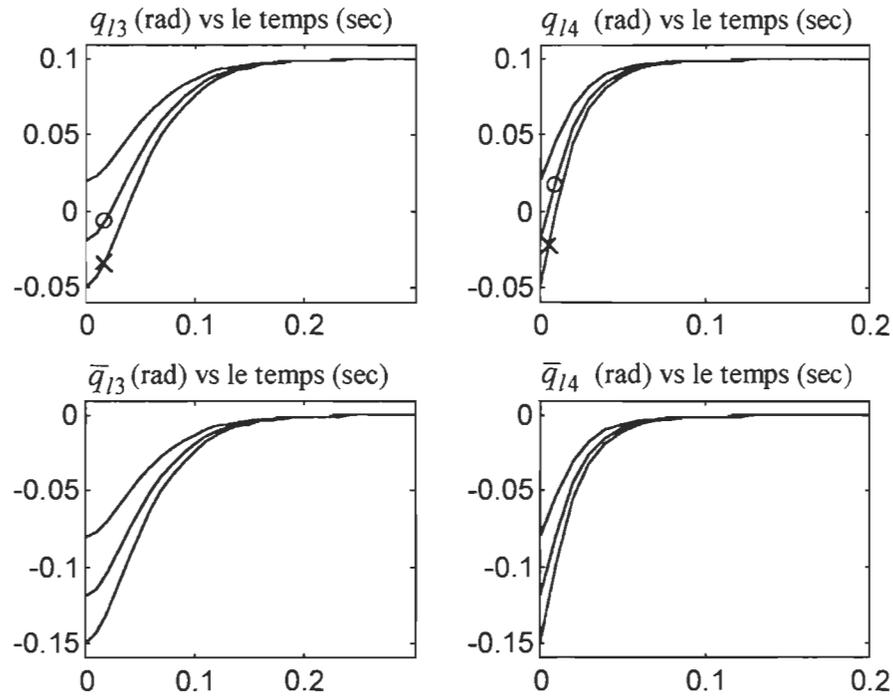


Figure 6.21 Position des membres 3 et 4 avec ses erreurs; état complet, consigne échelon, conditions initiales: [0.02(-); -0.02('o');-0.05('x')] rad.

Nous considérons maintenant la robustesse vis-à-vis de variations plus grandes des conditions initiales. Les figures 6.22 et 6.23 montrent les résultats de la simulation pour une consigne échelon et une entrée du type cosinus respectivement avec les conditions initiales de 0.5 et -0.5 rad pour les positions de l'état du système, c'est-à-dire l'amplitude au point de départ est 5 fois supérieure à l'amplitude au régime permanent. Ces résultats confirment la

robustesse de la performance du système vis-à-vis une grande variation des conditions initiales. Notons que les couples n'ont pas été limités.

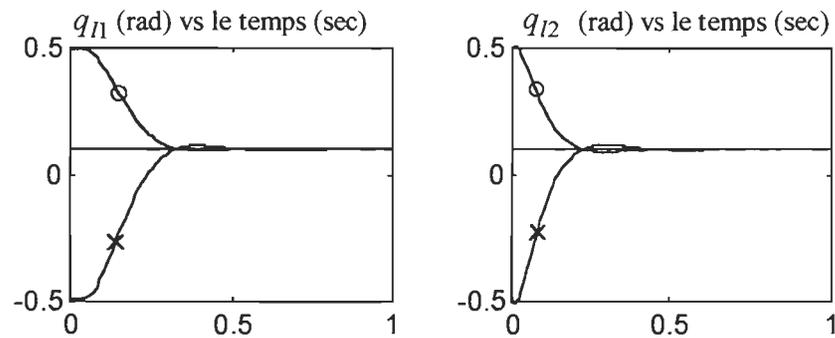


Figure 6.22 Position des membres 1 et 2; état complet, consigne échelon, conditions initiales: $[0.02(-); 0.5('o'); -0.5('x')]$ rad.

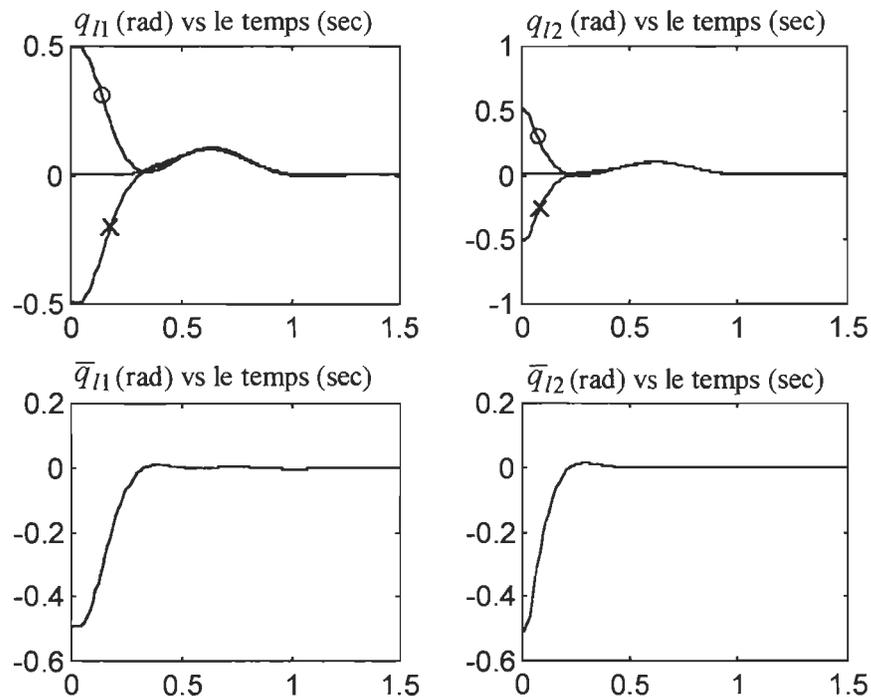


Figure 6.23 Position des membres 1 et 2; avec ses erreurs, état complet, entrée cosinus, conditions initiales: $[0.02(-); 0.5('o'); -0.5('x')]$ rad.

6.4 Conclusion

Tous les résultats de simulation de ce chapitre montrent que la loi de commande développée aux chapitres précédents est valide et est robuste pour une grande variation de la constante de torsion et des conditions initiales.

La liste des programmes avec toutes les fonctions appelées est présentée à l'annexe C. Les résultats détaillés de chaque simulation sont rapportés à l'annexe D.

CHAPITRE 7

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons présenté une approche de conception basée sur la passivité et la théorie de la stabilité de Lyapunov pour un manipulateur avec joints flexibles.

La loi de commande prend en compte la caractéristique linéaire de flexibilité et le modèle général du robot qui comprend l'effet gyroscopique. La mise au point de la loi de commande étudiée se fait en deux parties principales.

Dans la première partie, nous définissons d'abord un signal d'anticipation qui injecte un couple au système. Ce couple dépend du modèle du système. Alors pour obtenir un signal d'anticipation précis, il faut connaître le modèle exact du système. Dans cette étape, nous avons rendu le système passif en injectant le signal d'anticipation et un retour statique de l'état. Ensuite, nous avons appliqué un contrôleur strictement passif avec un gain fini quelconque afin de rendre le système complet passif entre une paire entrée-sortie. Par conséquent, nous avons la stabilité en L_2 et dans notre cas, comme nous avons démontré au chapitre 4, il en résulte la stabilité de l'état interne du système. Donc les erreurs de l'état interne du système convergent vers zéro asymptotiquement.

Dans la deuxième partie, nous avons exploité la théorie de Lyapunov pour démontrer la stabilité exponentielle locale en tenant compte du frottement dissipatif des membres, sous certaines conditions de la borne des paramètres du système et de la trajectoire d'entrée désirée. Nous avons également évalué le terme qui représente le taux de convergence.

Notons que la loi de commande basée sur la passivité garantit la stabilité et la robustesse de la stabilité. Par contre, elle ne garantit pas la performance.

Nous avons aussi étudié la commande par retour de l'état du membre. Ceci améliore la performance et la précision. Précisément, par la loi de commande par rétroaction d'état complet nous avons réussi à diminuer le temps de réponse et le temps de stabilisation. Nous avons illustré par les résultats de la simulation que cette dernière loi de commande est robuste vis-à-vis la variation de la constante de torsion et la variation des conditions initiales.

7.1 Contributions de ce travail

- Trouver le modèle du robot manipulateur avec joints flexibles et rigides.
- Considérer l'effet gyroscopique dans le modèle du robot.

- Employer une forme de signal d'anticipation plus facile à employer que dans [Sicard93], i.e. le signal d'anticipation est une fonction de la trajectoire désirée et non pas de l'état mesuré du système, ce qui enlève une grande charge de calcul.
- Démontrer la méthode pour définir une fonction positive (Annexe B).
Nous avons utilisé la propriété d'une matrice définie positive qui est basée sur la sommation deux matrices qui peuvent être semi définie positive et définie positive.

7.2 Résumé du travail effectué

Nous mentionnons par la suite la procédure de conception employée pour ce travail.

- Trouver le modèle exact du système.
- Développer la loi de commande par la passivité.
- Exploiter la méthode analytique afin d'évaluer l'état désiré du moteur.
- Évaluer le signal d'anticipation en considérant le modèle linéaire du ressort de torsion.
- Fermer la boucle de l'état statique.
- Fermer la boucle de l'état strictement passif.

- Évaluer le couple d'entrée du système.
- Démontrer la passivité et alors la stabilité en L_2 .
- Évaluer la stabilité exponentielle locale par la fonction de Lyapunov.
- Évaluer le terme de convergence.
- Dans le cas de l'état complet, nous ajoutons le retour d'état de la position et de la vitesse.
- Valider et évaluer les lois de commande par simulation.

7.3 Mise en œuvre

Comme nous avons employé seulement l'état désiré du membre dans le calcul du signal d'anticipation pour la loi de commande avec état réduit, nous n'avons pas beaucoup de calculs à effectuer à ce niveau (la trajectoire désirée et ses dérivées sont connues et ce signal peut être calculé hors-ligne). Ceci permet de diminuer la charge de calcul. Pour le signal d'anticipation avec retour d'état complet, il est possible de calculer hors-ligne la partie du signal d'anticipation qui est fonction de la consigne et de ne calculer en-ligne que les termes qui dépendent de l'état mesuré.

7.4 Travaux futurs

Nous pouvons poursuivre ce travail pour un robot en considérant d'autres genres de signaux d'anticipation, un modèle non linéaire pour le ressort de torsion et étudier l'effet du frottement sec sur les performances et la stabilité. Étant donné que le retour de dent existe dans toutes sortes de boîtes d'engrenage, nous pouvons aussi prendre en compte ce problème majeur dans la conception de la loi de commande. Finalement, nous pouvons considérer de trouver d'autres paires passives.

RÉFÉRENCES

[AbdallahDDJ91] C. Abdallah, D. Dawson, P. Dorato, et M. Jamshidi, 'Survey of Robust Control for Rigid Robots', IEEE Control Systems Magazine, Février 1991.

[Anderson89] R.J. Anderson, 'Passive Computed Torque Algorithms for Robot', Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, pp. 1638-1644, Tampa, FL. Décembre 1989.

[BerghuisN93] Harry Berghuis, et Henk Nijmeijer, 'A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots', IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 9, No. 6, Decembre 1993.

[ByrnesIW91] C.I Byrnes, A. Isidori, et J.C. Willems, 'Passivity Feedback Equivalence, and the global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 11, pp. 1228-1240, Novembre 1991.

[CetinkuntB90] S. Cetinkunt, et W.J. Book, 'Performance Limitation of Joint Variable-Feedback Controllers due to Manipulator Structural Flexibility', IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-6(2), pp. 219-231, Avril 1990.

[ChenF89] K.-P. Chen, et L.-C. Fu, 'Nonlinear Adaptive Motion Control for a Manipulator with Flexible Joints', Proceedings of the 1989 IEEE IRAC, Scottsdale, AZ, pp. 1201-1206, Mai 1989.

[Craig89] John J. Craig, 'Introduction to Robotics : Mechanics and Control', Addison-Wesley, 1989.

[Damarer96] Christopher J. Damarer, 'Approximate Inverse Dynamics and Passive Feedback for Flexible Manipulator with Large Payloads', IEEE Transactions on

Robotics and Automation, Vol. 12, No. 1, février 1993.

[Lin91] Lih-Chang Lin, 'State Feedback H_∞ Control of Manipulators with Flexible Joints and Links', Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA., Avril, 1991.

[LozanoB92] R. Lozano, et Brogliato, B., 'Adaptive Control of Robot Manipulators with Flexible Joints', IEEE Transactions on Automatic Control, AC-37(2), pp. 174-181, Février 1992.

[MarinoN84] R. Marino, et S. Nicosia, 'On the Feedback Control of Industrial Robots with Elastic Joints: A Singular Perturbation Approach', Internal Report, Giugno 1984.

[Misawa92] Eduardo A. Misawa, 'Robust Nonlinear Control System Design: An Overview', American Control Conference 1992, ACC / TMI.

[MontignyS94] M. de Montigny, et P. Sicard, 'Résolution symbolique de la dynamique inverse d'un manipulateur avec N joints à l'aide de Matlab-Maple', Rapport de recherche, Université du Québec à Trois-Rivières, Septembre 1994.

[MradA91] Fouad Mrad, et Shaheen Ahmad, 'Control of Flexible Joint Robots', Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, CA., Avril, 1991.

[NarendraA89] Kumpati S. Narendra, et Anuradha M. Annaswamy, 'Stable Adaptive Systems', Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1989.

[OrtegaS88] R. Ortega, et M. W. Spong, 'Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A Tutorial', Proceeding of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, Texas, Décembre 1988.

[PadenRB90] B. Paden, B. Riedle et E. Bayo, 'Exponentially Stable Tracking Control for Multi-Joint Flexible-Link Manipulator', Proceedings 1990 ACC, San Diego CA, pp. 680-684, Juin 1990.

[Qu95] Zhihua Qu, 'Globally Stable I/O Robust Control of Flexible Joint Robots', IEEE Transactions on Automatic Control, AC-40(1), pp. 78-83, Janvier 1995.

[Sicard93] P. Sicard, 'Trajectory Tracking of Flexible Joint Manipulators with Passivity Based Controller', Thèse de Doctorat, Rensselaer Polytechnic Institute, Juin 1993.

[SicardL95] P. Sicard, et N. Léchevin, 'Étude d'observateurs non linéaires pour bras manipulateurs avec articulations flexibles', Congrès Canadien de Génie Électrique et Informatique, Montréal, pp. 71-74, Septembre 1995.

[SicardS95] P. Sicard, et S.M.Javad Sadr, 'Comparison of Reduced State and Full State Passive Control Laws for Flexible Joint Robots', Congrès Canadien de Génie Électrique et Informatique (CCGEI), Montréal, pp. 75-78, Septembre 1995.

[SicilianoB88] B. Siciliano, et W. J. Book, 'A Singular Perturbation Approach to Control of Lightweight Flexible Manipulators', The International Journal of Robotics Research, Vol.7, No.4, Août 1988.

[SingerS88a] Neil C. Singer, et W.P. Seering, 'Using Acausal shaping Techniques to Reduce Robot Vibration', Proceedings of the 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1434-1439, Vol.3, Philadelphie, PA., Avril 1988.

[SingerS88b] Neil C. Singer, et W.P. Seering, 'Preshaping command Inputs to Reduce System Vibration', Internal report, Massachusetts Institute of Technology-Artificial Intelligence Laboratory, Avril 1988.

[SingerS89] Neil C. Singer, et W.P. Seering, 'Design and Comparison of Command Shaping Methods for Controlling Residual Vibration', Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Scottsdale, Arizona, Mai, 1989

[Spong87] Mark W. Spong, 'Modeling and Control of Elastic Joint Robots', ASME Journal Dynamic Systems, Measurement and Control, 109:310-319, Décembre 1987.

[Spong92] Mark W. Spong, 'On The Robust Control Of Robot Manipulators', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 11, Novembre 1992.

[SpongKK87] M.W. Spong, K. Khorasani, et P.V.Kokotovic, 'An Integral Manifold Approach to the Feedback control of Flexible Joint Robots', IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-3, No.4, Août 1987.

[SpongV89] Mark W. Spong, et M. Vidyasagar, 'Robot Dynamics and Control', John Willey & Sons, 1989.

[SweetG85] L.M. Sweet, et M.C. Good, 'Redefinition of the Robot Motion-Control Problem', IEEE Control Systems Magazine, pp. 18-25, Août 1985.

[TangA94] Yu Tang, et M. A. Arteaga, 'Adaptive Control of Robot Manipulators Based on Passivity', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 9, Septembre 1994.

[Tomei90] Pataizio. Tomei, 'An Observateur for Flexible Joint Robots', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 6, Juin 1990.

[Tomei91] P. Tomei, 'A Simple PD Controller for Robots with Elastic Joints', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 10, pp. 1208-1213, Octobre 1991.

[Vidyasagar93] M. Vidyasagar, 'Nonlinear Systems Analysis', Deuxième édition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1993.

[VidyasagarD75] M. Vidyasagar, et C.A. Desoer, 'Feedback Systems: input-output properties', Academic press, New York, 1975.

[KarlVL94] William C. Karl, George C. Verghese, et Jeffrey H. Lang, 'Control of Vibrational Systems', IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 1, Janvier 1994.

ANNEXE A

RÉSOLUTION DES MODÈLES CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DU ROBOT SCARA ÉTUDIÉ

A.1 Modélisation du robot - partie 1

i) Les résultats de la cinématique

Le nombre de référentiels.

$$M = 5$$

Le nombre d'articulations.

$$N = 4$$

Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés.

$$\begin{aligned} \text{Alphaim1} &= [0][0][0][0][0] \\ \text{Aim1} &= [0][0.5][0.5][0][0] \\ \text{Di} &= [0.9][0][d3][0.05][0] \\ \text{Thetai} &= [\text{Theta1}][\text{Theta2}][0][\text{Theta4}][0] \end{aligned}$$

Les joints rotatifs ($K_i=1$) et prismatiques ($K_i=0$).

$$K_i = [1][1][0][1]$$

Le vecteur des matrices de transformation de chaque référentiel par rapport au précédent.

$$\begin{aligned} \text{Tivim1} &= \\ &[\cos(\text{Theta1}), -\sin(\text{Theta1}), 0, 0] \\ &[\sin(\text{Theta1}), \cos(\text{Theta1}), 0, 0] \\ &[0, 0, 1, .9] \\ &[0, 0, 0, 1] \\ &[\cos(\text{Theta2}), -\sin(\text{Theta2}), 0, .5] \\ &[\sin(\text{Theta2}), \cos(\text{Theta2}), 0, 0] \\ &[0, 0, 1, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & .5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta4}) & -\sin(\text{Theta4}) & 0 & 0 \\ \sin(\text{Theta4}) & \cos(\text{Theta4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5.e-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Le vecteur des matrices de rotation de chaque référentiel par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned}
 \text{Riv0} = & \\
 & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta1}) & -\sin(\text{Theta1}) & 0 \\ \sin(\text{Theta1}) & \cos(\text{Theta1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & -\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & 0 \\ \sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & -\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & 0 \\ \sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & -\sin(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & 0 \\ \sin(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & \cos(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & -\sin(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & 0 \\ \sin(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & \cos(\text{Theta2}+\text{Theta4}+\text{Theta1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Le vecteur des matrices de position de chaque référentiel par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned}
 \text{Pid0} = & \\
 & [0][0][.9] \\
 & [.5*\cos(\text{Theta1})][.5*\sin(\text{Theta1})][.9] \\
 & [.5*\cos(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\cos(\text{Theta1})][.5*\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\sin(\text{Theta1})][d3+.9] \\
 & [.5*\cos(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\cos(\text{Theta1})][.5*\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\sin(\text{Theta1})][.95+d3]
 \end{aligned}$$

$$[.5*\cos(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\cos(\text{Theta1})][.5*\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\sin(\text{Theta1})][.95+d3]$$

ii) Les résultats de la dynamique

Le vecteur du nombre de masses par membre.

$$M_i = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Le vecteur des position du centre de masse de chaque masse par rapport au référentiel homologue du membre correspondant.

$P_c =$

$$[.25, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[.25, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[-.25, 5.e-2, -.55]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 0]$$

La matrice des matrices de rotation de chaque tenseur d'inertie.

$R_{cvi} =$

$$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$$

$$[0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1]$$

$$[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

La coordonnées des centres de masse avec notation D-H modifiée.

ccmdh =[0,0.5/2,0,0,0,0.5/2,0,0,0,0,-0.5/2,0,0,0,0.05,0,0,0,-0.55,0,0,0,0,0]

La matrice des paramètre des masses donnant le type de masse.

Masi =

[POH,3.71,1.24,0.5,0.15,0.00635,0.15,0.00635,0,0,0,
POH,3.71,1.24,0.5, 0.15,0.00635,0.15,0.00635,0,0,0,
PRI,4,0.15,0.15,0.5,0,0,0,0,0,
CPU,2, 0.2,0.03,0,0,0,0,0,0,
CPU,2, 0.2,0.03,0,0,0,0,0,0,
CPU,1, 0.2,0.02,0,0,0,0,0,0]

La matrice contenant la valeur des masses sur chaque membre.

Massei =

[3.71, 0, 0]
[3.71, 0, 0]
[4, 2, 2]
[1, 0, 0]

La matrice contenant tous les tenseurs d'inertie.

Icidi =

[2.2063703016666666e-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0,8.1927083325e-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0,9.471995302499999e-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[2.2063703016666666e-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0,8.1927083325e-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0,9.471995302499999e-2, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[9.083333333333333e-2, 0, 0,7.116666666666666e-3, 0, 0,7.116666666666666e-3, 0, 0]
[0,9.083333333333333e-2, 0, 0,7.116666666666666e-3, 0, 0,7.116666666666666e-3, 0]
[0, 0,1.5e-2, 0, 0,9.e-4, 0, 0,9.e-4]
[3.433333333333333e-3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0,3.433333333333333e-3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0,2.e-4, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

Le vecteur des couples aux joints.

Ti =

[6.09768990605*Thetapp1+7.2825*cos(Theta1)*gy-2.71375*sin(Theta2)*Thetap2^2-
5.4275*sin(Theta2)*Thetap1*Thetap2+2.71375*cos(Theta2)*Thetapp2+5.4275*cos(Theta
2)*Thetapp1+2.593594953025*Thetapp2+5.4275*gy*cos(Theta2+Theta1)+2.e-
4*Thetapp4]

$$\begin{aligned}
& [2.71375*\sin(\text{Theta}2)*\text{Thetap}1^2+2.593594953025*\text{Thetapp}2+2.71375*\cos(\text{Theta}2)*\text{Thet} \\
& \text{app}1+5.4275*gy*\cos(\text{Theta}2+\text{Theta}1)+2.593594953025*\text{Thetapp}1+2.e-4*\text{Thetapp}4] \\
& [9*gz+9*Dpp3] \\
& [2.e-4*\text{Thetapp}1+2.e-4*\text{Thetapp}2+2.e-4*\text{Thetapp}4]
\end{aligned}$$

La matrice de masses-inerties

$$\begin{aligned}
M_{\text{Theta}} = & \\
& [6.09768990605+5.4275*\cos(\text{Theta}2), 2.71375*\cos(\text{Theta}2)+2.593594953025, 0, 2.e-4] \\
& [2.71375*\cos(\text{Theta}2)+2.593594953025, 2.593594953025, 0, 2.e-4] \\
& [0, 0, 9, 0] \\
& [2.e-4, 2.e-4, 0, 2.e-4]
\end{aligned}$$

Le vecteur de gravité aux joints.

$$\begin{aligned}
g_{\text{Theta}} = & \\
& [7.2825*\cos(\text{Theta}1)*gy+5.4275*gy*\cos(\text{Theta}2+\text{Theta}1)] \\
& [5.4275*gy*\cos(\text{Theta}2+\text{Theta}1)] \\
& [9*gz] \\
& [0]
\end{aligned}$$

La matrice des forces et des couples des effets centrifuge et de Coriolis.

$$\begin{aligned}
V_{\text{ThThp}} = & \\
& [-2.71375*\sin(\text{Theta}2)*\text{Thetap}2^2-5.4275*\sin(\text{Theta}2)*\text{Thetap}1*\text{Thetap}2] \\
& [2.71375*\sin(\text{Theta}2)*\text{Thetap}1^2] \\
& [0] \\
& [0]
\end{aligned}$$

Le vecteur des variables de vitesse des articulations.

$$q_{ip} = [\text{Thetap}1][\text{Thetap}2][Dp3][\text{Thetap}4]$$

Le vecteur des variables d'accélération des articulations.

$$q_{ipp} = [\text{Thetapp}1][\text{Thetapp}2][Dpp3][\text{Thetapp}4]$$

Le vecteur des accélérations cartésiennes de l'origine du référentiel de chaque membre par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned}
v_p = & \\
& [0][gy][gz][\sin(\text{Theta}1)*gy][\cos(\text{Theta}1)*gy][gz] \\
& [-.5*\cos(\text{Theta}2)*\text{Thetap}1^2+gy*\sin(\text{Theta}2+\text{Theta}1)+.5*\sin(\text{Theta}2)*\text{Thetapp}1] \\
& [.5*\sin(\text{Theta}2)*\text{Thetap}1^2+gy*\cos(\text{Theta}2+\text{Theta}1)+.5*\cos(\text{Theta}2)*\text{Thetapp}1]
\end{aligned}$$

```

[gz]
[-.5*Thetap1^2-1.*Thetap1*Thetap2-.5*Thetap2^2-.5*cos(Theta2)*Thetap1^2+
gy*sin(Theta2+Theta1)+.5*sin(Theta2)*Thetapp1]
[.5*Thetapp1+.5*Thetapp2+.5*sin(Theta2)*Thetap1^2+gy*cos(Theta2+Theta1)+
.5*cos(Theta2)*Thetapp1]
[gz+Dpp3]
[-.5*cos(Theta4)*Thetap1^2-1.*cos(Theta4)*Thetap1*Thetap2-
.5*cos(Theta4)*Thetap2^2-
.5*Thetap1^2*cos(Theta4+Theta2)+gy*sin(Theta4+Theta2+Theta1)+
.5*Thetapp1*sin(Theta4+Theta2)+.5*sin(Theta4)*Thetapp1+.5*sin(Theta4)*Thetapp2]
[.5*sin(Theta4)*Thetap1^2+1.*sin(Theta4)*Thetap1*Thetap2+.5*sin(Theta4)*Thetap2^2+
.5*Thetap1^2*sin(Theta4+Theta2)+gy*cos(Theta4+Theta2+Theta1)+.5*Thetapp1*cos(The
ta4+Theta2)+.5*cos(Theta4)*Thetapp1+.5*cos(Theta4)*Thetapp2]
[gz+Dpp3]

```

Le vecteur des vitesses angulaires du référentiel de chaque membre par rapport au référentiel monde.

```

w =[0][0][0]
[0][0][Thetap1]
[0][0][Thetap1+Thetap2]
[0][0][Thetap1+Thetap2]
[0][0][Thetap1+Thetap2+Thetap4]

```

Le vecteur des accélérations angulaires du référentiel de chaque membre par rapport au référentiel monde.

```

wp =[0][0][0]
[0][0][Thetapp1]
[0][0][Thetapp1+Thetapp2]
[0][0][Thetapp1+Thetapp2]
[0][0]
[Thetapp1+Thetapp2+Thetapp4]

```

A.2 Modélisation du robot - partie 2

i) Les résultats de la cinématique

Le nombre de référentiels.

$$M = 7$$

Le nombre d'articulations.

$$N = 5$$

Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifié.

$$\begin{aligned} \text{Alphaim1} &= [0][0][0][0][0][0][\pi] \\ \text{Aim1} &= [0][0.5][0.5][0][0][0][0] \\ \text{Di} &= [0.9][0][d3][-0.55][-0.1][0][0] \\ \text{Thetai} &= [\text{Theta1}][\text{Theta2}][0][\text{Theta4}][\text{Theta5}][\pi/2][0] \end{aligned}$$

Les joints rotatifs ($K_r=1$) et prismatiques ($K_r=0$).

$$K_i = [1][1][0][1][1]$$

Le vecteur des matrices de transformation de chaque référentiel par rapport au précédent.

$$\begin{aligned} \text{Tivim1} &= \\ &[\cos(\text{Theta1}), -\sin(\text{Theta1}), 0, 0] \\ &[\sin(\text{Theta1}), \cos(\text{Theta1}), 0, 0] \\ &[0, 0, 1, .9] \\ &\underline{[0, 0, 0, 1]} \\ &[\cos(\text{Theta2}), -\sin(\text{Theta2}), 0, .5] \\ &[\sin(\text{Theta2}), \cos(\text{Theta2}), 0, 0] \\ &[\quad 0, \quad 0, 1, \quad 0] \\ &\underline{[\quad 0, \quad 0, 0, \quad 1]} \\ &[\quad 1, \quad 0, 0, .5] \\ &[\quad 0, \quad 1, 0, \quad 0] \\ &[\quad 0, \quad 0, 1, \quad d3] \\ &\underline{[\quad 0, \quad 0, 0, \quad 1]} \\ &[\cos(\text{Theta4}), -\sin(\text{Theta4}), 0, \quad 0] \\ &[\sin(\text{Theta4}), \cos(\text{Theta4}), 0, \quad 0] \\ &[\quad 0, \quad 0, 1, -.55] \\ &\underline{[\quad 0, \quad 0, 0, \quad 1]} \\ &[\cos(\text{Theta5}), -\sin(\text{Theta5}), 0, \quad 0] \\ &[\sin(\text{Theta5}), \cos(\text{Theta5}), 0, \quad 0] \\ &[\quad 0, \quad 0, 1, -.1] \\ &\underline{[\quad 0, \quad 0, 0, \quad 1]} \\ &[\quad 0, \quad -1, 0, \quad 0] \\ &[\quad 1, \quad 0, 0, \quad 0] \\ &[\quad 0, \quad 0, 1, \quad 0] \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 0, & 0, & 0, & 1] \\
 [& 1, & 0, & 0, & 0] \\
 [& 0, & -1, & 0, & 0] \\
 [& 0, & 0, & -1, & 0] \\
 [& 0, & 0, & 0, & 1]
 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des matrices de rotation de chaque référentiel par rapport au référentiel monde.

Riv0 =

$$\begin{bmatrix}
 \cos(\Theta_1), & -\sin(\Theta_1), & 0] \\
 \sin(\Theta_1), & \cos(\Theta_1), & 0] \\
 0, & 0, & 1] \\
 \cos(\Theta_1+\Theta_2), & -\sin(\Theta_1+\Theta_2), & 0] \\
 \sin(\Theta_1+\Theta_2), & \cos(\Theta_1+\Theta_2), & 0] \\
 0, & 0, & 1] \\
 \cos(\Theta_1+\Theta_2), & -\sin(\Theta_1+\Theta_2), & 0] \\
 \sin(\Theta_1+\Theta_2), & \cos(\Theta_1+\Theta_2), & 0] \\
 0, & 0, & 1] \\
 \cos(\Theta_2+\Theta_4+\Theta_1), & -\sin(\Theta_2+\Theta_4+\Theta_1), & 0] \\
 \sin(\Theta_2+\Theta_4+\Theta_1), & \cos(\Theta_2+\Theta_4+\Theta_1), & 0] \\
 0, & 0, & 1] \\
 \cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & -\sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & 0] \\
 \sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & \cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & 0] \\
 0, & 0, & 1] \\
 -\sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & -\cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & 0] \\
 \cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & -\sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & 0] \\
 0, & 0, & 1] \\
 -\sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & \cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & 0] \\
 \cos(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & \sin(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_4+\Theta_5), & 0] \\
 0, & 0, & -1]
 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des matrices de position de chaque référentiel par rapport au référentiel monde.

Pid0 =

$$\begin{bmatrix}
 [0][0][.9] \\
 [.5*\cos(\Theta_1)][.5*\sin(\Theta_1)][.9] \\
 [.5*\cos(\Theta_1+\Theta_2)+.5*\cos(\Theta_1)][.5*\sin(\Theta_1+\Theta_2)+.5*\sin(\Theta_1)][d3+.9] \\
 [.5*\cos(\Theta_1+\Theta_2)+.5*\cos(\Theta_1)] \\
 [.5*\sin(\Theta_1+\Theta_2)+.5*\sin(\Theta_1)][.35+d3] \\
 [.5*\cos(\Theta_1+\Theta_2)+.5*\cos(\Theta_1)][.5*\sin(\Theta_1+\Theta_2)+.5*\sin(\Theta_1)][.25+d3]
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .5*\cos(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\cos(\text{Theta1}) & [.5*\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\sin(\text{Theta1})] & [.25+d3] \\ [.5*\cos(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\cos(\text{Theta1}) & [.5*\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2})+.5*\sin(\text{Theta1})] & [.25+d3] \end{bmatrix}$$

ii) Les résultats de la dynamique

Le vecteur du nombre de masses par membre.

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des position du centre de masse de chaque masse par rapport au référentiel du membre correspondant.

$$P_c = \begin{bmatrix} .25 & 0 & 0 & .25 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des matrices de rotation de chaque tenseur d'inertie.

Rcivi =

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, 0, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0, 0, 1 \end{bmatrix}$$

La coordonnées des centres de masse avec notation D-H modifiée.

$$ccmdh = \begin{bmatrix} 0, 0.5/2, 0, 0, 0, 0.5/2, 0, 0, 0, 0, -0.5/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des paramètre des masses donnant le type de masse.

$$Masi = \begin{bmatrix} POH, 0, 0, 0.5, 0.15, 0.00635, 0.15, 0.00635, 0, 0, 0, \\ POH, 0, 0, 0.5, 0.15, 0.00635, 0.15, 0.00635, 0, 0, 0, \end{bmatrix}$$

PRI,0,0.15,0.15,0.5,0,0,0,0,0,0,
 CPU,1, 0.2,0.02,0,0,0,0,0,0,0,
 PRI,mc,0.15,0.15,0.15,0,0,0,0,0,0]

La matrice contenant la valeur des masses sur chaque membre.

Massei =[0][0][0][1][mc]

La matrice contenant tous les tenseurs d'inertie.

Icidi =

```
[
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [      0,      0,      0]
  [ 3.433333333333333e-3,      0,      0]
  [      0, 3.433333333333333e-3,      0]
  [      0,      0, 2.e-4]
  [3.75e-3*mc,      0,      0]
  [      0,3.75e-3*mc,      0]
  [      0,      0,3.75e-3*mc]
```

Le vecteur des couples aux joints.

Ti =

```
[-.25*sin(Theta2)*Thetap2^2+.5002*Thetapp1+.5*mc*Thetapp1*cos(Theta2)+.5*mc*gy*
cos(Theta2+Theta1)+.5*cos(Theta1)*gy-.25*sin(Theta2)*mc*Thetap2^2+
.2502*Thetapp2+.25*cos(Theta2)*mc*Thetapp2-.5*sin(Theta2)*Thetap1*Thetap2-
.5*sin(Theta2)*mc*Thetap1*Thetap2+.25*cos(Theta2)*Thetapp2+
.5*gy*cos(Theta2+Theta1)+.5*cos(Theta2)*Thetapp1+3.75e-3*mc*Thetapp4+
3.75e-3*mc*Thetapp5+.5*mc*gy*cos(Theta1)+2.e-4*Thetapp4+.50375*mc*Thetapp1+
.25375*mc*Thetapp2]
[.2502*Thetapp1+.25375*mc*Thetapp1+.25375*mc*Thetapp2+.25*mc*Thetap1^2*sin(Th
eta2)+.25*mc*Thetapp1*cos(Theta2)+.5*mc*gy*cos(Theta2+Theta1)+.2502*Thetapp2+
.5*gy*cos(Theta2+Theta1)+.25*sin(Theta2)*Thetap1^2+.25*cos(Theta2)*Thetapp1+3.75e
-3*mc*Thetapp4+3.75e-3*mc*Thetapp5+2.e-4*Thetapp4]
[mc*gz+mc*Dpp3+gz+Dpp3]
[3.75e-3*mc*Thetapp1+3.75e-3*mc*Thetapp2+3.75e-3*mc*Thetapp4+
3.75e3*mc*Thetapp5+2.e-4*Thetapp1+2.e-4*Thetapp2+2.e-4*Thetapp4]
```

$$[3.75e-3*mc*(Thetapp1+Thetapp2+Thetapp4+Thetapp5)]$$

La matrice de masses-inerties

MTheta =

$$\begin{bmatrix} .5002+.5*mc*\cos(\Theta_2)+.5*\cos(\Theta_2)+.50375*mc, .2502+.25*mc*\cos(\Theta_2)+.25*\cos(\Theta_2)+.25375*mc, & 0, 3.75e-3*mc+2.e-4, 3.75e-3*mc \\ .2502+.25*mc*\cos(\Theta_2)+.25*\cos(\Theta_2)+.25375*mc, & .25375*mc+.2502, & 0, \\ 3.75e-3*mc+2.e-4, & 3.75e-3*mc \\ 0, & 0, & mc+1, & 0, & 0 \\ 3.75e-3*mc+2.e-4, & 3.75e-3*mc+2.e-4, & 0, & 3.75e-3*mc+2.e-4, & 3.75e-3*mc \\ 3.75e-3*mc, & 3.75e-3*mc, & 0, & 3.75e-3*mc, & 3.75e-3*mc \end{bmatrix}$$

Le vecteur de gravité aux joints.

gTheta =

$$\begin{bmatrix} .5*mc*gy*\cos(\Theta_2+\Theta_1)+.5*\cos(\Theta_1)*gy+.5*gy*\cos(\Theta_2+\Theta_1)+.5*mc*gy*\cos(\Theta_1) \\ .5*mc*gy*\cos(\Theta_2+\Theta_1)+.5*gy*\cos(\Theta_2+\Theta_1) \\ mc*gz+gz \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des forces et des couples des effets centrifuge et de Coriolis.

VThThp =

$$\begin{bmatrix} -.25*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p2}^2-.25*\sin(\Theta_2)*mc*\Theta_{p2}^2-.5*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p1}*\Theta_{p2}-.5*\sin(\Theta_2)*mc*\Theta_{p1}*\Theta_{p2} \\ [.25*mc*\Theta_{p1}^2*\sin(\Theta_2)+.25*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p1}^2] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des variables de vitesse des articulations.

$$qip = [\Theta_{p1}] [\Theta_{p2}] [Dp3] [\Theta_{p4}] [\Theta_{p5}]$$

Le vecteur des variables d'accélération des articulations.

$$qipp = [\Theta_{app1}] [\Theta_{app2}] [Dpp3] [\Theta_{app4}] [\Theta_{app5}]$$

Le vecteur des accélérations cartésiennes de l'origine du chaque référentiel de chaque membre par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned}
v_p = & [0][gy][gz] \\
& [\sin(\Theta_1)*gy][\cos(\Theta_1)*gy][gz] \\
& [-.5*\cos(\Theta_2)*\Theta_{p1}^2+gy*\sin(\Theta_2+\Theta_1)+.5*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p1}] \\
& [.5*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p1}^2+gy*\cos(\Theta_2+\Theta_1)+.5*\cos(\Theta_2)*\Theta_{p1}] \\
& [gz] \\
& [-.5*\Theta_{p1}^2-1.*\Theta_{p1}*\Theta_{p2}-.5*\Theta_{p2}^2-.5*\cos(\Theta_2)*\Theta_{p1}^2+ \\
& gy*\sin(\Theta_2+\Theta_1)+.5*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p1}] \\
& [.5*\Theta_{p1}+.5*\Theta_{p2}+.5*\sin(\Theta_2)*\Theta_{p1}^2+gy*\cos(\Theta_2+\Theta_1)+ \\
& .5*\cos(\Theta_2)*\Theta_{p1}] \\
& [gz+D_{pp3}] \\
& [-.5*\cos(\Theta_4)*\Theta_{p1}^2-1.*\cos(\Theta_4)*\Theta_{p1}*\Theta_{p2}- \\
& .5*\cos(\Theta_4)*\Theta_{p2}^2- \\
& .5*\Theta_{p1}^2*\cos(\Theta_4+\Theta_2)+gy*\sin(\Theta_4+\Theta_2+\Theta_1)+ \\
& .5*\Theta_{p1}*\sin(\Theta_4+\Theta_2)+.5*\sin(\Theta_4)*\Theta_{p1}+.5*\sin(\Theta_4)*\Theta_{p2}] \\
& [.5*\sin(\Theta_4)*\Theta_{p1}^2+1.*\sin(\Theta_4)*\Theta_{p1}*\Theta_{p2}+.5*\sin(\Theta_4)*\Theta_{p2}^2+ \\
& .5*\Theta_{p1}^2*\sin(\Theta_4+\Theta_2)+gy*\cos(\Theta_4+\Theta_2+\Theta_1)+ \\
& .5*\Theta_{p1}*\cos(\Theta_4+\Theta_2)+.5*\cos(\Theta_4)*\Theta_{p1}+.5*\cos(\Theta_4)*\Theta_{p2}] \\
& [gz+D_{pp3}] \\
& [-.5*\Theta_{p1}^2*\cos(\Theta_5+\Theta_4)-1.*\Theta_{p1}*\Theta_{p2}*\cos(\Theta_5+\Theta_4)- \\
& .5*\Theta_{p2}^2*\cos(\Theta_5+\Theta_4)-.5*\Theta_{p1}^2*\cos(\Theta_5+\Theta_4+\Theta_2)+ \\
& gy*\sin(\Theta_5+\Theta_4+\Theta_2+\Theta_1)+.5*\Theta_{p1}*\sin(\Theta_5+\Theta_4+\Theta_2)+ \\
& .5*\Theta_{p2}*\sin(\Theta_5+\Theta_4)+.5*\Theta_{p1}*\sin(\Theta_5+\Theta_4)] \\
& [.5*\Theta_{p2}^2*\sin(\Theta_5+\Theta_4)+1.*\Theta_{p1}*\Theta_{p2}*\sin(\Theta_5+\Theta_4)+ \\
& .5*\Theta_{p1}^2*\sin(\Theta_5+\Theta_4+\Theta_2)+.5*\Theta_{p1}*\cos(\Theta_5+\Theta_4+\Theta_2)+ \\
& .5*\Theta_{p1}*\cos(\Theta_5+\Theta_4)+.5*\Theta_{p2}*\cos(\Theta_5+\Theta_4)+gy*\cos(\Theta_5+ \\
& \Theta_4+\Theta_2+\Theta_1)+.5*\Theta_{p1}^2*\sin(\Theta_5+\Theta_4)] \\
& [gz+D_{pp3}]
\end{aligned}$$

Le vecteur des vitesses angulaires du chaque référentiel de chaque membre par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned}
w = & [0][0][0] \\
& [0][0][\Theta_{p1}] \\
& [0][0][\Theta_{p1}+\Theta_{p2}] \\
& [0][0][\Theta_{p1}+\Theta_{p2}] \\
& [0][0][\Theta_{p1}+\Theta_{p2}+\Theta_{p4}] \\
& [0][0][\Theta_{p1}+\Theta_{p2}+\Theta_{p4}+\Theta_{p5}]
\end{aligned}$$

Le vecteur des accélérations angulaires du référentiel de chaque membre par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned}
w_p = & [0][0][0] \\
& [0][0][\Theta_{p1}] \\
& [0][0][\Theta_{p1}+\Theta_{p2}]
\end{aligned}$$

$[0] [0] [Thetapp1+Thetapp2]$
 $[0] [0] [Thetapp1+Thetapp2+Thetapp4]$
 $[0] [0] [Thetapp1+Thetapp2+Thetapp4+Thetapp5]$

A.3 Modélisation du robot - partie 3

i) Les résultats de la cinématique

Le nombre de référentiels.

$$M = 3$$

Le nombre d'articulations.

$$N = 2$$

Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifié.

$$Alphaim1 = [0][0][0]$$

$$Aim1 = [0][-0.2][0]$$

$$Di = [0.5][0][0]$$

$$Thetai = [Theta1][Theta2][0]$$

Les joints rotatifs ($K_i=1$) et prismatiques ($K_i=0$).

$$K_i = [1][1]$$

Le vecteur des matrices de transformation de chaque référentiel par rapport au précédent.

$$Tivim1 =$$

$$[\cos(\Theta_1), -\sin(\Theta_1), 0, 0]$$

$$[\sin(\Theta_1), \cos(\Theta_1), 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, .5000000000000000]$$

$$[0, 0, 0, 1]$$

$$[\cos(\Theta_2), -\sin(\Theta_2), 0, -.2000000000000000]$$

$$[\sin(\Theta_2), \cos(\Theta_2), 0, 0]$$

$$[0, 0, 1, 0]$$

$$[0, 0, 0, 1]$$

$$[1, 0, 0, 0]$$

$$[0, 1, 0, 0]$$

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, 1, & 0 \\ 0, & 0, 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des matrices de rotation de chaque référentiel par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned} \text{Riv0} = \\ & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta1}), & -\sin(\text{Theta1}), & 0 \\ \sin(\text{Theta1}), & \cos(\text{Theta1}), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & -\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & 0 \\ \sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & -\sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & 0 \\ \sin(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & \cos(\text{Theta1}+\text{Theta2}), & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le vecteur des matrices de position de chaque référentiel par rapport au référentiel monde.

$$\begin{aligned} \text{Pid0} = \\ & [0][0][.5] \\ & [-.2*\cos(\text{Theta1})][-.2*\sin(\text{Theta1})][.5] \\ & [-.2*\cos(\text{Theta1})][-.2*\sin(\text{Theta1})][.5] \end{aligned}$$

ii) Les résultats de la dynamique

Le vecteur des couples aux joints.

$$\begin{aligned} \text{Ti} = \\ & [-.6*\cos(\text{Theta1})*\text{gy}+.1211*\text{Thetapp1}+2\text{e-}4*\text{Thetapp2}] \\ & [2\text{e-}4*\text{Thetapp1}+2\text{e-}4*\text{Thetapp2}] \end{aligned}$$

La matrice de masses-inerties

$$\begin{aligned} \text{MTheta} = \\ & [.1211, 2\text{e-}4] \\ & [2\text{e-}4, 2\text{e-}4] \end{aligned}$$

Le vecteur de gravité aux joints.

$$\begin{aligned} g_{\text{Theta}} = \\ [-.6 * \cos(\text{Theta}_1) * g_y] \\ [0] \end{aligned}$$

La matrice des forces et des couples des effets centrifuge et de Coriolis.

$$\begin{aligned} V_{\text{ThThp}} = \\ [0] \\ [0] \end{aligned}$$

A.4 Matrices du modèle de robot en terme des grandeurs réelles

Nous définissons

$$\mathbf{q} = [q_{l1} \ q_{l2} \ q_{m1} \ q_{m2} \ q_{l3} \ q_{l4}]^T \text{ et } \mathbf{B}\mathbf{u} = [0 \ 0 \ T_{m1} \ T_{m2} \ T_{m3} \ T_{m4}]^T$$

Matrice de masses-inerties

$$\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (5.9275 + 0.5mc)\cos(q_{l_2}) & (2.96375 + 0.25mc)\cos(q_{l_2}) \\ +0.50375mc + 6.719 & +0.25375mc + 2.8438 \\ (2.96375 + 0.25mc)\cos(q_{l_2}) & \\ +0.25375mc + 2.8438 & 0.25375mc + 2.8438 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{12}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 2e-4 & 2e-4 & 2e-4 + 3.75e-3mc/N_4 \\ 0 & 0 & 2e-4 & 2e-4 + 3.75e-3mc/N_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{22}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2e-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e-4 + (10 + mc)/N_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2e-4 + 3.75e-3mc/N_4^2 \end{bmatrix}$$

Vecteur de gravité

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_y \left\{ (7.1825 + 0.5mc) \cos(q_{l_1}) + (5.9275 + 0.5mc) \cos(q_{l_1} + q_{l_2}) \right\} \\ (5.9275 + 0.5mc) \cos(q_{l_1} + q_{l_2}) \\ 0 \\ 0 \\ g_z (mc + 10) / N_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de Coriolis et des forces Centrifuges

$$\mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sin(q_{l_2}) \begin{bmatrix} -(5.9275 + 0.5mc) \dot{q}_{l_2} & -(2.96375 + 0.25mc) \dot{q}_{l_2} \\ (2.96375 + 0.25mc) \dot{q}_{l_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{21}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}, \mathbf{C}_{12}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}, \mathbf{C}_{22}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$$

Matrice des coefficients de frottement visqueux

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{ D_{l_1} \quad D_{l_2} \quad D_{m_1} \quad D_{m_2} \quad D_{m_3} \quad D_{m_4} \}$$

$$\text{avec } D_{l_1} = D_{l_2} = 0.01 \text{ et } D_{m_i} = 10^{-4} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Constante rigidité du côté du membre

La constante de rigidité de l'articulation 1 et la constante de rigidité équivalente de l'articulation 2 sont considérées 10000 (i.e. $k_1 = k_2$). \mathbf{K}_e est donnée par $\text{diag} \{10000, 10000\}$.

Rapports de transmission

$$N_1 = 64, N_2 = 64, N_3 = 25\pi, N_4 = 64,$$

Dans les matrices précédentes, mc est la masse de la charge.

A.5 Équations du modèle du manipulateur mises à l'échelle du côté des liens

Matrice de masses-inerties

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^c(\mathbf{q}) &= \mathbf{Q}\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{Q} = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^T & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}\mathbf{M}_{11}\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{11}\mathbf{M}_{12}\mathbf{Q}_{22} \\ \mathbf{Q}_{22}\mathbf{M}_{12}^T\mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{22}\mathbf{M}_{22}\mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12}\mathbf{Q}_{22} \\ \mathbf{Q}_{22}\mathbf{M}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22}\mathbf{M}_{22}\mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice de Coriolis et des forces Centrifuges

$$\mathbf{C}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}\mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Vecteur de gravité

$$\mathbf{G}^c(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} \\ \mathbf{G}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} \\ \mathbf{Q}_{22}\mathbf{G}_{21} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{QKQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

Matrice des coefficients de frottement visqueux

$$\mathbf{D}^c = \mathbf{QDQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{22} \mathbf{D}_m \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}$$

A.6 Logiciels CINDIR et CINDYN

Les logiciels CINDIR et CINDYN développés par M. de Montigny et P. Sicard [MontignyS94] sont présentés avec la définition des paramètres pour la partie 1 de la modélisation.

% CINRRPRF Calcule la cinématique directe pour 4 articulations (scara) + moteurs.

%

% Le manipulateur est défini par la fonction decrrprf fournie par

% l'utilisateur

% Appel de la fonction pour fichier de données.

[M,N,Alphaim1,Aim1,Di,Thetai,Ki]=decrrprf

% Calcul de la cinématique directe.

[Tivim1,Riv0,Pid0,JVid0]=cindir(M,N,Alphaim1,Aim1,Di,Thetai,Ki)

save dcirprf.mat

function [M,N,Alphaim1,Aim1,Di,Thetai,Ki]=DECRRPRF

% DECRRPRF Définir les paramètres du manipulateur RRPR + moteurs pour la cinématique.

%

% [M,N,Alphaim1,Aim1,Di,Thetai,Ki]=DEFCRRPR() retourne les paramètres

```

% du manipulateur selon la convention de Denavit-Hartenberg modifiée.
%
% M=nombre total d'articulations (du référentiel 1 au référentiel de
% la pince);
% N=nombre d'articulations de la base au dernier moteur;
% Alphaim1=alpha_{i-1};
% Aim1=a_{i-1};
% Di=d_{i};
% Thetai=theta_{i};
% Ki indique un joint rotatif (Ki=1) ou prismatique (Ki=0).
%
% Les variables des vecteur Thetai et Di doivent être
% identifiées comme ceci: [Theta1; Theta2; ...] et [d1; d2; ...].
%
% Les constantes Alphaim1 et Aim1 doivent être identifiées comme
% ceci: [Alpha1; Alpha2; ...] et [L1; L2; ...].
%

```

```

M=5;
N=4;
Alphaim1 = sym('[0;0;0;0;0]');
Aim1 = sym('[0;0.5;0.5;0;0]');
Di = sym('[0.9;0;d3;0.05;0]');
Thetai = sym('[Theta1;Theta2;0;Theta4;0]');
Ki = sym('[1;1;0;1]');

```

```

function [Tivim1,Riv0,Pid0,JVid0]=cindir(M,N,Alphaim1,Aim1,Di,Thetai,Ki)

```

```

% CINDIR Détermine les matrices de transformation entre les référentiels
% adjacents, les matrices de rotation et les vecteurs de position
% des référentiels par rapport à la base, et forme les Jacobiens
% de vitesse de chaque référentiel par rapport au référentiel de
% base (relient l'espace joint à l'espace cartésien par la relation
%  $V=J(\text{Theta})*\text{Theta\_prime}$ ).
%

```

```

% [Tivim1,Riv0,Pid0,JVid0]=cindir(M,N,Alphaim1,Aim1,Di,Thetai,Ki)
% retourne les matrices de transformation, les matrices de rotation,
% les vecteurs position et les Jacobiens de vitesse.
%

```

```

% M=nombre total d'articulations (du référentiel 1 au référentiel de
% la pince);
% N=nombre d'articulations de la base au dernier moteur;
% Alphaim1=alpha_{i-1};

```

```

%   Aim1=a_{i-1};
%   Di=d_{i};
%   Thetai=theta_{i};
%   Ki indique un joint rotatif (Ki=1) ou prismatique (Ki=0).
%
%   Les variables des vecteur Thetai et Di sont
%   identifiées comme ceci: [Theta1; Theta2; ...] et [d1; d2; ...].
%
%   Les constantes Alphaim1 et Aim1 sont identifiées comme
%   ceci: [Alpha1; Alpha2; ...] et [L1; L2; ...].
%
%   Tivim1=vecteur des matrices de transformation reliant le référentiel i
%   au référentiel i-1 ( ${}^{i-1}_i T$ ) pour i=1 à M.
%   Riv0t= vecteur des matrices de rotation donnant l'orientation du référentiel
%   i par rapport à la base ( ${}^0R_i$ ) pour i=1 à M.
%   Pid0= vecteur des vecteurs de position du référentiel i par rapport
%   à la base ( ${}^0P_i$ ) pour i=1 à M.
%   JVid0= vecteur des Jacobiens de vitesse du référentiel i par rapport à la
%   base ( $J_i$ ) pour i=1 à M.

% Date de la dernière modification: 11/08/94

% Définition des principales variables employées :

% TMvi : matrice de transformation reliant le référentiel n au référentiel i
% Tiv0 : matrice de transformation reliant le référentiel i à la base
% Zid0t : axe Z du référentiel i vu de la base
% Zid0XP0t :Si l'articulation est rotative, le vecteur de l'articulation en question
%   est égal au produit vectoriel entre Zia0 et PNaid0 tandis que si elle est
%   prismatique, le vecteur est égal à Zia0.
% Riv0t : matrice de rotation donnant l'orientation du référentiel i par rapport à la base
% RNp1vi : vecteur des matrices de rotation du référentiel N+1
%   vers chaque référentiel
% Tivim1t : matrice de transformation reliant le référentiel i au référentiel i-1
% PMdit : vecteur montrant la position du référentiel N par rapport au référentiel i
% PMdi : vecteur des vecteurs PMdit
% Z : axe Z ( [0,0,1]' )
% Zid0 : vecteur des Zid0t pour tous les référentiels
% PMdid0 : vecteur PNai représenté dans la base
% Zid0XP0 : vecteur des Zid0XP0t pour tous les référentiels

% NOTE: Tous les commentaires de type "%_%" indiquent des lignes qui
% contiennent de bonnes informations mais dont on peut se passer pour maintenant.

```

```

% Définition des vecteurs de matrices
TMvi=eye(4);
Tivim1=[zeros(4*M,4)];
%_% PMdi=[zeros(3*(N+2),1)];
Zid0=[zeros(3*M,1)];
%-% Zid0XP0=[zeros(3*(N+1),1)];
Riv0t=[zeros(3)];
Riv0=[zeros(3*M,3)];
Pid0=[zeros(3*M,1)];
Pid0t=[zeros(3,1)];
Pid0p=[zeros(3*M,N)];
%_% RNp1vi=[zeros(3*(N+1),3)];

% Formation des matrices de transformation
Trans=sym(['[cos(e),(-sin(e)),0,c;sin(e)*cos(b),cos(e)*cos(b),(-sin(b)),d*(-sin(b));'...
          'sin(e)*sin(b),cos(e)*sin(b),cos(b),d*cos(b);0,0,0,1]']);

for I = 1:M

    i=M-I+1;

    Tivim1t = subs(Trans,sym(Alphaim1,i,1),'b');
    Tivim1t = subs(Tivim1t,sym(Aim1,i,1),'c');
    Tivim1t = subs(Tivim1t,sym(Di,i,1),'d');
    Tivim1t = subs(Tivim1t,sym(Thetai,i,1),'e');

    Tivim1=extract(Tivim1t,1,4,1,4,Tivim1,(i-1)*4+1,1);

    % Formation des vecteurs d'emplacement de l'origine du référentiel pince par
    % rapport à tous les autres référentiels précédents (vecteur de matrices).

    TMvi = symmul(Tivim1t, TMvi);

%_% PMdi=extract(TMvi,1,3,4,4,PMdi,3*(i-1)+1,1);

%_% RNp1vi=extract(TMvi,1,3,1,3,RNp1vi,(i-1)*3+1,1);

end

Tiv0=eye(4);
PMdit=[0;0;0];
Z=sym(['0;0;1']);

```

```

for I=1:M
    % Prise de la matrice de transformation nécessaire dans le vecteur de matrices Tivim1.

    Tivim1t=extrac(Tivim1,4*(I-1)+1,4*I,1,4);

    % Cumulation(multiplication) des matrices de transformation du référentiel 0 au
    % référentiel a.
    Tiv0=symmul(Tiv0,Tivim1t);

    % Formation de la matrice de rotations cumulatives et du vecteur de matrices de
    % rotation d'un référentiel par rapport au précédent.

    Riv0t=extrac(Tiv0,1,3,1,3);
    Riv0=extract(Tiv0,1,3,1,3,Riv0,1+(I-1)*3,1);
    Pid0=extract(Tiv0,1,3,4,4,Pid0,1+(I-1)*3,1);

    Zid0t=symmul(Riv0t,Z);
    % Formation du vecteur de matrices Z(Axe z d'un référentiel par rapport au référentiel 1.
    % Prise du vecteur Pa(origine du référentiel n+1 par rapport au référentiel a dans le
    % vecteur de vecteurs PNai.

    Zid0=extract(Zid0t,1,3,1,1,Zid0,3*(I-1)+1,1);
    %_ % PMdit=extrac(PMdi,3*I+1,3*I+3,1,1);

    % Si l'articulation est rotative (k=1) alors Zid0XPOt est le produit vectoriel entre Zid0t et
    % Pid0t mais
    % si l'articulation est prismatique, alors Zid0XPOt est égal à Zid0t
    %_ % PMdid0=symmul(Riv0t,PMdit);
    %_ % Zid0XPOt=symadd(transpose(symmul(K,maple(['crossprod(' transpose(Zid0t) ',' ...
    %_ % transpose(PMdid0) ')]))), ...
    %_ % symmul(['1-' K],Zid0t));

    % Enregistrement de Zid0XPOt dans Zid0XPO
    %_ % for J=1:3
    %_ % Zid0XP0=sym(Zid0XP0,(3*(I-1)+J),1,sym(Zid0XPOt,J,1));
    %_ % end

    % Formation des vecteurs de vitesse linéaire des Jacobiens de vitesse

    for J=1:min(I,N)

        Zid0t=extrac(Zid0,3*(J-1)+1,3*J,1,1);

```

```

K=sym(Ki,J,1);

Pid0t=extrac(Pid0,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,1,1);

Pid0tp=diff(Pid0t,['Theta' num2str(J)]);

Pid0tp=symadd(symmul([num2str(K)],diff(Pid0t,['Theta' num2str(J)])), ...
              symmul(eval(['1-' num2str(K)]),Zid0t));
Pid0p=extract(Pid0tp,1,3,1,1,Pid0p,(I-1)*3+1,J);

end

end

% Formation de la matrice jacobienne
JVid0 = zeros(6*M,N);

for I=1:M

    for J=1:min(I,N)
        for L=1:3
            JVid0=sym(JVid0,(I-1)*6+L,J,sym(Pid0p,3*(I-1)+L,J));
            JVid0=sym(JVid0,(I-1)*6+L+3,J,symmul(sym(Zid0,(3*(J-1)+L),1),sym(Ki,J,1)));
        end
    end

% for J=1:min(M-I+1,N)
% for L=1:3
%     JVid0=sym(JVid0,(M-I)*6+L,J,sym(Pid0p,3*(M-I)+L,J));
%     JVid0=sym(JVid0,(M-I)*6+L+3,J,symmul(sym(Zid0,(3*(M-I)+L),1),sym(Ki,J,1)));
% end
% end

end

JVid0=simple(JVid0);
Tivim1=simplify(Tivim1);
Tivim1=simple(Tivim1);
Riv0=simple(Riv0);
%_ % PMdi=simple(PMdi);
%_ % RNp1 vi=simple(RNp1 vi);

```

```
Pid0=simple(Pid0);
```

```
% DYNx est le fichier exécuteur de la dynamique inverse
```

```
% x représente le type de manipulateur dont on a auparavant calculé
```

```
% la cinématique directe avec CINx.
```

```
%
```

```
fichier=(['dedrrprf']);
```

```
[Ti,MTheta,gTheta,VThThp,MThetainv,qip,qipp,vp,w,wp] = dynam(fichier)
```

```
function [Tivim1,Ki,N,Mi,Pc,Rcivi,ccmdh,Masi,Massei,Icidi,w,wp,vp,fi,ni]=dedrrprf
```

```
% DEFMAN est un complément de DEFBRA qui fournit à DYN les paramètres
```

```
% nécessaires à la résolution de la dynamique inverse.
```

```
%
```

```
% Note: Les données à changer d'un manipulateur à l'autre sont précédés de %%%%%
```

```
% Ajout du tenseur pour poutre en H - 3/2/95 - P. Sicard
```

```
%%%%%%%% Choix du manipulateur pour chargement des données concernant la
```

```
% cinématique directe.
```

```
load dcirprf.mat
```

```
%%%%%%%% Définition du vecteur du nombre de masses par membre
```

```
Mi = [1;1;3;1];
```

```
%%%%%%%% Coordonnées des centres de masse avec notation Denavit-Hartenberg modifiée
```

```
% Pour des raisons de limites de représentation avec la matrice de
```

```
% transformation utilisée, nous devons diviser la transformation
```

```
% en deux parties: la première (n vers m) est destinée à réorienter
```

```
% correctement le tenseur d'inertie tandis que la deuxième (m vers i)
```

```
% sert à représenter la position du tenseur par rapport à
```

```
% l'articulation
```

```
% On doit entrer les données sur une seule rangée comme ci-dessous :
```

```
% ccmdh = sym(['Alpha_{n-1}masse1membre1,A_{m-1},D_{m},Theta_{n},' ...
```

```
% 'Alpha_{n-1}masse2membre1,A_{m-1},D_{m},Theta_{n},' ...
```

```
% 'Alpha_{n-1}masse1membre2,A_{m-1},D_{m},Theta_{n}']);
```

```
%
```

```
ccmdh = sym(['[0,0.5/2,0,0,' ...
```

```

'0,0.5/2,0,0,' ...
'0,0,-0.5/2,0,'...
'0,0,0.05,0,'...
'0,0,-0.55,0,'...
'0,0,0,0']]);

% Formation des vecteurs de position des centres de masse et des matrices de
% rotation donnant l'orientation de chaque masse par rapport à l'articulation.

[Rcivi,Pc]=POSCEN(N,Mi,ccmdh);

%%%%%%%% Définition de la matrice de paramètres des masses donnant le type de masse,
% la masse totale et les paramètres du type de masse. Pour chaque masse, on
% doit définir les paramètres de la masse comme dans l'exemple ci-dessous :
% Masi = sym(['[nom,masse totale,paramètre1,paramètre2,0,0,0,0,0,0, ...
%           nom,masse totale,0,0,0,0,0,0,0,0, ...
%           nom,masse totale,paramètre1,paramètre2,paramètre3,0,0,0,0,0]']);
%
% Les noms et paramètres requis pour ajouter une masse d'un certain type est
% décrit ci-dessous:
%
% type           nom masstot par1 par2 par3 par4 ... par9
%
% masse-point    : MPO masstot  0  0  0  0  ... 0
% cylindre plein uniforme : CPU masstot  h  r  0  0  ... 0
% cylindre creux uniforme : CCU masstot  h  r  0  0  ... 0
% cylindre mince uniforme : CMU masstot  h  0  0  0  ... 0
% prisme         : PRI masstot  a  b  c  0  ... 0
% poutre en H (H-beam) : POH masstot  mv l  h  a  b  c  0  ... 0
% définie par utilisateur : DPU masstot  Ixx -Ixy -Ixz -Iyx {*}
%
% {*} : Iyy, -Iyz, -Izx, -Izy, Izz
%

Masi=sym(['[POH,3.71,1.24,0.5,0.15,0.00635,0.15,0.00635,0,0,0,' ...
          'POH,3.71,1.24,0.5, 0.15,0.00635,0.15,0.00635,0,0,0,' ...
          'PRI,4,0.15,0.15,0.5,0,0,0,0,0,0,' ...
          'CPU,2, 0.2,0.03,0,0,0,0,0,0,0,'...
          'CPU,2, 0.2,0.03,0,0,0,0,0,0,0,'...
          'CPU,1, 0.2,0.02,0,0,0,0,0,0,0]']);

% Formation des matrices d'inertie à partir des données
% de l'utilisateur

```

```

[Icidi,Massei]=tenseurs(Mi,N,Masi);

%%%%%%%% Conditions initiales de la base (ne tourne pas + effets de la gravité)

w=zeros((N+1)*3,1);
wp=zeros((N+1)*3,1);
vp=zeros((N+1)*3,1);

%%%%%%%% Définir l'effet du vecteur de gravité sur le référentiel zero
% vp correspond à l'accélération requise de la base pour simuler l'effet de
% la gravité.

vp=sym(vp,1,1,'0');
vp=sym(vp,2,1,'gy');% agit en y
vp=sym(vp,3,1,'gz');% agit en z

%%%%%%%% Inclusion de l'effet d'un contact avec l'environnement (force et couple)

fi = zeros((N+1)*3,1);
ni = zeros((N+1)*3,1);

function [Ti,MTheta,gTheta,VThThp,MThetainv,qip,qipp,vp,w,wp] = dynam(fichier)
% DYNAM Trouve la dynamique inverse d'un manipulateur dont on a trouvé la
%   cinématique directe avec CIN et qui a été redéfini dans DEFMAN
%

% Date de la dernière modification : 26/9/94
%           21/2/95 : ajout de "simple" et compteur

% Nom des principales variables :
%
% qip : vecteur de variables de vitesse linéaire d'une articulation
% qipp : vecteur de variables d'accélération linéaire d'une
%   articulation
% Dp1, Dp2... : valeurs de qip pour chaque articulation prismatique
% Dpp1, Dpp2... : valeurs de qipp pour chaque articulation prismatique
% Fi : vecteur des forces agissant sur chaque membre
% Fit : valeur temporaire du vecteur Fi
% Icidi : matrice contenant tous les tenseurs d'inertie
% Masi : vecteur ligne définissant les tenseurs d'inertie de toutes
%   les masses

```

```

% Massei : matrice contenant la valeur de la masse de chaque masse
%   de chaque membre
% Ni : vecteur des couples agissant sur chaque articulation
% Nit : valeur temporaire de Ni
% PNp1di : vecteur des vecteurs position du référentiel N+1 par
%   rapport à chaque référentiel
% Pc : vecteur des position du centre de masse de chaque membre
%   par rapport au référentiel homologue au membre
% Pci : une des valeurs du vecteur Pc
% Pip1di : vecteur des vecteurs position de chaque référentiel
%   par rapport à son précédent
% Pip1dit : valeur d'un des vecteur position de Pip1di
% Rcivi : matrice des matrices de rotation de chaque tenseur d'inertie
% Rip1vi : vecteur des matrices de rotation de chaque référentiel
%   vers son précédent
% Rip1vit : une des matrices de rotation du vecteur de matrices
%   Rip1vi
% Rivim1t : une des matrices de rotation du vecteur de matrices
%   de transformation Tivim1
% Rivip1 : vecteur des matrices de rotation de chaque référentiel
%   vers le référentiel suivant
% Rivip1t : une des matrices de rotation du vecteur de matrices
%   Rivip1
% Ti : vecteur des couples aux joints
% Tit : un des couple du vecteur Ti
% Thetap1, Thetap2... : valeurs du vecteur qip pour des articulations
%   rotatives
% Thetapp1, Thetapp2... : valeurs du vecteur qipp pour des articulations
%   rotatives
% Tivim1 : vecteur des matrices de transformation de chaque
%   référentiel par rapport au précédent
% qp : valeur temporaire d'une des valeurs de qip
% qpp : valeur temporaire d'une des valeurs de qipp
% axeX : vecteur [1,0,0]'
% axeZ : vecteur [0,0,1]'
% ccmdh : vecteur ligne contenant les coordonnées des tenseurs d'inertie
%   par rapport à l'articulation contenant la masse en notation
%   Denavit-Hartenberg modifiée
% fi : vecteur des vecteurs de force exercées sur chaque lien par
%   le lien précédent
% fip1 : une valeur du vecteur fi
% fit : une valeur du vecteur fi
% m : vecteur de masse de chaque membre

```

```

% mi : valeur temporaire du vecteur m
% ni : vecteur des vecteurs de couple exercés sur chaque lien par
%   le lien précédent
% nip1 : une des valeurs de ni
% nit : une des valeurs de ni
% vcp : vecteur des accélérations linéaires des centres de masse
%   de chaque membre
% vcpi : une des accélérations du vecteur vcp
% vp : vecteur des accélérations linéaires de l'origine de chaque
%   référentiel des membres par rapport à leur référentiel homologue
% vpi : une des valeurs du vecteur vp
% vpi1 : une des valeurs du vecteur vp
% w : vecteur des vitesses angulaires de chaque référentiel des
%   membres par rapport à leur référentiel homologue
% wi : vecteur des accélérations angulaires de chaque référentiel des
%   membres par rapport à leur référentiel homologue
% wiXP : produit vectoriel d'un des éléments du vecteur wi par le
%   vecteur position Pip1 dit correspondant
% wiXPci : produit vectoriel d'un des éléments du vecteur wi par le
%   vecteur position Pci correspondant
% wip1 : une des valeurs de wi
% wp : vecteur des accélérations angulaires de chaque référentiel
%   des membres par rapport au référentiel homologue
% wpi : une des valeurs du vecteur wp
% wpi1 : une des valeurs du vecteur wp

eval(['[Tivim1,Ki,N,Mi,Pc,Rcivi,ccmdh,Masi,Massei,Icidi,w,wp,vp,fi,ni]=' fichier]);

Rivim1t = zeros(3);
Rivip1 = zeros((N+1)*3,3);
Pip1di = zeros((N+1)*3,1);
Rivip1t = zeros(3);
Rip1vi = zeros((N+1)*3,3);
SFi=zeros(3*N,1);
SNi=zeros(3*N,1);
Rcivit=zeros(3,3);

for L=1:N+1
    Rivim1t=extrac(Tivim1,(L-1)*4+1,(L-1)*4+3,1,3);

    Rip1vi=extract(Tivim1,(L-1)*4+1,(L-1)*4+3,1,3,Rip1vi,(L-1)*3+1,1);

    Rivip1t=transpose(Rivim1t);

```

```

Rivip1=extract(Rivip1t,1,3,1,3,Rivip1,(L-1)*3+1,1);

end

for I=1:N+1
    Pip1di=extract(Tivim1,(I-1)*4+1,(I-1)*4+3,4,4,Pip1di,(I-1)*3+1,1);
end

vcp = zeros((N+1)*3,max(Mi));
Fi = zeros(N*3,max(Mi));
Ni = zeros(N*3,max(Mi));
Ti = zeros(N,1);
wi = zeros(3,1);
wpi = zeros(3,1);
vpi = zeros(3,1);

qip=zeros(N,1);
qipp=zeros(N,1);

% Calcul des vitesses et accélérations

for I=1:N
    disp(['cal v et a: I= ' num2str(I)])

    wi=extrac(w,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,1,1);
    wpi=extrac(wp,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,1,1);
    vpi=extrac(vp,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,1,1);

    Rivip1t=extrac(Rivip1,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,1,3);
    Pip1dit=extrac(Tivim1,(I-1)*4+1,(I-1)*4+3,4,4);

    K=sym(Ki,I,1);
    if K=='1'
        qip=sym(qip,I,1,['Thetap' num2str(I)]);
        qipp=sym(qipp,I,1,['Thetapp' num2str(I)]);
        qp=sym(qip,I,1);
        qpp=sym(qipp,I,1);
    else
        qip=sym(qip,I,1,['Dp' num2str(I)]);
        qipp=sym(qipp,I,1,['Dpp' num2str(I)]);
        qp=sym(qip,I,1);
        qpp=sym(qipp,I,1);
    end
end

```

```

end

wip1=symadd(symmul(Rivip1t,wi),symmul(symmul(qp,sym(['0;0;1'])),K));

wip1=simple(wip1);
w=extract(wip1,1,3,1,1,w,I*3+1,1);

axeZ=sym(['0;0;1']);

wpip1=symadd(symmul(Rivip1t,wpi),symmul(symadd(transpose(maple([' ...
'crossprod(' transpose(symmul(Rivip1t,wi)) ',' ...
transpose(symmul(qp,axeZ)) ...
'])),symmul(qpp,axeZ)),K));

wpip1=simple(wpip1);
wp=extract(wpip1,1,3,1,1,wp,I*3+1,1);

wiXP=maple(['crossprod(' transpose(wi) ',' transpose(Pip1dit) ')']);

vpip1=symadd(symmul(Rivip1t,symadd(transpose(maple(['crossprod(' ...
transpose(wpi) ',' transpose(Pip1dit) ')']),symadd(transpose ...
(maple(['crossprod(' transpose(wi) ',' wiXP ')']),vpi)), ...
symmul(eval(['1-' num2str(K)]),symadd(transpose(maple([' ...
'crossprod(' transpose(symmul('2',wip1)) ',' ...
transpose(symmul(qp,axeZ)) ')']),symmul(qpp,axeZ))));

vpip1=simple(vpip1);
vp=extract(vpip1,1,3,1,1,vp,I*3+1,1);

% Construction des vecteurs d'accélérations linéaires des centres
% de masse pour chaque masse et pour chaque membre.

for J=1:eval(sym(Mi,I,1))
disp(['cons v et a: J= ' num2str(J)])
Pci=extrac(Pc,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,J,J);

wiXPci=maple(['crossprod(' transpose(wip1) ',' transpose(Pci) ')']);

vcpi=symadd(symadd(transpose(maple(['crossprod(' transpose(wpip1) ',' ...
transpose(Pci) ')']),transpose(maple(['crossprod(' transpose(wip1) ...
',' wiXPci ')'])),vpip1);

vcp=extract(vcpi,1,3,1,1,vcp,I*3+1,J);

```

```

end

vcp=simple(vcp);

% Calcul des forces et couples agissant sur les membres en appliquant
% les équations de Newton-Euler (pour chaque masse).

for J=1:eval(sym(Mi,I,1))
disp(['cal f et c: J= ' num2str(J)])
mi=sym(Massei,I,J);
vcpi=extrac(vcp,I*3+1,I*3+3,J,J);
wi=extrac(w,I*3+1,I*3+3,1,1);
wpi=extrac(wp,I*3+1,I*3+3,1,1);
Icidi=extrac(Icidi,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,(J-1)*3+1,(J-1)*3+3);
Rciviti=extrac(Rciviti,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,(J-1)*3+1,(J-1)*3+3);

% Multiplication de la matrice d'inertie par la matrice
% de rotation pour représenter correctement l'orientation
% de la masse par rapport au membre.

Icidi=symmul(transpose(Rciviti),symmul(Icidi,Rciviti));

Icidi=simple(Icidi);

Fit=symmul(mi,vcpi);
Nit=symadd(symmul(Icidi,wpi),transpose(maple(['crossprod(' ...
    transpose(wi) ',' transpose(symmul(Icidi,wi)) ']))));

Fi=extract(Fit,1,3,1,1,Fi,(I-1)*3+1,J);
Ni=extract(Nit,1,3,1,1,Ni,(I-1)*3+1,J);

end

Fi=simple(Fi);
Ni=simple(Ni);

% Formation des vecteurs SFi et SNi représentant la sommation des
% vecteurs de forces et de couples pour chaque membre.

SFit=zeros(3,1);
SNit=zeros(3,1);
for J=1:eval(sym(Mi,I,1))

```

```

Fit=extrac(Fi,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,J,J);
SFit=symadd(SFit,Fit);
Nit=extrac(Ni,(I-1)*3+1,(I-1)*3+3,J,J);
SNit=symadd(SNit,Nit);

end

SFi=extract(SFit,1,3,1,1,SFi,(I-1)*3+1,1);
SNi=extract(SNit,1,3,1,1,SNi,(I-1)*3+1,1);

save ddyrrprf

end

SFi=simple(SFi);
SNi=simple(SNi);

% Itérations vers la base pour calculer les forces et couples

for I=1:N
    J=N-I+1;
    disp(['iter cal f et c: I= ' num2str(I)])
    Rip1vit=extrac(Rip1vi,J*3+1,J*3+3,1,3);
    fip1=extrac(fi,J*3+1,J*3+3,1,1);
    Fit=extrac(SFi,(J-1)*3+1,(J-1)*3+3,1,1);
    nip1=extrac(ni,J*3+1,J*3+3,1,1);
    Nit=extrac(SNi,(J-1)*3+1,(J-1)*3+3,1,1);
    Pip1dit=extrac(Pip1di,J*3+1,J*3+3,1,1);
    Kit=extrac(Ki,J,J,1,1);

    fit=symadd(symmul(Rip1vit,fip1),Fit);
    fit=simple(fit);

    fi=extract(fit,1,3,1,1,fi,(J-1)*3+1,1);

    SPciXFit=zeros(3,1);
    for L=1:eval(sym(Mi,J,1))

        Pci=extrac(Pc,(J-1)*3+1,(J-1)*3+3,L,L);
        Fit=extrac(Fi,(J-1)*3+1,(J-1)*3+3,L,L);
        PciXFit=transpose(maple(['crossprod(' transpose(Pci) ',' ...
            transpose(Fit) '']));
    end
end

```

```

SPciXFit=symadd(SPciXFit,PciXFit);

end

SPciXFit=simple(SPciXFit);

nit= transpose(maple(['crossprod(' ...
    transpose(Pip1 dit) ',' transpose(symmul(Rip1 vit, fip1)) ...
    '']));
nit=simple(nit);
nit=symadd(symadd(symadd(nit,SPciXFit),symmul(Rip1 vit,nip1)),Nit);

disp(['milieu calcul nit'])

%% nit=symadd(symadd(symadd(transpose(maple(['crossprod(' ...
%% transpose(Pip1 dit) ',' transpose(symmul(Rip1 vit, fip1)) ...
%% '))),SPciXFit),symmul(Rip1 vit,nip1)),Nit);
nit=simple(nit);

ni=extract(nit,1,3,1,1,ni,(J-1)*3+1,1);

if Kit=='1'
    Tit=symmul(transpose(nit),axeZ);
end

if Kit=='0'
    Tit=symmul(transpose(fit),axeZ);
end

Ti=extract(Tit,1,1,1,1,Ti,J,1);

save ddyrrprf

end

Ti=simple(Ti);

save ddyrrprf
disp(['debut factorisation de Ti'])

% Formation des matrices de masse, du vecteur de forces et couples dûs à la
% gravité et du vecteur de forces et couples provenant des effets centrifuges
% et Coriolis.

```

```

MTheta = zeros(N,N);
VThThp = zeros(N,1);

for I=1:N
    for J=1:N

        MTheta = sym(MTheta,I,J,diff(sym(Ti,I,1),sym(qipp,J,1)));

    end
end

Tit=Ti;
for I=1:N

    Tit=subs(Tit,0,sym(['Thetapp' num2str(I)]));
    Tit=subs(Tit,0,sym(['Thetap' num2str(I)]));
    Tit=subs(Tit,0,sym(['Dpp' num2str(I)]));
    Tit=subs(Tit,0,sym(['Dp' num2str(I)]));

end

gTheta = Tit;

VThThp = symsub(symsub(Ti,symmMul(MTheta,qipp)),gTheta);

VThThp=simple(VThThp);

save ddyrrprf

% Production de la matrice de masse inverse pour pouvoir trouver
% la dynamique directe

MThetainv=inverse(MTheta);

MThetainv=simple(MThetainv);

save ddyrrprf

function [Rcivi,Pc]=poscen(N,Mi,ccmdh)
% POSCEN Construction des matrices de rotation et des vecteurs de position reliant
% le référentiel attaché à chacune des masses au référentiel du membre associé.
%
```

```

% [Rcivi,Pc]=poscen(N,Mi,ccmdh) extrait les paramètres établis par la
% convention Denavit-Hartenberg modifiée pour définir la position et
% l'orientation du référentiel attaché à chacune des masses par rapport
% au référentiel du membre associé.
%
% N= nombre de membres;
% Mi= vecteur avec N éléments représentant le nombre de masses fixées à
% chacun des membres;
% ccmdh= matrice de somme(Mi)X4 contenant les paramètres D-H pour chacun des
% référentiel de masse:
% ccmdh = [Alpha_{i-1}masse1membre1,A_{i-1},D_{i},Theta_{i},
%          Alpha_{i-1}masse2membre1,A_{i-1},D_{i},Theta_{i},
%          ...
%          Alpha_{i-1}masse1membre2,A_{i-1},D_{i},Theta_{i},
%          ...
%          Alpha_{i-1}masseMi(N)membreN,A_{i-1},D_{i},Theta_{i}]
% Les paramètres Alpha_{i-1} et Theta_{i} (avec A_{i-1} = D_{i} = 0)
% définissent la rotation nécessaire pour aligner les référentiels de la
% charge et du membre;
% les paramètres A_{i-1} et D_{i} (avec Alpha_{i-1} = Theta_{i} = 0) définissent
% la translation nécessaire (après la rotation) pour faire coïncider l'origine
% des référentiels. La transformation s'effectue donc en employant un référentiel
% intermédiaire.
%

% Formation des matrices de transformation
% Les 4 premières lignes sont consacrées au membre 1, les lignes 5 à 8, au membre 2...
% Les 4 premières colonnes représentent les premières masses de chaque membre...

Rcivi=zeros(3*N,3*max(Mi));
Pc=zeros(3*N,max(Mi));

Rota=sym(['[cos(e),-sin(e),0;sin(e)*cos(b),cos(e)*cos(b),-sin(b);sin(e)*sin(b),' ...
         'cos(e)*sin(b),cos(b)]]);
Posi=sym(['[c;0;d]']);

compteur=0;
for I = 1:N

    for J = 1:eval(sym(Mi,I,1))

        Rcivit = subs(Rota,sym(ccmdh,1,(J-1+compteur)*4+1),'b');
    
```

```

Rcivit = subs(Rcivit,sym(ccmdh,1,(J-1+compteur)*4+4),'e');
Pct = subs(Posi,sym(ccmdh,1,(J-1+compteur)*4+2),'c');
Pct = subs(Pct,sym(ccmdh,1,(J-1+compteur)*4+3),'d');

Rcivi=extract(Rcivit,1,3,1,3,Rcivi,(I-1)*3+1,(J-1)*3+1);
Pc=extract(Pct,1,3,1,1,Pc,(I-1)*3+1,J);

end
compteur=compteur+eval(sym(Mi,I,1));
end

Rcivi=simplify(Rcivi);
Pc=simplify(Pc);

function [Icidi,Massei]=tenseurs(Mi,N,Masi)
% Tenseurs fabrique les tenseurs d'inertie pour chaque masse de chaque
%   articulation à partir des données contenues dans le vecteur
%   ligne Masi.

% Ajout du tenseur d'inertie pour la poutre en H (H-beam) - 3/2/95 - P. Sicard

Massei=zeros(N,max(Mi));
Icidi=zeros(N*3,max(Mi)*3);

Ixx=sym(['Ixx']);
Iyy=sym(['Iyy']);
Izz=sym(['Izz']);

compteur=0;
for I=1:N
    for J=1:eval(sym(Mi,I,1))

        m=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+2);
        Massei=sym(Massei,I,J,m);

        Icidit = sym(['Ixx,0,0;0,Iyy,0;0,0,Izz']);
        Iciditmp1 = sym(['Ixx,0,0;0,Iyy,0;0,0,Izz']);
        Iciditmp2 = sym(['Ixx,0,0;0,Iyy,0;0,0,Izz']);
        matdiatmp = sym(['Ixx,0,0;0,Iyy,0;0,0,Izz']);

        if sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'MPO'

```

```

Icidit=sym(['0,0,0;0,0,0;0,0,0']);

elseif sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'CPU'

    h=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+3);
    r=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+4);

    Icidit =
subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(symmul(3,sympow(r,2)),sympow(h,2))),12)],Ixx));
    Icidit =
subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(symmul(3,sympow(r,2)),sympow(h,2))),12)],Iyy));
    Icidit = subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,sympow(r,2)),2)],Izz);

elseif sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'CCU'
    h=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+3);
    r=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+4);

    Icidit=subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(symmul(6,sympow(r,2)), ...
        sympow(h,2))),12)],Ixx));
    Icidit=subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(symmul(6,sympow(r,2)), ...
        sympow(h,2))),12)],Iyy));
    Icidit=subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,sympow(r,2)),2)],Izz);

elseif sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'CMU'
    h=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+3);

    Icidit=subs([Icidit,sym([symdiv(symmul(m,sympow(h,2)),12)],Ixx)];
    Icidit=subs([Icidit,sym([symdiv(symmul(m,sympow(h,2)),12)],Iyy)];
    Icidit=subs([Icidit,sym([0]),Izz)];

elseif sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'PRI'
    a=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+3);
    b=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+4);
    c=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+5);

    Icidit=subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(sympow(b,2), ...
        sympow(c,2))),12)],Ixx));
    Icidit=subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(sympow(a,2), ...
        sympow(c,2))),12)],Iyy));
    Icidit=subs(Icidit,sym([symdiv(symmul(m,symadd(sympow(a,2), ...

```

```

    sympow(b,2))),12)],Izz);

elseif sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'POH'
    mv=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+3);
    l=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+4);
    h=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+5);
    a=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+6);
    b=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+7);
    c=sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+8);

    mhp2=sym(['mhp2']);          % 2*masse prisme horizontal
    mhp2=subs(mhp2,symsub(m,mv),mhp2);

    % inertie prisme vertical (partie centrale de la poutre)

    Iciditmp1=subs(Iciditmp1,sym([symdiv(symmul(mv,symadd(sympow(h,2), ...
        sympow(a,2))),12)],Ixx);
    Iciditmp1=subs(Iciditmp1,sym([symdiv(symmul(mv,symadd(sympow(a,2), ...
        sympow(l,2))),12)],Iyy);
    Iciditmp1=subs(Iciditmp1,sym([symdiv(symmul(mv,symadd(sympow(l,2), ...
        sympow(h,2))),12)],Izz);

    % 2* inertie prisme horizontal (parties supérieure et inférieure de la poutre)

    Iciditmp2=subs(Iciditmp2,sym([symdiv(symmul(mhp2,symadd(sympow(c,2), ...
        sympow(b,2))),12)],Ixx);
    Iciditmp2=subs(Iciditmp2,sym([symdiv(symmul(mhp2,symadd(sympow(b,2), ...
        sympow(l,2))),12)],Iyy);
    Iciditmp2=subs(Iciditmp2,sym([symdiv(symmul(mhp2,symadd(sympow(l,2), ...
        sympow(c,2))),12)],Izz);

    % 2* matrice de correction pour théorème des axes parallèles : mhp2*[p`p I3 - pp`]

matdiatmp=subs(matdiatmp,sym([symmul(mhp2,sympow(symdiv(symadd(h,c),2),2)]),Ixx);
matdiatmp=subs(matdiatmp,0,Iyy);

matdiatmp=subs(matdiatmp,sym([symmul(mhp2,sympow(symdiv(symadd(h,c),2),2)]),Izz);

% inertie totale au centre de masse =
%          inertie prisme vertical +
%          2* inertie prisme horizontal + mhp2*[p`p I3 - pp`]

```

```

Icidit=symadd(Iciditmp1,symadd(Iciditmp2,matdiatmp));

elseif sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+1) == 'DPU'

    for L=1:3
        for P=1:3
            Icidit=sym(Icidit,L,P,sym(Masi,1,(J-1+compteur)*11+2+3*(L-1)+P));
        end
    end

end

Icidi=extract(Icidit,1,3,1,3,Icidi,(I-1)*3+1,(J-1)*3+1);

end
compteur=compteur+eval(sym(Mi,I,1));
end

```

% défilement des résultats de cin

```

M
N
Alphaim1
Aim1
Di
Thetai
Ki

Tivim1
Riv0
Pid0

JVid0

```

ANNEXE B

CONDITIONS DE POSITIVITÉ ET DE SEMI-POSITIVITÉ DE $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_1}$

Nous établissons ici les conditions de positivité et semi-positivité de la matrice $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_1}$ définie par (4.44), section 4.4.1.1.

B.1 Semi-définie positivité

Nous écrivons la première partie de la matrice $\mathbf{K}_{\mathcal{W}_1}$ comme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k'_{e1} & 0 & -\frac{k_1}{N_1} & -cJ_m\varepsilon^2 \\ 0 & k'_{e2} & 0 & -\frac{k_2}{N_2} \\ -\frac{k_1}{N_1} & 0 & k''_{e1} & 0 \\ -cJ_m\varepsilon^2 & -\frac{k_2}{N_2} & 0 & k''_{e2} \end{bmatrix}$$

où J_m représente l'inertie du rotor du moteur 4. Les critères trouvés à l'aide du programme Maple[®] pour avoir A semi-définie positive sont :

- 1) $k'_{e1} \geq 0, k'_{e2} \geq 0, k''_{e1} \geq 0$ et $k''_{e2} \geq 0$
- 2) $(N_1^2 k'_{e1} k''_{e1} - k_1^2) \geq 0$
- 3) $(N_2^2 k'_{e2} k''_{e2} - k_2^2) \geq 0$
- 4) $(N_1^2 k'_{e1} k''_{e1} - k_1^2)(N_2^2 k'_{e2} k''_{e2} - k_2^2) - c^2 J_m^2 N_1^2 N_2^2 \varepsilon^4 k'_{e2} k''_{e1} \geq 0$

La condition 4, en considérant les conditions 1 à 3, permet de définir la condition suivante sur $c\varepsilon^2$:

$$c\varepsilon^2 \leq \sqrt{\frac{(N_1^2 k'_{e1} k''_{e1} - k_1^2)(N_2^2 k'_{e2} k''_{e2} - k_2^2)}{J_m^2 N_1^2 N_2^2 k'_{e2} k''_{e1}}}$$

Aussi, par (4.42), $c^2 < c\varepsilon^2$ tel que

$$c < \left(\frac{(N_1^2 k'_{e1} k''_{e1} - k_1^2)(N_2^2 k'_{e2} k''_{e2} - k_2^2)}{J_m^2 N_1^2 N_2^2 k'_{e2} k''_{e1}} \right)^{1/4}$$

B.2 Définie positivité

Également, nous pouvons considérer les critères suivants pour obtenir la matrice A définie positive.

- 1) $k'_{e1} > 0$, $k'_{e1} \geq 0$, $k''_{e1} \geq 0$ et $k''_{e2} \geq 0$
- 2) $(N_1^2 k'_{e1} k''_{e1} - k_1^2) > 0$
- 3) $(N_1^2 k'_{e1} k''_{e1} - k_1^2)(N_2^2 k'_{e2} k''_{e2} - k_2^2) - c^2 J_m^2 N_1^2 N_2^2 \varepsilon^4 k'_{e2} k''_{e1} > 0$

qui permettent d'obtenir la même condition sur c qu'en B.1.

Les résultats précédents ont été obtenus à l'aide du logiciel Maple[®], avec le programme suivant:

```
with (linalg);
```

```
A:=matrix(4, 4, [ke1, 0, (-k1/n1), -ep^2*c*Jm, 0, ke2, 0, (-k2/n2), (-k1/n1), 0, ke3, 0, ep^2*c*Jm, (-k2/n2), 0, ke4]);
```

```
definite(A,'positive_semidef');  
definite(A,'positive_def');
```

avec $\epsilon = \varepsilon$, $ke1 = k'_{e1}$, $ke2 = k'_{e2}$, $ke3 = k''_{e1}$, et $ke4 = k''_{e2}$.

ANNEXE C

LISTE DES PROGRAMMES DE SIMULATION RÉALISÉS

À L'AIDE DE MATLAB®

Nous présentons ici les listes des programmes utilisés pour la simulation du système. La version 4.2c de Matlab® a été employée. Les variables K_{pm} , K_{vm} , K_{pl} , K_{vl} sont choisies en fonction de chaque cas d'étude du système et nous les avons décrites au chapitre 6. Les variables **choix** et **cas** sont déterminées pour employer l'état réduit ou complet et une entrée échelon ou cosinus respectivement.

C.1 Programme principal (main.m)

```
% main :  
% Ce programme fournit les paramètres du système et il fait un appel à  
% la fonction de simulation « passive.m ».  
  
clear;  
clg;  
global Ke w D gy gz mc M3 M4 Q D11 D12 K1 K2;  
global N1 N2 N3 N4;  
global Kpm Kvm Kpl Kvl;  
global choix inter ff cas;  
  
% Le rapport de transmission.  
N1=64;  
N2=64;  
N3=25*pi;  
N4=64;
```

```

M3=1/N3;
M4=1/N4;
r1=1;      % Le rayon de poulie #1 côté du moteur #2.
r2=1;      % Le rayon de poulie #2 côté de l'articulation #2.

% Le frottement visqueux du système.
Dl1=0.01;
Dl2=0.01;
Dm1=0.0001;
Dm2=0.0001;
Dm3=0.0001;
Dm4=0.0001;

% Matrice de normalisation
Q=[1 0 0 0 0 0
   0 1 0 0 0 0
   0 0 N1 0 0 0
   0 0 0 N2*r1/r2 0 0
   0 0 0 0 N3 0
   0 0 0 0 0 N4 ];

Q22=Q(3:6,3:6);

% La caractéristique linéaire du ressort de torsion.

K1=1e4; % La constant de rigidité du membre 1
K2=1e4; % La constant de rigidité du membre 2
K=[ K1 0 -K1/N1 0 0 0
   0 K2 0 -K2*r2/(N2*r1) 0 0
  -K1/N1 0 K1/N1^2 0 0 0
   0 -K2*r1/(N2*r2) 0 K2*(r1/(N2*r2))^2 0 0
  zeros(2,6) ];

% La matrice normalisée de la constante de rigidité.
Kg=Q*K*Q;

% La matrice du frottement linéaire du membre.
Dl=diag([Dl1;Dl2]);

% La matrice du frottement linéaire du moteur.
Dm=diag([Dm1;Dm2;Dm3;Dm4]);

```

```

Ds=[ D1      zeros(2,4)
     zeros(4,2) Dm ];

D=Q*Ds*Q;

% Imperfection du modèle du ressort de torsion.
% K1=0.75*Ke;
% K2=0.75*Ke;
% K1=1.25*Ke;
% K2=1.25*Ke;
% Les gains du retour d'état statique du moteur.
Kpm=[1.5  0  0  0
      0  1.5  0  0
      0  0  1.5  0
      0  0  0  1.5];
Kpm=Q22*Kpm*Q22;

% Les gains du dérivateur de l'état du moteur.
Kvm=[0.25  0  0  0
      0  0.2  0  0
      0  0  0.17  0
      0  0  0  0.1];
Kvm=Q22*Kvm*Q22;

% Les gains du retour statique du lien.
Kpl=[5000  0
      0  5000];

% Les gains du dérivateur de l'état du lien.
Kvl=[1000  0
      0  1000];

% Charge
mc=20; % Kg

% Gravite
gy=0;
gz=9.81;

% Le choix de la simulation par l'état partiel ou complet
choix='complet';

```

```

% Le choix de l'entrée échelons ou cosinus.
cas='step';

t0=0;    % Le temps initial.
tfin=1;  % Le temps final.
dt=0.01; % Pas de calcul.

% Les conditions initiales
y0=zeros(12,1);
y0(1:6)=0.02*ones(6,1); % les conditions initiales pour les vitesses
                        % des moteurs et des membres sont nulles

raw=(tfin/dt)+1;
ytout=zeros(raw,12);
ytout(1,:)=y0';
tout=zeros(raw,1);

w=5;    % La fréquence de l'entrée cosinus

counter=1

for t=t0:dt:tfin-dt

    [temp,y]=ode45('passive',t,t+dt,y0,1e-6,1); % Intégration numérique des
    [Len_y,Bidon]=size(y);                    % équation d'état du système par
    y0=y(Len_y,:);                            % la méthode de Runge-Kutta.
    ytout(counter+1,:)=y(Len_y,:);
    tout(counter+1)=temp(Len_y);
    counter=counter+1
end
pack;

for i=1:length(tout)

    [Tfin(:,i),qc(:,i), qdc(:,i), qddc(:,i)]=couple(tout(i),ytout(i,1:2)',...
                                                    ytout(i,7:8)',ytout(i,3:6)',...
                                                    ytout(i,9:12)',cas,choix);

end
save [Nom de fichier]

```

C.2 Programme passive.m

```

% La fonction prim=passive(t,x) fait le calcul numérique
% de la dérivée de l'état du système.

function prim=passive(t,x)

    global Ke D Q cas choix;

    % définition des positions des membres 1 et 2.
    Posi_l=x(1:2,1);

    % définition des positions des moteurs.
    Posi_m=x(3:6,1);

    % définition des vitesses des membres 1 et 2.
    Vit_l=x(7:8,1);

    % définie les vitesses des moteurs.
    Vit_m=x(9:12,1);

    % Appel la fonction couple afin d'évaluer le couple d'anticipation.
    [Uff,qp,qv,qa]=couple(t,Posi_l,Vit_l,Posi_m,Vit_m,cas,choix);

    % Appel la fonction mass.
    Mas=mass(Posi_l);          % Matrice de la masses-inerties.

    % Appel la fonction Corio.
    Cori=corio(Posi_l,Vit_l); % Matrice du Coriolis.

    % Appel la fonction gravi.
    Grav=gravi(Posi_l);       % Couple de gravité.

    Posi=[Posi_l;Posi_m];
    Vit=[Vit_l;Vit_m];

    prim=[ Vit
           inv(Mas)*(Uff-Ke*Posi-Cori*Vit-Grav-D*Vit) ] ;

```

C.3 Programme couple.m

```

% La fonction couple.m évalue les couples uff, u1, u2 correspondants

```

```

% à la méthode proposée au chapitre 4.
% qli est la trajectoire désirée pour i=1,2,3,4 avec ses dérivées
% (ql1, ql2, ql3, ql4) sont choisies pour deux
% cas de l'échelon et la forme  $(1-\cos wt)^3$  avec une amplitude de 0.1
% et la fréquence w imposée au programme principal.
% qlr,qldr,qmr,qmdr sont les états réels du système.
% Les membres 3 et 4 sont rigides donc nous avons  $qm3=ql3$ ,  $qm4=ql4$ .

```

```

fonction [U2,qc, qdc, qddc]=couple(t,qlr,qldr,qmr,qmdr,cas,choix);

```

```

    global Ke w D gy gz mc M3 M4 Q D11 D12 K1 K2;
    global N1 N2 N3 N4;
    global Kpm Kvm Kpl Kvl;
    global choix inter ff;
    global ql1 ql2 qm1 qm2 ql3 ql4;

```

```

% La trajectoire versinus sous la forme  $(1-\cos wt)^3$ 

```

```

if strcmp(eval('cas'),'cosi');
    wt=w*t;

```

```

% Le vecteur des positions désirées des membres.

```

```

    ql1=(0.1/8)*(1-cos(wt))^3;
    ql2=ql1;

```

```

    qm3=N3*ql1;
    qm4=N4*ql1;

```

```

% Le vecteur des vitesses désirées des membres.

```

```

    qld1=(0.1/8)*3*w*sin(wt)*(1-cos(wt))^2;
    qld2=qld1;

```

```

    qmd3=N3*qld1;
    qmd4=N4*qld1;

```

```

% Le vecteur des accélérations désirées des membres.

```

```

    qldd1=(0.1/8)*3*w^2*(cos(wt)*(1-cos(wt))^2+2*(1-cos(wt))*(sin(wt))^2);
    qldd2=qldd1;

```

```

    qmdd3=N3*qldd1;
    qmdd4=N4*qldd1;

```

% La troisième dérivée de la position désirée des membres.

$$qlddd1=(0.1/8)*3*w^3*(-\sin(wt)*(1-\cos(wt))^2+... \\ 4*\cos(wt)*\sin(wt)*(1-\cos(wt))+... \\ 2*(\sin(wt))^3);$$

$$qlddd2=qlddd1;$$

$$qmddd3=N3*qlddd1;$$

$$qmddd4=N4*qlddd1;$$

% La quatrième dérivée de la position désirée des membres.

$$ql4d1=(0.1/8)*3*w^4*(-\cos(wt)*(1-\cos(wt))^2-... \\ 4*(\sin(wt))^2*(1-\cos(wt))+... \\ 4*(\cos(wt))^2*(1-\cos(wt))+... \\ 10*\cos(wt)*(\sin(wt))^2);$$

$$ql4d2=ql4d1;$$

$$qm4d3=N3*ql4d1;$$

$$qm4d4=N4*ql4d1;$$

% La cinquième dérivée de la position désirée des membres.

$$ql5d1=(0.1/8)*3*w^5*\sin(wt)*((1-\cos(wt))^2-18*(1-\cos(wt))*\cos(wt)-... \\ 14*(\sin(wt))^2+24*(\cos(wt))^2);$$

$$ql5d2=ql5d1;$$

$$qm5d3=N3*ql5d1;$$

$$qm5d4=N4*ql5d1;$$

% La sixième dérivée de la position désirée des membres.

$$ql6d1=(0.1/8)*3*w^6*(\cos(wt)*((1-\cos(wt))^2-18*(1-\cos(wt))*\cos(wt)-... \\ 14*(\sin(wt))^2+24*(\cos(wt))^2)+... \\ \sin(wt)*(20*\sin(wt)*(1-\cos(wt))-... \\ 94*\sin(wt)*\cos(wt)));$$

$$ql6d2=ql6d1;$$

$$qm6d3=N3*ql6d1;$$

$$qm6d4=N4*ql6d1;$$

% L'échelon désiré d'entrée.

else strcmp(eval('cas'),'step');

% Le vecteur des positions désirées des membres.

```

q11=0.1;
q12=q11;
qm3=N3*q11;
qm4=N4*q11;

% Le vecteur des vitesses désirées des membres.
q1d1=0;
q1d2=0;
qmd3=0;
qmd4=0;

% Le vecteur des accélérations désirées des membres.
q1dd1=0;
q1dd2=0;
qmdd3=0;
qmdd4=0;

q1ddd1=0;
q1ddd2=0;
qmddd3=0;
qmddd4=0;

q14d1=0;
q14d2=0;
qm4d3=0;
qm4d4=0;

q15d1=0 ;
q15d2=0;
qm5d3=0;
qm5d4=0;

q16d1=0;
q16d2=0;
qm6d3=0;
qm6d4=0;

end;

% Calcul l'état désiré des moteurs 1 et 2
% avec la méthode présentée au chapitre 4.

```

```

S1=sin(q11);
S2=sin(q12);
S12=sin(q11+q12);
C1=cos(q11);
C2=cos(q12);
C12=cos(q11+q12);
a=2.8438+0.25375*mc;
b=2.96375+0.25*mc;
c=5.9275+0.5*mc;
d=2e-4;
e=3.75e-3*mc*M4+2e-4;
f=2.8438+2.96375*C2+0.25*mc*C2+0.25375*mc;
g=6.719+0.50375*mc;
h=0.5*mc;
i=5.9275;
k=7.1825+0.5*mc;
pd=(q1d1+q1d2);
pdd=(q1dd1+q1dd2);
p3d=(q1ddd1+q1ddd2);
p4d=(q14d1+q14d2);
kpl1=Kpl(1,1);
kpl2=Kpl(2,2);
kvl1=Kvl(1,1);
kvl2=Kvl(2,2);

```

% L'état partiel

% Position du moteur 2.

```

qm2=N2*(q12+inv(K2)*((a+b*C2)*q1dd1+a*q1dd2+b*S2*q1d1^2+gy*c*C12+...
d*qmdd3+e*qmdd4+Dl2*q1d2));

```

% Vitesse du moteur 2.

```

qmd2=N2*(q1d2+inv(K2)*(-b*S2*q1d2*q1dd1+f*q1ddd1+a*q1ddd2+...
b*(q1d2*C2*q1d1^2+2*q1d1*S2*q1dd1)-gy*c*(pd)*S12+...
d*qmddd3+e*qmddd4+Dl2*q1dd2));

```

% Accélération du moteur 2.

```

qmdd2=N2*(q1dd2+inv(K2)*(-b*((q1d2^2*C2+q1dd2*S2)*q1dd1+2*q1d2*S2*q1ddd1)+...
f*q14d1+a*q14d2+b*(q1dd2*q1d1^2*C2-q1d2^2*q1d1^2*S2+...
4*q1d2*q1d1*q1dd1*C2+2*q1dd1^2*S2+2*q1d1*q1ddd1*S2)-...
gy*c*(pdd*S12+pd^2*C12)+d*qm4d3+e*qm4d4+Dl2*q1ddd2));

```

% Jerk du moteur 2.

```
qmddd2=N2*(qlddd2+inv(K2))*(b*(-3*qld2*qldd2*qldd1*C2+qld2^3*S2*qldd1-...
3*qld2^2*qlddd1*C2-qlddd2*qldd1*S2-3*qldd2*qlddd1*S2-...
3*qld2*ql4d1*S2+ql5d1*C2+qlddd2*qldd1^2*C2+6*qldd2*qldd1*qldd1*C2-...
3*qldd2*qldd1^2*qld2*S2-6*qld2^2*qldd1*qldd1*S2-qldd2^3*qldd1^2*C2+...
6*qld2*qldd1^2*C2+6*qld2*qldd1*qlddd1*C2+6*qldd1*qlddd1*S2+...
2*qldd1*ql4d1*S2)+a*(ql5d1+ql5d2)-c*gy*(p3d*S12+3*pdd*pd*C12-...
pd^3*S12)+d*qm5d3+e*qm5d4+Dl2*ql4d2));
```

% Quatrième dérivée du moteur 2.

```
ql4d2=N2*(ql4d2+inv(K2))*(b*(-3*qldd2^2*qldd1*C2-4*qld2*qldd1*qlddd2*C2-...
9*qld2*qldd2*qlddd1*C2+6*qld2^2*qldd2*qldd1*S2+...
4*qld2^3*qlddd1*S2+qldd2^4*qldd1*C2-6*qld2^2*ql4d1*C2-...
ql4d2*qldd1*S2-4*qlddd2*qlddd1*S2-6*qldd2*ql4d1*S2-...
3*qldd2*qlddd1*qldd2*C2-4*qld2*ql5d1*S2+ql4d2*qldd1^2*C2+...
8*qlddd2*qldd1*qldd1*C2-4*qlddd2*qldd1^2*qld2*S2+...
12*qldd2*qldd1^2*C2+12*qldd2*qldd1*qlddd1*C2-3*qldd2^2*qldd1^2*S2-...
12*qldd2*qldd1*qld2*qldd1*S2-12*qld2*qldd2*qldd1*qldd1*S2-...
6*qld2^2*qldd1^2*S2-12*qld2^2*qldd1*qlddd1*S2-...
8*qld2^3*qldd1*qldd1*C2+qldd2^4*qldd1^2*S2+18*qld2*qldd1*qlddd1*C2-...
6*qld2^2*qldd1^2*S2+6*qld2*C2*(qldd1*ql4d1+qldd1*qlddd1)+...
6*qlddd1^2*S2+8*qldd1*ql4d1*S2+2*qldd1*ql5d1*S2+...
2*qld2*qldd1*ql4d1*C2-qldd2*ql4d1*S2-qldd2^2*ql4d1*C2+ql6d1*C2)+...
a*(ql6d1+ql6d2)-c*gy*(p4d*S12+4*p3d*pd*C12+3*pdd^2*C12-...
6*pdd*pd^2*S12-pd^4*C12)+d*qm6d3+e*qm6d4+Dl2*ql5d2));
```

% Position du moteur 1

```
qm1=N1*(ql1+inv(K1))*((g+c*C2)*qldd1+(a+b*C2)*qldd2-...
(h+i)*qldd1*qldd2-b*qldd2^2+gy*k*C1+gy*c*C12+d*(qmdd2+qmdd3)+...
e*qmdd4+Dl1*ql1));
```

% Vitesse du moteur 1.

```
qmd1=N1*(ql1+inv(K1))*(c*(-qldd2*qldd1*S2+qlddd1*C2)+g*qlddd1+...
b*(-qldd2*qldd2*S2+qlddd2*C2-2*qldd2*qldd2)+a*qlddd2-...
(h+i)*(qldd1*qldd2+qldd1*qldd2)-gy*k*qldd1*S1-...
gy*c*pd*S12+d*(qmddd2+qmddd3)+e*qmddd4+Dl1*qldd1));
```

% Accélération du moteur 2.

```
qmdd1=N1*(qldd1+inv(K1))*(c*(-qldd2*qldd1*S2-2*qldd2*qlddd1*S2+ql4d1*C2-...
qldd2^2*qldd1*C2)+g*ql4d1+b*(-qldd2^2*S2-2*qldd2*qlddd2*S2-...
qldd2^2*qldd2*C2+ql4d2*C2)+a*ql4d2-...
(h+i)*(qlddd1*qldd2+2*qldd1*qldd2+qldd1*qlddd2)-2*b*(qldd2^2+...
qldd2*qlddd2)-gy*k*(qldd1*S1+qldd1^2*C1)-gy*c*(pdd*S12+...
```

```

pd^2*C12)+d*(ql4d2+qm4d3)+e*qm4d4+Dl1*qlddd1));

% L'état complet

if strcmp(eval('choix'),'complet') ;

    qm2=qm2+inv(K2)*N2*(kpl2*(qlr(2)-ql2)+kvl2*(qldr(2)-qld2));
    qmd2=qmd2+inv(K2)*N2*(kpl2*(qldr(2)-qld2));
    qm1=qm1+inv(K1)*N1*(kpl1*(qlr(1)-ql1)+kvl1*(qldr(1)-qld1));
    qmd1=qmd1+inv(K1)*N1*(kpl1*(qldr(1)-qld1));
end;

qc=inv(Q)*[ql1;ql2;qm1;qm2;qm3;qm4];

qdc=inv(Q)*[qld1;qld2;qmd1;qmd2;qmd3;qmd4];

qddc=inv(Q)*[qldd1;qldd2;qmdd1;qmdd2;qmdd3;qmdd4];

qmc=qc(3:6);
qmdc=qdc(3:6);

Mass=mass(qc);
Cor=corio(qc,qdc);
Grav=gravi(qc);

Cpm=Kpm*(qmr-qmc);           % Correcteur proportionnel du moteur
Cvm=Kvm*(qmdr-qmdc);        % Correcteur dérivateur du moteur

Cp=[0;0;Cpm];
Cv=[0;0;Cvm];

U2=Mass*qddc+Cor*qdc+D*qdc+Grav+Ke*qc-Cp-Cv;

```

C.4 Programme mass.m

```

% mass.m : calcule la matrice de masses-inerties
% function M=mass(q)
%
```

```

%      q      : Vecteur de la position du membre
%      qdot   : Vecteur de la vitesse du membre
%      qddot  : Vecteur de l'accélération du membre
%      M      : La matrice de masses-inerties

function M=mass(q)
    global mc M3 M4 Q;

    c2 = cos(q(2));
    a=0.25375*mc;
    b=2.8438;
    c=3.75e-3;
    m12=b+a+2.96375*c2+0.25*mc*c2;

M=[(6.719+5.9275*c2+0.5*mc*c2+0.50375*mc) m12 0 2e-4 2e-4 c*mc*M4+2e-4
    m12 (a+b) 0 0 2e-4 c*mc*M4+2e-4
    0 0 2e-4 0 0 0
    2e-4 0 0 2e-4 0 0
    2e-4 2e-4 0 0 (2e-4+(mc+10)*M3^2) 0
    c*mc*M4+2e-4 c*mc*M4+2e-4 0 0 0 (c*mc*M4^2+2e-
4)];

% La matrice normalisée du côté du membre
M=Q*M*Q;

```

C.5 Programme corio.m

```

% corio.m : Calcule la matrice de Coriolis et centrifuge
%
% function Corio=corio(q,qdot)
%
%      q      : La position du membre
%      qdot   : La vitesse du membre
%      Q      : La matrice de la normalisation

function Corio=corio(q,qdot);
    global mc Q;

    s2=sin(q(2));
    a=2.96375+0.25*mc;

```

```

b= -0.5*mc-5.9275;

part1=[ b*qdot(2)  -a*qdot(2)  0  0  0  0
        a*qdot(1)   0          0  0  0  0
        zeros(4,6)                                ];

Corio=s2*part1;

% La matrice Corio normalisée du côté du membre
Corio=Q*Corio*Q;

```

C.6 Programme gravi.m

```

% Gravi.m : Calcule le vecteur de la gravité
% function Gravi=gravi(q) ;
%   q   : La position du membre
%   Q   : La matrice de la normalisation

function Gravi=gravi(q);

    global mc gy gz M3 Q;

    c1=cos(q(1));
    c12=cos(q(1)+q(2));
    a=7.1825+0.5*mc;
    b=5.9275+0.5*mc;

    Gravi= [gy*(a*c1+b*c12)
            gy*b*c12
            0
            0
            (10+mc)*gz*M3
            0          ];

% Le vecteur normalisé.
Gravi=Q*Gravi;

```

ANNEXE D

RÉSULTATS DE SIMULATION

Note : Dans cette annexe, toutes les positions sont en rad, les vitesses sont en rad/s et le temps est en secondes.

D.1 Retour d'état partiel (état du moteur)

Les résultats de cette partie sont effectués pour les conditions suivantes: une condition initiale des positions des moteurs et des membres de 0.02 rad; les frottements dissipatifs des moteurs et membres sont $\mathbf{D}_l = \text{diag}\{0.01, 0.01\}$ et $\mathbf{D}_m = \text{diag}\{0.0001, 0.0001, 0.0001, 0.0001\}$ (grandeurs réelles) respectivement. Les gains de retour d'état des moteurs sont choisis $\mathbf{K}_{pm} = \text{diag}\{1.5, 1.5, 1.5, 1.5\}$ et $\mathbf{K}_{vm} = \text{diag}\{0.25, 0.2, 0.17, 0.1\}$ (grandeurs réelles).

D.1.1 Entrée échelon

L'entrée échelon a été choisie avec un maximum de 0.1 rad. Les figures suivantes sont les résultats de la simulation de cette partie.

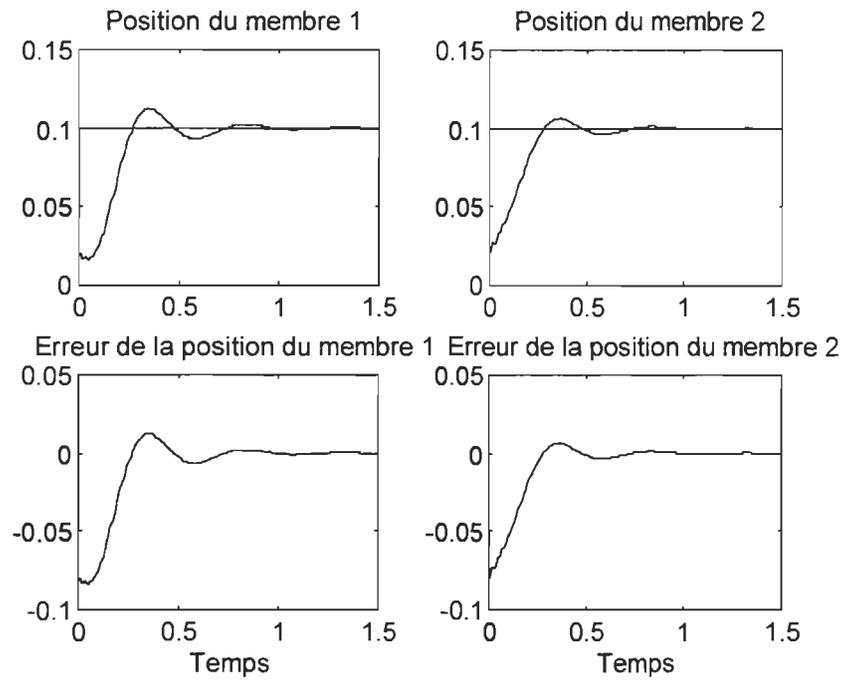


Figure D.1 Position des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

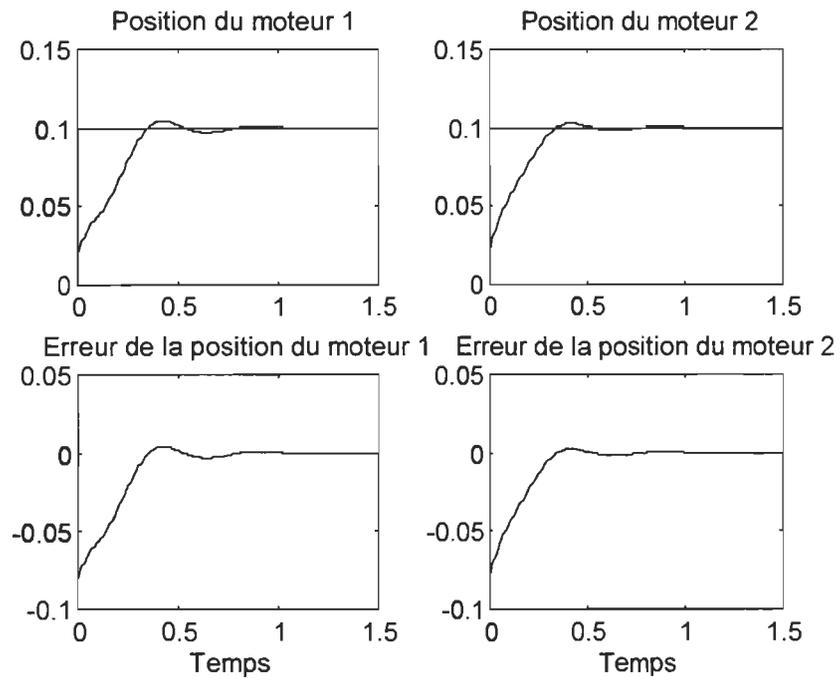


Figure D.2 Position des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

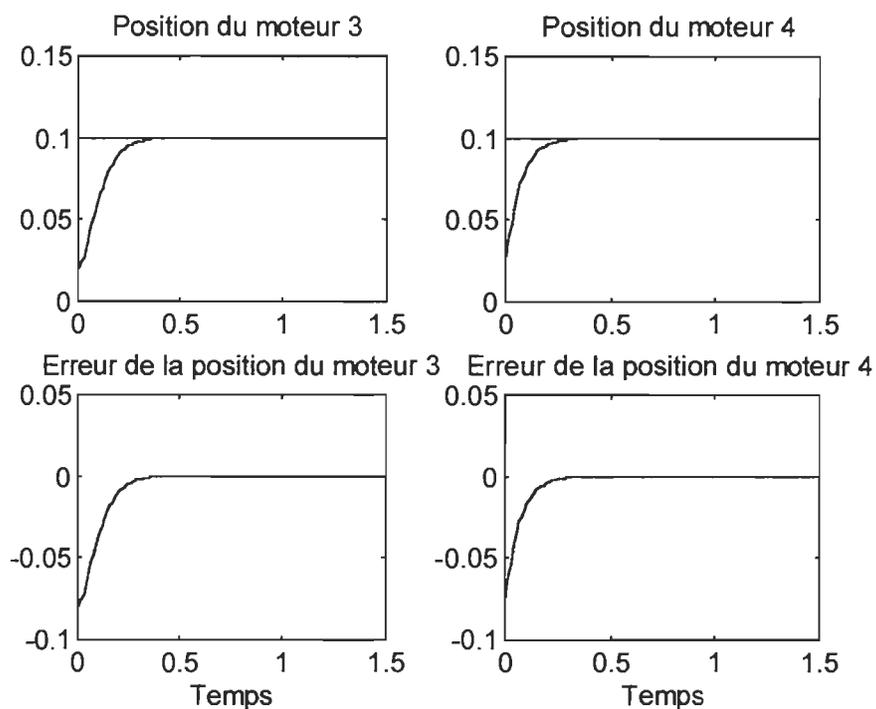


Figure D.3 Position des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes.

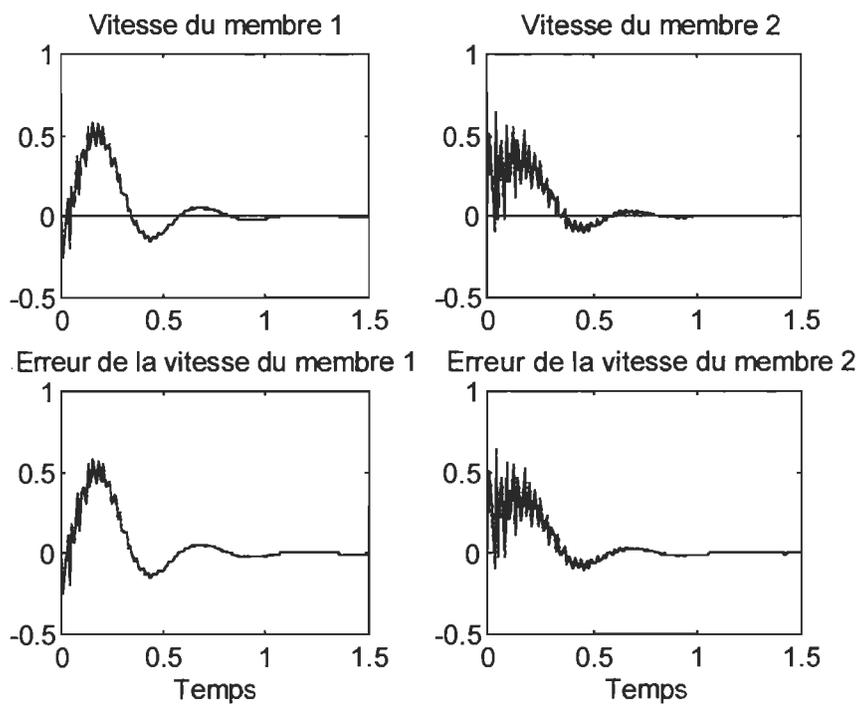


Figure D.4 Vitesse des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

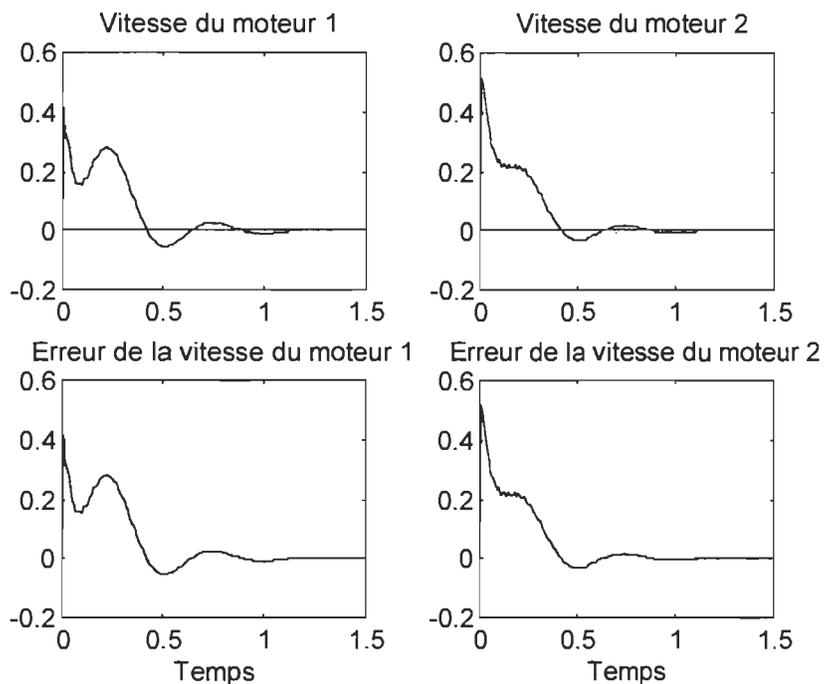


Figure D.5 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

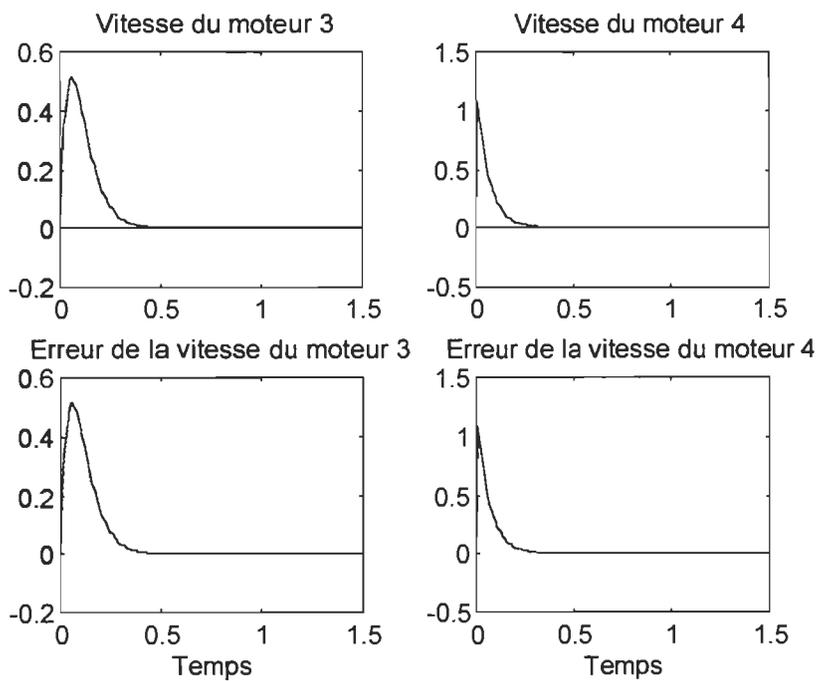


Figure D.6 Vitesse des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes.

D.1.2 Entrée de type cosinus

Les figures suivantes sont des résultats de la simulation d'une entrée sous la forme $0.0125*(1-\cos 5t)^3$.

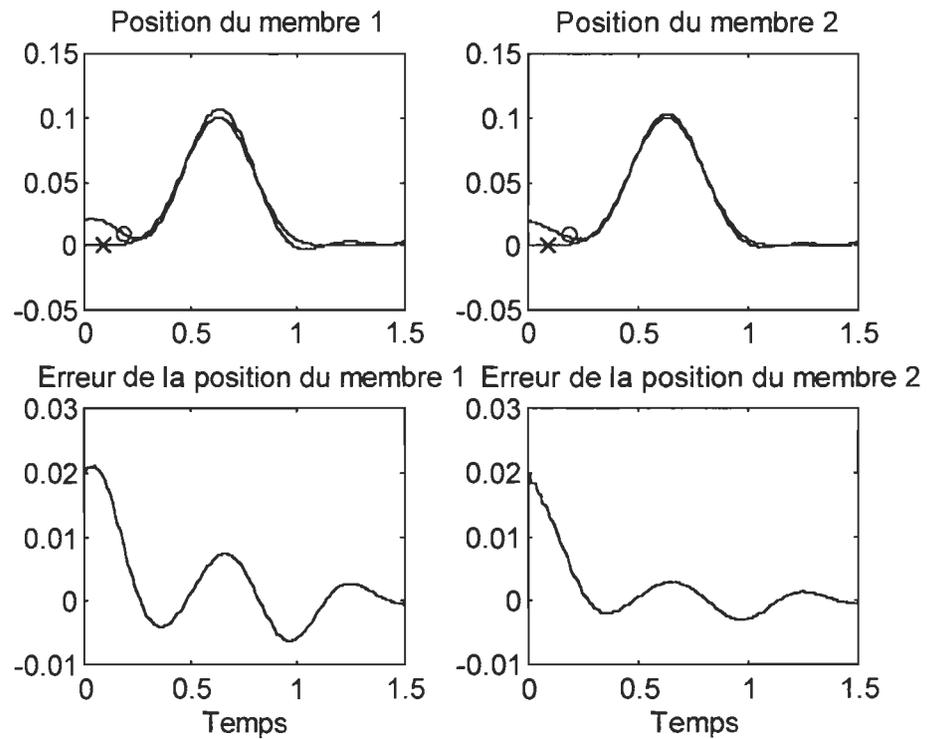


Figure D.7 Position des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

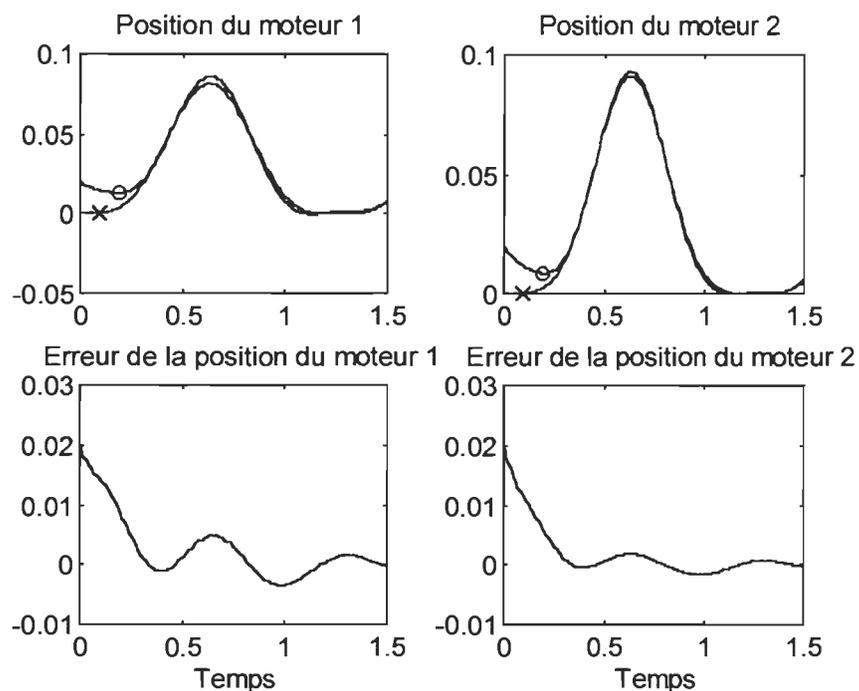


Figure D.8 Position des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

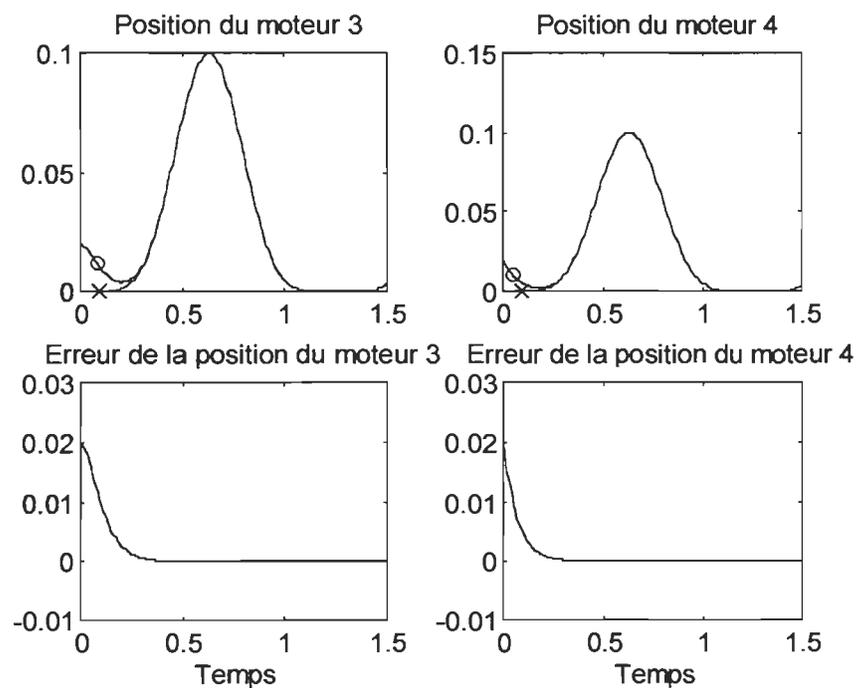


Figure D.9 Position des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

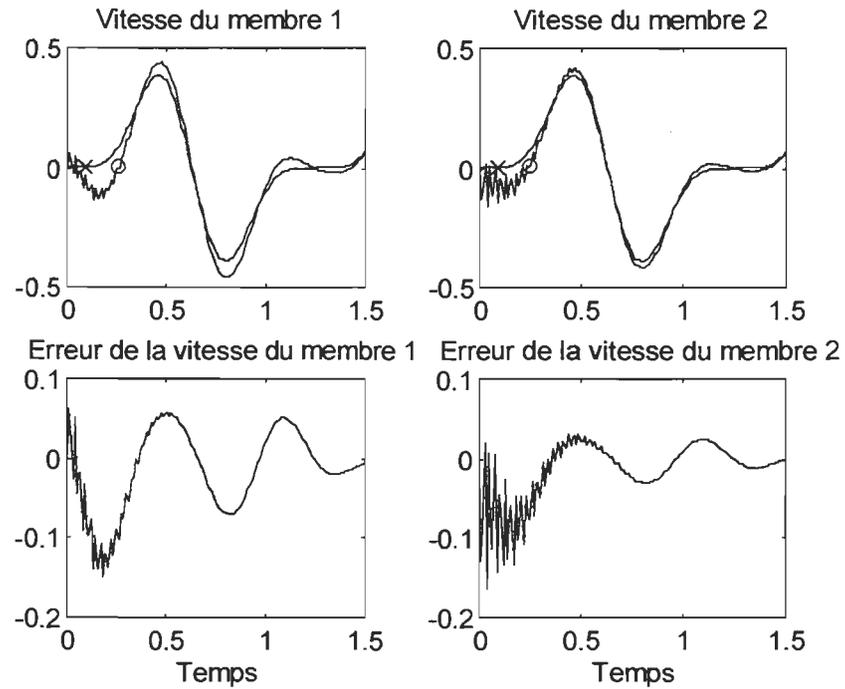


Figure D.10 Vitesse des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

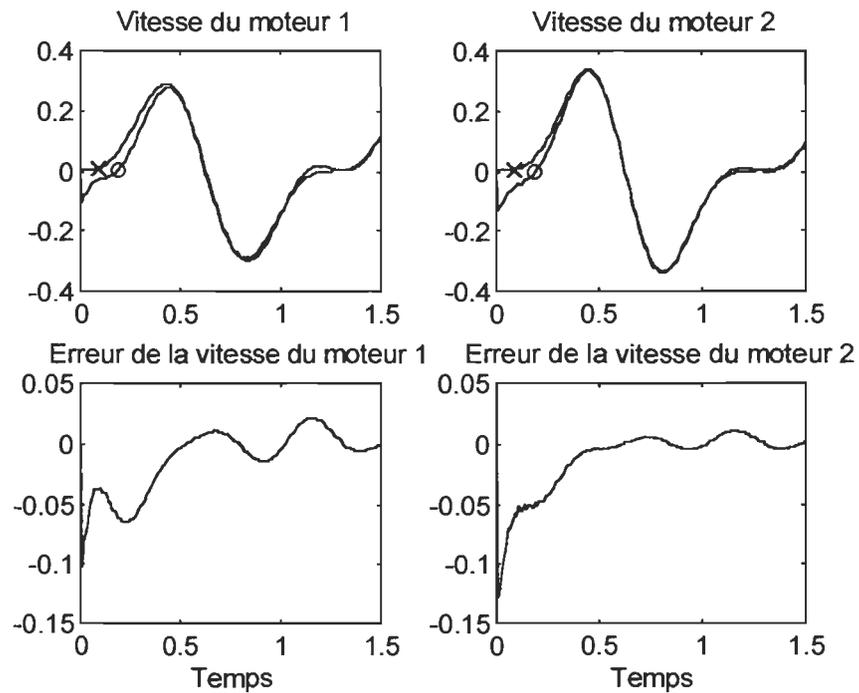


Figure D.11 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

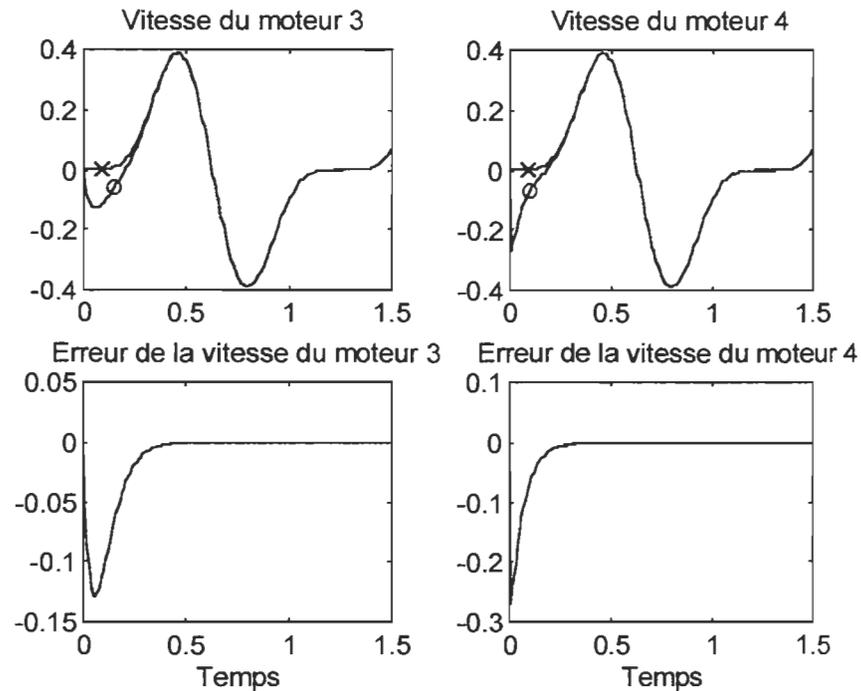


Figure D.12 Vitesse des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

D.2 Augmentation de la pulsation de l'état des moteurs

Afin d'accélérer la réponse dynamique du système, nous augmentons la bande passante du moteur. Alors nous avons choisi les gains de correcteurs

$\mathbf{K}'_{pm} = \text{diag}\{5, 5, 5, 5\}$ et $\mathbf{K}'_{vm} = \text{diag}\{0.7, 0.65, 0.5, 0.2\}$ (grandeurs réelles).

D.2.1 Entrée échelon

Les figures illustrées ci-après sont les résultats de cette étape.

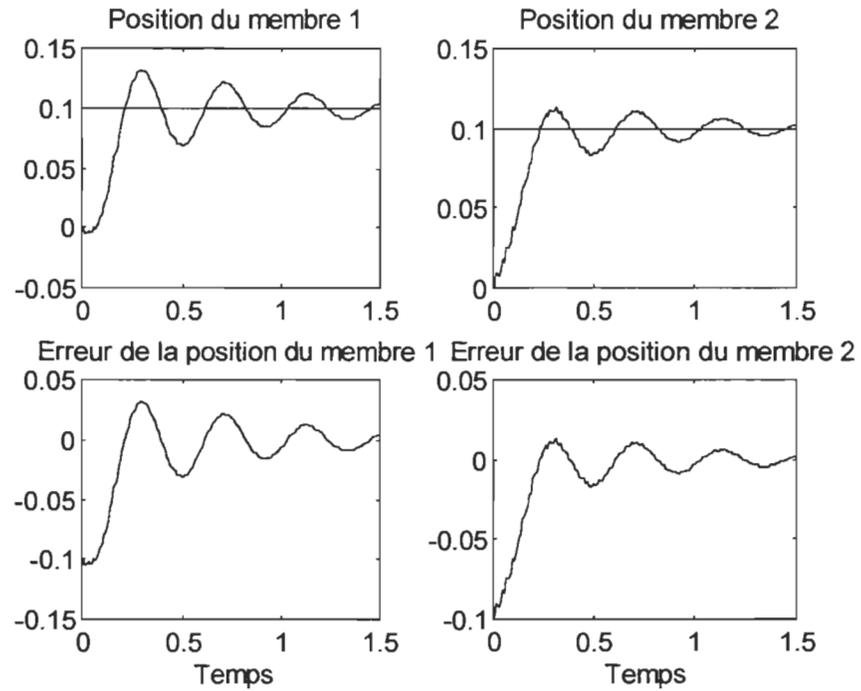


Figure D.13 Position des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

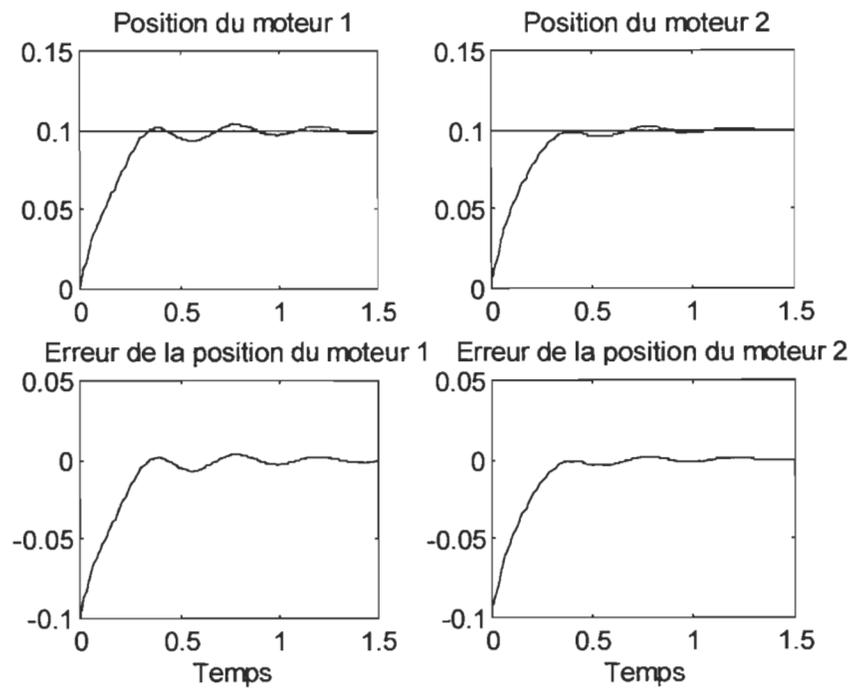


Figure D.14 Position des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

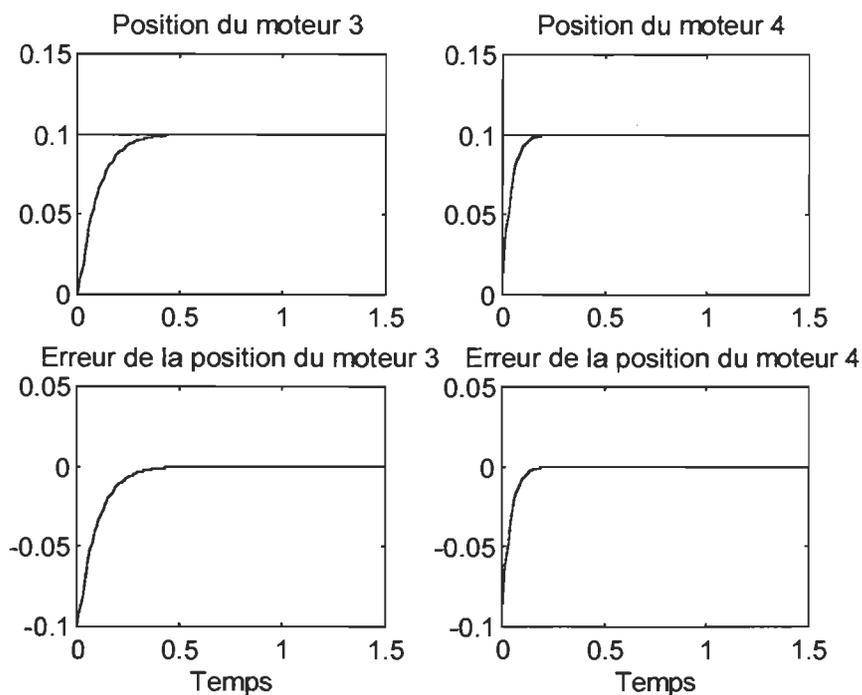


Figure D.15 Position des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes.

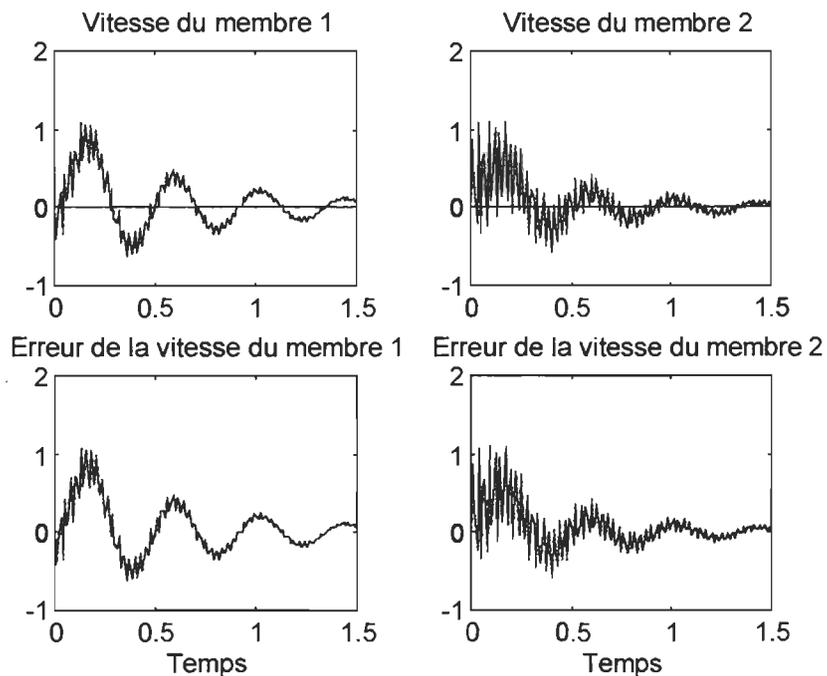


Figure D.16 Vitesse des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

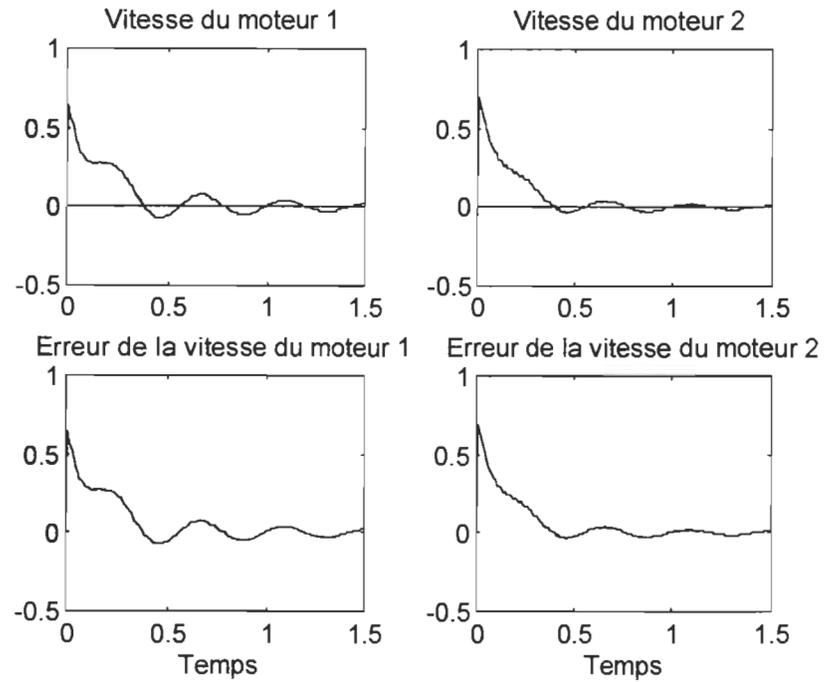


Figure D.17 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes.

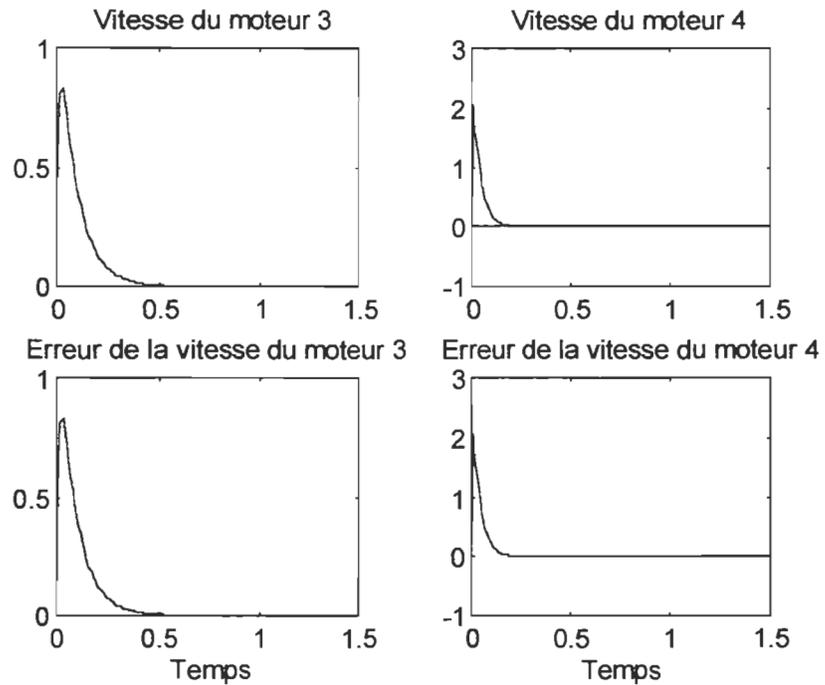


Figure D.18 Vitesse des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes.

D.2.2 Entrée de type cosinus

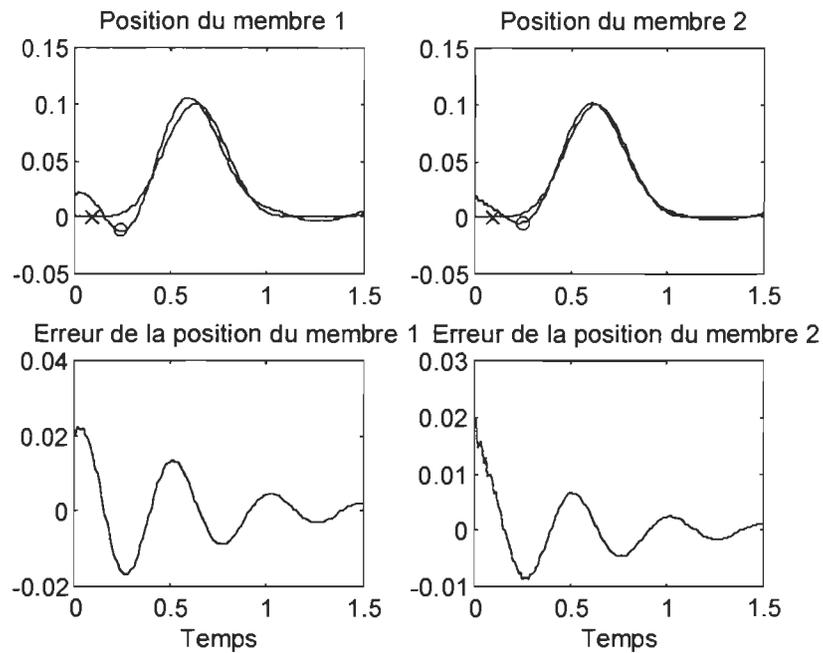


Figure D.19 Position des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

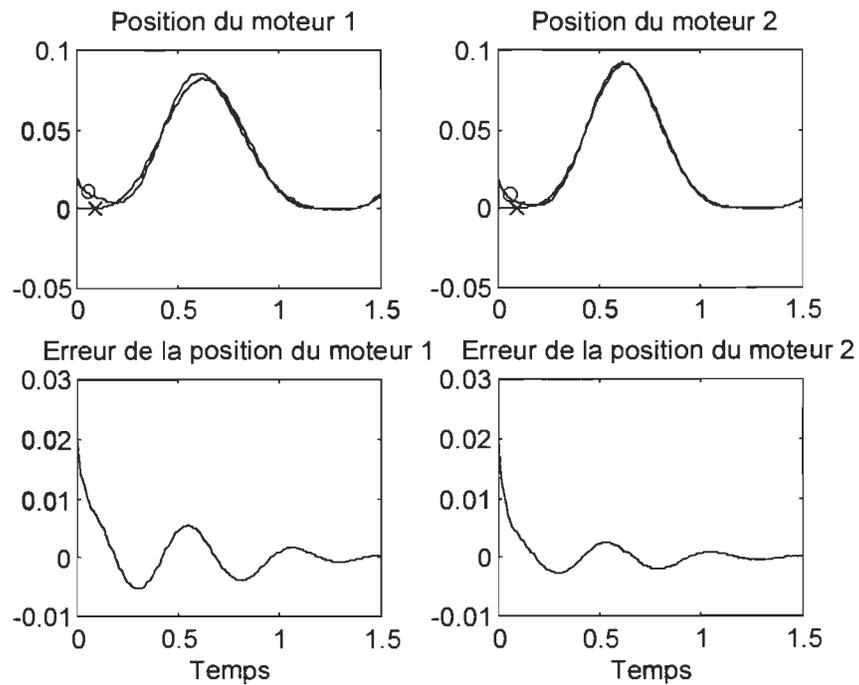


Figure D.20 Position des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

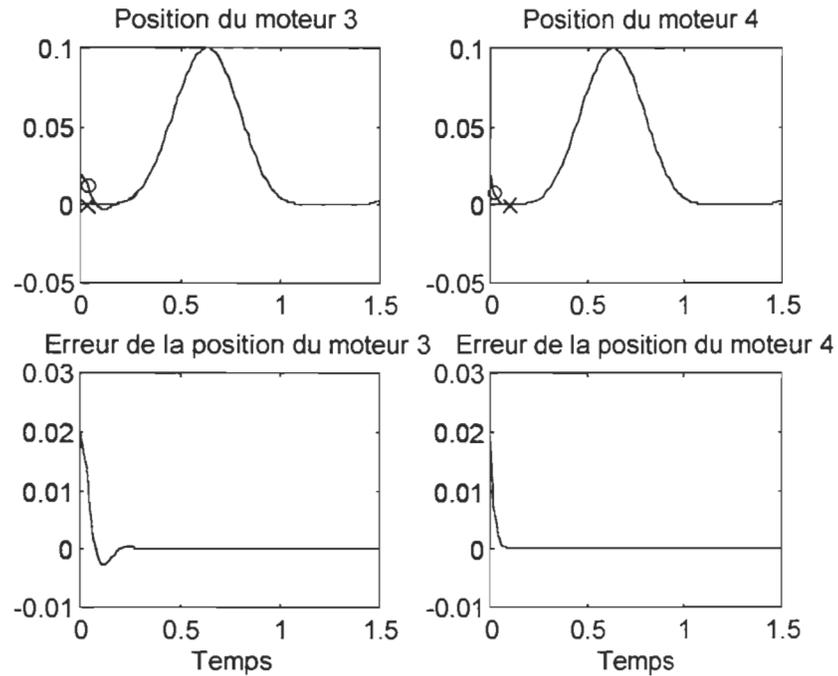


Figure D.21 Position des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

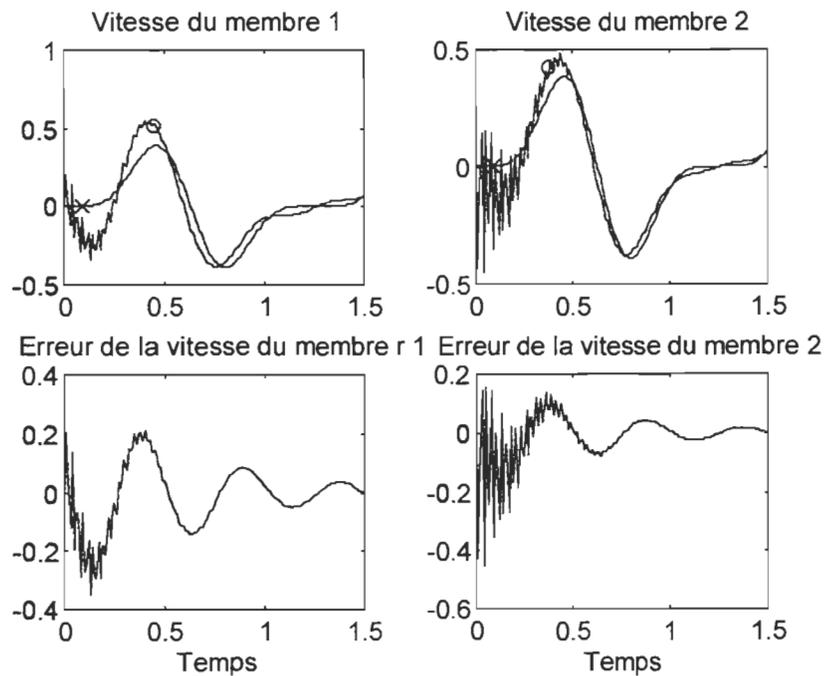


Figure D.22 Vitesse des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

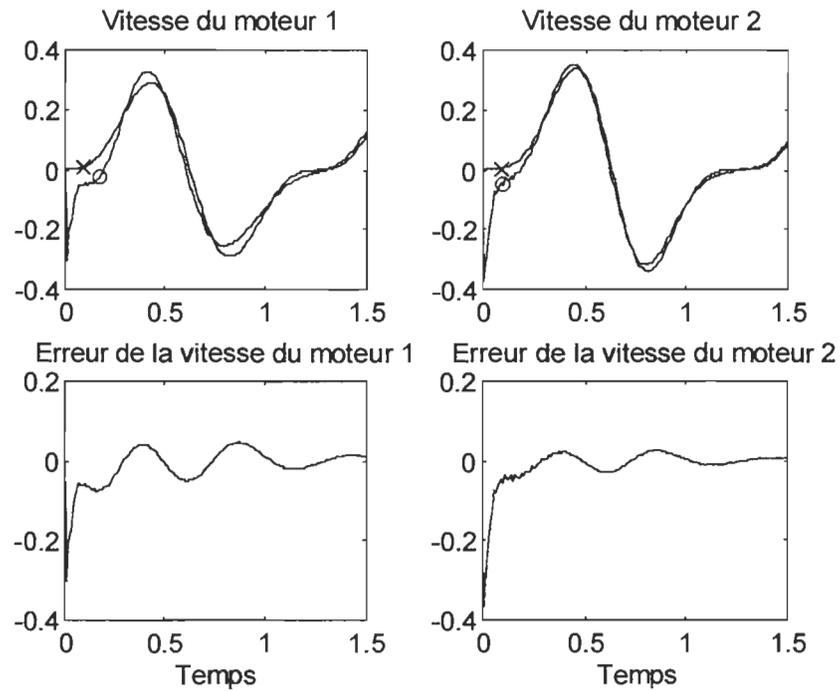


Figure D.23 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

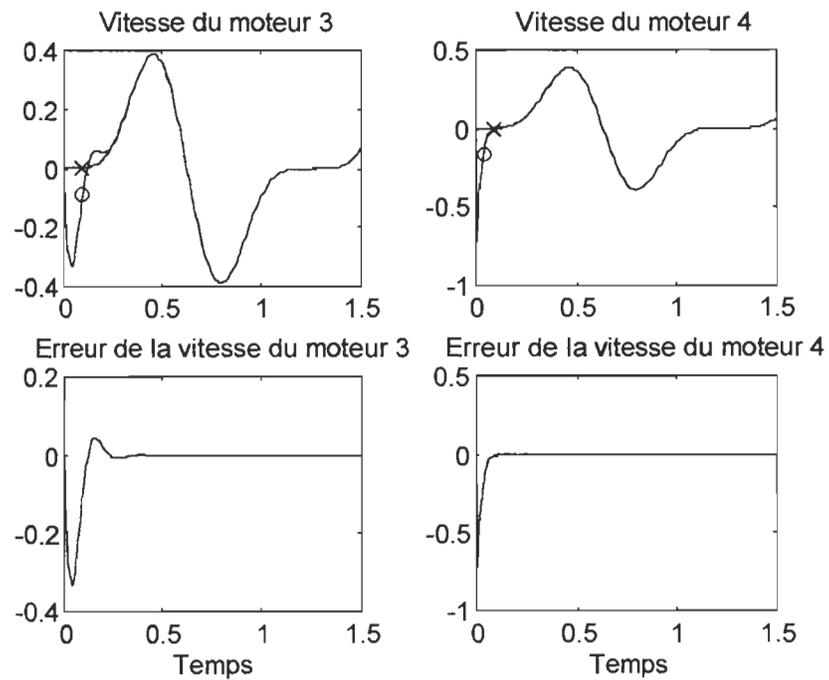


Figure D.24 Vitesse des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

D.3 Retour d'état complet (état des moteurs et des membres)

Choisissons les gains des deux correcteurs, retour de la position et celui de la vitesse, des moteurs respectivement de $\mathbf{K}_{pm}''' = \text{diag}\{5, 5, 5, 5\}$ et $\mathbf{K}_{vm}''' = \text{diag}\{1.2, 0.5, 0.4, 0.2\}$ (grandeurs réelles). Les gains des correcteurs des membres sont choisis tels que $\mathbf{K}_{pl} = \text{diag}\{3200, 800\}$ et $\mathbf{K}_{vl} = \text{diag}\{670, 70\}$.

D.3.1 Entrée échelon

Les figures suivantes illustrent les résultats de la simulation par l'état complet avec une consigne d'échelon.

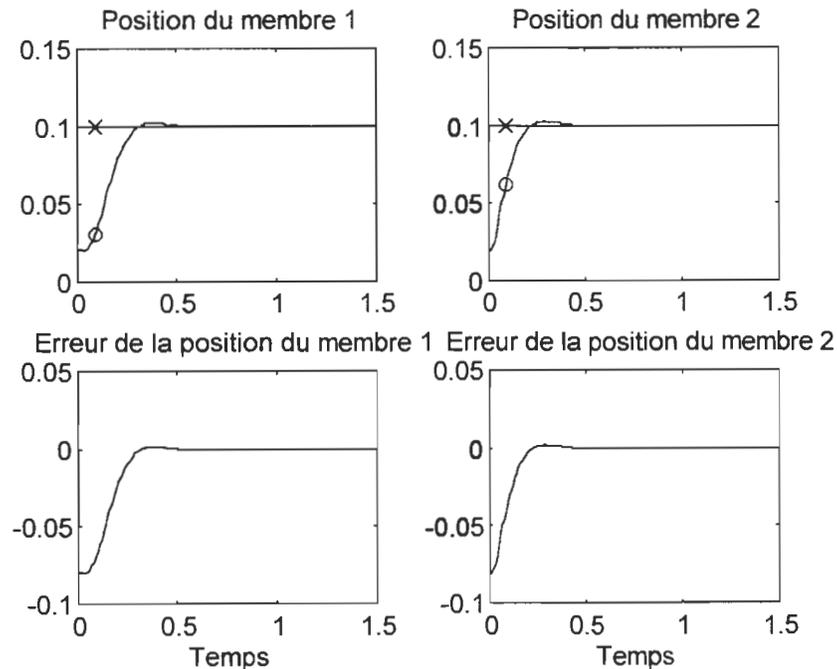


Figure D.25 Position des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

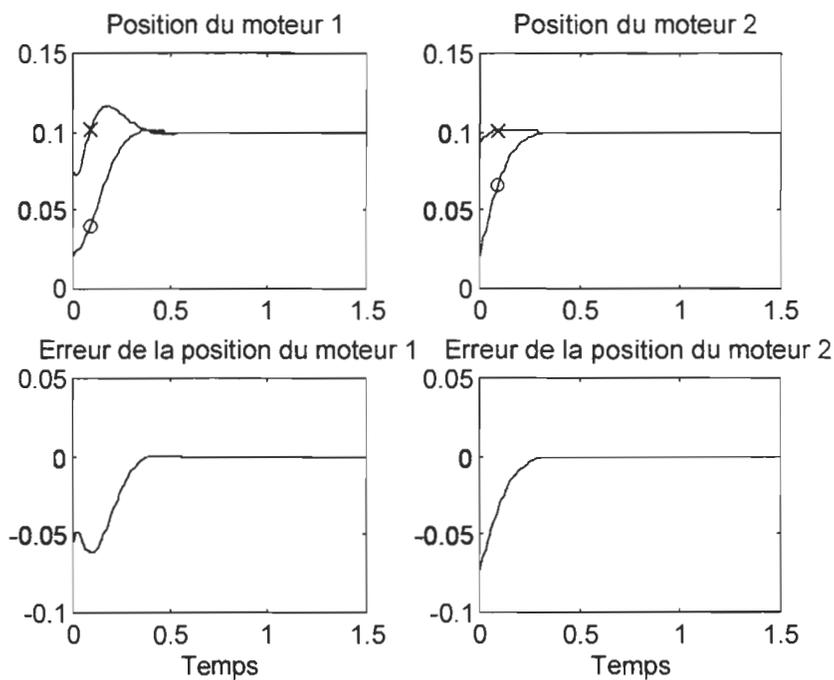


Figure D.26 Position des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

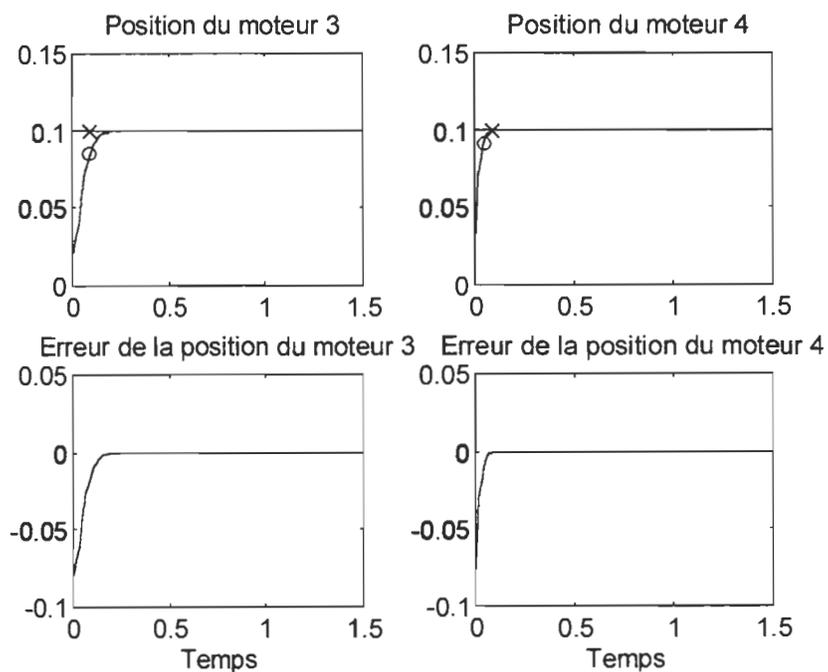


Figure D.27 Position des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes.

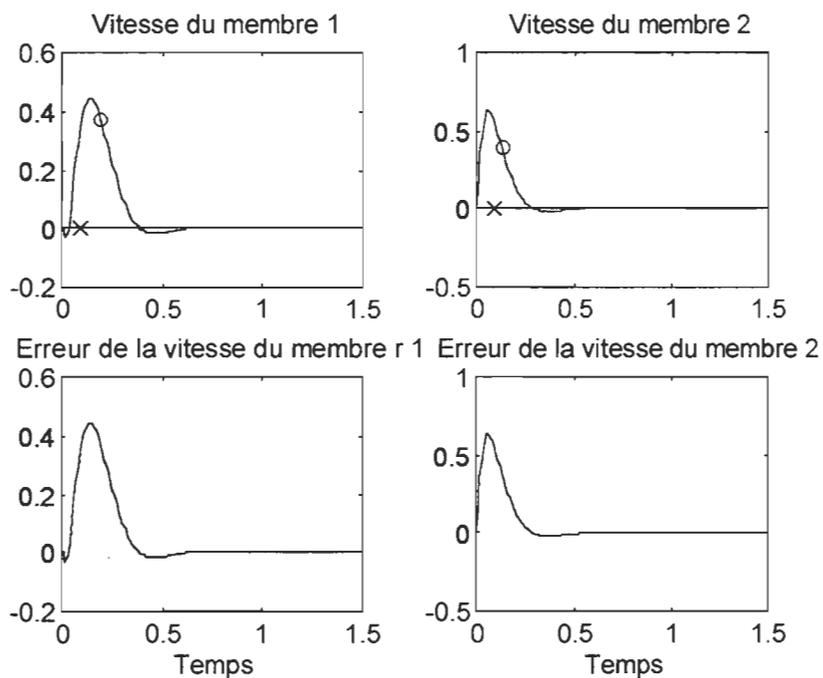


Figure D.28 Vitesse des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

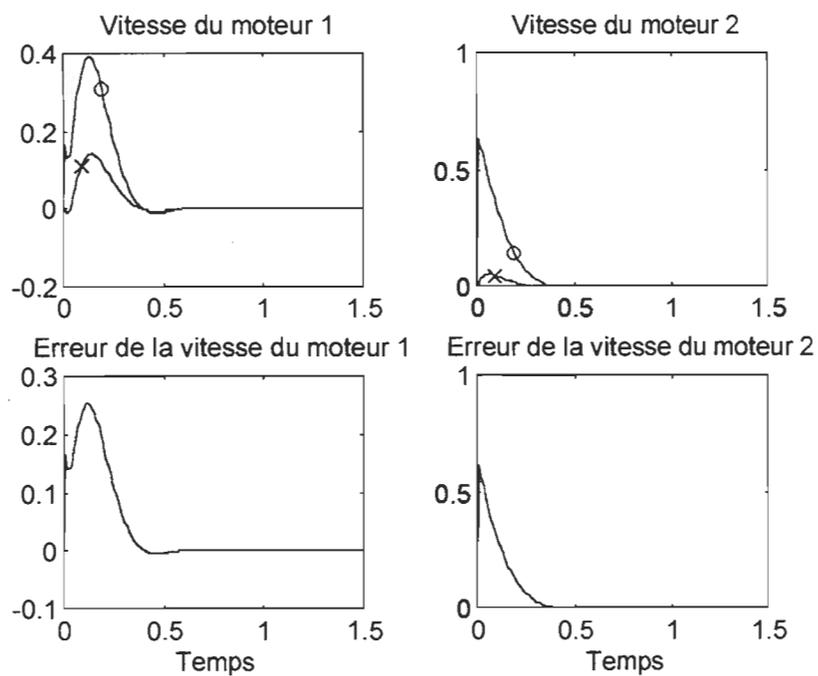


Figure D.29 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

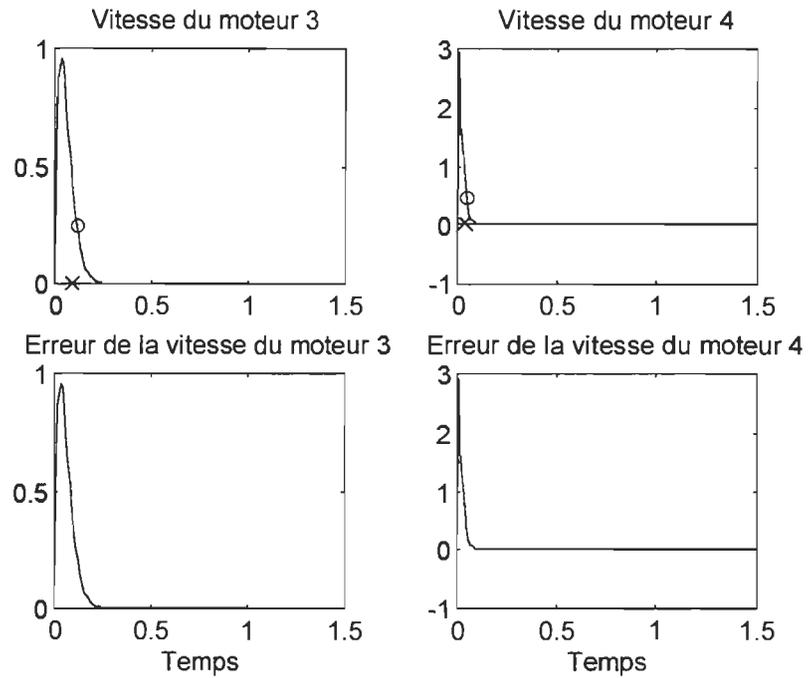


Figure D.30 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

D.3.2 Entrée du type cosinus

Nous montrons les résultats de la simulation par l'état complet avec une entrée sous la forme cosinus.

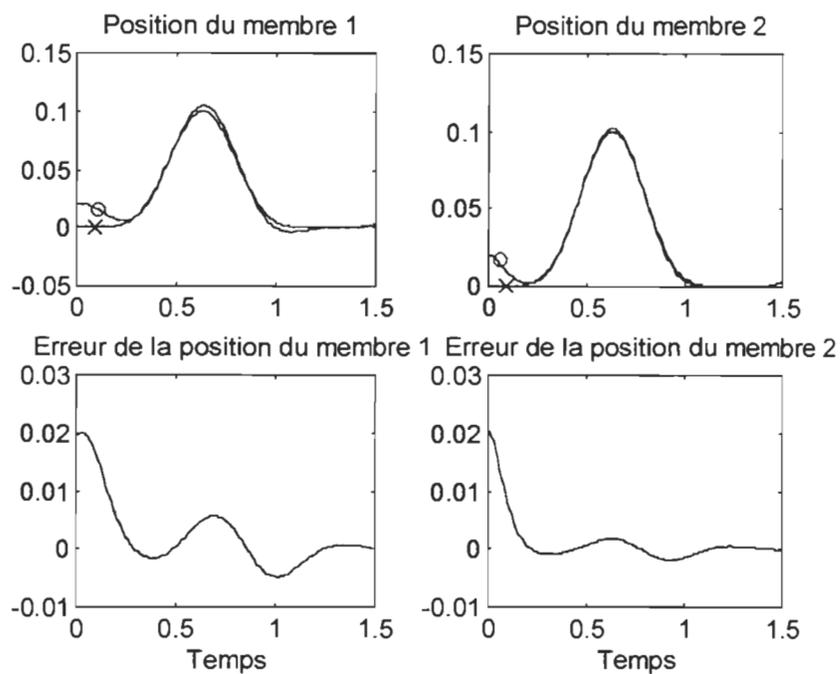


Figure D.31 Position des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

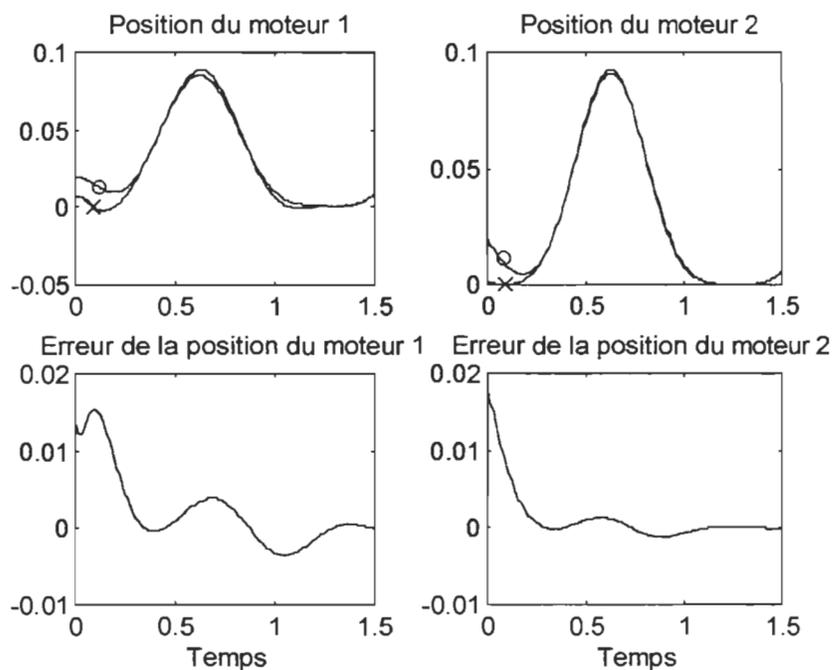


Figure D.32 Position des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

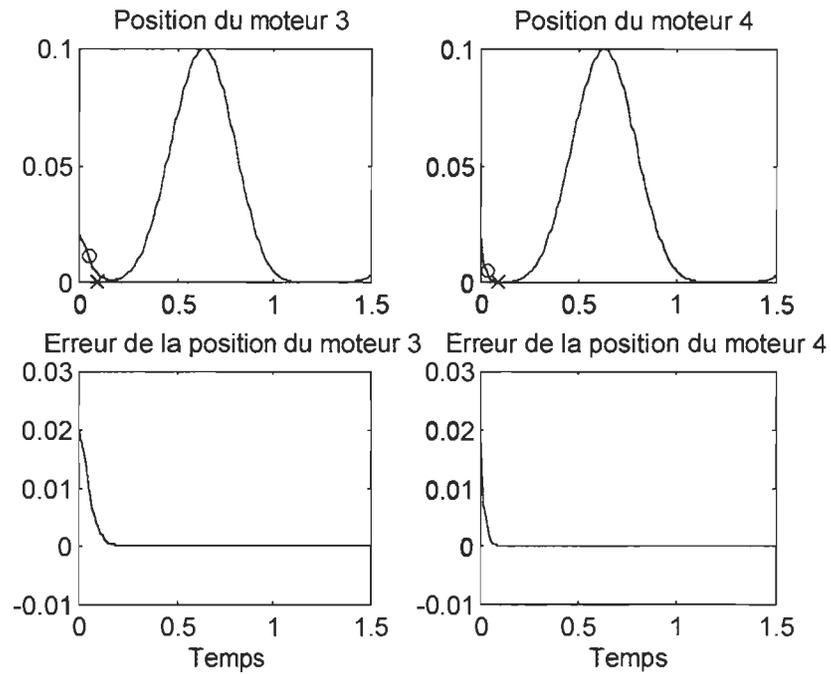


Figure D.33 Position des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondantes ('o': obtenue; 'x': désirée).

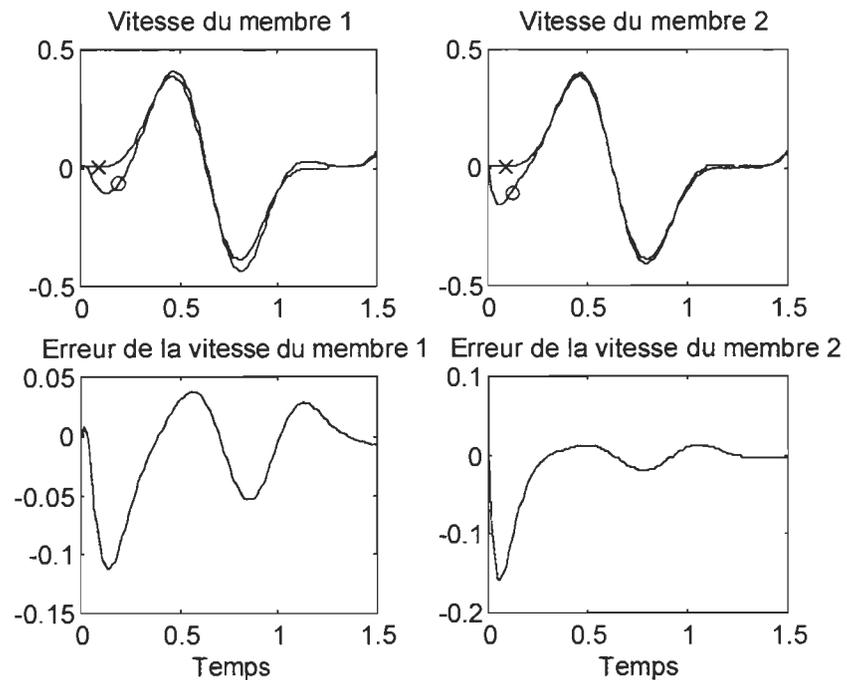


Figure D.34 Vitesse des membres 1 et 2 avec les erreurs correspondant ('o': obtenue; 'x': désirée).

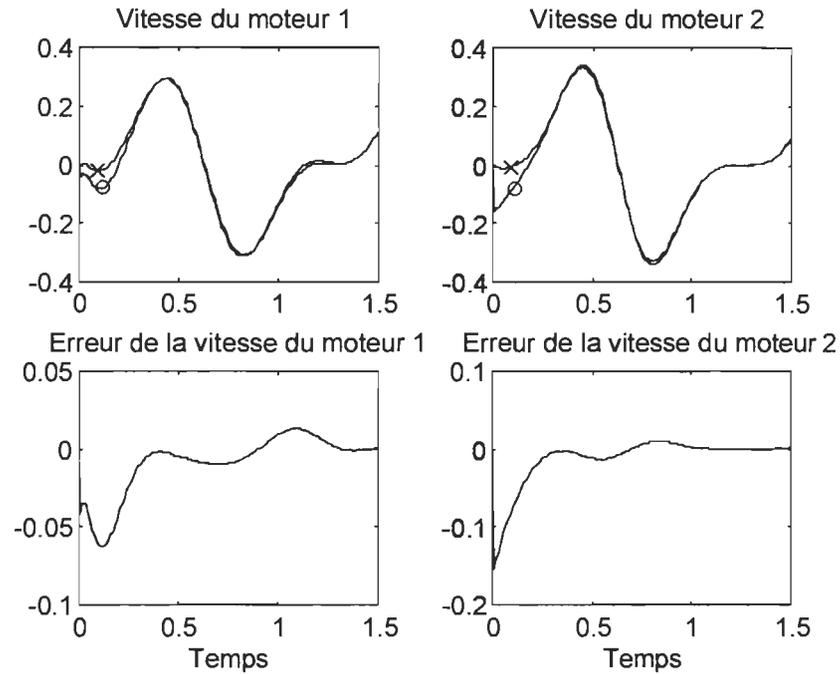


Figure D.35 Vitesse des moteurs 1 et 2 avec les erreurs correspondant ('o': obtenue; 'x': désirée).

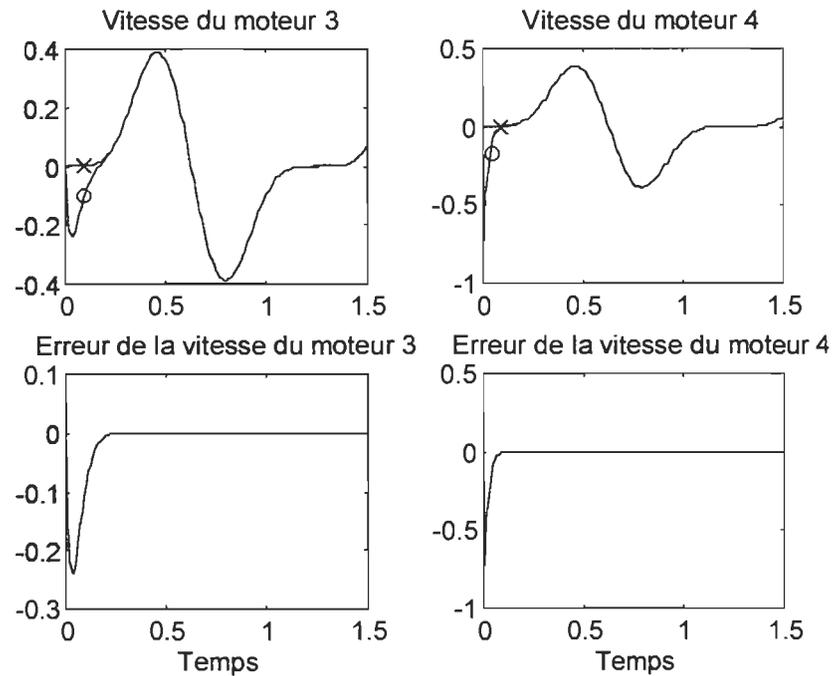


Figure D.36 Vitesse des moteurs 3 et 4 avec les erreurs correspondant ('o': obtenue; 'x': désirée).