

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR

JEAN-RENÉ CLICHE

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE  
D'UNE CAVITÉ HYPERFRÉQUENCE RÉ-ENTRANTE ASYMÉTRIQUE  
CONTENANT UN ÉCHANTILLON DIÉLECTRIQUE

DÉCEMBRE 1996

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

C'est la gloire de Dieu de celer une chose,  
c'est la gloire de l'homme de la scruter.

Pr 25 2

# RÉSUMÉ

La résonance d'une cavité contenant un échantillon diélectrique, dans la région des hyperfréquences, peut être décrite par une équation caractéristique. Ce travail traite de l'obtention et de l'analyse de cette équation qui traduit la relation entre la permittivité de l'échantillon et la fréquence de résonance complexe de la cavité.

L'équation caractéristique est bien connue pour une cavité cylindrique de section circulaire. La cavité qui suscite notre intérêt est ré-entrante et de section circulaire. Nous supposons des parois parfaitement conductrices, tout en négligeant la présence des antennes de couplage. De plus, les échantillons étudiés se limitent aux substances non magnétiques et non conductrices. Il est toutefois possible de tenir compte de la conductivité de l'échantillon, ce paramètre étant inclus dans le code. De même, nous pouvons évaluer de très grandes permittivités accompagnées de grandes pertes.

Les équations caractéristiques obtenues sont des relations transcendantes. Par conséquent, il n'existe pas de solutions explicites. L'introduction de deux méthodes numériques est présentée : une méthode point par point et une méthode intégrale. Ces deux méthodes se basent sur un système linéaire, obtenu des conditions de continuité des champs électriques et magnétiques dans la cavité. Dans la méthode point par point, nous devons nous soucier de la répartition des points dans la cavité, là où les champs sont calculés. L'existence de coins ré-entrants fait que le champ électromagnétique est singulier. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir un grand nombre de points dans cette région afin d'atteindre une bonne précision dans nos calculs. La méthode intégrale a l'avantage que nous n'avons pas à nous préoccuper de la répartition des points dans la cavité, ce qui soustrait une grande part d'impondérable. De ce fait, les valeurs numériques présentées dans

ce travail proviennent seulement de la méthode intégrale, le code de la méthode point par point n'ayant pas été complété.

Les valeurs propres de notre équation caractéristique sont : la fréquence complexe de la cavité avec échantillon si la permittivité complexe de l'échantillon est connue, ou l'inverse, i.e. la permittivité complexe de l'échantillon si la fréquence complexe de la cavité avec échantillon est connue. Afin d'obtenir ces valeurs propres, nous devons calculer plusieurs déterminants de notre matrice caractéristique, en variant soit la permittivité soit la fréquence selon leur domaine respectif, et déterminer les différents passages à zéro du déterminant. Plusieurs algorithmes existent afin de connaître les zéros d'une fonction. Entre autres, la méthode de bisection et la méthode des sécantes sont largement utilisées. Ces méthodes sont parmi les plus efficaces dans le plan réel, mais inadéquates dans le plan complexe, d'autant plus qu'elles sont lentes. Notre choix s'est porté sur la méthode de Newton-Raphson. Efficace dans le plan complexe, elle présente une convergence très rapide vers les zéros d'une fonction. Malgré tout, certains problèmes de divergence sont survenus avec cette méthode. Il n'existe aucune méthode qui soit parfaite pour toutes les circonstances possibles.

Quelques solutions numériques sont explorées par la méthode intégrale, dans le cas des modes fondamentaux  $TM_{0p0}$  et  $TE_{0p0}$ . Lorsque le domaine de variation de nos valeurs propres (la fréquence ou la permittivité) est étendu, il apparaît deux comportements différents de la résonance : l'un caractéristique d'un échantillon à faibles pertes, l'autre caractéristique d'un échantillon à fortes pertes. Les résultats numériques sont en accord avec la littérature.

# REMERCIEMENTS

Le présent travail a été effectué sous la direction de M. Louis Marchildon, professeur du département de physique de l'Université du Québec à Trois-Rivières. Je le remercie sincèrement de m'avoir proposé l'exploration du monde subtil des simulations numériques. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour sa patience et ses conseils judicieux.

Je désire également témoigner de cordiaux remerciements à Lord Robert McDougall pour son assistance essentielle lors de l'élaboration de mon code Fortran, et pour m'avoir épargné certains investissements coûteux.

Mes remerciements s'adressent finalement à ma conjointe, Sylvie, pour son appui lors de la rédaction de ce manuscrit, et pour m'avoir prodigué de nombreux encouragements tout au long de mes études de maîtrise.

# TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ.....	ii
REMERCIEMENTS.....	iv
TABLE DES MATIÈRES.....	v
LISTE DES FIGURES.....	viii
LISTE DES TABLEAUX.....	xiii
INTRODUCTION.....	1

## CHAPITRES

1- CONCEPTS FONDAMENTAUX.....	6
1.1 Équations du champ électromagnétique.....	6
1.2 Énergie, puissance et facteur de qualité Q.....	11
1.3 L'équation d'onde.....	16
1.4 Modes TM et TE.....	20
1.5 Fonction d'onde cylindrique.....	22
1.6 La cavité cylindrique de section circulaire.....	27
2- LA CAVITÉ CIRCULAIRE RÉ-ENTRANTE ASYMÉTRIQUE.....	31
2.1 Modélisation des champs dans la cavité.....	31
2.2 Continuité des champs en mode $TM_{0p0}$ .....	33
2.3 Continuité des champs en mode $TE_{0p0}$ .....	39
2.4 Méthode point par point.....	41
2.5 Méthode intégrale.....	42
2.5.1 Équation caractéristique des modes $TM_{0p0}$ .....	43
2.5.2 Équation caractéristique des modes $TE_{0p0}$ .....	44
2.6 Équations caractéristiques avec arguments imaginaires.....	47

2.7	Équations caractéristiques avec arguments complexes.....	48
2.8	Modes hybrides.....	49
3-	ÉLABORATION DU CODE.....	52
3.1	Construction des fonctions de Bessel.....	52
3.1.1	Fonction de Bessel de première espèce.....	53
3.1.2	Fonction de Bessel de deuxième espèce.....	53
3.1.3	Fonction de Bessel modifiée de première espèce.....	54
3.1.4	Fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce.....	55
3.2	Méthode de Newton-Raphson.....	56
3.2.1	Concepts de base.....	56
3.2.2	Résolution numérique des équations caractéristiques $f(\varepsilon, \omega) = 0$ par la méthode de Newton-Raphson.....	61
3.3	Explication du code.....	64
3.3.1	Liste des variables du code Fortran.....	65
3.3.2	Organigramme.....	67
4-	RÉSULTATS.....	69
4.1	Résonance de la cavité vide.....	69
4.1.1	Mode $TM_{0p0}$ .....	70
4.1.2	Mode $TE_{0p0}$ .....	75
4.2	Cavité avec un échantillon diélectrique.....	80
4.2.1	Échantillon de permittivité réelle en mode $TM_{0p0}$ .....	80
4.2.2	Échantillon de permittivité complexe en mode $TM_{0p0}$ .....	83
4.2.2.1	Échantillon à faible pertes.....	83
4.2.2.2	Échantillon à forte pertes.....	91
4.2.3	Échantillon de permittivité réelle en mode $TE_{0p0}$ .....	95
4.2.4	Échantillon avec pertes en mode $TE_{0p0}$ .....	97

CONCLUSION.....	102
-----------------	-----

## ANNEXE

A- Fonctions de Bessel.....	104
-----------------------------	-----

B- Organigramme et code Fortran.....	106
--------------------------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE.....	153
--------------------	-----

# LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	La cavité cylindrique de section circulaire.....	27
Figure 1.2	Patrons des champs électrique et magnétique de quelques modes TM et TE pour une cavité de section circulaire. Vue de la section circulaire.....	30
Figure 2.1	La cavité cylindrique ré-entrante de section circulaire avec un échantillon diélectrique. Vue de la section transversale.....	31
Figure 3.1	La méthode de Newton-Raphson extrapole la dérivée locale pour estimer la racine. Figure tirée de Press et al. [40].....	57
Figure 3.2	Situation non fonctionnelle de la méthode de Newton-Raphson lors d'un passage à un maximum (ou un minimum) d'une fonction. Press et al. [40].....	57
Figure 3.3	Situation où la méthode de Newton-Raphson entre dans un cycle de non-convergence. Avec une meilleure valeur de départ, la méthode peut devenir fonctionnelle. Press et al. [40].....	58
Figure 3.4	Paramètres reliés à la cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique.....	64
Figure 3.5	Organigramme simplifié du programme qui résout les équations caractéristiques des modes $TM_{0p0}$ et $TE_{0p0}$ d'une cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique.....	68

Figure 4.1	Dimensions de la cavité ré-entrante. Vue de la section transversale.....	69
Figure 4.2	Convergence de la relation (4.1) du mode $TM_{0p0}$ en fonction de la valeur de $q$ pour les fréquences de 1 GHz et 10 GHz.....	70
Figure 4.3	Convergence de la relation (4.1) du mode $TM_{0p0}$ en fonction de la valeur de $q$ pour les fréquences de 20 GHz et 30 GHz.....	71
Figure 4.4	Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode $TM_{0p0}$ en fonction de la fréquence. De 500 MHz à 14 GHz, le déterminant est réel.....	73
Figure 4.5	Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode $TM_{0p0}$ en fonction de la fréquence. De 14 GHz à 20 GHz, le déterminant est purement imaginaire.....	74
Figure 4.6	Comportement de la relation (4.2) du mode $TE_{0p0}$ en fonction de la valeur de $q$ pour une fréquence de 1 GHz.....	75
Figure 4.7	Convergence de la relation (4.3) du mode $TE_{0p0}$ en fonction de la valeur de $q$ pour les fréquences de 1 GHz, 10 GHz, 20 GHz et 30 GHz.....	76
Figure 4.8	Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode $TE_{0p0}$ en fonction de la fréquence.....	78

Figure 4.9	Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode $TE_{0p0}$ en fonction de la fréquence (suite).....	79
Figure 4.10	Dimensions de la cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique. Vue de la section transversale.....	80
Figure 4.11	Comportement de la fréquence en fonction de la permittivité pour des échantillons de rayon 6.5 mm, 4.5 mm, 1.5 mm et 1 mm en mode $TM_{010}$ .....	81
Figure 4.12	Fréquence de résonance des modes $TM_{010}$ , $TM_{020}$ et $TM_{030}$ de la cavité ré-entrante (figure 4.10) contenant un échantillon diélectrique de 6.5 mm ou 1 mm.....	82
Figure 4.13	Comportement de la fréquence de résonance des modes $TM_{010}$ et $TM_{020}$ en fonction de la permittivité avec un facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ pour un échantillon de rayon 1 mm.....	85
Figure 4.14	Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode $TM_{010}$ pour un échantillon de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ .....	86
Figure 4.15	Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode $TM_{020}$ pour un échantillon de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ .....	87
Figure 4.16	Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode $TM_{030}$ pour un échantillon de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ .....	88

Figure 4.17	Coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode $TM_{030}$ pour un échantillon de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ . Agrandissement de la figure 4.16.....	89
Figure 4.18	Comportement de la fréquence de résonance des modes $TM_{010}$ et $TM_{030}$ en fonction de la permittivité avec un facteur de pertes $\text{tg } \delta = 1$ pour un échantillon de rayon 1 mm.....	91
Figure 4.19	Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode $TM_{010}$ pour un échantillon de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 1$ .....	93
Figure 4.20	Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode $TM_{030}$ pour des échantillons de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ , $\text{tg } \delta = 0.5$ et $\text{tg } \delta = 1$ .....	94
Figure 4.21	Convergence de la relation (4.5) du mode $TE_{0p0}$ en fonction de la valeur de $q$ pour les fréquences de 1 GHz et 20 GHz et des permittivités relatives de 2 et 10000.....	96
Figure 4.22	Fréquence de résonance des modes $TE_{010}$ et $TE_{020}$ en fonction de la permittivité pour la cavité ré-entrante (figure 4.10) contenant un échantillon diélectrique de rayon 1 mm.....	97
Figure 4.23	Convergence des parties réelle et imaginaire de la relation (4.5) pour un échantillon de 1 mm possédant une permittivité relative de 2 et un facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ . La fréquence de résonance complexe de la cavité est égale à $2.209 \times 10^9 + j 65.634$ Hz.....	98

Figure 4.24	Idem à la figure 4.23, mais avec une permittivité relative de 20000 et une fréquence de résonance complexe de la cavité égale à $2.209 \times 10^9 + j 65.634$ Hz.....	98
Figure 4.25	Fréquence de résonance du mode TE <sub>010</sub> en fonction de la permittivité pour un échantillon de 1 mm sans pertes et avec un facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ .....	99
Figure 4.26	Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode TE <sub>010</sub> pour un échantillon de 1 mm et de facteur de pertes $\text{tg } \delta = 0.1$ .....	100
Figure A-1	Comportement des fonctions de Bessel et fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce pour les deux premiers ordres.....	105
Figure B-1	Organigramme détaillé du programme informatique qui résout les équations caractéristiques des modes TM et TE sans variation angulaire pour une cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique.....	117

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Interprétation physique des fonctions de Bessel.....	24
Tableau 4.1	Valeurs des fréquences de résonance en mode TM sans variation angulaire obtenues dans une bande de fréquence de 500 MHz à 20 GHz.....	72
Tableau 4.2	Valeurs des fréquences de résonance en mode TE sans variation angulaire obtenues dans une bande de fréquence de 500 MHz à 20 GHz.....	77
Tableau A-1	Liste des premiers zéros pour les fonctions de Bessel de première espèce et deuxième espèces, et liste des zéros de leur dérivée. L'indice n dénote l'ordre de la fonction.....	104

# INTRODUCTION

Les cavités résonantes constituent un des dispositifs majeurs des composants électroniques aux hyperfréquences et possèdent un potentiel important d'applications. Par exemple, elles se retrouvent dans les klystrons afin d'amplifier ou de générer des signaux jusqu'à 200 GHz [1]-[3], dans certains appareils comme les oscillateurs à diode tunnel et diode Gunn [4]-[6], dans les circuits micro-onde intégrés (MIC) et les circuits micro-onde monolithiques intégrés (MMIC) [7]-[8].

Les cavités sont de très bon filtres de fréquences, efficaces pour une large bande [9]. Elles peuvent donc être employées pour l'acquisition d'une grande puissance d'opération dans le cas des lasers CO<sub>2</sub> [10]-[11], ou d'autres systèmes où il est nécessaire d'isoler de hautes fréquences. L'utilisation de substances de haute permittivité dans la cavité permet de réduire les dimensions de celle-ci. Du même coup, le champ se trouve confiné à l'intérieur de l'échantillon, ce qui évite des pertes de conduction. Puisqu'il est possible de miniaturiser la cavité tout en gardant ses propriétés de filtre pour un large domaine de fréquences, ce dispositif est aussi utilisé dans les systèmes satellites.

Une autre application importante, celle de notre projet, est l'emploi de la cavité comme instrument de mesure de la permittivité. Nous allons nous attarder davantage sur ce point. Nous savons qu'il est possible de mesurer la permittivité d'une substance en utilisant un circuit R-L-C. La cavité résonante réagit de façon similaire à ce circuit. Elle emmagasine l'énergie électromagnétique, et une fraction de cette énergie est dissipée à chaque cycle d'oscillation. Le rapport de ces énergies détermine le facteur de qualité. Cependant, les résonateurs sont supérieurs aux circuits R-L-C conventionnels par un facteur de 20 [12], i.e. la fraction de l'énergie dissipée par cycle dans une cavité est 20 fois inférieure à celle d'un circuit R-L-C. Un autre avantage des cavités sur ces circuits est la possibilité de travailler sur

une gamme de fréquences plus étendue. En effet, même en utilisant diverses techniques de pont [13], les circuits R-L-C sont limités en dessous de 300 MHz.

Mais les cavités ne présentent pas que des avantages. Pour parcourir une bande de fréquences, il est nécessaire de faire plusieurs mesures. La technique du TDS, spectroscopie dans le domaine du temps, constitue une méthode rapide de mesure, car elle n'est pas pratiquée dans le domaine de la fréquence mais dans le domaine du temps [14]-[17]. Cette technique emploie un générateur à diode-tunnel et crée une impulsion au sein d'une ligne coaxiale contenant un échantillon. Cette impulsion présente simultanément toutes les fréquences d'intérêt. L'attrait majeur du TDS réside donc dans le fait qu'en une seule mesure rapide, toutes les informations sont fournies d'une façon continue sur une vaste étendue de fréquences (les fréquences fonctionnelles sont confinées entre 50 kHz et 15 GHz). Néanmoins, l'obtention de résultats précis avec le TDS ne se réalise pas sans difficultés. La plus grande source de complications provient du traitement des signaux en vue d'obtenir la permittivité.

Habituellement, pour des mesures au-dessus de 1 GHz, les méthodes qui utilisent des cavités sont préconisées. Par contre, elles deviennent impraticables pour de très hautes fréquences, où les longueurs d'onde sont de l'ordre du millimètre. Les dimensions physiques des cavités deviendraient trop petites, et l'atténuation des champs trop grande. Il faut alors adopter les méthodes optiques tels le résonateur optique confocal ou le spectromètre de Michelson [18]-[20], et analyser les intensités des rayons transmis et réfléchis en résolvant les équations de Fresnel. Les méthodes optiques sont valides jusqu'à une fréquence de 3000 GHz, mais sont des systèmes très coûteux.

Nous venons de faire un bref survol des divers montages utilisés à des fréquences variées. Le domaine de fréquences considéré dans ce projet se situe entre 500 MHz et 30 GHz. Nous sommes maintenant en mesure de motiver l'emploi d'une cavité ré-entrante de section circulaire.

Une cavité de section circulaire conventionnelle présente déjà plusieurs avantages sur les cavités rectangulaires. Pour un mode donné, et pour le même rapport hauteur-diamètre, la cavité circulaire possède un facteur de qualité d'environ 8.3% plus élevé que la cavité rectangulaire [21]. On s'attend à ce résultat puisque le rapport du volume sur la surface est plus grand pour un cylindre circulaire que pour un tube carré.

Un autre avantage concerne les modes qui peuvent exister dans un résonateur : les modes transverses électriques et magnétiques et les modes hybrides. En pratique, il est d'usage de se limiter aux modes transverses sans variation angulaire. Le mode TM fondamental présente la propriété importante d'être indépendant de la hauteur de la cavité et de l'échantillon, ce qui n'est pas le cas pour une cavité rectangulaire. Les modes TE sont utiles lorsqu'il est indispensable d'obtenir un très bon facteur de qualité.

L'atout d'une cavité circulaire ré-entrante en comparaison à celle d'une cavité circulaire ordinaire est basé sur le fait que pour des dimensions équivalentes de l'échantillon et un même diamètre de la cavité, le rapport du volume de la région vide sur le volume de la substance est plus grand pour la cavité ré-entrante. Par conséquent, il est possible de mesurer de plus grandes permittivités puisque l'atténuation du champ est moindre [22]-[23].

Afin de déterminer la permittivité d'un échantillon, il est nécessaire de connaître la fréquence de résonance de la cavité vide et de la cavité avec échantillon. Plusieurs méthodes de résolution s'offrent à nous [24]. Elles peuvent être regroupées en deux grandes catégories : les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Les méthodes analytiques sont des calculs exacts. Par contre, elles sont limitées à des géométries simples et à des milieux linéaires. L'évolution des ordinateurs a permis un grand nombre d'approches approximatives basées sur des algorithmes numériques, éclipsant en pratique les méthodes analytiques.

Une des méthodes approximatives est la technique des perturbations [25]. Ses limites se constatent dans l'inexactitude des valeurs obtenues ainsi que dans la restriction de l'information fournie [26]. Une autre technique souvent employée est la méthode des éléments finis [27]-[28]. Elle occupe une place importante à cause de la possibilité de l'utiliser sans restriction sur toute géométrie. Une technique similaire est la méthode des éléments de frontières. Dans ce cas, le maillage, au lieu de se faire sur le volume, se fait sur la surface, ce qui diminue le temps de calcul. Mais la programmation et les calculs sont assez longs dans le cas des méthodes d'éléments finis.

Un autre algorithme se base sur la technique de différences finies. Cette démarche est valide, encore une fois, pour une géométrie quelconque. Toutefois, certaines difficultés se présentent s'il y a des points singuliers, ce qui est notre cas puisque nous avons des coins ré-entrants. Dans cette situation, la méthode des éléments finis serait sans doute plus efficace [29]. Finalement, il existe un autre algorithme fondé sur la méthode des moments [30]. Mais l'expression du champ implique une série infinie qui converge lentement.

Deux démarches nous intéressent ici. La méthode point par point et la méthode intégrale. Le choix de ces moyens de calcul est basé sur leur précision, leur convergence rapide et leur simplicité.

Le premier chapitre aborde les concepts fondamentaux. Nous y introduisons les équations de Maxwell en définissant les divers paramètres qui les constituent ou qui en découlent, dont la permittivité et le facteur de qualité. Nous déduisons les modes TM et TE en coordonnées cylindriques, et obtenons la fonction d'onde qui permet de connaître tous nos champs à l'intérieur d'une cavité.

Le deuxième chapitre constitue le cœur de notre travail. Il s'agit d'obtenir les équations caractéristiques des modes  $TM_{0p0}$  et  $TE_{0p0}$  de la cavité ré-entrante, et de les exprimer avec la méthode intégrale.

Le chapitre 3 décrit l'algorithme pour résoudre le système aux valeurs propres. On y explique la façon de construire les diverses fonctions de Bessel, la méthode de Newton-Raphson pour l'obtention de zéros dans le plan complexe, et l'organigramme détaillé de notre code Fortran.

Enfin, le dernier chapitre présente nos résultats numériques. Les fréquences de résonance de la cavité vide en mode  $TM_{0p0}$  et  $TE_{0p0}$  sont tabulées, et le comportement de la permittivité pour des échantillons à faibles et fortes pertes est mis en évidence afin de montrer la concordance avec la littérature.

# CHAPITRE 1

## CONCEPTS FONDAMENTAUX

### 1-1 Équations du champ électromagnétique

Les équations du champ électromagnétique peuvent se formuler en termes de six quantités. Ce sont :

$\vec{E}$ , l'intensité électrique (Volt/m)

$\vec{H}$ , l'intensité magnétique (Ampère/m)

$\vec{D}$ , la densité de flux électrique (Coulomb/m<sup>2</sup>)

$\vec{B}$ , la densité de flux magnétique (Weber/m<sup>2</sup>)

$\vec{j}^c$ , la densité de courant électrique (Ampère/m<sup>2</sup>)

$Q_v$ , la densité de charge électrique (Coulomb/m<sup>3</sup>).

Ces quantités obéissent aux quatre équations de Maxwell :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1a) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1c)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}^c \quad (1.1b) \quad \nabla \cdot \vec{D} = Q_v. \quad (1.1d)$$

Ces relations expriment le lien existant entre le magnétisme et l'électricité. Ce sont des postulats, leur validité étant justifiée par un grand nombre d'expériences et d'observations. La partie droite des équations (1.1a) et (1.1b) exprime les courants magnétique et électrique. Sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle, nous affirmons que les courants sont solénoïdaux : les lignes de courant n'ont ni commencement ni fin mais doivent être continues. Concernant les expressions (1.1c) et (1.1d), nous

concluons à l'existence de charges électriques élémentaires (électron, proton), mais à l'absence de monopôles magnétiques.

Les relations entre les intensités et les densités de flux nous permettent de caractériser un milieu. En ce qui a trait au vide, ou plus généralement à l'espace libre, les relations constitutives sont :

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j}^c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

où  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. C'est une conséquence mathématique des équations de champ que  $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  est la vitesse de l'onde électromagnétique, i.e. celle de la lumière qui est environ  $2.9979 \times 10^8$  m / s. Le choix de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  détermine un système d'unités électromagnétiques. Pour le système MKSA, on définit

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ Henry / m} \\ \epsilon_0 &= 8.854 \times 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ Farad / m.} \end{aligned}$$

Les autres milieux conduisent fréquemment à des relations linéaires. Nous disons que la matière est linéaire au sens simple lorsque

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j}^c &= \sigma \vec{E} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Le paramètre  $\sigma$  exprime la conductivité du milieu. Les matériaux ayant une valeur élevée de  $\sigma$  sont des conducteurs, et ceux dont la valeur de  $\sigma$  est petite sont des diélectriques, i.e. des isolants électriques. Le vide est un parfait diélectrique avec  $\sigma = 0$ . La permittivité  $\varepsilon$  de tout matériel n'est jamais moindre que celle du vide  $\varepsilon_0$ . Le rapport  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$  est appelé la constante diélectrique. Pour un bon conducteur, cette dernière est presque l'unité. Pour plusieurs matières linéaires, la perméabilité se compare approximativement à celle du vide  $\mu_0$ . Toutefois, si elle est légèrement inférieure à  $\mu_0$  (de l'ordre de 0.01%), nous parlons de milieux diamagnétiques, alors que si elle est supérieure, toujours du même ordre, nous parlons de milieux paramagnétiques. Une troisième classe de matériaux, appelés ferromagnétiques, possède des valeurs de perméabilité beaucoup plus grandes que  $\mu_0$ , mais ces derniers sont souvent non linéaires. Par conséquent, tous les matériaux excepté les ferromagnétiques sont dits non magnétiques avec une perméabilité relative de 1.

Par extension des équations (1.3), nous obtenons une suite d'équations différentielles caractérisant la matière linéaire au sens général :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \varepsilon_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \dots \quad (1.4a)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \mu_1 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \dots \quad (1.4b)$$

$$\vec{j}^c = \sigma \vec{E} + \sigma_1 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \dots \quad (1.4c)$$

Lorsque les champs sont alternatifs, i.e. quand la variation dans le temps est harmonique, l'analyse mathématique peut être simplifiée en utilisant des quantités complexes. Nous développons donc les équations de Maxwell en termes complexes. Jusqu'à présent, les vecteurs de champs représentaient des quantités instantanées. En considérant le champ électrique sous forme complexe, et en utilisant les identités d'Euler, ce champ s'écrit

$$\vec{\mathcal{E}} = |\vec{\mathcal{E}}| \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\vec{\mathcal{E}} e^{j\omega t}).$$

$\vec{\mathcal{E}}$  traduit donc la quantité instantanée, et  $\vec{\mathcal{E}} = |\vec{\mathcal{E}}| e^{j\alpha}$  est appelé la quantité complexe ou phaseur électrique. Le même cheminement peut être répété avec l'intensité magnétique.

Considérons maintenant l'équation de Maxwell (1.1a) en termes de quantités complexes :

$$\begin{aligned} \nabla \times [\text{Re}(\vec{\mathcal{E}} e^{j\omega t})] &= - \frac{\partial}{\partial t} [\text{Re}(\vec{\mathcal{B}} e^{j\omega t})] \\ \text{Re}(\nabla \times \vec{\mathcal{E}} e^{j\omega t}) &= - \text{Re}(j\omega \vec{\mathcal{B}} e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

Ainsi  $\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -j\omega \vec{\mathcal{B}}$ , c'est-à-dire que  $\partial/\partial t$  est remplacé par  $j\omega$ . Nous pouvons transformer toutes les équations de Maxwell de leur forme instantanée à leur forme complexe et obtenir :

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -j\omega \vec{\mathcal{B}} \quad (1.5a) \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (1.5c)$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = j\omega \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{J}} \quad (1.5b) \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = Q_v \quad (1.5d)$$

De même, établissons les relations constitutives pour la matière linéaire générale sous une forme complexe. Par exemple, l'équation (1.4a) deviendra

$$\vec{\mathcal{D}} = (\epsilon + j\omega\epsilon_1 - \omega^2\epsilon_2 + \dots)\vec{\mathcal{E}}.$$

La quantité  $(\epsilon + j\omega\epsilon_1 - \omega^2\epsilon_2 + \dots)$  est une fonction complexe de  $\omega$ . Nous la dénoterons par  $\hat{\epsilon}(\omega)$ , qu'on appelle la permittivité complexe. Les deux autres équations de (1.4) se simplifient de la même façon :

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \hat{\epsilon}(\omega)\vec{E} \\ \vec{B} &= \hat{\mu}(\omega)\vec{H} \\ \vec{J}^c &= \hat{\sigma}(\omega)\vec{E} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Ces équations sont semblables à celles du milieu linéaire simple. Afin de comprendre la signification physique de ces paramètres constitutifs, expliquons brièvement l'interprétation de leur mesure expérimentale. Avant tout, considérons les courants totaux instantanés, électrique et magnétique, en l'absence de sources,

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}^t &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}^c \\ \vec{M}^t &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

où les indices t et c dénotent les courants totaux et de conduction. Sous leur forme complexe, ces relations s'écrivent comme

$$\left. \begin{aligned} \vec{J}^t &= (\hat{\sigma} + j\omega\hat{\epsilon})\vec{E} = \hat{y}(\omega)\vec{E} \\ \vec{M}^t &= j\omega\hat{\mu}\vec{H} = \hat{z}(\omega)\vec{H} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Les équations de Maxwell (1.5a) et (1.5b) deviennent ainsi

$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{z}(\omega)\vec{H} \quad (1.9a)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{y}(\omega)\vec{E}. \quad (1.9b)$$

Le paramètre  $\hat{y}(\omega)$  a les dimensions d'une admittance par unité de longueur et est appelé l'admittivité du milieu. Le paramètre  $\hat{z}(\omega)$  a les dimensions d'une impédance par unité de longueur et est appelé l'impéditivité. Nous notons que  $\hat{y}(\omega)$  est une combinaison de  $\hat{\sigma}$  et de  $\hat{\epsilon}$ . Une mesure de  $\hat{y}$  est relativement simple en laboratoire, mais il est difficile de

séparer  $\hat{\sigma}$  de  $\hat{\epsilon}$ . La distinction se fait ainsi: si le courant est provoqué par une charge libre, nous incluons cet effet dans  $\hat{\sigma}$ . Si le courant est dû à une charge de couche, nous incluons cet effet dans  $\hat{\epsilon}$ . Ainsi, quand nous parlons de conducteurs, la convention habituelle est d'écrire :  $\hat{y} = \hat{\sigma} + j\omega\epsilon_0$ . Lorsque nous discutons de diélectriques, il est commun d'écrire :  $\hat{y} = j\omega\hat{\epsilon}$ . Nous pouvons alors définir la permittivité comme étant une quantité macroscopique qui indique la facilité d'une substance à se polariser sous l'effet d'un champ électromagnétique, cette polarisation électrique découlant soit de la déformation des molécules, soit de l'alignement des molécules polaires suivant la direction du champ électrique.

## 1-2 Énergie, puissance et facteur de qualité Q

Le facteur de qualité Q représente une autre façon de caractériser la matière. Pour procéder à sa définition, nous devons connaître l'énergie et la puissance électrique et magnétique.

Le produit scalaire  $\vec{E} \cdot \vec{j}^t$  est une densité de puissance. Considérons les équations (1.1) et (1.7). Multiplions (1.1a) par  $\vec{H}$  et (1.1b) par  $\vec{E}$ , et prenons leur différence :

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}. \quad (1.10)$$

Cette équation peut s'écrire comme

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{j}^t + \vec{H} \cdot \vec{M}^t = 0. \quad (1.11)$$

On intègre cette équation sur la région du champ électromagnétique et on applique au premier terme le théorème de la divergence :

$$\oint (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) d\vec{s} + \iiint (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{j}^i + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{M}}^i) d\tau = 0. \quad (1.12)$$

Ces équations peuvent être interprétées comme la conservation de l'énergie, l'équation (1.11) étant la forme différentielle et l'équation (1.12) représentant la forme intégrale. Le produit vectoriel dans le premier terme est le vecteur de Poynting

$$\vec{S} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (1.13)$$

défini comme étant la puissance transmise par unité de surface. On définit aussi

$$p_f = \nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) \quad (1.14)$$

qui est la densité volumique de puissance. Dans un milieu linéaire simple, les deux derniers termes de l'équation (1.11) deviennent

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{j}^i &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 \right) + \sigma \mathcal{E}^2 \\ \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{M}}^i &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

On peut identifier les densités d'énergie électrique et magnétique ainsi que la densité de puissance convertie en chaleur, appelée puissance dissipée

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 \quad (1.16a)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \quad (1.16b)$$

$$p_d = \sigma \mathcal{E}^2. \quad (1.16c)$$

Prenons la moyenne temporelle de ces équations et intégrons-les sur le volume :

$$\overline{\mathcal{W}}_e = \frac{1}{2} \iiint \epsilon |E|^2 d\tau \quad (1.17a)$$

$$\overline{\mathcal{W}}_m = \frac{1}{2} \iiint \mu |H|^2 d\tau \quad (1.17b)$$

$$\overline{\mathcal{P}}_d = \iiint \sigma |E|^2 d\tau . \quad (1.17c)$$

En généralisant la définition, nous obtenons, pour un milieu linéaire général, la correspondance aux équations (1.17), soit

$$\overline{\mathcal{W}}_e = \frac{1}{2\omega} \mathbf{Im} \left[ \iiint \hat{y} |E|^2 d\tau \right] \quad (1.18a)$$

$$\overline{\mathcal{W}}_m = \frac{1}{2\omega} \mathbf{Im} \left[ \iiint \hat{z} |H|^2 d\tau \right] \quad (1.18b)$$

$$\overline{\mathcal{P}}_d = \mathbf{Re} \left[ \iiint (\hat{y} |E|^2 + \hat{z} |H|^2) d\tau \right]. \quad (1.18c)$$

Le premier terme de l'équation (1.18c) définit les pertes diélectriques et de conduction, alors que le second représente les pertes magnétiques.

Développons de façon plus pratique ces mêmes équations en considérant un diélectrique non magnétique.

$$\hat{y}(\omega) = j\omega\hat{\epsilon}(\omega)$$

$$\hat{z}(\omega) = j\omega\mu_0.$$

Nous pouvons représenter  $\hat{\epsilon}(\omega)$  en coordonnées cartésiennes ou polaires,

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon' - j\epsilon'' = |\hat{\epsilon}|e^{-j\delta}. \quad (1.19)$$

Nous appelons  $\epsilon'$  la permittivité réelle,  $\epsilon''$  le facteur de pertes diélectriques, et  $\delta$  la perte diélectrique angulaire. Les équations d'énergie et de puissance électrique deviennent donc

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}}_e &= \frac{1}{2} \iiint \epsilon' |E|^2 d\tau \\ \overline{\mathcal{P}}_d &= \iiint \omega \epsilon'' |E|^2 d\tau \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ainsi,  $\epsilon'$  contribue à emmagasiner l'énergie (comme  $\epsilon$  dans la matière linéaire simple), et  $\omega\epsilon''$  contribue à la puissance dissipée (comme  $\sigma$  dans la matière linéaire simple). Nous avons un diélectrique sans pertes lorsque  $\epsilon'' = 0$ . Un traitement analogue peut être considéré avec la perméabilité magnétique, mais nos échantillons ne seront pas ferromagnétiques.

Une division commode du courant électrique peut être effectuée de la façon suivante. D'une part, nous avons des courants produisant des pertes de puissance, appelées courants dissipatifs,  $\vec{J} = (\sigma + \omega\epsilon'')\vec{E}$ . D'autre part, il y a un courant réactif qui augmente l'énergie emmagasinée,  $\vec{J} = j\omega\epsilon'\vec{E}$ . Une classification de la matière du point de vue de l'importance relative des courants électriques est déterminée en terme du facteur de qualité  $Q$ , défini par

$$Q = \frac{\text{Amplitude de la densité de courant réactif}}{\text{Amplitude de la densité de courant dissipatif}} \quad (1.21)$$

$$Q = \frac{\omega\epsilon'}{(\sigma + \omega\epsilon'')}$$

Un bon diélectrique présente donc une valeur de  $Q$  élevée, alors que l'inverse se constate pour les conducteurs. Lorsque la matière magnétique est considérée, il y a une puissance de dissipation additionnelle due aux pertes d'hystérèse magnétique. Les équations (1.21) devraient donc être modifiées puisqu'elles n'incluent que les pertes de puissance provoquées

par les effets électriques. Dans ce cas, le facteur de qualité défini ci-dessus devrait s'appeler  $Q$  électrique, et un facteur de qualité magnétique  $Q_m$  analogue devrait être spécifié.

Il est intéressant de relier le facteur  $Q$  directement à l'énergie de la cavité. Le spectre en fréquence d'une cavité est une somme de fonctions delta. En fait, ces pics sont plus ou moins larges en raison des pertes d'énergie dues à la conductivité finie des parois de la cavité.

Les équations (1.20) et (1.21) indiquent que le facteur de qualité est le rapport de l'énergie moyenne contenue dans la cavité sur la perte d'énergie par cycle d'oscillation,

$$Q = \omega_0 \frac{\text{Energie}}{\text{Puissance perdue}} = \omega_0 \frac{U}{-dU/dt} \quad (1.22)$$

où  $\omega_0$  est la fréquence du mode d'oscillation considéré. Si  $U$  est l'énergie moyenne dans le temps contenue dans la cavité, alors nous avons l'équation différentielle

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} U \Rightarrow U(t) = U_0 e^{-\omega_0 t/Q}. \quad (1.23)$$

Comme l'énergie est proportionnelle au carré du champ (électrique ou magnétique), soit  $U \propto E^2 \propto e^{-\omega_0 t/Q}$ , ce dernier ne varie pas de manière purement oscillatoire dans le temps, mais diminue exponentiellement :

$$\vec{E}(t) = E_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{+j\omega_0 t} = E_0 e^{j\omega_c t}. \quad (1.24)$$

Ici,  $\omega_c = \omega_0 \{1 + j/(2Q)\}$  peut être associé à une fréquence de résonance complexe. Le spectre en fréquences de l'équation (1.24) s'obtient par transformation de Fourier. En notant que  $\vec{E}(t) = 0$  si  $t < 0$ , nous déduisons que

$$\vec{E}(\omega) = \int_0^{\infty} dt E_0 e^{-\omega_0 t / 2Q} e^{-j(\omega - \omega_0)t}. \quad (1.25)$$

Cette expression mène au spectre suivant :

$$|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0 / 2Q)^2}. \quad (1.26)$$

Il s'agit d'une courbe de type lorentzien, dont la largeur à mi-hauteur est  $\Gamma = \omega_0 / Q$ . Plus le facteur de qualité est grand, plus le spectre autour d'une fréquence propre donnée ressemble à une fonction delta.

### 1-3 L'équation d'onde

Considérons à nouveau les équations de champ dans un milieu linéaire ( $\hat{z}$  et  $\hat{y}$  indépendants des champs), homogène ( $\hat{z}$  et  $\hat{y}$  indépendants de la position) et isotrope ( $\hat{z}$  et  $\hat{y}$  sont des scalaires), données par les relations (1.9). Le rotationnel de la première équation est

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\hat{z} \cdot \nabla \times \vec{H} \quad (1.27)$$

ce qui, par substitution de (1.9b), nous donne

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\hat{z} \hat{y} \vec{E}. \quad (1.28)$$

Définissons le nombre d'onde du milieu  $k$  comme

$$\kappa = \sqrt{-\hat{z}\hat{y}}. \quad (1.29)$$

En termes de ce paramètre, l'équation (1.28) s'écrit

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \kappa^2 \vec{E} = 0 \quad (1.30)$$

laquelle est appelée l'équation d'onde vectorielle complexe. Par la même procédure, nous obtenons

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - \kappa^2 \vec{H} = 0. \quad (1.31)$$

L'équation d'onde peut s'exprimer d'une autre manière en utilisant la divergence de (1.30) et (1.31)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{E}) - \kappa^2 \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{H}) - \kappa^2 \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

En sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle, nous réalisons que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ce résultat est attendu puisque nous avons un milieu homogène exempt d'excès de charges.

Utilisant ces deux dernières relations et l'identité du laplacien

$$\nabla^2 \vec{X} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{X}) - \nabla \times \nabla \times \vec{X} \quad (1.33)$$

on obtient

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} &= 0.\end{aligned}\tag{1.34}$$

Ces équations d'onde ne sont pas à leur forme la plus générale puisqu'on a éliminé (1.32). Par contre, sous la forme (1.34), les composantes cartésiennes de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  satisfont à l'équation scalaire de Helmholtz

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0 .\tag{1.35}$$

Il est possible d'établir les solutions en résolvant l'équation de Helmholtz pour chacune des composantes cartésiennes des champs tout en respectant (1.32). Une méthode plus courante de connaître les champs est de se définir des potentiels vecteurs qui satisferont à l'équation de Helmholtz sans pour autant avoir les propriétés de divergence des champs. Nous verrons que cette façon de procéder permet de préciser facilement les champs transverses électrique et magnétique.

Nous savons que la divergence de l'intensité magnétique est nulle en tout temps. Puisque la divergence d'un rotationnel est aussi nulle pour tout vecteur, on peut définir

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}\tag{1.36}$$

où  $\vec{A}$  est appelé le potentiel vecteur magnétique. Substituant (1.36) dans (1.9a), nous avons

$$\nabla \times (\vec{E} + \hat{z} \vec{A}) = 0 .\tag{1.37}$$

Or, le rotationnel du gradient d'un scalaire est aussi égal à zéro. On définit alors

$$\vec{E} + \hat{z}\vec{A} = -\nabla\Phi^A \quad (1.38)$$

où  $\Phi^A$  est un potentiel magnétique scalaire. On obtient l'équation d'onde pour le potentiel vecteur magnétique en substituant (1.36) et (1.38) dans (1.9b) :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \kappa^2 \vec{A} = -\hat{y} \nabla \Phi^A. \quad (1.39)$$

En utilisant l'identité (1.33), cette expression devient

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} - \kappa^2 \vec{A} = -\hat{y} \nabla \Phi^A. \quad (1.40)$$

L'équation (1.36) ne spécifie que le rotationnel de  $\vec{A}$ . Nous sommes alors libres de choisir  $\nabla \cdot \vec{A}$ . Si nous prenons

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\hat{y} \Phi^A \quad (1.41)$$

nous obtenons l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{A} + \kappa^2 \vec{A} = 0. \quad (1.42)$$

Nous pouvons aussi définir un potentiel vecteur électrique  $\vec{F}$  tel que  $\vec{E} = -\nabla \times \vec{F}$ . Par le principe de dualité, nous spécifions immédiatement l'équation d'onde correspondante,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} - \kappa^2 \vec{F} = -\hat{z} \nabla \Phi^F \quad (1.43)$$

ainsi que la divergence et l'équation de Helmholtz,

$$\nabla \cdot \vec{F} = -\hat{z} \Phi^F \quad (1.44)$$

$$\nabla^2 \vec{F} + \kappa^2 \vec{F} = 0 . \quad (1.45)$$

Les deux potentiels  $\vec{A}$  et  $\vec{F}$  peuvent être spécifiés indépendamment. Dans le cas général, le champ électromagnétique en terme des potentiels vecteurs se note donc par

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \times \vec{F} - \hat{z} \vec{A} + \frac{1}{\hat{y}} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A} - \hat{y} \vec{F} + \frac{1}{\hat{z}} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) . \end{aligned} \quad (1.46)$$

#### 1.4 Modes TM et TE

Considérons maintenant quelques options particulières de potentiels. Pour mieux comprendre ce choix, nous supposons un guide d'onde possédant des parois parfaitement conductrices. Les courants de très haute fréquence ne circulent que dans une couche limitée à la surface du conducteur. À l'intérieur de ces parois, les champs électriques sont pratiquement nuls [31]. Tout près du guide, le champ magnétique doit être tangent à la surface et évidemment, perpendiculaire au sens du courant. Or, le champ magnétique est aussi normal au potentiel vecteur magnétique. C'est donc dire que le sens de ce potentiel vecteur est celui du courant. Par convention, nous prenons l'axe z comme étant la direction du déplacement des charges. Si nous prenons  $\vec{F} = 0$  et  $\vec{A} = \hat{u}_z \psi$ , alors

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\hat{z} \vec{A} + \frac{1}{\hat{y}} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A} . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ces équations peuvent être exprimées en coordonnées cartésiennes comme

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} & H_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
E_y &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} & H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\
E_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \psi & H_z &= 0 .
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Un champ n'ayant pas de composante  $H_z$  est appelé transverse magnétique à  $z$  (TM).

Par le principe de dualité [21], si nous choisissons  $\vec{A} = 0$  et  $\vec{F} = \hat{u}_z \psi$ , alors

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla \times \vec{F} \\
\vec{H} &= -\hat{y} \vec{F} + \frac{1}{\hat{z}} \nabla (\nabla \cdot \vec{F})
\end{aligned} \tag{1.49}$$

En coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} & H_x &= \frac{1}{\hat{z}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\
E_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} & H_y &= \frac{1}{\hat{z}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\
E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \psi .
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Un champ n'ayant pas de composante  $E_z$  est appelé transverse électrique à  $z$  (TE).

### 1-5 Fonction d'onde cylindrique

En premier lieu, considérons les solutions de l'équation scalaire de Helmholtz en coordonnées cylindriques. Une fois que nos fonctions d'onde scalaires élémentaires seront obtenues, nous élaborerons les équations des champs électromagnétiques.

L'équation scalaire de Helmholtz en coordonnées cylindriques s'énonce par la relation

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \kappa^2 \psi = 0. \quad (1.51)$$

Suivant la méthode de séparation des variables, nous cherchons à trouver des solutions sous la forme

$$\psi = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z). \quad (1.52)$$

Substituons l'équation (1.52) dans (1.51) et divisons par  $\psi$  :

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \kappa^2 = 0. \quad (1.53)$$

Le troisième terme, qui ne dépend que de  $z$ , est égal à une expression indépendante de  $z$ . Par conséquent, le troisième terme est constant, c'est-à-dire

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\kappa_z^2 \quad (1.54)$$

où  $\kappa_z$  est une constante. En substituant (1.54) dans (1.53) et en multipliant par  $\rho^2$ , on voit par un argument semblable que

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -n^2 \quad (1.55)$$

où  $n$  est une constante. L'équation d'onde est maintenant séparée. Définissons  $\kappa_\rho$  comme

$$\kappa_\rho^2 + \kappa_z^2 = \kappa^2. \quad (1.56)$$

Nos équations séparées s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + [(\kappa_\rho \rho)^2 - n^2] R &= 0 \\ \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + n^2\Phi &= 0 \\ \frac{d^2Z}{dz^2} + \kappa_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad (1.57)$$

Le domaine de l'angle  $\phi$  est  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  avec une périodicité de  $2\pi$ , ce qui implique que  $n$  est un entier. Les fonctions  $\Phi(n\phi)$  et  $Z(\kappa_z z)$  sont des combinaisons linéaires de fonctions harmoniques, soit stationnaires soit progressives. La fonction  $R(\kappa_\rho \rho)$  représente une combinaison linéaire de fonctions de Bessel d'ordre  $n$  (voir [32]), par exemple

$$R = AJ_n(\kappa_\rho \rho) + BY_n(\kappa_\rho \rho) \quad (1.58)$$

$$R = CH_n^{(1)}(\kappa_\rho \rho) + DH_n^{(2)}(\kappa_\rho \rho) \quad (1.59)$$

où  $J$  et  $Y$  sont respectivement les fonctions de Bessel de première espèce et deuxième espèce, cette dernière étant plus communément appelée fonction de Neumann. Les fonctions  $H^{(1)}$  et  $H^{(2)}$  sont les fonctions de Hankel de première et deuxième espèce. Soulignons, pour de grandes valeurs de leur argument, l'analogie entre les fonctions de Bessel et les fonctions harmoniques :

$J_n(k_\varphi \rho)$  analogue à  $\cos(k_\varphi \rho)$

$Y_n(k_\varphi \rho)$  analogue à  $\sin(k_\varphi \rho)$

$H_n^{(1)}(k_\varphi \rho)$  analogue à  $e^{jk_\varphi \rho}$

$H_n^{(2)}(k_\varphi \rho)$  analogue à  $e^{-jk_\varphi \rho}$ .

Le tableau 1.1 illustre les propriétés des fonctions de Bessel et leur interprétation physique.

Fonctions de Bessel	Représentations équivalentes	Interprétation physique
$H_n^{(1)}(k_\varphi \rho)$	$J_n(k_\varphi \rho) + jY_n(k_\varphi \rho)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>♦ <math>k_\varphi</math> réel → onde progressive interne</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> imaginaire → onde croissante</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> complexe → onde progressive atténuée</li> </ul>
$H_n^{(2)}(k_\varphi \rho)$	$J_n(k_\varphi \rho) - jY_n(k_\varphi \rho)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>♦ <math>k_\varphi</math> réel → onde progressive externe</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> imaginaire → onde évanescence</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> complexe → onde progressive atténuée</li> </ul>
$J_n(k_\varphi \rho)$	$\frac{1}{2} [H_n^{(1)}(k_\varphi \rho) + H_n^{(2)}(k_\varphi \rho)]$	<ul style="list-style-type: none"> <li>♦ <math>k_\varphi</math> réel → onde stationnaire</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> imaginaire → deux ondes exponentielles</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> complexe → ondes stationnaires localisées</li> </ul>
$Y_n(k_\varphi \rho)$	$\frac{1}{2j} [H_n^{(1)}(k_\varphi \rho) - H_n^{(2)}(k_\varphi \rho)]$	<ul style="list-style-type: none"> <li>♦ <math>k_\varphi</math> réel → onde stationnaire</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> imaginaire → deux ondes exponentielles</li> <li>♦ <math>k_\varphi</math> complexe → ondes stationnaires localisées</li> </ul>

**Tableau 1.1** Interprétation physique des fonctions de Bessel.

Il existe donc plusieurs types d'onde. En particulier si nous considérons une partie progressive seulement en  $z$ , les autres directions étant exprimées par des ondes stationnaires, on obtient :

$$\Psi_{n,\kappa_\rho,\kappa_z} = \left\{ A J_n(\kappa_\rho \rho) + B Y_n(\kappa_\rho \rho) \right\} \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} e^{\pm j\kappa_z z}. \quad (1.60)$$

Il s'agit ici d'ondes planes. Les surfaces équiphases ( $z$  constant) sont des plans parallèles. Nous les rencontrons dans les guides d'onde circulaires. Si la partie progressive existe seulement en  $\phi$ , la fonction d'onde se décrit par

$$\Psi_{n,\kappa_\rho,\kappa_z} = \left\{ A J_n(\kappa_\rho \rho) + B Y_n(\kappa_\rho \rho) \right\} e^{\pm jn\phi} \begin{Bmatrix} \sin(\kappa_z z) \\ \cos(\kappa_z z) \end{Bmatrix}. \quad (1.61)$$

Nous obtenons alors des ondes dites 'périodiques' dont la direction est circonférentielle ( $\phi$  constant). Ce type d'onde se rencontre dans des guides formés de deux cylindres concentriques. Par ailleurs, spécifions les fonctions d'onde de la forme

$$\Psi_{n,\kappa_\rho,\kappa_z} = \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \left\{ A H_n^{(1)}(\kappa_\rho \rho) + B H_n^{(2)}(\kappa_\rho \rho) \right\} \begin{Bmatrix} \sin(\kappa_z z) \\ \cos(\kappa_z z) \end{Bmatrix}. \quad (1.62)$$

Ces ondes possèdent des surfaces équiphases cylindriques ( $\rho$  constant) et voyagent dans la direction radiale : ce sont les ondes radiales. Elles peuvent être supportées par deux plaques conductrices parallèles ou encore dans certains guides d'onde ayant un grand rayon, selon l'excitation.

Il demeure le cas où les ondes sont stationnaires dans toutes les directions  $\rho$ ,  $\phi$  et  $z$ ,

$$\Psi_{n,\kappa_\rho,\kappa_z} = \left\{ A J_n(\kappa_\rho \rho) + B Y_n(\kappa_\rho \rho) \right\} \Phi(n\phi) Z(\kappa_z z) \quad (1.63)$$

où  $\Phi$  et  $Z$  sont des combinaisons linéaires de sinus et cosinus. Ces ondes se rencontrent dans une cavité circulaire, qui n'est autre qu'un guide d'onde aux sections transversales fermées par des conducteurs. Il s'agit par conséquent d'ondes planes se propageant en  $z$  et qui se réfléchissent sur les bouts de la cavité, d'où le besoin d'une fonction stationnaire en  $z$ . Nous considérons ces ondes transverses dans le contexte où elles baignent dans un milieu homogène, isotrope et linéaire [33]. Nous ne retiendrons, à partir de maintenant, que cette fonction d'onde.

Procédant à une définition plus générale, nous savons que les combinaisons linéaires de ces fonctions d'onde élémentaires sont aussi des solutions. Nous effectuons alors une somme sur  $n$  et  $k_\rho$ , ou encore sur  $n$  et  $k_z$ , mais pas sur  $k_\rho$  et  $k_z$  puisqu'ils sont reliés par (1.57).

$$\Psi = \sum_n \sum_{k_\rho} \left\{ A_{k_\rho, n} J_n(k_\rho \rho) + B_{k_\rho, n} Y_n(k_\rho \rho) \right\} \Phi(n\phi) Z(k_z z). \quad (1.64)$$

Nous sommes finalement en mesure d'exprimer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  en termes de la fonction d'onde  $\Psi$ . Il suffit simplement d'écrire les ensembles d'équations (1.48) et (1.50) en coordonnées cylindriques. Pour les champs TM par rapport à  $z$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} & H_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \\ E_\phi &= \frac{1}{\hat{y} \rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial z} & H_\phi &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \\ E_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Psi & H_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

alors que les champs TE par rapport à  $z$  se traduisent par :

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} & H_\rho &= \frac{1}{z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} \\
 E_\phi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} & H_\phi &= \frac{1}{z \rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial z} \\
 E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{z} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \Psi.
 \end{aligned}
 \tag{1.66}$$

### 1-6 La cavité cylindrique de section circulaire

Puisque dans la cavité circulaire nous traitons d'ondes stationnaires, nous avons des fréquences d'excitation qui dépendent du rayon, de la hauteur et du contenu de la cavité. Celle-ci est donc simplement un résonateur. Pour simplifier notre étude, nous supposons des parois parfaitement conductrices, et le vide comme milieu. De même, nous utilisons seulement la fonction d'onde élémentaire (1.63) pour la détermination des résonances.

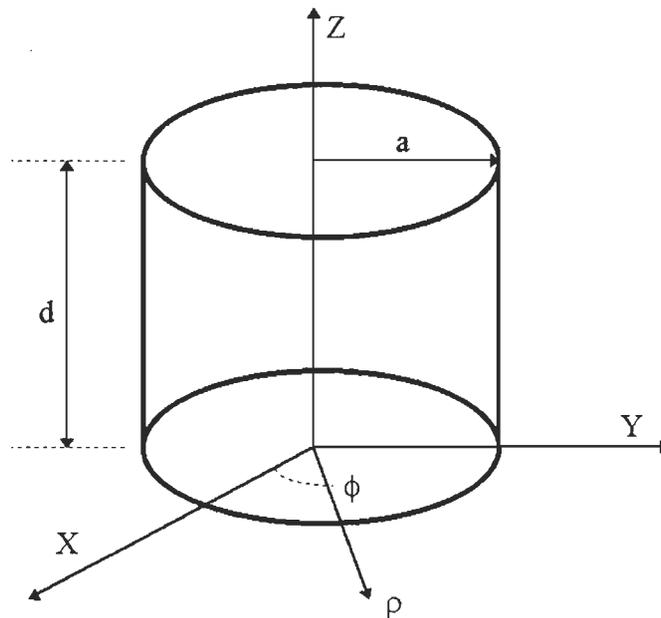


Figure 1.1- La cavité cylindrique de section circulaire.

Nous savons que le champ est fini à  $\rho = 0$ . Dès lors, nous éliminons la fonction de Neumann, pour ne garder que la fonction de première espèce.

$$\psi = J_n(\kappa_\rho \rho) \Phi(n\phi) Z(\kappa_z z). \quad (1.67)$$

Puisque les composantes tangentielles du champ électrique doivent s'annuler à la paroi conductrice, il s'ensuit que, du champ TM défini par (1.65), les composantes  $E_\phi$  et  $E_z$  disparaissent à  $\rho = a$ . Nous devons donc fixer

$$J_n(\kappa_\rho a) = 0 \quad (1.68)$$

ce qui nous permet de déterminer les valeurs propres pour  $\kappa_\rho$ . Notons que pour chaque  $n$ , il y a une infinité de zéros. Nous les désignons par  $x_{nq}$ , le premier indice référant à l'ordre de la fonction de Bessel et le second à l'ordre du zéro. Les premiers  $x_{nq}$  sont fournis dans l'annexe A. L'équation (1.68) est alors satisfaite si nous choisissons

$$\kappa_\rho = \frac{x_{nq}}{a} \quad (1.69)$$

où  $n = 0, 1, 2, \dots$  et  $q = 1, 2, 3, \dots$ . De même, les champs  $E_\rho$  et  $E_\phi$  doivent s'annuler aux sections transversales  $z = 0$  et  $z = d$ . Si nous supposons le référentiel au bas de la cavité, la fonction d'onde élémentaire pour les champs TM à  $z$  devient, avec  $p = 0, 1, 2, \dots$ .

$$\Psi_{npq}^{\text{TM}} = J_n\left(\frac{x_{nq}\rho}{a}\right) \begin{Bmatrix} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \quad (1.70)$$

Les mêmes conditions s'appliquent pour les champs TE par rapport à  $z$  définis par les équations (1.66). Posons  $x'_{nq}$  afin d'indiquer les zéros de  $J'_n(\kappa_\rho \rho)$ , fonction qui doit s'annuler au rayon  $a$ . La fonction d'onde en mode TE peut alors s'établir comme

$$\Psi_{npq}^{\text{TE}} = J_n\left(\frac{x'_{nq}\rho}{a}\right) \begin{cases} \sin(n\phi) \\ \cos(n\phi) \end{cases} \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right). \quad (1.71)$$

où cette fois-ci,  $p = 1, 2, 3, \dots$ .

Utilisant (1.56), les relations du nombre d'onde pour les modes TM et TE sont données respectivement par

$$\kappa^2 = \left(\frac{x_{nq}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 \quad (1.72)$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{x'_{nq}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2. \quad (1.73)$$

Prenant  $\kappa = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu}$ , nous obtenons les fréquences de résonance

$$(f_r)_{npq}^{\text{TM}} = \frac{1}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(x_{nq}\right)^2 + \left(\frac{p\pi a}{d}\right)^2} \quad (1.74)$$

$$(f_r)_{npq}^{\text{TE}} = \frac{1}{2\pi a \sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(x'_{nq}\right)^2 + \left(\frac{p\pi a}{d}\right)^2}. \quad (1.75)$$

Chaque  $n$ , excepté  $n = 0$ , dénote une paire de modes dégénérés causée par la variation du  $\cos(n\phi)$  ou du  $\sin(n\phi)$ . Un avantage important du mode TM sur le mode TE provient de son mode dominant. En effet, la première valeur de  $p$  est nulle, contrairement au mode TE. La

résonance en mode  $TM_{010}$  sera donc indépendante de la hauteur de la cavité, ce qui présente un atout majeur d'un point de vue expérimental. Nous référant aux valeurs des zéros de la fonction de Bessel de l'annexe A, nous aurons pour une cavité vide :

$$(f_r)_{010}^{TM} = \frac{x_{01}}{2\pi a \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{2.405 c}{2\pi a}. \quad (1.76)$$

La figure 1.2 présente quelques configurations de champ pour divers modes TM et TE. Ces configurations proviennent de la section circulaire d'un guide d'onde, équivalent bien sûr à la section circulaire d'une cavité. Puisque nous ne tenons pas compte de la direction en  $z$ , le patron de ces figures nécessite seulement les deux premiers indices  $n$  et  $q$ .

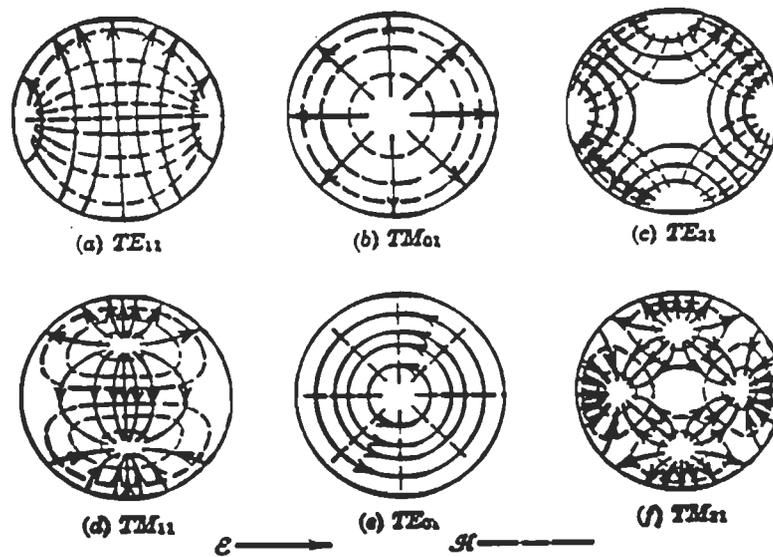


Figure 1.2- Patrons des champs électrique et magnétique de quelques modes TM et TE pour une cavité de section circulaire. Vue de la section circulaire.

# CHAPITRE 2

## LA CAVITÉ CIRCULAIRE RÉ-ENTRANTE ASYMÉTRIQUE

### 2.1 Modélisation des champs dans la cavité

La figure 2.1 nous montre la section longitudinale de notre cavité, dont les parois sont considérées comme étant parfaitement conductrices. Le choix de l'origine est arbitraire

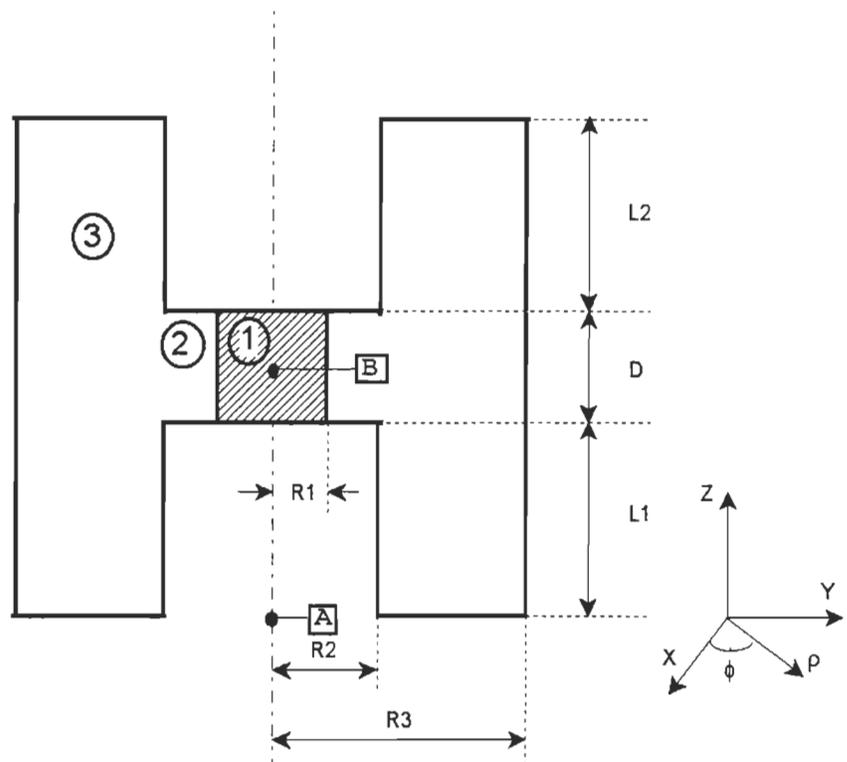


Figure 2.1- La cavité cylindrique ré-entrante de section circulaire avec un échantillon diélectrique. Vue de la section transversale.

(point A ou B par exemple), bien qu'elle doive être placée à un endroit facilitant les calculs. Trois régions différentes existent, soit  $0 < \rho < \mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_1 < \rho < \mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_2 < \rho < \mathcal{R}_3$ . Pour chacune

de ces régions, le milieu est considéré homogène. La région (1) ne sera pas un isolant parfait. Nous devons donc tenir compte de la conductivité complexe de ce milieu.

Nous allons développer notre simulation numérique sur un champ transverse magnétique ( $H_z = 0$ ) et un champ transverse électrique ( $E_z = 0$ ). Nous négligeons la présence des antennes d'émission et de réception. De même, nous considérons un mode fondamental où  $n = 0$ . Par conséquent, notre fonction d'onde est indépendante de  $\phi$ . Nous basant sur les relations (1.65) et (1.66), nous pouvons éliminer les champs  $E_\phi$  et  $H_\rho$  pour les modes TM, et les champs  $E_\rho$  et  $H_\phi$  pour les modes TE. Du même coup, nous évitons de travailler avec des modes dégénérés. Écrivons de manière générale notre fonction d'onde (1.64) pour nos trois régions, notées par  $i$ .

$$\Psi = \sum_{\kappa_p} \left\{ A_{\kappa_p}^i J_0(\kappa_p \rho) + B_{\kappa_p}^i Y_0(\kappa_p \rho) \right\} Z^i(\kappa_{iz} z). \quad (2.1)$$

Les constantes  $\kappa_{ip}$  et  $\kappa_{iz}$  sont reliés par (1.57), et  $\kappa_{iz}$  est une fonction de la variable  $p$  et de la hauteur  $h_i$  de la cavité dans la région considérée. On a ainsi

$$\kappa_{ip}^2 = -\hat{z} \hat{y} - \left( \frac{p\pi}{h_i} \right)^2. \quad (2.2)$$

Nous pouvons donc exprimer notre fonction d'onde (2.1) à l'aide d'un seul indice,

$$\Psi = \sum_{p=0}^{\infty} (\kappa_{ip})^{-1} \left\{ A_p^i J_0(\kappa_{ip} \rho) + B_p^i Y_0(\kappa_{ip} \rho) \right\} Z_p^i(z) \quad (2.3)$$

où les coefficients ont été redéfinis de manière à extraire, pour simplification ultérieure, le facteur  $(\kappa_{ip})^{-1}$ .

## 2.2 Continuité des champs en mode $TM_{0p0}$

Nous devons maintenant définir la fonction  $Z_p^i(z)$ . Celle-ci dépend de l'endroit où nous posons l'origine des axes. Lors de l'étude de la cavité circulaire, où l'origine était au bas de la cavité, nous obtenions une fonction cosinus pour le champ TM, et une fonction sinus pour le champ TE. Essayons d'abord comme origine des coordonnées, le point B.

La hauteur  $h_i$  est égale à  $\mathcal{D}$  ou  $\mathcal{L}$  selon la région concernée. Dans ce cas, la fonction  $Z_p^i(z)$  pour un mode TM devient

$$\begin{aligned}
 Z_p^i(z) &= \cos\left(\frac{p\pi}{h_i} z\right) = \cos\left(\frac{p\pi}{h_i}\left(z + \frac{h_i}{2}\right) - \frac{p\pi}{2}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{p\pi}{h_i}\left(z + \frac{h_i}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{h_i}\left(z + \frac{h_i}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \\
 &= (-1)^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{h_i}\left(z + \frac{h_i}{2}\right)\right) \quad p \text{ pair} \\
 &= -(-1)^{p/2+1/2} \sin\left(\frac{p\pi}{h_i}\left(z + \frac{h_i}{2}\right)\right) \quad p \text{ impair.}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Par contre, si nous choisissons le point A, nous obtenons pour chacune des régions,

$$\begin{aligned}
 Z_p^1(z) &= \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}}(z - \mathcal{L}_1)\right) \\
 Z_p^2(z) &= \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}}(z - \mathcal{L}_1)\right) \\
 Z_p^3(z) &= \cos\left(\frac{p\pi}{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{D} + \mathcal{L}_2)} z\right).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le choix du point A s'avère donc plus simple et pratique du point de vue de la programmation. Il nous évite des instructions logiques et l'utilisation de deux fonctions harmoniques. Mais surtout, dans le cas d'une cavité asymétrique, le centre déterminé par le point B ne serait pas le même dans la région (3) que dans la région (1) et (2).

Nous pouvons maintenant reprendre l'équation (2.2) pour chacune des trois régions en tenant compte des discussions du premier chapitre pour les substances non magnétiques :

$$\begin{aligned}
 \kappa_{1p}^2 &= -j\omega\mu_0(j\omega\hat{\epsilon} + \hat{\sigma}) - \left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}}\right)^2 \\
 \kappa_{2p}^2 &= -j\omega\mu_0(j\omega\epsilon_0) - \left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}}\right)^2 \\
 \kappa_{3p}^2 &= -j\omega\mu_0(j\omega\epsilon_0) - \left(\frac{p\pi}{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{D} + \mathcal{L}_2)}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer les conditions de continuité des champs afin d'obtenir un système matriciel de N équations homogènes à N inconnues. Les valeurs nulles du déterminant de cette matrice nous donneront les valeurs propres représentant soit la permittivité complexe, soit les fréquences des modes normaux, selon le paramètre souhaité.

La théorie de l'électromagnétisme [31] nous apprend qu'au passage entre deux milieux diélectriques, la composante normale du champ électrique subit une discontinuité, alors que la composante tangentielle est continue. Le principe inverse s'applique pour le champ magnétique.

L'analyse du mode fondamental  $n = 0$  implique l'existence de trois champs dans la cavité, soit  $H_\phi$ ,  $E_z$  et  $E_\rho$ . Nous avons donc trois conditions de continuité, mais nous allons

prouver que l'une découle des deux autres. Pour un mode  $n = 0$ , les champs  $E_\rho$  et  $E_z$  sont liés aux dérivées partielles de  $H_\phi$  par l'équation (1.9b), qui implique que

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -\hat{y}(\omega)E_\rho \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) = \hat{y}E_z. \quad (2.8)$$

Supposons l'existence de plusieurs milieux différents dans notre cavité et considérons d'une façon générale une continuité à  $\rho = \mathcal{R}_k$  pour l'équation (2.8). La question qui se pose est de savoir si la continuité de  $H_\phi$  implique celle de la dérivée de  $H_\phi$  par rapport à  $\rho$ , c'est-à-dire  $E_z$ . Supposons  $H_\phi(\rho)$  continu à  $\mathcal{R}_k$  pour tout  $z$ . La dérivée de  $H_\phi$  par rapport à  $\rho$  est essentiellement égale à  $(\Delta\rho)^{-1}\{H_\phi(\rho + \Delta\rho) - H_\phi(\rho)\}$ . Cette expression n'est pas nécessairement continue à  $\rho = \mathcal{R}_k$ . C'est donc dire que la continuité de  $H_\phi$  n'implique pas celle de  $E_z$ .

Selon l'équation (2.7),  $E_\rho$  est proportionnel à  $(\Delta z)^{-1}\{H_\phi(z + \Delta z) - H_\phi(z)\}$ . Si  $H_\phi$  est continu à  $\rho = \mathcal{R}_k$  pour tout  $z$ , alors  $H_\phi(z + \Delta z)$  est lui aussi continu, d'où l'on conclut que  $E_\rho$  est continu. Les systèmes d'équations issus des continuités de  $H_\phi$  et  $E_\rho$  produisent donc des équations équivalentes, et d'un point de vue numérique, il est préférable d'éviter ce genre de situation. Nous n'utiliserons donc que la continuité des champs  $H_\phi$  et  $E_z$  pour bâtir notre système matriciel.

Évaluons maintenant ces deux champs. De notre système d'équations (1.65) et de notre fonction d'onde (2.3), nous trouvons

$$H_\phi = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ A_p^i J_1(\kappa_{ip} \rho) + B_p^i Y_1(\kappa_{ip} \rho) \right\} Z_p^i(z) \quad (2.9)$$

$$E_z = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\kappa_{ip}}{\hat{y}_1} \left\{ A_p^i J_0(\kappa_{ip} \rho) + B_p^i Y_0(\kappa_{ip} \rho) \right\} Z_p^i(z). \quad (2.10)$$

Les contraintes sur ces champs dans la cavité sont alors les suivantes :

1) À  $\rho = 0$

Les champ  $H_\phi$  et  $E_z$  doivent être finis à  $\rho = 0$ , de sorte que  $B_p^i = 0$  pour tout  $p$  afin d'éliminer la valeur divergente de la fonction de Neumann.

2) À  $\rho = \mathcal{R}_1$

Les champs  $H_\phi$  et  $E_z$  doivent être continus à  $\rho = \mathcal{R}_1$ . Étant donné que  $Z_p^1 = Z_p^2$ , et que ces fonctions sont linéairement indépendantes, nous déterminons les relations

$$A_p^1 J_1(\kappa_{1p} \mathcal{R}_1) = A_p^2 J_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) + B_p^2 Y_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) \quad (2.11)$$

$$\frac{\kappa_{1p}}{\hat{\sigma} + j\omega \hat{\epsilon}} A_p^1 J_0(\kappa_{1p} \mathcal{R}_1) = \frac{\kappa_{2p}}{j\omega \epsilon_0} \left\{ A_p^2 J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) + B_p^2 Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) \right\}. \quad (2.12)$$

3) À  $\rho = \mathcal{R}_3$

Le champ  $E_z$  doit s'annuler à  $\rho = \mathcal{R}_3$  pour toute valeur de  $z$ . Par conséquent

$$A_p^3 J_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) + B_p^3 Y_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) = 0. \quad (2.13)$$

En redéfinissant les coefficients, les champs  $H_\phi$  et  $E_z$  dans la région (3) peuvent s'écrire comme

$$H_\phi(\rho, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \left\{ Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) J_1(k_{3p} \rho) - J_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) Y_1(k_{3p} \rho) \right\} Z_p^3(z) \quad (2.14)$$

$$E_z(\rho, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{k_{3p}}{j_3} \tilde{A}_p^3 \left\{ Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) J_0(k_{3p} \rho) - J_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) Y_0(k_{3p} \rho) \right\} Z_p^3(z). \quad (2.15)$$

4) À  $\rho = \mathcal{R}_2$

Le champ  $E_z$  doit s'annuler sur la paroi métallique et les champs  $H_\phi$  et  $E_z$  doivent être continus dans la cavité. L'annulation de  $E_z$  à la paroi et sa continuité dans la cavité nous donnent

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 k_{3p} \left\{ Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) J_0(k_{3p} \mathcal{R}_2) - J_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_2) \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{D} + \mathcal{L}_2} z\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z < \mathcal{L}_1 \quad \text{ou} \quad z > \mathcal{L}_1 + \mathcal{D} \\ \sum_{p=0}^{\infty} k_{2p} \left\{ A_p^2 J_0(k_{2p} \mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_0(k_{2p} \mathcal{R}_2) \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}} (z - \mathcal{L}_1)\right) & \text{si } \mathcal{L}_1 < z < \mathcal{L}_1 + \mathcal{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

tandis que la continuité de  $H_\phi$  nous donne

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \left\{ Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) J_1(k_{3p} \mathcal{R}_2) - J_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) Y_1(k_{3p} \mathcal{R}_2) \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{D} + \mathcal{L}_2)} z\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ A_p^2 J_1(k_{2p} \mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_1(k_{2p} \mathcal{R}_2) \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}} (z - \mathcal{L}_1)\right) \quad \text{si } \mathcal{L}_1 < z < \mathcal{L}_1 + \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous venons d'écrire nos équations de modélisation. De la condition 2, nous pouvons les simplifier en exprimant  $A_p^2$  et  $B_p^2$  en fonction de  $A_p^1$ .

$$A_p^2 = - \left[ \frac{\left( \frac{\kappa_{1p}}{\kappa_{2p}} \right) \left( \frac{j\omega\epsilon_0}{\hat{\sigma} + j\omega\hat{\epsilon}} \right) Y_1(\kappa_{2p}R_1)J_0(\kappa_{1p}R_1) - Y_0(\kappa_{2p}R_1)J_1(\kappa_{1p}R_1)}{J_1(\kappa_{2p}R_1)Y_0(\kappa_{2p}R_1) - J_0(\kappa_{2p}R_1)Y_1(\kappa_{2p}R_1)} \right] A_p^1 \quad (2.18)$$

$$B_p^2 = + \left[ \frac{\left( \frac{\kappa_{1p}}{\kappa_{2p}} \right) \left( \frac{j\omega\epsilon_0}{\hat{\sigma} + j\omega\hat{\epsilon}} \right) J_1(\kappa_{2p}R_1)J_0(\kappa_{1p}R_1) - J_0(\kappa_{2p}R_1)J_1(\kappa_{1p}R_1)}{J_1(\kappa_{2p}R_1)Y_0(\kappa_{2p}R_1) - J_0(\kappa_{2p}R_1)Y_1(\kappa_{2p}R_1)} \right] A_p^1 \quad (2.19)$$

Il est préférable de ne pas garder le dénominateur de ces deux équations sous cette forme, car dans des calculs numériques, nous risquons une division par zéro. Puisque toutes les fonctions du dénominateur ont le même argument, il est possible d'éviter ce problème en appliquant l'identité du wronskien pour les fonctions de Bessel, soit

$$J_1(z)Y_0(z) - J_0(z)Y_1(z) = J_0 Y_0' - J_0' Y_0 = \mathbf{W}\{J_0, Y_0\} = \frac{2}{\pi z} \quad (2.20)$$

Les équations de simulation pour le mode fondamental TM, en termes de  $A_p^1$  et  $\tilde{A}_p^3$ , s'expriment donc comme

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \kappa_{3p} \left\{ Y_0(\kappa_{3p}R_3)J_0(\kappa_{3p}R_2) - J_0(\kappa_{3p}R_3)Y_0(\kappa_{3p}R_2) \right\} \cos\left( \frac{p\pi}{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{D} + \mathcal{L}_2)} z \right) = 0 \quad (2.21)$$

si  $z < \mathcal{L}_1$  ou  $z > \mathcal{L}_1 + \mathcal{D}$ .

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \kappa_{3p} \left\{ Y_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) - J_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{(L_1 + \mathcal{D} + L_2)} z\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} A_p^1 \frac{\pi \mathcal{R}_1 \kappa_{2p}^2}{2} \left\{ \left( \frac{\kappa_{1p}}{\kappa_{2p}} \right) \left( \frac{j\omega \epsilon_0}{\hat{\sigma} + j\omega \hat{\epsilon}} \right) J_0(\kappa_{1p} \mathcal{R}_1) \left[ J_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) - Y_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - J_1(\kappa_{1p} \mathcal{R}_1) \left[ J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) - Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) \right] \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}} (z - L_1)\right) \\
&\quad \text{si } L_1 < z < L_1 + \mathcal{D}. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \left\{ Y_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) - J_0(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{(L_1 + \mathcal{D} + L_2)} z\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} A_p^1 \frac{\pi \mathcal{R}_1 \kappa_{2p}}{2} \left\{ \left( \frac{\kappa_{1p}}{\kappa_{2p}} \right) \left( \frac{j\omega \epsilon_0}{\hat{\sigma} + j\omega \hat{\epsilon}} \right) J_0(\kappa_{1p} \mathcal{R}_1) \left[ J_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) Y_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) - Y_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) J_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - J_1(\kappa_{1p} \mathcal{R}_1) \left[ J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) Y_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) - Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_1) J_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) \right] \right\} \cos\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}} (z - L_1)\right) \\
&\quad \text{si } L_1 < z < L_1 + \mathcal{D} \quad (2.23)
\end{aligned}$$

### 2.3 Continuité des champs en mode TE<sub>0p0</sub>

Par un cheminement analogue aux modes TM<sub>0p0</sub>, nous ne nous préoccupons que des modes fondamentaux  $n = 0$ . En vertu de (1.66), il ne reste que les champs  $E_\phi$ ,  $H_\rho$  et  $H_z$ . Il suffit de considérer les champs  $E_\phi$  et  $H_z$ , puisque les conditions de continuité de  $H_\rho$  découlent de celles de  $E_\phi$ . Recourant à la fonction d'onde (2.3), nous évaluons

$$E_\phi = - \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ A_p^i J_1(\kappa_{ip} \rho) + B_p^i Y_1(\kappa_{ip} \rho) \right\} Z_p^i(z) \quad (2.24)$$

$$H_z = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\kappa_{ip}}{\hat{z}} \left\{ A_p^i J_0(\kappa_{ip}\rho) + B_p^i Y_0(\kappa_{ip}\rho) \right\} Z_p^i(z). \quad (2.25)$$

Similairement aux modes  $TM_{0p0}$ , l'application des conditions de continuité de ces champs dans la cavité établit nos équations de simulation :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \left\{ Y_1(\kappa_{3p}\mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3p}\mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3p}\mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3p}\mathcal{R}_2) \right\} \sin\left(\frac{p\pi}{L_1 + \mathcal{D} + L_2} z\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z < L_1 \text{ ou } z > L_1 + \mathcal{D} \\ \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ A_p^2 J_1(\kappa_{2p}\mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_1(\kappa_{2p}\mathcal{R}_2) \right\} \sin\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}}(z - L_1)\right) & \text{si } L_1 < z < L_1 + \mathcal{D} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{A}_p^3 \kappa_{3p} \left\{ Y_1(\kappa_{3p}\mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3p}\mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3p}\mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3p}\mathcal{R}_2) \right\} \sin\left(\frac{p\pi}{(L_1 + \mathcal{D} + L_2)} z\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \kappa_{2p} \left\{ A_p^2 J_0(\kappa_{2p}\mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_0(\kappa_{2p}\mathcal{R}_2) \right\} \sin\left(\frac{p\pi}{\mathcal{D}}(z - L_1)\right) \text{ si } L_1 < z < L_1 + \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Exprimant  $A_p^2$  et  $B_p^2$  en terme de  $A_p^1$  et utilisant l'identité du wronskien des fonctions de Bessel (2.20), nous obtenons aisément

$$A_p^2 = -\frac{\pi \kappa_{2p} \mathcal{R}_1}{2} \left[ \left( \frac{\kappa_{1p}}{\kappa_{2p}} \right) Y_1(\kappa_{2p}\mathcal{R}_1) J_0(\kappa_{1p}\mathcal{R}_1) - Y_0(\kappa_{2p}\mathcal{R}_1) J_1(\kappa_{1p}\mathcal{R}_1) \right] A_p^1 \quad (2.28)$$

$$B_p^2 = \frac{\pi \kappa_{2p} \mathcal{R}_1}{2} \left[ \left( \frac{\kappa_{1p}}{\kappa_{2p}} \right) J_1(\kappa_{2p}\mathcal{R}_1) J_0(\kappa_{1p}\mathcal{R}_1) - J_0(\kappa_{2p}\mathcal{R}_1) J_1(\kappa_{1p}\mathcal{R}_1) \right] A_p^1. \quad (2.29)$$

Ceci complète nos relations de modélisation pour les modes  $TE_{0p0}$  sans variation angulaire.

## 2.4 Méthode point par point

Les équations de modélisation que nous venons d'établir pour les modes  $TM_{0p0}$  et  $TE_{0p0}$  constituent un système linéaire du type

$$(\mathbf{M}) \begin{pmatrix} A_p^1 \\ \tilde{A}_p^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.30)$$

Ce système a une solution non triviale si et seulement si  $\det(\mathbf{M}) = 0$ , ce qui constitue l'équation caractéristique. Deux méthodes sont proposées afin de résoudre les équations caractéristiques obtenues : une méthode point par point et une méthode intégrale. En ce qui a trait à la méthode point par point, il s'agit de tronquer les séries sur  $p$  à  $N$  termes, et de faire correspondre, une à une,  $N$  valeurs de  $z$  couvrant la hauteur de la cavité à  $N$  valeurs d'un indice  $i$ . On obtient ainsi une matrice carrée dont les lignes sont indexées par  $p$  et les colonnes par  $i$ , c'est-à-dire une matrice  $N \times N$ . Nous avons le choix de la répartition des différentes valeurs de  $z$  dans la cavité. Mais aux points  $z = L_1$  et  $z = L_1 + \mathcal{D}$  à  $\rho = \mathcal{R}_2$ , nous possédons des coins ré-entrants qui provoquent une singularité des champs. Les valeurs discrètes de  $z$  doivent, par conséquent, être assez concentrées dans cette région. Nous faisons donc face à une part d'incertitude due à la répartition des valeurs de  $z$  qui peut nous mener à une certaine imprécision sur les résonances. Celle-ci sera moindre si la matrice a une dimension assez élevée.

À cause de cette incertitude sur les valeurs recherchées pour de petites matrices, le code de cette méthode n'a pas été finalisé.

## 2.5. Méthode intégrale

L'avantage de cette démarche, par rapport à la méthode point par point, est que nous n'avons pas à nous soucier de la répartition des valeurs de  $z$  puisque nous faisons disparaître implicitement cette variable. Considérons les intégrales trigonométriques suivantes [34] :

$$\int_0^L \cos\left(\frac{s\pi}{L} z\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) dz = \frac{L}{2} \delta_{ps} (1 + \delta_{p0}) \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1}^{L_1+\mathcal{D}} \cos\left(\frac{s\pi}{\mathcal{D}} (z - L_1)\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L} z\right) dz &= f_{ps} \\ &= \frac{\mathcal{D}L}{2\pi} \left\{ \frac{1}{sL + p\mathcal{D}} - \frac{1}{sL - p\mathcal{D}} \right\} \left\{ (-1)^s \sin\left[\frac{p\pi}{L} (\mathcal{D} + L_1)\right] - \sin\left[\frac{p\pi L_1}{L}\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{s\pi}{L} z\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) dz = \frac{L}{2} \delta_{ps} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1}^{L_1+\mathcal{D}} \sin\left(\frac{s\pi}{\mathcal{D}} (z - L_1)\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L} z\right) dz &= \bar{f}_{ps} \\ &= -\frac{\mathcal{D}L}{2\pi} \left\{ \frac{1}{sL + p\mathcal{D}} + \frac{1}{sL - p\mathcal{D}} \right\} \left\{ (-1)^s \sin\left[\frac{p\pi}{L} (\mathcal{D} + L_1)\right] - \sin\left[\frac{p\pi L_1}{L}\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nous remarquons qu'à la suite d'une intégration de deux fonctions harmoniques identiques, la variable  $z$  disparaît, et des fonctions delta apparaissent. C'est ce principe que nous exploiterons afin d'obtenir de nouvelles formes des équations caractéristiques.

### 2.5.1 Équation caractéristique des modes $\text{TM}_{0p0}$

Dans l'équation (2.16), changeons p pour s, multiplions par  $\cos(p\pi z / L)$ , intégrons sur z de 0 à L et isolons le terme  $\tilde{A}_p^3$  :

$$\tilde{A}_p^3 = \left\{ \frac{L}{2} (1 + \delta_{p0}) k_{3p} \left[ Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) J_0(k_{3p} \mathcal{R}_2) - J_0(k_{3p} \mathcal{R}_3) Y_0(k_{3p} \mathcal{R}_2) \right] \right\}^{-1} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} k_{2s} f_{ps} \left\{ A_s^2 J_0(k_{2s} \mathcal{R}_2) + B_s^2 Y_0(k_{2s} \mathcal{R}_2) \right\} \quad (2.35)$$

Dans l'équation (2.17), changeons p pour q, multiplions par  $\cos(p\pi(z-L_1) / \mathcal{D})$  et intégrons sur z de  $L_1$  à  $L_1 + \mathcal{D}$ .

$$\sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q^3 \left\{ Y_0(k_{3q} \mathcal{R}_3) J_1(k_{3q} \mathcal{R}_2) - J_0(k_{3q} \mathcal{R}_3) Y_1(k_{3q} \mathcal{R}_2) \right\} \cdot f_{qp} \\ = \left\{ A_p^2 J_1(k_{2p} \mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_1(k_{2p} \mathcal{R}_2) \right\} \frac{\mathcal{D}}{2} (1 + \delta_{p0}) \quad (2.36)$$

Substituant (2.35) dans (2.36), nous obtenons notre système linéaire d'équations :

$$\left\{ A_p^2 J_1(k_{2p} \mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_1(k_{2p} \mathcal{R}_2) \right\} = \frac{2}{\mathcal{D}(1 + \delta_{p0})} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_{qp} \left\{ Y_0(k_{3q} \mathcal{R}_3) J_1(k_{3q} \mathcal{R}_2) - J_0(k_{3q} \mathcal{R}_3) Y_1(k_{3q} \mathcal{R}_2) \right\}}{\frac{L}{2} (1 + \delta_{q0}) k_{3q} \left\{ Y_0(k_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(k_{3q} \mathcal{R}_2) - J_0(k_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(k_{3q} \mathcal{R}_2) \right\}} \\ \cdot \sum_{s=0}^{\infty} k_{2s} f_{qs} \left\{ A_s^2 J_0(k_{2s} \mathcal{R}_2) + B_s^2 Y_0(k_{2s} \mathcal{R}_2) \right\} \\ = \sum_{s=0}^{\infty} G_{ps} \left\{ A_s^2 J_0(k_{2s} \mathcal{R}_2) + B_s^2 Y_0(k_{2s} \mathcal{R}_2) \right\} \quad (2.37)$$

où  $A_p^2$  et  $B_p^2$  sont définis par (2.18) et (2.19), et

$$G_{ps} = \frac{4}{\mathcal{LD}} \frac{\kappa_{2s}}{(1 + \delta_{p0})} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_{qs} f_{qp} \{Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}}{(1 + \delta_{q0}) \kappa_{3q} \{Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}} \quad (2.38)$$

Dans le cas d'une cavité vide, les nombres d'onde et les permittivités demeurent les mêmes partout, de sorte que (2.37) s'écrit simplement

$$A_p^1 J_1(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) - \sum_{s=0}^{\infty} G_{ps} A_s^1 J_0(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) = 0. \quad (2.39)$$

Sous forme matricielle, cette relation tronquée au terme  $s = N$  s'écrit comme

$$\begin{bmatrix} J_1(\kappa_{20} \mathcal{R}_2) - G_{00} J_0(\kappa_{20} \mathcal{R}_2) & -G_{01} J_0(\kappa_{21} \mathcal{R}_2) & \cdots & -G_{0N} J_0(\kappa_{2N} \mathcal{R}_2) \\ -G_{10} J_0(\kappa_{20} \mathcal{R}_2) & J_1(\kappa_{21} \mathcal{R}_2) - G_{11} J_0(\kappa_{21} \mathcal{R}_2) & \cdots & -G_{1N} J_0(\kappa_{2N} \mathcal{R}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{N0} J_0(\kappa_{20} \mathcal{R}_2) & -G_{N1} J_0(\kappa_{21} \mathcal{R}_2) & \cdots & J_1(\kappa_{2N} \mathcal{R}_2) - G_{NN} J_0(\kappa_{2N} \mathcal{R}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^1 \\ A_1^1 \\ \vdots \\ A_N^1 \end{bmatrix} = 0$$

### 2.5.2 Équation caractéristique des modes $TE_{0p0}$

Afin de construire l'équation caractéristique en mode  $TE_{0p0}$ , nous procédons par un cheminement similaire au mode  $TM_{0p0}$ . De l'équation (2.26), changeons  $p$  pour  $s$ , multiplions par  $\sin(p\pi z / \mathcal{L})$ , intégrons sur  $z$  de 0 à  $\mathcal{L}$  et isolons le terme  $\tilde{A}_p^3$ . De (2.27) changeons  $p$  pour  $q$ , multiplions par  $\sin(p\pi(z - \mathcal{L}_1) / \mathcal{D})$ , intégrons sur  $z$  de  $\mathcal{L}_1$  à  $\mathcal{L}_1 + \mathcal{D}$  et substituons  $\tilde{A}_q^3$ . Nous trouvons

$$\begin{aligned}
\{A_p^2 J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) + B_p^2 Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2)\} &= \frac{2}{\mathcal{D}\kappa_{2p}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\kappa_{3q} \bar{f}_{qp} \{Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}}{\frac{\mathcal{L}}{2} \{Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}} \\
&\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \{A_s^2 J_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) + B_s^2 Y_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2)\} \bar{f}_{qs} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{G}_{ps} \{A_s^2 J_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) + B_s^2 Y_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2)\}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

où

$$\tilde{G}_{ps} = \frac{4}{\mathcal{L}\mathcal{D}\kappa_{2p}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\kappa_{3q} \bar{f}_{qs} \bar{f}_{qp} \{Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}}{\{Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}} \tag{2.41}$$

Dans le cas d'une cavité vide, notre équation se réduit à

$$A_p^1 J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) - \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{G}_{ps} A_s^1 J_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) = 0. \tag{2.42}$$

La procédure n'est cependant pas fonctionnelle si nous conservons cette forme. En fait, la série (2.41) obtenue ici est divergente. Nous l'illustrerons au chapitre 4. Pour éviter le problème, réécrivons les relations (2.28) et (2.29) sous la forme

$$\begin{aligned}
A_p^2 &= M_p A_p^1 \\
B_p^2 &= N_p A_p^1.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

et répétons les mêmes intégrations que nous venons de faire sur les équations (2.26) et (2.27), mais sans isoler  $\tilde{A}_p^3$  :

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_p^3 \left\{ Y_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) \right\} \frac{\mathcal{L}}{2} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \{M_s J_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) + N_s Y_1(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2)\} \bar{f}_{ps} A_s^1
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q^3 \kappa_{3q} \left\{ Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) \right\} \bar{f}_{qp} \\
& = A_p^1 \kappa_{2p} \left\{ M_p J_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) + N_p Y_0(\kappa_{2p} \mathcal{R}_2) \right\} \frac{\mathcal{D}}{2}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

De (2.45), isolons  $A_s^1$  :

$$\begin{aligned}
A_s^1 & = \left[ \kappa_{2s} \left\{ M_s J_0(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) + N_s Y_0(\kappa_{2s} \mathcal{R}_2) \right\} \frac{\mathcal{D}}{2} \right]^{-1} \\
& \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{A}_q^3 \kappa_{3q} \left\{ Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) \right\} \bar{f}_{qs}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Substituons maintenant (2.46) dans (2.44), et changeons s pour q. Nous obtenons notre système linéaire en mode TE<sub>0p0</sub>, soit

$$\begin{aligned}
& \tilde{A}_p^3 \left\{ Y_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3p} \mathcal{R}_2) \right\} \\
& = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{G}_{ps} \tilde{A}_s^3 \left\{ Y_1(\kappa_{3s} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3s} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3s} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3s} \mathcal{R}_2) \right\}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\text{où } \bar{G}_{ps} = \frac{4}{L\mathcal{D}} \kappa_{3s} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_{pq} \bar{f}_{sq}}{\kappa_{2q}} \frac{M_q J_1(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2) + N_q Y_1(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2)}{M_q J_0(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2) + N_q Y_0(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2)} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
M_q & = \frac{-\pi \kappa_{2q} \mathcal{R}_1}{2} \left\{ \left( \frac{\kappa_{1q}}{\kappa_{2q}} \right) Y_1(\kappa_{2q} \mathcal{R}_1) J_0(\kappa_{1q} \mathcal{R}_1) - J_1(\kappa_{1q} \mathcal{R}_1) Y_0(\kappa_{2q} \mathcal{R}_1) \right\} \\
N_q & = \frac{\pi \kappa_{2q} \mathcal{R}_1}{2} \left\{ \left( \frac{\kappa_{1q}}{\kappa_{2q}} \right) J_0(\kappa_{1q} \mathcal{R}_1) J_1(\kappa_{2q} \mathcal{R}_1) - J_1(\kappa_{1q} \mathcal{R}_1) J_0(\kappa_{2q} \mathcal{R}_1) \right\}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

et

La série (2.48) a une forme convergente. Pour une cavité vide, nous avons  $A_p^2 = A_p^1$ ,  $B_p^2 = 0$ ,  $N_q = 0$  et  $M_q = 1$ . Le système linéaire demeure donc le même et la fonction  $\bar{G}_{ps}$  devient

$$\bar{G}_{ps} = \frac{4}{L\mathcal{D}} \kappa_{3s} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_{pq} \bar{f}_{sq}}{\kappa_{2q}} \frac{J_1(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2)}{J_0(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2)} \quad (2.50)$$

qui est aussi une forme convergente.

## 2.6 Équations caractéristiques avec arguments imaginaires

Toutes les équations décrites jusqu'à présent sont valides pour des arguments réels ou imaginaires. Pourtant, d'un point de vue numérique, des problèmes de précision se posent si nos fonctions de Bessel ont un argument imaginaire. Ces problèmes découlent du comportement asymptotique des fonctions. Afin d'éviter les erreurs numériques provenant de la soustraction de deux grands nombres voisins, il est préférable d'utiliser les fonctions de Bessel modifiées suivantes, où  $jx$  est un nombre complexe d'argument  $\pi/2$  :

$$\begin{aligned} J_n(jx) &= j^n I_n(-jx) \\ K_n(x) &= \frac{\pi}{2} j^{n+1} H_n^{(1)}(jx) \\ &= \frac{\pi}{2} j^{n+1} [J_n(jx) + jY_n(jx)] \\ Y_n(jx) &= -\frac{2}{\pi} j^n K_n(x) + j^{n+1} I_n(x). \end{aligned} \quad (2.51)$$

En particulier, les rapports des fonctions de Bessel dans les fonctions  $G_{ps}$  définies par (2.38) pour le mode  $TM_{0p0}$ , et par (2.48) et (2.50) pour le mode  $TE_{0p0}$  deviennent respectivement

$$\begin{aligned}
R &= j \left\{ \frac{K_0(x)I_1(y) + I_0(x)K_1(y)}{K_0(x)I_0(y) - I_0(x)K_0(y)} \right\} \\
R &= j \frac{\left( \frac{\kappa_{1q}}{\kappa_{2q}} \right) I_0(z) \{ I_1(v)K_1(w) - I_1(w)K_1(v) \} + I_1(z) \{ I_1(v)K_0(w) + I_0(w)K_1(v) \}}{\left( \frac{\kappa_{1q}}{\kappa_{2q}} \right) I_0(z) \{ I_0(v)K_1(w) + I_1(w)K_0(v) \} + I_1(z) \{ I_0(v)K_0(w) - I_0(w)K_0(v) \}} \\
R &= j \frac{I_1(v)}{I_0(v)} \tag{2.52}
\end{aligned}$$

où  $x = \text{Im}(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3)$ ,  $y = \text{Im}(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)$ ,  $z = \text{Im}(\kappa_{4q} \mathcal{R}_1)$ ,  $v = \text{Im}(\kappa_{2q} \mathcal{R}_2)$  et  $w = \text{Im}(\kappa_{2q} \mathcal{R}_1)$ .

Au chapitre 3, nous expliquons la méthode servant à construire les fonctions de Bessel.

## 2.7 Équations caractéristiques avec arguments complexes

Lorsque nous traitons les nombres complexes, nous utilisons encore les fonctions de Bessel modifiées. Pour de petits arguments, les fonctions de Bessel ordinaires sont aussi précises que les fonctions de Bessel modifiées, mais elles perdent leur exactitude pour de grands arguments. Lorsque les arguments deviennent très grands, même les fonctions de Bessel modifiées perdent de la précision à cause de la partie imaginaire. Une façon de contourner le problème serait de considérer l'identité de Schläfli [36],

$$\begin{aligned}
J_n(x + jy) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(jy) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) j^{n-m} I_{n-m}(y) \tag{2.53}
\end{aligned}$$

En utilisant le lien entre la fonction de Neumann et la fonction de Bessel de première espèce, on obtient

$$Y_n(x + jy) = \left[ \frac{\cos n\pi - (-1)^{-n}}{\sin n\pi} \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) j^{n-m} I_{n-m}(y). \quad (2.54)$$

Il suffit par la suite de s'assurer de la convergence des termes dans la sommation. Étant donné les dimensions de notre cavité, sujet traité au chapitre 4, nous n'aurons pas à nous soucier de cette transformation, mais le cas advenant, il était nécessaire de le préciser.

## 2.8 Modes hybrides

Bien que ces modes ne soient pas programmés, il est utile de souligner leur importance. En effet, les différents champs à l'intérieur d'une cavité peuvent être entièrement décrits avec les modes transverses électriques et magnétiques sans variation angulaire,  $TM_{0pq}$  et  $TE_{0pq}$ , et les modes hybrides avec variation angulaire,  $HE_{mpq}$  [8], [35]. Avec ces modes, il est possible d'expliquer toutes les fréquences de résonance d'une cavité, peu importe sa géométrie.

Avant de déterminer les modes hybrides, nous allons rappeler le calcul des modes TE et TM fondamentaux. Lors de la construction de ceux-ci, l'un des potentiels vecteurs était nul et l'autre selon l'axe z. Fixons ces potentiels comme

$$\vec{A} = \hat{u}_z \Psi^a \quad \vec{F} = \hat{u}_z \Psi^f \quad (2.55)$$

où les indices a et f distinguent les fonctions d'onde des modes TM et TE. Nous référant aux équations (1.65) et (1.66), nous avons pour les modes TM

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \Psi^a}{\partial \rho \partial z} & \mathcal{H}_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^a}{\partial \phi} \\
\mathcal{E}_\phi &= \frac{1}{\hat{y} \rho} \frac{\partial^2 \Psi^a}{\partial \phi \partial z} & \mathcal{H}_\phi &= -\frac{\partial \Psi^a}{\partial \rho} \\
\mathcal{E}_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \Psi^a & \mathcal{H}_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.56}$$

et pour les modes TE

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^f}{\partial \phi} & \mathcal{H}_\rho &= \frac{1}{\hat{z}} \frac{\partial^2 \Psi^f}{\partial \rho \partial z} \\
\mathcal{E}_\phi &= \frac{\partial \Psi^f}{\partial \rho} & \mathcal{H}_\phi &= \frac{1}{\hat{z} \rho} \frac{\partial^2 \Psi^f}{\partial \phi \partial z} \\
\mathcal{E}_z &= 0 & \mathcal{H}_z &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \Psi^f.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Si nous voulons exprimer un champ arbitraire, il nous faut les relations les plus générales. Notre référentiel étant au bas de la cavité, les fonctions d'onde s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\Psi^{\text{TM}} = \Psi^a &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \hat{A}_{p,n}^i J_n(\kappa_\rho \rho) + \hat{B}_{p,n}^i Y_n(\kappa_\rho \rho) \right\} \left\{ \hat{C}_{p,n}^i \cos n\phi + \hat{D}_{p,n}^i \sin n\phi \right\} \cos(\kappa_{iz} z) \\
\Psi^{\text{TE}} = \Psi^f &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \hat{A}_{p,n}^i J_n(\kappa_\rho \rho) + \hat{B}_{p,n}^i Y_n(\kappa_\rho \rho) \right\} \left\{ \hat{C}_{p,n}^i \cos n\phi + \hat{D}_{p,n}^i \sin n\phi \right\} \sin(\kappa_{iz} z)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Pour obtenir les modes hybrides [37], il s'agit de superposer (2.56) et (2.57) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho &= \frac{1}{\hat{y}} \frac{\partial^2 \Psi^a}{\partial \rho \partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^f}{\partial \phi} & \mathcal{H}_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi^a}{\partial \phi} + \frac{1}{\hat{z}} \frac{\partial^2 \Psi^f}{\partial \rho \partial z} \\
\mathcal{E}_\phi &= \frac{1}{\hat{y} \rho} \frac{\partial^2 \Psi^a}{\partial \phi \partial z} + \frac{\partial \Psi^f}{\partial \rho} & \mathcal{H}_\phi &= -\frac{\partial \Psi^a}{\partial \rho} + \frac{1}{\hat{z} \rho} \frac{\partial^2 \Psi^f}{\partial \phi \partial z} \\
\mathcal{E}_z &= \frac{1}{\hat{y}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \Psi^a & \mathcal{H}_z &= \frac{1}{\hat{z}} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \kappa^2 \right) \Psi^f
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Afin d'élaborer l'équation caractéristique de ces modes, il nous faut encore appliquer les conditions de continuité des champs à l'intérieur de la cavité comme il a été fait pour les modes  $TE_{0p0}$  et  $TM_{0p0}$ . La connaissance de toutes les résonances de notre cavité dépassant le cadre de ce travail, ces modes n'ont pas été codés.

# CHAPITRE 3

## ÉLABORATION DU CODE

### 3.1 Construction des fonctions de Bessel

Avant d'expliquer l'algorithme du code en question, il est important de préciser la façon de bâtir toutes les fonctions de Bessel qui constituent le cœur de nos équations caractéristiques. Les fonctions de Bessel et fonctions de Bessel modifiées proposées par Press et al. [40] ne sont précises qu'à 8 décimales. La précision des valeurs propres de la matrice sera donc à questionner si cette dernière a une dimension assez élevée. Puisque le compilateur utilisé peut accepter des valeurs jusqu'à la seizième décimale, nous avons élaboré nos propres routines de fonctions de Bessel pour atteindre cette précision. Les valeurs numériques ont été vérifiées avec celles qui sont tabulées dans Abramowitz [38].

La façon de construire ces fonctions ne consiste pas seulement à développer une série de Taylor. Pour un argument assez élevé, nous aurions à prendre beaucoup trop de termes pour atteindre la convergence, et le calcul serait trop long. La procédure consiste plutôt à considérer la forme en série pour de petits arguments, et la représentation asymptotique pour les grands arguments [39]. En effet, cette dernière nous permet de converger plus rapidement que la série de Taylor. Cependant, il s'avère nécessaire de déterminer le nombre de termes dans la sommation, car cette représentation converge jusqu'à un certain point, et diverge par la suite. De même, nous devons déterminer à quelle valeur d'argument il est possible d'adopter une forme ou l'autre au moyen d'une série de tests numériques. Pour consulter ces valeurs, il suffit de se référer directement au code, ce dernier étant commenté amplement.

Les pages suivantes affichent, pour chacune des fonctions de Bessel utilisées dans le programme, la forme sérielle et asymptotique.

### 3.1.1 Fonction de Bessel de première espèce :

- Développement en série :

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad |z| < \infty \quad (3.1)$$

- Forme asymptotique :

$$J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (n, 2k)(2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right] \\ - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (n, 2k+1)(2z)^{-2k-1} + O(|z|^{-2n-3}) \right] \quad (3.2)$$

$|\arg z| \leq \pi - \delta$

### 3.1.2 Fonction de Bessel de deuxième espèce :

- Développement en série :

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \cdot \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\Psi(k+1) + \Psi(k+n+1)] \quad (3.3)$$

- Forme asymptotique :

$$Y_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (n, 2k+1)(2z)^{-2k-1} + O(|z|^{-2n-3}) \right] \\ + \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (n, 2k)(2z)^{-2k} + O(|z|^{-2n-2}) \right] \quad (3.4)$$

### 3.1.3 Fonction de Bessel modifiée de première espèce :

- Développement en série :

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \quad |z| < \infty \quad |\arg z| < \pi \quad (3.5)$$

- Forme asymptotique :

$$I_n(z) = e^z (2\pi z)^{-1/2} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (n, k)(2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right] \\ + e^{-z \pm \pi i(n+1/2)} (2\pi z)^{-1/2} \left[ \sum_{k=0}^n (n, k)(2z)^{-2k} + O(|z|^{-n-1}) \right] \quad (3.6) \\ |\arg z| < \pi - \delta$$

où nous choisissons le signe plus si  $\text{Im } z > 0$  et le signe moins si  $\text{Im } z < 0$ . Le second terme de cette équation est très petit si  $|\arg z| < \pi/2 - \delta$ , et par conséquent nous obtenons :

$$I_n(z) = e^z (2\pi z)^{-1/2} \left[ \sum_{k=0}^n (-1)^k (n, k)(2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right] \quad (3.7)$$

$$|\arg z| < \pi/2 - \delta$$

### 3.1.4 Fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce :

- Développement en série :

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{2} (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left[ 2 \cdot \log \frac{z}{2} - \Psi(k+1) - \Psi(k+n+1) \right] \quad (3.8)$$

$$|\arg z| < \pi$$

- Forme asymptotique :

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[ \sum_{k=0}^n (n,k) (2z)^{-k} + O(|z|^{-n-1}) \right] \quad (3.9)$$

$$|\arg z| < \pi - \delta$$

Nous avons introduit la notation suivante :

$$(n,0) = 1$$

$$(n,k) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{2} - n\right)_k \left(\frac{1}{2} + n\right)_k = \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2) \dots (4n^2 - (2k-1)^2)}{2^{2k} k!} \quad (3.10)$$

$$\Psi(1) = -\gamma$$

$$\Psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \quad (3.11)$$

Ici  $\gamma = 0.57721566\dots$  est la constante de Euler,  $m = 1, 2, \dots$  ;  $n = 0, 1, \dots$ , et  $\delta$  est un petit nombre positif arbitraire. Soulignons que les fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèce sont proportionnelles aux exponentielles de leur argument, lequel est positif pour la première espèce, et négatif pour la deuxième espèce. Lorsque nous rencontrons une situation telle que ces deux fonctions possèdent le même argument et

qu'elles se multiplient, il est préférable d'éliminer les termes exponentiels, ce qui nous évite de travailler avec des chiffres énormes.

### 3.2 Méthode de Newton-Raphson

#### 3.2.1 Concepts de base

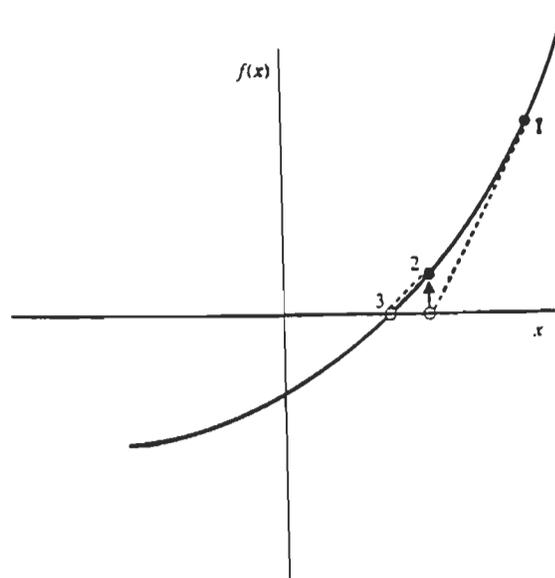
La méthode de Newton-Raphson est l'une des démarches les plus utilisées pour trouver les racines d'une fonction [40]. Algébriquement, elle consiste à considérer le développement de Taylor tronqué au second ordre. Traitons d'abord le cas unidimensionnel. La série de Taylor s'écrit

$$f(x + \delta) \approx f(x) + f'(x)\delta + \frac{f''(x)}{2}\delta^2 + \dots \quad (3.12)$$

où  $\delta$  est une variation telle que  $f(x + \delta) = 0$ . Pour une petite valeur de  $\delta$ , les termes d'ordre plus élevé sont négligeables, ce qui implique

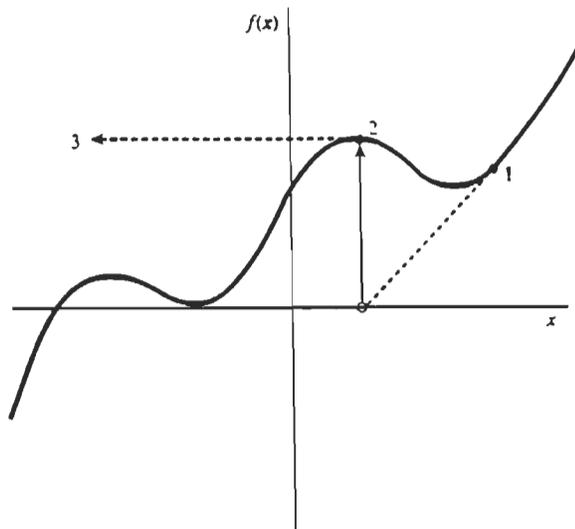
$$\delta = -\frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (3.13)$$

La méthode de Newton-Raphson requiert donc la connaissance de deux fonctions, soit  $f(x)$  et sa dérivée  $f'(x)$ , où  $x$  est un point arbitraire, afin de connaître la variation qui détermine la racine. Géométriquement, cette formulation consiste à prendre la tangente à un point  $x_i$  jusqu'à ce qu'elle croise zéro en un point  $x_{i+1}$  de l'abscisse. On peut ensuite reprendre une tangente en ce dernier point et continuer le processus jusqu'à une précision souhaitée de  $\delta$ . Ce principe est décrit à la figure 3.1. Si notre première valeur  $x_i$  est loin d'un zéro, la valeur de  $\delta$  sera plus grande, et les termes d'ordre plus élevés prendront de l'importance. En conséquence, le calcul sera un peu plus long.

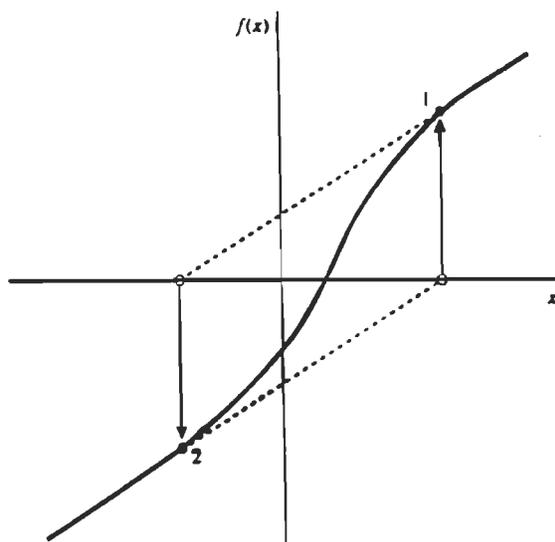


**Figure 3.1** La méthode de Newton-Raphson extrapole la dérivée locale pour estimer la racine.  
Figure tirée de Press et al. [40].

Cette technique comporte malgré tout des désavantages. Tel est le cas, par exemple, si une fonction présente des minimums ou des maximums comme l'indique la figure 3.2, ou encore si elle possède un comportement empêchant la convergence comme à la figure 3.3.



**Figure 3.2** Situation non fonctionnelle de la méthode de Newton-Raphson lors d'un passage à un maximum (ou un minimum) d'une fonction. Press et al. [40].



**Figure 3.3** Situation où la méthode de Newton-Raphson entre dans un cycle de non-convergence. Avec une meilleure valeur de départ, la méthode peut devenir fonctionnelle. Press et al. [40].

À part ces circonstances, la méthode de Newton-Raphson s'avère très puissante. La raison est la rapidité de sa convergence, qui ne se compare en rien à d'autres méthodes telles la dichotomie ou la méthode des sécantes. En effet, près de la racine, le nombre de chiffres significatifs double approximativement à chaque incrément. Cette propriété de convergence très forte fait de Newton-Raphson une méthode de choix pour des fonctions dont la dérivée peut être évaluée efficacement.

Afin d'évaluer la dérivée de la fonction, il est possible d'utiliser l'approximation de la dérivée par une différence finie,

$$f'(x) \approx \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}. \quad (3.17)$$

Cependant cette procédure comporte des inconvénients, qui, dans certaines circonstances, peuvent être majeurs. Un de ceux-ci provient de l'erreur d'arrondissement sur la grandeur de

$d\chi$ , qui ne doit être ni trop grand ni trop petit. Certaines procédures existent afin d'optimiser la valeur de  $d\chi$  après chaque itération. Elles peuvent être à la fois assez complexes et limitées. Nous avons plutôt testé, par essais et erreurs, plusieurs valeurs afin de déterminer la variation  $d\chi$  optimale. Une autre source d'erreurs découle de l'approximation de la dérivée. Puisque la série de Taylor est tronquée, nous négligeons les termes d'ordre plus élevé, soit :

$$\frac{f(x + d\chi) - f(x)}{d\chi} = f'(x) + \frac{1}{2} d\chi f''(x) + \dots \quad (3.18)$$

L'erreur sur la série de Taylor tronquée sera moindre si on utilise la forme symétrique de la dérivée :

$$f'(x) \approx \frac{f(x + d\chi) - f(x - d\chi)}{2d\chi} \quad (3.19)$$

La preuve de la diminution de l'erreur de troncation par le biais de l'équation (3.19), ainsi que l'optimisation de  $d\chi$  dans une procédure sont bien discutées dans Press et al. [40], au chapitre traitant les différences finies.

La prudence est donc de mise lorsque nous utilisons des approximations avec des calculs aux différences finies. Habituellement, la détermination de racines en une dimension est dominée par la méthode des sécantes, qui n'exige pas la connaissance de la dérivée d'une fonction. Mais dans le cas multidimensionnel, où il y a peu de méthodes disponibles, la méthode de Newton-Raphson avec ses dérivées numériques doit être considérée avec attention.

Généralisons maintenant cette méthode pour un système de fonctions à plusieurs variables,

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Représentons une première approximation de la solution exacte par le vecteur

$$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})
 \tag{3.25}$$

et la solution exacte par le vecteur

$$\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})
 \tag{3.26}$$

La série de Taylor tronquée au second ordre permet d'écrire

$$f_i(\mathbf{x}^{(1)}) = f_i(\mathbf{x}^{(0)}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_j^{(1)} - x_j^{(0)})
 \tag{3.28}$$

Une solution exacte permet aux termes de gauche de (3.28) de s'annuler. Sous forme matricielle, où la matrice des dérivées partielles est simplement le jacobien, le système s'exprime par

$$\begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right]_{x=x^{(0)}} & \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right]_{x=x^{(0)}} & \dots & \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right]_{x=x^{(0)}} \\ \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right]_{x=x^{(0)}} & \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right]_{x=x^{(0)}} & \dots & \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right]_{x=x^{(0)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right]_{x=x^{(0)}} & \left[ \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \right]_{x=x^{(0)}} & \dots & \left[ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right]_{x=x^{(0)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \\ x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} - x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(x^{(0)}) \\ -f_2(x^{(0)}) \\ \vdots \\ -f_n(x^{(0)}) \end{bmatrix}$$

La résolution d'un tel système permet, à la  $i$ ème itération, de calculer  $x^{(i)}$  à partir de  $x^{(i-1)}$ .

### 3.2.2 Résolution numérique des équations caractéristiques $f(\epsilon, \omega) = 0$ par la méthode de Newton-Raphson

Au chapitre 2, nous avons construit un système linéaires aux valeurs propres, obtenant la matrice des coefficients de  $A_p^1$  définie par (2.37). Nous cherchons les valeurs numériques de la fréquence ou de la permittivité qui font que le déterminant de cette matrice s'annule, ce qui constitue l'équation caractéristique. Il y a donc deux cas : la permittivité complexe de l'échantillon est connue et l'équation caractéristique donne la fréquence de résonance complexe de la cavité contenant l'échantillon, ou la fréquence de résonance complexe de la cavité avec l'échantillon est connue et l'équation caractéristique donne la permittivité complexe de l'échantillon.

Pour commencer, il est essentiel de déterminer les fréquences de résonance de la cavité vide, grâce à son équation caractéristique (2.37) ou (2.47) selon le mode concerné. Sachant que la permittivité relative est l'unité partout à l'intérieur de la cavité, nous varions la fréquence dans un certain domaine de la bande micro-onde. Pour chacune de ces fréquences, nous calculons le déterminant de la matrice, et lorsque celui-ci est près de zéro, i.e. lorsqu'il se présente un changement de signe, nous identifions la résonance. Cette première étape

constitue une recherche grossière de la fréquence. À ce stade, il est possible de continuer à trouver les changements de signe en divisant le domaine de recherche des zéros par deux, et ainsi de suite ; c'est la méthode de dichotomie [40], plus communément appelée méthode de bisection. Cette technique est très efficace, et habituellement, après une vingtaine d'itérations, nous obtenons au moins une précision d'une dizaine de décimales.

Malheureusement, cette méthode se restreint aux valeurs réelles. Elle peut donc être valide pour la cavité vide, mais lors du traitement d'échantillons avec pertes diélectriques, elle n'est plus utile puisque nous passons dans le plan complexe. Afin de raffiner notre précision, nous utilisons la méthode de Newton-Raphson décrite auparavant. Soit  $\omega_a$  une fréquence telle que le déterminant de la matrice des coefficients  $A_p^1$  soit près de zéro,  $f(\omega_a) \approx 0$  ; nous cherchons une variation  $\delta\omega$  telle que  $f(\omega_a + \delta\omega) = 0$ . On détermine alors notre incrément selon la relation (3.13), soit pour notre situation

$$\delta\omega = -\frac{f(\omega_a)}{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\omega_a}} \quad \text{où} \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{1}{2\Delta\omega} \left\{ f(\omega + \Delta\omega, \varepsilon) - f(\omega - \Delta\omega, \varepsilon) \right\} \quad (3.30)$$

Ayant obtenu une valeur améliorée  $\omega_a \rightarrow \omega_a + \delta\omega$ , nous poursuivons le calcul itératif. Nous obtenons la fréquence de résonance lorsque l'écart  $\delta\omega$  ne varie presque plus à une précision souhaitée.

Ayant déterminé la fréquence d'excitation de la cavité vide, nous appliquons à nouveau la méthode de Newton-Raphson afin de trouver la permittivité complexe de la substance ou la fréquence complexe de la cavité. Pour le premier cas, il s'agit de diviser l'intervalle entre la fréquence de la cavité vide et la fréquence complexe expérimentale en  $N$  sous-intervalles. Posant  $\omega^0 = \omega_{\text{vide}}$ ,  $\omega^N = \omega_{\text{exp}}$ ,  $\varepsilon^0 = 1$  et sachant que  $f(\omega^0, \varepsilon^0) = 0$ , nous partons de  $\omega^{i+1}$  pour trouver  $\varepsilon^{i+1}$  telle que  $f(\omega^{i+1}, \varepsilon^{i+1}) = 0$ . Ainsi, la permittivité complexe de

la substance est déterminée selon l'équation (3.28), où  $f(x + \delta x) = f(x^{(1)})$  s'annule pour une solution exacte :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i+1} &= \varepsilon^i + (\omega^{i+1} - \omega^i) \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) \\ &= \varepsilon^i - (\omega^{i+1} - \omega^i) \left( \frac{\partial f}{\partial \omega} \right)_{\omega^i} \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon^i}^{-1}\end{aligned}\quad (3.31)$$

L'obtention de la fréquence complexe de la cavité s'obtient de la même manière. Il suffit cette fois de diviser l'intervalle entre la permittivité du vide et celle de l'échantillon, en  $N$  sous-intervalles. La relation de récurrence se traduit alors par :

$$\omega^{i+1} = \omega^i - (\varepsilon^{i+1} - \varepsilon^i) \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon^i} \left( \frac{\partial f}{\partial \omega} \right)_{\omega^i}^{-1}\quad (3.32)$$

où nous prenons le soin d'adopter la forme symétrique de la dérivée aux différences finies,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \omega} &= \frac{1}{2\Delta\omega} \{f(\omega + \Delta\omega, \varepsilon) - f(\omega - \Delta\omega, \varepsilon)\} \\ \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} &= \frac{1}{2\Delta\varepsilon} \{f(\omega, \varepsilon + \Delta\varepsilon) - f(\omega, \varepsilon - \Delta\varepsilon)\}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Nos valeurs de  $\Delta\omega$  et  $\Delta\varepsilon$  doivent être choisies avec attention, comme il a été mentionné à la partie 3.2 (a). La routine d'optimisation n'a pas été construite, mais une série de tests numériques nous a suggéré des variations de l'ordre du dix-millième par rapport aux valeurs de fréquences et de permittivités. Malgré le fait que  $\omega$  et  $\varepsilon$  soient complexes, les variations  $\Delta\omega$  et  $\Delta\varepsilon$  peuvent être réelles puisque la dérivée d'une fonction analytique dans le plan complexe est la même quelle que soit la direction choisie.

L'étape précédente permet d'obtenir une valeur approximative de la racine cherchée. Par la suite, nous appliquons encore la méthode de Newton-Raphson suivant les équations (3.30) pour atteindre le zéro à la précision voulue. Plus cette valeur approximative se rapproche de la solution exacte, plus la convergence est rapide.

### 3.3 Explication du code

Soulignons immédiatement que les différents paramètres nommés dans ce sous-chapitre se rapportent à notre programme informatique. En premier lieu, il s'agit de lire les dimensions de notre cavité, soit  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{L}_2$  comme décrit à la figure 3.4. Ensuite, nous définissons la valeur de la conductivité de l'échantillon (CSIGMA) ainsi que la dimension de la matrice caractéristique (NS). Nous avons le choix du calcul de la permittivité à partir de la fréquence ou de la fréquence à partir de la permittivité (NFE). Le choix des modes TE ou TM définit la variable NT.

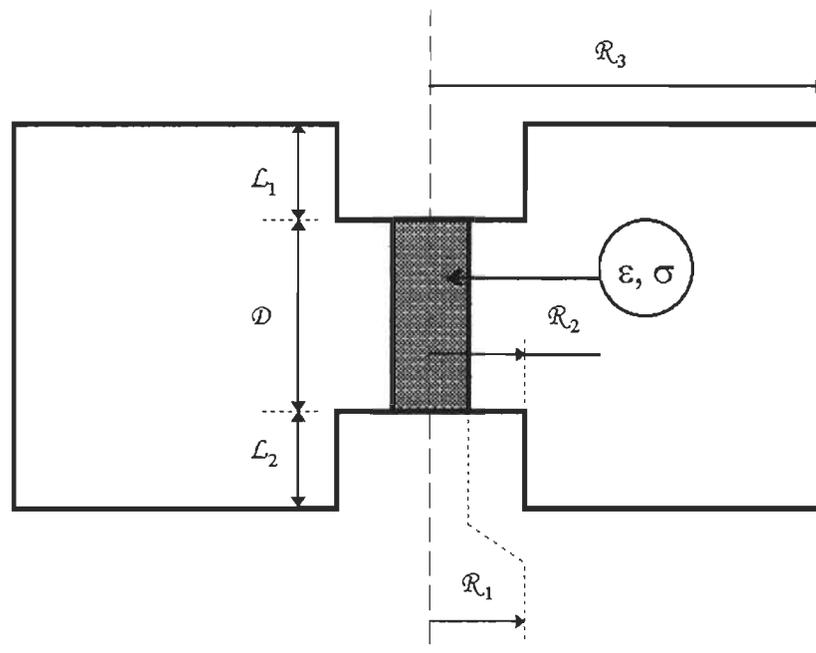


Figure 3.4 Paramètres reliés à la cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique.

Une fois ces paramètres choisis, nous calculons la fréquence de résonance de la cavité vide à l'aide de la procédure FRCVINT. Dans cette procédure, la fréquence est divisée en un nombre d'intervalles pour un domaine respectif (soit entre WMIN et WMAX). Pour chacun de ces intervalles, nous évaluons le déterminant de la matrice (2.37) ou (2.47), ces éléments étant calculés dans les routines ELEMAT ou ELEMAT3 selon le choix des modes TM ou TE respectivement. Les zéros sont estimés approximativement par les changements de signe du déterminant.

Ayant choisi une excitation approximative, nous raffinons notre calcul à une précision souhaitée (variable CDELTAW) dans la procédure NWINTVID. Cette routine applique la méthode de Newton-Raphson. Il s'agit simplement du code de l'équation (3.30), où CPW est la variation infinitésimale de la fréquence contenue dans la définition de la dérivée.

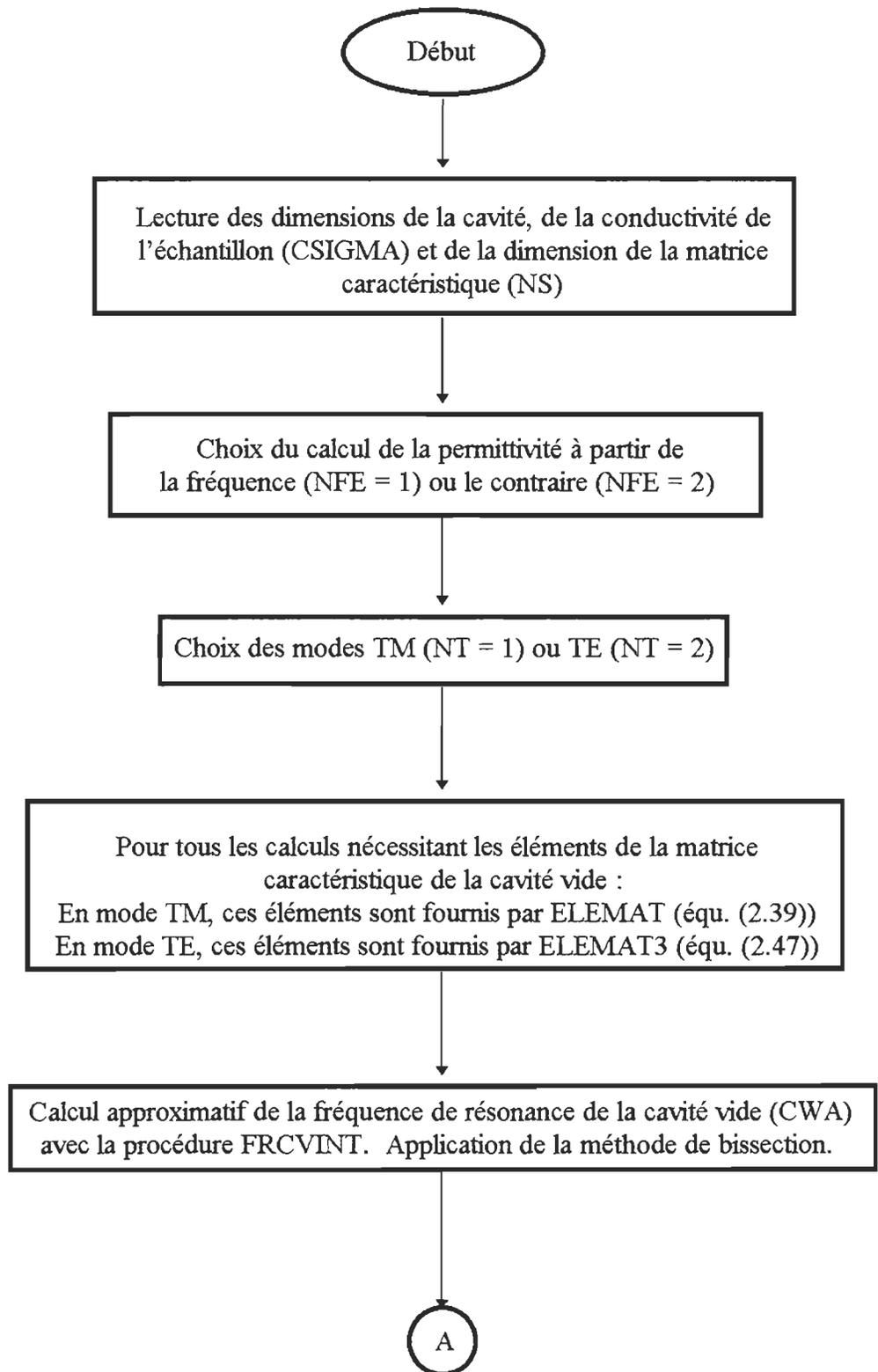
La résonance de la cavité vide étant connue de façon précise, nous pouvons calculer la permittivité complexe de l'échantillon si la fréquence complexe CWE est connue (sous-routine NWINTDIE), ou la fréquence complexe si la permittivité complexe CPE est connue (sous-routine NWINTFRQ). Ces deux dernières procédures appliquent encore une fois la méthode de Newton-Raphson comme décrite par les équations (3.31) et (3.32) respectivement. La variable CPEPS définit la variation infinitésimale de la permittivité. De plus amples détails sont fournis par l'organigramme (p. 66), et un organigramme très détaillé est présenté en annexe C.

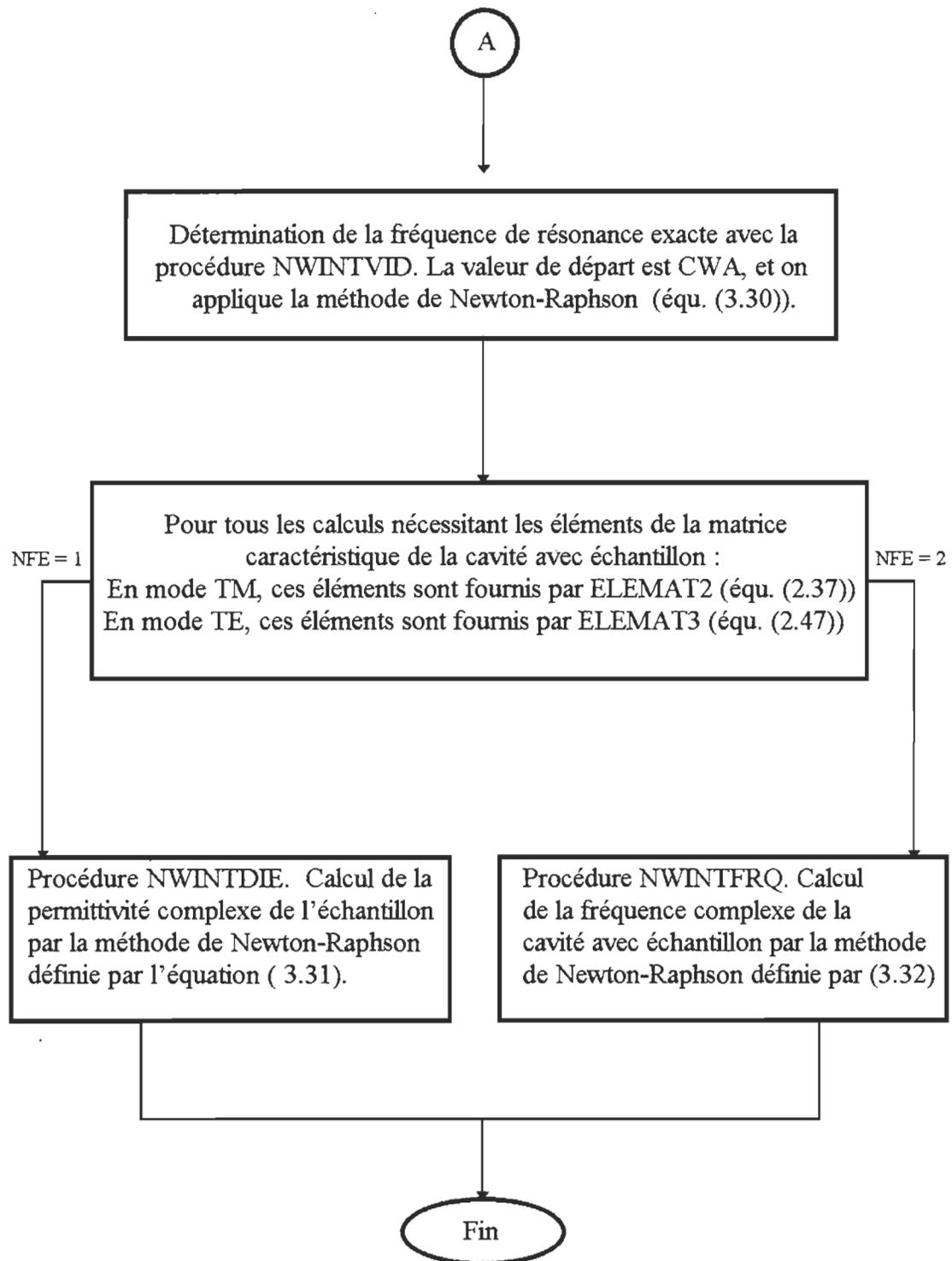
### **3.3.1 Liste des variables du code Fortran**

R1 :	rayon de l'échantillon
R2 :	rayon de la cavité
R3 :	rayon de la cavité ré-entrante (figure 3.4)
L1 :	hauteur du premier coin ré-entrant

D :	hauteur de l'échantillon
L2 :	distance entre le deuxième coin ré-entrant et le dessus de la cavité
CSIGMA :	conductivité de l'échantillon
NS :	dimension de la matrice caractéristique
NFE :	choix du calcul de la permittivité à partir de la fréquence ou le contraire
NT :	choix des modes $TM_{0p0}$ ou $TE_{0p0}$
WMIN :	fréquence minimum de la cavité vide
WMAX :	fréquence maximum de la cavité vide
DW :	pas de la fréquence entre WMIN et WMAX
NINC :	nombre d'itérations entre WMIN et WMAX (valeur entière)
CWA :	fréquence de résonance de la cavité vide
CPW :	variation infinitésimale dans la définition de la dérivée pour la fréquence
CDELTAW :	convergence de la fréquence CWA par la méthode de Newton-Raphson
CWVIDE :	résonance de la cavité vide par la méthode de Newton-Raphson
CPEPS :	variation infinitésimale dans la définition de la dérivée pour la permittivité
CWE :	fréquence de résonance de la cavité avec échantillon mesurée en laboratoire
NN1 :	nombre d'itérations entre CWE et CWA
CINTERW :	pas de la fréquence entre CWE et CWA
CEPS :	permittivité de l'échantillon
CEPSE :	permittivité de l'échantillon mesurée expérimentalement
CEPS0 :	permittivité du vide
CINTEREPS :	pas de la permittivité entre CEPSE et CEPS0

### 3.3.2 Organigramme





**Figure 3.5-** Organigramme simplifié du programme qui résout les équations caractéristiques des modes  $TM_{0p0}$  et  $TE_{0p0}$  d'une cavité ré-entrante contenant un diélectrique.

# CHAPITRE 4

## RÉSULTATS

### 4.1 Résonances de la cavité vide

Notre première série de tests numériques est effectuée sur une cavité vide. Il s'agit de calculer quelques fréquences de résonance fondamentales pour les modes normaux TE et TM. Les dimensions de notre cavité sont indiquées à la figure 4.1.

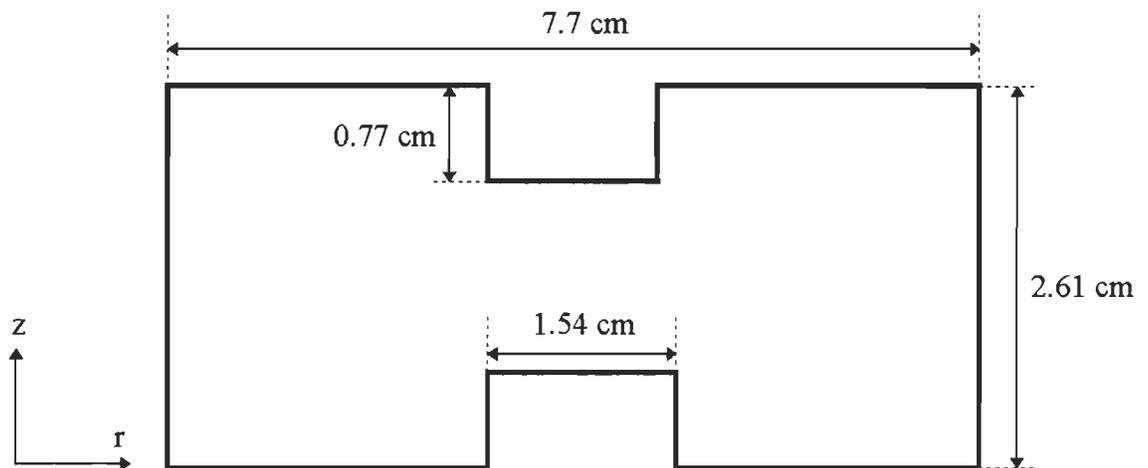


Figure 4.1- Dimensions de la cavité ré-entrante. Vue de la section transversale.

Nous pouvons estimer un ordre de grandeur de ces fréquences en tenant compte des dimensions de la cavité. Utilisant la relation (1.77), et considérant deux cylindres conventionnels de rayon 0.77 cm et 3.85 cm, la fréquence du mode TM fondamental est comprise entre 3 GHz et 15 GHz. Évidemment, ces valeurs sont très qualitatives, mais elles nous situent malgré tout le domaine des hyperfréquences.

### 4.1.1 Mode $TM_{0p0}$

Avant tout, il est primordial de s'assurer de la convergence de la relation (2.38). Il est inutile d'analyser toute la fonction, les termes sinusoidaux et la fonction delta pouvant être omis. La convergence est assurée par le rapport des combinaisons des fonctions de Bessel, soit la relation

$$F_q(Y, J) = \frac{1}{\kappa_{3q}} \frac{Y_0(\kappa_{3q} R_3) J_1(\kappa_{3q} R_2) - J_0(\kappa_{3q} R_3) Y_1(\kappa_{3q} R_2)}{Y_0(\kappa_{3q} R_3) J_0(\kappa_{3q} R_2) - J_0(\kappa_{3q} R_3) Y_0(\kappa_{3q} R_2)}. \quad (4.1)$$

Les graphiques des figures 4.2 et 4.3 représentent la valeur de  $F_q(Y, J)$  en fonction de  $q$ , et cela, pour diverses fréquences données. Nous constatons que plus la fréquence augmente, plus il faut de termes afin d'atteindre l'asymptote (située à zéro). Toutefois une dizaine de points sont suffisants à l'atteinte de la convergence si nous nous limitons à la région micro-onde.

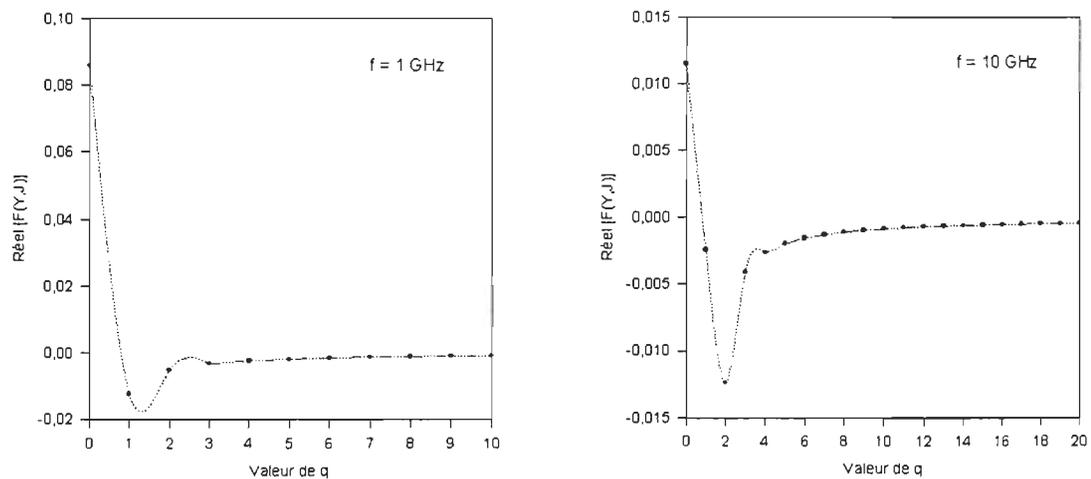
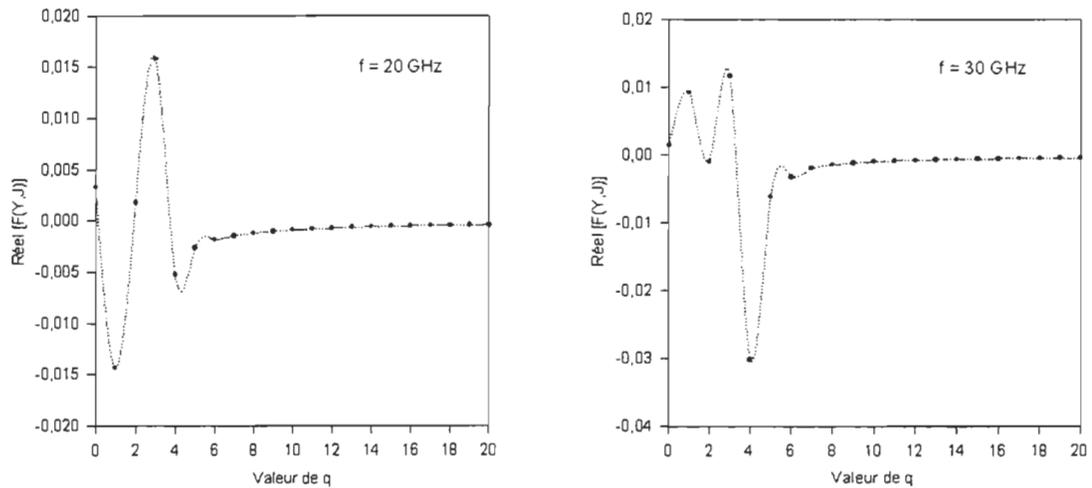


Figure 4.2- Convergence de la relation (4.1) du mode  $TM_{0p0}$  en fonction de la valeur de  $q$  pour les fréquences de 1 GHz et 10 GHz.



**Figure 4.3-** Convergence de la relation (4.1) du mode  $TM_{0p0}$  en fonction de la valeur de  $q$  pour les fréquences de 20 GHz et 30 GHz.

Les premiers résultats numériques pour les modes  $TM_{0p0}$  concernent l'influence de la dimension matricielle sur les premiers zéros de notre équation caractéristique. Nous présentons une série de calculs de 500 MHz à 20 GHz pour diverses dimensions de matrice ; les valeurs des zéros obtenues sont affichés au tableau 4.1. Nous constatons qu'une petite matrice suffit pour l'obtention d'une bonne précision. Mais un fait doit être souligné : nous détectons le même nombre de résonances avec une matrice de dimension 2 qu'avec une matrice de dimension de 40. La raison de ces résultats provient du caractère oscillatoire de notre équation caractéristique. En effet, si la fonction n'avait pas été oscillatoire, nous aurions eu exactement  $N$  zéros pour une matrice  $N \times N$ .

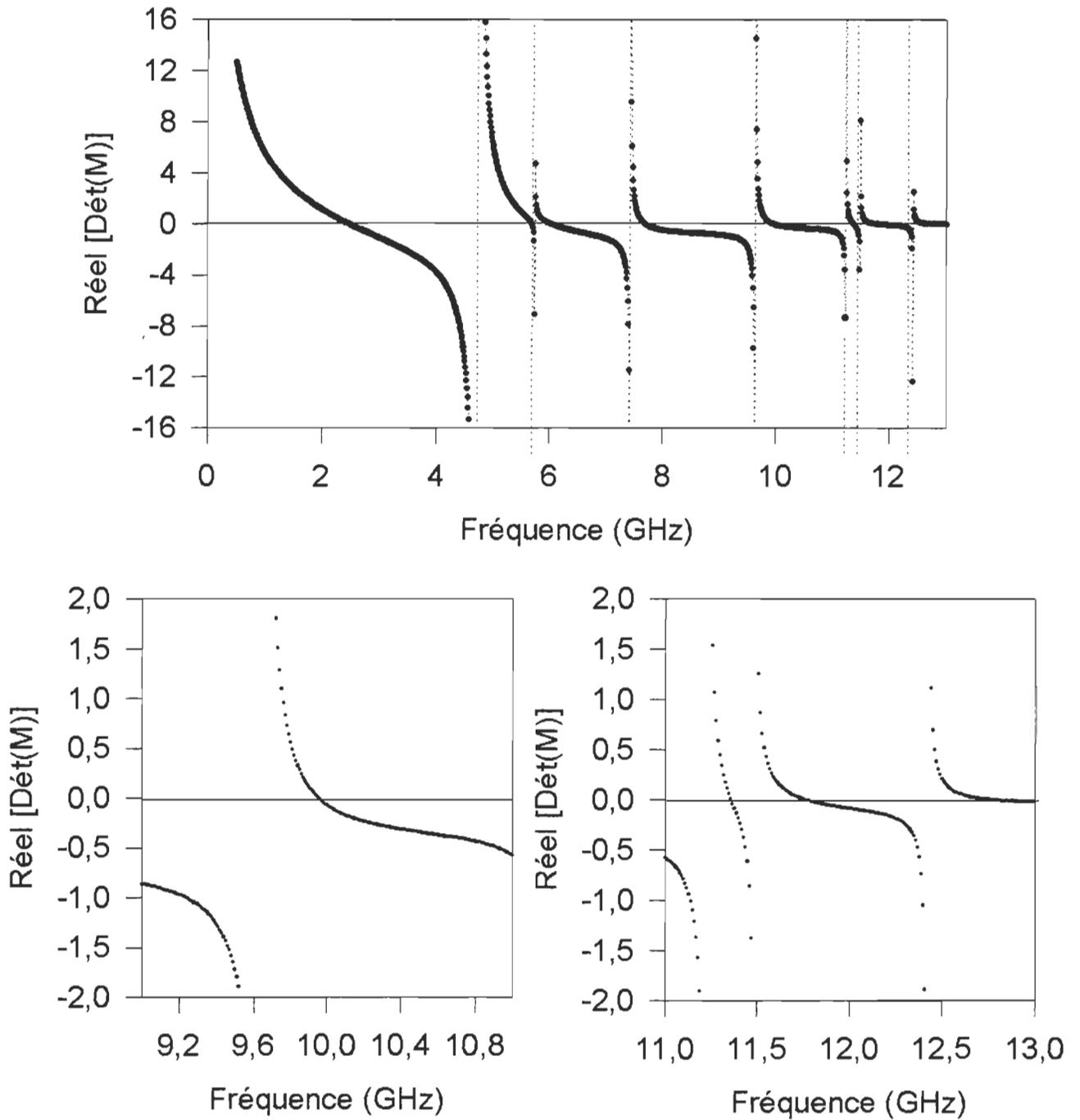
Les graphiques 4.4 et 4.5 illustrent le comportement du déterminant de la matrice des coefficients de  $A_p^1$ , en fonction de la fréquence. Nous utilisons, ici, des matrices de dimension  $10 \times 10$ , et le déterminant est multiplié par un facteur constant pour éviter d'avoir à

représenter de très grands nombres. Les passages à zéro dénotent les fréquences de résonance. On peut remarquer que de 500 MHz à 14 GHz, nous ne prenons que la partie réelle du déterminant, la partie imaginaire étant nulle. Le contraire s'applique pour les fréquences au-dessus de 14 GHz.

	DIMENSION				
ZÉRO	2	4	10	30	40
1	2.45838	2.47109	2.47567	2.47745	2.47759
2	5.65879	5.67888	5.68560	5.68815	5.68833
3	6.00163	6.01288	6.01813	6.02050	6.02067
4	7.67095	7.68499	7.69164	7.69464	7.69485
5	9.93139	9.94771	9.95190	9.95323	9.95333
6	11.34849	11.35632	11.36004	11.36166	11.36177
7	11.73984	11.75890	11.76132	11.76174	11.76177
8	12.69747	12.76011	12.76982	12.77175	12.77189
9	14.57161	14.57182	14.57189	14.57190	14.57190
10	15.00107	15.03867	15.04831	15.05063	15.05080
11	15.68424	15.68923	15.69136	15.69220	15.69226
12	17.41099	17.41111	17.41111	17.41112	17.41112
13	18.03670	18.06300	18.07184	18.07483	18.07506
14	18.13090	18.13172	18.13180	18.13180	18.13180
15	19.13337	19.13747	19.13779	19.13780	19.13780
16	19.81956	19.82190	19.82254	19.82269	19.82270

**Tableau 4.1- Valeurs des fréquences de résonance en mode TM sans variation angulaire obtenues dans une bande de fréquence de 500 MHz à 20 GHz.**

Le programme calcule ces zéros en analysant les changements de signe du déterminant de la matrice. Il faut cependant se méfier des valeurs asymptotiques du déterminant. Ces valeurs provoquent un changement de signe sans qu'elles soient pour autant des fréquences d'excitation. Mais la méthode de Newton-Raphson permet de converger vers un zéro en tous les points de notre graphique. Le seul désavantage consiste en un calcul un peu plus long lorsque nous sommes près des asymptotes.



**Figure 4.4-** Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode  $\text{TM}_{0p0}$  en fonction de la fréquence. De 500 MHz    14 GHz, le déterminant est réel.

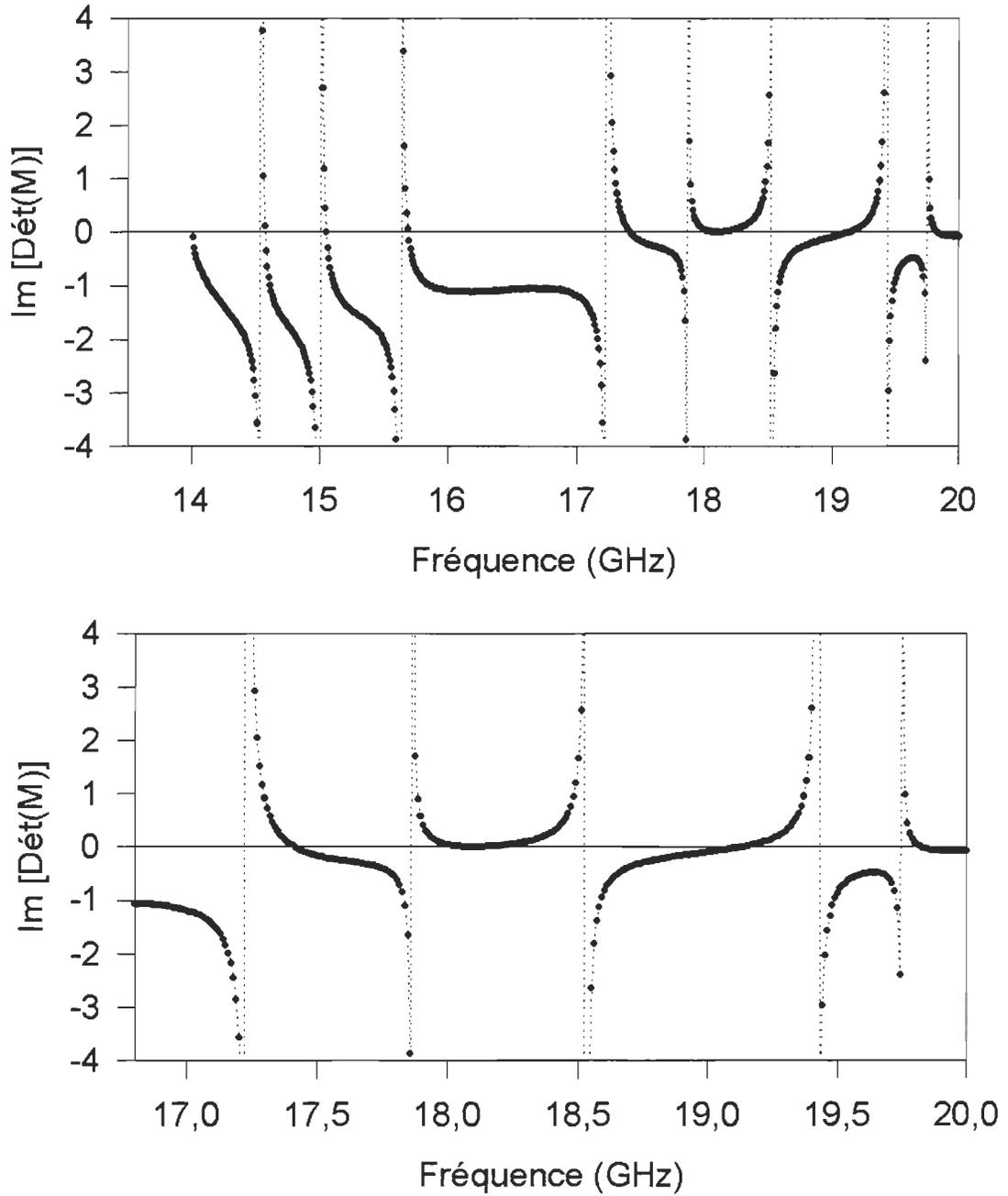


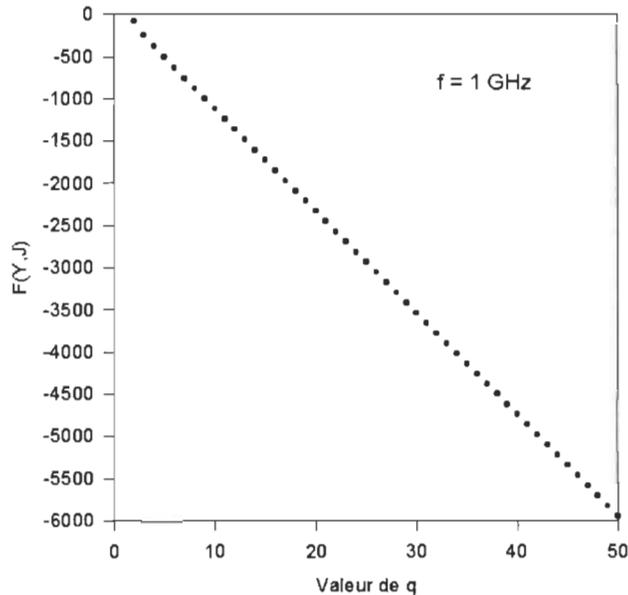
Figure 4.5- Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode  $\text{TM}_{0p0}$  en fonction de la fréquence. De 14 GHz à 20 GHz, le déterminant est imaginaire.

#### 4.1.2 Mode $TE_{0p0}$

Tout comme pour les modes  $TM_{0p0}$ , il faut s'assurer que les sommes qui paraissent dans notre équation caractéristique sont convergentes. Nous avons déjà obtenu deux formes d'équations de simulation, soit (2.40) et (2.47). De l'équation (2.41) nous devons vérifier la convergence de la fonction suivante :

$$F_q(Y, J) = \frac{\kappa_{3q} \{Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_0(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}}{\{Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2) - J_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_3) Y_1(\kappa_{3q} \mathcal{R}_2)\}}. \quad (4.2)$$

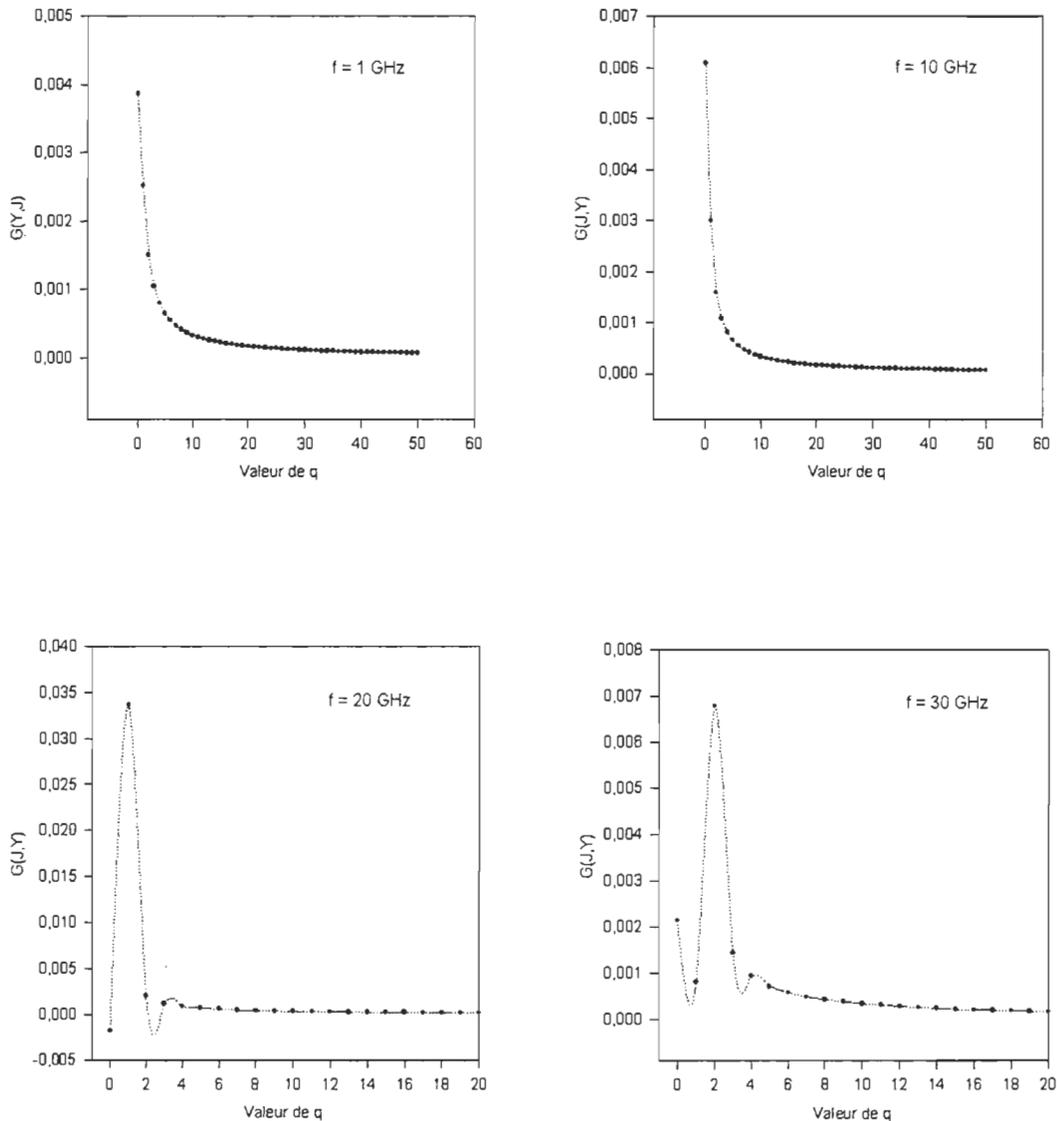
Mais comme le démontre le graphique suivant, cette fonction augmente (en valeur absolue) à mesure que la valeur de  $q$  augmente.



**Figure 4.6- Comportement de la relation (4.2) du mode  $TE_{0p0}$  en fonction de la valeur de  $q$  pour une fréquence de 1 GHz.**

Par contre, l'équation caractéristique (2.47) nous donne le résultat souhaité. Les graphiques qui suivent démontrent la convergence de la fonction (4.3), qui provient de l'équation (2.50).

$$G_q(Y, J) = \frac{J_1(k_{2q} R_2)}{k_{2q} J_0(k_{2q} R_2)}. \quad (4.3)$$



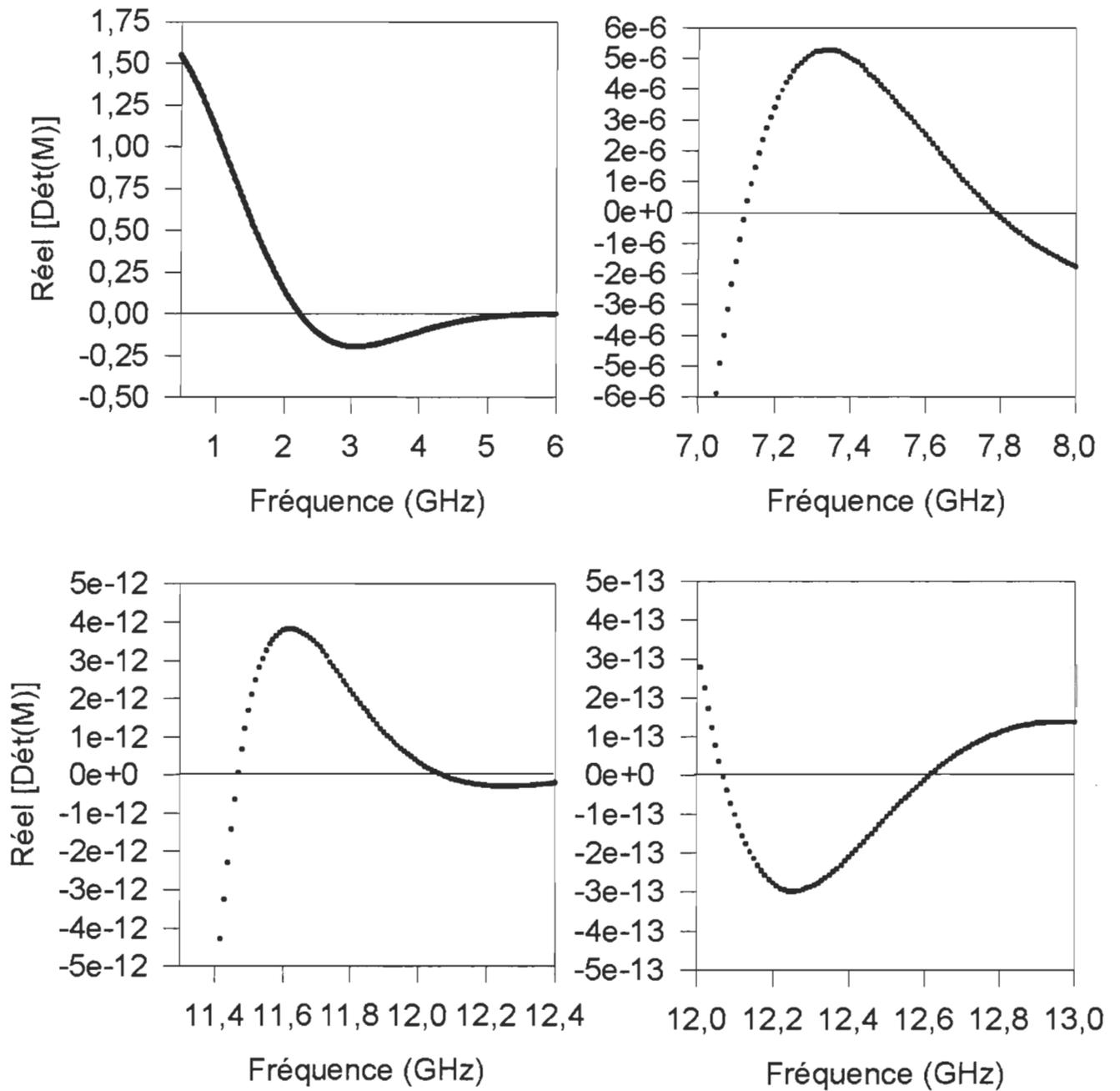
**Figure 4.7-** Convergence de la relation (4.3) du mode  $TE_{0p0}$  en fonction de la valeur de  $q$  pour les fréquences de 1GHz, 10 GHz, 20 GHz et 30 GHz.

Le tableau 4.2 présente les fréquences de résonance dans un domaine variant entre 500 MHz et 20 GHz pour diverses dimensions de matrice. On remarque facilement la convergence des valeurs lorsque la dimension augmente. La matrice 40X40 nous assure une précision au millième. Contrairement au mode  $TM_{0p0}$ , il existe certains passages à zéro qui ne sont pas détectés par la matrice de plus petite dimension.

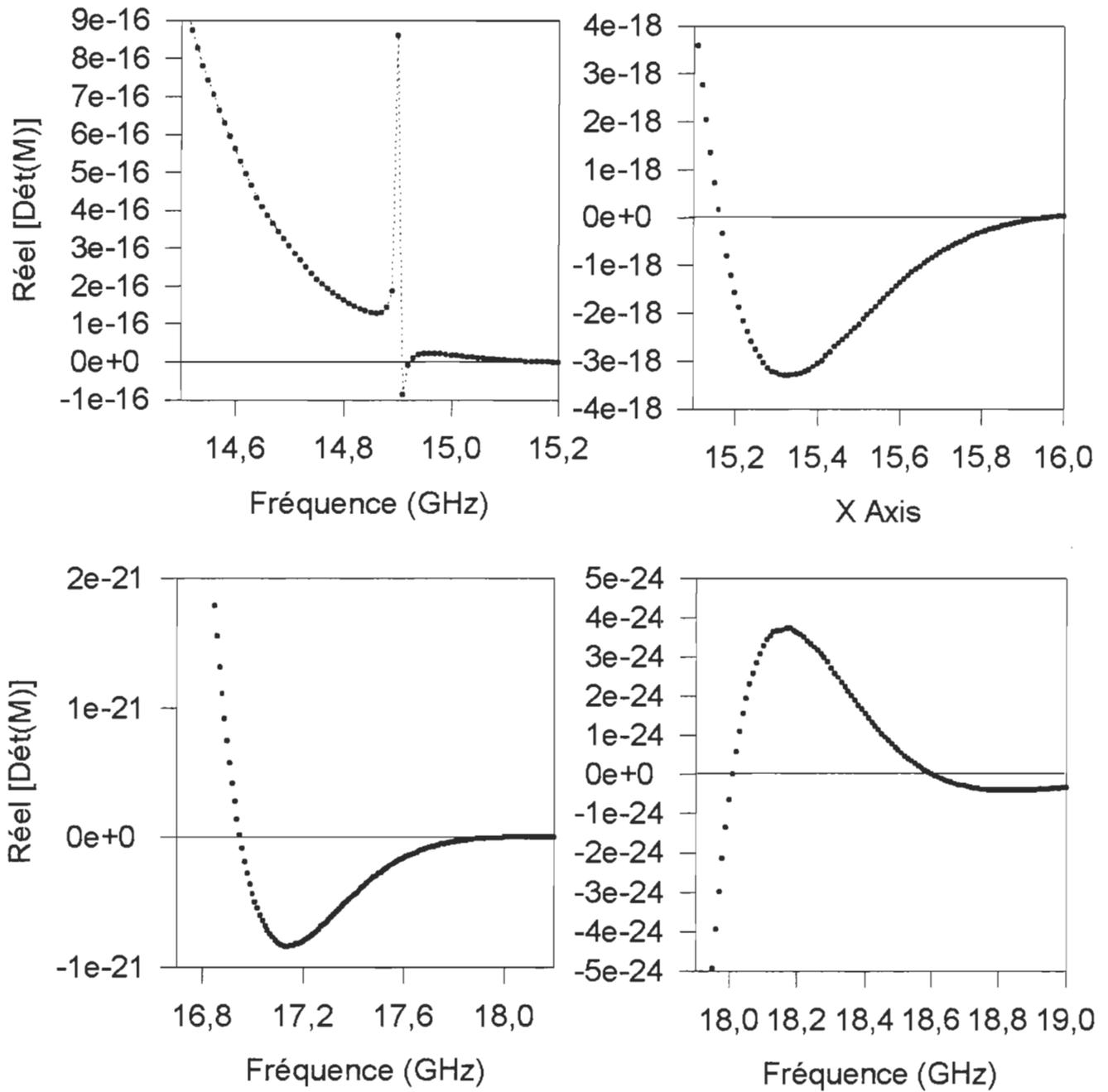
Les figures 4.8 et 4.9 indiquent le comportement de l'équation caractéristique tirée de (2.47) pour une dimension de 10. Encore une fois, le déterminant est renormalisé. Dans la région étudiée, nous n'avons rencontré qu'une seule asymptote à 14.9 GHz. De même, le déterminant demeure toujours réel. Il est à remarquer que d'un zéro à l'autre, l'amplitude du déterminant diminue d'un facteur de 1000 à un million parfois, ce qui n'est pas le cas pour le mode  $TM_{0p0}$ .

	DIMENSION				
ZÉRO	2	4	10	30	40
1	2.14983	2.20877	2.22534	2.23354	2.23450
2	7.10801	7.11913	7.12269	7.12425	7.12444
3	7.78644	7.78646	7.78653	7.78657	7.78657
4	11.46775	11.46885	11.46935	11.46939	11.46940
5	12.06315	12.06709	12.06866	12.06932	12.06940
6	-----	12.60772	12.61378	12.61499	12.61509
7	-----	15.13644	15.15917	15.16390	15.16431
8	15.95664	15.95737	15.95815	15.95863	15.95868
9	16.94887	16.94967	16.95130	16.95175	16.95179
10	-----	18.00823	18.00972	18.01010	18.01014
11	-----	18.55029	18.59477	18.60452	18.60538
12	-----	19.89403	19.90034	19.90185	19.90200

**Tableau 4.2- Valeurs des fréquences de résonance en mode TE sans variation angulaire obtenues dans une bande de fréquence de 500 MHz à 20 GHz.**



**Figure 4.8-** Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode  $TE_{0p0}$  en fonction de la fréquence.



**Figure 4.9-** Comportement du déterminant de la matrice caractéristique du mode  $TE_{0p0}$  en fonction de la fréquence (suite).

## 4.2 Cavité avec un échantillon diélectrique

La dernière étape de notre programme consiste à évaluer la permittivité complexe d'un échantillon à partir de la fréquence de résonance, ou vice-versa. Nous avons donc les mêmes dimensions de cavité que la figure 4.1, et nous prenons un échantillon de rayon 1.5 mm.

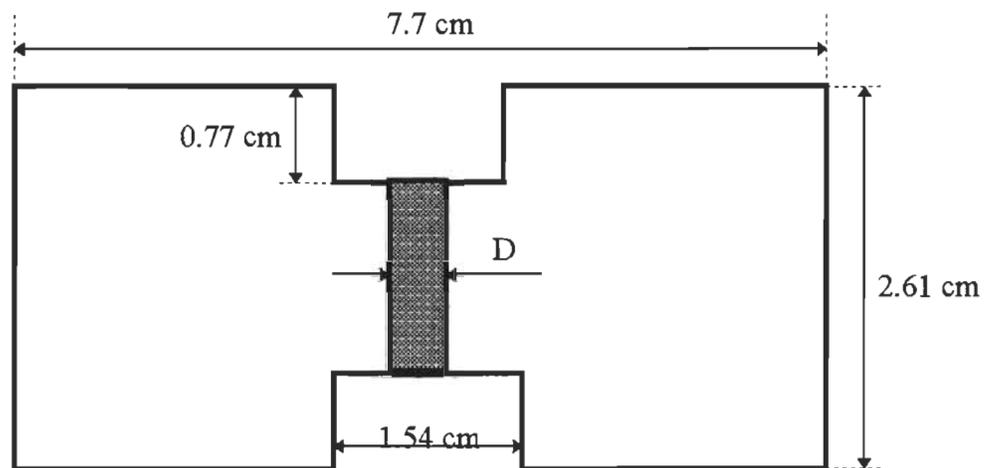


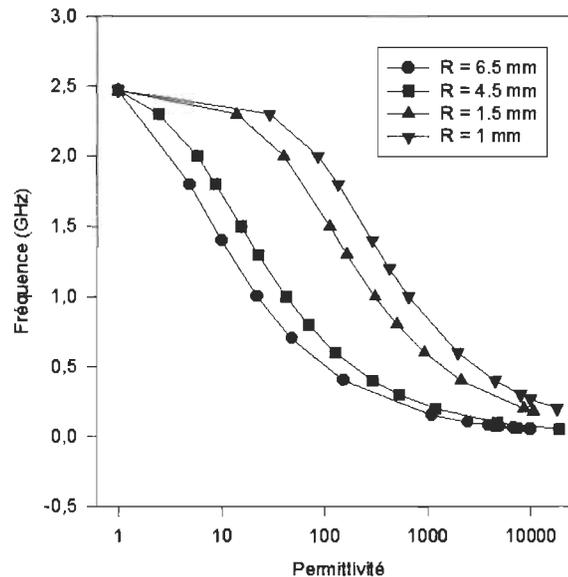
Figure 4.10- Dimensions de la cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique. Vue de la section transversale.

### 4.2.1 Échantillon de permittivité réelle en mode $TM_{0p0}$

Dans ce sous-chapitre, nous calculons la permittivité à partir d'une valeur donnée de la fréquence. Nous examinons le cas où la permittivité de l'échantillon n'a pas de partie imaginaire. Ceci revient à dire qu'il n'y a pas de pertes diélectriques. Les fréquences mesurées, ou tout simplement fournies par le programmeur, sont donc elles aussi réelles. Afin d'établir la permittivité, il faut recourir aux fréquences de résonance données au tableau 4.1. Lorsqu'un échantillon est introduit dans une cavité, la fréquence d'excitation de celle-ci diminue. Pour un mode donné, soit  $\omega_0$  la fréquence de la cavité vide, et  $\omega_r$  la fréquence de

la cavité avec échantillon. Divisons l'intervalle  $(\omega_0, \omega_r)$  en  $N$  sous-intervalles égaux  $(\omega^i, \omega^{i+1})$ . Nous pouvons utiliser  $N$  fois l'équation (3.31), de manière à obtenir  $\varepsilon^1$  à partir de  $\varepsilon^0 = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon^2$  à partir de  $\varepsilon^1$ , et éventuellement  $\varepsilon^N = \varepsilon_r$ .  $\varepsilon_r$  est la permittivité relative de l'échantillon, qui correspond à la fréquence  $\omega_r$ .

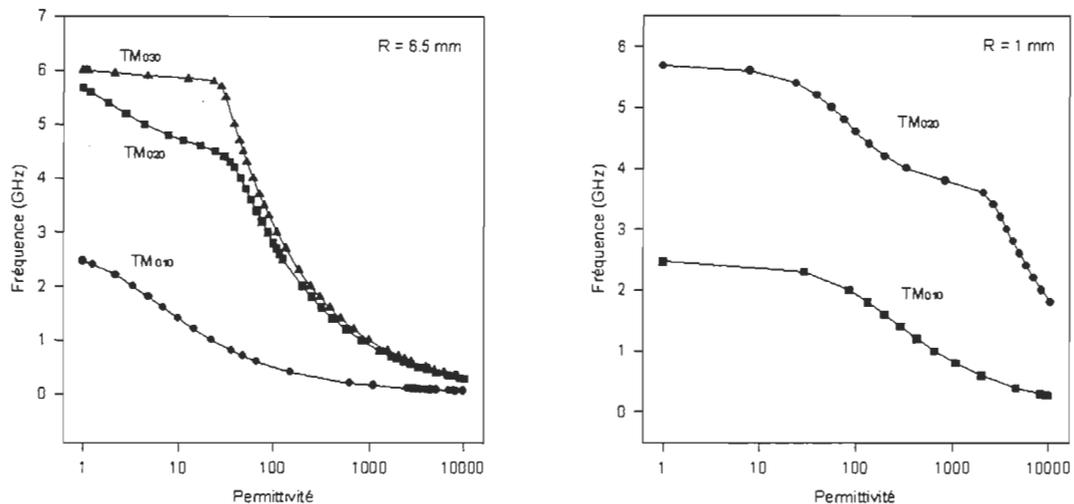
Les graphiques suivants présentent l'évolution de la fréquence de résonance de la cavité contenant un échantillon en fonction de différentes valeurs de la permittivité de l'échantillon. La figure 4.11 illustre l'influence du rayon de l'échantillon sur le mode  $TM_{010}$ .



**Figure 4.11-** Comportement de la fréquence en fonction de la permittivité pour des échantillons de rayon 6.5 mm, 4.5 mm, 1.5 mm et 1 mm en mode  $TM_{010}$ .

Les deux graphiques de la figure 4.12 présentent les résultats numériques des premiers modes fondamentaux pour deux rayons différents. Ces courbes appellent plusieurs remarques. On constate d'abord une variation en marche d'escalier. Ces variations de pente traduisent l'accumulation dans l'échantillon de différents ventres de champ électrique

stationnaire. Les variations de fréquence sont stationnaires lorsque la frontière de l'échantillon se trouve au niveau d'un noeud de champ électrique tangentiel, et rapides lorsque la frontière de l'échantillon se trouve au voisinage d'un ventre de champ électrique tangentiel.



**Figure 4.12-** Fréquence de résonance des modes  $TM_{010}$ ,  $TM_{020}$  et  $TM_{030}$  de la cavité ré-entrante (figure 4.10) contenant un échantillon diélectrique de 6.5 mm ou 1 mm.

Pour un diélectrique de rayon 6.5 mm, nous observons une seule variation. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin. Le phénomène est plus sensible pour un petit rayon, ici de 1 mm. Ainsi, pour un échantillon de rayon de 1 mm, le mode  $TM_{010}$  qui ne possède radialement qu'un ventre de champ électrique présente une seule marche, le mode  $TM_{020}$  présente deux marches et ainsi de suite. Nous devrions observer plusieurs marches pour les modes supérieurs que nous n'avons pas représentés sur cette figure. Ce phénomène est très général et s'observe pour toutes les géométries de cavités [26].

Pourtant, au rayon de 6.5 mm, nos modes affichent toujours une seule variation. Deux hypothèses sont possibles : soit que deux des ventres sont déjà contenus dans l'échantillon et que le troisième provoque la variation, soit que le phénomène est très sensible et qu'il est difficile de voir d'autres zones stationnaires de la fréquence. Pour répondre à cette question, il nous faudrait connaître la configuration des champs à l'intérieur de la cavité en calculant les vecteurs propres de l'équation caractéristique. Ou encore, il suffirait d'avoir plus de points et observer s'il existe d'autres zones stationnaires, aussi petites soient-elles. À ce stade, nous ne pouvons conclure. Aussi allons-nous définir, dans la prochaine section, un paramètre qui va nous permettre de mieux détecter les ventres, en l'occurrence le coefficient d'amortissement.

## 4.2.2 Échantillon de permittivité complexe en mode $TM_{0p0}$

### 4.2.2.1 Échantillon à faibles pertes

La relation (1.19) et la fréquence complexe peuvent être écrites de la façon suivante :

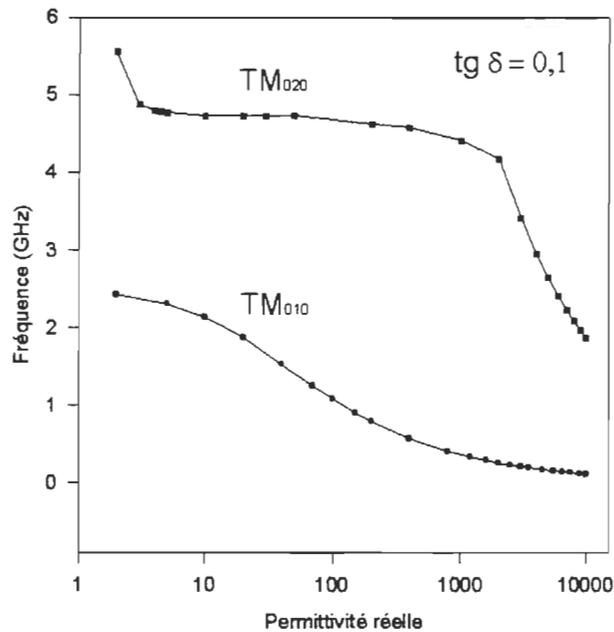
$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \varepsilon'_r - j \varepsilon''_r = \varepsilon'_r (1 - j \operatorname{tg} \delta) \\ \bar{\nu} &= \nu(1 + j \alpha)\end{aligned}\tag{4.4}$$

où  $\nu$  est la fréquence centrale du mode de résonance,  $\operatorname{tg} \delta$  est le facteur de pertes et  $\alpha$  est le coefficient d'amortissement. Ce dernier est relié au facteur de qualité par la relation  $\alpha = 1 / 2Q$ . Il traduit l'influence des pertes diélectriques sur la largeur du mode de résonance. Il est important de souligner les signes des parties imaginaires de la permittivité et de la fréquence complexe. Ce choix est lié à celui qui représente la variation temporelle des champs par le facteur  $e^{j\omega t}$ .

Présentons maintenant quelques résultats particuliers. Contrairement à ce qui a été fait à la section 4.2.1, nous calculons la fréquence de résonance complexe de la cavité à partir de la permittivité complexe de l'échantillon. La première étape du calcul reste la même, soit la détermination de la fréquence de résonance de la cavité vide. En introduisant un échantillon dans la cavité, nous savons, en référence à la figure 2.1, que la permittivité de la région 1 augmente de  $\varepsilon_0$  à  $\varepsilon_r$ . Divisons l'intervalle  $(\varepsilon_0, \varepsilon_r)$  en  $N$  sous-intervalles égaux  $(\varepsilon^i, \varepsilon^{i+1})$ . Nous pouvons utiliser  $N$  fois l'équation (3.32), de manière à obtenir  $\omega^1$  à partir de la fréquence de résonance de la cavité vide  $\omega^0 = \omega_0$ ,  $\omega^2$  à partir de  $\omega^1$ , et éventuellement  $\omega^N = \omega_r$ . La fréquence de résonance de la cavité,  $\omega_r$ , correspond à la permittivité relative  $\varepsilon_r$  de l'échantillon.

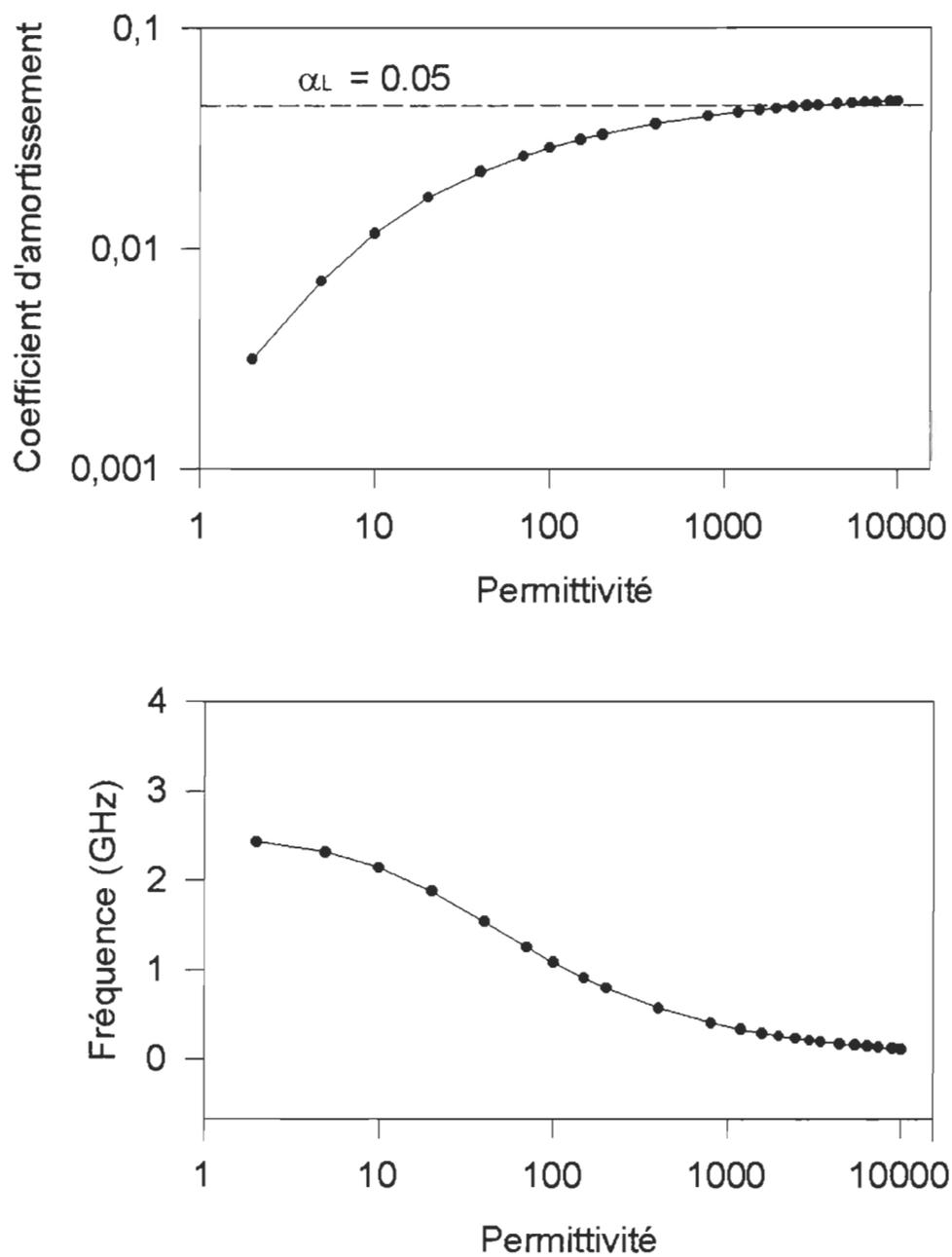
La figure 4.13 illustre le comportement de la fréquence  $\nu$  en fonction de la permittivité réelle pour un facteur de pertes constant  $\text{tg } \delta = 0,1$  pour les deux premiers modes fondamentaux. Nous obtenons le même genre de courbe que la figure 4.12 pour le cas d'un échantillon sans pertes.

Il est intéressant de représenter simultanément la fréquence et le facteur d'amortissement en fonction de la permittivité. Ceci est fait dans les figures 4.14 et 4.15, où nous reprenons les modes  $\text{TM}_{010}$  et  $\text{TM}_{020}$  de la figure 4.13. Comme le présente la figure 4.15, la corrélation entre ces courbes indique que l'amortissement passe par un maximum lorsque la fréquence de résonance varie rapidement et par un minimum lorsqu'elle est stationnaire. Une fois tous les ventres du champ électrique concentrés dans l'échantillon, les figures 4.14 et 4.15 montrent que l'amortissement tend vers la limite  $\alpha_L = 1/2 \text{ tg } \delta$ , et tout se passe alors comme si l'échantillon remplissait entièrement la cavité.



**Figure 4.13-** Comportement de la fréquence de résonance des modes  $TM_{010}$  et  $TM_{020}$  en fonction de la permittivité avec un facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0,1$  pour un échantillon de rayon 1 mm.

À la figure 4.16, nous examinons le mode  $TM_{030}$  pour un facteur de perte  $\text{tg } \delta = 0,1$ . Encore une fois, à partir du comportement de la fréquence, il semble qu'un seul ventre de champ électrique traverse l'échantillon puisque l'on observe une seule variation de pente. Mais le comportement du coefficient d'amortissement nous fournit une nouvelle information. Là où il semble que la fréquence soit stationnaire, l'amortissement passe malgré tout par un maximum à  $\epsilon \approx 10$ . C'est donc dire qu'un ventre est entré dans l'échantillon. De même, une autre variation beaucoup moins apparente semble se dessiner à  $\epsilon \approx 3000$ . La figure 4.17 propose un agrandissement de cette région. Nous constatons notre troisième variation, i.e. le troisième ventre qui pénètre dans l'échantillon. Ce troisième maximum de l'amortissement est plus subtil que les autres. L'amplitude de la variation de  $\alpha$  est de l'ordre du millième en comparaison avec les deux autres.



**Figure 4.14-** Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode  $TM_{010}$  pour un échantillon de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ .

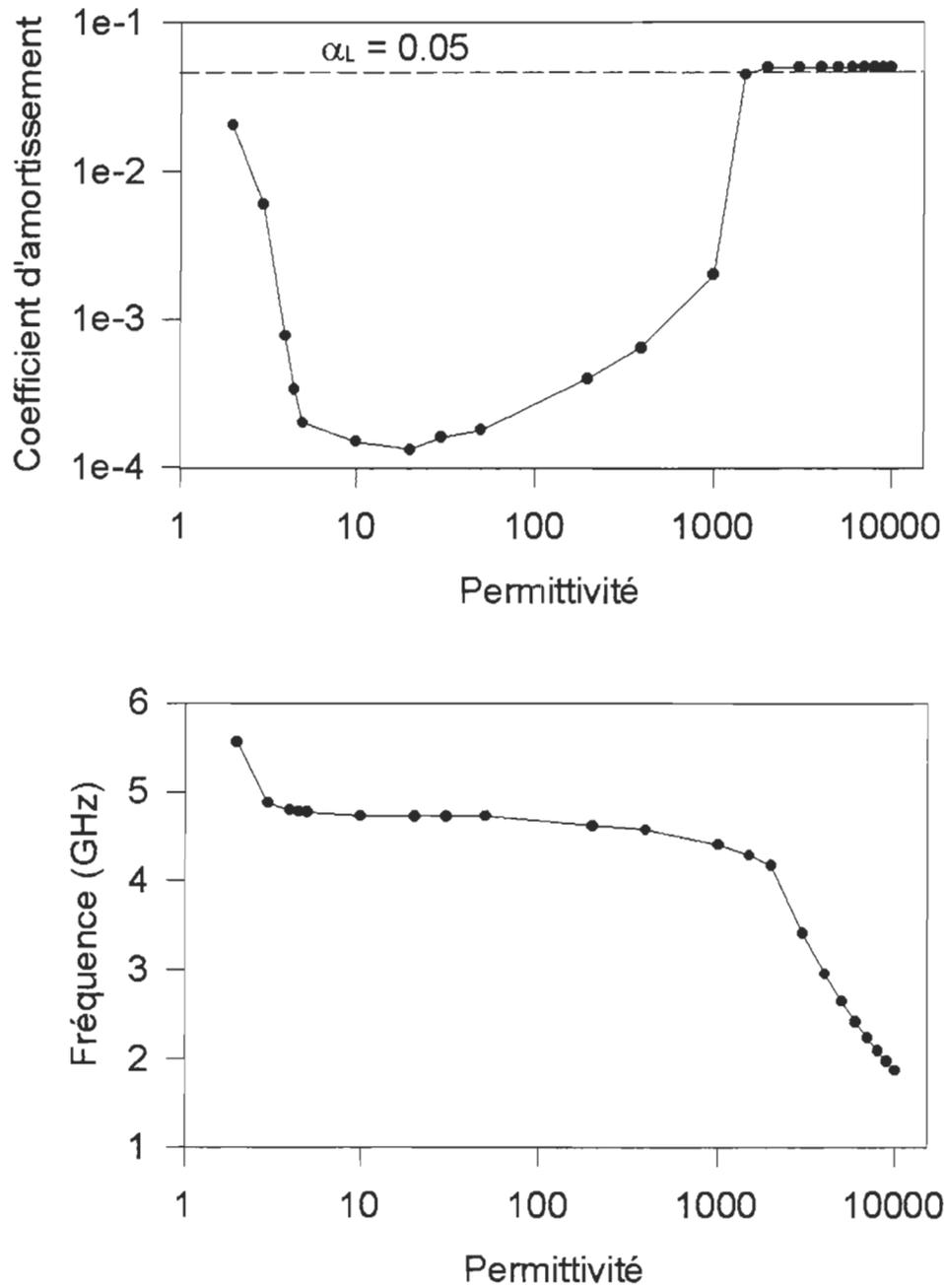


Figure 4.15- Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode  $TM_{020}$  pour un échantillon de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ .

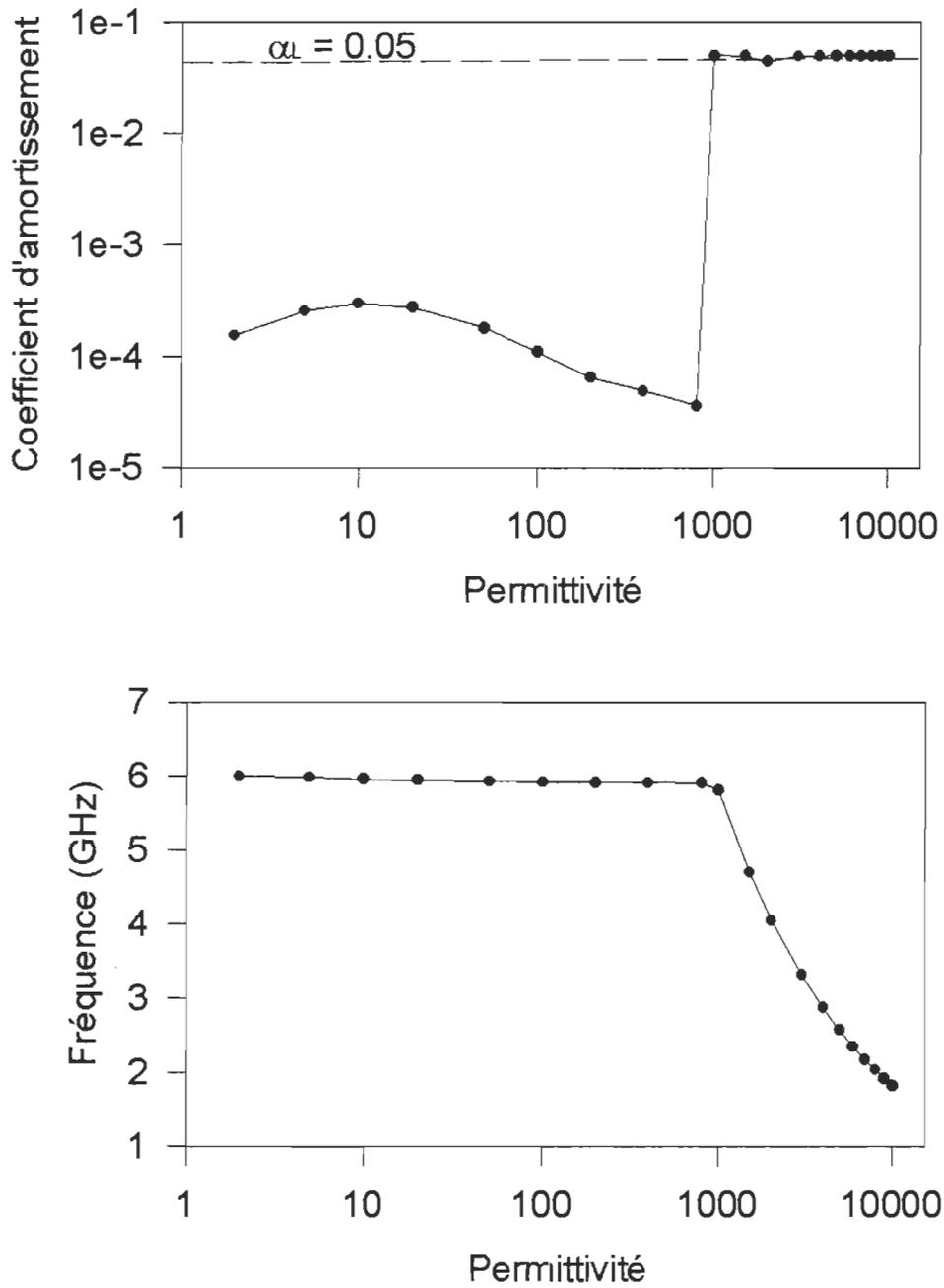


Figure 4.16- Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode TM<sub>030</sub> pour un échantillon de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$

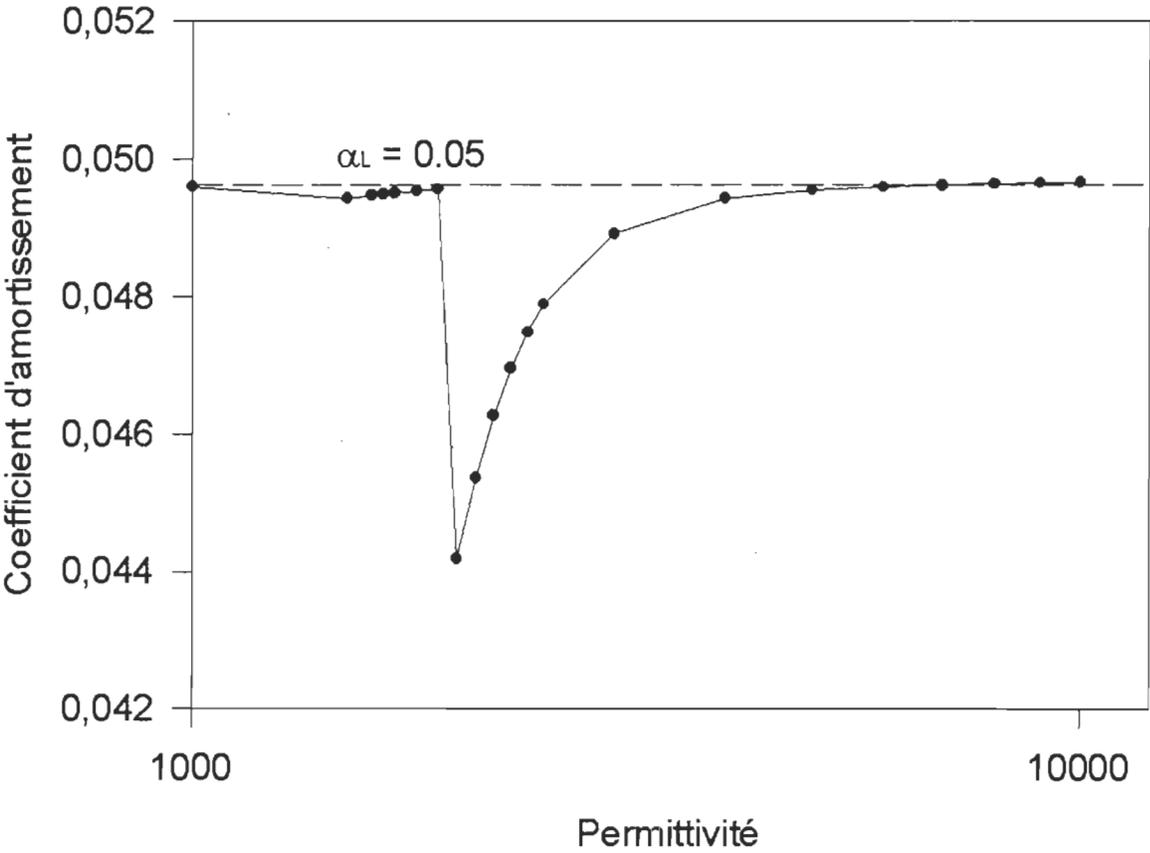


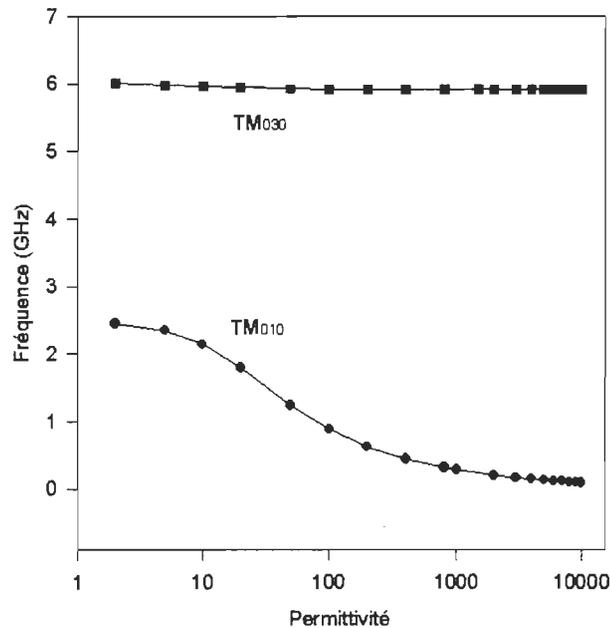
Figure 4.17- Coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode TM<sub>030</sub> pour un échantillon de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ . Agrandissement de la figure 4.16.

Encore une fois, le champ tend vers la limite  $\alpha = 0.05$ . À cette valeur, les trois ventres sont localisés dans l'échantillon. Sachant maintenant qu'il est normal de voir  $N$  variations pour un mode  $TM_{0n0}$ , il serait possible de les localiser dans un graphique de la fréquence en fonction de la permittivité en ayant plus de valeurs numériques, ou encore comme le démontre le mode  $TM_{020}$  de la figure 4.12, en prenant un rayon de l'échantillon plus petit. Mais en utilisant le coefficient d'amortissement, moins de calculs sont nécessaires puisque ce paramètre est plus sensible. De même, nous ne sommes pas contraints de nous limiter à des valeurs de diamètre de l'échantillon qui deviendraient peu représentatives d'un point de vue pratique.

C'est ce principe qui permet de réduire les dimensions d'une cavité en utilisant une substance de permittivité élevée. En effet, avec une substance de permittivité relative de 10000 par exemple, il n'est plus nécessaire d'avoir un diamètre de la cavité aussi grand que 7.7 cm puisque les champs sont confinés dans une région beaucoup plus restreinte.

#### 4.2.2.2 Échantillon à fortes pertes

La figure 4.18 affiche le comportement de la fréquence en fonction de la permittivité pour les modes  $TM_{010}$  et  $TM_{030}$  avec un facteur de pertes de  $\text{tg}\delta = 1$ .



**Figure 4.18-** Comportement de la fréquence de résonance des modes  $TM_{010}$  et  $TM_{030}$  en fonction de la permittivité avec un facteur de pertes  $\text{tg}\delta = 1$  pour un échantillon de rayon 1 mm.

Pour le mode  $TM_{010}$ , la courbe est analogue à celle de la figure 4.12. Par contre, le mode  $TM_{030}$  présente un comportement nouveau. La figure 4.19 illustre ce mode de façon plus détaillée. On remarque que l'accumulation des ventres de champ électrique stationnaire dans l'échantillon se limite au seul ventre central. La fréquence de résonance demeure ensuite stable.

Le même phénomène s'observe pour une cavité cylindrique ordinaire [26]. Dans ce cas, pour un grand facteur de pertes, tous les modes supérieurs à  $TM_{010}$  se stabilisent à une fréquence qui correspond à la fréquence de résonance du mode  $TM_{010}$  que l'on observerait dans un câble coaxial court-circuité. De ce fait, le comportement de la fréquence réagit tout comme si l'échantillon était métallisé, ou encore comme si sa surface était devenue conductrice.

Bien que notre cavité soit ré-entrante, nous pouvons interpréter le même phénomène en soutenant que dans cette région de fréquence, l'échantillon diélectrique adopte un comportement métallique. Il serait donc normal d'observer des modes TEM dans la cavité.

On remarque encore sur la figure 4.19 que l'amortissement reste toujours très inférieur à la valeur de saturation  $\alpha_L = 0.5$ , dans le cas où  $\text{tg } \delta = 1$ , et qu'il diminue lorsque l'échantillon présente un comportement métallique. Par conséquent, une cavité possédant une substance d'un facteur de pertes permettant le comportement métallique donnera une résonance plus aiguë que dans le cas d'une substance à faibles pertes, puisque l'amortissement est moindre.

Cette transition diélectrique-métal ne correspond évidemment à aucune transformation physique de l'échantillon. Ce n'est qu'une terminologie utilisée pour décrire deux comportements macroscopiques très différents de l'échantillon vis-à-vis la pénétration des ondes électromagnétiques. Il faut remarquer que cette transition du comportement se produit à l'intérieur d'un domaine très limité de  $\text{tg } \delta$ . La figure 4.20 illustre ce comportement pour  $\text{tg } \delta = 0.1$ ,  $\text{tg } \delta = 0.5$  et  $\text{tg } \delta = 1$ .

La raison pour laquelle le mode  $TM_{020}$  avec un facteur de pertes de  $\text{tg } \delta = 1$  n'a pas été traité découle de la difficulté d'atteindre la convergence par la méthode de Newton-Raphson dans le plan complexe pour les petites valeurs de permittivité et pour de grandes pertes.

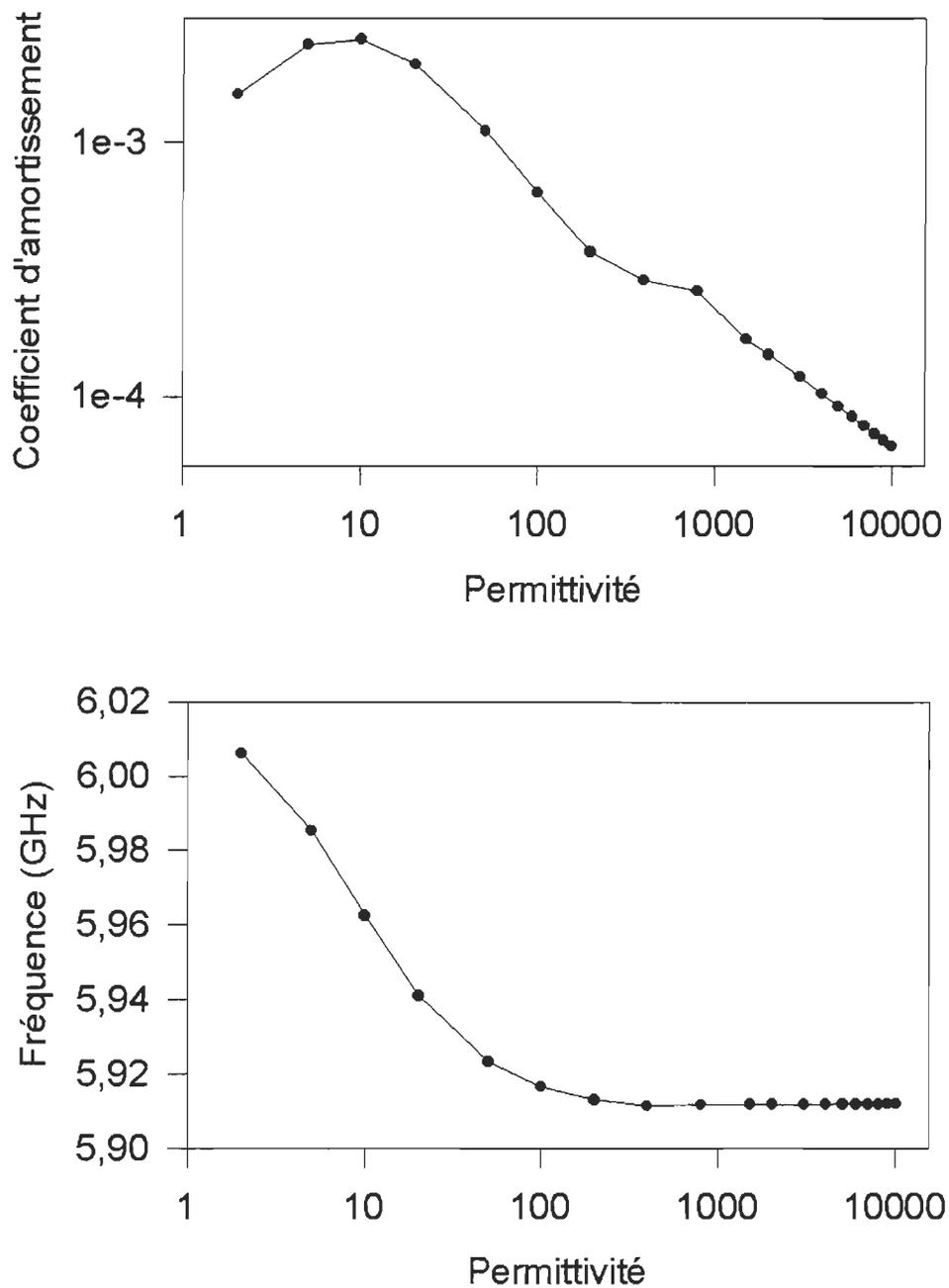
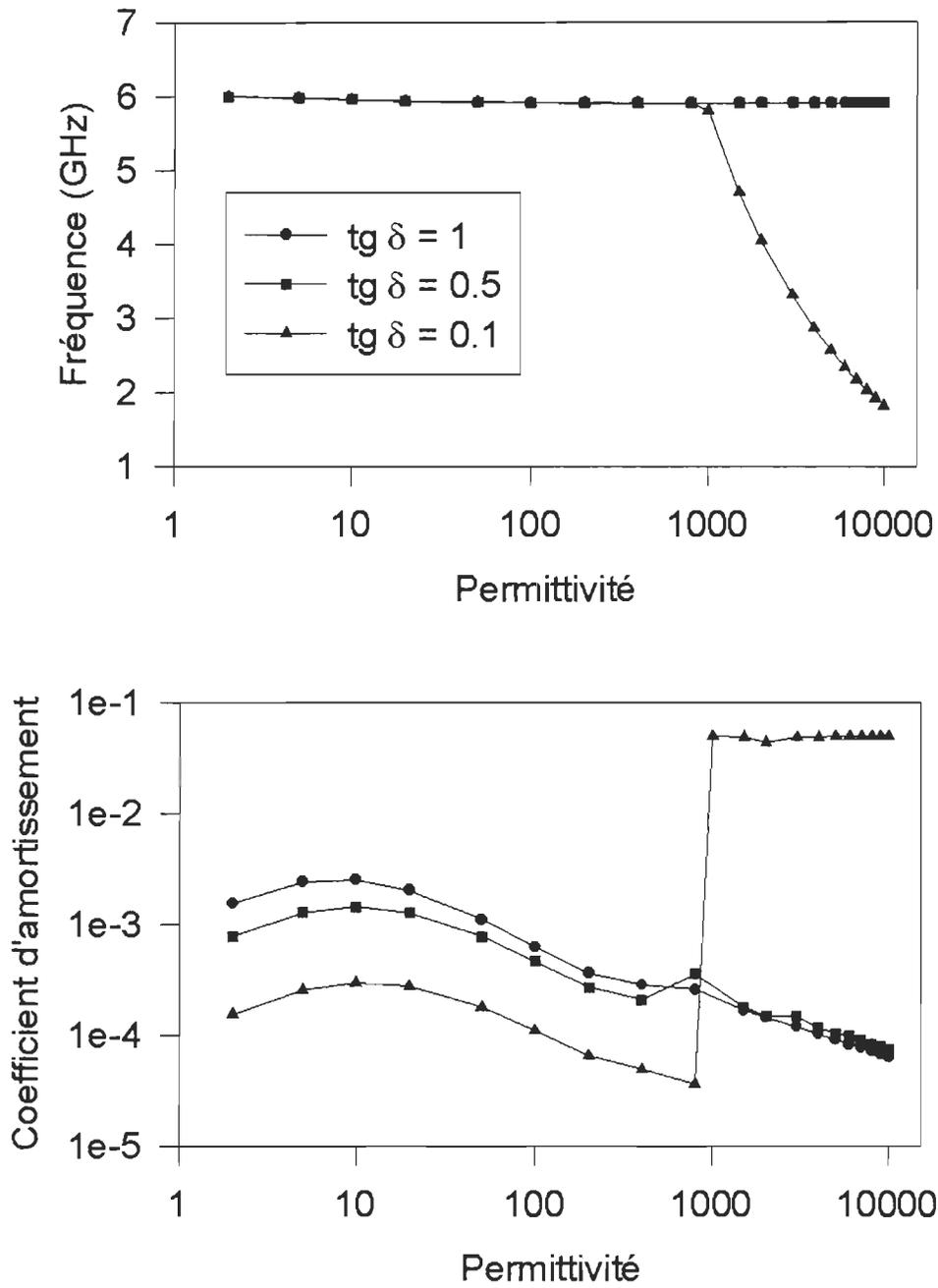


Figure 4.19- Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode  $TM_{010}$  pour un échantillon de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 1$ .



**Figure 4.20-** Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode  $\text{TM}_{030}$  pour des échantillons de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ ,  $\text{tg } \delta = 0.5$  et  $\text{tg } \delta = 1$ .

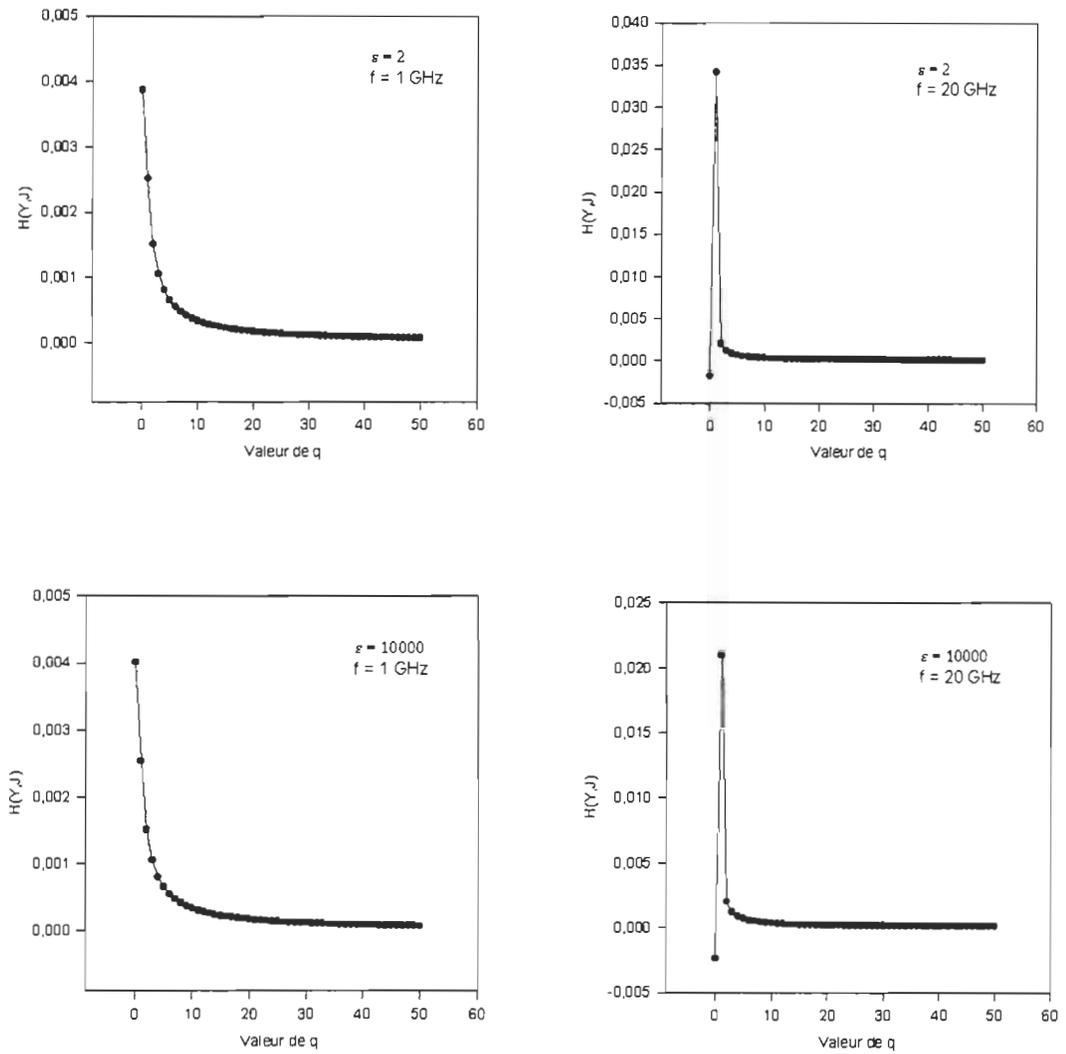
### 4.2.3 Échantillon de permittivité réelle en mode $TE_{0p0}$

Avant tout calcul, il faut s'assurer de la convergence de la relation (2.48). En omettant les termes harmoniques, on peut restreindre notre vérification à la relation (4.5), où  $M_q$  et  $N_q$  sont décrits par l'expression (2.49).

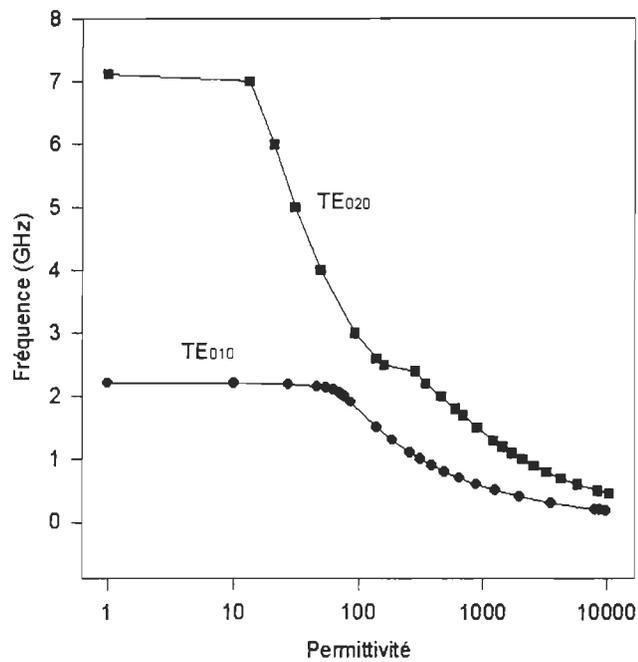
$$H_q(Y, J) = \frac{1}{\kappa_{2q}} \frac{M_q J_1(\kappa_{2q} R_2) + N_q Y_1(\kappa_{2q} R_2)}{M_q J_0(\kappa_{2q} R_2) + N_q Y_0(\kappa_{2q} R_2)}. \quad (4.5)$$

La figure 4.21 indique, en quelques exemples, que cette convergence est rapidement atteinte avec seulement quelques termes, la fonction étant presque nulle à partir de  $q = 10$ , peu importe la valeur de la fréquence ou de la permittivité.

Toujours avec les mêmes dimensions de la cavité (figure 4.10) et un échantillon de rayon de 1 mm, nous avons calculé les deux premiers modes fondamentaux. La démarche suivie consiste, encore une fois, à calculer la fréquence complexe de la cavité contenant l'échantillon à partir de la permittivité complexe de l'échantillon, comme expliqué à la section 4.2.2. La figure 4.22 témoigne du même genre de comportement dont nous avons discuté pour les modes  $TM_{0p0}$ , à la section 4.2.1 : ainsi, une seule variation de la pente est observée pour le premier mode TE fondamental, et deux variations de la pente sont observées pour le deuxième mode fondamental. Les modes supérieurs n'ont pas été calculés, mais le principe reste le même [26].



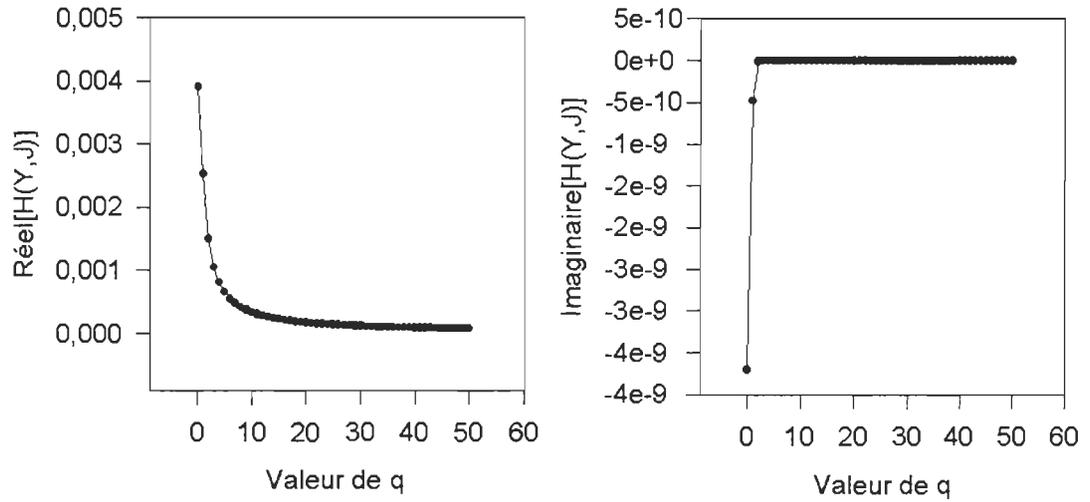
**Figure 4.21-** Convergence de la relation (4.5) du mode  $TE_{0p0}$  en fonction de la valeur de  $q$  pour les fréquences de 1GHz et 20 GHz et des permittivités relatives de 2 et 10000.



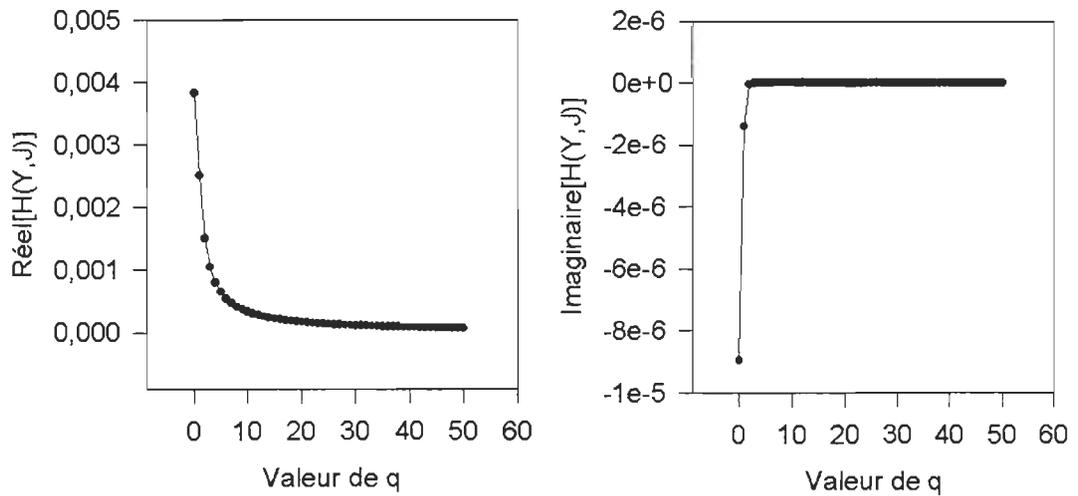
**Figure 4.22-** Fréquence de résonance des modes TE<sub>010</sub> et TE<sub>020</sub> en fonction de la permittivité, pour la cavité ré-entrante (figure 4.10) contenant un échantillon diélectrique de rayon 1 mm.

#### 4.2.4 Échantillon avec pertes en mode TE<sub>0p0</sub>

Encore une fois, nous avons pris soin de vérifier la convergence de l'équation (4.5) pour les nombres complexes. Les deux points traités dans les figures 4.23 et 4.24 sont les valeurs limites obtenues lors du calcul d'un échantillon de 1 mm avec pertes de  $\text{tg } \delta = 0.1$  que nous traitons à la page 98.

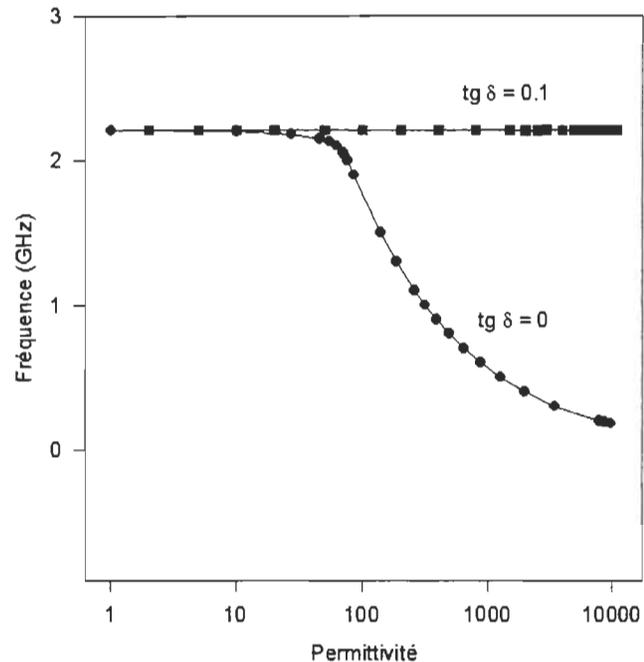


**Figure 4.23-** Convergence des parties réelle et imaginaire de la relation (4.5) pour un échantillon de 1mm possédant une permittivité relative de 2 et un facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ . La fréquence de résonance complexe de la cavité est égale à  $2.209 \times 10^9 + j 65.634$  Hz.



**Figure 4.24-** Idem à la figure 4.23, mais avec une permittivité relative de 20000 et une fréquence de résonance complexe de la cavité égale à  $2.211 \times 10^9 + j 1.8315 \times 10^5$  Hz.

La figure 4.25 révèle un comportement métallique à  $\text{tg } \delta = 0.1$  pour le mode  $\text{TE}_{010}$ . Cette courbe est comparée au mode  $\text{TE}_{010}$  d'un échantillon sans pertes.



**Figure 4.25-** Fréquence de résonance du mode  $\text{TE}_{010}$  en fonction de la permittivité, pour un échantillon de 1 mm sans pertes et avec un facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ .

Une vue plus détaillée nous est offerte à la figure 4.26. L'amortissement n'atteint pas la valeur limite de  $\alpha_L = 0.05$ . Par contre, on note une variation de la fréquence en fonction de la permittivité. Mais nous ne pouvons interpréter tous ces maximums par l'existence de différents ventres puisque nous traitons du mode fondamental. Il s'agit d'une oscillation qui tend vers une valeur de fréquence correspondant au cas où l'échantillon serait métallisé, cette oscillation étant en corrélation avec celle de l'amortissement. Ce comportement est normal et existe pour tous les modes, à différentes amplitudes. Le même genre d'oscillation existait dans l'amortissement du mode  $\text{TM}_{030}$  pour  $\text{tg } \delta = 1$  et  $\text{tg } \delta = 0.5$ , à la figure 4.19.

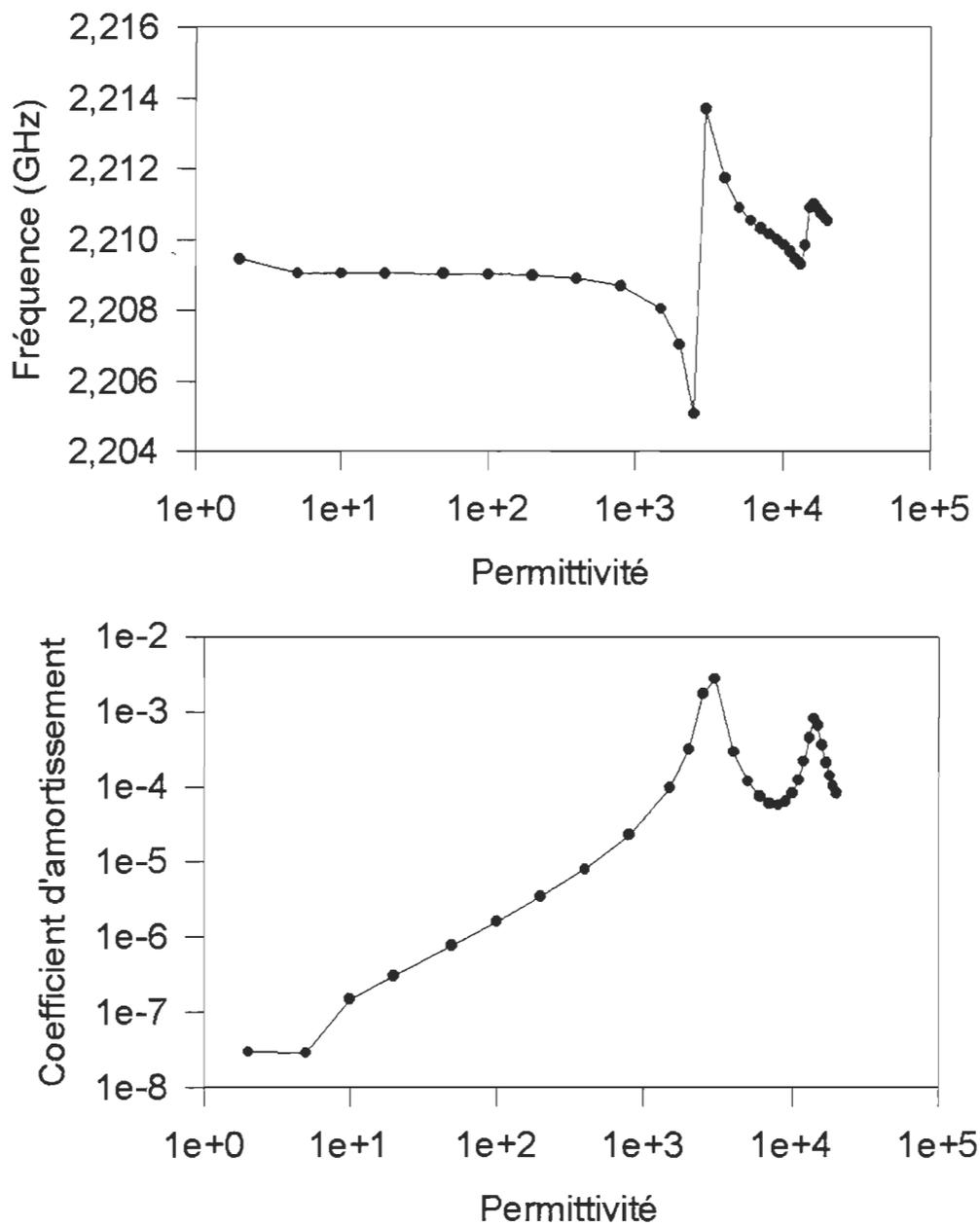


Figure 4.26- Fréquence de résonance et coefficient d'amortissement en fonction de la permittivité du mode TE<sub>010</sub> pour un échantillon de 1 mm et de facteur de pertes  $\text{tg } \delta = 0.1$ .

Nous concluons que dans le cas du mode  $TE_{0p0}$  possédant un facteur de pertes permettant le comportement métallique, tous les champs sont repoussés, ce qui n'était pas le cas des modes  $TM_{0p0}$ , où l'on notait l'existence du ventre central dans l'échantillon. La raison est simple : en nous référant à la figure 1.2, nous constatons que pour le mode TM, le champ électrique est maximal au centre de l'échantillon, alors qu'il est nul pour un mode TE.

# CONCLUSION

Dans ce travail sur les cavités, nous avons mis au point une démarche servant à résoudre les équations caractéristiques de modes TM et TE sans variation angulaire, suivant la méthode intégrale.

Concernant le mode  $TM_{0p0}$ , nous avons calculé une vingtaine de fréquences de résonance pour la cavité dans une bande comprise entre 500 MHz et 20 GHz. Lors du traitement numérique de la cavité contenant un échantillon diélectrique, nous avons confirmé les résultats rapportés dans la littérature en mettant en évidence les comportements d'un échantillon de permittivité réelle (ou sans pertes ; p. 80), normal (ou faible pertes ; p. 83) et métallique (ou fortes pertes ; p. 91).

En général, la méthode de Newton-Raphson s'est avérée adéquate, présentant même une convergence très rapide lors de l'obtention de zéros dans le plan complexe. Toutefois, certaines difficultés sont survenues en ce qui a trait à la convergence du mode  $TM_{020}$  pour de grandes pertes. Plusieurs facteurs sont en cause. Entre autres, nous avons souligné l'importance de la dérivée par les différences finies au chapitre 3. Un choix pertinent de la variation infinitésimale de (3.17) est capital. Cependant, plusieurs valeurs de cette variation ont été testées sans pour autant éliminer la divergence.

Une autre source de la divergence du mode  $TM_{020}$  émane du choix de la valeur initiale dans l'équation de récurrence de Newton-Raphson. Le graphique 3.3 illustre bien ce genre de dégénérescence. D'un point de vue qualitatif, il existe une analogie entre ce graphe et la courbe du deuxième zéro de la figure 4.4. Une analyse numérique approfondie confirme qu'il s'agit bien de ce problème. Afin d'éviter ce comportement, il est nécessaire de préciser une valeur de départ adéquate, ce qui se révèle passablement ardu, probablement irréalisable d'après le nombre d'essais que nous avons faits. Une des issues consiste à

adopter une démarche autre que celle de Newton-Raphson. Un usage avisé de la méthode de bisection peut contourner ce problème. De même, une démarche intéressante est proposée par la méthode de Broyden, qui généralise la méthode des sécantes pour un cas multidimensionnel [40]. En dépit de ces procédés numériques, il faut reconnaître qu'il n'existe pas un algorithme qui s'applique à tous les cas.

Le mode  $TE_{0p0}$  s'est révélé un peu plus subtil. La spécification de l'équation caractéristique requérait de la prudence. L'équation matricielle (2.47) pour les coefficients  $\tilde{A}_p^3$  a, seule, donné lieu à des sommes convergentes.

Une quinzaine de résonances ont été obtenues pour la cavité vide. Encore une fois, les résultats numériques ont illustré les différents comportements de la résonance pour des échantillons sans pertes (p. 95) et avec pertes (p. 97). La méthode de Newton-Raphson s'est révélée efficace, déployant une convergence très rapide vers les zéros de notre fonction. Toutefois, il serait préférable de comparer les valeurs du mode  $TE_{0p0}$  avec les mesures expérimentales avant de poursuivre davantage notre étude.

La méthode intégrale offre donc un cheminement intéressant pour résoudre la corrélation entre la permittivité d'un échantillon et la fréquence de résonance de la cavité qui le contient. Tout comme d'autres méthodes, elle affiche malgré tout ses limites. Une optimisation du code exigerait une alternative à la méthode de Newton-Raphson lors de l'obtention de certains zéros dans le plan complexe. Il serait également intéressant, bien sûr, d'obtenir les coefficients  $A_p^i$  afin de représenter les champs partout dans la cavité.

# ANNEXE A

## Fonctions de Bessel

### 1- Valeurs des zéros des fonctions de Bessel

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$	2.4048	3.3317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	9.9361
	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893
	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	17.0038
	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208
	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861
	18.0711	19.6159	21.1170	22.5827	24.0190	25.4303	26.8202
$Y_n(x) = 0$	0.8936	2.1971	3.3842	4.5270	5.6452	6.7472	7.8377
	3.9577	5.4297	6.7938	8.0976	9.3616	10.5972	11.8110
	7.0861	8.5960	10.0235	11.3965	12.7301	14.0338	15.3136
	10.2223	11.7492	13.2100	14.6231	15.9996	17.3471	18.6707
	13.3611	14.8974	16.3790	17.8185	19.2244	20.6029	21.9583
	16.5009	18.0434	19.5390	20.9973	22.4248	23.8265	25.2062
$J'_n(x) = 0$	0.0000	1.8412	3.0542	4.2012	5.3176	6.4156	7.5013
	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199	11.7349
	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872	15.2682
	10.1735	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3128	18.6374
	13.3237	14.8686	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755	21.9317
	16.4706	18.0155	19.5129	20.9725	22.4010	23.8036	25.1839
$Y'_n(x) = 0$	2.1971	3.6830	5.0026	6.2536	7.4649	8.6496	9.8148
	5.4297	6.9415	8.3507	9.6988	11.0052	12.2809	13.5328
	8.5960	10.1234	11.5742	12.9724	14.3317	15.6608	16.9655
	11.7492	13.2858	14.7609	16.1905	17.5844	18.9497	20.2913
	14.8974	16.4401	17.9313	19.3824	20.8011	22.1928	23.5619
	18.0434	19.5902	21.0929	22.5598	23.9970	25.4091	26.7995

Tableau A-1- Liste des premiers zéros pour les fonctions de Bessel de première espèce et deuxième espèce, et liste des zéros de leur dérivée. L'indice n dénote l'ordre de la fonction.

## 2- Graphes des fonctions de Bessel

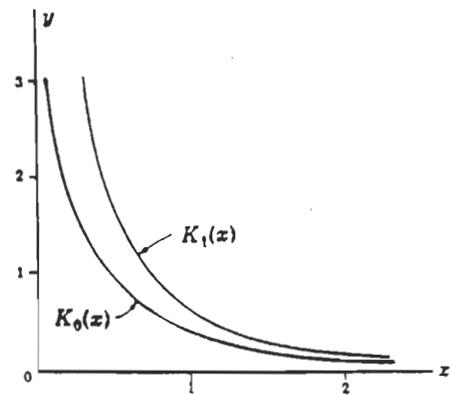
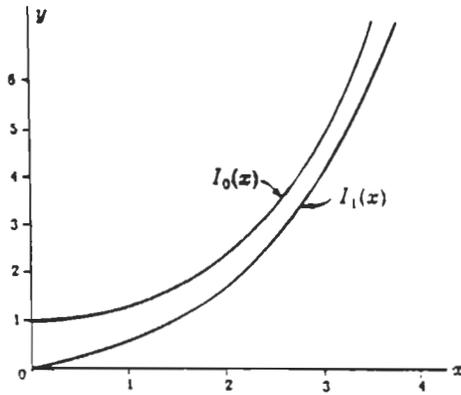
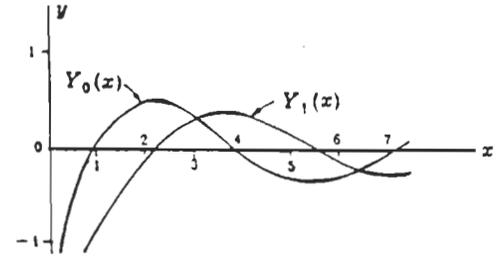
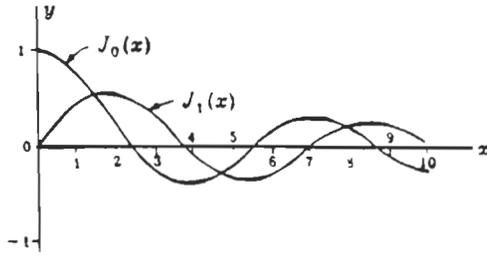


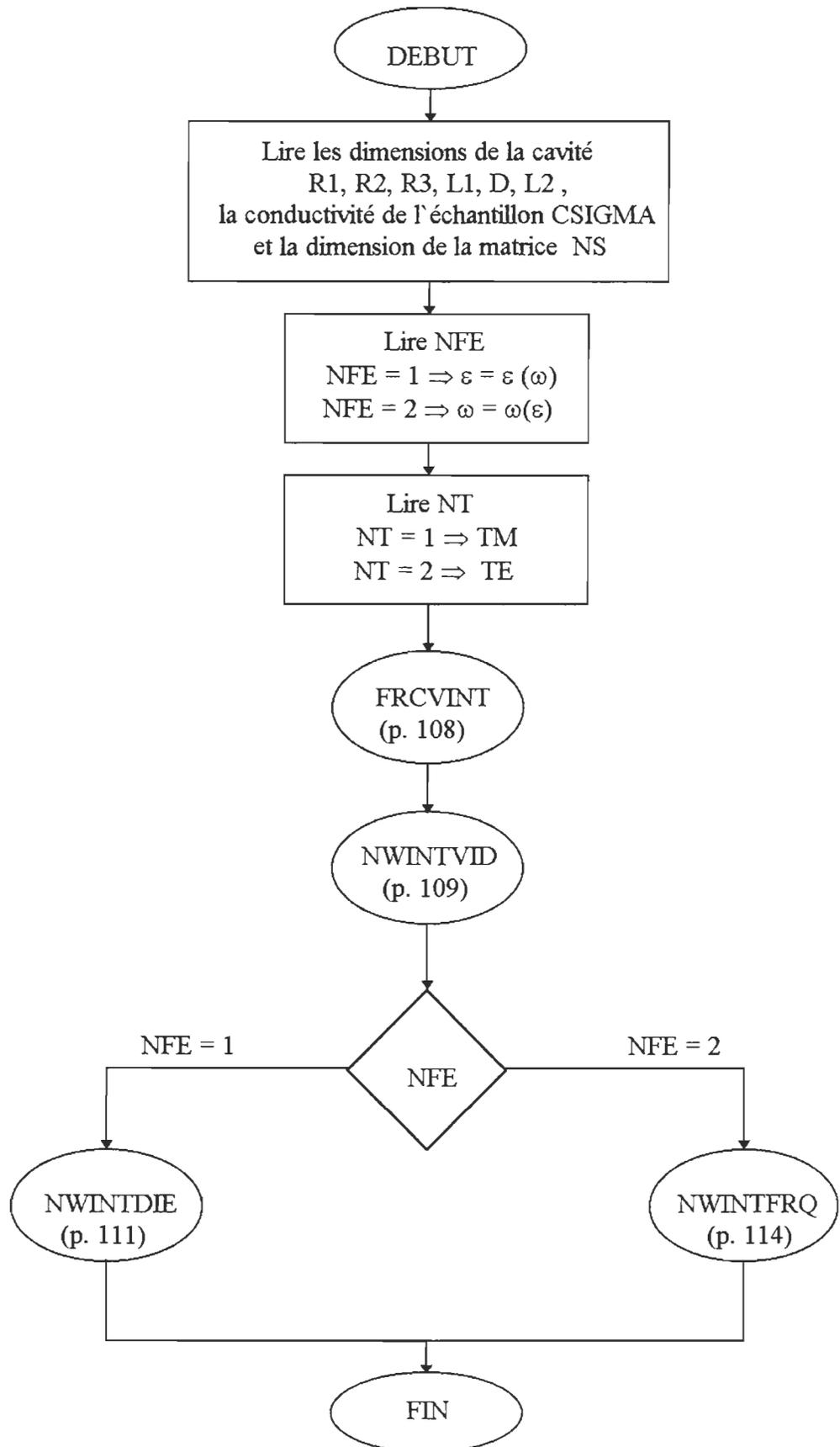
Figure A-1- Comportement des fonctions de Bessel et fonctions de Bessel modifiées de première et deuxième espèces pour les deux premiers ordres.

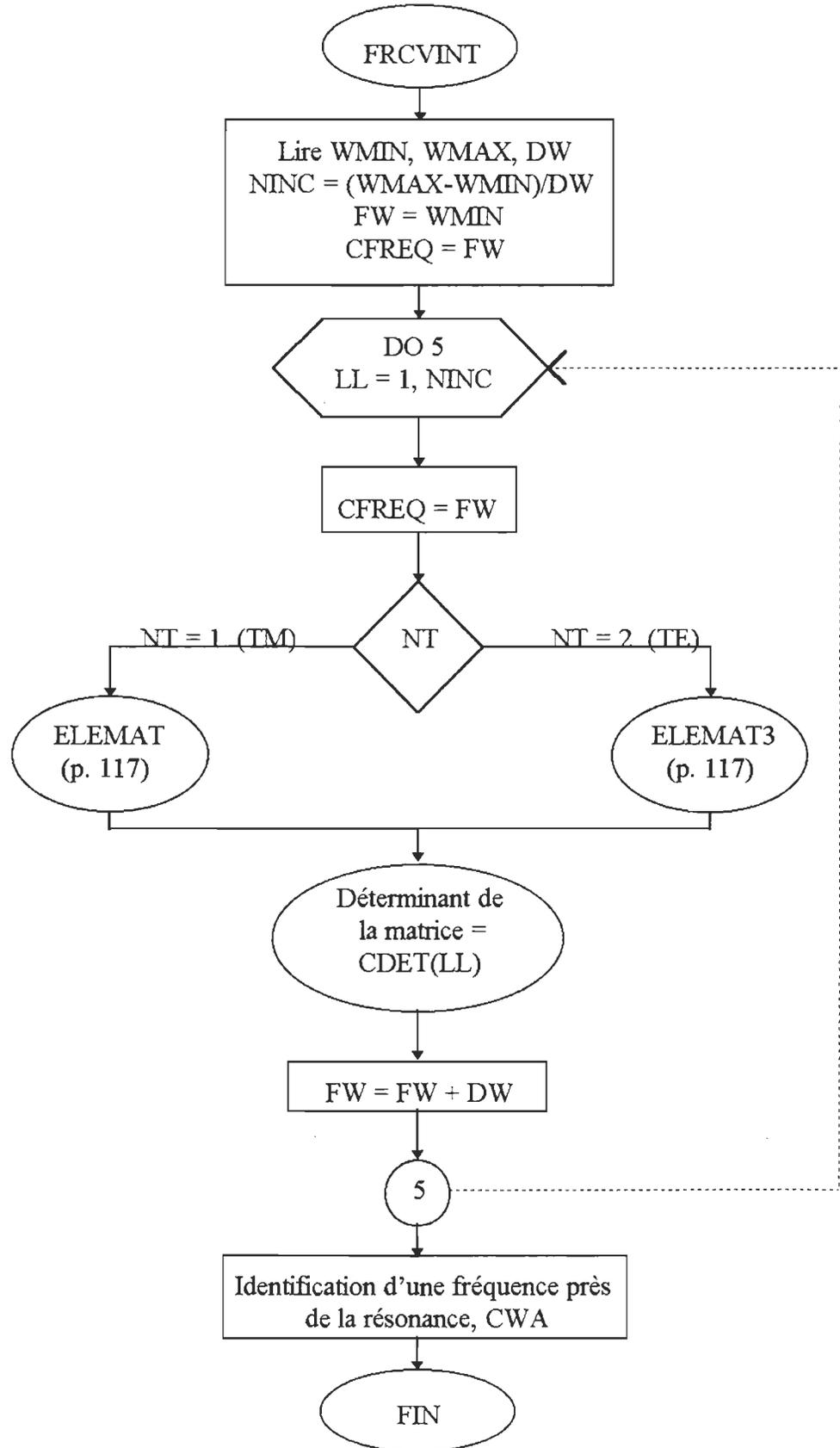
## ANNEXE B

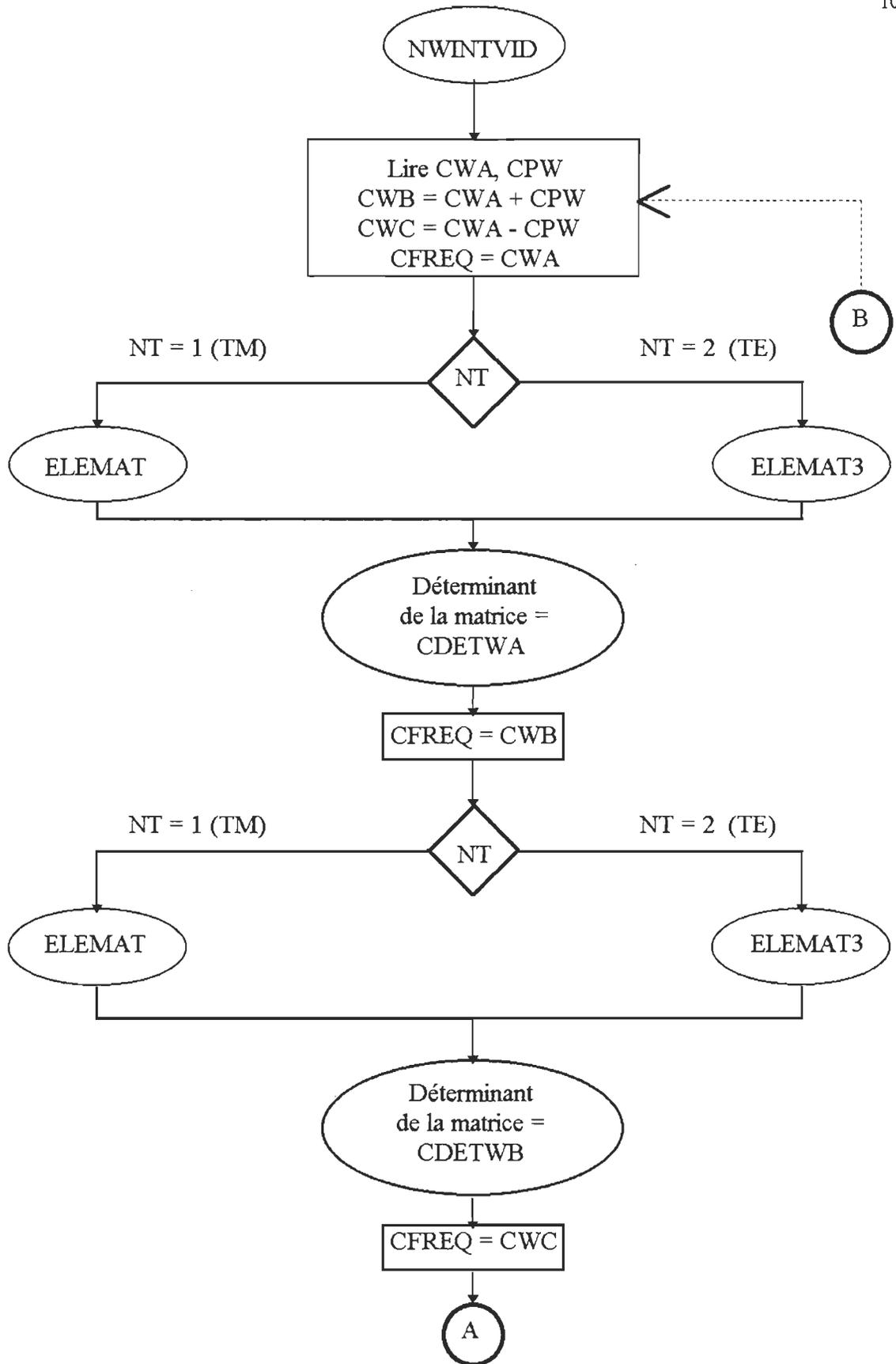
### Organigramme et code Fortran

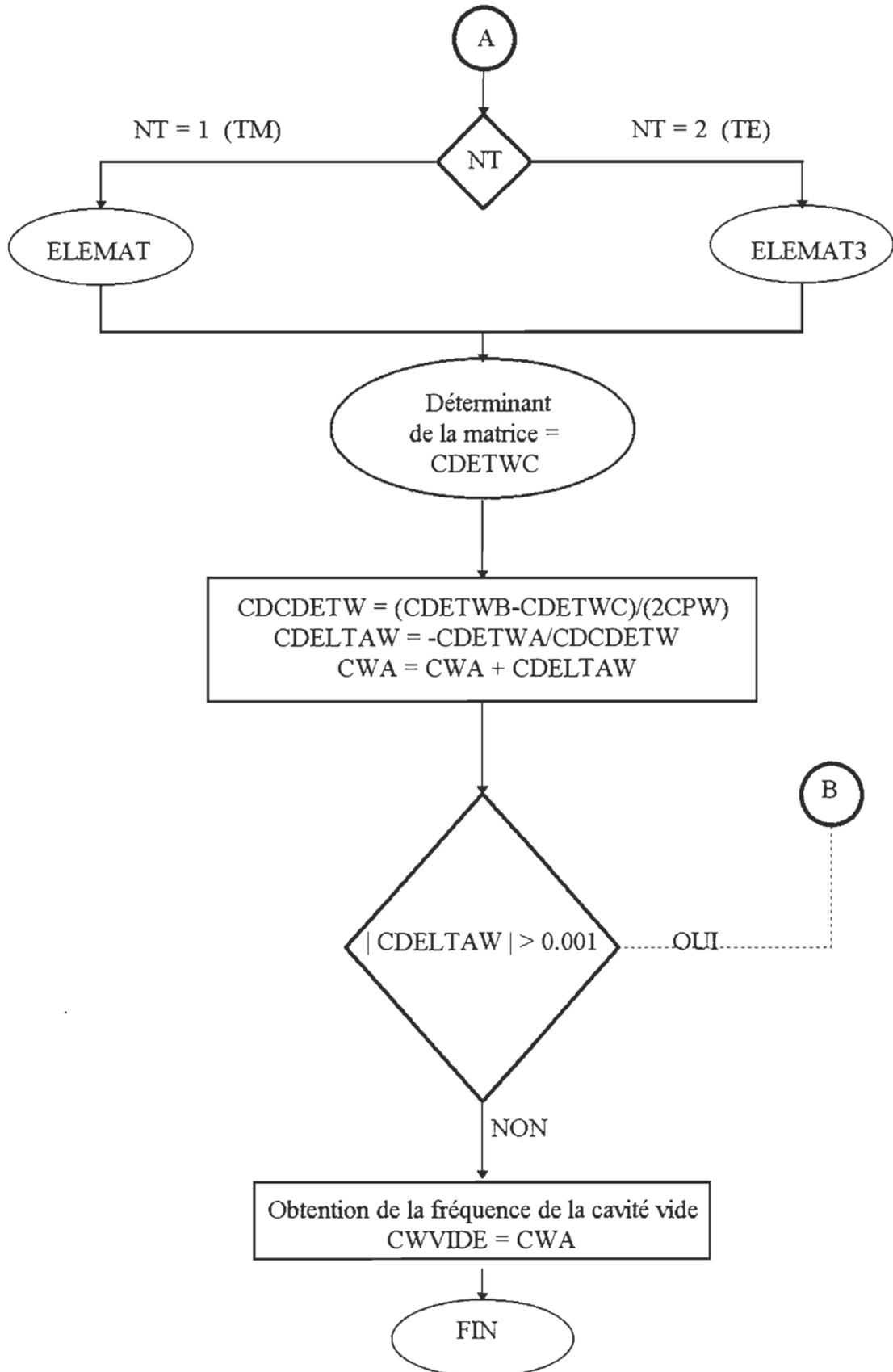
Nous présentons dans cette annexe un organigramme très détaillé du programme. Les pages mentionnées dans l'organigramme se rapportent directement au code. Une liste des principales variables a déjà été présentée à la page 65.

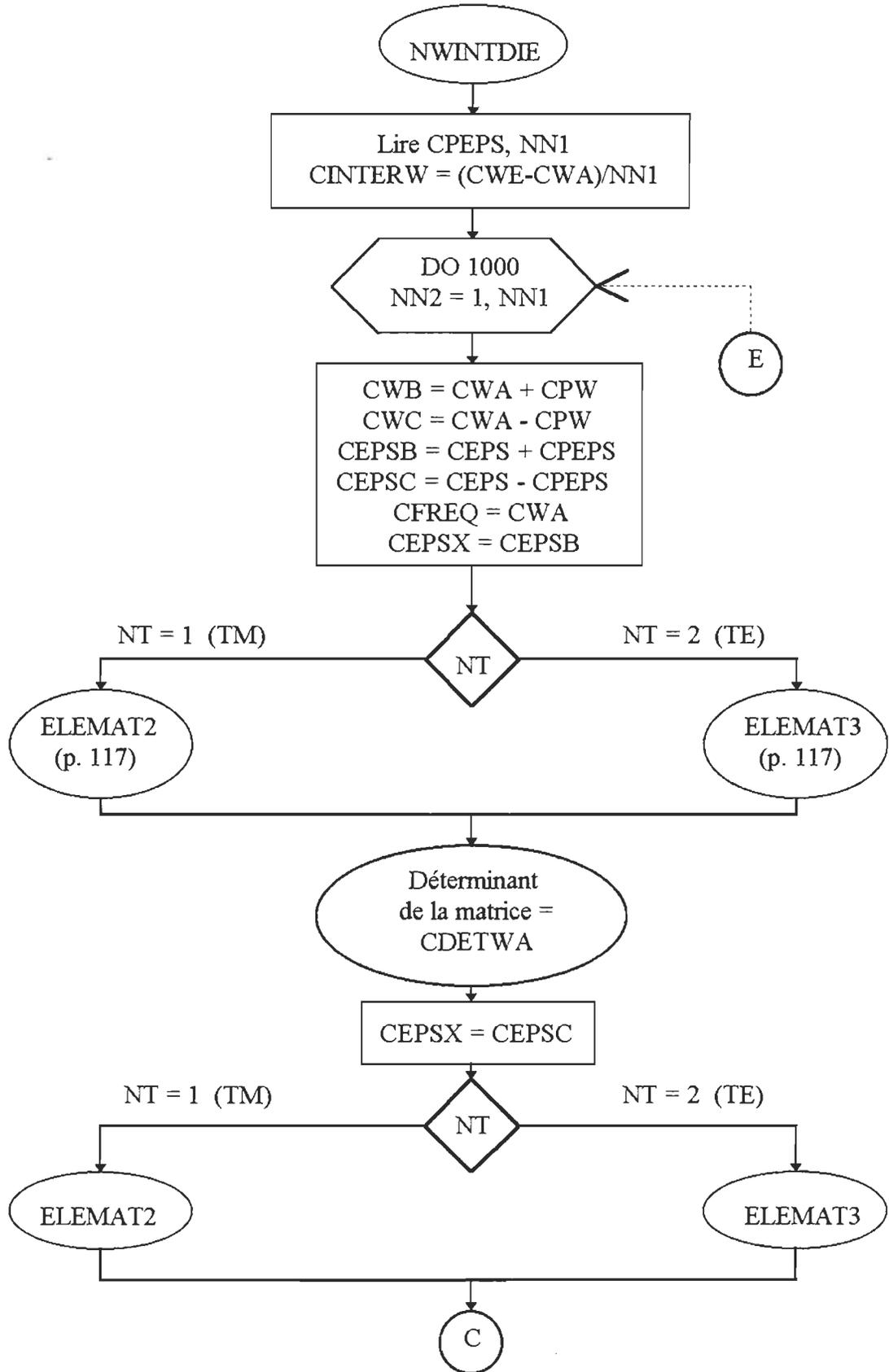
Par la suite, nous présentons une version abrégée de notre code écrit en langage informatique Fortran 90 pour le compilateur Microsoft Power Station. Ce programme fournit aussi de nombreux commentaires.

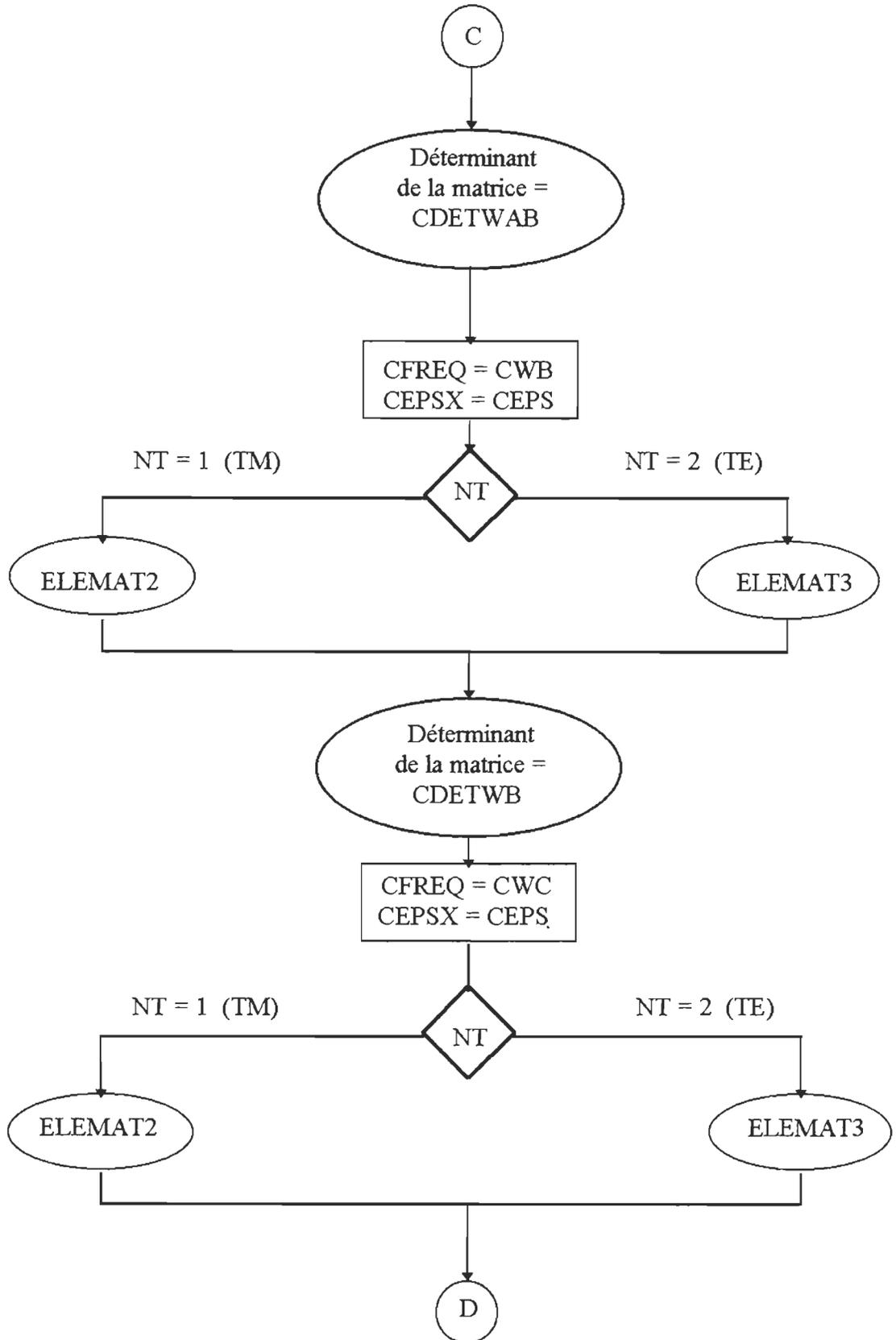


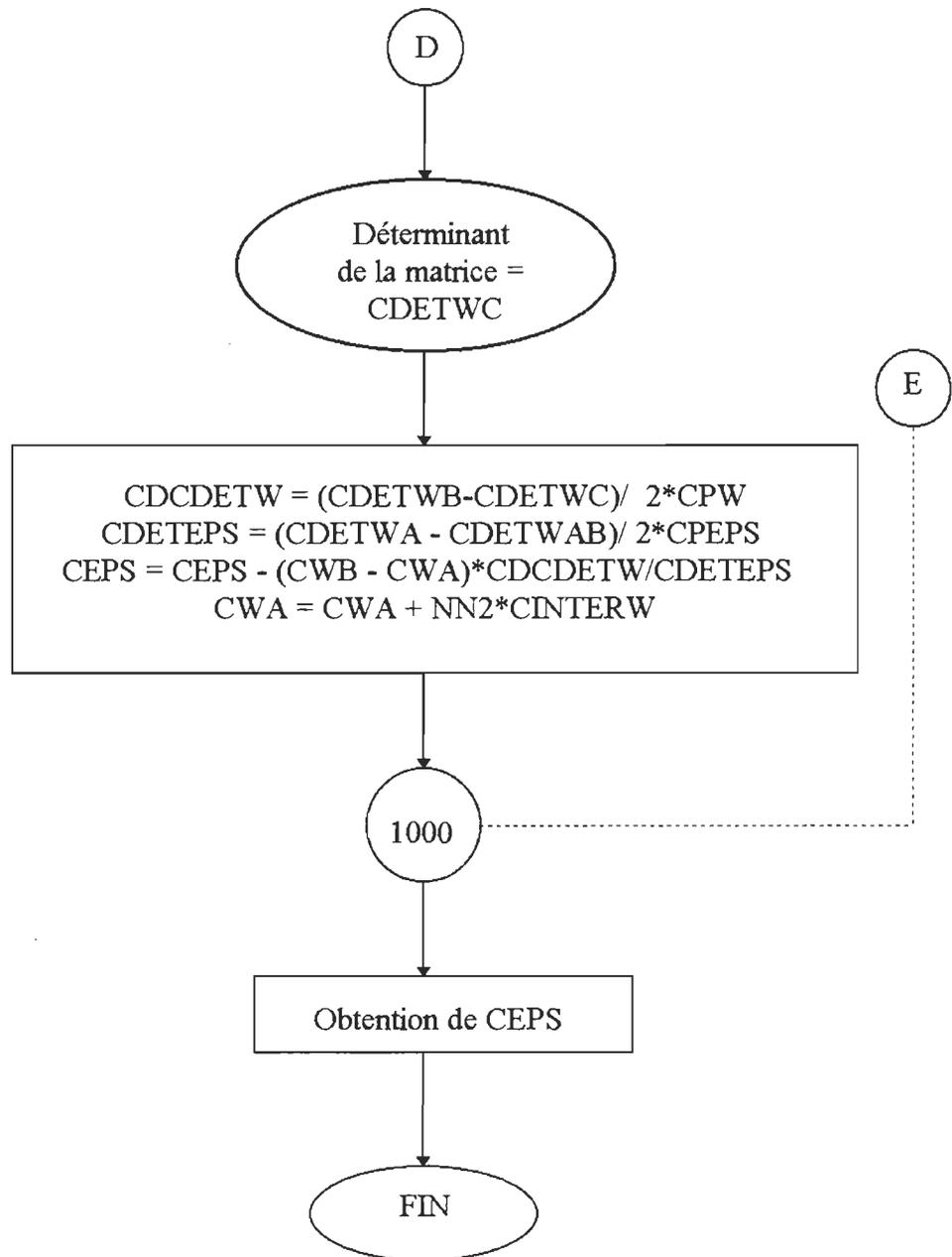


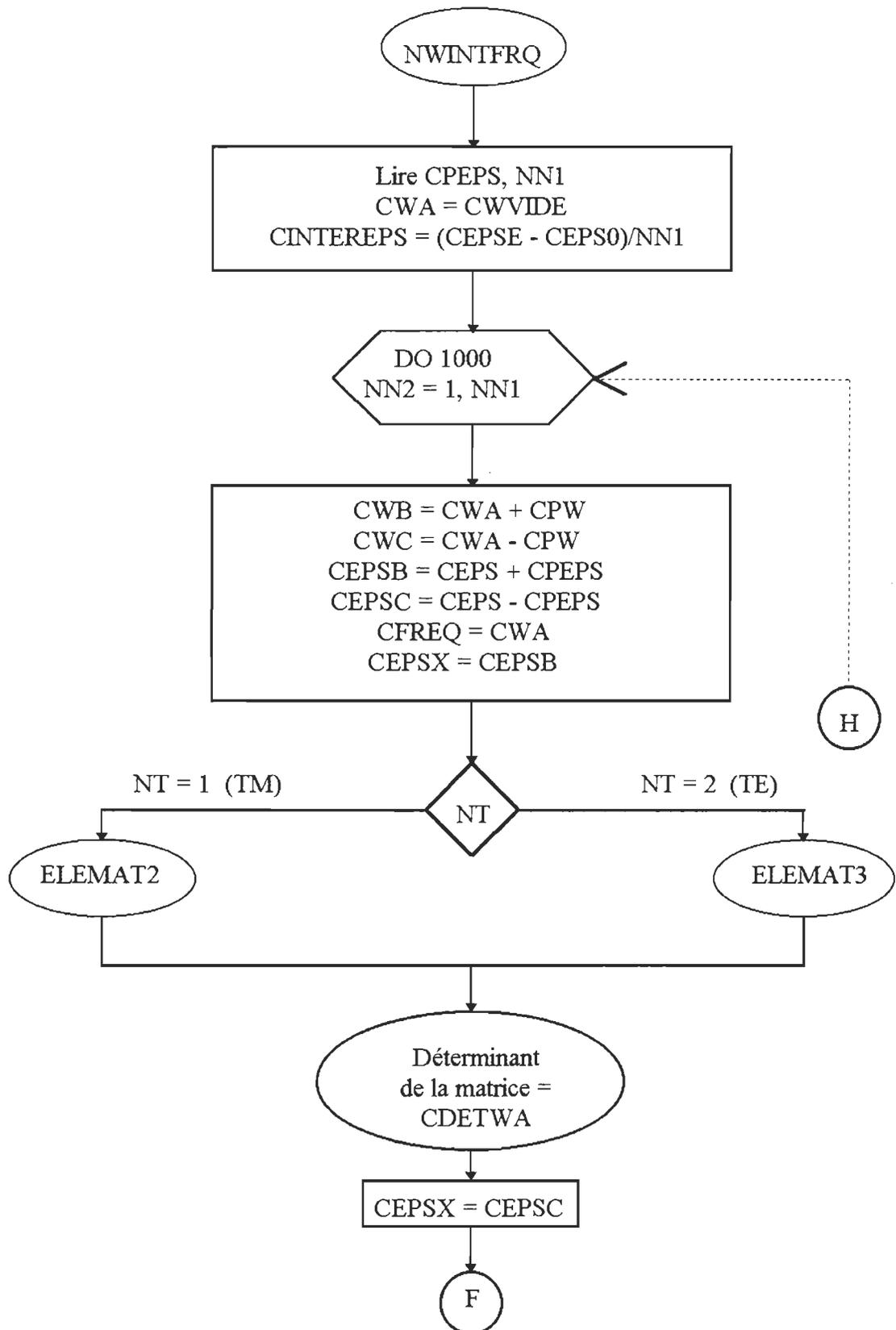


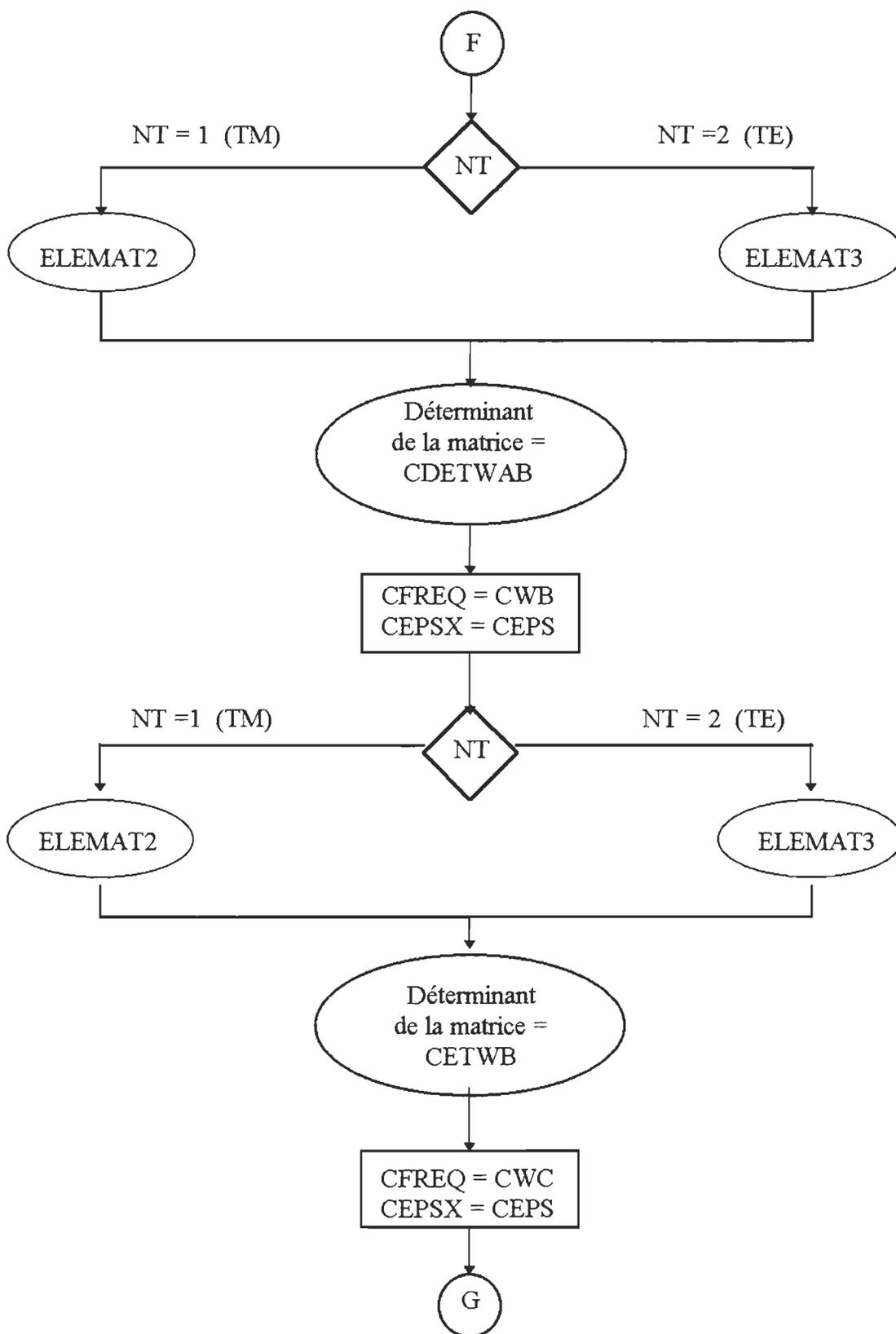


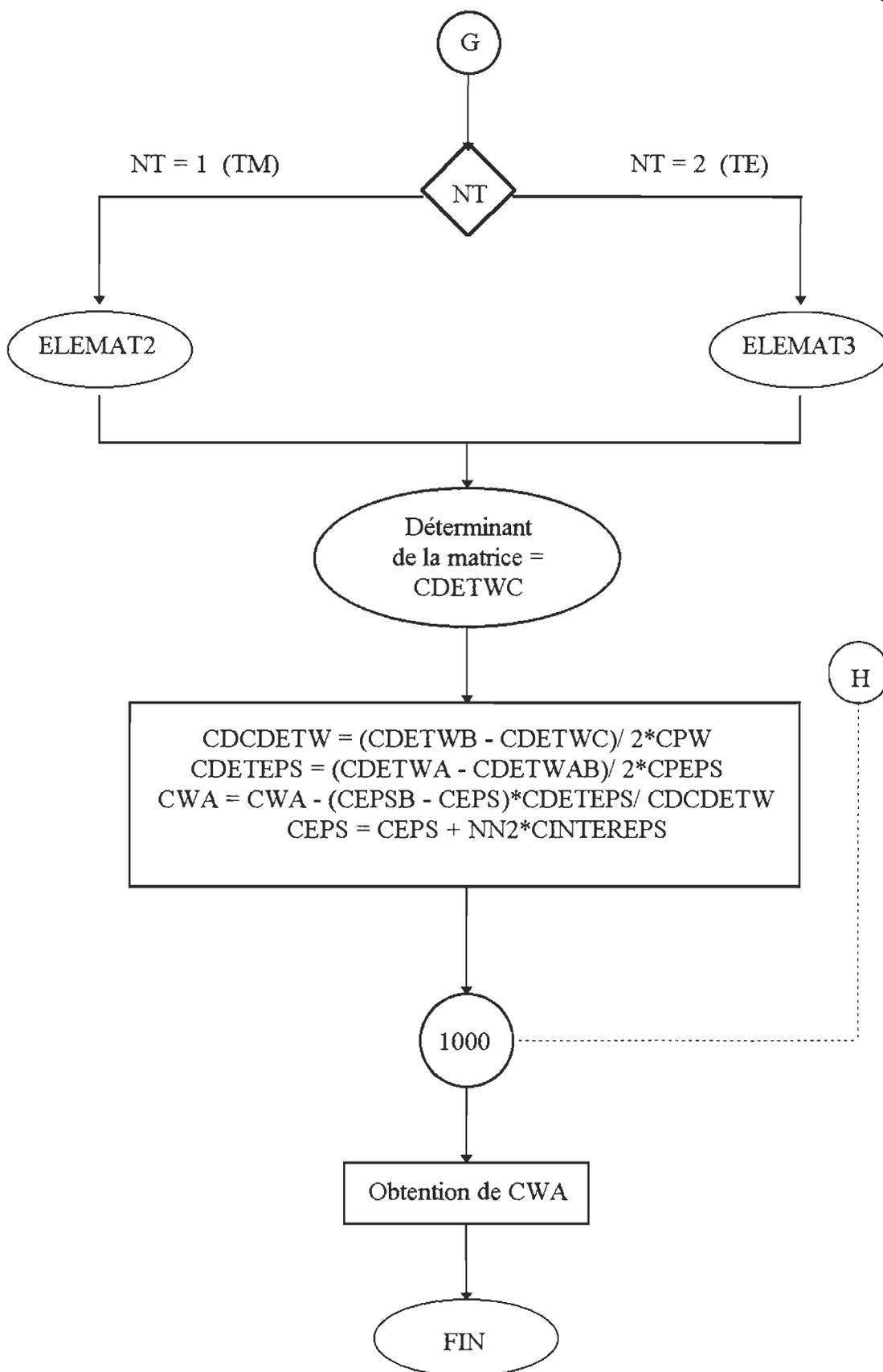


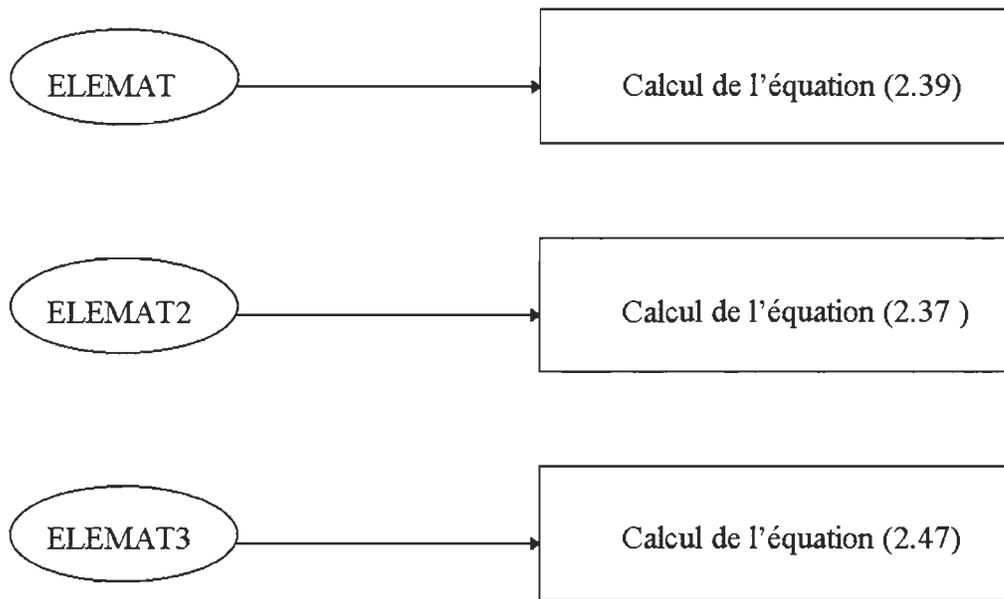












**Figure B-1-** Organigramme détaillé du programme informatique qui résout les équations caractéristiques des modes TM et TE sans variation angulaire pour une cavité ré-entrante contenant un échantillon diélectrique.

```

C *****
C *****
C           PROGRAMME PRINCIPAL
C
C   Ce programme traite de l'equation caracteristique exprimant le lien entre
C   la permittivite complexe d'un echantillon et la frequence de resonance
C   d'une cavite re-entrante. La connaissance de la resonance permet, par
C   l'exploitation de ce programme, de determiner la permittivite, et l'inverse.
C   Nous allons travailler dans les unites du S.I.
C
C *****
C *****

```

```

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC, FW, DETX
PARAMETER NMAX=10000, ND=110
DIMENSION CDET(NMAX), CM(ND,ND)
COMMON/B579/ CEPSE,CWE,CSIGMA/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC
COMMON/B3/ DETX, LL, FW, CDET /H1/ CM, NS/NT/ NT /NHY/NHY

```

```

C-----
C           Lecture des dimensions de la cavite
C-----

```

```

OPEN(4, FILE='INPUT.TXT')
OPEN(5, FILE='INPUT2.TXT')
READ(4,10)R1,R2,R3,L1,D,F
10  FORMAT(E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4)

```

```

C-----
C           Choix du calcul de la permittivite complexe ou de la frequence
C           complexe. Choix du mode de configuration des champs (NT).
C-----

```

```

300  WRITE(*,*)'CHERCHEZ-VOUS LA PERMITTIVITE A PARTIR DE LA FREQUENCE'
      WRITE(*,*)'SOIT 1, OU LE CONTRAIRE, SOIT 2'
      READ(*,*) NFE

```

```

80   WRITE(*,*)'VOULEZ-VOUS LES MODES TM, SOIT 1, LES TE, SOIT 2'
      READ(*,*) NT

```

```

C-----
C      Calcul de la permittivite complexe de l'echantillon. Lecture de la frequence de
C      resonance experimentale (CWE), de la conductivite de l'echantillon (CSIGMA) et
C      de la dimension de la matrice caracteristique (NS)
C-----

```

```

      IF (NFE .EQ. 1) THEN

      READ(4,15) CWE,CSIGMA,NS
15     FORMAT(2E11.4,1X,2E10.4,1X,I3)

      CALL NUM
      CALL FRCVINT
      CALL NWINTVID
      CALL NWINTDIE

      END IF

```

```

C-----
C      Calcul de la frequence complexe de la cavite. Lecture de la permittivite de
C      l'echantillon (CWE), de la conductivite de l'echantillon (CSIGMA) et
C      de la dimension de la matrice caracteristique (NS)
C-----

```

```

      IF (NFE .EQ. 2) THEN

      READ(5,16) CEPSE,CSIGMA,NS
16     FORMAT(2E11.4,1X,2E11.4,1X,I3)

      CALL NUM
      CALL FRCVINT
      CALL NWINTVID
      CALL NWINTFRQ

      END IF

      END

```

```

C*****

```

```

C-----Procedure FRCVINT-----
C-----
C  Determination approximative de la frequence de resonance de la
C  cavite vide par la methode de bisection.
C-----
C-----

```

SUBROUTINE FRCVINT

```

IMPLICIT complex*16(C)
INTEGER PG,LL, TE
real*8 DW,WMIN, WMAX, FW,VLUM, PI,R1, R2, R3, L1, D, F,DELTAC,
&  FAC, PSI, DETX,FACDIV,RLL, EPSMIN,EPSSMAX,DEPS, FEPS
DIMENSION CDET(NMAX),CM(ND,ND),FAC(100), PSI(100)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/B4/ VLUM,PI
COMMON/B579/ CEPSE,CWE, CSIGMA/B3/ DETX, LL, FW, CDET/B52/ FAC,PSI/B53/ CBS,
&  CNM
COMMON/B59/ NINC /B61/WMIN, DW/B62/CK2S,CCCP/F1/ CFREQ /H1/ CM, NS
COMMON/FACD/ FACDIV/NT/ NT /TE/ TE/A5/ CEPSX, CEPS, CPEPS, CEPSB, CEPSC

```

```

C-----
C  Le parametre TE denote l'equation caracteristique du mode TE
C  dans le cas d'une cavite vide.
C-----

```

TE = 1

```

C-----
C  Lecture de la frequence minimum et maximum ainsi que du pas (DW).
C  Pour chacune de ces valeurs de frequence sera calcule le determinant
C  de la matrice caracteristique afin de noter les passages a zero.
C-----

```

```

OPEN(6, FILE='INPUT3.TXT')
READ(6,20) WMIN, WMAX, DW
20  FORMAT(E10.4,1X,E10.4,1X,E10.4)

```

```

PI = 3.1415926535898793D0
VLUM = 2.99792458D+08
NINC = IDINT((WMAX-WMIN)/DW)
FW = WMIN
CFREQ = FW

```

CALL AUTOQ

```

OPEN(3, FILE='FZERO.TXT',FORM='FORMATTED',STATUS='UNKNOWN')

```

```

DO 5 LL = 1, NINC+1

```

```

CFREQ = FW

```

```

IF (NT .EQ. 1) THEN
FACDIV=10D+10
CALL ELEMAT
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
FACDIV=10D+10
CALL ELEMAT3
END IF
IF (NT .EQ. 3) THEN
FACDIV=10D+10
CALL ELEMATH1
END IF
DETX = 1
CALL DETERMIN

WRITE(3,100) LL, FW, CDET(LL)
FW = FW + DW

5    CONTINUE

100  FORMAT('LL =I4,/,FW =E10.4,/,CDET =2E14.7,/)
      END

```

```

C-----Procedure NWINTVID-----
C-----
C    Determination exacte de la frequence de resonance de la cavite vide
C    par la methode de Newton-Raphson. Valeur de depart CWA de la sous-
C    routine FRCVINT. La precision de la frequence est CDETTWA.
C-----
C-----

```

#### SUBROUTINE NWINTVID

```

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC, VLUM, PI, L, DETX, FW
DIMENSION CM(ND,ND), CDET(NMAX)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/B4/ VLUM,PI
COMMON/B3/ DETX, LL, FW, CDET /B577/ CDETWA,CDETWB,CDETWB, CDETWAB,
& CDETTWD
COMMON/B578/ CWVIDE/B579/ CEPSE,CWE, CSIGMA
COMMON/B580/ CWA, CWB, CWC, CPW /F1/ CFREQ /H1/ CM, NS/NT/ NT /TE/ TE

OPEN(7, FILE=FZERO2.TXT)
OPEN(22, FILE=NWINTVID.TXT)
READ(22,556) CWA, CPW
556  FORMAT(2E10.4,1X,2E10.4)

L = L1+D+F

```

```

CJ = (0.0D0,1.0D0)

5  CWB = CWA + CPW
   CWC = CWA - CPW

   CFREQ = CWA
   IF (NT .EQ. 1) THEN
     CALL ELEMAT
   END IF
   IF (NT .EQ. 2) THEN
     CALL ELEMAT3
   END IF

   DETX = 2
   CALL DETERMIN

   CFREQ = CWB
   IF (NT .EQ. 1) THEN
     CALL ELEMAT
   END IF
   IF (NT .EQ. 2) THEN
     CALL ELEMAT3
   END IF

   DETX = 4
   CALL DETERMIN

   CFREQ = CWC
   IF (NT .EQ. 1) THEN
     CALL ELEMAT
   END IF
   IF (NT .EQ. 2) THEN
     CALL ELEMAT3
   END IF

   DETX = 5
   CALL DETERMIN

   CDCDETW = (1/(2.0D0*CPW))*(CDETWB-CDETWC)

   CDELTAW = -CDETTWA/CDCDETW
   CDEFG=CDABS(CDELTAW)

   WRITE(7,110) CWA,CDELTAW,CDETTWA,CDETWB,CDETTWC,CDCDETW
   CWA = CWA + CDELTAW

```

```

IF (CDABS(CDELTAW) .GT. 0.01) GOTO 5
CWVIDE = CWA

110  FORMAT('CWA =2E14.7/, 'CDELTAW =2E14.7/, 'CDETTWA =2E14.7
& /, 'CDETTWB =2E14.7/, 'CDETTWC =2E14.7/, 'CDCDETTW =2E14.7/)

END

```

```

C-----Procedure NWINTDIE-----
C-----
C   Determination de la permittivite complexe de l'echantillon a partir
C   de la frequence complexe de la cavite, par la methode de Newton-
C   Raphson.
C-----
C-----

```

#### SUBROUTINE NWINTDIE

```

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC, VLUM, PI, DETX, FW, FACDIV
DIMENSION CM(ND,ND), CDET(NMAX)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/B3/ DETX, LL, FW, CDET/B4/ VLUM, PI
COMMON/B577/CDETTWA, CDETTWB, CDETTWC, CDETTWAB, CDETTWD
COMMON/B578/CWVIDE/B579/ CEPSE, CWE, CSIGMA
COMMON/B580/CWA, CWB, CWC, CPW /A5/ CEPSX, CEPS, CPEPS, CEPSEB, CEPSC
COMMON /H1/ CM, NS/F1/ CFREQ/FACD/ FACDIV/NT/ NT /TE/ TE

```

```

C-----
C   Le parametre TE denote l'equation caracteristique du mode TE
C   dans le cas d'une cavite avec echantillon dielectrique.
C-----

```

```

TE = 2

```

```

IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL AUTOQ
END IF

```

```

OPEN(16, FILE='DETERM.TXT')

```

```

C-----
C   Lecture de la variation infinitesimale CPEPS contenue dans la derivee
C   et de l'increment entre la frequence experimentale et celle de la
C   cavite vide (NN1).
C-----

```

```

OPEN(23, FILE=NWINTDIE.TXT)
READ(23,557) CPEPS, NN1
557  FORMAT(2E10.4,1X,15)

```

C-----Remarque: CINTERW doit etre positif  
 $CINTERW = (CWE - CWA)/NN1$   
 $CEPS = (1.0D0,0.0D0)$

```
DO 1000 NN2 = 1, NN1+1
```

```

CWB = CWA + CPW
CWC = CWA - CPW
CEPSB = CEPS + 2.0d0*CPEPS
CEPSC = CEPS

```

```

CFREQ = CWA
CEPSX = CEPSB
IF (NT .EQ. 1) THEN
FACDIV=10D+25
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
FACDIV=10D+10
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 2
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWA
CEPSX = CEPSC
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 3
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWB
CEPSX = CEPS
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 4
CALL DETERMIN

```

```
CFREQ = CWC
```

```

CEPSX = CEPS
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 5
CALL DETERMIN

```

```

CDCDETW = (1/(2.0D0*CPW))*(CDETWB-CDETWC)
CDETEPS = (1/(2.0D0*CPEPS))*(CDETWA-CDETWAB)

```

```

WRITE(16,555) CWA,CEPS,CDETWA,CDETWAB,CDETWB,CDETWC
& ,CDCDETW,CDETEPS

```

```

CWA = CWA + CINTERW
CEPS = CEPS - CINTERW*CDCDETW/CDETEPS

```

```

1000 CONTINUE
555  FORMAT('CWA =2E14.7/,',CEPS =2E14.7/,',CDETWA =2E14.7
& /,',CDETWAB =2E14.7/,',CDETWB =2E14.7/,',CDETWC =2E14.7
& /,',CDCDETW =2E14.7/,',CDETEPS =2E14.7,/)

```

```

C-----
C   Raffinement de la methode de Newton-Raphson pour une convergence
C   plus rapide.
C-----

```

```

5   CFREQ = CWE
    CEPSB = CEPS + CPEPS
    CEPSC = CEPS - CPEPS

```

```

CEPSX = CEPS
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 2
CALL DETERMIN

```

```

CEPSX = CEPSB
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF

```

```

DETX = 4
CALL DETERMIN

CEPSX = CEPSC
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 5
CALL DETERMIN

CDCDETW = (1/(2.0D0*CPEPS))*(CDETWB-CDETC)
CDELTEPS = -CDETTA/CDCDETW
CEPS = CEPS + CDELTEPS
IF (CDABS(CDELTEPS) .GT. .001) GOTO 5

OPEN(8, FILE='CEPS.TXT')
WRITE(8,111) CEPS
111  FORMAT(2X, 2E14.7)

END

```

```

C-----Procedure NWINTFRQ-----
C-----
C   Determination de la frequence complexe de la cavite a partir
C   de la permittivite complexe de la substance, par la methode de
C   Newton-Raphson.
C-----
C-----

```

#### SUBROUTINE NWINTFRQ

```

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC, VLUM, PI, L, DETX, FW, RNN2, FACDIV
DIMENSION CM(ND,ND), CDET(NMAX)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/B3/ DETX, LL, FW, CDET/B4/ VLUM, PI
COMMON/B577/ CDETTA, CDETTB, CDETTWC, CDETTWAB, CDETTWD
COMMON/B578/ CWVIDE/B579/ CEPSE, CWE, CSIGMA
COMMON/B580/ CWA, CWB, CWC, CPW /A5/ CEPSX, CEPS, CPEPS, CEPST, CEPSC
COMMON/H1/ CM, NS/F1/ CFREQ /FACD/ FACDIV/NT/ NT/TE/ TE

```

```
TE = 2
```

```

IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL AUTOQ
END IF

```

C-----  
 C     Lecture de la variation infinitesimale CPEPS contenue dans la derivee  
 C     et de l'increment entre la permittivite connue CEPSE et celle du vide  
 C     CEPS.  
 C-----

```

OPEN(23, FILE='NWINTDIE.TXT')
READ(23,557) CPEPS, NN1
557  FORMAT(2E10.4,1X,15)

```

```

OPEN(9, FILE='FZERO3.TXT')

```

```

L = L1+D+F
CJ = (0.0D0,1.0D0)
CWA = CWVIDE
CEPS = (1.0D0,0.0D0)
CINTEREPS = (CEPSE - CEPS)/NN1

```

```

DO 1000 NN2 = 1, NN1+1

```

```

CWB = CWA + CPW
CWC = CWA - CPW
CEPSB = CEPS + 2.0D0*CPEPS
CEPSC = CEPS

```

```

CFREQ = CWA
CEPSX = CEPSB
IF (NT .EQ. 1) THEN
  FACDIV=10D+25
  CALL ELEMAT2
  END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
  FACDIV=10D+30
  CALL ELEMAT3
  END IF

```

```

DETX = 2
CALL DETERMIN
CFREQ = CWA
CEPSX = CEPSC
IF (NT .EQ. 1) THEN
  CALL ELEMAT2
  END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
  CALL ELEMAT3
  END IF
DETX = 3
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWB
CEPSX = CEPS

```

```

IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 4
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWC
CEPSX = CEPS
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 5
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWA
CEPSX = CEPS
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
DETX = 6
CALL DETERMIN

```

```

CDCDETW = (1/(2.0D0*CPW))*(CDETWB-CDETWC)
CDETEPS = (1/(2.0D0*CPEPS))*(CDETWA-CDETWAB)

```

```

WRITE(9,111) CEPS,CWA,CDETWA,CDETWAB,CDETWB,CDETWC,CDETWD,
&CDCDETW,CDETEPS

```

```

RNN2 = DBLE(NN2)
CEPS = CEPS + CINTEREPS

```

```

CWA = CWA - CINTEREPS*CDETEPS/CDCDETW

```

```

1000 CONTINUE
CWA = CWA+CINTEREPS*CDETEPS/CDCDETW
CEPS = CEPS - CINTEREPS

```

```

C-----
C   Raffinement de la methode de Newton-Raphson pour une convergence
C   plus rapide.
C-----

```

```

5   CEPSX = CEPSE
    CWB = CWA + CPW
    CWC = CWA - CPW

```

```

CFREQ = CWA
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 2
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWB
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 4
CALL DETERMIN

```

```

CFREQ = CWC
IF (NT .EQ. 1) THEN
CALL ELEMAT2
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
CALL ELEMAT3
END IF
DETX = 5
CALL DETERMIN

```

```

CDCDETW = (1/(2.0D0*CPW))*(CDETWB-CDETWC)
CDELTAW = -CDETTWA/CDCDETW
CWA = CWA + CDELTAW

```

```

IF (CDABS(CDELTAW) .GT. 0.001) GOTO 5
CWVIDE = CWA

```

```

111  FORMAT('CEPS =2E14.7/, 'CWA =2E14.7/, 'CDETTWA =2E14.7
& /, 'CDETTWAB =2E14.7/, 'CDETTWB =2E14.7/, 'CDETTWC =
& 2E14.7/, 'CDETTWD =2E14.7/, 'CDCDETW =2E14.7/,
& 'CDETTEPS =2E14.7/)

```

```

END

```

```

C-----Procedure ELEMAT-----
C-----
C   Calcul des elements de la matrice caracteristique pour
C   les modes TM de la cavite vide.
C-----
C-----

```

SUBROUTINE ELEMAT

```

IMPLICIT complex*16(C)
COMPLEX*16 BESSI
real*8 RFF,VLUM, PI, L1, D, F, DELTAC, R1, R2, R3, ROTEL, ROTE2,RNNL,RNNS
DIMENSION CM(ND,ND), CG(ND,ND), CQSUM(200)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/B4/ VLUM,PI
COMMON/B62/ CK2S,CCCP/F1/ CFREQ/H1/ CM, NS/Q1/CQSUM/QC/ QCONV

CJ = (0.0D0,1.0D0)

CALL SUM

DO 10 NNL = 0, 2*NS-1

RNNL = DBLE(NNL)
CK2P = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) -
& (RNNL*PI/D)**(2.0D0))

IF (DIMAG(CK2P) .EQ. 0) THEN
CPJ221 = CJN(CK2P*R2,1)
CBP221 = CPJ221
END IF

IF (DIMAG(CK2P) .NE. 0) THEN
CCK2P = -CJ*CK2P
CPI221 = DCMLPX(BESSI(CCK2P*R2,1))
CBP221 = CJ*CPI221
END IF

DO 20 NSS = 0, 2*NS-1

RNNS = DBLE(NSS)
CK2S = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) -
& (RNNS * PI / D)**(2.0D0))

IF (DIMAG(CK2S) .EQ. 0) THEN
CSJ220 = CJN(CK2S*R2,0)
CBS220 = CSJ220
END IF

IF (DIMAG(CK2S) .NE. 0) THEN
CCK2S = -CJ*CK2S
CSI220 = DCMLPX(BESSI(CCK2S*R2,0))

```

```

CBS220 = CSI220
END IF

CCCP = (0.0D0,0.0D0)
Q = 0
DO 365 Q = 0,QCONV

ROTE1=RFF(Q,NNL)
ROTE2=RFF(Q,NSS)
CCCP1 = ROTЕ1*ROTE2*CQSUM(Q+1)
CCCP = CCCP + CCCP1

365 CONTINUE

DIRAC3=DIRAC(NNL,0)
CG(NNL+1,NSS+1)=(4.0D0/((L1+D+F)*D))*
& (CK2S/(1+DIRAC3))*CCCP
CDEF = CG(NNL+1,NSS+1)

IF (NNL .EQ. NSS) THEN
CM(NNL+1,NSS+1)=CBP221-CDEF*CBS220
END IF

IF (NNL .NE. NSS) THEN
CM(NNL+1,NSS+1) = -CDEF*CBS220
END IF

20 CONTINUE
10 CONTINUE

END

```

```

C-----Procedure ELEMAT2-----
C-----
C   Calcul des elements de la matrice caracteristique pour
C   les modes TM de la cavite avec echantillon.
C-----
C-----

```

#### SUBROUTINE ELEMAT2

```

IMPLICIT complex*16(C)
COMPLEX*16 BESSI,BESSK
real*8 DW,WMIN, L, FW,VLUM, PI,R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC, FAC,
PSI,DETX,RFF,ROTE1,
&ROTE2
DIMENSION CDET(NMAX), CM(ND,ND),FAC(100),PSI(100),CG(ND,ND),CQSUM(200)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC
COMMON/B577/ CDETTWA,CDETTWB,CDETTWC, CDETTWAB, CDETTWD /B4/ VLUM,PI

```

```

COMMON/B579/ CEPSE,CWE, CSIGMA/B3/ DETX, LL, FW, CDET/B52/ FAC,PSI/B53/ CBS,
&   CNM
COMMON/B59/ NINC /B61/WMIN, DW/B62/CK2S,CCCP/F1/ CFREQ/B580/CWA, CWB, CWC,
&   CPW
COMMON/A5/ CEPSX, CEPS, CPEPS, CEPSEB, CEPSC/H1/ CM, NS/Q1/ CQSUM/QC/ QCONV

```

```
CALL SUM
```

```

L = L1 + D + F
CEPS00 = (1.0D0,0.0D0)
CJ = (0.0D0,1.0D0)

```

```
DO 10 LL1 = 0, 2*NS-1
```

```

CK1P=CDSQRT(((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0)*((CEPSX/CEPS00)+
& (CSIGMA/CJ*CEPS00*CFREQ*2.0D0*PI)) - (LL1 * PI / D)**2.0D0)
CK2P = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0 - (LL1*PI/D)**2.0D0)

```

```
IF (DIMAG(CK2P) .EQ. 0) THEN
```

```

CPJ221 = CJN(CK2P*R2,1)
CPJ210 = CJN(CK2P*R1,0)
CPJ211 = CJN(CK2P*R1,1)
CPY211 = CYN(CK2P*R1,1)
CPY210 = CYN(CK2P*R1,0)
CPY221 = CYN(CK2P*R2,1)
CB2P221 = CPJ221
CB2P210 = CPJ210
CB2P211 = CPJ211
CN2P211 = CPY211
CN2P210 = CPY210
CN2P221 = CPY221
END IF

```

```
IF (DIMAG(CK2P) .NE. 0) THEN
```

```

CCK2P = -CJ*CK2P
CPI221 = DCMLX(BESSI(CCK2P*R2,1))
CPI210 = DCMLX(BESSI(CCK2P*R1,0))
CPI211 = DCMLX(BESSI(CCK2P*R1,1))
CPK211 = DCMLX(BESSK(CCK2P*R1,1))
CPK210 = DCMLX(BESSK(CCK2P*R1,0))
CPK221 = DCMLX(BESSK(CCK2P*R1,1))
CB2P221 = CJ*CPI221
CB2P210 = CPI210
CB2P211 = CJ*CPI211
CN2P211 = (2*CJ/PI)*CPK211 - CPI211
CN2P210 = (-2/PI)*CPK210 + CJ*CPI210
CN2P221 = (2*CJ/PI)*CPK221 - CPI221
END IF

```

```
IF (DIMAG(CK1P) .EQ. 0) THEN
```

```
CPJ110 = CJN(CK1P*R1,0)
```

```

CPJ111 = CJN(CK1P*R1,1)
CB1P110 = CPJ110
CB1P111 = CPJ111
END IF

```

```

IF (DIMAG(CK1P) .NE. 0) THEN
CCK1P = -CJ*CK1P
CPI110 = DCMLPX(BESSI(CCK1P*R1,0))
CPI111 = DCMLPX(BESSI(CCK1P*R1,1))
CB1P110 = CPI110
CB1P111 = CJ*CPI111
END IF

```

```

DO 20 NSS = 0, 2*NS-1

```

```

CK1S=CDSQRT(((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0)*((CEPSX/CEPS00)+
& (CSIGMA/CJ*CEPS00*CFREQ*2.0D0*PI) - (NSS * PI / D)**2.0D0)
CK2S = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0-(NSS * PI / D)**2.0D0)

```

```

IF (DIMAG(CK2S) .EQ. 0) THEN
CSJ220 = CJN(CK2S*R2,0)
CSJ210 = CJN(CK2S*R1,0)
CSJ211 = CJN(CK2S*R1,1)
CSY211 = CYN(CK2S*R1,1)
CSY210 = CYN(CK2S*R1,0)
CSY220 = CYN(CK2S*R2,0)
CB2S220 = CSJ220
CB2S210 = CSJ210
CB2S211 = CSJ211
CN2S211 = CSY211
CN2S210 = CSY210
CN2S220 = CSY220
END IF

```

```

IF (DIMAG(CK2S) .NE. 0) THEN
CCK2S = -CJ*CK2S
CSI220 = DCMLPX(BESSI(CCK2S*R2,0))
CSI210 = DCMLPX(BESSI(CCK2S*R1,0))
CSI211 = DCMLPX(BESSI(CCK2S*R1,1))
CSK211 = DCMLPX(BESSK(CCK2S*R1,1))
CSK210 = DCMLPX(BESSK(CCK2S*R1,0))
CSK220 = DCMLPX(BESSK(CCK2S*R2,0))
CB2S220 = CSI220
CB2S210 = CSI210
CB2S211 = CJ*CSI211
CN2S211 = (2*CJ/PI)*CSK211 - CSI211
CN2S210 = (-2/PI)*CSK210 + CJ*CSI210
CN2S220 = (-2/PI)*CSK220 + CJ*CSI220
END IF

```

```

IF (DIMAG(CK1S) .EQ. 0) THEN

```

```

CSJ110 = CJN(CK1S*R1,0)
CSJ111 = CJN(CK1S*R1,1)
CB1S110 = CSJ110
CB1S111 = CSJ111
END IF

IF (DIMAG(CK1S) .NE. 0) THEN
CCK1S = -CJ*CK1S
CS110 = DCMPLX(BESSI(CCK1S*R1,0))
CS111 = DCMPLX(BESSI(CCK1S*R1,1))
CB1S110 = CS110
CB1S111 = CJ*CS111
END IF

CCCP = (0.0D0,0.0D0)

DO 365 Q = 0,QCONV

ROTE1=RFF(Q,LL1)
ROTE2=RFF(Q,NSS)
CCCP1 = ROTЕ1*ROTE2*CQSUM(Q+1)
CCCP = CCCP + CCCP1

365  CONTINUE

DIRAC3=DIRAC(LL1,0)
CG(LL1+1,NSS+1)=(4.0D0/((L1+D+F)*D))*
& (CK2S/(1+DIRAC3))*CCCP
CDEF = CG(LL1+1,NSS+1)
CS1 = CB2S220*((CK1S/CK2S)*(CJ*CFREQ/(CSIGMA+CJ*CFREQ*CEPSX))*
&CN2S211*CB1S110 - CN2S210*CB1S111)
CS2 = CN2S220*((CK1S/CK2S)*(CJ*CFREQ/(CSIGMA+CJ*CFREQ*CEPSX))*
&CB2S211*CB1S110 - CB2S210*CB1S111)

IF (LL1 .EQ. NSS) THEN
CP1 = CB2P221*((CK1P/CK2P)*(CJ*CFREQ/(CSIGMA+CJ*CFREQ*CEPSX))*
&CN2P211*CB1P110 - CN2P210*CB1P111)
CP2 = CN2P221*((CK1P/CK2P)*(CJ*CFREQ/(CSIGMA+CJ*CFREQ*CEPSX))*
&CB2P211*CB1P110 - CB2P210*CB1P111)
CM(LL1+1,NSS+1)=CK2P*(CP2 - CP1) - CDEF*CK2S*(CS2 - CS1)
END IF

IF (LL1 .NE. NSS) THEN
CM(LL1+1,NSS+1) = CDEF*CK2S*(CS1 - CS2)
END IF

20  CONTINUE
10  CONTINUE

RETURN
END

```

```

C-----Procedure ELEMAT3-----
C-----
C   Calcul des elements de la matrice caracteristique pour
C   les modes TE de la cavite vide et pleine.
C-----
C-----

```

SUBROUTINE ELEMAT3

```

IMPLICIT complex*16(C)
COMPLEX*16 BESSI, BESSK
real*8 RFF, VLUM, PI, L1, D, F, DELTAC, R1, R2, R3, ROTE1, ROTE2, RNNL, RNSS
DIMENSION CM(ND,ND), CG(ND,ND), CQSUM(200)
COMMON/A5/ CEPSX, CEPS, CPEPS, CEPSC/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC
COMMON/B4/ VLUM, PI/B62/ CK2S, CCCP/F1/ CFREQ/H1/ CM, NS/Q1/ CQSUM/QC/ QCONV

CJ = (0.0D0, 1.0D0)

CALL SUM

DO 10 NNL = 0, 2*NS-1

RNNL = DBLE(NNL)
CK3P = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) - (RNNL*PI / (L1 + D + F))**(2.0D0))

IF (DIMAG(CK3P) .EQ. 0) THEN
  CPY331 = CYN(CK3P*R3,1)
  CPJ321 = CJN(CK3P*R2,1)
  CPJ331 = CJN(CK3P*R3,1)
  CPY321 = CYN(CK3P*R2,1)
  CNP331 = CPY331
  CBP321 = CPJ321
  CBP331 = CPJ331
  CNP321 = CPY321
END IF

IF (DIMAG(CK3P) .NE. 0) THEN
  CCK3P = -CJ*CK3P
  CPK331 = DCMLPX(BESSK(CCK3P*R3,1))
  CPI331 = DCMLPX(BESSI(CCK3P*R3,1))
  CPI321 = DCMLPX(BESSI(CCK3P*R2,1))
  CPK321 = DCMLPX(BESSK(CCK3P*R2,1))
  CNP331 = (2*CJ/PI)*CPK331 - CPI331
  CBP321 = CJ*CPI321
  CBP331 = CJ*CPI331
  CNP321 = (2*CJ/PI)*CPK321 - CPI321
END IF

DO 20 NSS = 0, 2*NS-1
RNSS = DBLE(NSS)
CK3S = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) -

```

```

& (RNSS*PI / (L1 + D + F))**(2.0D0))

IF (DIMAG(CK3S) .EQ. 0) THEN
  CSY331 = CYN(CK3S*R3,1)
  CSJ320 = CJN(CK3S*R2,0)
  CSJ331 = CJN(CK3S*R3,1)
  CSY320 = CYN(CK3S*R2,0)
  CNS331 = CSY331
  CBS320 = CSJ320
  CBS331 = CSJ331
  CNS320 = CSY320
END IF

IF (DIMAG(CK3S) .NE. 0) THEN
  CCK3S = -CJ*CK3S
  CSK331 = DCMPLX(BESSK(CCK3S*R3,1))
  CSI331 = DCMPLX(BESSI(CCK3S*R3,1))
  CSI320 = DCMPLX(BESSI(CCK3S*R2,0))
  CSK320 = DCMPLX(BESSK(CCK3S*R2,0))
  CNS331 = (2*CJ/PI)*CSK331 - CSI331
  CBS320 = CSI320
  CBS331 = CJ*CSI331
  CNS320 = -(2/PI)*CSK320 + CJ*CSI320
END IF

CCCP = (0.0D0,0.0D0)

DO 365 Q = 0,QCONV

  ROTE1=RFF(NNL,Q)
  ROTE2=RFF(NSS,Q)
  CCCP1 = ROTE1*ROTE2*CQSUM(Q+1)
  CCCP = CCCP + CCCP1

365  CONTINUE

  CG(NNL+1,NSS+1)=(4.0D0/((L1+D+F)*D))*CK3S*CCCP
  CDEF = CG(NNL+1,NSS+1)

  IF (NNL .EQ. NSS) THEN
    CM(NNL+1,NSS+1)=(CNP331*CBP321 - CBP331*CNP321) -
&CDEF*(CNS331*CBS320 - CBS331*CNS320)
  END IF

  IF (NNL .NE. NSS) THEN
    CM(NNL+1,NSS+1) = -CDEF*(CNS331*CBS320 - CBS331*CNS320)

  END IF
20  CONTINUE
10  CONTINUE
END

```

```

C-----Procedure DETERMIN-----
C-----
C   Calcul du determinant d'une matrice par la methode de Gauss.
C-----
C-----

```

SUBROUTINE DETERMIN

```

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 FACDIV,DETX, FW,A1,A2
DIMENSION CM(ND,ND),CDET(NMAX),CFC(100),CGC(100)
COMMON/B3/ DETX, LL, FW, CDET/B577/CDETWA, CDETWB, CDETC, CDETWAB,
&   CDETD
COMMON/B579/ CEPSE,CWE, CSIGMA/G632/ n,np, D /H1/ CM, NS/FACD/ FACDIV/F1/
&   CFREQ

```

```

C-----
C   Les elements de la matrice sont enormes. Nous devons donc trouver
C   un facteur de division qui permet, lors de la multiplication
C   des elements diagonaux, d'eviter les valeurs nulles ou les overflow.
C-----

```

N = 2\*NS

```

DO 138 I=1,N
DO 139 J=1,N
CM(I,J) = CM(I,J)/FACDIV
OPEN(75,FILE='MATRICE.TXT')
WRITE(75,667) I,J,CM(I,J)
667  FORMAT(I3,1X,I3,1X,2E14.7)
139  CONTINUE
138  CONTINUE

```

CALL LUDCMP

```

C-----
C   Ordre decroissant des elements diagonaux et multiplication du plus
C   grand par le plus petit pour eviter les zeros ou les overflows
C-----

```

```

DO 981 J = 1,N
CFC(J) = CM(J,J)
981  CONTINUE
DO 882 Z=1,N
DO 982 J=1,N-1

A1 = CDABS(CFC(J))
A2 = CDABS(CFC(J+1))
IF (A1 .GT. A2) THEN
CX = CFC(J)
CFC(J) = CFC(J+1)

```

```

      CFC(J+1) = CX
      END IF
982  CONTINUE
882  CONTINUE

      DO 783 J=0,N/2-1
      CGC(J+1)=CFC(J+1)*CFC(N-J)
783  CONTINUE

      CDETXX=D*(1.0D0,0.0D0)
      DO 11 J=1,N/2
      CDETXX = CDETXX*CGC(J)
11   CONTINUE

      IF (DETX .EQ. 1) CDET(LL) = CDETXX
      IF (DETX .EQ. 2) CDETWA = CDETXX
      IF (DETX .EQ. 3) CDETWAB = CDETXX
      IF (DETX .EQ. 4) CDETWB = CDETXX
      IF (DETX .EQ. 5) CDETWC = CDETXX
      IF (DETX .EQ. 6) CDETDW = CDETXX

      RETURN
      END

```

```

C-----Procedure LUDCMP-----
C-----
C   Diagonalisation des elements d'une matrice
C-----
C-----

```

#### SUBROUTINE LUDCMP

```

      IMPLICIT complex*16(C)
      complex*16 dum,vv, aamax, sum
      real*8 FW, DETX, ABSO
      DIMENSION CM(ND,ND), vv(110), INDX(110), CDET(NMAX)
      COMMON/G632/ n,np, D/B3/ DETX, LL, FW, CDET
      COMMON/B577/ CDETWA, CDETWB, CDETWC, CDETWAB, CDETDW/H1/ CM, NS

      D=1

      do 12 i=1,n
      do 11 j=1,n
      CLI = CM(i,j)
      ABSO = CDABS(CLI)
      if (ABSO .gt. 0) aamax=CDABS(CLI)
11   continue
12  continue

```

```

    if (CDABS(aamax) .eq. 0) pause 'singular matrix in ludcmp'
    vv(i)=1./aamax
12  continue
    do 19 j=1,n
    do 14 i=1,j-1
        sum = CM(i,j)

        do 13 k=1,i-1
            sum = sum - CM(i,k)*CM(k,j)
13  continue
        CM(i,j)=sum
14  continue

    do 16 i=j,n
        sum = CM(i,j)

        do 15 k=1,j-1
            sum = sum - CM(i,k)*CM(k,j)

15  continue

        CM(i,j)=sum
        dum = vv(i)*CDABS(sum)
        if (CDABS(dum) .ge. 0) then
            imax=i
            aamax=dum
        endif
16  continue
        if (j.ne.imax)then
            do 17 k=1,n
                dum=CM(imax,k)
                CM(imax,k)=CM(j,k)
                CM(j,k)=dum
17  continue
            D=-D
            vv(imax)=vv(j)
        endif
        indx(j)=imax
        if(j.ne.n)then
            dum=1./CM(j,j)
            do 18 i=j+1,n
                CM(i,j)=CM(i,j)*dum
18  continue
        endif
19  continue
    return
END

```

```

C-----Procedure AUTOQ-----
C-----
C      Determination automatique de la valeur Q pour la convergence
C      des relations de la routine SUM afin d'eviter les overflow.
C-----
C-----

```

SUBROUTINE AUTOQ

```

IMPLICIT COMPLEX*16(C)
REAL*8 PI,L1,D,F,VLUM,DELTAC,RQ,R1,R2,R3
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC
COMMON/F1/ CFREQ/B4/ VLUM,PI/B579/ CEPSE,CWE,CSIGMA/QC/ QCONV /NT/ NT

```

```

CJ = (0.0D0,1.0D0)

```

```

IF (NT .EQ. 1) THEN

```

```

DO 365 Q = 0,50

```

```

RQ = DBLE(Q)
CK3Q = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) -
& (RQ*PI / (L1 + D + F))**(2.0D0))
CRARG1 = CK3Q*(R3-R2)

```

```

C-----Remarque: La limite d'un argument est de 695
IF (CDABS(CRARG1) .GE. 695) GO TO 50

```

```

QCONV = Q
365 CONTINUE
GO TO 20
50 QCONV=(Q-1)
20 CONTINUE
IF (QCONV .GT. 50) THEN
QCONV = 50
END IF

```

```

END IF

```

```

IF (NT .EQ. 2) THEN
CEPSXX = (1.0D0,0.0D0)
CEPS00 = (1.0D0,0.0D0)
DO 367 Q = 0,50

```

```

C-----Remarque: Nous prenons la plus petite permittivite et la plus petite
C      frequence car l'argument tend a avoir une plus grande
C      partie imaginaire plutot que reelle et les overflows
C      apparaissent a cause des fonctions de Bessel modifiees.

```

```

RQ = DBLE(Q)
CK2Q = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0-(RQ*PI/D)**2.0D0)
CK1Q=CDSQRT(((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0)*((CEPSXX/CEPS00)+

```

```

& (CSIGMA/CJ*CEPS00*CFREQ*2.0D0*PI) - (RQ * PI / D)**2.0D0)

IF (DIMAG(CK2Q) .GE. DIMAG(CK1Q)) THEN
  CK = CK2Q
ELSE
  CK = CK1Q
END IF
C-----Remarque: Je considere le plus grand rayon de ma cavite...
  CRARG1 = CK*R2

IF (CDABS(CRARG1) .GE. 300) GO TO 53

  QCONV = Q
367 CONTINUE
  GO TO 23
53 QCONV=Q
23 CONTINUE
  IF (QCONV .GT. 50) THEN
    QCONV = 50
  END IF

  END IF

  IF (NT .EQ. 3) THEN

    DO 366 Q = 0,50

      RQ = DBLE(Q)
      CK3Q = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) -
& (RQ*PI / (L1 + D + F))**(2.0D0))
      CRARG1 = CK3Q*R3

      IF (CDABS(CRARG1) .GE. 695) GO TO 51

      QCONV = Q
366 CONTINUE
      GO TO 21
51 QCONV=(Q-1)
21 CONTINUE
      IF (QCONV .GT. 50) THEN
        QCONV = 50
      END IF

      END IF

      RETURN
    END

```

```

C-----Procedure SUM-----
C-----
C      Calcul des relations convergentes inclues dans les
C      equations caracteristique des nos modes.
C-----
C-----

```

SUBROUTINE SUM

```

IMPLICIT COMPLEX*16(C)
COMPLEX*16 MBESSI, MBESSK, BESSI, BESSK
REAL*8 PI,L1,D,F,VLUM,DELTAC,RQ,R1,R2,R3,RARG1,RARG2
DIMENSION CQSUM(200),CF5Q(200),CF6Q(200),CRJJ(200)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/F1/ CFREQ/B4/ VLUM,PI
COMMON/B579/ CEPSE,CWE,CSIGMA/A5/ CEP SX, CEPS, CPEPS, CEPSB, CEPSC
COMMON/Q1/ CQSUM/Q2/ CF5Q, CF6Q, CRJJ/QC/ QCONV/NT/ NT/NHY/ NHY/TE/ TE

CJ = (0.0D0,1.0D0)

DO 365 Q = 0,QCONV

RQ = DBLE(Q)
CK3Q = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**(2.0D0) -
& (RQ*PI / (L1 + D + F))**(2.0D0))

IF (NT .EQ. 1) THEN

IF (DIMAG(CK3Q) .EQ. 0) THEN
CQY330 = CYN(CK3Q*R3,0)
CQJ321 = CJN(CK3Q*R2,1)
CQJ330 = CJN(CK3Q*R3,0)
CQY321 = CYN(CK3Q*R2,1)
CQJ320 = CJN(CK3Q*R2,0)
CQY320 = CYN(CK3Q*R2,0)
DIRAC2=DIRAC(Q,0)
CQSUM(Q+1) = (1/((1+DIRAC2)*CK3Q))*
& ((CQY330*CQJ321-CQJ330*CQY321)/(CQY330*CQJ320-CQJ330*CQY320))
END IF

IF (DIMAG(CK3Q) .NE. 0) THEN
CCK3Q = -CJ*CK3Q
CQK330 = DCMPLX(MBESSK(CCK3Q*R3,0))
CQI321 = DCMPLX(MBESSI(CCK3Q*R2,1))
CQI330 = DCMPLX(MBESSI(CCK3Q*R3,0))
CQK321 = DCMPLX(MBESSK(CCK3Q*R2,1))
CQI320 = DCMPLX(MBESSI(CCK3Q*R2,0))
CQK320 = DCMPLX(MBESSK(CCK3Q*R2,0))

DIRAC2 = DIRAC(Q,0)
RARG1 = CCK3Q*R2-CCK3Q*R3
RARG2 = CCK3Q*R3-CCK3Q*R2

```

```

CEXP1 = EXP(RARG1)
CEXP2 = EXP(RARG2)
CQSUM(Q+1) = (1/((1+DIRAC2)*CK3Q))*CJ*
&((CEXP1*CQK330*CQI321+CEXP2*CQI330*CQK321)/
&(CEXP1*CQK330*CQI320-CEXP2*CQI330*CQK320))

END IF
END IF

IF (NT .EQ. 2) THEN

IF (TE .EQ. 1) THEN

RQ = DBLE(Q)
CK2Q = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0-(RQ*PI/D)**2.0D0)
IF (DIMAG(CK2Q) .EQ. 0 ) THEN
CQJ220 = CJN(CK2Q*R2,0)
CQJ221 = CJN(CK2Q*R2,1)
CQSUM(Q+1) = CQJ221/(CK2Q*CQJ220)
END IF
IF (DIMAG(CK2Q) .NE. 0 ) THEN
CCK2Q = -CJ*CK2Q
CQI220 = DCMPLX(BESSI(CCK2Q*R2,0))
CQI221 = DCMPLX(BESSI(CCK2Q*R2,1))
CQSUM(Q+1) = (CJ*CQI221)/(CK2Q*CQI220)
END IF
END IF

IF (TE .EQ. 2) THEN
CEPS00 = (1.0D0,0.0D0)
RQ = DBLE(Q)
CK2Q = CDSQRT((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0-(RQ*PI/D)**2.0D0)
CK1Q=CDSQRT(((2.0D0*PI*CFREQ/VLUM)**2.0D0)*((CEPSX/CEPS00)+
&(CSIGMA/CJ*CEPS00*CFREQ*2.0D0*PI)) - (RQ * PI / D)**2.0D0)

IF (DIMAG(CK2Q) .EQ. 0) THEN
CQJ221 = CJN(CK2Q*R2,1)
CQY221 = CYN(CK2Q*R2,1)
CQJ220 = CJN(CK2Q*R2,0)
CQY220 = CYN(CK2Q*R2,0)
CQY211 = CYN(CK2Q*R1,1)
CQY210 = CYN(CK2Q*R1,0)
CQJ211 = CJN(CK2Q*R1,1)
CQJ210 = CJN(CK2Q*R1,0)
CBQ221 = CQJ221
CNQ221 = CQY221
CBQ220 = CQJ220
CNQ220 = CQY220
CNQ211 = CQY211
CNQ210 = CQY210
CBQ211 = CQJ211

```

```
CBQ210 = CQJ210
END IF
```

```
IF (DIMAG(CK2Q) .NE. 0) THEN
CCK2Q = -CJ*CK2Q
CQI221 = DCMPLX(BESSI(CCK2Q*R2,1))
CQK221 = DCMPLX(BESSK(CCK2Q*R2,1))
CQI220 = DCMPLX(BESSI(CCK2Q*R2,0))
CQK220 = DCMPLX(BESSK(CCK2Q*R2,0))
CQK211 = DCMPLX(BESSK(CCK2Q*R1,1))
CQI211 = DCMPLX(BESSI(CCK2Q*R1,1))
CQK210 = DCMPLX(BESSK(CCK2Q*R1,0))
CQI210 = DCMPLX(BESSI(CCK2Q*R1,0))
CBQ221 = CJ*CQI221
CNQ221 = (2*CJ/PI)*CQK221 - CQI221
CBQ220 = CQI220
CNQ220 = CJ*CQI220 - (2/PI)*CQK220
CNQ211 = (2*CJ/PI)*CQK211 - CQI211
CNQ210 = CJ*CQI210 - (2/PI)*CQK210
CBQ211 = CJ*CQI211
CBQ210 = CQI210
END IF
```

```
IF (DIMAG(CK1Q) .EQ. 0) THEN
CQJ110 = CJN(CK1Q*R1,0)
CQJ111 = CJN(CK1Q*R1,1)
CBQ110 = CQJ110
CBQ111 = CQJ111
END IF
```

```
IF (DIMAG(CK1Q) .NE. 0) THEN
CCK1Q = -CJ*CK1Q
CQI110 = DCMPLX(BESSI(CCK1Q*R1,0))
CQI111 = DCMPLX(BESSI(CCK1Q*R1,1))
CBQ110 = CQI110
CBQ111 = CJ*CQI111
END IF
```

```
CMMQ = -((CK1Q/CK2Q)*CBQ110*CNQ211 - CBQ111*CNQ210)
CNNQ = (CK1Q/CK2Q)*CBQ110*CBQ211 - CBQ111*CBQ210
```

```
& CQSUM(Q+1) = (1/CK2Q)*(CMMQ*CBQ221 + CNNQ*CNQ221)/(CMMQ*CBQ220 +
CNNQ*CNQ220)
```

```
END IF
END IF
```

```

C-----
C-----
C          Calcul de la fonction de Neumann
C-----
C-----

```

```

FUNCTION CYN(CCZ, NU)

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 FAC,PSI, VLUM,PI,MU
DIMENSION CV(20),FAC(100), PSI(100)
COMMON/B52/ FAC, PSI/B53/ CBS, CNM/B4/ VLUM, PI

IF(CDABS(CCZ) .GT. 18) GO TO 30
CS1 = (2.0D0/PI)*CDLOG(CCZ/2.0D0)*CJN(CCZ,NU)
CS2 = -2.0D0*NU/(PI*CCZ)
CS3 = (-1.0D0/PI)*(CCZ/2.0D0)**NU*(PSI(1) + PSI(NU+1))
DO 20 I = 1, 35
CS3 = CS3 + (-1)**(I+1)*(CCZ/(2.0D0))**(NU+2.0D0*I)*
&(PSI(I+1) + PSI(NU+I+1))/(FAC(I)*FAC(I+NU)*PI)
20 CONTINUE
CNM = CS1 + CS2 + CS3
IF (NU .GE. 2) THEN
CS4 = FAC(NU-1)*(CCZ/2.0D0)**(-NU)
DO 21 I = 1,NU-1
CS4 = CS4 + (CCZ/2.0D0)**(2.0D0*I-NU)*FAC(NU-I-1)/FAC(I)
21 CONTINUE
CS4 = (-1.0D0/PI)*CS4
CNM = CS1 + CS2 + CS3 + CS4
END IF
GO TO 50
30 MU = 4.0D0*NU*NU
CV(1) = (MU-1)/(8.0D0*CCZ)
DO 40 I = 2, 11
CV(I) = (MU - (2.0D0*I-1.0D0)**2.0D0) * CV(I-1)/(8.0D0*I*CCZ)
40 CONTINUE
CP = 1.0D0 - CV(2) + CV(4) - CV(6) + CV(8) - CV(10)
CQ = CV(1) - CV(3) + CV(5) - CV(7) + CV(9) - CV(11)
CHI = CCZ - PI*(NU/2.0D0 + 0.25D0)
CNM = CDSQRT(2.0D0/(PI*CCZ))*(CP*CDSIN(CHI) + CQ*CDCOS(CHI))
50 CONTINUE

CYN = CNM
RETURN
END

```

```

C-----
C-----
C      Calcul de la fonction de Bessel de premiere espece
C-----
C-----

```

```

FUNCTION CJN(CZ, N)

```

```

  IMPLICIT complex*16(C)
  real*8 FAC, PSI, VLUM,PI,MU
  DIMENSION CV(20), CS3(100),FAC(100), PSI(100)
  COMMON/B52/ FAC, PSI/B53/ CBS, CNM/B4/ VLUM, PI

```

```

  IF(CDABS(CZ) .GT. 18) GO TO 30

```

```

  IF (N .EQ. 0) THEN

```

```

    CS3(1) = (1.0D0,0.0D0)

```

```

  ELSE

```

```

    CS3(1) = (CZ/2.0D0)**N

```

```

  END IF

```

```

  DO 20 I = 1, 35

```

```

    CS3(I+1) = CS3(I) + (-1.0D0)**(I)*(CZ/2.0D0)**(N+2.0D0*I)
    * /(FAC(I)*FAC(I+N))

```

```

20  CONTINUE

```

```

    CBS = CS3(35)

```

```

  GO TO 50

```

```

30  MU = 4.0D0*N*N

```

```

    CV(1) = (MU-1.0D0)/(8.0D0*CZ)

```

```

  DO 40 I = 2, 11

```

```

    CV(I) = (MU - (2.0D0*I-1.0D0)**2.0D0) * CV(I-1)/(8.0D0*I*CZ)

```

```

40  CONTINUE

```

```

    CP = 1.0D0 - CV(2) + CV(4) - CV(6) + CV(8) - CV(10)

```

```

    CQ = CV(1) - CV(3) + CV(5) - CV(7) + CV(9) - CV(11)

```

```

    CHI = CZ - PI*(N/2.0D0 + 0.25D0)

```

```

    CBS = CDSQRT(2.0D0/(PI*CZ))*(CP*CDCOS(CHI) - CQ*CDSIN(CHI))

```

```

50  CONTINUE

```

```

  CJN = CBS

```

```

  RETURN

```

```

  END

```

```

C-----
C-----
C      Calcul de la fonction de Bessel modifiee de premiere espece
C-----
C-----

```

```

FUNCTION BESSI(Z,N)

```

```

  IMPLICIT COMPLEX*16(C)

```

```

COMPLEX*16 BESSI, Z
REAL*8 FAC,PSI,VLUM,PI,MU
DIMENSION CRCV(20),CRCS3(100),FAC(100),PSI(100)
COMMON/B52/FAC,PSI/B4/VLUM,PI

IF (CDABS(Z) .GT. 18) GO TO 30
IF (N .EQ. 0) THEN
  CRCS3(1) = (1.0D0,0.0D0)
ELSE
  CRCS3(1) = (Z/2.0D0)**N
END IF
DO 20 I = 1,35
  CRCS3(I+1)=CRCS3(I)+(Z/2.0D0)**(N+2.0D0*I)/(FAC(I)*FAC(I+N))
20 CONTINUE
CRCIN = CRCS3(35)
GO TO 50
30 MU = 4.0D0*N*N
  CRCV(1) = (MU-1.0D0)/(8.0D0*Z)
  DO 40 I = 2,11
    CRCV(I) = (MU-(2.0D0*I-1)**2.0D0)*CRCV(I-1)/(8.0D0*I*Z)
40 CONTINUE
  CRCP=(1.0D0,0.0D0)-CRCV(1)+CRCV(2)-CRCV(3)+CRCV(4)-CRCV(5)+CRCV(6)
  *      -CRCV(7)+CRCV(8)-CRCV(9)+CRCV(10)-CRCV(11)
  CRCIN = EXP(Z)*(2.0D0*PI*Z)**(-0.50D0)*CRCP
50 CONTINUE
  BESSI = CRCIN
  RETURN
  END

```

```

C-----
C-----
C      Calcul de la fonction de Bessel modifiee de deuxieme espece
C-----
C-----

```

FUNCTION BESSK(Z,NU)

```

IMPLICIT COMPLEX*16(C)
REAL*8 FAC,PSI,VLUM,PI,MU
COMPLEX*16 BESSK, Z
DIMENSION CRCV(20),FAC(100),PSI(100), CRCS2(100)
COMMON/B52/ FAC,PSI/B4/ VLUM,PI

IF (CDABS(Z) .GT. 10) GO TO 30
CRCS1 = NU/Z
CRCS2(1) = 0.50D0*(-1)**(NU-1.0D0)*(Z/2.0D0)**NU*
*(2.0D0*CDLOG(Z/2.0D0)-PSI(1)-PSI(NU+1))
DO 20 I = 1,35
  II = DBLE(I)

```

```

CRCS2(I+1)=CRCS2(I)+(0.50D0*(-1)**(NU-1.0D0))*(Z/2.0D0)**
*(NU+2.0D0*I)*(2.0D0*CDLOG(Z/2.0D0)-PSI(I+1)-PSI(I+NU+1))
*/(FAC(I)*FAC(I+NU))
20 CONTINUE
CRCKN = CRCS1 + CRCS2(35)
IF (NU .GE. 2) THEN
CRCS3 = FAC(NU-1)*(Z/2.0D0)**(-NU)
DO 21 I = 1,NU-1
CRCS3=CRCS3 + (Z/2.0D0)**(2*I-NU)*((-1)**I)*FAC(NU-I-1)/FAC(I)
21 CONTINUE
CRCS3 = CRCS3/2.0D0
CRCKN = CRCS1 + CRCS2(35) + CRCS3
END IF
GO TO 50
30 MU = 4*NU*NU
CRCV(1) = (MU-1)/(8.0D0*Z)
DO 40 I = 2,11
CRCV(I) = (MU-(2.0D0*I-1)**(2.0D0))*CRCV(I-1)/(8.0D0*I*Z)
40 CONTINUE
CRCP=(1.0D0,0.0D0)+CRCV(1)+CRCV(2)+CRCV(3)+CRCV(4)+CRCV(5)
& +CRCV(6)+CRCV(7)+CRCV(8)+CRCV(9)+CRCV(10)+CRCV(11)
CRCKN = (PI/(2.0D0*Z))**(0.50D0)*EXP(-Z)*CRCP
50 CONTINUE
BESSK = CRCKN
RETURN
END

```

```

C-----
C-----
C      Calcul de la fonction de Bessel modifiee de premiere espece
C      sans terme exponentiel.
C-----
C-----

```

FUNCTION MBESSI(Z,N)

```

IMPLICIT COMPLEX*16(C)
REAL*8 FAC,PSI,VLUM,PI,MU
COMPLEX*16 MBESSI, Z
DIMENSION CRCV(20),CRCS3(100),FAC(100),PSI(100)
COMMON/B52/FAC,PSI/B4/VLUM,PI

```

```

IF (CDABS(Z) .GT. 18) GO TO 30
IF (N .EQ. 0) THEN
CRCS3(1) = (1.0D0,0.0D0)
ELSE
CRCS3(1) = (Z/2.0D0)**N
END IF
DO 20 I = 1,35
CRCS3(I+1)=CRCS3(I)+(Z/2.0D0)**(N+2.0D0*I)/(FAC(I)*FAC(I+N))

```

```

20  CONTINUE
    CRCIN=CRCS3(35)
    GO TO 50
30  MU = 4.0D0*N*N
    CRCV(1)=(MU-1.0D0)/(8.0D0*Z)
    DO 40 I = 2,11
    CRCV(I)=(MU-(2.0D0*I-1)**2.0D0)*CRCV(I-1)/(8.0D0*I*Z)
40  CONTINUE
    CRCP=(1.0D0,0.0D0)-CRCV(1)+CRCV(2)-CRCV(3)+CRCV(4)-CRCV(5)+CRCV(6)
    *      -CRCV(7)+CRCV(8)-CRCV(9)+CRCV(10)-CRCV(11)
    CRCIN = (2.0D0*PI*Z)**(-0.50D0)*CRCP
50  CONTINUE
    MBESSI = CRCIN
    RETURN
    END

```

```

C-----
C-----
C      Calcul de la fonction de Bessel modifiee de deuxieme espece
C      sans terme exponentiel.
C-----
C-----

```

FUNCTION MBESSK(Z,NU)

```

    IMPLICIT COMPLEX*16(C)
    REAL*8 FAC,PSI,VLUM,PI,MU
    COMPLEX*16 MBESSK, Z
    DIMENSION CRCV(20),FAC(100),PSI(100), CRCS2(100)
    COMMON/B52/ FAC,PSI/B4/ VLUM,PI

    IF (CDABS(Z) .GT. 10) GO TO 30
    CRCS1 = NU/Z
    CRCS2(1) = 0.50D0*(-1)**(NU-1.0D0)*(Z/2.0D0)**NU*
    *(2.0D0*CDLOG(Z/2.0D0)-PSI(1)-PSI(NU+1))
    DO 20 I = 1,35
    II = DBLE(I)
    CRCS2(I+1)=CRCS2(I)+(0.50D0*(-1)**(NU-1.0D0))*(Z/2.0D0)**
    *(NU+2.0D0*II)*(2.0D0*CDLOG(Z/2.0D0)-PSI(I+1)-PSI(I+NU+1))
    *      /(FAC(I)*FAC(I+NU))
20  CONTINUE
    CRCKN = CRCS1 + CRCS2(35)
    IF (NU .GE. 2) THEN
    CRCS3 = (0.0D0,0.0D0)
    DO 21 I = 0,NU-1
    CRCS3=CRCS3 + (Z/2.0D0)**(2*I-NU)*((-1)**I)*FAC(NU-I-1)/FAC(I)
21  CONTINUE
    CRCS3 = CRCS3/2.0D0
    CRCKN = CRCS1 + CRCS2(35) + CRCS3
    END IF

```

```

      GO TO 50
30    MU = 4*NU*NU
      CRCV(1) = (MU-1)/(8.0D0*Z)
      DO 40 I = 2,11
      CRCV(I) = (MU-(2.0D0*I-1)**(2.0D0))*CRCV(I-1)/(8.0D0*I*Z)
40    CONTINUE
      CRCP=(1.0D0,0.0D0)+CRCV(1)+CRCV(2)+CRCV(3)+CRCV(4)+CRCV(5)
      & +CRCV(6)+CRCV(7)+CRCV(8)+CRCV(9)+CRCV(10)+CRCV(11)
      CRCKN = (PI/(2.0D0*Z))**(0.50D0)*CRCP
50    CONTINUE
      MBESSK = CRCKN
      RETURN
      END

```

```

C-----
C-----
C          Fonction delta de Kronecker
C-----
C-----

```

FUNCTION DIRAC(X,Y)

INTEGER X,Y, DIRAC

```

      IF (X .EQ. Y) THEN
      DIRAC = 1
      END IF
      IF (X .NE. Y) THEN
      DIRAC = 0
      END IF
      RETURN
      END

```

```

C-----Procedure Num-----
C-----
C          Calcul de la fonction factorielle et la fonction psi
C-----
C-----

```

SUBROUTINE NUM

real\*8 FAC, PSI

DIMENSION FAC(100), PSI(100)

```
COMMON/B52/ FAC,PSI
```

```

FAC(0) = 1.0D0
FAC(1) = 1.0D0
PSI(1) = - 0.5772156649015329D0
DO 10 NI3 = 2, 50
AI = NI3
FAC(NI3) = AI*FAC(NI3-1)
10 PSI(NI3) = 1/(AI-1) + PSI(NI3-1)
RETURN
END
```

```

C-----
C-----
C   Calcul de la fonction de RFF contenu dans les equations
C   caracteristiques de nos modes TM et TE.
C-----
C-----
```

```
FUNCTION RFF(P,S)
```

```

IMPLICIT complex*16(C)
real*8 L, PI, VLUM, L1, D, F, DELTAC, DETX, FW
DIMENSION CDET(NMAX), CM(ND,ND)
COMMON/B1/ R1, R2, R3, L1, D, F, DELTAC/B3/ DETX, LL, FW, CDET
COMMON/B4/ VLUM, PI /H1/ CM, NS/NT/NT
```

```

L = L1 + D + F
IF (P .EQ. 0 .AND. S .EQ. 0) THEN
RFF1 = D
END IF
IF (P .EQ. 0 .AND. S .NE. 0) THEN
IF ((NT .EQ. 1) .OR. (NT .EQ. 3)) THEN
RFF1 = 0.0D0
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
SS = DBLE(S)
RFF1 = (D/SS*PI)*(1.0D0-(-1.0D0)**SS)
END IF
END IF
IF (P .NE. 0 .AND. S .GE. 0) THEN
SS = DBLE(S)
PP = DBLE(P)
RDSIN1 = DSIN(PP*PI*(D+L1)/L)
RDSIN2 = DSIN(PP*PI*L1/L)
RA = SS*L+PP*D
RB = SS*L-PP*D
IF (RB .EQ. 0.0D0) THEN
NX=1
RB = 1.00D-15
```

```
END IF
IF ((NT .EQ. 1) .OR. (NT .EQ. 3)) THEN
RFF1 = (D*L/(2.0D0*PI))*((1.0D0/RA)-(1.0D0/RB))*
& (((-1.0D0)**SS)*RDSIN1) - RDSIN2)
END IF
IF (NT .EQ. 2) THEN
RFF1 = -(D*L/(2.0D0*PI))*((1.0D0/RA)+(1.0D0/RB))*
& (((-1.0D0)**SS)*RDSIN1) - RDSIN2)
END IF
END IF
RFF=RFF1
END
```

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Uenakada, "Equivalent circuit of reentrant cavity", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 55, p. 46, août 1972.
- [2] W. Xi et W.R. Tinga, "New results for coaxial reentrant cavity with partially dielectric filled gap", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 40, p. 747, avril 1992.
- [3] E. Okress, Crossed-Field Microwave Devices, Academic Press, New York, 1961.
- [4] J. Marek, "On the resonant frequency of a reentrant cylindrical cavity", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 26, p. 256, avril 1978.
- [5] I.V. Lebedev, A.S. Shnitnikov, N.V. Drozdovski et L.M. Drozdovskaia, "Solid-state control devices for millimetre waveband", *Electronics Letters*, Vol. 31, p. 211, février 1995.
- [6] K.W.H. Foulds, "LSA oscillation in coaxial-line circuit", *Electronics Letters*, Vol. 6, p. 189, mars 1970.
- [7] K. Kurokawa, An Introduction to the Theory of Microwave Circuits, Academic Press, New York, 1969.
- [8] K.A. Zaki et A.E. Atia, "Modes in dielectrics-loaded waveguides and resonators", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 31, p. 1039, avril 1983.

- [9] S.J. Fiedziuszko, "Dual-mode dielectric resonator loaded cavity filters", *IEEE Transactions Microwave Theory and Techniques*, Vol. 30, p. 1311, sept. 1982.
- [10] H. Tahara, T. Yasui, K. I. Onue, Y. Tsubakishita et T. Yoshikawa, "Microwave ion source using resonant cavity", *Journal of Applied Physics*, Part. 1, Vol. 32, p. 1298, mars 1993.
- [11] A. Watanabe, M. Sueda, K. Tanaka, H. Yamamoto et K. Fukui, "Development of CO2 laser processing machine", *Mitsubishi Juko Giho*, Vol. 26, p. 356, 1989.
- [12] J.R. Reitz, F.J. Milford et R.W. Christy, Foundations of Electromagnetic Theory, 4<sup>e</sup> édition, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1992.
- [13] H.E. Thomas et C.A. Clarke, Handbook of Electronic Instruments and Measurement Techniques, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [14] R. Cole et al, "Time-domain reflection methods for dielectric measurement to 10 GHz", *J. Appl. Phys.*, Vol. 66, p. 793, 1989.
- [15] R. Chahine et T.K. Bose, "Measurement of dielectric properties by time domain spectroscopy", *J. Chem. Phys.*, Vol. 65, p. 2211, 1976 ; Vol. 66, p. 1764, 1977.
- [16] R. Nozaki et T.K. Bose, "Broadband complex permittivity measurements by time-domain spectroscopy", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 39, p. 945, décembre 1990.

- [17] R. Chahine, "Mise en œuvre d'un spectromètre en domaine temporel pour l'étude du comportement diélectrique", Thèse de doctorat, Université du Québec à Trois-Rivières, juillet 1977.
- [18] J.E. Degenford et P.D. Coleman, "A Quasi-Optics Perturbation Technique for Measuring Dielectric Constants", *IEEE Proceedings*, Vol. 54, p. 520, avril 1966.
- [19] K.H. Breeden et A.P. Sheppard, "Millimeter and Submillimeter Wave Dielectric Measurements", *Microwave Journal*, Vol. 10, p. 59, novembre 1967.
- [20] A.E. Siegman, "An antiresonant ring interferometer for coupled laser cavities, laser output coupling, mode locking and cavity dumping", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 9, p. 247, février 1973.
- [21] R.F. Harrington, Time-Harmonic Electromagnetics Fields, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [22] A. Kackowski et A. Milewski, "High accuracy wide-range measurement method for determination of complex permittivity in reentrant cavity : Part A-Theoretical analysis of the method", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 28, p. 225, mars 1980.
- [23] A. Kaczowski et A. Milewski, "High accuracy wide-range measurement method for determination of complex permittivity in reentrant cavity : Part B-Experimental analysis of measurement errors", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 28, p. 228, mars 1980.

- [24] J.P. Pelletier, Techniques Numériques Appliquées au Calcul Scientifique, Masson et Cie., Paris, 1971.
- [25] V. Subramanian et J. Sobhanadri, "New approach of measuring the Q factor of a microwave cavity using the cavity perturbation technique", *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 65, p. 453, février 1994.
- [26] A. Poinso, "Exemple de résolution numérique de l'équation caractéristique d'une cavité hyperfréquence contenant un échantillon diélectrique", *Revue de Physique Appliquée*, Tome 12, p. 1055, juillet 1977.
- [27] M.Mohammad-Taheri et D. Mirshekar-Syahkal, "Computation of Q-factors of dielectric-loaded cylindrical cavity resonators", *IEE Proceedings*, Vol. 137, Pt. H, p. 372, décembre 1990.
- [28] H. Igarashi, Y. Sugawara et T. Honma, "A numerical computation of external Q of resonant cavities", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, p. 1642, mai 1995.
- [29] J. Abdounour, "Diffusion d'une onde électromagnétique dans un guide d'onde rectangulaire et dans une jonction multiporte avec obstacle diélectrique ou ferrite aimantée", Thèse de doctorat, Institut national de la recherche scientifique, juin 1992.
- [30] C.L. Li et K.M. Chen, "Determination of dielectric properties of materials using a coaxial cavity system driven by a coaxial line", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 42, p. 2195, décembre 1994.

- [31] E. Boridy, Électromagnétisme : Théorie et Applications, Presses de l'Université du Québec, Québec, 1992.
- [32] G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press Inc., San Diego, 1985.
- [33] P. Lorrain et R. Corson, Electromagnetic Fields and Waves, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1970.
- [34] M. R. Spiegel, Formules et Tables de Mathématiques, Série Schaum, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [35] L.G. Chambers, "Propagation in waveguides filled longitudinally with two or more dielectrics", *Brit. J. Appl. Phys.*, Vol. 4, p. 39, février 1953.
- [36] E.T. Whittaker et G.N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4<sup>e</sup> édition, Cambridge University Press, 1927.
- [37] C. C. Johnson, Field and Wave Electrodynamics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [38] M. Abramowitz et A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover publications Inc., New York, 1972.
- [39] N.N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

- [40] W.H. Press, S.A. Teukosky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, Numerical Recipes in Fortran : the Art of Scientific Computing, 2<sup>e</sup> édition, Cambridge University Press, 1991.