UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ÉDUCATION

PAR
ISABELLE DESHAIES

UNE PREMIÈRE FORMALISATION DE LA NOTION DE FRACTION CHEZ DES ÉLÈVES FORTS, MOYENS ET FAIBLES AU 2[E] CYCLE DU PRIMAIRE

JANVIER 2006

REMERCIEMENTS

J'exprime mes vifs remerciements et ma plus grande reconnaissance à ma directrice, madame Pascale Blouin, pour son aide et sa grande générosité de temps tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à remercier les élèves de l'école de la ville de Bécancour, ainsi que des enseignantes m'ayant permis de réaliser cette recherche.

Enfin, je remercie tout spécialement ma famille, qui a su me supporter jusqu'à la fin de ce projet.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'élaboration des connaissances sur les nombres rationnels a fait l'objet de plusieurs recherches en didactique des mathématiques et en psychologie du développement. Selon ces études, ce n'est que vers la troisième ou quatrième année du primaire que les élèves ont semble-t-il la maturité cognitive pour construire une véritable première formalisation de la fraction, c'est-à-dire utiliser une fraction pour quantifier des rapports en une partie et un tout de référence (par exemple : une partie constituant trois quarts de un). Les études montrent également que cette utilisation nécessite une coordination de plusieurs connaissances : celles relatives aux relations multiplicatives sur les nombres naturels et celles relatives aux notions de partition ou de partage et de réunion. Les études montrent aussi comment une première formalisation de la fraction nécessite une rupture par rapport aux conceptions développées sur les nombres naturels et une différenciation des relations additives et multiplicatives. Ainsi, ces différents passages obligés vers la notion de fraction entraînent de nombreuses erreurs chez les élèves dans les situations d'enseignement-apprentissage privilégiées pour débuter la formalisation de la notion de fraction.

Cette recherche propose une comparaison des connaissances utilisées par six élèves forts, moyens ou faibles de 4^e année du primaire lors de résolution de tâches impliquant la notion de fraction dans ses premières formalisations. Elle s'inscrit d'abord dans le cadre des études sur l'élaboration de connaissances sur la notion de fraction et vise à mieux comprendre les difficultés conceptuelles rencontrées par ces différents élèves dans cette lente et complexe acquisition tel que démontrée par les travaux de Parrat-Dayan et Vonèche (1991), Kieren (1993) et Vergnaud (1994) notamment.

Notre étude s'inscrit ensuite dans la problématique des élèves en difficulté d'apprentissage en raison notamment, de la nouvelle politique gouvernementale favorisant le maintien ou la réinsertion de ces élèves en classe régulière. Les recherches sur le maintien ou la réinsertion des élèves en difficulté d'apprentissage en classe régulière sont peu nombreuses et n'ont pas porté, à notre connaissance, sur l'enseignement et l'apprentissage de savoirs spécifiques, tels les nombres rationnels. Notre étude se propose de relever ce défi, celui d'examiner de manière différenciée les conduites de deux élèves classés en difficulté d'apprentissage à la lumière des conduites mathématiques usuellement observées chez les élèves du régulier. Enfin, cette étude comporte quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, la problématique de notre recherche est présentée. Dans ce chapitre, la question de la complexité et de la longue acquisition de la notion de fraction est discutée. Nous y soulignerons notamment l'impact d'une incompréhension, dès le départ, des notions mathématiques reliées aux nombres entiers quant à l'acquisition de la notion de fraction. Également, les différentes questions de notre recherche sont exposées.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les diverses études constituant le cadre de référence de notre étude. Nous abordons, dans un premier temps, les études sur la notion de fraction. Les études portant sur l'élaboration des connaissances sur la notion de fraction sont ensuite examinées. Cet examen réalisé, nous donnons un aperçu des recherches sur les élèves en difficulté d'apprentissage et nous décrivons les objectifs de la recherche.

Le troisième chapitre présente la méthodologie de la recherche. Dans ce chapitre, les différentes démarches retenues pour obtenir les données ainsi que la justification de la démarche d'analyse sont présentées. Enfin, la description des différentes épreuves expérimentales effectuées lors des deux entrevues est effectuée.

L'analyse des résultats est réalisée au quatrième chapitre. Dans celui-ci, nous présenterons les résultats de la recherche en décrivant pour chacun des sujets de l'étude les connaissances mathématiques qu'ils ont activées selon le type de tâches que nous leur avons présenté. Enfin, dans le dernier chapitre, nous concluons sur une interprétation potentielle de nos données. Nous y discutons aussi des limites de notre recherche et nous procédons à l'énoncé de perspectives de recherche.

PROBLEMATIQUE

1.1. Centre d'intérêt

Dans la foulée des États généraux (1994), la politique du ministère de l'éducation quant à l'intervention auprès des élèves en difficulté d'apprentissage fait de l'insertion de ces élèves en classe ordinaire l'objectif à atteindre pour l'ensemble du réseau scolaire. Ainsi, dans le cadre de nos activités professionnelles, nous avons eu le privilège d'être témoin des premières retombées de cette politique. L'enseignement en classe ordinaire au primaire fait en sorte que l'enseignant doit maintenant systématiquement adapter ses enseignements en fonction de divers types de clientèles, dont celle des élèves en difficulté d'apprentissage. Bien que la problématique de l'adaptation, ou l'adéquation de l'enseignement en fonction des élèves en difficulté d'apprentissage en classe ordinaire ne soit pas nouvelle, il convient de souligner que le principal changement introduit par la politique est celui que l'enseignant est maintenant explicitement invité à tout mettre en œuvre pour favoriser le maintien de ces élèves en classe ordinaire, avec des ressources parfois fort limitées. C'est dans ce contexte professionnel que notre intérêt pour l'intervention auprès des élèves en difficulté d'apprentissage s'est révélé.

En tant qu'intervenante en enseignement, témoin de ces changements en classe régulière, notre contexte d'intervention auprès des élèves est ainsi quelque peu modifié.

A plusieurs reprises, il devient parfois délicat de choisir les interventions à privilégier auprès des élèves en difficulté considérant d'une part notre formation initiale portant sur l'enseignement au régulier et, d'autre part, la préparation des divers intervenants et instances du milieu scolaire mobilisées pour la mise en œuvre de la politique ministérielle. Ainsi, pour plusieurs intervenants de classe régulière au prise avec le défi professionnel d'assurer le maintien des élèves en difficulté dans leur classe, plusieurs questions émergent dont les suivantes: Comment soutenir ces élèves dans leurs efforts à suivre le rythme régulier d'apprentissage de la classe? De quelle nature sont leurs difficultés ? Quels types d'interventions pédagogiques seraient à privilégier pour aider simultanément ces élèves et les autres de la classe ?

Parallèlement à ce premier aspect, nous avons aussi un intérêt marqué pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, plus spécifiquement la notion de fraction. A plusieurs reprises, nous avons été témoin d'impressions trop souvent fortement partagées par la population à l'égard notamment que l'apprentissage des mathématiques était souvent très ardu pour l'ensemble des personnes et que bien souvent, des expériences scolaires anciennes en mathématiques étaient perçues comme ayant été des expériences souffrantes ou malheureuses pour une certaine partie de la population. Les défis professionnels soulevés par l'enseignement des mathématiques au primaire sont ainsi nombreux en égard à ces impressions.

Au niveau de l'enseignement au primaire, la notion de fraction semble être un événement marquant pour les personnes dans l'histoire de leurs apprentissages en mathématiques. Certaines personnes témoignent même que l'enseignement de cette notion a été déterminant pour leurs apprentissages ultérieurs en mathématiques (poursuite ou arrêt de leur investissement). Actuellement, plusieurs des difficultés en mathématiques observées chez les jeunes élèves du primaire deviennent visibles pour les intervenants lorsqu'une première formalisation de la notion devient l'enjeu de l'enseignement. Enfin, pour plusieurs enseignants de mathématiques au primaire, l'enseignement de la notion de fraction et des nombres rationnels en général constitue un enjeu professionnel de taille, malgré le nombre d'outils mis à leur disposition.

1.2. Identification du problème

Dès l'école primaire, la notion de fraction représente un enjeu conceptuel de taille dans le curriculum scolaire. Plusieurs recherches se sont intéressées à l'élaboration des connaissances sur les nombres rationnels et, plus particulièrement, sur la construction de la notion de fraction chez de jeunes élèves. Selon les études mentionnées dans le cadre de référence, il semble que dès le deuxième cycle du primaire (3^{e} année du primaire), les élèves peuvent avoir la maturité cognitive pour appréhender la fraction en tant que relation partie tout ; ils peuvent réaliser une quantification fractionnaire des relations parties tout sur des quantités continues ou discrètes. Selon la recension des études effectuée par Blouin (2002), l'apprentissage des nombres rationnels nécessite que les élèves ne peuvent plus concevoir la multiplication comme une addition répétée et ne peuvent plus la considérer comme une opération qui « grossit » les nombres. Ainsi, dans les nombres rationnels, la multiplication est de nature composée, elle est analogue à une composition de fonction ; exemple : la multiplication de 1/3 par 1/4 signifie prendre les 1/3 de 1/4 de 1. Quant à l'addition, lorsqu'elle est considérée comme un nombre rationnel, elle ne peut plus faire référence aux procédures de comptage, mais elle doit être considérée dans sa forme algébrique. L'addition doit être vue comme une combinaison de quantités ou encore une réunion (Kieren, 1976). Ainsi, à cause des ruptures concernant certaines notions décrites ci-haut, les élèves doivent réellement prendre conscience des nouvelles propriétés de ces nouveaux nombres. Ce passage nécessite des ruptures qui, s'ils ne sont pas faits, provoqueront de grandes difficultés quant à l'acquisition et à la compréhension de ces nouveaux nombres. De plus, ces quantifications, premières formalisations de la notion, font appel à la coordination de plusieurs connaissances élaborées sur les relations multiplicatives travaillées à partir des nombres naturels et nécessitent également des ruptures avec certaines connaissances construites à partir des nombres naturels. Ce passage obligé entraîne chez les élèves des erreurs dans l'interprétation d'expressions relationnelles utilisées dans les situations de partition, situations privilégiées pour débuter l'apprentissage formel de la fraction.

Les études citées dans le cadre de référence montrent qu'une première formalisation de la notion de fraction s'appuie sur le développement des opérations de partage (division d'un tout en parties égales) dans l'établissement de relations partie à tout. L'ensemble de ce développement permet à l'enfant d'établir d'abord des comparaisons scalaires entières entre parties et tout de type : « la partie est n fois plus petite que le tout » et « le tout est n fois plus grand que la partie ». L'établissement de ces relations multiplicatives entières nécessite, selon les études recensées, une différenciation des structures additives et des structures multiplicatives et est fortement déterminé par la valeur numérique du partage à effectuée ou de la relation multiplicative à dégager.

La quantification des relations partie à tout à l'aide d'une fraction, une fois les relations multiplicatives mises en place fait appel à des connaissances différentes, selon que le contexte de partage implique des touts continus ou des touts discrets. Dans le cas d'un tout continu par exemple (Brassard, 1996), la partie représente à la fois la quantification de la relation partie à tout et la quantité (ex: le quart d'une pizza). Toutefois, dans le cas d'un tout discret, la partie s'exprime à l'aide du nombre d'éléments (ex: 3 éléments sur 12); la quantification de la relation partie à tout s'en trouve masquée.

Enfin, selon les études examinées, la maîtrise des premières formalisations de la notion en tant que relation fractionnaire fait appel à la coordination des connaissances sur les fractions élaborées dans le cadre de situations de partition selon que ces situations impliquent des touts continus ou des touts discrets. Ainsi, lors d'un partage en demi d'une collection de 5 pommes par exemple (Parrat-Dayan et Vonèche, 1991), l'élève doit coordonner plusieurs connaissances sur les fractions pour quantifier à l'aide de la fraction 1/2 la relation entre la partie (2 1/2 : 2 pommes et demi ou 5/2 : 5 demi-pommes) et le tout (5 pommes ou 1) ; il doit en effet, tenir compte à la fois du tout représenté par la collection de cinq pommes (tout discret) et le tout représenté par une pomme (tout continu) pour quantifier avec une fraction ce genre de situation de partage.

En conclusion, les études citées montrent qu'une première formalisation de la fraction ne se réalise que de manière progressive et est fortement influencée par la valeur numérique du partage à effectuer, par les fractions mises en jeu dans la relation partie à tout (fractions de type 1/n ou m/n) et par le type de tout à partager (tout continu ou tout discret).

Quelques questions peuvent découler de cette problématique. Nous en énumérons quelques-unes : 1) Chez les élèves qui débutent l'apprentissage formel de la notion de fraction, est-ce qu'il y a coordination entre les connaissances sur les relations multiplicatives et les relations fractionnaires? ; 2) Comment se réalise la coordination entre la relation multiplicative « n fois moins » et la relation fractionnaire « 1/n de » ? ; 3) Cette coordination se réalise-t-elle de la même manière pour tous les élèves d'une même classe ? ; 4) Les difficultés rencontrées par des élèves plus faibles dans cet apprentissage sont-elles de même nature que celles rencontrées par des élèves plus performants en mathématiques ?

1.3 Importance de la recherche

Dans notre étude, nous nous intéressons aux premières formalisations développées par des élèves contrastés du deuxième cycle du primaire sur la notion de fraction. Il nous apparaît en effet important que des études soient effectuées pour mieux comprendre comment s'élabore une notion-clée de l'apprentissage des mathématiques, la fraction et pour mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves. C'est sur cette base que peuvent éventuellement s'élaborer des situations didactiques susceptibles de provoquer les adaptations souhaitées chez tous les élèves pour la construction de la notion de fraction, même chez les élèves moins performants en mathématiques afin de favoriser leur maintien en classe régulière.

1.4 Questions de recherche

La principale question de cette recherche est ainsi la suivante :

Comment des élèves forts, moyens et faibles en mathématiques interprètent-ils les relations entre une partie et un tout (discret et continu) lorsque : 1) la situation renvoie à une relation fractionnaire de type « 1/n » ; 2) la situation renvoie à une relation fractionnaire de type « m/n » ; 3) la situation renvoie à une relation entière multiplicative ?

Sous-questions de recherche :

a) Quelles sont les connaissances activées par les élèves dans la résolution de tâches impliquant des relations entières multiplicatives de type « n fois plus » et « n fois moins » selon que ces tâches font appel à des touts discret ou continu ?

b) Quelles sont les connaissances activées par les élèves dans la résolution de tâches impliquant des relations fractionnaires de type « 1/n » et « m/n » selon que ces tâches font appel à des touts discret ou continu ?

c) Est-ce que les connaissances activées par les élèves dans l'interprétation des relations multiplicatives entières de type « n fois plus » et « n fois moins » sont utiles ou nuisibles dans l'interprétation des relations fractionnaires de type « 1/n » et « m/n » ?

d) Quelles sont les connaissances activées par les élèves dans la résolution de tâches impliquant des relations fractionnaires de type « 1/n » et « m/n » selon que ces tâches font appel à des parties de type « m/n : une expression fractionnaire » ?

Le dispositif expérimental mis en place pour trouver des éléments de réponse à notre question et nos sous-questions de recherche nous permettra atteindre notre objectif de recherche

CADRE THÉORIQUE

Notre recherche s'inscrit principalement dans le cadre des recherches sur l'apprentissage de la notion de fraction et sur la problématique de l'enseignement aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage ou dits « faibles » dans une classe de mathématiques. Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons un bref bilan des études sur la notion de fraction. Cette partie est suivie d'une analyse du champ conceptuel de la notion. Les recherches sur la construction de cette notion sont examinées dans la troisième partie. Nous passons ensuite à l'examen des études sur les élèves en difficultés d'apprentissage. Les objectifs de notre recherche sont enfin précisés.

2.1 La notion de fraction

Les études sur la notion de fraction montrent d'une part, combien cette notion est ardue du point de vue mathématique et, d'autre part, comment elle constitue une partie très riche des mathématiques. (NCTM, 1964; Behr et al, 1983; Kieren, 1994 et 1989; Rouche, 1992 et 1998). Cette notion s'inscrit en effet, dans le champ des nombres rationnels; elle est ainsi caractérisée par les propriétés particulières du nombre rationnel (Vergnaud, 1994 et 1983), notamment les notions d'équivalence et de densité et leur nature essentiellement multiplicative[1]. Dans les études que nous avons consultées, les nombres rationnels sont principalement définis comme le résultat de la division de deux

---

[1] Nous nous limitons ici aux propriétés particulières des nombres rationnels potentiellement explorées dans le cadre des études primaires.

nombres entiers ($b = xa$; $x = a \div b$, où b est différent de 0) ou comme une classe d'équivalence de couple d'entiers naturels. Ainsi, la fraction 2/3 par exemple, est le représentant possible de l'ensemble des divisions de deux nombres entiers qui donnent le nombre rationnel 2/3 ; la notion d'équivalence découle de cette propriété des nombres rationnels où chaque élément (fraction, nombre décimal ou pourcentage[2]) d'une classe d'équivalence (nombre rationnel) peut désigner la classe. Cette puissante caractéristique des nombres rationnels n'apparaît pas aisément à l'élève du primaire, habitué à désigner par un seul code digital un nombre entier. Aussi, par cette définition, nous comprenons que le nombre rationnel est à la fois un quotient et un rapport et qu'il est essentiellement de nature multiplicative (le nombre 2/3 par exemple, est issu de l'une ou l'autre des suites d'opérations suivantes : 1 X 2 ÷ 3 ou 1 ÷ 3 X 2). Enfin, l'ensemble des nombres rationnels est dense car entre deux nombres rationnels quelconques, il existe une infinité de nombres rationnels (NCTM, 1964). Cette dernière caractéristique constitue un enjeu important pour des élèves du primaire dans leur démarche de différenciation des nombres rationnels et des nombres entiers (Brousseau, 1981; Kieren, 1993 et 1989; Desjardins et Hétu, 1974).

Ces études montrent aussi que les nombres rationnels sont, par rapport aux nombres entiers, de nouveaux nombres. Ils permettent ainsi de conserver certaines propriétés des nombres entiers mais également, ils nécessitent l'abandon de d'autres. Par ailleurs, de nouvelles propriétés, en rupture totale avec celles des nombres entiers, émergent

[2] Nous nous limitons ici dans les écritures relatives aux nombres rationnels, à celles explorées dans le cadre des études primaires.

notamment les notions de densité et d'opérations multiplicatives. Avec l'ensemble des nombres rationnels par exemple, la multiplication de deux nombres ne peut plus désormais se concevoir comme une addition répétée ou encore comme une opération qui « grossit » les nombres (Kieren, 1989). L'interprétation de l'opération de multiplication dans les nombres rationnels se distingue ainsi de celle réalisée dans les nombres entiers.

Enfin, comme le montrent les analyses conceptuelles de Kieren (1993, 1989) et de Rouche (1998, 1992) notamment, connaître les nombres rationnels modifie en profondeur notre conception du nombre et s'avère essentiel pour envisager l'ensemble des nombres réels. Leur utilisation permet aussi de mettre en relation le concept de nombre avec plusieurs concepts mathématiques. Enfin, l'acquisition du concept de nombre rationnel est nécessaire pour l'interprétation juste d'un nombre appréciable de situations impliquant une quantification des relations entre parties et tout ou des comparaisons de rapports.

2.2. Champ conceptuel de la notion de fraction : les 5 interprétations

D'un point de vue didactique, nous retenons des études précédentes que les nombres rationnels constituent une solution à une vaste variété de problèmes et que les situations donnant un sens à ces nombres sont diversifiées et nombreuses. Ces situations définissent en quelque sorte, le champ conceptuel des fractions[3], c'est-à-dire les espaces de problèmes que ces nombres ont permis de résoudre ou dont ils étaient la solution. Ainsi, les définitions choisies pour les enseigner peuvent être nombreuses et les occasions de construction de ces nombres sont variées. L'examen effectué notamment par Kieren (1993, 1989) et Berh et al (1983) (voir Blouin, 2002) de l'ensemble de ces situations, permet de dégager les différentes interprétations suivantes de la fraction : partie-tout, rapport, opérateur, quotient et mesure. Cet examen approfondi des différents rôles tenus par une notion mathématique s'avère nécessaire comme le préconise la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990)[4]. Dans les prochains paragraphes, nous décrivons ces interprétations à partir de la recension des études précitées effectuée par Blouin (2002).

2.2.1. Fraction « partie-tout »

L'interprétation partie-tout permet d'utiliser la fraction pour quantifier une relation entre un nombre de parties et un tout. Dans cette interprétation, le numérateur désigne le nombre de parties réunies et le dénominateur, le nombre de parties égales qu'un tout continu (longueur ou figure géométrique) ou discret (collection) a été partagé. Cette

---

[3] Considérant qu'avec les nombres rationnels, chaque élément peut désigner la classe, nous retenons l'expression « fraction » dans la suite du texte.

[4] « Selon la théorie des champs conceptuels élaborée par Vergnaud (1990), en effet, les concepts se développent en liaison à des situations ou des problèmes que l'apprenant sait résoudre et à d'autres pour lesquelles il cherche une solution. Les propriétés et les invariants constitutifs des concepts construits par l'apprenant dépendent de la nature et des caractéristiques de ces situations. Diversifier les situations permet d'aborder différents sens d'un concept; cette diversité constitue un terrain propice pour l'abstraction des propriétés essentielles ou encore, des invariants d'un concept. » (citation tirée de Blouin, 2002, p. 12)

interprétation est également nommée « modèle inclusif » car les parties sont contenues dans le tout (Vergnaud, 1983); elle ne permet ainsi de donner un sens qu'aux fractions égales ou inférieures à 1.

2.2.2. Fraction « rapport »

Avec cette interprétation, la fraction est utilisée pour représenter une relation entre deux quantités. Cette interprétation est très utile pour aborder les fractions plus grandes que 1. Aussi, la notion de proportion en découle. Afin de comprendre davantage la fraction en tant que rapport, examinons plus attentivement l'énoncé suivant :

> Il y a 15 filles et 18 garçons dans la classe A, alors que l'on compte 14 filles et 21 garçons dans la classe B.

Dans le premier cas, la classe A, le nombre de filles est le 5 sixièmes du nombre de garçons ; le nombre de garçons est le 6 cinquièmes du nombre de filles. Dans le second cas, la classe B, le nombre de filles est le 2 tiers du nombre de garçons ; le nombre de garçons est le 3 demis du nombre de filles.

2.2.3. Fraction « quotient » ou « résultat d'une division »

Dans un contexte de « quotient », la notation fractionnaire a/b est utilisée pour représenter le résultat de la division du numérateur par le dénominateur. Afin de comprendre davantage ce type d'interprétation, examinons plus attentivement le problème suivant : Il y a 3 biscuits pour 6 amis. Combien de biscuits auront chaque ami? Pour résoudre ce problème, on divise 3 par 6 ce qui nous donne trois sixièmes de biscuit par enfant. Cette interprétation de la notion de fraction fait réellement référence à la division. La fraction est ici le résultat de la division de 2 nombres entiers. Ainsi, un tout a été multiplié par a et ensuite divisé en b parties égales.

2.2.4. Fraction « opérateur »

L'interprétation « opérateur » de la fraction permet de concevoir la fraction comme une transformation. Il est ainsi possible d'agrandir ou de réduire des figures géométriques (tout continu) et des collections (tout discret) par l'application de la fraction. Observons le problème suivant afin de mieux comprendre cette interprétation puissante de la notion de fraction :

> Mandoline possède 15 billes. Xavier en possède 12. Quels sont les rapports entre les collections de Mandoline et de Xavier ?

Dans cette situation, le nombre de billes de Xavier peut être perçu comme le résultat de l'application d'une transformation multiplicative au nombre de billes de la collection de Mandoline. Cette transformation est alors « * 4/5 » ou « 4/5 de ». Inversement, on peut trouver la transformation qui, partant du nombre de billes de Xavier (12), permet de trouver le nombre de billes de Mandoline (15), soit « * 5/4 » ou « 5/4 de ».

2.2.5. Fraction « mesure »

Dans cette dernière interprétation, la fraction représente le résultat d'une mesure. Ainsi, la fraction m/n serait le résultat de l'itération de la fraction unité 1/n. Exemple : la fraction 2/3 serait le résultat de l'itération de la fraction unité 1/3; 2/3 serait donc 1/3 + 1/3 ou 2 * 1/3. Cette interprétation est fortement sollicitée lors de l'usage d'expressions orales usuelles sur les fractions de type : quarts, tiers, cinquièmes, etc. où la référence à l'unité de mesure « quart de un » par exemple est explicite. Ainsi, cette interprétation peut constituer une porte d'entrée pertinente pour donner du sens aux fractions supérieures à 1. Enfin, l'interprétation « mesure » de la fraction permet de se représenter l'addition de fractions. Prenons comme exemple l'addition de 2/6 à 3/6; cette addition est alors envisagée par l'ajout répété de la fraction unité 1/6 à la fraction 3/6 :

3/6, 4/6, 5/6. 3/6 + 2/6

Notre analyse du champ conceptuel de la notion de fraction suggère que les fractions peuvent être la solution à une grande variété de problèmes mathématiques et comportent plusieurs interprétations. Ces interprétations ne sont toutefois pas indépendantes les unes des autres comme le mentionne Kieren (1980, 1993); les problèmes mathématiques qui donnent sens aux fractions réfèrent rarement uniquement à une seule de ces interprétations. Ainsi, une réelle compréhension de la notion de fraction suppose non seulement de visiter les 5 interprétations mais également, implique une coordination entre elles comme le montre l'exemple suivant :

Dans l'expression « 2/3 de gâteau », une coordination de plusieurs interprétations de la fraction est nécessaire; nous énonçons ces interprétations dans un ordre quelconque. L'interprétation « partie-tout » nous permet de concevoir qu'un gâteau constitue le tout (3/3), qu'il est composé de 3 parties égales et que chacune des parties constitue 1/3 du tout. L'interprétation « mesure » permet de se représenter la fraction 1/3 du gâteau comme étant une unité de mesure trois fois plus petite que le tout et que la fraction 2/3 représente le résultat de l'itération de cette fraction unité; processus qui permet de mesurer la quantité de gâteau (soit moins d'un gâteau). L'interprétation « quotient » de la fraction peut également être utile dans ce contexte. L'interprétation de l'expression « 2/3 de gâteau » peut être envisagée comme étant la part que chacune des 3 personnes obtient lorsque deux gâteaux sont partagés entre elles. Enfin, l'interprétation « opérateur » de la fraction permettrait de concevoir la quantité fractionnaire 2/3 de gâteau comme le résultat de l'application de la fraction opérateur 2/3 sur la quantité 1 (ex: prendre 2/3 de fois un gâteau).

Cette brève analyse du champ conceptuel de la notion de fraction fait ressortir la richesse mais aussi la complexité de cette notion. Comment se développe cette notion chez les enfants du primaire ? Sur quelles connaissances prend appui une première formalisation de la fraction ? Notre recherche sur les difficultés rencontrées par des enfants forts, moyens et faibles en mathématiques dans leurs premières formalisations de la fraction doit être éclairée par les réponses actuelles à ces questions.

2.3. Développement d'une première formalisation de la notion de fraction

L'acquisition de la notion de fraction n'est pas simple en soi. Celle-ci requiert plusieurs années d'apprentissage et d'enseignement, si bien, que ce n'est seulement qu'à l'âge adulte qu'une bonne conception de cette notion peut être observée (Blouin, 2002). De plus, l'apprentissage de la notion de fraction (des nombres rationnels) est en fait l'apprentissage de nouveaux nombres. Ce nouvel apprentissage fait place à de nouvelles propriétés des nombres, ce qui amène de nouveaux obstacles. Selon Brousseau (1981), le passage des nombres entiers aux nombres rationnels est complexe et la série d'obstacles vécue par les enfants est le résultat d'une résistance au changement d'emploi des nombres (exemple : la multiplication d'un nombre entier « grossit » ce nombre, tandis que la multiplication d'un nombre rationnel « diminue » ce nombre).

Les études portant sur l'apprentissage des nombres rationnels[5] montrent que l'acquisition de ces nombres s'échelonne sur plusieurs années (entre l'âge de 8 ans et de 14 ans environ) et est accompagnée d'un cortège d'erreurs et de difficultés pour tous les apprenants, témoignant ainsi de la complexité du processus (Desjardins et Hétu, 1974 ; Parrat-Dayan, 1991). Cette lente acquisition s'explique, comme le mentionnent notamment Vergnaud (1994) et Kieren (1993), par des niveaux de formalisation de la notion qui s'avèrent nécessaires de développer pour avoir une compréhension formelle des nombres rationnels. Ainsi, par exemple, selon ces études, le niveau de compréhension nécessaire pour interpréter adéquatement la « règle de trois » est nettement plus élaboré que celui nécessaire pour exprimer une quantité d'objets (ex : la fraction pour quantifier la relation partie-tout de type « ce morceau est un quart du gâteau »). Les études montrent enfin que les élèves semblent spontanément s'appuyer sur les connaissances qu'ils ont développées à partir de leurs expériences sur les nombres entiers dans leur acquisition des nombres rationnels, même si ces connaissances ne sont pas toujours utiles, voire certaines peuvent s'avérer fort nuisibles parfois, à une compréhension opératoire de la fraction (Kieren, 1989 ; Blouin, 2002). Considérant que notre étude s'intéresse aux enfants du primaire, seules les études portant sur le développement d'une première formalisation de la notion de fraction seront examinées.

---

[5] Dans le présent texte, nous retenons l'expression « fraction » en tant qu'écriture possible d'un nombre rationnel.

Les études sur la construction de la notion de fraction (Piaget (1948), Bergeron et Herscovics (1987) Pothier et Sawada (1983), Parrat-Dayan et Vonèche (1991) et Blouin (1999) notamment) montrent que le développement d'une première formalisation de la fraction passe par le développement des opérations de partage et de réunion et par le développement des opérations multiplicatives. Dans le premier cas, par exemple, les études de Piaget et al. (1948) toujours d'actualité, montrent qu'une coordination des opérations de partage et de réunion passe par essentiellement deux étapes importantes : 1) le développement de la notion de partie en tant que partie d'un tout à la fois décomposable et recomposable ; 2) l'égalisation des parties. Ainsi, une fois ces étapes franchies, le processus cognitif de transformation des parties en fraction d'un tout peut s'avérer possible. Cette transformation toutefois, ne peut être réalisée sans le développement des opérations multiplicatives comme le montre l'exemple suivant : la notion de fraction peut intervenir dans de nombreuses situations de comparaison de collections ou de nombres. Ainsi, pour pouvoir comparer des collections de 4 et de 12 éléments entre elles (respectivement les collections A et B), nous pouvons effectuer cette comparaison à l'aide des relations additives entières, des relations multiplicatives entières ou encore des relations fractionnaires. Dans le premier cas, la collection A est 8 de moins que la collection B et la collection B est 8 de plus que la collection A. Dans le deuxième cas, la collection A est 3 fois moins que la collection B et la collection B est 3 fois plus que la collection A. Enfin, dans le dernier cas, la collection A constitue un tiers (1/3) de la collection B et la collection B constitue trois unièmes de la collection A. Ce dernier exemple, constitue en fait une première formalisation de la notion de fraction.

Ainsi, pour pouvoir déterminer la fraction qu'une collection représente par rapport à une autre, cela nécessite dans un premier temps de pouvoir identifier une des collections comme étant une partie de l'autre et d'associer un opérateur multiplicatif à cette partie (un opérateur de type « x fois plus ou fois moins que y ») et de pouvoir associer à cet opérateur une fraction unitaire de type (1/n).

Ces études spécifient enfin, comment l'acquisition des opérations de partage et de réunion peut varier en fonction principalement des caractéristiques suivantes : le contexte, la forme et la valeur numérique du partage. Dans le premier cas, selon qu'il s'agisse du partage d'un tout discret ou d'un tout continu en x parties égales (ex : partager une collection de 12 objets (tout discret) ou un objet (tout continu) en x parties égales), cela ne mobilisera pas les mêmes habiletés chez les enfants. Si dans le cas d'un tout discret, les connaissances des enfants sur les nombres entiers s'avèrent un atout; dans le cas d'un tout continu, la quantification d'une des parties de l'objet est impossible sans avoir recours à la notion de fraction. Dans le deuxième cas, partager également un objet rond s'avère une opération plus difficile à maîtriser que celle de partager un objet rectangulaire. Enfin, dans le dernier cas, il s'avère que les enfants maîtrisent plus rapidement les partages en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair. De plus, certaines opérations de partage en un nombre pair de parties sont plus rapidement maîtrisées que d'autres (ex : ÷2, ÷4, ÷8, ÷16 plus facile que ÷ 6, ÷12).

Dans les trois sections qui suivent, nous décrivons le processus de construction de la notion de fraction à l'aide d'une part, des études sur les opérations de partage et de réunion et, d'autre part, celles sur le développement des opérations multiplicatives et enfin, avec celles directement reliées à la notion de fraction elle-même.

2.3.1. Études portant sur le développement des opérations de partage et de réunion

Les études de Piaget, Inhelder et Szeminska (1948) et Pothier et Sawada (1983) sont à notre connaissance, les principales études significatives sur le développement des opérations de partage et de réunion. Ces études montrent comment l'action de partager en parties égales constitue bien souvent pour les jeunes enfants la première expérience implicite avec la notion de fraction. Ces études spécifient enfin, comment l'acquisition des opérations de partage et de réunion peut varier en fonction principalement du contexte (tout continu versus tout discret) et de la valeur numérique du partage. Dans le texte qui suit, nous décrivons brièvement ces études.

Ayant réalisé une étude auprès d'enfants âgés de 3 à 8 ans, les résultats obtenus par Piaget et al (1948) nous permettent de comprendre l'évolution de la façon de partager des touts continus en un certain nombre de parties égales. Ainsi, selon cette étude, les enfants utilisent d'abord le morcellement comme stratégie pour partager un tout continu en plusieurs parties; cette stratégie toutefois est utilisée sans égard au tout. Ensuite, les tentatives de partition des surfaces observées par Piaget et al (1948) sont principalement des actions de découpage par dichotomie simple ou double et enfin, les dernières stratégies privilégient des actions de sectionnement. Ainsi, les résultats obtenus dans cette étude permettent d'établir un modèle de l'évolution du schème de partage. Ce modèle comporte sept étapes. Dans le texte qui suit, nous décrivons très sommairement ces étapes en illustrant les stratégies utilisées par les enfants pour partager un tout continu (galette ou gâteau) en deux, trois ou quatre parties égales.

Lors des deux premières étapes, les enfants effectuent un partage sans prise de conscience du tout et du nombre de parties à obtenir même s'ils réussissent à épuiser le tout dans les activités demandées. C'est lors de la deuxième étape que les enfants prennent véritablement conscience du nombre de parties à obtenir. Par exemple, à cette étape, l'enfant associe le partage en deux parties à deux coupures à effectuer ou à faire deux morceaux. Les morceaux ou parties ainsi obtenus ne sont pas nécessairement égaux .

La troisième étape se caractérise par la nécessité chez les enfants à épuiser le tout malgré l'utilisation de stratégies non pertinentes. Ainsi, des difficultés persistent sur l'égalité des parties et sur le nombre de coupures à effectuer pour obtenir le nombre de parties recherché. Pour obtenir deux parties par exemple, un enfant fait deux coupures et obtient trois parties; avec la partie supplémentaire, l'enfant poursuit alors son partage en effectuant à nouveau deux coupures. Ainsi, le tout est épuisé mais le nombre de parties est trop élevé et les parties ne sont pas nécessairement égales. Ce n'est que lors de la quatrième étape que les enfants trouvent le nombre des coupures à effectuer sur la surface pour obtenir le nombre de parties voulu; les parties sont par contre inégales mais le tout est épuisé. L'égalité des parties n'apparaît dans les conduites des enfants que lors de la cinquième étape. Lors de la sixième étape, l'enfant prend désormais conscience que la partie est incluse dans le tout, ce qui nous amène au début de la notion de fraction. À cette étape, les enfants savent que la partie est reliée au tout, que le tout est composé de parties égales et enfin que la partie n'est pas le tout. La conservation du tout ne voit que son apparition lors de la septième étape. Selon l'étude de Piaget, ce n'est qu'aux deux dernières étapes qu'un véritable partage en parties égales avec conservation du tout est effectué. Cette dernière acquisition n'est possible de façon formelle qu'au stade opératoire, c'est-à-dire vers l'âge de 7 à 9 ans.

L'étude effectuée par Pothier et Sawada (1983) est une étude qui se situe dans le prolongement de celle de Piaget. Dans leur étude, Pothier et Sawada ont cherché à vérifier si les diverses stratégies fréquemment observées chez les enfants lors d'un partage égal pouvaient varier selon la valeur numérique des partages à effectuer. L'étude démontre que les stratégies utilisées par les enfants semblent similaires à celles observées par Piaget. En effet, les enfants privilégient la stratégie par dichotomie simple ou double. Il semble par contre, selon l'étude de Pothier et Sawada, que les partages selon un nombre impair de parties soient plus difficiles à réaliser que ceux impliquant un nombre pair de parties. Ces auteurs proposent ainsi un nouveau modèle sur le développement des habiletés de partage. Leur modèle comporte 5 niveaux; nous le décrivons dans le texte qui suit.

Pothier et Sawada (1983) ont questionné 43 enfants inscrits de la maternelle à la troisième année du primaire selon la proportion d'enfants suivante : 8 enfants à la maternelle, 8 enfants en première année, 12 enfants en deuxième année et 15 enfants en troisième année. Ceux-ci avaient donc entre 4 ans et 11 mois et 9 ans et 8 mois. Lors de cette étude, plusieurs épreuves de partition leur ont été soumises. Ainsi, ces enfants étaient invités à partager un gâteau entre deux, quatre, trois et cinq personnes de manière à ce que chacune des personnes en ait autant.

À un premier niveau de compréhension, appelé niveau intuitif par les auteurs, les enfants interprètent le partage comme une coupure. Le partage en parties égales est très complexe pour les enfants à ce niveau. Lorsqu'ils sont invités par exemple à partager en deux un biscuit, les enfants vont le briser en deux, en donnant un morceau à chacun, mais sans se soucier de la grosseur de celui-ci ou de son égalité avec l'autre.

Le deuxième niveau fait référence au développement de stratégies de partage de type « couper à deux reprises » ou « faire deux sections » indépendamment du nombre de parties à obtenir. Les stratégies développées à ce niveau permettent à l'enfant de réussir quelques fois à illustrer des partages en deux et en quatre parties par exemple. Par contre, ces stratégies ne permettent pas de réussir des partages en trois et en six parties.

A ce niveau, la principale préoccupation des enfants est d'obtenir le nombre de parties demandé. Ainsi, quelques fois, ces parties sont égales mais, à plusieurs reprises, elles ne le sont pas. L'enfant utilise la même stratégie pour résoudre des problèmes où d'autres partages sont demandés, mais sans succès.

Au troisième niveau, l'enfant cherche à obtenir l'égalité des parties mais ne réussit pas toujours à cause de la prégnance des stratégies limitées du niveau deux et de la valeur numérique du partage. Par exemple, à ce niveau, l'enfant parvient à obtenir l'égalité de parties seulement si le partage à effectuer est de valeur numérique selon une puissance de 2 (2, 4, 8 ou 16). Pour les autres partages, l'enfant utilise les stratégies de niveau 2 mais il les compense. Ainsi, pour ces partages, l'enfant parvient à obtenir le nombre de parties demandé mais les parties ne sont pas égales. Par exemple, il parvient à obtenir trois parties à partir d'un découpage en deux en effectuant une première coupure de la figure en deux parties égales et en coupant une des deux parties en deux parties égales.

Lors du quatrième niveau, l'enfant prend conscience de l'inadéquation de sa stratégie de couper deux fois ou en deux pour obtenir des parties égales et il développe une nouvelle stratégie : le comptage de parties. Il fait une partie à la fois et une fois le nombre de parties obtenu, il égalise les parties; cette stratégie lui permet donc la réussite. Par contre, si cette stratégie du « un/un » se révèle être efficace pour les petits nombres, elle s'avère trop longue pour les nombres plus élevés.

Le cinquième niveau fait référence à la composition. L'enfant, lorsqu'il doit partager en un plus grand nombre de parties (ex : 9 ou 15), il développe alors une stratégie de composition de partages. Par exemple, pour partager en 9 parties, il partage d'abord en 3 parties, les égalise, et après, il repartage en 3 parties chacune des parties précédentes et il égalise à nouveau. Ainsi, les 9 parties sont obtenues par la composition de deux partages en 3 successifs. À ce stade, les élèves prennent conscience que la stratégie du « un/un » n'est pas efficace avec les nombres impairs élevés. Ainsi, l'élève qui atteint ce niveau en viendra à utiliser un algorithme de multiplication. Exemple : partager en 9 parties = partager 3 fois en 3 parties égales. À ce stade, les élèves peuvent donc composer n'importe quel partage et lui attribuer du sens.

Une dernière étude importante sur le développement des habiletés de partition qu'il convient de mentionner est celle de Hiebert et Tonnessen (1978). Afin de voir si une généralisation des résultats obtenus par Piaget et al (1948) était possible, ces auteurs ont centré leur étude sur les habiletés de partage sur des tous discrets; contexte différent de celui utilisé par Piaget et al, c'est-à-dire, des touts continus. Ils ont ainsi pu démontrer que le développement des conduites de partage de touts discrets et de touts continus n'est pas similaire. En somme, le partage des quantités discrètes (exemple : une collection de x objets) est plus facile pour la majorité des enfants que le partage de quantités continues (ex : un objet). Selon ces auteurs, les partages de quantités discrètes et de quantités continues ne mobiliseront pas nécessairement les mêmes habiletés. De ce fait, lors d'une résolution de problèmes contenant des quantités discrètes, l'enfant n'est pas nécessairement obligé de voir cela comme un tout, puisque le partage peut s'effectuer à l'aide d'une simple distribution d'un élément à la fois. Si dans le cas d'un tout discret, les connaissances des élèves sur les nombres entiers s'avèrent un atout; dans le cas d'un tout continu, la quantification d'une des parties de l'objet est impossible sans avoir recours à la notion de fraction (Vergnaud, 1983).

2.3.2. Études portant sur le développement des opérations multiplicatives

Ricco (1982) a effectué une étude sur la résolution de problèmes impliquant le maniement de la notion de fonction linéaire. Cette recherche porte uniquement sur la classe de problèmes faisant intervenir l'isomorphisme de mesures, c'est-à-dire une proportion entre deux espaces de mesure tel que défini par Vergnaud (1981, 1983 et 1994).

L'étude de Ricco fut réalisée auprès de 80 enfants de 7 à 11 ans répartis dans 4 classes différentes de deux écoles. Chacune des deux épreuves furent administrées à 40 enfants. Pour les deux épreuves proposées aux enfants, la question posée fut la suivante : « Plusieurs enfants et instituteurs d'une école vont dans une papeterie pour acheter des stylos (ou des cahiers) comme celui-ci (on lui montre un stylo ou un cahier), tout le monde doit acheter la même marque de stylo (ou de cahier). » Un tableau fut remis aux enfants. Dans ce premier tableau (voir l'exemple ci-dessous), les enfants doivent trouver le prix payé pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15. 16, 18, 71, 72 et 75 stylos, sachant que les prix payés pour 3 et 4 stylos sont respectivement de 12F et de 16F.

Épreuve no. 1		
	Nombre de stylos achetés	Prix payé
Pascale	1	
Didier	2	
Agnès	3	12 F.
Anne	4	16 F.
Marcel	5	
Sophie	6	
Louis	8	
Catherine	10	
M. Dostal	15	
Mme. Dupont	16	
M. Daudin	18	
Mme. Lemaine	71	
M. Ducros	72	
M. Simon	75	

Également, pour la deuxième série d'épreuves, un second tableau de données fut distribué aux enfants. Dans ce deuxième tableau, les enfants doivent trouver le prix payé pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15. 16, 18, 71, 72 et 75 cahiers, sachant que le prix payé pour 3 et 5 cahiers sont respectivement de 12F et de 20F.

Les résultats obtenus dans cette étude nous éclairent sur le développement des rapports multiplicatifs entiers chez les enfants. Nous pouvons constater, suite à notre analyse des résultats obtenus par Ricco, que certaines stratégies employées par les enfants lors de ces résolutions de problèmes mènent à un succès, tandis que d'autres, aboutissent à un échec. Cette recherche permet ainsi de dégager 4 niveaux de compréhension d'un rapport multiplicatif entier, niveaux répartis de 0 à 3 et libellés par l'auteur de la manière suivante :

> Niveau 0 : Règles de correspondance arbitraire respectant seulement l'ordre strictement croissant;
>
> *Niveau 1 : Suite numérique + 1;*
>
> *Niveau 2 : Règles composites de caractère additif ou multiplicatif;*
>
> *Niveau 3 : Notion de constante.*

Dans le texte qui suit, nous décrivons brièvement ces niveaux.

Les conduites de niveau 0 sont des conduites qui consistent à établir arbitrairement les valeurs de l'ensemble d'arrivée tout en respectant les relations d'augmentation ou de diminution sans toutefois qu'une opération stable ne permette de quantifier ces relations de différence entre l'espace de départ et l'espace d'arrivée. Exemple : « Cet objet coûte moins cher, donc, je paie un peu moins. » Cette stratégie n'est pas vraiment précise; aucun opérateur numérique n'est impliqué.

Au niveau 1, les enfants découvrent l'opérateur additif +1 qui engendre la suite numérique de l'ensemble de départ et l'appliquent aux images de l'ensemble d'arrivée. À ce niveau, l'enfant ne se soucie pas de l'écart entre les deux ensembles de données (départ et arrivée). Il voit que le schéma semble être croissant, donc il ajoute un à chacune des données, sans se soucier de savoir si c'est la bonne valeur à ajouter. Par exemple, selon le tableau présenté à l'épreuve numéro un, pour déterminer le prix de 5 stylos, l'enfant ajoute 1F aux 16 F de 4 stylos car 5 stylos sont un stylo de plus que 4 stylos.

Un enfant de niveau 2 est en mesure de trouver des images manquantes de l'ensemble d'arrivée à partir des données disponibles en effectuant des compositions additives ou multiplicatives. Les compositions additives ou multiplicatives effectuées traduisent toutefois une confusion sur les rôles des valeurs numériques. Par exemple, dans la deuxième épreuve (voir la description ci-haut) l'enfant ajoute 6 au prix de 5 cahiers (20F) pour déterminer le prix de 6 cahiers car 6 cahiers sont un cahier de plus que 5 cahiers (6 cahiers vont alors coûter 26F (20F + 6; les 6 cahiers sont devenus 6F)). Pour déterminer le prix de deux cahiers, l'enfant enlève 2 (pour 2 cahiers) au prix de 3 cahiers (12F) et obtient ainsi 10F; ici encore, le cahier de moins (3 cahiers moins 2 cahiers) est devenu une fois de moins 2F (le 2 de 2 cahiers). Ainsi, comme le mentionne Ricco, les compositions additives ou multiplicatives effectuées par l'enfant à ce niveau ne permettent pas de faire apparaître de valeur constante, autrement dit de croissance linéaire.

Le niveau 3 marque l'apparition de la notion de constante dans les stratégies utilisées par l'enfant. Il convient toutefois de souligner que cette notion, à ce niveau, n'est pas totalement maîtrisée. Ainsi, certaines stratégies utilisées par l'enfant lui permettent soit de réussir ou d'échouer à trouver des valeurs de l'ensemble d'arrivée. Ricco regroupe 5 stratégies dans le niveau 3; de ce nombre, 3 sont des stratégies permettant de résoudre les problèmes demandés tandis que les 2 dernières n'assurent pas la réussite. Les procédures menant à une réussite seront d'abord décrites suivies de celles menant à un échec dans le texte suivant.

Procédure des écarts constants

Avec cette procédure, les enfants dégagent le principe additif +1 pour l'ensemble de départ (opérateur qui permet de passer d'un élément à l'autre de l'ensemble de départ) et détermine également l'opérateur additif +4 de l'ensemble d'arrivée (l'opérateur qui permet de passer d'un élément à l'autre de l'ensemble d'arrivée) en trouvant la différence entre deux valeurs concomitantes de l'ensemble d'arrivée. Par exemple, pour déterminer le prix de 5 stylos, l'enfant ajoute 4F aux 16 F de 4 stylos, parce qu'il y a une différence d'un stylo. Il fera donc + 4F pour trouver le prix des autres nombres de stylos. Par contre, pour trouver le prix d'un stylo, il utilise la stratégie du tâtonnement qui se traduit par l'essai systématique de plusieurs opérateurs additifs choisis au hasard pour établir l'écart constant dans l'ensemble d'arrivée selon les données dont il dispose.

Procédure dite « hypothétique »

La procédure dite « hypothétique » est une procédure similaire à celle décrite au paragraphe précédent lorsque l'enfant tente de trouver le prix d'un stylo; elle en diffère toutefois puisque l'enfant l'utilise pour dégager non seulement la valeur unitaire mais également pour la totalité des valeurs de l'ensemble d'arrivée.

Procédure utilisant l'opérateur fonction

Cette procédure efficace est de nature multiplicative en ce sens qu'un opérateur multiplicatif est dégagé entre les ensembles de départ et d'arrivée. Par exemple, pour trouver le coût de 6 stylos, l'enfant divise par 3 le coût de 3 stylos (12F ÷ 3); ce nombre (4F/1stylo, le coût d'un stylo) devient l'opérateur fonction (*4) qui sera appliqué au nombre 6. Ce regroupement est divisé en 2 sections : opérateur fonction avec ou sans reconnaissance de la valeur unitaire.

Procédure utilisant l'opérateur scalaire

Cette dernière procédure efficace est également de nature multiplicative. L'opérateur multiplicatif est dégagé entre les éléments d'un même ensemble de mesure et est ensuite appliqué à l'ensemble de départ. Par exemple, pour trouver le prix de 6 stylos, l'enfant divise les 3 stylos en trois pour obtenir un stylo et multiplie ce dernier par 6 pour obtenir 6 stylos. Pour l'ensemble d'arrivée, l'enfant exécutera les mêmes opérations, soit diviser par 3 le prix de 3 stylos pour ainsi obtenir le prix d'un stylo et ensuite, multiplier ce prix par 6 pour obtenir le prix de 6 stylos (12F (prix de 3 stylos) ÷ 3 = 4 F (le prix d'un stylo); 4 F * 6 = 24 F (le prix de 6 stylos)).

Procédure qui consiste à fixer la valeur unitaire au hasard

Cette procédure mène à un échec. Les enfants utilisant cette procédure, fixe de façon arbitraire des valeurs aux images parce qu'ils ne sont pas capables d'établir les relations numériques qui interviennent dans la détermination de la constante assurant la croissance linéaire de l'ensemble d'arrivée. De façon tout à fait aléatoire, par exemple, un enfant peut répondre spontanément qu'un cahier coûte 2F et maintenir sa réponse sans pouvoir fournir d'argument la justifiant.

Procédure qui consiste à prendre comme valeur unitaire l'élément « n » du couple

Cette dernière procédure mène elle aussi à un échec. Prenons l'épreuve numéro deux en exemple. Un enfant pourrait dégager que le prix d'un cahier est de 3F puisque 3 cahiers coûtent 12F. Ainsi, l'enfant détermine la valeur unitaire en confondant les termes connus d'un couple et en n'appliquant aucun opérateur aux éléments d'un couple.

En conclusion, les conduites mathématiques observées par Ricco que nous venons de décrire, montrent qu'un très petit nombre d'enfants emploient l'opérateur fonction pour déterminer une constante et reviennent à la procédure de proche en proche (opérateur scalaire) pour déterminer des images. Aussi, les enfants utilisent davantage une stratégie additive que multiplicative lors de ce type de problèmes, c'est-à-dire des problèmes d'isomorphisme de mesures. Ces quelques résultats sont intéressants pour la recherche que nous envisageons. En effet, cette étude montre que, même dans un contexte de fonction, les enfants développent d'abord la multiplication au niveau des opérateurs scalaires (opérateurs qui permettent de passer d'un élément à l'autre d'un même ensemble). Aussi, le développement du sens de cet opérateur semble passer par l'exploration des stratégies additives avec un certain nombre d'erreurs.

La seconde étude que nous décrivons, l'étude de Vincent (1992) a porté sur le développement de l'opérateur scalaire exclusivement. Dans cette étude, les enfants sont invités à représenter des collections d'éléments selon un opérateur multiplicatif entier (x fois plus et x fois moins) et une collection de départ comme le montre l'exemple suivant : représenter 3 fois plus à partir d'une collection de 5 billes.

Les résultats obtenus par Vincent, permettent de modéliser le développement des représentations des relations multiplicatives par 3 niveaux. Le premier niveau se caractérise par la prégnance des modèles additifs d'interprétation de ces relations. Donc, pour représenter la relation « n fois moins », les enfants feront deux collections comportant le même nombre d'éléments et enlèveront ensuite à l'une des collections un nombre d'éléments correspondant à la valeur de la relation. Par exemple, pour illustrer la relation « 2 fois moins » à l'aide de deux collections, l'enfant fera 2 collections de x unités et enlèvera 2 unités (de la relation « n fois moins ») à l'une de ces collections.

Le deuxième niveau de représentation se caractérise par une première différenciation des relations additives et multiplicatives. Ce deuxième niveau amène l'enfant à interpréter la relation « n fois plus » comme étant le résultat d'une juxtaposition des relations « autant » et « fois plus » (Vincent, 1992). Par exemple, pour la relation « 3 fois plus », l'enfant placera x éléments dans chacune des deux collections et ajoutera 3 fois x éléments à une des collections. À ce niveau, la relation « n fois plus » signifie souvent « n fois de plus ».

Enfin, le troisième niveau de représentation se caractérise par la compréhension de l'enfant des relations multiplicatives. Ainsi, l'enfant comprend que « n fois plus » fait référence à la multiplication et non à l'addition.

2.3.3. Études portant sur un premier développement de la notion de fraction

Afin de mieux comprendre le cheminement vécu par les enfants dans l'acquisition de la notion de fraction, nous avons retracé le cheminement que ces derniers vivaient et les ambiguïtés dont ils faisaient face. Nous citerons ainsi les recherches de Parrat-Dayan et Vonèche (1991) qui nous éclairerons sur les principales conduites des enfants face à la notion de fraction, les recherches de Parrat-Dayan et Vonèche (1991) et celle de Piaget (1948) sur la notion de moitié, ainsi que les études de Piaget (1948), Pothier Sawada (1983) et Parrat-Dayan et Vonèche (1991) sur la distinction entre les schèmes logiques et infralogiques.

Selon les recherches de Parrat-Dayan et Vonèche (1991), dès l'âge de 6 ans, les enfants sont en mesure d'admettre l'égalité, par exemple, de deux rectangles de départ (soit par superposition, soit à la simple vue). Par contre, ils refusent, jusqu'à l'âge de dix ans, de reconnaître l'équivalence des moitiés entre elles. Cependant, ils sont en mesure de démontrer que les deux moitiés homomorphes (identiques) reconstituent le tout. Ils ne conservent donc pas le rapport de partie à tout lorsque les totalités de départ sont équivalentes mais produisent des moitiés de formes différentes (Parrat-Dayan et Vonèche 1991). Par conséquent, plus les moitiés produites sont disparates, plus la conservation en est difficile.

Toujours selon les recherches effectuées par Parrat-Dayan et Vonèche (1991), c'est entre l'âge de 6 et 8 ans, qu'une série de conduites, se caractérisant par le partage d'un ensemble apparaît. Ainsi, différents types de conduites peuvent se présenter lors de partage effectué avec un tout discret (pour l'étude effectuée par Parrat-Dayan et Vonèche (1991), il s'agissait d'un ensemble de 5 pommes) : partager par itération symétrique des éléments et élimination du reste (exemple : dans un ensemble de 5 pommes, élimination de la cinquième pomme, afin que le partage un à un puisse être efficace) ; partage par séparation aboutissant à deux sous-ensembles inégaux (exemple : 5 pommes ; 3 d'un côté et deux de l'autre), puis rétablissement de l'égalité par adjonction ou élimination d'un élément ; partage par itération, puis adjonction ou élimination d'un élément ; élimination ou adjonction d'un élément, puis partage par itération ou séparation ; partage par itération ou séparation aboutissant à deux sous-ensembles inégaux. Ces procédures employées par les enfants de 6 à 8 ans évitent la demi unité. Pour ces enfants, la moitié consiste à partager le tout en deux parties égales. Pour eux, il s'agit de la moitié « parce que les parties sont égales » (parce que l'on utilise un nombre pair pour un partage en deux, par exemple). Les enfants peuvent aussi aboutir à deux parties inégales, et pour eux, il s'agit de la moitié parce que ces parties reconstituent le tout (par exemple 5 parties, 3 parties d'un côté et deux de l'autre. Ces éléments reconstituent le tout, mais les deux ensembles sont inégaux). Les enfants de 6 à 8 ans sont donc sensibles à deux types d'ambiguïté. : référence au tout, comme les enfants plus jeunes, et la difficulté à partager des éléments de classe différente (Parrat-Dayan et Vonèche, 1991).

Vers 9 ans, une nouvelle ambiguïté apparaît. Par exemple, lorsque l'enfant essaie d'attribuer une valeur à la demi unité, ne différenciant pas le nombre et l'objet, il vit une ambiguïté à savoir ce qu'est le véritable sens de la demi unité : un demi ou un et demi (1/2 ou 1 1/2). La confusion entre le nombre et l'objet donne lieu à une autre ambiguïté chez les enfants qui, par exemple, en coupant un panier de 5 pommes, essayent de considérer le tout. Ainsi, l'enfant se trouve à effectuer une opération inverse, soit de multiplier par la division de chaque élément. Cela devient pour lui, la moitié « en ajoutant », par rapport à « la moitié en enlevant » (Parrat-Dayan et Vonèche, 1991). Cette ambiguïté sera dépassé lorsque l'enfant comprendra que la moitié, par exemple, de cinq pommes est deux et demi parce que cinq divisé par 2 est égale à deux et demi, ou parce que deux et demi plus deux et demi est égale à cinq.

Également, les études sur le développement de la notion de moitié (Parrat-Dayan(1991)), ont permis de démontrer que les enfants âgés de 9 à 11 ans comprennent la référence à l'unité de départ, mais se perdent dans le dédale des parties de parties et des parties hétéromorphes (formes différentes) et homomorphes (formes identiques). De sorte que, la conservation proprement dite du tout et de la partie n'est possible qu'au stade formel (11-12 ans) (Piaget 1948). L'une des premières raisons de cette ambiguïté, à laquelle fait face l'enfant, réside dans le fait qu'il ne sait pas quel est le référentiel à considérer : l'unité (exemple : une pomme) ou le tout (exemple : l'ensemble des pommes). De plus, les recherches ont démontré que de nombreuses difficultés quant à l'acquisition de la notion de moitié résident dans les consignes données aux élèves et du matériel employé (exemple : la demi d'une feuille (je peux la plier) ou la demi d'une planche de bois (je ne peux pas la plier, je ne peux pas me faire de représentation)).

Selon les études de Parrat-Dayan et Vonèche (1991), dans l'acquisition de la notion de moitié, trois problèmes majeurs surgissent pour la plupart des enfants.

a) le partage et le fractionnement

Si le partage consiste à diviser un tout en 2 ou plusieurs parts pour une distribution, la distribution n'implique pas le partage en tant qu'opération. En effet, un enfant de cinq ou six ans, peut distribuer un nombre d'éléments entre deux ou plusieurs personnes. Il en sera capable si le nombre est pair, à partager le tout en moitiés. Par contre, le même enfant ne saura pas que les objets qu'il a distribués à chacun sont en fait la moitié du tout. L'enfant peut ainsi distribuer sans toutefois partager (il n'est pas conscient de l'acte de partager). Si l'enfant aboutit à la division du tout en deux, c'est parce qu'il dispose des schèmes lui permettant d'y arriver. Ainsi, en activant le schème de mise en correspondance terme à terme l'enfant pourra distribuer correctement le tout en moitiés. Or, la correspondance terme à terme n'implique pas la conservation du tout ni même de l'égalité des quantités partagées, et tant qu'il n'y a pas conservation du tout, il est impossible de parler d'opération de partage. De même, tant que le partage et le fractionnement ne deviennent pas opératoires, nous ne pourrons pas parler de fraction. La partition d'une totalité (partage) et la réunion des parties en totalités hiérarchiques ne seront possibles que s'il y a conservation du tout.

b) la conservation et la fraction sur l'objet

Plusieurs chercheurs, notamment Piaget et Inhelder (1948), avaient démontré que la notion de moitié était directement liée à la notion de conservation. En effet, si les opérations de partition impliquées dans les fractions sont susceptibles d'être inversées en opérations correspondantes mais de sens contraire, la conservation du tout pourrait assurer la notion de moitié en tant que fraction. Par contre, dans leurs recherches, Parrat-Dayan et Vonèche (1991), ont démontré que la conservation du tout n'était pas nécessairement liée à la conservation de la « partie », de la moitié. Ces chercheurs ont démontré, et c'est ce que nous vous démontrerons dans le second point, que la notion de totalité doit s'élargir à la conservation de la relation, indépendamment de chaque totalité.

c) la construction de l'unité et la fraction relationnelle

La fraction relationnelle suppose la coordination généralisée des opérations de partage et de réunion. Prenons comme exemple la moitié d'un gâteau. Elle est non seulement égale à l'autre moitié, mais aussi en tant que moitié indépendante du gâteau (Parrat-Dayan et Vonèche, 1991). Les notions de conservation, limitées à la conservation d'un objet ou totalité, bien qu'elles soient nécessaires, ne peuvent pas assurer la compréhension de ces rapports. Il faudra alors, en plus de la conservation du tout, la conservation d'une unité de référence abstraite qui rende possible la comparaison entre deux rapports donnés (en référence à des totalités différentes). L'enfant ne devra pas seulement dès lors, faire une distinction entre deux classes d'équivalence auxquelles il peut arriver à la suite d'une opération de correspondance bi-univoque, de congruence, de comparaison, de rabattement, etc., opérations suscitées lors de la consigne proposée par Piaget et al. (1948), mais établir une relation où ce qui se conserve est le rapport que la partie entretient avec le tout.

Selon Parrat-Dayan et Vonèche (1991), les schèmes logiques et infralogiques sont toujours constitutifs de la notion de moitié. Il n'y a pas de décalage entre le discret (logique) et le continu (infralogique) dans la genèse de la moitié. Ces deux types de schèmes peuvent interagir de manière dialectique dès le départ en ce sens qu'ils peuvent d'abord se combiner, se confondre, pour se différencier par la suite.

Selon plusieurs études, notamment, celles de Piaget, Inhelder et Szeminska (1948), Pothier, Sawada (1983) et Parrat-Dayan et Vonèche (1991), l'interaction des schèmes logiques et infralogiques peut faire obstacle à la constitution de la notion de moitié en tant que fraction numérique. Spécialement éclairantes, à cet égard, sont les considérations faites par Piaget (1948), sur la notion de partie. En se référent à l'analyse de réactions des enfants sur les termes collectifs, Piaget écrit : « il y aurait donc confusion entre deux schémas, chez nous nettement distincts, celui d'une collection homogène, comme un troupeau, etc., et en général, tout terme collectif, et celui d'un objet individuel, qui se débite non en individus mais en morceaux, comme in caillou, ou une table. Or, tout jugement de collection est acquis à l'esprit. Il faut autrement dit, que ces individus soient pensés comme des unités discrètes. Or, un schéma comme celui des termes collectifs chez l'enfant semble au contraire comporter, pour faire obstacle à la fusion mentale des individus, non le nombre, mais l'espace occupé par la collection. Rien de plus naturel, dès lors, qu'un esprit enfantin, lorsqu'il n'est pas astreint à un calcul précis, schématise les termes collectifs non sur le type d'un ensemble dénombrable mais sur celui d'un objet qui se découpe en morceaux. Il n'en faut pas plus pour qu'il y ait confusion ou plutôt indistinction entre les deux schèmes dont nous venons de parler. » (p.468-469)

Ainsi, en prenant en considérant l'évolution des conduites des enfants, Parrat-Dayan et Vonèche (1991) ont pu observer que lorsqu'ils demandent aux enfants de donner la moitié de quelque chose, ceux-ci peuvent activer des schèmes logiques ou/et infralogiques, indépendamment du matériel, constitué soit d'éléments discrets soit d'éléments continus. Selon Parrat-Dayan et Vonèche (1991) et Inhelder et al. (1975), au départ et au cours de toute la période préopératoire, il y a indifférenciation relative entre les deux systèmes de schèmes soit parce qu'un système s'appuie sur l'autre soit parce qu'ils se déforment mutuellement jusqu'à ce que leur différenciation progressive permette des interactions plus fécondes. De cette façon, ces auteurs en sont venus à la conclusion que le développement de la notion de moitié se caractérise par le passage progressif d'une indifférenciation à une différenciation progressive des différents schèmes (logiques et infralogiques).

2.3.4 Les difficultés reliées face à la notion de fraction

Il s'avère que les enfants maîtrisent en règle générale plus rapidement les partages en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair. Lorsqu'un nombre entier pair est impliqué, l'enfant peut bien souvent partager à répétition en deux parties égales tandis que dans le cas d'un nombre impair, la répétition du partage en deux parties égales s'avère être infructueuse. Ainsi, certaines opérations de partage en un nombre pair de parties sont plus rapidement maîtrisées que d'autres (ex : ÷2, ÷4, ÷8, ÷16 plus facile que ÷ 6, ÷12) pour les mêmes raisons (ces derniers impliquant un facteur impair). A partir de l'étude de Pothier, Sawada (1983), nous essayerons de vous éclairer quant aux difficultés rencontrées par les enfants lors de partage impliquant un nombre pair ou impair de parties et de l'impact de choix des formes géométriques proposées à l'élève lors de l'apprentissage du partage.

Cette étude montre que les enfants maîtrisent en premier le partager en deux en coupant la forme en deux parties égales. Suite à l'acquisition de cette procédure, l'enfant peut effectuer un partage où le nombre de parties demandées est une puissance de deux (2, 4, 8, 16, etc.), puisque comme mentionné ci haut, l'enfant utilise à répétition le partage en deux pour atteindre le nombre de parties demandées.

Également, la maîtrise des notions géométriques peut rendre le partage en nombre pair possible pour l'enfant ; en ayant conscience de la régularité de la forme, du nombre de côtés, du nombre de sommets, du centre de la forme, etc., l'enfant peut plus facilement effectuer un partage en un nombre pair de parties demandées (Pothier, Sawada, 1983). Par la suite, le partage en un nombre impair complète l'apprentissage d'un premier mouvement autre que la coupure médiane. Suite à cette nouvelle acquisition, l'enfant est capable de couper en 3 et en 5 parties égales. Il ne fait plus référence à la stratégie de couper, dans un premier temps, la forme en deux. Donc, suite à cette compréhension, le partage en nombre impair de parties, par l'utilisation de l'algorithme de comptage et d'égalité des parties, est devenu possible pour l'enfant. Ainsi, pour une forme circulaire, l'enfant sera capable de trouver le nombre de parties demandées par rotation et pour une forme rectangulaire, par translation.

De plus, il est à noter, que l'enfant qui est capable de partager en 3 ou 5 parties n'a pas nécessairement les qualités requises pour effectuer, de façon efficace, le partage en un nombre impair de parties. Selon Pothier, Sawada, (1983), ce premier mouvement de partage en un nombre impair de parties semble être survenu de façon accidentelle, puisque, c'est à la suite de plusieurs tentatives infructueuses que les enfants en sont venus à être capables de partager en 3 ou en 5 parties une forme. Cette maîtrise du partage en un nombre impair de parties est très difficile, puisque les enfants se réfèrent constamment à l'algorithme de partager en deux initialement la forme qu'ils tentent par la suite de compenser par translation ou rotation pour arriver à un nombre impair de parties égales.

En conclusion, le partage en un nombre pair de parties est plus facile que celui en un nombre impair de parties. Également, comme le mentionnent Pothier, Sawada (1983), l'enfant fait toujours référence à ces expériences passées pour résoudre un problème ; le partage en un nombre pair de parties est d'ailleurs, plus souvent demandé aux enfants, ce qui en facilite probablement l'acquisition.

2.4. Etudes sur les élèves en difficulté d'apprentissage

Notre recherche vise une meilleure compréhension des conduites d'élèves forts, moyens et faibles ou en difficulté d'apprentissage sur la notion de fraction. Si cette recherche porte plus spécifiquement sur les connaissances construites lors de la résolution de tâches impliquant la notion de fraction, il s'avère incontournable de faire un bref examen des études sur la question générale des élèves en difficulté d'apprentissage. Quelques définitions sur l'expression « difficultés d'apprentissage » seront ainsi d'abord présentées et nous exposons ensuite les principales considérations à retenir sur les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques.

Selon les données recueillies par l'AQETA (Association québécoise des élèves en trouble d'apprentissage), le trouble d'apprentissage[6] concernerait environ 10% de la population ou 2.5 millions de Canadiens. Deux (2) ou trois (3) enfants dans chaque classe au Canada sont donc probablement « atteints » d'un trouble d'apprentissage (www.aqeta.qc.ca, 2000). Pour l'association en effet, le trouble d'apprentissage constitue, au même titre que d'autres troubles, une situation handicapante pour les personnes qui en sont atteintes. Cette situation serait liée principalement à une carence chez l'individu dans l'acquisition et le traitement de l'information; l'intelligence de l'individu ne pourrait en expliquer l'existence.

Pour un grand nombre de chercheurs (Wallace et McLoughlin, 1988, Blouin (1993) et par l'Association québécoise pour les troubles d'apprentissage), la définition retenue, encore aujourd'hui, explicitant le mieux le sens de l'expression « difficulté d'apprentissage » est la suivante :

« Les termes « troubles d'apprentissage » ou « difficulté d'apprentissage » sont

[6] Pour l'association, le libellé « trouble d'apprentissage » en synonyme du libellé « difficulté d'apprentissage » utilisé dans les documents officiels du ministère de l'éducation du Québec. (MELS)

des termes génériques qui désignent un ensemble de troubles qui se manifestent par des difficultés significatives dans l'acquisition et l'utilisation d'habiletés d'écoute, de la parole, de la lecture, du raisonnement ou d'habiletés mathématiques. Ces troubles sont intrinsèques à la personne et sont causés par une dysfonction détectée ou non du système nerveux central. Même si les troubles d'apprentissage n'ont pas pour cause première des conditions handicapantes (c'est-à-dire, la déficience sensorielle, l'arriération mentale, la perturbation sociale ou affective) ou des influences environnementales (c'est-à-dire, différences culturelles, enseignement insuffisant ou inapproprié ou des facteurs psychogénétiques); cependant, ils peuvent coexister avec l'un ou l'autre de ces problèmes. »

A la lecture de cette définition, nous remarquons, à l'instar de Brassard (1996), que le « poids » des difficultés repose sur les caractéristiques personnelles de l'élève en reliant plus particulièrement ces difficultés à des troubles du processus psychologique. Toutefois, selon certaines études, cette définition ne permet pas un diagnostic efficace des élèves en difficulté d'apprentissage (Kavale et al, 1987). Pour cette raison, il nous semble pertinent de retenir une définition plus factuelle tel celle retenue par le MELS (voir MEQ).

Selon le Ministère, les élèves qui ont besoin de services éducatifs particuliers en raison de difficultés d'apprentissage sont déclarés soit en difficultés légères d'apprentissage (retard scolaire mineur) soit en difficultés graves d'apprentissage (retard scolaire important). Ainsi, un élève dit en difficulté légère d'apprentissage est celui qui a accumulé un retard scolaire de plus d'un an en français ou en mathématique au primaire. Un élève dit en difficulté grave d'apprentissage est celui qui a cumulé un retard de deux ans ou plus dans l'une ou l'autre des matières énumérées précédemment. Ainsi, il convient de souligner que pour le Ministère, les élèves en difficulté d'apprentissage présentent les caractéristiques suivantes : 1) ils ne présentent pas de déficience persistante et significative aux plans intellectuel, physique ou sensoriel ; 2) ils éprouvent des difficultés au plan des apprentissages scolaires ou préscolaires.

Cette brève présentation des définitions retenues montre que le concept d'élève en difficulté d'apprentissage est lié principalement aux résultats scolaires et que les écarts observés par rapport aux normes pour une réussite scolaire ne peuvent être expliqués par le niveau intellectuel de ces élèves ou encore par une carence au niveau physique ou sensoriel. Ainsi, le concept d'élève en difficulté d'apprentissage est fortement lié au concept de l'échec scolaire car, comme le mentionne Blouin (1993), dans les faits, l'enfant classé en « difficulté d'apprentissage » l'est d'abord en raison de ses échecs dans l'acquisition de connaissances scolaires. Le défi qui se pose à l'enseignant est alors d'une part de comprendre d'abord la signification de toutes les incompréhensions relatives au contenu enseigné et d'autre part, de mettre en place des situations qui vont provoquer l'émergence de connaissances justes. Notre étude s'inscrit dans le premier volet de cette dernière optique.

2.4.1. Etudes sur les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques

Peu d'études en didactique des mathématiques ont porté spécifiquement sur la problématique des élèves en difficulté d'apprentissage; les études sur les difficultés d'apprentissage en mathématiques ont davantage été menées dans le cadre des travaux de recherche en psychologie cognitive par le biais des théories sur le traitement de l'information. Néanmoins, de l'ensemble des travaux mené sur la question des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques, nous pouvons dégager deux types de résultats. Dans le premier type, on retrouve des éléments d'explication des principales caractéristiques des élèves en difficulté; dans le second type, les résultats permettent de mettre en lumière des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage propres à ces élèves dans une classe. Nous décrivons brièvement, dans le texte qui suit, ces types de résultats.

Selon Cauzinille-Marmèche et Weil-Barais (1989), les élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques et en sciences ont souvent des problèmes à coordonner leurs connaissances et à les généraliser. Puisque souvent leurs connaissances sont liées à des situations spécifiques, ces élèves ont de la difficulté à réutiliser leurs connaissances dans d'autres situations que celles vues en classe. Ainsi, ces élèves comme le mentionnent les auteurs, semblent développer un rapport au savoir où chaque connaissance doit demeurer dans un contexte précis, soit la plupart du temps, le contexte de sa construction.

Les études effectuées par Lemoyne (1989) et Perrin-Glorian (1993), montre aussi qu'un élève en situation d'être incapable de résoudre les problèmes qui lui sont proposés est souvent un élève qui perd ses moyens lorsque les problèmes proposés lui rappelle des contextes antérieurs d'échec. A cet effet, les contextes typiquement scolaires sont fortement teintés par un futur constat d'échec et on observe alors souvent, chez les élèves en difficulté d'apprentissage, un phénomène que Lemoyne (1989) nomme « la peur de ne pas savoir la réponse ». Comme elle le spécifie, chez l'élève en difficulté, la peur de ne pas savoir la réponse n'est pas généralisée à tous les contenus en mathématiques et ne se manifeste pas dans toutes les situations didactiques. Dès que l'élève ne sent plus la pression du contexte scolaire, il tente sa chance et essaie de résoudre les problèmes (il devient actif, prenant ainsi plaisir à réaliser ces problèmes). Par contre, dès que l'élève se retrouve dans des situations à connotation scolaire, les symptômes reliés à la peur réapparaissent instantanément. Comme le mentionne Lemoyne, dans leur rôle d'élève, ceux en difficulté d'apprentissage, devraient être des agents responsables de l'élaboration de leurs savoirs ; ils ne sont plus que des patients bénéficiaires des savoirs que le maître veut leur transmettre. Dans ce contexte, les élèves se soucient davantage de la réponse que l'on attend d'eux, que des apprentissages à réaliser.

Enfin, l'étude de Perrin-Glorian (1993), à notre connaissance l'étude la plus complète réalisée directement auprès d'une classe d'élèves faibles en mathématiques, montre que bien souvent ces élèves sont à la recherche d'algorithmes, de règles qui conduisent rapidement à la solution. Fréquemment, ils évitent de s'engager activement dans la résolution de problèmes; conduite que qui favorise peu l'élaboration de connaissances et du sens de ces connaissances. Lorsqu'ils s'engagent dans la résolution de problèmes, ces élèves ne prennent bien souvent en compte qu'une partie de l'information et ont du mal à l'organiser pour se faire une représentation du problème. Aussi, leurs connaissances antérieures sont peu activées dans l'élaboration de cette représentation. Enfin, des diverses observations effectuées dans cette étude lors de résolution de problèmes mathématiques, quatre grandes difficultés chez les élèves sont dégagées : 1) le manque d'investissement des élèves pour résoudre les tâches mathématiques; 2) l'usure rapide des situations d'apprentissage; 3) l'imprécision du langage des élèves; 4) les difficultés de comportement qui (par exemple: recherche de l'attention du maître; conflits entre élèves) écourtent de façon significative le temps effectif de travail.

En conclusion, l'étude de Perrin-Glorian apporte un nouvel éclairage des difficultés spécifiques d'apprentissage qui se posent chez certains élèves. En effet, cette étude adopte un point de vue nouveau en étudiant l'élève, non plus d'un point de vue psychologique mais bien en tant qu'acteur du système didactique ou encore d'une situation didactique. Ainsi, cette étude montre que les didactiques disciplinaires peuvent enrichir notre compréhension des phénomènes qui caractérisent les élèves en difficulté d'apprentissage mais également l'enseignement auprès d'eux. Parmi les pistes d'interventions en enseignement fréquemment suggérées par les études didactiques sur les élèves en difficulté d'apprentissage, la piste la plus fortement recommandée est la suivante : proposer aux élèves en difficulté d'apprentissage des situations-problèmes qui les impliquent cognitivement. Comme le souligne toutefois Vergnaud (1994), pour élaborer ces situations, nous devons pouvoir nous appuyer sur la difficulté relative des tâches à proposer aux élèves et sur un répertoire des procédures disponibles et possibles.

OBJECTIFS DE RECHERCHE

Les objectifs de cette recherche sont ainsi les suivants :

Comprendre le cheminement différencié des élèves de deuxième cycle du primaire par rapport à la notion de fraction au niveau des premières formalisations.

Améliorer notre compréhension des problèmes de construction de connaissances chez des élèves dits « en difficulté d'apprentissage ».

La réalisation de ces objectifs de recherche se fera à l'aide d'une étude comparative, en deux temps, entre des élèves forts, moyens et faibles ou dits « en difficulté d'apprentissage », pour pouvoir dégager des portraits différenciés de connaissances en mathématiques sur la notion de fraction. Nous pourrons ainsi rendre compte des difficultés propres aux élèves en difficultés d'apprentissage et apprécier, chez ces trois types d'élèves, l'évolution de leurs connaissances sur la notion de fraction.

MÉTHODOLOGIE

Notre recherche est de nature essentiellement exploratoire en raison principalement du nombre fort réduit de recherches antérieures menées sur le sujet et, d'autre part, en raison du peu de connaissances sur les interventions efficaces auprès des élèves en difficulté d'apprentissage sur un savoir spécifique. Notre recherche permettra donc d'explorer la nature des conditions liées au maintien des élèves en difficulté d'apprentissage en classe régulière lors d'apprentissages spécifiques en mathématiques.

Les procédures expérimentales mises en place nous permettront d'apporter des éléments de réponses aux questions et aux sous-questions de recherche ; elles nous permettront de formuler des hypothèses qui pourront être examinées dans des recherches ultérieures. Ce chapitre traite d'abord de la sélection des élèves. Nous présenterons ensuite les différentes épreuves expérimentales et le déroulement de l'expérimentation.

3.1 Sélection des élèves

L'enseignement formel des fractions débute véritablement à la fin du deuxième cycle du primaire[7], soit en 4^{e} année. Le passage de la troisième année à la quatrième année est

---

[7] Dans le nouveau curriculum du primaire, l'initiation à la notion de fraction et aux opérations multiplicatives débute maintenant dès le premier cycle et les premières formalisations de la notion de fraction sont l'objet de l'enseignement dès le deuxième cycle, en 3^{e} année plus précisément. Toutefois, considérant que l'implantation du nouveau curriculum dans les écoles primaires s'est fait de manière

donc marqué pour ces élèves par l'introduction de la notion de fraction. Certains élèves vivent mal ce passage et éprouvent des difficultés importantes dans le développement des connaissances qui se rapportent au champ conceptuel des structures multiplicatives et en particulier, celles qui se rapportent à la notion de fraction. Il importe donc de faire l'examen des conduites d'élèves de ce niveau scolaire pour mieux comprendre le sens que ces élèves attribuent aux relations parties à tout en contexte multiplicatif (avec nombres entiers et nombres fractionnaires).

Considérant les objectifs de notre recherche et le type d'analyse prévue des conduites mathématiques, l'expérimentation sera réalisée auprès de 6 élèves de 4^{e} année primaire. Le choix des élèves est effectué par les deux enseignantes titulaires des groupes d'élèves. En fonction des critères de nature professionnelle en vigueur, ces enseignantes seront invitées à identifier confidentiellement 1 élève fort, 1 élève moyen et 1 élève faible en mathématiques dans leur classe. Il est à noter que 3 élèves proviennent d'une classe de 4^{e} année et que les 3 autres élèves proviennent d'une classe de 3^{e}, 4^{e} année. Le nombre d'élèves que nous avons retenu, est choisi en considérant d'une part, le type d'analyse prévue des conduites et d'autre part, du temps nécessaire à la passation de l'ensemble des épreuves qui seront soumises à chacun des élèves; une analyse fine des conduites des élèves sera en effet privilégiée.

---

graduelle, de nombreux enseignants du deuxième cycle du primaire doivent adapter le curriculum pour l'enseignement de ces savoirs en raison principalement du fait que les élèves qu'ils reçoivent en 4^{e} année, n'ont pu bénéficier des changements majeurs apportés au curriculum lorsqu'ils étaient au premier cycle. Ainsi, pour notre expérimentation, seuls des élèves de 4^{e} année en seront rendu à être invité à procéder à leurs premières formalisations de la notion.

L'expérimentation est réalisée auprès d'élèves d'une école située à Bécancour. Cette école dispense l'enseignement du préscolaire au 3^{e} cycle du primaire.

3.2 Épreuves expérimentales

Dans le cadre de la présente étude, la collecte des données s'effectuera au moyen d'épreuves expérimentales. Les épreuves expérimentales sont construites de façon à engager les élèves dans la résolution de problèmes qui impliquent le traitement multiplicatif des relations entre : 1) une partie et un tout continu; 2) une partie et un tout discret. De ces relations se dégagent trois catégories d'épreuves. Pour chacune de ces catégories, des épreuves qui présentent des relations multiplicatives exprimées à l'aide d'une fraction (1/n), d'une fraction (m/n) et d'entiers (« n fois plus » et « n fois moins ») sont prévues. Pour chacune des relations retenues, trois types de problèmes seront formulés : 1) étant donné le tout et la relation fractionnaire, trouver la partie; 2) étant donné la partie et la relation multiplicative entière « n fois plus », trouver le tout; 3) étant donné le tout et la relation multiplicative entière « n fois moins », trouver la partie. Il convient de mentionner que le choix de nos épreuves expérimentales a été fait en considérant que l'étude de la notion de fraction n'est qu'amorcée pour les élèves participant à l'expérimentation.

Les consignes sont données oralement par l'expérimentateur à l'aide de matériel physique représentant les objets utilisés dans les différents contextes de partage pour chacune des tâches soumises aux élèves. Du matériel est aussi disponible sur la table de travail : des ciseaux, des crayons, du papier, une règle. Les élèves peuvent donc, au besoin, recourir à ce matériel dans leur recherche d'une solution. Enfin, l'expérimentateur note les verbalisations et actions réalisées par les élèves en vue de l'analyse des conduites.

3.2.1.1 Relations entières multiplicatives de type « n fois + » sur des touts discrets et continus lors d'une application directe.

Cette catégorie comporte 8 problèmes où les élèves sont invités à augmenter un tout (discret ou continu) selon la relation n fois plus demandée (2 fois plus, 3 fois plus, 4 fois plus et 6 fois plus). La question présentée oralement pour un tout continu est la suivante : *Notre pizza est carrée. J'ai « n » fois plus de pizza que ce morceau (un morceau de _). Combien ai-je de pizza ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout discret, la question est la suivante : *J'ai une boîte de 7 « smarties ». Il y en a « n » fois plus dans cette boîte-ci. Combien y a-t-il de « smarties » dans cette boîte ?*

Pour cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent le sens indirect de la multiplication. Pour ces élèves, est-ce que l'expression « n » fois plus réfère à une addition ou à une multiplication ? Par exemple, 4 fois plus, est-ce plus 4 ou multiplié par 4 ?

3.2.1.2 Relations entières multiplicatives de type « n fois + » sur des touts discrets et continus lors d'une application indirecte.

Ce type de problèmes comporte 8 problèmes. Les élèves sont invités à dégager le tout (discret ou continu) connaissant la partie et la relation n fois plus demandée (2 fois plus, 3 fois plus, 4 fois plus et 6 fois plus). La consigne donnée aux élèves oralement pour cette catégorie de problèmes sur un tout discret est la suivante : *J'ai une boîte de 5 « smarties ». Dans mon autre boîte, j'ai « n » fois plus de « smarties ». Quelle quantité de « smarties » ai-je dans cette boîte ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *J'ai cette quantité là de pizza (morceau de 1/2). Ce morceau est « n » fois plus que ce qu'il y a dans ta boîte. Comment est la pizza dans ta boîte ?*

Par cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction 1/n est nécessaire pour trouver la solution aux problèmes contenant l'expression n fois plus. Si tel est le cas, est-ce que, par exemple, 4 fois moins se traduirait par une soustraction (moins 4), une addition (plus 4), une division (divisé par 4) ou une multiplication (multiplié par 4) ?

3.2.1.3 Relations entières multiplicatives de type « n fois - » sur des touts discrets et continus lors d'une application directe.

Ce type de problèmes comporte 8 problèmes. Les élèves sont invités à réduire un tout (discret ou continu) selon la relation n fois moins demandée (2 fois moins, 3 fois moins, 4 fois moins et 6 fois moins). La consigne donnée aux élèves oralement pour cette catégorie de problèmes sur un tout discret est la suivante : *J'ai une boîte de 24 « smarties ». Dans mon autre boîte, j'ai « n » fois moins de « smarties ». Quelle quantité de « smarties » ai-je dans cette boîte ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *Sachant que la pizza est carrée. J'ai « n » fois moins de pizza que ce morceau. Comment est la pizza ?*

Pour cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent le sens indirect de la division. Pour ces élèves, est-ce que l'expression n fois moins réfère à une soustraction ou à une division ? Par exemple, 3 fois moins, est-ce moins 3 ou divisé par 3 ?

3.2.1.4 Relations entières multiplicatives de type « n fois -» sur des touts discrets et continus lors d'une application indirecte.

Ce type de problèmes comporte 8 problèmes. Les élèves sont invités à dégager le tout (discret ou continu) connaissant la partie et la relation n fois moins demandée (2 fois moins, 3 fois moins, 4 fois moins et 6 fois moins). La consigne donnée aux élèves oralement pour cette catégorie de problèmes sur un tout discret est la suivante : *J'ai une boîte de 12 « smarties ». Il y a « n » fois moins de « smarties » dans ma boîte que dans ta boîte. Combien as-tu de « smarties » ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *J'ai cette quantité là de pizza (morceau de 1/2). Dans mon autre boîte, il y en a « n » fois moins. Comment est la pizza dans l'autre boîte ?*

Par cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction 1/n est nécessaire pour trouver la solution aux problèmes contenant l'expression n fois moins. Si tel est le cas, est-ce que, par exemple, 4 fois moins se traduirait par une soustraction (moins 4), une addition (plus 4), une division (divisé par 4) ou une multiplication (multiplié par 4) ?

3.2.1.5 Relations fractionnaires de type 1/n sur des touts discrets et continus lors d'une application directe.

Cette catégorie comporte 8 problèmes. Dans ce type de problème, les élèves sont invités à prendre une fraction d'un tout (continu ou discret). Les fractions impliquées dans ce type de problème sont les suivantes (1/2, 1/3, 1/4 et 1/6). La consigne dite oralement pour un tout discret est la suivante : *J'ai une boîte de 12 « smarties ». Peux-tu m'en* *donner le 1/n ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *Voici une pizza (un carré). J'ai « n » amis. Peux-tu m'en donner le 1/n ?* Par cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction 1/n est nécessaire. Par exemple, est-ce que les élèves vont traduire ce problème par une soustraction (par exemple moins 2 pour 1/2) ou par une division (par exemple, diviser par 2 pour 1/2) ?

3.2.1.6 Relations fractionnaires de type 1/n sur des touts discrets et continus lors d'une application indirecte.

Cette catégorie comporte 8 problèmes. Dans ce type de problème, les élèves sont invités à dégager le tout (continu ou discret) connaissant la partie de la relation fractionnaire de type 1/n. Les fractions utilisées sont les mêmes que ceux présentées dans la catégorie précédente. La consigne dite oralement pour un tout discret est la suivante : *Moi, j'ai une boîte de 6 « smarties ». Dans ta boîte, il y a le « n » des « smarties » qu'il y a dans ma boîte. Combien as-tu de « smarties » ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *Voici la pointe de pizza que j'ai mangée. Elle équivalait au 1/n de la pizza. Dessine-moi la pizza complète.*

Pour cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction 1/n est nécessaire pour trouver la solution. Quel sens attribue-t-il aux fractions ? Par exemple, 1/3 est-il perçu comme une addition (plus 1 ou plus 3) ou comme une multiplication (multiplier par 3) ou comme un produit croisé (multiplier par 1 et ensuite, diviser par 3) ?

3.2.1.7 Relations fractionnaires de type m/n sur des touts discrets et continus lors d'une application directe.

6 problèmes font partis de cette catégorie. Dans ce type de problème, les élèves sont invités à prendre une fraction d'un tout (continu ou discret). Les fractions utilisées sont les mêmes que ceux présentées dans la catégorie précédente. La consigne dite oralement pour un tout discret est la suivante : *J'ai une boîte de 12 « smarties ». J'en ai mangé le m/n. Combien ai-je de « smarties » ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *J'ai une pizza. Hachure le m/n de la pizza.*

Pour cette catégorie de problèmes, nous voulons observer le sens que les élèves attribuent à des expressions fractionnaires où le numérateur est plus élevé que 1. Pour ces élèves, par exemple, est-ce qu'une expression de type 3/4 implique une diminution (moins 3) ou une multiplication (multiplier par 3) ? Est-ce que ces élèves sont capables de percevoir que la fraction 3/2 est plus élevé que un et donc, plus grande qu'un tout ?

3.2.1.8 Relations fractionnaires de type m/n sur des touts discrets et continus lors d'une application indirecte.

Cette catégorie comporte 6 problèmes. Dans ce type de problème, les élèves sont invités à dégager le tout (continu ou discret) connaissant la partie de la relation fractionnaire de type m/n. Les fractions impliquées dans ce type de problème sont les suivantes (2/3, 3/4 et 3/2). La consigne dite oralement pour un tout discret est la suivante : *J'ai mangé 12 « smarties ». Cela équivaut au m/n de la boîte. Combien y avait-il de « smarties » dans la boîte ?* Dans le cas des problèmes impliquant un tout continu, la question est la suivante : *Cela équivaut au m/n de la pizza. Est-ce que tu peux me dessiner la pizza complète ?*

Pour cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction m/n est nécessaire pour trouver la solution. Quel sens attribue-t-il aux fractions ? Par exemple, 2/3 est-il perçu comme une addition (plus 2 ou plus 3) ou comme une multiplication (multiplier par 2 ou par 3) ou comme un produit croisé (multiplier par 2 et ensuite, diviser par 3) ?

3.2.1.9 Relations fractionnaires de type 1/n sur des touts discrets/continus lors d'une application directe.

Cette catégorie comporte un problème. Les élèves sont invités à prendre une fraction d'un tout où le tout est un nombre impair. La question posée oralement aux élèves est la suivante : *Il y a un sac de 17 pommes. J'en veux la moitié. Combien de pommes j'aurai ?*

Par cette catégorie de problèmes, nous voulons observer le sens que les élèves attribuent à cette expression fractionnaire. Sont-ils en mesure de bien partager ce nombre, malgré qu'il soit un nombre impair ou le problème s'avère-t-il être impossible pour eux ?

3.2.1.10 Relations fractionnaires de type 1/n sur des touts discrets/continus lors d'une application indirecte.

Cette catégorie comporte un problème. Les élèves sont invités à dégager le tout connaissant la partie et la relation fractionnaire (moitié). La question posée oralement aux élèves est la suivante : *Ce morceau est la moitié des pizzas (1/2). Combien y avait-il de pizza ?*

Par cette catégorie de problèmes, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction 1/n est nécessaire. Par exemple, est-ce que les élèves vont traduire ce problème par une addition (plus 2) ou par une multiplication (multiplier par 2) ?

3.2.1.11 Relations fractionnaires de type m/n sur des touts discrets/continus lors d'une application directe.

Cette catégorie comporte un problème où les élèves sont invités à prendre une fraction d'un tout. La question posée oralement est la suivante : *Il y a un sac de 18 pommes. Chaque ami en veut le tiers. Combien de pommes auront chaque ami ?*

Par cette catégorie de problèmes, nous voulons observer le sens que les élèves attribuent à cette expression fractionnaire. Sont-ils en mesure de bien partager ce nombre, malgré qu'il soit un nombre impair ou le problème s'avère-t-il être impossible pour eux ? Sont-ils capables de percevoir la relation entre 18 pommes et tiers ? Une fois le problème résolu, seront-ils aptes à identifier correctement chacune des composantes, soit le nombre de pommes et le nombre d'amis ?

3.2.1.12 Relations fractionnaires de type m/n sur des touts discrets/continus lors d'une application indirecte.

Cette catégorie comporte un seul problème. Les élèves sont invités à dégager le tout connaissant la partie et la relation fractionnaire (3/4). La question posée oralement est la suivante : *Ce morceau est le 3/4 des pizzas. Comment était la pizza ?*

Par ce problème, nous voulons observer si les élèves perçoivent qu'une application indirecte de la fraction 1/n est nécessaire. Par exemple, est-ce que les élèves vont être en mesure de comprendre qu'il manque 1/4 pour former le tout ? Vont-ils additionner deux fois le morceau de 3/4 dans le but de reformer le tout ?

3.3 Déroulement de l'expérimentation

La passation des épreuves expérimentales s'effectue au moyen d'entrevues semi-structurées et individuelles. Selon Brassard (1996), cette méthode consiste à interroger l'élève confronté à un problème de manière à induire chez celui-ci des activités intellectuelles pour tenter de saisir les opérations de pensée effectuées lors de la résolution du problème. L'expérimentateur enregistre l'entrevue sur bande magnétoscope.

Les entrevues se déroulent au cours des heures régulières de classe dans un petit local fermé. Nous prenons soin d'éviter les périodes réservées aux spécialistes (éducation physique, musique, anglais). Deux rencontres d'une heure sont prévues pour la passation de l'ensemble des épreuves pour chaque sujet. Une rencontre est prévue à la fin du mois d'octobre, soit à la fin de la première étape et la deuxième rencontre est prévue au milieu du mois de février, soit peu de temps suivant la fin de la deuxième étape dans le calendrier scolaire. Les épreuves soumises lors de la premières rencontres sont les mêmes pour l'ensemble des six sujets. Par contre, suite au codage des données, à la réussite ou à la non-réussite des épreuves, le type de questionnaire diffère d'un sujet à l'autre lors de la seconde entrevue.

Une rencontre préalable avec l'enseignante du groupe-classe des élèves est fut prévue avant l'expérimentation. Cette rencontre nous a permis de connaître de façon très sommaire les élèves, ainsi que leur degré de performance dans un contexte scolaire.

3.4 Méthode d'analyse anticipée

L'analyse de protocoles constitue la méthode d'analyse anticipée. Dans ce type d'analyse, les protocoles rendent compte d'une transcription complète des actions et verbalisations réalisées par les élèves et l'expérimentateur. Ces transcriptions sont par la suite découpés en séquences qui rendent compte de l'expression de la pensée et l'analyse vise à situer les transitions entre elles et à rendre compte si « les termes utilisés réfèrent à un même point de vue, ou encore à des même règles d'actions ou nécessités mathématiques » (Conne, 1989).

S'inspirant de la méthode d'analyse proposée par Conne (1989), les protocoles seront analysés de façon à identifier les différentes règles d'action (règles qui génèrent une suite d'actions) qui sous-tendent la résolution de chacune des épreuves chez un même élève. Il nous sera alors possible de dégager des hypothèses sur les connaissances activées par chacun des élèves et ce, pour chaque catégorie d'épreuves.

3.5 Déontologie

Pour nous assurer du consentement des parents des participants, nous avons préparé une demande de consentement sous forme de lettre. Cette lettre nous a permis d'informer les parents du type d'expérimentation que nous voulions effectuer auprès de leurs enfants en plus d'obtenir l'autorisation d'enregistrer les séquences lors de l'expérimentation. Pour nous assurer de la confidentialité des dossiers, les noms des élèves ne sauront à aucun moment divulgué. Nous procéderons par codification pour identifier les conduites des élèves. Ils seront ainsi numérotés comme étant sujet 1 à sujet 6.

ANALYSE DES CONDUITES DES ÉLÈVES

Dans ce chapitre, nous procédons à l'analyse des conduites de chacun des sujets selon les divers types de tâches. Pour chacun des sujets, nous tentons de dégager les connaissances et les schèmes[8] mis en œuvre par eux dans la résolution de tâches relatives aux relations multiplicatives entre une partie et un tout continu et une partie et un tout discret, représentées à l'aide d'une fraction (1/n), d'une fraction (m/n) et d'entiers (« n fois -» et « n fois + »). Ainsi, pour chacun des sujets de la recherche, nous exposons l'analyse des conduites selon l'ordre suivant : 1) analyse des conduites observées lors des tâches impliquant des applications directes et indirectes, sur des touts discrets et continus, pour les relations multiplicatives entières; 2) celles relatives aux relations fractionnaires de type « 1/n » ; 3) celles relatives aux relations fractionnaires de type « m/n » ; 4) celles relatives aux relations fractionnaires de type « 1/n » et « m/n » sur un tout continu/discret.

Avant de débuter l'exposé des différentes analyses, il convient de préciser trois (3) aspects; les aspects sont les suivants : 1) une erreur d'expérimentation; 2) une précision sur les tableaux présentés en annexe; 3) l'élimination des deux dernières parties de l'analyse pour l'ensemble des sujets (les items 3 et 4 de l'énumération présentée au paragraphe précédent. Après vérification des questions et tâches présentées à nos sujets,

---

[8] Les schèmes sont des règles d'action organisées pour un même type de situation. (Vergnaud, 1994)

nous nous sommes rendue compte que, lors de l'expérimentation, nous avions omis de présenter aux sujets, les tâches nécessitant d'une part, une application indirecte de la relation « n fois - », tant pour un tout discret qu'un tout continu et, d'autre part, celles nécessitant une application indirecte de la relation « n fois + » pour un tout discret. Dans les deux cas, cette erreur d'expérimentation s'est produite pour les deux entrevues. Ainsi, nos résultats ne pourront tenir compte de ces variables. Heureusement toutefois, il nous sera possible de dégager les connaissances activées par les sujets lors d'application indirecte de la relation « n fois + » sur un tout continu lors des deux entrevues.

Également, une seconde mise en garde s'avère nécessaire. Il peut arriver parfois dans les tableaux présentés en annexe que le lecteur remarque qu'une question, pourtant bien répondue lors de la première entrevue, soit malgré tout proposée à nouveau à un sujet lors de la seconde entrevue. Il convient de souligner ici, qu'il ne s'agit pas d'une erreur d'expérimentation mais plutôt d'une action réfléchie afin de vérifier si, lors de la première entrevue, nous n'avions pas peut-être induit, bien malgré nous, des réponses correctes en insistant trop auprès du sujet. Ainsi, en reposant la même question lors de la seconde entrevue, il nous semblait alors possible de vérifier non seulement la stabilité des réponses correctes du sujet, mais également de vérifier s'il n'y avait pas eu un effet d'enseignement lors de la première entrevue. Dans notre exposé des analyses, cet aspect sera pris en compte lorsque cela s'avèrera nécessaire.

Enfin, suite à nos analyses de l'ensemble des conduites des sujets aux tâches impliquant des relations fractionnaires de type m/n et celles impliquant un tout hybride (discret/continu), nous avons convenu d'en éliminer nous seulement leur exposé, mais également leur mise en relation avec les autres données recueillies. Le peu, voire même l'absence, de cohérence dans les conduites des élèves à ces tâches et leurs conduites aux autres types de tâches explique principalement notre position. Les conduites sont malgré tout, présentées dans les tableaux en annexe pour pouvoir notamment apprécier le saut conceptuel que de telles tâches semblent avoir nécessiter chez ces élèves comme en témoigne l'emploi fréquent d'une stratégie de type « essai-erreur ».

4.1. Analyse des conduites du sujet S1

4.1.1. Le sujet S1 et les relations multiplicatives entières

Lors d'une application directe de relations multiplicatives de type « n fois + » sur des touts discret ou continu, le sujet S1 semble interpréter de deux manières différentes les relations, soit : ***n de plus*** ou ***n fois plus***. Comme le montre le tableau 1, ces deux interprétations apparaissent autant lors des deux entrevues. Bien que ce sujet puisse interpréter correctement de manière multiplicative cette relation dans le contexte d'un tout discret, l'interprétation additive de la relation est toujours accessible ou valide pour ce sujet. Il semble qu'une différenciation entre les deux interprétations n'ait pas été effectuée ou encore que ce sujet n'ait pas eu à effectuer une telle différenciation.

Dans le cas d'une application indirecte de relations multiplicatives de type « n fois + » sur des touts continus toutefois, une nouvelle interprétation apparaît, fort différente des précédentes. Pour appliquer indirectement les quatre relations de ce type lors de l'entrevue 1, le sujet S1 divise d'abord le morceau en deux parties égales, il prend ensuite un des deux morceaux obtenus et le partage en « n » parties égales (voir Q16 dans le tableau 1). Ainsi, le tout reconstitué après cette application est systématiquement pour les 4 relations demandées la moitié du morceau initialement présenté. Les conduites de ce sujet lors de ces applications indirectes montrent qu'il tente d'appliquer indirectement la relation en divisant par n, toutefois, sa conclusion est erronée (le tout qui est n fois plus petit que le morceau initial n'est pas le bon, il est toujours la moitié du morceau initial et non pas n fois plus petit que ce morceau). Suite à cette brève analyse, nous croyons que ce sujet emploie, dans un premier temps, une stratégie de partager en deux parties égales. Une fois ce partage effectué, le sujet S1 partage alors les morceaux en vue d'obtenir le nombre de parties désirées. Ainsi, il partage toujours par deux de manière répétée. Nous croyons que le partage en trois parties égales s'avère impossible pour ce sujet, puisque le nombre 3 n'est pas divisible par deux. Comme nous le verrons plus loin, cette conduite semble réapparaître lors de l'application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu.

Lors de l'entrevue deux, ce sujet semble effectuer un saut notionnel important sur l'application indirecte de ce type de relation. Pour les 4 relations demandées, ce sujet interprète l'application indirecte de la relation « n fois + » de la manière suivante : il partage en n parties et le tout recherché est effectivement n fois plus petit sauf pour l'application indirecte de la relation 3 fois + où le sujet fait trois parties mais celles-ci ne sont pas égales. Il convient ici de souligner que ce sujet, pour effectuer un partage en n parties, procède toujours par un premier partage du morceau en 2 parties égales; il tente ensuite, par exemple, lors du partage en 4 parties ou en 6 parties, de poursuivre le partage en deux de chacune des parties obtenues jusqu'à l'obtention de n morceaux. Ainsi, la difficulté qu'il rencontre pour effectuer un partage en trois parties égales et la réussite qu'il affiche à obtenir 6 parties égales ne nous surprennent pas parce qu'avec un partage en 6 parties égales, une fois le premier partage en deux effectué, le sujet peut alors non pas poursuivre le partage en deux, mais plutôt tenter d'obtenir des groupes de deux morceaux X fois jusqu'à 6. S'agit-il d'une difficulté particulière à la relation 3 fois +, alors qu'il est capable de partager en 6 parties égales ou encore s'agit-il d'une difficulté reliée à tous les nombres multiples de 3 ?

Les conduites observées chez ce sujet avec les relations multiplicatives de type « n fois + » sont en plusieurs points semblables à celles observées lors de l'application directe de relations multiplicatives de type « n fois - ». Dans le cas d'une application directe des relations sur un tout discret, le sujet S1 les interprète de la manière suivante : ***n de moins*** (voir Q9 et Q11). Cette interprétation est également observée lors de la 2^{e} entrevue (voir Q32). Dans le cas toutefois d'une application directe sur des touts continus, les mêmes conduites observées lors de l'application indirecte des relations « n fois + » réapparaissent à l'entrevue 1 (voir Q12). Pour la seconde question (voir Q10), le sujet reprend par contre les mêmes conduites que lors de l'application indirecte des relations « n fois + » observées à l'entrevue 2. Nous pouvons constater ici la stabilité des interprétations des applications directes de la relation « n fois – » et indirectes de la relation « n fois + ».

4.1.2. Le sujet S1 et les relations fractionnaires de type 1 sur n

Comme le montre le tableau 1, lors d'applications directes des relations fractionnaires 1/n sur un tout discret à la première entrevue, le sujet S1 interprète la fraction 1/2 (« moitié ») comme étant deux parties égales qui forment un tout. La moitié semble ici interprétée comme un opérateur (diviser par 2 le nombre « n » et multiplier le résultat par 1). Pour l'application de la fraction 1/3 (« tiers ») par contre, le sujet dit ne pas comprendre cette expression et ne savoir quoi répondre. Nous croyons qu'il n'a pas eu la possibilité de créer du sens pour cette relation fractionnaire souvent peu employée. Enfin, pour les fractions 1/4 (« quart ») et 1/6 (« sixième »), il les interprète de la façon suivante : ***le tout moins « n » élément***s (voir question 1). Ainsi, dans ces deux derniers cas, le n des fractions de type *1/n* est interprété comme une quantité d'objets à enlever du tout. L'examen de ses conduites lors de la seconde entrevue montre une stabilité dans l'interprétation des relations fractionnaires 1/2, 1/4 et 1/6. Pour la fraction 1/3, la stratégie utilisée pour les fractions 1/4 et 1/6 est maintenant reprise.

Lors d'une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n sur un tout discret, le sujet S1 interprète la fraction 1/2 comme étant deux parties égales qui forment un tout; tout comme pour lors d'une application directe. Pour la fraction 1/3, le sujet ne comprend pas la signification de cette relation fractionnaire, tout comme lors de l'application directe. Enfin, il interprète les fractions 1/4 et 1/6 comme étant le « n » et non la relation de 1/n avec le tout. Ainsi, le quart de 6 équivaut à 4, puisque quart est 4 (« n »). Lors de la seconde entrevue, l'examen des conduites du sujet S1 montre une stabilité d'interprétation des relations fractionnaires de type 1/n pour les fractions 1/4 et 1/6 et applique la même stratégie pour la relation fractionnaire 1/3, soit l'association de « n » à la réponse (tiers équivaut à 3).

Lors d'applications directes des relations fractionnaires de type 1/n sur un tout continu, le sujet S1, pour les fractions 1/2, 1/4, 1/6, sépare le tout (une forme carrée) en un nombre « n » de parties égales. Cependant, bien qu'il produise trois parties pour la fraction 1/3, celles-ci ne sont pas égales comme le montre le tableau 1 (voir Q2). Les mêmes conduites sont observées lors de la seconde entrevue. La difficulté rencontrée par ce sujet pour réaliser un partage en trois parties égales ne nous étonne pas vraiment en raison principalement de ses conduites que nous avons observées lors de la relation multiplicative « n fois + » pour un tout continu où il utilise la stratégie de diviser d'abord en deux parties égales. Ainsi, un partage en 3 parties égales ne peut être possible en ayant recours à cette stratégie. Par contre, un partage en 6 parties peut être exécuté, puisque le nombre 6 est divisible par 2. Afin de confirmer cette hypothèse, nous aurions dû prévoir des tâches nécessitant l'application de la fraction 1/9 et de la relation « 9 fois – »). Enfin, ce sujet applique de manière indirecte les fractions demandées. (Il reforme un tout à l'aide d'une partie du tout en multipliant cette partie par « n »).

4.2. Analyse des conduites du sujet S2

4.2.1. Le sujet S2 et les relations multiplicatives entières

Lors d'une application directe des relations multiplicatives de type « n fois + » sur les touts discret ou continu, le sujet S2 semble interpréter de deux manières différentes les relations, soit : *n fois +* ou *n de plus*. Il est intéressant de mentionner qu'il emploie « n fois + » exclusivement lors de l'application d'un tout discret (voir Q13 et Q15 du tableau 2) tandis qu'il emploie « n de plus » exclusivement lors d'une application sur un tout continu (voir Q14, Q21 et Q22). Comme le montre le tableau 2, ces conduites sont également stables lors de la seconde entrevue. Bien que ce sujet puisse interpréter correctement de manière multiplicative cette relation dans le contexte d'un tout discret, l'interprétation additive de la relation est toujours accessible ou valide pour ce sujet. Il semble qu'une différenciation entre les deux interprétations n'ait pas été effectuée ou encore que ce sujet n'ait pas eu à effectuer une telle différenciation.

Dans le cas d'une application indirecte de la relation multiplicative « n fois + » sur des touts continus, le sujet S2 perçoit celle-ci comme étant *n de -*. Ainsi, puisqu'il s'agit d'un tout continu, le sujet 2 ne perçoit pas qu'il peut séparer le morceau en un nombre

« x » de parties. Il le considère comme un tout indivisible. Le sujet 2 fait 1 (le morceau initial) moins « n » (« n fois - »); ce qui lui donne un nombre négatif d'où le nombre 0 pour chacune des réponses (voir Q16).

Lors d'application directe des relations multiplicatives « n fois - » sur un tout continu aux entrevues 1 et 2, le sujet utilise l'interprétation suivante : « n de -» (voir Q10 et Q12). Ainsi, ce sujet semble interpréter le nombre (n) de la relation multiplicative entière (n fois moins) comme une quantité d'objets à enlever à la quantité initiale; parfois, cette quantité est déterminée aléatoirement pour, comme le spécifie le sujet « qu'il y ait des restants ».

4.2.2. Le sujet S2 et les relations fractionnaires de type 1 sur n

Lors d'une application directe et indirecte de la relation fractionnaire 1/n, pour un tout discret, le sujet S1 interprète ces relations de la façon suivante : le tout divisé par « n » du 1/n. Ainsi, cet élève interprète le nombre « n » de la relation fractionnaire 1/n comme étant un opérateur soit, la quantité initiale divisée par « n » et multipliée par 1 (voir questions 1 et 3). Comme le montre le tableau 2 pour la question 3, lors d'une application indirecte de la relation 1/3, le sujet S2 ne connaît pas le sens de ce terme, il n'attribue ainsi aucune réponse. Lors de la seconde entrevue, le sujet S2 interprète les relations fractionnaires 1/3 et 1/4 pour la question 3 comme étant « n ». Ainsi, lors d'une application indirecte, le sujet S2 attribue le « n » de la relation fractionnaire à la réponse.

Dans le cas d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu, le sujet S2 interprète cette relation comme suit : la forme carrée divisée par « n » (voir Q2). Cependant, pour la fraction 1/3, le sujet S2 partage la forme carrée en 3 parties, mais non de façon égale. Nous croyons qu'il manque de connaissances face à cette relation fractionnaire (1/3) et qu'à cause d'une stratégie initiale défaillante (le partage en deux d'abord), le sujet S2 ne peut exécuter un partage égal en 3 parties. Par contre, lors de la seconde entrevue, le sujet S2 emploie une nouvelle stratégie qui lui permet de séparer la forme en 3 parties égales. Nous croyons que cette amélioration est due à cause de l'enseignement reçu entre les deux temps d'entrevue.

Lors d'une application indirecte de la relation 1/n sur un tout continu, le sujet S2 interprète cette relation, pour les fractions 1/2, 1/4 et 1/6, de la façon suivante : le morceau initial ayant une valeur de 1/n multiplié par « n » (exemple : 2 X le morceau de 1/2 pour la fraction 1/2). Ainsi, ce sujet reforme un tout à l'aide d'une partie du tout (le morceau initial). Par contre, pour la relation fractionnaire 1/3, ce sujet multiplie deux fois le morceau initial. Nous présumons que cette stratégie fut employée par ce sujet, à cause d'un manque de connaissance du sens accordé à la fraction 1/3 (notamment, cette conduite fut observée à la question 2). Lors de la seconde entrevue, les conduites du sujet S2 par rapport à la relation fractionnaire 1/3 démontre que ce sujet interprète cette relation de la façon suivante : le morceau initial ayant une valeur de 1/n multiplié par « n » (3 X le morceau de 1/3). Ainsi, cette seconde analyse a démontré que le sujet S2 pouvait reformer un tout, à partir d'un morceau équivalant le 1/3 de celui-ci. Comme mentionné plus haut, nous croyons que ce changement de conduite face à la relation fractionnaire 1/3 est due à l'enseignement reçu entre les deux temps d'entrevue.

4.3. Analyse des conduites du sujet S3

4.3.1. Le sujet S3 et les relations multiplicatives entières

Comme le montre le tableau 3, lors d'une application directe de la relation multiplicative n fois + sur un tout continu, lors de la première entrevue, le sujet S3 n'a pas les outils nécessaires pour comprendre le sens de la question et n'y répond pas. Par contre, lors de la seconde entrevue, l'examen des conduites du sujet S3 démontre que ce dernier interprète la relation multiplicative « n fois plus » comme « n de plus ». Ainsi, ce sujet interprète le nombre (n) de la relation multiplicative entière (n fois plus) comme une quantité d'objets à ajouter à la quantité initiale (voir Q14). Par contre, pour les questions 21 et 22 posées lors de l'entrevue 2, le sujet S3 interprète la relation multiplicative directe « n fois + » demandée comme étant une multiplication. Ainsi, cet élève interprète le nombre (n) de la relation multiplicative entière (n fois +) comme étant un opérateur ; il doit ajouter « x » parties objets un certain nombre de fois à une quantité initiale.

Lors d'une application indirecte de la relation multiplicative « n fois + » sur un tout continu, le sujet S3 interprète celle-ci comme étant *n fois moins, c'est moins* (voir Q16, entrevue 1). Ainsi, pour le sujet S3, chacune des relations multiplicatives doit être plus petite. Par contre, il y a un certain ordre de grandeur entre les morceaux obtenus. Ainsi, le morceau 4 fois moins est plus petit que le morceau 2 fois moins, tandis que le morceau 6 fois moins doit être plus grand que le morceau trois fois moins. Cependant, les conduites du sujet S3 lors de la seconde entrevue montrent l'emploi d'une toute autre stratégie. Ce sujet interprète la relation multiplicative « n fois + » comme étant « n fois + ». Ces interprétations sont les mêmes que pour les relations multiplicatives « n fois - » lors d'une application directe sur un tout continu. À l'exception que lors de ces applications, à la seconde entrevue, le sujet S3 interprète cette relation comme étant « n fois - » (voir Q10 et Q12). Ainsi, le sujet S3 exécute un bond notionnel très remarquable pour ce type d'application.

Enfin, comme le montre le tableau 3, lors d'une application directe de la relation multiplicative « n fois – » sur un tout discret, le sujet S3 interprète cette relation comme étant une division en première entrevue. Ainsi, cet élève interprète le nombre (n) de la relation multiplicative entière (n fois -) comme étant une déduction des paquets de « x » quantité un certain nombre de fois à une quantité initiale (voir Q9 et Q11). Par contre, les conduites du sujet lors de la seconde entrevue se sont révélées tout autre. Le sujet interprète cette relation comme suit : 1 fois – équivaut à la quantité initiale ; donc 2 ou 3-4-6 fois moins ne pourront être la quantité initiale. C'est pourquoi le sujet S3 associe chacun des énoncés à 0. Une question se pose. Pourquoi ce sujet a-t-il réussi à interpréter correctement les relations multiplicatives lors de la première entrevue et non lors de la seconde ? Est-ce à cause de l'enseignement reçu ? De plus, le sujet S3, à la question 32 a utilisé une autre stratégie. Il interprète la relation multiplicative « n fois -» sur un tout discret de la façon suivante : « x » (quantité initiale) / « n » = « y » ; « x » - « y ». Ainsi, le sujet S3 divise la quantité initiale en « n » parties et soustrait ce nombre de parties (le résultat de cette division) à la quantité initiale. Pourquoi est-ce que le sujet S3 a-t-il effectué une soustraction à la suite de sa division ?

4.3.2. Le sujet S3 et les relations fractionnaires de type 1 sur n

Lors des applications directes et indirectes des relations fractionnaires de type 1/n sur un tout discret aux deux entrevues, le sujet S3 interprète la relation fractionnaire 1/2 comme étant deux parties égales qui forment un tout. Par contre, pour les relations 1/3, 1/4 et 1/6, le sujet applique « n » (voir Q1 et Q3 du tableau 3). Il est à noter que les données de l'entrevue 1 pour la relation indirecte ne sont pas disponibles puisqu'une erreur d'expérimentation s'est glissée.

Comme le montre le tableau 3, lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n pour un tout continu, le sujet S3 interprète les relations fractionnaires comme étant un partage. Ainsi, il sépare la forme rectangulaire en « n » parties égales. Par contre, pour les relations fractionnaires 1/4 et 1/6, il divise le tout en « n » partie plus un (voir

Q2). Lors de la deuxième entrevue, le sujet S3 interprète les 4 relations de type 1/n demandée de la manière suivante : le tout divisé par « n ». Ainsi, ce sujet interprète le nombre « n » de la relation fractionnaire 1/n comme étant une division par n.

Lors de la première et de la seconde entrevue, pour une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n, le sujet S3 interprète cette relation de la façon suivante : le morceau initial ayant une valeur de 1/n multiplié par « n » (exemple : 2 X le morceau de 1/2 pour la fraction 1/2). La seconde entrevue a démontré une stabilité dans les conduites de ce sujet.

4.4. Analyse des conduites du sujet S4

4.4.1. Le sujet S4 et les relations multiplicatives entières

L'application directe de relations multiplicatives de type « n fois + » sur des touts discrets chez le sujet S4 est généralement effectuée de la manière qui suit à la première entrevue : « n » de plus. La relation multiplicative « 2 fois plus » toutefois est interprétée comme étant *n fois plus* (voir Q 15). Lors de la seconde entrevue, pour les relations multiplicatives 2 – 3 et 4 fois plus, le sujet S4 utilise la stratégie de l'addition réitérée. Ainsi, il additionne, pour la relation multiplicative « 2 fois plus », la valeur initiale, soit 7, deux fois. Il fait de même pour les relations « 3 et 4 fois plus », mais en ayant comme nombre de départ la réponse précédente ; il ne fait qu'ajouter le 7. En fait, il s'agit d'une continuité. Par contre, pour la relation multiplicative « 6 fois plus », et ce lors des questions 13 et 15, le sujet S4 utilise la multiplication. Ainsi, il interprète cette relation comme étant *n fois plus*. Pour les applications directes sur des touts continus toutefois, l'ensemble des relations est interprété comme étant *n fois plus* (voir Q14, Q21 et Q22). Bien que ce sujet puisse interpréter correctement de manière multiplicative cette relation dans le contexte d'un tout continu et d'un tout discret lors de la seconde entrevue, l'interprétation additive de la relation est toujours accessible ou valide pour ce sujet. Il semble qu'une différenciation entre les deux interprétations n'ait pas été effectuée ou encore que ce sujet n'ait pas eu à effectuer une telle différenciation.

Dans le cas des applications indirectes de ces relations sur des touts continus, le sujet S4 interprète ces relations comme étant « n de plus » pour les relations « 2 et 3 fois plus ». Par contre, pour les relations multiplicatives « 4 et 6 fois plus », le sujet S4 interprète celles-ci comme étant « n fois plus ». Cependant, la seconde entrevue a démontré que le sujet S4 interprète désormais les relations « 2 et 4 fois plus » comme étant « n fois plus ».

Comme le montre le tableau 4, lors d'une application directe d'une relation multiplicative « n fois -», le sujet S4 interprète cette relation, lors de la première entrevue, comme étant un produit croisé. Ainsi, il divise d'abord la valeur initiale par « n » pour ensuite soustraire de la valeur initiale ce résultat. Par contre, lors de la seconde entrevue, le sujet S4 emploie la soustraction. Ainsi, il perçoit cette relation comme étant « n de moins » (voir Q9).

Lors d'une application indirecte de la relation multiplicative « n fois -» sur un tout discret, le sujet S4 interprète cette relation comme étant pour les relations « 2 et 4 fois plus », une division. À prime à bord, le sujet S4 connaît déjà la réponse, pose son équation, mais le résultat est déjà présent. Par exemple, il sait que la moitié de 24 est 12, mais il ne sait pas par quoi diviser. Lors de l'application indirecte de « 3 fois -», le sujet S4 interprète cette relation comme étant « n de moins ». Pour ce qui est de l'application du « 6 fois -», le sujet S4 ne sait quoi répondre. Lors de la seconde entrevue, pour les applications indirectes de 3 et 4 « fois -», le sujet S4 interprète celles-ci comme étant : « n » X « n » = « y » ; 24 (valeur initiale) – « y ». Ainsi, il multiplie d'abord la valeur de « n » et soustrait ce résultat par la suite à la valeur initiale. Par contre, pour la relation multiplicative « 6 fois -», le sujet S6 interprète celle-ci comme étant « n de moins ». Ainsi, nous pouvons observer qu'il n'y a aucune stabilité dans les réponses observées chez ce sujet lors d'une application indirecte de la relation multiplicative « n fois -».

Les données recueillies lors d'une application directe de la relation « n fois -» sur un tout continu ne nous permette pas de porter une interprétation adéquate sur les résultats de ce sujet. Ainsi, nous préférons omettre cet aspect pour ce sujet.

4.4.2. Le sujet S4 et les relations fractionnaires de type 1 sur n

Malheureusement, comme le montre le tableau 4, une erreur d'expérimentation s'est glissée lors de la première entrevue et les résultats d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout discret ne peuvent être analysés. De plus, l'expérimentateur a omis de questionner à nouveau le sujet à ce propos lors de la seconde entrevue.

Par contre, lors d'une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n sur un tout discret, le sujet interprète la relation indirecte des fractions 1/2, 1/3 et 1/4 comme étant la valeur initiale moins « n » de 1/n (1/3 = 6 – 3 = 3). Ainsi, ce sujet soustrait la valeur de « n » à la valeur initiale. Il ne perçoit pas la relation indirecte de cette relation. Par contre, pour la fraction 1/6, le sujet S4 répond 1 sans autres explications. Pour cette fraction, la stratégie employée précédemment s'avère être inefficace. Ainsi, soit ce sujet a pensé que s'était impossible que la réponse soit 0 et c'est pourquoi il a inscrit 1 ou tout simplement, il a procédé par division : 6 / 6 = 1. L'examen des conduites du sujet S4 lors de la deuxième entrevue, pour les fractions 1/3 et 1/6 ont démontré une stabilité dans le type de réponses obtenues ; le sujet utilise la même stratégie.

Lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu (voir Q2), le sujet S4 , pour les fractions 1/2, 1/4, 1/6, sépare le tout continu (une forme carrée) en un nombre « n » de parties égales (voir tableau 4). Ainsi, le « n » de la relation fractionnaire 1/n est interprété comme un partage égal. Cependant, pour la fraction 1/3 (« tiers »), ce sujet produit 3 parties, mais celles-ci ne sont pas égales comme le montre le tableau 1 (voir question 2). Ces conduites sont demeurées stables lors de la seconde entrevue.

Lors d'une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n pour un tout continu, le sujet S4 interprète cette relation comme étant : le morceau initial ayant une valeur de 1/n multiplié par « n » permet de retrouver le tout (exemple : 2 X le morceau de 1/2 pour la fraction 1/2). Ainsi, ce sujet applique de manière indirecte les fractions demandées. (Il reforme un tout à l'aide d'une partie du tout en multipliant cette partie par n).

4.5. Analyse des conduites du sujet S5

4.5.1. Le sujet S5 et les relations multiplicatives entières

Comme le montre le tableau 5, lors d'applications directe et indirecte de la relation multiplicative « n fois + » sur un tout continu, le sujet S5 interprète cette relation comme étant « n fois + ». Ainsi, ce sujet interprète le nombre (n) de la relation multiplicative entière (n fois +) comme étant un opérateur (voir Q14, Q21 et Q22) aux deux entrevues.

Par contre, lors d'applications directes de la relation multiplicative « n fois + » sur des touts discrets et continus, lors de la première et de la seconde entrevue, le sujet S5 interprète celles-ci comme étant : « n » de plus (voir Q13 et Q15). Ainsi, ce sujet interprète le nombre (n) de la relation multiplicative entière (n fois plus) comme une quantité d'objets à ajouter à la quantité initiale. Par contre, pour la relation multiplicative « n fois + » à la question 15, le sujet S4 interprète celle-ci comme étant un opérateur ; il doit ajouter « x » paquets de « x » objets un certain nombre de fois à une quantité initiale (5). Cependant, lors de l'entrevue 2, cette interprétation de la relation disparaît.

4.5.2. Le sujet S5 et les relations fractionnaires de type 1 sur n

Comme le montre le tableau 5, lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout discret, le sujet S5 interprète cette relation comme étant : le tout divisé par « n » du 1/n. Ainsi, cet élève interprète le nombre « n » de la relation fractionnaire 1/n comme étant une division (voir Q1). Pour l'application indirecte de cette relation, le sujet procède par une application directe des relations (ex : la moitié de 6 = 3 + 3, donc 3). Ainsi, ce sujet ne fait pas de différence entre la relation 1/2 et 1/3 pour ce type de question. De plus, ce sujet confond la relation fractionnaire 1/4 avec celle de 1/2. Pour lui, le mot « quart » et le mot « moitié » ont la même signification, soit 3 pour la moitié de 6. Pour ce qui est du 1/6 de cette relation, le sujet S5 perçoit le 1/6 de 6 comme étant 6. Pour lui, le « n » de la relation 1/n signifie la réponse ; il ne fait pas l'opération mathématique.

Lors de la seconde entrevue, les conduites du sujet S5 sont demeurées les mêmes pour la relation fractionnaire 1/3. Par contre, pour 1/4, il associe la réponse au sens du mot « quart », soit « quart » = 4. Ainsi, ce sujet comprend le sens de ce terme, mais n'est pas capable d'exécuter la bonne opération mathématique en vue de l'atteinte de la réponse. Pour la relation 1/6, le sujet S5 voit celle-ci comme « x » + « n », soit la valeur initiale additionnée de « n » de la relation 1/n.

Lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu, le sujet S5 sépare la forme carrée en un nombre « n » de parties égales pour les relations fractionnaires 1/2 et 1/4. Par contre, pour les relations fractionnaires 1/3 et 1/6, le sujet S5 démontre l'aptitude à séparer la forme en 3 et 6 parties, mais de façon non égale (voir Q2). Nous croyons que c'est par un manque de connaissances et de d'expérimentation de ces deux relations fractionnaires que le sujet S5 n'a pas les ressources nécessaires pour obtenir des parties égales. Par contre, lors de la deuxième entrevue, le sujet S5 démontre l'aptitude à partager une forme carrée en 3 et 6 parties et ce, en obtenant des morceaux égaux. Le sujet S5 a également démontré l'aptitude à séparer une forme carrée en 5 morceaux égaux (voir Q26).

Comme le montre le tableau 5, lors d'une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu, le sujet S5 interprète celle-ci comme suit : le morceau initial ayant une valeur de 1/n multiplié par « n » (exemple : 2 X le morceau de 1/2 pour la fraction 1/2). Ainsi, par une application indirecte, le sujet S5 démontre une aptitude à reformer un tout à l'aide d'une partie du tout (le morceau initial). Par contre, suite à l'analyse de cette conduite, nous nous sommes aperçus que l'expérimentateur insistait trop sur la question et pouvait ainsi, venir biaiser les résultats. Cette erreur est survenue pour les fractions 1/3 et 1/4. Alors, nous avons préféré, lors de la deuxième entrevue, reposer ces 2 questions, même si elles avaient été réussies lors de la première. Lors de la seconde entrevue, le sujet S5 a démontré une stabilité dans ces conduites mathématiques en rapport à la relation indirecte des fractions 1/3 et 1/4 pour un tout continu.

4.6. Analyse des conduites du sujet S6

4.6.1. Le sujet S6 et les relations multiplicatives entières

Comme le montre le tableau 6, l'interprétation donnée aux applications directes des relations multiplicatives « n fois + » et « n fois - » sur des touts discrets par le sujet S6 sont en tous points de même nature que celles que nous avons décrites pour le sujet S5 aux deux entrevues (voir principalement Q13, Q14, Q15, Q21 et Q22). Nous invitons le lecteur à se référer au texte du sujet S5.

4.6.2. Le sujet S6 et les relations fractionnaires de type 1 sur n

Lors de la première entrevue, nous n'avons pas pu observer de conduites chez le sujet S6 dans les applications directes et indirectes des relations fractionnaires 1/n sur un tout discret en raison d'une erreur d'expérimentation; il nous est donc impossible d'analyser ces données. Par contre, les données recueillies lors de la deuxième entrevue nous montre que, lors de l'application indirecte de la relation fractionnaire 1/2, le sujet S6 interprète celle-ci comme étant : * « n » (voir tableau 6). Ainsi, le sujet S6 multiplie par « n » la valeur initiale. Par contre, pour les relations fractionnaires 1/3, 1/4 et 1/6, le sujet S6 interprète celles-ci comme suit : « n » de plus (voir Q3). Nous croyons que le sujet S6 est en mesure d'interpréter de façon adéquate une relation fractionnaire souvent observée rencontrée dans la vie quotidienne. Par contre, pour les relations fractionnaires moins rencontrées dans la vie quotidienne, ce sujet utilise une toute autre stratégie, soit « n de plus ».

Comme le montre le tableau 6, lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu, le sujet S6 interprète l'ensemble des relations comme étant un partage de la forme carrée en « n » parties égales. Il est intéressant de mentionner la stratégie peu commune que ce sujet a employée pour la relation fractionnaire 1/3. Il a d'abord séparé la forme en 4 parties égales, puis il a séparé une des parties en 3. Ensuite, il a coché un carré et une partie sur les 3 dans l'autre carré (voir Q2).

Lors des applications indirectes de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu, le sujet S6 interprète cette relation comme étant un multiplication par « n ». Ainsi, le sujet S6 démontre les habiletés nécessaires à reformer un tout à l'aide d'une partie du tout (le morceau initial) (voir Q4).

INTERPRETATION DES RESULTATS ET CONCLUSIONS DE LA RECHERCHE

Dans ce dernier chapitre, les résultats de notre recherche sont d'abord interprétés en les situant dans le cadre théorique des études sur les connaissances relatives à une première formalisation de la notion de fraction. Les limites de notre recherche sont ensuite précisées et les perspectives de recherches ultérieures sont énoncées.

5.1. Interprétation des résultats et conclusions de la recherche

Les résultats des études sur la nature des représentations que les élèves construisent pour résoudre des problèmes impliquant des relations fractionnaires montrent bien comment une première formalisation de la notion de fraction s'échelonne sur une longue période et est grandement marquée par la valeur numérique de la fraction. Les études traduisent bien d'une part, la complexité de l'objet fraction et, d'autre part, les nombreuses connaissances que les élèves doivent coordonner pour interpréter la fraction. Ces connaissances réfèrent aux habiletés de partage et à la maîtrise des relations partie à tout. De plus, l'examen de la construction de la fraction en tant que relation partie à tout nécessite qu'un examen des opérateurs multiplicatifs utilisés par les élèves soit effectué. Dans notre recherche, il nous a été possible d'apprécier la complexité de cette construction chez des élèves forts, moyens et en difficulté d'apprentissage.

Au chapitre précédent, nous avons procédé à l'analyse des procédures utilisées par chacun des élèves dans le traitement des relations multiplicatives de type « n fois + » et « n fois -» et fractionnaires de type 1 sur n. Pour chacun des types de tâches, nous présentons d'abord la nature de l'interprétation des relations observée chez nos élèves. Nous spécifions ensuite les différents traitements des nombres associés aux relations qui ont été observés selon de type d'élèves (classés « forts », « moyens » ou « faibles » dans les enseignantes).

5.2. Les relations multiplicatives entières

Lors d'une application directe de la relation multiplicative « n fois + », sur un tout discret, les sujets S2 et S3 interprètent cette relation comme étant une multiplication. Ainsi, ils perçoivent le sens opérateur de cette relation. Quant à eux, les sujets S5 et S6, pour la question 13, perçoivent cette relation comme étant également une multiplication, mais cette interprétation n'est pas stable, puisque lors de la question 15, ces mêmes sujets perçoivent celle-ci comme étant « n de + ». Le même phénomène se produit pour le sujet S1, mais nous ne pouvons le placer dans le même groupe que les précédents, puisque celui-ci perçoit la relation multiplicative « n fois+ » à la question 13 comme étant une multiplication et lors de la question 15, comme étant « n de plus ». Pour ce sujet, aucune stabilité n'est démontrée. Enfin, le sujet S4 démontre un tout autre patron. Quant à lui, ces relations multiplicatives s'interprètent toutes comme étant « n de + ». Ce sujet perçoit cette relation comme étant « n » objets que l'on additionne à la quantité initiale et non comme un opérateur.

Lors d'une application directe de la relation multiplicative « n fois + » sur un tout continu, les sujets S1, S2, S5 et S6 interprètent tous cette relation comme étant « n de + ». Ainsi, ils interprètent tous le nombre « n » comme étant une quantité d'objets à ajouter à la quantité initiale (pizza ou gâteau). Le sujet S3 interprète également cette relation comme étant « n de + » pour la question 14, mais ne démontre pas de stabilité, puisque pour les questions 22 et 23, ils utilisent la multiplication. Ainsi, il perçoit cette relation comme étant un opérateur. Quant à lui, le sujet S4 utilise la multiplication pour résoudre l'ensemble de ces problèmes.

Lors d'une application indirecte de la relation multiplicative « n fois + » sur un tout continu, il n'y a pas de concordance entre les différents sujets. De plus, les élèves avaient de la difficulté à élaborer une stratégie efficace pour résoudre ce problème.

Ainsi, en conclusion, l'examen de l'ensemble des conduites des sujets sur les relations « n fois + » montre que ce sont les élèves diagnostiqués « faibles » qui ont eu un taux de réussite plus élevé. Pour la relation « n fois+ » sur un tout discret lors d'une application directe par exemple, le seul élève démontrant de la stabilité face à la stratégie à employer pour résoudre ce type de problème est un élève classé « faible » (le sujet S 3). Lors de la question 14, question impliquant une application directe de la relation multiplicative « n fois + », le seul sujet qui fut capable de démontrer qu'il s'agissait d'une multiplication et non d'une addition est également un élève dit « faible » (S4). Enfin, lors d'une application indirecte de la relation sur un tout continu, c'est un élève dit « faible » qui a mentionné que « cela était moins, en fait, plus petit » (S3). Il a raison ! Il n'est pas capable de trouver la stratégie pour trouver lui-même la réponse, mais il comprend l'énoncé de l'application indirecte de la relation « n fois + ».

Pour la relation multiplicative « n fois -» sur un tout discret, les sujets S1, S5 et S6 interprètent tous l'application directe de cette relation comme étant « n de -». Ainsi, ils font une soustraction sur la quantité initiale. Quant à eux, les sujets S2, S3 et S4 interprètent cette relation comme étant une division. Ils perçoivent ce type de relation multiplicative comme un partage.

Pour une application directe de la relation multiplicative « n fois -» sur un tout continu, la corrélation des résultats n'est pas du tout aussi visible. Trois sujets (S2, S5 et S6) usent des mêmes stratégies, soit l'utilisation de « n de -» pour désigner cette interprétation. Par contre, il n'est guère possible de rassembler aussi facilement les autres sujets. Les sujets S1 interprète cette relation comme étant la division du tout en deux, puis cette moitié divisée par le « n » de la relation. Quand au sujet S3, lors de la première entrevue, il interprète cette relation comme étant « n de -» ; qu'en fait, cela doit être plus petit. Cependant, lors de la seconde entrevue, un bond notionnel important se fait remarquer et ce sujet réussit l'ensemble de ces relations. Quand au sujet S4, il interprète cette relation comme étant une division. Cependant, cette interprétation n'est pas stable, puisque lors de la question 32, il utilise « n de -». Ainsi, pour l'application directe de la relation multiplicative « n fois -» sur un tout continu, il s'avère très difficile de faire des liens.

Pour l'application directe de la relation « n fois –» sur un tout continu, ce sont deux élèves classés « faibles » » selon les critères académiques des enseignants (S3 et S4) et un élève fort (S1) qui décodent efficacement le problème. Cette tendance se maintient avec le tout discret; ce sont encore une fois les élèves en difficulté qui réussissent à cerner le cœur du problème. Il est à remarquer que lors de l'entrevue 1, le sujet S3 n'était pas capable d'expliquer sa stratégie, mais il était en mesure d'affirmer que la réponse devait être plus petite « moins ». Ce même problème, il l'a réussi lors de l'entrevue numéro 2.

5.3 Les relations fractionnaires de type 1 sur n

Lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout discret, les sujets S2 et S5 interprètent cette relation comme étant une division, soit le tout divisé par « n ». Les sujets S1, S2 et S3 interprètent la relation fractionnaire 1/2 comme étant également une division. Pour les relations 1/3, 1/4 et 1/6, les sujets S1 et S6 les interprètent comme étant « n » de moins. Cependant, lors de la seconde entrevue, le sujet S6 interprète cette même relation comme étant la moitié du tout additionné de « n ». L'interprétation est tout a fait différente dans ce cas-ci. Quand à lui, le sujet S3 interprète cette relation comme étant « n ». Il associe la réponse au terme. Il est à noter qu'aucune interprétation ne fut faite pour le sujet S4, puisque les résultats ne se révélaient pas être concluants.

Lors d'une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n sur des touts discrets, il n'y a pas de liens apparents à faire entre les différents sujets. Ainsi, le sujet S1 interprète la relation 1/2 comme étant 2 parties qui forment un tout, 1/4 et 1/6 comme étant le « n » de la relation. Quant au 1/3 de celle-ci, il ne peut y accorder de sens. Cependant, lors de la seconde entrevue, le sujet S1 interprète l'ensemble de ces relations comme étant le « n ». Quant à lui, le sujet S2 utilise une division par « n », à l'exception de la relation fractionnaire 1/3 où il ne peut y accorder de sens. Le sujet S3 interprète 1/2 comme étant « n fois+ » et 1/3, ¼ et 1/6 comme étant « n ». Le sujet S4 interprète les fractions 1/2, 1/3 et 1/4 comme étant « n de -» et le 1/6 comme étant 1. Lors de la seconde entrevue, il associe le « n », soit le numérateur, en guise de réponse aux relations fractionnaires 1/3 et 1/4 (les autres fractions n'ayant pas été demandées). Le sujet S5 interprète les relations fractionnaires 1/2 et 1/3 de la même façon soit : le tout divisé par « n ». Il associe le ¼ à la moitié et le 1/6 au « n » de la relation fractionnaire. Lors de la seconde entrevue, il interprète le 1/3 et le 1/4 comme étant « n » et le 1/6 comme étant le tout additionné de « n ». En terminant, le sujet S6 interprète quant à lui la relation fractionnaire 1/2 comme étant une multiplication de « n » et les fractions 1/3, 1/4 et 1/6 comme étant « n de + ». Ainsi, vous pouvez observer qu'aucun lien ne peut être mis à jour, puisque les réponses à ce type de questionnement semblent être très disparates.

Pour une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur des touts continus, les sujets S1 et S2 interprètent les résultats de la même façon soit : un partage égale pour les relation fractionnaires 1/2, 1/4 et 1/6 et un partage en « n » parties pour la relation fractionnaire 1/3, mais non de façon égale. Cependant, lors de la seconde, ces sujets démontrent la capacité à partager en 3 parties égales. Les sujets S3 et S5 interprètent les relations fractionnaires 1/2 et 1/4 comme étant un partage en « n » parties égales. Quant aux relations fractionnaires 1/3 et 1/6, les sujets S3 et S5 démontrent l'habileté à partager en « n » parties, mais non de façon égale. Lors de la seconde entrevue, ces sujets démontrent l'habileté à partager en « n » parties égales les fractions 1/3 et 1/6. Quant aux sujets S4 et S6, pour l'ensemble des fractions demandées, ils démontrent l'aptitude à faire un partage en « n » parties égales.

Lors d'une application indirecte de la relation fractionnaire 1/n sur des touts continus, l'ensemble des sujets interprètent ces relations fractionnaires de la même façon, soit : le tout multiplié par « n ».

Ainsi, lors d'une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout discret, ce sont les élèves classés « forts » qui réussissent le mieux à ce type de questionnement (S1 et S2). Ils sont en mesure d'utiliser l'opération de division pour partager le tout en « n » parties égales. Par contre, lors d'une application indirecte, les données changent. L'ensemble des élèves se révèle être incapable de répondre à ce type de questions. Ils ont de la difficulté à cerner l'application indirecte. Probablement, puisqu'ils ne sont pas habiletés à résoudre ce type de question car ce contexte est peu présent dans le cadre scolaire ou que nous avons éprouvé des difficultés d'intervention lors de l'expérimentation.

Pour une application directe de la relation fractionnaire 1/n sur un tout continu, ce sont un élève faible (S4) et un élève moyen (S5) qui démontrent la plus grande stabilité face à ce type de relation. Dès la première entrevue, ils sont été en mesure de partager en « n » parties égales l'ensemble des relations fractionnaires de type.

En conclusion, suite à cette dernière analyse, nos résultats de recherche montrent qu'en général, ce ne sont pas les élèves classés « forts » qui réussissent le mieux les diverses tâches. Dans notre recherche, ce sont les élèves classés « faibles » qui ont le mieux performés et ce, aux deux entrevues. Ce principal résultat est quelque peu questionnant et nous permet de soulever les questions suivantes : Pourquoi les élèves classés « faibles » ont-ils tant de difficulté en classe ? Pourquoi sont-ils capables de résoudre des problèmes complexes hors de la classe et non entre ses quatre murs ? Pourquoi les élèves classés « forts » ne performent-ils pas davantage dans le contexte hors classe?

5.4 Limites et perspectives de recherches

Au terme de cette recherche, il nous apparaît essentiel de procéder à un examen critique du travail réalisé et de dégager des perspectives pour des recherches ultérieures.

Le premier commentaire sur les limites de la recherche porte sur les interventions de l'expérimentateur. Nous avons en effet d'abord observé à plusieurs reprises un certain manque de clarté dans les consignes, surtout dans les tâches nécessitant des applications indirectes des relations. Les élèves étaient invités à trouver le tout à partir d'une partie et l'expérimentateur exposait par exemple, les données du problème en associant la partie à son tout et le tout au tout de l'enfant et formulait la question sur son tout à elle. Ce manque de clarté de l'expérimentateur peut avoir contribuer à quelques reprises à confondre les élèves sur les actions à entreprendre. Ainsi, il se peut que certains élèves aient parfois eu des difficultés à se représenter le problème selon les termes utilisés par l'expérimentateur. Il convient également se souligner qu'à plusieurs reprises, la première entrevue fut teintée par de fortes tentatives d'enseignement qui se sont résorbées par la suite. Enfin, il est parfois arrivé que des questions aient été mal présentées aux sujets. Par exemple, la tâche visait à proposer une application indirecte mais sa présentation par l'expérimentateur en faisait une tâche impliquant une application directe. Cette dernière erreur explique parfois l'absence de données dans notre recherche.

Il nous faut également reconnaître qu'il est difficile de prévoir les connaissances des élèves en début de formalisation sur la notion de fraction d'une part, et, celles des élèves en difficulté d'apprentissage d'autre part. Nous devons admettre, qu'à certaines occasions, nous avons suggéré l'utilisation de connaissances en intervenant trop rapidement –ou encore en intervenant pas par manque d'idée dans l'action- auprès des élèves qui affirmaient ne pas connaître de solution.

Le dernier commentaire sur les limites porte sur le type de tâches utilisé dans la recherche. Dans notre recherche, il nous a été possible d'apprécier la complexité de la construction d'une première formalisation de la notion de fraction et de l'impact des connaissances sur les relations multiplicatives entières sur cette formalisation. Plusieurs changements fructueux pourraient toutefois être apportés tel : 1) l'ajout de nouvelles valeurs numériques aux relations (ex : 9 fois -); 2) augmenter le nombre de sujets de l'étude, plus particulièrement le sous-groupe des élèves en difficulté d'apprentissage; 3) refaire cette étude dans un cadre plus typiquement scolaire afin de pouvoir observer les élèves dans leur fonctionnement d'élèves.

RÉFÉRENCES

BEHR, M.J., LESH, R., POST, T.R., SILVER, E.A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* New York: Academic Press., pp. 92-144.

BERGERON, J., HERSCOVICS, N. (1987). *Unit fractions of a continuous whole.* In Psychology of mathematics educations, PME-XI. Montréal. Pp.357-365

BLOUIN, P. (1993). Enseignement de la notion de fraction à des élèves de première secondaire en difficulté d'apprentissage. Thèse de doctorat. Université de Montréal. 193 p.

BLOUIN, P. (1999). Pour mieux comprendre la construction des nombres rationnels. *In* F. Conne et G. Lemoyne (Eds). *Le cognitif en didactique des mathématiques.* Montréal : Presses de l'Université de Montréal, pp.199-211.

BLOUIN, P. (2002). *Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi.* Montréal : Editions Bande Didactique. 291 p.

BRASSARD, C. (1996). Elaboration d'un premier sens de la fraction chez les élèves en difficulté d'apprentissage du deuxième cycle du primaire : la relation partie-tout. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Montréal. 123 p.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2,* No. 1 pp. 39-127.

BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse d'Etat, Université de Bordeaux 1.

BRUN, J., CONNE F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Education et Recherche, 3,* pp. 161-186.

CAUZINILLE-MARMÈCHE, E., WEIL-BARAIS, A. (1989). Quelques causes possibles d'échec en mathématiques et en sciences physiques. *Psychologie Française, 34,* no. 4, pp.277-283.

CHALFANT, J.C. (1989). Diagnostic Criteria for Entry and Exit from Service: A National Problem. In Silver, L.B. (Ed.). *The Assessment of Learning Disabilities: Preschool Through Adulthood.* Boston: College-Hill. pp. 1-26.

CHARNAY, R. (2000). Les math, c'est l'enfer !. Dans : MEIRIEU, P. (2000). *L'école et les parents. La grande explication.* Éditions PLON, France.

CONNE, F. (1989). *Un grain de sel à propos de la transposition didactique.*

DESJARDINS, M., HETU, J.C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Québec: Presse de l'université de Montréal.

HART, K., ed. (1981). *Children's understanding of mathematics (Vol. 11-16).* London: Murray, 231 p.

HIEBERT, J., TONNESSEN, L.H. (1978). Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, no. 5, pp. 374-378.

KAVALE, K.A., FORNESS, S.R., BENDER, M. (1987). The Learning Disability Phenomenon. In Kavale, Forness & Bender (Eds.). *Handbook of Learning disabilities; volume 1 : Dimensions and Diagnosis.* Boston: College-Hill, pp. 3-26.

KIEREN, T.E. (1976). On Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In LESH, R. (eds), *Number and Measurement ; Papers from a research Work-Shop.* Columbus : ERIC/SMEAC.

KIEREN, T.E. (1980). The rational number construct – Its elements and mechanism. In T.E. Kieren (Ed.). *Recent research on number learning.* Columbus, Ohio : ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

KIEREN, T.E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers : Its intuitive and Formal Development. In Hiebert, J., Behr, M. (eds). *Numbers concepts and operations in the Middle Grades.* Reston, Virginia : Lawrence Erlbaum Ass. Pp. 162-181.

KIEREN, T.E. (1989). Rational and Fraction Numbers as Mathematical and Personal Knowledge : Implications for Curriculum and Instruction. Document de travail. Université d'Alberta. 70p.

KIEREN, T.E. (1993). Rational and Fractional Numbers : From Quotient Fields to Recursive Understanding. In. Carpenter, T.P., Fennema, E., Romberg, T.A.(Eds) *Rational Numbers : An Integration of Research.* Hillsdale : Lawrence Erlbaum Eds. pp. 49-84

LEMOYNE, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. *Repère*, No.12, pp.

LEMOYNE, G. (octobre 1996). La recherche en didactique des mathématiques au Québec : rétrospectives et perspectives. *Bulletin AMQ, vol. XXXVI,* No.3, pp 31-40

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1964). *Rational Number*. Document. Traduction effectuée par l'AMQ.

PARRAT-DAYAN, S., VONECHE, J. (1991). Conservation, notions et pratiques cognitives: étude de leurs interrelations. In Bideaud, J., Meljac, C., Fischer, J.-P. (Eds.). *Les chemins du nombre*. Presses Universitaires de Lille. pp. 91-112.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. 1993. “Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes “faibles”. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 13, no 12, p. 5-118.

PIAGET, J., INHELDER, B., SZEMINSKA, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: PUF, 514 p.

POTHIER, SAWADA (1983). Partitioning: The Emergence of Rational Number Ideas in Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, No. 4, pp. 307-317.

RICCO, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics, 13*, pp. 289-327.

ROUCHE, N. (1992). Le sens de la mesure. Bruxelles : Didier Hatier. 312p.

ROUCHE, N. (1998). Pourquoi ont-ils inventé les fractions? Paris : Ellipses. 126p

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press., pp. 127-174.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10,* No. 2-3, pp. 133-170.

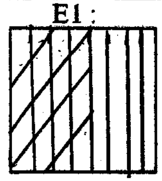
VERGNAUD, G. (1994). Multiplicative Conceptuel Field : What and Why ? In Harel, G. Confrey J. (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of* Mathematics. New York: State University of New York Press, pp. 41-59.

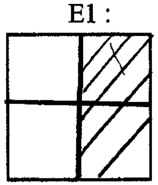
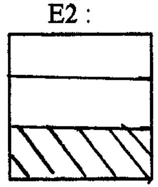
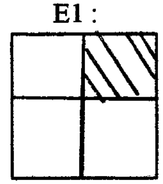
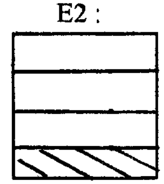
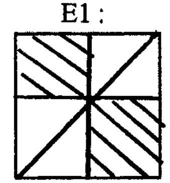
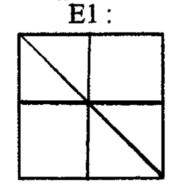
VINCENT, S. (1992), *Construction des structures multiplicatives chez des jeunes élèves du primaire.* Thèse de doctorat, Université de Montréal. 180p.

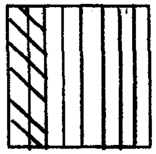
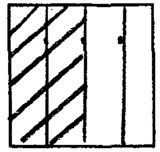
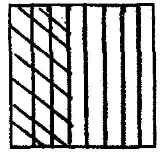
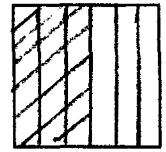
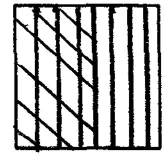
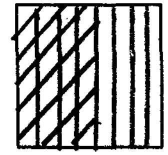
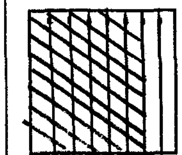
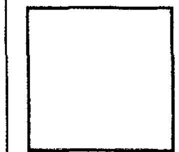
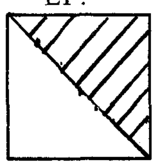
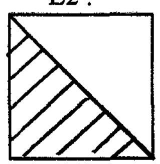
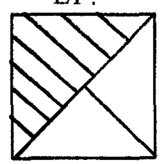
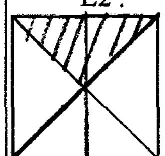
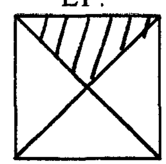
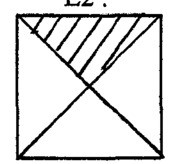
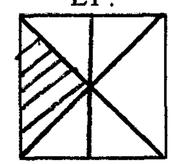
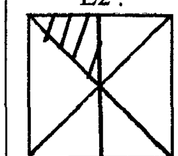
WALLACE, G., McLOUGHLIN, J.A. (1988). *Learning Disabilities: Concepts and Characteristics.* Columbus: Merrill Publishing Company. Third edition, 396 p.

TABLEAUX

Tableau sujet 1

Relation multiplicative « n fois + »								
	2 fois +		3 fois +		4 fois +		6 fois +	
TD AD (Q.13)	E1 : 9 (7 + 2)	E2 : 9 (7 + 2)	E1 : 10 (7 + 3)	E2 : 10 (7 + 3)	E1 : 11 (7 + 4)	E2 : 13 (7 + 6)	E1 : 13 (7 + 6)	E2 : 13 (7 + 6)
TD AD (Q. 15)	E1 : 10 (5 X 2)	E2 :	E1 : 15 (5 X3)	E2 :	E1 : 20 (5 X 4)	E2 :	E1 : 30 (5 X 6)	E2 :
TC AD (Q. 14)	E1 : 2 mcx. ¼	E2 : 3 mcx ¼ (1 + 2)	E1 : 3 mcx ¼	E2 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E1 : 4 mcx ¼	E2 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E1 : 6 mcx ¼	E2 : 7 mcx ¼ (1 + 6)
TC AD (Q. 21)				E2 : 2 (3 X ½)				
TC AD (Q. 22)		E2 : 1 ½ (½ + ½ + ½)						
TC AI (Q. 16)	E1 : mc.+2mcx	E2 : mc ÷ 4 Donne 2.	E1 : 	E2 : mc÷6. Donne 3.	E1 :	E2 : mc ÷ 8. Donne 4.	E1 :	E2 : mc. ÷12. Donne 6.

Relations multiplicatives « n fois -»								
	2 fois -		3 fois -		4 fois -		6 fois -	
TD AD (Q. 9)	E1 : 10 (12 - 2)	E2 : 6 (12 – 6)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : Ne sait pas.	E1 : 8 (12 – 4)	E2 : 8 (12 – 4)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 : 6 (12 – 6)
TD AI (Q. 11)	E1 : 22 (24 – 2)	E2 : 12 (24 – 12)	E1 : 21 (24 – 3)	E2 : Ne sait pas.	E1 : 20 (24 – 4)	E2 : 20 (24 – 4)	E1 : 18 (24 – 6)	E2 : 18 (24 – 6)
TC AD (Q. 10)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 :	E1 :  * Aucun MC.	E2 :

TC AI (Q. 12)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
TC AD (Q. 32)				E2 : 18 (21 – 3)				
Relations fractionnaires 1/n								
	½		1/3		1/4		1/6	
TD AD (Q. 1)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 :	E1 : Ne sait pas	E2 : 9 (12 – 3)	E1 : 8 (12 – 4)	E2 : 8 (12 – 4)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 : 6 (12 – 6)
TD AI (Q. 3)	E1 : 6 (3 + 3)	E2 :	E1 : Ne sait pas.	E2 : 3 ("tiers")	E1 : 4 ("quart")	E2 : 4 ("quart")	E1 : 6 ("sixième")	E2 : 6 ("sixième")
TC AD (Q. 2)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
TC AI (Q. 4)	E1 : 2 mcx de 1/2=1	E2 :	E1 : 3 mcx de 1/3=1	E2 :	E1 : 4 mcx de 1/4=1	E2 :	E1 : 6 mcx de 1/6=1	E2 :
TC AD (Q. 26)	1/5 :le rectangle séparé en 5 mcx.							
Relations fractionnaires m/n								
	2/3		3/4		3/2			
TD AD (Q. 5)	E1 : 14 (12 + 2)	E2 : 6 (2 X 3 = 6 ; 12 – 6)	E1 : 15 (12 + 3)	E2 : 0 (12 -3 X 1/4 = 0)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 3 (12 – 6 = 6 ; 6 – 3)		
TD AI (Q. 7)	E1 : 14 (12 + 2)	E2 : 15 (12 + 3)	E1 : 15 (12 + 3)	E2 : 16 (12 + 4)	E1 : 12	E2 : 36 (3 X 12)		
TD AI	5 1/2 = moitié							

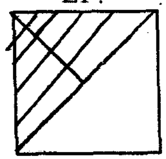
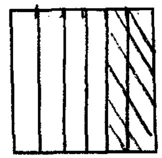
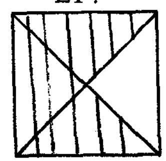
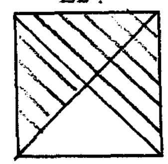
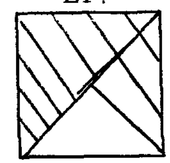
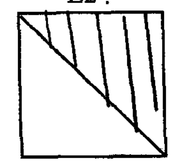
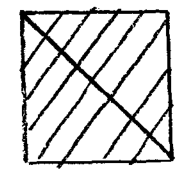
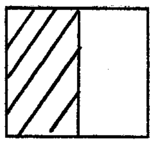
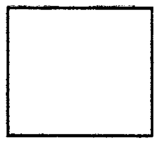
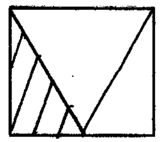
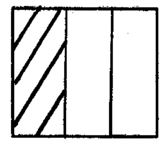
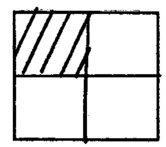
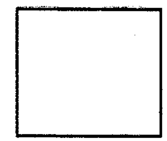
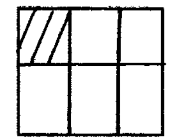
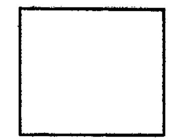
(Q. 25)	11 (5 + 5 = 10 ; ½ + ½ = 1 ; 10 + 1 = 11)							
TC AD (Q. 6)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 		
TC AI (Q. 8)	E1 : 2/3 + 2 X 2/3	E2 :	E1 : 3/4 + 3 X 3/4	E2 :	E1 : Impossible	E2 :		

Tableau sujet S2

Relation multiplicative « n fois + »								
	2 fois +		3 fois +		4 fois +		6 fois +	
TD AD (Q.13)	E1 : 14 (7 X 2)	E2 :	E1 : 21 (7 X 3)	E2 :	E1 : 28 (7 X 4)	E2 :	E1 : 42 (7 X 6)	E2 :
TD AD (Q. 15)	E1 : 10 (5 X 2)	E2 :	E1 : 15 (5 X3)	E2 :	E1 : 20 (5 X 4)	E2 :	E1 : 30 (5 X 6)	E2 :
TC AD (Q. 14)	E1 : 3 mcx. ¼ (1 + 2)	E2 : 3 mcx ¼ (1 + 2)	E1 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E2 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E1 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E2 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E1 : 7 mcx ¼ (1 + 6)	E2 : 7 mcx ¼ (1 + 6)
TC AD (Q. 21)				E2 : 3 ½ (3 X 1 ½)				
TC AD (Q. 22)		E2 : 1 ½ (½ + ½ + ½)						
TC AI (Q. 16)	E1 : Il n'y en aurait pas	E2 :	E1 : Il n'y en aurait pas.	E2 :	E1 : Il n'y en aurait pas.	E2 :	E1 : Il n'y en aurait pas.	E2 :

Relations multiplicatives « n fois -»								
	2 fois -		3 fois -		4 fois -		6 fois -	
TD AD (Q. 9)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 :	E1 : 4 (12 / 3)	E2 :	E1 : 3 (12 / 4)	E2 :	E1 : 2 (12 / 6)	E2 :
TD AI (Q. 11)	E1 : 12 (24 / 2)	E2 :	E1 : 8 (24 / 3)	E2 :	E1 : 6 (24 / 4)	E2 :	E1 : 4 (24 / 6)	E2 :
TC AD (Q. 10)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 0 (1 – 2)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 0 (1 – 3)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 0 (1 – 4)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 0 (1 – 6)
TC AI (Q. 12)	E1 :	E2 : 0	E1 :	E2 : 0	E1 :	E2 : 0	E1 :	E2 : 0
TC AD				E2 : 7 (21 / 3)				

(Q. 32)								
Relations fractionnaires 1/n								
	½		1/3		1/4		1/6	
TD AD (Q. 1)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 :	E1 : 4 (12 / 3)	E2 :	E1 : 3 (12 / 4)	E2 :	E1 : 2 (12 / 6)	E2 :
TD AI (Q. 3)	E1 : 3 (6 / 2)	E2 :	E1 : Ne sait pas.	E2 : 3 ("tiers")	E1 : ? (6 / 4)	E2 : 4 ("quart")	E1 : 1 (6 / 6)	E2 :
TC AD (Q. 2)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
TC AI (Q. 4)	E1 : 2 mcx de 1/2=1	E2 :	E1 : 2 mcx de 1/3=1	E2 : 3 mcx de 1/3 = 1	E1 : 4 mcx de 1/4=1	E2 :	E1 : 6 mcx de 1/6=1	E2 :
TC AD (Q. 26)	1/5 :le rectangle séparé en 5 mcx.							
Relations fractionnaires m/n								
	2/3		3/4		3/2			
TD AD (Q. 5)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 : 2 (numérateur)	E1 : 4 (12 / 3)	E2 : 3 (numérateur)	E1 : 8	E2 : 3 (numérateur)		
TD AI (Q. 7)	E1 : 24 (2 X 12)	E2 : 24 (2 X 12)	E1 : 36 (3 X 12)	E2 : 36 (3 X 12)	E1 : 36 (3 X 12)	E2 : 36 (3 X 12)		
TD AI (Q. 25)	5 1/2 = moitié 2 ¾ (1 / 2 = ½ ; 4 / 2 = 2 ; ½ / 2 = ¼)							

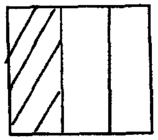
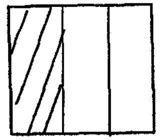
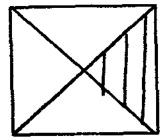
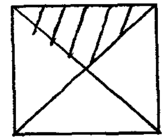
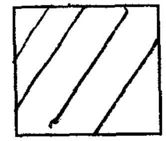
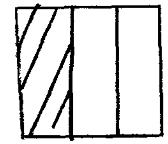
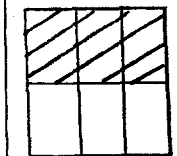
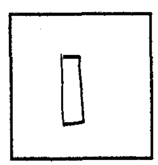
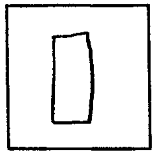
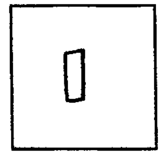
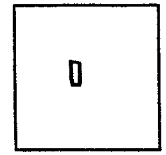
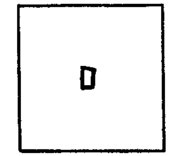
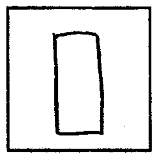
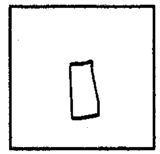
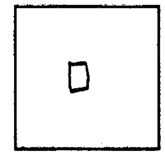
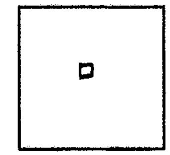
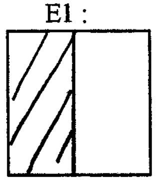
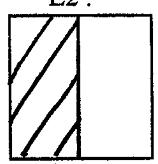
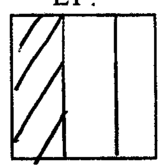
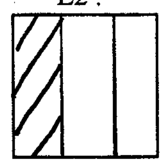
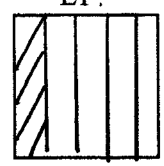
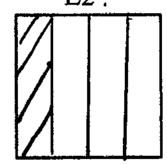
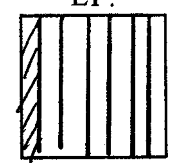
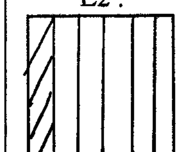
TC AD (Q. 6)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 		E2: 	
TC AI (Q. 8)	E1 : 2 mcx 2/3	E2 :	E1 : 3 mcx 3/4	E2 :	E1 : mc de 3/2 / 4 = 3	E2 :		

Tableau sujet S3

Relation multiplicative « n fois + »								
	2 fois +		3 fois +		4 fois +		6 fois +	
TD AD (Q.13)	E1 : 14 (7 X 2)	E2 :	E1 : 21 (7 X 3)	E2 :	E1 : 28 (7 X 4)	E2 :	E1 : 42 (7 X 6)	E2 :
TD AD (Q. 15)	E1 : 10 (5 X 2)	E2 :	E1 : 15 (5 X3)	E2 :	E1 : 20 (5 X 4)	E2 :	E1 : 30 (5 X 6)	E2 :
TC AD (Q. 14)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 3 mcx de 1/4	E1 : Ne sait pas.	E2 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 7 mcx ¼ (1 + 6)
TC AD (Q. 21)				E2 : 4 ½ (3 X 1 ½)				
TC AD (Q. 22)		E2 : 1 (½ + ½)						
TC AI (Q. 16)	E1 : 	E2 : 2 X mc 1/4	E1 :	E2 : 3 X mc 1/4	E1 :	E2 : 4 X mc 1/4	E1 :	E2 : 6 X mc 1/4:

Relations multiplicatives « n fois -»								
	2 fois -		3 fois -		4 fois -		6 fois -	
TD AD (Q. 9)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 : 0 (1 fois - = 12 ; 2 fois - =0)	E1 : 4 (12 / 3)	E2 : 0	E1 : 3 (12 / 4)	E2 : 0	E1 : 2 (12 / 6)	E2 : 0
TD AI (Q. 11)	E1 : 12 (24 / 2)	E2 : 0 (1 fois - = 12 ; 2 fois - =0)	E1 : 8 (24 / 3)	E2 : 0	E1 : 6 (24 / 4)	E2 : 0	E1 : 4 (24 / 6)	E2 : 0

TC AD (Q. 10)	E1 : 	E2 : Mc / 2	E1 : 	E2 : Mc / 3	E1 : 	E2 : Mc / 4	E1 : 	E2 : Mc / 6
TC AI (Q. 12)	E1 : 	E2 : Mc / 2	E1 : 	E2 : Mc / 3	E1 : 	E2 : Mc / 4	E1 : 	E2 : Mc / 6
TC AD (Q. 32)				E2 : 14 (21 / 3 = 7 ; 21 – 7)				
Relations fractionnaires 1/n								
	½		1/3		1/4		1/6	
TD AD (Q. 1)	E1 : 12 (6 + 6)	E2 : 12 (6 + 6)	E1 : 3 (3 = tiers)	E2 : 3 (3 = tiers)	E1 : 4 (4 = quart)	E2 : 4 (4 = quart)	E1 : 6 (6 = sixième)	E2 : 6 (6 = sixième)
TD AI (Q. 3)	E1 : Question mal posée	E2 : 12 (6 X 2)	E1 : Question mal posée	E2 : 3 (3 = tiers)	E1 : Question mal posée	E2 : 4 (4 = quart)	E1 : Question mal posée	E2 : 6 (6 = sixième)
TC AD (Q. 2)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
TC AI (Q. 4)	E1 : 2 mcx de 1/2=1	E2 : 2 mcx de 1/2=1	E1 : 3 mcx de 1/3=1	E2 : 3 mcx de 1/3 = 1	E1 : 4 mcx de 1/4=1	E2 : 4 mcx de 1/4=1	E1 : 6 mcx de 1/6=1	E2 : 6 mcx de 1/6=1
TC AD (Q. 26)	1/5 :le rectangle séparé en 5 mcx.							

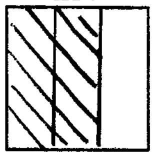
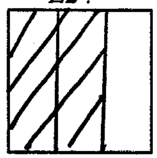
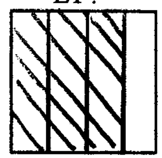
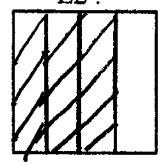
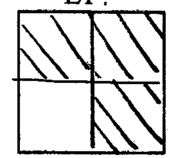
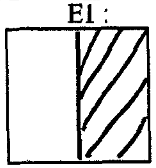
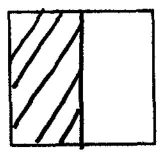
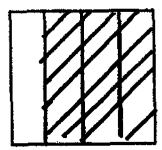
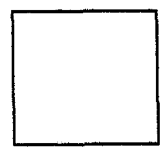
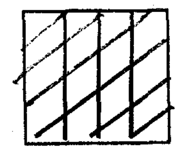
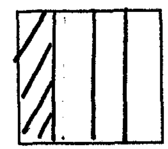
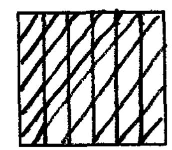
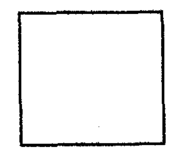
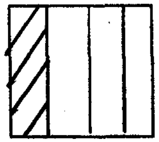
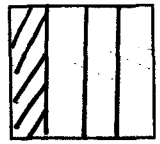
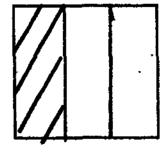
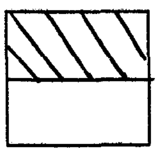
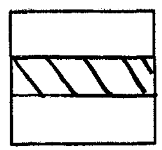
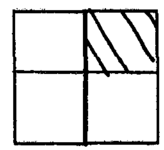
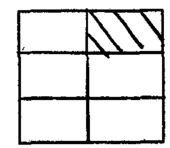
Relations fractionnaires m/n								
	2/3		3/4		3/2			
TD AD (Q. 5)	E1 : 8 (12 / 3 = 4 ; 12 – 4))	E2 : ? (2/3 = 2 sur 3 ; /3 et ensuite ?)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 9 (12 / 4 = 3 ; 12 – 3)	E1 : Ne sait pas.	E2 : Impossible. 3 > 2		
TD AI (Q. 7)	E1 : 12 (12 / 3 = 4 ; 3 X 4)	E2 : 18 (12 + 6)	E1 : 15 (3 (numérateur) X 5 (quart)	E2 : 9 (12 / 4= 3 ; 12 – 3)	E1 : Ne sait pas.	E2 : Impossible. 3 > 2		
TD AI (Q. 25)	5 1/2 = moitié 11 (5 + 5 = 10 ; ½ + ½ = 1 ; 10 + 1 = 11)							
TC AD (Q. 6)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : ne se peut pas.		
TC AI (Q. 8)	E1 : mc 2/3 / 3	E2 :	E1 : mc 3/4 / 4	E2 :	E1 : mc 3/4 / 4	E2 :		

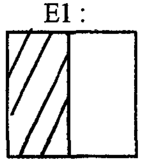
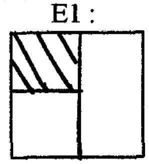
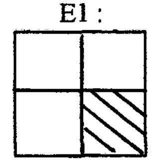
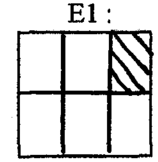
Tableau sujet S4

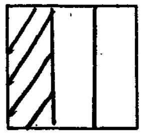
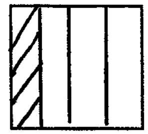
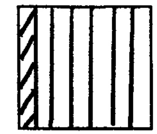
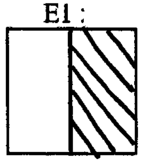
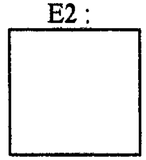
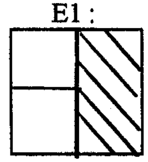
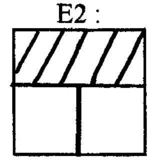
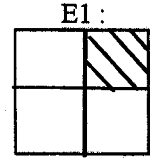
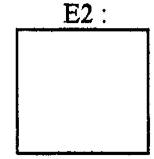
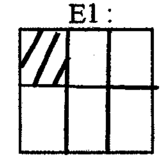
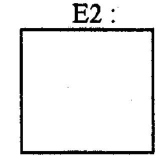
	Relation multiplicative « n fois + »							
	2 fois +		3 fois +		4 fois +		6 fois +	
TD AD (Q.13)	E1 : 9 (7 + 2)	E2 : 14 (7 + 7)	E1 : 10 (7 + 3)	E2 : 21 (14 + 7)	E1 : 11 (7 + 4)	E2 : 28 (14 + 14)	E1 : 13 (7 + 6)	E2 : 42 (6 X 7)
TD AD (Q. 15)	E1 : 10 (5 X 2)	E2 :	E1 : 8 (5 + 3)	E2 : 15 (5 + 5 + 5)	E1 : 9 (5 + 4)	E2 : 20 (5 X 4)	E1 : 11 (5 + 6)	E2 : 30 (5 X 6)
TC AD (Q. 14)	E1 : 2 mcx. ¼	E2 :	E1 : 3 mcx ¼	E2 :	E1 : 4 mcx ¼	E2 :	E1 : 6 mcx ¼	E2 :
TC AD (Q. 21)			E2 : 4 ½ (1 X 3 = 3 ; ½ + ½ + ½ = 1 ½ ; 3 + 1 ½ = 4 ½)					
TC AD (Q. 22)		E2 : 1 (2 X 1/2)						
TC AI (Q. 16)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
	Relations multiplicatives « n fois -»							
	2 fois -		3 fois -		4 fois -		6 fois -	
TD AD (Q. 9)	E1 : 6 (12 / 2 = 6 ; 12 – 6= 6)	E2 :	E1 : 8 (12 / 3 = 4 ; 12 – 4)	E2 : 3 (12 – 9)	E2 : 9 (12 / 4 = 3 ; 12 – 3)	E2 :	E1 : 10 (12 / 6 = 2 ; 12 – 2)	E2 : 6 (12 – 6)
TD AI (Q. 11)	E1 : 12 (24 / ?)	E2 :	E1 : 21 (24 – 3)	E2 : 15 (3 X 3 = 9 ; 24 – 9)	E1 : 6 (24 / ? = 6))	E2 : 8 (4 X 4 = 16 ; 24 – 16)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 18 (24 – 6)
TC AD (Q. 10)	Données ne pouvant être interprétées.							

TC AI (Q. 12)	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :
TC AD (Q. 32)				E2 : 15 (21 – 3 – 3)				
Relations fractionnaires 1/n								
	½		1/3		1/4		1/6	
TD AD (Q. 1)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 :	E1 : Ne sait pas	E2 : 9 (12 – 3)	E1 : 8 (12 – 4)	E2 : 8 (12 – 4)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 : 6 (12 – 6)
TD AI (Q. 3)	E1 : 6 (3 + 3)	E2 :	E1 : Ne sait pas.	E2 : 3 ("tiers")	E1 : 4 ("quart")	E2 : 4 ("quart")	E1 : 6 ("sixième")	E2 : 6 ("sixième")
TC AD (Q. 2)	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :
TC AI (Q. 4)	E1 : 2 mcx de 1/2=1	E2 :	E1 : 3 mcx de 1/3=1	E2 :	E1 : 4 mcx de 1/4=1	E2 :	E1 : 6 mcx de 1/6=1	E2 :
TC AD (Q. 26)	1/5 :le rectangle séparé en 5 mcx.							
Relations fractionnaires m/n								
	2/3		3/4		3/2			
TD AD (Q. 5)	E1 : 10 (12 – 2)	E2 : Données ne pouvant être interprétées.	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : Données ne pouvant être interprétées.	E1 : 6 (12 / 2)	E2 : Données ne pouvant être interprétées.		
TD AI (Q. 7)	Données ne pouvant être interprétées.							

TD AI (Q. 25)	5 1/2 = **moitié** 11 (5 + 5 = 10 ; ½ + ½ = 1 ; 10 + 1 = 11)							
TC AD (Q. 6)	E1 : 2/3 = 1 mc. sur 3.	E2 :	E1 : 3/4 = plus grand que la pizza complète	E2 :	E1 : 3/2 = 1/2	E2 :		
TC AI (Q. 8)	E1 : 2/3 = 1 mc sur 2	E2 :	E1 : 3/4 = plus grand que la pizza complète	E2 :	E1 : 3/2 = 1/2	E2 :		

Tableau sujet S5

Relation multiplicative « n fois + »								
	2 fois +		3 fois +		4 fois +		6 fois +	
TD AD (Q.13)	E1 : 14 (7 X 2)	E2 :	E1 : 21 (7 X 3)	E2 :	E1 : 28 (7 X 4)	E2 :	E1 : 42 (7 X 6)	E2 :
TD AD (Q. 15)	E1 : 7 (5 + 2)	E2 : 7 (5 + 2)	E1 : 8 (5 + 3)	E2 : 8 (5 + 3)	E1 : 9 (5 + 4)	E2 : 9 (5 + 4)	E1 : 11 (5 + 6)	E2 : 11 (5 + 6)
TC AD (Q. 14)	E1 : 3 mcx. ¼ (1 + 2)	E2 : 3 mcx ¼ (1 + 2)	E1 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E2 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E1 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E2 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E1 : 7 mcx ¼ (1 + 6)	E2 : 7 mcx ¼ (1 + 6)
TC AD (Q. 21)				E2 : 4 ½ (1 1/2 + 3)				
TC AD (Q. 22)		E2 : 1 ½ (½ + ½ + ½)						
TC AI (Q. 16)	E1 : 3 mcx 1/4 (1 + 2)	E2 : (2 X 2 mc 1/4) - 2	E1 : 4 mcx 1/4 (1 + 3)	E2 : (2 X 3 mc 1/4) - 3	E1 : 5 mcx 1/4 (1 + 4)	E2 : (2 X 4 mc 1/4) - 4	E1 : 7 mcx 1/4 (1 + 6)	E2 : (2 X 6 mc 1/4) - 6
Relations multiplicatives « n fois -»								
	2 fois -		3 fois -		4 fois -		6 fois -	
TD AD (Q. 9)	E1 : 10 (12 – 2)	E2 : 10 (12 – 2)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 9 (12 – 3)	E1 : 8 (12 – 4)	E2 : 8 (12 – 4)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 : 6 (12 – 6)
TD AI (Q. 11)	E1 : 22 (24 – 2)	E2 : 22 (24 – 2)	E1 : 21 (24 – 3)	E2 : 21 (24 – 3)	E1 : 20 (24 – 4)	E2 : 20 (24 – 4)	E1 : 18 (24 – 6)	E2 : 18 (24 – 6)
TC AD (Q. 10)	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :	E1 : 	E2 :

TC AI (Q. 12)	E1 : 	E2 : 0	E1 : 	E2 : 0	E1 : 	E2 : 0	E1 : 	E2 : 0
TC AD (Q. 32)				E2 : 18 (21 - 3)				
Relations fractionnaires 1/n								
	½		1/3		1/4		1/6	
TD AD (Q. 1)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 :	E1 : 4 (12 / 3)	E2 :	E1 : 3 (12 / 4)	E2 :	E1 : 2 (12 / 6)	E2 :
TD AI (Q. 3)	E1 : Question mal posée.	E2 : 2 (« moitié »)	E1 : Question mal posée.	E2 : 3 ("tiers")	E1 : Question mal posée.	E2 : 4 ("quart")	E1 : Question mal posée.	E2 : 6 (« sixième »)
TC AD (Q. 2)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
TC AI (Q. 4)	E1 : 2 mcx de 1/2=1	E2 :	E1 : 3 mcx de 1/3=1	E2 : 3 mcx de 1/3 = 1	E1 : 4 mcx de 1/4=1	E2 : 4 mcx de 1/4=1	E1 : 6 mcx de 1/6=1	E2 :
TC AD (Q. 26)	1/5 :le rectangle séparé en 5 mcx.							
Relations fractionnaires m/n								
	2/3		3/4		3/2			
TD AD (Q. 5)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 : 36 (12 X 3)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 48 (12 X 4)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 24 (12 X 2)		
TD AI (Q. 7)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 6 (2 X 3)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 12 (3 X 4)	E1 : Ne sait pas.	E2 : 6 (3 X 2)		
TD AI	5 1/2 = moitié							

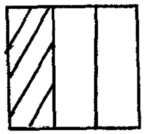
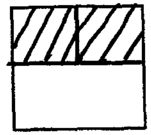
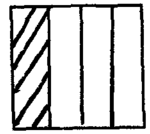
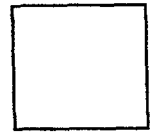
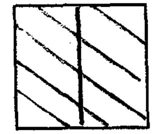
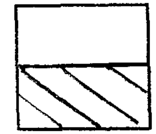
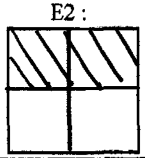
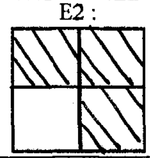
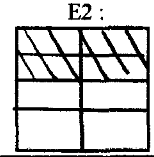
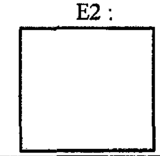
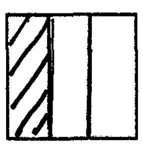
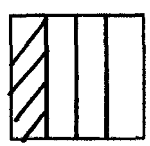
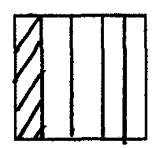
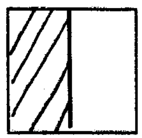
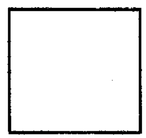
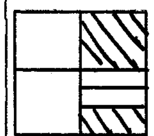
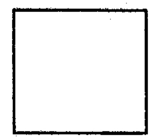
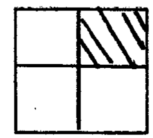
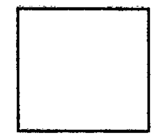
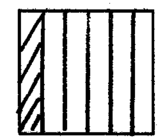
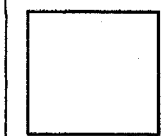
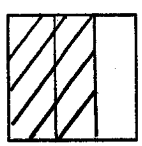
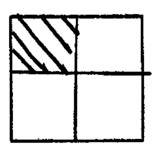
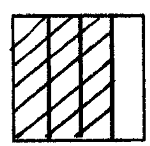
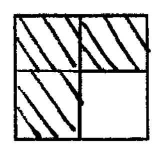
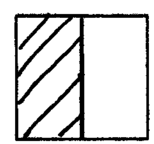
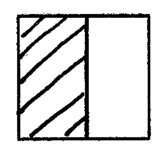
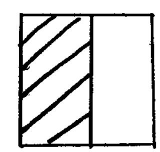
(Q. 25)	11 (5 + 5 = 11 ; ½ + ½ = 1 ; 10 + 1 = 11)							
TC AD (Q. 6)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 			
TC AI (Q. 8)	E1 : mc 2/3 + 1/4	E2 :	E1 : mcx 3/4+ 1/4	E2 :	E1 : mc de 3/2 + 1/4	E2 :		

Tableau sujet S6

	Relation multiplicative « n fois + »							
	2 fois +		3 fois +		4 fois +		6 fois +	
TD AD (Q.13)	E1 : 14 (7 X 2)	E2 :	E1 : 21 (7 X 3)	E2 :	E1 : 28 (7 X 4)	E2 :	E1 : 42 (7 X 6)	E2 :
TD AD (Q. 15)	E1 : 7 (5 + 2)	E2 : 7 (5 + 2)	E1 : 8 (5 + 3)	E2 : 8 (5 + 3)	E1 : 9 (5 + 4)	E2 : 9 (5 + 4)	E1 : 11 (5 + 6)	E2 : 11 (5 + 6)
TC AD (Q. 14)	E1 : 3 mcx. ¼ (1 + 2)	E2 : 3 mcx ¼ (1 + 2)	E1 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E2 : 4 mcx ¼ (1 + 3)	E1 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E2 : 5 mcx ¼ (1 + 4)	E1 : 7 mcx ¼ (1 + 6)	E2 : 7 mcx ¼ (1 + 6)
TC AD (Q. 21)				E2 : 6 (1 ½ + 1 ½ + 1 ½ + 1 ½)				
TC AD (Q. 22)		E2 : 1 ½ (½ + ½ + ½)						
TC AI (Q. 16)	E1 : 2 mcx 1/4	E2 : 3 mc 1/4 (1 + 2)	E1 : 3 mcx 1/4	E2 : 4 mcx 1/4 (1 + 3)	E1 : 4 mcx 1/4	E2 : 5 mcx 1/4 (1 + 4)	E1 : 6 mcx 1/4	E2 : 7 mcx 1/4 (1 + 6)

	Relations multiplicatives « n fois -»							
	2 fois -		3 fois -		4 fois -		6 fois -	
TD AD (Q. 9)	E1 : 10 (12 – 2)	E2 : 10 (12 - 2)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 9 (12 – 3)	E1 : 8 (12 – 4)	E2 : 8 (12 – 4)	E1 : 6 (12 – 6)	E2 : 6 (12 – 6)
TD AI (Q. 11)	E1 : 22 (24 – 2)	E2 : 22 (24 – 2)	E1 : 21 (24 – 3)	E2 : 21 (24 – 3)	E1 : 20 (24 – 4)	E2 : 20 (24 – 4)	E1 : 18 (24 – 6)	E2 : 18 (24 – 6)
TC AD (Q. 10)	E1 : 6mcx. Donne 4mcx	E2 : 	E1 : 9mcx. Donne 6mcx.	E2 : 	E1 : 8mcx. Donne 4mcx.	E2 : 	E1 : 12mcx. Donne 6mcx.	E2 : 
TC AI (Q. 12)	E1 : 	E2 : 0	E1 : 	E2 : 0	E1 : 	E2 : 0	E1 : 	E2 : 0
TC AD (Q. 32)				E2 : 18 (21 - 3)				

Relations fractionnaires 1/n								
	½		1/3		1/4		1/6	
TD AD (Q. 1)	E1 : 6 (12 / 2)	E2 : 6 (12 / 2)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 9 (12 – 3)	E1 : 8 (12 – 4)	E2 : 8 (12 – 4)	E1 : 6 (« sixième »)	E2 : 6 (« sixième »)
TD AI (Q. 3)	E1 : Question mal posée.	E2 : 12 (6 + 6)	E1 : Question mal posée.	E2 : 9 (6 + 3)	E1 : Question mal posée.	E2 : 10 (6 + 4)	E1 : Question mal posée.	E2 : 12 (6 + 6)
TC AD (Q. 2)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 
TC AI (Q. 4)	E1 : 2 mcx de 1/2=1	E2 :	E1 : 3 mcx de 1/3=1	E2 :	E1 : 4 mcx de 1/4=1	E2 :	E1 : 6 mcx de 1/6=1	E2 :
TC AD (Q. 26)	1/5 :le rectangle séparé en 5 mcx.							

Relations fractionnaires m/n								
	2/3		3/4		3/2			
TD AD (Q. 5)	E1 : 10 (12 – 2)	E2 : 10 (12 – 2)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 9 (12 – 3)	E1 : 3 boîtes (3/2 > 3/4)	E2 : 6 (12 / 4 = 3 ; 3 X 2)		
TD AI (Q. 7)	E1 : 9 (12 – 3)	E2 : 24 (12 + 12)	E1 : 15 (12 + 3)	E2 : 15 (12 + 3)	E1 : 18 (3 X 6)	E2 : 6 (12 / 4 = 3 ; 12 – 2 X 3)		
TD AI (Q. 25)	5 1/2 = moitié 11 (5 + 5 = 11 ; ½ + ½ = 1 ; 10 + 1 = 11)							
TC AD (Q. 6)	E1 : 	E2 : 	E1 : 	E2 : 	E1 : 			E2: Ne se peut pas.
TC AI (Q. 8)	E1 : 2 X mc 2/3	E2 :	E1 : 3 X mc 3/4	E2 :	E1 : 3 X mc 3/2	E2 :		