

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE EN  
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR  
VINCENT GARANT-PELLETIER

ENSEMBLES DE MANDELBROT ET DE JULIA REMPLIS CLASSIQUES,  
GÉNÉRALISÉS AUX ESPACES MULTICOMPLEXES ET THÉORÈME DE  
FATOU-JULIA GÉNÉRALISÉ

Mars 2011

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Dominic Rochon, directeur du mémoire  
Département de mathématiques et d'informatique

M. Sébastien Tremblay, juré  
Département de mathématiques et d'informatique

M. Alfred Michel Grundland, juré  
Département de mathématiques et d'informatique

# ENSEMBLES DE MANDELBROT ET DE JULIA REMPLIS CLASSIQUES, GÉNÉRALISÉS AUX ESPACES MULTICOMPLEXES ET THÉORÈME DE FATOU-JULIA GÉNÉRALISÉ

Vincent Garant-Pelletier

## SOMMAIRE

Les fractales sont un domaine des mathématiques pour lequel la popularité ne cesse de grandir. Le plus souvent, c'est le rendu visuel de tels objets qui capte l'attention. En effet, les images de fractales sont riches en structure et intéressantes à explorer de par le caractère irrégulier et fragmenté de ces objets. Parmi les fractales les plus connues, on compte l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis.

Historiquement, deux approches ont été utilisées pour définir ces ensembles : l'approche de la dynamique et l'approche des familles normales de fonctions. Ce mémoire parcourera ces deux approches afin de montrer que les définitions d'ensemble de Julia rempli sont équivalentes. Les principales caractéristiques de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia remplis seront également démontrées en détails et on citera le théorème de Fatou-Julia qui est un résultat très important en dynamique complexe.

Ce mémoire proposera également une généralisation de ces ensembles fractals aux espaces des nombres multicomplexes. On trouvera une généralisation du théorème de Fatou-Julia et on pourra visualiser certaines coupes tridimensionnelles des ces ensembles fractals généralisés.

# CLASSICAL MANDELBROT AND FILLED-JULIA SETS, GENERALIZATION TO MULTICOMPLEX SPACES AND GENERALIZED FATOU-JULIA THEOREM

Vincent Garant-Pelletier

## ABSTRACT

Fractals are a domain of mathematics which is still gaining in popularity. Most of the time, it's their visual structure that is of first interest. In facts, the images of such objets have a broken and irregular structure that make them interesting to explore. Among the most famous fractals we have the Mandelbrot and filled-Julia sets.

Historically, there have been two approaches to define these sets : the dynamical approach and the normal families approach. This master thesis will get trough these two approaches to show that the definitions obtained for the filled-Julia sets are equivalent. We will demonstrate in details the principal characteristics of both the Mandelbrot set and the filled-Julia sets. We will also treat the Fatou-Julia theorem, an important result in complex dynamics.

This thesis will also propose a generalization of these fractal sets to multicomplex spaces. There will be a generalization of the Fatou-Julia theorem, thus we will be able to visualize 3D slices of these generalized fractal sets.

## AVANT-PROPOS

Durant mon baccalauréat, j'ai eu la chance de m'initier à la recherche en mathématiques. Ayant déjà à cette époque une passion pour l'analyse, il était naturel pour moi de choisir mon enseignant d'analyse, le Dr Dominic Rochon, comme directeur de recherche. Celui-ci m'a introduit aux nombres bicomplexes de même qu'aux ensembles de Julia remplis et de Mandelbrot. Ça m'a immédiatement fasciné.

Au début, il s'agissait uniquement de généraliser certains résultats du Dr Rochon. Ensuite, on a choisi d'inclure à ce mémoire les résultats dans le plan complexe. En effet, plusieurs volumes traitent l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis, mais rares sont ceux qui reprennent la démarche dans tous ses détails. On trouvait donc intéressant de présenter un ouvrage qui contiendrait une introduction complète à la dynamique complexe et plus particulièrement à l'ensemble de Mandelbrot et aux ensembles de Julia remplis. Bref, on voulait un ouvrage pour lequel l'étudiant débutant désirent connaître la dynamique complexe pourrait se retrouver.

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le Dr Dominic Rochon, d'une part pour tout le support qu'il m'a apporté à la rédaction de ce mémoire, mais également pour la parution d'un article dans la revue *Fractals* et pour l'expérience formidable qu'il m'a permis de vivre en allant en Grèce pour une conférence internationale.

Je tiens également à remercier mon enseignant de mathématiques au centre d'études collégiales de Montmagny, M. Bernard Lapointe, qui a su réveiller ma passion des

mathématiques et révéler mon potentiel.

Un remerciement particulier à Alexandre Brizard pour son travail sur le logiciel d'exploration de fractales 3D qui a permis la génération des images de fractales tridimensionnelles de ce mémoire.

Finalement, je tiens à remercier le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie (CRSNG) du Canada pour l'aide financière qu'il m'a apporté durant mon baccalauréat et ma maîtrise.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Systèmes dynamiques complexes</b>	<b>4</b>
1.1 Points fixes et bassins d'attraction . . . . .	5
1.2 Ensemble de Mandelbrot . . . . .	9
1.3 Ensembles de Julia remplis et théorème de Fatou-Julia . . . . .	19
1.4 Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	28
<b>2 Familles Normales de fonctions</b>	<b>34</b>
2.1 Convergence normale, fonctions localement bornées et équicontinuité . . . . .	35
2.2 Familles normales de fonctions holomorphes, théorème de Montel et critère fondamental de normalité . . . . .	44
2.3 Familles normales de fonctions méromorphes . . . . .	53
2.4 Systèmes dynamiques . . . . .	56
<b>3 Nombres multicomplexes</b>	<b>59</b>
3.1 Construction des nombres multicomplexes . . . . .	60
3.2 Représentation idempotente . . . . .	66
3.3 Conjugaison des nombres multicomplexes . . . . .	71
3.4 Nombres multicomplexes non inversibles . . . . .	84
3.5 Les nombres multicomplexes comme une sous-algèbre d'une algèbre de Clifford . . . . .	86
3.6 Sous-espaces des nombres tricomplexes . . . . .	90
<b>4 Dynamique multicomplexe : Ensembles de Mandelbrot, de Julia remplis et théorème de Fatou-Julia</b>	<b>93</b>
4.1 Ensemble de Mandelbrot généralisé . . . . .	94
4.2 Ensembles de Julia remplis généralisés . . . . .	99
4.3 Théorème de Fatou-Julia généralisé . . . . .	103
4.4 Coupes principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe . . . . .	110
4.5 L'ensemble de Mandelbrot tricomplexe au point de vue fractal . . . . .	124
<b>Conclusion</b>	<b>131</b>

Bibliographie	133
Annexe : Suite diagonale	135

# Liste des tableaux

3.1	Produits des unités imaginaires bicomplexes . . . . .	61
3.2	Produits des unités imaginaires tricomplexes . . . . .	63
3.3	Table du groupe $(\dagger, \circ)$ . . . . .	74
3.4	Table du groupe $(\ddagger, \circ)$ . . . . .	77

# Table des figures

1.1	Ensemble de Mandelbrot, $\mathcal{M}$ . . . . .	11
1.2	Exploration de l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	12
1.3	Agrandissement de l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	13
1.4	Représentation graphique de $ c $ , $a := \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ et $a -  c $ . . . . .	19
1.5	Ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{0,36237+0.32i}$ . . . . .	21
1.6	Ensembles de Julia remplis $\mathcal{K}_{-0.98389+0.2645i}$ et $\mathcal{K}_{-0.98324+0.2628i}$ . . . . .	25
1.7	Ensembles de Julia remplis $\mathcal{K}_{0,3409+0.0781i}$ et $\mathcal{K}_{0,3419+0.0777i}$ . . . . .	26
1.8	Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	30
1.9	Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot : $\rho(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ . . . . .	30
1.10	Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot : équations paramétriques . . . . .	31
1.11	Régions de l'ensemble de Mandelbrot qui correspondent à des points périodiques de périodes 1, 2, 3 et 4. . . . .	33
2.1	Sphère de Riemann . . . . .	35
4.1	Une coupe tridimensionnelle particulière de $\mathcal{M}_3$ : $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ . . . . .	105
4.2	Première coupe de $\mathcal{M}_3$ : le Tétrabrot : $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ . . . . .	111
4.3	Deuxième coupe de $\mathcal{M}_3$ : $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ . . . . .	115
4.4	Troisième coupe de $\mathcal{M}_3$ : le Perplexbrot : $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ . . . . .	116
4.5	Quatrième coupe de $\mathcal{M}_3$ : $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ . . . . .	117
4.6	Cinquième coupe de $\mathcal{M}_3$ : $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ . . . . .	118
4.7	Sixième coupe de $\mathcal{M}_3$ : $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ . . . . .	119
4.8	Huitième coupe de $\mathcal{M}_3$ : $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . . . . .	120
4.9	Première coupe de l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$ . . . . .	121
4.10	Deuxième coupe de l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$ . . . . .	122
4.11	Première coupe de l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{3,c}$ avec $c = -0.98357 + 0.26365\mathbf{i}_1 + 0.00085\mathbf{i}_4 - 0.00033\mathbf{j}_3$ . . . . .	122
4.12	Première coupe de l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{3,0.3419+0.0777i_1}$ . . . . .	123
4.13	Première coupe de l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{3,c}$ avec $c = -0.12 + 0.1\mathbf{i}_1 - 0.415\mathbf{i}_2 - 0.065\mathbf{i}_3 + 0.32\mathbf{i}_4 - 0.19\mathbf{j}_1 - 0.2\mathbf{j}_2 + 0.47\mathbf{j}_3$ . . . . .	124
4.14	Exploration du Tétrabrot : un petit tatou en forme d'ensemble de Mandelbrot . . . . .	127
4.15	Exploration du Tétrabrot : en violet : plusieurs tatous dont la forme approche celle de l'ensemble de Mandelbrot . . . . .	128

4.16	Exploration du Tétrabrot sur l'axe réel : on trouve une forme approchant celle du Tétrabrot . . . . .	129
4.17	Exploration de la première coupe de l'ensemble de Julia rempli $\mathcal{K}_{3,-1.754878}$	130

# Liste des symboles

- $\Omega$  À moins d'indication contraire,  $\Omega$  est un domaine ouvert et connexe dans le plan complexe.
- $\bar{E}$  Désigne la fermeture de l'ensemble  $E$ .
- $\partial E$  Désigne la frontière de l'ensemble  $E$ .
- $U$  Désigne le disque ouvert de rayon unitaire centré à l'origine. L'ensemble  $U'$  désigne le disque  $U$  auquel on a enlevé l'origine.
- $\subset$  Inclusion stricte (exclue la possibilité que les ensembles soient égaux).

# Introduction

Les fractales sont un domaine des mathématiques pour lequel la popularité ne cesse de grandir. Le plus souvent, c'est le rendu visuel de tels objets qui capte l'attention. En effet, les images de fractales sont riches en structure et intéressantes à explorer de par le caractère irrégulier et fragmenté de ces objets. Parmi les fractales les plus connues, on compte l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis.

Historiquement, deux approches ont été utilisées pour définir ces ensembles : l'approche de la dynamique et l'approche des familles normales de fonctions. Cet ouvrage propose de parcourir ces deux approches.

La première approche permettant d'obtenir l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis, celle des systèmes dynamiques, a d'abord été développée parallèlement par Gaston Julia et Pierre Fatou au début du 20<sup>e</sup> siècle. Un peu plus tard, Benoît Mandelbrot apporte sa contribution et c'est à lui que l'on doit principalement l'éclosion de ce domaine des mathématiques.

Le premier chapitre de ce mémoire est dédié à cette approche. On y donnera la définition, d'un point de vue dynamique de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia remplis. On démontrera également les propriétés fondamentales de ces ensembles, notamment on présentera le théorème de Fatou-Julia, théorème fondamental à ce mémoire, caractérisant les ensembles de Julia remplis à partir de l'ensemble de Mandelbrot.

La deuxième approche permettant d'obtenir l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis est celle des familles normales de fonctions. Cette manière d'obtenir les ensembles fractals a été développée, entre autre, par Schiff [24] à partir de la théorie sur les familles normales de fonctions développée principalement par Paul Montel au tout début du 20<sup>e</sup> siècle. Le deuxième chapitre de ce mémoire portera sur cette approche. On y verra tout d'abord les familles normales de fonctions holomorphes et méromorphes, puis on tentera de retrouver les ensembles fractals présentés dans le premier chapitre à partir de ces concepts.

En 1982, Norton [15] donne un tout premier algorithme pour générer et visualiser des fractales tridimensionnelles. Pour la première fois, on s'intéresse à l'itération de quaternions, structure de nombres de dimension quatre [11], et Gomatam et al. [10] donnent une généralisation de l'ensemble de Mandelbrot pour cette structure de nombres. Cependant, en 1995, Bedding et Briggs [2] établissent que l'intérêt au point de vue dynamique de cette approche avec des quaternions est limitée. En effet, les structures ainsi obtenues n'offraient pas la même richesse fractale que leurs homologues dans le plan complexe.

L'objectif premier de ce mémoire est de généraliser les résultats de dynamique complexe à une structure de nombre encore peu utilisée, les nombres multicomplexes, afin d'en faire ressortir, contrairement à l'approche utilisant les quaternions, une structure fractale aussi riche que celle des ensembles fractals complexes. Ce genre de travail a été effectué pour les nombres bicomplexes par Rochon [18, 19] et il s'agit, dans le dernier chapitre de ce mémoire, de pousser l'exercice plus loin. Le résultat le plus important que l'on généralisera aux nombres multicomplexes est sans contredit le théorème de Fatou-Julia. Ça nous permettra de visualiser et d'explorer de nouvelles fractales tridimensionnelles.

Finalement, avant de pouvoir généraliser les résultats de dynamique complexe, on doit aborder la structure des nombres multicomplexes. C'est l'objet du troisième chapitre

de cet ouvrage. Les nombres multicomplexes sont encore très peu connus. En 1997, Rochon [20] développe les nombres bicomplexes, qu'il appelle alors tétranombres, à partir desquels seront basés ses travaux subséquents. Avant Rochon, Price en 1991 [16] abordera également les nombres bicomplexes. Il poussera l'exercice plus loin et donnera quelques propriétés des nombres multicomplexes.

En ce qui concerne ce mémoire, on présentera les propriétés les plus importantes des nombres multicomplexes, notamment la conjugaison et l'inversion de nombres multicomplexes. On présentera cette structure de nombres comme une sous-algèbre d'une algèbre de Clifford et on donnera une représentation idempotente qui sera extrêmement utile dans le dernier chapitre.

# Chapitre 1

## Systemes dynamiques complexes

L'approche la plus naturelle lorsque l'on désire traiter des ensembles fractals tels que l'ensemble de Mandelbrot ou les ensembles de Julia remplis est celle des systèmes dynamiques. L'objectif de ce chapitre sera de présenter les résultats principaux issus de la dynamique complexe et portant sur ces ensembles fractals.

On définira donc l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis d'un point de vue dynamique. On présentera également les caractéristiques les plus importantes de ces ensembles telles le fait que ces ensembles sont bornés et fermés.

Un résultat important en dynamique complexe et primordial à ce mémoire est le théorème de Fatou-Julia. Ce résultat fait un lien entre la connexité des ensembles de Julia remplis et les points de l'ensemble de Mandelbrot. Un des objectifs de ce mémoire est d'offrir une généralisation de ce théorème aux espaces multicomplexes, ce qui sera fait dans le chapitre 4. À ce point-ci, on s'assurera de bien exposer les implications du théorème de Fatou-Julia dans le plan complexe.

La dernière section de ce chapitre portera quant à elle sur une région particulière de l'ensemble de Mandelbrot, celle qui lui donne en grande partie sa forme : la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot.

Avant de pouvoir définir l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis d'un point du vue dynamique, on doit présenter un concept fondamental en dynamique, celui de point fixe.

## 1.1 Points fixes et bassins d'attraction

L'étude des systèmes dynamiques complexes est intimement liée à la notion de point fixe. Nous devons donc traiter ce concept, et par le fait même le concept de bassin d'attraction, avant de nous attaquer à l'ensemble de Mandelbrot et à ses propriétés.

Avant d'aborder ces concepts et pour la suite du mémoire, il est nécessaire de rappeler quelques définitions et théorèmes issus de la topologie ainsi que de l'analyse complexe. On aurait pu rappeler plusieurs autres notions pertinentes telles que le concept de fonction holomorphe, cependant il aurait été interminable d'effectuer tous les rappels et donc on s'est concentré sur des notions qui seront importantes tout au long de ce chapitre et pour les chapitres subséquents (la plupart tirés de [8]). Le premier concept que l'on aimerait rappeler est celui de connexité simple.

**Rappel 1** *Un ensemble connexe est dit **simplement connexe** si pour toute boucle à l'intérieur de l'ensemble, tous les points à l'intérieur de la boucle sont aussi à l'intérieur de l'ensemble.*

**Remarque :** Une paramétrisation  $\alpha$  est dite **simple** si et seulement si la fonction  $\alpha$  restreinte à l'intervalle ouvert  $(a, b)$  est injective. On dira qu'il s'agit d'une **boucle** si  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

Lorsqu'une paramétrisation  $\alpha$  est une boucle, on dit aussi que c'est une paramétrisation **fermée**. Graphiquement, une boucle est représentée dans le plan complexe par une courbe fermée sur elle-même qui ne se croise pas, c'est-à-dire que si  $x \neq y$ , alors  $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ ,  $\forall x, y \in (a, b)$ .

Graphiquement, un ensemble simplement connexe est un ensemble connexe qui ne possède pas de « trou » à l'intérieur. Dans le cas d'un ensemble non connexe, on peut souvent séparer l'ensemble en parties connexes. Ces parties sont appelées composantes connexes.

**Rappel 2** *Définissons une relation binaire  $\sim$  dans un certain ensemble  $X$  par :  $x \sim y$  si et seulement s'il existe un ensemble connexe  $C \subseteq X$  tel que  $x$  et  $y$  sont dans  $C$ . Cette relation est réflexive, symétrique et transitive, c'est donc une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de  $\sim$  s'appellent les **composantes connexes** de  $X$ .*

Cette définition, qui n'est pas très intuitive, nous indique que les composantes connexes d'ensembles non connexes sont les plus gros « morceaux » connexes de l'ensemble. Dans le cas d'un ensemble connexe, la seule composante connexe est l'ensemble lui-même.

**Théorème 1.1** *Si  $X$  est un ensemble ouvert dans le plan complexe alors les composantes connexes de  $X$  sont aussi des ensembles ouverts du plan complexe [17].*

Intuitivement, on remarque que l'ensemble considéré sera en fait l'union de ses composantes connexes. On sait que l'union d'ensembles ouverts résultera en un ensemble ouvert. Inversement, si une des composantes connexes n'est pas un ensemble ouvert, alors l'ensemble lui-même ne pourra être ouvert. Les composantes connexes d'un ensemble ouvert sont donc des ensembles ouverts.

Lorsque les composantes connexes d'un ensemble sont des singletons, alors l'ensemble est totalement non connexe. Un ensemble totalement non connexe auquel on va s'intéresser est l'ensemble de Cantor.

**Définition 1.1** ***Ensemble de Cantor***

*Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  compact, parfait et totalement non connexe est appelé ensemble de Cantor.*

### Remarques :

1. Rappelons qu'un ensemble parfait est un ensemble qui contient tous ses points d'accumulation et seulement ceux-ci.
2. Tout ensemble possédant ces trois propriétés est homéomorphe à l'ensemble de Cantor original et sera donc appelé ensemble de Cantor (voir [7] et [21]).

Rappelons maintenant quelques résultats sur le module maximal.

**Rappel 3** Soit  $\Omega$ , un domaine et  $f$  une fonction à valeurs complexes définie sur  $\Omega$ . On dit que  $f$  atteint son **module maximal** en  $z_0 \in \Omega$  si et seulement si  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ , pour tout  $z \in \Omega$ .

### **Théorème 1.2** *Principe fort du module maximal*

Soit  $f$  une fonction holomorphe non constante définie dans un domaine plan  $\Omega$ . Alors,  $f$  n'atteint son module maximal en aucun point de  $\Omega$ .

### **Théorème 1.3** *Principe faible du module maximal*

Soit  $\Omega$ , un domaine borné et  $f$  une fonction holomorphe non constante définie sur  $\Omega$  et continue sur  $\bar{\Omega}$ . Alors,  $f$  atteint son module maximal  $|f(z_0)|$  en un certain point  $z_0$  de  $\partial\Omega$ .

On est maintenant prêt à félinir le concept de point fixe. Il sera utilisé plus en détails dans la section 1.4 tandis que le concept de bassin d'attraction sera quant à lui utilisé à plusieurs reprises dans le mémoire.

### **Définition 1.2** *Caractérisation des points fixes*

Un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  est dit **fixe** sous une application  $f$  si et seulement si  $f(z_0) = z_0$ . On s'intéresse alors à la valeur de la dérivée (si elle existe) au point fixe  $z_0$  et le paramètre  $\lambda = f'(z_0)$  nous permet de classer les points fixes en 3 catégories :

1. **Attractif** : Un point fixe est dit attractif quand  $0 \leq |\lambda| < 1$ . Lorsque  $|\lambda| = 0$ , alors on dit que le point fixe est **superattractif**.

- 2. Répulsif** : Un point fixe est dit répulsif quand  $|\lambda| > 1$ .
- 3. Neutre** : Un point fixe est dit neutre quand  $|\lambda| = 1$ . De plus, on dit que le point fixe est **rationnellement neutre** si  $\lambda^n = 1$  pour un certain entier  $n$  et **irrationnellement neutre** dans le cas contraire.

Considérons  $z_0$ , un point fixe attractif d'une fonction holomorphe  $f$ . Considérons également  $\rho \in \mathbb{R}$ , de telle sorte que  $|\lambda| < \rho < 1$ . Alors on a que  $|f(z) - z_0| \leq \rho|z - z_0|$  pour un certain  $z$  appartenant à un certain voisinage de  $z_0$ . Conséquemment,  $|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n|z - z_0|$ , où  $f^n(z) = (f^{n-1} \circ f)(z) = (f \circ f^{n-1})(z)$ . L'expression  $f^n(z)$  représente donc la composée  $n$  fois de  $f$  sur  $z$ , que l'on appellera également itérés de la fonction  $f$ . Comme  $\rho < 1$ , on a que la suite des itérés de la fonction  $f$  converge vers le point fixe  $z_0$  lorsqu'on débute avec un point  $z$  dans un certain voisinage de  $z_0$ . Plus encore, on verra plus tard que les itérés convergeront vers un point fixe  $z_0$  pour toutes la composante connexe contenant  $z_0$ . Nous allons maintenant définir le concept de bassin d'attraction.

**Définition 1.3** On définit le **bassin d'attraction** au point fixe attractif  $z_0$  correspondant à la fonction holomorphe  $f$ , noté  $A_f(z_0)$ , ou plus simplement  $A(z_0)$ , comme l'ensemble des points  $z \in \mathbb{C}$ , tels que  $f^n(z) \rightarrow z_0$ .

En d'autres mots, le bassin d'attraction au point  $z_0$  est l'ensemble des points  $z$  du domaine pour lesquels la suite des itérés de la fonction  $f$  converge vers  $z_0$ . Remarquons qu'il faut que les itérés de  $f$  au point  $z$  soient définis pour tout entier positif  $n$ . Pour la suite du mémoire, c'est plutôt le cas particulier de **bassin d'attraction à l'infini** qui sera utilisé. Pour une certaine fonction  $f$ , il est défini de la manière suivante :  $A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^n(z) \rightarrow \infty\}$ , c'est-à-dire que c'est l'ensemble des points  $z$  pour lesquels la suite des itérés de la fonction  $f$  est divergente à l'infini.

La prochaine section traitera de l'ensemble de Mandelbrot, ensemble bien connu issu de la dynamique complexe. Nous démontrerons en détail plusieurs propriétés importantes de ce célèbre ensemble fractal.

## 1.2 Ensemble de Mandelbrot

La dynamique complexe s'intéresse, entre autre chose, à voir le résultat de l'itération de polynômes à valeurs complexes. L'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis sont quelques exemples du résultat de ce procédé. Célèbres en partie en raison de leur structure géométrique fractale, nous allons, pour notre part, nous intéresser à leurs propriétés au point de vue de la dynamique. Nous allons démontrer les propriétés les plus intéressantes de l'ensemble de Mandelbrot, notamment le fait qu'il s'agit d'un ensemble borné et fermé.

Commençons tout d'abord par un lemme qui sera utile pour ce chapitre et le suivant.

**Lemme 1.4** *Soit un polynôme  $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0$ , avec  $a_m \neq 0$ ,  $m \geq 1$ . Il existe un nombre  $r$  tel que si  $|z| \geq r$ , alors  $|f(z)| \geq 2|z|$ . En particulier, si  $|f^k(z)| \geq r$  pour un certain  $k \geq 0$ , alors  $f^n(z) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $\{f^n(z)\}$  est soit bornée, soit divergente à l'infini.*

**Preuve :**

On choisit  $r$  suffisamment grand pour que si  $|z| \geq r$ , alors  $\frac{1}{2}|a_m||z|^m \geq 2|z|$  et

$$|a_{m-1}||z|^{m-1} + \dots + |a_1||z| + a_0 \leq \frac{1}{2}|a_m||z|^m.$$

Soit  $|z| \geq r$ , alors

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_m||z|^m - (|a_{m-1}||z|^{m-1} + \dots + |a_1||z| + a_0) \\ &\geq \frac{1}{2}|a_m||z|^m \geq 2|z|. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $|f^k(z)| \geq r$  pour un certain  $k \geq 0$ , on a  $|f^{n+k}(z)| \geq 2^n |f^k(z)| \geq r$ , c'est-à-dire que  $f^n(z) \rightarrow \infty$ . On a donc que  $\{f^n(z)\}$  est soit bornée, soit divergente à l'infini.  $\square$

Pour notre part, nous nous intéresserons aux systèmes dynamiques complexes provenant de polynômes complexes de degré deux. Prenons la fonction quadratique  $R(z) =$

$az^2 + 2bz + d$ ,  $a, b, d \in \mathbb{R}$ , et considérons la transformation de Möbius suivante :  $M(z) = az + b$ . On remarque que  $(M \circ R \circ M^{-1})(z) = z^2 + c$  où  $c = ad + b - b^2$ . Ainsi,  $P_c(z) = z^2 + c$  et  $R(z)$  sont analytiquement conjuguées [24] c'est-à-dire que  $R$  et  $P_c$  génèrent des systèmes dynamiques « équivalents ». Ainsi, dans l'étude de systèmes dynamiques générés par des polynômes complexes de degrés deux, on peut se limiter aux quadratiques de la forme  $P_c(z) = z^2 + c$  et cela est suffisant.

Considérons donc la fonction quadratique  $P_c(z) = z^2 + c$ . Considérant les itérés de la fonction,  $P_c^n(z) = (P_c^{n-1} \circ P_c)(z) = (P_c \circ P_c^{n-1})(z)$ , on s'intéresse au paramètre  $c$  en fixant  $z$  à 0. Les points  $c$  qui sont tels que les itérés restent bornés représentent l'ensemble de Mandelbrot.

#### Définition 1.4 *Ensemble de Mandelbrot*

Soit la fonction  $P_c(z) = z^2 + c$ . On définit l'ensemble de Mandelbrot, noté  $\mathcal{M}$ , comme l'ensemble des points  $c$  tels que la suite des itérés de  $P_c$  pris en 0 est bornée, c'est-à-dire

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}.$$

**Remarque :** Une autre façon de définir cet ensemble (conséquence du lemme 1.4) est de considérer les points  $c$  tels que 0 n'appartient pas au bassin d'attraction à l'infini de la fonction  $P_c$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid 0 \notin A_c(\infty)\},$$

où  $A_c(\infty)$  est le bassin d'attraction à l'infini de la fonction  $P_c$ .

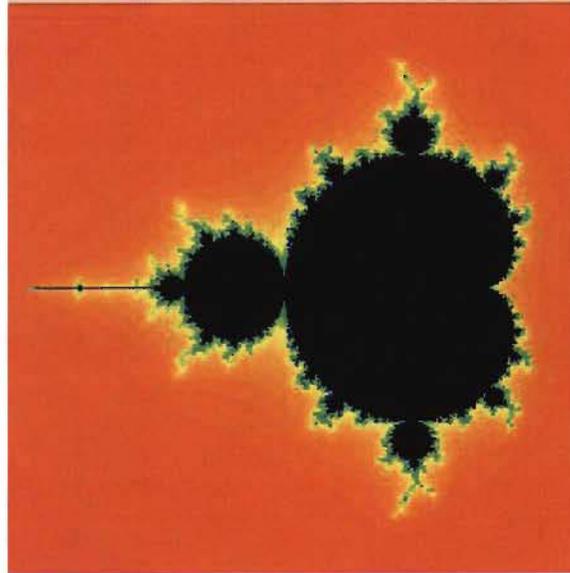


FIGURE 1.1 – Ensemble de Mandelbrot,  $\mathcal{M}$

La partie noire de la figure 1.1 représente l'ensemble de Mandelbrot. Le caractère fractal, c'est-à-dire irrégulier et fragmenté, de la frontière de l'ensemble saute immédiatement aux yeux. Il peut apparaître surprenant que le processus d'itération d'un simple polynôme de degré deux résulte en un ensemble pour lequel la frontière est si irrégulière.

On remarque aussi sur la figure que l'ensemble est symétrique par rapport à l'axe des réels et on note la structure autosimilaire de la frontière. L'autosimilarité est une caractéristique importante des objets fractals. Elle est discernable à toutes les échelles c'est-à-dire que peu importe l'agrandissement que l'on utilise pour visualiser une partie de l'ensemble, cette partie présentera une structure similaire à l'ensemble lui-même.

La figure 1.2 montre l'ensemble de Mandelbrot ainsi que trois agrandissements différents. Le premier agrandissement (image 2.) correspond au rectangle blanc dans l'image 1. Le deuxième agrandissement (image 3.) correspond au rectangle blanc dans l'image 2. et c'est la même chose pour le troisième agrandissement. La figure 1.3 correspond à l'encadré blanc de la 4<sup>e</sup> image de la figure 1.2. On peut ainsi apprécier la structure

autosimilaire à tous les niveaux de l'ensemble de Mandelbrot.

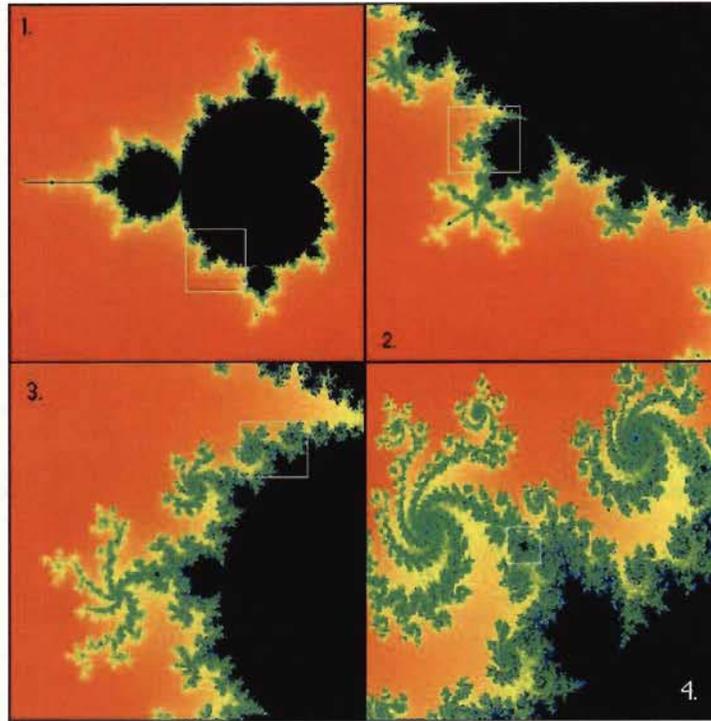


FIGURE 1.2 – Exploration de l'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot possède plusieurs propriétés très intéressantes, que nous allons démontrer dans cette section. La première propriété nécessite le résultat suivant :

**Lemme 1.5** *Soit  $|c| > 2$ , alors*

$$|P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{n-1} \text{ avec } n \geq 1.$$

**Preuve :**

Nous allons effectuer la preuve par induction. Pour  $n = 1$ , on a

$$|P_c(0)| = |c| = |c|(|c| - 1)^{1-1}$$

et donc la proposition est vraie pour  $n = 1$ . Supposons qu'elle soit vraie pour  $n = k$ , c'est-à-dire que

$$|P_c^k(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{k-1}.$$

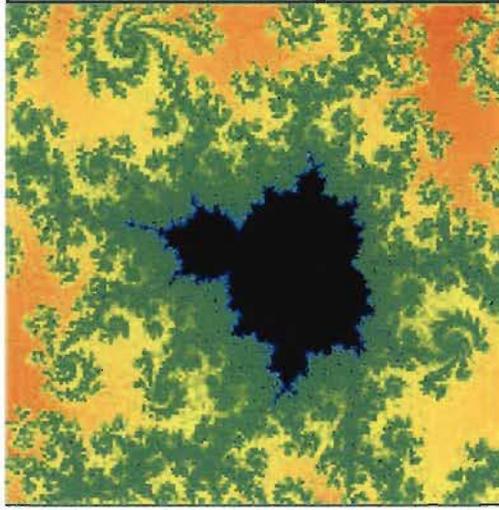


FIGURE 1.3 – Agrandissement de l'ensemble de Mandelbrot

Allons voir ce qu'il en est lorsque  $n = k + 1$ . On a  $|P_c^{k+1}(0)| = |P_c(P_c^k(0))|$  qui est, par définition de la fonction  $P_c$ , égal à  $|(P_c^k(0))^2 + c|$ . On peut alors séparer la valeur absolue :  $|(P_c^k(0))^2 + c| \geq |P_c^k(0)|^2 - |c|$  et selon l'hypothèse d'induction, on a  $|P_c^k(0)|^2 - |c| \geq (|c|(|c| - 1)^{k-1})^2 - |c|$ . De plus, comme  $|c| > 2$ , on a que  $(|c| - 1)^{k-1} > 1$  et donc on remarque que

$$\begin{aligned} (|c|(|c| - 1)^{k-1})^2 - |c| &\geq |c|^2(|c| - 1)^{k-1} - |c| \geq |c|^2(|c| - 1)^{k-1} - |c|(|c| - 1)^{k-1} \\ &= |c|(|c| - 1)^{k-1}(|c| - 1) = |c|(|c| - 1)^k, \end{aligned}$$

le résultat recherché. Ainsi, la proposition est vraie pour  $n = k + 1$  et donc elle est vraie pour tout  $n$ .  $\square$

Grâce à ce résultat, on est en mesure de démontrer la première propriété importante de l'ensemble de Mandelbrot qui stipule que celui-ci est borné dans le plan complexe.

**Théorème 1.6** *Pour tout nombre complexe  $c$  appartenant à l'ensemble de Mandelbrot, on a  $|c| \leq 2$ .*

**Preuve :**

Posons  $|c| > 2$ . Alors, du lemme 1.5, on a  $|P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{n-1}$  avec  $n \geq 1$ . Ainsi,

on trouve que  $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$  (puisque  $|c| > 2$ ). On obtient donc que  $c \notin \mathcal{M}$ . Ainsi, par contrapositive, quand  $c \in \mathcal{M}$ , on a  $|c| \leq 2$ .  $\square$

Ainsi, dans le plan complexe, l'ensemble de Mandelbrot est totalement inclu dans le disque de rayon 2 centré en 0. On a donc un critère très simple pour vérifier qu'un nombre complexe n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot. La prochaine propriété nous indique que le lieu de convergence de la suite des itérés, pour les éléments de  $\mathcal{M}$ , est également borné. Nous avons besoin du lemme suivant afin de la démontrer :

**Lemme 1.7** *Soit  $|c| \leq 2$ . Posons  $|P_c^m(0)| = 2 + \delta > 2$  où  $m \geq 1$ . Alors on a l'inégalité suivante :*

$$|P_c^{m+n}(0)| \geq 2 + 4^n \delta, \quad \text{où } n \geq 1.$$

**Preuve :**

Nous allons également effectuer la preuve de ce lemme par induction. Pour  $n = 1$ , on a  $|P_c^{m+1}(0)| = |P_c(P_c^m(0))|$  et en appliquant  $P_c$ , on trouve  $|(P_c^m(0))^2 + c|$ . En séparant la valeur absolue et en utilisant le fait que  $|P_c^m(0)| = 2 + \delta$ , on a

$$|(P_c^m(0))^2 + c| \geq |(P_c^m(0))|^2 - |c| = (2 + \delta)^2 - |c|.$$

Or,  $|c| \leq 2$  d'où  $(2 + \delta)^2 - |c| \geq (2 + \delta)^2 - 2 \geq 2 + 4\delta$ , c'est-à-dire que la proposition est vraie pour  $n = 1$ . Supposons qu'elle soit vraie pour  $n = k$ , c'est-à-dire que  $|P_c^{m+k}(0)| \geq 2 + 4^k \delta$ . Alors, similairement au cas où  $n = 1$ , quand  $n = k + 1$ , on trouve

$$|P_c^{m+k+1}(0)| = |P_c(P_c^{m+k}(0))| = |(P_c^{m+k}(0))^2 + c| \geq |(P_c^{m+k}(0))|^2 - |c|.$$

Alors, de l'hypothèse d'induction et du fait que  $|c| \leq 2$ , on trouve

$$|(P_c^{m+k}(0))|^2 - |c| \geq (2 + 4^k \delta)^2 - 2 = 2 + 4 \cdot 4^k \delta + 4^{2k} \delta^2 \geq 2 + 4^{k+1} \delta.$$

Ainsi, la proposition est vraie pour  $n = k + 1$  et donc elle est vraie pour tout  $n$  et le lemme est démontré.  $\square$

**Théorème 1.8** *Un nombre complexe  $c$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement si  $|P_c^n(0)| \leq 2$  pour tout  $n$ .*

**Preuve :**

( $\Rightarrow$ ) Posons  $c \in \mathcal{M}$ . On a donc, selon le théorème 1.6, que  $|c| \leq 2$ . Posons  $|P_c^m(0)| = 2 + \delta > 2$ . Alors selon le lemme précédent,  $|P_c^{m+n}(0)| \geq 2 + 4^n \delta$  et donc  $|P_c^{m+n}(0)| \rightarrow \infty$  c'est-à-dire que  $|P_c^n(0)| \rightarrow \infty$  et donc  $c$  n'appartient pas à  $\mathcal{M}$ , ce qui est une contradiction. On a donc obligatoirement que  $|P_c^n(0)| \leq 2$  pour tout  $n$ . ( $\Leftarrow$ ) L'autre côté de la preuve découle directement de la définition de l'ensemble de Mandelbrot.  $\square$

Ce théorème nous indique donc que pour un complexe  $c$  appartenant à l'ensemble de Mandelbrot, la suite des itérés,  $P_c^n(0)$ , est non seulement bornée, mais son module est assurément inférieur ou égal à 2 pour tout  $n$ .

Cette propriété est beaucoup plus intéressante qu'elle en a l'air à première vue puisqu'elle représente le critère le plus simple pour déterminer si un nombre appartient ou non à l'ensemble de Mandelbrot. En effet, contrairement au théorème 1.6, le théorème 1.8 permet de déterminer si un paramètre  $c$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot dans le cas où  $c \leq 2$ .

Aussi, dès que le module des itérés de  $P_c$  dépasse 2, alors on est assuré que le nombre complexe  $c$  ne fait pas partie de l'ensemble. Généralement, si un complexe  $c$  n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot, alors la valeur  $|P_c^n(0)|$  croît rapidement et surpasse rapidement 2. Aussi, lorsque l'on teste l'appartenance à l'ensemble pour des points hors de l'ensemble, mais près de sa frontière, cela prend un plus grand nombre d'itérations avant de constater la divergence ( $|P_c^n(0)| > 2$ ). On peut donc considérer le nombre d'itérations nécessaires avant de constater la divergence et représenter graphiquement le phénomène par des couches de divergences. C'est ce que représentent les différentes couleurs autour de l'ensemble de Mandelbrot dans la figure 1.1.

Considérons par exemple le point  $c = -0,5 + 0,5i$ . On remarque qu'au bout de 500 itérations de  $P_{-0,5+0,5i}(0)$ , le module est de 0,493. On peut estimer qu'il demeurera inférieur à deux lorsque  $n$  s'approchera de l'infini c'est-à-dire que  $c = -0,5 + 0,5i$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot. En fait, les itérés de  $P_{-0,5+0,5i}(0)$  convergent rapidement vers le point fixe  $z_0 = -0,409 + 0,275i$ . Si on considère plutôt le paramètre  $c_1 = -1 + 0,35i$ , qui n'appartient pas à  $\mathcal{M}$ . Dès la neuvième itération de  $P_{-1+0,35i}(0)$ , on remarque la divergence (module supérieur à deux), contrairement au point  $c_2 = -0,251$ , qui est très près de la frontière de l'ensemble, et pour lequel on a besoin de 97 itérations pour remarquer qu'il n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot. Les points  $c_1 = -1 + 0,35i$  et  $c_2 = -0,251$  sont donc tous deux à l'extérieur de  $\mathcal{M}$ , mais ils ne sont pas dans la même couche de divergence puisque leurs itérés ne divergent pas à la même vitesse.

C'est donc cette simple propriété (théorème 1.8) qui est utilisée pour générer et visualiser le célèbre ensemble de Mandelbrot avec ses couches de divergences.

Le théorème 1.6 nous a montré que l'ensemble de Mandelbrot est un ensemble borné. Le prochain théorème démontre qu'il s'agit également d'un ensemble fermé.

**Théorème 1.9** *L'ensemble de Mandelbrot est un ensemble fermé.*

**Preuve :**

Considérons une suite  $\{z_m\}$  d'éléments de  $\mathcal{M}$  convergeant vers  $z_0$ . Si on réussit à montrer que  $z_0$  appartient obligatoirement à  $\mathcal{M}$ , alors on aura démontré que  $\mathcal{M}$  est fermé. On a que  $z_m$  est élément de  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire que  $|P_{z_m}^n(0)| \leq 2$  pour tout  $n$ . En prenant la limite de chaque côté de l'inégalité, on obtient  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{z_m}^n(0)| \leq 2$ . Puis, comme le module est une fonction continue, on a  $|\lim_{n \rightarrow \infty} P_{z_m}^n(0)| \leq 2$ . Or,  $P_{z_m}^n(0)$  est un polynôme de degré  $n$  en  $z_m$  et donc une fonction continue pour tout  $n$ , ce qui implique, conjointement avec le fait que  $z_m \rightarrow z_0$ , que  $|P_{z_0}^n(0)| \leq 2$ . Donc, en vertu du théorème 1.8,  $z_0 \in \mathcal{M}$  et donc  $\mathcal{M}$  est fermé.  $\square$

Les théorèmes précédents ont permis de démontrer que l'ensemble de Mandelbrot est un ensemble borné (par le cercle de rayon 2 centré en 0 sur le plan complexe) ainsi qu'un ensemble fermé. On s'intéressera maintenant à savoir s'il s'agit d'un ensemble connexe.

**Théorème 1.10** *L'ensemble de Mandelbrot,  $\mathcal{M}$ , est simplement connexe.*

**Preuve :**

On devrait d'abord commencer par montrer que l'ensemble de Mandelbrot est un ensemble connexe, mais on a choisit, en raison du niveau de difficulté de la preuve, de ne pas montrer cette partie. On peut trouver la démonstration de la connexité de l'ensemble de Mandelbrot dans [6].

Considérant que l'ensemble de Mandelbrot est un ensemble connexe, démontrons maintenant qu'il est simplement connexe. Comme  $P_c^n(0)$  est un polynôme de degré  $n$  de la variable  $c$ , il s'agit d'une fonction holomorphe non constante sur  $\mathbb{C}$ . Considérons le complément de l'ensemble de Mandelbrot :  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$ . Supposons qu'il existe une composante connexe  $E$  de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$  qui soit bornée dans  $\mathbb{C}$ . L'ensemble  $\mathcal{M}$  étant fermé (théorème 1.9), on a que l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$  est un ensemble ouvert et donc, selon le théorème 1.1, la composante connexe  $E$  est également un ensemble ouvert. De plus, comme  $E$  est bornée, on a, selon le théorème 1.3, que  $P_c^n(0)$  atteint son module maximal en un point  $z_0$  de  $\partial E$  et donc à l'extérieur de  $E$  puisqu'il s'agit d'un ensemble ouvert. Ainsi,  $z_0$  appartient à  $\mathcal{M}$  c'est-à-dire que  $|P_{z_0}^n(0)| \leq 2$ . Or, c'est le module maximum de  $P_c^n(0)$  sur  $E$  c'est-à-dire que pour tout  $c \in E$ ,  $|P_c^n(0)| \leq |P_{z_0}^n(0)| \leq 2$  et donc  $c \in \mathcal{M}$  ce qui est une contradiction. Ainsi,  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$  ne possède pas de composante connexe bornée et donc c'est un ensemble connexe. Donc,  $\mathcal{M}$  est sans trou, et comme c'est un ensemble connexe, il est simplement connexe.  $\square$

La connexité de l'ensemble de Mandelbrot peut apparaître suprenante. En effet, lorsque l'on s'intéresse à l'aspect géométrique de l'ensemble et qu'on explore sa frontière

plus en détails, on a l'impression que des « parties » de l'ensemble sont détachées (comme en témoigne la figure 1.3). Ce n'est qu'illusion ! L'ensemble de Mandelbrot est bel et bien connexe. Il faut bien comprendre que l'algorithme permettant de voir l'ensemble  $\mathcal{M}$ , bien qu'excellent, n'est pas parfait en terme de précision. Ainsi, il se peut qu'on ne discerne pas le mince « filet » reliant à l'ensemble les « parties » qui semblent s'en écarter.

On peut également s'intéresser aux paramètres  $c$  réels appartenant à l'ensemble de Mandelbrot. On sait, du théorème 1.6, que les réels appartenant à  $\mathcal{M}$  seront situés dans l'intervalle  $[-2, 2]$ . Le prochain théorème nous donne l'ensemble exact des valeurs réelles appartenant à l'ensemble de Mandelbrot. On a d'abord besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.11** *Soit  $c > 0$  (fixé). Alors, la suite des itérés  $\{P_c^n(0)\}$  est strictement croissante.*

**Preuve :**

Soit  $c > 0$  (fixé). On a  $P_c^2(0) = P_c(P_c(0)) = P_c(c) = c^2 + c = c(1 + c) > c = P_c(0)$ . Aussi, supposons que  $P_c^n(0) > P_c^{n-1}(0)$ ,  $n > 1$ . Alors  $P_c^{n+1}(0) = P_c(P_c^n(0)) = (P_c^n(0))^2 + c > (P_c^{n-1}(0))^2 + c = P_c(P_c^{n-1}(0)) = P_c^n(0)$ . Ainsi, on a démontré par induction que  $P_c^{n+1}(0) > P_c^n(0)$  pour tout  $n$ , c'est-à-dire que la suite des itérés,  $\{P_c^n(0)\}$ , est strictement croissante.  $\square$

**Théorème 1.12** *L'ensemble de Mandelbrot rencontre l'axe réel sur l'intervalle  $[-2, 1/4]$ .*

**Preuve :**

Considérons le polynôme  $Q_c(x) = P_c(x) - x = x^2 - x + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . Ainsi,  $Q_c(x)$  ne possède aucune racine réelle quand  $c > 1/4$ , possède une racine réelle double en  $x = 1/2$  quand  $c = 1/4$  et 2 racines réelles en  $x = (1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$  quand  $c < 1/4$ . Posons  $c < -2$ , alors  $|c| > 2$  et donc selon le théorème 1.6,  $c \notin \mathcal{M}$ . Posons  $c > 1/4$ , alors selon le lemme 1.11, la suite des itérés,  $\{P_c^n(0)\}$ , est strictement croissante. Supposons qu'elle est bornée. Alors, elle est convergente, disons vers  $z \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) = z$ .

Ainsi,  $P_c(z) = P_c(\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0))$  et on peut extraire la limite puisque  $P_c$  est continue pour tout  $n$ , c'est-à-dire que

$$P_c(\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_c(P_c^n(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_c^{n+1}(0) = z,$$

ce qui est impossible puisque  $Q_c(x)$  n'a pas de racine réelle pour  $c > 1/4$ . Ainsi,  $\{P_c^n(0)\}$  n'est pas une suite bornée d'où  $c \notin \mathcal{M}$ . Finalement, considérons  $c \in [-2, 1/4]$  et posons  $a = (1 + \sqrt{(1 - 4c)})/2$ . Ainsi,  $P_c(a) = a^2 + c = a$ . On a que  $|P_c(0)| = |c| \leq a$  (le graphique de la figure 1.4 aide à nous convaincre que  $|c| \leq a$ ). Supposons que  $|P_c^n(0)| \leq a$ . Alors,  $P_c^{n+1}(0) = (P_c^n(0))^2 + c \leq a^2 + c = a$ . De plus,  $P_c^{n+1}(0) = (P_c^n(0))^2 + c \geq c \geq -a$  et donc on a  $|P_c^{n+1}(0)| \leq a$ . Ainsi, on a montré par induction que  $|P_c^n(0)| \leq a$  pour tout  $n$ . Or,  $a \leq 2$  pour  $c \in [-2, 1/4]$  et donc  $|P_c^n(0)| \leq 2$  pour tout  $n$  c'est-à-dire que  $[-2, 1/4] \subset \mathcal{M}$ .  $\square$

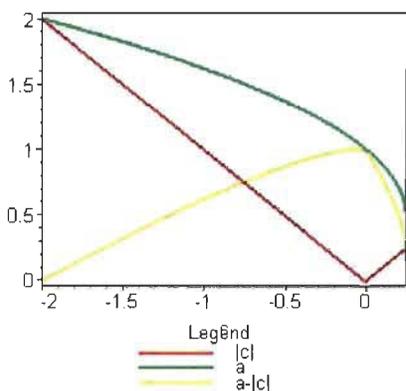


FIGURE 1.4 – Représentation graphique de  $|c|$ ,  $a := \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$  et  $a - |c|$

### 1.3 Ensembles de Julia remplis et théorème de Fatou-Julia

On ne peut traiter de dynamique complexe et de l'ensemble de Mandelbrot sans par la suite traiter les ensembles de Julia remplis. Les ensembles de Julia remplis sont

aussi nombreux qu'il y a de points dans le plan complexe et sont définis de manière très similaire à l'ensemble de Mandelbrot. Tout comme on l'a fait pour l'ensemble de Mandelbrot, l'on va présenter les propriétés les plus intéressantes des ensembles de Julia remplis. La propriété la plus intéressante est le théorème de Fatou-Julia, concept central à ce mémoire, établissant un lien entre les ensembles de Julia remplis et l'ensemble de Mandelbrot.

Aussi, d'un point de vue dynamique, à partir d'un ensemble de Julia rempli, on peut définir les ensembles de Julia ainsi que ceux de Fatou. Avec l'approche des familles normales (approche qui sera traitée à la fin du chapitre 2), on commencera plutôt par définir les ensembles de Julia et de Fatou.

Commençons donc par donner la définition, d'un point de vue dynamique, d'ensemble de Julia rempli. Un tel ensemble est produit en itérant le même polynôme que pour l'ensemble de Mandelbrot ( $P_c(z) = z^2 + c$ ), mais cette fois-ci c'est le paramètre  $c$  qui est fixé, et on s'intéresse aux complexes  $z$  qui sont tels que la suite des itérés reste bornée.

**Définition 1.5** *Ensemble de Julia rempli*

Soit la fonction  $P_c(z) = z^2 + c$ . On définit l'ensemble de Julia rempli associé au paramètre  $c$ , noté  $\mathcal{K}_c$ , comme l'ensemble des points  $z$  tels que la suite des itérés de  $P_c$  pris en  $z$  est bornée, c'est-à-dire

$$\mathcal{K}_c := \{z \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n(z)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}.$$

**Remarque :** Une autre façon de définir les ensembles de Julia remplis (conséquence du lemme 1.4) est de considérer les points  $z$  qui n'appartiennent pas au bassin d'attraction à l'infini de la fonction  $P_c$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{K}_c := \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin A_c(\infty)\}.$$

Contrairement à l'ensemble de Mandelbrot qui est unique, il existe un ensemble de Julia rempli pour chaque nombre complexe  $c$ . Bien entendu la forme que prendra l'ensemble

$\mathcal{K}_c$  dépend totalement du paramètre  $c$ . La figure 1.5 nous montre l'ensemble de Julia rempli associé au paramètre  $c = 0.36237 + 0.32i$ .

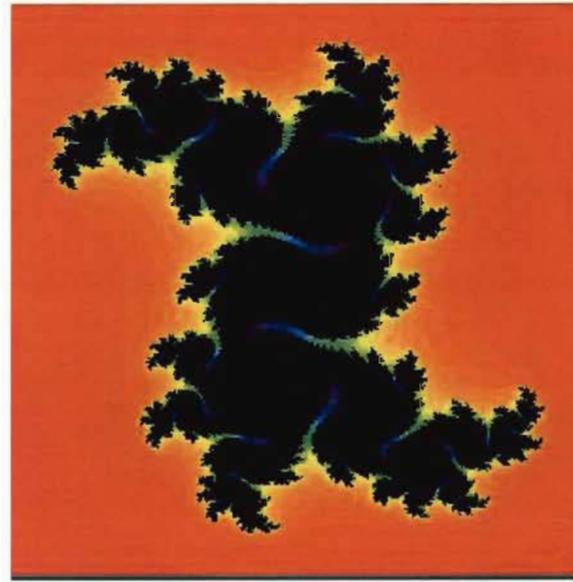


FIGURE 1.5 – Ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{0.36237+0.32i}$

On a vu précédemment un critère simple permettant de déterminer si un nombre complexe n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot. Il existe un critère tout aussi simple pour les ensembles de Julia remplis.

**Théorème 1.13** *Pour tout complexe  $z$  appartenant à l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ , on a  $|z| \leq r := \max\{|c|, 2\}$ .*

**Preuve :**

Soit  $c \in \mathbb{C}$  et  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $|z| > \max\{|c|, 2\}$ . Alors il existe un nombre  $\epsilon > 0$  tel que  $|z| = 2 + \epsilon$ . De plus, par l'inégalité du triangle,

$$|z^2| = |z^2 + c - c| \leq |z^2 + c| + |c|.$$

Poursuivons avec la dernière inégalité pour  $|z^2 + c|$  :

$$\begin{aligned} |z^2 + c| &\geq |z^2| - |c| = |z|^2 - |c| \\ &\geq |z|^2 - |z| = (|z| - 1)|z| = (1 + \epsilon)|z|. \end{aligned}$$

Ainsi,  $|P_c(z)| = |z^2 + c| \geq (1 + \epsilon)|z|$  c'est à dire que la fonction  $P_c$  fait augmenter le module de  $z$  d'un facteur d'au moins  $1 + \epsilon$ . Ainsi,  $|P_c^n(z)| \geq (1 + \epsilon)^n|z|$  et donc  $\{P_c^n(z)\} \rightarrow \infty$  puisque  $1 + \epsilon > 1$  c'est-à-dire que  $z \notin \mathcal{K}_c$ . Ainsi, on a montré par contraposée que si  $z \in \mathcal{K}_c$ , alors  $|z| \leq \max\{|c|, 2\}$ .  $\square$

Ainsi, tout complexe dont le module est supérieur à  $r = \max\{|c|, 2\}$  sera à l'extérieur de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ . Comme on l'a déjà mentionné pour l'ensemble de Mandelbrot, ce critère n'est d'aucune utilité si  $|z| \leq r$ . Dans ce cas, on aura besoin d'un autre résultat, analogue au théorème 1.8, afin de savoir si le nombre complexe  $z$  appartient ou non à l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ .

**Théorème 1.14** *Un nombre complexe  $z$  appartient à l'ensemble de Julia rempli correspondant au paramètre  $c$ ,  $\mathcal{K}_c$ , si et seulement si  $|P_c^n(z)| \leq r := \max\{|c|, 2\}$  pour tout  $n$ .*

**Preuve :**

( $\Rightarrow$ ) Posons  $z \in \mathcal{K}_c$  et supposons qu'il existe un naturel  $m > 1$  tel que  $w := P_c^m(z)$  avec  $|w| > r$ . Alors, par le théorème 1.13,  $w \notin \mathcal{K}_c$  et par définition d'ensemble de Julia rempli,  $\{P_c^n(w)\}$  n'est pas bornée. On a donc que  $\{P_c^{m+n}(z)\} = \{P_c^n(w)\}$  n'est pas bornée c'est-à-dire que  $z \notin \mathcal{K}_c$ , une contradiction. On doit donc avoir  $|P_c^n(z)| \leq r := \max\{|c|, 2\}$  pour tout  $n$ . ( $\Leftarrow$ ) L'autre côté de la preuve découle directement de la définition de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ .  $\square$

Similairement à l'ensemble de Mandelbrot, c'est cette dernière propriété que l'on utilise pour visualiser les ensembles de Julia remplis.

Aussi, tout comme l'ensemble de Mandelbrot, les ensembles de Julia remplis sont des ensembles fermés.

**Théorème 1.15** *L'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , est un ensemble fermé.*

**Preuve :**

Soit  $z \notin \mathcal{K}_c$ . Alors, par le lemme 1.4,  $P_c^n(z) \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi, par définition de divergence à l'infini,  $|P_c^n(z)| > R, R \in \mathbb{R}$ , à partir d'un certain entier  $m$ . Comme  $P_c$  est continue,  $|P_c^n(z')| > r$  pour  $n \geq m$  et pour tout  $z'$  dans un disque suffisamment petit centré en  $z$ . Ainsi,  $P_c^n(z') \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow \infty$  et donc  $z' \notin \mathcal{K}_c$ . On a donc trouvé un disque centré au point  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$  totalement inclus dans  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$  c'est à dire qu'il s'agit d'un ensemble ouvert et donc l'ensemble  $\mathcal{K}_c$  est fermé.  $\square$

Suivant le même cheminement que pour l'ensemble de Mandelbrot, la prochaine caractéristique des ensembles de Julia remplis que l'on désire connaître est la connexité. Le prochain théorème montre que la connexité de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  dépend en fait de l'appartenance du paramètre  $c$  à l'ensemble de Mandelbrot. Il s'agit d'un théorème capital à ce projet puisque le résultat principal de ce mémoire est une généralisation de ce théorème aux espaces multicomplexes.

**Théorème 1.16** *Théorème de Fatou-Julia*

*Si la suite  $\{P_c^n(0)\}$  diverge à l'infini, alors l'ensemble de Julia rempli associé au paramètre  $c$ ,  $\mathcal{K}_c$ , est totalement non connexe. Autrement,  $\{P_c^n(0)\}$  est bornée et l'ensemble  $\mathcal{K}_c$  est connexe.*

**Remarques :**

1. Selon la définition de l'ensemble de Mandelbrot et celle des ensembles de Julia remplis, que la suite  $\{P_c^n(0)\}$  diverge à l'infini implique que  $c \notin \mathcal{M}$  et  $0 \notin \mathcal{K}_c$ . C'est le critère qu'on utilise pour déterminer la connexité des ensembles de Julia remplis.

2. On peut trouver le théorème de Fatou-Julia (pas nécessairement sous ce nom) dans [4] ou dans [14] et on peut trouver la preuve dans [5].

Bien que la preuve serait pertinente à présenter, on a fait le choix de l'omettre en raison de son niveau de difficulté.

Dans le cas où l'ensemble de Julia rempli est connexe, on précise qu'il est alors simplement connexe.

**Théorème 1.17** *Si la suite  $\{P_c^n(0)\}$  est bornée, alors l'ensemble  $\mathcal{K}_c$  est simplement connexe.*

**Preuve :**

Supposons que la suite  $\{P_c^n(0)\}$  est bornée c'est-à-dire que l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  est connexe selon le théorème de Fatou-Julia. Comme  $P_c^n(z)$  est un polynôme de degré  $n$  de la variable  $z$ , il s'agit d'une fonction holomorphe non constante sur  $\mathbb{C}$ . Considérons le complément de l'ensemble de Julia rempli :  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$ . Supposons qu'il existe une composante connexe  $E$  de  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$  qui soit bornée dans  $\mathbb{C}$ . L'ensemble  $\mathcal{K}_c$  étant fermé (théorème 1.15), on a que l'ensemble  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$  est un ensemble ouvert et donc, selon le théorème 1.1, la composante connexe  $E$  est également un ensemble ouvert. De plus, comme  $E$  est bornée, on a, selon le théorème 1.3, que  $P_c^n(z)$  atteint son module maximal en un point  $z_0$  de  $\partial E$  et donc à l'extérieur de  $E$  puisqu'il s'agit d'un ensemble ouvert. Ainsi,  $z_0$  appartient à  $\mathcal{K}_c$  c'est-à-dire que  $|P_c^n(z_0)| \leq r = \max\{|c|, 2\}$ . Or, c'est le module maximal de  $P_c^n(z)$  sur  $E$  c'est-à-dire que pour tout  $z \in E$ ,  $|P_c^n(z)| \leq |P_c^n(z_0)| \leq r$  et donc  $z \in \mathcal{K}_c$  ce qui est une contradiction. Ainsi,  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$  ne possède pas de composante connexe bornée et donc c'est un ensemble connexe. Donc,  $\mathcal{K}_c$  est sans trou, et comme c'est un ensemble connexe, il est simplement connexe.  $\square$

Le théorème de Fatou-Julia s'interprète de la manière suivante : l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  est connexe si et seulement si le complexe  $c$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot. Inversement, l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  est totalement non connexe si

et seulement si le complexe  $c$  n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot. On rappelle qu'un point  $c$  n'appartient pas à  $\mathcal{M}$  si et seulement si la suite  $\{P_c^n(0)\}$  diverge à l'infini et donc si et seulement si  $0$  appartient au bassin d'attraction à l'infini  $A_c(\infty)$ . Ainsi, il n'y a que deux cas pour la connexité d'un ensemble de Julia rempli, soit connexe ou totalement non connexe c'est-à-dire non connexe et dont les composantes connexes sont des singletons.

En regardant l'ensemble de Julia rempli de la figure 1.5, on peut deviner qu'il s'agit d'un ensemble connexe (c'est vraiment le cas). Ainsi, le théorème de Fatou-Julia nous indique que  $c = 0.36237 + 0.32i$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot. En effet, une simple vérification nous permet de voir qu'après 200 itérations de  $P_c(0)$ , le module est toujours inférieur à 2.

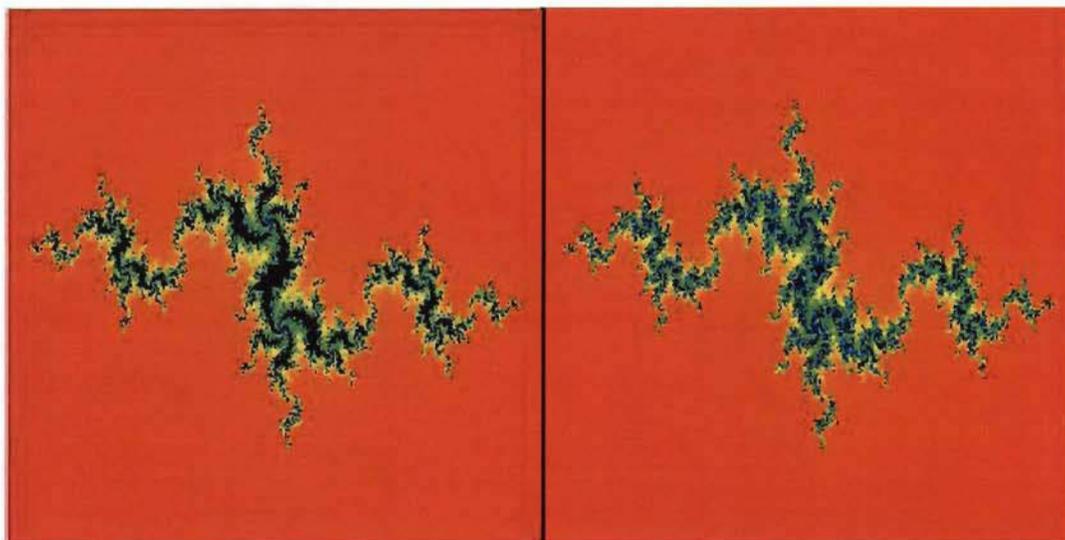


FIGURE 1.6 – Ensembles de Julia remplis  $\mathcal{K}_{-0.98389+0.2645i}$  et  $\mathcal{K}_{-0.98324+0.2628i}$

Les figures 1.6 et 1.7 montrent d'autres ensembles de Julia remplis. Dans les deux cas, l'ensemble de gauche correspond à un paramètre  $c \in \mathcal{M}$  près de la frontière alors que celui de droite correspond à un paramètre  $c$  tout aussi près de la frontière, mais à l'extérieur de l'ensemble. Ainsi, l'ensemble de gauche est connexe alors que l'ensemble

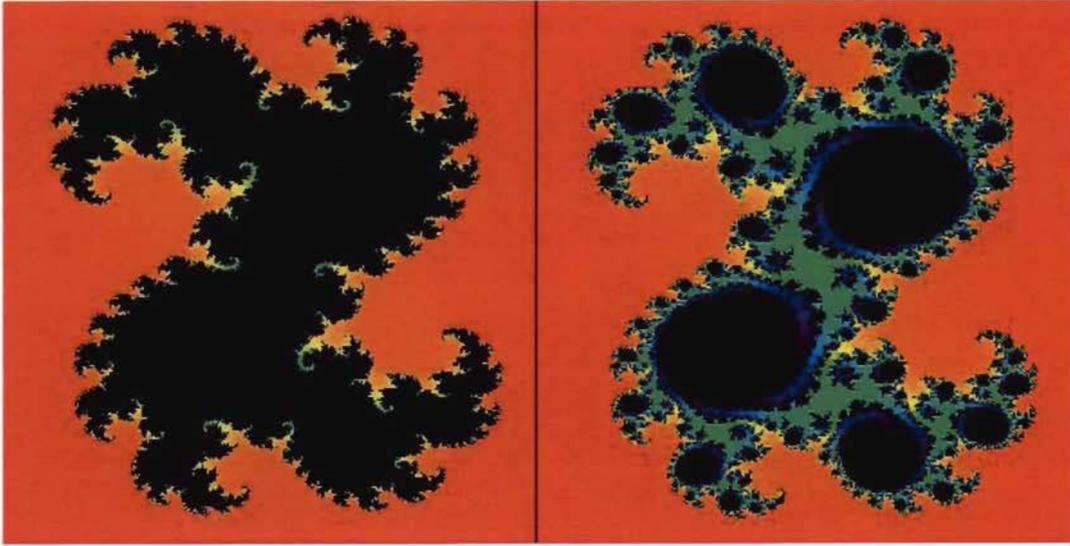


FIGURE 1.7 – Ensembles de Julia remplis  $\mathcal{K}_{0.3409+0.0781i}$  et  $\mathcal{K}_{0.3419+0.0777i}$

de droite est totalement non connexe. Encore une fois, c'est la précision de l'algorithme qui donne l'impression que l'ensemble de droite possède des composantes connexes.

Les ensembles de Julia (non remplis) et de Fatou sont également des concepts intéressants en dynamique complexe. Une manière de les définir à l'aide des ensembles de Julia remplis est la suivante :

**Définition 1.6** *Ensemble de Julia*

On définit l'ensemble de Julia associé au paramètre  $c$ , noté  $\mathcal{J}_c$ , comme la frontière de l'ensemble de Julia rempli associé, c'est-à-dire  $\mathcal{J}_c = \partial\mathcal{K}_c$ .

**Définition 1.7** *Ensemble de Fatou*

On définit l'ensemble de Fatou associé au paramètre  $c$ , noté  $\mathcal{F}_c$ , comme le complément de l'ensemble de Julia associé, c'est-à-dire  $\mathcal{F}_c = (\mathcal{J}_c)^c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}_c$ .

**Remarques :**

1. Soit  $c \in \mathcal{M}$ . Comme les ensembles de Julia remplis sont fermés, on a  $\mathcal{J}_c \subseteq \mathcal{K}_c$ .

Remarquons que l'inclusion n'est pas stricte, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles

de Julia remplis connexes dont l'intérieur est vide.

2. Dans le cas où  $c \notin \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{K}_c$  est totalement non connexe et donc  $\mathcal{K}_c = \mathcal{J}_c$ .

On peut trouver dans [14] ou encore dans [24] qu'un ensemble de Julia est un ensemble parfait. Ainsi, en vertu de la remarque précédente, les ensembles de Julia remplis totalement non connexes sont également des ensembles parfaits et comme ils sont compacts, il s'agit d'ensembles de Cantor. Dans certaines versions du théorème de Fatou-Julia, on présente directement l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  comme étant un ensemble connexe ou un ensemble de Cantor.

Dans le cas où  $c \notin \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{K}_c = \mathcal{J}_c$  et donc tous les points de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  sont à l'extérieur de l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$ . Inversement, si  $c \in \mathcal{M}$  et  $\mathcal{K}_c \neq \mathcal{J}_c$ , les points  $z$  qui se retrouvent dans l'intérieur de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ , c'est-à-dire  $z \in \mathcal{K}_c \setminus \mathcal{J}_c$ , sont dans l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  puisque  $\mathcal{K}_c \setminus \mathcal{J}_c \subset \mathcal{F}_c$ .

De plus, on a vu au théorème 1.17 que l'ensemble de Julia rempli correspondant à  $c \in \mathcal{M}$  est simplement connexe, ainsi  $\mathcal{J}_c$  est connexe et donc l'ensemble  $\mathcal{F}_c \cap \mathcal{K}_c = \mathcal{K}_c \setminus \mathcal{J}_c$  est lui-même simplement connexe en autant que  $\mathcal{K}_c \neq \mathcal{J}_c$  [1]. Dans ce cas, l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  possède deux composantes connexes. La première, que l'on notera  $\mathcal{F}_{c,0}$ , est incluse dans  $\mathcal{K}_c$  et bornée par  $\mathcal{J}_c$ . La deuxième, que l'on notera  $\mathcal{F}_{c,\infty}$ , est non bornée et correspond à  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$ .

Par ailleurs, si  $c \in \mathcal{M}$  et  $\mathcal{F}_c \cap \mathcal{K}_c = \emptyset$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{K}_c = \mathcal{J}_c$ , alors l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  consiste uniquement en la composante non bornée  $\mathcal{F}_{c,\infty}$ .

Dans le cas où l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  est totalement non connexe, l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  consiste également en la composante connexe non bornée.

La dernière section de ce chapitre portera sur la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot. L'on trouvait pertinent de présenter la caractérisation de la cardioïde

puisque la majorité des points de l'ensemble de Mandelbrot sont à l'intérieur de cette cardioïde.

## 1.4 Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot

On a présenté dans les sections précédentes les propriétés les plus importantes de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia remplis. La dernière section de ce chapitre fait un retour sur l'ensemble de Mandelbrot. On s'intéressera ici aux points fixes attractifs de la fonction  $P_c$ , ce qui nous permettra de caractériser la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot.

Intéressons nous donc aux points fixes de la fonction  $P_c$ . On remarque que ceux-ci sont de la forme

$$z_c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}. \quad (1.1)$$

En effet,

$$\begin{aligned} P_c(z_c) &= P_c\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}\right) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}\right)^2 + c \\ &= \frac{1 \pm 2\sqrt{1 - 4c} + 1 - 4c}{4} + c = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2} = z_c. \end{aligned}$$

**Remarque :** On considère une des deux branches de la fonction racine carrée complexe. Le  $\pm$  nous assure que l'on traite les deux valeurs.

Par exemple, les points fixes associés à  $c = i$ , sont  $z = (1 \pm \sqrt{1 - 4i})/2 = (1 \pm (1,6 - 1,25i))/2$  d'où les deux points fixes associés à  $P_c$  sont  $\alpha = 1,3 - 0,625i$  et  $\beta = -0,3 + 0,625i$  et on vérifie facilement que  $P_c(\alpha) = \alpha$  et  $P_c(\beta) = \beta$ . On peut aussi calculer le facteur multipliant  $\lambda_c$  associé au point fixe  $z_c$  c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P'_c(z) &= (z^2 + c)' = 2z \\ \Rightarrow \lambda_c &= P'_c(z_c) = 2z_c = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Une question se pose maintenant, quelle est la nature de ces deux points fixes, attractifs, répulsifs ou neutres ? Et bien, il ne peut y avoir qu'un seul point fixe attractif parmi ceux trouvés comme le stipule la proposition suivante :

**Proposition 1.18** *La fonction  $P_c$  possède au maximum un point fixe attractif, c'est-à-dire de facteur multipliant  $|\lambda_c| < 1$ .*

**Preuve :**

Soient

$$\alpha_c = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad \beta_c = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

les 2 points fixes de  $P_c$ . On remarque que  $\alpha_c + \beta_c = 1$  et ainsi  $P'_c(\alpha_c) + P'_c(\beta_c) = 2\alpha_c + 2\beta_c = 2$ . Supposons que  $\alpha_c$  et  $\beta_c$  sont 2 points fixes attractifs de  $P_c$  c'est-à-dire que  $|P'_c(\alpha_c)| < 1$  et  $|P'_c(\beta_c)| < 1$ . Alors  $2 = |P'_c(\alpha_c) + P'_c(\beta_c)| \leq |P'_c(\alpha_c)| + |P'_c(\beta_c)| < 2$  et donc un seul de ces points fixes peut être attractif.  $\square$

**Remarque :** L'énoncé suivant : la fonction  $\lambda/2 - \lambda^2/4$  est injective pour  $|\lambda| < 1$ , est équivalent à la proposition 1.18.

Remarquons également que l'on peut exprimer  $c$  en fonction de  $\lambda$  de la manière suivante :  $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$ . En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_c}{2} - \frac{\lambda_c^2}{4} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2} - \frac{(1 \pm \sqrt{1 - 4c})^2}{4} \\ &= \frac{(2 \pm 2\sqrt{1 - 4c}) - (1 \pm 2\sqrt{1 - 4c} + 1 - 4c)}{4} = c. \end{aligned}$$

Si on considère l'ensemble de ces valeurs  $c$  telles que  $z_c$  est un point fixe attractif de  $P_c$  :

$$\mathcal{C} := \left\{ c_\lambda = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4} : |\lambda| < 1 \right\}, \quad (1.3)$$

on obtient une cardioïde (remplie) comme le démontre la figure 1.8 [3].

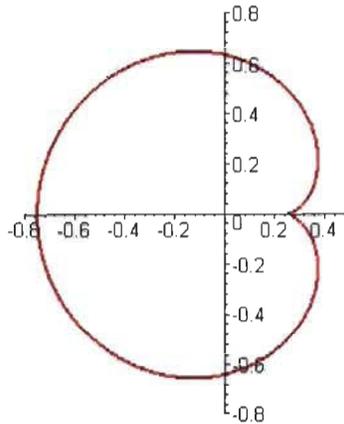


FIGURE 1.8 – Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot

Une cardioïde est plus souvent exprimée en coordonnées polaires et donc voici l'expression de cette cardioïde en coordonnées polaires :  $\rho(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$  [3]. Le graphique de la figure 1.9 représente cette cardioïde obtenues à l'aide de la forme polaire. Remarquons que cette cardioïde est centrée en  $(0, 0)$ . Il faut donc lui faire faire une translation afin que le centre soit au point  $(1/4, 0)$  pour ainsi obtenir exactement la cardioïde  $\mathcal{C}$ .

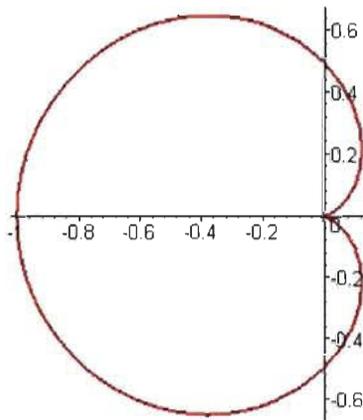


FIGURE 1.9 – Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot :  $\rho(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$

En utilisant la paramétrisation suivante [3] :

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} \cos t(1 - \cos t) + \frac{1}{4}, \\y(t) &= \frac{1}{2} \sin t(1 - \cos t),\end{aligned}$$

on obtient la bonne cardioïde centrée au bon endroit comme en témoigne la figure 1.10.

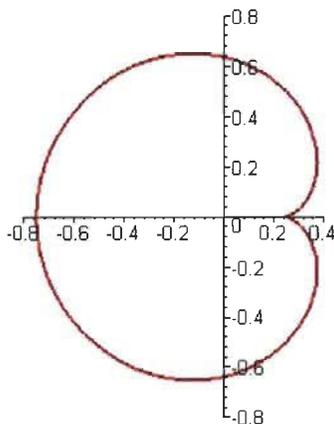


FIGURE 1.10 – Cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot : équations paramétriques

Clairement,  $0 \in \mathcal{C}$  (en effet, on a le point fixe  $z_c = 0$  pour  $c = 0$ ). En fait, la cardioïde  $\mathcal{C}$  est incluse dans l'ensemble de Mandelbrot c'est pourquoi nous l'appellerons la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot.

**Proposition 1.19** *La cardioïde  $\mathcal{C} := \{c_\lambda = \lambda/2 - \lambda^2/4 : |\lambda| < 1\}$  est incluse dans l'ensemble de Mandelbrot. De plus,  $\partial\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ .*

**Preuve :**

Soit  $c \in \mathcal{C}$ . Alors, il existe un point fixe attractif  $z_c$  (de facteur multipliant  $\lambda_c$ ) de  $P_c$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(z) = z_c$$

pour tout  $z$  dans un certain disque  $D(z_c, \delta)$ . Ainsi, le disque  $D(z_c, \delta)$  est inclus, par définition, dans l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ . Supposons que  $0$  n'appartient pas à  $\mathcal{K}_c$ ,

alors, selon le théorème de Fatou-Julia,  $\mathcal{K}_c$  est totalement non connexe ce qui est une contradiction. Ainsi,  $0 \in \mathcal{K}_c$  et donc, par définition,  $c$  appartient à l'ensemble de Mandelbrot d'où  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ . Il découle que  $\overline{\mathcal{C}} \subset \overline{\mathcal{M}}$  et donc  $\partial\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}} \subset \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$  puisque l'ensemble de Mandelbrot est un ensemble fermé.  $\square$

**Remarque :** Plus précisément encore, on a que  $\partial\mathcal{C} \subset \partial\mathcal{M}$ .

Soit  $c \in \mathcal{C}$ , alors il existe un point fixe attractif  $z_c$ , c'est-à-dire que  $P_c(z_c) = z_c$  et  $|\lambda_c| = |P'_c(z_c)| < 1$ . On peut en déduire que  $z_c \in \mathcal{K}_c$ , c'est-à-dire que  $z_c \in \mathcal{K}_c \setminus \mathcal{J}_c$  ou  $z_c \in \mathcal{J}_c$ . Supposons que  $z_c \in \mathcal{J}_c$ . Comme  $z_c$  est un point fixe attractif de  $P_c$ , on a  $\{P_c^n(z)\} \rightarrow z_c$  pour  $z \in D(z_c, \delta)$ , c'est-à-dire que  $D(z_c, \delta) \subseteq \mathcal{K}_c$  ce qui est une contradiction avec  $z_c \in \mathcal{J}_c$ . Ainsi,  $z_c \in \mathcal{K}_c \setminus \mathcal{J}_c$ , c'est-à-dire que le point fixe attractif  $z_c$  associé à  $c \in \mathcal{C} \subset \mathcal{M}$  est dans dans l'intérieur de l'ensemble de Julia rempli connexe  $\mathcal{K}_c$ , c'est-à-dire dans  $\mathcal{F}_{c,0} \neq \emptyset$ .

Plus encore,  $A_c(z_c) = \mathcal{F}_{c,0}$  et  $\partial A_c(z_c) = \mathcal{J}_c$ , c'est-à-dire que le bassin d'attraction au point fixe  $z_c$  de la fonction  $P_c$  est la composante bornée de l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  et sa frontière est l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}_c$  [24]. On a donc trouvé une autre manière de définir l'ensemble de Julia rempli correspondant au paramètre  $c \in \mathcal{C}$  :

$$\mathcal{K}_c := \overline{A_c(z_c)}. \tag{1.4}$$

Ainsi, la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot,  $\mathcal{C}$ , correspond à l'ensemble des points  $c \in \mathbb{C}$  tels que  $P_c$  possède un point fixe attractif et l'ensemble de Julia rempli associé au paramètre  $c \in \mathcal{C}$  est en fait la fermeture du bassin d'attraction au point fixe  $z_c$  de la fonction  $P_c : \mathcal{K}_c = \overline{A_c(z_c)}$ .

On pourrait également s'intéresser aux points  $c$  de l'ensemble de Mandelbrot qui sont tels que  $P_c^{kn}$  possède un point fixe attractif. Ces points sont appelés **points périodiques** de période  $k$ . Les points périodiques de période un sont en fait les points

fixes définis précédemment (1.1) et correspondent donc aux paramètres  $c$  de la cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot. Les points périodiques de période supérieure à un correspondent quant à eux à des paramètres  $c$  situés dans les différents bulbes que l'on peut voir sur l'ensemble de Mandelbrot. La figure 1.11 montre les régions sur l'ensemble de Mandelbrot qui correspondent à des points périodiques de périodes 1, 2, 3 et 4. On peut trouver plus de détails sur la périodicité associée aux points de l'ensemble de Mandelbrot dans [3].

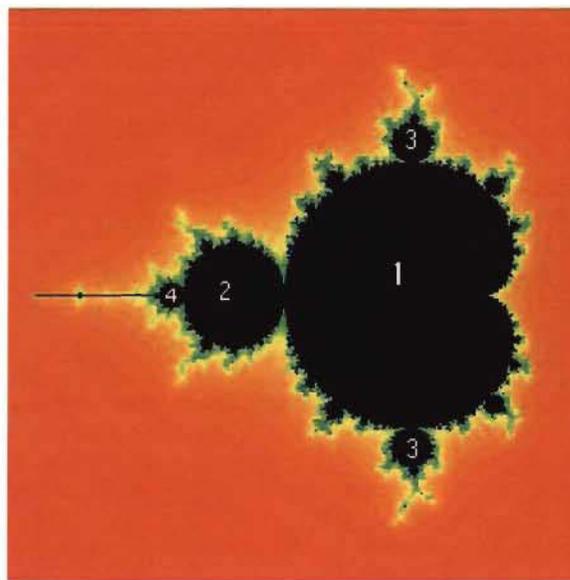


FIGURE 1.11 – Régions de l'ensemble de Mandelbrot qui correspondent à des points périodiques de périodes 1, 2, 3 et 4.

On a donc présenté les résultats les plus importants sur l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis. Historiquement, une autre approche a également été utilisée pour définir ces ensembles fractals importants : l'approche des familles normales. Le prochain chapitre a pour objectif de retrouver estles ensembles de Julia remplis à partir de cette approche.

## Chapitre 2

# Familles Normales de fonctions

Historiquement, une deuxième approche a été utilisée pour obtenir les ensembles fractals présentés au chapitre 1, celle des familles normales. L'étude de la normalité d'une famille de fonctions est un vaste sujet en soi et on en présentera seulement les grandes lignes. Le lecteur désirant trouver les preuves qui ont été omises les trouvera dans [24].

La première section aura pour objectif de présenter différents concepts en lien avec les familles normales tels le concept de famille de fonctions localement bornée et celui d'équicontinuité. On présentera ensuite les familles normales de fonctions holomorphes puis de fonctions méromorphes en traitant dans les deux cas le théorème de Montel de même que le critère fondamental de normalité. Ces deux théorèmes sont centraux dans la théorie des familles normales.

Ultimement, et c'est l'objectif principal de ce chapitre, on présentera les ensembles fractals présentés au chapitre 1 du point de vue des familles normales. On verra que les ensembles de Julia remplis ainsi obtenus sont exactement les mêmes qu'avec l'approche dynamique. Commençons tout d'abord par quelques notions préliminaires.

## 2.1 Convergence normale, fonctions localement bornées et équicontinuité

Cette section met en place plusieurs concepts qui nous permettront de définir les familles normales de fonctions et qui seront utiles à plusieurs résultats. Commençons tout d'abord par introduire une nouvelle métrique : la métrique sphérique.

Considérons la sphère  $\Sigma : x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$  dans  $\mathbb{R}^3$  c'est-à-dire la sphère centrée en  $(0, 0, \frac{1}{2})$ , de rayon  $\frac{1}{2}$  et tangente au plan  $xy$  à l'origine (voir figure 2.1). Cette sphère est appelée **sphère de Riemann**. Le plan  $xy$  est associé au plan complexe. Le point  $N := (0, 0, 1)$  est le pôle « nord » de  $\Sigma$  alors que le pôle « sud » est l'origine (dans  $\mathbb{R}^3$ ).

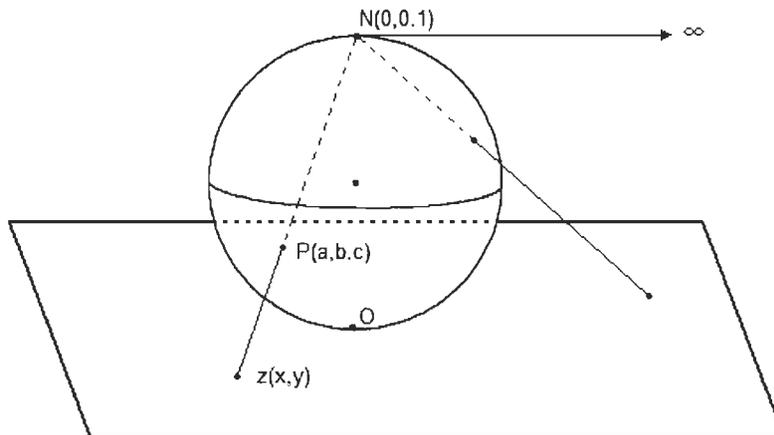


FIGURE 2.1 – Sphère de Riemann

Traçons maintenant une droite partant du point  $N$  et passant par un point  $z_1$  du plan  $xy$ . Cette droite intercepte  $\Sigma$  en un unique point  $P_1(a_1, b_1, c_1)$ . Cette procédure amène donc une correspondance biunivoque entre les points du plan complexe et les points de  $\Sigma \setminus \{N\}$ . Si on associe le point  $N$  à  $\infty$ , la correspondance est maintenant entre le plan complexe étendu,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , et la sphère  $\Sigma$ . La correspondance projective en fait

les points de la sphère sur le plan complexe. Cette projection est conforme c'est-à-dire qu'elle préserve les angles.

**Définition 2.1** Soit  $P_1, P_2$  sur la sphère de Riemann correspondant respectivement à  $z_1, z_2$  dans le plan complexe étendu  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La distance euclidienne entre  $P_1$  et  $P_2$ , qui est la longueur de la corde reliant les deux points, définit une distance dans  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , appelée **distance de corde** :

$$\chi(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}}, \quad \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

et

$$\chi(z_1, z_2) := \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, \quad \text{si } z_1 \in \mathbb{C} \text{ et } z_2 = \infty.$$

En fait, si  $z_1 \mapsto P_1, z_2 \mapsto P_2$ , alors on a  $|P_1 - P_2| = \chi(z_1, z_2)$  c'est-à-dire que  $\chi$  est une métrique dans  $\mathbb{C}$ . En fait, c'est même une métrique dans  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  contrairement à la norme euclidienne, d'où l'intérêt de cette nouvelle métrique. Pour la suite, on référera à  $\chi$  en utilisant le terme **métrique sphérique** puisque c'est le terme employé dans la majorité des ouvrages.

De manière évidente, on a  $\chi(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . De plus, cette métrique possède les propriétés suivantes :

1.  $\chi(z_1, z_2) \leq 1$ ,
2.  $\chi(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}) = \chi(z_1, z_2)$ ,
3.  $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty \Rightarrow \chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2)$ ,

où  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La première propriété découle du fait que  $\chi(z_1, z_2)$  correspond à la distance euclidienne entre deux points se situant sur une sphère dont le diamètre est 1. La deuxième propriété se démontre rapidement en faisant quelques manipulations algébriques. On va donc, pour la suite, traiter de convergence en regard de cette métrique.

**Définition 2.2** Une suite de fonctions  $\{f_n\}$  converge [sphériquement] uniformément vers une fonction  $f$  sur un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre  $n_0$  tel que  $n > n_0$  implique que

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad [\chi(f_n(z), f(z)) < \epsilon],$$

pour tout  $z \in E$ .

La proposition qui suit fait le lien entre la convergence uniforme et la convergence sphérique uniforme. Par la suite, on redéfinira le concept de fonction continue en regard de la métrique sphérique.

**Proposition 2.1** Si la suite  $\{f_n\}$  converge uniformément vers une fonction  $f$  sur un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$ , alors  $\{f_n\}$  converge sphériquement uniformément vers  $f$  sur  $E$ .

Inversement, si la suite  $\{f_n\}$  converge sphériquement uniformément vers une fonction bornée  $f$  sur un ensemble  $E \subseteq \mathbb{C}$ , alors  $\{f_n\}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $E$ .

On remarque dans la deuxième partie de la proposition 2.1 qu'on a besoin que la fonction  $f$  soit bornée pour que la suite  $\{f_n\}$  soit uniformément convergente, contrairement à la première implication de la proposition.

**Définition 2.3** Une fonction  $f$  est **sphériquement continue** au point  $z_0 \in \mathbb{C}$  si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $|z - z_0| < \delta$  implique que  $\chi(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ .

**Remarque :** Une fonction [sphériquement] continue sur un ensemble compact est uniformément [sphériquement] continue sur cet ensemble compact.

Cette remarque nous amène vers un concept fondamental dans la théorie des familles normales, celui de convergence normale.

**Définition 2.4** Une suite de fonctions,  $\{f_n\}$ , converge [sphériquement] uniformément sur les sous-ensembles compacts d'un domaine  $\Omega$  vers une fonction  $f$  si,

pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un nombre  $n_0(K, \epsilon)$  tel que  $n > n_0$  implique que

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon, \quad [\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon],$$

pour tout  $z \in K$ .

Quand une suite de fonctions converge uniformément ou sphériquement uniformément sur les sous-ensembles compacts d'un domaine  $\Omega$ , alors on dira qu'elle converge **normalement** dans  $\Omega$ .

**Rappel 4** Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions bornées sur un ensemble  $E$ . La suite  $\{f_n\}$  converge uniformément vers une fonction  $f$  sur  $E$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{z \in E} |f_n(z) - f(z)|) = 0.$$

**Exemple 2.1** Montrons que la suite de fonctions  $\{f_n(z) = \frac{z}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  converge uniformément vers 0 sur tout compact. On considère  $K \subset \mathbb{C}$ , un ensemble compact. On remarque tout d'abord que  $f_n$  est bornée pour tout  $n$  sur  $K$ . Aussi,  $\sup_{z \in K} |f_n(z)| = \sup_{z \in K} |\frac{z}{n}| = \frac{1}{n} \sup_{z \in K} |z|$ , où  $\sup_{z \in K} |z|$  est un nombre réel fini et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{z \in K} \left| \frac{z}{n} \right| \right) = \sup_{z \in K} |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ainsi selon le rappel 4, la suite  $\{f_n\}$  converge uniformément sur tous ensembles compacts vers la fonction 0 c'est-à-dire qu'elle converge normalement vers la fonction 0.

Le prochain résultat, le théorème de Weierstrass, est un résultat classique qui trouve plusieurs application dans la théorie des familles normales.

### **Théorème 2.2 Weierstrass**

Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$  qui converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  vers une fonction  $f$ . Alors,  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$  et la suite des dérivées d'ordre  $k$ ,  $\{f_n^{(k)}\}$ , converge uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  vers  $f^{(k)}$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$

Nous allons maintenant présenter une généralisation du concept de fonction bornée. L'on parlera de famille bornée de fonctions, concept qui joue un rôle clé quand on parle de normalité.

**Définition 2.5** Une famille de fonctions  $\mathcal{F}$  est **localement bornée** sur un domaine  $\Omega$  si pour tout  $z_0 \in \Omega$  il existe un nombre positif  $M(z_0)$  et un disque  $D(z_0; r) \subseteq \Omega$  tels que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in D(z_0; r)$  et pour tout  $f \in \mathcal{F}$ .

**Définition 2.6** Une famille de fonctions  $\mathcal{F}$  est **uniformément bornée** sur un ensemble  $E \subseteq \Omega$  s'il existe un nombre positif  $M$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in E$  et pour tout  $f \in \mathcal{F}$ .

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions localement bornée sur un domaine  $\Omega$ . Alors, pour tout  $z_0 \in \Omega$  il existe un disque  $D(z_0; r) \subseteq \Omega$  tel que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in D(z_0; r)$  et pour tout  $f \in \mathcal{F}$ . Considérons un ensemble compact  $K \subset \Omega$  ainsi qu'un recouvrement de cet ensemble par ce type de disques. Comme tout ensemble compact peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles ouverts, on choisit le  $M$  maximal sur tous les disques et on a que la famille  $\mathcal{F}$  est uniformément bornée sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$ . De manière générale, une famille de fonctions  $\mathcal{F}$  peut être localement bornée sur un domaine sans être uniformément bornée sur celui-ci comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 2.2** La famille de fonctions suivante :

$$\mathcal{F} := \left\{ f_\alpha(z) = \frac{1}{z - e^{i\alpha}} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

est localement bornée sur  $U$ , mais pas uniformément bornée [24].

On peut déjà énoncer quelques résultats sur les familles bornées de fonctions et les familles obtenues en dérivant ces fonctions.

**Théorème 2.3** Si  $\mathcal{F}$  est une famille de fonctions holomorphes localement bornée sur un domaine  $\Omega$ , alors la famille des dérivées,  $\mathcal{F}' := \{f' \mid f \in \mathcal{F}\}$  est également une famille localement bornée dans  $\Omega$ .

**Preuve :**

Pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe un disque fermé  $\overline{D}(z_0; r) \subseteq \Omega$  et une constante  $M(z_0)$  tels que  $|f(z)| \leq M$ , lorsque  $z \in \overline{D}(z_0; r)$ . Considérons  $z \in D(z_0; \frac{r}{2})$  et  $\zeta \in C_r := \{z \mid |z - z_0| = r\} \subset \overline{D}(z_0; r)$ . Ainsi, la formule de Cauchy nous donne :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

On remarque que  $\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{4M}{r^2}$  puisque  $|\zeta - z| \geq \frac{r}{2}$  par définition de  $C_r$  et puisque  $z \in D(z_0; \frac{r}{2})$ . De plus, la longueur du contour  $C_r$  est  $2\pi r$ . Ainsi, par l'inégalité  $ML$ , on a

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{4M}{r},$$

pour tout  $f' \in \mathcal{F}'$  quand  $z \in D(z_0; \frac{r}{2})$  et donc  $\mathcal{F}'$  est localement bornée.  $\square$

Remarquons que l'implication inverse n'est pas vérifiée. En fait elle peut l'être, mais on doit ajouter certaines hypothèses.

**Théorème 2.4** *Soit  $\mathcal{F}$ , une famille de fonctions holomorphes dans  $\Omega$  telle qu'il existe  $z_0 \in \Omega$  tel que  $|f(z_0)| \leq M < \infty$  pour tout  $f \in \mathcal{F}$ . Si la famille des dérivées  $\mathcal{F}'$  est localement bornée, alors  $\mathcal{F}$  est également localement bornée.*

Un autre concept central dans la théorie des familles normales est l'équicontinuité. Il s'agit en fait de vérifier la continuité de toutes les fonctions de la famille simultanément.

**Définition 2.7** *Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions définies sur un domaine  $\Omega$  est dite [sphériquement] équicontinue en un point  $z' \in \Omega$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon, z') > 0$  tel que  $|z - z'| < \delta$  implique que*

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon \quad [\chi(f(z), f(z')) < \epsilon],$$

pour tout  $f \in \mathcal{F}$ . De plus,  $\mathcal{F}$  est [sphériquement] équicontinue sur un sous-ensemble  $E \subseteq \Omega$  si elle est [sphériquement] équicontinue pour chaque point de  $E$ .

Si on considère plutôt un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , alors on peut avoir l'équicontinuité sphérique (on ne peut avoir l'équicontinuité en regard de la métrique euclidienne) et une hypothèse nécessaire sera  $\chi(z, z') < \delta$  plutôt que  $|z - z'| < \delta$ . De manière évidente, si une famille de fonctions est [sphériquement] équicontinue, alors chaque fonction de la famille est elle-même [sphériquement] continue.

De plus, on remarque que lorsque l'ensemble  $E \subseteq \Omega$  est compact, le paramètre  $\delta$  ne dépend plus de  $z'$ , il dépend plutôt de  $E$ . On se rappelle qu'une fonction continue sur un ensemble compact sera automatiquement uniformément continue sur ce compact et le paramètre  $\delta$  ne dépend plus alors que du paramètre  $\epsilon$  et de l'ensemble compact lui-même. Il en découle que pour l'équicontinuité, le paramètre  $\delta$  dans la définition 2.7 ne dépend plus que de  $\epsilon$  et de l'ensemble  $E$ , dans le cas où celui-ci est compact. Remarquons également que l'équicontinuité implique l'équicontinuité sphérique. En effet, le fait que  $\chi(f(z), f(z')) \leq |f(z) - f(z')|$  nous l'assure.

La prochaine proposition stipule que, dans un ensemble compact, une suite convergente de fonctions continues sera équicontinue (lorsqu'on la considère comme une famille de fonctions) et que la fonction vers laquelle la suite converge sera également continue.

**Proposition 2.5** *Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions [sphériquement] continues qui converge [sphériquement] uniformément vers une fonction  $f$  sur un compact  $E \subset \mathbb{C}$ . Alors,  $f$  est [sphériquement] uniformément continue sur  $E$  et la famille de fonctions  $\{f_n\}$  est [sphériquement] équicontinue sur  $E$ .*

**Preuve :**

Comme  $\{f_n\}$  converge [sphériquement] uniformément vers  $f$ , on a que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel quel  $n \geq n_0, z \in E$  implique que

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \left[ \chi(f_n(z), f(z)) < \frac{\epsilon}{3} \right].$$

Comme les fonctions  $f_n$  sont uniformément [sphériquement] continues sur  $E$  (continuité uniforme puisque  $E$  est compact), on a que pour cet  $\epsilon$ , il existe  $\delta(\epsilon, E) > 0$  tel que

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z')| < \frac{\epsilon}{3} \quad \left[ \chi(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z')) < \frac{\epsilon}{3} \right]$$

pour  $z, z' \in E$  et dès que  $|z - z'| < \delta$ . Ainsi, pour  $z, z' \in E$ ,  $|z - z'| < \delta$  implique que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z')| &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z')| + |f_{n_0}(z') - f(z')| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

$$[\chi(f(z), f(z')) \leq \chi(f(z), f_{n_0}(z)) + \chi(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z')) + \chi(f_{n_0}(z'), f(z')) < \epsilon,]$$

et donc  $f$  est uniformément [sphériquement] continue sur  $E$ . Soit  $\epsilon > 0$ , on a que

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f(z')| + |f(z') - f_n(z')|$$

$$[\chi(f_n(z), f_n(z')) \leq \chi(f_n(z), f(z)) + \chi(f(z), f(z')) + \chi(f(z'), f_n(z'))]$$

Or, par la continuité [sphérique] uniforme, il existe un  $\delta'(\epsilon, E) > 0$  tel que  $|z - z'| < \delta'$  implique que

$$|f(z) - f(z')| < \frac{\epsilon}{3} \quad \left[ \chi(f(z), f(z')) < \frac{\epsilon}{3} \right].$$

De plus, comme la suite  $\{f_n\}$  converge [sphériquement] uniformément vers  $f$  sur  $E$ , il existe  $n' \in \mathbb{N}$  tel que  $n > n'$  implique que

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |f(z') - f_n(z')| < \frac{\epsilon}{3}, \\ \left[ \chi(f_n(z), f(z)) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \chi(f(z'), f_n(z')) < \frac{\epsilon}{3}, \right] \end{aligned}$$

pour  $z, z' \in E$ . Ainsi, pour  $|z - z'| < \delta'$  et  $n > n'$ , on a

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \epsilon \quad [\chi(f_n(z), f_n(z')) < \epsilon].$$

De plus, pour  $N \leq n'$ , il existe  $\delta_N > 0$  tel que  $|z - z'| < \delta_N$  implique que

$$|f_N(z) - f_N(z')| < \epsilon \quad [\chi(f_N(z), f_N(z')) < \epsilon]$$

pour tout  $\epsilon > 0$  et  $z, z' \in E$ , puisque les fonctions  $f_n$  sont [sphériquement] continues. Ainsi, en prenant  $\delta := \min\{\delta', \delta_1, \dots, \delta_{n'}\}$ ,  $|z - z'| < \delta$  implique que

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \epsilon, \quad [\chi(f_n(z), f_n(z')) < \epsilon],$$

pour tout  $n$  et pour tout  $z, z' \in E$ , c'est-à-dire que  $\{f_n\}$  est [sphériquement] équicontinue sur  $E$ .  $\square$

De manière générale, une famille de fonctions continues n'est pas nécessairement équicontinue. Le prochain théorème fait un lien entre le concept de famille localement bornée et celui d'équicontinuité.

**Théorème 2.6** *Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes localement bornée sur un domaine  $\Omega$  est équicontinue sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$ .*

**Preuve :**

Soit  $\mathcal{F}$ , une famille de fonctions holomorphes localement bornée sur  $\Omega$ . Alors, par le théorème 2.3, la famille des dérivées,  $\mathcal{F}'$ , est également localement bornée sur le domaine  $\Omega$ . La famille  $\mathcal{F}'$  est donc uniformément bornée sur les sous-ensembles compacts du domaine. Considérons un disque fermé  $\overline{D} \subset \Omega$ , alors il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|f'(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \overline{D}$ ,  $f' \in \mathcal{F}'$ . Ainsi, comme  $\overline{D}$  est convexe, pour  $z, z' \in \overline{D}$  et en intégrant sur la ligne droite reliant  $z$  à  $z'$ , on a

$$|f(z) - f(z')| = \left| \int_z^{z'} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_z^{z'} |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq M|z - z'|,$$

puisque  $f$  est une primitive de  $f'$  et par l'inégalité  $ML$ . Ainsi, pour  $\epsilon > 0$ , on choisit  $0 < \delta(\epsilon, \overline{D}) = \frac{\epsilon}{M}$ ;  $z, z' \in \overline{D}$  et  $|z - z'| < \delta$  implique alors que

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon.$$

Ainsi, la famille  $\mathcal{F}$  est équicontinue en tout point du disque  $\overline{D} \subset \Omega$  et comme on peut recouvrir tout compact  $K \subset \Omega$  par un ensemble fini de disques fermés, on a que la

famille de fonctions  $\mathcal{F}$  est équicontinue sur les ensembles compacts de  $\Omega$ .  $\square$

Bien entendu, une famille de fonctions équicontinue n'est pas nécessairement localement bornée.

On peut à partir de maintenant développer le concept de famille normale dans le cas des fonctions holomorphes. On verra entre autres le théorème de Montel ainsi que le critère fondamental de normalité qui nous donneront deux critères relativement simples pour déterminer si une famille de fonctions holomorphes est normale ou non.

## 2.2 Familles normales de fonctions holomorphes, théorème de Montel et critère fondamental de normalité

Nous allons maintenant présenter les résultats sur les familles normales de fonctions holomorphes. Le premier théorème important de cette section est le théorème de Montel. Il nous donnera un critère simple pour déterminer la normalité d'une famille de fonctions holomorphes. L'autre résultat important de cette section est le critère fondamental de normalité, résultat également développé par Paul Montel [24]. Le critère fondamental de normalité a conduit à plusieurs résultats par la suite. Avant de présenter ces deux résultats, présentons tout d'abord la définition de famille de fonctions holomorphes normale.

**Définition 2.8** *Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  est **normale** dans  $\Omega$  si pour chaque suite de fonctions  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ , il existe soit une sous-suite qui converge uniformément sur chaque compact de  $\Omega$  vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit une sous-suite qui converge uniformément sur chaque compact de  $\Omega$  vers  $\infty$ .*

**Remarque :** Dans le cas où la sous-suite  $\{f_{n_k}\}$  converge uniformément vers  $\infty$ , cela signifie que pour chaque compact  $K \subset \Omega$  et pour chaque constante  $M > 0$ , il existe

$N(M, K)$  tel que si  $k > N$ , alors  $|f_{n_k}(z)| > M$  pour tout  $z \in K$ .

Dans le cas où la sous-suite converge vers une fonction  $f \neq \infty$ , le théorème de Weierstrass (2.2) nous assure que la fonction  $f$  est également holomorphe. Aussi, pour une suite donnée  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ , il peut y avoir une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction  $f \neq \infty$  et une autre sous-suite qui converge uniformément sur les compacts vers  $\infty$ , comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 2.3** *Considérons la famille  $\mathcal{F} := \{f_n\} := \{z^{(-1)^n \cdot n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  sur  $U'$ . Alors la sous-suite  $\{f_{2n-1}\} : \{z^{-n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  converge identiquement vers  $\infty$ , alors que la sous-suite  $\{f_{2n}\} : \{z^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  converge identiquement vers 0.*

Maintenant qu'on a présenté la définition de famille normale dans sur un certain domaine  $\Omega$ , il serait également intéressant d'avoir un concept de normalité en un point en particulier. La prochaine définition présente ce concept. On verra ensuite qu'une famille de fonctions est normale dans un certain domaine si et seulement si elle est normale en tout point de ce domaine.

**Définition 2.9** *La famille de fonctions holomorphes  $\mathcal{F}$  est dite normale au point  $z_0 \in \Omega$  si elle est normale dans un certain voisinage de  $z_0$ .*

**Remarque :** On dit qu'une famille de fonctions holomorphes  $\mathcal{F}$  est normale à  $\infty$  si la famille  $\mathcal{G} := \{g : g(z) = f(\frac{1}{z}), f \in \mathcal{F}\}$  est normale en  $z = 0$ . Ainsi, on peut étendre la définition de famille normale et considérer un domaine  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Théorème 2.7** *Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes est normale dans un domaine  $\Omega$  si et seulement si elle est normale en chaque point de  $\Omega$ .*

**Preuve :**

$\Rightarrow$ ) Soit  $\mathcal{F}$ , une famille de fonctions holomorphes normale dans  $\Omega$  et considérons le point  $z \in \Omega$ . Considérons le disque fermé  $\overline{D(z, r)}$ , où  $r$  est un rayon non nul quelconque tel

que  $\overline{D(z, r)} \subset \Omega$ .  $\overline{D(z, r)}$  est un ensemble compact et donc pour chaque suite de fonctions  $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ , il existe soit une sous-suite qui converge uniformément sur  $\overline{D(z, r)}$  vers une fonction  $f \neq \infty$ , soit une sous-suite qui converge uniformément sur  $\overline{D(z, r)}$  vers  $\infty$ . Cette sous-suite est également convergente sur  $D(z, r)$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  est normale au point  $z$  et donc en chaque point de  $\Omega$  puisque  $z$  a été choisit de manière arbitraire.

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $\mathcal{F}$  est normale en chaque point  $z \in \Omega$ , c'est-à-dire qu'elle est normale dans un certain voisinage de  $z$  pour chaque point  $z \in \Omega$ . Considérons l'ensemble  $\{z_n\} := \{z = x_n + y_n i \mid x_n, y_n \in \mathbb{Q}\} \cap \Omega$ . Ainsi,  $\{z_n\}$  est dénombrable puisque les nombres rationnels sont dénombrables et est dense dans  $\Omega$  puisque les nombres rationnels sont denses dans  $\mathbb{R}$ .

Comme la famille  $\mathcal{F}$  est normale en chaque point de  $\Omega$ , elle est entre autre normale aux points  $z_n$ . Ainsi, considérons  $D(z_n, r_n)$  le disque de rayon maximal pour lequel  $\mathcal{F}$  est normale en  $z_n$ . Soit  $\zeta \in \Omega \setminus \{z_n\}$ . La famille  $\mathcal{F}$  est normale au point  $\zeta$ , c'est-à-dire qu'il existe  $r_\zeta > 0$  tel que  $\mathcal{F}$  est normale sur  $D(\zeta, r_\zeta)$ . Comme  $\{z_n\}$  est dense dans  $\Omega$ , il existe une sous-suite  $\{z_{n_k}\}$  qui converge vers  $\zeta$ , c'est-à-dire que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $|z_{n_k} - \zeta| < \epsilon$  dès que  $k > N$ . En particulier, pour  $\epsilon = \frac{r_\zeta}{2}$ , il existe  $N_{r_\zeta} \in \mathbb{N}$  tel que  $|z_{n_k} - \zeta| < \frac{r_\zeta}{2}$  dès que  $k > N_{r_\zeta}$ , c'est-à-dire que  $z_{n_k} \in D(\zeta, \frac{r_\zeta}{2})$ . Ainsi,  $r_{n_k} \geq \frac{r_\zeta}{2} > 0$  pour  $k > N_{r_\zeta}$ , c'est-à-dire que  $\{r_{n_k}\}$  ne converge pas vers 0 et donc  $\zeta \in D(z_{n_k}, \frac{r_{n_k}}{2})$  pour  $k$  suffisamment grand. On a donc  $\Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} D(z_n, \frac{r_n}{2})$ , un recouvrement de  $\Omega$  par des disques ouverts.

De plus,  $\mathcal{F}$  est normale dans  $D(z_n, r_n)$ , pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , et donc pour chaque suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de  $D(z_1, r_1)$  vers une fonction holomorphe  $f$  ou vers  $\infty$ . En particulier on extrait une sous-suite  $\{f_{n_k}^{(1)}\}$  qui converge uniformément sur  $D(z_1, \frac{r_1}{2})$ . Similairement, de la sous-suite  $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ , on peut extraire une sous-suite  $\{f_{n_k}^{(2)}\}$  qui converge uniformément dans  $D(z_2, \frac{r_2}{2})$  et dans  $D(z_1, \frac{r_1}{2})$ . Si on continue ce procédé, on a que la suite diagonale  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$

converge uniformément dans  $D(z_n, \frac{r_n}{2})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , vers une fonction holomorphe  $f$  ou vers  $\infty$  (voir l'annexe pour bien comprendre le concept de suite diagonale).

Considérons  $\Omega_0 \subseteq \Omega$ , l'ensemble des points du domaine qui sont tels que la suite  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge vers  $f \neq \infty$  et  $\Omega_\infty \subseteq \Omega$ , l'ensemble des points du domaine qui sont tels que la suite  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge vers  $\infty$ . Évidemment,  $\Omega_0 \cap \Omega_\infty = \emptyset$ . De plus,  $\Omega_0 \cup \Omega_\infty = \Omega$  puisque  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge sur  $D(z_n, \frac{r_n}{2})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  et puisque  $\cup_{n=1}^\infty D(z_n, \frac{r_n}{2})$  forme un recouvrement de  $\Omega$ . Aussi, soit  $z \in \Omega_0$  (resp.  $z \in \Omega_\infty$ ) c'est-à-dire que la suite  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge uniformément vers  $f$  (resp. vers  $\infty$ ) au point  $z$ . Or,  $\mathcal{F}$  est normale en  $z \in \Omega$  c'est-à-dire qu'il existe un voisinage autour de  $z$  dans lequel une sous-suite de la suite  $\{f_{n_k}^{(k)}(z)\}$  (en fait c'est la suite elle même) converge vers  $f$  (resp. vers  $\infty$ ). Donc on a un voisinage autour du point  $z$  complètement inclu dans  $\Omega_0$  (resp. dans  $\Omega_\infty$ ) c'est-à-dire que  $\Omega_0$  (resp.  $\Omega_\infty$ ) est un ensemble ouvert puisque  $z$  a été choisit de manière arbitraire. Ainsi  $\Omega_\infty = \Omega$  ou bien  $\Omega_0 = \Omega$  puisqu'on ne peut représenter un ensemble connexe (ici  $\Omega$ ) comme l'union de deux ensembles ouverts disjoints non vides. Ainsi,  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge vers  $f \neq \infty$  ou identiquement vers  $\infty$  sur  $\Omega$ .

Soit  $K \subset \Omega$ , un compact. Alors il existe un recouvrement fini de  $K$  par des disques ouverts  $D(z_n, \frac{r_n}{2})$  et donc la suite  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge vers  $f \neq \infty$  sur  $K$  ou converge identiquement vers  $\infty$  sur  $K$ . Comme  $K$  est compact, la convergence est uniforme et comme il a été choisit de manière arbitraire, la famille  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .  $\square$

Une famille  $\mathcal{F}$  n'est donc pas normale dans un domaine  $\Omega$  dès qu'elle n'est pas normale en un point de  $\Omega$ . Un tel point est appelé **irrégulier**. Les points irréguliers ont un rôle important à jouer au point de vue des systèmes dynamiques comme on le verra plus loin.

**Exemple 2.4** Soit  $\mathcal{F} := \{f_n(z) = nz \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Alors  $f_n(0) \rightarrow 0$  mais  $f_n(z) \rightarrow \infty$  pour  $z \neq 0$ , c'est-à-dire que la famille  $\mathcal{F}$  ne peut être normale dans aucun domaine

contenant l'origine.

Le théorème 2.7 n'est pas un résultat très surprenant. Il nous offre un critère pour déterminer si une famille de fonctions n'est pas normale, mais il est peu utile pour montrer qu'une famille est normale. Le théorème de Montel nous fournira justement un critère plus simple pour s'assurer qu'une famille de fonctions est normale.

### **Théorème 2.8 Montel**

*Si  $\mathcal{F}$  est une famille de fonctions holomorphes localement bornée sur un domaine  $\Omega$ , alors  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .*

**Preuve :**

Considérons l'ensemble  $\{z_n\}$ , dense et dénombrable défini dans la preuve du théorème 2.7. Soit une suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  et considérons la suite de nombres complexes  $\{f_n(z_1)\}$ . Comme  $\mathcal{F}$  est localement bornée, il existe  $M_{z_1}$  tel que  $|f_n(z_1)| < M_{z_1}$  pour tout  $n$ . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, cette suite bornée de nombres complexes possède une sous-suite convergente disons

$$f_{n_1}^{(1)}(z_1), f_{n_2}^{(1)}(z_1), f_{n_3}^{(1)}(z_1), \dots$$

c'est-à-dire que la suite de fonctions  $\{f_{n_k}^{(1)}\}$  converge pour le point  $z_1$ . Considérons maintenant le point  $z_2$ . La suite de nombres complexes  $\{f_{n_k}^{(1)}(z_2)\}$  est également bornée. Elle possède donc une sous-suite convergente, disons

$$f_{n_1}^{(2)}(z_2), f_{n_2}^{(2)}(z_2), f_{n_3}^{(2)}(z_2), \dots$$

et donc la suite de fonctions  $\{f_{n_k}^{(2)}\}$  est convergente pour les points  $z_1$  et  $z_2$ . Poursuivant cette démarche, on trouve que la suite de fonctions  $\{f_{n_k}^{(p)}\}$  converge pour les points  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , ce pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Choissant la suite de fonctions diagonale  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$ , on remarque qu'elle converge pour chaque  $z_n$ .

Démontrons maintenant que cette suite de fonctions converge normalement dans  $\Omega$ .

Définissons  $\{g_k\} := \{f_{n_k}^{(k)}\}$ . Soit  $K \subset \Omega$  un compact et  $\epsilon > 0$ . Par le théorème 2.6, la famille  $\mathcal{F}$  est équicontinue sur les compacts et donc il existe  $\delta(\epsilon, K) > 0$  tel que  $z, z' \in K$  et  $|z - z'| < \delta$  implique que

$$|g_n(z) - g_n(z')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Comme  $\{z_n\}$  est dense dans  $\Omega$  et  $\delta > 0$ ,  $\cup_{n=1}^{\infty} D(z_n, \delta)$  recouvre  $K$  (en fait c'est même un recouvrement de  $\Omega$ ). De plus, puisque  $K$  est compact, on peut choisir un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire que  $K \subset \cup_{k=1}^{k_0} D(z_k, \delta)$  (nécessite peut-être un renommage des points  $z_1, \dots, z_{k_0}$ , ce qui ne change rien). Ainsi, comme la suite de fonctions  $\{g_k\}$  est convergente pour chaque  $z_n$ , elle est de Cauchy et donc il existe un entier  $n_0(z_k)$  tel que  $n, m \geq n_0$  implique que

$$|g_n(z_k) - g_m(z_k)| < \frac{\epsilon}{3},$$

pour  $k = 1, \dots, k_0$ . Finalement, pour tout  $z \in K$ , on a  $z \in D(z_i, \delta)$  pour  $1 \leq i \leq k_0$ , c'est-à-dire que  $|z - z_i| < \delta$  et donc

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &\leq |g_n(z) - g_n(z_i)| + |g_n(z_i) - g_m(z_i)| + |g_m(z_i) - g_m(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

dès que  $n, m > n_0(z_i)$ . On conclut donc que la suite  $\{g_n(z)\}$  est uniformément de Cauchy sur  $K$  et donc la suite  $\{g_n\}$  converge uniformément sur  $K$  vers une fonction holomorphe (par le théorème de Weierstrass (2.2)). On a donc trouvé une sous-suite à la suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  qui est uniformément convergente sur le compact  $K$ . Comme la suite  $\{f_n\}$  et le compact  $K$  ont été choisis de manière arbitraire, la famille de fonctions holomorphes  $\mathcal{F}$  est normale.  $\square$

**Théorème 2.9** *Soit  $\mathcal{F}$ , une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$  telle que chaque suite de fonctions  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  possède une sous-suite uniformément convergente sur les sous-ensembles compacts vers une fonction holomorphe  $f \neq \infty$ . Alors,  $\mathcal{F}$  est localement bornée et donc équicontinue sur les compacts de  $\Omega$ .*

Ce théorème est l'implication inverse du théorème de Montel mais avec l'hypothèse supplémentaire que la sous-suite de  $\{f_n\}$  ne peut converger uniformément identiquement vers  $\infty$ . Donc, la normalité seule d'une famille de fonctions holomorphes  $\mathcal{F}$  ne suffit pas pour qu'elle soit localement bornée, ce qui n'est pas une surprise puisqu'il existe des familles normales de fonctions holomorphes qui ne sont pas localement bornées.

**Exemple 2.5** *Considérons une fonction  $f$  holomorphe dans un domaine  $\Omega$  et qui ne possède pas de zéro et considérons la famille  $\mathcal{F} := \{cf \mid c \in \mathbb{R}^+\}$ . Alors chaque suite de fonctions de  $\mathcal{F}$  possède une sous-suite qui converge normalement, c'est-à-dire uniformément sur les compacts, soit vers une fonction  $g \neq \infty$ , soit vers  $\infty$ . Ainsi,  $\mathcal{F}$  est normale. Cependant, pour  $z, z' \in \Omega, z \neq z'$  tels que  $f(z) \neq f(z')$ , on a*

$$|cf(z) - cf(z')| = c|f(z) - f(z')|,$$

*et le côté droit de l'égalité peut être aussi grand que l'on veut et donc  $\mathcal{F}$  n'est ni équicontinue, ni localement bornée lorsque  $f$  est non constante.*

Remarquons que si  $\mathcal{F}$  est une famille de fonctions holomorphes localement bornée sur un domaine  $\Omega$ , alors le théorème 2.3 nous assure que la famille  $\mathcal{F}'$  est également localement bornée et donc en plus d'avoir la normalité de la famille  $\mathcal{F}$ , on a également la normalité de la famille  $\mathcal{F}'$ . L'hypothèse que la famille  $\mathcal{F}$  de fonctions holomorphes soit localement bornée est nécessaire car le simple fait que  $\mathcal{F}$  soit normale ne nous assure pas que  $\mathcal{F}'$  le soit, comme on peut le constater dans l'exemple suivant :

**Exemple 2.6** *Soit*

$$\phi_n(z) = \frac{nz^2}{2} + n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad z \in U.$$

*Alors,*

$$|\phi_n(z)| \geq \left| n - \left| \frac{nz^2}{2} \right| \right| \geq n - \left| \frac{nz^2}{2} \right| = n - \frac{n}{2}|z|^2 > \frac{n}{2},$$

*ainsi  $\{\phi_n\} \rightarrow \infty$  et donc la famille  $\{\phi_n\}$  est normale sur  $U$ . Or,  $\{\phi'_n\} = \{nz \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  et on a vu à l'exemple 2.4 qu'elle ne peut être normale dans  $U$ .*

Inversement, le simple fait que la famille  $\mathcal{F}'$  soit localement bornée nous assure que la famille  $\mathcal{F}$  est normale.

**Théorème 2.10** *Soit  $\mathcal{F}$ , une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$ . Si la famille  $\mathcal{F}'$  est localement bornée, alors la famille  $\mathcal{F}$  est normale.*

Le concept de famille normale de fonctions holomorphes peut apparaître encore abstrait à ce point-ci. Présentons donc quelques exemples afin d'avoir une meilleure compréhension du concept.

**Exemple 2.7** *Soit  $\mathcal{F} := \{f_n(z) = z^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  sur  $U$ . Alors,  $\mathcal{F}$  est uniformément bornée sur  $U$  (en particulier localement bornée) donc normale par le théorème de Montel (2.8). De plus, dans  $V := \{z : |z| > 1\}$ ,  $\{f_n\}$  converge uniformément vers  $\infty$  sur les compacts de  $V$  et donc  $\mathcal{F}$  est normale sur  $V$  également. On ne peut cependant pas conclure que  $\mathcal{F}$  est normale sur  $U \cup V$  car ce n'est pas un domaine.*

**Exemple 2.8**  $\mathcal{F} := \{f_n(z) = \frac{z}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$  dans  $\mathbb{C}$ . Selon l'exemple 2.1,  $\{f_n\}$  converge uniformément vers 0 sur tout compact du plan complexe et donc  $\mathcal{F}$  est normale par définition.

**Exemple 2.9**  $\mathcal{F} := \{f \mid f \text{ est holomorphe dans } \Omega \text{ et } \operatorname{Re}(f) > 0\}$ . Considérons la famille  $\mathcal{G} := \{g = e^{-f} \mid f \in \mathcal{F}\}$ . Soit  $g \in \mathcal{G}$ , alors  $g(z) = e^{-f(z)}$ ,  $f \in \mathcal{F}$  et on a

$$g(z) = e^{-(f_1(z) + i f_2(z))} = e^{-f_1(z)} (\cos(f_2(z)) + i \sin(f_2(z)))$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{R}$ . Alors, on a

$$|g(z)| = |e^{-f_1(z)}| |\cos(f_2(z)) + i \sin(f_2(z))| = |e^{-f_1(z)}| < 1.$$

Ainsi, la famille  $\mathcal{G}$  est uniformément bornée et donc elle est normale.

**Rappel 5** *Une fonction à valeurs complexes qui est injective est appelée **univalente**.*

**Exemple 2.10** Soit  $\mathcal{S} := \{f \mid f \text{ est holomorphe et univalente dans } U, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ . Ces fonctions sont connues comme les « fonctions de Schlicht normalisées » sur  $U$ .

On a, pour  $z \in U$ , que

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}, \quad \text{voir [24].}$$

Ainsi,  $\mathcal{S}$  est localement bornée et donc normale.

On peut trouver plusieurs autres exemples dans [24]. Avant de passer au concept de famille normale de fonctions méromorphes, on va présenter quelques résultats supplémentaires, le plus important étant le critère fondamental de normalité. Tout d'abord, présentons le théorème de Vitali-Porter, résultat équivalent au théorème de Montel.

**Théorème 2.11 Vitali-Porter**

Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions holomorphes localement bornée dans un domaine  $\Omega$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  existe pour tout  $z$  dans un certain ensemble  $E \subseteq \Omega$  qui possède un point d'accumulation dans  $\Omega$ . Alors  $\{f_n\}$  converge uniformément sur les sous-ensembles compact de  $\Omega$  vers une fonction holomorphe.

**Théorème 2.12** Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions localement bornée dans un domaine  $\Omega$  telle que chaque sous-suite convergente de fonctions converge vers une fonction  $g$ . Alors  $\{f_n\}$  converge uniformément sur les compacts vers  $g$  sur  $\Omega$  et  $g$  est holomorphe.

On peut maintenant énoncer le critère fondamental de normalité (FNT, de l'anglais Fundamental Normality Test).

**Théorème 2.13 Critère fondamental de normalité**

Soit  $\mathcal{F}$ , une famille de fonctions holomorphes sur un domaine  $\Omega$  qui ne prend pas deux valeurs fixes  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{C}$ . Alors,  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .

Lorsque l'on dit qu'une valeur  $a$  est prise par une fonction  $f$ , c'est qu'il existe au moins un point du domaine qui envoie  $f$  sur  $a$ . Lorsque l'on dit qu'une valeur  $a$  n'est pas prise par une famille de fonctions  $\mathcal{F}$ , c'est que  $a$  n'est prise par aucune fonction  $f$

de  $\mathcal{F}$ . Le FNT est au coeur de la théorie des familles normales. Il permet, entre autre, de démontrer le théorème de Picard.

**Définition 2.10** Une fonction à valeurs complexes est dite **entière** si elle est définie et holomorphe sur tout le plan complexe.

### **Théorème 2.14** *Théorème de Picard*

Une fonction entière non constante prends toutes les valeurs du plan complexe excepté au maximum une valeur.

**Remarque :** Une formulation équivalente de ce théorème est la suivante :

Si  $f$  est une fonction entière et s'il existe deux nombres complexes distincts qui ne sont pas pris par  $f$ , alors  $f$  est constante.

La preuve originale de E. Picard en 1879 a été reprise par Montel en 1912, mais en utilisant plutôt le FNT. On peut trouver cette preuve, ainsi que d'autres conséquences importantes du FNT dans [24]. Dans la prochaine section, on s'intéressera à la normalité d'une famille de fonctions, mais dans le cas de fonctions méromorphes.

## **2.3 Familles normales de fonctions méromorphes**

Rappelons tout d'abord la définition de fonction méromorphe.

**Définition 2.11** Une fonction  $f$  est appelée **méromorphe** dans un domaine  $\Omega$  s'il existe un ensemble  $A \subset \Omega$  tel que

1.  $A$  ne possède pas de point d'accumulation dans  $\Omega$ ,
2.  $f$  est holomorphe dans  $\Omega \setminus A$ ,
3.  $f$  a un pôle à chaque point de  $A$ .

**Rappel 6** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ , un point singulier d'une fonction  $f$ . Alors,  $z_0$  est appelé **pôle** de la fonction  $f$  si et seulement si  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

La définition de fonction méromorphe n'exclue pas la possibilité que  $A = \emptyset$ . Ainsi, si  $f$  est holomorphe dans  $\Omega$ , elle est également méromorphe dans  $\Omega$ . Aussi, l'ensemble  $A$  est au plus dénombrable. Le prochain théorème donne une définition équivalente, mais plus simple pour les fonctions méromorphes [22].

**Théorème 2.15** *Une fonction  $f$  est méromorphe dans un domaine  $\Omega$  si et seulement s'il existe deux fonctions  $g$  et  $h$  holomorphes dans  $\Omega$  telles que  $f = g/h$ .*

L'étude de la normalité d'une famille de fonctions méromorphes se fait plus naturellement avec la métrique sphérique. Le dernier résultat avant de pouvoir définir la normalité d'une famille de fonctions méromorphes est plutôt intéressant, bien que peu intuitif.

**Proposition 2.16** *Si  $f(z)$  est méromorphe dans un domaine  $\Omega$ , alors  $f$  est sphériquement continue dans  $\Omega$ .*

Donnons maintenant la définition de normalité dans le cas d'une famille de fonctions méromorphes.

**Définition 2.12** *Une famille de fonctions méromorphes  $\mathcal{F}$  dans un domaine  $\Omega$  est **normale** dans  $\Omega$  si chaque suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  possède une sous-suite qui converge sphériquement uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$ .*

**Corollaire 2.17** *Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions méromorphes sur  $\Omega$  qui converge sphériquement uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$  vers une fonction  $f$ . Alors  $f$  est soit méromorphe dans  $\Omega$ , soit identiquement  $\infty$ .*

Ainsi, la différence entre la définition de famille normale de fonctions holomorphes et celle de famille normale de fonctions méromorphes réside dans la métrique qui est utilisée. En effet, dans le cas des familles de fonctions holomorphes, la sous-suite est uniformément convergente sur les sous-ensembles compacts alors qu'elle est sphériquement uniformément convergente dans le cas des familles de fonctions méromorphes.

La distinction entre les deux est importante. Lorsque l'on traitera de la normalité d'une famille de fonctions méromorphes, on utilisera le terme convergence normale pour désigner la convergence sphérique uniforme sur les sous-ensembles compacts.

Sans surprise, on peut substituer les fonctions méromorphes pour des fonctions holomorphes dans le dernier corollaire et le résultat reste valide.

Si la définition de famille normale de fonctions méromorphes est semblable à celle de famille normale de fonctions holomorphes, le théorème de Montel, quant à lui, ne trouve pas d'exacte réplique dans le cas des fonctions méromorphes. En effet, le concept de famille localement bornée n'est pas très intéressant dans le cas des fonctions méromorphes. On peut cependant le remplacer par l'équicontinuité sphérique et on obtient le théorème suivant, analogue au théorème de Montel, mais pour les fonctions méromorphes :

**Théorème 2.18** *Une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions méromorphes dans un domaine  $\Omega$  est normale si et seulement si elle est sphériquement équicontinue dans  $\Omega$ .*

Contrairement au cas des fonctions holomorphes où le théorème de Montel avait des limitations, ici l'implication est dans les deux sens, ce qui explique en partie le fait que les familles normales de fonctions sont plus naturellement étudiées dans le contexte des fonctions méromorphes.

Le critère fondamental de normalité a lui aussi son analogue pour les fonctions méromorphes.

**Théorème 2.19** *Critère fondamental de normalité*

*Soit  $\mathcal{F}$  une famille de fonctions méromorphes dans un domaine  $\Omega$  qui ne prend pas trois valeurs distinctes  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans  $\mathbb{C}$ . Alors,  $\mathcal{F}$  est normale dans  $\Omega$ .*

Remarquons que ce critère fondamental de normalité fonctionne également pour  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Finalement, voici l'analogue du théorème de Vitali-Porter :

**Théorème 2.20** *Soit  $\{f_n\}$  une suite appartenant à une famille de fonctions méromorphes sphériquement équicontinue telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  existe pour tout  $z$  dans un certain ensemble  $E \subseteq \Omega$  qui possède un point d'accumulation dans  $\Omega$ . Alors,  $\{f_n\}$  converge sphériquement uniformément sur les sous-ensembles compacts de  $\Omega$ .*

Finalement, la dernière section de ce chapitre, présentera les ensembles de Julia remplis en utilisant les familles normales de fonctions. Il s'agit d'une approche différente de celle présentée au chapitre 1, mais qui donne les mêmes ensembles.

## 2.4 Systèmes dynamiques

On a vu dans le chapitre 1 que l'ensemble de Julia est en fait la frontière de l'ensemble de Julia rempli qui lui correspond. On rappelle que l'ensemble de Julia rempli correspondant au paramètre  $c \in \mathbb{C}$  correspond à l'ensemble des points pour lesquels les itérés de la fonction  $P_c(z) := z^2 + c$  restent bornés. Il s'agit là d'une définition d'un point de vue dynamique, mais on peut également définir ces ensembles fractals du point de vue des familles normales.

Le point de départ pour pouvoir ensuite définir les autres ensembles fractals est l'ensemble de Julia.

### Définition 2.13 Ensemble de Julia

*Soit la fonction  $P_c(z) = z^2 + c$ . On définit l'ensemble de Julia associé au paramètre  $c$ , noté  $\mathcal{J}_c$ , de la manière suivante :*

$$\mathcal{J}_c := \{z \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n\} \text{ n'est pas normale en } z\}.$$

L'ensemble de Julia associé au paramètre  $c$  est donc l'ensemble des points irréguliers de la famille de fonctions  $\{P_c^n\}$ .

On a vu dans la section 1.3 que l'ensemble de Fatou associé au paramètre  $c$  est défini comme étant le complément de l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}_c$ . Cette définition reste valide et on peut donc donner la définition suivante :

**Définition 2.14 Ensemble de Fatou**

Soit la fonction  $P_c(z) = z^2 + c$ . On définit l'ensemble de Fatou associé au paramètre  $c$ , noté  $\mathcal{F}_c$ , de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_c := \{z \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n\} \text{ est normale en } z\}.$$

Rappelons que la normalité en un point  $z$  pour une famille de fonctions est vérifiée s'il existe un voisinage autour de  $z$  tel que la famille de fonctions est normale dans ce voisinage. On en déduit donc que l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  est un ensemble ouvert et que l'ensemble de Julia  $\mathcal{J}_c$  est un ensemble fermé.

À la section 1.3, il a été vu que l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_c$  consistait en une composante connexe non bornée en y ajoutant au maximum une autre composante connexe (celle-là bornée) selon que l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  a un intérieur vide ou non. La composante non bornée,  $\mathcal{F}_{c,\infty}$ , correspond aux points pour lesquels la suite de fonctions  $\{P_c^n\}$  converge normalement vers  $\infty$  et la composante bornée,  $\mathcal{F}_{c,0}$  (si elle existe), correspond quant à elle aux points pour lesquels la suite de fonctions  $\{P_c^n\}$  possède une sous-suite qui converge normalement vers une fonction  $f \neq \infty$ . Cette composante bornée, si elle existe, fera parti de l'ensemble de Julia rempli correspondant au paramètre  $c$ .

**Définition 2.15 Ensemble de Julia rempli**

Soit  $\mathcal{F}_{c,0}$ , l'ensemble des points pour lesquels la suite de fonctions  $\{P_c^n\}$  possède une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction  $f \neq \infty$ . Alors l'ensemble de Julia rempli correspondant au paramètre  $c$  est  $\mathcal{K}_c := \mathcal{J}_c \cup \mathcal{F}_{c,0}$ .

Vérifions l'équivalence des deux définitions pour l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$ .

**Proposition 2.21** *La définition de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_c$  du point de vue dynamique est équivalente à celle du point de vue des familles normales, c'est-à-dire qu'on a l'égalité suivante :*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n(z)\} \text{ est bornée} \} = \mathcal{J}_c \cup \mathcal{F}_{c,0}.$$

**Preuve :**

⊆) Soit  $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \{P_c^n(z)\} \text{ est bornée}\}$ . Supposons que  $\{P_c^n\}$  n'est pas une famille normale au point  $z$ . Alors on a  $z \in \mathcal{J}_c$ . Sinon,  $\{P_c^n\}$  est une famille normale au point  $z$ . Alors il existe une sous-suite  $\{P_c^{n_k}\}$  qui converge uniformément sur les compacts dans un voisinage de  $z$  soit vers une fonction  $f \neq \infty$  soit vers  $\infty$ . Or, comme  $\{P_c^n(z)\}$  est bornée, on a  $P_c^{n_k}(z) \rightarrow f(z) \neq \infty$  c'est-à-dire que  $\{P_c^{n_k}\}$  converge uniformément sur les compacts du voisinage de  $z$  vers une fonction  $f \neq \infty$  d'où  $z \in \mathcal{F}_{c,0}$ .

⊇) Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $\{P_c^n(z)\}$  n'est pas bornée. Alors, du lemme 1.4,  $P_c^n(z) \rightarrow \infty$  et cette suite est telle que  $P_c^n \rightarrow \infty$  dans un certain voisinage de  $z$ , car par le théorème 1.15,  $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_c$  est un ensemble ouvert. Ainsi  $z \in \mathcal{F}_{c,\infty}$ .

On a donc montré que si la suite  $\{P_c^n(z)\}$  n'est pas bornée, alors  $z \in \mathcal{F}_{c,\infty}$ . Par contraposée, on trouve que  $z \in \mathcal{J}_c \cup \mathcal{F}_{c,0}$  implique que la suite  $\{P_c^n(z)\}$  est bornée.  $\square$

On a donc montré que la définition d'ensemble de Julia rempli présentée dans cette section est équivalente à celle présentée au chapitre 1.

L'objectif principal de ce mémoire est de généraliser ces ensembles à la structure des nombres multicomplexes. Le prochain chapitre a donc pour but de présenter ce que sont les nombres multicomplexes.

# Chapitre 3

## Nombres multicomplexes

Dans ce chapitre, on présentera une généralisation des nombres complexes, encore peu connue de nos jours : les nombres multicomplexes. Cette structure de nombres est celle que l'on utilisera dans le prochain chapitre pour généraliser les ensembles de Mandelbrot et de Julia remplis.

Dans la première section, nous allons faire une présentation générale des nombres bicomplexes (multicomplexes d'ordre  $n = 2$ ), puis des nombres tricomplexes (multicomplexes d'ordre  $n = 3$ ), pour finalement présenter, de manière plus générale, les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ . Pour les sections qui suivront, l'on présentera différentes propriétés importantes, respectivement pour les ordres 2, 3 et  $n$ . Nous ne nous contenterons pas seulement de présenter les notions qui seront utilisées pour le chapitre suivant, nous allons également présenter plusieurs autres caractéristiques intéressantes de ces structures de nombres.

La dernière section, quant à elle, portera sur certains sous-espaces des nombres tricomplexes. Ces ensembles seront utiles dans le chapitre 4 lorsque viendra le temps de définir et de comparer les différentes coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot généralisé. Commençons donc par présenter ce que sont les nombres multicomplexes.

### 3.1 Construction des nombres multicomplexes

L'objectif de cette section est de présenter la structure des nombres multicomplexes d'ordre  $n$ , de voir comment on construit ces ensembles de nombres. Nous allons tout d'abord traiter les nombres multicomplexes d'ordre deux, également appelés nombres bicomplexes ou tétranombres [16, 20]. L'ensemble des nombres bicomplexes est la structure de nombres multicomplexes qui est la plus connue si on exclue les nombres réels et complexes. Elle peut être vue comme une complexification des nombres complexes à l'aide d'une autre unité imaginaire. La notation classique de l'**ensemble des nombres bicomplexes** est la suivante :

$$\mathbb{M}(2) := \mathbb{T} := \{w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1) \text{ et } \mathbf{i}_2^2 = -1\}, \quad (3.1)$$

où  $\mathbb{M}(1)$  est l'ensemble des nombres multicomplexes d'ordre 1, structure isomorphe aux nombres complexes :

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{M}(1) := \{z = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{M}(0) = \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{i}_1^2 = -1\}.$$

L'unité imaginaire  $\mathbf{i}_1$  doit être vue comme étant analogue à l'unité imaginaire habituelle  $\mathbf{i}$  des nombres complexes. L'unité imaginaire  $\mathbf{i}_2$  doit être vue comme une autre unité imaginaire, différente de  $\mathbf{i}_1$ . À ce point-ci, on est en droit de se demander comment ces deux unités imaginaires interagissent entre elles. Pour le savoir, reprenons la notation 3.1 et décomposons les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  sous leur représentation avec des coefficients réels.

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(2) &= \{w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1)\} \\ &= \{w = (x_1 + x_2 \mathbf{i}_1) + (x_3 + x_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{M}(0)\} \\ &= \{w = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{M}(0)\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{j}_1 := \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1$ . On remarque que le produit des unités  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$  est commutatif et qu'il fait apparaître une nouvelle unité imaginaire :  $\mathbf{j}_1$ . On appelle  $\mathbf{j}_1$  **unité imaginaire hyperbolique** ou plus simplement unité hyperbolique puisque  $\mathbf{j}_1^2 = (\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2)^2 = \mathbf{i}_1^2 \mathbf{i}_2^2 =$

$(-1)(-1) = 1$ . L'addition et la multiplication de deux nombres bicomplexes sous leur forme classique,  $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ ,  $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ , se définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &:= (z_1 + z_3) + (z_2 + z_4)\mathbf{i}_2, \\ w_1 \cdot w_2 &:= (z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}_2. \end{aligned}$$

Aussi, comme on s'y attend, on a  $w_1 = w_2$  si et seulement si  $z_1 = z_3$  et  $z_2 = z_4$ . Ces propriétés sont vraies pour les nombres multicomplexes en général et donc nous ne les répétons pas plus loin vu leur trivialité. Pour effectuer l'addition ou la multiplication de nombres bicomplexes sous la forme 3.2, on utilise les règles classiques de distributivité. Le résultat des divers produits entre les différentes unités imaginaires qui composent les nombres bicomplexes est décrit dans le tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Produits des unités imaginaires bicomplexes

$\cdot$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}_1$
$\mathbf{i}_1$	-1	$\mathbf{j}_1$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}_1$	-1	$-\mathbf{i}_1$
$\mathbf{j}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	1

Ces dernières propriétés permettent de remarquer que l'addition de même que la multiplication de nombres bicomplexes sont associatives et commutatives.

**Remarque :** Si on utilise l'unité hyperbolique  $\mathbf{j}_1$  plutôt que l'unité imaginaire  $\mathbf{i}_1$  dans la définition des nombres complexes, on obtient l'ensemble suivant :

$$\mathbb{D} := \{x_1 + x_2\mathbf{j}_1 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{M}(0) = \mathbb{R}\} \quad (3.3)$$

défini comme étant l'ensemble des nombres **duplexes** ou **hyperboliques** [13].

Comme nous avons pu le constater, les nombres bicomplexes sont, en quelque sorte, le résultat de la complexification des nombres complexes à l'aide de l'unité imaginaire  $\mathbf{i}_2$ . Nous pouvons répéter le processus une autre fois afin d'obtenir une structure de

nombres multicomplexes d'ordre trois : les nombres tricomplexes. On utilisera ici l'unité imaginaire  $\mathbf{i}_3$  qui est telle que  $\mathbf{i}_3^2 = -1$ . La notation classique de l'ensemble des nombres tricomplexes est la suivante :

$$\mathbb{M}(3) := \{\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 \mid w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)\}. \quad (3.4)$$

À l'image de ce qu'on a fait pour obtenir la notation 3.2 pour les nombres bicomplexes, on peut aussi écrire  $\zeta$  en développant  $w_1$  et  $w_2$  sous leur forme bicomplexe (3.1), c'est-à-dire avec des coefficients complexes.

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(3) &= \{\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 \mid w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)\} \\ &= \{\zeta = (z_1 + z_2\mathbf{i}_2) + (z_3 + z_4\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_3 \mid z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{M}(1)\} \\ &= \{\zeta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \mid z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{M}(1)\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{j}_3 := \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2$  est une unité hyperbolique puisque  $\mathbf{j}_3^2 = (\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)^2 = \mathbf{i}_2^2\mathbf{i}_3^2 = 1$ . Cette représentation n'est pas sans rappeler la représentation des nombres bicomplexes à l'aide de coefficients réels. Finalement, comme les  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , sont complexes, on peut les réécrire à l'aide de coefficients réels.

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(3) &= \{\zeta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \mid z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{M}(1)\} \\ &= \{\zeta = (a + b\mathbf{i}_1) + (c + d\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 + (e + f\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 + (g + h\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 \mid a, \dots, h \in \mathbb{M}(0)\} \\ &= \{\zeta = a + b\mathbf{i}_1 + c\mathbf{i}_2 + d\mathbf{j}_1 + e\mathbf{i}_3 + f\mathbf{j}_2 + g\mathbf{j}_3 + h\mathbf{i}_4 \mid a, \dots, h \in \mathbb{M}(0)\}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{j}_1$  sont les unités imaginaires utilisées dans le cas des nombres bicomplexes,  $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  et  $\mathbf{j}_3$  sont les unités imaginaires qu'on a utilisées en 3.5,  $\mathbf{j}_2 := \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1$  est une unité imaginaire hyperbolique puisque  $\mathbf{j}_2^2 = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_3)^2 = \mathbf{i}_1^2\mathbf{i}_3^2 = 1$  et  $\mathbf{i}_4 := \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$  est une unité imaginaire telle que  $\mathbf{i}_4^2 = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3)^2 = \mathbf{i}_1^2\mathbf{i}_2^2\mathbf{i}_3^2 = -1$ . Remarquez que peu importe dans quel ordre on effectue le produit des unités  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  et  $\mathbf{i}_3$ , on obtient  $\mathbf{i}_4$  (puisque les produits d'unités imaginaires sont commutatifs). Maintenant, il sera plus commode d'écrire les nombres tricomplexes à l'aide de coefficients réels en ordonnant les unités

imaginaires de la façon suivante :

$$\mathbb{M}(3) := \{\zeta = x_0 + x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 + x_4\mathbf{i}_4 + x_5\mathbf{j}_1 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 \mid x_i \in \mathbb{M}(0), i = 0, \dots, 7\}. \quad (3.6)$$

On remarque donc qu'un nombre tricomplexe possède un membre réel, quatre membres imaginaires et trois membres hyperboliques. Les divers produits des unités imaginaires se retrouvent dans le tableau 3.2.

TABLE 3.2 – Produits des unités imaginaires tricomplexes

$\cdot$	$\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{j}_1$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_3$
$\mathbf{i}_1$	-1	$\mathbf{j}_1$	$\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$
$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}_1$	-1	$\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_3$
$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{j}_3$	-1	$-\mathbf{j}_1$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_2$
$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	-1	$\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$
$\mathbf{j}_1$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_4$	$\mathbf{i}_3$	1	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$
$\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{i}_3$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_1$	$\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{j}_3$	1	$-\mathbf{j}_1$
$\mathbf{j}_3$	$\mathbf{i}_4$	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	1

Lorsque l'on veut additionner ou multiplier deux nombres tricomplexes dans les représentations 3.5 ou 3.6, on utilise les règles de distributivité de même que le tableau ci-dessus pour la multiplication. Tout comme pour les nombres bicomplexes, l'addition et la multiplication de nombres tricomplexes sont associatives et commutatives.

Les nombres bicomplexes et tricomplexes sont en fait des cas particuliers de nombres multicomplexes. Nous nous attarderons ici sur la structure multicomplexe la plus générale : les **nombre multicomplexes d'ordre  $n$** . En voici la notation classique :

$$\mathbb{M}(n) := \{\eta = \zeta_1 + \zeta_2\mathbf{i}_n \mid \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(n-1), \mathbf{i}_n^2 = -1\}. \quad (3.7)$$

Comme le produit d'unités imaginaires et le produit de nombres réels sont commutatifs, le produit de deux nombres multicomplexes d'ordre  $n$  est lui aussi commutatif. C'est une propriété que la plupart des systèmes de nombres hypercomplexes ne possèdent pas. Répétons maintenant le procédé de décomposition que l'on a utilisé pour les nombres

bicomplexes et tricomplexes. Soit  $\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12}\mathbf{i}_{n-1}$ ,  $\zeta_2 = \zeta_{21} + \zeta_{22}\mathbf{i}_{n-1} \in \mathbb{M}(n-1)$ .

Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(n) &= \{\eta = (\zeta_{11} + \zeta_{12}\mathbf{i}_{n-1}) + (\zeta_{21} + \zeta_{22}\mathbf{i}_{n-1})\mathbf{i}_n \mid \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(n-1)\} \\ &= \{\eta = \zeta_{11} + \zeta_{12}\mathbf{i}_{n-1} + \zeta_{21}\mathbf{i}_n + \zeta_{22}\mathbf{j}_n \mid \zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{21}, \zeta_{22} \in \mathbb{M}(n-2)\}. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Dans la dernière représentation, on a défini  $\mathbf{j}_n := \mathbf{i}_{n-1}\mathbf{i}_n$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{j}_n^2 = 1$  et donc  $\mathbf{j}_n$  est une unité imaginaire hyperbolique. Bien entendu, si  $n = 2$ , on a retrouvé les nombres bicomplexes sous la forme 3.2. Si  $n > 2$ , on peut continuer la décomposition des coefficients  $\zeta_{11}$ ,  $\zeta_{12}$ ,  $\zeta_{21}$  et  $\zeta_{22}$  jusqu'à obtenir une représentation des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  en terme de coefficients réels.

**Proposition 3.1** *Soit  $\zeta \in \mathbb{M}(n)$ . Alors, on peut représenter  $\zeta$  à l'aide de  $2^n$  coefficients réels et de manière plus générale, à l'aide de  $2^{n-k}$  coefficients multicomplexes d'ordre  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ .*

**Preuve :**

Pour  $n = 1$ , ce sont les nombres complexes, c'est-à-dire que  $\zeta = x + y\mathbf{i}_1$ ,  $x, y \in \mathbb{M}(0) = \mathbb{R}$  et donc on a exprimé  $\zeta$  en terme de  $2 = 2^{1-0}$  coefficients dans  $\mathbb{M}(k) = \mathbb{M}(0) = \mathbb{R}$ . Supposons que  $\zeta \in \mathbb{M}(m)$  s'exprime en terme de  $2^{m-k}$  coefficients dans  $\mathbb{M}(k)$ ,  $0 \leq k \leq m$ . Considérons  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2\mathbf{i}_{m+1} \in \mathbb{M}(m+1)$ . Ainsi, comme  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(m)$  s'expriment en terme de  $2^{m-k}$  coefficients dans  $\mathbb{M}(k)$ ,  $\zeta$  s'exprime en terme de  $2^{m-k} + 2^{m-k} = 2^{m+1-k}$  coefficients et donc on a démontré pour tout  $n$  qu'un nombre multicomplexe d'ordre  $n$  s'exprime en terme de  $2^{n-k}$  coefficients multicomplexes d'ordre  $k$ . Ainsi, pour  $k = 0$ ,  $\zeta \in \mathbb{M}(n)$  s'exprime en terme de  $2^n$  coefficients réels.  $\square$

**Remarque :** Cette proposition est équivalente à dire que  $\mathbb{M}(n) \cong \mathbb{R}^{2^n}$ , lorsque l'on considère  $\mathbb{R}^{2^n}$  comme espace vectoriel sur les réels. De plus, on a  $\mathbb{M}(k) \subset \mathbb{M}(n)$  pour  $k < n$ .

Un nombre multicomplexe d'ordre  $n$  s'exprime donc, après toutes les décompositions possibles, en terme de  $2^n$  coefficients réels. Le premier de ces coefficients est le membre réel. Ensuite, on a  $n$  coefficients qui multiplient les unités imaginaires  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_n$  qui sont toutes telles que  $\mathbf{i}_k^2 = -1, k = 1, \dots, n$ . Afin de faciliter la compréhension, les unités  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_n$  seront appelées unités imaginaires **simples**. Les autres coefficients réels multiplient des unités imaginaires qui sont le résultat du produit de deux ou plus des unités imaginaires simples. Chacune des combinaisons possibles de deux ou plus de ces unités imaginaires forme une nouvelle unité imaginaire (c'est pour cette raison qu'il y a  $2^n$  coefficients réels au total). Lorsque l'on travaillera avec la décomposition 3.8, c'est-à-dire avec quatre coefficients multicomplexes d'ordre  $n - 2$ , on représentera le produit  $\mathbf{i}_{n-1}\mathbf{i}_n$  par l'unité  $\mathbf{j}_n$ . Lorsque l'on travaillera avec des décompositions qui utilisent plus de coefficients, on laissera les produits d'unités tels quels pour éviter la confusion.

Par exemple, pour  $n = 5$ ,  $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{i}_5\}$  est l'ensemble des unités imaginaires simples. Le produit des unités  $\mathbf{i}_2$  et  $\mathbf{i}_4$  nous donne une nouvelle unité imaginaire qui ne fait pas parti de l'ensemble des unités imaginaires simples. L'ensemble des combinaisons de produits possibles de ces unités nous donne donc l'ensemble des unités imaginaires qui génèrent les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ . Le nombre total  $N$ , d'unités imaginaires composant les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  est donc un membre réel, plus  $n$  unités imaginaires simples, plus toutes les combinaisons possibles de celles-ci :

$$\begin{aligned} N &= 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, \end{aligned}$$

comme on s'attendait. Lorsque l'on combine un nombre pair d'unités imaginaires simples, on obtient une unité imaginaire hyperbolique, c'est-à-dire dont le carré est un. Lorsque l'on combine un nombre impair d'unités imaginaires simples, on obtient une unité imaginaire qui a « -1 » comme carré. Pour  $n = 5$ , on obtient, par exemple :  $(\mathbf{i}_2\mathbf{i}_4)^2 = \mathbf{i}_2^2\mathbf{i}_4^2 = 1$ ;  $(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_4\mathbf{i}_5)^2 = \mathbf{i}_1^2\mathbf{i}_4^2\mathbf{i}_5^2 = -1$ ;  $(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_4\mathbf{i}_5)^2 = \mathbf{i}_1^2\mathbf{i}_2^2\mathbf{i}_4^2\mathbf{i}_5^2 = 1$ ;  $(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4\mathbf{i}_5)^2 =$

$$\mathbf{i}_1^2 \mathbf{i}_2^2 \mathbf{i}_3^2 \mathbf{i}_4^2 \mathbf{i}_5^2 = -1; \dots$$

L'addition de nombres multicomplexes d'ordre  $n$  se fait toujours selon les règles habituelles peu importe la représentation utilisée. Lorsqu'on multiplie deux nombres multicomplexes d'ordre  $n$  sous une représentation différente de celle présentée en 3.7, on utilise la distributivité ainsi que la règle de multiplication des unités imaginaires.

Dans la prochaine section, nous allons traiter une autre notation importante pour les nombres multicomplexes, soit la représentation idempotente. Cette représentation des nombres multicomplexes sera primordiale pour démontrer plusieurs résultats du chapitre 4.

## 3.2 Représentation idempotente

Une notion fondamentale de la théorie des nombres multicomplexes est la représentation idempotente. Un nombre  $\zeta \in \mathbb{M}(n)$  est appelé idempotent lorsque  $\zeta^2 = \zeta$ . On verra qu'il est possible d'exprimer les nombres multicomplexes comme une combinaison linéaire d'éléments idempotents. De plus, on définira un produit cartésien multicomplexe à partir de cette représentation idempotente. On sera à même de constater dans le chapitre 4 toute l'importance de la représentation idempotente de même que celle de ce produit cartésien.

Comme on l'a fait lorsqu'on a présenté les nombres multicomplexes, l'on commencera par présenter la notation idempotente pour les nombres bicomplexes et tricomplexes en premier. Considérons les nombres bicomplexes suivants :

$$\gamma_1 := \frac{1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2}{2} = \frac{1 + \mathbf{j}_1}{2}; \quad \bar{\gamma}_1 := \frac{1 - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2}{2} = \frac{1 - \mathbf{j}_1}{2}. \quad (3.9)$$

Ces deux nombres ont les propriétés suivantes :

- a)  $\gamma_1^2 = \gamma_1; \quad \bar{\gamma}_1^2 = \bar{\gamma}_1;$
- b)  $\gamma_1 + \bar{\gamma}_1 = 1;$

c)  $\gamma_1 \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_1 \gamma_1 = 0$ .

La propriété a) est la propriété d'idempotence. La propriété c) est la propriété d'orthogonalité entre les nombres  $\gamma_1$  et  $\bar{\gamma}_1$ . Ces deux nombres bicomplexes nous permettent de réécrire un nombre bicomplexe  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$  de la manière suivante :

$$w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \bar{\gamma}_1. \quad (3.10)$$

Les propriétés d'idempotence et d'orthogonalité nous permettent de multiplier des nombres bicomplexes sous forme idempotente terme à terme. En effet, soit  $w_1 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \bar{\gamma}_1$  et  $w_2 = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2 = (z_3 - z_4 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_3 + z_4 \mathbf{i}_1) \bar{\gamma}_1$ , alors

$$w_1 \cdot w_2 = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1)(z_3 - z_4 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1)(z_3 + z_4 \mathbf{i}_1) \bar{\gamma}_1.$$

Il y a également une représentation idempotente pour les nombres tricomplexes et, plus généralement, pour les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ . Considérons les nombres tricomplexes suivants :

$$\gamma_2 := \frac{1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3}{2} = \frac{1 + \mathbf{j}_3}{2}; \quad \bar{\gamma}_2 := \frac{1 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3}{2} = \frac{1 - \mathbf{j}_3}{2}, \quad (3.11)$$

qui sont idempotent et orthogonaux par les propriétés suivantes :

a)  $\gamma_2^2 = \gamma_2; \quad \bar{\gamma}_2^2 = \bar{\gamma}_2;$

b)  $\gamma_2 + \bar{\gamma}_2 = 1;$

c)  $\gamma_2 \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_2 \gamma_2 = 0$ .

On peut alors réécrire un nombre tricomplexe  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$  de la manière suivante :

$$\zeta = (w_1 - w_2 \mathbf{i}_2) \gamma_2 + (w_1 + w_2 \mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_2. \quad (3.12)$$

De plus, on a  $w_1 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$  et  $w_2 = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2$ ,  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{M}(1)$ . En remplaçant dans  $\zeta$  on obtient  $\zeta = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 - (z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2) \gamma_2 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 + (z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_2 = (z_1 + z_4 + (z_2 - z_3) \mathbf{i}_2) \gamma_2 + (z_1 - z_4 + (z_2 + z_3) \mathbf{i}_2) \bar{\gamma}_2$ , mais  $(z_1 + z_4 + (z_2 - z_3) \mathbf{i}_2)$  et  $(z_1 - z_4 + (z_2 + z_3) \mathbf{i}_2)$  sont des nombres bicomplexes c'est-à-dire que l'on peut les

réécrire sous la forme idempotente :

$$\begin{aligned} z_1 + z_4 + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_2 &= ((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1, \\ z_1 - z_4 + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_2 &= ((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a la représentation idempotente à quatre éléments idempotents d'un nombre tricomplexe :

$$\begin{aligned} \zeta &= ((z_1 + z_4) - ((z_2 - z_3)\mathbf{i}_1))\gamma_1\gamma_2 + ((z_1 + z_4) + ((z_2 - z_3)\mathbf{i}_1))\bar{\gamma}_1\gamma_2 \\ &\quad + ((z_1 - z_4) - ((z_2 + z_3)\mathbf{i}_1))\gamma_1\bar{\gamma}_2 + ((z_1 - z_4) + ((z_2 + z_3)\mathbf{i}_1))\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2. \end{aligned}$$

Les nombres  $\gamma_1\gamma_2, \gamma_1\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_1\gamma_2, \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2$  sont idempotents et orthogonaux deux à deux en vertu des propriétés énoncées précédemment. Établissons une notation abrégée pour cette représentation. Soit  $\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \in \mathbb{M}(2)$ . On définit les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} w_{\gamma_1\gamma_2} &:= (z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1, \\ w_{\bar{\gamma}_1\gamma_2} &:= (z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1, \\ w_{\gamma_1\bar{\gamma}_2} &:= (z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1, \\ w_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2} &:= (z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

On remarque alors que le nombre tricomplexe  $\zeta$  peut s'exprimer en fonction de quatre éléments idempotents de la manière suivante :

$$\zeta = w_{\gamma_1\gamma_2} \cdot \gamma_1\gamma_2 + w_{\bar{\gamma}_1\gamma_2} \cdot \bar{\gamma}_1\gamma_2 + w_{\gamma_1\bar{\gamma}_2} \cdot \gamma_1\bar{\gamma}_2 + w_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2} \cdot \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2. \tag{3.14}$$

Les représentations idempotentes 3.12 et 3.14 permettent, entre autre, d'additionner et de multiplier les nombres tricomplexes terme à terme. Similairement à ce qu'on a fait avec les nombres bicomplexes et tricomplexes, considérons les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  suivants :

$$\gamma_{n-1} := \frac{1 + \mathbf{i}_{n-1}\mathbf{i}_n}{2} = \frac{1 + \mathbf{j}_n}{2}; \quad \bar{\gamma}_{n-1} := \frac{1 - \mathbf{i}_{n-1}\mathbf{i}_n}{2} = \frac{1 - \mathbf{j}_n}{2}; \tag{3.15}$$

qui sont idempotents et orthogonaux par les propriétés suivantes :

- a)  $\gamma_{n-1}^2 = \gamma_{n-1}; \quad \bar{\gamma}_{n-1}^2 = \bar{\gamma}_{n-1};$
- b)  $\gamma_{n-1} + \bar{\gamma}_{n-1} = 1;$
- c)  $\gamma_{n-1}\bar{\gamma}_{n-1} = \bar{\gamma}_{n-1}\gamma_{n-1} = 0.$

On peut alors réécrire les nombres multicomplexes de la manière suivante :

$$\eta = \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n = (\zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1})\gamma_{n-1} + (\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1})\bar{\gamma}_{n-1}. \quad (3.16)$$

Dans le cas des nombres tricomplexes, on a vu une décomposition en terme de quatres éléments idempotents. Bien entendu cette décomposition est également possible pour les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ ,  $n > 3$ . En fait, comme il y a une multitude de représentations possibles pour les nombres multicomplexes, il y a également une multitude de représentations possibles à l'aide d'éléments idempotents. Construisons  $n - 1$  ensembles  $S_1, \dots, S_{n-1}$ , d'éléments idempotents :

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{ \gamma_{n-1}, \bar{\gamma}_{n-1} \}, \\ S_2 &:= \{ \gamma_i \gamma_j \mid \gamma_i \in \{ \gamma_{n-2}, \bar{\gamma}_{n-2} \}, \gamma_j \in S_1 \}, \\ &\vdots \\ S_k &:= \{ \gamma_i \gamma_j \mid \gamma_i \in \{ \gamma_{n-k}, \bar{\gamma}_{n-k} \}, \gamma_j \in S_{k-1} \}, \\ &\vdots \\ S_{n-1} &:= \{ \gamma_i \gamma_j \mid \gamma_i \in \{ \gamma_1, \bar{\gamma}_1 \}, \gamma_j \in S_{n-2} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'ensemble  $S_k$  contient  $2^k$  éléments, chacun étant le produit de  $k$  nombres idempotents correspondant aux dimensions supérieures. Par exemple, pour  $n = 5$ , les éléments idempotents de l'ensemble  $S_3$  sont  $\gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \gamma_2 \gamma_3 \bar{\gamma}_4, \gamma_2 \bar{\gamma}_3 \gamma_4, \bar{\gamma}_2 \gamma_3 \gamma_4, \gamma_2 \bar{\gamma}_3 \bar{\gamma}_4, \dots$ . Les éléments de  $S_k$  sont tous idempotents et orthogonaux deux à deux. Ainsi, on pourra représenter  $\zeta \in \mathbb{M}(n)$  comme une combinaison linéaire des  $2^k$  nombres idempotents de  $S_k$  par des coefficients multicomplexes d'ordre  $n - k$ . Allons voir plus en détails la représentation à l'aide de quatre nombres idempotents, c'est-à-dire celle correspondant à l'ensemble  $S_2$ . Soit  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1} + \zeta_3 \mathbf{i}_n + \zeta_4 \mathbf{j}_n$ . Alors les éléments suivants :

$$\begin{aligned}
\zeta_{\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}} &:= (\zeta_1 + \zeta_4) - (\zeta_2 - \zeta_3)\mathbf{i}_{n-2}, \\
\zeta_{\bar{\gamma}_{n-2}\gamma_{n-1}} &:= (\zeta_1 + \zeta_4) + (\zeta_2 - \zeta_3)\mathbf{i}_{n-2}, \\
\zeta_{\gamma_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}} &:= (\zeta_1 - \zeta_4) - (\zeta_2 + \zeta_3)\mathbf{i}_{n-2}, \\
\zeta_{\bar{\gamma}_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}} &:= (\zeta_1 - \zeta_4) + (\zeta_2 + \zeta_3)\mathbf{i}_{n-2},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

nous permettent de représenter  $\eta$  à l'aide des quatre éléments idempotents de  $S_2$  de la manière suivante :

$$\zeta = \zeta_{\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}}\gamma_{n-2}\gamma_{n-1} + \zeta_{\bar{\gamma}_{n-2}\gamma_{n-1}}\bar{\gamma}_{n-2}\gamma_{n-1} + \zeta_{\gamma_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}}\gamma_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1} + \zeta_{\bar{\gamma}_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}}\bar{\gamma}_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}. \tag{3.19}$$

Encore une fois, peu importe la représentation idempotente multicomplexe utilisée, on pourra effectuer la multiplication de deux nombres multicomplexes d'ordre  $n$  terme à terme.

Un autre avantage de la représentation idempotente est qu'elle permettra de faire aisément les preuves de plusieurs résultats dans le prochain chapitre. Ce que nous allons utiliser le plus souvent est une sorte de produit cartésien multicomplexe.

**Définition 3.1** *On dit que l'ensemble  $X \subseteq \mathbb{M}(n)$  est l'ensemble **produit cartésien**- $\mathbb{M}(n)$  déterminé par  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{M}(n-1)$  si*

$$X := X_1 \times_{\gamma_{n-1}} X_2 := \{\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n \in \mathbb{M}(n) \mid \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n = u_1 \gamma_{n-1} + u_2 \bar{\gamma}_{n-1}, (u_1, u_2) \in X_1 \times X_2\}.$$

Ainsi,  $X = X_1 \times_{\gamma_{n-1}} X_2$  représente l'ensemble des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  que l'on peut former en prenant un nombre multicomplexe d'ordre  $n-1$  dans  $X_1$  comme coefficient de  $\gamma_{n-1}$  et un autre dans  $X_2$  comme coefficient de  $\bar{\gamma}_{n-1}$ . Il apparait alors que  $\mathbb{M}(n) = \mathbb{M}(n-1) \times_{\gamma_{n-1}} \mathbb{M}(n-1)$ . Aussi, si on a un ensemble  $X \subseteq \mathbb{M}(n)$ , alors des ensembles  $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(n-1)$  tels que  $X \subseteq X_1 \times_{\gamma_{n-1}} X_2$  existent. Remarquons également que l'application suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(n)^2 = \mathbb{M}(n) \times \mathbb{M}(n) &\xrightarrow{\gamma} \mathbb{M}(n) \times_{\gamma_{n-1}} \mathbb{M}(n) = \mathbb{M}(n+1) \\
(\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto \zeta_1 \gamma_{n-1} + \zeta_2 \bar{\gamma}_{n-1},
\end{aligned}$$

constitue un homéomorphisme. Il s'agit là d'une propriété que l'on utilisera pour montrer la connexité de l'ensemble de Mandelbrot généralisé ainsi que celle des ensembles de Julia remplis généralisés.

Ce produit cartésien multicomplexe sera très utile dans le prochain chapitre. En général, on aura besoin de décomposer l'ensemble initial (multicomplexe d'ordre  $n$ ) à l'aide du produit cartésien multicomplexe une seule fois. Entre autres, on se servira des produits cartésiens bicomplexes (3.20) et tricomplexes (3.21).

$$X_1 \times_{\gamma_1} X_2 := \{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2) \mid z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = u_1 \gamma_1 + u_2 \bar{\gamma}_1, (u_1, u_2) \in X_1 \times X_2\}, \quad (3.20)$$

$$X_3 \times_{\gamma_2} X_4 := \{w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3) \mid w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 = u_1 \gamma_2 + u_2 \bar{\gamma}_2, (u_1, u_2) \in X_3 \times X_4\}, \quad (3.21)$$

où  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{M}(1)$  et  $X_3, X_4 \subseteq \mathbb{M}(2)$ . On verra dans le chapitre suivant comment utiliser ce produit cartésien multicomplexe afin de démontrer les différents résultats de dynamique multicomplexe.

### 3.3 Conjugaison des nombres multicomplexes

Nous avons vu dans les sections précédentes que la structure des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  est associative et commutative sous l'addition et la multiplication. Les prochaines sections traiterons d'autres propriétés générales de cette structure de nombres en commençant par la conjugaison.

Avec les nombres complexes est apparu la notion de conjugaison. Qu'advient-il lorsque l'on veut conjuguer les nombres multicomplexes? Considérons le nombre bicomplexe  $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ . Ainsi, on peut utiliser la même méthode qui a été utilisée pour conjuguer les nombres complexes et définir un conjugué multicomplexe de la manière suivante :  $\bar{w} = \overline{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} := z_1 - z_2 \mathbf{i}_2$ . Par contre, comme  $z_1$  et  $z_2$  sont complexes, on peut également les conjuguer et donc on aurait pu définir la conjugaison d'un nombre bicomplexe de cette façon :  $\bar{w} = \overline{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} := \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \mathbf{i}_2$ . Puis pourquoi ne pas utiliser les deux façons en même temps :  $\bar{w} = \overline{z_1 + z_2 \mathbf{i}_2} := \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \mathbf{i}_2$ ? En fait ces trois façons de conjuguer

un nombre bicomplexe possèdent les propriétés recherchées pour un conjugué. On les considérera donc comme trois manières différentes de conjuguer un nombre bicomplexe.

**Définition 3.2** Soit  $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 \in \mathbb{M}(2)$  et  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  les conjugués complexes.

1. On définit le *conjugué bicomplexe de w selon  $\mathbf{i}_1$*  de la manière suivante :

$$w^{\dagger 1} = (z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^{\dagger 1} := \bar{z}_1 + \bar{z}_2\mathbf{i}_2.$$

2. On définit le *conjugué bicomplexe de w selon  $\mathbf{i}_2$*  de la manière suivante :

$$w^{\dagger 2} = (z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^{\dagger 2} := z_1 - z_2\mathbf{i}_2.$$

3. On définit le *conjugué bicomplexe de w selon  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$*  de la manière suivante :

$$w^{\dagger 3} = (z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^{\dagger 3} := ((z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^{\dagger 2})^{\dagger 1} = ((z_1 + z_2\mathbf{i}_2)^{\dagger 1})^{\dagger 2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2\mathbf{i}_2.$$

Lorsque l'on écrit le nombre bicomplexe  $w$  avec des coefficients réels, on obtient

$$w^{\dagger 1} = (x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1)^{\dagger 1} = x_1 - x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 - x_4\mathbf{j}_1,$$

$$w^{\dagger 2} = (x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1)^{\dagger 2} = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 - x_3\mathbf{i}_2 - x_4\mathbf{j}_1,$$

$$w^{\dagger 3} = (x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1)^{\dagger 3} = x_1 - x_2\mathbf{i}_1 - x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1.$$

Ces trois formes de conjugaison des nombres bicomplexes ont les propriétés suivantes :

**Proposition 3.2** Soit  $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)$ . Alors on a

a)  $(w_1 \pm w_2)^{\dagger i} = w_1^{\dagger i} \pm w_2^{\dagger i},$

b)  $(w_1^{\dagger i})^{\dagger i} = w_1,$

c)  $(w_1 \cdot w_2)^{\dagger i} = w_1^{\dagger i} \cdot w_2^{\dagger i},$

pour  $i = 1, 2, 3$ .

**Preuve :**

Pour chacune des trois propriétés, nous allons effectuer la preuve pour le troisième conjugués. Les preuves pour les deux autres conjugués sont similaires. Tout d'abord, on a  $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4 \in \mathbb{M}(1)$  tels que  $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$  et  $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ .

- a) On a  $w_1 \pm w_2 = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) \pm (z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) = (z_1 \pm z_3) + (z_2 \pm z_4) \mathbf{i}_2$ . Ainsi,  $(w_1 \pm w_2)^{\dagger 3} = (\overline{z_1 \pm z_3}) - (\overline{z_2 \pm z_4}) \mathbf{i}_2 = (\overline{z_1} \pm \overline{z_3}) - (\overline{z_2} \pm \overline{z_4}) \mathbf{i}_2$  en vertu des propriétés du conjugué complexe. On a donc  $(w_1 \pm w_2)^{\dagger 3} = (\overline{z_1} - \overline{z_2} \mathbf{i}_2) \pm (\overline{z_3} - \overline{z_4} \mathbf{i}_2) = w_1^{\dagger 3} \pm w_2^{\dagger 3}$ .
- b) On a  $(w_1^{\dagger 3})^{\dagger 3} = ((z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 3})^{\dagger 3} = (\overline{z_1} - \overline{z_2} \mathbf{i}_2)^{\dagger 3} = \overline{\overline{z_1} + \overline{z_2} \mathbf{i}_2} = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 = w_1$ .
- c) On a  $w_1 \cdot w_2 = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2) \cdot (z_3 + z_4 \mathbf{i}_2) = (z_1 z_3 - z_2 z_4) + (z_1 z_4 + z_2 z_3) \mathbf{i}_2$ . Ainsi,  $(w_1 \cdot w_2)^{\dagger 3} = (\overline{z_1 z_3 - z_2 z_4}) - (\overline{z_1 z_4 + z_2 z_3}) \mathbf{i}_2 = (\overline{z_1} \cdot \overline{z_3} - \overline{z_2} \cdot \overline{z_4}) - (\overline{z_1} \cdot \overline{z_4} + \overline{z_2} \cdot \overline{z_3}) \mathbf{i}_2$  en vertu des propriétés du conjugué complexe. Or,  $(\overline{z_1} \cdot \overline{z_3} - \overline{z_2} \cdot \overline{z_4}) - (\overline{z_1} \cdot \overline{z_4} + \overline{z_2} \cdot \overline{z_3}) \mathbf{i}_2 = (\overline{z_1} - \overline{z_2} \mathbf{i}_2) \cdot (\overline{z_3} - \overline{z_4} \mathbf{i}_2) = w_1^{\dagger 3} \cdot w_2^{\dagger 3}$ .  $\square$

De plus, les propriétés suivantes lient les trois formes de conjugaison :

**Proposition 3.3** *Soit  $w \in \mathbb{M}(2)$ . Alors la composition de deux conjugaisons bicomplexes différentes sur  $w$  nous donne la troisième conjugaison de  $w$ , c'est-à-dire*

- d)  $(w^{\dagger 1})^{\dagger 2} = (w^{\dagger 2})^{\dagger 1} = w^{\dagger 3}$ ,
- e)  $(w^{\dagger 1})^{\dagger 3} = (w^{\dagger 3})^{\dagger 1} = w^{\dagger 2}$ ,
- f)  $(w^{\dagger 3})^{\dagger 2} = (w^{\dagger 2})^{\dagger 3} = w^{\dagger 1}$ .

**Preuve :**

Nous allons démontrer la propriété e). Les deux autres démonstrations sont similaires. On a  $w \in \mathbb{M}(2)$ , donc  $w := z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1)$ . Ainsi,  $(w^{\dagger 1})^{\dagger 3} = ((z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 1})^{\dagger 3} = (\overline{z_1} + \overline{z_2} \mathbf{i}_2)^{\dagger 3} = z_1 - z_2 \mathbf{i}_2 = w^{\dagger 2}$ . On remarque également que  $(w^{\dagger 3})^{\dagger 1} = w^{\dagger 2}$ , c'est-à-dire que l'ordre de conjugaison n'a pas d'importance.  $\square$

Définissant un **conjugué bicomplexe identité** :  $w^{\dagger 0} := w$ ,  $w \in \mathbb{M}(2)$ , on remarque que les trois formes de conjugaisons bicomplexes avec le conjugué identité forment un groupe.

**Proposition 3.4** *Soit  $\dagger := \{\dagger_0, \dagger_1, \dagger_2, \dagger_3\}$ , l'ensemble formé du conjugué identité et des trois conjugués bicomplexes et considérons l'opération de composition  $\circ$ . Alors le couple  $(\dagger, \circ)$  forme un groupe commutatif. De plus, ce groupe est isomorphe au groupe*

du produit cartésien des entiers modulo 2 :  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2) = (\mathbb{Z}_2^2, +_2)$ , appelé groupe de Klein.

**Preuve :**

Voici la table de Cayley du groupe commutatif  $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$  ainsi que celle du couple  $(\dagger, \circ)$  :

$(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 0)

TABLE 3.3 – Table du groupe  $(\dagger, \circ)$

$(\dagger, \circ)$	$\dagger_0$	$\dagger_1$	$\dagger_2$	$\dagger_3$
$\dagger_0$	$\dagger_0$	$\dagger_1$	$\dagger_2$	$\dagger_3$
$\dagger_1$	$\dagger_1$	$\dagger_0$	$\dagger_3$	$\dagger_2$
$\dagger_2$	$\dagger_2$	$\dagger_3$	$\dagger_0$	$\dagger_1$
$\dagger_3$	$\dagger_3$	$\dagger_2$	$\dagger_1$	$\dagger_0$

Ainsi l'application bijective

$$\begin{aligned}
 f : \dagger &\longrightarrow \mathbb{Z}_2^2 \\
 \dagger_0 &\longleftrightarrow (0, 0) \\
 \dagger_1 &\longleftrightarrow (1, 0) \\
 \dagger_2 &\longleftrightarrow (0, 1) \\
 \dagger_3 &\longleftrightarrow (1, 1)
 \end{aligned}$$

nous permet d'obtenir la table de Cayley du groupe  $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$  à partir de celle du couple  $(\dagger, \circ)$  et donc  $(\dagger, \circ)$  est un groupe commutatif isomorphe au groupe  $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$ .  $\square$

Reproduisant le processus qui nous a permis d'obtenir les trois formes de conjugaisons des nombres bicomplexes on obtient les trois conjugaisons suivantes pour  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3)$  :

- $\zeta^{\dagger_1} = w_1^{\dagger} + w_2^{\dagger} \mathbf{i}_3$ ,
- $\zeta^{\dagger_2} = w_1 - w_2 \mathbf{i}_3$ ,
- $\zeta^{\dagger_3} = w_1^{\dagger} - w_2^{\dagger} \mathbf{i}_3$ ,

où  $w_1^{\dagger}, w_2^{\dagger}$  représentent les conjugués de  $w_1$  et  $w_2$  dans  $\mathbb{M}(2)$ . Cependant, comme nous l'avons vu, il y a trois formes de conjugaisons dans  $\mathbb{M}(2)$ . Il en découle donc que les trois formes de conjugaisons énoncées précédemment ne sont pas complètes. Voici donc les sept formes de conjugaison dans  $\mathbb{M}(3)$ .

**Définition 3.3** Soit  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3)$  et  $\dagger_1, \dagger_2, \dagger_3$  les trois conjugaisons bicomplexes. Il existe sept *conjugués tricomplexes* de  $\zeta$  :

1.  $\zeta^{\dagger_1} := w_1 - w_2 \mathbf{i}_3$ ,
2.  $\zeta^{\dagger_2} := w_1^{\dagger_1} + w_2^{\dagger_1} \mathbf{i}_3$ ,
3.  $\zeta^{\dagger_3} := w_1^{\dagger_2} + w_2^{\dagger_2} \mathbf{i}_3$ ,
4.  $\zeta^{\dagger_4} := w_1^{\dagger_3} + w_2^{\dagger_3} \mathbf{i}_3$ ,
5.  $\zeta^{\dagger_5} := w_1^{\dagger_1} - w_2^{\dagger_1} \mathbf{i}_3$ ,
6.  $\zeta^{\dagger_6} := w_1^{\dagger_2} - w_2^{\dagger_2} \mathbf{i}_3$ ,
7.  $\zeta^{\dagger_7} := w_1^{\dagger_3} - w_2^{\dagger_3} \mathbf{i}_3$ .

Ces sept formes de conjugaisons possèdent également les propriétés propres aux conjugués.

**Proposition 3.5** Soit  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(3)$ . Alors on a :

- a)  $(\zeta_1 \pm \zeta_2)^{\dagger_i} = \zeta_1^{\dagger_i} \pm \zeta_2^{\dagger_i}$ ,
- b)  $(\zeta_1^{\dagger_i})^{\dagger_i} = \zeta_1$ ,
- c)  $(\zeta_1 \cdot \zeta_2)^{\dagger_i} = \zeta_1^{\dagger_i} \cdot \zeta_2^{\dagger_i}$ ,

pour  $i = 1, \dots, 7$ .

**Preuve :**

a) Démontrons la propriété a) pour le conjugué  $\ddagger_2$ . Les autres conjugués se démontrent similairement. On a  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(3)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{M}(2)$  tels que  $\zeta_1 = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$  et  $\zeta_2 = w_3 + w_4 \mathbf{i}_3$ . Alors,  $(\zeta_1 \pm \zeta_2)^{\ddagger_2} = (w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \pm (w_3 + w_4 \mathbf{i}_3))^{\ddagger_2} = ((w_1 \pm w_3) + (w_2 \pm w_4) \mathbf{i}_3)^{\ddagger_2} = (w_1 \pm w_3)^{\dagger_1} + (w_2 \pm w_4)^{\dagger_1} \mathbf{i}_3$  par définition de  $\ddagger_2$ . Ainsi,  $(w_1 \pm w_3)^{\dagger_1} + (w_2 \pm w_4)^{\dagger_1} \mathbf{i}_3 = (w_1^{\dagger_1} \pm w_3^{\dagger_1}) + (w_2^{\dagger_1} \pm w_4^{\dagger_1}) \mathbf{i}_3$  par la propriété a) de la proposition 3.2. Ainsi,  $(\zeta_1 \pm \zeta_2)^{\ddagger_2} = (w_1^{\dagger_1} + w_2^{\dagger_1} \mathbf{i}_3) \pm (w_3^{\dagger_1} + w_4^{\dagger_1} \mathbf{i}_3) = \zeta_1^{\ddagger_2} \pm \zeta_2^{\ddagger_2}$ .

b) Démontrons la propriété b) pour le conjugué  $\ddagger_6$ . Les autres conjugués se démontrent similairement. On a  $\zeta_1 \in \mathbb{M}(3)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $w_1, w_2 \in \mathbb{M}(2)$  tels que  $\zeta_1 = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$ . Alors,  $(\zeta_1^{\ddagger_6})^{\ddagger_6} = ((w_1 + w_2 \mathbf{i}_3)^{\ddagger_6})^{\ddagger_6} = (w_1^{\dagger_2} - w_2^{\dagger_2} \mathbf{i}_3)^{\ddagger_6} = (w_1^{\dagger_2})^{\dagger_2} + (w_2^{\dagger_2})^{\dagger_2} \mathbf{i}_3 = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 = \zeta_1$  par la propriété b) de la proposition 3.2.

c) Démontrons la propriété c) pour le conjugué  $\ddagger_5$ . Les autres conjugués se démontrent similairement. On a  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(3)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{M}(2)$  tels que  $\zeta_1 = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$  et  $\zeta_2 = w_3 + w_4 \mathbf{i}_3$ . Alors,  $(\zeta_1 \cdot \zeta_2)^{\ddagger_5} = ((w_1 + w_2 \mathbf{i}_3) \cdot (w_3 + w_4 \mathbf{i}_3))^{\ddagger_5} = (((w_1 \cdot w_3) - (w_2 \cdot w_4)) + ((w_1 \cdot w_4) + (w_2 \cdot w_3)) \mathbf{i}_3)^{\ddagger_5} = ((w_1 \cdot w_3) - (w_2 \cdot w_4))^{\dagger_1} - ((w_1 \cdot w_4) + (w_2 \cdot w_3))^{\dagger_1} \mathbf{i}_3$  par définition de  $\ddagger_5$ . Aussi, par les propriétés a) et c) de la proposition 3.2,  $((w_1 \cdot w_3) - (w_2 \cdot w_4))^{\dagger_1} - ((w_1 \cdot w_4) + (w_2 \cdot w_3))^{\dagger_1} \mathbf{i}_3 = (w_1^{\dagger_1} \cdot w_3^{\dagger_1} - w_2^{\dagger_1} \cdot w_4^{\dagger_1}) - (w_1^{\dagger_1} \cdot w_4^{\dagger_1} + w_2^{\dagger_1} \cdot w_3^{\dagger_1}) \mathbf{i}_3 = (w_1^{\dagger_1} - w_2^{\dagger_1} \mathbf{i}_3) \cdot (w_3^{\dagger_1} - w_4^{\dagger_1} \mathbf{i}_3) = \zeta_1^{\ddagger_5} \cdot \zeta_2^{\ddagger_5}$ .  
□

Tout comme pour les nombres bicomplexes, on définit un **conjugué tricomplexe identité**  $\ddagger_0$  comme suit :  $\zeta^{\ddagger_0} := \zeta$ ,  $\zeta \in \mathbb{M}(3)$ . Les relations entre les conjugués tricomplexes sont données par la proposition suivante :

**Proposition 3.6** *Le résultat de la composition de deux conjugués tricomplexes est donné par le tableau suivant :*

TABLE 3.4 – Table du groupe  $(\dagger, \circ)$

$(\dagger, \circ)$	$\dagger_0$	$\dagger_1$	$\dagger_2$	$\dagger_3$	$\dagger_4$	$\dagger_5$	$\dagger_6$	$\dagger_7$
$\dagger_0$	$\dagger_0$	$\dagger_1$	$\dagger_2$	$\dagger_3$	$\dagger_4$	$\dagger_5$	$\dagger_6$	$\dagger_7$
$\dagger_1$	$\dagger_1$	$\dagger_0$	$\dagger_5$	$\dagger_6$	$\dagger_7$	$\dagger_2$	$\dagger_3$	$\dagger_4$
$\dagger_2$	$\dagger_2$	$\dagger_5$	$\dagger_0$	$\dagger_4$	$\dagger_3$	$\dagger_1$	$\dagger_7$	$\dagger_6$
$\dagger_3$	$\dagger_3$	$\dagger_6$	$\dagger_4$	$\dagger_0$	$\dagger_2$	$\dagger_7$	$\dagger_1$	$\dagger_5$
$\dagger_4$	$\dagger_4$	$\dagger_7$	$\dagger_3$	$\dagger_2$	$\dagger_0$	$\dagger_6$	$\dagger_5$	$\dagger_1$
$\dagger_5$	$\dagger_5$	$\dagger_2$	$\dagger_1$	$\dagger_7$	$\dagger_6$	$\dagger_0$	$\dagger_4$	$\dagger_3$
$\dagger_6$	$\dagger_6$	$\dagger_3$	$\dagger_7$	$\dagger_1$	$\dagger_5$	$\dagger_4$	$\dagger_0$	$\dagger_2$
$\dagger_7$	$\dagger_7$	$\dagger_4$	$\dagger_6$	$\dagger_5$	$\dagger_1$	$\dagger_3$	$\dagger_2$	$\dagger_0$

**Preuve :**

Nous allons démontrer la proposition pour la composition des conjugués  $\dagger_3$  et  $\dagger_7$ . Les autres compositions se démontrent similairement. On compose les conjugués  $\dagger_3$  et  $\dagger_7$  sur le nombre tricomplexe  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3$ , c'est-à-dire qu'on a  $(\zeta^{\dagger_3})^{\dagger_7} = ((w_1 + w_2 \mathbf{i}_3)^{\dagger_3})^{\dagger_7} = (w_1^{\dagger_2} + w_2^{\dagger_2} \mathbf{i}_3)^{\dagger_7} = (w_1^{\dagger_2})^{\dagger_3} - (w_2^{\dagger_2})^{\dagger_3} \mathbf{i}_3 = w_1^{\dagger_1} - w_2^{\dagger_1} \mathbf{i}_3 = \zeta^{\dagger_5}$ . On remarque de la même façon que  $(\zeta^{\dagger_7})^{\dagger_3} = \zeta^{\dagger_5}$ .  $\square$

Tout comme pour les nombres bicomplexes, l'ensemble des conjugués tricomplexes (avec le conjugué identité) avec l'opération de composition forme un groupe.

**Proposition 3.7** *Soit  $\dagger := \{\dagger_0, \dagger_1, \dots, \dagger_7\}$ , l'ensemble formé des sept conjugués tricomplexes et du conjugué identité tricomplexe et considérons l'opération de composition. Alors le couple  $(\dagger, \circ)$  forme un groupe commutatif. De plus, ce groupe est isomorphe au groupe du double produit cartésien des entiers modulo 2 :  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2) = (\mathbb{Z}_2^3, +_2)$ .*

**Preuve :**

Voici la table de Cayley du groupe commutatif  $(\mathbb{Z}_2^3, +_2)$  :

$(\mathbb{Z}_2^3, +_2)$	(0,0,0)	(0,0,1)	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,1,1)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,1)	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,1,1)
(0,0,1)	(0,0,1)	(0,0,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,1,1)	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)
(1,0,0)	(1,0,0)	(1,0,1)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(0,1,1)
(0,1,0)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,1,0)	(0,0,0)	(1,0,0)	(1,1,1)	(0,0,1)	(1,0,1)
(1,1,0)	(1,1,0)	(1,1,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,0,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(0,0,1)
(1,0,1)	(1,0,1)	(1,0,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(0,1,1)	(0,0,0)	(1,1,0)	(0,1,0)
(0,1,1)	(0,1,1)	(0,1,0)	(1,1,1)	(0,0,1)	(1,0,1)	(1,1,0)	(0,0,0)	(1,0,0)
(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,0)	(0,1,1)	(1,0,1)	(0,0,1)	(0,1,0)	(1,0,0)	(0,0,0)

Considérons la bijection suivante :

$$\begin{aligned}
\ddagger &\xleftrightarrow{f} \mathbb{Z}_2^3 \\
\ddagger_0 &\longleftrightarrow (0,0,0) \\
\ddagger_1 &\longleftrightarrow (0,0,1) \\
\ddagger_2 &\longleftrightarrow (1,0,0) \\
\ddagger_3 &\longleftrightarrow (0,1,0) \\
\ddagger_4 &\longleftrightarrow (1,1,0) \\
\ddagger_5 &\longleftrightarrow (1,0,1) \\
\ddagger_6 &\longleftrightarrow (0,1,1) \\
\ddagger_7 &\longleftrightarrow (1,1,1).
\end{aligned}$$

On remarque alors qu'elle nous permet d'obtenir la table du couple  $(\ddagger, \circ)$  à partir de la table du groupe  $(\mathbb{Z}_2^3, +_2)$ , c'est-à-dire que  $(\ddagger, \circ) \cong (\mathbb{Z}_2^3, +_2)$  et donc  $(\ddagger, \circ)$  est un groupe commutatif.  $\square$

**Proposition 3.8** *Les sept couples suivants :*

$$\begin{aligned}
&(\{\ddagger_0, \ddagger_1, \ddagger_2, \ddagger_5\}, \circ), \quad (\{\ddagger_0, \ddagger_1, \ddagger_3, \ddagger_6\}, \circ), \quad (\{\ddagger_0, \ddagger_1, \ddagger_4, \ddagger_7\}, \circ), \quad (\{\ddagger_0, \ddagger_2, \ddagger_6, \ddagger_7\}, \circ), \\
&(\{\ddagger_0, \ddagger_2, \ddagger_3, \ddagger_4\}, \circ), \quad (\{\ddagger_0, \ddagger_3, \ddagger_5, \ddagger_7\}, \circ) \quad \text{et} \quad (\{\ddagger_0, \ddagger_4, \ddagger_5, \ddagger_6\}, \circ)
\end{aligned}$$

sont tous des sous-groupes de cardinalité 4 du groupe  $(\ddagger, \circ)$  et sont tous isomorphes au groupe  $(\ddagger, \circ)$ .

**Preuve :**

L'écriture et la comparaison des différentes tables de Cayley suffit à nous convaincre du résultat.  $\square$

Si on exclu les conjugués identités, on a vu qu'il existe trois différentes formes de conjugaison pour les nombres bicomplexes et qu'il en existe sept pour les nombres tricomplexes. La proposition suivante nous indique combien il y en a dans le cas des nombres multicomplexes d'ordre  $n$ .

**Proposition 3.9** *Il existe  $2^n - 1$  manières de conjuguer les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ . Soit  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(n)$ , alors les conjugués multicomplexes sont tels que*

$$\text{i) } (\zeta_1 \pm \zeta_2)^{\dagger_{n,i}} = \zeta_1^{\dagger_{n,i}} \pm \zeta_2^{\dagger_{n,i}},$$

$$\text{ii) } (\zeta_1^{\dagger_{n,i}})^{\dagger_{n,i}} = \zeta_1,$$

$$\text{iii) } (\zeta_1 \cdot \zeta_2)^{\dagger_{n,i}} = \zeta_1^{\dagger_{n,i}} \cdot \zeta_2^{\dagger_{n,i}},$$

pour  $i = 1, \dots, 2^n - 1$ .

**Remarque :** Le symbole  $\dagger_{n,i}$  signifie le  $i$ ème conjugué d'ordre  $n$ . L'ensemble des conjugués d'ordre  $n$  sera désigné par  $\dagger_n$ . Lorsqu'aucune distinction sur le conjugué n'est nécessaire et lorsqu'il n'y a pas matière à confusion, on utilisera également  $\dagger_n$  pour désigner un conjugué quelconque d'ordre  $n$ .

**Preuve :**

Effectuons la preuve par induction. Pour  $n = 1$ , alors  $\zeta \in \mathbb{M}(1) = \mathbb{C}$  et il existe une seule forme de conjugaison dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire  $2^1 - 1 = 1$ . De plus, le conjugué complexe possède les propriétés (i), (ii) et (iii). Supposons que pour  $\zeta \in \mathbb{M}(k)$ , il existe  $2^k - 1$  façons de conjuguer  $\zeta$ . Soit  $\zeta \in \mathbb{M}(k+1)$ . Alors  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{k+1}$ ,  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(k)$ . On peut donc conjuguer  $\zeta$  de trois façons :

$$\text{a) } \zeta^{\dagger_{k+1,a}} = \zeta_1^{\dagger_k} + \zeta_2^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1},$$

$$\text{b) } \zeta^{\dagger_{k+1,b}} = \zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{k+1},$$

$$\text{c) } \zeta^{\dagger_{k+1,c}} = \zeta_1^{\dagger_k} - \zeta_2^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1},$$

où  $\dagger_k$  est un conjugué dans  $\mathbb{M}(k)$ . Il y a donc  $2^k - 1$  conjugués multicomplexes d'ordre  $k+1$  qui correspondent à **a**),  $2^k - 1$  conjugués qui correspondent à **c**) et un conjugué qui correspond à **b**) pour un total de  $2^{k+1} - 1$  conjugués. On a donc montré que le nombre de conjugués possibles pour les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  est  $2^n - 1$ . Montrons maintenant les propriétés (i), (ii) et (iii). Supposons que les  $2^k - 1$  conjugués d'ordre  $k$  possèdent les propriétés (i), (ii) et (iii). Soit  $\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12} \mathbf{i}_{k+1}$ ,  $\zeta_2 = \zeta_{21} + \zeta_{22} \mathbf{i}_{k+1} \in \mathbb{M}(k+1)$ .

$$\text{i) On a } (\zeta_1 \pm \zeta_2)^{\dagger_{k+1,i}} = (\zeta_{11} + \zeta_{12} \mathbf{i}_{k+1} \pm (\zeta_{21} + \zeta_{22} \mathbf{i}_{k+1}))^{\dagger_{k+1,i}} = ((\zeta_{11} \pm \zeta_{21}) + (\zeta_{12} \pm \zeta_{22}) \mathbf{i}_{k+1})^{\dagger_{k+1,i}} = (\zeta_{11} \pm \zeta_{21})^{\dagger_k} - (\zeta_{12} \pm \zeta_{22})^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1} \text{ (sans perte de généralité). On a donc, par hypothèse, } (\zeta_{11} \pm \zeta_{21})^{\dagger_k} - (\zeta_{12} \pm \zeta_{22})^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1} = (\zeta_{11}^{\dagger_k} \pm \zeta_{21}^{\dagger_k}) - (\zeta_{12}^{\dagger_k} \pm \zeta_{22}^{\dagger_k}) \mathbf{i}_{k+1} = \zeta_1^{\dagger_{k+1,i}} \pm \zeta_2^{\dagger_{k+1,i}}.$$

$$\text{ii) On a } (\zeta_1^{\dagger_{k+1,i}})^{\dagger_{k+1,i}} = ((\zeta_{11} + \zeta_{12} \mathbf{i}_{k+1})^{\dagger_{k+1,i}})^{\dagger_{k+1,i}} = (\zeta_{11}^{\dagger_k})^{\dagger_k} + (\zeta_{12}^{\dagger_k})^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1} \text{ (sans perte de généralité) et ainsi, par hypothèse, on a } (\zeta_1^{\dagger_{k+1,i}})^{\dagger_{k+1,i}} = \zeta_1.$$

$$\text{iii) On a } (\zeta_1 \cdot \zeta_2)^{\dagger_{k+1,i}} = ((\zeta_{11} + \zeta_{12} \mathbf{i}_{k+1}) \cdot (\zeta_{21} + \zeta_{22} \mathbf{i}_{k+1}))^{\dagger_{k+1,i}} = (((\zeta_{11} \cdot \zeta_{21}) - (\zeta_{12} \cdot \zeta_{22})) + ((\zeta_{11} \cdot \zeta_{22}) + (\zeta_{12} \cdot \zeta_{21})) \mathbf{i}_{k+1})^{\dagger_{k+1,i}} = (((\zeta_{11} \cdot \zeta_{21}) - (\zeta_{12} \cdot \zeta_{22}))^{\dagger_k} - ((\zeta_{11} \cdot \zeta_{22}) + (\zeta_{12} \cdot \zeta_{21}))^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1}) \text{ (sans perte de généralité). Aussi, par hypothèse, on a } ((\zeta_{11} \cdot \zeta_{21}) - (\zeta_{12} \cdot \zeta_{22}))^{\dagger_k} - ((\zeta_{11} \cdot \zeta_{22}) + (\zeta_{12} \cdot \zeta_{21}))^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1} = (\zeta_{11}^{\dagger_k} \cdot \zeta_{21}^{\dagger_k} - \zeta_{12}^{\dagger_k} \cdot \zeta_{22}^{\dagger_k}) - (\zeta_{11}^{\dagger_k} \cdot \zeta_{22}^{\dagger_k} + \zeta_{12}^{\dagger_k} \cdot \zeta_{21}^{\dagger_k}) \mathbf{i}_{k+1} = (\zeta_{11}^{\dagger_k} - \zeta_{12}^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1}) \cdot (\zeta_{21}^{\dagger_k} - \zeta_{22}^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1}) = \zeta_1^{\dagger_{k+1,i}} \cdot \zeta_2^{\dagger_{k+1,i}}.$$

Ainsi, les propriétés (i), (ii) et (iii) sont vérifiées pour tous les conjugués multicomplexes et pour tout  $n$ .  $\square$

**Remarque :** Lorsque l'on ajoute le conjugué identité, on se retrouve avec  $2^n$  façons de conjuguer un nombre multicomplexe d'ordre  $n$ .

Tout comme pour les nombres bicomplexes et tricomplexes, l'ensemble des conjugués multicomplexes avec la composition forme un groupe commutatif.

**Proposition 3.10** Soit  $\dagger_n$ , l'ensemble des conjugués pour les nombres multicomplexes

d'ordre  $n$ . Alors le couple  $(\dagger_n, \circ)$  forme un groupe commutatif de cardinalité  $2^n$  isomorphe au groupe  $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$ .

**Preuve :**

Tout d'abord, la proposition précédente nous assure que la cardinalité est  $2^n$ . Trouvons maintenant un isomorphisme entre  $(\dagger_n, \circ)$  et  $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$ . Allons-y par induction. Soit  $n = 1$  et considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \dagger &\xleftrightarrow{f_1} \mathbb{Z}_2 \\ \dagger_0 &\longleftrightarrow 0 \\ \dagger_1 &\longleftrightarrow 1. \end{aligned}$$

Clairement, il s'agit d'un isomorphisme c'est-à-dire que  $(\dagger, \circ) \cong (\mathbb{Z}_2, +_2)$ . Supposons maintenant que  $(\dagger_k, \circ) \cong (\mathbb{Z}_2^k, +_2)$ . Cette hypothèse nous indique qu'il existe un isomorphisme entre les deux couples. Soit  $f_k$ , cet isomorphisme :

$$\begin{aligned} \dagger_k &\xleftrightarrow{f_k} \mathbb{Z}_2^k \\ \dagger_0 &\longleftrightarrow \mathbf{v}_0 \\ \dagger_1 &\longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \\ &\vdots \\ \dagger_{2^k-1} &\longleftrightarrow \mathbf{v}_{2^k-1} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2^k-1}$  représentent les différents vecteurs de dimension  $k$  de l'ensemble  $\mathbb{Z}_2^k$ . Allons maintenant voir ce qui se passe lorsque  $n = k+1$ . Soit  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{k+1} \in \mathbb{M}(k+1)$ . Alors, on peut conjuguer  $\zeta$  de 2 façons :

$$\begin{aligned} \zeta^{\dagger_{k+1}, a} &= \zeta_1^{\dagger_k} + \zeta_2^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1}, \\ \zeta^{\dagger_{k+1}, b} &= \zeta_1^{\dagger_k} - \zeta_2^{\dagger_k} \mathbf{i}_{k+1}, \end{aligned}$$

où  $\dagger_k$  représente un des  $2^k$  conjugués multicomplexes d'ordre  $k$ . Ainsi, on remarque que pour chaque conjugué dans  $\mathbb{M}(k)$ , on peut construire deux nouveaux conjugués dans

$\mathbb{M}(k+1)$ . Ainsi, lorsque le conjugué dans  $\mathbb{M}(k+1)$  fait intervenir un moins (c'est le cas du conjugué  $\dagger_{k+1,b}$ ), le dernier élément du vecteur de  $\mathbb{Z}_2^{k+1}$  sera un 1 et dans le cas contraire (pour le conjugué  $\dagger_{k+1,a}$ ) ce sera un 0. Les  $k$  premiers éléments du vecteur de  $\mathbb{Z}_2^{k+1}$  sont les éléments du vecteur de  $\mathbb{Z}_2^k$  associé au conjugué de  $\mathbb{M}(k)$ . De cette façon, on construit un isomorphisme  $f_{k+1}$  entre le couple  $(\dagger_{k+1}, \circ)$  et le groupe  $(\mathbb{Z}_2^{k+1}, +_2)$  et donc on a montré par induction que  $(\dagger_n, \circ)$  forme un groupe commutatif isomorphe à  $(\mathbb{Z}_2^n, +_2)$ .  $\square$

Regardons plus en détail l'isomorphisme  $f_{k+1}$  que l'on explique dans la preuve. Considérons  $\dagger_{k,1}, \dagger_{k,2}, \dagger_{k,3}, \dots \in \dagger_k$  et  $f_k$ , l'isomorphisme entre  $(\dagger_k, \circ)$  et  $(\mathbb{Z}_2^k, +_2)$  :

$$\begin{aligned} \dagger_k &\xleftrightarrow{f_k} \mathbb{Z}_2^k \\ \dagger_{k,1} &\longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \\ \dagger_{k,2} &\longleftrightarrow \mathbf{v}_2 \\ &\vdots \\ \dagger_{k,2^k-1} &\longleftrightarrow \mathbf{v}_{2^k-1}. \end{aligned}$$

Supposons (sans perte de généralité) que  $\dagger_{k,1}, \dagger_{k,2}$  et  $\dagger_{k,3}$  soient tels que

$$\dagger_{k,1} \circ \dagger_{k,2} = \dagger_{k,2} \circ \dagger_{k,1} = \dagger_{k,3}$$

(c'est-à-dire qu'on a  $(\zeta^{\dagger_{k,1}})^{\dagger_{k,2}} = (\zeta^{\dagger_{k,2}})^{\dagger_{k,1}} = \zeta^{\dagger_{k,3}}$  pour  $\zeta \in \mathbb{M}(k)$ ). On utilisera tout de même la notation qui utilise le symbole de composition pour des fins de clarté). Alors, puisque  $f_k$  est un isomorphisme, on a que

$$f_k(\dagger_{k,3}) = f_k(\dagger_{k,1} \circ \dagger_{k,2}) = f_k(\dagger_{k,1}) +_2 f_k(\dagger_{k,2}) = \mathbf{v}_1 +_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3.$$

Posons  $\eta = \zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{k+1} \in \mathbb{M}(k+1)$ ,  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{M}(k)$ . Alors, les six conjugués dans  $\mathbb{M}(k+1)$  associés aux trois conjugués dans  $\mathbb{M}(k)$  sont

$$\begin{aligned} \eta^{\dagger_{k+1,1}} &= \zeta_1^{\dagger_{k,1}} + \zeta_2^{\dagger_{k,1}} \mathbf{i}_{k+1}, & \eta^{\dagger_{k+1,2}} &= \zeta_1^{\dagger_{k,1}} - \zeta_2^{\dagger_{k,1}} \mathbf{i}_{k+1}, \\ \eta^{\dagger_{k+1,3}} &= \zeta_1^{\dagger_{k,2}} + \zeta_2^{\dagger_{k,2}} \mathbf{i}_{k+1}, & \eta^{\dagger_{k+1,4}} &= \zeta_1^{\dagger_{k,2}} - \zeta_2^{\dagger_{k,2}} \mathbf{i}_{k+1}, \\ \eta^{\dagger_{k+1,5}} &= \zeta_1^{\dagger_{k,3}} + \zeta_2^{\dagger_{k,3}} \mathbf{i}_{k+1}, & \eta^{\dagger_{k+1,6}} &= \zeta_1^{\dagger_{k,3}} - \zeta_2^{\dagger_{k,3}} \mathbf{i}_{k+1}, \end{aligned}$$

et on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\dagger_{k+1,1} \circ \dagger_{k+1,3} &= \dagger_{k+1,3} \circ \dagger_{k+1,1} = \dagger_{k+1,5}, \\
\dagger_{k+1,1} \circ \dagger_{k+1,4} &= \dagger_{k+1,4} \circ \dagger_{k+1,1} = \dagger_{k+1,6}, \\
\dagger_{k+1,2} \circ \dagger_{k+1,3} &= \dagger_{k+1,3} \circ \dagger_{k+1,2} = \dagger_{k+1,6}, \\
\dagger_{k+1,2} \circ \dagger_{k+1,4} &= \dagger_{k+1,4} \circ \dagger_{k+1,2} = \dagger_{k+1,5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme expliqué dans la preuve, on prend les vecteurs de  $\mathbb{Z}_2^k$  associés aux différents conjugués multicomplexes d'ordre  $k$  et on leur associe un « zéro » s'ils font intervenir un « plus » et un « un » s'ils font intervenir un « moins ». L'isomorphisme  $f_{k+1}$  entre le couple  $(\dagger_{k+1}, \circ)$  et le groupe  $(\mathbb{Z}_2^{k+1}, +_2)$  possède donc, entre autre, les associations suivantes :

$$\begin{aligned}
\dagger_{k+1,1} &\longleftrightarrow (\mathbf{v}_1, 0), \\
\dagger_{k+1,2} &\longleftrightarrow (\mathbf{v}_1, 1), \\
\dagger_{k+1,3} &\longleftrightarrow (\mathbf{v}_2, 0), \\
\dagger_{k+1,4} &\longleftrightarrow (\mathbf{v}_2, 1), \\
\dagger_{k+1,5} &\longleftrightarrow (\mathbf{v}_3, 0), \\
\dagger_{k+1,6} &\longleftrightarrow (\mathbf{v}_3, 1).
\end{aligned}$$

Vérifions donc que la propriété des isomorphismes est respectée. Par exemple,

$$f_{k+1}(\dagger_{k+1,1} \circ \dagger_{k+1,3}) = f_{k+1}(\dagger_{k+1,5}) = (\mathbf{v}_3, 0) = (\mathbf{v}_1 +_2 \mathbf{v}_2, 0),$$

comme on a vu plus tôt. De plus,  $(\mathbf{v}_1 +_2 \mathbf{v}_2, 0) = (\mathbf{v}_1, 0) +_2 (\mathbf{v}_2, 0) = f_{k+1}(\dagger_{k+1,1}) +_2 f_{k+1}(\dagger_{k+1,3})$ . De la même façon, on trouve que  $f_{k+1}(\dagger_{k+1,2} \circ \dagger_{k+1,3}) = f_{k+1}(\dagger_{k+1,6}) = (\mathbf{v}_3, 1) = (\mathbf{v}_1 +_2 \mathbf{v}_2, 1) = (\mathbf{v}_1, 1) +_2 (\mathbf{v}_2, 0) = f_{k+1}(\dagger_{k+1,2}) +_2 f_{k+1}(\dagger_{k+1,3})$ . Ainsi, dans cet exemple, on remarque que l'isomorphisme  $f_{k+1}$  respecte la propriété des isomorphismes et donc qu'il a été construit de la bonne façon.

Les différents conjugués multicomplexes sont d'un certain intérêt d'un point de vue théorique. Cependant, leurs utilisations restent nébuleuses. Surtout lorsqu'on considère

les conjugués multicomplexes d'ordres supérieurs à trois où l'on n'a pas pris la peine de les décrire formellement. On sait cependant combien il y en a et la structure qui régit leurs relations. On traitera dans la prochaine section des nombres multicomplexes inverses. On verra, entre autre, que les différents conjugués multicomplexes permettent de calculer ces inverses.

### 3.4 Nombres multicomplexes non inversibles

Un avantage de la structure des nombres multicomplexes est qu'il s'agit d'une structure de nombres commutative sous la multiplication. C'est une propriété souvent absente dans le cadre général des nombres hypercomplexes. Un inconvénient de cette structure de nombres est qu'il y a des diviseurs de zéro, c'est-à-dire des éléments qui ne possèdent pas d'inverse multiplicatif. C'est l'objet de cette section. L'on aurait pu élaborer davantage sur le sujet, mais on tenait seulement à présenter le concept et les propriétés les plus importantes puisqu'il s'agit d'un sujet qu'on ne pouvait omettre de traiter. Rochon [20] de même que Price [16] fournissent plus de détails sur les éléments non inversibles des nombres multicomplexes.

On dit qu'un nombre multicomplexe  $\zeta \in \mathbb{M}(n)$  est **inversible** ou encore **non singulier** s'il existe un unique nombre multicomplexe  $\eta \in \mathbb{M}(n)$  tel que  $\zeta \cdot \eta = 1$ . Le nombre  $\eta$  est appelé **inverse multiplicatif**, ou simplement inverse, du nombre multicomplexe  $\zeta$ .

L'ensemble des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  inversibles est donc

$$\mathbb{M}(n)^{-1} := \{\zeta \in \mathbb{M}(n) \mid \exists! \eta \in \mathbb{M}(n), \zeta \cdot \eta = 1\}. \quad (3.22)$$

Ainsi, l'ensemble des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  non inversibles est  $\mathcal{NC}_n := \mathcal{O}_n := (\mathbb{M}(n)^{-1})^c = \{\zeta \in \mathbb{M}(n) \mid \zeta \cdot \eta \neq 1, \forall \eta \in \mathbb{M}(n)\}$ . La représentation idempotente nous aidera à caractériser les éléments non inversibles.

**Théorème 3.11** *Soit  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n \in \mathbb{M}(n)$ ,  $n \geq 2$ . Le nombre multicomplexe  $\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_n \in \mathbb{M}(n)$  est l'inverse du nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n$  si et seulement si  $\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  est l'inverse de  $\zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  et  $\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  est l'inverse de  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1}$ .*

En d'autres mots, deux nombres multicomplexes d'ordre  $n$  mutuellement inverses nous assurent que les nombres multicomplexes d'ordre  $n - 1$  obtenus à l'aide de la représentation idempotente sont également des inverses. Inversement, si on sait que les nombres multicomplexes d'ordre  $n - 1$  obtenus à l'aide de la représentation idempotente sont des inverses, alors les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  de départ sont également des inverses. On a donc un excellent critère pour déterminer si un nombre est inversible.

**Corollaire 3.12** *Le nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n \in \mathbb{M}(n)$ ,  $n \geq 2$  est inversible si et seulement si  $\zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  et  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  sont inversibles. Le nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n$  est non inversible s'il y a au moins un des deux nombres  $\zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  et  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1}$  qui est non inversible.*

De manière plus générale, on obtient le critère suivant :

**Corollaire 3.13** *Considérons le nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n \in \mathbb{M}(n)$ ,  $n \geq 2$  et sa représentation idempotente d'ordre  $k$ , c'est-à-dire qu'on a  $2^k$  coefficients multicomplexes d'ordre  $n - k$  des éléments idempotents de l'ensemble  $S_k$  (3.17). Alors, le nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n$  est inversible si et seulement si les  $2^k$  coefficients sont aussi inversibles. Le nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n$  est non inversible s'il y a au moins un des  $2^k$  coefficients qui est non inversible.*

Ainsi, si on pose  $k = n - 1$ , on a une représentation idempotente du nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n$  à l'aide de coefficients complexes (dans  $\mathbb{M}(1)$ ). Or, le seul nombre complexe qui n'est pas inversible est 0 et donc le nombre  $\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_n$  sera inversible si et seulement si chacun des coefficients complexes des éléments idempotents de l'ensemble  $S_{n-1}$  sont non nuls. Illustrons ceci à l'aide d'un exemple.

**Exemple 3.1** *Soit le nombre tricomplexe suivant :  $\zeta := 1 + \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_4 + \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3$ , que l'on peut réécrire de la manière suivante :  $\zeta = (1 + \mathbf{i}_1) + (1 + \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 + (1 + \mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 + (-1 - \mathbf{i}_1)\mathbf{j}_3$  (c'est-à-dire sous la forme (3.5)). On peut donc calculer les coefficients des*

éléments idempotents (3.13) et on obtient, sous la représentation idempotente (3.14), la réécriture  $\zeta = (4 + 4\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2$ , c'est-à-dire qu'on a trois coefficients qui sont nuls et donc ce nombre tricomplexe n'est pas inversible.

Remarquons également que  $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}_1 \subset \dots \subset \mathcal{O}_n \subset \dots$ , c'est-à-dire que les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  qui ne sont pas inversibles ne sont pas plus inversibles lorsqu'on les considère dans le cadre des nombres multicomplexes d'ordre  $m \geq n$ , ce qui est conforme à ce qu'on attendait.

Des derniers résultats, on peut déduire un autre critère pour les nombres bicomplexes.

**Corollaire 3.14** *Soit  $w = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 \in \mathbb{M}(2)$ . Alors,  $w$  est non inversible si et seulement si  $(x_1 = x_4 \text{ et } x_2 = -x_3)$  ou  $(x_1 = -x_4 \text{ et } x_2 = x_3)$ .*

Finalement, les conjugués multicomplexes nous permettent de calculer les nombres multicomplexes inverses et nous fournissent donc également un critère pour vérifier qu'un nombre est inversible. En effet, soit  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2\mathbf{i}_n$  un nombre multicomplexe d'ordre  $n$  et considérons, par exemple, le conjugué  $\zeta^\dagger = \zeta_1 - \zeta_2\mathbf{i}_n$ . Ainsi, le nombre  $\zeta^\dagger/(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$  est l'inverse du nombre  $\zeta$  et il existe si et seulement si  $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$ . Le conjugué qu'on a utilisé ici est probablement la manière la plus simple de vérifier qu'un nombre multicomplexe est inversible. Remarquons qu'il est également possible de calculer l'inverse, et donc de trouver un critère d'inversion, à l'aide de chacun des conjugués multicomplexes.

### 3.5 Les nombres multicomplexes comme une sous-algèbre d'une algèbre de Clifford

Afin de faire un lien avec une théorie bien connue, nous allons présenter les nombres multicomplexes comme une sous-algèbre d'une algèbre de Clifford réelle. Commençons tout d'abord par donner quelques notions préliminaires sur les algèbres de Clifford [23].

Tout d'abord, considérons  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , la base canonique de l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^n$  et  $Cl_{0,n}$  l'algèbre de Clifford réelle correspondante. Les unités  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

sont anticommutatives et ont un carré de moins un :

$$e_i e_j := \begin{cases} -e_j e_i & \text{si } i \neq j, \\ -1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.23)$$

Une base de  $Cl_{0,n}$  est donnée par l'ensemble  $\{e_A \mid A \subseteq \{1, \dots, n\}\}$  avec  $e_A = e_{l_1} e_{l_2} \cdots e_{l_r}$  où  $1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n$  et où  $e_\emptyset = 1$ . La base de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,n}$  possède donc  $2^n$  éléments. Regardons de plus près l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,4}$ . Sa base est formée par les différents produits ordonnés des unités  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ . Les éléments imaginaires  $e_i$  possèdent les propriétés mentionnées plus haut. Définissons les unités imaginaires suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &:= e_1 e_2, \\ \mathbf{i}_2 &:= e_3 e_4, \\ \mathbf{j}_1 &:= e_1 e_2 e_3 e_4. \end{aligned}$$

Ainsi, la base  $\{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1\}$  est un sous-ensemble de la base de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,4}$ . De plus, étant donné les propriétés des éléments imaginaires  $e_i$  (3.23), on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1^2 = -1; \quad \mathbf{i}_2^2 = -1; \quad \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 = \mathbf{j}_1; \\ \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \mathbf{j}_1 = -\mathbf{i}_2; \quad \mathbf{j}_1 \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2 \mathbf{j}_1 = -\mathbf{i}_1; \quad \mathbf{j}_1^2 = 1; \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on retrouve la même règle de multiplication que pour les unités imaginaires bicomplexes. Ainsi, la sous-algèbre de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,4}$  ayant comme base  $\{1, e_1 e_2, e_3 e_4, e_1 e_2 e_3 e_4\}$  est isomorphe à la structure des nombres bicomplexes. Les nombres bicomplexes sont donc une sous-algèbre de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,4}$ .

Afin de montrer que les nombres tricomplexes sont également une sous-algèbre d'une algèbre de Clifford réelle, considérons l'algèbre de Clifford  $Cl_{0,6}$ . Les unités imaginaires de cette structure de nombres sont obtenues des combinaisons des éléments de  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , où les éléments imaginaires  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , possèdent les propriétés

mentionnées plus haut (3.23). Définissons les unités imaginaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}_1 &:= e_1 e_2, \\
\mathbf{i}_2 &:= e_3 e_4, \\
\mathbf{i}_3 &:= e_5 e_6, \\
\mathbf{j}_1 &:= e_1 e_2 e_3 e_4, \\
\mathbf{j}_2 &:= e_1 e_2 e_5 e_6, \\
\mathbf{j}_3 &:= e_3 e_4 e_5 e_6, \\
\mathbf{i}_4 &:= e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Ainsi, la base  $\{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{i}_4\}$  forme un sous-ensemble de la base de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,6}$ . De plus, en multipliant les éléments 3.24, les propriétés 3.23 nous permettent de retrouver le tableau 3.2, c'est-à-dire que les éléments de cette base possèdent toutes les caractéristiques des unités imaginaires tricomplexes. Ainsi, les nombres tricomplexes sont une sous-algèbre de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,6}$ .

Dans le cas le plus général, les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  sont en fait une sous-algèbre de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,2n}$ .

**Proposition 3.15** *La structure des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  est une sous-algèbre de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,2n}$ .*

**Preuve :**

Pour démontrer la proposition, regardons tout d'abord l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,2n}$ . Les unités imaginaires de cette structure de nombres sont obtenues des combinaisons des éléments de  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ , où les éléments imaginaires  $e_i$  possèdent les propriétés 3.23. Exprimons maintenant les  $n$  unités imaginaires simples des nombres multicomplexes d'ordre  $n$  à l'aide des  $2n$  unités imaginaires  $e_i$  :

$$\mathbf{i}_1 := e_1 e_2, \quad \mathbf{i}_2 := e_3 e_4, \quad \dots \quad \mathbf{i}_n := e_{2n-1} e_{2n}.$$

Comme on a expliqué dans la section 3.1, les autres unités imaginaires multicomplexes (non simples) sont le résultat du produit de deux ou plus unités imaginaires simples. On construit donc les unités  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \dots, \mathbf{i}_{n+1}, \mathbf{i}_{n+2}, \dots$  à partir des éléments de  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$  de la même manière que pour les nombres multicomplexes.

Par exemple, on a défini  $\mathbf{i}_3 := e_5e_6$  et  $\mathbf{i}_4 := e_7e_8$ , et donc l'unité imaginaire définie par le produit de ces deux unités imaginaires simples est  $\mathbf{i}_3\mathbf{i}_4 := e_5e_6e_7e_8$ . Ainsi, il est évident, de par la manière dont nous avons construit nos éléments imaginaires, que la base  $\{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n, \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3, \dots\}$  forme un sous-ensemble de la base de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,2n}$ . De plus, on a seulement besoin de vérifier les propriétés des unités imaginaires simples puisque toutes les autres sont définies exactement de la même façon que pour les nombres multicomplexes.

Regardons donc les propriétés de ces unités imaginaires simples. Premièrement, on remarque que pour tout produit de deux éléments distincts  $e_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ , la commutativité est présente. En effet, par anticommutativité, on a  $(e_ie_j)(e_ke_l) = -(e_ie_ke_je_l) = -(e_ke_ie_je_l) = (e_ke_l)(e_ie_j)$ , avec  $i \neq j, k \neq l, i \neq l$  et  $j \neq k$ . Ainsi, tous les produits d'éléments imaginaires simples sont commutatifs et donc tous les produits d'unités imaginaires multicomplexes le sont aussi.

Il ne nous reste plus qu'à prouver que le carré des unités imaginaires simples est bel et bien -1. Soit  $\mathbf{i}_k := e_ie_j, i \neq j$ , alors  $\mathbf{i}_k^2 = (e_ie_j)(e_ie_j) = -(e_ie_ie_je_j) = -e_i^2e_j^2 = -1$ . Ainsi, les éléments imaginaires qu'on a défini comme étant le produit de deux éléments  $e_i, i = 1, 2, \dots, 2n$ , ont les mêmes propriétés que les éléments imaginaires simples des nombres multicomplexes et donc tous les éléments imaginaires définis ont les mêmes caractéristiques que les éléments imaginaires des nombres multicomplexes d'ordre  $n$ . Ainsi, les nombres multicomplexes d'ordre  $n$  sont une sous-algèbre de l'algèbre de Clifford réelle  $Cl_{0,2n}$ .  $\square$

Ce résultat nous permet de situer les nombres multicomplexes dans le cadre bien connu des algèbres de Clifford.

Les précédentes sections ont présenté les propriétés importantes et pertinentes, à notre point de vue, de la structure des nombres multicomplexes. La dernière section, quant à elle, portera sur certains sous-espaces des nombres tricomplexes. Ces sous-espaces seront utiles lorsque viendra le temps de traiter les coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot généralisé dans le chapitre suivant.

### 3.6 Sous-espaces des nombres tricomplexes

Avant de généraliser l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis à la structure des nombres multicomplexes, nous allons traiter certains sous-espaces de l'espace des nombres tricomplexes. Les notions de cette section serviront exclusivement à la section 4.4 de ce mémoire qui portera sur les coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot généralisé.

Considérons l'ensemble des nombres tricomplexes représenté à l'aide de huit coefficients réels (3.6).

**Définition 3.4** *On définit l'espace  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  comme étant l'ensemble des nombres tricomplexes utilisant seulement les unités imaginaires  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ , c'est-à-dire*

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) := \{w = x_1 + x_2\mathbf{i}_k + x_3\mathbf{i}_l + x_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Par exemple, posons  $\mathbf{i}_k = \mathbf{i}_2$  et  $\mathbf{i}_l = \mathbf{j}_2$ . On obtient alors l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &:= \{w = x_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{j}_2 + x_4\mathbf{i}_2\mathbf{j}_2 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{w = x_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{j}_2 + x_4\mathbf{i}_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

qui est un ensemble fermé sous l'addition et la multiplication. En fait, tous les ensembles  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  sont fermés sous l'addition et la multiplication. Le tableau 3.2 nous permet de nous convaincre de la fermeture sous la multiplication.

Aussi, tous les ensembles  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  sont isomorphes à l'ensemble des nombres bicomplexes  $\mathbb{M}(2)$ , excepté les trois ensembles suivants  $\mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ ,  $\mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$ ,  $\mathbb{M}(\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ .

**Proposition 3.16** *Considérons l'ensemble  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ , qui est tel que  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$  et  $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\} \setminus \{\mathbf{i}_k\}$ . Alors  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) \cong \mathbb{M}(2)$ .*

**Preuve :**

On a  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ ,  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ ,  $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\} \setminus \{\mathbf{i}_k\}$ . On distingue deux cas :  $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\} \setminus \{\mathbf{i}_k\}$  ou  $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ . Dans le premier cas, on a, sans perte de généralité, l'ensemble  $\{w = x_1 + x_2\mathbf{i}_3 + x_3\mathbf{i}_4 + x_4\mathbf{j}_1 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ , qui est clairement isomorphe aux nombres bicomplexes  $\mathbb{M}(2) = \{x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ . Dans le deuxième cas, on a, sans perte de généralité, l'ensemble  $\{w = x_1 + x_2\mathbf{i}_3 + x_3\mathbf{j}_1 + x_4\mathbf{i}_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ , qui est également isomorphe aux nombres bicomplexes.  $\square$

**Remarque :**  $\mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \{w = x_1 + x_2\mathbf{j}_1 + x_3\mathbf{j}_2 + x_4\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \{w = x_1 + x_2\mathbf{j}_1 + x_3\mathbf{j}_2 - x_4\mathbf{j}_3 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{M}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) = \mathbb{M}(\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . On nommera donc ces ensembles l'ensemble des **nombre biduplexes** que l'on notera  $\mathbb{D}(2)$ .

Les sous-espaces qu'on vient de définir sont de dimension quatre. On aura également besoin de sous-espace de dimension trois.

**Définition 3.5** *Soit  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ ,  $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_m$  et  $\mathbf{i}_l \neq \mathbf{i}_m$ . On définit l'ensemble  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  comme étant l'ensemble des nombres tricomplexes formés par trois coefficients réels des unités  $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$  et  $\mathbf{i}_m$ , c'est-à-dire*

$$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) := \{x_1\mathbf{i}_k + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Remarquons que contrairement aux ensembles  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ , les ensembles  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  permettent la possibilité que l'une des unités imaginaires  $\mathbf{i}_k$ ,  $\mathbf{i}_l$  ou  $\mathbf{i}_m$  soit égale à un. De plus, contrairement aux ensembles  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ , les ensembles  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  ne sont pas fermés sous la multiplication. On remarque que  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \subset \mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$  si et seulement si  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l = \pm \mathbf{i}_m$  ou  $\mathbf{i}_\alpha = 1$ ,  $\alpha \in \{k, l, m\}$ . Cette inclusion signifie donc que la multiplication de nombres dans  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  demeurera toujours dans  $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ . Lorsque l'inclusion n'est pas vérifiée, c'est-à-dire que  $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \neq \pm \mathbf{i}_m$  et qu'aucune des unités  $\mathbf{i}_k$ ,  $\mathbf{i}_l$  ou  $\mathbf{i}_m$  n'est un, alors la multiplication d'éléments de  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  est dans  $\mathbb{M}(3)$ .

Pour le moment, ces ensembles semblent peu intéressants, mais ils seront utiles dans le prochain chapitre lorsque viendra le temps de parler des coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. On est fin prêt à généraliser certains résultats du premier chapitre aux nombres multicomplexes.

## Chapitre 4

# Dynamique multicomplexe : Ensembles de Mandelbrot, de Julia remplis et théorème de Fatou-Julia

Dans ce chapitre, à l'aide de la structure des nombres multicomplexes vue dans le chapitre précédent, on généralisera les ensembles de Mandelbrot et de Julia remplis vus dans le chapitre 1. On va tout d'abord rappeler la généralisation faite par Rochon [18] pour les nombres bicomplexes. Ensuite, on poursuivra le travail en généralisant ces ensembles aux nombres tricomplexes, puis dans le cas le plus général, aux nombres multicomplexes d'ordre  $n$ .

Le plus important résultat de ce chapitre, théorème central de ce mémoire, est le théorème de Fatou-Julia généralisé aux nombres tricomplexes. Ce théorème associe à chaque point de l'espace multicomplexe un « degré de connexité » pour l'ensemble de Julia rempli multicomplexe qui lui est associé. Ce « degré de connexité » déterminera si le point appartient à l'ensemble de Mandelbrot généralisé ou non. Bien que moins intéressant, on présentera également la version la plus générale du théorème de Fatou-Julia, celle pour les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ .

Finalement, afin de visualiser l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres tricomplexes, qui est en fait de dimension huit, on caractérisera les coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot généralisé. Certaines (trois) de ces coupes

tridimensionnelles ont déjà été traitées par Rochon [19] dans le cas des nombres bicomplexes. On verra qu'il existe en fait huit coupes fondamentales distinctes et qu'il est inutile de traiter le cas des nombres multicomplexes d'ordre supérieur puisqu'aucune nouvelle coupe tridimensionnelle ne pourrait être découverte.

## 4.1 Ensemble de Mandelbrot généralisé

Avant de généraliser l'ensemble de Mandelbrot aux nombres multicomplexes, donnons la définition de bassin d'attraction à l'infini dans  $\mathbb{M}(n)$  puisqu'il s'agit d'un ensemble qui sera utile tout au long de ce chapitre.

**Définition 4.1** *Le bassin d'attraction à l'infini de  $P_c$  est défini de la manière suivante :*

$$A_{n,c}(\infty) := \{\zeta \in \mathbb{M}(n) \mid \{P_c^m(\zeta)\} \rightarrow \infty\}.$$

De plus, on définit de manière inductive l'ensemble

$$SA_{n,c}(\infty) := SA_{n-1,c_1-c_2\mathbf{i}_{n-1}}(\infty) \times_{\gamma_{n-1}} SA_{n-1,c_1+c_2\mathbf{i}_{n-1}}(\infty)$$

comme étant le **bassin d'attraction fort à l'infini** de la fonction  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$  où  $SA_{n-1,c_1-c_2\mathbf{i}_{n-1}}(\infty)$  et  $SA_{n-1,c_1+c_2\mathbf{i}_{n-1}}(\infty)$  sont des bassins d'attraction forts à l'infini de  $P_{c_1-c_2\mathbf{i}_{n-1}}(\zeta) = \zeta^2 + (c_1 - c_2\mathbf{i}_{n-1})$  et  $P_{c_1+c_2\mathbf{i}_{n-1}}(\zeta) = \zeta^2 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_{n-1})$  respectivement.

Ainsi, le bassin d'attraction fort à l'infini  $SA_{n,c}(\infty)$  est fonction de tous les bassins d'attraction forts à l'infini des dimensions inférieures et à la fin il s'exprime comme une série de produits cartésiens multicomplexes de bassins d'attraction à l'infini complexes.

Par exemple, les bassins d'attraction à l'infini pour les nombres bicomplexes et tri-complexes sont respectivement

$$A_{2,c}(\infty) := \{w \in \mathbb{M}(2) \mid \{P_c^n(w)\} \rightarrow \infty\}, \quad (4.1)$$

$$A_{3,c}(\infty) := \{\zeta \in \mathbb{M}(3) \mid \{P_c^n(\zeta)\} \rightarrow \infty\}, \quad (4.2)$$

alors que les bassins d'attraction fort à l'infini sont respectivement

$$SA_{2,c}(\infty) := A_{c_1 - c_2 i_1}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_1 + c_2 i_1}(\infty), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} SA_{3,c}(\infty) &:= SA_{2,c_1 - c_2 i_2}(\infty) \times_{\gamma_2} SA_{2,c_1 + c_2 i_2}(\infty) \\ &= (A_{c_{\gamma_1 \gamma_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}}(\infty)) \times_{\gamma_2} (A_{c_{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}}(\infty)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Avant de présenter la généralisation de l'ensemble de Mandelbrot aux nombres multicomplexes, rappelons la généralisation de Rochon [18] pour le cas bicomplexe ainsi que le résultat sur la connexité. On utilisera également un lemme bien pratique qui fait également intervenir le produit cartésien multicomplexe présenté à la section 3.2.

**Définition 4.2** Soit la forme quadratique  $P_c(w) = w^2 + c$ ;  $w, c \in \mathbb{M}(2)$  et les itérés de cette fonction  $P_c^n(w) = (P_c^{n-1} \circ P_c)(w)$ . On définit **l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres bicomplexes** de la façon suivante :

$$\mathcal{M}_2 := \{c \in \mathbb{M}(2) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée} \} = \{c \in \mathbb{M}(2) \mid 0 \notin A_{2,c}(\infty)\}.$$

Rochon [18] a également montré que l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe se décompose et s'exprime comme le produit cartésien bicomplexe de deux ensembles de Mandelbrot classiques et il a montré qu'il est connexe tout comme son homologue dans le plan complexe.

**Lemme 4.1**  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}_1$ .

**Théorème 4.2** L'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres bicomplexes,  $\mathcal{M}_2$ , est connexe.

Ce dernier théorème est analogue à celui dans le plan complexe affirmant que l'ensemble de Mandelbrot classique est lui-même connexe. On définit similairement l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres tricomplexes.

**Définition 4.3** Soit  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$ ;  $\zeta, c \in \mathbb{M}(3)$  et les itérés de cette fonction  $P_c^n(\zeta) = (P_c^{n-1} \circ P_c)(\zeta)$ . On définit l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres tricomplexes de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_3 := \{c \in \mathbb{M}(3) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée} \} = \{c \in \mathbb{M}(3) \mid 0 \notin A_{3,c}(\infty)\}.$$

Nous désirons maintenant montrer que l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe est lui aussi connexe. Pour ce faire, on a besoin du résultat suivant qui utilise le produit cartésien tricomplexe  $\times_{\gamma_2}$  que l'on a présenté à la section 3.6.

**Lemme 4.3**  $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2$ .

**Preuve :**

1) Soit  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3)$  de telle sorte que  $\{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty$  soit une suite bornée, c'est-à-dire que  $c \in \mathcal{M}_3$ . Pour  $\zeta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{M}(3)$ , on a

$$P_c(\zeta) = \zeta^2 + c = ((w_1 - w_2 \mathbf{i}_2)^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_2))\gamma_2 + ((w_1 + w_2 \mathbf{i}_2)^2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_2))\bar{\gamma}_2$$

et ainsi  $P_c^n(\zeta) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(w_1 - w_2 \mathbf{i}_2)\gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(w_1 + w_2 \mathbf{i}_2)\bar{\gamma}_2$ . Comme  $c \in \mathcal{M}_3$ , on a que  $P_c^n(0) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)\gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)\bar{\gamma}_2$  forme une suite bornée lorsque  $n$  tend vers l'infini. Alors,  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)$  sont également toutes deux des suites bornées lorsque  $n$  s'en va à l'infini. On a donc  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_2, c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2$ , c'est-à-dire que  $c = (c_1 - c_2 \mathbf{i}_2)\gamma_2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_2)\bar{\gamma}_2 \in \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2$ , et donc  $\mathcal{M}_3 \subseteq \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2$ .

2) Soit  $c \in \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2$ . Alors

$$c = (c_1 - c_2 \mathbf{i}_2)\gamma_2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_2)\bar{\gamma}_2$$

avec  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_2, c_1 + c_2 \mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2$ . Ainsi,  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)$  forment des suites bornées lorsque  $n$  tend vers l'infini, d'où  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)\gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(0)\bar{\gamma}_2 = P_c^n(0)$  est également bornée et donc  $c \in \mathcal{M}_3$  c'est-à-dire que  $\mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3$ .  $\square$

Avant de poursuivre avec la connexité de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe, on a un résultat immédiat à ce lemme.

**Corollaire 4.4**  $\mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}_1) \times_{\gamma_2} (\mathcal{M}_1 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}_1)$ .

**Preuve :**

La preuve est une conséquence directe des lemmes 4.1 et 4.3.  $\square$

On peut donc encore une fois écrire l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres tricomplexes en terme de l'ensemble de Mandelbrot classique. Montrons maintenant que l'ensemble  $\mathcal{M}_3$  est lui aussi connexe.

**Théorème 4.5** *L'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres tricomplexes,  $\mathcal{M}_3$ , est connexe.*

**Preuve :**

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(2)^2 = \mathbb{M}(2) \times \mathbb{M}(2) &\xrightarrow{\gamma_2} \mathbb{M}(2) \times_{\gamma_2} \mathbb{M}(2) = \mathbb{M}(3), \\ (w_1, w_2) &\longmapsto w_1 \gamma_2 + w_2 \bar{\gamma}_2. \end{aligned}$$

L'application  $\gamma_2$  est clairement un homéomorphisme. Ainsi, si on considère deux ensembles,  $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(2)$ , connexes, on a que l'ensemble

$$\gamma_2(X_1 \times X_2) = X_1 \times_{\gamma_2} X_2$$

est également connexe. Du lemme 4.1, on a  $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2$ , d'où

$$\gamma_2(\mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3$$

est connexe puisque  $\mathcal{M}_2$  est connexe (théorème 4.2).  $\square$

La généralisation de l'ensemble de Mandelbrot aux nombres tricomplexes est la plus pertinente (on comprendra pourquoi plus loin), cependant ce n'est pas le cas le plus général. Allons donc voir la définition la plus générale pour l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres multicomplexes.

**Définition 4.4** Soit  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$ ;  $\zeta, c \in \mathbb{M}(n)$  et  $P_c^m(\zeta) = (P_c^{m-1} \circ P_c)(\zeta)$ . On définit l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres multicomplexes d'ordre  $n$ , noté  $\mathcal{M}_n$ , de la manière suivante :

$$\mathcal{M}_n := \{c \in \mathbb{M}(n) \mid \{P_c^m(0)\}_{m=1}^\infty \text{ est bornée} \} = \{c \in \mathbb{M}(n) \mid 0 \notin A_{n,c}(\infty)\}.$$

Tout comme pour le cas bicomplexe et tricomplexe, on peut réécrire l'ensemble de Mandelbrot généralisé  $\mathcal{M}_n$  comme le produit cartésien multicomplexe d'ensembles de Mandelbrot multicomplexes d'ordre  $n - 1$ .

**Lemme 4.6**  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n-1} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{M}_{n-1}$

**Preuve :**

1) Soit  $c \in \mathbb{M}(n)$  tel que  $\{P_c^m(0)\}_{m=1}^\infty$  est une suite bornée. Comme  $c \in \mathcal{M}_n$ , on a

$$P_c(\zeta) = \zeta^2 + c = ((\zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1})^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}))\gamma_{n-1} + ((\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1})^2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}))\bar{\gamma}_{n-1}$$

et donc  $P_c^m(\zeta) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(\zeta_1 - \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1})\gamma_{n-1} + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(\zeta_1 + \zeta_2 \mathbf{i}_{n-1})\bar{\gamma}_{n-1}$ . On sait que la suite  $P_c^m(0) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(0)\gamma_{n-1} + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(0)\bar{\gamma}_{n-1}$  est bornée quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors,  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(0)$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(0)$  sont également des suites bornées quand  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi,  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}$ ,  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ , c'est-à-dire que  $c = (c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1})\gamma_{n-1} + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1})\bar{\gamma}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{M}_{n-1}$ , et on a que  $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}_{n-1} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{M}_{n-1}$ .

2) Soit  $c \in \mathcal{M}_{n-1} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{M}_{n-1}$ , alors

$$c = (c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1})\gamma_{n-1} + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1})\bar{\gamma}_{n-1}$$

avec  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}$ ,  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ . Ainsi,  $P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(0)$  et  $P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}}^m(0)$  sont des suites bornées lorsque  $n \rightarrow \infty$ , d'où  $\mathcal{M}_{n-1} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{M}_{n-1} \subseteq \mathcal{M}_n$ .  $\square$

Maintenant, comme le lemme est valide pour tout  $n$ , on peut réécrire l'ensemble de Mandelbrot d'ordre  $n$  comme une suite de produits cartésiens multicomplexes de  $2^{n-k}$  ensembles de Mandelbrot multicomplexes d'ordre  $k$  et ultimement comme le résultat de  $n - 1$  produits cartésiens multicomplexes de  $2^{n-1}$  ensembles de Mandelbrot classiques.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n &= \mathcal{M}_{n-1} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{M}_{n-1} \\ &= (\mathcal{M}_{n-2} \times_{\gamma_{n-2}} \mathcal{M}_{n-2}) \times_{\gamma_{n-1}} (\mathcal{M}_{n-2} \times_{\gamma_{n-2}} \mathcal{M}_{n-2}) = \dots\end{aligned}$$

On peut maintenant montrer que l'ensemble de Mandelbrot multicomplexe est connexe pour tout  $n$ .

**Théorème 4.7** *L'ensemble de Mandelbrot multicomplexe d'ordre  $n$  est connexe.*

**Preuve :**

Pour  $n = 1$ , on a  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$  qui est un ensemble connexe tel que discuté dans le chapitre 1. Supposons que l'ensemble de Mandelbrot d'ordre  $n = k$  est connexe pour  $k \geq 1$  et vérifions ce qu'il en est pour  $n = k + 1$ . Du lemme précédent, on a

$$\mathcal{M}_{k+1} = \mathcal{M}_k \times_{\gamma_k} \mathcal{M}_k.$$

Or,  $\mathcal{M}_k$  est connexe et donc  $\mathcal{M}_{k+1}$  est également connexe. Ainsi, on a montré par induction que l'ensemble de Mandelbrot généralisé  $\mathcal{M}_n$  est connexe pour tout  $n \geq 1$ .  $\square$

Il y aurait d'autres propriétés de l'ensemble de Mandelbrot classique qui pourraient être intéressantes à généraliser aux espaces multicomplexes. On laissera ces propriétés à démontrer dans des publications futures.

La prochaine section fournira la définition des ensembles de Julia remplis généralisés aux espaces multicomplexes.

## 4.2 Ensembles de Julia remplis généralisés

Tout comme on l'a fait pour l'ensemble de Mandelbrot, on peut donner une généralisation des ensembles de Julia remplis aux nombres multicomplexes d'ordre  $n$ . Rappelons

tout d'abord la définition des ensembles de Julia remplis bicomplexes présentée par Rochon en 2003 [19].

**Définition 4.5** *On définit l'ensemble de Julia rempli bicomplexe associé à la quadratique  $P_c(w) = w^2 + c$ ,  $w, c \in \mathbb{M}(2)$  de la manière suivante :*

$$\mathcal{K}_{2,c} := \{w \in \mathbb{M}(2) \mid \{P_c^n(w)\}_{n=1}^\infty \text{ est une suite bornée}\} = \{w \in \mathbb{M}(2) \mid w \notin A_{2,c}(\infty)\}.$$

Tout comme pour l'ensemble de Mandelbrot généralisé, les ensembles de Julia remplis généralisés se décomposent à l'aide du produit cartésien multicomplexe.

**Lemme 4.8**  $\mathcal{K}_{2,c} = \mathcal{K}_{2,(c_1-c_2\mathbf{i}_1)\gamma_1+(c_1+c_2\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1} = \mathcal{K}_{c_1-c_2\mathbf{i}_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_1+c_2\mathbf{i}_1}.$

Les ensembles de Julia remplis tricomplexes sont définis de manière similaire.

**Définition 4.6** *On définit l'ensemble de Julia rempli tricomplexe correspondant à la quadratique  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$ ,  $\zeta, c \in \mathbb{M}(3)$ , de la manière suivante :*

$$\mathcal{K}_{3,c} = \{\zeta \in \mathbb{M}(3) \mid \{P_c^n(\zeta)\}_{n=1}^\infty \text{ est une suite bornée}\} = \{\zeta \in \mathbb{M}(3) \mid \zeta \notin A_{3,c}(\infty)\}.$$

On s'en doute bien, il est possible d'exprimer un ensemble de Julia rempli tricomplexe comme le produit cartésien tricomplexe de deux ensembles de Julia remplis bicomplexes. Il s'agit d'un résultat qui nous permettra de démontrer la généralisation du théorème de Fatou-Julia.

**Lemme 4.9**  $\mathcal{K}_{3,c} := \mathcal{K}_{3,(c_1-c_2\mathbf{i}_2)\gamma_2+(c_1+c_2\mathbf{i}_2)\bar{\gamma}_2} = \mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}.$

**Preuve :**

La preuve est similaire à celle du lemme 4.3.  $\square$

Comme les ensembles de Julia remplis bicomplexes s'écrivent également comme le produit cartésien bicomplexe de deux ensembles de Julia remplis complexes, on peut exprimer un ensemble de Julia rempli tricomplexe à partir de quatre ensembles de Julia remplis complexes.

**Corollaire 4.10** *Soit  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3 + c_4\mathbf{j}_3 = c_{\gamma_1\gamma_2} \cdot \gamma_1\gamma_2 + c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2} \cdot \bar{\gamma}_1\gamma_2 + c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2} \cdot \gamma_1\bar{\gamma}_2 + c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2} \cdot \bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2$ . Alors*

$$\mathcal{K}_{3,c} = (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}).$$

**Preuve :**

La preuve est une conséquence directe des lemmes 4.8 et 4.9.  $\square$

Le prochain résultat fait un lien entre l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe et la connexité des ensembles de Julia remplis tricomplexes.

**Théorème 4.11**  *$c \in \mathcal{M}_3$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{3,c}$  est un ensemble connexe.*

**Preuve :**

Du lemme 4.9, on a  $\mathcal{K}_{3,c} = \mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$ . Considérons l'homéomorphisme du théorème 4.5. Alors, on a que l'ensemble  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$  est connexe si et seulement si l'ensemble  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$  est connexe et donc si et seulement si les ensembles  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2}$  et  $\mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$  sont tous deux connexes. Or, les ensembles  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2}$  et  $\mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$  sont connexes si et seulement si  $c_1 - c_2\mathbf{i}_2, c_1 + c_2\mathbf{i}_2 \in \mathcal{M}_2$  (voir [18]), c'est-à-dire si et seulement si  $c = (c_1 - c_2\mathbf{i}_2)\gamma_2 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_2)\bar{\gamma}_2 \in \mathcal{M}_3$ . Ainsi,  $c \in \mathcal{M}_3$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{3,c}$  est un ensemble connexe.  $\square$

Ce théorème est en fait la première partie du théorème de Fatou-Julia généralisé aux nombres tricomplexes que l'on présentera dans la prochaine section.

Donnons maintenant la définition d'ensemble de Julia rempli pour le cas le plus général, celui des nombres multicomplexes d'ordre  $n$ .

**Définition 4.7** *On définit l'ensemble de Julia rempli multicomplexe d'ordre  $n$  correspondant à la quadratique  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$ ,  $\zeta, c \in \mathbb{M}(n)$ , de la manière suivante :*

$$\mathcal{K}_{n,c} := \{ \zeta \in \mathbb{M}(n) \mid \{P_c^m(\zeta)\}_{m=1}^\infty \text{ est une suite bornée} \} = \{ \zeta \in \mathbb{M}(n) \mid \zeta \notin A_{n,c}(\infty) \}.$$

De cette définition et de celle de bassin d'attraction à l'infini présentée en début de chapitre, on remarque que l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{n,c}$  est en fait le complément du bassin d'attraction à l'infini  $A_{n,c}(\infty)$ .

De la dernière définition s'ensuit naturellement l'écriture de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{n,c}$  en terme de deux ensembles de Julia remplis multicomplexes d'ordre  $n - 1$ .

**Lemme 4.12**  $\mathcal{K}_{n,c} = \mathcal{K}_{n,(c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1})\gamma_{n-1} + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1})\bar{\gamma}_{n-1}} = \mathcal{K}_{n-1,c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{K}_{n-1,c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}}$ .

**Preuve :**

La preuve est similaire à celle du lemme 4.6.  $\square$

Tout comme on l'a fait pour l'ensemble de Mandelbrot multicomplexe d'ordre  $n$ , le lemme est valide pour tout  $n$ , et donc on peut réécrire l'ensemble de Julia rempli multicomplexe  $\mathcal{K}_{n,c}$  comme une suite de produits cartésiens multicomplexes de  $2^{n-k}$  ensembles de Julia remplis multicomplexes d'ordre  $k$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,c} &= \mathcal{K}_{n-1,c_1 - c_2 \mathbf{i}_{n-1}} \times_{\gamma_{n-1}} \mathcal{K}_{n-1,c_1 + c_2 \mathbf{i}_{n-1}} \\ &= (\mathcal{K}_{n-2,c_{\gamma_{n-2}\gamma_{n-1}}} \times_{\gamma_{n-2}} \mathcal{K}_{n-2,c_{\bar{\gamma}_{n-2}\gamma_{n-1}}}) \times_{\gamma_{n-1}} (\mathcal{K}_{n-2,c_{\gamma_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}}} \times_{\gamma_{n-2}} \mathcal{K}_{n-2,c_{\bar{\gamma}_{n-2}\bar{\gamma}_{n-1}}}) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Donnons maintenant la généralisation du théorème 4.11 pour les nombres multicomplexes d'ordre  $n$ .

**Théorème 4.13**  $c \in \mathcal{M}_n$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{n,c}$  est un ensemble connexe.

**Preuve :**

On va effectuer la preuve par induction. Pour  $n = 1$ , le théorème de Fatou-Julia complexe (1.16) nous assure que la proposition est vraie. Supposons qu'elle le soit aussi pour  $n = k$ , c'est-à-dire que  $c \in \mathcal{M}_k$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{k,c}$  est un ensemble connexe. Soit  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_{k+1} \in \mathbb{M}(k+1)$ , alors  $c \in \mathcal{M}_{k+1}$  si et seulement si

$c_1 + c_2 \mathbf{i}_{k+1} \in \mathcal{M}_k \times_{\gamma_k} \mathcal{M}_k$  c'est-à-dire si et seulement si  $(c_1 - c_2 \mathbf{i}_k) \gamma_k + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_k) \bar{\gamma}_k \in \mathcal{M}_k \times_{\gamma_k} \mathcal{M}_k$ . Or,  $(c_1 - c_2 \mathbf{i}_k) \gamma_k + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_k) \bar{\gamma}_k \in \mathcal{M}_k \times_{\gamma_k} \mathcal{M}_k$  si et seulement si  $c_1 - c_2 \mathbf{i}_k \in \mathcal{M}_k$  et  $c_1 + c_2 \mathbf{i}_k \in \mathcal{M}_k$  et donc, par hypothèse, si et seulement si  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2 \mathbf{i}_k}$  et  $\mathcal{K}_{k,c_1+c_2 \mathbf{i}_k}$  sont connexes. Or,  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2 \mathbf{i}_k}$  et  $\mathcal{K}_{k,c_1+c_2 \mathbf{i}_k}$  sont connexes si et seulement si  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2 \mathbf{i}_k} \times_{\gamma_k} \mathcal{K}_{k,c_1+c_2 \mathbf{i}_k} = \mathcal{K}_{k+1,c}$  est connexe. Ainsi, la proposition est valide pour  $n = k + 1$  et donc le résultat est vrai pour tout  $n \geq 1$ .  $\square$

Maintenant qu'on a défini l'ensemble de Mandelbrot multicomplexe et les ensembles de Julia remplis multicomplexes, on peut généraliser le théorème de Fatou-Julia.

### 4.3 Théorème de Fatou-Julia généralisé

Rappelons la généralisation du théorème de Fatou-Julia pour les nombres bicomplexes de Rochon [19].

#### **Théorème 4.14 *Fatou-Julia bicomplexe***

Soit  $\mathcal{K}_{2,c}$ , l'ensemble de Julia rempli bicomplexe correspondant au paramètre  $c \in \mathbb{M}(2)$ .

Alors

1.  $0 \in \mathcal{K}_{2,c}$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{2,c}$  est un ensemble connexe ;
2.  $0 \in SA_{2,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{2,c}$  est un ensemble totalement non connexe ;
3.  $0 \in A_{2,c}(\infty) \setminus SA_{2,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{2,c}$  est non connexe, mais pas totalement.

Il y a donc trois cas pour la connexité d'un ensemble de Julia rempli bicomplexe contrairement au cas complexe où il n'y a que deux possibilités (Connexe ou de Cantor).

Avant de donner la généralisation du théorème de Fatou-Julia pour les nombres tricomplexes, regardons plus en détails les ensembles de Julia remplis tricomplexes. Du corollaire 4.10, on sait que

$$\mathcal{K}_{3,c} = (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \gamma_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}}).$$

De plus, du théorème de Fatou-Julia complexe (théorème 1.16), il y a deux possibilités pour les ensembles  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \gamma_2}}$ ,  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}}$ ,  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}}$  et  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}}$ , soit connexes ou de Cantor. Ainsi, il serait intéressant de savoir dans quels cas l'ensemble  $\mathcal{K}_{3,c}$  est lui-même connexe, totalement non connexe ou encore non connexe, mais pas totalement. On remarque que

- a)  $\mathcal{K}_{3,c}$  est connexe si et seulement si  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \gamma_2}}$ ,  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}}$ ,  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}}$  et  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}}$  sont tous les quatre connexes ;
- b)  $\mathcal{K}_{3,c}$  est un ensemble totalement non connexe si et seulement si  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \gamma_2}}$ ,  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}}$ ,  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}}$  et  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}}$  sont tous les quatre des ensembles de Cantor dans  $\mathbb{M}(1)$  ;
- c)  $\mathcal{K}_{3,c}$  est non connexe mais pas totalement non connexe dans tous les autres cas.

Du cas non connexe, mais pas totalement, on remarque qu'il y a trois sous-cas : soit exactement un, deux ou trois des ensembles de Julia remplis complexes sont connexes. L'ensemble  $\mathcal{K}_{3,c}$  sera « plus connexe » s'il y a trois des ensembles de Julia remplis complexes qui sont connexes que s'il y en a deux ou un. De plus, le paramètre  $c$  dans ce cas sera situé dans les couches de divergences de l'ensemble de Mandelbrot généralisé  $\mathcal{M}_3$ .

Il découle de ces trois possibilités que sur certaines coupes tridimensionnelles spécifiques de l'ensemble de Mandelbrot généralisé, on distingue trois régions correspondant aux trois cas où l'ensemble  $\mathcal{K}_{3,c}$  est non connexe, mais pas totalement.

La figure 4.1 représente une coupe tridimensionnelle de  $\mathcal{M}_3$ . Il ne s'agit pas de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe, mais bien d'une coupe de l'ensemble (puisque l'ensemble  $\mathcal{M}_3$  est en huit dimensions). Les points de cette coupe qui appartiennent à l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe ne sont pas visible, il sont à l'intérieur de la structure que l'on peut voir. Ce que l'on peut voir sur la figure correspond en fait aux différentes couches de divergences de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe.

La partie rouge sur le dessus de l'ensemble correspond aux paramètres  $c$  qui génèrent un ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,c}$  dont exactement un des ensembles de Julia remplis

$\mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \gamma_2}}, \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}}, \mathcal{K}_{c_{\gamma_1 \bar{\gamma}_2}}$  et  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}}$  est connexe.

Les régions noires et jaunes que l'on peut voir sur les côtés de l'ensemble correspondent respectivement à deux et trois ensembles de Julia remplis complexes connexes. Remarquons également que la région qui correspond à un seul ensemble de Julia rempli complexe connexe est plus près de la région fractale de l'ensemble (la région de couleur dégradée bleue sur les coins et le haut de l'ensemble) que la région correspondant à trois ensembles de Julia remplis complexes connexes, qui elle est située plus près du centre de la fractale c'est-à-dire plus près de l'ensemble de Mandelbrot généralisé.



FIGURE 4.1 – Une coupe tridimensionnelle particulière de  $\mathcal{M}_3 : \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$

On peut maintenant donner la généralisation du théorème de Fatou-Julia pour les nombres tricomplexes. Il s'agit du théorème le plus important de ce mémoire puisqu'il permet de visualiser les différentes régions de connexité de  $\mathcal{M}_3$  associées aux ensembles de Julia remplis tricomplexes.

**Théorème 4.15 *Fatou-Julia tricomplexe***

Soit  $\mathcal{K}_{3,c}$  l'ensemble de Julia rempli tricomplexe associé au paramètre  $c \in \mathbb{M}(3)$ . Alors

1.  $0 \in \mathcal{K}_{3,c}$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{3,c}$  est un ensemble connexe ;
2.  $0 \in SA_{3,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{3,c}$  est un ensemble totalement non connexe ;
3.  $0 \in A_{3,c}(\infty) \setminus SA_{3,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{3,c}$  est non connexe, mais pas totalement.

**Preuve :**

1. Du théorème 4.11, l'ensemble  $\mathcal{K}_{3,c}$  est connexe si et seulement si  $0 \in \mathcal{K}_{3,c}$ .
2. De la définition de l'ensemble  $SA_{3,c}(\infty)$  et de la représentation idempotente  $0 = 0\gamma_2 + 0\bar{\gamma}_2$ , on remarque que  $0 \in SA_{3,c}(\infty)$  si et seulement si  $0 \in SA_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2}(\infty)$  et  $0 \in SA_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}(\infty)$ . Alors, du théorème de Fatou-Julia bicomplexe,  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2}$  et  $\mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$  sont des ensembles totalement non connexe dans  $\mathbb{M}(2)$ . Si on considère l'homéomorphisme du théorème 4.5, on a que

$$\gamma_2^{-1}(\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}) = \mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}.$$

Ainsi, comme  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}$  est totalement non connexe,  $\mathcal{K}_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2} \times_{\gamma_2} \mathcal{K}_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2} = \mathcal{K}_{3,c}$  est lui-même totalement non connexe.

3. Considérons l'homéomorphisme suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(1)^4 &= \mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(1) \times \mathbb{M}(1) \xrightarrow{\gamma} (\mathbb{M}(1) \times_{\gamma_1} \mathbb{M}(1)) \times_{\gamma_2} (\mathbb{M}(1) \times_{\gamma_1} \mathbb{M}(1)) = \mathbb{M}(3), \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) &\longmapsto z_1 \cdot \gamma_1 \gamma_2 + z_2 \cdot \bar{\gamma}_1 \gamma_2 + z_3 \cdot \gamma_1 \bar{\gamma}_2 + z_4 \cdot \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2. \end{aligned}$$

Regardons tout d'abord quelques propriétés des bassins d'attraction :

$$SA_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2}(\infty) = A_{c_{\gamma_1\gamma_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}(\infty);$$

$$SA_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}(\infty) = A_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}(\infty);$$

$$\begin{aligned} A_{2,c_1-c_2\mathbf{i}_2}(\infty) &= A_{c_{\gamma_1\gamma_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}(\infty) \\ &\cup A_{c_{\gamma_1\gamma_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}} \\ &\cup \mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}} \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}(\infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2,c_1+c_2\mathbf{i}_2}(\infty) &= A_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}(\infty) \\
&\cup A_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}} \\
&\cup \mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}} \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}(\infty).
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut réécrire l'ensemble  $A_{3,c}(\infty) \setminus SA_{3,c}(\infty)$  comme le produit cartésien multicomplexe de quatre ensembles dont au moins un est un ensemble de Julia rempli complexe et au moins un est un bassin d'attraction à l'infini dans  $\mathbb{M}(1)$ . Ainsi, si  $0 \in A_{3,c}(\infty) \setminus SA_{3,c}(\infty)$ , on a, sans perte de généralité,

$$0 \in (A_{c_{\gamma_1\gamma_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} A_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}(\infty)) \times_{\gamma_2} (A_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}}(\infty) \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}).$$

En particulier,  $0 \in A_{c_{\gamma_1\gamma_2}}(\infty)$  et  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}}$  est un ensemble non connexe. Alors,  $\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}} \times \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}} \times \mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}} \times \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}$  est également un ensemble non connexe. Ainsi,  $\gamma(\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}} \times \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}} \times \mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}} \times \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}) = (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}) = \mathcal{K}_{3,c}$

est non connexe. On peut également montrer que  $\mathcal{K}_{3,c}$  n'est pas totalement non connexe. Soit  $a \in \mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}}$ ,  $b \in \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}$  et  $c \in \mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}}$  alors  $(\{a\} \times_{\gamma_1} \{b\}) \times_{\gamma_2} (\{c\} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}})$  est clairement un sous-ensemble connexe de  $(\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\gamma_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\gamma_2}}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{c_{\gamma_1\bar{\gamma}_2}} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}) = \mathcal{K}_{3,c}$  puisque  $\mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}$  est un ensemble connexe puisque  $0 \in \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}}$ . De plus, comme un ensemble de Julia rempli complexe obtenu à partir d'une quadratique  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$  contient une infinité de points (voir [1]), l'ensemble  $(\{a\} \times_{\gamma_1} \{b\}) \times_{\gamma_2} (\{c\} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{c_{\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}})$  ne peut être réduit à un singleton. Ainsi, de l'homéomorphisme  $\gamma$ ,  $\mathcal{K}_{3,c}$  est non connexe, mais pas totalement.

Il reste à montrer l'implication inverse des points 2 et 3 de la preuve. Or c'est évident puisque si  $\mathcal{K}_{3,c}$  est totalement non connexe, alors on doit avoir  $0 \in SA_{3,c}(\infty)$ .  $\square$

Bien que le cas tricomplexe soit le plus intéressant, on donnera quand même la version la plus générale du théorème de Fatou-Julia pour les espaces multicomplexes.

#### **Théorème 4.16 *Fatou-Julia multicomplexe***

Soit  $\mathcal{K}_{n,c}$ , l'ensemble de Julia rempli correspondant à la quadratique  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$  où  $c \in \mathbb{M}(n)$  et  $n \geq 2$ . Alors

1.  $0 \in \mathcal{K}_{n,c}$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{n,c}$  est un ensemble connexe ;
2.  $0 \in SA_{n,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{n,c}$  est un ensemble totalement non connexe ;
3.  $0 \in A_{n,c}(\infty) \setminus SA_{n,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{n,c}$  est un ensemble non connexe, mais pas totalement.

**Preuve :**

1. Du théorème 4.13, l'ensemble  $\mathcal{K}_{n,c}$  est connexe si et seulement si  $0 \in \mathcal{K}_{n,c}$ .
2. On va faire cette partie de la preuve par induction. Pour  $n = 2$ , on a exactement le théorème 4.14 mentionné plus tôt. Supposons que  $0 \in SA_{k,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{k,c}$  est un ensemble totalement non connexe et allons voir ce qu'il en est pour  $n = k + 1$ . De la définition de l'ensemble  $SA_{k+1,c}(\infty)$ , on remarque que  $0 \in SA_{k+1,c}(\infty)$  si et seulement si  $0 \in SA_{k,c_1-c_2i_k}(\infty)$  et  $0 \in SA_{k,c_1+c_2i_k}(\infty)$ .

De plus, du fait que l'application  $\times_{\gamma_k}$  est un homéomorphisme,  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k}$  et  $\mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$  sont des ensembles totalement non connexes si et seulement si  $\mathcal{K}_{k+1,c} = \mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k} \times_{\gamma_k} \mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$  est également un ensemble totalement non connexe. Ainsi, pour tout  $n \geq 2$ ,  $0 \in SA_{n,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{n,c}$  est un ensemble totalement non connexe.

3. On va également faire cette partie de la preuve par induction. Du théorème 4.14, on a que la proposition est vraie pour  $n = 2$ . Supposons qu'elle le soit pour  $n = k \geq 2$ , c'est-à-dire que  $0 \in A_{k,c}(\infty) \setminus SA_{k,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{k,c}$  est non connexe, mais pas totalement. Pour  $n = k + 1$ , on remarque que

$$\begin{aligned}
A_{k+1,c}(\infty) &= A_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \times_{\gamma_k} A_{k,c_1+c_2i_k} \\
&\cup \mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k} \times_{\gamma_k} A_{k,c_1+c_2i_k} \\
&\cup A_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \times_{\gamma_k} \mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}
\end{aligned}$$

et de manière générale, pour n'importe quels  $A, B \subseteq \mathbb{M}(k)$ , on a

$$(A \times_{\gamma_k} B) \setminus (SA_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \times_{\gamma_k} SA_{k,c_1+c_2i_k}(\infty)) = (A \setminus SA_{k,c_1-c_2i_k}(\infty)) \times_{\gamma_k} B \cup A \times_{\gamma_k} (B \setminus SA_{k,c_1+c_2i_k}(\infty)).$$

Alors,  $0 \in A_{k+1,c}(\infty) \setminus (SA_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \times_{\gamma_k} SA_{k,c_1+c_2i_k}(\infty))$  si et seulement si

$$0 \in A_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \setminus SA_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \text{ et } 0 \in A_{k,c_1+c_2i_k}$$

ou

$$0 \in A_{k,c_1+c_2i_k}(\infty) \setminus SA_{k,c_1+c_2i_k}(\infty) \text{ et } 0 \in A_{k,c_1-c_2i_k}$$

ou

$$0 \in A_{k,c_1+c_2i_k}(\infty) \setminus SA_{k,c_1+c_2i_k}(\infty) \text{ et } 0 \in \mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k}$$

ou

$$0 \in A_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \setminus SA_{k,c_1-c_2i_k}(\infty) \text{ et } 0 \in \mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$$

ou

$$0 \in \mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k} \text{ et } 0 \in A_{k,c_1-c_2i_k}$$

ou

$$0 \in \mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k} \text{ et } 0 \in A_{k,c_1+c_2i_k}.$$

De plus,  $\mathcal{K}_{k+1,c} = \mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k} \times_{\gamma_k} \mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$  est non connexe, mais pas totalement si et seulement si

1.  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k}$  ou  $\mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$  est non connexe, mais pas totalement ;

ou

2.  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k}$  est totalement non connexe et  $\mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$  est connexe ;

ou

3.  $\mathcal{K}_{k,c_1+c_2i_k}$  est totalement non connexe et  $\mathcal{K}_{k,c_1-c_2i_k}$  est connexe.

Ainsi,  $0 \in A_{k+1,c}(\infty) \setminus SA_{k+1,c}(\infty)$  si et seulement si  $\mathcal{K}_{k+1,c}$  est non connexe, mais pas totalement.  $\square$

On a vu un peu plus tôt dans cette section une coupe tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot. Il s'agit en fait d'une manière de visualiser l'ensemble de Mandelbrot tri-complexe. Il existe d'autres coupes tridimensionnelles de  $\mathcal{M}_3$  et donc d'autres manières de visualiser l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. C'est l'objet de la prochaine section.

## 4.4 Coupes principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe

On aimerait bien visualiser l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe,  $\mathcal{M}_3$ , qui est en fait de dimension huit. Pour ce faire, on devra fixer cinq des huit coefficients de la représentation des nombres tricomplexes 3.6. En faisant cela, on peut visualiser des coupes tridimensionnelles particulières de l'ensemble. On va se concentrer sur les coupes pour lesquelles les cinq coefficients fixés sont fixés à zéro. On dira de ces coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe que ce sont les coupes principales.

On verra également que le nombre de coupes tridimensionnelles principales de  $\mathcal{M}_3$  est de huit alors qu'on aurait pu s'attendre à plus. Ce phénomène sera expliqué par le fait qu'il existe des symétries entre les différentes coupes et il en découlera que l'étude de l'ensemble de Mandelbrot multicomplexe d'ordre supérieur à trois sera à toute fin pratique inintéressante.

On a défini à la section 3.6 des sous-espaces des nombres tricomplexes. Comme ce sont ces espaces qui seront utilisés dans cette section, rappelons en les définitions.

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) := \{w = x_1 + x_2\mathbf{i}_k + x_3\mathbf{i}_l + x_4\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, \quad (4.5)$$

$$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) := \{x_1\mathbf{i}_k + x_2\mathbf{i}_l + x_3\mathbf{i}_m \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}. \quad (4.6)$$

Comme on vient de le mentionner, il y a huit coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. On distinguera deux cas. Le premier cas est celui des coupes pour lesquelles les itérés de la quadratique  $P_c(\zeta) = \zeta^2 + c$  pour des

nombre dans  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$  restent soit dans  $\mathbb{M}(2)$  ou dans  $\mathbb{D}(2)$ . La première coupe dans ce cas est le Tétrabrot (voir la figure 4.2). Il s'agit d'une coupe que l'on pouvait déjà visualiser à l'aide des nombres bicomplexes (voir [12, 18]) et elle est définie de la manière suivante :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}. \quad (4.7)$$

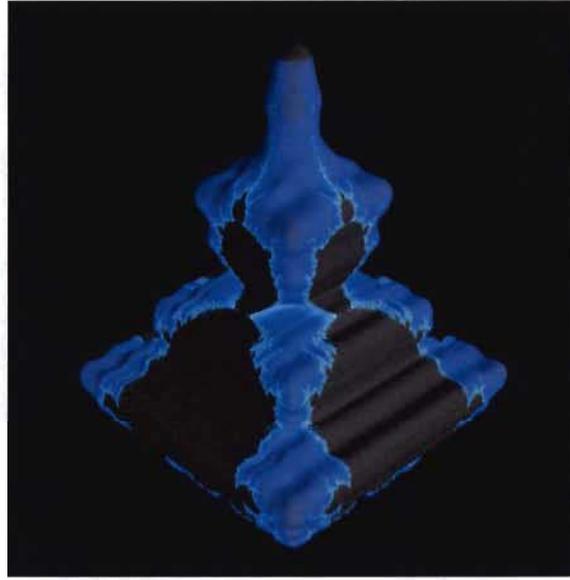


FIGURE 4.2 – Première coupe de  $\mathcal{M}_3$  : le Tétrabrot :  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$

Introduisons maintenant la relation  $\sim$  qui signifie que les deux ensembles considérés ont la même dynamique.

**Définition 4.8** Soient  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ , deux coupes tridimensionnelles de  $\mathcal{M}_3$  correspondant respectivement aux fonctions  $P_{c_1}$  et  $P_{c_2}$ . On a  $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$  s'il existe une fonction  $\varphi$  telle que  $(\varphi \circ P_{c_1} \circ \varphi^{-1})(\zeta) = P_{c_2}(\zeta)$ . On dira alors que  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  **ont la même dynamique**.

Deux ensemble ayant la même dynamique seront exactement identiques lorsque vus dans un logiciel de visualisation 3D de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. On dira aussi que les ensembles  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont **symétriques**.

Lorsque  $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ , les fonctions  $P_{c_1}$  et  $P_{c_2}$  peuvent être vue comme la même fonction, mais sur des espaces différents (parmi les sous-espaces tricomplexes (4.6)). Ainsi il est normal de constater que les itérés de ces fonctions nous donne des ensembles graphiquement identiques.

Attention, lorsque l'on cherche  $\varphi$  pour vérifier que  $(\varphi \circ P_{c_1} \circ \varphi^{-1})(\zeta) = P_{c_2}(\zeta)$ , les nombres  $c_1$  et  $c_2$  appartiennent à leur sous-espace tricomplexe respectif, mais ne sont pas fixé. De sorte que lorsque prend la coupe tridimensionnelle, par exemple pour le Tétrabrot :  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}$ , tous les paramètre  $c$  du sous-espace tricomplexe sont pris en compte. C'est ce qui nous permet d'affirmer que deux coupes ont la même dynamique. Aussi, comme on s'y attend, la relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.

**Proposition 4.17** *La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence.*

**Preuve :**

1. Soit la fonction  $P_c$  qui génère la coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}$ . Alors la fonction  $\varphi(\zeta) := \zeta$  est telle que  $(\varphi \circ P_c \circ \varphi^{-1})(\zeta) = P_c(\zeta)$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{T} \sim \mathcal{T}$  et donc la relation  $\sim$  est réflexive.
2. Soit la fonction  $P_{c_1}$  qui génère la coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}_1$  et la fonction  $P_{c_2}$  qui génère la coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}_2$  et supposons que  $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$ . Alors, il existe une fonction  $\varphi$  telle que  $(\varphi \circ P_{c_1} \circ \varphi^{-1})(\zeta) = P_{c_2}(\zeta)$ . Ainsi,  $(\varphi^{-1} \circ P_{c_2} \circ (\varphi^{-1})^{-1})(\zeta) = P_{c_1}(\zeta)$  c'est-à-dire que  $\mathcal{T}_2 \sim \mathcal{T}_1$  et donc la relation  $\sim$  est symétrique.
3. Soit la fonction  $P_{c_1}$  qui génère la coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}_1$ , la fonction  $P_{c_2}$  qui génère la coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}_2$  et la fonction  $P_{c_3}$  qui génère la coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}_3$ . Supposons que  $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_2 \sim \mathcal{T}_3$ . Alors, il existe deux fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  telles que  $(\varphi_1 \circ P_{c_1} \circ \varphi_1^{-1})(\zeta) = P_{c_2}(\zeta)$  et  $(\varphi_2 \circ P_{c_2} \circ \varphi_2^{-1})(\zeta) = P_{c_3}(\zeta)$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P_{c_3}(\zeta) &= (\varphi_2 \circ P_{c_2} \circ \varphi_2^{-1})(\zeta) \\
&= (\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ P_{c_1} \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1})(\zeta) \\
&= ((\varphi_2 \circ \varphi_1) \circ P_{c_1} \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1})(\zeta)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $\mathcal{T}_1 \sim \mathcal{T}_3$  et donc la relation  $\sim$  est transitive.

La relation  $\sim$  est donc une relation d'équivalence.  $\square$

Pour le Tétrabrot, on a les symétries suivantes :  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \sim \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l), \forall \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}, \mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$ , et donc on peut tous les appeler Tétrabrot. Pour montrer que ces ensembles ont la même dynamique, on considère (sans perte de généralité)  $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ ,  $c' = c_1 + c_2\mathbf{i}_3 + c_3\mathbf{i}_4 \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4)$  et les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
P_c : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \\
w &\longmapsto w^2 + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{c'} : \mathbb{M}(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) \\
w &\longmapsto w^2 + c'.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'application suivante :

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4) \\
x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 &\longmapsto x_1 + x_2\mathbf{i}_3 + x_3\mathbf{i}_4 + x_4\mathbf{j}_1.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ P_c \circ \varphi^{-1})(w) &= (\varphi \circ P_c)(x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1) \\
&= \varphi((x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + c_1) + (2x_1x_2 - 2x_3x_4 + c_2)\mathbf{i}_1 \\
&\quad + (2x_1x_3 - 2x_2x_4 + c_3)\mathbf{i}_2 + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)\mathbf{j}_1) \\
&= (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + c_1) + (2x_1x_2 - 2x_3x_4 + c_2)\mathbf{i}_3 \\
&\quad + (2x_1x_3 - 2x_2x_4 + c_3)\mathbf{i}_4 + (2x_1x_4 + 2x_2x_3)\mathbf{j}_1 \\
&= P_{c'}(w)
\end{aligned}$$

et donc on a montré que  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \sim \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4)$ . La deuxième coupe principale de  $\mathcal{M}_3$  (Fig. 4.3) est obtenue en choisissant le membre réel, une unité imaginaire dont le carré est -1 et une unité imaginaire hyperbolique.

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}, \quad (4.8)$$

avec  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ ,  $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ ,  $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ . Pour montrer la symétrie entre les coupes  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3)$ , on considère  $P_c : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $P_{c'} : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3)$  avec  $c = c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{j}_1 \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$  et  $c' = c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 - c_3 \mathbf{j}_3 \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3)$ . Ainsi, avec l'application

$$\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_3) \\
x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1 &\longmapsto x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_4 - x_4 \mathbf{j}_3,
\end{aligned}$$

on a  $(\varphi \circ P_c \circ \varphi^{-1})(w) = P_{c'}(w)$ . Les autres symétries pour cette coupe tridimensionnelle se montrent similairement.

Une autre coupe tridimensionnelle importante de  $\mathcal{M}_3$  est celle que l'on appellera **Perplexbrot** (Fig. 4.4). On peut voir cet ensemble comme une généralisation de l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique.

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}. \quad (4.9)$$

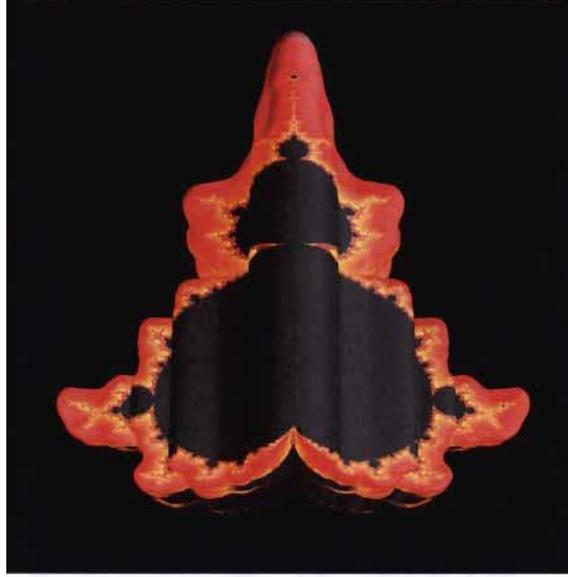


FIGURE 4.3 – Deuxième coupe de  $\mathcal{M}_3 : \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$

On a  $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ . En fait, les itérés de nombres de ces ensembles restent dans  $\mathbb{D}(2)$ . Cette coupe peut apparaître surprenante à première vue puisqu'elle ne semble pas fractale. Elle n'est en effet pas fractale tout comme l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique qui est en fait un losange. Il a même été montré dans [9] que le Perplexbrot est en fait un octaèdre régulier de  $\frac{9}{8}\sqrt{2}$  d'arrête.

Pour montrer la symétrie entre les coupes  $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_3)$ , on considère  $P_c : \mathbb{D}(2) \rightarrow \mathbb{D}(2)$  et  $P_{c'} : \mathbb{D}(2) \rightarrow \mathbb{D}(2)$  avec  $c = c_1 + c_2\mathbf{j}_1 + c_3\mathbf{j}_2 \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$  et  $c' = c_1 + c_2\mathbf{j}_1 + c_3\mathbf{j}_3 \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ . Ainsi, avec l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{D}(2) &\longrightarrow \mathbb{D}(2) \\ x_1 + x_2\mathbf{j}_1 + x_3\mathbf{j}_2 + x_4\mathbf{j}_3 &\longmapsto x_1 + x_2\mathbf{j}_1 + x_4\mathbf{j}_2 + x_3\mathbf{j}_3, \end{aligned}$$

on a  $(\varphi \circ P_c \circ \varphi^{-1})(w) = P_{c'}(w)$ . Les autres symétries du Perplexbrot se montrent similairement.

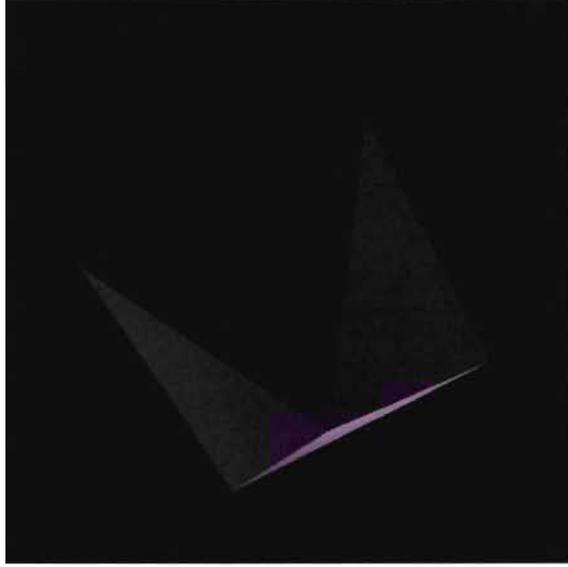


FIGURE 4.4 – Troisième coupe de  $\mathcal{M}_3$  : le Perplexbrot :  $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$

Il reste une coupe tridimensionnelle de  $\mathcal{M}_3$  pour le cas où les itérés restent soit dans  $\mathbb{M}(2)$  ou dans  $\mathbb{D}(2)$  (Fig. 4.5).

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) := \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\}, \quad (4.10)$$

avec  $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_2) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1)$ .

Pour montrer la symétrie entre les coupes  $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  et  $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2)$ , on considère  $P_c : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$  et  $P_{c'} : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3) \rightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3)$  avec  $c = c_1 \mathbf{i}_1 + c_2 \mathbf{i}_2 + c_3 \mathbf{j}_1 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$  et  $c' = c_1 \mathbf{i}_1 + c_2 \mathbf{i}_3 + c_3 \mathbf{j}_2 \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_2)$ . Ainsi, avec l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &\longrightarrow \mathbb{M}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3) \\ x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1 &\longmapsto x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_3 + x_4 \mathbf{j}_2, \end{aligned}$$

on a  $(\varphi \circ P_c \circ \varphi^{-1})(w) = P_{c'}(w)$ . Les autres symétries pour cette coupe tridimensionnelle se montrent similairement.

Les quatre autres coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe sont du second cas, celui où les itérés des nombres dans  $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_m)$  vont dans  $\mathbb{M}(3)$ . Ce sont ces quatre coupes qui nous permettent de voir les trois régions

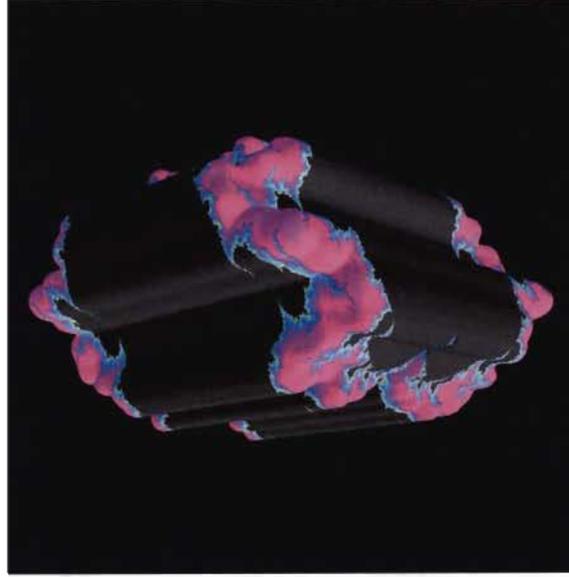


FIGURE 4.5 – Quatrième coupe de  $\mathcal{M}_3 : \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$

correspondant à des ensembles de Julia remplis tricomplexes non connexes, mais pas totalement. Ces quatre coupes sont définies comme suit (respectivement les figures 4.6, 4.7, 4.1 et 4.8) :

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) := \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) := \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) := \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \mid \{P_c^n(0)\}_{n=1}^\infty \text{ est bornée}\} \quad (4.14)$$

avec les symétries suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(i_1, i_2, i_3) &\sim \mathcal{T}(i_1, i_2, i_4) \sim \mathcal{T}(i_1, i_3, i_4) \sim \mathcal{T}(i_2, i_3, i_4), \\
\mathcal{T}(i_1, i_2, j_2) &\sim \mathcal{T}(i_1, i_2, j_3) \sim \mathcal{T}(i_1, i_3, j_1) \sim \mathcal{T}(i_1, i_3, j_3) \sim \mathcal{T}(i_1, i_4, j_1) \sim \mathcal{T}(i_1, i_4, j_2) \\
&\sim \mathcal{T}(i_2, i_3, j_1) \sim \mathcal{T}(i_2, i_3, j_2) \sim \mathcal{T}(i_2, i_4, j_1) \sim \mathcal{T}(i_2, i_4, j_3) \sim \mathcal{T}(i_3, i_4, j_2) \\
&\sim \mathcal{T}(i_3, i_4, j_3), \\
\mathcal{T}(i_1, j_1, j_2) &\sim \mathcal{T}(i_1, j_1, j_3) \sim \mathcal{T}(i_1, j_2, j_3) \sim \mathcal{T}(i_2, j_1, j_2) \sim \mathcal{T}(i_2, j_1, j_3) \sim \mathcal{T}(i_2, j_2, j_3) \\
&\sim \mathcal{T}(i_3, j_1, j_2) \sim \mathcal{T}(i_3, j_1, j_3) \sim \mathcal{T}(i_3, j_2, j_3) \sim \mathcal{T}(i_4, j_1, j_2) \sim \mathcal{T}(i_4, j_1, j_3) \\
&\sim \mathcal{T}(i_4, j_2, j_3).
\end{aligned}$$



FIGURE 4.6 – Cinquième coupe de  $\mathcal{M}_3$  :  $\mathcal{T}(i_1, i_2, i_3)$

Au vu de ces coupes tridimensionnelles principales et avec les différentes symétries, on peut se demander pourquoi les coupes  $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_1)$  et  $\mathcal{T}(i_1, i_2, j_2)$  n'ont pas la même dynamique. C'est simplement en raison du fait que les itérés ne se situent pas dans le même espace. En fait, les itérés de nombres dans  $\mathbb{T}(i_1, i_2, j_1)$  restent dans  $\mathbb{M}(i_1, i_2)$  alors que ceux de nombres dans  $\mathbb{T}(i_1, i_2, j_2)$  vont dans  $\mathbb{M}(3)$ . Cela s'explique par le

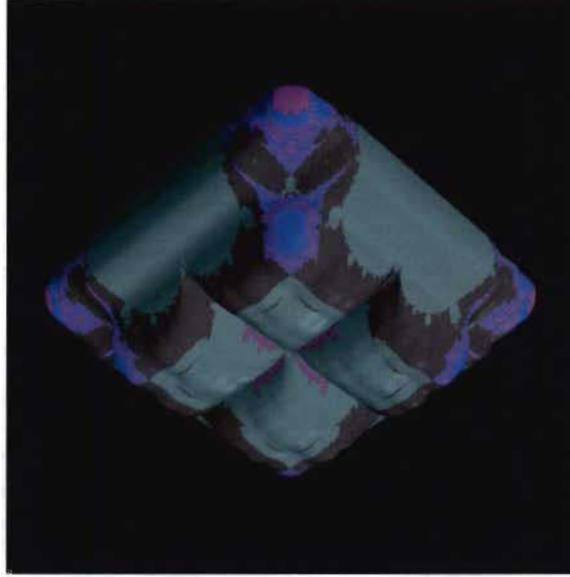


FIGURE 4.7 – Sixième coupe de  $\mathcal{M}_3 : \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$

fait que  $\mathbf{j}_1 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ , mais  $\mathbf{j}_2 \neq \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$ . Nous allons maintenant montrer que  $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1)$ . Soit  $c = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_3 + c_3\mathbf{j}_1$ ,  $c' = c_1\mathbf{i}_2 + c_2\mathbf{i}_3 + c_3\mathbf{j}_1$  et considérons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} P_c : \mathbb{M}(3) &\longrightarrow \mathbb{M}(3) \\ \zeta &\longmapsto \zeta^2 + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{c'} : \mathbb{M}(3) &\longrightarrow \mathbb{M}(3) \\ \zeta &\longmapsto \zeta^2 + c'. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{M}(3) &\longrightarrow \mathbb{M}(3) \\ &x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_7\mathbf{j}_2 + x_8\mathbf{j}_3 \\ &\longmapsto x_1 + x_3\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_8\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3. \end{aligned}$$

Ainsi on a  $(\varphi \circ P_c \circ \varphi^{-1})(\zeta) = P_{c'}(\zeta)$  et donc  $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1) \sim \mathcal{T}(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{j}_1)$ . Toutes les autres symétries pour les quatre coupes dont les itérés vont dans  $\mathbb{M}(3)$  se démontrent

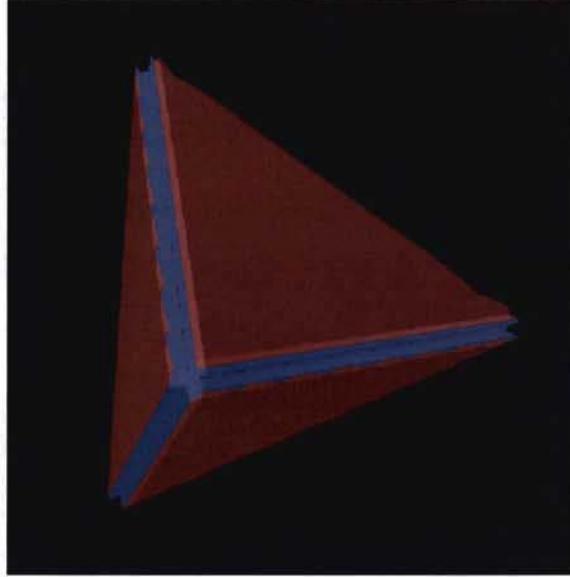


FIGURE 4.8 – Huitième coupe de  $\mathcal{M}_3 : \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$

en utilisant la même stratégie c'est-à-dire que l'application  $\varphi$  consiste en fait en une permutation des coefficients de  $\zeta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{i}_3 + x_5\mathbf{i}_4 + x_6\mathbf{j}_1 + x_7\mathbf{j}_2 + x_8\mathbf{j}_3$ .

À ce point-ci, le lecteur avisé aura remarqué que toutes les possibilités de triplets d'unités imaginaires tricomplexes ont été utilisés pour former les huit coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. Il n'existe donc pas d'autres coupes pour l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe.

Plus encore, les huit coupes tridimensionnelles principales définies dans cette section sont les seules que l'on retrouverait si l'on faisait la même étude pour les ensembles de Mandelbrot multicomplexes d'ordre supérieur à trois.

Bien entendu, on peut appliquer la technique utilisée pour visualiser l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe aux ensembles de Julia remplis tricomplexes. La figure 4.9 correspond à la première coupe (celle où l'on conserve les unités 1,  $\mathbf{i}_1$  et  $\mathbf{i}_2$ ) de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32\mathbf{i}_1}$ .

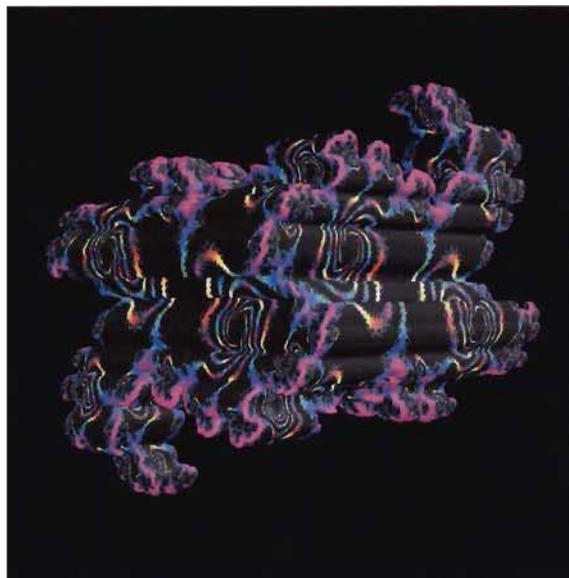


FIGURE 4.9 – Première coupe de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$

Tout comme pour l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe, il existe huit coupe tridimensionnelles pour les ensembles de Julia remplis tricomplexes. La figure 4.10 correspond à la deuxième coupe (celle où l'on conserve les unités  $1$ ,  $i_1$  et  $j_1$ ) de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$ .

On pourrait également afficher les autres coupes pour cet ensemble de Julia rempli tricomplexe particulier, mais la plupart des autres coupes sont moins intéressantes. Allons voir la première coupe pour d'autres ensembles de Julia remplis tricomplexes. Les figures 4.11, 4.12 et 4.13 correspondent à la première coupe respectivement des ensembles

$$\mathcal{K}_{3,-0.98357+0.26365i_1+0.00085i_4-0.00033j_3},$$

$$\mathcal{K}_{3,0.3419+0.0777i_1}$$

$$\text{et } \mathcal{K}_{3,-0.12+0.1i_1-0.415i_2-0.065i_3+0.32i_4-0.19j_1-0.2j_2+0.47j_3}.$$



FIGURE 4.10 – Deuxième coupe de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$

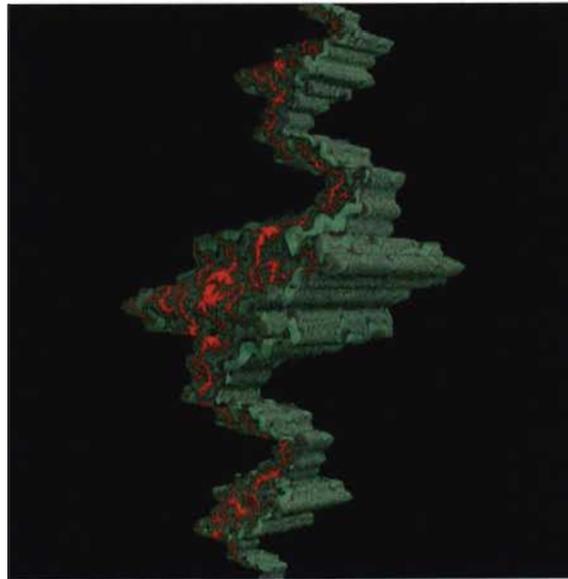


FIGURE 4.11 – Première coupe de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,c}$  avec  $c = -0.98357 + 0.26365i_1 + 0.00085i_4 - 0.00033j_3$



FIGURE 4.12 – Première coupe de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,0.3419+0.0777i_1}$

Remarquons que l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$  se décompose selon le corollaire 4.10 de la manière suivante :  $(\mathcal{K}_{0.36237+0.32i_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{0.36237+0.32i_1}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{0.36237+0.32i_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{0.36237+0.32i_1})$ , c'est-à-dire que les quatre ensembles de Julia remplis complexes qui le composent sont l'ensemble de Julia rempli de la figure 1.5. Il est alors intéressant de constater les ressemblances graphiques entre cet ensemble de Julia rempli complexe et les deux premières coupes de  $\mathcal{K}_{3,0.36237+0.32i_1}$  (figures 4.9 et 4.10).

De manière similaire, on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_{3,-0.98357+0.26365i_1+0.00085i_4-0.00033j_3} \\ &= (\mathcal{K}_{-0.98389+0.2645i_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{-0.98389+0.2645i_1}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{-0.98324+0.2628i_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{-0.98324+0.2628i_1}) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{K}_{3,0.3419+0.0777i_1} = (\mathcal{K}_{0.3419+0.0777i_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{0.3419+0.0777i_1}) \times_{\gamma_2} (\mathcal{K}_{0.3419+0.0777i_1} \times_{\gamma_1} \mathcal{K}_{0.3419+0.0777i_1})$$

et on remarque également des ressemblances entre les figures 1.6 et 4.11 et entre les figures 1.7 et 4.12.



FIGURE 4.13 – Première coupe de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,c}$  avec  $c = -0.12 + 0.1i_1 - 0.415i_2 - 0.065i_3 + 0.32i_4 - 0.19j_1 - 0.2j_2 + 0.47j_3$

À l'opposée, l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,-0.12+0.1i_1-0.415i_2-0.065i_3+0.32i_4-0.19j_1-0.2j_2+0.47j_3}$  a été construit en utilisant quatre ensembles de Julia remplis complexes différents et la coupe que l'on peut voir à la figure 4.13 ne ressemble pas à grand chose.

On va conclure ce chapitre et par le fait même cet ouvrage par une discussion sur l'aspect fractal des ces ensembles tidimensionnels issus de la structure des nombres tricomplexes.

## 4.5 L'ensemble de Mandelbrot tricomplexe au point de vue fractal

Rappelons tout d'abord les propriétés fondamentales d'un objet que l'on qualifie de fractal. Tout d'abord, un objet fractal ou plus simplement une fractale doit avoir une forme irrégulière et fragmentée et ce à toutes les échelles, c'est-à-dire que l'on discernera toujours la forme irrégulière et fragmentée de l'objet peu importe l'agrandissement avec lequel on est en train de le regarder.

Comme discuté au chapitre 1, une autre propriété intéressante des fractales est l'autosimilarité. Un objet présentant une structure autosimilaire est un objet pour lequel on retrouve, en agrandissant, des parties ayant une structure approchant celle de l'objet lui-même.

L'ensemble de Mandelbrot classique et les ensembles de Julia remplis complexes sont des objets fractals très connus. On a d'ailleurs vu au chapitre 1 que ces fractales possèdent la propriété d'autosimilarité.

On peut supposer, sans trop de craintes de se tromper, que l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres multicomplexes est également un ensemble fractal. On a vu que certaines des coupes principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe ne sont pas du tout fractales. Le Perplexbrot, par exemple, est un octaèdre régulier comme il a été démontré dans [9]. La coupe  $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ , quant à elle, ne semble pas non plus fractale. On peut supposer qu'il s'agit d'un tétraèdre régulier.

**Conjecture 4.1** *La coupe tridimensionnelle  $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$  de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe est un tétraèdre régulier.*

Ces deux coupes sont donc intéressantes puisqu'elles ne sont pas fractales alors qu'on aurait pu s'attendre à ce qu'elles le soient, mais l'intérêt s'arrête là. Les autres coupes quant à elles sont vraisemblablement fractales et donc offrent un grand intérêt au point de vue de l'exploration. Nous allons surtout nous concentrer sur le Tétrabrot puisque c'est, à notre point de vue, la coupe la plus intéressante. L'on tentera d'illustrer, à l'aide d'images appropriées, le caractère fractal et autosimilaire du Tétrabrot. L'on pourrait également utiliser les autres coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe afin d'illustrer la chose.

Rappelons tout d'abord que les points qui correspondent à des ensembles de Julia remplis connexes sont dans l'ensemble de Mandelbrot et ne sont donc pas visibles sur les coupes tridimensionnelles. Dans le cas du Tétrabrot (figure 4.2), la région noire

correspond à des ensembles de Julia remplis non connexes, mais pas totalement, où exactement deux des quatre ensembles de Julia remplis complexes (de la décomposition du corrolaire 4.10) sont connexes et les deux autres sont totalement non connexes. La région bleue, quant à elle, correspond à des ensembles de Julia remplis tricomplexes totalement non connexes.

Explorons donc le Tétrabrot afin de voir plus clairement l'aspect fractal de cet ensemble. Tout d'abord, avant même d'approcher l'ensemble, on remarque que l'autosimilarité de la fractale s'exprime d'une autre façon que dans le cas complexe. En effet, sur la figure 4.2, on remarque que les points correspondant à des ensembles de Julia remplis non connexe, mais pas totalement, ont une forme bien près de celle de l'ensemble de Mandelbrot complexe, comme s'il était tatoué sur le Tétrabrot.

Aussi, lorsque l'on s'approche de la fractale et qu'on l'explore plus en profondeur, on retrouve de ce genre de tatous un peu partout comme en témoignent les figures 4.14 et 4.15 qui sont toutes deux des explorations du Tétrabrot.

Il ne s'agit pas là de la seule manifestation de l'autosimilarité du Tétrabrot. En regardant attentivement les figures 4.14 et 4.15, on peut voir que la structure semble se répéter lorsqu'on dirige notre regard de l'avant vers l'arrière de la fractale. Une autre belle manifestation de l'autosimilarité en trois dimensions du Tétrabrot est représentée à la figure 4.16. En effet, on trouve de petits Tétrabrots à l'intérieur de celui-ci lorsqu'on l'explore sur l'axe des réels.

De manière générale, il est plus facile d'observer l'autosimilarité du Tétrabrot à l'aide d'agrandissement successif d'un endroit de la fractale, un peu comme on a fait dans le chapitre 1 pour l'ensemble de Mandelbrot complexe.

L'autre propriété des fractales que l'on aimerait distinguer sur les coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe est le caractère irrégulier et fragmenté. Les figure 4.15 et 4.16 illustrent très bien cette propriété chez le Tétrabrot.

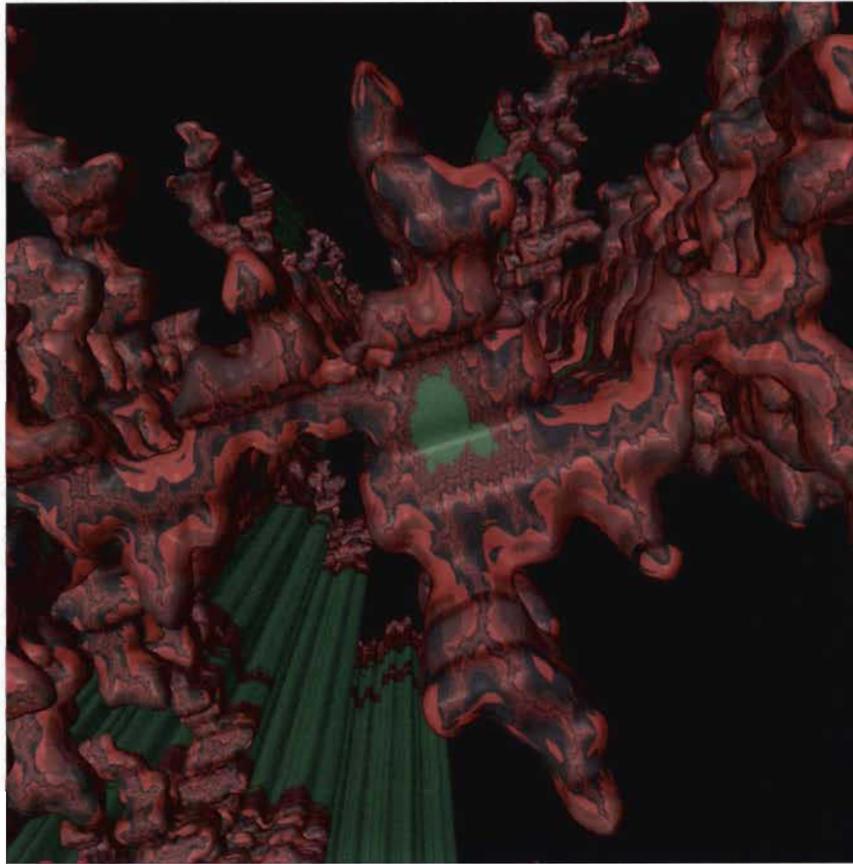


FIGURE 4.14 – Exploration du Tétrabrot : un petit tatou en forme d'ensemble de Mandelbrot

En explorant les ensembles de Julia remplis tricomplexes, on remarque également l'aspect irrégulier, fragmenté et autosimilaire comme en témoigne la figure 4.17 qui est une exploration de la première coupe de l'ensemble  $\mathcal{K}_{3,-1.754878}$ .

À la lumière des quelques images présentées dans cette section, on se rend compte de la richesse et de la diversité des coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe ou des ensembles de Julia remplis tricomplexes. On a seulement tenté d'illustrer le caractère fractal de ces ensembles. Il y a nature à passer énormément de temps en exploration de ces ensembles, à la recherches de nouvelles structures intéressantes, de nouvelles images époustouflantes.

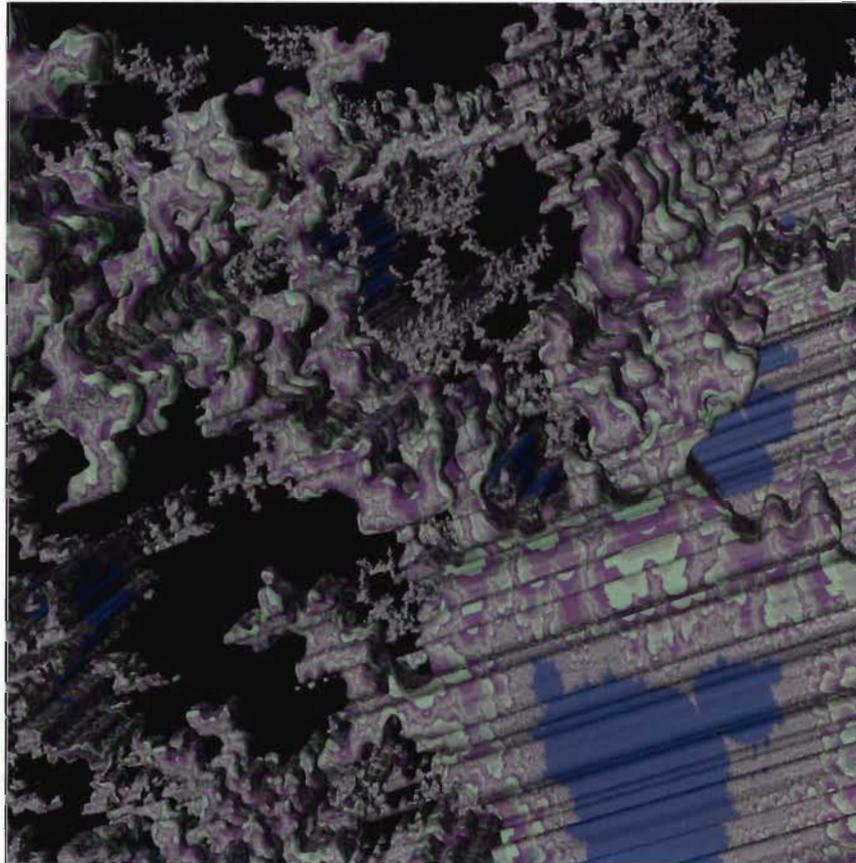


FIGURE 4.15 – Exploration du Tétrabrot : en violet : plusieurs tatous dont la forme approche celle de l'ensemble de Mandelbrot



FIGURE 4.16 – Exploration du Tétrabrot sur l'axe réel : on trouve une forme approchant celle du Tétrabrot

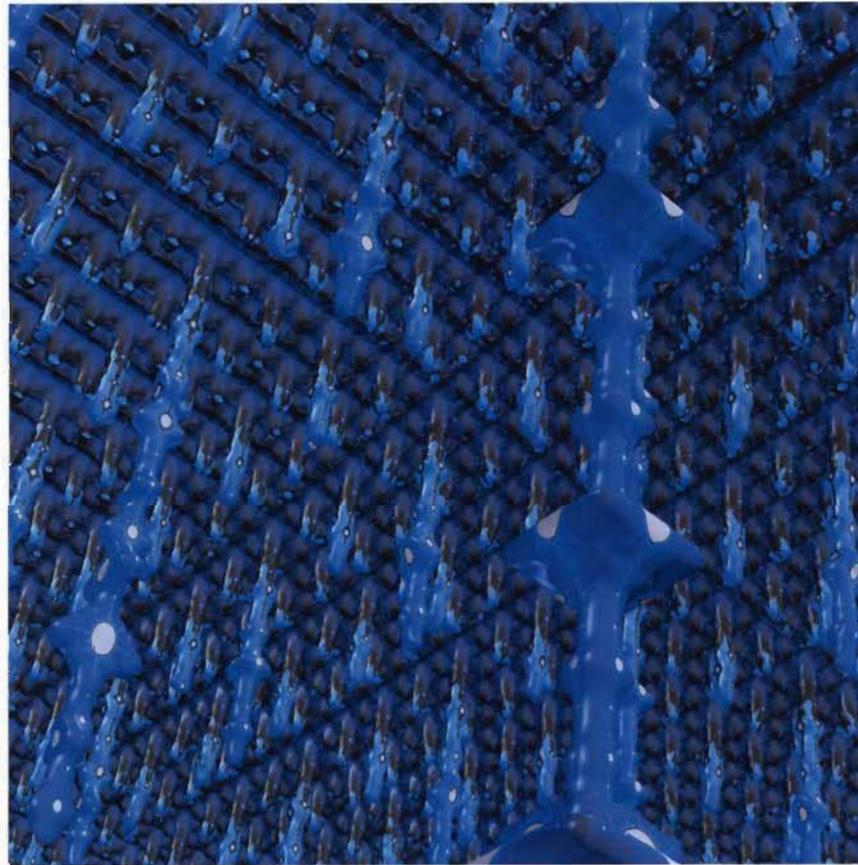


FIGURE 4.17 – Exploration de la première coupe de l'ensemble de Julia rempli  $\mathcal{K}_{3,-1.754878}$

# Conclusion

Par ce mémoire, on a présenté des ensembles fractals très connus : l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis. On a présenté, à partir de l'approche des systèmes dynamiques, les principales propriétés de ces ensembles, notamment le théorème de Fatou-Julia stipulant qu'un nombre complexe appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement si l'ensemble de Julia rempli qui lui correspond est connexe.

On a également traité l'approche des familles normales à partir de laquelle on peut également retrouver les ensembles de Julia, de Fatou et de Julia remplis et on a montré que ces deux approches nous amènent bel et bien vers les mêmes ensembles fractals.

On a également présenté la structure des nombres multicomplexes qui est en fait une sous-algèbre d'une algèbre de Clifford réelle.

Cette structure de nombres nous a permis de généraliser les ensembles fractals issus de la dynamique complexe de même que leurs principales propriétés. On a donné une généralisation du théorème de Fatou-Julia et on a vu que contrairement au cas complexe qui n'admet que deux possibilités pour les ensembles de Julia remplis, soit connexe ou totalement non connexe, les ensembles de Julia remplis multicomplexes d'ordre supérieurs à un offrent une troisième possibilité, celle d'être non connexe, mais avec des composantes connexes.

Aussi, grâce à un logiciel de visualisation de fractales tridimensionnelles, on a pu visualiser des coupes de l'ensemble de Mandelbrot multicomplexe et des ensembles de

Julia remplis multicomplexes. On a vu que l'étude de ces ensembles peut se limiter au cas tricomplexe puisqu'il n'y a pas vraiment de nouvelles structures intéressantes ressortant de l'utilisation des nombres multicomplexes d'ordre supérieur à trois. On a vu que les coupes tridimensionnelles principales de ces ensembles sont au nombre de huit et que certaines d'entre elles sont fractales et offrent donc un grand intérêt au niveau de l'exploration alors que d'autres sont beaucoup plus régulières.

On a entre autre suggéré que la huitième coupe tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe est en fait un tétraèdre régulier, ce qui reste à démontrer.

Aussi, l'approche qui a été utilisée pour généraliser l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia remplis est l'approche dynamique. Il serait intéressant de refaire la démarche en utilisant plutôt l'approche des familles normales et d'unifier encore une fois ces deux approches.

Finalement, bien que l'on ait généralisé plusieurs propriétés de l'ensemble de Mandelbrot et des ensembles de Julia remplis, plusieurs autres propriétés restent à démontrer. Entre autres, on pourrait répéter la démarche qui nous a permis d'obtenir la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot et voir ce que cela donnerait dans les espaces multicomplexes. Bref, il reste du pain sur la planche.

# Bibliographie

- [1] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [2] S. Bedding and K. Briggs, Iteration of quaternion maps, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **5**, 877-881 (1995).
- [3] John Bonobo, *De la génération des fractales, Théorie et Applications*, <http://john.bonobo.free.fr/fractal/doc.php>.
- [4] L. Carleson and T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [5] R. L. Devaney, Editor, *Complex Dynamical Systems The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets*, 34-36, (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics Vol. 49, AMS, 1994).
- [6] A. Douady and J. H. Hubbard, Iteration des polynômes quadratiques complexes, *C.R. Acad. Sc. Paris* **294**, 123-126 (1982).
- [7] R. Engelking, *General Topology*, 443-445, (PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977).
- [8] Francis J. Flanigan, *Complex Variables, Harmonic and Analytic Functions* (Dover publications, 1983).
- [9] V. Garant-Pelletier and D. Rochon *On a generalized Fatou-Julia theorem in multicomplex spaces*, *Fractals* **17**(3), 241-255 (2009).
- [10] J. Gomatam, J. Doyle, B. Steves and I. McFarlane, "Generalization of the Mandelbrot Set : Quaternionic Quadratics Maps", *Chaos, Solitons and Fractals* **5**, 971-985 (1995).

- [11] I. L. Kantor, *Hypercomplex numbers*, (Springer-Verlag, New York, 1989).
- [12] É. Martineau and D. Rochon, On a Bicomplex Distance Estimation for the Tetra-  
brot, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**(9), 1–12 (2005).
- [13] W. Metzler, The “mystery” of the quadratic Mandelbrot set, *American Association  
of Physics Teachers*, **62**, No. 9, 813-814, 1994.
- [14] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*,  
(Cambridge University Press, 2000).
- [15] A. Norton, Generation and Display of Geometric Fractals in 3D, *Computer Gra-  
phics* **16**, 61-67 (1982).
- [16] G. B. Price, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, (Marcel Dek-  
ker Inc., New York, 1991).
- [17] Hervé Queffélec, *Topologie : Cours et exercices corrigés*, 3e édition (Dunod, 2006).
- [18] D. Rochon, A Generalized Mandelbrot Set For Bicomplex Numbers, *Fractals* **8**,  
No. 4, 355-368 (2000).
- [19] D. Rochon, On a Generalized Fatou-Julia Theorem, *Fractals* **11**(3), 213-219 (2003).
- [20] D. Rochon, *Sur une généralisation des nombres complexes : les tétranombres*, (M.  
Sc. Université de Montréal, 1997).
- [21] C. A. Rogers, J. E. Jayne, C. Dellacherie, F. Topsøe, J. Hoffman-Jørgensen, D. A.  
Martin, A. S. Kechris and A. H. Stone, *Analytic Sets*, 326-331, (Academic Press,  
1980).
- [22] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3<sup>e</sup> ed. McGraw-Hill, (1987).
- [23] J. Ryan, Complexified Clifford Analysis, *Complex Variables* **1**, 119-149 (1982).
- [24] J. L. Schiff, *Normal families* (Springer-Verlag, New York, 1993).

# Annexe

## Suite diagonale

Nous allons expliquer ici le concept de suite diagonale à l'aide d'un exemple tiré de la preuve du théorème 2.7. Le théorème 2.8 utilise également une suite diagonale. Le principe est tout à fait similaire. Reprenons une partie de la preuve du théorème 2.7 afin de resituer le contexte :

...  $\mathcal{F}$  est normale dans  $D(z_n, r_n)$ , pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , et donc pour chaque suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ , on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de  $D(z_1, r_1)$  vers une fonction holomorphe  $f$  ou vers  $\infty$ . En particulier on extrait une sous-suite  $\{f_{n_k}^{(1)}\}$  qui converge uniformément sur  $D(z_1, \frac{r_1}{2})$ . Similairement, de la sous-suite  $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ , on peut extraire une sous-suite  $\{f_{n_k}^{(2)}\}$  qui converge uniformément dans  $D(z_2, \frac{r_2}{2})$  et dans  $D(z_1, \frac{r_1}{2})$ . Si on continue ce procédé, on a que la suite diagonale  $\{f_{n_k}^{(k)}\}$  converge uniformément dans  $D(z_n, \frac{r_n}{2})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , vers une fonction holomorphe  $f$  ou vers  $\infty$ .

Supposons que la sous-suite  $\{f_{n_k}^{(1)}\}$  de la suite  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$  soit la suivante :

$$\{f_1, f_3, f_8, f_{11}, f_{12}, f_{15}, f_{20}, f_{22}, f_{23}, \dots\}.$$

De cette sous-suite, on extrait une sous-suite  $\{f_{n_k}^{(2)}\}$ , supposons

$$\{f_1, f_8, f_{11}, f_{12}, f_{15}, f_{22}, f_{23}, \dots\}.$$

Poursuivant le processus, on extrait des sous-suites  $\{f_{n_k}^{(3)}\}$  et  $\{f_{n_k}^{(4)}\}$ , supposons

$$\{f_{n_k}^{(3)}\} := \{f_1, f_8, f_{11}, f_{15}, f_{22}, f_{23}, \dots\},$$

$$\{f_{n_k}^{(4)}\} := \{f_8, f_{15}, f_{22}, f_{23}, \dots\}.$$

On poursuit le processus pour  $k = 5, 6, \dots$

$\{f_{n_k}^{(k)}\}$	$f_{n_1}^{(\cdot)}$	$f_{n_2}^{(\cdot)}$	$f_{n_3}^{(\cdot)}$	$f_{n_4}^{(\cdot)}$	...
$\{f_{n.}^{(1)}\}$	$f_1$	$f_3$	$f_8$	$f_{11}$	...
$\{f_{n.}^{(2)}\}$	$f_1$	$f_8$	$f_{11}$	$f_{12}$	...
$\{f_{n.}^{(3)}\}$	$f_1$	$f_8$	$f_{11}$	$f_{15}$	...
$\{f_{n.}^{(4)}\}$	$f_8$	$f_{15}$	$f_{22}$	$f_{23}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

La suite diagonale est donc  $\{f_{n_k}^{(k)}\} := \{f_1, f_8, f_{11}, f_{23}, \dots\}$  et elle converge uniformément dans  $D(z_n, \frac{r_n}{2})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , vers une fonction holomorphe  $f$  ou vers  $\infty$ , car c'est une sous-suite de toutes les autres sous-suites considérées.