

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE POUR L'OBTENTION D'UN
DIPLOME DE MAÎTRE ES SCIENCE APPLIQUÉES EN ÉLECTRONIQUE
INDUSTRIELLE

PAR

NICOLAS LÉCHEVIN

RECONSTITUTION D'ÉTAT D'UN MANIPULATEUR AVEC
ARTICULATIONS FLEXIBLES

OCTOBRE 1996

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

RÉSUMÉ

Certains types de manipulateurs présentent de la flexibilité au niveau des articulations, ce qui peut affecter les performances dynamiques et statiques des lois de commande conçues pour de tels robots. La mesure de l'état complet est souvent inadéquate. Ce mémoire présente une étude comparative d'observateurs d'état non linéaires. Pour ce faire, un manipulateur à chaîne cinématique fermée et à articulations rotoïdes pouvant présenter plusieurs configurations est modélisé suivant les formalismes de Newton-Euler et Lagrange-Euler pour fin de vérification. Des changements de variables et des propriétés utiles pour la conception de régulateurs et d'observateurs sont dégagées. Trois observateurs classiques, soit le filtre de Kalman étendu, l'observateur basé sur la linéarisation de l'erreur dynamique et un observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman sont étudiés et simulés. Un observateur adaptatif conçu pour les robots rigides est appliqué sous certaines conditions. Deux observateurs robustes sont comparés: l'un basé sur l'approche de passivité, l'autre a été conçu à partir de la théorie des systèmes à structure variable. Toutes les simulations ont été réalisées à l'aide

de Matlab®. Les essais sont effectués avec conditions initiales non nulles pour évaluer la phase de convergence de l'observateur, avec une charge variable pour évaluer sa robustesse et à l'aide d'un correcteur proportionnel-dérivatif basé sur les grandeurs observées pour évaluer ses performances lorsqu'il y a des perturbations externes.

Une comparaison finale est dressée selon plusieurs critères: qualité de la réponse transitoire, type de stabilité, environnement déterministe ou stochastique, possibilités de conception d'un ensemble observateur-correcteur et possibilité de mise en oeuvre.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens à témoigner ma profonde reconnaissance à mon directeur de recherche, le professeur Pierre Sicard. Sa patience, sa disponibilité et ses connaissances très pointues dans le domaine de la commande m'ont permis de mener à bien ce mémoire.

Je voudrais remercier mes amis à Trois-Rivières et spécialement Javad Sadr, avec qui les discussions furent nombreuses et agréables.

Mes remerciements vont enfin à tous les membres de ma famille et tout spécialement à mes parents. Je ne saurais oublier ma douce coquinette, Nadine Bouchard, dont la compagnie est inestimable.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	i
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	viii
LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS	ix
CHAPITRE 1- INTRODUCTION	1
1.1 Problématique et objectifs	1
1.2 Bibliographie	5
1.2.1 Observateurs non linéaires	6
1.2 Observateurs appliqués à la robotique	12
1.3 Organisation du mémoire	14
CHAPITRE 2 - RAPPELS THÉORIQUES	16
2.1 Rappels mathématiques	16
2.2 Détermination de la stabilité de systèmes selon la méthode directe de Lyapunov	18
2.3 Systèmes observables	22
2.4 Structure générale d'un observateur	26
CHAPITRE 3 - MODÉLISATION DU MANIPULATEUR D'ÉTUDE	28
Introduction	28
3.1 Description du robot à l'étude	28
3.2 Définition des paramètres du manipulateur	31
3.2.1 Paramètres des membres	31
3.2.2 Paramètres des actionneurs	32
3.2.3 Paramètres des éléments de transmission	33
3.3 Modélisation par la méthode de Newton-Euler	34
3.4 Modélisation par la méthode de Lagrange-Euler	44
3.5 Étude des propriétés du modèle	47
CHAPITRE 4 - OBSERVATEURS CLASSIQUES	53

Introduction et conditions de simulation	53
4.1 Filtre de Kalman Étendu	55
4.1.1 Linéarisation du système	55
4.1.2 Observateurs: expression et convergence	60
4.1.3 Résultats de simulation	62
4.2 Observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman	67
4.2.1 Définition et propriétés	67
4.2.2 Résultats de simulation	69
4.3 Observateur basé sur la linéarisation de l'erreur dynamique	73
4.3.1 Définition et propriétés	73
4.3.2 Résultats de simulation	78
4.4 Conclusion	82
CHAPITRE 5 - OBSERVATEURS ROBUSTES ET ADAPTATIF	84
Introduction	84
5.1 Observateur basé sur la passivité	85
5.1.1 Définition et stabilité de l'observateur	85
5.1.2 Résultats de simulation	87
5.2 Observateur à structure variable	92
5.2.1 Forme générale de l'observateur	92
5.2.2 Application directe de l'algorithme au manipulateur avec articulations flexibles	94
5.2.3 Système et observateur proposés	97
5.2.4 Étude de l'équation de Lyapunov et de l'équation de couplage	109
5.2.5 Résultats de simulation	121
5.3 Observateur adaptatif	127
5.3.1 Définition et stabilité de l'observateur	127
5.3.2 Résultats de simulation	137
5.4 Conclusion	139
CHAPITRE 6 - CONCLUSION	142
RÉFÉRENCES	146
ANNEXE A - Programme principal	152
ANNEXE B - Filtre de Kalman étendu - "Kal2.m"	157

ANNEXE C - Observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman "Kalnlin2.m"	164
ANNEXE D - Observateur basé sur la linéarisation exacte "Tomei88.m"	168
ANNEXE E - Observateur basé sur la passivité - "Tomei.m"	172
ANNEXE F - Observateur à structure variable - "Ssvflj.m"	175
ANNEXE G - Observateur adaptatif- "Adaflj.m"	181

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1: Paramètres géométriques et inertiels du manipulateur	31
Tableau 4.1: Étude comparative: observateurs "classiques"	83
Tableau 5.1: Étude comparative: observateurs robustes et adaptatif	141

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1: Commande d'un manipulateur avec observateur	27
Figure 3.1: Structure mécanique et définition des variables	30
Figure 3.2: Description des actionneurs	33
Figure 3.3: Déplacement des poulies r_1'' et r_2	40
Figure 4.1: Filtre de Kalman Étendu (positions)	63-64
Figure 4.2: Filtre de Kalman Étendu (vitesses)	65-66
Figure 4.3: Observateur non linéaire basé sur Kalman (positions)	69-70
Figure 4.4: Observateur non linéaire basé sur Kalman (vitesses)	71-72
Figure 4.5: Observateur basé sur la linéarisation exacte (positions)	78-79
Figure 4.6: Observateur basé sur la linéarisation exacte (vitesses)	80-81
Figure 5.1: Observateur basé sur la passivité (position)	89-90
Figure 5.2: Observateur basé sur la passivité (vitesse)	91-92
Figure 5.3: Observateur à structure variable (positions)	124-125
Figure 5.4: Observateur à structure variable (vitesses)	126-127
Figure 5.5: Observateur adaptatif (vitesses)	138-139

LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

$(\bar{\cdot})$: grandeur avant la mise à l'échelle;

$(\hat{\cdot})$: grandeur estimée;

$(\tilde{\cdot})$: erreur d'estimation;

$\|\cdot\|$: norme Euclidienne et norme induite correspondante;

a_i : distance entre les articulations $i-1$ et i ;

α : rapport de transmission entre les deux actionneurs;

\mathbf{a} : matrice des paramètres du système;

$\mathbf{a}_f, \mathbf{b}_f$: matrices du filtre de premier ordre;

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$: matrices d'état d'un système linéaire;

\mathbf{A}_0 : matrice stable $\mathbf{A}_{xxx} - \mathbf{G}_{xxx} \mathbf{C}_{xxx}$;

$\mathbf{A}_{xxx}, \mathbf{B}_{xxx}, \mathbf{C}_{xxx}$: matrices relatives à l'observateur de type 'xxx';

$\mathbf{C}(.,.)$: matrice de Coriolis;

$\mathbf{C}_l(.,.)$: matrice de Coriolis relative aux membres;

\mathbf{D} : matrice des frottements visqueux;

\mathbf{D}_l , \mathbf{D}_m : matrices des frottements visqueux relatives aux membres et aux moteurs, respectivement;

\mathbf{D}_{m_c} : frottement de Coulomb;

\mathbf{e} : erreur d'estimation;

\mathbf{f} : fonction vectorielle non linéaire définie sur \mathbf{R} ;

$\mathbf{G}(\cdot)$: matrice de gravité;

$\mathbf{G}_l(\cdot)$: matrice de gravité relative aux membres;

\mathbf{G}_{xxx} : gain de l'observateur de type 'xxx';

Γ : gain de la loi d'adaptation;

$\mathbf{I}_{n \times m}$: matrice identité de dimension $n \times m$;

I_c : inertie de la charge;

I_i : inertie du membre i ;

I_{ij} : inertie de l'engrenage j à son entrée ($i=1$), à sa sortie ($i=2$);

I_{r_i} : inertie du rotor i ;

I_{s_2} : inertie du stator 2;

\mathbf{K} : matrice de rigidité;

\mathbf{K}_e : sous-matrice bloc de la matrice de rigidité;

\mathbf{K}_k : gain du filtre étendu de Kalman à l'instant d'échantillonnage k ;

K : énergie cinétique totale du système;

k_b : rigidité de la courroie de transmission;

k_i : rigidité de l'élément i ;

$\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v$: matrices de la loi de commande PD;

l_{c_i} : distance entre l'articulation i et le centre de masse du membre i ;

L_p : Espace vectoriel normé de Lebesgue;

λ_p, λ_P : valeur propre minimale et maximale de \mathbf{P} ;

$\mathbf{M}(\cdot)$: matrice de masse;

$\mathbf{M}_{11}(\cdot)$: matrice de masse relative aux membres;

$\mathbf{M}_{11_0}(\cdot)$: matrice de masse nominale relative aux membres;

$\mathbf{M}_{22}(\cdot)$: matrice de masse relative aux moteurs;

\mathbf{M}_{22_0} : matrice de masse nominale relative aux moteurs

M_{r_2}, M_{s_2} : masse du rotor 2 et du stator 2;

\mathbf{m}_1 : matrice $\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e$;

\mathbf{m}_2 : matrice $\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_m$;

m_c : borne de la matrice de Coriolis au sens de la norme Euclidienne;

m_d : valeur propre maximale de \mathbf{D} ;

m_i : masse du membre i ;

m_l, m_u : borne inférieure et supérieure de la matrice de masse;

N_i : rapport de l'engrenage i ;

\mathbf{O} : matrice d'observabilité;

$\mathbf{O}_{n \times m}$: matrice nulle de dimension $n \times m$;

P : énergie potentielle totale du système;

$\mathbf{P}_{k/k}, \mathbf{P}_{k/k-1}$: matrice de covariance *a posteriori* et *a priori*;

\mathbf{P}, \mathbf{Q} : matrices de l'équation de Lyapunov;

\mathbf{q}_1 : vecteur articulaire des membres;

\mathbf{q}_m : vecteur articulaire des moteurs;

$\mathbf{q}_m^d, \dot{\mathbf{q}}_m^d$: position et vitesse désirées des moteurs;

r_1, r_1', r_1'' et r_2 : rayons des poulies 1, 1', 1'' et 2;

$r(\cdot), \rho(\cdot)$: borne supérieure d'une fonction $\mathbf{v}(\cdot, \cdot, \cdot)$;

R : rapport de transmission entre la poulie r_1 et la poulie r_2 ;

$\mathbf{S}(\cdot, \cdot, \cdot)$: terme de commutation (observateur à structure variable);

$\mathbf{S}(\mathbf{x})$: ensemble des variables d'état \mathbf{x} vérifiant un certain nombre de conditions;

$\bar{\sigma}(\cdot), \underline{\sigma}(\cdot)$: valeurs singulières maximales et minimales d'une matrice;

T : période d'échantillonnage;

V : fonction candidate de Lyapunov;

θ_{l_i} : variable articulaire du membre i ;

θ_{m_i} : variable articulaire du moteur i ;

τ_{m_i} : couple délivré par le moteur i ;

\mathbf{u} : commande multivariable du système;

u_i : couple vu par le membre i à l'articulation i ;

\mathbf{v} : sortie du système linéaire (Observateur de Tomei);

$\mathbf{v}(\dots)$: fonction vectorielle non linéaire (Observateur à structure variable);

\mathcal{G}_l : vitesse filtrée du membre;

\mathbf{x} : vecteur d'état du système;

\mathbf{y} : sortie du système;

$\mathbf{Y}(\dots)$: matrice de régression du manipulateur;

\mathbf{w}, \mathbf{z} : variables d'état et de sortie du système après changement de repère;

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 Problématique et objectifs

La plupart des robots utilisés en industrie sont commandés à partir d'une modélisation basée sur l'hypothèse qu'un bras d'un manipulateur est la connexion de corps solides et rigides. Cette représentation est nécessaire, mais elle ne tient pas compte des interactions entre membres et actionneurs, car ces derniers sont presque toujours représentés comme une source de couple idéale. Il a été montré (Sweet & Good, 85) que des articulations présentant de la flexibilité constituent une source importante de limitation des performances dynamiques et statiques lors de la conception de lois de commande dédiées à une large classe de manipulateurs. En effet, la tendance actuelle vise à concevoir des robots de plus en plus rapides et légers et ceci requiert un compromis au niveau du choix des matériaux, actionneurs et éléments de transmission. Afin d'employer de plus petits actionneurs, des éléments de transmission à rapports élevés tels que des courroies sont choisis mais au détriment d'une plus grande flexibilité. Les réducteurs harmoniques

très utilisés pour leur compacité, faible poids, faible retour de dent et leur transmission de couples élevés présente une flexibilité inhérente. De plus, intuitivement les articulations subissent les plus fortes contraintes surtout lorsque le manipulateur déplace de lourdes charges et qui plus est à de hautes vitesses.

Si les lois de commande classiques sont toujours utilisées, nous avons à faire face à une classe de systèmes sous-actionnés car tous les degrés de liberté ne sont pas directement commandés. Autrement dit, de nouveaux correcteurs doivent être conçus afin de prendre en compte l'état interne (actionneur) et externe (membre) du manipulateur pour assurer de bonnes performances ainsi que la stabilité de l'état complet du système. Ces lois de commande (Spong, 90) demandent la connaissance de l'état complet du système à savoir les position et vitesse des membres et moteurs; certaines demandent la mesure de l'accélération. Cependant la mesure de l'état complet n'est pas toujours possible pour de multiple raisons: poids, robustesse, espace disponible restreint, coût, etc. C'est la raison pour laquelle, il est nécessaire de reconstruire l'état complet ou partiel du système à l'étude, à partir de grandeurs mesurées.

Deux classes de méthodes de reconstruction peuvent répondre à ces besoins:

a) Interpolation à partir de la mesure discrète de la position pour l'estimation de la vitesse: Brown et al. (92) ont fourni une étude comparative de plusieurs algorithmes basés sur les différentiations de la position (expansion en série de Taylor, équations aux différences régressives) et une estimation basée sur les moindres carrés. Aucun estimateur n'a été montré adéquat pour un système présentant une large bande de vitesses avec une mesure de position bruitée. En présence de bruit, l'estimateur des moindres carrés est le meilleur mais sa réponse transitoire est lente. Quant aux différentiateurs de position, certains sont meilleurs que d'autres suivant le régime de vitesse à estimer; cependant ils deviennent inexploitablement lorsque les mesures sont bruitées.

Lorentz et Patten (88) ont montré qu'il serait plus efficace, en terme de rapidité et de continuité de la réponse, d'utiliser un observateur d'état pour la reconstruction de la vitesse d'un moteur à courant alternatif. Ceci nous conduit à la deuxième classe de reconstituteurs d'état qui est l'objet d'étude de ce mémoire.

b) Les observateurs non linéaires: Les observateurs sont basés sur la mesure du signal de commande, un jeu de grandeurs mesurées à la sortie du système et la modélisation de ce dernier. Une vaste littérature leur a été consacrée dans leur application aux robots rigides, ce qui n'est pas le cas pour les manipulateurs à articulations flexibles. Si un certain nombre de résultats théoriques existe, la conception de tels observateurs reste beaucoup plus délicate par rapport à ceux utilisés pour les systèmes linéaires et l'ajout de la dynamique du moteur ne va pas en simplifiant la tâche.

Voici une liste de quelques problèmes à surmonter.

1. Ajout de la dynamique du moteur avec élément flexible; le nombre de variable initialement de nature articulaire uniquement, est multiplié par deux.
2. Une flexibilité non linéaire, i.e. avec zone d'adoucissement lorsque la déformation de la partie flexible se trouve dans le voisinage de zéro afin de modéliser le retour de dent. Malheureusement, très peu d'articles traitent ce cas, au profit d'une déformation linéaire.

3. Concevoir une structure pour l'observateur la plus souvent non linéaire et directement basée sur le modèle du manipulateur pour assurer une certaine forme de stabilité.
4. Assurer une bonne robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, du bruit et de certaines incertitudes non paramétrisées (frottement de coulomb, interaction avec l'environnement, etc.), si possible.
5. Ajuster les gains des observateurs afin d'obtenir les performances dynamiques et statiques désirées.
6. Étendre la conception à un ensemble observateur-correcteur possédant une forme de stabilité acceptable.

1.2 Bibliographie

Une revue générale des techniques d'observation non linéaire est exposée, suivie d'une rétrospective de divers observateurs appliqués au cas des manipulateurs à articulations flexibles. Le principe est succinctement décrit ainsi que certaines propriétés telles que le type de stabilité, la robustesse, la facilité de mise en oeuvre, etc. Une description plus détaillée fera l'objet des chapitres suivants puisque la majeure partie des observateurs non linéaires cités seront appliqués au cas du robot.

1.2.1 Observateurs non linéaires

Comme nous le verrons dans la suite de ce mémoire l'observation est une notion duale de celle de la commande en terme d'erreur d'estimation. Il est possible de classer les observateurs existants selon plusieurs familles (Walcott B.L., Corless M.J.& Zak H., 87; Misawa E.A. & Hedrick J.K. 89).

1.2.1.1 Filtre de Kalman Étendu et ses dérivées

Le filtre de Kalman étendu est une technique très utilisée, notamment pour les problèmes de poursuite d'une cible en aérospatiale. Il s'agit de l'application du filtre de Kalman à un système linéarisé autour d'un point de fonctionnement qui est dans notre cas l'estimation de l'état à l'instant d'échantillonnage précédent. En général l'application d'un tel observateur requiert une bonne connaissance du système car il est peu robuste envers les erreurs de modélisation. De plus la charge de calcul est importante, si l'on prend en compte la résolution en temps réel de l'équation de Riccati. Une bonne approximation dans certains cas, consiste à prendre un gain constant égal à la limite asymptotique de l'équation de Riccati. Dépendant si les points de linéarisation sont suffisamment proches ou non, le filtre peut être biaisé ou même divergent. Pour éviter cela, certaines variantes du filtre peuvent être

envisagées comme celui utilisant un facteur d'oubli adaptatif (Xia Q. et al., 92).

1.2.1.2 Observateurs basés sur la linéarisation globale et la pseudo-linéarisation

La linéarisation globale consiste à trouver une transformation non linéaire tel que le système original soit mis sous une forme canonique observable (Krener & Respondek, 85). Dans cette nouvelle base, la conception des observateurs est celle de type Luenberger, i.e. le système devenu linéaire est augmenté d'un terme correctif linéaire dont le gain est choisi afin de positionner les pôles à l'endroit désiré dans le demi-plan gauche du plan de Laplace. Il est montré que si la transformation est un difféomorphisme (bijection et non singularité du Jacobien associé), celle-ci conserve les valeurs propres dans l'espace d'état original. Si la transformation existe, alors l'observateur est exponentiellement stable. Toute la difficulté réside à pouvoir trouver la transformation en question, dont les conditions d'existence faisant appel à l'algèbre de Lie sont assez restrictives. S'il n'est pas possible de les satisfaire la technique de pseudo-linéarisation peut être utilisée comme alternative (Nicosia, Tomei & Tornambé, 88).

Dans ce cas, un ensemble de points d'opération est envisagé afin de pouvoir négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à deux. Par la suite, une transformation suivant le même principe que la linéarisation globale est appliquée afin d'obtenir un système mis sous forme canonique observable. Cette transformation est plus facile à trouver puisque le système est du premier ordre, mais celui-ci peut toujours demeurer non linéaire. Les propriétés de convergence sont identiques mais uniquement locales.

Les deux méthodes demandent une bonne connaissance du système et se montrent peu robustes face à une variation des paramètres ou à des incertitudes non paramétrisées, excepté si elles sont d'ordre supérieur ou égal à deux dans le cas de la pseudo-linéarisation.

1.2.1.3 Observateur de Thau

Cette approche ne fournit pas une méthode systématique pour la conception d'observateurs, mais plutôt une condition suffisante pour laquelle un observateur à convergence asymptotique peut être obtenu. Le système considéré doit être mis sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}$$

La non-linéarité \mathbf{f} ne s'exprime qu'en fonction des variables d'état et ne comprend pas le signal de commande.

L'observateur est obtenu en rajoutant un terme de correction de façon identique à l'observateur de Luenberger. La condition de convergence asymptotique est obtenue par application de la méthode directe de Lyapunov en supposant que le terme non linéaire est localement Lipschitz. Cette condition limite l'utilisation de cet observateur dont la convergence est locale. Une condition de Lipschitz globale entraîne une convergence asymptotique globale. Ce type d'observateur est peu robuste face aux incertitudes paramétriques.

1.2.1.4 Observateurs à structure variable

Cet observateur s'applique aux systèmes qui peuvent être mis sous une forme identique au cas précédent incluant des non linéarités sur le terme de commande (Walcott & Zak, 87). L'observateur réalisé comprend un terme correctif propre aux observateurs linéaires et un terme à structure variable dont le signe change en sens opposé de celui de l'erreur d'estimation. Ce terme peut être nul ou très faible (utilisation d'une bande d'adoucissement) lorsque l'erreur d'estimation est nulle ou inférieure à un certain seuil,

respectivement. L'observateur est asymptotiquement stable si la partie linéaire du système est strictement réelle positive. Nous nous concentrerons sur cette condition au chapitre 5. Si l'amplitude du terme variable vérifie certaines conditions liées à une équation de Lyapunov associée au système, l'état estimé se trouve alors dans la zone d'attraction d'un sous espace (surface de glissement) de l'espace d'état et l'observateur devient à mode de glissement. Sa dynamique est définie par la surface de glissement.

Cet observateur est robuste, sous certaines conditions de bornage, vis-à-vis de variations paramétriques.

1.2.1.5 Les observateurs adaptatifs

Ces observateurs sont utilisés lorsque certains paramètres du système sont peu ou même pas du tout connus. Une méthode (Chui et al., 90) consiste à appliquer le filtre de Kalman étendu au système dont le vecteur d'état inclut les paramètres à identifier, cependant l'analyse de la stabilité est difficile et l'implantation requiert une puissance de calcul importante. Une alternative est, lorsque c'est possible, de transformer le système sous une forme canonique observable adaptative (Bastin & Gervers, 88) qui possède la propriété d'être linéaire vis-à-vis de toutes les grandeurs inconnues, i.e.

variables d'états et paramètres à estimer. En général une stabilité asymptotique des variables estimées peut être prouvée (globalement ou localement suivant la méthode utilisée), ainsi qu'une majoration en valeur absolue des paramètres identifiés. Pour que ceux-ci convergent asymptotiquement il est nécessaire que la loi de commande soit à excitation persistante, i.e. suffisamment riche. Cependant une convergence des paramètres n'est pas nécessaire pour assurer celle de l'état, mais elle est souhaitée afin d'améliorer la robustesse de l'observateur face à des incertitudes non paramétrisées (Slotine & Li, 91; Narendra & Annaswamy, 89)

1.2.1.6 Observateur selon l'approche de la théorie des ensembles (*set theoretic approach*)

Cette approche s'applique aux systèmes linéaires dont les matrices possèdent des éléments comportant des incertitudes qui peuvent être des non linéarités et dont on connaît les bornes au sens d'un ensemble de bornage ellipsoïdal (Misawa & Hedrick, 89). Dans ce cas, un observateur réduit linéaire est construit. Ce dernier fournit un état estimé contenu dans un ensemble ellipsoïdal dont la largeur peut être déterminée en résolvant une équation de Riccati associée au système, qui se réduit à une équation de

Lyapunov lorsque le système est invariant dans le temps. L'objectif de conception est de minimiser les bornes des estimations et il se traduit par un critère de minimisation de la trace de la matrice solution de l'équation de Riccati associée au système. Cette approche est critiquable sur le fait qu'un terme correctif linéaire n'est pas suffisant pour certains problèmes.

1.2 Observateurs appliqués à la robotique

La plupart des observateurs appliqués à la robotique utilisent une des techniques précédemment citées. Certains autres exploitent directement la structure du manipulateur en construisant un observateur obtenu directement après avoir mis le modèle sous forme canonique observable via quelques concepts que nous exposerons dans la suite. Nous citons quelques références qui ont trouvé une solution pour le cas de manipulateurs à articulations flexibles ainsi qu'une autre pour le cas des manipulateurs rigides dont nous nous inspirerons. La classification est faite selon la structure de l'observateur, de cela est déduit le type de variables à mesurer qui dans la plupart des cas n'est pas libre.

L'observation par linéarisation est appréhendée par Nicosia et al. (88) qui exposent pour l'occasion le concept de pseudo-linéarisation qui

devient rapidement nécessaire puisque les conditions de linéarisation exacte ne sont plus applicables lorsque les dimensions du système sont supérieures à un. De plus dans le cas de la pseudo-linéarisation, seule la mesure des positions est possible car tout autre choix de mesure ne permet pas de satisfaire les conditions de linéarisation.

La forme canonique observable du manipulateur est exploitée lorsque les mesures de positions et vitesses des membres sont disponibles. Deux concepts sont alors utilisés: celui basé sur le **filtre de Kalman** (Jankovic, 92) assurant une convergence exponentielle mais ne requérant aucun frottement; celui de la **passivité** (Tomei, 90) assurant une certaine robustesse vis-à-vis des paramètres inertiels et une convergence asymptotique uniforme si la vitesse des membres est bornée.

Nicosia et Tomei (95) ont conçu un **observateur réduit**, basé sur la passivité, couplé à une loi de commande en poursuite assurant une convergence asymptotique uniforme semi-globale (convergence locale avec domaine de convergence arbitrairement élargi) lorsque la vitesse des membres est bornée. L'observateur utilise la mesure de position des membres pour reconstruire l'état du moteurs et l'erreur de poursuite des membres, ce qui permet dans ce cas de déduire une forme canonique

observable en fonction de la position désirée par la commande. Cette conception est intégrée à celle d'un correcteur.

Un observateur réduit à haut gain avec élément saturant (Jankovic, 95) reconstruisant l'état des membres et la vitesse des moteurs à partir de l'état des moteurs est montré exponentiellement stable, ce qui implique une certaine robustesse vis-à-vis de perturbations bornées. La robustesse face à une variation des paramètres inertiels est également assurée au prix d'une erreur d'estimation uniformément ultimement bornée. Cependant toute source de frottement a été négligée lors de la modélisation.

Certains résultats appliqués au cas des manipulateurs rigides semblent intéressants lorsque de la flexibilité est ajoutée: les résultats développés par Zak et al. (88, 89) sur les **systèmes à structure variable** ainsi que ceux d'Erlic et Lu (95) sur un **observateur réduit adaptatif** présentent une perspective intéressante et seront étudiés au chapitre 5.

1.3 Organisation du mémoire

L'étude de la reconstruction d'état du manipulateur à articulations flexibles va être menée comme suit:

Au chapitre 2, des rappels théoriques sont exposés: il s'agit ici de rappeler les notions mathématiques et quelques méthodes afin de prouver certains types de stabilité. L'observabilité des systèmes linéaires et non linéaires est définie.

Au chapitre 3, le manipulateur est modélisé suivant les deux formalismes classiques à savoir, Newton-Euler et Lagrange-Euler. Les propriétés du modèle nécessaires à la conception de correcteurs et observateurs sont exposées.

Au chapitre 4, trois observateurs classiques sont étudiés et comparés par voie de simulations. Il s'agit du filtre de Kalman étendu, d'un observateur basé sur la linéarisation de l'erreur dynamique et d'un observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman. Un tableau synthétisant l'étude comparative est présenté à la section 4.4.

Au chapitre 5, deux observateurs robustes, l'un fondé sur l'approche de la passivité l'autre sur la théorie des systèmes à structures variables et un observateur adaptatif sont étudiés et simulés. Un tableau synthétisant l'étude comparative est présenté à la section 5.4.

Une conclusion finale est dressée au chapitre 6.

CHAPITRE 2

RAPPELS THÉORIQUES

L'ensemble des définitions et propriétés décrites dans ce chapitre peuvent être obtenues principalement de Vidyasagar (92), Slotine et Li (91) et Lancaster (68).

2.1 Rappels mathématiques

Les vecteurs et matrices sont définis respectivement sur les espaces vectoriels \mathbf{R}^n et $\mathbf{R}^{n \times n}$, lesquels sont munis respectivement des normes Euclidiennes et de la norme induite correspondante que l'on note toutes deux $\|\cdot\|$. Les espaces vectoriels normés L_2 et L_∞ sont utilisés et sont de façon plus générale définis comme suit:

Définition 2.1 (Narendra & Annaswamy, 89): *pour tout $p \in [1, \infty[$ fixé, $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ appartient à L_p si et seulement si f est localement intégrable et*

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Lorsque $p = \infty$, $f \in L_\infty$ si et seulement si

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \geq 0} |f(t)| < \infty$$

■

Pour un système à entrées et sorties multiples on définit la norme L_p^n

par: $\|\mathbf{f}\|_p = \left[\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right]^{1/2}$, avec $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$ et $f_i \in L_p$ pour tout i . Puisque

les manipulateurs sont de tels systèmes, par abus de langage L_p^n est assimilé à L_p .

Il est bon de rappeler le théorème de Sylvester afin de déterminer si une matrice symétrique est définie positive ou non, ainsi qu'un théorème fort utile sur l'équation de Lyapunov:

Théorème 2.1 (Sylvester) *Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.* ■

Pour une matrice \mathbf{P} réelle symétrique, l'équation de Lyapunov est définie par: $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$

Théorème 2.2 *Soit une matrice $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) A est matrice Hurwitz (toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan gauche).

(ii) Il existe au moins une matrice définie positive $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ telle que l'équation de Lyapunov ait une solution unique \mathbf{P} définie positive.

(iii) Pour toutes matrices définies positives $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, l'équation de Lyapunov admet une solution unique \mathbf{P} définie positive. ■

2.2 Détermination de la stabilité de systèmes selon la méthode directe de Lyapunov

Nous donnons quelques résultats utiles à la détermination de la stabilité de systèmes non linéaires en général. Les définitions ne sont pas citées et sont disponibles entre autres dans les références du début de chapitre.

Pour un système autonome de la forme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, les divers concepts de stabilité sont caractérisés par le théorème suivant:

Théorème 2.3 *Le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est localement stable s'il existe $V(\mathbf{x})$ de classe C^1 telle que dans un voisinage de $\mathbf{0}$ on ait:*

(i) $V(\mathbf{x})$ définie positive,

(ii) $\dot{V}(\mathbf{x})$ semi-définie négative;

$\mathbf{0}$ localement asymptotiquement stable si de plus,

(ii') $\dot{V}(\mathbf{x})$ est définie négative;

La stabilité est globale lorsque les conditions (i) et (ii) ou (ii') sont respectées pour tout \mathbf{x} de l'espace d'état et si de plus,

(iii) $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ lorsque $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. ■

Lorsque l'on ne peut conclure qu'à la stabilité au sens large, le théorème de La Salle peut être utilisé pour obtenir une stabilité asymptotique.

En voici une version:

Théorème 2.4 (La Salle) *Dans un voisinage du point d'équilibre $\mathbf{0}$, supposons que:*

(i) $V(\mathbf{x})$ soit définie positive,

(ii) $\dot{V}(\mathbf{x})$ soit semi-définie négative,

(iii) l'ensemble des variables d'état \mathbf{R} défini par $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ ne contient aucune autre trajectoire que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$, alors le point d'équilibre $\mathbf{0}$ est asymptotiquement stable. ■

Une autre notion proche de la stabilité est employée: le bornage ultime et uniforme (*uniform ultimate boundedness*). On peut le déterminer à l'aide du théorème suivant:

Théorème 2.5 *Soit V la fonction candidate de Lyapunov et S une surface de niveau constant définie par*

$$S(c_0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n / V(\mathbf{x}) = c_0 \}$$

pour une constante c_0 . Alors la solution $\mathbf{x}(t)$ de S est bornée uniformément et ultimement par rapport à S si \dot{V} est définie négative pour tout \mathbf{x} extérieur à S . ■

Pour les systèmes non autonomes, cas des équations linéaires variant dans le temps trouvées notamment lors de l'étude des observateurs adaptatifs, les résultats suivants sont utilisés:

Théorème 2.6: *Si dans le voisinage de $\mathbf{0}$ il existe une fonction scalaire $V(t, \mathbf{x})$ de classe C^1 telle que:*

(i) V soit définie positive,

(ii) \dot{V} soit semi-définie négative,

alors le point d'équilibre est localement stable (au sens large).

Si de plus,

(iii) V est bornée par une fonction définie positive invariante dans le temps,

alors la stabilité du point d'équilibre est localement uniforme. Si de plus

$\dot{V} < 0$, la stabilité précédente est asymptotique.

Si de plus,

(iv) $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ lorsque $\mathbf{x} \rightarrow \infty$,

alors le point d'équilibre est globalement et uniformément stable. De même

si $\dot{V} < 0$, la stabilité précédente est asymptotique. ■

Dans le cas d'une stabilité uniforme, le théorème de La Salle ne peut pas être utilisé pour renforcer la stabilité, cependant le résultat suivant est souvent employé afin d'affirmer que certaines variables d'état du système convergent asymptotiquement. Soit $\mathbf{g} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^n$,

Lemme de Barbalat Si $\mathbf{g} \in L_2 \cap L_\infty$ et que $\dot{\mathbf{g}}$ est bornée, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{g}(t) = \mathbf{0}. \quad \blacksquare$$

2.3 Systèmes observables

Puisque l'objectif de ce mémoire est la reconstruction d'état d'un manipulateur à l'aide d'observateurs, il est bon de rappeler quelques notions d'observabilité concernant les systèmes linéaires et non linéaires.

Définition 2.2 (Chen, 84) *Un système linéaire est complètement observable à t_0 s'il existe $t_1 > t_0$ tel que pour tout état \mathbf{x}_0 à t_0 , la connaissance de l'entrée $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ et de la sortie $\mathbf{y}_{[t_0, t_1]}$ sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ suffit à déterminer l'état \mathbf{x}_0 .* ■

L'observabilité d'un système linéaire (Fortman & Hitz, 77) peut être également déterminée si aucun état autre que $\mathbf{0}$ est inobservable. Dans ce cas, l'état \mathbf{x}_i est dit inobservable si pour $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ et pour $T > 0$, l'état initial $\mathbf{x}_i(t_0) \neq \mathbf{0}$ produit une réponse $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Pour un système décrit par les équations $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ et $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$, l'observabilité est obtenue lorsque le rang de la matrice d'observabilité \mathbf{O} est égal à l'ordre (n) du système. \mathbf{O} est définie par:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Pour les systèmes non linéaires, plusieurs définitions existent. Nous exposons celles fournies par Vidyasagar (92), faisant intervenir la notion d'états distincts. Nous verrons que les équations du manipulateur peuvent être mises sous la forme suivante: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ et $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ pour laquelle les définitions suivantes sont données.

Définition 2.3 *Deux états \mathbf{x}_0 et \mathbf{x}_1 sont distincts s'il existe une entrée dont la fonction $\mathbf{u}(\cdot)$ est telle que*

$$\mathbf{y}(\cdot, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \neq \mathbf{y}(\cdot, \mathbf{x}_1, \mathbf{u})$$

où $\mathbf{y}(\cdot, \mathbf{x}_i, \mathbf{u})$, $i = 1, 2$ est la sortie du système correspondant à l'entrée $\mathbf{u}(\cdot)$ et la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_i$. Le système est localement observable au point $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ s'il existe un voisinage N de \mathbf{x}_0 tel que tout $\mathbf{x} \in N$ autre que \mathbf{x}_0 , soit distinct de \mathbf{x}_0 . Le système est dit observable (localement) s'il est localement observable pour tout $\mathbf{x}_0 \in X$. ■

Pour un système plus général de la forme $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ayant pour point d'équilibre $\mathbf{0}$, l'observabilité uniforme est définie comme suit:

Définition 2.4 *Le système décrit précédemment est uniformément observable s'il existe une fonction α de classe K (continue, positive et strictement croissante) telle que pour $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$, on ait:*

$$\|\mathbf{g}(\cdot, \mathbf{s}(\cdot, 0, \mathbf{x}, \mathbf{0}), \mathbf{0})\| \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|). \quad \blacksquare$$

$\mathbf{s}(t, \tau, \mathbf{x}, u)$ étant la solution du système non linéaire évaluée au temps t , à partir de l'instant initial τ et de l'état initial \mathbf{x} commandé par \mathbf{u} .

À entrée nulle la sortie ne dépend que de l'état initial. Si le système est inobservable, il existe alors un état initial non nul qui produit une sortie identiquement nulle. Par conséquent, pour un système linéaire invariant dans le temps, l'observabilité uniforme est équivalente à l'observabilité définie par la définition 2.2.

Tout comme pour les systèmes linéaires, il existe un théorème basé sur des notions de géométrie différentielle, en particulier d'algèbre de Lie, qui donne une condition suffisante (Vidyasagar, 92; Krener & Respondek, 85) pour qu'un système non linéaire soit localement observable. Nous ne

l'exposerons pas, car il n'est d'aucune utilité pour notre étude, cependant plusieurs points sont à noter.

1. Tout système linéaire observable peut être transformé en une forme canonique observable, i.e. de la forme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \gamma(\mathbf{y}, \mathbf{u})$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ où (\mathbf{C}, \mathbf{A}) sont observables. Ce résultat n'est pas généralisable au cas des systèmes non linéaires. En définissant une forme dite observable moins forte que la forme canonique observable, Krener et Respondek (85), ont montré qu'un système non linéaire est observable si et seulement si il admet une forme observable et ont défini des conditions nécessaires et suffisante afin d'obtenir une forme canonique observable si cela est possible, donnant lieu à un observateur basé sur l'approche de linéarisation de l'erreur dynamique. On peut par exemple démontrer qu'un système est localement observable sans pouvoir pour autant construire un observateur. Par exemple, Nijmeijer et Van der Schaft (90) ont démontré qu'un manipulateur rigide à deux degrés de liberté dont la position d'un seul moteur est mesurée, est localement observable; on ne peut cependant pas conclure quant à la conception d'un observateur. En effet l'ensemble de la littérature ne fournit que des observateurs dont la position de tous les moteurs est mesurée lorsque l'on s'intéresse à ce type de mesure.

2. Pour le cas linéaire, lors de la conception de l'ensemble observateur-correcteur, le principe de séparation des modes permet de placer les pôles des deux parties indépendamment l'une de l'autre afin de rencontrer les spécifications demandées. Bien que ce résultat ne s'applique pas de façon générale au cas non linéaire, Vidyasagar (92) a montré qu'il était possible de le réaliser localement pour un système uniformément asymptotiquement stable et faiblement détectable (observabilité des pôles instables dans le cas linéaire). Toutefois, ce résultat semble rester théorique puisque les articles traitant la conception intégrée d'observateur et correcteur se sont réalisés à l'aide d'arguments comme la passivité pour les robots rigides (Berghuis & Nijmeijer, 93) ou la stabilité au sens de Lyapunov (Nicosia & Tomei, 95) pour les manipulateurs à articulations flexibles.

2.4 Structure générale d'un observateur

Un observateur est basé sur le modèle du système dont l'état est à reconstruire. Ce modèle permet d'établir une relation entre le signal d'entrée, i.e. le signal de commande et les variables constituant l'état du système. Puisque certaines d'entre elles ne sont pas mesurées, un terme de correction

de la forme $\mathbf{K}(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})$ est ajouté afin d'assurer la convergence de l'état estimé vers l'état réel. En général, la classe de l'observateur détermine la manière dont est obtenue la matrice de gain \mathbf{K} . Cela peut être une matrice constante dans le cas d'un observateur linéaire par exemple. Cela peut aussi être une matrice variable satisfaisant une condition de convergence souvent dictée par une fonction de Lyapunov ou un critère d'optimalité comme c'est le cas pour le filtre de Kalman étendu. De plus, un autre terme peut être ajouté pour assurer certaines propriétés de robustesse comme nous le verrons lors de l'étude des observateurs à structure variable.

Terminons ce chapitre par la figure 2.1 résumant la structure du système dont l'état est reconstruit pour l'exécution de la commande. Les simulations des chapitres suivants ont été réalisées selon ce synoptique.

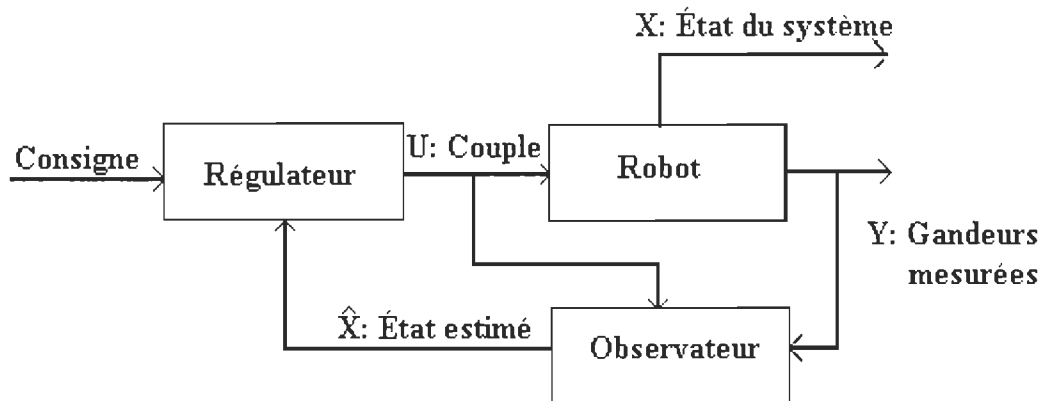


Figure 2.1 Commande d'un manipulateur avec observateur

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DU MANIPULATEUR D'ÉTUDE

Introduction

Dans ce chapitre, le manipulateur à partir duquel seront étudiés les observateurs d'état, est décrit. Les formalismes de Newton-Euler et Lagrange-Euler sont utilisés pour la modélisation du robot pouvant adopter plusieurs configurations: chaîne cinématique ouverte ou fermée. Des changements de variables sont envisagés afin de retrouver les propriétés nécessaires à la conception de correcteurs et d'observateurs.

3.1 Description du robot à l'étude

Un robot de type SCARA (Dombre & Khalil, 88) est considéré. Afin d'obtenir une dynamique rapide et une masse de l'ensemble plus faible, les moteurs ont été placés à la base du manipulateur sans que la structure mécanique n'en soit rendue trop complexe. Des courroies et poulies sont utilisées pour transmettre les forces et couples. Pour l'implantation de lois de commande, nous utilisons l'état complet du manipulateur, à savoir position et vitesse de chaque membre et moteur. Nous supposons que des capteurs tels que des codeurs optiques sont utilisés. De même, des réducteurs sont montés

en inverse afin d'améliorer la précision des mesures côté membre. Les deux premiers membres uniquement sont considérés pour la modélisation. Nous supposons que les deux autres ne présentent aucune flexibilité et qu'ils sont assimilés à une charge fixe (figure 3.1).

Plusieurs éléments du manipulateur sont susceptibles de présenter de la flexibilité: l'arbre de transmission du membre 1, l'arbre de sortie du réducteur 2, les courroies de transmission et l'arbre d'entrée du membre 2. De plus, deux configurations de structure peuvent être installées. Dans chaque configuration, le moteur 1 et le réducteur 1 sont fixés dans la base qui reste immobile et commande directement le membre 1. Le réducteur 2 associé au moteur 2 agit sur le membre 2 par l'intermédiaire d'axes de rotation, de poulies et de courroies (figure 3.1).

Dans la première configuration, le moteur 2 et le réducteur 2 sont fixés par rapport au référentiel inertiel. Les membres 1 et 2 sont cinématiquement couplés: si le membre 1 est en rotation, une rotation du membre 2 relativement au membre 1 est induite par les poulies et courroies. Afin de palier à ce couplage, une deuxième configuration est possible dans laquelle l'actionneur 2 (moteur 2 et réducteur 2) est entraîné par la sortie du réducteur 1 par l'intermédiaire d'une courroie. En conséquence, le moteur agit

indirectement sur le membre 2 en plus de l'action du moteur 2. Dans cette configuration, la dynamique des deux moteurs est directement couplée.

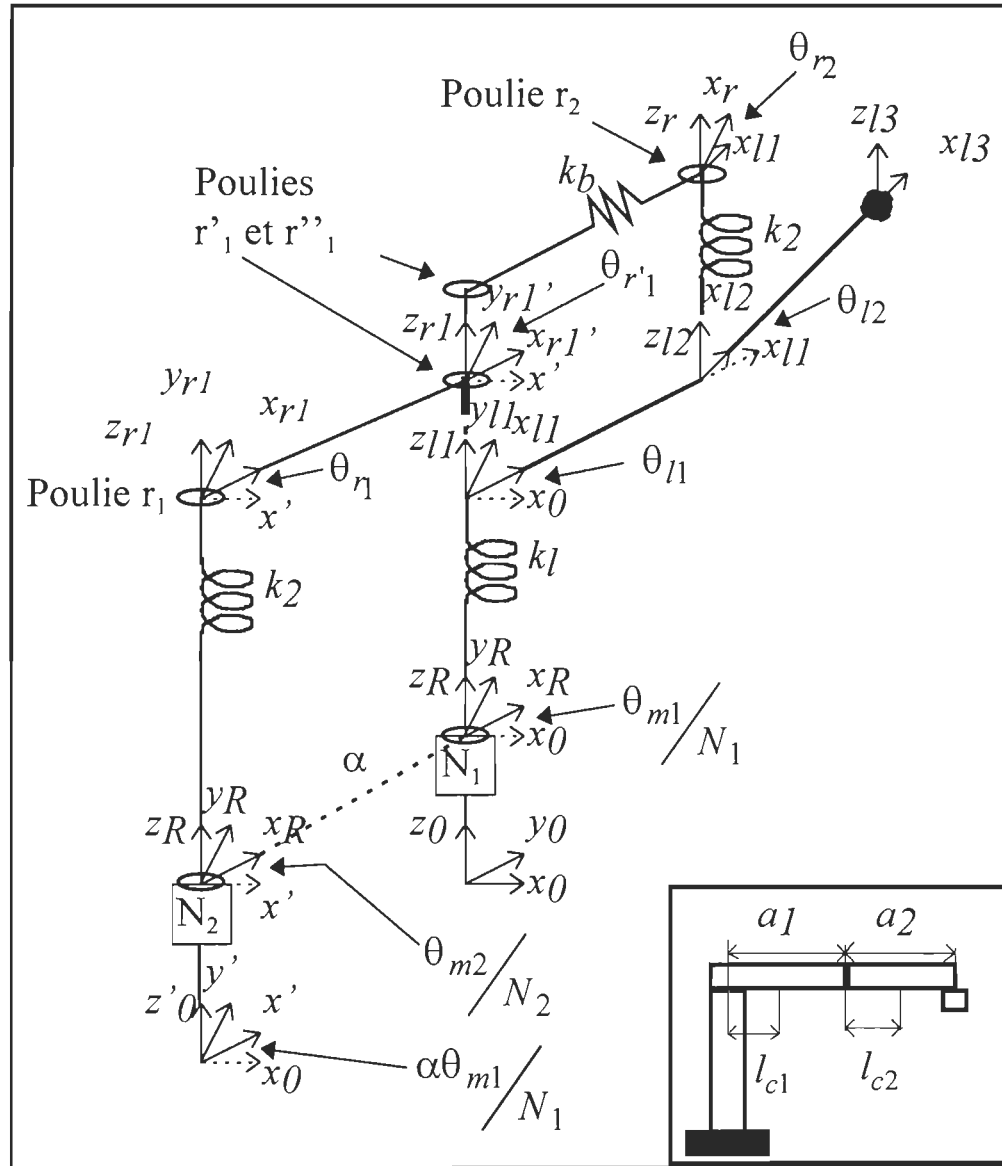


Figure 3.1 Structure mécanique et définition des variables.

(Sicard , Léchevin & Dubé, 96)

Chaque configuration présente une chaîne cinématique fermée: soit l'actionneur 1 entraîne l'actionneur 2, soit chacun d'eux est fixe par rapport au référentiel inertiel.

Dans la prochaine section , nous supposons que tous les éléments flexibles sont utilisés (figure 3.1) et que leur caractéristique est linéaire. Le rotor des moteurs est considéré comme un solide uniforme de révolution par rapport à son axe de rotation. Les inertie et frottement des poulies sont négligés. Finalement, nous supposons le système sans frottement sec.

3.2 Définition des paramètres du manipulateur

3.2.1 Paramètres des membres

Les paramètres des membres et de la charge sont spécifiés au tableau 3.1 où nous définissons les paramètres:

a_1 et a_2 : distance séparant les axes z_{l_1} et z_{l_2} d'une part et les axes z_{l_2} et z_{l_3} d'autre part.

l_{c_1} et l_{c_2} : distance séparant les axes z_{l_1} et z_{l_2} respectivement des centres de masse des membres 1 et 2.

Tableau 3.1: Paramètres géométriques et inertiels du manipulateur

	Longueurs (m)	Masses (Kg)	Inerties (Kg·m ²)
Membre 1	$a_1= 0.3; l_{c_1} = 0.1$	$m_1=3.71$	$I_1=0.0819$
Membre 2	$a_2= 0.3; l_{c_2} = 0.1$	$m_2=2.5$	$I_2=0.0544$
Charge	Masse point	$m_c=5$	$I_c=0$

Les inerties sont déterminées par rapport à l'axe principal vertical de chaque membre et passant par le centre de gravité de ce dernier.

Chaque membre exerce une contrainte face au mouvement de type frottement visqueux avec un coefficient de $0.8 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}\cdot\text{s}$.

3.2.2 Paramètres des actionneurs

a) L'actionneur 1 est défini par l'inertie du rotor du moteur 1 combinée avec celle du réducteur 1 (R_{11}) vue de la sortie de son axe: I_{r_1} ($10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}^2$) (Figure 3.2).

b) L'actionneur 2 est défini par: I_{r_2} ($10^{-4} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$), I_{s_2} ($10^{-4} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$): inerties du rotor (comprenant l'inertie I_{21} du réducteur 2 (R_{21}) vue de son entrée) et du stator du moteur 2; M_{r_2} , M_{s_2} (1 Kg): masses du rotor et stator du moteur; et I_{12} , I_{22} ($10^{-5} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$): inerties des réducteurs 1 (R_{12}) et 2 (R_{22})

vues à leur sortie; d_2 distance de l'axe de rotation du moteur 2 au centre de l'actionneur 2.

Le coefficient de frottement visqueux présent à chaque moteur a pour valeur $0.001 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}\cdot\text{s}$.

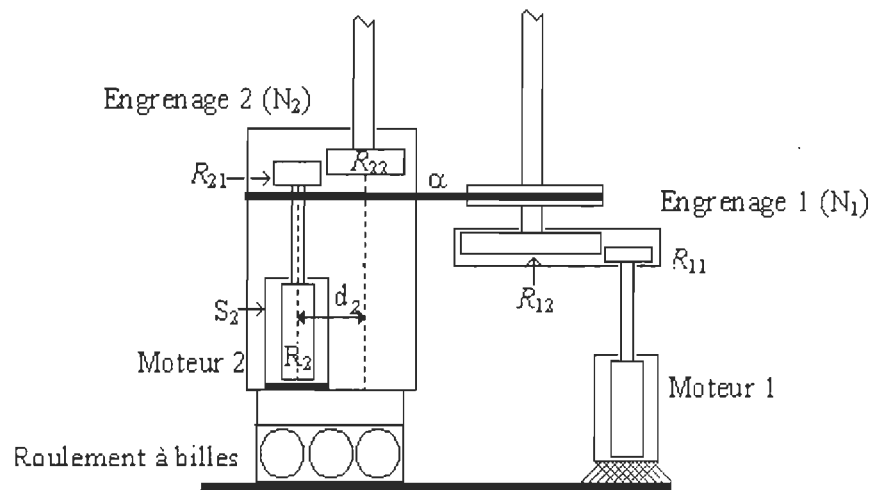


Figure 3.2 Description des actionneurs

3.2.3 Paramètres des éléments de transmission

Les éléments de transmission (arbres, réducteurs, courroies) sont tous susceptibles de présenter de la flexibilité qu'ils soient en déplacement prismatique ou rotatif. Afin de bien étudier l'effet de la flexibilité quant à l'application de reconSTRUCTEURS d'état, une faible constante de rigidité totale de $1500 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$ ($k_1 = k_2$, avec $k_1 = k_{21}/3 = k_{22}/3 = k_b/3 = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$, voir définition en section 3.3) côté membre a été choisie. Ce choix n'est pas

arbitraire car il correspond à la flexibilité maximale que possède un réducteur harmonique de type de ceux présentés par Harmonique Drive® Technologies (1995) dont le rapport d'engrenage est 80 (masse de 0.14 Kg, vitesse maximale de 12000 RPM, couple maximal d'entrée 12 N·m)

Nous supposons que toutes les poulies sont de même grandeur. La valeur importe peu, car seuls des rapports de rayon sont envisagés. Les rapports de transmission pour chacun des membres sont de $N_1=N_2=80$.

3.3 Modélisation par la méthode de Newton-Euler

La méthode de Newton-Euler est utilisée pour obtenir le modèle dynamique du robot. Nous évaluons en premier les vitesses et accélérations de chaque masse de la structure de façon itérative de la base vers l'effecteur. Ensuite un deuxième algorithme itératif est appliqué pour l'évaluation des couples et forces lorsque ceux-ci sont propagés de l'effecteur vers la base.

Deux types de référentiels sont définis: (i) ceux attachés aux membres et (ii) ceux attachés aux actionneurs et poulies (figure 3.1). La modélisation du système s'effectue en deux temps: les membres sont d'abord pris en compte afin d'évaluer les couples et forces agissant sur eux. Ensuite

l'algorithme est appliqué aux éléments de transmission et actionneurs afin de trouver les couples délivrés par les moteurs.

Les référentiels et paramètres du robot sont définis suivant la convention de Denavit-Hartenberg modifié (D-H) (Craig, 86). Pour les membres, les repères sont notés $\mathbf{R}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)_{i=1,2,3}$ avec: ${}^i\omega_i$, la vitesse angulaire du lien i par rapport à \mathbf{R}_0 (référentiel inertiel) exprimée dans \mathbf{R}_i ; ${}^i\mathbf{v}_i$ et ${}^i\mathbf{v}_{c_i}$ les vitesses linéaires du membre i et de son centre d'inertie par rapport à \mathbf{R}_0 exprimées dans \mathbf{R}_i ; ${}^{i+1}_i\mathbf{R}$, la matrice de transformation de \mathbf{R}_i vers \mathbf{R}_{i+1} ; ${}^i\hat{\mathbf{Z}}_i$, l'axe de rotation de l'articulation i représenté dans \mathbf{R}_i ; $\theta_i, \dot{\theta}_i$ et $\ddot{\theta}_i$, respectivement les position, vitesse et accélération angulaires de l'articulation i ; m_i et ${}^c_i\mathbf{I}_i$, respectivement la masse du membre i et son tenseur d'inertie par rapport à son centre de masse; ${}^i\mathbf{F}_i$ et ${}^i\mathbf{N}_i$, respectivement les forces et moments résultants exercés au centre de masse du membre i ; ${}^i\mathbf{f}_i$ et ${}^i\mathbf{n}_i$, respectivement les forces et couples exercés sur le lien i par le lien $i-1$; ${}^i\mathbf{P}_{i+1}$ et ${}^i\mathbf{P}_{c_{i+1}}$, respectivement les vecteurs de positions de l'articulation $i+1$ et du centre de masse du membre i par rapport à \mathbf{R}_i . Avec cette notation,

l'algorithme de Newton-Euler (N-E) est appliqué dans le cas d'articulations rotoïdes (Craig, 86).

1. Itération montante: évaluation des vitesses et accélérations de la base vers l'effecteur

$${}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}\mathbf{R}^i \omega_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{\mathbf{Z}}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}\mathbf{R}^i \dot{\omega}_i + {}^{i+1}\mathbf{R}^i \omega_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{\mathbf{Z}}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{\mathbf{Z}}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1} = {}^{i+1}\mathbf{R}^i ({}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{P}_{i+1} + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{P}_{i+1}) + {}^i\dot{\mathbf{v}}_i)$$

$${}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{c_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\mathbf{P}_{c_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}\mathbf{P}_{c_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{i+1}$$

2. Évaluation des forces et moments agissant sur les membres, dus à leur propre rotation:

$${}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1} = m_{i+1} {}^{i+1}\dot{\mathbf{v}}_{c_{i+1}}$$

$${}^{i+1}\mathbf{N}_{i+1} = {}^{c_{i+1}}\mathbf{I}_{i+1} {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{c_{i+1}}\mathbf{I}_{i+1} {}^{i+1}\omega_{i+1}$$

3. Itération descendante: évaluation des forces et couples de l'effecteur vers la base:

$${}^i\mathbf{f}_i = {}^i\mathbf{R}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1} + {}^i\mathbf{F}_i$$

$${}^i\mathbf{n}_i = {}^i\mathbf{N}_i + {}^i\mathbf{R}^{i+1} \mathbf{n}_{i+1} + {}^i\mathbf{P}_{c_i} \times {}^i\mathbf{F}_i + {}^i\mathbf{P}_{i+1} \times {}^i\mathbf{R}^{i+1} \mathbf{f}_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^i\mathbf{n}_i^T {}^i\hat{\mathbf{Z}}_i$$

Lors des deux types de propagation, chaque élément individuel de la chaîne cinématique est pris en compte dans le bilan des forces et des couples. Ainsi, les rotor et stator des moteurs sont considérés séparément. Nous supposons qu'aucune force n'est exercée sur l'effecteur, donc ${}^{i+1}\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{0}$. De plus le seul couple exercé sur le membre 1 par le membre 2 est le couple de frottement visqueux $-D_{l_2}\dot{\theta}_{l_2}$ trouvé au niveau du pivot qui lie les deux membres et sur lequel est monté la poulie qui commande le membre 2.

Après application de l'algorithme et substitution des résultats intermédiaires, les couples appliqués aux membres au niveau des articulations ont pour expression (l'indice "l" est utilisé pour représenter les variables côté membre):

$$\tilde{\mathbf{M}}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}_l)\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \tilde{\mathbf{C}}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \tilde{\mathbf{D}}_l\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \tilde{\mathbf{G}}_l(\tilde{\mathbf{q}}_l) = \tau_l \quad (3.1)$$

où

$$\tau_l = [\tau_{l_1} \tau_{l_2}]^T$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_l = [\theta_{l_1} \theta_{l_2}]^T,$$

$$\check{\mathbf{M}}_{11}(\check{\mathbf{q}}_l) = \begin{bmatrix} A - C + B \cos(\theta_{l_2}) & B \cos(\theta_{l_2}) \\ C + B \cos(\theta_{l_2}) & C \end{bmatrix}$$

$$\check{\mathbf{C}}_{11}(\check{\mathbf{q}}_l, \dot{\check{\mathbf{q}}}_l) = \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_{l_1} + 2\dot{\theta}_{l_2}) & -\dot{\theta}_{l_2} \\ \dot{\theta}_{l_1} & 0 \end{bmatrix} B \sin(\theta_{l_2})$$

$$\check{\mathbf{D}}_l = \begin{bmatrix} D_{l_1} & -D_{l_2} \\ 0 & D_{l_2} \end{bmatrix}, \check{\mathbf{G}}_l = \begin{bmatrix} G_1(\theta_{l_1}, \theta_{l_2}) - G_2(\theta_{l_1}, \theta_{l_2}) \\ G_2(\theta_{l_1}, \theta_{l_2}) \end{bmatrix}$$

$\check{\mathbf{M}}_{11}$, $\check{\mathbf{C}}_{11}$, $\check{\mathbf{D}}_l$ et $\check{\mathbf{G}}_l$ étant respectivement la matrice de masse, la matrice de Coriolis, la matrice des coefficients de frottement et le vecteur de gravité avec les paramètres suivants:

$$A = I_1 + I_2 + I_c + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 a_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + m_c (a_1^2 + a_2^2)$$

$$B = m_2 a_1 l_{c_2} + m_c a_1 a_2$$

$$C = I_2 + I_c + m_2 l_{c_2}^2 + m_c a_2^2$$

$$G_1 = g \left((m_1 l_{c_1} + (m_c + m_2) a_1) \cos \theta_{l_1} + (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \cos(\theta_{l_1} + \theta_{l_2}) \right)$$

$$G_2 = g (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \cos(\theta_{l_1} + \theta_{l_2}), \quad g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Soient N_1 et N_2 les rapports des réducteurs 1 et 2, respectivement. Les couples transmis aux actionneurs par les éléments de transmission sont:

$$\tau_{l_1} = \tau_{k_1} = k_1 \left[\left(\theta_{m_1} / N_1 \right) - \theta_{l_1} \right], \quad \tau_{l_2} = \tau_{k_{22}}.$$

Puisque les inerties et frottements des poulies sont négligés, la flexibilité équivalente des éléments de transmission de l'actionneur 2 vers le membre 2 peut être trouvée afin d'évaluer $\tau_{k_{22}}$. Les forces évaluées sur les poulies r_1'' et r_2 sont respectivement:

$$F_{r_1''} = k_{21} \frac{r_1'}{r_1 r_1''} \left(\frac{\theta_{m_2}}{N_2} - \theta_{r_1} \right) = F_b \quad (3.2)$$

$$F_b = F_{k_{22}} = \frac{k_{22}}{r_2} (\theta_{r_2} - \theta_{l_2}) \quad (3.3)$$

La force de rappel due à la flexibilité de la courroie est définie par $F_b = k_b (P_{1/0} - P_{2/0})$, où $P_{1/0}$ et $P_{2/0}$ sont les déplacements linéaires du point de contact limite de la courroie sur les poulies r_2 et r_1'' par rapport à sa position initiale (figure 3.3). Si la poulie r_1'' est immobile par rapport au référentiel inertiel et le membre 1 en rotation, alors le membre 2 est animé d'une rotation induite de $-(r_1''/r_2)\theta_{l_1}$. Par conséquent, $P_{1/0}$ et $P_{2/0}$ dépendent de la rotation des deux moteurs. La contribution de chaque moteur est la suivante:

$$P_{1/0} = P_{11/0} + P_{12/0} = \frac{r_1 r_1''}{r_1'} \left(\alpha \frac{\theta_{m_1}}{N_1} + \theta_{r_1} \right) - r_1'' \theta_{l_1} \quad (3.4)$$

$$P_{2/0} = P_{21/0} + P_{22/0} = r_2 \left(-\theta_{l_1} + (\theta_{l_1} + \theta_{r_2}) \right) \quad (3.5)$$

avec $\alpha = 0$ si le moteur 2 est immobile par rapport au référentiel inertiel, $\alpha \neq 0$

dans le cas contraire. Nous obtenons:

$$F_b = k_b \left(\frac{r_1 r_1''}{r_1'} \left(\alpha \frac{\theta_{m_1}}{N_1} + \theta_{r_1} \right) - r_1'' \theta_{l_1} - r_2 \theta_{r_2} \right) \quad (3.6)$$

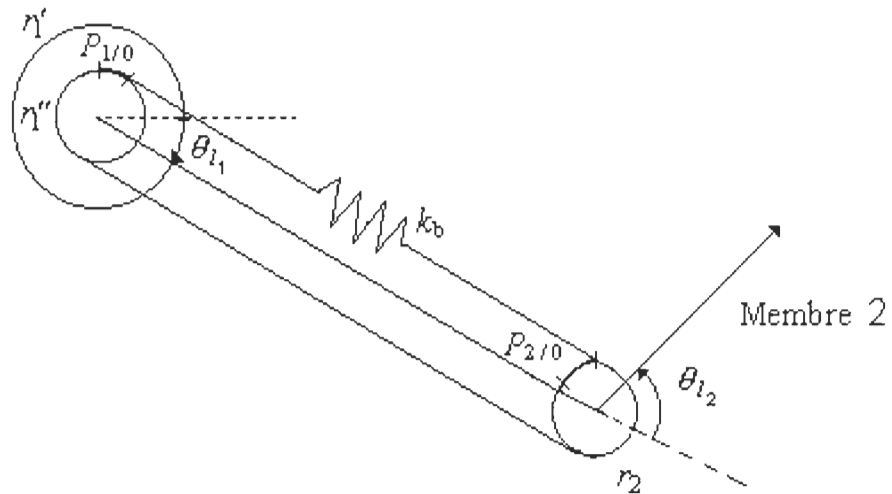


Figure 3.3 Déplacement des poulies r_1'' et r_2

En utilisant les trois équations en F_b (3.2), (3.3) et (3.6) on définit

$$D_e = \frac{k_b k_{22}}{R} + k_{21} R \left(\frac{k_{22}}{r_2^2} + k_b \right), \quad R = \frac{r_2 r_1'}{r_1 r_1''}$$

pour obtenir

$$\theta_{r_1} = \frac{-k_b k_{22} \alpha \frac{\theta_{m_1}}{RN_1} + Rk_{21} \left(\frac{k_{22}}{r_2^2} + k_b \right) \frac{\theta_{m_2}}{N_2}}{D_e} + \frac{k_b k_{22} \left(\frac{r_1''}{r_2} \theta_{l_1} + \theta_{l_2} \right)}{D_e} \quad (3.7)$$

$$\theta_{r_2} = \frac{k_{21} k_b \left(\alpha \frac{\theta_{m_1}}{N_1} + \frac{\theta_{m_2}}{N_2} - \frac{r_1'}{r_1} \theta_{l_1} \right)}{D_e} + \frac{\frac{k_{22}}{r_2} \left(k_b \frac{r_1 r_1''}{r_1'} + k_{21} \frac{r_1'}{r_1 r_1''} \right) \theta_{l_2}}{D_e} \quad (3.8)$$

Finalement, il s'ensuit:

$$\tau_{l_2} = \tau_{k_{22}} = k_{22} (\theta_{r_2} - \theta_{l_2}) \quad (3.9a)$$

$$\tau_{l_2} = k_2 \left(\alpha \frac{\theta_{m_1}}{N_1} + \frac{\theta_{m_2}}{N_2} - \frac{r_1'}{r_1} \theta_{l_1} - R \theta_{l_2} \right) \quad (3.9b)$$

avec

$$k_2 = \frac{k_{21} k_b k_{22}}{k_b k_{22} + R^2 k_{21} \left(\frac{k_{22}}{r_2^2} + k_b \right)}$$

La dynamique des actionneurs est obtenue en appliquant une nouvelle fois l'algorithme de N-E aux référentiels liés aux actionneurs en utilisant les

couples externes τ_{l_1}, τ_{l_2} appliqués aux extrémités de la structure. Deux trajets sont utilisés pour la propagation: (i) ressort de torsion k_2 , réducteur 2, moteur 2, courroie de transmission entre les actionneurs, réducteur 1 et moteur 1;(ii) ressort de torsion k_2 réducteur 1, moteur 1, en tenant compte de la réaction du couple de l'actionneur 2 vers l'actionneur 1. Nous obtenons le modèle dont la structure est la suivante:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{22}\ddot{\mathbf{q}}_m + \tilde{\mathbf{D}}_m\dot{\mathbf{q}}_m + \tilde{\mathbf{K}}_{22}\mathbf{q}_m + \tilde{\mathbf{K}}_{21}\mathbf{q}_l = \tau_m \quad (3.10)$$

$$\tau_m = \begin{bmatrix} \tau_{m_1} & \tau_{m_2} \end{bmatrix}^T, \mathbf{q}_m^T = \begin{bmatrix} \theta_{m_1} & \theta_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{22} = \begin{bmatrix} E + \frac{\alpha^2}{N_1^2}F & \frac{\alpha}{N_1}G \\ \frac{\alpha}{N_1}G & H \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{D}}_m = \begin{bmatrix} D_{m_1} & 0 \\ 0 & D_{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N_1}(k_1 + \alpha\frac{r'_1}{r_1}k_2) & -\frac{\alpha k_2}{N_1}R \\ -\frac{k_2}{N_2}\frac{r'_1}{r_1} & -\frac{k_2}{N_2}R \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{K}}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1^2}(k_1 + \alpha^2 k_2) & \frac{\alpha k_2}{N_1 N_2} \\ \frac{\alpha k_2}{N_1 N_2} & \frac{k_2}{N_2^2} \end{bmatrix}$$

Avec les paramètres suivants:

$$E = I_{r_1} + \frac{I_{12}}{N_1^2}$$

$$F = I_{r_2} + I_{s_2} + I_{22} + (M_{r_2} + M_{s_2})d_2^2$$

$$G = I_{r_2} + \frac{I_{22}}{N_2}$$

$$H = I_{r_2} + \frac{I_{22}}{N_2^2}$$

Finalement, la dynamique du manipulateur dans sa totalité (actionneurs et membres) s'exprime comme suit:

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{q}}_l)\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{q}}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{q}}_l) = \tilde{\mathbf{m}} \quad (3.11)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{m_1} & \tau_{m_2} \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\mathbf{q}} = [\tilde{\mathbf{q}}_l^T \quad \tilde{\mathbf{q}}_m^T]^T$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{q}}_l) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{M}}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}_l), \tilde{\mathbf{M}}_{22}), \quad \tilde{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{q}}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{C}}_{11}(\tilde{\mathbf{q}}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l), \mathbf{0}_{2 \times 2})$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{D}}_l, \tilde{\mathbf{D}}_m), \quad \tilde{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{q}}_l) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_l(\tilde{\mathbf{q}}_l)^T & \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\check{\mathbf{K}}_{11} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 R \frac{r_1'}{r_1} & k_2 R^2 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{K}}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{N_1} & 0 \\ -\frac{\alpha k_2}{N_1} R & -\frac{k_2}{N_2} R \end{bmatrix}$$

$$\check{\mathbf{K}}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N_1} (k_1 + \alpha \frac{r_1'}{r_1} k_2) & -\frac{\alpha k_2}{N_1} R \\ -\frac{k_2}{N_2} \frac{r_1'}{r_1} & -\frac{k_2}{N_2} R \end{bmatrix}$$

$$\check{\mathbf{K}}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N_1^2} (k_1 + \alpha^2 k_2) & \frac{\alpha k_2}{N_1 N_2} \\ \frac{\alpha k_2}{N_1 N_2} & \frac{k_2}{N_2^2} \end{bmatrix}$$

3.4 Modélisation par la méthode de Lagrange-Euler

La méthode de Lagrange-Euler (L-E) est utilisée ici principalement comme moyen de vérification. De plus son application est intéressante car elle requiert dans ce cas l'application du principe de conservation des travaux virtuels. Les équations de la dynamique sont obtenues par des dérivations successives du Lagrangien que l'on définit comme étant la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système:

$L(\check{\mathbf{q}}, \dot{\check{\mathbf{q}}}) = K(\check{\mathbf{q}}, \dot{\check{\mathbf{q}}}) - P(\check{\mathbf{q}})$. Les équations du mouvement sont données par:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\check{\mathbf{q}}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \check{\mathbf{q}}} = \mathbf{u}$$

Nous appliquons en premier lieu la méthode aux liens, puis par la suite, aux actionneurs et éléments de transmission. Cependant, il est possible d'obtenir une formulation en une seule étape. En décomposant, le manipulateur membre à membre pour lesquels les énergies cinétique et potentielle sont une à une calculées, les expressions finales de chacune des énergies s'expriment comme suit:

$$K = \frac{1}{2} \left(I_1 + I_2 + I_c + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 a_1^2 + m_2 l_{c_2}^2 + M_c (a_1^2 + a_2^2) + 2(m_2 a_1 l_{c_2} + M_c a_1 a_2) \cos \theta_{l_1} \right) \dot{\theta}_{l_1}^2$$

$$P = -g \left((m_1 l_{c_1} + (M_c + m_2) a_1) \cos \theta_{l_1} + (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \cos (\theta_{l_1} + \theta_{l_2}) \right)$$

De là, est obtenue la formulation classique:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A + 2B \cos(\theta_{l_2}) & C + B \cos(\theta_{l_2}) \\ C + B \cos(\theta_{l_2}) & C \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_l + \begin{bmatrix} D_{l_1} & 0 \\ 0 & D_{l_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_l \\ & + \begin{bmatrix} -2\dot{\theta}_{l_2} & -\dot{\theta}_{l_2} \\ \dot{\theta}_{l_1} & 0 \end{bmatrix} B \sin(\theta_{l_2}) \dot{\mathbf{q}}_l + \begin{bmatrix} G_1(\theta_{l_1}, \theta_{l_2}) \\ G_2(\theta_{l_1}, \theta_{l_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{l_1} \\ u_{l_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dans la plupart des manipulateurs industriels, le couple est intégralement transmis du membre i au membre $i-1$, ce qui est le cas du couple u_{l_1} du membre 1 au moteur via τ_{k_1} , mais pas du couple u_{l_2} . Afin de relier u_{l_2} au

moteur 2 via $\tau_{k_{22}} = R\tau_{k_{21}}$, nous devons considérer le principe de conservation des travaux virtuels (Craig, 86):

$$\delta W = u_{l_1} d\theta_{l_1} + u_{l_2} d\theta_{l_2} = \tau_{k_1} d\theta_{l_1} + \tau_{k_{22}} (d\theta_{l_1} + d\theta_{l_2}) \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{k_1} \\ \tau_{k_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{l_1} \\ u_{l_2} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Cette transformation est appliquée aux équations de la dynamique des membres qui deviennent identiques à celles obtenues par N-E. L-E est appliquée aux actionneurs et éléments flexibles, tenant compte des expressions des énergies suivantes:

$$u(\tilde{\mathbf{q}}_m) = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{\theta_{m_1}}{N_1} - \theta_{l_1} \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\alpha \frac{\theta_{m_1}}{N_1} + \frac{\theta_{m_2}}{N_2} - \frac{r_1'}{r_1} \theta_{l_1} - \frac{r_1' r_2}{r_1 r_1''} \theta_{l_2} \right)^2 \quad (3.15)$$

$$k(\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_m) = k_{rotor1} + k_{sortie\ red1} + k_{stator2} + k_{rotor2} + k_{sortie\ red2}$$

$$k(\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_m) = \frac{1}{2} \left\{ I_{r1} \dot{\theta}_{m_1}^2 + I_{12} \frac{\dot{\theta}_{m_1}^2}{N_1^2} + (M_{s_2} d_2^2 \alpha^2 + I_{s_2}) \frac{\dot{\theta}_{m_1}^2}{N_1^2} \right. \quad (3.16)$$

$$\left. + M_{r_2} d_2^2 \frac{\dot{\theta}_{m_1}^2}{N_1^2} + I_{r_2} \left(\dot{\theta}_{m_2} + \frac{\alpha \dot{\theta}_{m_1}}{N_1} \right)^2 + I_{22} \left(\frac{\dot{\theta}_{m_2}}{N_2} + \frac{\alpha \dot{\theta}_{m_1}}{N_1} \right)^2 \right\}$$

Les dérivations du Lagrangien ainsi obtenu produisent des équations identiques à celles obtenues par l'algorithme de N-E.

3.5 Étude des propriétés du modèle

Des changements de variables sont maintenant envisagés afin d'établir les propriétés usuelles du modèle. En particulier, nous désirons obtenir une matrice \mathbf{M} de masse symétrique, de même pour les matrices des coefficients de rigidité \mathbf{K} et de frottement \mathbf{D} .

Nous considérons la configuration pour laquelle $\alpha \neq 0$. Additionnons d'abord la deuxième ligne à la première ligne dans (3.1). Nous obtenons ainsi une matrice de masse et de frottement symétriques. Ensuite avec le choix

suivant $R = \frac{r_1' r_2}{r_1 r_1''} = \alpha \beta$, avec $\alpha = \frac{r_1'}{r_1}$, $\beta = \frac{r_2}{r_1''}$, la symétrie de la matrice de

flexibilité est obtenue si nous imposons $\beta = 1$, i.e. $R = \alpha$:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \alpha^2 \beta & k_2 \alpha^2 \beta^2 & -\frac{k_1 + k_2 \alpha^2 \beta}{N_1} & -\frac{k_2 \alpha \beta}{N_2} \\ k_2 \alpha^2 \beta & k_2 \alpha^2 \beta^2 & -\frac{k_2 \alpha^2 \beta}{N_1} & -\frac{k_2 \alpha \beta}{N_2} \\ -\frac{k_1 + k_2 \alpha^2}{N_1} & -\frac{k_2 \alpha^2 \beta}{N_1} & \frac{k_1 + k_2 \alpha^2}{N_1^2} & \frac{k_2 \alpha}{N_1 N_2} \\ -\frac{k_2 \alpha}{N_2} & -\frac{k_2 \alpha \beta}{N_2} & \frac{k_2 \alpha}{N_1 N_2} & \frac{k_2}{N_1^2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Effectuons le changement de variables suivant:

$$\mathbf{q} = \text{diag}(N_1, \alpha N_2, 1, 1) \tilde{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{m} = [\text{diag}(N_1, \alpha N_2, 1, 1)]^{-1} \check{\mathbf{m}}$$

Les matrices du système peuvent s'écrire comme suit:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.18)$$

où

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = [0, 0, \tau_{m_1}, \tau_{m_2}]^T, \quad \mathbf{M}(\mathbf{q}) = \text{diag}(\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}), \mathbf{M}_{22}(\mathbf{q})),$$

\mathbf{M}_{22} est définie comme précédemment et de plus:

$$\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{A + 2B \cos\left(\frac{q_{l_2}}{N_2 \alpha}\right)}{N_1^2} & \frac{C + B \cos\left(\frac{q_{l_2}}{N_2 \alpha}\right)}{N_1 N_2 \alpha} \\ \frac{C + B \cos\left(\frac{q_{l_2}}{N_2 \alpha}\right)}{N_1 N_2 \alpha} & \frac{C}{N_2^2 \alpha^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{-2B\dot{q}_{l_2} \sin\left(\frac{q_{l_2}}{N_2 \alpha}\right)}{N_1^2 N_2 \alpha} & \frac{-B\dot{q}_{l_2} \sin\left(\frac{q_{l_2}}{N_2 \alpha}\right)}{N_1 N_2^2 \alpha^2} \\ \frac{B\dot{q}_{l_1} \sin\left(\frac{q_{l_2}}{N_2 \alpha}\right)}{N_1^2 N_2 \alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \text{diag}\left(\frac{D_{l_1}}{N_1^2}, \frac{D_{l_2}}{N_1 N_2}, D_{m_1}, D_{m_2}\right) \\
\mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \frac{G_1\left(\frac{q_{l_1}}{N_1}, \frac{q_{l_2}}{\alpha N_2}\right)}{N_1} & \frac{G_2\left(\frac{q_{l_1}}{N_1}, \frac{q_{l_2}}{\alpha N_2}\right)}{\alpha N_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{K}_e \\ -\mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e \end{bmatrix}, \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2 \alpha^2}{N_1^2} & \frac{k_2 \alpha}{N_1 N_2} \\ \frac{k_2 \alpha}{N_1 N_2} & \frac{k_2}{N_2^2} \end{bmatrix} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha = 0$ (actionneurs 1 et 2 fixes par rapport au référentiel inertiel), de nouvelles transformations à partir de l'équation (3.1) sont envisagées pour obtenir les mêmes propriétés: en redéfinissant la variable

$$\mathbf{q} = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ RN_2 & RN_2 \end{bmatrix}, 1, 1\right) \cdot \tilde{\mathbf{q}}$$

et en divisant les deux premières lignes de l'équation dynamique par N_1 et RN_2 , la symétrie de la matrice de masse est obtenue; de plus en fixant

$R = \frac{r_1'}{r_1}$, la symétrie de la matrice de flexibilité est obtenue. Finalement, les

matrices suivantes sont utilisées pour le système:

$$\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{A-C}{N_1^2} & \frac{R}{N_1 N_2} B \cos\left(\frac{q_{l_2} R}{N_2} - \frac{q_{l_1}}{N_1}\right) \\ \frac{R}{N_1 N_2} B \cos\left(\frac{q_{l_2} R}{N_2} - \frac{q_{l_1}}{N_1}\right) & \frac{R^2}{N_2^2} C \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \frac{-R\dot{q}_{l_2}}{N_1^2 N_2} & \frac{R}{N_1 N_2} \left(\frac{\dot{q}_{l_1}}{N_1} - \frac{R\dot{q}_{l_2}}{N_2} \right) \\ \frac{R\dot{q}_{l_1}}{N_1^2 N_2} & 0 \end{bmatrix} B \sin\left(\frac{q_{l_2} R}{N_2} - \frac{q_{l_1}}{N_1}\right)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \frac{D_{l_1} + D_{l_2}}{N_1^2} & -\frac{D_2 R}{N_1 N_2} \\ -\frac{D_2 R}{N_1 N_2} & -\frac{D_2 R^2}{N_2^2} \end{bmatrix}, D_{m_1}, D_{m_2} \right)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{G\left(\frac{q_{l_1}}{N_1}, \frac{Rq_{l_2}}{N_2} - \frac{q_{l_1}}{N_1}\right)}{N_1} \\ \frac{G\left(\frac{q_{l_1}}{N_1}, \frac{Rq_{l_2}}{N_2} - \frac{q_{l_1}}{N_1}\right)}{RN_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e & -\mathbf{K}_e \\ -\mathbf{K}_e & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{K}_e = \text{diag} \left(\frac{k_1}{N_1^2}, \frac{k_2}{N_2^2} \right).$$

Le couple \mathbf{m} demeure inchangé. Quelle que soit la configuration envisagée, d'après l'expression classique (3.18), nous obtenons les mêmes

propriétés que pour un manipulateur à chaîne cinématique ouverte, à savoir: matrice de masse \mathbf{M} symétrique définie bornée; matrices de rigidité \mathbf{K} et de frottement \mathbf{D} symétriques et semi-définies positives; vecteur de gravitation \mathbf{G} borné. Remarquons les couplages au niveau des matrices des inerties des moteurs \mathbf{M}_{22} et de la matrice de flexibilité \mathbf{K} , lorsque le manipulateur est en configuration ouverte, i.e. $\alpha = 0$.

Quelle que soit la formulation de la matrice de Coriolis et quel que soit le vecteur \mathbf{z} , nous avons toujours:

$$\mathbf{z}^T \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \right) \mathbf{z} = 0 \quad (3.20)$$

Une propriété utilisée pour les observateurs adaptatifs est la linéarité du modèle dynamique envers les paramètres géométriques, inertiels ainsi que les paramètres de frottement et de rigidité, i.e. pour tout $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$, l'équation (3.18) peut être mise sous la forme:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\mathbf{a} \quad (3.21)$$

\mathbf{a} est le vecteur des paramètres et \mathbf{Y} la matrice de régression du manipulateur.

Nous avons les propriétés usuelles de la matrice de Coriolis, à savoir qu'elle est bornée au sens de la norme Euclidienne:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq m_c \|\dot{\mathbf{x}}\|, \quad m_c > 0, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n \quad (3.22)$$

et qu'elle satisfait la relation suivante (formulation selon le symbole de Christoffel):

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\xi = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \xi)\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \xi \in \mathbf{R}^n \quad (3.23)$$

Les bornes suivantes de la matrice de masse seront utilisées:

$$m_l \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq m_u, \quad m_l, m_u > 0, \forall \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n \quad (3.24)$$

De telles bornes existent car le manipulateur ne contient que des articulations rotoïdes. Si le manipulateur contient des axes prismatiques, il faut restreindre \mathbf{q} à un espace de travail fini dans (3.24).

Dans la suite du texte, les matrices de l'équation (3.18) de la dynamique du système ainsi que les variables d'état qui seront utilisées, sont celles obtenues au cours de l'une des deux transformations précédentes d'après la configuration envisagée.

CHAPITRE 4

OBSERVATEURS CLASSIQUES

Introduction et conditions de simulation

Dans ce chapitre, trois observateurs dits classiques car peu robustes vis-à-vis de certaines incertitudes, sont présentés: le filtre de Kalman étendu, un observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman et un observateur basé sur la pseudo-linéarisation de l'erreur d'estimation.

Pour toutes les simulations envisagées, la configuration du manipulateur en chaîne cinématique ouverte ($\alpha=0$) est employée. Un système commandé est souvent réglé selon les performances qu'il présente, en terme de dépassement et de temps de réponse, lors de la réponse à une consigne de type échelon. Nous ne pouvons espérer raisonner exactement de même pour apprécier l'erreur d'estimation à cause de l'erreur de poursuite non nulle en régime transitoire. La meilleure situation est celle où un correcteur est choisi de façon à obtenir une erreur de poursuite dont la décroissance est la plus grande possible. Notons aussi, pour les simulations, que les erreurs d'estimation initiales, surtout pour les grandeurs reconstruites, doivent être

non nulles. Le cas contraire entraînerait des erreurs d'estimation constamment nulles. Afin d'évaluer les observateurs présentés aux chapitres 4 et 5, une loi de commande proportionnelle dérivée (P-D) avec asservissement sur les variables moteurs observées a été appliquée (voir figure 2.1):

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_{22} \left(-\mathbf{K}_p (\hat{\mathbf{q}}_m - \mathbf{q}_m^d) - \mathbf{K}_v \dot{\hat{\mathbf{q}}}_m \right)$$

où $\hat{\mathbf{q}}_m$ et $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_m$ représentent les positions estimées et vitesses estimées des moteurs et \mathbf{q}_m^d représente les positions désirées des moteurs.

Ce type de régulateur est fréquemment utilisé dans la littérature dédiée à l'étude des observateurs seulement.

La matrice d'inertie des moteurs est utilisée dans la loi de commande pour découpler partiellement la dynamique du moteur. Les gains du correcteur ont été syntonisés à $\mathbf{K}_p = \text{diag}(8905, 9457)$, $\mathbf{K}_v = 20 \text{diag}(1, 10)$ (temps de stabilisation à 5% de 200 ms côté moteur). Une consigne de 0.8 rad est utilisée. Pour conclure quant aux performances des observateurs, les erreurs d'estimation sont tracées. La loi de commande et les observateurs présentés sont conçus pour des valeurs nominales correspondant à une masse de la charge de 5 Kg et aux valeurs de rigidité décrites à la section 3.2.3 (1500 Nmrad⁻¹s); ceci permettant de vérifier la robustesse des observateurs

face à des variations de paramètres. Chaque tracé représente l'erreur d'observation que l'on identifie comme suit:

(i) masse et rigidité nominales (trait continu —),

(ii) masse nominale (5 Kg) et rigidité augmentée de 50% (--),

(iii) masse de 0 Kg avec une rigidité nominale (-.),

(iv) masse de 10 Kg avec une rigidité nominale(..).

4.1 Filtres de Kalman Étendu

4.1.1 Linéarisation du système

Le filtre de Kalman étendu est utilisé comme observateur complet discret en milieu stochastique, i.e. présence de bruit sur les signaux de commande et de mesure. Cette reconstruction utilise le filtre de Kalman appliqué au modèle du robot linéarisé autour d'un point d'opération (Song & Grizzle, 92). De façon générale, les équations (3.18) du robot sont:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_l, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_l, \dot{\mathbf{q}}_m, \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

Nous désirons linéariser (4.1) le long de la trajectoire afin d'obtenir le système linéaire continu suivant:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{fke} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{fke} \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (4.2)$$

avec $\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix}$.

Explicitons l'obtention de cette forme linéaire. \mathbf{f} est de la forme:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) (-\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \quad (4.3)$$

La linéarisation autour du point $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m]$ est obtenue en considérant la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{q}} = & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{l_1}} \Delta \theta_{l_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{l_2}} \Delta \theta_{l_2} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{m_1}} \Delta \theta_{m_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{m_2}} \Delta \theta_{m_2} \\ & + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_{l_1}} \Delta \dot{\theta}_{l_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_{l_2}} \Delta \dot{\theta}_{l_2} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_{m_1}} \Delta \dot{\theta}_{m_1} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_{m_2}} \Delta \dot{\theta}_{m_2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Chaque dérivée partielle a pour expression: pour tout $i=1,2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{l_i}} = & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left(\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)}{\partial \theta_{l_i}} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{G}(\mathbf{q})) \right. \\ & \left. - \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)}{\partial \theta_{l_i}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta_{l_i}} - \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \theta_{l_i}} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{m_i}} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta_{m_i}} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_{l_i}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \left(-\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)}{\partial \theta_{l_i}} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \theta_{l_i}} - \mathbf{D} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \theta_{l_i}} \right) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_{m_i}} = -\mathbf{D} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\theta}_{m_i}} \quad (4.8)$$

Les dérivées partielles des éléments intervenant dans les expressions précédentes sont les suivantes:

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)}{\partial \theta_{l_1}} = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{q})}{\partial \theta_{l_2}} = \begin{bmatrix} \frac{-2B}{N_1^2 N_2 \alpha} \sin\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & \frac{-B}{N_1 N_2^2 \alpha^2} \sin\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & & \\ \frac{-B}{N_1 N_2^2 \alpha^2} \sin\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & 0 & & \\ \hline & & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \\ \hline & & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \theta_{l_1}} = \mathbf{0}_{4 \times 4} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \theta_{l_2}} = \begin{bmatrix} \frac{-2B\dot{\theta}_{l_2}}{N_1^2 N_2^2 \alpha^2} \cos\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & \frac{-2B\dot{\theta}_{l_2}}{N_1 N_2^3 \alpha^3} \cos\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & & \\ \frac{-B\dot{\theta}_{l_1}}{N_1^2 N_2^2 \alpha^2} \cos\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & 0 & & \\ \hline & & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \\ \hline & & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\theta}_{l_1}} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \frac{B}{N_1^2 N_2 \alpha} \sin\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & 0 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\theta}_{l_2}} = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{-2B}{N_1^2 N_2 \alpha} \sin\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & \frac{-B}{N_1 N_2^2 \alpha^2} \sin\left(\frac{\theta_{l_2}}{N_2 \alpha}\right) & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ 0 & 0 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \right] \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \theta_{l_1}} = \left[\begin{array}{c} \frac{g}{N_1^2} \left((m_1 l_{c_1} + (m_c + m_2) a_1) \sin \theta_{l_1} \right. \\ \left. + (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \sin(\theta_{l_1} + \theta_{l_2}) \right) \\ \hline -\frac{g}{N_1 N_2 \alpha} (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \sin(\theta_{l_1} + \theta_{l_2}) \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{array} \right] \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \theta_{l_2}} = \left[\begin{array}{c} -\frac{g}{N_1 N_2 \alpha} (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \sin(\theta_{l_1} + \theta_{l_2}) \\ \hline -\frac{g}{N_2^2 \alpha^2} (m_2 l_{c_2} + m_c a_2) \sin(\theta_{l_1} + \theta_{l_2}) \\ \hline \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{array} \right] \quad (4.15b)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta_{l_1}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta_{l_2}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta_{m_1}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \theta_{m_2}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\theta}_{l_1}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\theta}_{l_2}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\theta}_{m_1}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\theta}_{m_2}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

De tout cela, on déduit:

$$\mathbf{A}_{fke} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_l} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_m} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_l} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\theta}_m} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

$$\mathbf{B}_{fke} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

où $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{l_1}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \theta_{l_2}} \end{bmatrix}$ avec la même forme pour les dérivées partielles en

$\theta_m, \dot{\theta}_l$ et $\dot{\theta}_m$.

Puisqu'une version discrétisée du filtre de Kalman étendu est utilisée, l'équation (4.2) est discrétisée en employant un bloqueur d'ordre zéro sur l'entrée, ce qui donne:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_{fke,k} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{fke,k} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}\end{aligned}\quad (4.18)$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{fke,k} &= e^{\mathbf{A}_{fke} T} \\ \mathbf{B}_{fke,k} &= \int_0^T e^{\mathbf{A}_{fke}(T-t)} \mathbf{B}_{fke} dt\end{aligned}\quad (4.19)$$

avec $\mathbf{x}_k^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k^T & \dot{\mathbf{q}}_k^T \end{bmatrix}$

T est la période d'échantillonnage. \mathbf{v} et \mathbf{w} sont supposés être des bruits blancs Gaussiens non corrélés à moyenne nulle et de variance respective σ_v^2 et σ_w^2 .

4.1.2 Observateurs: expression et convergence

Les matrices du système linéarisé sont évaluées à chaque instant d'échantillonnage, i.e. à chaque nouveau point d'opération qui est l'estimation de l'état trouvée à l'échantillonnage précédent. L'algorithme d'estimation en discret est le suivant:

Étape de correction:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}_k^T \left[\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R} \right]^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k/k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \left[\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \right] \\ \mathbf{P}_{k/k} &= \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Étape de prédiction:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k}) \\ \mathbf{P}_{k+1/k} &= \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{B}_k^T \end{aligned} \quad (4.21)$$

En supposant que l'erreur de covariance Q est bornée, il est montré que le filtre de Kalman étendu pour un système non linéaire est localement asymptotiquement stable (Song & Grizzle, 92) si nous avons une bonne estimation de l'état initial du système ou si le système présente une faible non-linéarité. Pour obtenir une erreur de covariance bornée le système doit remplir les conditions d'observabilité le long de la trajectoire du système, ce qui est réalisé lorsque les estimées *a priori* et *a posteriori* sont dans un proche voisinage de l'état réel du système. Si tel n'est pas le cas, l'estimation présente un biais ou même diverge. L'état complet du système est reconstruit à partir de la mesure des positions des membres et des moteurs, ce qui permet directement de satisfaire la condition de rang d'observabilité.

4.1.3 Résultats de simulation

Les conditions initiales pour les grandeurs réelles sont fixées à zéro exceptées les positions des membres et moteurs, fixées à $\pi/20$ rad en valeurs normalisées (membres et moteurs alignés). Les grandeurs estimées sont initialisées comme précédemment auxquelles est ajouté un bruit blanc Gaussian de variance σ_v^2 . Les paramètres suivants ont été utilisés: $\hat{\mathbf{x}}_{k/k+1} = \mathbf{0}$, $\sigma_v^2 = 0.001$, $\sigma_w^2 = 0.1$, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q} = 0.001 \sigma_v^2 \cdot \mathbf{I}$, $\mathbf{R} = \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}$. L'initialisation des matrices de covariance a été effectuée afin d'obtenir la plus petite erreur moyenne quadratique d'estimation possible.

Avec la loi de commande choisie, la constante de temps la plus faible est supérieur à 100 ms. Bien que le principe de séparation ne s'applique pas, on peut penser intuitivement qu'il faudra syntoniser le filtre de façon à ce que l'erreur dynamique soit plus rapide que l'erreur de poursuite (5 à 10 fois plus rapide pour les systèmes linéaires). La constante de temps la plus faible du système en boucle fermée avec le filtre sera supérieure à 10 ms. La période d'échantillonnage, d'après le théorème de Shannon, doit au plus être égale à la moitié de la plus faible constante de temps du système. C'est pourquoi une période d'échantillonnage de 1 ms a été choisie.

Le temps de stabilisation, pour les conditions nominales du système, de la position des membres est inférieur à 50 ms (fig. 4.1). La vitesse des membres se stabilise rapidement également: 150 ms environ (fig. 4.2). La stabilisation des grandeurs côté moteur est plus lente malgré le fait qu'elles soient mesurées, mais demeure inférieure à 0.5 s.

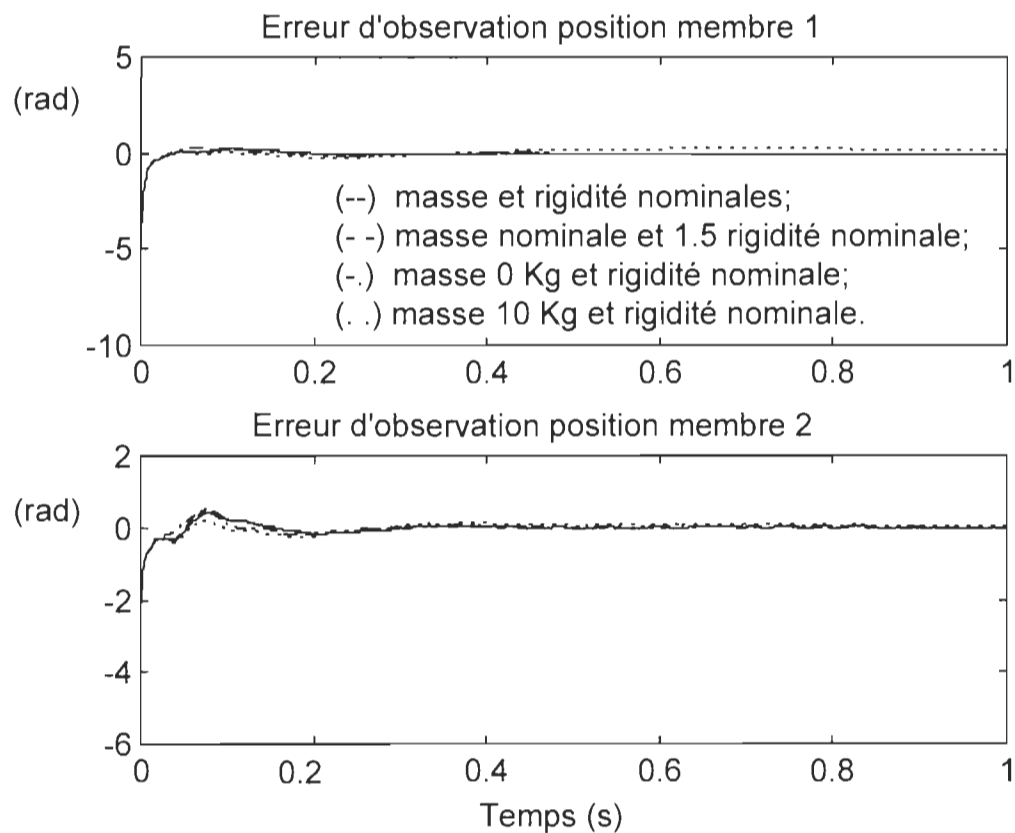


Figure 4.1a - Filtre de Kalman Étendu (positions membres)

La robustesse de la stabilité du filtre reste correcte excepté lorsque la masse de la charge est supérieure à la masse nominale (cas d'une charge de

10 Kg). Lorsque le système est mis sous la forme de l'équation (4.3), les coefficients de $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_j)$ ont tendance à diminuer en valeur absolue lorsque les termes inertiels du système, en particulier la masse de la charge, augmentent. En conséquence, les valeurs propres du système linéarisé ont tendance à s'annuler ou s'approcher de zéro lorsque les termes inertiels augmentent, d'où une perte éventuelle de la stabilité. Dans le cas univariable, l'amortissement et la fréquence naturelle du système diminuent selon le même rapport lorsque l'inertie augmente.

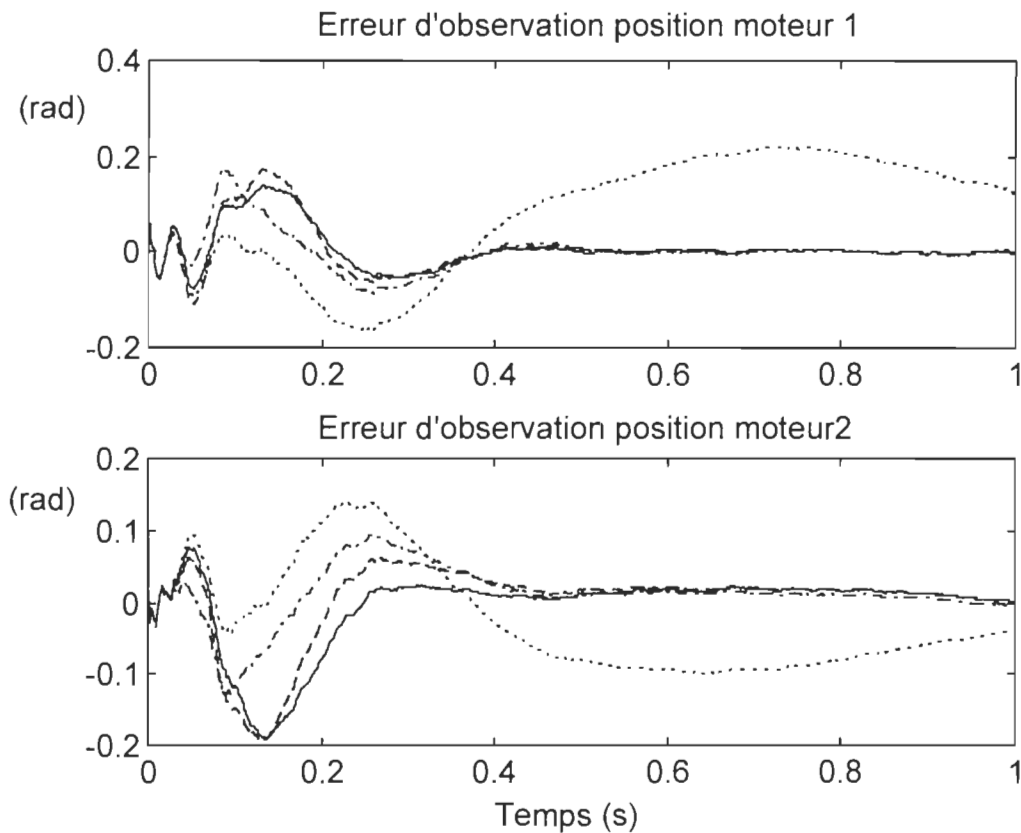


Figure 4.1b - Filtre de Kalman Étendu (positions moteurs)

De plus, quelles que soient les variations de paramètres, les performances correspondantes sont, en régime transitoire, détériorées par rapport à celles correspondant aux valeurs nominales: de ce point de vue la robustesse est faible. Ces conclusions sont généralisables à l'ensemble des observateurs étudiés dans ce chapitre.

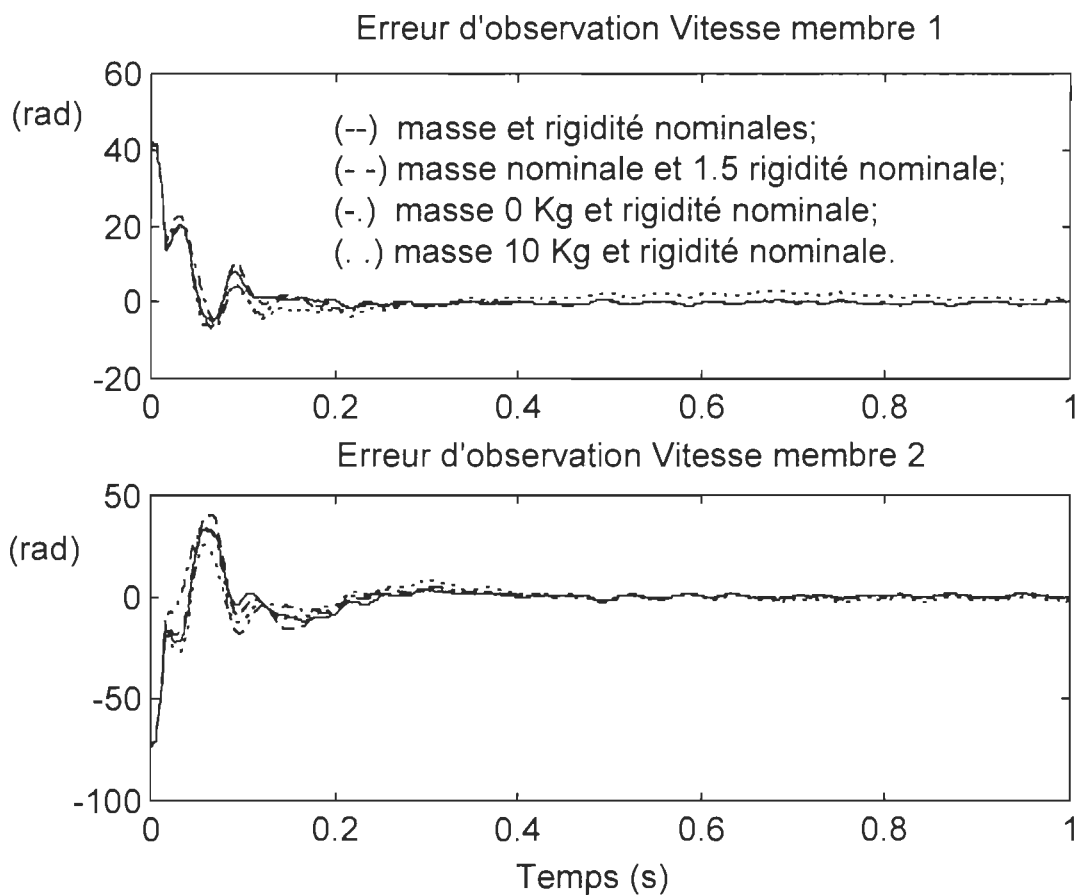


Figure 4.2a - Filtre de Kalman Étendu (vitesses membres)

Pour la commande, les vitesses sont prépondérantes lors du régime transitoire de la réponse du système, alors que les positions sont importantes

pour obtenir un écart stationnaire le plus faible possible. En conséquence, l'utilisation de l'observateur par une loi de commande risque d'entraîner un régime transitoire faiblement oscillatoire pour le moteur 2 et le membre 2.

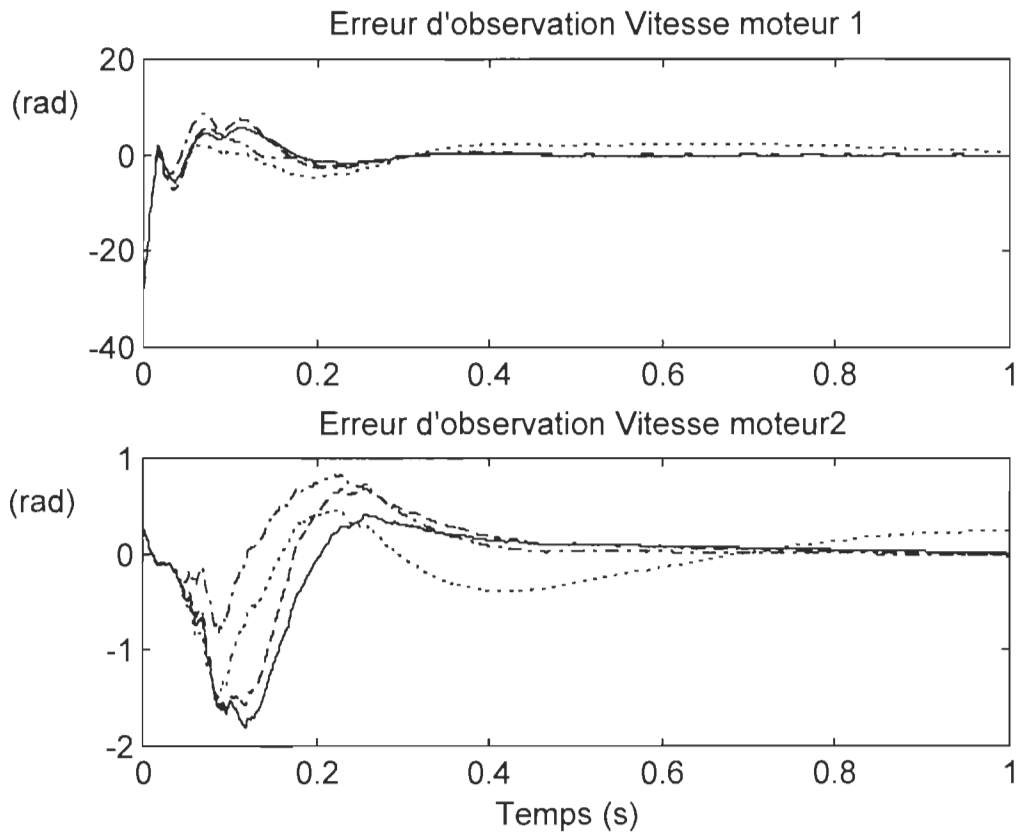


Figure 4.2b - Filtre de Kalman Étendu (vitesses moteurs)

Bien que non montrés, des essais ont été réalisés avec des périodes d'échantillonnage plus élevées et cela semble jouer un rôle sur la précision des résultats: lorsqu'elle est supérieure à 10 ms nous observons un écart stationnaire important; de plus grandes valeurs de la période d'échantillonnage conduisent à une divergence du filtre. L'inversion de

matrice présente à l'étape de correction peut ralentir le temps d'exécution du Filtre de Kalman étendu exprimé en discret. Cependant, le filtre de Kalman étendu à gain constant nécessite la résolution de l'équation de Riccati stationnaire par des transformations de matrice (transformation d'Hessenberg) qui ne présentent pas *a priori*, un avantage certain.

4.2 Observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman

4.2.1 Définition et propriétés

Jankovic (92) a proposé l'observateur déterministe suivant pour reconstituer les positions et vitesses des moteurs suite à la mesure des positions et vitesses des liens. Aucun frottement n'est considéré. Définissons

$\mathbf{x}^T = [\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]$ et représentons le système comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{y})\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

où

$$\mathbf{A}(\mathbf{y}) = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0}_{4 \times 4} & & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_l)\mathbf{K}_e & \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{array} \right]$$

et

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \text{---} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} (\mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) + \mathbf{D}_l) \dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{G}_l(\mathbf{q}_l) \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_e \\ -\mathbf{K}_e \end{array} \right] \mathbf{q}_l + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{array} \right]$$

avec $\mathbf{y}^T = \left[\mathbf{q}_l^T \quad \dot{\mathbf{q}}_l^T \right]$.

L'observateur est donné par le filtre de Kalman non linéaire:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{u})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{K}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}(t) \\ \dot{\mathbf{Q}}(t) = 2\mathbf{M}\mathbf{Q}(t) + \mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{u})\mathbf{Q}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}^T(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \\ \quad - \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}^T\mathbf{R}(t)\mathbf{C}\mathbf{Q}(t) + \mathbf{L}(t) \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

avec $\mathbf{M} > \mathbf{0}$ constant; $\mathbf{Q}(t_0) = \mathbf{Q}_0 > \mathbf{0}$, $\mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0 > \mathbf{0}$ et $\mathbf{R}(t)$ sont des matrices définies positives uniformément, utilisées pour la conception de l'observateur.

Dans (Jankovic, 92), la propriété que la matrice des masses et inerties soit positive, est exploitée pour démontrer la stabilité asymptotique globale de l'erreur d'estimation $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ si $\dot{\mathbf{q}}_l$ est uniformément bornée. La preuve est valable en présence de couplages gyroscopiques et ne requiert aucun frottement. Cependant l'ajout de frottement fluide au niveau des membres modifie uniquement le vecteur $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ (frottement fluide est fonction de \mathbf{y} : grandeur mesurée), donc la convergence qui repose sur les valeurs propres de la matrice d'observabilité instantanée du système (écrite en fonction de \mathbf{A}) est

inchangée; ce qui n'est pas le cas si l'on envisage du frottement présent au niveau des moteurs. La matrice \mathbf{A} serait alors modifiée et la condition du rang d'observabilité pourrait être perdue.

4.2.2 Résultats de simulation

Nous considérons le système avec les mêmes conditions initiales que pour l'observateur précédent. Les paramètres suivants ont été employés:

$$M=1000, L=R= 100 \cdot I, Q(t=0)=I_{8 \times 8}.$$

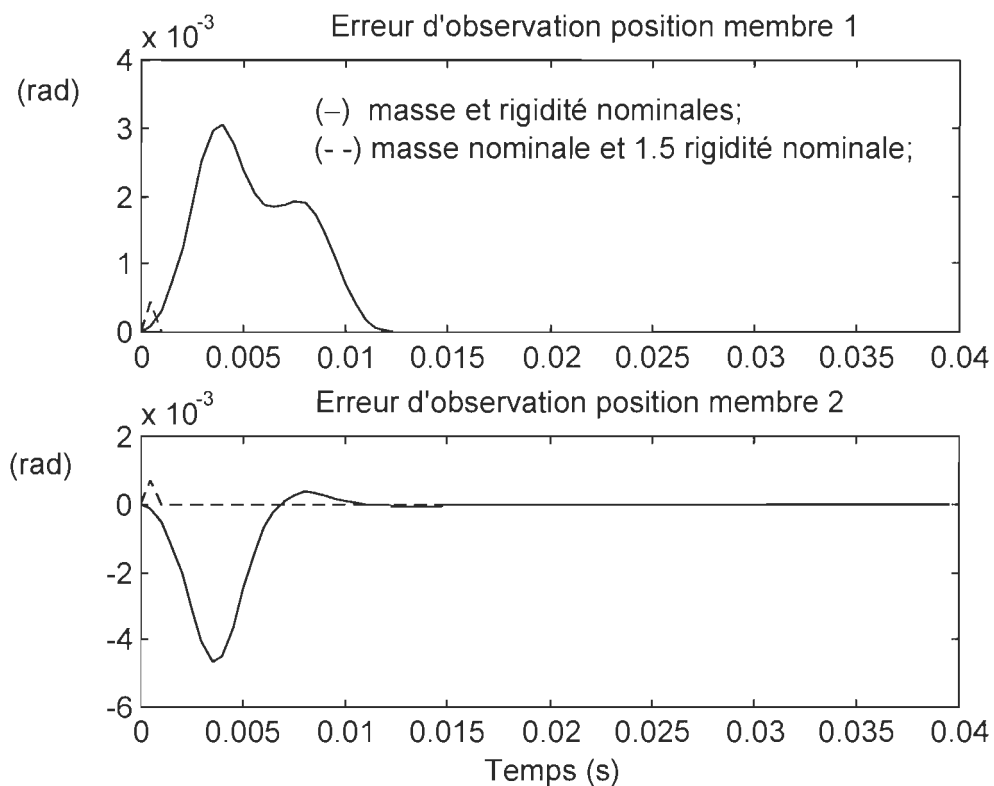


Figure 4.3a - Observateur non linéaire basé sur Kalman (positions membres)

Le temps de convergence est, dans tous les cas de figure, inférieur à 0.03 s. (Fig. 4.3 et 4.4), ce qui représente un bon résultat pour la commande (l'erreur de position du membre 1, figure 4.3, n'est pas visible car trop rapide pour l'échelle choisie). L'accroissement de M permet d'accélérer les réponses au détriment de plus importants dépassements.

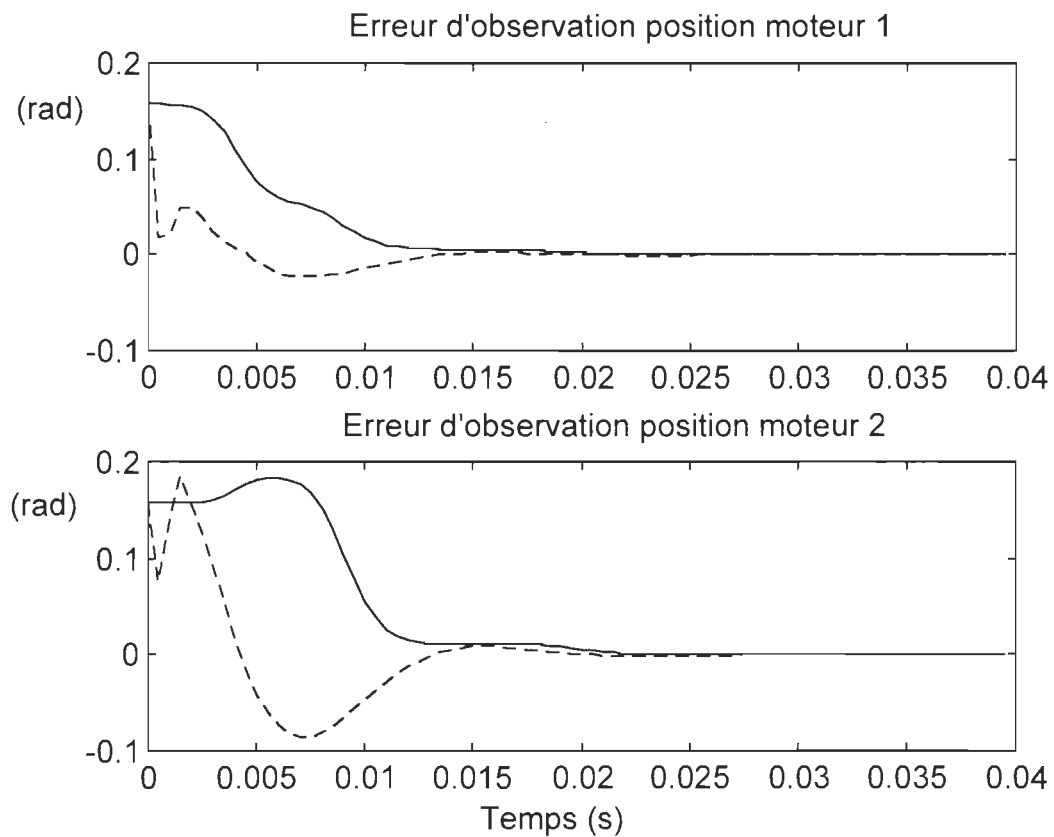


Figure 4.3b - Observateur non linéaire basé sur Kalman (positions moteurs)

Cependant, la robustesse de l'observateur vis-à-vis des paramètres inertiels (non représentée) est très mauvaise. Nous avons représenté uniquement le cas d'une variation de la rigidité: les réponses ne sont que très faiblement détériorées.

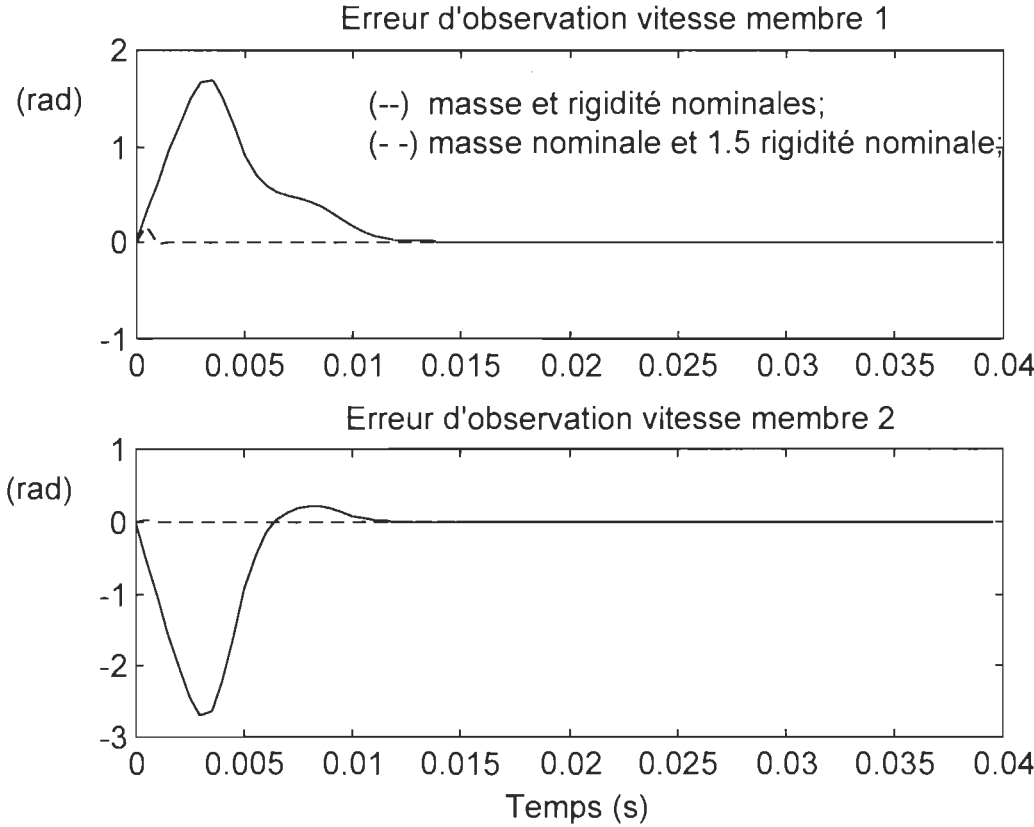


Figure 4.4a - Observateur non linéaire basé sur Kalman (vitesses membres)

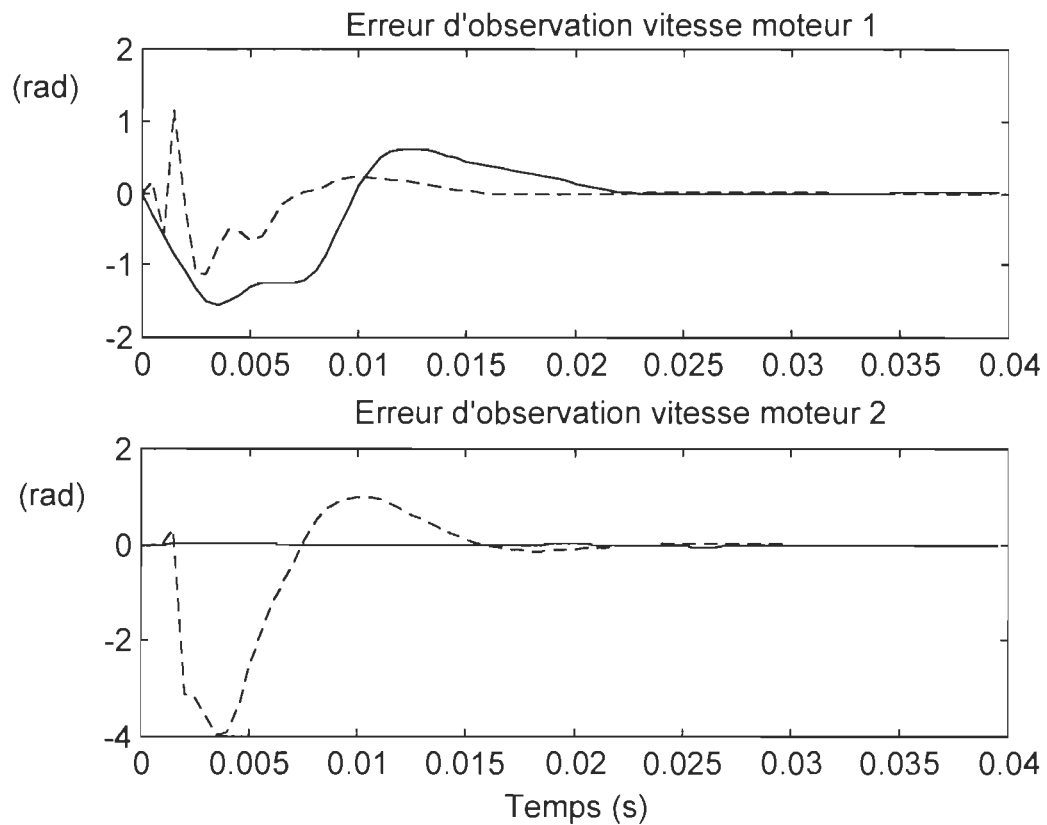


Figure 4.4b- Observateur non linéaire basé sur Kalman (vitesses moteurs)

L'implantation pour une loi de commande est satisfaisante lorsque les frottements côté moteurs sont faibles. Lorsque ces derniers sont élevés, une perte de la convergence a été observée. En effet comme déjà expliqué en fin de section 4.2.1, les frottements côté moteurs interviennent dans la matrice d'observabilité. On peut penser que si ces frottements sont faibles, la

condition de rang de cette matrice est toujours satisfaite. Des frottements plus importants entraîneraient le résultat inverse.

4.3 Observateur basé sur la linéarisation de l'erreur dynamique

4.3.1 Définition et propriétés

Rappelons que le principe est de trouver une transformation non linéaire (Krener & Respondek, 85) vérifiant certaines conditions d'intégrabilité basées sur le modèle du système, qui permet d'obtenir un système linéaire sous une forme canonique observable. La construction d'un observateur de type Luenberger est alors aisée. De plus, si la transformation non linéaire est un difféomorphisme, les valeurs propres sont conservées. Par conséquent, l'observateur demeure asymptotiquement stable dans les coordonnées du système d'origine. Cependant, Nicosia et al. (88) ont montré que les dites conditions d'existence de la transformation ne sont pas satisfaites (en général) lorsque le manipulateur (rigide) est de dimension supérieure à un. Pour le cas du manipulateur flexible, les conclusions sont identiques car les conditions demandent entre autres une certaine symétrie dans les termes faisant intervenir des dérivées de la matrice de Coriolis, que nous n'avons pas d'avantage dans ce cas.

Nous allons suivre la méthodologie proposée par Nicosia et al. (88), afin de construire un observateur approximatif basée sur la linéarisation de l'erreur d'estimation. Pour cela adoptons les variables suivantes:

$$\begin{cases} \left(\mathbf{x}^{11T} \mathbf{x}^{21T} \right)^T = \left[\mathbf{q}_l^T & \mathbf{q}_m^T \right]^T = \mathbf{q} \\ \left(\mathbf{x}^{12T} \mathbf{x}^{22T} \right)^T = \left[\dot{\mathbf{q}}_l^T & \dot{\mathbf{q}}_m^T \right]^T = \dot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (4.24)$$

Avec lesquelles, nous pouvons réécrire le système sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{12} = f_1(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}, \mathbf{x}^{12}, \mathbf{0}_{2 \times 1}) \\ \dot{\mathbf{x}}^{22} = f_2(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}, \mathbf{0}_{2 \times 1}, \mathbf{x}^{22}) \end{cases} \quad (4.25)$$

Avec

$$f_i = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}\dot{\mathbf{x}} \quad , i=1,2$$

$$\begin{aligned} \left[a_i(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}) = a_{i0}(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}) + a_{i1} \right]_{i=1, \dots, 4} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) (-\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}}_l \\ &\quad - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}_l)) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\left[b_i \right]_{i=1, \dots, 4} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) \mathbf{D}$$

Considérons maintenant, un nouveau système que l'on déduit du précédent en négligeant les termes de Coriolis, soit:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{12} = h_1(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}, \mathbf{x}^{12}, \mathbf{0}_{2 \times 1}) \\ \dot{\mathbf{x}}_{22} = h_2(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}, \mathbf{0}_{2 \times 1}, \mathbf{x}^{22}) \end{cases} \quad (4.27)$$

Avec

$$h_i = a'_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + b_i \dot{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned} [a'_i(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}) = a'_{i0}(\mathbf{x}^{11}, \mathbf{x}^{21}) + a_{i1}]_{i=1, \dots, 4} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l)(-\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}_l)) \\ &+ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l)\mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$[b_i]_{i=1, \dots, 4} = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l)\mathbf{D}$$

Définissons les ensembles de points d'opération correspondant à chaque système comme suit:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}^f &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \mathbf{x}^{i2} = \mathbf{0}, \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, i = 1, 2\} \\ S_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}^h &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \mathbf{x}^{i2} = \mathbf{0}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, i = 1, 2\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Lorsque $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{11} \\ \mathbf{x}^{21} \end{bmatrix}$, i.e. lorsque la position des membres et des moteurs

est mesurée, les ensembles $S_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}^f$ et $S_{\mathbf{x}, \mathbf{u}}^h$ sont égaux. Autrement dit les deux systèmes sont équivalents lorsqu'ils sont considérés par rapport à l'un des

deux ensembles précédent. Cette approximation locale permet d'obtenir un système plus simple et par conséquent pouvant satisfaire plus aisément les conditions d'application de la linéarisation exacte. Lorsque cette approximation est appliquée, l'observateur obtenu possède les mêmes propriétés que celui de Krener et Respondek (85) à la différence près qu'il est local (relativement à l'ensemble des points d'opérations).

Lorsque le système modifié (4.27) ne présente aucun frottement, i.e. $\mathbf{D}=\mathbf{0}$, la forme canonique observable est directement obtenue. L'application d'un observateur linéaire est immédiat. Si nous considérons le cas où les frottements sont présents, les transformations suivantes sont envisagées:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{w} \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{y} \\ \mathbf{z}_2 = [\mathbf{x}^{i2} - \mathbf{b}\mathbf{x}^{i1}]_{i=1,2} \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Afin d'obtenir le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_2 + \gamma_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 = \gamma_2 \\ \mathbf{w}^T = [\mathbf{x}^{11^T} \quad \mathbf{x}^{21^T}] \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Avec

$$\begin{cases} \gamma_1 = \mathbf{b}\mathbf{x}^{11} \\ \gamma_2 = \mathbf{a} + \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \end{cases} \quad (4.32)$$

Dans ce nouveau repère, le système se présente sous une forme canonique observable à partir de laquelle on en déduit l'observateur suivant:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{g}(\mathbf{w}) + \mathbf{u} + \mathbf{K}_l(\mathbf{w} - \mathbf{C}(\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2^T)^T) \\ \mathbf{w} = \mathbf{z}_1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (\mathbf{I}_{4 \times 4} \quad \mathbf{0}_{4 \times 4}) \quad (4.34)$$

\mathbf{K}_l est choisi tel que $\mathbf{A} - \mathbf{K}_l\mathbf{C}$ soit stable.

La transformation permettant de retourner dans l'espace d'état original conserve les valeurs propres de l'observateur. D'après Nicosia et al. (88), l'observateur approximé ainsi réalisé est localement asymptotiquement stable. Pour un autre choix de grandeurs mesurées, les conditions d'intégrabilité nécessaires pour obtenir les changements de variables ne sont plus satisfaites.

4.3.2 Résultats de simulation

Les grandeurs mesurées sont toutes initialisées à zéro. Une erreur d'estimation de $\pi/20$ rad/s a été introduite sur les positions. Lorsque la linéarisation est effectuée, le problème revient à concevoir un observateur non linéaire de type Luenberger.

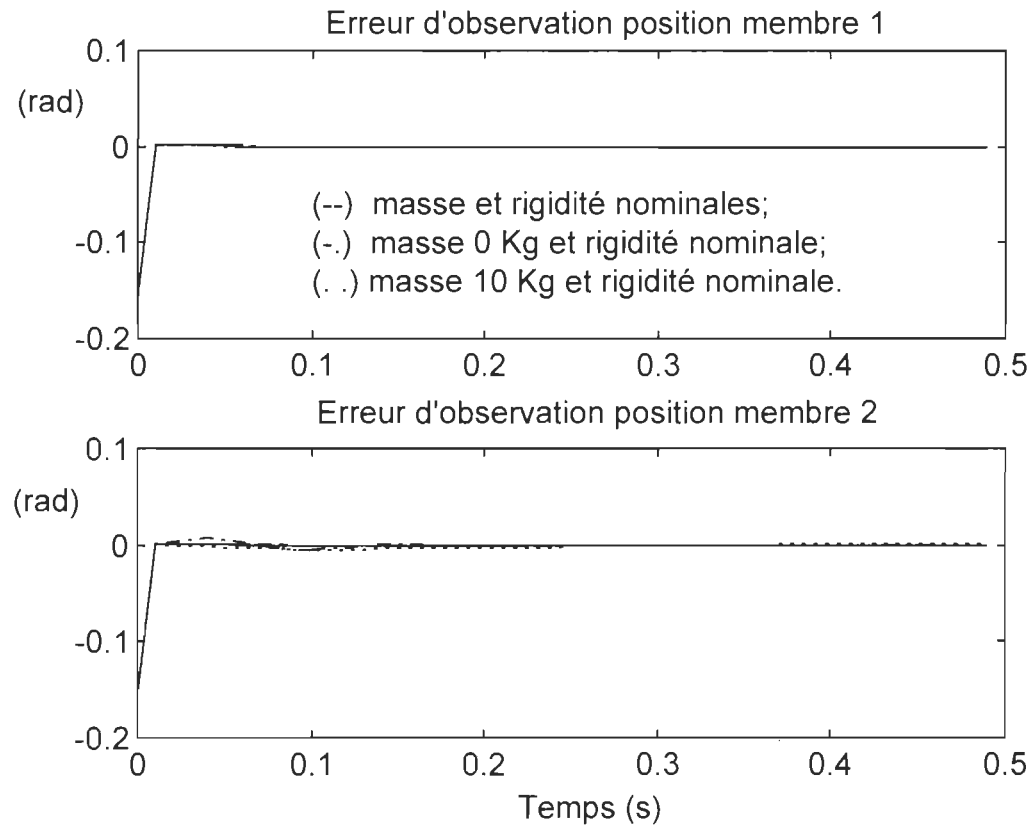


Figure 4.5a - Observateur basé sur la linéarisation exacte (positions membres)

Bien qu'en général le principe de séparation des modes ne s'applique

pas dans le cas de systèmes non linéaires, sauf cas particuliers (Vidyasagar, 92), nous choisissons les gains de l'observateur tel que ses pôles soient dix fois plus rapides que ceux du système avec la loi de commande. Ceci est une approche que nous affinons par simulations. Finalement, le gain de l'observateur suivant a été utilisé: $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3000\mathbf{I}_4 \\ 8000\mathbf{I}_4 \end{pmatrix}$, \mathbf{I}_4 est la matrice identité d'ordre 4.

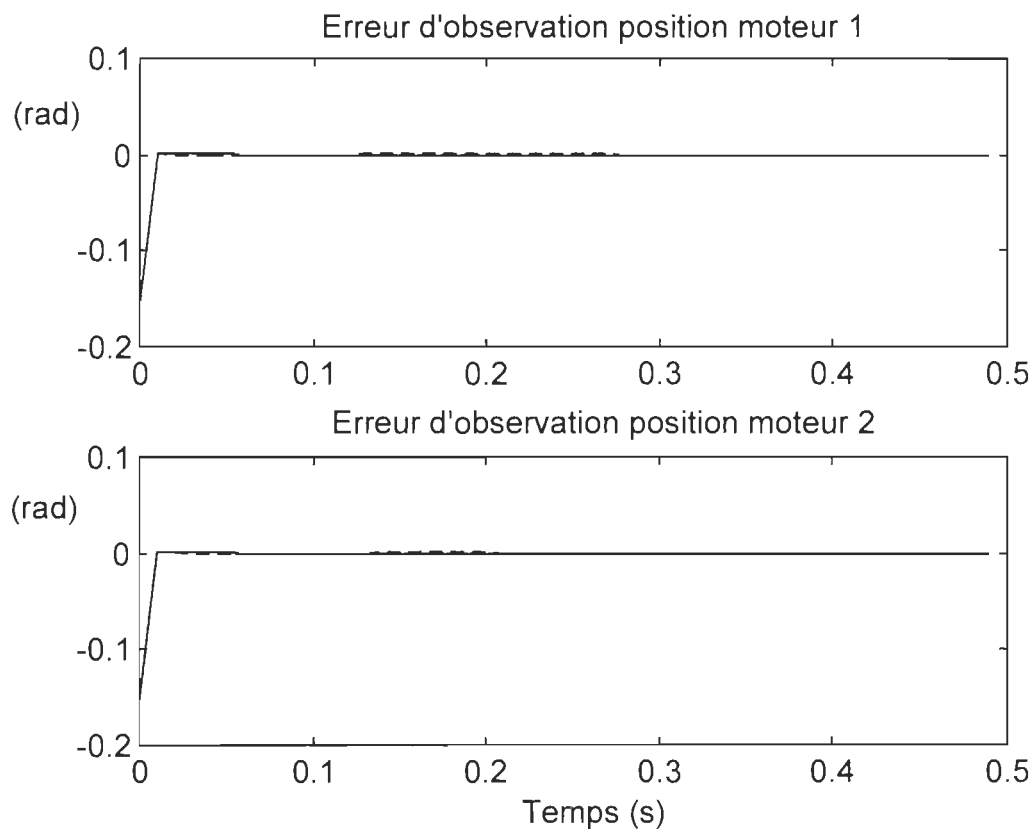


Figure 4.5b - Observateur basé sur la linéarisation exacte (positions moteurs)

Cet observateur semble très prometteur, car sa réponse est rapide et précise pour toutes les variables (figures 4.5 et 4.6). La robustesse est bonne pour les variables mesurées mais demeure médiocre pour les vitesses. Cette performance n'est pas exploitable lorsqu'utilisée par un correcteur, car le régime transitoire (fortement lié à la qualité des réponses en vitesses), risque d'être médiocre.

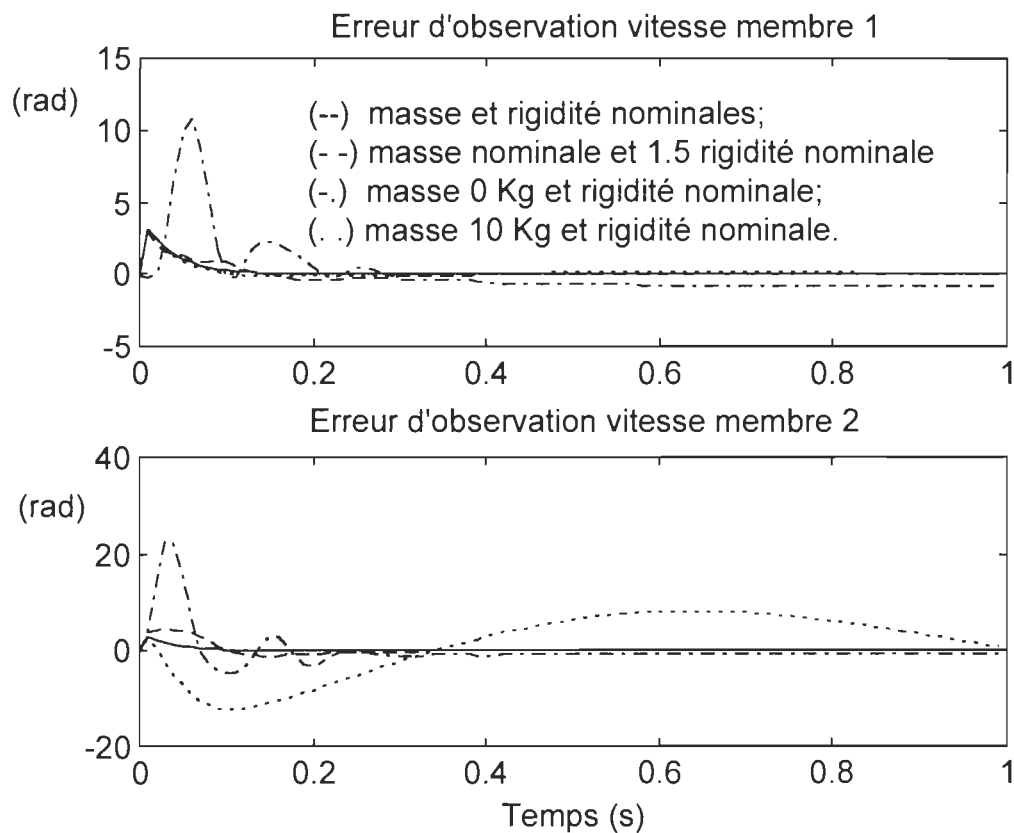


Figure 4.6a - Observateur basé sur la linéarisation exacte (vitesses membres)

La robustesse de la stabilité peut être améliorée en augmentant la matrice de gains \mathbf{K}_l de l'observateur de manière à augmenter les valeurs propres de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_l\mathbf{C}$ afin de diminuer la sensibilité de $\mathbf{A} - \mathbf{K}_l\mathbf{C}$ face aux variations de \mathbf{A} .

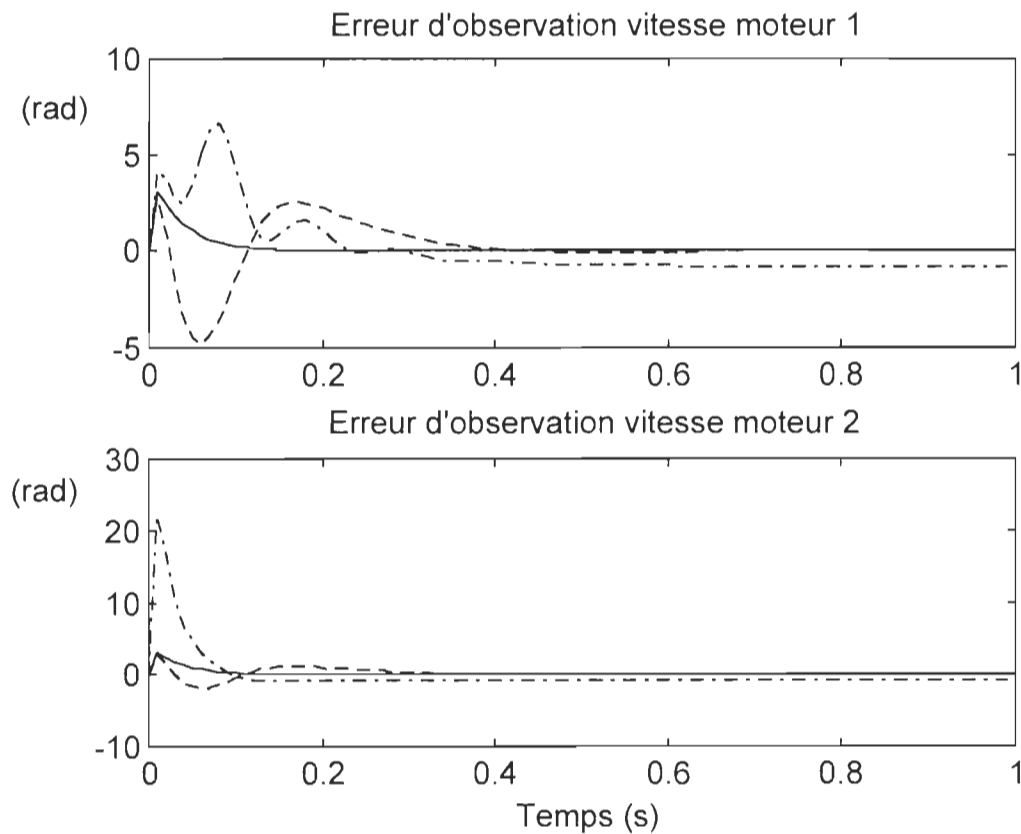


Figure 4.6b - Observateur basé sur la linéarisation exacte (vitesses moteurs)

Cependant une trop forte augmentation de \mathbf{K}_l peut rendre l'observateur sensible aux bruits de mesure. De plus, une telle augmentation en valeur absolue des valeurs propres n'assure pas la robustesse des performances, i.e. bien que la stabilité du système soit conservée, la qualité du régime transitoire peut varier. Cet observateur n'exige pas une forte puissance de calcul, car son gain est fixe et le changement de variables requis pour obtenir la linéarisation n'est pas excessivement complexe.

4.4 Conclusion

D'après les résultats obtenus, une conclusion sous forme de tableau comparatif qualitatif est dressée à la page suivante.

Nous pouvons conclure, d'après cette première étude, qu'aucun de ces observateurs dits "classiques" ne permet de satisfaire tous les critères de performances à la fois. Nous verrons que cette conclusion s'applique également aux observateurs étudiés au cours du chapitre 5.

Par conséquent une étude cas à cas, pour l'utilisation d'un observateur est préconisée.

Tableau 4.1 Étude comparative: observateurs "classiques"

Observateurs Critères	Filtre de Kalman Étendu	Par linéarisation	Non linéaire basé sur Kalman
Grandeurs de mesures	Multiple si observable	Position: moteurs et membres	Positions et vitesses: membre
Stabilité	Asymptotique locale (bonne connaissance de l'état initial)	Asymptotique locale	Exponentielle globale
Régime transitoire	Rapide; Dépassements faibles	Rapide; Dépassements faibles	Très rapide; Dépassements faibles
Robustesse (vs. charge)	Correcte	Correcte si bonne connaissance de l'état initial	Faible
Observateur correcteur	Réponses rapides; Dépassements faibles	Réponses rapides; Dépassements faibles	Réponses très rapides; Dépassements faibles
Mise en oeuvre	Algorithme discret; Puissance moyenne de calcul si FKÉ à gain constant	Algorithme en continu; Puissance moyenne de calcul	Algorithme en continu; Temps de calcul important
Environnement	Stochastique	Déterministe	Déterministe

CHAPITRE 5

OBSERVATEURS ROBUSTES ET ADAPTATIF

Introduction

Les hypothèses exposées en début de chapitre 4 sont également valables pour ce chapitre. Nous dédions ce dernier à l'étude d'observateurs présentant des propriétés intéressantes lorsque des incertitudes subsistent au niveau des paramètres du robot. À ce propos, sont étudiés deux observateurs présentant une certaine robustesse, en particulier l'un basé sur la passivité et l'autre conçu à partir de la théorie des systèmes à structure variable. Finalement, un observateur adaptatif est présenté. Les mêmes conventions de graphiques sont employées qu'au chapitre 4, excepté pour l'observateur adaptatif pour lequel les symboles suivants sont utilisés:

- (i) masse de 0 Kg et rigidité nominale (trait continu —),
- (ii) masse de 10 Kg et rigidité diminuée de 50% (- -),
- (iii) masse de 20 Kg et rigidité nominale multipliée par deux (-.).

5.1 Observateur basé sur la passivité

5.1.1 Définition et stabilité de l'observateur

Nous considérons maintenant un observateur non linéaire continu et déterministe qui exploite les propriétés de passivité du système. Tomei (90) a proposé l'observateur d'état complet suivant en supposant l'accès à la mesure des positions et vitesses des membres. Définissons $\hat{\mathbf{q}}$ la valeur estimée de \mathbf{q} et $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}$ l'erreur d'estimation. L'observateur est donné par:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{D}\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_l) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_A(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) - \mathbf{v} \quad (5.1)$$

avec $\mathbf{K}_A = \text{diag}(\mathbf{K}_a, \mathbf{0})$, $\mathbf{K}_a \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ définie positive;

$\mathbf{v}^T = [\mathbf{v}_1^T \ \mathbf{0}]$, $\mathbf{v}_1 \in \mathfrak{R}^m$ est la sortie du système linéaire:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= -\mathbf{A}\mathbf{z} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \\ \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{K}_1\mathbf{z} - \mathbf{K}_2\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l \end{aligned} \quad (5.2)$$

\mathbf{A} et \mathbf{K}_2 sont des matrices carrées définies positives; \mathbf{K}_1 est la solution de l'équation de Lyapunov $\mathbf{A}^T\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{A} = \mathbf{Q}$, \mathbf{Q} est symétrique définie positive. L'équation de l'erreur de l'observateur est obtenue en soustrayant (5.1) de l'équation (3.18) de la dynamique du manipulateur:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_A\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (5.3)$$

Dans la suite, la propriété de passivité de l'équation de l'erreur d'observation est démontrée. Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}_l) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_A) \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.4)$$

qui est positive puisque $(\mathbf{K} + \mathbf{K}_A)$ l'est. La dérivée de V par rapport au temps le long des trajectoires (5.3) est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_A) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &\quad + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\mathbf{v} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) - (\mathbf{K} + \mathbf{K}_A)\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Pour $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ exprimé selon les symboles de Christoffel,

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \equiv 0$$

d'où,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{v} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.6)$$

donc

$$\int_0^t \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) d\tau = V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) - V(\tilde{\mathbf{q}}_0, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0, 0) = \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{v} d\tau - \int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} d\tau \quad (5.7)$$

$$\int_0^t \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{v} d\tau \geq V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, t) - V(\tilde{\mathbf{q}}_0, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0, 0) \quad (5.8)$$

Puisque \mathbf{D} est au moins semi-définie positive, nous avons directement la passivité de la paire $(\mathbf{v}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$. Par application du théorème de passivité (Desoer & Vidyasagar, 75) toute fonction $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})$ strictement passive peut être utilisée pour obtenir un observateur stable en L_2 . C'est le cas du filtre strictement passif défini par (5.2). Tomei (90) démontre la stabilité asymptotique uniforme de $[\tilde{\mathbf{q}}^T, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T, \mathbf{z}^T] = \mathbf{0}$ en exploitant les propriétés d'énergie du robot, lorsque l'hypothèse de la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_l(t)$ bornée est satisfaite.

5.1.2 Résultats de simulation

Nous avons choisi des conditions initiales nulles, excepté pour les positions des moteurs qui sont initialisées à $\pi / 20$ rad. L'étude de (5.3) révèle que l'équation d'erreur pour la position des membres représente un filtre avec la position des moteurs comme variable d'entrée. Nous avons syntonisé ce filtre en utilisant une approximation linéaire du système, i.e. en négligeant la

matrice de Coriolis. Un découplage est effectué en considérant les valeurs singulières σ de la matrice de masse et de rigidité. De plus d'après l'équation de Lyapunov exprimée en fonction des matrices du filtre (5.2), la matrice stable \mathbf{A} choisie diagonale nous permet d'opter pour \mathbf{K}_1 diagonale et définie positive. Il en est de même pour le choix des matrices \mathbf{K}_A et \mathbf{K}_2 . Ce qui conduit à l'équation linéaire suivante qui représente approximativement le système à l'étude:

$$diag(\sigma'(\mathbf{M}_{11}(\mathbf{q}_l)))s^2 + (\mathbf{D}_l + \mathbf{K}_2)s + (diag(\sigma'(\mathbf{K}_e)) + \mathbf{K}_A) = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_m - \mathbf{K}_1 \mathbf{z}$$

où $\sigma' = \overline{\sigma}$ ou $\underline{\sigma}$.

Le choix sur σ' est déterminé de telle manière que l'on puisse calculer \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 et \mathbf{K}_A en fixant le coefficient d'amortissement à 0.75 et la fréquence naturelle du système à quatre fois celle du moteur (40 rad/s). Toutefois cette démarche reste approximative. Les gains calculés ont été affinés par simulation pour trouver les valeurs suivantes:

$$\mathbf{K}_a = diag(1.4589, 7.2), \mathbf{A} = diag(6,6), \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2 = diag(0.0189, 0.0021).$$

Ce type d'observateur est globalement asymptotiquement stable si les paramètres (inerties, masses et rigidités) du système sont parfaitement connus

et présente une assez bonne robustesse vis-à-vis des paramètres inertiels et des flexibilités du système en ce qui concerne le régime statique; cependant l'erreur en position est plus importante lorsqu'une masse de 10 Kg est utilisée; le régime dynamique de l'erreur d'estimation en vitesse est dégradé ce qui peut causer un moins bon régime transitoire lorsque la commande est utilisée avec l'estimation d'état. Cette conclusion est généralisable pour tous les cas où les valeurs de masse et de rigidité ne sont pas nominales.

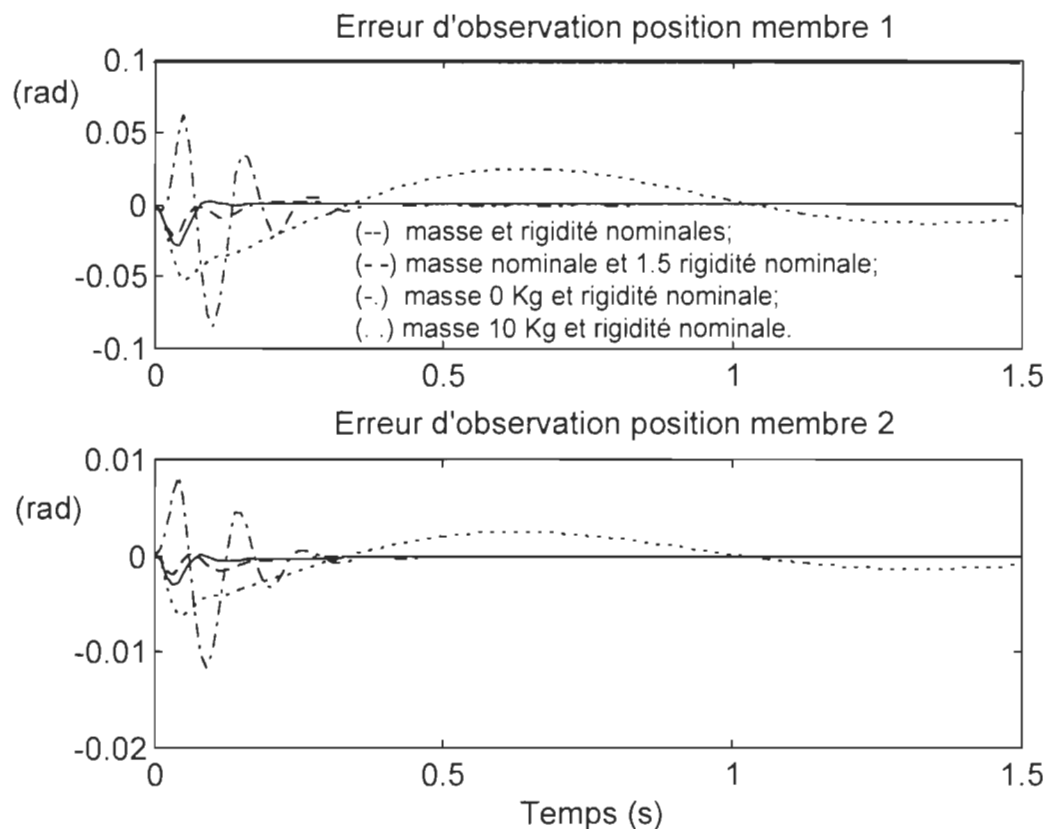


Figure 5.1a- Observateur basé sur la passivité (positions membres)

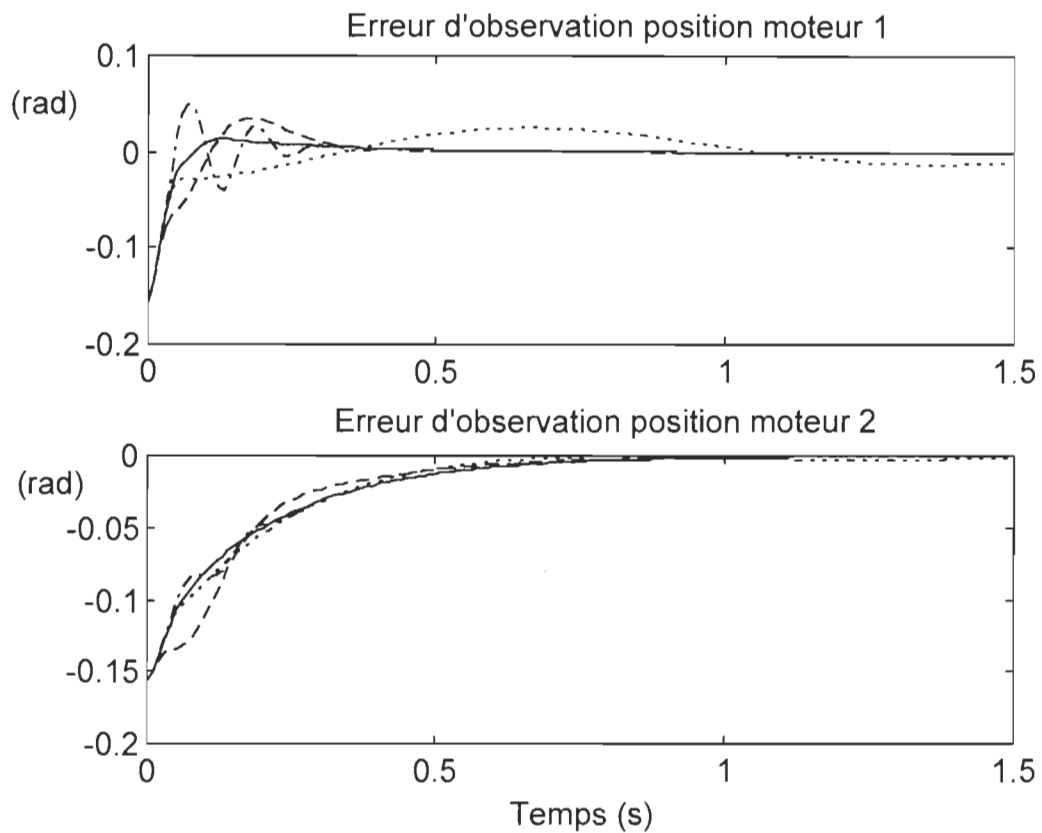


Figure 5.1b- Observateur basé sur la passivité (positions moteurs)

Sur les fig. 5.1 et 5.2, nous observons une convergence relativement rapide soit un temps inférieur à 0.4s côté membres (variables mesurées). La convergence est plus lente côté moteurs avec un temps de convergence de 0.75s. En effet leur taux de convergence est essentiellement tributaire du frottement côté moteur, car l'observateur n'introduit aucun amortissement sur les variables moteur.

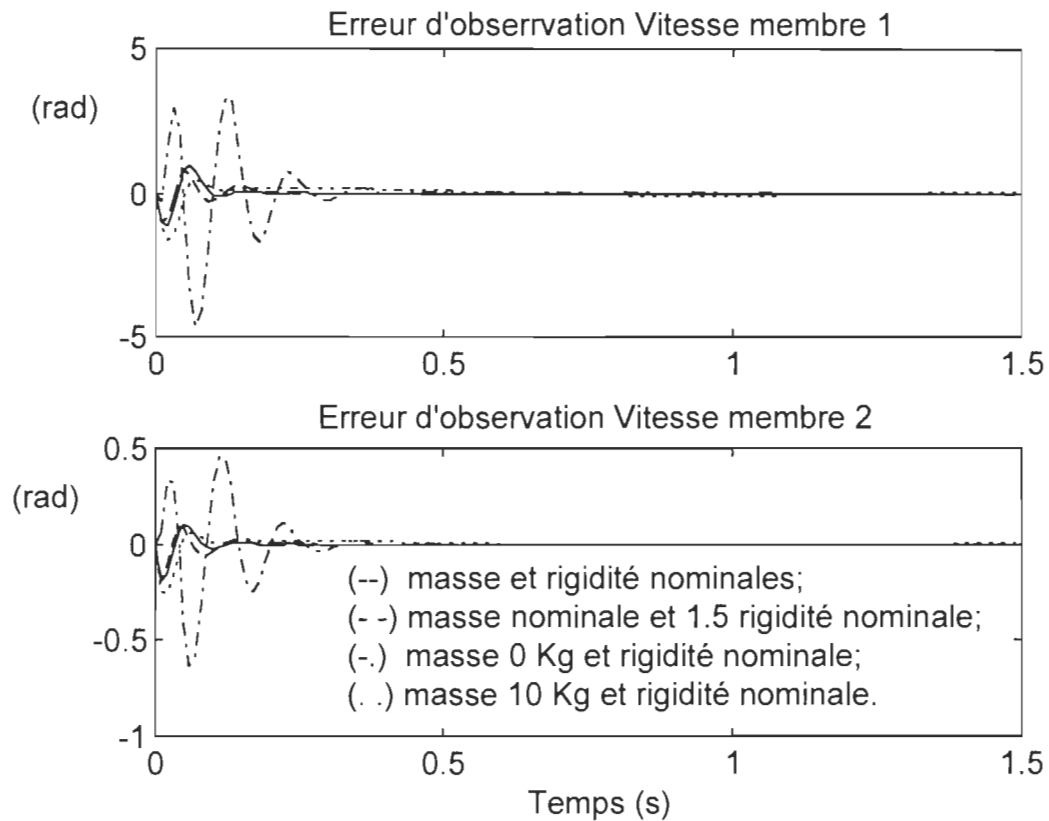


Figure 5.2a - Observateur basé sur la passivité (vitesses membres)

La syntonisation des gains est une première approche à partir de laquelle nous avons amélioré la réponse du système en augmentant les gains \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 et \mathbf{K}_a . Une augmentation trop importante peut entraîner un dépassement important. La réponse en vitesse estimée du système est suffisamment rapide, pour que le régime transitoire de la réponse du système à la loi de commande ne soit pas détériorée par l'utilisation de l'estimation d'état (temps de réponse inférieur à 1s et dépassements faibles).

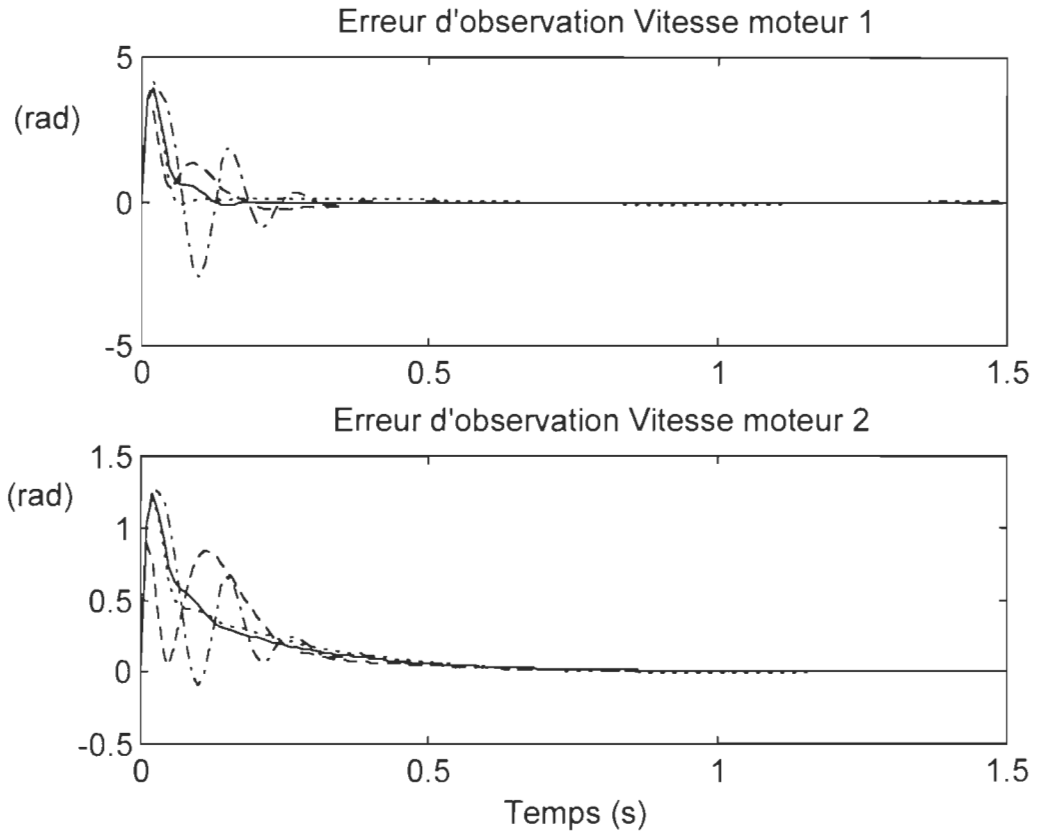


Figure 5.2b - Observateur basé sur la passivité (vitesses moteurs)

5.2 Observateur à structure variable

5.2.1 Forme générale de l'observateur

Wallcott et Zak (85, 88) ont proposé un type d'observateur s'appliquant aux systèmes non linéaires pour lesquels il est uniquement nécessaire de connaître les bornes des non-linéarités ou des incertitudes. Une classe de systèmes répondant à cette théorie se présente sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_{SSV}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{SSV}(\mathbf{u} + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{SSV}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (5.9)$$

avec $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m = \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$

où pour tout t , \mathbf{x} et \mathbf{u} de Ω , il existe deux fonctions $r(\cdot)$ et $\rho(\cdot)$ réelles, continues et strictement positives telles que:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\| &\leq r(t, \mathbf{x}) \\ \|\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\| &\leq \rho(t, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (5.10)$$

Si de plus:

1. la paire $(\mathbf{A}_{SSV}, \mathbf{C}_{SSV})$ est détectable, i.e. il existe une matrice $\mathbf{G}_{SSV} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ telle que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{SSV} - \mathbf{G}_{SSV}\mathbf{C}_{SSV}$ soit stable,
2. il existe une matrice $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, symétrique définie positive telle que pour toutes matrices $\mathbf{F}^{m \times p}$:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}_{SSV} = \mathbf{C}_{SSV}^T \mathbf{F}^T \quad (5.11)$$

où \mathbf{P} est l'unique matrice définie positive solution de l'équation de Lyapunov,

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (5.12)$$

Alors, la sortie de l'observateur suivant converge asymptotiquement vers l'état réel du système:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{ssv} \mathbf{y} + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \rho) + \mathbf{B}_{ssv} \mathbf{u} \quad (5.13)$$

où

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \rho) = \begin{cases} -\frac{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_{ssv}^T \mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e}}{\|\mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e}\|} \rho & \text{pour } \mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{pour } \mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.14)$$

où l'erreur d'estimation est définie par: $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$.

5.2.2 Application directe de l'algorithme au manipulateur avec articulations flexibles

L'application de cette technique à un manipulateur à articulations flexibles nécessite que l'équation de la dynamique (3.18) puisse être mise sous la forme (5.9) tel que toutes les conditions citées précédemment soient vérifiées. Intuitivement, la forme qui semblerait la plus adéquate est la suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_l \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_{4 \times 4} \\ -\mathbf{M}_{11_0}^{-1}(\mathbf{q}_l) \mathbf{K}_e & \mathbf{M}_{11_0}^{-1}(\mathbf{q}_l) \mathbf{K}_e \\ \mathbf{M}_{22_0}^{-1} \mathbf{K}_e & -\mathbf{M}_{22_0}^{-1} \mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} - \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{I}_{4 \times 4} \end{bmatrix} \left((\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) - \mathbf{M}_0^{-1}(\mathbf{q}_l)) (-\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}) \right)$$

$$- \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) (\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{B}\mathbf{u})$$

$\mathbf{M}_{11_0}^{-1}$ étant la matrice de masse nominale (matrice constante) relative aux membres et \mathbf{M}_0^{-1} la matrice de masse complète nominale. Notons que $\mathbf{M}_{22_0} = \mathbf{M}_{22}$, car la matrice des inerties des moteurs est constante. Un test rapide sur la matrice de (5.15) correspondant à \mathbf{A}_{ssv} montre que le système est observable lorsqu'une mesure de position, moteur ou charge, par articulation est réalisée. Si pour chaque articulation une mesure de position ou une mesure de vitesse, moteur ou charge, est ajoutée alors l'observabilité du système est conservée.

Avec \mathbf{P} formée des matrices blocs $\mathbf{P}_{ij} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ ($1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4$), la condition (5.11) se traduit par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \\ \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{ssv}^T \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

où $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$

Or \mathbf{P} doit être définie-positive ce qui implique que tous les éléments diagonaux soient non nuls, en particulier $\mathbf{P}_{33} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{P}_{44} \neq \mathbf{0}$. Par (5.16), ceci

impose la mesure des vitesses côtés membres et moteurs. Nous voulons éviter cette situation autant que soit peu, car la mesure de vitesse par tachymètre est très bruitée surtout à faible vitesse.

En général, d'après la littérature considérée, tout observateur utilise la mesure de position uniquement ou la mesure de position et vitesse. Remarquons que le cas idéal est la mesure unique de la position de chaque état: moteur et membre. Ceci permet d'améliorer la convergence de l'estimée de l'état complet car la position mesurée de chaque type d'état (moteur et membre) permet, par le biais du terme de correction de l'observateur, d'augmenter la fréquence naturelle et possiblement l'amortissement naturel du système. Si par exemple, seule la position du membre pour chaque articulation est mesurée, la convergence côté moteur restera fortement liée à l'amortissement naturel du moteur. Cependant la mesure de vitesse (ou la vitesse filtrée permettant d'obtenir une approximation de la vitesse) permet d'amortir la réponse.

En conclusion, nous devons opter pour une autre forme du système afin d'utiliser au moins une mesure de la position par articulation.

5.2.3 Système et observateur proposés

Le système (5.15) permet de ranger dans la partie non linéaire la dynamique du membre et du moteur, ce qui permet dans le cas où cette matrice peut être bornée, une robustesse face à des incertitudes paramétriques du membre ou du moteur, excepté la flexibilité.

Afin d'être moins restrictif sur la matrice \mathbf{P} et donc sur le choix des grandeurs à mesurer, nous souhaitons une matrice \mathbf{B}_{ssv} de dimension 8×2 (au lieu de 8×4 dans (5.15)), avec au moins une mesure de position au niveau de chaque articulation. Ceci peut être possible si la dynamique du moteur que l'on suppose linéaire, est intégrée à la matrice \mathbf{A}_{ssv} du système. Dans ce cas, nous avons une perte de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques sur le moteur, mais celle en rapport avec les paramètres du membre est conservée. Pour le cas où les paramètres du moteur et la rigidité sont connus, nous nous retrouvons avec le système suivant où seule la mesure des vitesses côté membre est nécessaire, par application de (5.11).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \\ \ddot{\mathbf{q}}_l \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & & & \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \left(-\mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_l) \left(\mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}}_l + (\mathbf{K}_e \mathbf{q}_l - \mathbf{K}_e \mathbf{q}_m) + \mathbf{D}_l \dot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{G}_l(\mathbf{q}_l) \right) \right) \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

\mathbf{D}_m étant la matrice de frottement des moteurs; $\mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)$, \mathbf{D}_l et $\mathbf{G}_l(\mathbf{q}_l)$ sont respectivement les matrices de Coriolis, de frottement et de gravité relatives aux membres.

Kelly et al. (94) ont proposé l'utilisation d'un dérivateur combiné à un filtre du premier ordre pour reconstruire la vitesse à partir de la position. Ils ont montré qu'un manipulateur à articulations flexibles commandé par une loi de commande PD dont l'asservissement s'effectue sur la mesure de la position des membres et la vitesse estimée par ce filtre à partir des positions mesurées, est asymptotiquement stable. Le même type de stabilité que la loi utilisant la mesure de la position et de la vitesse de chaque membre est donc obtenu.

Motivé par ce résultat, une modification du système (5.17) est considérée prenant en compte la dynamique du manipulateur et la vitesse reconstruite par le filtre du premier ordre qui remplace l'état correspondant à la vitesse des membres. Sous forme d'équation d'état le filtre, s'exprime comme suit:

$$\dot{\mathcal{G}}_l = -\mathbf{a}_f \mathcal{G}_l + \mathbf{b}_f \dot{\mathbf{q}}_l \quad (5.18a)$$

Notons que ce filtre est reformulé, pour son implantation, sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= -\mathbf{a}_f \mathbf{w} - \mathbf{a}_f \mathbf{b}_f \mathbf{q}_l \\ \mathcal{G}_l &= \mathbf{w} + \mathbf{b}_f \mathbf{q}_l \end{aligned} \quad (5.18b)$$

La nouvelle formulation du système est la suivante:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \\ \dot{\mathcal{G}}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{b}_f & -\mathbf{a}_f & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \\ \mathcal{G}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{q}_m \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{b}_f (\dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{q}_m) \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_{m_c} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{ssv} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_l \\ \mathbf{q}_m \\ \mathcal{P}_l \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

avec $\ddot{\mathbf{q}}_l = \mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_l) (-\mathbf{C}_l(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{D}_l \dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{G}_l(\mathbf{q}_l) - \mathbf{K}_e \mathbf{q}_l + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_m)$

et où \mathbf{D}_{m_c} représente les frottements de Coulomb au niveau des moteurs.

$$\mathbf{D}_{m_c} = \begin{bmatrix} D_{m1_c} \text{signe}(\dot{q}_{m1}) \\ D_{m2_c} \text{signe}(\dot{q}_{m2}) \end{bmatrix}$$

Le système (5.19) est réécrit comme suit:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{ssv} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{ssv} \mathbf{u} + \mathbf{B}'_{ssv} (\dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{q}_m) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_{m_c} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Avec $\mathbf{B}_{ssv} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B}'_{ssv} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$

Quelques remarques s'imposent:

1. Le seul état physiquement mesuré est la position des membres. La vitesse des membres est obtenue par le filtre, ce qui permet une certaine robustesse

vis-à-vis du bruit, mais au détriment d'un délai supplémentaire sur la reconstruction de l'état complet. Un compromis sur la fréquence de coupure du filtre doit être réalisé afin de filtrer le bruit tout en gardant un retard acceptable.

2. $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ et \mathbf{b}_f ont été ajoutés dans la deuxième colonne de \mathbf{A}_{ssv} afin d'obtenir l'observabilité du système. Pour avoir un système équivalent au système d'origine (3.18), \mathbf{q}_m a été retranchée dans le deuxième vecteur de (5.19).

3. Le deuxième vecteur de (5.19) contient les non-linéarités du système tel qu'exposé en (5.9), à la différence près que le signal de commande \mathbf{u} et la non-linéarité \mathbf{v} ne sont plus factorisées par la même matrice \mathbf{B}_{ssv} . En conséquence des changements au niveau du terme de glissement sont à prévoir.

4. Le vecteur \mathbf{v} peut être interprété comme une non-linéarité car il s'exprime de la manière suivante:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_l) = \dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{q}_m = \dot{\mathbf{q}}_l(t_0) + \int_0^t \left(\mathbf{M}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_l) (-\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) \dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{K}_e \mathbf{q}_l + \mathbf{K}_e \mathbf{q}_m - \mathbf{D}_l \dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{G}_l(\mathbf{q}_l)) \right) d\tau - \mathbf{q}_m \quad (5.22)$$

5. La formulation du système est plus complète que celle exposée en (3.18), car elle tient compte des frottements de coulomb au niveau des moteurs.

6. Seule la mesure "physique" de la position des membres est nécessaire.

Toutefois, à la dynamique du manipulateur, est rajouté un restructeur de la vitesse (dérivateur et filtre). L'observateur présenté par la suite se propose de reconstruire l'état complet de ce système. La vitesse \mathcal{G}_1 , reconstruite et filtrée de (5.19), tend vers la vitesse réelle du système.

7. Comme signalé précédemment, le système (5.19) est observable pour les mesures considérées. Nous nous proposons de le vérifier. Pour cela, la matrice d'observabilité \mathbf{O} (5.23) doit être de rang 8, ce qui est le cas car les huit lignes de \mathbf{O} (chacune de dimension deux) sont linéairement indépendantes (ex: lignes 1 à 6 et 9 à 10).

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{bmatrix} \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{b}_f & -\mathbf{a}_f & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & -\mathbf{a}_f \mathbf{b}_f & \mathbf{a}_f^2 & \mathbf{b}_f \\ \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_m \\ \mathbf{b}_f \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & \mathbf{a}_f^2 \mathbf{b}_f - \mathbf{b}_f \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e & -\mathbf{a}_f^3 & -\mathbf{a}_f \mathbf{b}_f - \mathbf{b}_f \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \quad (5.23b)$$

Hypothèse:

Supposons que l'on peut borner la vitesse des membres $\dot{\mathbf{q}}_l$ et la position des moteurs \mathbf{q}_m tel que la borne suivante existe:

$$\|\dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{q}_m\| \leq \rho \quad (5.24)$$

Ceci est une condition raisonnable si le correcteur est stable considérant les déplacements habituellement limités de la position du moteur et la vitesse limitée du membre à cause des couples qui sont bornés. ■

Alors nous proposons l'observateur suivant:

Proposition 5.1

Lorsque (5.24), (5.26), (5.27) et (5.28) sont satisfaites, l'observateur (5.25) possède les propriétés suivantes:

1. Convergence asymptotique vers l'état du système (5.19) si aucun frottement de Coulomb au niveau des moteurs n'est considéré.
2. Le cas échéant, l'observateur est uniformément et ultimement borné.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = & (\mathbf{A}_{SSV} - \mathbf{G}_{SSV} \mathbf{C}_{SSV}) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_{SSV} \mathbf{C}_{SSV} \mathbf{x} + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \rho) + \mathbf{B}_{SSV} \mathbf{u} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ -\mathbf{M}_{22}^{-1} \hat{\mathbf{D}}_{m_c} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Conditions et définitions à respecter:

1. Le terme $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \rho)$ à structure variable s'exprime comme suit:

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \rho) = \begin{cases} -\frac{\mathbf{B}'_{SSV} \mathbf{F} \mathbf{C}_{SSV} \mathbf{e}}{\|\mathbf{F} \mathbf{C}_{SSV} \mathbf{e}\|} \rho & \text{si } \|\mathbf{F} \mathbf{C}_{SSV} \mathbf{e}\| \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \|\mathbf{F} \mathbf{C}_{SSV} \mathbf{e}\| = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

où $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$

2. La condition de couplage (5.27) et l'équation de Lyapunov (5.28) doivent être vérifiées:

$$\mathbf{P} \mathbf{B}'_{SSV} = \mathbf{C}'_{SSV} \mathbf{F}^T \quad (5.27)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q} \quad (5.28)$$

3. \mathbf{A}_0 est la matrice stable $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{ssv} - \mathbf{G}_{ssv} \mathbf{C}_{ssv}$, \mathbf{G}_{ssv} étant la matrice de gain de l'observateur. ■

Remarque: $\hat{\mathbf{D}}_{m_c}$ représente la connaissance que nous avons des frottements de Coulomb.

Preuve:

Exprimons l'équation de l'erreur d'estimation:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{e} + \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \rho) - \mathbf{B}'_{ssv} (\dot{\mathbf{q}}_l - \dot{\mathbf{q}}_m) + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{6 \times 2} \\ -\mathbf{M}_{22}^{-1} (\hat{\mathbf{D}}_{m_c} - \mathbf{D}_{m_c}) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Adoptons les notations suivantes: $\mathbf{r} = (\dot{\mathbf{q}}_l - \dot{\mathbf{q}}_m)$ et $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{6 \times 2} \\ -\mathbf{M}_{22}^{-1} (\hat{\mathbf{D}}_{m_c} - \mathbf{D}_{m_c}) \end{bmatrix}$.

Soit la fonction candidate de Lyapunov suivante:

$$V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} \quad (5.30)$$

1^{er} Cas $\|\mathbf{FC}_{ssv} \mathbf{e}\| \neq 0$

La dérivée de V par rapport au temps est:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}) = & \mathbf{e}^T (\mathbf{P} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \mathbf{P}) \mathbf{e} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \left(-\frac{\mathbf{B}'_{ssv} \mathbf{F} \mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e}}{\|\mathbf{F} \mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e}\|} \rho - \mathbf{B}'_{ssv} \mathbf{r} \right) \\ & + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \quad (5.31)$$

De (5.27) et (5.28) et avec l'hypothèse (5.24) $\rho \geq \|\mathbf{r}\|$, \dot{V} est simplifiée comme suit:

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} - 2\|\mathbf{F}\mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e}\|\rho + 2\|\mathbf{F}\mathbf{C}_{ssv} \mathbf{e}\|\rho + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi} \quad (5.32)$$

Posons $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{P} \boldsymbol{\varphi}$. L'équation (5.32) devient:

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\begin{bmatrix} \mathbf{e}^T & \boldsymbol{\Psi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{I}_{8 \times 8} \\ -\mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{I}_{8 \times 8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^T \quad (5.33)$$

Soient $\Psi_M = \|\boldsymbol{\Psi}\|^2$ et $\lambda_{\min}(\mathbf{T})$ la valeur propre minimale de

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{I}_{8 \times 8} \\ -\mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{I}_{8 \times 8} \end{bmatrix}, \text{ alors (5.33) devient:}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}) &\leq -\begin{bmatrix} \mathbf{e}^T & \boldsymbol{\Psi}^T \end{bmatrix} \lambda_{\min}(\mathbf{T}) \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\Psi} \end{bmatrix} + \Psi_M \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{T}) \|\mathbf{e}\|^2 + |\Psi_M|^2 (1 - \lambda_{\min}(\mathbf{T})) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Cette dernière expression est négative si

$$\|\mathbf{e}\| > \Psi_M \sqrt{\frac{1 - \lambda_{\min}(\mathbf{T})}{\lambda_{\min}(\mathbf{T})}} \quad (5.35)$$

Notons que $\lambda_{\min}(\mathbf{T}) > 0$ à cause de la structure de \mathbf{T} et parce que $\mathbf{Q} > 0$.

2^{ème} Cas $\|\mathbf{FC}_{ssv} \mathbf{e}\| = 0$

Dans ce cas, la dérivée de V est:

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \varphi \quad (5.36)$$

La condition pour que $\dot{V}(\mathbf{e})$ soit strictement négative est identique à (5.35).

Par le Théorème 2.5, l'erreur d'estimation est uniformément et ultimement bornée. Si de plus, le frottement de Coulomb n'est pas considéré, (5.32) et (5.36) sont strictement négatifs, ce qui signifie que l'observateur converge asymptotiquement vers l'état zéro de l'équation d'erreur du système. ■

Remarques:

1. Lorsque l'erreur satisfait (5.35), l'observateur converge vers un domaine

\mathbf{B}_λ défini comme suit:

$$\mathbf{B}_\lambda = \left\{ \mathbf{e} \in \Omega \mid \|\mathbf{e}\| \leq \Psi_M \sqrt{\frac{1 - \lambda_{\min}(\mathbf{T})}{\lambda_{\min}(\mathbf{T})}} \right\} \quad (5.37)$$

À l'intérieur de \mathbf{B}_λ , les propriétés de convergence des trajectoires du système ne sont pas connues.

2. Examinons la condition de positivité de la matrice \mathbf{T} . En prenant $\mathbf{Q} = \gamma \mathbf{I}_{8 \times 8}$, par application du théorème de Sylvester (Lancaster, 69), on aboutit à la condition suivante (déterminant de \mathbf{T} strictement positif):

$$|\gamma \mathbf{A}| \cdot \left| \mathbf{I} - \frac{\mathbf{I}}{\gamma} \right| > 0 \Leftrightarrow (\gamma - 1)^n > 0 \Leftrightarrow \gamma > 1 \quad (5.38)$$

Calculons la valeur propre minimale de \mathbf{T} qui est solution de:

$$|s\mathbf{T} - \mathbf{I}| = 0 \quad (5.39)$$

$$\begin{vmatrix} (s - \gamma)\mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{I}_{8 \times 8} \\ \mathbf{I}_{8 \times 8} & (s - 1)\mathbf{I}_{8 \times 8} \end{vmatrix} = (s - \gamma)^n \left| (s - 1)\mathbf{I}_{8 \times 8} - \frac{\mathbf{I}_{8 \times 8}}{s - \gamma} \right| = 0 \quad (5.40)$$

$$s_{-,+} = \frac{1 + \gamma \pm \sqrt{5 - 2\gamma + \gamma^2}}{2} \quad (5.41)$$

La valeur propre minimale de \mathbf{T} correspond à s_- qui tend vers 1^- lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$, ce qui montre que \mathbf{B}_λ peut être rendu arbitrairement petit lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$ (voir 5.34).

3. Comme déjà mentionné, l'observateur converge vers l'état du modèle (5.19) qui est équivalent à celui du système réel excepté la vitesse \mathcal{G}_l , grandeur représentant la vitesse réelle des membres du manipulateur via un

filtre du premier ordre. La représentation d'état (5.18) de ce dernier est stable, $-\mathbf{a}_f$ étant Hurwitz. Par conséquent la vitesse estimée de l'observateur converge asymptotiquement vers l'état réel du système. Donc l'observateur répondant à la proposition 5.1 par rapport au modèle (5.19), présente les mêmes propriétés de convergence envers le système réel.

4. Il reste à prouver que le système vérifie (5.27) et (5.28). De cela on peut dire que l'observateur converge au moins aussi rapidement qu'une trajectoire dont la constante de temps est la valeur propre minimale de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}$ (Walcott & Zak, 88).

5.2.4 Étude de l'équation de Lyapunov et de l'équation de couplage

D'après le Théorème 2.2, il est toujours possible de trouver une matrice \mathbf{P} pour les matrices \mathbf{Q} et \mathbf{A}_0 vérifiant les hypothèses de ce théorème. Mais la démarche inverse que nous impose la proposition 5.1, i.e. trouver \mathbf{P} satisfaisant l'équation de couplage (5.27) et l'équation de Lyapunov (5.28), n'est pas d'emblée acquise.

Afin de nous assurer que le système étudié vérifie ces conditions, nous adopterons la démarche suivante:

1. La forme la plus simple possible de \mathbf{P} est déterminée d'après (5.27).

Rappelons que \mathbf{P} doit être symétrique définie positive.

2. Ensuite des conditions sur la matrice de gain de l'observateur \mathbf{G}_{ssv} sont établies afin de trouver une matrice \mathbf{Q} qui soit multiple de la matrice identité. Si cela est possible, alors l'équation de Lyapunov est vérifiée et par application du Théorème 2.2, la matrice $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{ssv} - \mathbf{G}_{ssv} \mathbf{C}_{ssv}$ est stable.

5.2.4.1 Détermination de \mathbf{P}

La matrice \mathbf{P} est exprimée sous forme de matrices bloc de dimension 2×2 . La condition (5.27) implique la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{13} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{P}_{21} + \mathbf{P}_{23} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{P}_{31} + \mathbf{P}_{33} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{P}_{41} + \mathbf{P}_{43} \mathbf{b}_f \end{bmatrix} = \mathbf{C}^T \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_2^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

\mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 doivent être non nulles. Le choix le plus simple pour avoir une matrice \mathbf{P} définie positive serait de la prendre diagonale. Cette solution est écartée, car lorsque \mathbf{Q} est calculée, deux zéros se situent sur sa diagonale, ce qui la rend tout au mieux semi-définie positive. Bien que dans certains cas on puisse conclure à une stabilité asymptotique tout en ayant \mathbf{Q} semi-définie

positive, par application du théorème de La Salle, notre système comporte des non-linéarités qui peuvent difficilement satisfaire ce théorème. C'est la raison pour laquelle, afin d'obtenir une matrice \mathbf{Q} avec une diagonale non nulle, nous optons pour une matrice \mathbf{P} de la forme:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{24}^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{44} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Par application du théorème de Sylvester (Lancaster, 69), \mathbf{P} est définie positive si et seulement si toutes les matrices diagonales sont définies positives et si la condition suivante est vérifiée (déterminant de \mathbf{P} strictement positif):

$$\det(\mathbf{P}) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{44} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.44a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{24}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{24} \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{P}_{44} - \mathbf{P}_{24}^T \mathbf{P}_{22}^{-1} \mathbf{P}_{24} \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{P}_{44} - \mathbf{P}_{24}^T \mathbf{P}_{22}^{-1} \mathbf{P}_{24} \text{ définie positive} \quad (5.44b)$$

Si les matrices \mathbf{P}_{ij} sont diagonales, cette condition devient scalaire:

$$\mathbf{P}_{44}^i - \mathbf{P}_{24}^i \left(\mathbf{P}_{22}^i \right)^{-1} \mathbf{P}_{24}^i > 0$$

avec P_{24}^i , P_{22}^i et P_{44}^i les éléments diagonaux de \mathbf{P}_{24} , \mathbf{P}_{22} et \mathbf{P}_{44} ,

5.2.4.2 Résolution de l'équation de Lyapunov

Adoptons les notations suivantes:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{K}_e$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{D}_m$$

et posons:

$$\mathbf{G}_{ssv} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} \\ \mathbf{g}_{41} & \mathbf{g}_{42} \end{bmatrix}$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{Q} trouvée par (5.28) sont:

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{P}_{11} \mathbf{g}_{11} + \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{P}_{11}$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \mathbf{P}_{24} \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_1^T \mathbf{P}_{24}^T$$

$$\mathbf{Q}_{33} = \mathbf{P}_{33} (\mathbf{a}_f + \mathbf{g}_{32}) + (\mathbf{a}_f^T + \mathbf{g}_{32}^T) \mathbf{P}_{33}$$

$$\mathbf{Q}_{44} = -\mathbf{P}_{24} - \mathbf{P}_{24}^T + \mathbf{P}_{44} \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_2^T \mathbf{P}_{44}$$

$$\mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_{21}^T = -\mathbf{P}_{11} + \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{P}_{22} - \mathbf{m}_1^T \mathbf{P}_{24}^T + \mathbf{g}_{41}^T \mathbf{P}_{24}^T$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{13} &= \mathbf{Q}_{31}^T = \mathbf{P}_{11}\mathbf{g}_{12} + \mathbf{g}_{31}^T\mathbf{P}_{33} \\
\mathbf{Q}_{14} &= \mathbf{Q}_{41}^T = \mathbf{g}_{21}^T\mathbf{P}_{24} - \mathbf{m}_1^T\mathbf{P}_{44} + \mathbf{g}_{41}^T\mathbf{P}_{44} \\
\mathbf{Q}_{23} &= \mathbf{Q}_{32}^T = \mathbf{P}_{22}\mathbf{g}_{22} + \mathbf{P}_{24}\mathbf{g}_{42} - \mathbf{b}_f^T\mathbf{P}_{33} \\
\mathbf{Q}_{24} &= \mathbf{Q}_{42}^T = -\mathbf{P}_{22} + \mathbf{P}_{24}\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1^T\mathbf{P}_{44} \\
\mathbf{Q}_{34} &= \mathbf{Q}_{43}^T = \mathbf{g}_{22}^T\mathbf{P}_{24} + \mathbf{g}_{42}^T\mathbf{P}_{44}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

1^{er} cas

Pour les manipulateurs à chaîne cinématique ouverte, les matrices \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont fréquemment diagonales (Spong, 90). Ceci est rencontré lorsque pour chaque articulation i , le stator et le rotor de l'actionneur i sont respectivement placés sur le membre $i-1$ et le membre i . De ce fait, il n'y a pas de couplage entre les moteurs d'une part et entre les éléments flexibles d'autre part. En conséquence, tous les éléments blocs de \mathbf{P} et \mathbf{G}_{ssv} peuvent être choisis diagonaux et tous les produits de matrices dans (5.45) sont commutatifs. Nous considérons ce choix par la suite et supposons aussi que \mathbf{a}_f et \mathbf{b}_f sont choisies diagonales. Pour avoir une matrice \mathbf{Q} égale à la matrice identité, il faut que: (i) les blocs diagonaux \mathbf{Q}_{ii} soient des matrices identités et que (ii) tous les autres soient des matrices nulles.

(i) la première condition est réalisée lorsque:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{11} &= 0.5\mathbf{P}_{11}^{-1} \\
\mathbf{g}_{32} &= 0.5\mathbf{P}_{33}^{-1} - \mathbf{a}_f \\
\mathbf{P}_{24} &= 0.5\mathbf{m}_1^{-1} \\
\mathbf{P}_{44} &= 0.5(\mathbf{I}_{2 \times 2} + \mathbf{m}_1)\mathbf{m}_1^{-1}\mathbf{m}_2^{-1}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

\mathbf{P}_{11} et \mathbf{P}_{33} peuvent être choisies arbitrairement, mais un choix judicieux s'impose afin d'obtenir une matrice \mathbf{A}_0 dont les valeurs propres sont le plus à gauche possible dans le plan de Laplace. Ceci permettra d'obtenir une convergence de la partie linéaire du système la plus rapide possible.

(ii) De $\mathbf{Q}_{24}=\mathbf{0}$, nous obtenons:

$$\mathbf{P}_{22} = 0.5\left(\mathbf{m}_1(\mathbf{m}_1 + \mathbf{I}_{2 \times 2}) + \mathbf{m}_2^2\right)\mathbf{m}_1^{-1}\mathbf{m}_2^{-1} \tag{5.47}$$

Vérifions si la condition de définie-positivité de \mathbf{P} (5.46) est toujours vérifiée. Comme déjà cité, toutes les matrices étant diagonales, les opérations sur les matrices peuvent être réduites à des opérations s'effectuant sur les éléments diagonaux. Les expressions qui en résultent, sont identiques quel que soit le cas envisagé: scalaire ou matriciel. La condition de positivité de matrices revient dans le cas scalaire à ce que toutes les expressions calculées soient strictement positives. Soient m_1^i et m_2^i les éléments diagonaux de \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 , alors pour $i=1,2$, (5.46) est équivalent à:

$$P_{44}^i - P_{24}^i (P_{22}^i)^{-1} P_{24}^i > 0 \Leftrightarrow P_{44}^i P_{22}^i - (P_{24}^i)^2 > 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{m_1^i (m_2^i)^2 + (m_2^i)^2 + (m_1^i)^3 + 2(m_1^i)^2 + m_1^i}{4(m_1^i)^2 (m_2^i)^2} - \frac{1}{4(m_1^i)^2} > 0 \quad (5.49)$$

L'équation (5.49) est toujours vérifiée, ce qui implique que \mathbf{P} est définie positive, avec le choix effectué quant à la détermination de ses sous-blocs.

Jusqu'à présent, des conditions sur \mathbf{P} et quelques éléments de \mathbf{G}_{ssv} ont été déterminés, afin d'obtenir des matrices blocs de \mathbf{Q} qui soient des matrices identités.

Maintenant, des conditions doivent être obtenues afin que tous les autres éléments de \mathbf{Q} soient nuls. En examinant $\mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}, \mathbf{Q}_{23}$ et \mathbf{Q}_{34} , six sous-blocs de \mathbf{G}_{ssv} sont à déterminer pour les cinq sous-matrices citées ci-dessus. \mathbf{Q}_{24} est éliminée car elle a été employée pour le calcul de \mathbf{P}_{22} . En choisissant \mathbf{g}_{12} comme paramètre, la condition de nullité des cinq sous-matrices s'écrit comme suit:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\
\mathbf{P}_{24}^T & \mathbf{P}_{44} & & \\
\mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\
\mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{P}_{24}^T & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\
\mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{0}_{4 \times 4} & & \mathbf{P}_{33}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{21} \\ \mathbf{g}_{41} \\ \mathbf{g}_{22} \\ \mathbf{g}_{42} \\ \mathbf{g}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} + \mathbf{P}_{24} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{P}_{44} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{b}_f^T \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ -\mathbf{g}_{12}^T \mathbf{P}_{11} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

L'équation (5.50) est résoluble en \mathbf{g} si et seulement si la matrice en \mathbf{P}_{ij} est non singulière, i.e son déterminant est non nul. Après calcul de celui-ci, son expression est la suivante: $\mathbf{P}_{33} \left(\mathbf{P}_{44} - \mathbf{P}_{24} \mathbf{P}_{22}^{-1} \mathbf{P}_{24}^T \right)^2$. Nous retrouvons la conditions de définie positivité de \mathbf{P} , ce qui implique que la matrice en (5.50) est non singulière.

En conclusion, il est possible de trouver une matrice \mathbf{G}_{ssv} tel que l'équation de couplage (5.27) et l'équation de Lyapunov (5.28) soient simultanément vérifiées. De plus $\mathbf{Q}=\mathbf{I}_{8 \times 8}$ correspond à une solution optimale (Slotine et Li, 91), en terme de rapidité de convergence, pour une matrice \mathbf{P} définie positive choisie telle que sa valeur singulière maximale soit aussi faible que possible.

2^{ème} Cas

Le manipulateur à l'étude possède une chaîne cinématique fermée, ce qui entraîne un couplage au niveau de la matrice de l'inertie des moteurs et de la matrice des rigidités. En conséquences \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont des matrices pleines, ce qui complique la résolution de l'équation de Lyapunov. En effet les produits de matrice ne sont plus commutatifs et un bon nombre de matrices doivent être pleines, ce qui ne permet plus de simplifier certaines conditions en expressions scalaires faciles à exploiter.

\mathbf{a}_f et \mathbf{b}_f étant choisies comme des matrices diagonales, d'après les expressions de \mathbf{Q}_{11} et \mathbf{Q}_{33} , \mathbf{P}_{11} , \mathbf{P}_{33} , \mathbf{g}_{11} et \mathbf{g}_{32} peuvent être choisies diagonales et de mêmes expressions qu'en (5.46) car les matrices \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 n'interviennent pas dans leur détermination.

Par contre les matrices \mathbf{P}_{24} , \mathbf{P}_{22} et \mathbf{P}_{44} ne peuvent plus être diagonales et elles doivent satisfaire les expressions suivantes:

$$\mathbf{P}_{24}\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_1^T\mathbf{P}_{24}^T = \mathbf{I} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{P}_{44}\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_2^T\mathbf{P}_{44} = \mathbf{I} + \mathbf{P}_{24} + \mathbf{P}_{24}^T \quad (5.52)$$

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{P}_{24}\mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1^T\mathbf{P}_{44} \quad (5.53)$$

\mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont définies positives, tel que (5.51) et (5.52) peuvent être interprétées comme des équations de Lyapunov, que l'on peut résoudre et dont on peut dire que \mathbf{P}_{24} et \mathbf{P}_{44} sont symétriques définies positives. Par contre \mathbf{P}_{22} perd sa symétrie ce qui ne peut convenir. Cependant, dans le cas de la configuration de chaîne cinématique fermée du manipulateur à l'étude, les structures de \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 sont telles que \mathbf{P}_{22} est de la forme: $\begin{bmatrix} A & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec b, c, d inférieurs à A . Ce résultat, dépendant surtout de la structure de \mathbf{K}_e , peut être retrouvé fréquemment mais il n'est pas généralisable. Nous pouvons approximer (ceci a été vérifié par simulation) \mathbf{P}_{22} par:

$$\mathbf{P}'_{22} = \begin{bmatrix} \lambda_M(\mathbf{P}_{22}) & \lambda_m(\mathbf{P}_{22}) \\ \lambda_m(\mathbf{P}_{22}) & \lambda_m(\mathbf{P}_{22}) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$\lambda_M(\mathbf{P}_{22})$ et $\lambda_m(\mathbf{P}_{22})$ étant respectivement les valeurs propres maximale et minimale de \mathbf{P}_{22} .

Cette approximation implique que \mathbf{Q} ne sera plus tout à fait égale à la matrice identité, car les blocs \mathbf{Q}_{24} et \mathbf{Q}_{42} ne seront pas tout à fait nuls. Ce qui importe dans ce cas, est le fait que les blocs diagonaux définis positifs soient prédominants sur les blocs non diagonaux qui sont nuls ou presque nuls (ceci en terme de valeurs propres).

Les matrices \mathbf{P}_{24} , \mathbf{P}_{22} et \mathbf{P}_{44} doivent toujours vérifier la condition de positivité (5.44b) de \mathbf{P} . Une étude numérique cas par cas doit être envisagée, car aucune expression assez simple pour être exploitée n'a été trouvée.

Pour avoir le reste de la matrice \mathbf{Q} nulle, les deux systèmes d'équations suivants doivent être résolus:

$$(S_1) \quad \begin{cases} \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{P}_{22} + \mathbf{g}_{41}^T \mathbf{P}_{24} = \mathbf{P}_{11} + \mathbf{m}_1^T \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{g}_{21}^T \mathbf{P}_{24} + \mathbf{g}_{41}^T \mathbf{P}_{44} = \mathbf{m}_1^T \mathbf{P}_{44} \end{cases} \quad (5.55)$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} \mathbf{P}_{22} \mathbf{g}_{22} + \mathbf{P}_{24} \mathbf{g}_{24} = \mathbf{b}_f^T \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{g}_{22}^T \mathbf{P}_{24} + \mathbf{g}_{42}^T \mathbf{P}_{44} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{g}_{31}^T = -\mathbf{P}_{11} \mathbf{g}_{12} \mathbf{P}_{33}^{-1} \quad (5.57)$$

\mathbf{g}_{12} est choisie comme matrice paramètre.

(S_1) et (S_2) sont résolubles si et seulement si: $\begin{vmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{24}^T & \mathbf{P}_{44} \end{vmatrix} \neq 0$.

5.2.4.3 Remarques générales sur l'observateur à structure variable

L'étude numérique du manipulateur considéré montre que les matrices \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 peuvent être approximées par des matrices diagonales dont les éléments sont les valeurs propres de \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 . L'étude du premier cas peut être employée en première approximation.

Soit l'équation de Lyapunov suivante:

$$-\hat{\mathbf{Q}} = \left(\mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv} \mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \right) \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_0^T \left(\mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv} \mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \right) \quad (5.58)$$

Zak et al. (89) ont montré que l'observateur devient à mode de glissement si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\bar{\rho} > \frac{\lambda_M(\mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv})}{\lambda_m(\mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv})} \rho \quad (5.59)$$

si $\hat{\mathbf{Q}}$ est semi-définie positive, et

$$\bar{\rho} > \frac{\lambda_M(\mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv})}{\lambda_m(\mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv})} \rho + \frac{\|\mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_0 \mathbf{e}\|}{\lambda_m(\mathbf{B}_{ssv}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_{ssv})} \quad (5.60)$$

si $\hat{\mathbf{Q}}$ est définie positive. $\bar{\rho}$ remplace ρ dans l'élément à structure variable (5.26).

Yaz et Azemi (92) ont appliqué ce genre d'observateur à un système non linéaire pouvant être mis sous la forme d'un système à structure variable en présence de bruit répondant à un processus de Wiener. Ils ont montré que sous certaines conditions, l'erreur d'estimation est uniformément et ultimement bornée.

L'étude est basée sur un manipulateur à deux articulations. Cependant, une même étude pourrait être menée lorsque n articulations sont considérées (Léchevin et Sicard, 97). De plus l'ajout d'une matrice paramètre λ appliquée à $\dot{\mathbf{q}}_l$ et $\dot{\mathcal{G}}_l$ dans la deuxième colonne de \mathbf{A}_{ssv} (5.19) ne change en rien la convergence de l'observateur, mais permet de modifier la borne supérieure de l'élément non linéaire dont la norme est $\|\dot{\mathbf{q}}_l - \lambda \mathbf{q}_m\|$.

5.2.5 Résultats de simulation

Puisque les grandeurs côté moteur sont à reconstruire, une erreur d'estimation initiale est introduite: $\pi/20$ rad sur les positions des moteurs et $\pi/20$ rad/s sur les vitesses des moteurs. Les gains du filtre sont $\mathbf{a}_f = \mathbf{b}_f = \text{diag}(100, 100)$. Afin de majorer les incertitudes, le système a été simulé en boucle fermée avec la loi de commande décrite au chapitre 4, en supposant que toutes les grandeurs étaient mesurables. Les simulations ont été réalisées pour toutes les valeurs de rigidité et de masse de la charge permises. Nous avons ensuite pris la borne supérieure de $\|\dot{\mathbf{q}}_l - \mathbf{q}_m\|$ sur l'ensemble des mesures afin d'obtenir une première valeur de ρ . Cette méthode est à priori critiquable en ce sens que la majoration obtenue correspond à un cas particulier de commande, cependant rien n'empêche d'augmenter la borne

supérieure afin de couvrir une plus large gamme de vitesses du membre. Elle ne doit toutefois pas atteindre des valeurs trop importantes à cause d'une sensibilité plus accrue aux bruits de mesure dans ce cas. La valeur de ρ retenue est 15.

La méthodologie exposée à la section précédente a été appliquée au modèle du manipulateur. La matrice paramétrique est fixée à $\mathbf{g}_{12} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$. Puisqu'une certaine liberté de choix est possible quant à la détermination de \mathbf{P}_{11} et \mathbf{P}_{33} , quelques simulations nous ont conduit aux valeurs suivantes: $\mathbf{P}_{11} = \mathbf{P}_{33} = \text{diag}(0.01, 0.01)$. L'évaluation du reste de la matrice \mathbf{P} et la détermination de \mathbf{G}_{ssv} à partir de $\mathbf{Q} \cong \mathbf{I}_{8 \times 8}$ est alors automatique. Le résultat est résumé par l'obtention des valeurs propres de \mathbf{A}_0 suivantes: -95.8, -5.9, -49.2 $\pm 31j$, -50.1 $\pm 0.2j$, - 49.4 $\pm 0.8j$. Celles-ci sont dans l'ensemble assez éloignées de zéro dans le demi-plan gauche, ce qui entraîne une réponse assez rapide de la partie linéaire de l'observateur. Il est à noter que les matrices \mathbf{P}_{22} , \mathbf{P}_{24} et \mathbf{P}_{44} sont imposées dans leur choix afin d'obtenir $\mathbf{Q} \cong \mathbf{I}_{8 \times 8}$ ce qui implique que le placement de certaines valeurs propres reste limité. Cela semble être le cas entre autre de -5.9.

Les réponses en position sont rapides, car en général inférieures à 0.4 s (temps de stabilisation), excepté pour le moteur 2 (fig.5.3) pour lequel la convergence est plus lente (1 s). Ce résultat est comparable à l'ensemble des observateurs. On remarque des oscillations (*chattering*) sur l'estimée de la position des membres, typiques des observateurs à structure variable, tandis que les reconstructions des grandeurs mesurées se superposent toutes.

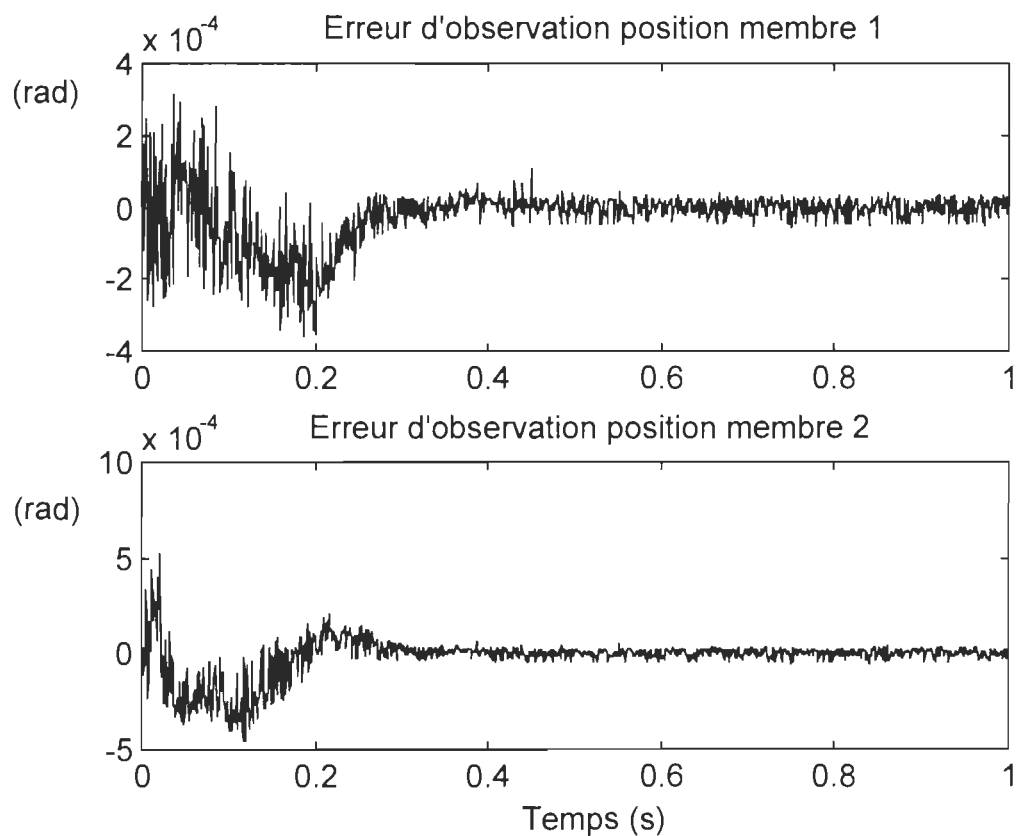


Figure 5.3a - Observateur à structure variable (positions membres)

Toutefois leur amplitude est très faible par rapport aux grandeurs réelles (inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$) et ne risque pas de détériorer les performances d'une loi de commande ou d'exciter certains modes de dynamiques non modélisées, lorsque l'observateur est mis en oeuvre. Notons que la mesure de la position des membres étant disponible, on peut directement utiliser cette dernière pour la commande. Une alternative consisterait à employer $\hat{\mathbf{q}}_l$ filtrée mais les preuves de stabilité du système régulé sont plus complexes.

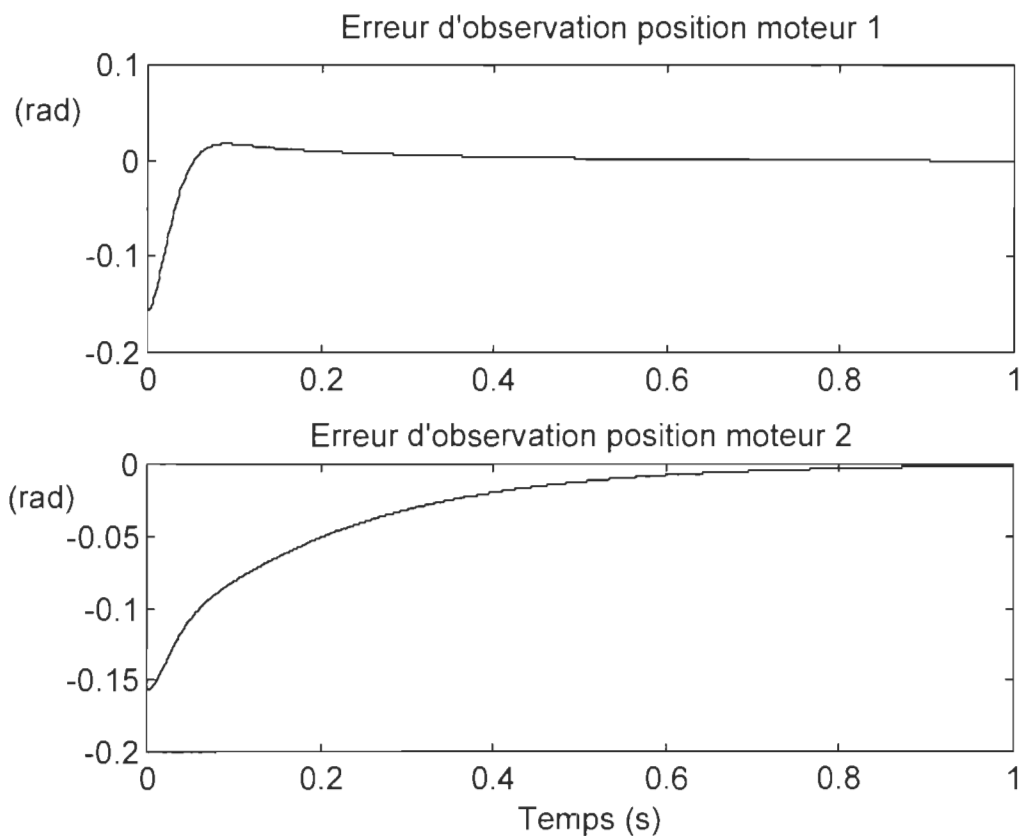


Figure 5.3b - Observateur à structure variable (positions moteurs)

De même l'erreur d'estimation des vitesses est rapide dans l'ensemble, inférieure à 0.4 s, excepté pour le moteur 2. L'erreur représentée est la différence entre la vitesse réelle (non filtrée) et la vitesse observée. Par conséquent la vitesse observée présente à l'origine un retard dû à l'insertion d'un filtre du premier ordre.

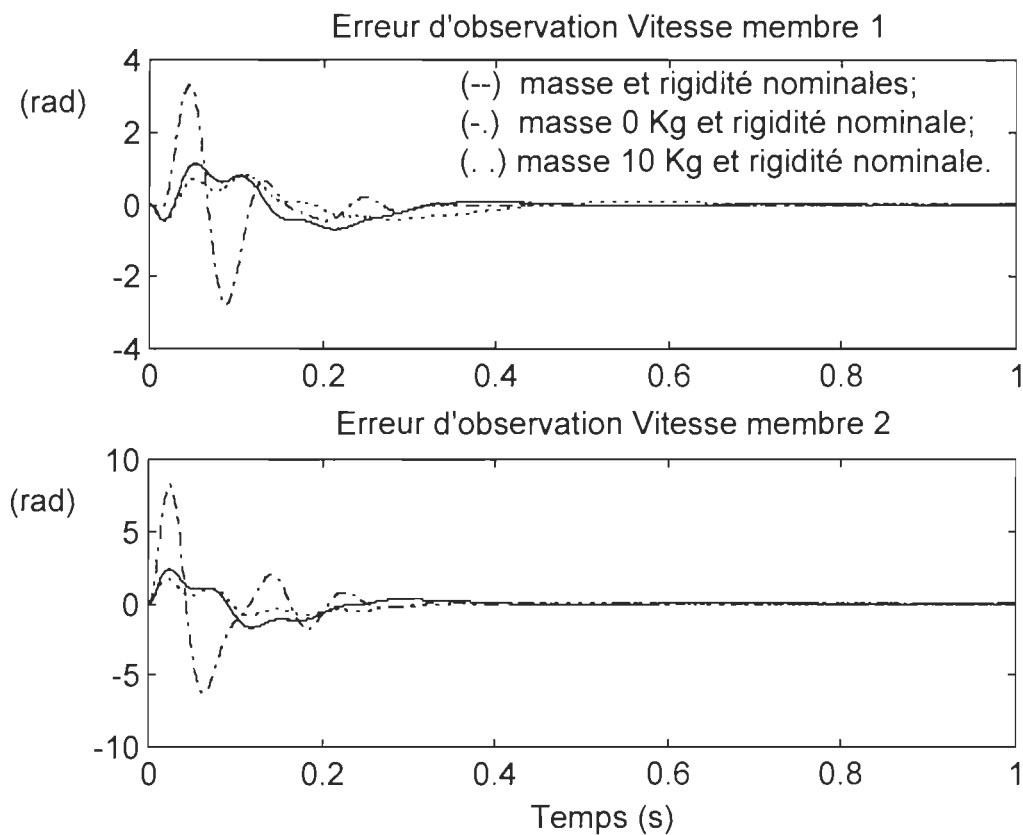


Figure 5.4a - Observateur à structure variable (vitesses membres)

Ce retard peut être ajusté en variant les valeurs du gain et de la fréquence de coupure du filtre tout en prenant en considération la présence ou

non de bruit sur la mesure de la position. Malgré ce retard, la forme de la vitesse reconstituée est identique à celle de la vitesse réelle et le taux de convergence de l'erreur d'estimation demeure acceptable.

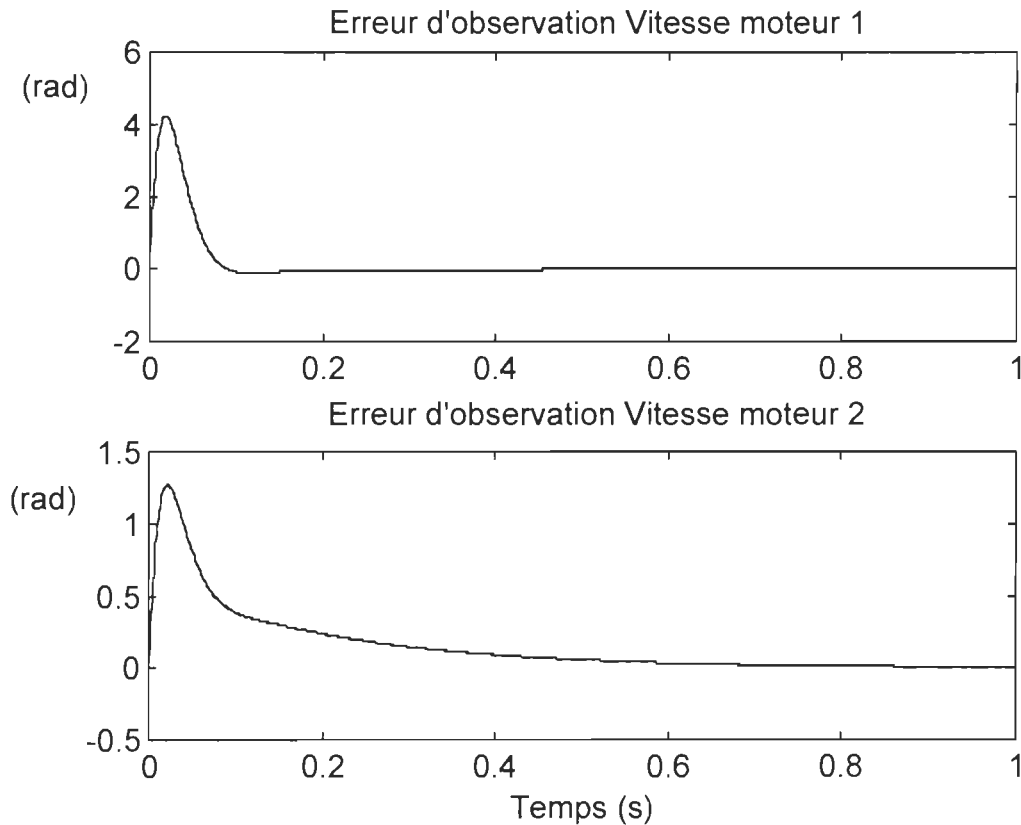


Figure 5.4b - Observateur à structure variable (vitesses moteurs)

L'avantage de ce type d'observateur est la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques au niveau des membres et de la charge, ce que nous observons sur toutes les courbes.

Une variation de la charge ne modifie en rien le type et la rapidité de la convergence de toutes les grandeurs estimées. L'erreur d'estimation pour les positions sont quasi identiques (on ne peut les distinguer) quelle que soit la charge. Les différences pour l'erreur d'estimation des vitesses sont plus marquées lors du régime transitoire. Ceci est dû au retard introduit par le filtre utilisé côté membre.

5.3 Observateur adaptatif

Erlic et Lu ont proposé un observateur adaptatif d'ordre réduit pour un manipulateur rigide qui permet de reconstruire la vitesse à partir de la position des membres. Inspiré de ce travail, nous avons tenté de l'adapter au cas des manipulateurs à articulations flexibles. Cet observateur est montré localement asymptotiquement stable si certaines grandeurs, que nous précisons, sont bornées.

5.3.1 Définition et stabilité de l'observateur

5.3.1.1 Hypothèses:

1. Les propriétés et bornes définies au chapitre 3 ((3.21) à (3.24)) sont prises en compte. Nous définissons en plus les notations suivantes:

$$\underline{\sigma} = \lambda_m(\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{G}_a) \quad (5.61)$$

où $\mathbf{G}_a \in \mathbf{R}^{n \times m}$ sera défini ultérieurement,

$$m_d = \lambda_m(\mathbf{D}) \quad (5.62)$$

$$\|\dot{\mathbf{q}}(t)\| \leq m_v \quad (5.63)$$

λ_m signifie la valeur propre minimale de la matrice en question.

2. Le couple \mathbf{u} et la déformation $\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_m$ des éléments flexibles sont supposés bornés. ■

5.3.1.2 Définition de l'observateur

La formulation suivante de la dynamique du système est utilisée:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}_l) [\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}_l)] \quad (5.64)$$

À partir des résultats établis par Erlic et Lu, nous définissons l'observateur adaptatif suivant appliqué au cas des manipulateurs à articulations flexibles:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{G}_a \tilde{\mathbf{q}} \quad (5.65)$$

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{a}}) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(\mathbf{q}_l) (\mathbf{B}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{q} - \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{q}_l)) \quad (5.66)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = -\Gamma \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \Phi) \tilde{\dot{\mathbf{q}}} \quad (5.67)$$

Avec :

\mathbf{G}_a : le gain de l'observateur;

$\hat{\mathbf{M}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{G}}$: respectivement les estimées des matrices de masse, de Coriolis, de rigidité, de frottement et de gravitation;

$\hat{\mathbf{a}}$ et \mathbf{Y}^T : l'estimée de la matrice des paramètres du système et la matrice de régression telles que définies en (3.21) et définies explicitement à l'annexe G;

Γ : la matrice de gain de la loi d'adaptation, symétrique et définie positive;

$\tilde{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}$: l'erreur d'estimation de la vitesse.

5.3.1.3 Stabilité de l'observateur

D'après les hypothèses et les définitions de l'observateur (5.65), (5.66) et (5.67), le résultat suivant est établi.

Proposition 5.2

Lorsque le couple, la vitesse des moteurs et des membres et la déformation du ressort équivalent sont bornés, l'observateur adaptatif réduit

proposé ci-dessus est localement asymptotiquement stable. Les conditions sur les estimées à l'instant initial seront précisées dans la preuve. ■

Preuve

Soit le vecteur d'erreur $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T & \tilde{\mathbf{a}}^T \end{bmatrix}^T$, $\tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ et la matrice définie positive suivante: $\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{M}(\mathbf{q}_l), \Gamma^{-1})$. Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante:

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{e}(t) \quad (5.68)$$

Notons λ_p et λ_P les valeurs propres minimale et maximale de \mathbf{P} . Alors $V(t)$ admet les bornes suivantes:

$$\frac{1}{2} \lambda_p \|\mathbf{e}(t)\|^2 \leq V(t) \leq \frac{1}{2} \lambda_P \|\mathbf{e}(t)\|^2 \quad (5.69)$$

Déterminons la dérivée de $V(t)$ le long des trajectoires du système:

$$\dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\mathbf{M}(\mathbf{q}_l) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \tilde{\mathbf{a}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{a}}} \quad (5.70)$$

Or

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\hat{\mathbf{q}}}) = \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}_l) \quad (5.71)$$

$$- \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\Phi - \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}\mathbf{q} \quad (5.72)$$

$$- \mathbf{G}(\mathbf{q}_l) - \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\Phi - \mathbf{D}\dot{\hat{\mathbf{q}}}$$

De plus, avec les notations suivantes $\tilde{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}} - \mathbf{M}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{D}$ et $\tilde{\mathbf{G}} = \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{G}$, nous avons:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\Phi = (\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l) - \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l))\Phi = -\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l)\Phi + \mathbf{B}\mathbf{u} - \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}}$$

$$- \hat{\mathbf{D}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}_l) = -\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l)\Phi + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}} \quad (5.73)$$

$$- \hat{\mathbf{D}}\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{G}(\mathbf{q}_l)$$

L'équation (5.72) devient

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.74)$$

$$- \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l)\Phi + \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{D}}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{q}_l)$$

Or d'après l'équation (3.23)

$$-\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)(\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}) = -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.75)$$

D'après l'équation (3.21), (5.72) se simplifie sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = & -\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{D}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \Phi)\tilde{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (5.76)$$

On en déduit l'expression simplifiée de la dérivée de V suivante:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[-\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l) - \mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l) - \mathbf{D} - \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_l) \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \Phi)\tilde{\mathbf{a}} + \tilde{\mathbf{a}}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\mathbf{a}}} \end{aligned} \quad (5.77)$$

En supposant les paramètres du système constants, i.e. (5.77)

$\dot{\tilde{\mathbf{a}}}(t) = \dot{\hat{\mathbf{a}}}(t)$ pour tout $t > 0$, alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l) + \mathbf{D} + \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ & + \tilde{\mathbf{a}}^T \left[\mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{q}}, \Phi)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Gamma^{-1} \dot{\hat{\mathbf{a}}} \right] \end{aligned}$$

D'après la loi d'adaptation (5.67), on obtient finalement

$$\dot{V}(t) = -\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \left[\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l) + \mathbf{D} + \mathbf{M}(\mathbf{q}_l)\mathbf{G}_a \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (5.78)$$

Or d'après (3.22) et (5.63),

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_l)\| = \|\mathbf{C}(\mathbf{q}_l, \dot{\mathbf{q}}_l - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l)\| \leq m_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_l - \dot{\mathbf{q}}_l\| \leq m_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| + m_c m_v \quad (5.79)$$

L'équation (5.83) devient

$$-\dot{V}(t) \geq \left[m_d + \underline{\sigma} - \|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}})\| \right] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \geq \left[m_d + \underline{\sigma} - m_c m_v - m_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \right] \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (5.80)$$

$$\dot{V}(t) \leq -\beta \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|^2 \quad (5.81)$$

où $\beta = \underline{\sigma} + m_d - m_c m_v - m_c \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$. Afin de montrer que le système est stable, il faut déterminer les conditions sous lesquelles $\beta > 0$, ce qui est équivalent à

$$\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \leq \frac{1}{m_c} (\underline{\sigma} + m_d - m_c m_v) \quad (5.82)$$

Pour que cette condition soit significative, il faut que $\underline{\sigma} + m_d - m_c m_v > 0$, soit $m_v < \frac{\underline{\sigma} + m_d}{m_c}$, ce qui définit une borne supérieure de la vitesse permise.

Or $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \leq \|\mathbf{e}\|$. Par conséquent pour que l'inégalité (5.82) soit vérifiée, la condition peut s'écrire sous la forme suivante que nous emploierons (cette condition est cependant plus conservative que (5.82)).

$$\|\mathbf{e}\| \leq \frac{1}{m_c} (\underline{\sigma} + m_d - m_c m_v) \quad (5.83)$$

$\beta > 0$ signifie que $V(t)$ est décroissante le long des trajectoires du système et donc $V(t) \leq V(0)$. D'après (5.69)

$$\frac{1}{2} \lambda_p \|\mathbf{e}(t)\|^2 \leq V(t) \leq V(0) \leq \frac{1}{2} \lambda_p \|\mathbf{e}(0)\|^2 \quad (5.84)$$

$$\|\mathbf{e}(0)\| \geq \sqrt{\frac{\lambda_p}{\lambda_P}} \|\mathbf{e}(t)\| \quad (5.85)$$

On obtient une condition suffisante pour que (5.83) soit satisfaite:

$$\|\mathbf{e}(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_p}{\lambda_P}} \left[\frac{1}{m_c} (\underline{\sigma} + m_d - m_c m_v) \right] \quad (5.86)$$

Cette condition définit la zone d'attraction de l'observateur adaptatif au delà de laquelle la stabilité uniforme (au sens large) n'est plus assurée. Ceci implique que la valeur initiale des estimées (vitesse et paramètres) doit être bornée, cependant la zone d'attraction peut être agrandie en augmentant les valeurs propres de \mathbf{G}_σ .

$\dot{V}(t)$ étant semi-définie négative, on ne peut conclure à une stabilité asymptotique. On peut toutefois démontrer que la vitesse estimée tend asymptotiquement vers celle du système en appliquant le lemme de Barbalat. En effet le point d'équilibre $\mathbf{e}=\mathbf{0}$ du système d'erreur a été montré uniformément stable donc $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ est bornée ($\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in L^\infty$). De plus,

$$\int_0^t \dot{V}(\tau) d\tau = V(t) - V(0) \leq -\beta \int_0^t \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(\tau)\|^2 d\tau \quad (5.87)$$

Or $V(t)$ est bornée car $V(t)$ est semi-définie positive et $\dot{V}(t) \leq 0$ donc $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in L^2$.

\mathbf{e} étant bornée, alors $\tilde{\mathbf{a}} \in L^\infty$ donc $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}} \in L^\infty$. Avec les hypothèses du couple borné et de la déformation de ressort équivalent bornée, on aboutit à: $\Phi \in L^\infty$. Ce qui implique $\mathbf{Y} \in L^\infty$ donc par (5.81) que $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \in L^\infty$. Par le lemme de Barbalat, on obtient:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) = \mathbf{0} \quad (5.88)$$

■

Remarques

1. Cet observateur ne garantit par la convergence asymptotique des paramètres identifiés, mais leur bornage est assuré ce qui n'entrave en rien la démonstration de la convergence de la vitesse estimée. Pour assurer leur convergence, une certaine richesse du signal de commande est nécessaire. Pour la commande, Slotine et Li (91), ont proposé d'ajouter dans la loi adaptative un terme comprenant l'erreur de prédiction. Dans ce cas, si le signal est à excitation persistante alors les paramètres à identifier sont montrés convergeant asymptotiquement. Cependant une telle loi appelée loi adaptative composite ne peut être employée au cas de l'observation d'état car

l'erreur de prédiction requiert la connaissance de l'état complet mesuré, ce que nous n'avons pas.

2. La loi d'adaptation (5.67) nécessite la connaissance complète de l'erreur d'estimation. Or seule l'erreur d'estimation sur la position est disponible. Afin d'implanter cet observateur, une approximation de celui-ci est réalisée, lorsqu'on le discrétise, ce qui permet d'avoir en plus, une formulation directement exploitable pour sa mise en oeuvre.

Considérons à l'instant initial t_0 , les estimées $\hat{\mathbf{q}}(t_0)$ et $\hat{\mathbf{a}}(t_0)$, alors les expressions intégrales de (5.66) et (5.67) sont :

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}(t) = \dot{\hat{\mathbf{q}}}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\Phi(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{a}}) + \mathbf{G}_a \ddot{\hat{\mathbf{q}}} \right] d\tau \quad (5.89)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(t) = \hat{\mathbf{a}}(t_0) - \Gamma \int_{t_0}^t \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \Phi) \ddot{\hat{\mathbf{q}}} d\tau \quad (5.90)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) = \hat{\mathbf{a}}(t_0) - \Gamma \int_{\mathbf{q}(t_0)}^{\mathbf{q}(t)} \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \Phi) d\mathbf{q} + \Gamma \int_{t_0}^t \mathbf{Y}^T(\mathbf{q}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}, \Phi) \dot{\hat{\mathbf{q}}} d\tau \quad (5.91)$$

En supposant que \mathbf{Y} , Φ et \mathbf{q} sont des fonctions constantes pendant la période d'échantillonnage T , une version approximée de l'observateur (5.89) et (5.90) se présente sous la forme:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}(i) = (\mathbf{I}_{4 \times 4} - T\mathbf{G}_a)\dot{\hat{\mathbf{q}}}(i-1) + T\Phi(i-1) + \mathbf{G}_a(\mathbf{q}(i) - \mathbf{q}(i-1)) \quad (5.92)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(i) = \hat{\mathbf{a}}(i-1) + \Gamma\mathbf{Y}^T(i-1)(T\dot{\hat{\mathbf{q}}}(i-1) - \dot{\mathbf{q}}(i) + \dot{\mathbf{q}}(i-1)) \quad (5.93)$$

Cette approximation est d'autant plus valable que la période d'échantillonnage T devient petite.

5.3.2 Résultats de simulation

Nous supposons une erreur initiale sur les vitesses estimées de 0.2 rad/s. Les gains de l'observateur et de la loi adaptative sont respectivement fixés à $\mathbf{G}_a = 50\mathbf{I}_{2 \times 2}$ et $\Gamma = 20\mathbf{I}_{4 \times 4}$. Les paramètres à estimer sont la masse et l'inertie de la charge et les constantes de rigidité k_1 et k_2 . Pour la simulation, le régresseur et la matrice des paramètres ont été divisés en deux parties: une partie connue $\mathbf{Y}_c\mathbf{a}_c$ et une partie inconnue $\mathbf{Y}_i\mathbf{a}_i$ telles que $\mathbf{Y}\mathbf{a} = \mathbf{Y}_c\mathbf{a}_c + \mathbf{Y}_i\mathbf{a}_i$ (voir annexe G, procédure "adaflj.m"). Les paramètres à identifier sont initialisés aux valeurs nominales et le système a été observé pour des valeurs de rigidité et de la masse de la charge décrites en introduction de ce chapitre.

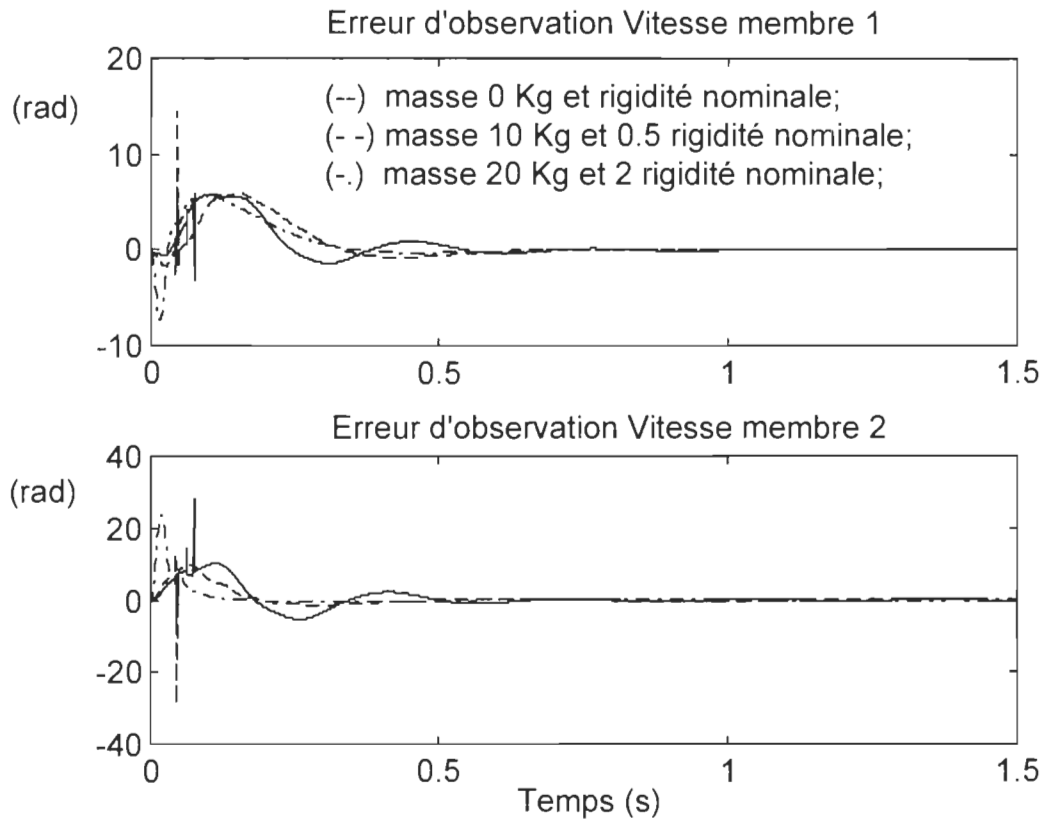


Figure 5.5a - Observateur adaptatif (vitesses membres)

Seules les vitesses sont tracées, car l'observateur est d'ordre réduit et ne reconstruit que les vitesses (fig. 5.5). Le temps de convergence des estimées demeure acceptable par rapport aux autres observateurs, inférieur à 0.8 s en général. On remarque cependant que celui-ci est plus lent que pour les autres observateurs et que le régime transitoire est légèrement oscillatoire, ce qui est assez typique en général des observateurs adaptatifs.

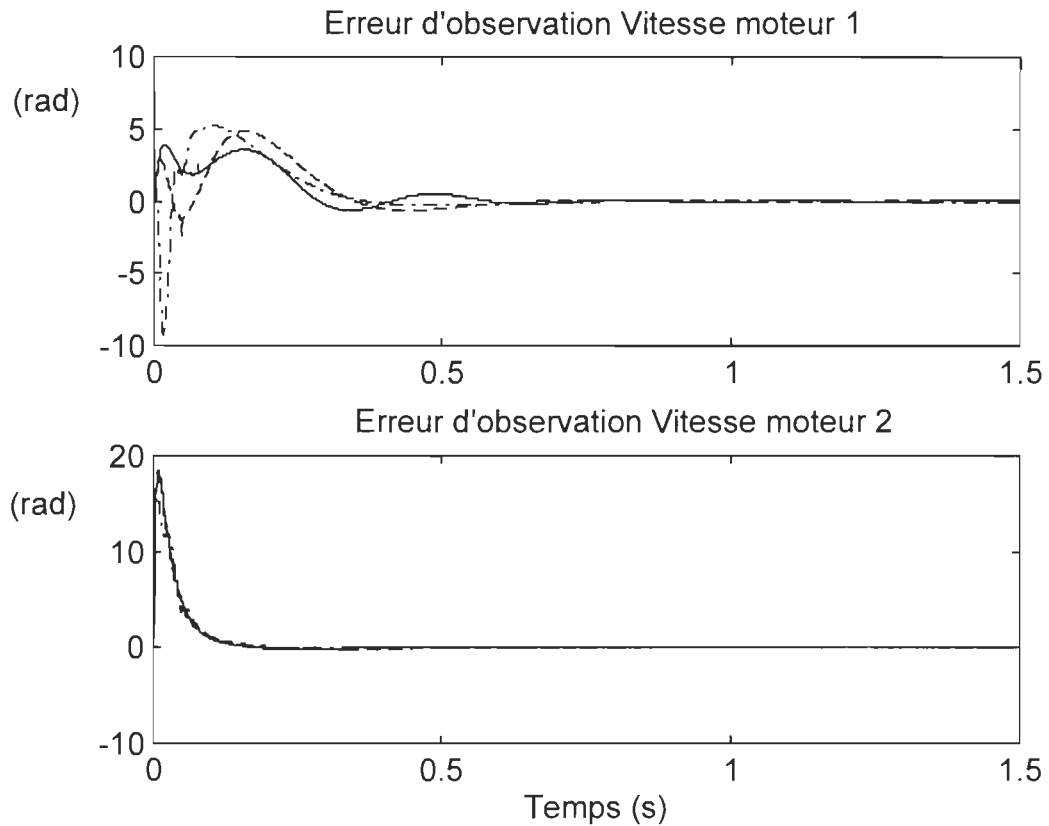


Figure 5.5b - Observateur adaptatif (vitesses moteurs)

5.4 Conclusion

Trois observateurs ont été présentés dans ce chapitre, tous susceptibles de posséder des propriétés intéressantes lorsque des variations de paramètres sont à envisager ou lorsque ceux-ci sont mal connus. Récapitulons les par type d'observateur.

1. L'observateur basé sur la passivité reconstruit les grandeurs des moteurs à partir de celles des membres. Tomei (90) a prouvé qu'il présente une

certaine forme de robustesse lorsque la vitesse des membres et l'équation de l'erreur paramétrique sur la dynamique sont bornées. Cependant un écart stationnaire subsiste, car le point d'équilibre du système d'erreur d'estimation est légèrement différent de zéro lorsque des incertitudes paramétriques sont considérées.

2. L'observateur à structure variable n'a besoin que de la mesure de la position des membres. Celui-ci est démontré être robuste dans le cas d'erreurs paramétriques sur le membre. La robustesse est assurée pour les types de convergence possibles (asymptotique ou uniformément ultimement bornée) et demeure bonne pour les performances (régime transitoire).
3. L'observateur adaptatif est réduit et permet la reconstruction des vitesses à partir de la mesure des positions. Quelle que soit la valeur des paramètres à identifier, la convergence asymptotique est assurée pourvu que l'erreur d'estimation initiale reste dans la zone d'attraction. Le régime transitoire est faiblement oscillatoire.

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Tableau 5.1 Étude comparative: observateurs robustes et adaptatif

Observateurs Critères	Basé sur la passivité	À structure variable	Adaptatif
Grandeurs de mesures	Position et vitesse:membres	Position des membres	Positions:moteurs et membres
Stabilité	Asymptotique si vitesse membre bornée	Ultimement et uniformément borné si frottement sec; sinon asymptotique	Asymptotique locale
Régime transitoire	Rapide; Dépassements faibles	Rapide; Dépassements faibles	Plus lent; Oscillations
Robustesse (vs. charge)	Oscillations en régime transitoire; Nouveau point d'équilibre	Bonne par rapport aux incertitudes sur les membres	Possible si les variations des paramètres sont lentes et faibles
Observateur correcteur	Réponses rapides; Dépassements faibles	Réponses rapides; Dépassements faibles	Régime transitoire oscillatoire
Mise en oeuvre	Quantité de calcul importante; Algorithme en continu	Faible puissance de calcul; Algorithme en continu/discret (facile à obtenir)	Temps de calcul faible; Algorithme en discret
Environnement	Déterministe	Déterministe	Déterministe

CHAPITRE 6

CONCLUSION

Ce mémoire a permis de dégager six classes d'observateurs permettant la reconstruction de l'état d'un manipulateur avec articulations flexibles. Le manipulateur étudié possède la particularité de présenter des couplages au niveau des inerties des moteurs et des éléments présentant une certaine flexibilité.

De par leur étude analytique et les résultats de simulation, aucun observateur ne permet de satisfaire, à la fois, tous les critères de performance et conditions d'utilisation (réponse transitoire, robustesse, environnement déterministe ou stochastique, qualité de convergence, facilité d'implantation). Mais plutôt, une étude cas par cas pour l'utilisation de l'un de ces observateurs est préconisée. Résumons leur possibilité d'application suivant les critères de performance et conditions d'utilisation suivants.

Robustesse:

En terme de stabilité, l'observateur à structure variable présente les meilleures propriétés vis-à-vis de toutes erreurs de paramétrisation des

membres et de la charge. Ses performances en régime transitoire demeurent bonnes. Cependant si la dynamique des actionneurs et des éléments flexibles est mal paramétrisée, la robustesse n'est plus assurée.

Incertitudes paramétriques:

Lorsque les paramètres du modèle (membres, actionneurs ou éléments flexibles) sont à l'origine mal connus, l'observateur adaptatif peut offrir une solution intéressante. Une convergence asymptotique locale de l'état est assurée. Par contre, un tel observateur n'est pas garanti être robuste lorsque des variations paramétriques interviennent au cours de la reconstruction d'état. De plus, toutes incertitudes non paramétrisées peuvent causer une divergence de l'observateur. En résumé, l'emploi de cet observateur est préconisé lorsque nous sommes sûr de la modélisation du système mais pas de l'exactitude de la valeur numérique des paramètres.

Environnement bruité:

Seul le filtre de Kalman Étendu est assuré être localement convergent lorsque du bruit blanc Gaussien est considéré. À cause de la linéarisation locale du système, des problèmes de convergence peuvent se

produire. Des versions modifiées du filtre de Kalman Étendu ont été proposées mais au dépend de la facilité de mise en oeuvre.

L'observateur à structure variable possède aussi quelques propriétés intéressantes lorsque du bruit de type processus de Wiener est présent. Il perd sa convergence asymptotique au dépend d'une convergence ultimement et uniformément bornée.

Facilité de mise en oeuvre:

Seul le filtre de Kalman étendu et l'observateur adaptatif sont exprimés sous forme échantillonnée. Ces derniers ne présentent pas une lourde charge de calcul en particulier lorsque le filtre de Kalman Étendu est à gain constant.

Bien que non réalisé dans ce travail, l'observateur à structure variable peut être facilement discrétisé puisqu'il est la somme de l'observateur classique de Luenberger et d'un terme de commutation. Il en est de même pour l'observateur dont l'erreur dynamique a été linéarisé, puisque après un changement de repère relativement simple, l'observateur est de type Luenberger.

Plusieurs principes de base tels que la linéarisation exacte et la pseudo-linéarisation, l'approche de Lyapunov, la notion de passivité, la théorie des systèmes à structures variables et finalement l'approche adaptative ont été appliqués à l'étude d'observateurs. Ce travail n'est pas exhaustif car d'autres classes d'observateurs existent comme signalé au chapitre 1.

Un des travaux restant et non des moindres consiste à appliquer des lois de commande se servant de l'état totalement ou partiellement reconstruit par ces observateurs. Les preuves de stabilité pour l'ensemble observateur-correcteur sont plus complexes et doivent être vérifiées pour chaque observateur car la convergence séparée d'un correcteur et d'un observateur n'assure pas la stabilité de l'ensemble. Quelques résultats ont été obtenus, par exemple Tomei et al. (95) par l'approche de Lyapunov. Erlic et Lu (95) ont utilisé un observateur et un correcteur adaptatifs pour le cas d'un manipulateur rigide. L'observateur à structure variable présenterait les meilleures perspectives d'utilisation pour une commande basée sur le même principe. La convergence uniforme et ultimement bornée semblerait être réalisable (Zak et al., 89).

RÉFÉRENCES

BASTIN G. & GERVERS M., "Stable adaptive Observers for Non-Linear Time Varying Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 33, no 7, pp.650-658, Juillet 1988.

BERGHUIS H. & NIJMEIJER H., "A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 9, no 6, pp.740-754, Décembre 1993.

BROWN R.H., SCHNEIDER S.C. & MULLIGAN M.G., "Analysis of Algorithms for Velocity Estimation from Discrete Position Versus Time Data", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol 39, no 1, pp.11-19, Février 1992.

CHEN C.T., "Linear System Theory Design", Holt, Rinehart and Winston Inc., 1984.

CHUI C.K., CHEN G. & CHUI H., "Modified Extended Kalman Filtering and a Real Time Parallel Algorithm for System Parameter Identification", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 35, no 1, Janvier 1990

- CRAIG J.J.**, "Introduction to Robotics", Addison-Wesley, 1986.
- DESEOR C.A. & VIDYASAGAR M.**, "Feedback Systems: Input-Output Properties", Academic Press, New York, 1975.
- DOMBRE E. & KHALIL W.**, "Modélisation et commande des robots", Hermès, Paris, 1988.
- ERLIC M. & LU W.S.**, "A reduced-Order Adaptive Velocity Observer for Manipulator Control", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 11, no 2, pp.293-303, Avril 1995.
- FORTMAN T. & HITZ K.**, " An Introduction to Linear Control Systems", Marcel Dekker, pp.420-425, 1977.
- HARMONIC DRIVE®TECHNOLOGIES**, "HDC Cup Component Gear Set Selection Guide", 1995.
- JANKOVIC M.**, "Exponentially Stable Observer for Elastic Joint Robots", Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Décembre 1992.
- JANKOVIC M.**, "Observer Based Control for Elastic Joint Robots", IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol 11, no 4, pp.618-623, Août 1995.

KELLY R., ORTEGA R., AILON A. & LORIA A., "Global Regulation of a Flexible Joint Robot Using Approximate Differentiation", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 39, no 6, Juin 1994.

KRENER A.J. & RESPONDEK W., "Nonlinear Observers with Linearizable Error Dynamic", SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 3, no 2, pp.197-216, Mars 1985.

LANCASTER P., "Theory of Matrices", Academic Press, NY, 1969.

LÉCHEVIN N. & SICARD P., "Observer Design for Flexible Joint Manipulators with Parameter Uncertainties", IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997.

LORENTZ R.D. & VAN PATTEN K., "High Resolution Velocity Estimation for all Digital AC Servo Drives", IEEE Industry Application Society Annual Meeting, Vol 1, pp.365-371, 1988.

MISAWA E.A. & HEDRICK J.K., "Nonlinear Observers: A state-of-the-Art Survey", Transactions of the ASME, vol 111, pp.344-352, Septembre 1989.

NARENDRA K.S. & ANNASWAMY A.M., " Stable Adaptive Systems", Prentice-Hall, 1989.

NICOSIA S., TOMEI P. & TORNAMBE A., "A Nonlinear Observer for Elastic Robots", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol 4, no 1, pp.45-52, Février 1988.

NICOSIA S. & TOMEI P., "A Tracking Controller for Flexible Joint Robots Using Only Link Position ", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 40, no 5, pp.885-890, Mai 1995.

NIJMEIJER H. & VAN DER SCHAFT A., "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer-Verlag, 1990.

SICARD P., LÉCHEVIN N. & DUBÉ Y., "Modelling and Observer Design for a flexible Joint Robot in a Closed Loop Kinematics Chain", ISMCR, Bruxelles, 1996.

SLOTINE J.J.E. & LI W., "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, 1991.

SONG Y. & GRIZZLE J.W., "The Extended Kalman Filter as a Local Asymptotic Observer for Non-Linear Discrete-Time Systems", Proceedings of the 1992 ACC, pp.3365-3369, 1992.

SPONG M.W., "Control of Flexible Joint Robot: A survey", UILU-90-2203 DC 116, University of Illinois at Urbana-Champaign, Février 1990.

SWEET M. & GOOD M.C., "Redefinition of the Robot Motion Control", IEEE Control Systems Magazine, Vol 5, no 3, pp.18-24, August 1995.

TOMEI P., "An Observer for Flexible Joint Robot", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 35, no 6, pp.739-743, Juin 1990.

VIDYASAGAR M., "Nonlinear Systems Analysis", Prentice-Hall, Second Edition, 1992.

WALLCOTT B.L., CORLESS M.J. & ZAK S.H., "Comparative Study of Non-Linear State Observation Techniques", International Journal of Control, Vol 45, no 6, pp.2109-2132, 1987.

WALLCOTT B.L & ZAK S.H., "State Observation of Nonlinear Uncertain Dynamical Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol 32, no 2, pp.166-170, Février 1987.

WALLCOTT B.L & ZAK S.H., "Combined Observer-Controller Synthesis for Uncertain Dynamical Systems with Applications", IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics, Vol 18, no 1, pp.88-104, Janvier-Février 1988.

XIA Q., RAO M., YING Y., SHEN S.X. & SUN Y., "A New State Estimation Algorithm Adaptive Fading Kalman Filter", Proceeding of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson Arizona, pp.1216-1221, 1992.

YAZ E. & AZEMI A., "Extension of Deterministic and Stochastic Variable Structure Observers with Application to Disturbance Minimization", Proceedings of the American Control Conference, pp.881-885, 1992.

ZAK S.H., BREHOVES J.D. & CORLESS M.J., "Control of Uncertain Systems with Unmodeled Actuator and Sensor Dynamics and Incomplete State Information", IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics, Vol 19, no 2, pp.241-257, Mars 1989.

ANNEXE A

PROGRAMME PRINCIPAL

Définition des paramètres

Appel des procédures d'observation

Toutes les fonctions (plot, subplot, ...) relatives au tracé des résultats sont omises. Les procédures sont décrites selon l'ordre de l'exposition de celles-ci dans le présent programme principal.

A.1 Définition des variables globales

```
global Alc Blc Ald Bld N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr  
Jmoteur G11 G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2  
Qc Rc Vae1 Vas1
```

A.2 Définitions des paramètres du manipulateur

%%%%%%%% Membre 1

```
m1=3.71;          % masse  
a1=0.3;          % distance entre deux axes de rotations  
l1=0.5;          % longueur du membre 1  
lc1=0.1;         % distance du centre de masse à l'axe de rotation inférieur  
F11=N1*1e-2;     % frottement fluide à l'articulation1  
%% Inertie membre 1: poutre en H  
m11=(3.71-1.24)/2; % masse du parallépipède supérieur  
m12=1.24;        % masse du parallépipède central
```



```

m13=(3.71-1.24)/2;;    % masse du parallélépipède inférieur
lon1=0.5                % longueur de la poutre
lar1=0.15;             % largeur de la poutre
epa1=0.00635;         % Épaisseur de la poutre
I1=(lon1^2+lar1^2)*(m11/12+m13/12)+(lon1^2+epa1^2)*m12/12;
                        %Inertie de la poutre

%%%%%%%%% Membre 2
m2=2.5;                % masse
a2=0.3;                % distance entre deux axes de rotations
l2=0.5;                % longueur du membre2
lc2=0.1;               % distance du centre de masse à l'axe de rotation inférieur
F12=N2*1e-2;           % frottement fluide à l'articulation2
%% Inertie membre 2: poutre en H
m21=(2.5-1.24)/2;% masse du parallélépipède supérieur
m22=1.24;              % masse du parallélépipède central
m23=(2.5-1.24)/2;% masse du parallélépipède inférieur
lon2=0.5;              % longueur de la poutre
lar2=0.15;            % largeur de la poutre
epa2=0.00635;        % Épaisseur de la poutre
I2=(lon2^2+lar2^2)*(m21/12+m23/12)+(lon2^2+epa2^2)*m22/12;
                        %Inertie de la poutre

%%%%%%%%% Charge
Mc=5;                  % masse de la charge
Ic=0;                  % inertie de la charge

%%%%%%%%% Actionneur 1
Mr1=2;                 % masse du rotor1
Ir11=1e-4;            % inertie du rotor1 et du pignon 11 de l'engrennage1
Ir12=1e-5;            % inertie du pignon 12 de l'engrennage1
Fm1=1e-2;             % frottement fluide du moteur1

%%%%%%%%% Actionneur 2
Mr2=1;                 % masse du rotor2
Ms2=1;                 % masse du stator2
Mr21=0.5;             % masse du pignon 21 de l'engrennage2
r2=0.05;              % distance de l'axe du rotor2 à l'axe de rotation de l'actionneur2
Mcb=0;                % masse de contrebalancement
Im=0;                 % inertie de la masse de contrebalancement

```

```

rm=0;      % distance du centre d'inertie de la masse à l'axe de rotation de
           l'actionneur2
Ir21=1e-2; % inertie du rotor1 et du pignon 21 de l'engrenage2
Ir22=1e-5; % inertie du pignon 22 de l'engrenage2
Fm2=1e-2; % frottement fluide du moteur2
%%%%%%%%% Éléments de transmission
r1=0.1;    % rayon de la poulie1
r21=0.1;   % rayon extérieur de la poulie2
r22=0.1;   % rayon intérieur de la poulie2
r3=0.1;    % rayon de la poulie3
k1=1500;   % flexibilité à la sortie de l'engrenage1
k21=1500*3;% flexibilité à la sortie de l'engrenage2
kc=1500*3; % flexibilité de torsion équivalente de la courroie
k23=1500*3;% flexibilité après la poulie3
k2=(k21*kc*k23)/(kc*k23+k21*(r21*r3/(r1*r22))^2*(k23+kc));
           % flexibilité équivalente
alpha=r21/r1;
beta=1;
R=alpha*beta; % rapport total du aux quatre poulies
N1=80;        % rapport de l'engrenage 1
N2=80;        % rapport de l'engrenage 2
%%%%%%%%% Gravitation
gr=0;
%%%%%%%%% Coefficients de la dynamique: systeme reel
Mcr=10*Mc;
Ar=I1+I2+Ic+m1*lc1^2+m2*a1^2+m2*lc2^2+Mcr*(a1^2+a2^2);
Br=m2*a1*lc2+Mcr*a1*a2;
Cr=I2+Ic+m2*lc2^2+Mcr*a2^2;
Dr=Cr;
% % % % % Coefficients de la dynamique: pour l'observateur
A=I1+I2+Ic+m1*lc1^2+m2*a1^2+m2*lc2^2+Mc*(a1^2+a2^2);
B=m2*a1*lc2+Mc*a1*a2;
C=I2+Ic+m2*lc2^2+Mc*a2^2;
D=C;
%%%%%%%%% Inerties des actionneurs

iner1=Ir11+Ir12/(N1^2);

```

```

iner2=Im+Ir21+Ir22+Mcb*rm^2+(Mr2+Ms2+Mr21)*r2^2;
iner3=Ir21+Ir22/(N2);
iner4=Ir21+Ir22/(N2^2);
Jmoteur=[iner1+iner2*(alpha/N1)^2  iner3*(alpha/N1)
          iner3*(alpha/N1)      iner4    ];
%%%%%%%%% Éléments du vecteur de gravitation
%%%%%%%%% Systeme reel
G11r=gr*(m1*lc1+(Mcr+m2)*a1);
G12r=gr*(m2*lc2+Mcr*a2);
G2r=gr*(m2*lc2+Mcr*a2);
%%%%%%%%% Pour observateur
G11=gr*(m1*lc1+(Mc+m2)*a1);
G12=gr*(m2*lc2+Mc*a2);
G2=gr*(m2*lc2+Mc*a2);
%%%%%%%%% Matrice de flexibilité utilisée pour le système
k1r=1*k1;
k2r=1*k2;

KEs=[k1r      0      -k1r/N1      0
     k2r      k2r      -k2r/N1      -k2r/N2
     -(k1r+k2r)/N1  -k2r/N1  (k1r+k2r)/(N1^2)  k2r/(N1*N2)
     -k2r/N2      -k2r/N2  k2r/(N1*N2)  k2r/(N2^2)];
%%%%%%%%% Matrice de flexibilité utilisée pour les observateurs
Keo=[(k1+k2*alpha^2)/(N1^2)  k2*alpha/(N1*N2)
     k2*alpha/(N1*N2)      k2/(N2^2)  ];
KEo=[Keo -Keo
     -Keo Keo];

```

A.3 Reconstruction par le filtre de Kalman Étendu Discret

```

Vae=0.1;
Vas=0.01;
t0=0;
tf=1;
dt=0.01;
[Pbl1,Pbl2,Pbm1,Pbm2,Vbl1,Vbl2,Vbm1,Vbm2,Pkl1,Pkl2,Pkm1,Pkm2,Vkl1.
..
Vkl2,Vkm1,Vkm2,taux3]=kal2(t0,tf,dt,Vae,Vas);

```

A.4 Reconstruction par l'observateur non linéaire basé sur le filtre de Kalman

t0=0;
tf=1;
dt=0.01;
[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Pkln1,Pkln2,Pkmn1...
Pkmn2,Vkln1,Vkln2,Vkmn1,Vkmn2,taux5]=kanlin2(t0,tf,dt);

A.5 Reconstruction par l'observateur basé sur la linéarisation de l'erreur dynamique

t0=0;
tf=1;
dt=0.01;
[Pln81,Pln82,Pmn81,Pmn82,Vln81,Vln82,Vmn81,Vmn82,Plt81,Plt82,Pmt81.
..
Pmt82,Vlt81,Vlt82,Vmt81,Vmt82,taux68]=tomei288(t0,tf,dt);

A.6 Reconstruction par l'observateur basé sur la passivité

t0=0;
tf=1;
dt=0.01;

[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Plt1,Plt2,Pmt1...
Pmt82,Vlt81,Vlt82,Vmt81,Vmt82,taux68]=tomei288(t0,tf,dt);

A.7 Reconstruction par l'observateur à structure variable

t0=0;
tf=1;
dt=0.001;

[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Plv1,Plv2,Pmv1,Pmv2,Vlv1.
..
Vlv2,Vmv1,Vmv2,Vfil1,Vfil2,tauxssv]=ssvflj(t0,tf,dt);

A.8 Reconstruction par l'observateur adaptatif

t0=0;
tf=1.5;
dt=0.001;
[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Vla1,Vla2,Vma1,Vma2,Mca
...
Ica,k1a,k2a,tauxad]=adapobs2(t0,tf,dt);

ANNEXE B

FILTRE DE KALMAN ÉTENDU - "KAL2.m"

(procédure appelée par le programme principal)

```
function [Pbl1,Pbl2,Pbm1,Pbm2,Vbl1,Vbl2,Vbm1,Vbm2,Pkl1,Pkl2,Pkm1...  
Pkm2,Vkl1,Vkl2,Vkm1,Vkm2,taux3]=kal2(t0,tf,dt,Vae,Vas)
```

```
global Alc Blc Ald Bld N1 N2 alpha Fl1 Fl2 Fm1 Fm2 A B C D Jmoteur...  
G11 G12 G2 KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1 Vas1
```

```
%% Filtre de Kalman Etendu Discret
```

```
rand('normal'),rand('seed',0);
```

```
t3=t0;
```

```
dt1=dt;
```

```
O2=zeros(2);
```

```
O42=zeros(4,2);
```

```
O4=zeros(4);
```

```
I4=eye(4);
```

```
Q=0.001*Vae*eye(2);
```

```
R=100*Vas*eye(4);
```

```
%% Conditions initiales
```

```
%posinit=pi/20;
```

```
posinit=0;
```

```
povireelest=[zeros(8,1);posinit/N1;posinit/N1;posinit;posinit;zeros(4,1)];
```

```
povireel=povireelest(1:8,1);
```

```
poviest=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*povireelest(9:16,1);
```

```
povibr=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*...
```

```

(povireelest(1:8,1)+sqrt(Vas)*rand(8,1));
povikal2=povireelest;
P=10*eye(8);
i=1;
for k=1:1:((tf-t0)/dt1+1)
%% Calcul des matrices du système linéarisé d'après les valeurs
d'estimés

Ma=[(A+2*B*cos(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1^2)
      (D+B*cos(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1*N2*alpha);
      (D+B*cos(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1*N2*alpha)
      C/(N2^2*alpha^2) ];
masse=[Ma  O2
        O2  Jmoteur];
Imasse=inv(masse);
inmasse=[I4  O4
          O4  Imasse];
C11=[-(-2*B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha))*poviest(6,1))/(N1^2*N2*alpha)
      (-B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha))*poviest(6,1))/(N1*N2^2*alpha^2);
      (B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha))*poviest(5,1))/(N1^2*N2*alpha)
      0 ];
CCI=[C11 O2
      O2 O2];
GG=[(G11*cos(poviest(1,1)/N1)+G12*cos(poviest(1,1)/N1+poviest(2,1)/...
      (N2*alpha)))/N1
      G2*cos(poviest(1,1)/N1+poviest(2,1)/(N2*alpha))/(N2*alpha)
      0
      0];
Fr=diag([F11/(N1^2) F12/(N2^2*alpha^2) Fm1 Fm2]);
Mpl1=O4;
Mpl2=[[-2*B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1^2*(N2*alpha))
      (-B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1*(N2*alpha)^2);
      (-B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1*(N2*alpha)^2) 0 ] O2;
O2 O2];
poviestpl1=[1 0 0 0]';
poviestpl2=[0 1 0 0]';

```

```

Cpl1=O4;
Cpl2=[[-(2*B*cos(poviest(2,1)/(N2*alpha))*poviest(6,1))/(N1^2*...
      (N2*alpha)^2)
      (-B*cos(poviest(2,1)/(N2*alpha))*poviest(6,1))/(N1*N2^3*alpha^3);
      (B*cos(poviest(2,1)/(N2*alpha))*poviest(5,1))/(N1^2*(N2*alpha)^2)
0]
      O2;O2 O2];
GGpl1=[-(G11*sin(poviest(1,1)/N1)+G12*sin(poviest(1,1)/N1+
      poviest(2,1)/(N2*...alpha)))/(N1^2)
      -G2*sin(poviest(1,1)/N1+poviest(2,1)/(N2*alpha))/((N2*alpha)^2)
      0
      0          ];
GGpl2=[-
      (G12*sin(poviest(1,1)/N1+poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1*N2*alpha)
      -G2*sin(poviest(1,1)/N1+poviest(2,1)/(N2*alpha))/((N2*alpha)^2)
      0;0 ];
poviestpm1=[0 0 1 0]';
poviestpm2=[0 0 0 1]';
CClpl1p=[[0 0;(B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1^2*N2*alpha) 0] O2;
      O2 O2];
CClpl2p=[[-(2*B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1^2*N2*alpha)
      -(B*sin(poviest(2,1)/(N2*alpha)))/(N1*(N2*alpha)^2);0 0 ] O2
      O2 O2];
poviestpl1p=[1 0 0 0]';
poviestpl2p=[0 1 0 0]';
Fpl1=Mpl1*Imasse*(CCl*poviest(5:8,1)+KEo*poviest(1:4,1)+Fr*...
poviest(5:8,1)+GG)-Cpl1*poviest(5:8,1)-KEo*poviestpl1-GGpl1;
Fpl2=Mpl2*Imasse*(CCl*poviest(5:8,1)+KEo*poviest(1:4,1)+Fr*...
poviest(5:8,1)+GG)-Cpl2*poviest(5:8,1)-KEo*poviestpl2-GGpl2;
Fpm1=-KEo*poviestpm1;
Fpm2=-KEo*poviestpm2;
Fpl1p=-(CClpl1p*poviest(5:8,1)-CCl*poviestpl1p-Fr*poviestpl1p);
Fpl2p=-(CClpl2p*poviest(5:8,1)-CCl*poviestpl2p-Fr*poviestpl2p);
Fpl=[Fpl1 Fpl2];
Fpm=[Fpm1 Fpm2];
Fplp=[Fpl1p Fpl2p];

```

```

Alc=inmasse*[O4 I4;Fpl Fpm Fplp O42];
Blc=[zeros(6,2)
      inv(Jmoteur)];
Clc=[eye(4) zeros(4,4)];
Dlc=zeros(4,2);
[Ald,Bld]=dboh(Alc,Blc,Clc,Dlc,dt1);
%% Algorithme du Filtre de Kalman
% Etape de correction

      PP=Ald*P*Ald'+Bld*Q*Bld';
      K=PP*Clc'*inv(Clc*PP*Clc'+R);
      poviest=poviest+K*Clc*(povibr-poviest);
      P=PP-K*Clc*PP;
      povikal2(:,k)=[povireel;poviest];

% Boucle de retour P.D.

      KV=diag([0.1*200 200]);
      KP=diag([0.1*8905 9457]);

      Tr1=[0;0;Jmoteur*(-KV*poviest(7:8,1)-KP*...
        (poviest(3:4,1)-0.8*ones(2,1)))];%+sqrt(Vae)*rand(4,1);
      Tr2=[0;0;Jmoteur*(-KV*poviest(7:8,1)-KP*...
        (poviest(3:4,1)-0.8*ones(2,1)))];

% Etape de prédiction
      povi=[povireel;poviest];
      [ttt,povireelest]=ode45('kal2ode',t3,t3+dt1,povi,1e-3);
      ev=length(povireelest(:,1));
      povireelest=povireelest(ev,:);
      povireel=povireelest(1:8,1);
      poviest=povireelest(9:16,1);
      povibr=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*...
        (povireel)+sqrt(Vas)*rand(8,1);
      taux3(k)=t3;
      t3=t3+dt1;i=i+1
end

```



```

povikal2(1:8,:)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*povikal2(1:8,:);
Pbl1=povikal2(1,:);Pbl2=povikal2(2,:);Pbm1=povikal2(3,:);
Pbm2=povikal2(4,:);Vbl1=povikal2(5,:);Vbl2=povikal2(6,:);
Vbm1=povikal2(7,:); Vbm2=povikal2(8,:);Pkl1=povikal2(9,:);
Pkl2=povikal2(10,:);Pkm1=povikal2(11,:);Pkm2=povikal2(12,:);
Vkl1=povikal2(13,:);Vkl2=povikal2(14,:); Vkm1=povikal2(15,:);
Vkm2=povikal2(16,:);

```

Intégration du système réel et calcul de l'estimée pour l'étape de prédiction (Filtre de Kalman Étendu-procédure appelée par kal2.m)

```

function povi=kal2ode(t,X);

```

```

global N1 N2 alpha Fl1 Fl2 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G1r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1
Vas1

```

%%%%%%%% Définition du système réel

```

O2=zeros(2);

```

```

Ml=[Ar-Dr+Br*cos(X(2))    Dr-Cr+Br*cos(X(2))
    Dr+Br*cos(X(2))      Cr    ];

```

```

M=[inv(Ml)    O2
    O2    inv(Jmoteur)];

```

```

Cl1=[-Br*sin(X(2))*(X(5)+2*X(6)) -Br*sin(X(2))*X(6)
     Br*sin(X(2))*X(5)              0    ];

```

```

Cl=[Cl1 O2
    O2 O2];

```

```

G=[G11r*cos(X(1))+G12r*cos(X(1)+X(2))-G2r*cos(X(1)+X(2))
   G2r*cos(X(1)+X(2))
   0
   0    ];

```

```
Da=[F11*X(5)
    F12*X(6)
    Fm1*X(7)
    Fm2*X(8)];
```

%%%%%%%%% Définition du système pour le calcul de l'estimée

```
O2=zeros(2);
```

```
MlK=[(A+2*B*cos(X(10)/(N2*alpha)))/(N1^2)
      (D+B*cos(X(10)/(N2*alpha)))/(N1*N2*alpha);
      (D+B*cos(X(10)/(N2*alpha)))/(N1*N2*alpha)
      C/(N2^2*alpha^2)          ];
```

```
MK=[inv(MlK)   O2
     O2   inv(Jmoteur)];
```

```
Cl1K=[-(2*B*sin(X(10)/(N2*alpha))*X(14))/(N1^2*N2*alpha)
       (-B*sin(X(10)/(N2*alpha))*X(14))/(N1*N2^2*alpha^2);
       B*sin(X(10)/(N2*alpha))*X(13)/(N1^2*N2*alpha)
       0          ];
```

```
ClK=[Cl1K O2
     O2 O2];
```

```
GK=[(G11*cos(X(9)/N1)+G12*cos(X(9)/N1+X(10)/(N2*alpha)))/N1
     G2*cos(X(9)/N1+X(10)/(N2*alpha))/(N2*alpha)
     0
     0          ];
```

```
DaK=[F11*X(13)/(N1^2)
     F12*X(14)/((N2*alpha)^2)
     Fm1*X(15)
     Fm2*X(16)];
```

%%%%%%%% **Grandeurs réelles**

P=X(1:4,1);

V=X(5:8,1);

%%%%%%%% **Grandeurs estimées**

Pest=X(9:12,1);

Vest=X(13:16,1);

%%%%%%%% **Intégration numérique**

povi=[V

 M*(-KEs*P-Cl*V-G-Da+Tr1)

 Vest

 MK*(-KEo*Pest-ClK*Vest-GK-DaK+Tr2)];

ANNEXE C

OBSERVATEUR NON LINÉAIRE BASÉ SUR KALMAN-

"KALNLIN2.m"

(procédure appelée par le programme principal)

```
function[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Pkln1,Pkln2...
Pkmn1,Pkmn2,Vkln1,Vkln2,Vkmn1,Vkmn2,taux5]=kanlin2(t0,tf,dt)
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vael
Vas1
t4=t0;
dt2=dt;

% Conditions initiales
Id=eye(8);
posinit=pi/20;
poviestnl2=[zeros(10,1);posinit;zeros(4,1);Id(1,:);(2,:);Id(3,:);Id(4,:);(5,:);
            Id(6,:);Id(7,:);Id(8,:)];
taux5(1)=0;
povikalnl2(:,1)=poviestnl2([1:1:16],1);

for k=2:1:((tf-t0)/dt+2)
    [tt,poviestnl2]=ode45('knlode2',t4,t4+dt2,poviestnl2,0.001,1);
```

```

ev=length(poviestnl2(:,1));
poviestnl2=poviestnl2(ev,:);
taux5(k)=t4+dt2;
povikalnl2(:,k)=poviestnl2([1:1:16],1);
t4=t4+dt2,k;
end

```

```

povikalnl2(1:8,:)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1
])*povikalnl2(1:8,:);
Pln1=povikalnl2(1,:);Pln2=povikalnl2(2,:);Pmn1=povikalnl2(3,:);
Pmn2=povikalnl2(4,:);Vln1=povikalnl2(5,:);Vln2=povikalnl2(6,:);
Vmn1=povikalnl2(7,:);Vmn2=povikalnl2(8,:);Vklnl1=povikalnl2(9,:);
Pklnl2=povikalnl2(10,:);Pkmnl1=povikalnl2(11,:);Pkmnl2=povikalnl2(12,:);
Vklnl1=povikalnl2(13,:);Vklnl2=povikalnl2(14,:); Vkmnl1=povikalnl2(15,:);
Vkmnl2=povikalnl2(16,:);

```

Intégration du système réel et calcul de l'estimée pour l'étape de prédiction (procédure appelée par kalnlin2.m)

```

function povi=knlode2(t,X);
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Keo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc
Vae1 Vas1
O2=zeros(2);
I2=eye(2);

```

%%%%%%%% Définition du système réel

```

O2=zeros(2);
M1=[Ar-Dr+Br*cos(X(2)) Dr-Cr+Br*cos(X(2))
     Dr+Br*cos(X(2))      Cr ];

```

```

M=[inv(M1) O2
   O2 inv(Jmoteur)];

```

```

C11=[-Br*sin(X(2))*(X(5)+2*X(6)) -Br*sin(X(2))*X(6)
      Br*sin(X(2))*X(5)          0 ];
Cl=[C11 O2
    O2 O2];
G=[G11r*cos(X(1))+G12r*cos(X(1)+X(2))-G2r*cos(X(1)+X(2))
   G2r*cos(X(1)+X(2))
   0
   0 ];

```

```

Da=[F11*X(5)-F12*X(6);F12*X(6);Fm1*X(7);Fm2*X(8)];

```

```

%%%%%% Boucle de retour P.D.

```

```

KV=diag([0.1*200 200]);%diag([0.1*200 200]);

```

```

KP=diag([0.1*8907 9457 ]);%diag([0.1*8907 9457 ]);

```

```

Tor1=[0;0;Jmoteur*(-KV*X(15:16,1)-KP*(X(11:12,1)-0.8*ones(2,1)))]);

```

```

%%%%%% Definition du système utilisé par l'observateur

```

```

O2=zeros(2);

```

```

MlK=[(A+2*B*cos(X(2)))/(N1^2)    (D+B*cos(X(2)))/(N1*N2*alpha)
      (D+B*cos(X(2)))/(N1*N2*alpha)    C/(N2^2*alpha^2)
];

```

```

MK=[inv(MlK)    O2
    O2    inv(Jmoteur)];

```

```

Cl1K=[-(2*B*sin(X(2))*X(6))/(N1^2*N2*alpha)
      (-B*sin(X(2))*X(6))/(N1*N2^2*alpha^2);
      B*sin(X(2))*X(5)/(N1^2*N2*alpha)    0 ];

```

```

ClK=[Cl1K O2
    O2 O2];

```

```

GK=[(G11*cos(X(1))+G12*cos(X(1)+X(2)))/N1
     G2*cos(X(1)+X(2))/(N2*alpha)
     0
     0 ];

```

```

DaK=[F11*X(5)/(N1);F12*X(6)/((N2*alpha));Fm1*X(15);Fm2*X(16)];

```

```

NN=diag([N1 N2]);

```

```

Aknl=[O2    O2          I2    O2
      O2    O2          O2    I2
];

```

```

O2 inv(MIK)*Keo      O2 O2
O2 -inv(Jmoteur)*Keo O2 O2];
Bknl=[zeros(4,1)
      -inv(MIK)*(Keo*NN*X(1:2,1)+C11K*NN*X(5:6,1)+GK(1:2,1)+...
      DaK(1:2))
      -inv(Jmoteur)*(-Keo*NN*X(1:2,1)+DaK(3:4)-Tor1(3:4,1))];
Cknl=[I2 O2 O2 O2;O2 O2 I2 O2];
BB=[zeros(6,2);inv(Jmoteur)];
%%%%%% Grandeurs réelles
P=X(1:4,1);
V=X(5:8,1);
%%%%%% Grandeurs estimées
Pest=X(9:12,1);
Vest=X(13:16,1);
%%%%%% Matrices de conception de l'observateur
Pconl=[X([17:1:24])';X([25:1:32])';X([33:1:40])';X([41:1:48])';X([49:1:56])'
        X([57:1:64])';X([65:1:72])';X([73:1:80])'];
MM=500;
Lnl=100*eye(8);%100*eye(8);
Rnl=100*eye(4);%100*eye(4);
Kalnl=Pconl*Cknl*inv(Rnl);
Pcopnl=2*MM*Pconl+Aknl*Pconl+Pconl*Aknl'-...
Pconl*Cknl*inv(Rnl)*Cknl*Pconl+Lnl;
%%%%%% Intégration numérique: système réel, observateur et
matrice de covariance
NNN=diag([N1 N2 1 1 N1 N2 1 1]);
povi=[V
      M*(-KEs*P-C1*V-Da-G+Tor1)
      Aknl*[Pest;Vest]+Bknl+Kalnl*Cknl*(NNN*[P;V]-[Pest;Vest])
      Pcopnl(1,[1:1:8])';Pcopnl(2,[1:1:8])';Pcopnl(3,[1:1:8])';Pcopnl(4,[1:1:8])'

Pcopnl(5,[1:1:8])';Pcopnl(6,[1:1:8])';Pcopnl(7,[1:1:8])';Pcopnl(8,[1:1:8])'];

```

ANNEXE D

OBSERVATEUR BASÉ SUR LA LINÉARISATION EXACTE

"TOMEI288.m"

(procédure appelée par le programme principal)

```
function [Pln81,Pln82,Pmn81,Pmn82,Vln81,Vln82,Vmn81,Vmn82,Plt81...
Plt82,Pmt81,Pmt82,Vlt81,Vlt82,Vmt81,Vmt82,taux68]=tomei288(t0,tf,dt)
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Jmoteur G11 G12 G2 KEs
KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1 Vas1 Dat Mt
t4=t0;
dt2=dt;
% Conditions Initiales
Id=eye(8);
posinit=pi/20;
vitinit=pi/20;
Nor=diag([1 1 1 1 1 1 1 1 N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1]);
poviestnl2=Nor*[zeros(8,1);posinit/N1;posinit/N2;posinit;posinit
                vitinit/N1; vitinit/N2;vitinit;vitinit];
Dat=diag([F11/(N1)^2 F12/((N2*alpha)^2) Fm1 Fm2]);
MMlt=[(A+2*B)/(N1^2) (D+B)/(N1*N2*alpha)
      (D+B)/(N1*N2*alpha) C/(N2^2*alpha^2) ];
MMt=[inv(MMlt) zeros(2)
      zeros(2) inv(Jmoteur)];
vitaux0=-MMt*Dat*poviestnl2(1:4,1);
poviestnl2=poviestnl2-[zeros(12,1);vitaux0];
taux68(1)=0;
povitome2(:,1)=poviestnl2(1:16,1);
kk8=1
for k=2:1:((tf-t0)/dt+2)
```



```

[tt,poviestnl2]=ode45('tomeode288',t4,t4+dt2,poviestnl2,1e-3);
ev=length(poviestnl2(:,1));
poviestnl2=poviestnl2(ev,:);
taux68(k)=t4+dt2;
vitaux=-Mt*Dat*poviestnl2(9:12,1);
povitome2(:,k)=poviestnl2([1:1:16],1)+[zeros(12,1);vitaux];
t4=t4+dt2;kk8=kk8+1
end

```

```

povitome2(1:8,:)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1
1])*povitome2(1:8,:);
Pln81=povitome2(1,:);Pln82=povitome2(2,:);Pmn81=povitome2(3,:);
Pmn82=povitome2(4,:);Vln81=povitome2(5,:);Vln82=povitome2(6,:);
Vmn81=povitome2(7,:);Vmn82=povitome2(8,:);Plt81=povitome2(9,:);
Plt82=povitome2(10,:);Pmt81=povitome2(11,:);Pmt82=povitome2(12,:);
Vlt81=povitome2(13,:);Vlt82=povitome2(14,:); Vmt81=povitome2(15,:);
Vmt82=povitome2(16,:);

```

Intégration du système réel et calcul des estimées (procédure appelée par tomei288.m)

```

function povi=tomeode288(t,X);

```

```

global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1
Vas1 Dat Mt

```

```

O2=zeros(2);

```

```

I2=eye(2);

```

```

%%%%%%%%%% Definition du système réel

```

```

M1=[Ar-Dr+Br*cos(X(2)) Dr-Cr+Br*cos(X(2))
Dr+Br*cos(X(2)) Cr ];

```

```

M=[inv(M1) O2
O2 inv(Jmoteur)];

```

```

Cl1=[-Br*sin(X(2))*(X(5)+2*X(6)) -Br*sin(X(2))*X(6)
Br*sin(X(2))*X(5) 0 ];

```

```

Cl=[Cl1 O2

```

```

O2 O2];
G=[G11r*cos(X(1))+G12r*cos(X(1)+X(2))-G2r*cos(X(1)+X(2))
    G2r*cos(X(1)+X(2))    ;0;0];
Da=[F11*X(5)-F12*X(6);F12*X(6);Fm1*X(7);Fm2*X(8)];
%%%%%% Definition du système utilisé pour l'observateur
Mlt=[(A+2*B*cos(X(2)))/(N1^2)    (D+B*cos(X(2)))/(N1*N2*alpha)
    (D+B*cos(X(2)))/(N1*N2*alpha)    C/(N2^2*alpha^2)    ];
Mt=[inv(Mlt)    O2
    O2    inv(Jmoteur)];
Gt=[(G11*cos(X(1))+G12*cos(X(1)+X(2)))/N1
    G2*cos(X(1)+X(2))/(N2*alpha);0;0];
Dat=diag([F11/(N1)^2 F12/((N2*alpha)^2) Fm1 Fm2]);
%%%%%% Grandeurs réelles
P=X(1:4,1);
V=X(5:8,1);
%%%%%% Grandeurs estimées
Pest=X(9:12,1);
Vest=X(13:16,1);
%%%%%% Paramètres de l'observateur
AA=[zeros(4) eye(4);zeros(4,8)];
K=[3000*eye(4)
    10*8000*eye(4)];
Erestpos=(diag([N1 N2*alpha 1 1 ])*P)-Pest;
%%%%%% Boucle de retour P.D
KV=diag([0.1*200 200]);
KP=diag([0.1*8905 9457]);
Tor1=[0;0;Jmoteur*(-KV*(X(15:16,1))+(-inv(Jmoteur)*...
diag([Fm1 Fm2]))*X(3:4))-KP*(X(11:12,1)-0.8*ones(2,1))];

```

P1=diag([N1 N2*alpha 1 1])*P;

%%%%%%%%%% **Intégration numérique: système réel et observateur**

povi=[V

M*(-Cl*V-KEs*P-Da+Tor1)

AA*[Pest;Vest]+[-Mt*Dat*P1;Mt*(-KEo*P1+Tor1)]+K*Erestpos];

ANNEXE E

OBSERVATEUR BASÉ SUR LA PASSIVITÉ - "TOMEI.m"

(procédure appelée par le programme principal)

```
function
[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Plt1,Plt2,Pmt1,Pmt2,Vlt1,Vl
t2,Vmt1,Vmt2,v,va,taux6]=tomei2(t0,tf,dt)

global N1 N2 alpha Fl1 Fl2 Fm1 Fm2 A B C D Jmoteur G11 G12 G2 KEs
KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1 Vas1 Mlt KA KK1
t4=t0;
dt2=dt;
% Conditions Initiales
Id=eye(8);
posinit=pi/20;
vitinit=0;
Nor=diag([1 1 1 1 1 1 1 1 N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1 1 1]);
poviestnl2=Nor*[zeros(8,1);zeros(2,1);posinit;posinit
zeros(2,1);vitinit;vitinit;zeros(2,1)];
Mlt=[(A+2*B)/(N1^2) (D+B)/(N1*N2*alpha)
(D+B)/(N1*N2*alpha) C/(N2^2*alpha^2)];
Norma=diag([N1 N2*alpha 1 1]);
taux6(1)=0;
povitome2(:,1)=poviestnl2(1:16,1);
kk=1
for k=2:1:((tf-t0)/dt+2)
    [tt,poviestnl2]=ode45('tomeode2',t4,t4+dt2,poviestnl2,1e-3);
    ev=length(poviestnl2(:,1));
    poviestnl2=poviestnl2(ev,:);
    taux6(k)=t4+dt2;
    povitome2(:,k)=poviestnl2(1:16,1);
    t4=t4+dt2;kk=kk+1
end
```

```

end
povitome2(1:8,:)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1
1])*povitome2(1:8,:);
Pln1=povitome2(1,:);Pln2=povitome2(2,:);Pmn1=povitome2(3,:);
Pmn2=povitome2(4,:);Vln1=povitome2(5,:);Vln2=povitome2(6,:);
Vmn1=povitome2(7,:);Vmn2=povitome2(8,:);Plt1=povitome2(9,:);
Plt2=povitome2(10,:);Pmt1=povitome2(11,:);Pmt2=povitome2(12,:);
Vlt1=povitome2(13,:);Vlt2=povitome2(14,:); Vmt1=povitome2(15,:);
Vmt2=povitome2(16,:);

```

Intégration du système réel et calcul des estimées (procédure appelée par tomei2.m)

```

function povi=tomeode2(t,X);
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1
Vas1 Mlt KA KK1
O2=zeros(2);
I2=eye(2);
%%%%%%%%%% Definition du système réel
M1=[Ar-Dr+Br*cos(X(2)) Dr-Cr+Br*cos(X(2))
Dr+Br*cos(X(2)) Cr ];
M=[inv(M1) O2;O2 inv(Jmoteur)];
C11=[-Br*sin(X(2))*(X(5)+2*X(6)) -Br*sin(X(2))*X(6)
Br*sin(X(2))*X(5) 0 ];
C1=[C11 O2
O2 O2];
G=[G11r*cos(X(1))+G12r*cos(X(1)+X(2))-G2r*cos(X(1)+X(2))
G2r*cos(X(1)+X(2));0;0];
Da=[F11*X(5)-F12*X(6);F12*X(6);Fm1*X(7);Fm2*X(8)];
%%%%%%%%%% Definition du système utilisé pour l'observateur
Mlt=[(A+2*B*cos(X(2)))/(N1^2) (D+B*cos(X(2)))/(N1*N2*alpha)
(D+B*cos(X(2)))/(N1*N2*alpha) C/(N2^2*alpha^2) ];
Mt=[inv(Mlt) O2
O2 inv(Jmoteur)];
C11t=[-(2*B*sin(X(2))*X(6))/(N1^2*N2*alpha)
(-B*sin(X(2))*X(6))/(N1*N2^2*alpha^2);
B*sin(X(2))*X(5)/(N1^2*N2*alpha) 0];
C1t=[C11t O2

```

```

O2 O2];
Gt=[(G11*cos(X(1))+G12*cos(X(1)+X(2)))/N1
      G2*cos(X(1)+X(2))/(N2*alpha);0;0];
Dat=[F11*X(13)/(N1)^2;F12*X(14)/((N2*alpha)^2);Fm1*X(15);Fm2*X(16)];
%%%%%%%%%% Grandeurs réelles
P=X(1:4,1);
V=X(5:8,1);
%%%%%%%%%% Grandeurs estimées
Pest=X(9:12,1);
Vest=X(13:16,1);
%%%%%%%%%% Paramètres de l'observateur
AA=50*6*I2;
KK1=diag([0.0189 70*0.0003]);
KK2=KK1;
Ka=diag([1.4589 1000*0.0072]);
KA=[diag([1.4589 1000*0.0072]) O2;O2 O2];
%%%%%%%%%% Paramètres du filtre et erreurs d'estimation
Z=X(17:18,1);
Erestvit=(diag([N1 N2*alpha])*V(1:2,1))-Vest(1:2,1);
Erestpos=(diag([N1 N2*alpha 1 1 ])*P)-Pest;
%%%%%%%%%% Boucle de retour P.D
KV=diag([0.1*200 200]);
KP=diag([0.1*8905 9457]);
Tor1=[0;0;Jmoteur*(-KV*X(15:16,1)-KP*(X(11:12,1)-0.8*ones(2,1)))]);
%Retour sur variables estimees
%%%%%%%%%% Intégration numérique: système réel et observateur
povi=[V
      M*(-KEs*P-Cl*V-Da+Tor1)
      Vest
      Mt*(-KEo*Pest-Cl*Vest-Dat+Tor1+KA*Erestpos-[-KK1*Z-...
      KK2*Erestvit;0;0])
      -AA*Z+Erestvit];

```

ANNEXE F

OBSERVATEUR À STRUCTURE VARIABLE - "SSVFLJ.m"

(procédure appelée par le programme principal)

```
function
[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Plv1,Plv2,Pmv1,Pmv2...
Vlv1,VLv2,Vmv1,Vmv2,Vfil1,Vfil2,tauxssv]=ssvflj22(t0,tf,dt);

global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Jmoteur Vestmot0 supqp1q2
G11 G12 G2 KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1 Vas1 Mlt
KA KK1 Go pp qq e RR S1 S2 p11 p33
t4=t0;
dt2=dt;
% Conditions Initiales
Id=eye(8);
posinitmembre=[0;0];
posinitmoteur=[ pi/20;pi/20];
vitinitmembre=[0;0];
vitinitmoteur=[ pi/20;pi/20];
Vestmot0= [pi/20;pi/20];;
% Borne superieure de la norme du vecteur position des moteurs ajoute
au vecteur vitesse des membres
supqp1q2=15;
%Mise à l'échelle de l'état du système
Nor=diag([1 1 1 1 1 1 1 1 N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1 1 1]);
poviestnl2=Nor*[zeros(8,1);posinitmembre;posinitmoteur;vitinitmembre;
vitinitmoteur;zeros(2,1)];
%Détermination de la matrice de gainde la partie Luenberger de
l'observateur
[G,pp,qq,p11,p33]=lyap1;
```

```

Go=G;pp;qq;
taux6(1)=0;
povitssv2(:,1)=poviestnl2(1:18,1);
kk=1
for k=2:1:((tf-t0)/dt+2)
    [tt,poviestnl2]=ode45('ssvfljod2',t4,t4+dt2,poviestnl2,1e-3);
    ev=length(poviestnl2(:,1));
    poviestnl2=poviestnl2(ev,:);
    taux6(k)=t4+dt2;
    povitssv2(:,k)=poviestnl2(1:18,1);
    t4=t4+dt2;kk=kk+1
end
tauxssv=taux6;
povitssv2(1:8,:)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*povitssv2(1:8,:);
povitssv2(17:18,:)=diag([N1 N2*alpha])*povitssv2(17:18,:);
Pln1=povitssv2(1,:);Pln2=povitssv2(2,:);Pmn1=povitssv2(3,:);
Pmn2=povitssv2(4,:);Vln1=povitssv2(5,:);Vln2=povitssv2(6,:);
Vmn1=povitssv2(7,:);Vmn2=povitssv2(8,:);Plv1=povitssv2(9,:);
Plv2=povitssv2(10,:);Pmv1=povitssv2(11,:);Pmv2=povitssv2(12,:);
Vlv1=povitssv2(13,:);Vlv2=povitssv2(14,:);Vmv1=povitssv2(15,:);
Vmv2=povitssv2(16,:);Vfil1=povitssv2(17,:);Vfil2=povitssv2(18,:);
Intégration du système réel et calcul des estimées (procédure appelée par ssvflj.m)

```

```

function povi=ssvfljod2(t,X);
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 Fmcou1 Fmcou2 Fmcouest1
Fmcouest2 Vestmot0 supqp1q2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11 G12 G2
G11r G12r G2r KEs KEo Keo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vael
Vas1 Mlt KA KK1 Go Assv C e
global RR S1 S2
O2=zeros(2);
I2=eye(2);
nor=diag([N1 N2*alpha]); % Normalisation
%%%%%%%%%%%% Grandeurs réelles
P=X(1:4,1);
V=X(5:8,1);
%%%%%%%%%%%% Definition du système réel
Ml=[Ar-Dr+Br*cos(X(2)) Dr-Cr+Br*cos(X(2))

```



```

        Dr+Br*cos(X(2))      Cr  ];
M=[inv(Ml)  O2
    O2  inv(Jmoteur)];
C11=[-Br*sin(X(2))*(X(5)+2*X(6)) -Br*sin(X(2))*X(6)
      Br*sin(X(2))*X(5)          0  ];
Cl=[C11 O2
    O2 O2];
G=[G11r*cos(X(1))+G12r*cos(X(1)+X(2))-G2r*cos(X(1)+X(2))
    G2r*cos(X(1)+X(2));0;0]
Da=[F11*X(5)-F12*X(6);F12*X(6);Fm1*X(7);Fm2*X(8)];
Fmcou=[Fmcou1*sign(V(3,1))
        Fmcou2*sign(V(4,1))];
%%%%%% Matrices du filtre
Afil=diag([100 100]);
Bfil=diag([100 100]);
%%%%%% Grandeurs estmees
Pest=X(9:12,1);
Vest=X(13:16,1);
Vfil=X(17:18,1);
e=[Pest(1:2)-nor*P(1:2)
   Vest(1:2)-nor*Vfil];
%%%%%% Matrices de l'observateur
P11=Bfil;
P33=Bfil;
F=[P11 Bfil*P33];
Assv=[O2 I2  O2  O2
      O2 O2  O2  I2
      O2 Bfil -Afil O2
      inv(Jmoteur)*[Keo -Keo O2 -diag([Fm1 Fm2])]];
Bssv=[I2;O2;Bfil;O2];
C=[I2 O2 O2 O2
   O2 O2 I2 O2];
if norm(F*e) == 0,  S=zeros(8,1);
else              S=- (Bssv*F*e)*supqp1q2/norm(F*e);
end

Fmcouest=[Fmcouest1*sign(Vest(3,1))

```

```

    Fmcouest2*sign(Vest(4,1)));
%% Commande: retour PD
KV=diag([0.1*200 200]);
KP=diag([0.1*8905 9457]);
Tor=[0;0;Jmoteur*(-KV*V(3:4,1)-KP*(P(3:4,1)-0.8*ones(2,1)))]);
%% Intégration numérique: système réel et observateur
povi=[V
    M*(-KEs*P-CI*V-Da+Tor)
    (Assv-Go*C)*[Pest;Vest]+Go*[nor*P(1:2,1);nor*...
    Vfil(1:2)]+[zeros(6,1);inv(Jmoteur)*Tor(3:4)]+S+...
    [zeros(6,1);-inv(Jmoteur)*Fmcouest]
    -Afil*Vfil+Bfil*V(1:2) ];

```

Procédure "Lyap1.m" permettant le calcul du gain de l'observateur
(appelée par ssvflj.m)

```

function [G,P,Q,p11,p33]=lyap1();
%% Détermination des matrices P, G et Q

```

```

global b m1 m2 m3 I2 vaux24 vaux44 p11 p33 p22 G

```

```

I2=eye(2);
O2=zeros(2);
p331=0.01;
p332=0;
p333=0;
p334=0.01;
p33=[p331 p332;p333 p334];
p11=p33;
b1=100;
b2=100;
b=diag([b1 b2]);
a=b;
m1=1e3*[3.2982 0.5440;0.5150 0.5494];
m2=m1;
m3=[99.0299 -1.2395;-1.2395 100.0139];
X0=zeros(2);
X10=zeros(4,2);

```

% Calcul de p24, p44, p22 et g21

p24=fsolve('lyapod1',X0);vaux24=p24;

p44=fsolve('lyapod2',X0);vaux44=p44

p22=p24*m3+m2'*p44;

p24,p44,p22

v22M=max(eig(p22));

v22m=min(eig(p22));

p22=[v22M v22m;v22m v22m];

def_pos=p44-p24*inv(p22)*p24;

val_propres=eig(def_pos)

X1=fsolve('gainod1',X10);

g21=X1(1:2,1:2)',g41=X1(3:4,1:2)'

%%%%%%%%%% **g trouves avec p11=p33=0.01*I2** (Résultats obtenus par Maple V.)

g222=.1822716723e-5*b2*p333 + .06720193237*b1*p332 -...

.06721010357*b2*p334-.3132670148e-6*b1*p331;

g224=.1822716723e-5*b1*p331 - .00001137985577*b2*p333-...

.06721010357*b1*p332 + .4906856447*b2*p334;

g423=-.01963360286*b2*p333 -.002926841870*b1*p332+...

0.02136812296*b2*p334+002689214897*b1*p331;

g421=.002689214897*b2*p333 + .002926421576*b1*p332 -...

.002926841870*b2*p334-.002689089932*b1*p331;

g223=-.06720202403*b1*p331 + .4906352013*b2*p333 +...

.1945399579e-5*b1*p332-.00001214580761*b2*p334;

g424=-.002742266257*b1*p331 + .02002058368*b2*p333 +...

.01484483744*b1*p332-.1083786901*b2*p334;

g221=-.06720202403*b2*p333 - .3343522947e-6*b1*p332+...

.1945399579e-5*b2*p334 + .06720054376*b1*p331;

g422=-.002742266257*b2*p333 - .01484296693*b1*p332 +...

.01484483744*b2*p334+.002741872468*b1*p331;

g22=[g221 g222;g223 g224];

g42=[g421 g422;g423 g424];

p24=[0.0002 -0.0002;-0.0002 0.0011]; % p24 et p44 sont en theorie sym., ce qui n est pas le cas

p44=[0.0051 0.0001;0.0001 0.0050]; % lorsque donnees par fsolve.

```

P=[p11 O2 O2 O2
   O2 p22 O2 p24
   O2 O2 p33 O2
   O2 p24 O2 p44];
A=[O2 I2 O2 O2
   O2 O2 O2 I2
   O2 b -a O2
   m1 -m2 O2 -m3];
C=[I2 O2 O2 O2
   O2 O2 I2 O2];
g11=0.5*inv(p11);
g32= 0.5*inv(p33)-a;
g12=I2;
g31=-p11*g12*inv(p33);
G=[g11 g12
   g21 g22
   g31 g32
   g41 g42];

```

Sous-procédures Lyapod1.m et Lyapod2.m, utilisées pour la détermination de p24 et p44 (appelées de Lyap1.m).

```

function F1=lyapod1(p24)
global m2 I2 O2
F1=p24*m2'+m2'*p24-I2;

```

```

function F2=lyapod2(p44)
global m2 m3 I2 vaux24
F2=p44*m3+m3'*p44-2*vaux24-I2;

```

ANNEXE G

OBSERVATEUR ADAPTATIF- "ADAFLJ.m"

(appelée par le programme principal)

```
function
[Pln1,Pln2,Pmn1,Pmn2,Vln1,Vln2,Vmn1,Vmn2,Vla1,Vla2,Vma1,Vma2,Mca
,Ica,k1a,k2a,tauxad]=adapobs2(t0,tf,dt);
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1
Vas1

global m1 a1 l1 lc1 F11 I1 m2 a2 l2 lc2 F12 I2 N1 N2 alpha gr Mc k1 k2
O2=zeros(2);
Id2=eye(2);
tauxad(1)=t0;
Y0=zeros(8,1);
Povi(:,1)=Y0;
Povis(:,1)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*Povi;
vittest(:,1)=[0.2;0.2;0.2;0.2];
Mca=Mc;
Ica=(0.1^2+0.1^2)*Mca/12;
k1a=k1;
k2a=k2;
matpara(:,1)=[Mca;Ica;k1a;k2a];
gainobs=50*eye(4);
gainadap=diag([20 20 20 20]) %5*eye(4);
R=1*eye(4);

for i=2:tf/dt
```

%%%%%%%%% **Boucle de retour P.D**

KV=diag([0.1*200 200]);

KP=diag([0.1*8905 9457]);

Tor=[0;0;Jmoteur*(-KV*Povi(7:8,i-1)-KP*(Povi(3:4,i-1)-0.8*ones(2,1)))];

%%%%%%%%% **Matrices de l'observateur avec parametres ajustes**

Aa=I1+I2+Ica+m1*lc1^2+m2*a1^2+m2*lc2^2+Mca*(a1^2+a2^2);

Ba=m2*a1*lc2+Mca*a1*a2;

Ca=I2+Ica+m2*lc2^2+Mca*a2^2;

Da=Ca;

G11a=gr*(m1*lc1+(Mca+m2)*a1);

G12a=gr*(m2*lc2+Mca*a2);

G2a=gr*(m2*lc2+Mca*a2);

M1a=[(Aa+2*Ba*cos(Povi(2,i-1)))/(N1^2)

(Da+Ba*cos(Povi(2,i-1)))/(N1*N2*alpha) ;

(Da+Ba*cos(Povi(2,i-1)))/(N1*N2*alpha) Ca/(N2^2*alpha^2)];

Ma=[inv(M1a) O2

O2 inv(Jmoteur)];

C11a=[-(2*Ba*sin(Povi(2,i-1))*vitesse(2,i-1))/(N1^2*N2*alpha)

(-Ba*sin(Povi(2,i-1))*vitesse(2,i-1))/(N1*N2^2*alpha^2)

Ba*sin(Povi(2,i-1))*vitesse(1,i-1)/(N1^2*N2*alpha) 0];

Ca=[C11a O2

O2 O2];

Ga=[(G11a*cos(Povi(1,i-1))+G12a*cos(Povi(1,i-1)+Povi(2,i-1)))/N1

G2a*cos(Povi(1,i-1)+Povi(2,i-1))/(N2*alpha);0;0];

Daa=[F11*vitesse(1,i-1)/(N1)^2

F12*vitesse(2,i-1)/((N2*alpha)^2)

Fm1*vitesse(3,i-1)

Fm2*vitesse(4,i-1)];

KEa=[(k1a+k2a*alpha^2)/(N1^2) k2a*alpha/(N1*N2)

k2a*alpha/(N1*N2) k2a/(N2^2)];

KEa=[KEa -KEa

-KEa KEa];

%%%%%%%%% **Calcul de l'acceleration a partir de la position mesuree, vitesse estimee et parametres identifies.**

phi=Ma*(Tor-Cla*vitesse(:,i-1)-Daa-KEa*Povis(1:4,i-1)-Ga);

%%%%%%%%% **Regresseur utilise dans la loi adaptative: partie inconnue**

$$Y11=N1*(((a1^2+a2^2)+2*a1*a2*cos(Povi(2,i-1)))*phi(1)/N1^2+... \\ (a2^2+a1*a2*cos(Povi(2,i-1)))*phi(2)/(N1*N2*alpha)-... \\ (2*a1*a2/(N1^2*N2*alpha))*sin(Povi(2,i-1))*vittest(1,i-1)*... \\ vittest(2,i-1)-(a1*a2/(N1*(N2*alpha)^2))*... \\ sin(Povi(2,i-1))*vittest(2,i-1)^2+(a1*cos(Povi(1,i-1))+a2*.. \\ cos(Povi(1,i-1)+Povi(2,i-1)))*gr/N1)/N1;$$

$$Y21=N1*((a2^2+a1*a2*cos(Povi(2,i-1)))*phi(1)/(N1*N2*alpha)+... \\ a2^2*phi(2)/(N2^2*alpha^2)+(a1*a2/(N1^2*N2*alpha))*... \\ vittest(1,i-1)^2*sin(Povi(2,i-1))+a2*cos(Povi(1,i-1)+... \\ Povi(2,i-1))*gr/(N2*alpha))/N1;$$

$$Y12=N1*(phi(1)/N1^2+phi(2)/(N1*N2*alpha))/N1;$$

$$Y22=N1*(phi(1)/(N1*N2*alpha)+phi(2)/(N2*alpha)^2)/N1;$$

$$Y13=N1*((Povis(1,i-1)-Povis(3,i-1))/N1^2)/N1;$$

$$Y23=0;$$

$$Y14=N1*((Povis(1,i-1)-Povis(3,i-1))*alpha/(N1)^2+(Povis(2,i-1)-... \\ Povis(4,i-1))*alpha/(N1*N2))/N1;$$

$$Y24=N1*((Povis(1,i-1)-Povis(3,i-1))*alpha/(N1*N2)+(Povis(2,i-1)-... \\ Povis(4,i-1))/N2^2)/N1;$$

$$Y=[Y11 \ Y12 \ Y13 \ Y14$$

$$Y21 \ Y22 \ Y23 \ Y24$$

$$0 \ 0 \ -Y13 \ -Y14$$

$$0 \ 0 \ -Y23 \ -Y24];$$

%%%%%%%% Regresseur utilise dans la loi adaptative: partie connue

$$ak1=I1+I2+m1*lc1^2+m2*a1^2+m2*lc2^2;$$

$$bk1=m2*a1*lc2;$$

$$ck1=I2+m2*lc2^2;$$

$$gk1=gr*(m1*lc1);$$

$$gk2=gr*(m2*lc2);$$

$$paraconnus=[ak1;bk1;ck1;F11/(N1)^2;F12/((N2*alpha)^2);Fm1;Fm2;gk1;gk2 \\];$$

$$Yk11=phi(1)/N1^2;$$

$$Yk12=2*cos(Povi(2,i-1))*phi(1)/N1^2+...$$

$$cos(Povi(2,i-1))*phi(2)/(N1*N2*alpha)-...$$

$$(2/(N1^2*N2*alpha))*sin(Povi(2,i-1))*vittest(1,i-1)*...$$

$$vittest(2,i-1)-(1/(N1*(N2*alpha)^2))*sin(Povi(2,i-1))*vittest(2,i-1)^2;$$

```

Yk13=phi(2)/(N1*N2*alpha);
Yk14=vitest(1,i-1);
Yk15=0;
Yk16=0;
Yk17=0;
Yk18=cos(Povi(1,i-1))/N1;
Yk19=cos(Povi(1,i-1)+Povi(2,i-1))/N1;
Yk21=0;
Yk22=cos(Povi(2,i-1))*phi(1)/(N1*N2*alpha)+(1/(N1^2*N2*alpha))*...
    vitest(1,i-1)^2*sin(Povi(2,i-1));
Yk23=phi(1)/(N1*N2*alpha)+phi(2)/(N2*alpha)^2;
Yk24=0;
Yk25=vitest(2,i-1);
Yk26=0;Yk27=0;Yk28=0;
Yk29=cos(Povi(1,i-1)+Povi(2,i-1))/(N2*alpha);
Yk31=0;Yk32=0;Yk33=0;Yk34=0;Yk35=0;
Yk36=vitest(3,i-1);
Yk37=0;Yk38=0;Yk39=0;
Yk41=0;Yk42=0;Yk43=0;Yk44=0;Yk45=0;Yk46=0;
Yk47=vitest(4,i-1);
Yk48=0;Yk49=0;
Yk=[Yk11 Yk12 Yk13 Yk14 Yk15 Yk16 Yk17 Yk18 Yk19
    Yk21 Yk22 Yk23 Yk24 Yk25 Yk26 Yk27 Yk28 Yk29
    Yk31 Yk32 Yk33 Yk34 Yk35 Yk36 Yk37 Yk38 Yk39
    Yk41 Yk42 Yk43 Yk44 Yk45 Yk46 Yk47 Yk48 Yk49];
%% Estimation: mise a jour par la mesure de la position
q(i); estimation de la vitesse;ajustement des parametres
[taux,PoVi]=ode45('robdis2',t0,t0+dt,Y0,1e-4);
ev=length(taux);
Povi(:,i)=PoVi(ev,:);
Povis(:,i)=diag([N1 N2*alpha 1 1 N1 N2*alpha 1 1])*Povi(:,i);
tauxad(i)=taux(ev);
vitest(:,i)=(I2-dt*gainobs)*vitest(:,i-1)+dt*phi+gainobs*(Povis(1:4,i)-
Povis(1:4,i-1));
ToREST=Y*matpara(:,i-1)+Yk*paraconnus+[0;0;Jmoteur*phi(2:3)];
matpara(:,i)=matpara(:,i-1)+gainadap*Y'*(dt*vitest(:,i-1)-
Povis(1:4,i)+Povis(1:4,i-1)+R*(ToREST-Tor));

```



```

Mca=matpara(1,i);
Ica=matpara(2,i);
k1a=matpara(3,i);
k2a=matpara(4,i);

Y0=PoVi(ev,:);
t0=t0+dt;i
end
Pln1=Povis(1,:);Pln2=Povis(2,:);Pmn1=Povis(3,:);
Pmn2=Povis(4,:);Vln1=Povis(5,:);Vln2=Povis(6,:);
Vmn1=Povis(7,:);Vmn2=Povis(8,:); Vla1=vitest(1,:);
Vla2=vitest(2,:);Vma1=vitest(3,:); Vma2=vitest(4,:);
Mca=matpara(1,:);Ica=matpara(2,:);k1a=matpara(3,:);
k2a=matpara(4,:);

```

Intégration du système "robdis2.m" (appelée par adaf1j.m)

```

function povi=robdis2(t,X);
global N1 N2 alpha F11 F12 Fm1 Fm2 A B C D Ar Br Cr Dr Jmoteur G11
G12 G2 G11r G12r G2r KEs KEo Tor Tr Tr1 Tr2 Tem1 Tem2 Qc Rc Vae1
Vas1 Mlt KA KK1
O2=zeros(2);
I2=eye(2);
%% %% %% %% %% %% %% Definition du système réel
M1=[Ar-Dr+Br*cos(X(2)) Dr-Cr+Br*cos(X(2))
    Dr+Br*cos(X(2)) Cr ];
M=[inv(M1) O2
  O2 inv(Jmoteur)];
C11=[-Br*sin(X(2))*(X(5)+2*X(6)) -Br*sin(X(2))*X(6)
    Br*sin(X(2))*X(5) 0 ];
C1=[C11 O2
  O2 O2];
G=[G11r*cos(X(1))+G12r*cos(X(1)+X(2))-G2r*cos(X(1)+X(2))
  G2r*cos(X(1)+X(2));0;0];
Da=[F11*X(5)-F12*X(6);F12*X(6);Fm1*X(7);Fm2*X(8)];
%% %% %% %% %% %% %% Grandeurs réelles
P=X(1:4,1);
V=X(5:8,1);

```

%%%%%%%% Intégration numérique: système réel et observateur

```
povi=[V  
      M*(-KEs*P-Cl*V-Da+Tor)];
```