

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAITRISE EN  
PHYSIQUE

PAR  
VINCENT LAMOTHE

TRANSFORMATIONS DE BÄCKLUND, SYMÉTRIES  
ET SOLUTIONS EXPLICITES DES SYSTÈMES D'EDPs

DÉCEMBRE 2005

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

# Résumé

Ce mémoire a pour sujet les systèmes intégrables et les réductions par symétries des équations aux dérivées partielles non-linéaires de la physique mathématique. Il se divise en deux parties principales. Dans première partie, constituée des chapitres deux et trois, il est question des transformations de Darboux-Bäcklund et du théorème de permutabilité. On trouve ces thèmes dans la littérature sur le sujet. On y retrouve les solutions classiques, solitoniques et multi-solitoniques des modèles intégrables. Dans la seconde partie, composée des chapitres quatre et cinq, on prête attention aux symétries des équations aux dérivées partielles. En premier lieu, on présente les méthodes classiques telles les symétries classiques, non-classiques, partielles et conditionnelles. Ces techniques sont illustrées de plusieurs exemples. En second lieu, est présentée une nouvelle approche pour les symétries conditionnelles qui permet de reconstruire les transformations de Bäcklund et par conséquent de retrouver les solutions solitoniques et multi-solitoniques. La méthode des contraintes différentielles permet d'intégrer des équations qui ne sont pas nécessairement intégrables. Plusieurs nouvelles solutions sont discutées dans ce mémoire.

# Remerciements

Je voudrais remercier le professeur Alfred Michel Grundland, mon directeur de recherche, pour avoir supervisé la rédaction de ce mémoire et pour tous ses bons conseils. Je lui suis aussi reconnaissant pour toutes les connaissances qu'il s'est fait un plaisir de partager avec moi. Il me fut d'une aide indispensable.

Je remercie aussi tous les professeurs du département de physique de l'UQTR qui ont été pour moi une source d'inspiration au cours de mes études. Je remercie particulièrement les professeurs Adel F. Antippa et Louis Marchildon, lesquels ont une remarquable habilité à transmettre leur passion pour la physique théorique.

Je tiens, de plus, à remercier toute ma famille, laquelle m'a toujours soutenu, ainsi que ma compagne Jennifer qui m'a aidé lors des corrections linguistiques de ce mémoire.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>6</b>  |
| <b>2</b> | <b>Surfaces pseudosphériques et transformations de Bäcklund classiques. Le système de Bianchi</b>                                | <b>9</b>  |
| 2.1      | Les équations de Gauss-Weingarten pour les surfaces hyperboliques. Surfaces pseudosphériques. L'équation de sine-Gordon. . . . . | 9         |
| 2.1.1    | Notions fondamentales de géométrie différentielle des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                     | 9         |
| 2.1.2    | Surfaces hyperboliques . . . . .   | 11        |
| 2.2      | La transformation de Bäcklund classique pour l'équation de sine-Gordon. .  | 13        |
| 2.3      | Le théorème de permutabilité et la génération de solutions multi-solitoniques.   | 18        |
| 2.3.1    | Le théorème de permutabilité de Bianchi. . . . .   | 19        |
| 2.4      | Surfaces pseudosphériques correspondant à des solitons. Breathers . . . . .  | 21        |
| 2.4.1    | La pseudosphère . . . . .  | 22        |
| 2.4.2    | Une hélicoïde pseudosphérique . . . . .  | 24        |
| 2.4.3    | Surface double solitonique . . . . .   | 25        |
| 2.4.4    | Breathers . . . . .  | 26        |
| 2.4.5    | Surfaces correspondantes aux breathers stationnaires . . . . .   | 28        |
| 2.5      | Surfaces parallèles. Transformation de Bäcklund induite pour une classe de surfaces de Weingarten . . . . .                      | 29        |
| 2.5.1    | Surfaces de courbure moyenne constante. Un théorème de Bonnet .  | 30        |
| 2.5.2    | Une transformation de Bäcklund induite . . . . .   | 31        |
| 2.6      | Le système de Bianchi et son auto-transformation de Bäcklund . . . . .   | 33        |
| 2.6.1    | Surfaces hyperboliques. Représentation sphérique . . . . .   | 33        |
| 2.6.2    | Une transformation de Bäcklund pour les surfaces hyperboliques . .   | 36        |
| 2.6.3    | Le système de Bianchi . . . . .  | 39        |
| <b>3</b> | <b>Le mouvement des courbes et des surfaces. Les connexions solitoniques</b>   | <b>44</b> |
| 3.1      | Les mouvements des courbes à torsion ou courbure constante. La connexion de sine-Gordon . . . . .                                | 44        |
| 3.1.1    | Le mouvement d'une courbe à torsion constante . . . . .  | 45        |
| 3.1.2    | Le mouvement d'une courbe inextensible à courbure constante . . .  | 46        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.2      | Une représentation linéaire matricielle $2 \times 2$ pour l'équation de sine-Gordon  | 47         |
| 3.3      | Le mouvement des surfaces pseudosphériques. Un système de Weingarten et sa transformation de Bäcklund . . . . .  | 50         |
| 3.3.1    | Une limite continue d'un modèle de réseau anharmonique . . . . .   | 52         |
| 3.3.2    | Le système Weingarten . . . . .  | 53         |
| 3.3.3    | Les transformations de Bäcklund . . . . .  | 54         |
| <b>4</b> | <b>Étude des symétries et des solutions explicites aux E.D.P.</b>  | <b>60</b>  |
| 4.1      | Symétries des équations différentielles . . . . .  | 60         |
| 4.2      | Solutions invariantes dans un groupe . . . . .   | 79         |
| 4.3      | Méthode non-classique . . . . .  | 82         |
| 4.4      | L'approche directe de Clarkson-Kruskal . . . . .   | 91         |
| 4.5      | Les groupes de symétrie faible . . . . .   | 92         |
| 4.6      | Les solutions partiellement invariantes . . . . .  | 94         |
| 4.7      | Contraintes différentielles . . . . .  | 96         |
| <b>5</b> | <b>Solutions conditionnellement invariantes</b>  | <b>98</b>  |
| 5.1      | Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de symétries conditionnelles de 1 <sup>er</sup> ordre pour un système de 1 <sup>er</sup> ordre. Les transformations de Bäcklund associées . . . . . | 99         |
| 5.2      | Exemples d'applications . . . . .  | 102        |
| 5.3      | Contraintes différentielles d'ordre plus élevé. . . . .  | 115        |
| 5.4      | Méthode de séparation généralisée appliquée aux équations non-linéaires de Laplace . . . . .   | 120        |
| 5.4.1    | Classification de la fonction $b(u)$ pour le cas $\lambda = 0$ . . . . .   | 123        |
| 5.4.2    | Classification de la la fonction $b(u)$ dans le cas $\lambda > 0$ . . . . .  | 124        |
| 5.4.3    | Classification de la fonction $b(u)$ pour le cas $\lambda < 0$ . . . . .   | 126        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>131</b> |

# Table des figures

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Diagramme de Bianchi . . . . .                                      | 19 |
| 2.2 | Diagramme de Bianchi commutatif . . . . .                           | 20 |
| 2.3 | Une pseudosphère de Beltrami . . . . .                              | 24 |
| 2.4 | Une hélicoïde pseudosphérique . . . . .                             | 25 |
| 2.5 | Surface double-solitonique . . . . .                                | 27 |
| 2.6 | Une surface associée à un breather stationnaire . . . . .           | 28 |
| 2.7 | Surface de Bianchi à partir d'un parabolôide hyperbolique . . . . . | 42 |

# Chapitre 1

## Introduction

Il est important de développer des méthodes d'obtention de solutions des équations différentielles partielles non-linéaires, parce que celles-ci sont présentes dans la formulation de plusieurs théories physiques. Par exemple, plusieurs équations différentielles partielles non-linéaires interviennent en grand nombre dans la théorie moderne des solitons ainsi qu'en mécanique des fluides, en théorie des champs classiques et quantiques. Les transformations de Bäcklund apparaissent pour la première fois dans les années 1880 dans le cadre de la théorie classique de la géométrie différentielle des surfaces et de la théorie des équations différentielles. La toute première équation de Bäcklund obtenue a été celle pour l'équation de sine-Gordon. La dérivation originale de cette transformation de Bäcklund pour l'équation de sine-Gordon a lieu dans le contexte de l'étude des surfaces pseudosphériques, *i.e.* les surfaces dont la courbure est négative et constante. Il s'est toutefois écoulé près de cent ans avant que l'on saisisse l'importance de ce résultat. En effet, c'est dans la théorie moderne des solitons, dans les années 1970, que se réarmorce l'étude des transformations de Bäcklund. Il a été constaté que les équations aux dérivées partielles ont des solutions solitoniques si et seulement si elles possèdent des transformations de Bäcklund. De plus, les transformations de Bäcklund peuvent être utilisées pour dériver des lois de conservation.

Les groupes de Lie sont d'une importance fondamentale dans les mathématiques modernes et dans les autres sciences se basant sur ces mathématiques telle la physique. Une application intéressante des groupes de Lie est lorsqu'ils sont des groupes de symétries des équations aux dérivées partielles. En général, les groupes de symétrie d'un système peuvent être vus comme des groupes de transformations dont les éléments transforment des solutions du système en d'autres solutions du système. On s'intéresse souvent davantage aux groupes de symétrie continus, pour la simple raison que ceux-ci peuvent être obtenus par des méthodes de calcul explicites. Sophus Lie a constaté que ces groupes de symétrie continus, normalement déterminés par des conditions d'invariance non-linéaires, peuvent généralement être trouvés à partir de conditions infinitésimales linéaires. Le système formé de ces conditions infinitésimales, les dites équations déterminantes, peut généralement être résolu sous forme explicite pour une grande quantité de systèmes physiques importants. La connaissance du groupe de symétrie d'un système offre plusieurs possibilités. Entre

autre, si une solution particulière du système est connue, alors il est possible de trouver d'autres solutions du système en appliquant les transformations du groupe de symétrie à la solution connue. On peut aussi trouver des solutions invariantes en réduisant le système en l'exprimant à l'aide de coordonnées invariantes.

Ce mémoire constitue une revue de certaines méthodes de résolution pour les équations différentielles partielles non-linéaires. On y trouve aussi plusieurs applications de ces méthodes. La majorité des exemples d'applications sont des résultats connus et fréquemment rencontrés dans la littérature du sujet. Toutefois, ce mémoire présente quelques nouveautés. En effet, dans les chapitres quatre et cinq, plusieurs exemples des applications présentées conduisent à des résultats qui n'ont jamais paru dans la littérature. Parmi ceux-ci, on compte les exemples 4.3 et 4.4 de la section 4.1. Dans ces exemples, nous obtenons les classes de fonctions  $b$  qui admettent des symétries et les générateurs de symétrie de l'équation

$$u_t - \exp(-u)b(u_{xt}) = 0$$

dans l'exemple 4.3 et de l'équation

$$u_t - b(u_{xx}) = 0$$

dans l'exemple 4.4. De nouvelles solutions ont été obtenues à la section 5.2 pour l'équation double sine-Gordon (DSG)

$$u_x = \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda i n u,$$

l'équation de Schrödinger cubique (NLS) cubique

$$i u_t + u_{xx} = \epsilon u |u|^2, \quad \epsilon = \pm 1$$

et à la section 5.3 l'équation de Korteweg-de Vries modifiée avec un terme dissipatif (DKdV)

$$u_t + 3u_x^2 + u_{xxx} + \gamma u_{xx} = 0.$$

Un autre résultat jamais paru est celui de la section 5.4 dans laquelle nous utilisons une méthode de séparation généralisée pour solutionner l'équation de Laplace non-linéaire

$$u_{xx} + u_{yy} = b(u)$$

pour les trois classes de fonctions  $b(u)$  possibles. Certains autres résultats d'applications ont déjà paru, mais les exemples présentés sont tout de même intéressants puisque ces résultats sont obtenus par l'utilisation de techniques plus simples. De tels exemples se retrouvent surtout dans les sections 5.2 et 5.3 portant sur les symétries conditionnelles, parmi eux, on compte les exemples pour les équations KdV et mKdV.

Le second chapitre porte sur les transformations de Bäcklund. Ce chapitre est intégralement théorique. On y présente, dans une première section, un rappel des notions de base de la géométrie différentielle classique, puis on démontre comment l'équation de sine-Gordon est obtenue comme une condition de compatibilité pour les équations de Gauss-Weingarten associées aux surfaces pseudosphériques. La seconde section est consacrée à la dérivation de la transformation de Bäcklund classique pour l'équation de sine-Gordon. Ensuite, une courte section présente le théorème de permutabilité de Bianchi et comment celui-ci sert à l'élaboration de solutions multi-solitoniques. Dans la cinquième section, du second chapitre, il est question des surfaces parallèles et des transformations de Bäcklund associées à ces surfaces qui sont induites. Le chapitre 2 se termine avec une section se rapportant aux transformations de Bäcklund pour les surfaces hyperboliques, au système de Bianchi et à son auto-transformation. Le chapitre 3 est aussi totalement théorique. Il est directement lié au chapitre 2. Il se divise en trois sections, dont la première comprend une dérivation de l'équation de sine-Gordon se basant sur l'étude du mouvement des courbes à courbure ou torsion constante. Dans la section d'après, on donne une représentation  $2 \times 2$  de l'équation de sine-Gordon, tandis que dans la troisième et dernière section du chapitre 3, il est question du mouvement des surfaces pseudosphériques, des systèmes de Weingarten et de leurs transformations de Bäcklund. Le quatrième chapitre est une courte révision des techniques de réduction par symétries qui se fondent sur la théorie de Lie des groupes de symétrie des équations différentielles. Chaque section inclue des exemples, lesquels illustrent bien les techniques qui y sont introduites. Le chapitre débute avec une section qui illustre la méthode de Lie pour l'obtention des groupes de symétrie à un paramètre des systèmes d'équations différentielles. La seconde section montre comment on obtient des solutions invariantes dans un groupe à l'aide d'un système réduit. La section trois porte sur la méthode dite non-classique qui peut être vue comme une généralisation de la méthode classique où les solutions sont invariantes sous un groupe qui n'est plus nécessairement un groupe de symétrie du système d'équations différentielles en question, mais plutôt un groupe laissant le système invariant. C'est une courte section sur l'approche directe de Clarkson-Kruskal qui suit. La cinquième section présente les groupes de symétrie faible ce qui est une généralisation de la méthode non-classique. L'avant-dernière section du chapitre quatre porte sur les solutions partiellement invariantes qui sont des solutions invariantes sur un sous-groupe du groupe de symétrie de l'équation considérée. Le chapitre se termine avec une section sur les contraintes différentielles. Le cinquième et dernier chapitre, avant la conclusion, couvre les solutions conditionnellement invariantes. Sa première section est une discussion sur l'existence des symétries conditionnelles pour les systèmes de premier ordre. On y présente de quelle façon les solutions des symétries conditionnelles peuvent être liées aux transformations de Bäcklund. La section qui suit est consacrée à des exemples d'applications de la méthode de recherche des symétries conditionnelles d'un système d'équations différentielles partielles du premier ordre. À la troisième section du chapitre 5, on aborde les contraintes différentielles d'ordre plus élevé. Le chapitre se termine avec une section où est présentée une généralisation de la méthode de séparation de variables pour les équations non-linéaires de Laplace.

## Chapitre 2

# Surfaces pseudosphériques et transformations de Bäcklund classiques. Le système de Bianchi

C'est dans les travaux de Minding [28], en 1838, que les surfaces à courbure totale négative ont été étudiées explicitement pour la première fois. Minding a formulé un théorème affirmant que de telles surfaces sont isométriques. En d'autres termes, ces surfaces sont liées les unes aux autres par des correspondances biunivoques de leurs points, de sorte que la métrique est préservée.

Dans ce chapitre, un résumé des résultats de la théorie des surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ , exprimées en termes du repère mobile et satisfaisant les équations de Gauss-Weingarten et Gauss-Mainardi-Codazzi, sera présenté. Nous discutons, aussi, des transformations de Bäcklund et de leurs origines géométriques.

### 2.1 Les équations de Gauss-Weingarten pour les surfaces hyperboliques. Surfaces pseudosphériques. L'équation de sine-Gordon.

#### 2.1.1 Notions fondamentales de géométrie différentielle des surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Soit  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  le vecteur position d'un point générique  $P$  qui repose sur la surface  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors, les vecteurs  $\mathbf{r}_u$  et  $\mathbf{r}_v$  sont tangents à la surface  $\Sigma$  au point  $P$ . Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants l'un de l'autre, ce qui nous permet de construire un vecteur unitaire normal à la surface en  $P$ , qui est donné par

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}. \quad (2.1)$$

Les première et seconde formes fondamentales de  $\Sigma$  sont respectivement

$$\begin{aligned} \text{I} &= dr \cdot dr = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ \text{II} &= -dr \cdot dN = edu^2 + 2fdudv + gdv^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

où

$$\begin{aligned} E &= r_u \cdot r_u, & F &= r_u \cdot r_v, & G &= r_v \cdot r_v, \\ e &= -r_u \cdot N_u = r_{uu} \cdot N, & g &= -r_v \cdot N_v = r_{vv} \cdot N, \\ f &= -r_u \cdot N_v = -r_v \cdot N_u = r_{uv} \cdot N. \end{aligned} \quad (2.3)$$

C'est un fait connu, que l'on doit à Bonnet [6], que les coefficients  $E, F, G, e, f, g$  déterminent la surface  $\Sigma$  à sa position spatiale près.

Les équations de Gauss de la surface  $\Sigma$  sont

$$\begin{aligned} r_{uu} &= \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + eN, \\ r_{uv} &= \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + fN, \\ r_{vv} &= \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + gN, \end{aligned} \quad (2.4)$$

tandis que les équations de Weingarten sont

$$\begin{aligned} N_u &= \frac{fF - eG}{H^2} r_u + \frac{eF - fE}{H^2} r_v, \\ N_v &= \frac{gF - fG}{H^2} r_u + \frac{fF - gE}{H^2} r_v, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où

$$H^2 = |r_u \times r_v|^2 = EG - F^2. \quad (2.6)$$

Les  $\Gamma_{jk}^i$  dans l'expression (2.4) sont les symboles de Christoffel et sont donnés par les relations

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{ij}}{2} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}), \quad (2.7)$$

où, en considérant  $x^1 = u$  et  $x^2 = v$ , nous avons que

$$\text{I} = g_{jk} dx^j dx^k, \quad (2.8)$$

avec

$$g^{jk} g_{kl} = \delta_l^j. \quad (2.9)$$

Dans les équations (2.7), (2.8) et (2.9) nous utilisons la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés.

Les conditions de compatibilité

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{uu})_v &= (\mathbf{r}_{uv})_u, \\ (\mathbf{r}_{uv})_v &= (\mathbf{r}_{vv})_u \end{aligned} \quad (2.10)$$

appliquées au système linéaire de Gauss (2.4) produisent le système non-linéaire de Mainardi-Codazzi

$$\begin{aligned} \left(\frac{e}{H}\right)_v - \left(\frac{f}{H}\right)_u + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^2 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^2 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^2 &= 0, \\ \left(\frac{g}{H}\right)_u - \left(\frac{f}{H}\right)_v + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^1 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^1 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le système (2.11) est équivalent à

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

que l'on augmente du «Theorema egregium» de Gauss, qui fournit une expression pour la courbure de Gauss (ou courbure totale), laquelle est

$$\mathcal{K} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (2.13)$$

Dans la représentation de Liouville, la courbure totale s'exprime en terme de  $E, F, G$  seulement, *i.e.*

$$\mathcal{K} = \frac{1}{H} \left[ \left( \frac{H}{E}\Gamma_{11}^2 \right)_v - \left( \frac{H}{E}\Gamma_{12}^2 \right)_u \right]. \quad (2.14)$$

Physiquement, le «Theorema egregium» implique que la courbure totale de la surface  $\Sigma$  est invariante sous une flexion sans étirement.

### 2.1.2 Surfaces hyperboliques

Dans le présent chapitre, ainsi que dans le suivant, ce sont les surfaces hyperboliques qui nous intéressent. Une surface  $\Sigma$  est dite hyperbolique si sa courbure totale est négative en tous points.

**Théorème 2.1** *Dans un voisinage suffisamment petit d'un point hyperbolique d'une surface de classe  $C^3$ , il est possible d'introduire des coordonnées asymptotiques. Les coordonnées curvilignes  $(u, v)$  sont des coordonnées asymptotiques si et seulement si la seconde forme fondamentale prend la forme*

$$\text{II} = 2f(u, v)dudv. \quad (2.15)$$

Puisque  $\Sigma$  est une surface hyperbolique, nous pouvons l'exprimer en termes des coordonnées asymptotiques. Ainsi,  $e = g = 0$  et les équations de Mainardi-Codazzi (2.11) prennent

la forme plus simple

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{H}\right)_u + 2\Gamma_{12}^2 \frac{f}{H} &= 0, \\ \left(\frac{f}{H}\right)_v + 2\Gamma_{12}^1 \frac{f}{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où nous définissons

$$\mathcal{K} = -\frac{f^2}{H^2} := -\frac{1}{\rho^2} \quad (2.17)$$

et

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2H^2}, \quad (2.18)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2}. \quad (2.19)$$

Du produit scalaire et du produit vectoriel des vecteurs  $\mathbf{r}_u$  et  $\mathbf{r}_v$ , nous déduisons l'angle  $\omega$  entre les lignes paramétriques, lequel est donné par

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \omega = \frac{H}{\sqrt{EG}}. \quad (2.20)$$

De plus, étant donné que  $E, G > 0$ , nous pouvons utiliser sans perte de généralité

$$E = \rho^2 a^2, \quad G = \rho^2 b^2. \quad (2.21)$$

En vertu de (2.21), les deux formes fondamentales (2.2) se réduisent à

$$\begin{aligned} \text{I} &= \rho^2 (a^2 du^2 + 2ab \cos \omega dudv + b^2 dv^2), \\ \text{II} &= 2\rho ab \sin \omega dudv. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les équations de Mainardi-Codazzi (2.12) prennent la forme plus simple

$$a_v + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a - \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b \cos \omega = 0, \quad (2.23)$$

$$b_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b - \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a \cos \omega = 0, \quad (2.24)$$

tandis que, de la représentation de Liouville (2.14), nous avons que

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_u}{\rho} \frac{b}{a} \sin \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_v}{\rho} \frac{a}{b} \sin \omega \right)_v - ab \sin \omega = 0. \quad (2.25)$$

Le système de Gauss-Mainardi-Codazzi non-linéaire formé des équations (2.23)-(2.25) a été originellement établi par Bianchi (voir [22]). Son importance dans la théorie des solitons a été notée par Cenkli [7] et par la suite par Levi et Sym [13]. Comme nous le verrons plus tard, si nous ajoutons la contrainte  $\rho_{uv} = 0$ , le système devient solitonique.

Dans le cas particulier où  $\mathcal{K} = -1/\rho^2 < 0$  est une constante,  $\Sigma$  est une surface dite *pseudosphérique*. Des équations de Mainardi-Codazzi (2.23), (2.24), nous avons que  $a = a(u)$ ,  $b = b(v)$ . Si  $\Sigma$  est maintenant paramétrisée par la longueur d'arc (paramétrisation naturelle) le long des lignes asymptotiques (ce qui correspond aux transformations  $du \rightarrow du' = \sqrt{E(u)}du, dv \rightarrow dv' = \sqrt{G(v)}dv$ ), alors les formes fondamentales deviennent, en omettant les apostrophes,

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2, \\ II &= \frac{2}{\rho} \sin \omega du dv, \end{aligned} \quad (2.26)$$

tandis que (2.25) se réduit à la bien connue équation de sine-Gordon

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega. \quad (2.27)$$

Les équations de Gauss associées deviennent alors

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \omega_u \cot \omega \mathbf{r}_u - \omega_u \csc \omega \mathbf{r}_v, \\ \mathbf{r}_{uv} &= \frac{1}{\rho} \sin \omega \mathbf{N}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= -\omega_v \csc \omega \mathbf{r}_u - \omega_v \cot \omega \mathbf{r}_v, \end{aligned} \quad (2.28)$$

tandis que celles de Weingarten donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= \frac{1}{\rho} \cot \omega \mathbf{r}_u - \frac{1}{\rho} \csc \omega \mathbf{r}_v, \\ \mathbf{N}_v &= -\frac{1}{\rho} \csc \omega \mathbf{r}_u + \frac{1}{\rho} \cot \omega \mathbf{r}_v. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Au cours du vingtième siècle, l'équation de sine-Gordon a trouvé application dans plusieurs domaines de la physique (voir [17]). Par exemple, la transformation de Bäcklund trouve une application importante dans la théorie de la dislocation d'un cristal. La première démonstration de cette application se retrouve dans Seeger et al. [40, 12, 11]. De plus, dans Lamb [21] et Barnard [3] le principe de superposition non-linéaire associé à la transformation de Bäcklund est utilisé dans la théorie de la propagation des impulsions optiques ultra courtes. Par exemple, Gibbs et Slusher [16] ont constaté un phénomène de décomposition solitonique dans les vapeurs de *Rb*. Un tel phénomène a été parfaitement reconstruit théoriquement. Finalement, la transformation de Bäcklund classique a aussi été utilisée dans la théorie des jonctions longues de Josephson [36].

## 2.2 La transformation de Bäcklund classique pour l'équation de sine-Gordon.

Originellement, la transformation de Bäcklund pour l'équation de sine-Gordon (2.27) a été obtenue comme une construction géométrique pour des surfaces pseudosphériques.

Géométriquement parlant, la transformation de Bäcklund pour l'équation de sine-Gordon relie les points d'une surface pseudosphérique initiale  $\Sigma$  un-à-un avec les points d'une surface pseudosphérique image  $\Sigma'$ . Cette correspondance d'un point  $P_0$  de  $\Sigma$  à un point correspondant  $P'_0$  de  $\Sigma'$  s'effectue par l'entremise d'un vecteur  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  de longueur constante  $L$  et qui est tangentiel à la fois à  $\Sigma$  et à  $\Sigma'$ . La transformation préserve la paramétrisation naturelle asymptotique. Leur courbure totale est la même et les plans tangents à des points correspondants se croisent à angle constant. Voyons maintenant en détails comment la transformation de Bäcklund, pour l'équation de sine-Gordon, peut être dérivée.

Soit  $\Sigma$  une surface pseudosphérique de courbure totale donnée par  $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ . Soit  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  la fonction vectorielle qui définit une telle surface, dans laquelle  $u, v$  correspondent à la paramétrisation par longueur d'arc le long des lignes asymptotiques. Dans cette paramétrisation, les vecteurs unitaires  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  et  $\mathbf{N}$  ne forment pas une base orthonormée, puisque  $\mathbf{r}_u$  et  $\mathbf{r}_v$  ne sont pas orthogonaux. Pour des raisons pratique, nous introduisons le trièdre de vecteurs  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{r}_u, & \mathbf{B} &= -\mathbf{r}_u \times \mathbf{N} = -\mathbf{r}_u \times \frac{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\sin \omega}, & \mathbf{C} &= \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$= \csc \omega \mathbf{r}_v - \cot \omega \mathbf{r}_u$$

Les expressions des dérivées de  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  par rapport à  $u$  et  $v$  sont obtenues à l'aide des équations de Gauss-Weingarten (2.28)-(2.29) et sont

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}_u &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u & 0 \\ \omega_u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 1/\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}_v &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho) \sin \omega \\ 0 & 0 & -(1/\rho) \cos \omega \\ -(1/\rho) \sin \omega & (1/\rho) \cos \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ce système linéaire est compatible si et seulement si  $\omega$  satisfait l'équation de sine-Gordon (2.27).

Les points de la surface pseudosphérique  $\Sigma$ , avec vecteur position  $\mathbf{r}$ , doivent être reliés aux points de la nouvelle surface pseudosphérique  $\Sigma'$ , avec vecteur position  $\mathbf{r}'$ , par un vecteur  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  de longueur constante et tangent à  $\Sigma$ , c'est-à-dire qu'il est coplanaire avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Ainsi, le vecteur position  $\mathbf{r}'$  de  $\Sigma'$  est

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + L \cos \phi \mathbf{A} + L \sin \phi \mathbf{B}, \quad (2.32)$$

où la grandeur  $L = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$  est constante. Ici,  $\phi(u, v)$  est contraint de respecter le fait que sur  $\Sigma'$ , tout comme sur  $\Sigma$ ,  $u$  et  $v$  forment une paramétrisation naturelle le long des lignes asymptotiques. Mathématiquement, ceci signifie qu'il est nécessaire que  $\Sigma'$  ait des formes fondamentales du type (2.26). En particulier, ceci exige que

$$\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_u = 1, \quad \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{r}'_v = 1, \quad (2.33)$$

où les dérivées, obtenues en utilisant (2.31) et (2.32), sont

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u &= [1 - L(\phi_u - \omega_u) \sin \phi] \mathbf{A} + L(\phi_u - \omega_u) \cos \phi \mathbf{B} + \frac{L}{\rho} \sin \phi \mathbf{C}, \\ \mathbf{r}'_v &= (\cos \omega - L\phi_v \sin \phi) \mathbf{A} + (\sin \omega + L\phi_v \cos \phi) \mathbf{B} + \frac{L}{\rho} \sin(\omega - \phi) \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les conditions (2.33) mènent à leur tour à

$$\phi_u = \omega_u + \frac{1}{L} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}} \right) \sin \phi \quad (2.35)$$

et

$$\phi_v = \frac{1}{L} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}} \right) \sin(\phi - \omega). \quad (2.36)$$

En définissant

$$\beta = \frac{\rho}{L} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}} \right) = \frac{L}{\rho} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{L^2}{\rho^2}} \right)^{-1}, \quad (2.37)$$

nous avons alors que les relations (2.35), (2.36) nous conduisent aux conditions nécessaires

$$\phi_u = \omega_u + \frac{\beta}{\rho} \sin \phi, \quad (2.38)$$

$$\phi_v = \frac{1}{\beta \rho} \sin(\phi - \omega), \quad (2.39)$$

sur l'angle  $\phi$  afin que  $\Sigma'$  soit une surface pseudosphérique paramétrisée par longueur d'arc. En fait, (2.38) et (2.39) sont des conditions nécessaires et suffisantes à cet égard. De plus, ces équations sont compatibles modulo l'équation de sine-Gordon (2.27).

En utilisant (2.38), (2.39), l'expression (2.34) devient

$$\mathbf{r}'_u = \left( 1 - \frac{L}{\rho} \beta \sin^2 \phi \right) \mathbf{A} + \frac{L}{\rho} \beta \sin \phi \cos \phi \mathbf{B} + \frac{L}{\rho} \sin \phi \mathbf{C}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_v &= \left[ \cos \omega - \frac{L}{\rho \beta} \sin \phi \sin(\phi - \omega) \right] \mathbf{A} + \left[ \sin \omega + \frac{L}{\rho \beta} \cos \phi \sin(\phi - \omega) \right] \mathbf{B} \\ &\quad - \frac{L}{\rho} \sin(\phi - \omega) \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

de sorte que  $\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = \cos(2\phi - \omega)$  et que la première forme fondamentale de  $\Sigma'$  devient

$$I' = du^2 + 2 \cos(2\phi - \omega) dudv + dv^2. \quad (2.42)$$

Nous avons en plus que le vecteur normal unitaire  $\mathbf{N}'$  à  $\Sigma'$  est donné par

$$\mathbf{N}' = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|} = -\frac{L}{\rho} \sin \phi \mathbf{A} + \frac{L}{\rho} \cos \phi \mathbf{B} + \left(1 - \frac{L\beta}{\rho}\right) \mathbf{C}, \quad (2.43)$$

d'où, en utilisant (2.32), nous avons que  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}' = 0$ , ce qui démontre que le vecteur  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , qui lie deux points correspondants de  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , est tangent à  $\Sigma'$ . De plus,

$$\mathbf{N}'_u = -\frac{L\beta}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi \mathbf{A} + \left(\frac{L\beta}{\rho^2} \cos^2 \phi - \frac{1}{\rho}\right) \mathbf{B} + \frac{L}{\rho^2} \cos \phi \mathbf{C}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_v = & \left[ \frac{L}{2\rho^2\beta} \sin(\omega - 2\phi) + \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{2\rho\beta}\right) \sin \omega \right] \mathbf{A} \\ & + \left[ \frac{L}{2\rho^2\beta} \cos(\omega - 2\phi) - \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{2\rho\beta}\right) \cos \omega \right] \mathbf{B} - \frac{L}{\rho^2} \cos(\omega - \phi) \mathbf{C}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

d'où

$$\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{N}'_u = 0, \quad \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{N}'_v = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{N}'_u = -\frac{1}{\rho} \sin(2\phi - \omega), \quad \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{N}'_v = 0.$$

La seconde forme fondamentale de  $\Sigma'$  est

$$\mathbb{I}' = \frac{2}{\rho} \sin(2\phi - \omega) du dv. \quad (2.46)$$

En comparant la seconde forme fondamentale (2.46) avec celle du théorème 1, (2.15), nous constatons que  $\Sigma'$  est paramétrisée le long de ses lignes asymptotiques, tandis que l'expression de sa première forme fondamentale (2.42) nous indique que la paramétrisation est naturelle le long de ces lignes. L'angle entre les lignes asymptotiques sur  $\Sigma'$  est donné par

$$\omega' = 2\phi - \omega, \quad (2.47)$$

où  $\omega'$  joue le même rôle pour la surface  $\Sigma'$  que  $\omega$  joue pour la surface  $\Sigma$  originale. En particulier,  $\omega'$  doit satisfaire l'équation de sine-Gordon

$$\omega'_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega'. \quad (2.48)$$

Nous éliminons  $\phi$  de (2.38) et de (2.39) en nous servant de la relation (2.47), ce qui donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u &= \frac{\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right), \\ \left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v &= \frac{1}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right). \end{aligned} \quad \mathbb{B}_\beta \quad (2.49)$$

Ainsi, toute transformation  $\omega \rightarrow \omega'$  respectant (2.49), ou de façon équivalente toute solution de (2.49), laisse l'équation de sine-Gordon invariante. Les relations (2.49) sont la forme standard de la transformation de Bäcklund liant les équations de sine-Gordon (2.27) et (2.48).

Il faut remarquer que, sous  $\mathbb{B}_\beta$ ,

$$N' \cdot N = 1 - \frac{L\beta}{\rho} = \text{const}, \quad (2.50)$$

c'est-à-dire, les plans tangents à des points correspondants sur les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  se coupent à un angle constant  $\zeta$ , où  $\beta = \tan(\zeta/2)$ . Le résultat de Bäcklund est une extension de celui de Bianchi, dans lequel

$$L = \rho, \quad \beta = 1, \quad (2.51)$$

ce qui a pour conséquence que les plans tangents sont orthogonaux. Bäcklund a donc généralisé la transformation de Bianchi en éliminant l'exigence d'orthogonalité, ce qui a permis l'introduction du paramètre clé  $\beta$  dans la transformation de Bianchi. En fait, la transformation de Bäcklund  $\mathbb{B}_\beta$  peut être vue comme la composition de la transformation de Bianchi avec une simple invariance d'un groupe de Lie. Ainsi, l'équation de sine-Gordon (2.27) est invariante sous la transformation d'échelle

$$u^* = \beta u, \quad v^* = \frac{v}{\beta}, \quad \beta \neq 0. \quad (2.52)$$

Nous avons donc que toute solution  $\omega = \omega(u, v)$  génère une classe de solutions à un paramètre  $\omega^* = \omega^*(u^*, v^*)$ . Lie a constaté que la conjugaison de l'invariance (2.52) avec la transformation de Bianchi originale

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right)_{u^*} &= \frac{1}{\rho} \sin \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right), \\ \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right)_{v^*} &= \frac{1}{\rho} \sin \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

produit la transformation de Bäcklund (2.49).

En termes de la construction de surfaces pseudosphériques, la transformation de Bäcklund correspond au résultat suivant : soit  $\mathbf{r}$  le vecteur de coordonnées de la surface pseudosphérique  $\Sigma$  qui correspond à une solution  $\omega$  de l'équation de sine-Gordon (2.27). Soit  $\omega'$  la transformation de Bäcklund de  $\omega$  via  $\mathbb{B}$ . Alors, le vecteur de coordonnées  $\mathbf{r}'$  de la surface pseudosphérique  $\Sigma'$  correspondant à  $\omega'$  est donné par

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{L}{\sin \omega} \left[ \sin \left( \frac{\omega - \omega'}{2} \right) \mathbf{r}_u + \sin \left( \frac{\omega + \omega'}{2} \right) \mathbf{r}_v \right], \quad (2.54)$$

où  $L = \rho \sin \zeta$ .

Observations :

- L'équation de sine-Gordon non-linéaire (2.27) est dérivée comme étant la condition de compatibilité pour les équations de Gauss linéaires (2.28).

- La transformation  $\mathbb{B}_\beta$  donnée par (2.49) agit sur l'équation de sine-Gordon (2.27) et la laisse invariante. En effet, l'action de  $\mathbb{B}_\beta$  est restreinte à (2.27) dans quoi (2.49) est un système valide pour  $\omega'$  si et seulement si (2.27) tient, ou sinon la condition de compatibilité  $\omega'_{uv} = \omega'_{vu}$  n'est pas satisfaite.
- $\mathbb{B}_\beta$  contient un paramètre  $\beta = \tan(\zeta/2)$  introduit dans la transformation de Bianchi par l'invariance d'un groupe de Lie.
- Au niveau linéaire, la transformation de Bäcklund est représentée par (2.54) et agit sur le système de Gauss (2.28) associé à des surfaces pseudosphériques paramétrisées par longueur d'arc le long des lignes asymptotiques. La transformation (2.54), agissant sur la représentation linéaire (2.28), induit la transformation de Bäcklund  $\mathbb{B}_\beta$  opérant au niveau non-linéaire.

$\mathbb{B}_\beta$  représente une correspondance entre les solutions de la même équation et est habituellement appelée une auto-transformation de Bäcklund.

À la prochaine section, nous allons porter notre attention sur un principe de superposition non-linéaire associé à l'auto-transformation de Bäcklund  $\mathbb{B}_\beta$ , qui conduit à des solutions multi-solitoniques de l'équation de sine-Gordon.

### 2.3 Le théorème de permutabilité et la génération de solutions multi-solitoniques.

Nous allons à présent nous servir de l'auto-transformation (2.49) pour construire des solutions multi-solitoniques de l'équation de sine-Gordon.

Prenons comme solution initiale de (2.27) le vide, *i.e.*  $\omega = 0$ . À l'aide la transformation de Bäcklund (2.49), nous pouvons construire une nouvelle solution non-triviale  $\omega'$  de (2.48) par l'intégration de la paire d'équations du premier ordre

$$\begin{aligned}\omega'_u &= \frac{2\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right), \\ \omega'_v &= \frac{2}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right),\end{aligned}\tag{2.55}$$

ce qui conduit à la nouvelle solution simple-solitonique

$$\omega' = 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{\beta}{\rho} u + \frac{1}{\beta\rho} v + \alpha \right) \right],\tag{2.56}$$

où  $\alpha$  est une constante d'intégration arbitraire. Il faut remarquer que ce sont les quantités

$$\begin{aligned}\omega'_u &= \frac{2\beta}{\rho} \operatorname{sech} \left( \frac{\beta}{\rho} u + \frac{1}{\beta\rho} v + \alpha \right), \\ \omega'_v &= \frac{2}{\beta\rho} \operatorname{sech} \left( \frac{\beta}{\rho} u + \frac{1}{\beta\rho} v + \alpha \right),\end{aligned}\tag{2.57}$$

qui ont la forme caractéristique en dos d'âne associée à un soliton.

Ce qui est intéressant, ici, c'est que des expressions analytiques pour des solutions multi-solitoniques, lesquelles englobent leurs interactions non-linéaires, peuvent maintenant être obtenues par des moyens purement algébriques. Ceci est une conséquence d'un élégant principe de superposition non-linéaire dérivé à partir de l'auto-transformation de Bäcklund  $\mathbb{B}_\beta$  et qui a originellement été établi par Bianchi [5] en 1892. Ce principe se retrouve dans son travail monumental [22] et est connu comme étant le *Théorème de permutabilité de Bianchi*.

### 2.3.1 Le théorème de permutabilité de Bianchi.

Si nous connaissons une solution de départ  $\omega$  de l'équation de sine-Gordon (2.27) et que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les transformées de Bäcklund de  $\omega$  par l'application respective de  $\mathbb{B}_{\beta_1}$  et  $\mathbb{B}_{\beta_2}$ , alors nous avons donc  $\omega_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$  et  $\omega_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$ . De plus, notons  $\omega_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega_1)$  et  $\omega_{21} = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega_2)$ . La situation est illustrée par le diagramme de Bianchi à la figure 2.1.

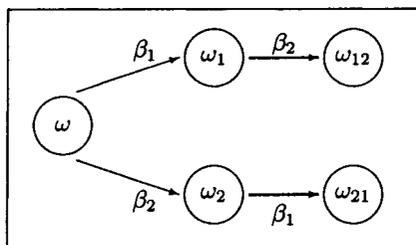


FIG. 2.1 - Diagramme de Bianchi

Il est naturel de se demander s'il existe des circonstances pour lesquelles la condition de commutativité  $\omega_{12} = \omega_{21}$  existe. Afin de trouver la réponse, nous allons établir les transformations de Bäcklund pour la partie  $u$  qui correspondent au diagramme de Bianchi.

Ainsi,

$$\omega_{1,u} = \omega_u + \frac{2\beta_1}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right), \quad (2.58)$$

$$\omega_{2,u} = \omega_u + \frac{2\beta_2}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right), \quad (2.59)$$

$$\omega_{12,u} = \omega_{1,u} + \frac{2\beta_2}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_{12} + \omega_1}{2}\right), \quad (2.60)$$

$$\omega_{21,u} = \omega_{2,u} + \frac{2\beta_1}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_{21} + \omega_2}{2}\right). \quad (2.61)$$

Si nous imposons

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \Omega, \quad (2.62)$$

alors les opérations (2.58) – (2.59) + (2.60) – (2.61) donnent

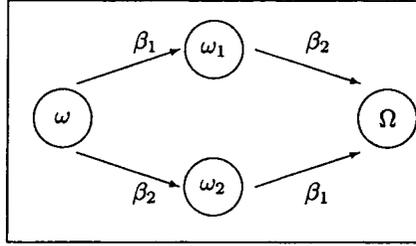


FIG. 2.2 – Diagramme de Bianchi commutatif

$$0 = \frac{2}{\rho} \left[ \beta_1 \left( \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right) - \sin\left(\frac{\Omega + \omega_2}{2}\right) \right) + \beta_2 \left( \sin\left(\frac{\Omega + \omega_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right) \right) \right], \quad (2.63)$$

d'où

$$\tan\left(\frac{\Omega - \omega}{4}\right) = \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}\right).$$

Si la condition de commutativité (2.62) tient, alors il est nécessaire que

$$\Omega = \omega + 4 \arctan \left[ \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}\right) \right]. \quad (2.64)$$

Si nous remplaçons  $\omega_{12}$  et  $\omega_{21}$  par l'expression (2.64) dans (2.60) et (2.61), alors ces équations sont satisfaites modulo les équations (2.58) et (2.59). De plus, (2.64) respecte aussi les équations similaires pour la partie  $v$  de la transformation de Bäcklund. Cette considération permet la fermeture du diagramme de Bianchi (voir la figure 2.2). L'équation (2.64) constitue un principe de superposition non-linéaire appelé le *Théorème de permutabilité*. Il produit une solution multi-solitonique  $\Omega$  à partir de l'ensemble de solution  $\{\omega, \omega_1, \omega_2\}$ .

La propriété de commutativité nous permet à présent de construire un réseau de Bianchi qui correspond à des applications itérées du théorème de permutabilité. Des solutions  $N$ -solitoniques de l'équation de sine-Gordon peuvent donc être construites de manière purement algébrique. Ceci représente une superposition non-linéaire de  $N$  solutions simplement solitoniques (2.56) avec paramètre  $\beta = \beta_1, \dots, \beta_N$ . Ainsi, à chaque application de la transformation de Bäcklund, un nouveau paramètre  $\beta_i$  est introduit et un soliton d'ordre  $i$  est généré.

## 2.4 Surfaces pseudosphériques correspondant à des solitons. Breathers

Ici, nous utilisons la transformation de Bäcklund dans sa version linéaire (2.54) pour construire des surfaces pseudosphériques correspondant à des solutions solitoniques de l'équation de sine-Gordon. Pour effectuer cette tâche, il est plus pratique de travailler en termes des coordonnées de courbure

$$x = u + v, \quad y = u - v. \quad (2.65)$$

Si nous posons  $\omega = 2\theta$ , alors les première et seconde formes quadratiques fondamentales (2.26) deviennent

$$I = \cos^2 \theta dx^2 + \sin^2 \theta dy^2, \quad (2.66)$$

$$II = \frac{1}{\rho} \sin \theta \cos \theta (dx^2 - dy^2). \quad (2.67)$$

Ainsi, un trièdre orthonormal peut être introduit comme suit

$$A^* = \frac{r_x}{\cos \theta}, \quad B^* = \frac{r_y}{\sin \theta}, \quad C^* = N, \quad (2.68)$$

par conséquent les équations de Gauss-Weingarten (2.28) et (2.29) deviennent

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \theta_y & \frac{1}{\rho} \sin \theta \\ -\theta_y & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\frac{1}{\rho} \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{\rho} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Ce système linéaire en  $\{A^*, B^*, C^*\}$  est compatible si et seulement si

$$\theta_{xx} - \theta_{yy} = \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta. \quad (2.71)$$

C'est sous cette forme, en coordonnées de courbure, que l'on rencontre le plus souvent l'équation de sine-Gordon dans les applications physiques. Dans ces applications, la plupart du temps,  $x$  représente l'espace et  $y$  le temps, c'est pourquoi on se réfère à l'équation (2.71) comme étant l'équation de sine-Gordon à 1 + 1 dimensions.

### 2.4.1 La pseudosphère

Ici, nous allons faire le lien entre la solution simplement solitonique stationnaire de (2.71)

$$\theta = 2 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x}{\rho} + \alpha \right) \right], \quad (2.72)$$

obtenue en substituant (2.65) et  $\beta = 1$  dans (2.56), et la surface pseudosphérique de révolution appelée la pseudosphère de Beltrami [38].

Pour établir la connexion entre la solution simplement solitonique stationnaire (2.72) et la pseudosphère, nous nous servons du fait que le vecteur position  $\mathbf{r}$  de la surface de révolution générée par la rotation de la courbe plane  $z = \phi(r)$  autour de l'axe des  $z$  est donné par

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \eta \\ r \sin \eta \\ \phi(r) \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Les courbes pour lesquelles on fixe  $r$  sont les parallèles et les courbes pour lesquelles on fixe  $\eta$  sont les méridiens. Les première et seconde formes fondamentales associées à la surface (2.73) sont données par

$$\begin{aligned} \text{I} &= [1 + \phi'(r)^2] dr^2 + r^2 d\eta^2, \\ \text{II} &= \frac{\phi''(r) dr^2}{\sqrt{1 + \phi'(r)^2}} + \frac{r \phi'(r) d\eta^2}{\sqrt{1 + \phi'(r)^2}}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Ainsi,  $F = f = 0$  tel que les lignes de coordonnées  $r = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ , respectivement les parallèles et les méridiens, sont les lignes de courbure sur la surface de révolution. Nous posons

$$d\xi = \sqrt{1 + \phi'(r)^2} dr, \quad r = r(\xi) \quad (2.75)$$

de sorte que la première forme fondamentale s'écrive

$$\text{I} = d\xi^2 + r^2 d\eta^2. \quad (2.76)$$

Nous avons alors, de la représentation de Liouville de la courbure de Gauss (2.14), que la courbure totale est donnée par

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\xi^2}. \quad (2.77)$$

Toutefois, la courbure totale d'une surface pseudosphérique, ce qui inclut notre pseudosphère, est donnée par  $\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2}$ . Nous obtenons, comme surface pseudosphérique de révolution générale,

$$r = c_1 \cosh \frac{\xi}{\rho} + c_2 \sinh \frac{\xi}{\rho}, \quad (2.78)$$

où  $\rho$  est une constante. En particulier, dans le cas  $c_1 = c_2 = c$ , correspondant aux dites surfaces pseudosphériques paraboliques de révolution, les méridiens sont donnés par

$$r = ce^{\xi/\rho}, \quad (2.79)$$

tandis que

$$z = \phi(r) = \int \sqrt{1 - (c^2/\rho^2)e^{2\xi/\rho}} d\xi. \quad (2.80)$$

La substitution

$$\sin \psi = \frac{c}{\rho} e^{\xi/\rho}$$

dans (2.80) donne

$$z = \rho \left( \cos \psi + \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| \right), \quad (2.81)$$

d'où

$$dz = \cot \psi dr \quad (2.82)$$

de telle sorte que  $\psi$  est l'angle que la tangente au méridien fait avec l'axe  $z$ . La distance  $d = r \csc \psi$ , entre un point sur un méridien et l'intersection avec l'axe des  $z$  de la tangente à ce point, est égale à  $\rho$ . Cette distance est donc constante. Une courbe possédant cette caractéristique est une tractrice et sa révolution autour d'un axe génère une pseudosphère.

Pour déterminer la solution de l'équation de sine-Gordon (2.71) correspondant à la pseudosphère, cette dernière doit être paramétrisée selon (2.66) et (2.67). En termes de  $\psi$  et  $\eta$ , le vecteur position de la pseudosphère est donné par

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \sin \psi \cos \eta \\ \rho \sin \psi \sin \eta \\ \rho (\cos \psi + \ln |\tan \frac{\psi}{2}|) \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{I} &= \rho^2 \cot^2 \psi d\psi^2 + \rho^2 \sin^2 \psi d\eta^2, \\ \text{II} &= \rho \cot \psi d\psi^2 - \rho \sin \psi \cos \psi d\eta^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Si nous introduisons à présent  $x$  et  $y$  comme suit :

$$dx = \rho \csc \psi d\psi, \quad y = \rho \eta, \quad (2.85)$$

alors I et II dans (2.84) prennent les formes (2.66) et (2.67) respectivement, avec  $\theta = \psi$ . L'intégration de (2.85) produit la solution simplement solitonique (2.72).

En termes des paramètres de lignes de courbure  $x$  et  $y$ , le vecteur position de la pseudosphère est

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} \rho \operatorname{sech} \left( \frac{x}{\rho} + \alpha \right) \cos \left( \frac{y}{\rho} \right) \\ \rho \operatorname{sech} \left( \frac{x}{\rho} + \alpha \right) \sin \left( \frac{y}{\rho} \right) \\ \rho \left[ \frac{x}{\rho} + \alpha - \tanh \left( \frac{x}{\rho} + \alpha \right) \right] \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Ici, les lignes de coordonnées  $x = \text{const}$  et  $y = \text{const}$  sont respectivement les parallèles et les méridiens. La pseudosphère de la figure 2.3 est tracée à l'aide du vecteur (2.86).

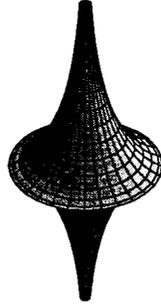


FIG. 2.3 – Une pseudosphère de Beltrami

#### 2.4.2 Une hélicoïde pseudosphérique

Si nous effectuons la rotation d'une courbe autour d'un axe, de manière à ce que le ratio de sa vitesse de translation à sa vitesse de rotation soit constant, alors nous obtenons une hélicoïde. Plus spécifiquement, une hélicoïde générée à l'aide d'une tractrice est pseudosphérique et est dite une surface de *Dini*. En termes des coordonnées de courbure  $x, y$ , le vecteur de coordonnées d'une telle surface est donné par

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} \rho \sin \zeta \operatorname{sech} \chi \cos \left( \frac{y}{\rho} \right) \\ \rho \sin \zeta \operatorname{sech} \chi \sin \left( \frac{y}{\rho} \right) \\ x - \rho \sin \zeta \tanh \chi, \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

où

$$\chi = \frac{x - y \cos \zeta}{\rho \sin \zeta} \quad (2.88)$$

et  $\zeta$  est une constante. Si nous définissons  $\zeta = \pi/2$ , alors nous retrouvons la pseudosphère. Ici, la longueur tangente de la tractrice est  $\rho \sin \zeta$  et le paramètre hélicoïdal associé au

rapport de la vitesse de rotation à la vitesse de translation de la tractrice génératrice est  $\rho \cos \zeta$ . La solution correspondante de l'équation de sine-Gordon en 1 + 1 dimensions (2.71) est la solution simplement solitonique en déplacement donnée par (2.56) et réécrite en termes des coordonnées de courbure et avec  $\beta = \tan(\zeta/2)$  comme suit :

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\omega}{2} &= 2 \arctan \left[ \exp \left\{ \frac{1}{2\rho} \left( \beta + \frac{1}{\beta} \right) x + \frac{1}{2\rho} \left( \beta - \frac{1}{\beta} \right) y \right\} \right] \\ &= 2 \arctan \exp \chi. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Une surface de Dini tracée à l'aide du vecteur de coordonnées (2.87) est illustrée à la figure 2.4.

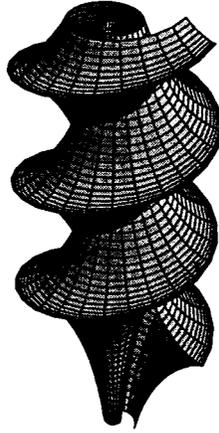


FIG. 2.4 – Une hélicoïde pseudosphérique

### 2.4.3 Surface double solitonique

La transformation de Bäcklund (2.49) pour l'équation de sine-Gordon en 1 + 1 dimensions (2.71), en termes des coordonnées de courbure, prend la forme

$$\left. \begin{aligned} \theta'_x - \theta_x &= \frac{1}{\rho \sin \zeta} (\sin \theta' \cos \theta - \cos \zeta \cos \theta' \sin \theta) \\ \theta'_y - \theta_y &= \frac{1}{\rho \sin \zeta} (\cos \theta' \sin \theta - \cos \zeta \sin \theta' \cos \theta) \end{aligned} \right\} \mathbb{B}_\beta, \quad (2.90)$$

où  $\beta = \tan(\zeta/2)$ . De plus, si  $\mathbf{r}$  est le vecteur de coordonnées de la surface pseudosphérique correspondant à la solution  $\theta$  de (2.71), alors le vecteur de coordonnées de la nouvelle surface pseudosphérique correspondant à  $\theta' = \mathbb{B}_\beta(\theta)$  est donné par

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + L \left[ \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \mathbf{r}_x - \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \mathbf{r}_y \right], \quad (2.91)$$

où  $L = \rho \sin \zeta$ .

Le principe de superposition non-linéaire (2.64) donne

$$\tan \left( \frac{\theta_{12} - \theta_0}{2} \right) = \frac{\sin \left( \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2} \right) \tan \left( \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right)}, \quad (2.92)$$

où  $\theta_0$  est la solution initiale,  $\theta_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_0)$ ,  $\theta_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_0)$  et  $\theta_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_1) = \mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_2)$ . Dans le cas où nous choisissons  $\theta_0 = 0$  comme solution initiale, nous avons que

$$\theta_i = 2 \arctan(\exp \chi_i), \quad i = 1, 2, \quad (2.93)$$

où

$$\chi_i = \frac{1}{\rho \sin \zeta_i} (x - y \cos \zeta_i), \quad \zeta_1 \neq \zeta_2 \quad (2.94)$$

et la relation (2.92) produit, par l'exigence de l'invariance  $\theta \rightarrow -\theta$  de l'équation de sine-Gordon (2.71), la solution double solitonique

$$\Theta^\pm = \pm 2 \arctan \left[ \frac{\sin \left( \frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2} \right) \sinh \left( \frac{\chi_1 - \chi_2}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2} \right) \cosh \left( \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} \right)} \right]. \quad (2.95)$$

Le vecteur de coordonnées  $\mathbf{r}'$  de la surface pseudosphérique correspondant à la solution (2.95) de (2.71) peut maintenant être obtenu en effectuant les substitutions  $\theta = \theta_1$ ,  $\zeta = \zeta_2$ ,  $\theta' = \Theta^\pm$  dans (2.91). Une surface pseudosphérique correspondant à une solution double-solitonique est illustrée à la figure 2.5. Dans un chapitre ultérieur, la solution double-solitonique de l'équation de Laplace sine-Gordon sera obtenue par une approche directe en utilisant la méthode de séparation de variables généralisée.

#### 2.4.4 Breathers

Il existe, parmi les solutions double-solitoniques, une sous-classe de solutions qui sont périodiques. De telles solutions sont appelées des *breathers*. Dans la présente sous-section, nous allons voir quelle est la forme de ces solutions, en nous servant du théorème de permutabilité. De plus, nous allons obtenir les surfaces pseudosphériques qui leur correspondent.

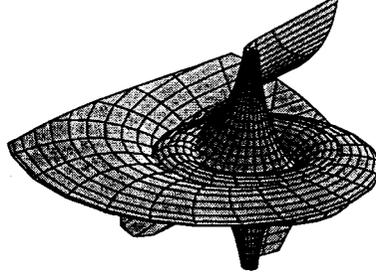


FIG. 2.5 – Surface double-solitonique

En termes des paramètres de Bäcklund  $\beta_i = \tan(\zeta_i/2)$ , la solution double-solitonique  $\Theta^+$  donnée par (2.95) devient

$$\Theta^+ = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{\beta_2 + \beta_1 \sinh\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right)}{\beta_2 - \beta_1 \cosh\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)} \right] \quad (2.96)$$

avec les solutions simple-solitoniques qui la constituent (2.93), où

$$\chi_i = \frac{1}{2\beta_i\rho} [(1 + \beta_i^2)x - (1 - \beta_i^2)y]. \quad (2.97)$$

Pour obtenir une solution périodique, nous introduisons des paramètres de Bäcklund conjugués complexes  $\beta_1 = c + id$ ,  $\beta_2 = c - id$ , de sorte que (2.95) s'écrive

$$\Theta^+ = 2 \arctan \left[ \frac{c \sin\left(\frac{d}{2\rho(c^2 + d^2)}\xi\right)}{d \cosh\left(\frac{c}{2\rho(c^2 + d^2)}\eta\right)} \right] \quad (2.98)$$

avec  $\xi = [1 - (c^2 + d^2)]x - [1 + (c^2 + d^2)]y$  et  $\eta = [1 + (c^2 + d^2)]x - [1 - (c^2 + d^2)]y$ . Par conséquent,  $\Theta^+$  est réel et périodique en  $\xi$ .

Si nous posons que  $|\beta_1| = 1$ , nous avons, par conséquent, que  $c^2 + d^2 = 1$  et alors nous obtenons la solution périodique en  $y$

$$\Theta^+ = -2 \arctan \left[ \frac{c \sin(dy/\rho)}{d \cosh(cx/\rho)} \right]. \quad (2.99)$$

Cette solution est appelée le *breather* stationnaire, puisqu'il ne subit aucune translation lorsque  $y$  varie.

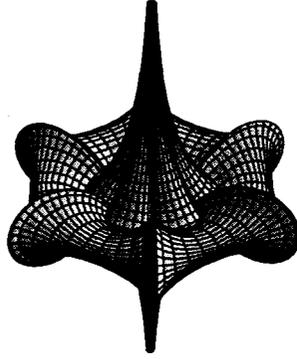


FIG. 2.6 – Une surface associée à un breather stationnaire

#### 2.4.5 Surfaces correspondantes aux breathers stationnaires

Puisque  $\theta_{12}$  peut être généré autant par  $\mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_1)$  que par  $\mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_2)$ , l'expression (2.91) admet la représentation symétrique

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \rho \cos \theta_{12} \left( \sin \zeta_2 \frac{\mathbf{r}_{1,x}}{\cos \theta_1} + \sin \zeta_1 \frac{\mathbf{r}_{2,x}}{\cos \theta_2} \right) \right. \\ \left. + \rho \sin \theta_{12} \left( \sin \zeta_2 \frac{\mathbf{r}_{1,y}}{\sin \theta_1} + \sin \zeta_1 \frac{\mathbf{r}_{2,y}}{\sin \theta_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Pour les solutions de type *breather* stationnaire,

$$\begin{aligned} \sin \zeta_1 = \sin \zeta_2 = \frac{1}{c}, \\ \chi_2 = \frac{1}{2\rho}(cx - idy) = \bar{\chi}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_1, \quad \theta_2 = \bar{\theta}_1. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Ainsi, en utilisant (2.100) avec  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  donnés par (2.87) où  $\zeta = \zeta_1$  et  $\zeta_2$  respectivement, la surface pseudosphérique correspondant à la solution de type *breather* stationnaire (2.99)

est réelle avec un vecteur position donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{breather} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \frac{2d}{c} \frac{\sin(dy) \cosh(cx)}{d^2 \cosh^2(cx) + c^2 \sin^2(dy)} \begin{pmatrix} \sin y \\ -\cos y \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{2d^2}{c} \frac{\cosh(cx)}{d^2 \cosh^2(cx) + c^2 \sin^2(dy)} \begin{pmatrix} \cos y \cos(dy) \\ \sin y \cos(dy) \\ -\sinh(cx) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.102)$$

où  $c = \sqrt{1 - d^2}$  et  $\rho = 1$ . On peut vérifier que les lignes de courbure  $y = \text{const}$  sont planes et que, par conséquent, les surfaces pseudosphériques constituent des surfaces d'*Eneper*. Ces dernières ont été étudiées en détail par Steuerwald [37].

À tout nombre rationnel compris entre 0 et 1, correspond une surface pseudosphérique de type *breather*, laquelle est périodique selon le paramètre  $y$ . Si nous écrivons  $d = p/q$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers co-premiers avec  $p < q$ , alors la période de la solution de type *breather* est  $2\pi q/p$ . Un exemple de surface pseudosphérique associée à un *breather* stationnaire est illustré à la figure 2.6.

Par l'application répétée de (2.91), nous sommes en mesure d'obtenir le vecteur position de surfaces pseudosphériques associées avec des solutions N-solitoniques de l'équation de sine-Gordon telle que générée via l'itération du théorème de permutabilité.

## 2.5 Surfaces parallèles. Transformation de Bäcklund induite pour une classe de surfaces de Weingarten

Une surface  $\Sigma'$  est dite parallèle à une surface  $\Sigma$ , de vecteur position  $\mathbf{r}$ , si son vecteur position est donné par

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + c\mathbf{N}, \quad (2.103)$$

où  $c$  est une constante. La constante  $c$  représente la distance, dans la direction de la normale, entre  $\Sigma$  et  $\tilde{\Sigma}$ . Si les lignes de courbure  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  sur  $\Sigma$  correspondent aux courbes paramétriques, alors (2.103) implique que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_x &= \mathbf{r}_x + c\mathbf{N}_x = \mathbf{r}_x - \frac{ce}{E}\mathbf{r}_x = (1 - c\kappa_1)\mathbf{r}_x, \\ \tilde{\mathbf{r}}_y &= \mathbf{r}_y + c\mathbf{N}_y = \mathbf{r}_y - \frac{cg}{G}\mathbf{r}_y = (1 - c\kappa_2)\mathbf{r}_y, \end{aligned} \quad (2.104)$$

où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les courbures principales au point générique  $\mathbf{r}$  sur  $\Sigma$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (1 - c\kappa_1)^2 E, & \tilde{F} &= 0, & \tilde{G} &= (1 - c\kappa_2)^2 G, \\ \tilde{H}^2 &= (1 - c\kappa_1)^2 (1 - c\kappa_2)^2, \end{aligned} \quad (2.105)$$

tandis que

$$\tilde{N} = \frac{\tilde{r}_x \times \tilde{r}_y}{\tilde{H}} = \epsilon N, \quad (2.106)$$

où  $\epsilon = \pm 1$ , dépendemment si  $(1 - c\kappa_1)(1 - c\kappa_2)$  est positif ou négatif. De plus,

$$\tilde{e} = \epsilon(1 - c\kappa_1)e, \quad \tilde{f} = 0, \quad \tilde{g} = \epsilon(1 - c\kappa_2)g. \quad (2.107)$$

Il est clair que les lignes paramétriques de la surface  $\Sigma$  vont induire les lignes paramétriques de la surface parallèle  $\tilde{\Sigma}$ . La surface parallèle  $\tilde{\Sigma}$  a donc des lignes de courbure qui correspondent à celles de la surface originale  $\Sigma$ . Les tangentes à des points correspondants sont parallèles.

Les courbures principales  $\tilde{\kappa}_1$  et  $\tilde{\kappa}_2$  sur  $\tilde{\Sigma}$  sont

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{\tilde{e}}{\tilde{E}} = \frac{\epsilon\kappa_1}{(1 - c\kappa_1)}, \quad \tilde{\kappa}_2 = \frac{\tilde{g}}{\tilde{G}} = \frac{\epsilon\kappa_2}{(1 - c\kappa_2)}, \quad (2.108)$$

de telle sorte que la courbure moyenne  $\tilde{\mathcal{M}}$  et la courbure totale  $\tilde{\mathcal{K}}$  de la surface parallèle  $\tilde{\Sigma}$  sont

$$\tilde{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}(\tilde{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_2) = \frac{\epsilon(\mathcal{M} - c\mathcal{K})}{1 - 2c\mathcal{M} + c^2\mathcal{K}}, \quad (2.109)$$

$$\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\kappa}_1\tilde{\kappa}_2 = \frac{\mathcal{K}}{1 - 2c\mathcal{M} + c^2\mathcal{K}}. \quad (2.110)$$

### 2.5.1 Surfaces de courbure moyenne constante. Un théorème de Bonnet

Si  $\Sigma = \tilde{\Sigma}|_{c=0}$  est une surface pseudosphérique avec  $\mathcal{K} = -1/\rho^2$ , alors les courbures moyenne et totale des surfaces parallèles  $\tilde{\Sigma}$  dépendent paramétriquement de la courbure moyenne  $\mathcal{M}$  de  $\Sigma$ . Celles-ci sont

$$\tilde{\mathcal{M}} = \frac{\epsilon(\mathcal{M} + c/\rho^2)}{1 - 2c\mathcal{M} - c^2/\rho^2}, \quad \tilde{\mathcal{K}} = \frac{-1}{\rho^2(1 - 2c\mathcal{M} - c^2/\rho^2)}, \quad (2.111)$$

d'où, nous obtenons la relation

$$(\rho^2 + c^2)\tilde{\mathcal{K}} + 2c\epsilon\tilde{\mathcal{M}} = -1, \quad (2.112)$$

ou, de façon équivalente, en termes des courbures principales,

$$\left[ \tilde{\kappa}_1 + \frac{c\epsilon}{\rho^2 + c^2} \right] \left[ \tilde{\kappa}_2 + \frac{c\epsilon}{\rho^2 + c^2} \right] = \frac{-\rho^2}{(\rho^2 + c^2)^2}. \quad (2.113)$$

Ainsi, les surfaces  $\tilde{\Sigma}$  parallèles à une certaine surface pseudosphérique  $\Sigma$  sont des surfaces de Weingarten particulières, et donc leurs courbures moyenne et totale  $\tilde{\mathcal{M}}$  et  $\tilde{\mathcal{K}}$  (ou de façon équivalente leurs courbures principales  $\tilde{\kappa}_1$  et  $\tilde{\kappa}_2$ ) sont fonctionnellement dépendantes.

Si la surface  $\Sigma$  a une courbure totale positive et constante

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\rho^2} \quad (2.114)$$

alors l'équation de Gauss se réduit à une équation sinh-Gordon elliptique intégrable. La courbure moyenne des surfaces parallèles est donnée par

$$\tilde{\mathcal{M}} = \frac{\epsilon(\mathcal{M} - c/\rho^2)}{1 - 2c\mathcal{M} + c^2/\rho^2}, \quad (2.115)$$

laquelle est indépendante de  $\mathcal{M}$  si et seulement si

$$c = \pm\rho. \quad (2.116)$$

Dans ce cas,  $\tilde{\mathcal{M}}$  est une constante et nous pouvons formuler le théorème suivant qui doit son existence à Bonnet.

***Théorème 2.1** Une surface de courbure Gaussienne constante positive  $\mathcal{K} = 1/\rho^2$  admet deux surfaces parallèles de courbure moyenne constante  $\pm 1/(2\rho)$ . La distance à la surface de courbure Gaussienne positive est  $\rho$ .*

### 2.5.2 Une transformation de Bäcklund induite

Si une transformation de Bäcklund pour une classe de surfaces  $\Sigma$  est connue, alors, naturellement, une transformation de Bäcklund pour la classe des surfaces parallèles  $\tilde{\Sigma}$  est induite. En particulier, nous obtenons aisément une transformation de Bäcklund pour les surfaces de Weingarten gouvernées par la relation (2.113). Le résultat est une conséquence de la transformation de Bäcklund (2.91), qui est

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \rho(\mathbf{N} \times \mathbf{N}'), \quad (2.117)$$

où  $\mathbf{N}'$  est donné par (2.43). En termes des coordonnées de courbure,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \frac{L}{\rho \sin 2\theta} [-\cos(\theta' - \theta) + \cos(\theta' + \theta)] \mathbf{r}_x \\ &\quad + \frac{L}{\rho \sin 2\theta} [-\cos(\theta' - \theta) + \cos(\theta' + \theta)] \mathbf{r}_y + \left(1 - \frac{L\beta}{\rho}\right) \mathbf{N} \\ &= \frac{L}{\rho} \left( \frac{\sin \theta'}{\cos \theta} \mathbf{r}_x - \frac{\cos \theta'}{\sin \theta} \mathbf{r}_y \right) + \left(1 - \frac{L\beta}{\rho}\right) \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Les surfaces  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{\Sigma}'$  parallèles aux surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  respectivement, sont données par

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + c\mathbf{N}, \quad \tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}' + c'\mathbf{N}', \quad (2.119)$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{r}}' &= \tilde{\mathbf{r}} + \rho(\tilde{\mathbf{N}} \times \tilde{\mathbf{N}}') + c'\tilde{\mathbf{N}}' - c\mathbf{N} \\
 &= \tilde{\mathbf{r}} + L \left[ \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \mathbf{r}_x - \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \mathbf{r}_y \right] \\
 &\quad + \frac{c'L}{\rho} \left[ \frac{\sin \theta'}{\cos \theta} \mathbf{r}_x - \frac{\cos \theta'}{\sin \theta} \mathbf{r}_y \right] + \left[ c' \left( 1 - \frac{L\beta}{\rho} \right) - c \right] \mathbf{N} \\
 &= \tilde{\mathbf{r}} + L \left[ \frac{\cos \theta' + (c'/\rho) \sin \theta'}{\cos \theta - (c'/\rho) \sin \theta} \tilde{\mathbf{r}}_x - \frac{\sin \theta' + (c'/\rho) \cos \theta'}{\sin \theta + (c'/\rho) \cos \theta} \tilde{\mathbf{r}}_y \right] \\
 &\quad + \epsilon \left[ c' \left( 1 - \frac{L\beta}{\rho} \right) - c \right] \tilde{\mathbf{N}}.
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

Ceci fournit une transformation de Bäcklund agissant sur la classe de Weingarten de surfaces  $\tilde{\Sigma}$  avec courbures moyenne et totale  $\tilde{\mathcal{M}}$  et  $\tilde{\mathcal{K}}$  reliées par (2.112). Puisque

$$\mathcal{K}' = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \mathcal{M}' = -\frac{1}{\rho} \cot 2\theta', \tag{2.121}$$

nous constatons que, sous cette transformation de Bäcklund,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{K}}' &= \frac{-1}{\rho^2 (\rho^2 - c^2 + 2c'\rho \cot 2\theta')}, \\
 \tilde{\mathcal{M}}' &= \frac{\epsilon(c' - \rho \cot 2\theta')}{\rho^2 - c^2 + 2c'\rho \cot 2\theta'}.
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Comme auparavant  $\theta'$  dénote la transformée de Bäcklund  $\mathbb{B}_\beta(\theta)$  (2.90). De plus, (2.120) mène à

$$|\tilde{\mathbf{r}}' - \tilde{\mathbf{r}}|^2 = L^2 + c'^2 - 2cc' \cos \zeta + c^2 \tag{2.123}$$

de telle sorte que  $\tilde{\mathbf{r}}' - \tilde{\mathbf{r}}$  soit de longueur constante.

Les surfaces de Weingarten caractérisées par la relation

$$(c^2 \pm \rho^2)\mathcal{K} + 2c\epsilon\mathcal{M} = -1 \tag{2.124}$$

sont solitoniques, puisqu'elles sont parallèles à des surfaces de courbure de Gauss constante. Sous l'hypothèse que les quantités  $c$  et  $\rho$ , dans (2.124), sont harmoniques dans un certain système de coordonnées, il peut être démontré que les surfaces de Weingarten générales associées sont intégrables.

Dans la section qui suit, nous nous intéressons au cas où  $c = 0$  et  $\rho_{uv} = 0$ , *i.e.*,

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}}} \right)_{xy} = 0, \tag{2.125}$$

en termes des coordonnées asymptotiques. Les surfaces respectant une telle contrainte sont connues sous l'appellation des surfaces de Bianchi.

## 2.6 Le système de Bianchi et son auto-transformation de Bäcklund

Comme nous l'avons vu à la section 2.1, les surfaces hyperboliques paramétrisées en termes des coordonnées asymptotiques sont gouvernées par le système

$$\begin{aligned} a_v + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} a - \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} b \cos \omega &= 0, \\ b_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} b - \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} a \cos \omega &= 0, \\ \omega_{uv} + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_u}{\rho} \frac{b}{a} \sin \omega \right)_u + \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_v}{\rho} \frac{a}{b} \sin \omega \right)_v - ab \sin \omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Les formes fondamentales correspondantes sont

$$\begin{aligned} I &= \rho^2 (a^2 du^2 + 2ab \cos \omega dudv + b^2 dv^2), \\ II &= 2\rho ab \sin \omega dudv. \end{aligned} \quad (2.127)$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2} < 0. \quad (2.128)$$

En 1890, Bianchi [4] a présenté une construction purement géométrique de surfaces hyperboliques sujettes à la contrainte

$$\rho_{uv} = 0. \quad (2.129)$$

Les surfaces hyperboliques assujetties à la contrainte (2.129) sont appelées les *surfaces de Bianchi*. La présente section est principalement consacrée à la dérivation d'une transformation de Bäcklund pour les surfaces hyperboliques.

### 2.6.1 Surfaces hyperboliques. Représentation sphérique

Soit la surface  $\Sigma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  et soit  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$  le vecteur normal à  $\Sigma$  au point décrit par  $\mathbf{r}(u, v)$ . Si nous ramenons les vecteurs  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$  à une même origine, alors la fonction vectorielle  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$  trace un système de coordonnées sur une sphère. Ce dernier est appelé la représentation sphérique ou la surface de Gauss.

La première forme fondamentale de la sphère est

$$dN^2 = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} dudv + \mathcal{G} dv^2, \quad (2.130)$$

où

$$\mathcal{E} = N_u^2, \quad \mathcal{F} = N_u \cdot N_v, \quad \mathcal{G} = N_v^2. \quad (2.131)$$

La métrique de la représentation sphérique est reliée à celle de la surface  $\Sigma$ . En termes des coordonnées asymptotiques, ce lien prend la forme

$$E = \rho^2 \mathcal{E}, \quad F = -\rho^2 \mathcal{F}, \quad G = \rho^2 \mathcal{G} \quad (2.132)$$

pour une surface hyperbolique avec courbure de Gauss

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho}. \quad (2.133)$$

Par conséquent, les équations de Weingarten pour la surface hyperbolique peuvent être mises sous la forme

$$\mathbf{r}_u = \frac{\rho}{\mathcal{H}} (\mathcal{F} \mathbf{N}_u - \mathcal{E} \mathbf{N}_v), \quad \mathbf{r}_v = \frac{\rho}{\mathcal{H}} (\mathcal{F} \mathbf{N}_v - \mathcal{G} \mathbf{N}_u) \quad (2.134)$$

avec  $\mathcal{H}^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2$ , et les équations de Mainardi-Codazzi se réduisent à

$$\frac{\rho_u}{\rho} = -2\tilde{\Gamma}_{12}^2, \quad \frac{\rho_v}{\rho} = -2\tilde{\Gamma}_{12}^1, \quad (2.135)$$

où  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel associés à la métrique de la représentation sphérique. De plus, la compatibilité de (2.135) exige que

$$\frac{\partial}{\partial u} \tilde{\Gamma}_{12}^1 = \frac{\partial}{\partial v} \tilde{\Gamma}_{12}^2. \quad (2.136)$$

En fait, une surface de Gauss  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(u, v)$ ,  $\mathbf{N}^2 = 1$ , peut être associée à la représentation sphérique des lignes asymptotiques d'une surface hyperbolique si et seulement si les coefficients correspondants  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  obéissent à la relation (2.136). De ce fait, (2.136) garantit qu'il existe une fonction  $\rho$  satisfaisant (2.135), ce qui garantit, par conséquent, la compatibilité du système (2.134). Nous pouvons donc facilement vérifier qu'en effet  $\mathbf{N}$  est la normale de la surface définie par  $\mathbf{r}$ . Il faut noter que le vecteur de surface  $\mathbf{r}$  est définie à une transformation homothétique près seulement, c'est-à-dire un changement d'échelle ou une translation, puisque  $\rho$  est donné seulement à un facteur multiplicatif près et  $\mathbf{r}$  à une constante d'intégration près.

Le résultat ci-dessus peut être reformulé. Ainsi, les formes fondamentales peuvent être écrites, en termes de la normale  $\mathbf{N}$  de la surface hyperbolique, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{I} &= \rho^2 (N_u^2 du^2 - 2N_u \cdot N_v dudv + N_v^2 dv^2), \\ \text{II} &= 2\rho (N_u \times N_v) \cdot \mathbf{N} dudv = \pm 2\rho |N_u \times N_v| dudv, \end{aligned} \quad (2.137)$$

en vertu de

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{f^2}{EG - F^2} = -\frac{f^2}{\rho^4 [N_u^2 N_v^2 - (N_u \cdot N_v)^2]}. \quad (2.138)$$

Maintenant, les équations de Gauss-Weingarten impliquent que  $N$  satisfait l'équation hyperbolique

$$N_{uv} + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} N_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} N_v + \mathcal{F}N = 0. \quad (2.139)$$

D'où, en prenant le produit vectoriel avec  $N$ , nous obtenons l'équation vectorielle

$$(\rho N \times N_u)_v + (\rho N \times N_v)_u = 0, \quad (2.140)$$

laquelle est la condition d'intégrabilité pour (2.134) écrite sous la forme

$$\mathbf{r}_u = \rho N_u \times N, \quad \mathbf{r}_v = -\rho N_v \times N. \quad (2.141)$$

On réfère couramment à la dernière relation comme étant *la formule de Lelievre*.

Réciproquement, toute solution de l'équation vectorielle (2.140) avec  $N^2 = 1$  garantit l'existence d'une fonction vectorielle  $\mathbf{r}$  satisfaisant (2.141). Ce qui, à son tour, implique que

$$\mathbf{r}_u \cdot N = 0, \quad \mathbf{r}_v \cdot N = 0, \quad \mathbf{r}_u \cdot N_u = 0, \quad \mathbf{r}_v \cdot N_v = 0, \quad (2.142)$$

d'où  $\mathbf{r}$  peut être vu comme le vecteur position d'une surface paramétrisée en coordonnées asymptotiques avec comme première et seconde formes fondamentales (2.137). En fait, on vérifie directement que les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (2.126) sont satisfaites modulo (2.140). Nous concluons que l'équation vectorielle (2.140), ou de façon équivalente,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{uv} + \frac{1}{2} \frac{\rho_v}{\rho} \varepsilon_u + \frac{1}{2} \frac{\rho_u}{\rho} \varepsilon_v &= 2 \frac{\varepsilon_u \varepsilon_v \bar{\varepsilon}}{|\varepsilon|^2 + 1}, \\ N &= \frac{1}{|\varepsilon|^2 + 1} \begin{pmatrix} \varepsilon + \bar{\varepsilon} \\ -i(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \\ |\varepsilon|^2 - 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.143)$$

est une autre manifestation des équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (2.126). En particulier, le système de Bianchi classique est équivalent à (2.143 :1) auquel nous ajoutons la contrainte  $\rho_{uv} = 0$ .

L'équation vectorielle (2.140) a une signification importante en théorie des solitons. Ainsi, si nous introduisons la fonction matricielle

$$N = N \cdot \sigma, \quad (2.144)$$

où  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T$  et les  $\sigma_i$  sont les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.145)$$

alors une forme équivalente de (2.140) est donnée par

$$(\rho N N_u)_v + (\rho N N_v)_u = 0, \quad N^2 = I, \quad N^\dagger = N. \quad (2.146)$$

Ceci constitue une extension du *modèle de type sigma non-linéaire*. Ici, le groupe de Lie sous-jacent est  $O(3)$ . Il est à remarquer que le modèle sigma non-linéaire qui se base sur le groupe de Lie  $O(2, 1)$  est donné par

$$(\rho S S_u)_v + (\rho S S_v)_u = 0, \quad \rho_{uv} = 0, \quad S^2 = -I, \quad \bar{S} = S. \quad (2.147)$$

Si la matrice  $S$  est paramétrisée de telle sorte que

$$S = \frac{1}{\varepsilon + \bar{\varepsilon}} \begin{pmatrix} i(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) & -2\varepsilon\bar{\varepsilon} \\ 2 & -i(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \end{pmatrix} \quad (2.148)$$

et  $u, v$  sont pris comme étant les variables conjuguées complexes  $z, \bar{z}$ , alors nous retrouvons l'équation d'Ernst de la relativité générale [10]

$$\varepsilon_{z\bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} \varepsilon_z + \frac{1}{2} \frac{\rho_z}{\rho} \varepsilon_{\bar{z}} = \frac{\varepsilon_z \varepsilon_{\bar{z}}}{\mathbb{R}(\varepsilon)}, \quad \rho_{z\bar{z}} = 0. \quad (2.149)$$

Par conséquent, cette équation de Ernst peut être vue comme une contre-partie elliptique du système de Bianchi.

Il est à noter que des versions en  $2 + 1$  dimensions du système de Bianchi, aussi bien que de l'équation de cognate Ernst, peuvent être construites en ajustant ces modèles de type sigma non-linéaire en un contexte plus général des systèmes LKR.

### 2.6.2 Une transformation de Bäcklund pour les surfaces hyperboliques

Nous allons à présent construire une transformation de Bäcklund obéissant à la condition de tangence

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + p\mathbf{r}_u + q\mathbf{r}_v, \quad (2.150)$$

c'est-à-dire, nous exigeons que les lignes, joignant des points correspondants de  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , soient tangentielles à  $\Sigma$ . Nous considérons que les surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont toutes les deux paramétrisées en terme des coordonnées asymptotiques  $u, v$ . Nous avons alors les conditions

$$e' = \mathbf{r}'_{uu} \cdot \mathbf{N}' = 0, \quad g' = \mathbf{r}'_{vv} \cdot \mathbf{N}' = 0 \quad (2.151)$$

qui constituent deux équations différentielles non-linéaires de second ordre pour les fonctions  $p$  et  $q$ . Toute solution de (2.151) donne naissance à des transformations de la forme (2.150) entre des surfaces hyperboliques  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ .

Nous sommes toutefois dans une situation fort différente si nous exigeons en plus que le vecteur  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  soit aussi tangent à la surface  $\Sigma'$ . Il est alors approprié d'introduire un trièdre orthonormé constitué du vecteur normal  $\mathbf{N}$  et de vecteurs unitaires tangentiels aux lignes de courbures sur  $\Sigma$ . On se convainc sans peine que les directions des lignes de courbures sont données par

$$\frac{\mathbf{r}_u}{a} \pm \frac{\mathbf{r}_v}{b} \quad (2.152)$$

ou de façon équivalente

$$\frac{N_u}{a} \pm \frac{N_v}{b}. \quad (2.153)$$

Ainsi, à l'instar de Bianchi [4], nous choisissons une base orthonormée de vecteur tangents

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2 \sin \frac{\Omega}{2}} \left( \frac{N_u}{a} - \frac{N_v}{b} \right), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2 \cos \frac{\Omega}{2}} \left( \frac{N_u}{a} + \frac{N_v}{b} \right), \quad (2.154)$$

où

$$\Omega = \omega + \pi. \quad (2.155)$$

Il faut noter que les considérations de Bianchi se basent sur la représentation sphérique de la surface  $\Sigma$ . Dans cette représentation, la première forme fondamentale est

$$dN^2 = a^2 du^2 + 2ab \cos \Omega dudv + b^2 dv^2 \quad (2.156)$$

de telle sorte que l'angle  $\Omega$  entre les lignes de coordonnées sur la sphère est définie par  $N = N(u, v)$ .

En terme du trièdre orthonormé  $\{\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{N}\}$ , les équations de Gauss-Weingarten deviennent

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_u &= \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_1 & -a \sin \frac{\Omega}{2} \\ \Omega_1 & 0 & -a \cos \frac{\Omega}{2} \\ a \sin \frac{\Omega}{2} & a \cos \frac{\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}_v &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2 & b \sin \frac{\Omega}{2} \\ -\Omega_2 & 0 & -b \cos \frac{\Omega}{2} \\ -b \sin \frac{\Omega}{2} & b \cos \frac{\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont définies par

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \Omega_u - \frac{1}{2} \frac{a \rho_v}{b \rho} \sin \Omega, \quad \Omega_2 = \frac{1}{2} \Omega_v - \frac{1}{2} \frac{b \rho_u}{a \rho} \sin \Omega. \quad (2.158)$$

Ces équations sont compatibles si et seulement si  $a$ ,  $b$ ,  $\rho$  et  $\omega = \Omega - \pi$  satisfont les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (2.126). Le système (2.157) est rapidement dérivé par l'utilisation des équations de Weingarten sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -\rho a \cos \frac{\Omega}{2} \mathbf{V} + \rho a \sin \frac{\Omega}{2} \mathbf{W}, \\ \mathbf{r}_v &= -\rho b \cos \frac{\Omega}{2} \mathbf{V} + \rho b \sin \frac{\Omega}{2} \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

En conséquence, le vecteur position  $\mathbf{r}$  de  $\Sigma$  est obtenu par intégration de (2.159) une fois que  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  sont connus.

Étant donné que ces surfaces sont exprimées en termes des coordonnées asymptotiques  $u, v$ , les vecteurs de position  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  satisfont la formule de Lelievre (2.141), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \boldsymbol{\nu}_u \times \boldsymbol{\nu}, & \mathbf{r}_v &= -\boldsymbol{\nu}_v \times \boldsymbol{\nu}, \\ \mathbf{r}'_u &= \boldsymbol{\nu}'_u \times \boldsymbol{\nu}', & \mathbf{r}'_v &= -\boldsymbol{\nu}'_v \times \boldsymbol{\nu}', \end{aligned} \quad (2.160)$$

où

$$\boldsymbol{\nu} = \sqrt{\rho} \mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\nu}' = \sqrt{\rho'} \mathbf{N}'. \quad (2.161)$$

En ces variables, les équations qui régissent  $\boldsymbol{\nu}$  et  $\boldsymbol{\nu}'$  (2.139) prennent la forme

$$\boldsymbol{\nu}_{uv} = \Lambda \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\nu}'_{uv} = \Lambda' \boldsymbol{\nu}' \quad (2.162)$$

et les courbures de Gauss s'écrivent

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{|\boldsymbol{\nu}|^4}, \quad \mathcal{K}' = -\frac{1}{|\boldsymbol{\nu}'|^4}. \quad (2.163)$$

L'exigence que  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  soit tangentiel à la fois à  $\Sigma$  et à  $\Sigma'$  implique que

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = m \boldsymbol{\nu}' \times \boldsymbol{\nu}. \quad (2.164)$$

En considérant (2.160), nous obtenons en dérivant (2.164) par rapport à  $u$  que

$$\boldsymbol{\nu}'_u \times (\boldsymbol{\nu}' - m \boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\nu}_u \times (m \boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}) - m_u \boldsymbol{\nu}' \times \boldsymbol{\nu} = 0 \quad (2.165)$$

tel que la composante dans la direction  $\boldsymbol{\nu}' - m \boldsymbol{\nu}$  délivre

$$(m^2 - 1)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_u) \cdot \boldsymbol{\nu}' = 0. \quad (2.166)$$

Similairement pour  $v$ , nous avons

$$(m^2 - 1)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}_v) \cdot \boldsymbol{\nu}' = 0. \quad (2.167)$$

Si nous assumons que les vecteurs  $\boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu}_v$  et  $\boldsymbol{\nu}$  sont linéairement indépendants et que  $\Sigma' \neq \Sigma$ , alors  $m^2 = 1$ . Sans perte de généralité, nous pouvons à présent poser

$$m = 1 \quad (2.168)$$

ce qui réduit (2.165) et son équivalent pour  $v$  à

$$(\boldsymbol{\nu}'_u + \boldsymbol{\nu}_u) \times (\boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}) = 0, \quad (\boldsymbol{\nu}'_v - \boldsymbol{\nu}_v) \times (\boldsymbol{\nu}' + \boldsymbol{\nu}) = 0. \quad (2.169)$$

Les conditions nécessaires (2.169) peuvent être mises sous la forme

$$\boldsymbol{\nu}'_u + \boldsymbol{\nu}_u = k(\boldsymbol{\nu}' - \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu}'_v - \boldsymbol{\nu}_v = l(\boldsymbol{\nu}' + \boldsymbol{\nu}), \quad (2.170)$$

où  $k, l$  sont jusqu'ici des fonctions indéterminées. La différentiation de la première et la seconde équation dans (2.170) respectivement par rapport à  $u$  et à  $v$ , et l'évaluation modulo (2.162), produit les contraintes

$$\begin{aligned} (\Lambda' - kl - k_u) \boldsymbol{\nu}' + (\Lambda - kl + k_v) \boldsymbol{\nu} &= 0, \\ (\Lambda' - kl - l_v) \boldsymbol{\nu}' + (\Lambda - kl + l_u) \boldsymbol{\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Ainsi, si nous assumons que  $\nu'$  et  $\nu$  sont des vecteurs non-parallèles, alors

$$\Lambda = -k_v + kl, \quad \Lambda' = k_v + kl, \quad l_u = k_v. \quad (2.172)$$

La troisième équation de (2.171) est satisfaite identiquement par l'introduction d'un potentiel  $\psi$  respectant

$$k = -(\ln \psi)_u, \quad l = -(\ln \psi)_v \quad (2.173)$$

tel que les deux relations restantes deviennent

$$\psi_{uv} = \Lambda\psi, \quad \Lambda' = \Lambda - 2(\ln \psi)_{uv}. \quad (2.174)$$

Dans un tel cas, le système (2.170) adopte la forme

$$(\psi\nu')_u = -\psi\nu_u + \psi_u\nu, \quad (\psi\nu')_v = \psi\nu_v - \psi_v\nu. \quad (2.175)$$

Les relations (2.174) et (2.175) déterminent la transformation classique de Moutard. Dans le contexte actuel, si  $\mathbf{r}$  est le vecteur position de la surface hyperbolique  $\Sigma$  donné en coordonnées asymptotiques et  $\nu$  est la normale à l'échelle correspondante satisfaisant l'équation de Moutard (2.162 :1), alors le système (2.175) est compatible si  $\psi$  est une solution de l'équation de Moutard (2.174 :1). Le vecteur position  $\mathbf{r}'$  donné par (2.164) avec  $m = 1$  représente alors une deuxième surface hyperbolique  $\Sigma'$ , laquelle reste paramétrisée en termes des coordonnées asymptotiques  $u, v$ . De plus,  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$  est tangentiel aux deux surfaces  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ .

### 2.6.3 Le système de Bianchi

Les équations de Gauss-Mainardi-Codazzi (2.126) représentent un système sous-déterminé pour les fonctions  $\omega, a, b$  et  $\rho$ . Ainsi, il est naturel d'augmenter ce système par des contraintes, lesquelles sont invariantes sous la transformation de Bäcklund dérivée à la section précédente. Ici, nous exigeons que la courbure de Gauss  $\mathcal{K}$  soit invariante sous la transformation de Bäcklund, c'est-à-dire que

$$\mathcal{K}' = \mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2}. \quad (2.176)$$

Par l'insertion des relations (2.161) avec  $\rho' = \rho$  et la paramétrisation

$$\mathbf{N}' = \cos \sigma \mathbf{N} + \sin \sigma (\cos \theta \mathbf{V} + \sin \theta \mathbf{W}), \quad (2.177)$$

où  $\sigma$  dénote l'angle entre les normales  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}'$ , dans le système (2.169), nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta_u &= \frac{1}{2}\Omega_u + a \tan \frac{\sigma}{2} \cos \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{a}{b} \frac{\rho_v}{\rho} \sin \Omega, \\ \theta_v &= -\frac{1}{2}\Omega_v - b \cot \frac{\sigma}{2} \cos \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{\rho_u}{\rho} \sin \Omega \end{aligned} \quad (2.178)$$

et les relations

$$\sigma_u = -\frac{\rho_u}{\rho} \tan \frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_v = \frac{\rho_v}{\rho} \cot \frac{\sigma}{2}, \quad (2.179)$$

lesquelles sont compatibles si et seulement si

$$\rho_{uv} = 0. \quad (2.180)$$

En ce sens, nous retrouvons la transformation de Bäcklund classique de Bianchi pour les surfaces hyperboliques avec courbure Gaussienne

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{\rho^2}, \quad \rho = U(u) + V(v). \quad (2.181)$$

Celles-ci sont connues comme étant les surfaces de Bianchi.

Pour faire de la transformation de Bäcklund pour les surfaces de Bianchi quelque chose de plus explicite, le système (2.179) peut être intégré, ce qui donne

$$\mu = \tan \frac{\sigma}{2} = \pm \sqrt{\frac{V(v) - k}{U(u) + k}}, \quad (2.182)$$

où  $k$  est une constante d'intégration. D'un autre côté, il est bien connu que les systèmes de Frobenius de la forme (2.178), *i.e.*

$$\theta_{u^i} = f_i + \sin \theta g_i + \cos \theta h_i \quad (2.183)$$

avec  $(u^1, u^2) = (u, v)$ , sont équivalents aux équations de Riccati et par conséquent peuvent être linéarisés. En effet, en prenant

$$\theta = 2 \arctan \frac{\phi^1}{\phi^2}, \quad (2.184)$$

la solution générale de (2.178) peut être exprimée en termes des solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} \phi_u &= \left[ -\mu a \sin \frac{\Omega}{2} X_1 + \mu a \cos \frac{\Omega}{2} X_2 + \frac{1}{2} \left( \Omega_u - \frac{a \rho_v}{b \rho} \sin \Omega \right) X_3 \right] \phi, \\ \phi_v &= \left[ -\mu^{-1} b \sin \frac{\Omega}{2} X_1 - \mu^{-1} b \cos \frac{\Omega}{2} X_2 + \frac{1}{2} \left( -\Omega_v - \frac{b \rho_u}{a \rho} \sin \Omega \right) X_3 \right] \phi, \end{aligned} \quad (2.185)$$

où

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \quad (2.186)$$

et

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.187)$$

Dans la terminologie de la théorie des solitons, le système linéaire (2.185) représente une paire de Lax «non-isospectrale» pour le système de Bianchi (2.126), (2.129) puisque nous pouvons voir  $\mu$  comme un «paramètre spectral» non constant. En fait, comme dans le cas des surfaces pseudosphériques, il constitue précisément la version  $su(2)$  des équations de Gauss-Weingarten (2.157) si  $k \rightarrow \infty$ .

La transformation de Bäcklund (2.164) ou, de façon équivalente,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \left( \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \right) \frac{1}{\sin \Omega} \left[ \cos \left( \theta - \frac{\Omega}{2} \right) \frac{\mathbf{r}_u}{a} + \cos \left( \theta + \frac{\Omega}{2} \right) \frac{\mathbf{r}_v}{b} \right] \quad (2.188)$$

est maintenant appliquée aux surfaces de Bianchi les plus simples (dégénérées). La première application est due à Bianchi qui a considéré le paraboloid hyperbolique

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \quad (2.189)$$

comme surface semence. En termes des coordonnées asymptotiques, le vecteur position correspondant se lit

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + v), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - v), \quad z = uv, \quad (2.190)$$

et la courbure de Gauss prend la forme requise, *i.e.*

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2}. \quad (2.191)$$

On démontre rapidement qu'une solution particulière de (2.178) conduit à une seconde surface  $\Sigma'$  donnée par

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 3u - v \frac{1 - 3u^2}{1 + u^2} \right), & y' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 3u + v \frac{1 - 3u^2}{1 + u^2} \right), \\ z' &= \frac{uv}{\sqrt{2}} \left( \frac{3 - u^2}{1 + u^2} \right). \end{aligned} \quad (2.192)$$

Une section particulière de cette surface est illustrée à la Figure 2.7.

La seconde application de la transformation de Bianchi est associée avec la surface semence dégénérée pour laquelle les lignes de coordonnées sont parallèles, *i.e.*  $\omega = 0$ . Nous effectuons le choix naturel

$$\Omega = \pi, \quad a = \alpha(\rho), \quad b = \beta(\rho)\rho_v \quad (2.193)$$

lequel se réduit aux équations de Gauss-Mainardi-Codazzi

$$\alpha_\rho + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\rho} = 0, \quad \beta_\rho + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\rho} = 0, \quad (2.194)$$

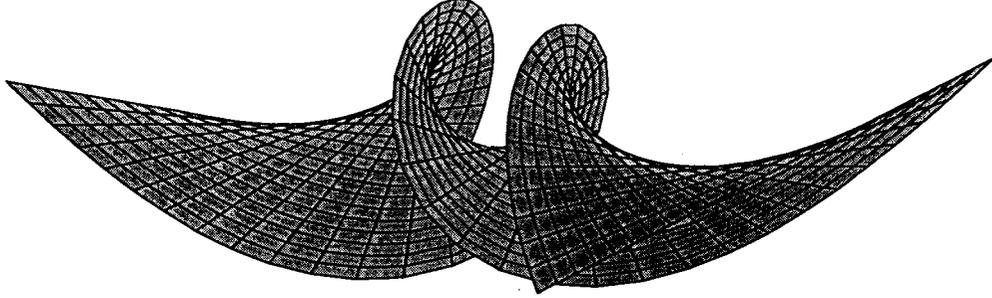


FIG. 2.7 – Surface de Bianchi à partir d'un parabolöide hyperbolique

dont la solution générale est

$$\alpha = c_1 + \frac{c_2}{\rho}, \quad \beta = c_1 - \frac{c_2}{\rho}. \quad (2.195)$$

La comparaison des systèmes de Frobenius (2.178), *i.e.*

$$\begin{aligned} \frac{\theta_u}{\sin \theta} &= - \left( c_1 + \frac{c_2}{\rho} \right) \rho_u \tan \frac{\sigma}{2}, \\ \frac{\theta_v}{\sin \theta} &= - \left( c_1 - \frac{c_2}{\rho} \right) \rho_v \cot \frac{\sigma}{2} \end{aligned} \quad (2.196)$$

avec (2.179) démontre alors que

$$\tan \frac{\theta}{2} = \exp \gamma, \quad \gamma = c_2 \sigma - c_1 \rho \sin \sigma + c_3, \quad (2.197)$$

d'où

$$\sin \theta = \frac{1}{\cosh \gamma}, \quad \cos \theta = \tanh \gamma. \quad (2.198)$$

D'un autre côté, les équations de Gauss-Weingarten (2.157) sont rapidement intégrées pour donner

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin \delta \\ -\cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.199)$$

avec  $\delta = c_1 \rho \cos \sigma + c_2 \ln \rho$  tel que le vecteur position  $\mathbf{r}$  de la surface semence dégénérée  $\Sigma$  est donné par

$$\mathbf{r} = \left( \frac{1}{2} c_1 \rho^2 + c_2 \rho \cos \sigma \right) \mathbf{W}. \quad (2.200)$$

Si nous écrivons

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \rho \sin \sigma (\sin \theta \mathbf{V} - \cos \theta \mathbf{W}) \quad (2.201)$$

pour le vecteur position générique de la seconde surface  $\Sigma'$ , alors

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} \rho \frac{\sin \sigma}{\cosh \gamma} \cos \delta \\ \rho \frac{\sin \sigma}{\cosh \gamma} \sin \delta \\ \frac{1}{2} c_1 \rho^2 + c_2 \rho \cos \sigma + \rho \sin \sigma \tanh \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.202)$$

Pour  $c_2 = 0$ , le vecteur position  $\mathbf{r}'$  est périodique en  $\sigma$ .

## Chapitre 3

# Le mouvement des courbes et des surfaces. Les connexions solitoniques

Dans ce chapitre, il est question de la connexion qui existe entre le mouvement des courbes et des surfaces et la théorie solitonique moderne.

### 3.1 Les mouvements des courbes à torsion ou courbure constante. La connexion de sine-Gordon

Quoique dans plusieurs travaux sur le mouvement des courbes solitoniques on traite la torsion et la courbure à l'aide d'une quantité complexe, nous baserons, ici, notre approche sur le trièdre orthonormé  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  habituel. Cette section se consacre à la dérivation de l'équation de sine-Gordon à partir de l'analyse du mouvement d'une courbe inextensible à torsion constante, laquelle, à son tour, balaie une surface pseudosphérique.

Soit une courbe  $C$  en mouvement dans l'espace décrite par la fonction vectorielle  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ , où  $s$  est le paramètre naturel de la courbe et  $t$  le temps. Les vecteurs unitaires tangent, normal et binormal seront donc donnés par les relations de Serret-Frenet

$$\begin{aligned}t_s &= \kappa \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_s &= \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}, \\ \mathbf{b}_s &= -\tau \mathbf{n},\end{aligned}\tag{3.1}$$

où  $\kappa$  est la courbure et  $\tau$  la torsion. Il est à noter que le temps apparaît dans (3.1) comme un paramètre.

Nous voulons que le trièdre  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  soit orthonormal en tout temps lors de son évolution temporelle. La forme générale que prend l'évolution du trièdre est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_t &= \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{b}, \\ \mathbf{n}_t &= -\alpha \mathbf{t} + \gamma \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_t &= -\beta \mathbf{t} - \gamma \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nous exigeons que la dérivée par rapport au paramètre naturel et la dérivée temporelle commutent, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{ts} &= \mathbf{t}_{st}, \\ \mathbf{n}_{ts} &= \mathbf{n}_{st}, \\ \mathbf{b}_{ts} &= \mathbf{b}_{st}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ce qui implique que la courbe  $C$  est inextensible. En appliquant les conditions de compatibilité (3.3) aux systèmes (3.1) et (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \kappa_t + \beta \tau, \\ \beta_s &= \kappa \gamma - \tau \alpha, \\ \gamma_s &= \tau_t - \kappa \beta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.1.1 Le mouvement d'une courbe à torsion constante

Comme conséquence du système (3.4), nous avons que

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)_s = 2(\alpha \kappa_t + \gamma \tau_t). \quad (3.5)$$

Dans le cas particulier où  $\alpha = 0$  et  $\tau_t = 0$ , l'équation (3.5) implique que  $\beta^2 + \gamma^2 = \delta^2(t)$ , où  $\delta^2(t)$  est une fonction dépendante du temps et indéterminée. Nous pouvons alors définir

$$\beta = \delta(t) \sin \sigma, \quad \gamma = \delta(t) \cos \sigma, \quad (3.6)$$

de telle sorte que les conditions de compatibilité (3.4) se réduisent à

$$\sigma_{st} = -\delta(t) \tau(s) \sin \sigma, \quad (3.7)$$

où

$$\kappa = \sigma_s. \quad (3.8)$$

Dans la situation où  $\tau = \frac{1}{\rho} = \tau_0$  et  $\delta = -\frac{1}{\rho}$ , l'équation (3.7) devient l'équation de sine-Gordon (2.27) sous la correspondance  $\{\sigma, s, t\} \rightarrow \{\omega, u, v\}$ . De plus, les équations (3.1) et (3.2) prennent maintenant la forme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_s & 0 \\ -\sigma_s & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1/\rho) \sin \sigma \\ 0 & 0 & (-1/\rho) \cos \sigma \\ (1/\rho) \sin \sigma & (1/\rho) \cos \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

La condition de compatibilité pour ce système produit l'équation de sine-Gordon.

Nous venons d'établir le lien qu'il y a entre une courbe en mouvement à torsion constante avec courbure  $\kappa = \omega_u$  et l'équation de sine-Gordon. La question qui s'en suit est : Est-ce qu'il existe un lien entre la dérivation de l'équation de sine-Gordon à l'aide du mouvement d'une courbe à torsion constante et la dérivation de cette même équation par l'approche classique qui se base sur les surfaces pseudosphériques ? En fait, les deux représentations linéaires (2.31) et (3.9), (3.10) sont en effet équivalentes sous les correspondances

$$\{\omega, u, v\} \rightarrow \{-\sigma, s, t\}, \quad \{A, B, C\} \rightarrow \{t, n, b\}. \quad (3.11)$$

Ainsi, une courbe  $C$  à torsion constante associée à l'équation de sine-Gordon trace, au fur et à mesure qu'elle évolue dans le temps, une surface pseudosphérique. De plus, à chaque instant cette courbure représente une ligne asymptotique sur la surface. Ceci est consistant avec le théorème classique de Beltrami-Enneper, lequel énonce que les lignes asymptotiques sur une surface à courbure Gaussienne  $-1/\rho^2$  ont une torsion de magnitude égale à  $1/\rho$ .

Nous obtenons aisément une expression pour la vitesse de la courbe à l'aide de la correspondance (3.11). En effet, (2.30 :2) démontre que

$$r_v = \cos \omega A + \sin \omega B,$$

d'où

$$v = r_t = \cos \sigma t - \sin \sigma n. \quad (3.12)$$

Pour trouver une courbe à torsion constante en mouvement associée à une solution de l'équation de sine-Gordon, il s'agit de prendre une ligne asymptotique sur la surface pseudosphérique en coordonnées asymptotiques qui correspond à cette solution et de l'animer à l'aide de l'autre paramètre. Si ceci est fait pour une solution double-solitonique, alors nous aurons une courbe à deux boucles. Au fur et à mesure que le temps avancera, ces boucles se déplaceront le long de la courbe, se rapprocheront, interagiront et ultimement ressortiront inchangées mis-à-part un changement de phase dans leur position dû à l'interaction non-linéaire.

### 3.1.2 Le mouvement d'une courbe inextensible à courbure constante

Dans le cas où  $\gamma = 0$  et  $\kappa_t = 0$  dans l'équation (3.5), le système (3.4) admet la solution

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{\cos \sigma}{\rho}, & \beta &= \frac{\sin \sigma}{\rho}, \\ \kappa &= \frac{1}{\rho}, & \tau &= \sigma_s, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $\sigma$  est une solution de l'équation de sine-Gordon

$$\sigma_{st} = \frac{1}{\rho^2} \sin \sigma. \quad (3.14)$$

La représentation linéaire avec la condition de compatibilité (3.14) est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho & 0 \\ -1/\rho & 0 & \sigma_s \\ 0 & -\sigma_s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & (-1/\rho) \cos \sigma & (1/\rho) \sin \sigma \\ (1/\rho) \cos \sigma & 0 & 0 \\ (-1/\rho) \sin \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Ce système peut être mis en correspondance avec la représentation linéaire (2.31) via

$$\{\omega, u, v\} \rightarrow \{\sigma, s, t\}, \quad \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} \rightarrow \{\mathbf{b}, \mathbf{n}, -\mathbf{t}\}. \quad (3.17)$$

Cependant, ici,  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{C} = -1 \neq 0$ , de telle sorte que la courbe à courbure constante en mouvement ne repose pas sur la surface pseudosphérique et donc ne la recouvre pas lorsque le temps s'écoule.

### 3.2 Une représentation linéaire matricielle $2 \times 2$ pour l'équation de sine-Gordon

Au chapitre précédent, nous avons dérivé l'équation de sine-Gordon comme une condition de compatibilité pour le système linéaire  $3 \times 3$  généré par les équations de Gauss-Weingarten (2.31) associées à des surfaces pseudosphériques. Par ailleurs, au début de ce chapitre, nous avons dérivé l'équation de sine-Gordon comme condition de compatibilité d'un autre système, c'est-à-dire le système linéaire  $3 \times 3$  (3.9) (3.10) qui décrit l'évolution du trièdre  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  d'une courbe à torsion constante.

L'équation de sine-Gordon peut aussi être dérivée comme condition de compatibilité d'un système linéaire  $2 \times 2$ .

Nous pouvons constater que le système (2.31) est équivalent au système

$$\begin{aligned} \Psi_u &= S\Psi, \\ \Psi_v &= T\Psi, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u & 0 \\ \omega_u & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix}, \\ T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho) \sin \omega \\ 0 & 0 & (-1/\rho) \cos \omega \\ (-1/\rho) \sin \omega & (1/\rho) \cos \omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

et la matrice  $\Psi$  est donnée par

$$\Psi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  sont les composantes des vecteurs unitaires  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ . Le fait que le trièdre  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  soit orthonormé et positivement orienté (right-handed) implique que la matrice  $\Psi$  est à la fois spéciale ( $\det \Psi = 1$ ) et orthogonale ( $\Psi^T \Psi = \mathbf{I}$ ). L'ensemble des matrices ayant ces caractéristiques forment le groupe (de Lie) sous la multiplication, connu sous l'appellation  $SO(3)$  (special orthogonal matrices). Il constitue une représentation du groupe des rotations en trois dimensions dans un espace Euclidien.

La condition de compatibilité pour le système (3.18) est

$$S_v - T_u + [S, T] = 0 \quad (3.21)$$

où  $[S, T] = ST - TS$  est le commutateur de  $S$  et  $T$ . En considérant  $S$  et  $T$  donnés par (3.19), la condition (3.21) est équivalente à l'équation de sine-Gordon (2.27).

À un groupe de Lie correspond une algèbre de Lie qui consiste en un espace vectoriel assorti d'une bracket de Lie  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  qui est bilinéaire, anticommutative et qui satisfait l'identité de Jacobi, *i.e.*

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \quad \forall a, b, c \in V. \quad (3.22)$$

Nous pouvons identifier l'algèbre de Lie du groupe  $SO(3)$  à l'aide de l'espace vectoriel réel avec la base  $\{L_1, L_2, L_3\}$  où les matrices  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont données par

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

et le bracket de Lie est l'opérateur de commutation. Les matrices  $L_i$  satisfont les relations de commutation

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2, \quad (3.24)$$

lesquelles caractérisent l'algèbre de Lie du groupe  $SO(3)$ . Cette algèbre de Lie est notée  $so(3)$ . Ici,  $S, T \in so(3)$  avec

$$S = \omega_u L_3 - \frac{1}{\rho} L_1, \quad (3.25)$$

$$T = \frac{1}{\rho} \cos \omega L_1 + \frac{1}{\rho} \sin \omega L_2. \quad (3.26)$$

Pour faire la connexion entre la représentation linéaire matricielle  $3 \times 3$   $\{A, B, C\}$  et la représentation linéaire  $2 \times 2$  AKNS, nous devons nous servir du fait que l'algèbre  $so(3)$  admet une représentation  $2 \times 2$  en terme des matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

Les matrices  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  satisfont les relations de commutation

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2. \quad (3.28)$$

Si nous définissons

$$e_k = \frac{\sigma_k}{2i}, \quad (3.29)$$

alors le trièdre  $\{e_1, e_2, e_3\}$  est isomorphe à celui formé par  $\{L_1, L_2, L_3\}$  sous la correspondance  $e_k \leftrightarrow L_k$ . Nous pouvons donc construire une représentation linéaire  $2 \times 2$  pour l'équation de sine-Gordon à partir de la représentation linéaire  $3 \times 3$ . Ainsi, si  $S = s_1L_1 + s_2L_2 + s_3L_3$  et  $T = t_1L_1 + t_2L_2 + t_3L_3$  sont des éléments de  $so(3)$  tels que la condition de compatibilité (3.21) tienne, alors les matrices

$$P = s_1e_1 + s_2e_2 + s_3e_3, \quad Q = t_1e_1 + t_2e_2 + t_3e_3$$

satisfont

$$P_v - Q_u + [P, Q] = 0. \quad (3.30)$$

Par conséquent, l'équation de sine-Gordon (2.27) peut en effet être générée comme la condition de compatibilité pour une représentation linéaire  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} \Phi_u &= P\Phi, \\ \Phi_v &= Q\Phi, \end{aligned} \quad (3.31)$$

où

$$\begin{aligned} P &= \omega_u e_3 - \frac{1}{\rho} e_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\omega_u & 1/\rho \\ 1/\rho & \omega_u \end{pmatrix}, \\ Q &= \frac{1}{\rho} \cos \omega e_1 + \frac{1}{\rho} \sin \omega e_2 = -\frac{i}{2\rho} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega} \\ e^{i\omega} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'introduction de la transformation de jauge  $\tilde{\Phi} = G\Phi$ , où

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

modifie la représentation linéaire déterminée par (3.31), (3.32) en un système équivalent de jauge, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_u &= GPG^{-1}\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} i/2\rho & -\omega_u/2\rho \\ \omega_u/2\rho & -i/2\rho \end{pmatrix} \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}_v &= GQG^{-1}\tilde{\Phi} = -\frac{i}{2\rho} \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \sin \omega & -\cos \omega \end{pmatrix} \tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

L'utilisation de l'invariance

$$\tilde{\omega} = -\omega, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\lambda}, \quad \tilde{v} = \lambda v \quad (3.34)$$

de l'équation (2.27) injecte à présent le paramètre spectral réel  $\lambda$  dans le dernier système pour produire la représentation linéaire  $2 \times 2$  AKNS standard pour l'équation de sine-Gordon (2.27), via

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_u &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_u \\ -\tilde{\omega}_u & 0 \end{pmatrix} + i \frac{\lambda}{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \tilde{\Phi}, \\ \tilde{\Phi}_v &= \frac{i}{2\lambda\rho} \begin{pmatrix} -\cos \tilde{\omega} & \sin \tilde{\omega} \\ \sin \tilde{\omega} & \cos \tilde{\omega} \end{pmatrix} \tilde{\Phi}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.3 Le mouvement des surfaces pseudosphériques. Un système de Weingarten et sa transformation de Bäcklund

La relation entre l'équation de sine-Gordon et la géométrie des surfaces pseudosphériques ou le mouvement des courbes de torsion constante sur de telles surfaces a été établie. Dans cette section, certains mouvements des surfaces pseudosphériques seront examinés.

Le mouvement d'une surface pseudosphérique  $\Sigma : r = r(u, v, t)$  paramétrisée dans les coordonnées asymptotiques  $u, v$  est examiné. À chaque instant  $t$ , la courbure totale  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t) < 0$  est constante et négative sur  $\Sigma$ . La base orthonormée  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ , comme introduite dans (2.30), est utilisée et ainsi les équations de Gauss-Weingarten sont données par (2.31), où cette fois cependant,  $\rho = \rho(t)$  et  $\omega = \omega(u, v, t)$ . L'évolution temporelle générale qui maintient l'orthonormalité du trièdre  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  est ajoutée, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions réelles de  $u, v$  et  $t$ . Le système linéaire (2.31), dans lequel le temps  $t$  entre seulement paramétriquement, englobe l'information que la surface  $\Sigma$  est pseudosphérique et paramétrisée par longueur d'arc le long des lignes asymptotiques. Pour construire une évolution du temps dans lequel ces propriétés sont préservées, il est requis que (3.36) soit compatible avec le système (2.31). Ceci impose les conditions  $\mathbf{A}_{ut} = \mathbf{A}_{tu}, \mathbf{A}_{vt} = \mathbf{A}_{tv}$ , etc. lesquelles, à leur tour, produisent le système linéaire non homogène suivant pour  $a, b$  et  $c$  :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & 1/\rho & 0 \\ -1/\rho & 0 & -\omega_u \\ 0 & \omega_u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -\omega_u \\ 0 \\ 1/\rho \end{pmatrix}_t, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_v &= \begin{pmatrix} 0 & -(1/\rho) \cos \omega & -(1/\rho) \sin \omega \\ (1/\rho) \cos \omega & 0 & 0 \\ (1/\rho) \sin \omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ (1/\rho) \sin \omega \\ -(1/\rho) \cos \omega \end{pmatrix}_t \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ce système est compatible modulo l'équation de sine-Gordon (2.27).

Jusqu'ici, le mouvement de la surface  $\Sigma$  a été spécifié par l'évolution du champ de trièdres  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ . Dans ce qui suit, il est commode de travailler en terme de vitesse  $\mathbf{r}_t$  de  $\Sigma$ . Si  $\mathbf{r}_t$  est la représentation

$$\mathbf{r}_t = l\mathbf{A} + m\mathbf{B} + n\mathbf{C}, \quad (3.39)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t &= \mathbf{r}_{ut} = \mathbf{r}_{tu} = (l\mathbf{A} + m\mathbf{B} + n\mathbf{C})_u \\ &= (l_u + m\omega_u) \mathbf{A} + (-l\omega_u + m_u - n/\rho) \mathbf{B} + (m/\rho + n_u) \mathbf{C}, \\ \mathbf{B}_t &= [\omega_t - n/\rho - (l_u + m\omega_u) \cot \omega + l_v \csc \omega] \mathbf{A} \\ &+ [(-\omega_t + l\omega_u - m_u + 2n/\rho) \cot \omega + m_v \csc \omega] \mathbf{B} \\ &+ [l/\rho - (n_u + 2m/\rho) \cot \omega + n_v \csc \omega] \mathbf{C}, \end{aligned}$$

tandis que  $\mathbf{C}_t = \mathbf{A}_t \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}_t$ . La condition que  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$  reste un trièdre orthonormé, fournit les conditions nécessaires

$$l_u + m\omega_u = 0, \quad (3.40)$$

$$\omega_t - l\omega_u + m_u - 2n/\rho - m_v \sec \omega = 0, \quad (3.41)$$

$$l_v \cos \omega + m_v \sin \omega = 0, \quad (3.42)$$

auquel cas

$$a = -l\omega_u + m_u - n/\rho, \quad (3.43)$$

$$b = n_u + m/\rho, \quad (3.44)$$

$$c = -(n_u + 2m/\rho) \cot \omega + l/\rho + n_v \csc \omega. \quad (3.45)$$

Le réarrangement des contraintes (3.40)-(3.42) montre que, dans le but d'obtenir un mouvement valide, il est requis de déterminer  $l$  tel que

$$l_{uv} = l_v \omega_u \cot \omega + l_u \frac{\sin \omega}{\rho^2 \omega_u}, \quad (3.46)$$

alors que les quantités  $m$  et  $n$  sont données par

$$m = -l_u/\omega_u \quad (3.47)$$

et

$$n = \frac{\rho}{2} (\omega_t - l\omega_u + m_u - m_v \sec \omega), \quad (3.48)$$

respectivement.

Les contraintes résiduelles sur le mouvement sont obtenues par l'insertion de  $\{a, b, c\}$  données par (3.43)-(3.45) dans (3.37), (3.38). Celles-ci sont déterminées comme étant

$$n_{uu} = (n_u \cot \omega - n_v \csc \omega) \omega_u + \frac{n}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} (m \omega_u \cot \omega - m_u), \quad (3.49)$$

$$n_{vv} = (n_u \cot \omega - n_u \csc \omega) \omega_v + \frac{n}{\rho^2} + \frac{2 \sec \omega}{\rho} (m_v - m \omega_v \cot \omega), \quad (3.50)$$

$$n_{uv} = \frac{n}{\rho^2} \cos \omega + \left( \frac{1}{\rho} \right)_t \sin \omega, \quad (3.51)$$

Ainsi, une évolution viable (3.39) requiert la solution du système (3.46)-(3.51).

Si un ensemble  $\{a, b, c\}$  et de ce fait le mouvement du trièdre  $\{A, B, C\}$  est connu, alors (3.43)-(3.45) fournit un système linéaire non homogène pour  $\{l, m, n\}$  pour déterminer  $v = r_t$ . Par exemple, une classe de solutions a  $\dot{\rho} = 0$  et

$$\{a, b, c\} = \{\zeta(t) \rho \omega_u, \delta(t) \sin \omega, -\zeta(t) - \delta(t) \cos \omega\} \quad (3.52)$$

pris avec la condition d'évolution linéaire auxiliaire

$$\omega_t = \rho [\delta(t) \omega_u - \zeta(t) \omega_u] \quad (3.53)$$

où  $\delta(t), \zeta(t)$  sont des fonctions arbitraires de  $t$ . Un mouvement constant avec l'ensemble de solutions (3.52) est donné par

$$\{l, m, n\} = \{\rho(\delta \cos \omega - \zeta), \rho \delta \sin \omega, 0\}. \quad (3.54)$$

Ceci correspond à un glissement de  $\Sigma$  dans lequel il n'y a pas de propagation normale.

### 3.3.1 Une limite continue d'un modèle de réseau anharmonique

Un autre mouvement possible  $\{l, m, n\}$  est donné par

$$\{l, m, n\} = \left\{ \rho \left[ \frac{\omega_u^2}{4} + \delta \cos \omega - \zeta \right], \rho \left[ \delta \sin \omega - \frac{\omega_{uu}}{2} \right], \omega_u \right\}, \quad (3.55)$$

où

$$\begin{aligned} \omega_t &= \frac{\rho}{2} \omega_{uuu} + \frac{\rho}{4} \omega_u^3 + \left( \frac{3}{2\rho} - \rho \zeta \right) \omega_u + \delta \rho \omega_v, \\ \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \sin \omega \end{aligned} \quad (3.56)$$

et  $\delta = \delta(t), \zeta = \zeta(t)$  sont arbitraires tandis que  $\dot{\rho} = 0$  tel que la courbure totale  $\mathcal{K}$  reste constante sur  $\Sigma$  dans tout le mouvement. L'ensemble  $\{a, b, c\}$  est obtenu par la substitution de (3.55) dans (3.43)-(3.45). Le système de trièdre linéaire correspondant, consistant de

(2.31) augmenté par l'évolution temporelle (2.33), a comme condition de compatibilité le système non-linéaire couplé. L'élimination de  $\omega_v$  de (3.56) donne

$$\omega_{ut} = \frac{\rho}{2}\omega_{uuuu} + \frac{3}{4}\rho\omega_u^2\omega_{uu} + \left(\frac{3}{2\rho} - \rho\zeta\right)\omega_{uu} + \frac{\delta}{\rho}\sin\omega \quad (3.57)$$

L'équation solitonique avec  $\delta \neq 0$  et  $\zeta = 3/(2\rho^2)$  a été originalement dérivée par Konno et al. [42] comme la limite continue d'un modèle de propagation d'onde dans un réseau anharmonique.

La spécialisation  $\delta = 0, \zeta = 3/2\rho^2$  dans (3.57) produit l'équation de Korteweg-de Vries modifiée (mKdV) dans  $\omega' = \omega_u$ , c'est-à-dire

$$\omega'_{t'} + \omega'_{u'u'u'} + 6\omega'^2\omega'_{u'} = 0, \quad (3.58)$$

où  $u' = u/2, t' = -t$  et  $\rho = 16$ . L'équation mKdV a d'importantes applications, en particulier, dans l'analyse des ondes non linéaires de Alfvén dans un plasma sans collision [14]. Cette connexion avec la propagation d'onde acoustique dans le réseau anharmonique a été décrite par Zabusky [47].

### 3.3.2 Le système Weingarten

Dans un mouvement en direction purement normale dans lequel la courbure Gaussienne  $\mathcal{K} = -1/\rho^2$  de  $\Sigma$  peut maintenant évoluer dans le temps, les relations (3.40)-(3.42) donnent

$$\{l, m, n\} = \{0, 0, \rho\omega_t/2\}. \quad (3.59)$$

Dans ce cas, la substitution dans le système de composantes normales (3.49)-(3.51) produit

$$\begin{aligned} \omega_{uut} &= \omega_u\omega_{ut}\cot\omega - \omega_u\omega_{vt}\csc\omega + \frac{1}{\rho^2}\omega_t, \\ \omega_{vvt} &= \omega_v\omega_{vt}\cot\omega - \omega_v\omega_{ut}\csc\omega + \frac{1}{\rho^2}\omega_t, \\ \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2}\sin\omega \end{aligned} \quad (3.60)$$

Le mouvement normal (3.59) a la vitesse

$$\mathbf{r}_t = \rho\theta_t\mathbf{N}, \quad (\theta = 2/\omega) \quad (3.61)$$

et, en terme des coordonnées de courbure  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ , le système (3.60) est équivalent à

$$\begin{aligned} \theta_{xyt} - \theta_x \theta_{yt} \cot \theta + \theta_y \theta_{xt} \tan \theta &= 0, \\ \left( \frac{\theta_{xt}}{\cos \theta} \right)_x - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \sin \theta \right)_t - \frac{1}{\sin \theta} \theta_y \theta_{yt} &= 0, \\ \left( \frac{\theta_{yt}}{\sin \theta} \right)_y - \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \cos \theta \right)_t - \frac{1}{\cos \theta} \theta_x \theta_{xt} &= 0, \\ \theta_{xx} - \theta_{yy} &= \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Ce système apparaît dans Eisenhart [9] en connexion avec une classe spéciale de surfaces triplement orthogonales. Il a été considérablement étudié par Weingarten dans le cas de  $\rho$  constant, par Bianchi et Darboux. En particulier, il a été démontré par Darboux que la solution générale du système dépend de cinq fonctions arbitraires d'une seule variable (voir aussi [43]). Il faut noter que, dans le système (3.62), chacun des (3.62 :2) ou (3.62 :3) est une conséquence de (3.57 :4) et de l'autre. Conséquemment, une de (3.62 :2) ou (3.62 :3) est redondante et peut être enlevée.

### 3.3.3 Les transformations de Bäcklund

Soit le vecteur position d'un point générique sur une surface pseudosphérique  $\Sigma$  en mouvement. Une transformation de Bäcklund peut être appliquée à chaque instant  $t$  afin de générer une nouvelle surface pseudosphérique. Ici, nous cherchons à faire cela de manière à ce que les contraintes du mouvement soient préservées. En particulier, des auto-transformations de Bäcklund sont construites, lesquelles, à leur tour, maintiennent les restrictions sur le mouvement associé aux systèmes de Weingarten et du réseau anharmonique. Ces auto-transformations de Bäcklund admettent génériquement (2.64) comme un principe de superposition non-linéaire pour la génération des solutions. Elles sont induites par l'invariance de représentation linéaire  $2 \times 2$  sous une transformation de jauge appropriée.

Ainsi, au système linéaire  $2 \times 2$  (3.31), avec  $P$  et  $Q$  donnés par (3.32), nous associons une évolution temporelle  $2 \times 2$  correspondant à la représentation (3.36). Nous considérons la représentation linéaire

$$\begin{aligned} \Phi_u &= P(\omega)\Phi, \\ \Phi_v &= Q(\omega)\Phi, \\ \Phi_t &= R(\omega)\Phi, \end{aligned} \tag{3.63}$$

où, puisque

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = -aL_3 + bL_2 - cL_1,$$

sous la correspondance  $e_k \leftrightarrow L_k$ , nous obtenons

$$R(\omega) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ia & -b + ic \\ b + ic & -ia \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

avec  $a = a(\omega)$ ,  $b = b(\omega)$  et  $c = c(\omega)$ .

L'introduction de la transformation de jauge  $\Phi' = H\Phi$ , à l'intérieur de (3.63), donne

$$\begin{aligned} \Phi'_u &= P'\Phi', \\ \Phi'_v &= Q'\Phi', \\ \Phi'_t &= R'\Phi', \end{aligned} \quad (3.65)$$

où

$$\begin{aligned} P' &= (H_u + HP)H^{-1}, & Q' &= (H_v + HQ)H^{-1}, \\ R' &= (H_t + HR)H^{-1}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Un trièdre orthonormé  $\{A', B', C'\}$ , où  $A' = r'_u$ ,  $B' = -A' \times N'$  et  $C' = N'$  sont donnés, à leur tour, par (2.40), (2.41) et (2.43), est maintenant introduit sur la transformée de Bäcklund  $\Sigma'$  de la surface  $\Sigma$ . Si  $\Psi$  est la matrice avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  comme lignes, et  $\Psi'$  est la matrice primée correspondante, alors, en utilisant (2.54), on démontre facilement que

$$\Psi' = \Lambda\Psi, \quad (3.67)$$

où la matrice de transformation  $\Lambda$  est donnée par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{\rho}\beta \sin^2 \phi & \frac{L\beta}{\rho} \sin \phi \cos \phi & \frac{L}{\rho} \sin \phi \\ \frac{L\beta}{\rho} \sin \phi \cos \phi & 1 - \frac{L}{\rho}\beta \cos^2 \phi & -\frac{L}{\rho} \cos \phi \\ -\frac{L}{\rho} \sin \phi & \frac{L}{\rho} \cos \phi & 1 - \frac{L\beta}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

avec  $\phi = (\omega + \omega')/2$ .

Puisque,  $\Psi, \Psi' \in SO(3)$ , il s'en suit que  $\Lambda \in SO(3)$ , c'est-à-dire,

$$\Lambda^T \Lambda = I, \quad \det \Lambda = 1. \quad (3.69)$$

En terme géométrique, ces relations sont juste une conséquence de l'observation que n'importe quels deux trièdres orthonormés et positivement orientés sont reliés par une rotation.

L'utilisation des isomorphismes  $su(2) - so(3)$  délivre une matrice de transformation  $SU(2)$  correspondant à  $\Lambda$ , explicitement

$$H = (1 + \beta)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & -i\beta e^{-i\phi} \\ -i\beta e^{i\phi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

La transformation de jauge particulière

$$\Phi' = H(\phi, \beta)\Phi \quad (3.71)$$

avec  $H$  donné par (3.70) agit sur la représentation linéaire  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} \Phi_u &= P(\omega)\Phi, \\ \Phi_v &= Q(\omega)\Phi, \end{aligned}$$

pour produire

$$\begin{aligned} \Phi'_u &= P'(\omega)\Phi', \\ \Phi'_v &= Q'(\omega)\Phi'. \end{aligned}$$

Cette transformation de jauge dépendant de  $\beta$  constitue une transformation matricielle de Dardoux prototypicale. Au niveau non-linéaire, elle induit l'auto-transformation de Bäcklund (2.49) pour l'équation de sine-Gordon (2.27).

Dans le contexte présent, avec l'évolution temporelle accolée (3.63 :4), le paramètre de Bäcklund  $\beta$  peut dépendre de  $t$  dans (3.70). L'utilisation de la dernière expression prise avec (3.64) montre que

$$\begin{aligned} R' &= H_t H^{-1} + H R H^{-1} = H_t H^\dagger + H R H^\dagger \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ia' & -b' + ic' \\ b' + ic' & -ia' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.72)$$

où  $H^\dagger = \bar{H}^\top$  et

$$\begin{aligned} a' &= a - \frac{2\beta}{1+\beta^2} [\beta(a + \phi_t) + (b \cos \phi + c \sin \phi)], \\ b' &= b + \frac{2\beta}{1+\beta^2} [\beta(a + \phi_t) \cos \phi + \dot{\beta} \sin \phi - \beta^2 \cos \phi (b \cos \phi + c \sin \phi)], \\ c' &= c + \frac{2\beta}{1+\beta^2} [\beta(a + \phi_t) \sin \phi - \dot{\beta} \cos \phi - \beta^2 \sin \phi (b \cos \phi + c \sin \phi)]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Un ensemble  $\{a, b, c\}$  particulier associé aux équations non-linéaires compatibles avec l'équation de sine-Gordon peut maintenant être inséré dans (3.73) pour générer une auto-transformation de Bäcklund.

**1. Le système de Weingarten.** Pour le système de Weingarten (3.60), avec  $\{l, m, n\}$  donné par (3.59), les relations (3.43)-(3.45) montrent que

$$\{a, b, c\} = \left\{ -\frac{\omega_t}{2}, \frac{\rho}{2}\omega_{ut}, \frac{\rho}{2}(\omega_{vt} \csc \omega - \omega_{ut} \cot \omega) \right\}. \quad (3.74)$$

De manière à ce que la condition d'invariance

$$R' = R'(\omega) \quad (3.75)$$

soit satisfaite, il est nécessaire que, sur la substitution de (3.74) dans (3.73 :1),

$$\begin{aligned} \omega'_t &= \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \omega_t \\ &+ \frac{2\rho\beta}{1 - \beta^2} \csc \left[ \omega_{vt} \sin \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right) - \omega_{ut} \sin \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

La dernière relation et les relations de Bäcklund classiques (2.49), prises avec les équations constituantes du système de Weingarten (3.60), montrent que les conditions résiduelles (3.73 :2 et 3) sont satisfaites modulo

$$\frac{\dot{\beta}}{\beta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} \left( \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} \right), \quad (3.77)$$

d'où

$$\beta(t) = k\rho(t) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 1/(k^2\rho^2(t))} \right], \quad (3.78)$$

où  $k$  est une constante d'intégration arbitraire, ici prise comme étant non nulle. Il faut noter que la relation (3.78), laquelle détermine le paramètre de Bäcklund  $\beta(t)$  pour une évolution temporelle arbitraire de la courbure de Gauss  $\mathcal{K} = -1/\rho^2(t) < 0$ , est consistante avec la relation (2.37), où  $k = 1/L$ .

Ce n'est maintenant qu'une routine de démontrer que les relations de Bäcklund classiques (2.49) et la relation (3.76) sont compatibles modulo le système de Weingarten (3.60). Ainsi, l'auto-transformation de Bäcklund suivante, pour le système de Weingarten, a été établie :

**Théorème 3.1** *Le système de Weingarten (3.60) est invariant sous la transformation de Bäcklund*

$$\begin{aligned} \omega'_u &= \omega_u + \frac{2\beta}{\rho} \sin \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right), \\ \omega'_v &= -\omega_v + \frac{2}{\beta\rho} \sin \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right), \\ \omega'_t &= \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \omega_t \\ &+ \frac{2\rho\beta}{1 - \beta^2} \csc \omega \left[ \omega_{vt} \sin \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right) - \omega_{ut} \sin \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ici,  $\mathcal{K} = -1/\rho^2(t)$  et  $\beta = \beta(t)$  est lié à  $\rho(t)$  par (3.78).

**2. Un système pour un réseau anharmonique.** Pour le système (3.56), en posant  $\zeta = 3/(2\rho^2)$ , les relations (3.43)-(3.45) donnent

$$\{a, b, c\} = \left\{ \frac{\omega_u}{2\rho} - \omega_t + \delta\rho\omega_v, \quad \frac{\omega_{uu}}{2} + \delta \sin \omega, \quad \frac{\omega_u^2}{4} - \frac{1}{2\rho^2} - \delta \cos \omega \right\}, \quad (3.80)$$

tandis que  $\dot{\rho} = 0$  et  $\dot{\beta} = 0$ . La condition (3.75) exige, sur la substitution des relations (3.80) dans (3.73 :1), que

$$\begin{aligned} \omega'_t = \omega_t + \frac{\beta^2}{\rho}\omega_u + \beta\omega_{uu} \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) + \left(\frac{\beta}{2}\omega_u^2 + \frac{\beta^3}{\rho^2}\right) \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \\ + \delta \left[ -2\rho\omega_v + \frac{2}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.81)$$

pris avec les relations de Bäcklund (2.49) où  $\omega = \omega(u, v, t)$ ,  $\omega' = \omega(u, v, t)$ . En effet, le résultat qui suit peut être vérifié.

**Théorème 3.2** *Le système*

$$\begin{aligned} \omega_t &= \frac{\rho}{2}\omega_{uuu} + \frac{\rho}{4}\omega_y^3 + \delta\rho\omega_v, \\ \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \sin \omega, \end{aligned} \quad (3.82)$$

*est invariant sous la transformation de Bäcklund*

$$\begin{aligned} \omega'_u &= \omega_u + \frac{2\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right), \\ \omega'_v &= -\omega_v + \frac{2}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right), \\ \omega'_t &= \omega_t + \frac{\beta^2}{\rho}\omega_u + \beta\omega - uu \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) + \left(\frac{\beta}{2}\omega_u^2 + \frac{\beta^3}{\rho^2}\right) \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \\ &\quad + \delta \left[ -2\rho\omega_v + \frac{2}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ici,  $\dot{\rho} = \dot{\beta} = 0$ .

Il a été observé que la partie spatiale de la transformation de Bäcklund (3.83) coïncide avec la transformation de Bäcklund  $\mathbb{B}_\beta$  donnée par (2.49) pour l'équation de sine-Gordon classique. Ceci suggère que le théorème de permutabilité (2.64) associé avec  $\mathbb{B}_\beta$  peut aussi s'appliquer aux deux systèmes (3.60) et (3.82). En effet, il s'avère que ce principe de superposition non-linéaire est générique à tous les systèmes intégrables compatibles avec l'équation de sine-Gordon classique en ce sens qu'ils dérivent des mouvements compatibles

de surfaces pseudosphériques. En particulier, dans l'application du théorème de permutabilité pour le système de Weingarten, les paramètres de Bäcklund  $\beta_i$  sont indépendants du temps et donnés par

$$\beta_i(t) = k_i \rho(t) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 1/(k_i^2 \rho^2(t))} \right]$$

pour la courbure totale spécifique  $\mathcal{K} = -1/\rho^2(t)$ .

Le théorème de permutabilité (2.64) a été exploité par Konno et Sanuki [15] pour générer des solutions *kink* et solitonique du système hybride (3.57).

**3. L'équation de potentiel mKdV.** On remarque que la spécialisation  $\delta = 0$  dans (3.83) produit l'auto-transformation de Bäcklund habituelle donnée par (3.83 :1 et 3) pour l'équation de potentiel mKdV

$$\omega_t = \frac{\rho}{2} \omega_{uuu} + \frac{\rho}{4} \omega_u^3 \quad (3.84)$$

et de ce fait pour l'équation mKdV (3.58). Les solutions multi-solitoniques de l'équation mKdV ont été construites, par Wadati [46], pour un réseau non-linéaire décrit, dans l'approximation continue des grandes longueurs d'onde, par une équation combinée mKdV-KdV.

Les relations (3.55) avec  $\delta = 0$  et  $\zeta = 3/(2\rho^2)$  établissent que l'équation de potentiel mKdV peut être associée avec le mouvement d'une surface pseudosphérique  $\Sigma$  avec courbure totale  $\mathcal{K} = -1/\rho^2$  et vitesse

$$v = \left( \rho \left[ \frac{\omega_u^2}{4} - \frac{3}{2\rho^2} \right], -\rho \frac{\omega_{uu}}{2}, \omega_u \right). \quad (3.85)$$

Il est intéressant de noter que la composante binormale de  $\omega_u$  de la vitesse de propagation de  $\Sigma$  est gouvernée par l'équation mKdV.

## Chapitre 4

# Étude des symétries et des solutions explicites aux E.D.P.

Le sujet principal du présent chapitre constitue l'utilisation des symétries et de leurs généralisations dans l'obtention de solutions explicites aux équations aux dérivées partielles. Tout d'abord, nous effectuons une révision des points cruciaux de la théorie de Lie sur les groupes de symétrie des équations différentielles. Pour une étude détaillée voir [19] et [31].

### 4.1 Symétries des équations différentielles

Nous représentons par

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m \quad (4.1)$$

un système d'équation aux dérivées partielles d'ordre  $n$  en  $p$  variables indépendantes et  $q$  variables dépendantes. Dans l'équation (4.1),  $u^{(n)}$  représente une dépendance sur les variables dépendantes  $u$  ainsi que sur leurs dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à  $n$ . Nous entendons par une symétrie du système (4.1) une transformation qui modifie les solutions de ce système de sorte qu'elles restent des solutions.

**Définition 4.1 :** *Un groupe de Lie local de transformations  $G$  est dit un groupe de symétrie du système d'équations différentielles partielles (4.1) si  $\bar{f} = g \cdot f$ , où  $g \in G$ , est une solution lorsque que  $f$  en est une.*

Dans le reste de la discussion, nous allons considérer le groupe de transformations  $G$  comme étant connexe. Nous excluons donc les groupes de symétries discrètes, car on ne peut les déterminer à l'aide de la technique infinitésimale que nous allons décrire. Le fait que  $G$  soit connexe implique qu'il suffit de travailler avec les générateurs infinitésimaux

associés. Ces derniers forment une algèbre de Lie de champs de vecteurs

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (4.2)$$

dans l'espace des variables indépendantes et dépendantes. On obtient, à partir de (4.2), les transformations du groupe  $G$  par la procédure d'exponentiation. Le groupe à un paramètre  $G = \{g_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathbb{R}\}$  qui est généré à partir de cette procédure est donc la solution  $g_\varepsilon \cdot (x_0, u_0) = (x(\varepsilon), u(\varepsilon))$  du système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x, u), \quad \frac{du^\alpha}{d\varepsilon} = \varphi^\alpha(x, u), \quad (4.3)$$

déterminée en utilisant les conditions initiales  $(x_0, u_0)$  à  $\varepsilon = 0$ .

L'effet des transformations de  $G$  se situe au niveau des fonctions  $u = f(x)$ . Cet effet se répercute aussi au niveau des dérivées de ces fonctions, ce qui induit les transformations prolongées. Étant donné la complexité de la formule pour de telles transformations prolongées, nous allons préférer les générateurs infinitésimaux prolongés puisqu'il est plus simple de travailler avec eux. Ces derniers sont les champs de vecteurs

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\#J \leq n} \varphi_J^\alpha(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}, \quad (4.4)$$

dans l'espace des variables indépendantes, dépendantes et des dérivées de ces dernières jusqu'à l'ordre  $n$ . À l'intérieur de l'équation (4.4), les dérivées sont notées  $u_J^\alpha = \partial^J u^\alpha / \partial x^J$ , où  $J = (j_1, \dots, j_p)$ ,  $1 \leq j_\nu \leq n$ . Ici,  $j_\nu$  est l'ordre de la dérivation par rapport à la  $\nu^{\text{ième}}$  variable indépendante,  $x_\nu$ . Notez que  $u_{j,i}^\alpha = \partial_{x_i} u_{j,i}^\alpha$ . Les coefficients  $\varphi_J^\alpha$  de  $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$  sont donnés par la formule explicite

$$\varphi_J^\alpha = D_J Q^\alpha + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \quad (4.5)$$

en terme des coefficients  $\xi^i$ ,  $\varphi^\alpha$  du champ de vecteurs original (4.2). Dans l'équation (4.5),  $D_J = D_1^{j_1} D_2^{j_2} \dots D_p^{j_p}$ , où  $D_\nu$  représente la dérivée totale par rapport à la variable indépendante  $x_\nu$  et est donnée par la formule

$$D_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\#J \leq n} u_{J,\nu}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha}. \quad (4.6)$$

Dans les équations (4.4) et (4.6),  $\sum_{\#J \leq n}$  signifie que l'on somme sur les combinaisons de  $j_\nu$  telles que  $j_1 + j_2 + \dots + j_p \leq n$ . Les  $Q^\alpha$  sont donnés par

$$Q^\alpha(x, u^{(1)}) = \varphi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \dots, q. \quad (4.7)$$

L'ensemble des  $q$  fonctions  $Q^\alpha$  est appelé la caractéristique du champ de vecteurs (4.2).

**Théorème 4.3 :** *Un groupe de transformations connexe  $G$  est un groupe de symétrie du système (non-dégénéré) d'équations différentielles (4.1) si et seulement si le critère de symétrie infinitésimal*

$$\text{pr}^n \mathbf{v}(\Delta_\nu) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad \text{quand } \Delta = 0, \quad (4.8)$$

est satisfait pour tout générateur infinitésimal  $\mathbf{v}$  de  $G$ .

On appelle (4.8) les équations déterminantes du groupe de symétrie pour le système. On détermine le groupe de symétrie du système (4.1) en résolvant le système linéaire sur-déterminé d'E.D.P. pour les coefficients  $\xi^i$  et  $\varphi^\alpha$  de  $\mathbf{v}$  que forment les équations (4.8) et en résolvant ensuite le système (4.3).

À titre d'exemple, considérons le cas où le nombre de variables indépendantes et dépendantes sont respectivement  $p = 2$  et  $q = 1$  dans le système (4.1). De plus, supposons que le système est d'ordre 2. On obtient donc, de l'équation (4.2), que le champ de vecteurs peut s'écrire

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4.9)$$

Ainsi la prolongation du champ de vecteurs (4.9) est

$$\text{pr}^{(2)} \mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}. \quad (4.10)$$

Les coefficients de (4.10) sont alors les suivants :

$$\varphi^x = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t \quad (4.11)$$

$$\varphi^t = \varphi_t + (\varphi_u - \tau_t) u_t - \xi_t u_x - \tau_u u_t^2 - \xi_u u_x u_t \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{xx} = & \varphi_{xx} + (2\varphi_{ux} - \xi_{xx}) u_x + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - \xi_{uu} u_x^3 \\ & + (\varphi_u - 2\xi_x) u_{xx} - \tau_{xx} u_t - 2\tau_x u_{xt} - 2\tau_{xu} u_x u_t - \tau_{uu} u_x^2 u_t \\ & - 2\tau_u u_t u_{xt} - \tau_u u_t u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^{xt} = & \varphi_{xt} + (\varphi_{tu} - \xi_{xt}) u_x + (\varphi_{xu} - \tau_{xt}) u_t + (\varphi_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu}) u_x u_t \\
 & - \xi_{tu} u_x^2 - \tau_{xu} u_t^2 - \xi_{uu} u_x^2 u_t - \tau_{uu} u_x u_t^2 + (\varphi_u - \xi_x - \tau_t) u_{xt} \\
 & - \xi_t u_{xx} - \tau_x u_{tt} - 2\xi_u u_x u_{xt} - 2\tau_u u_{xt} u_t - \xi_u u_{xx} u_t - \tau_u u_x u_{tt}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi^{tt} = & \varphi_{tt} + (2\varphi_{ut} - \tau_{tt}) u_t - \xi_{tt} u_x + (\varphi_{uu} - 2\tau_{ut}) u_t^2 - 2\xi_{ut} u_x u_t \\
 & - \tau_{uu} u_t^3 - \xi_{uu} u_x u_t^2 + (\varphi_u - 2\tau_t) u_{tt} - 2\xi_t u_{xt} - 3\tau_u u_t u_{tt} \\
 & - 2\xi_u u_t u_{xt} - \xi_u u_{tt} u_x
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Nous allons maintenant présenter quelques exemples pour illustrer la démarche à suivre pour obtenir le groupe de symétrie  $G$  d'un système d'équations différentielles partielles.

**Exemple 4.1** Un exemple classique que l'on retrouve souvent dans la littérature pour illustrer ces techniques est l'équation de chaleur

$$\Delta \equiv u_t - u_{xx} = 0. \tag{4.16}$$

Dans le cas présent les variables indépendantes sont  $x$  et  $t$ , tandis qu'il n'y a qu'une seule variable dépendante, c'est-à-dire  $u$ . Nous avons donc que  $p = 2$  et  $q = 1$  et notre champ de vecteurs est celui donné par l'équation (4.9). L'équation (4.16) est une sous-variété de  $X \times U^{(2)}$ . On a alors  $n = 2$  et la prolongation du champ de vecteurs est donnée par l'équation (4.10). Afin d'obtenir les générateurs infinitésimaux, il faut déterminer les fonctions  $\xi, \tau$  et  $\varphi$  en résolvant le système sur-déterminé (4.8). Pour ce faire, on commence par appliquer la prolongation du champ de vecteurs (l'équation (4.9) à l'équation de chaleur (4.16). On obtient ainsi que le critère infinitésimal de symétrie est

$$\varphi^t - \varphi^{xx} = 0. \tag{4.17}$$

En substituant les coefficients (4.12) et (4.13) dans l'équation (4.17) et en éliminant les dérivées par rapport au temps à l'aide de l'équation (4.16), on obtient

$$\begin{aligned}
 \varphi_t - \varphi_{xx} - (2\varphi_{ux} - \xi_{xx} + \xi_t) u_x - (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} \\
 + (2\tau_{xu} + 2\xi_u) u_x u_{xx} + (\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x) u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xt} + \tau_x u_{xt} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

On exige que les coefficients des dérivées partielles de  $u$  s'annulent, ce qui nous donne un système à résoudre. À partir des coefficients des deux derniers termes de l'équation (4.18), on conclut que  $\tau = \tau(t)$ . La dérivée mixte de  $\tau$  présente dans le coefficient de  $u_x u_{xx}$  est nulle, donc  $\xi_u = 0$  et nous pouvons affirmer que  $\xi = \xi(x, t)$ . Du coefficient de  $u_{xx}$ , on a que

$$2\xi_x = \tau_t. \tag{4.19}$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à  $x$ , on trouve que  $\xi_{xx} = 0$  ce qui implique que  $\xi$  est au plus linéaire en  $x$ , c'est-à-dire que

$$\xi = \frac{\tau}{2} x + \eta(t). \tag{4.20}$$

Puisque  $\xi$  ne dépend pas de  $u$ , le coefficient de  $u_x^2$  nous indique que  $\varphi_{uu} = 0$  et donc que  $\varphi$  est au plus linéaire en  $u$ , ainsi nous pouvons écrire

$$\varphi = \alpha(x, t)u + \beta(x, t). \quad (4.21)$$

La différence des deux premiers termes de l'équation (4.18) doit être nulle, car ce sont les seuls termes n'étant pas des coefficients de dérivées partielles de  $u$ . Ainsi, en se servant de (4.21), on trouve que

$$\alpha_t u + \beta_t - \alpha_{xx} u - \beta_{xx} = 0. \quad (4.22)$$

L'équation (4.22) ne peut être respectée que si

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0 \quad (4.23)$$

et

$$\beta_t - \beta_{xx} = 0. \quad (4.24)$$

Du coefficient de  $u_x$ , en considérant (4.21) et (4.20), on a que

$$2\alpha_x + \frac{\tau_{tt}}{2}x + \eta_t = 0. \quad (4.25)$$

En intégrant par rapport à  $x$ , on obtient

$$\alpha = -\frac{\tau_{tt}}{8}x^2 - \frac{\eta_t}{2}x + \gamma(t). \quad (4.26)$$

En substituant (4.26) dans (4.23), on trouve

$$\frac{\tau_{ttt}}{8}x^2 + \frac{\eta_{tt}}{2}x - \gamma_t = \frac{\tau_{tt}}{4}.$$

Pour que la dernière équation soit vraie pour n'importe quelle valeur de  $x$  et de  $t$ , il faut que  $\tau_{ttt} = 0$ ,  $\eta_{tt} = 0$  et  $-\gamma_t = \tau_{tt}/4$ . On peut donc écrire

$$\tau = 4c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3 \quad (4.27)$$

et

$$\eta = 2c_4 t + c_5. \quad (4.28)$$

Ainsi,

$$\gamma = -2c_1 t + c_6. \quad (4.29)$$

Finalement, la solution la plus générale est

$$\begin{aligned} \xi &= 4c_1 x t + c_2 x + 2c_4 t + c_5 \\ \tau &= 4c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3 \\ \varphi &= (-c_1 x^2 - c_4 x - 2c_1 t + c_6) u + \beta(x, t), \end{aligned} \quad (4.30)$$

où  $\beta(x, t)$  est soumis à la condition  $\beta_t = \beta_{xx}$  et les coefficients  $c_i$  sont arbitraires. Ainsi le champ de vecteurs  $\mathbf{v}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & (4c_1xt + c_2x + 2c_4t + c_5) \frac{\partial}{\partial x} + (4c_1t^2 + 2c_2t + c_3) \frac{\partial}{\partial t} \\ & + ((-c_1x^2 - c_4x - 2c_1t + c_6)u + \beta(x, t)) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Nous avons donc une algèbre de Lie des symétries infinitésimales de l'équation de chaleur générée par les champs de vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (4xt + 4t) \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u} & (c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 0) \\ \mathbf{v}_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} & (c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 0) \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\partial}{\partial t} & (c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 0) \\ \mathbf{v}_4 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} & (c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = 0, c_6 = 0) \\ \mathbf{v}_5 &= \frac{\partial}{\partial x} & (c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 1, c_6 = 0) \\ \mathbf{v}_6 &= u \frac{\partial}{\partial u} & (c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 1), \end{aligned} \quad (4.32)$$

et la sous-algèbre de dimension infinie

$$\mathbf{v}_\beta = \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u},$$

où  $\beta$  est une solution arbitraire de l'équation de chaleur, c'est-à-dire soumise à la condition (4.24). Du dernier générateur  $\mathbf{v}_\beta$ , on conclut que l'équation de chaleur admet un principe de superposition des solutions. Les groupes de symétrie à un paramètre  $G_i$  générés par les  $v_i$  sont

$$\begin{aligned} G_1 : & (x, t, u) \mapsto \left( \frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon t}, u\sqrt{1-4\epsilon t} \exp \left\{ \frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t} \right\} \right), \\ G_2 : & (x, t, u) \mapsto (e^\epsilon x, e^{2\epsilon} t, u), \\ G_3 : & (x, t, u) \mapsto (x, t + \epsilon, u), \\ G_4 : & (x, t, u) \mapsto (x + 2\epsilon t, t, u \cdot \exp(-\epsilon x - \epsilon^2 t)), \\ G_5 : & (x, t, u) \mapsto (x + \epsilon, t, u), \\ G_6 : & (x, t, u) \mapsto (x, t, e^\epsilon u), \\ G_\beta : & (x, t, u) \mapsto (x, t, u + \epsilon \beta(x, t)). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Ainsi, si  $u = f(x, t)$  est une solution de l'équation de chaleur, alors les solutions suivantes le sont aussi.

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}} \exp\left\{\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right\} f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right) \\
 u^{(2)} &= f(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t) \\
 u^{(3)} &= f(x, t - \varepsilon) \\
 u^{(4)} &= e^{-\varepsilon x + \varepsilon^2 t} f(x - 2\varepsilon t, t) \\
 u^{(5)} &= f(x - \varepsilon, t) \\
 u^{(6)} &= e^\varepsilon f(x, t) \\
 u^{(\beta)} &= f(x, t) + \varepsilon\beta(x, t)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Puisque chaque groupe de transformation modifie une solution de sorte qu'elle soit toujours une solution après la transformation, il est légitime de prendre une composition des transformations des  $G_i$ . Ainsi, la solution la plus générale que l'on puisse obtenir des groupes de transformations à un paramètre est

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon_1 t}} \exp\left\{\varepsilon_6 - \frac{\varepsilon_4 x + \varepsilon_1 x^2 - \varepsilon_4^2 t}{1+4\varepsilon_1 t}\right\} f\left(\frac{e^{-\varepsilon_2}(x - 2\varepsilon_4 t)}{1+4\varepsilon_1 t} - \varepsilon_5, \frac{e^{-2\varepsilon_2 t}}{1+4\varepsilon_1 t} - \varepsilon_3\right). \tag{4.35}$$

**Exemple 4.2 :** Intéressons nous maintenant à l'équation de Boussinesq

$$u_{tt} + uu_{xx} + u_x^2 + u_{xxxx} = 0 \tag{4.36}$$

apparaissant dans le traitement de la propagation d'ondes solitaires unidirectionnelles en eau peu profonde, [2]. Nous avons, comme pour l'équation de chaleur, deux variables indépendantes  $x$  et  $t$ , et une variable dépendante  $u$ . Toutefois, l'équation (4.36) est ici une sous-variété dans  $X \times U^{(4)}$  plutôt que dans  $X \times U^{(2)}$  comme dans l'exemple de l'équation de chaleur. Ainsi,  $p = 2$ ,  $q = 1$  et  $n = 4$ . Le champ de vecteur, ici, est aussi donné par l'équation (4.9). La prolongation sera quant à elle similaire à l'équation (4.10), mais avec davantage de termes de manière à inclure les dérivées partielles d'ordre inférieur et égal à quatre. Le critère de symétrie est obtenu en faisant agir la quatrième prolongation du champ de vecteurs (4.9) sur l'équation (4.36). Nous obtenons

$$\varphi^{tt} + u\varphi^{xx} + u_{xx}\varphi + 2u_x\varphi^x + \varphi^{xxxx} = 0, \tag{4.37}$$

où les coefficients  $\varphi^x, \varphi^{xx}, \varphi^{tt}$  sont donnés respectivement par les équations (4.11),(4.13),(4.15), tandis que

$$\begin{aligned}
 \varphi^{xxxx} = & \varphi_{xxxx} + (4\varphi_{xxxu} - \xi_{xxxx})u_x + (4\varphi_{xxuu} - 4\xi_{xxxu})u_x^2 + (4\varphi_{xuuu} - 6\xi_{xxuu})u_x^3 \\
 & + (\varphi_{uuuu} - 4\xi_{xuuu})u_x^4 - \xi_{uuuu}u_x^5 + (6\varphi_{xxu} - 4\xi_{xxx})u_{xx} + (\varphi_u - 4\xi_x - \xi_u)u_{xxx} \\
 & + (3\varphi_{uu} - 12\xi_{xu})u_{xx}^2 + (4\varphi_{xu} - 6\xi_{xx})u_{xxx} - \tau_{xxxx}u_t - 4\tau_{xxx}u_{xt} - 6\tau_{xx}u_{xxt} \\
 & - (\tau_u + 4\tau_x)u_{xxt} + (12\varphi_{xuu} - 18\xi_{xxu})u_x u_{xx} + (6\varphi_{uuu} - 25\xi_{xuu})u_x^2 u_{xx} \\
 & - 10\xi_{uuu}u_x^3 u_{xx} - 15\xi_{uu}u_x u_{xx}^2 + (4\varphi_{uu} - 16\xi_{xu})u_x u_{xxx} - 10\xi_{uu}u_x^2 u_{xxx} \\
 & - 4\xi_u u_x u_{xxx} - 10\xi_u u_{xx} u_{xxx} - 4\tau_{xxxu}u_x u_t - 6\tau_{xxuu}u_x^2 u_t - 4\tau_{xuuu}u_x^3 u_t - \tau_{uuuu}u_x^4 u_t \\
 & - 6\tau_{xxu}u_{xx}u_t - 3\tau_{uu}u_{xx}^2 u_t - 4\tau_{xu}u_{xxx}u_t - \tau_u u_{xxx}u_t - 12\tau_{xuu}u_x u_{xt} - 6\tau_{xuu}u_x^2 u_{xt} \\
 & - (6\tau_{xuu} + 4\tau_{uuu})u_x^3 u_{xt} - 12\tau_{xu}u_{xx}u_{xt} - 4\tau_u u_{xxx}u_{xt} - 12\tau_{xu}u_x u_{xxt} - 6\tau_{uu}u_x^2 u_{xxt} \\
 & - 6\tau_u u_{xx}u_{xxt} - 3\tau_u u_x u_{xxx} - 12\tau_{xuu}u_x u_{xx}u_t - 6\tau_{uuu}u_x^2 u_{xx}u_t \\
 & - 4\tau_{uu}u_x u_{xx}u_t - 12\tau_{uu}u_x u_{xx}u_{xt}.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Les équations (4.37) et (4.36) forment ensemble le système sur-déterminé, correspondant au système (4.8), qu'il faut résoudre, après quoi on obtient les générateurs infinitésimaux

$$\mathbf{v}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{v}_2 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_3 = x\partial_x + 2t\partial_t - 2u\partial_u. \tag{4.39}$$

Les symétries données par ces générateurs sont des translations et des changements d'échelles plutôt triviaux. Le théorème 4.3 nous assure que ce sont les seules symétries de l'équation de Boussinesq.

**Exemple 4.3 :** Nous allons à présent trouver les symétries de l'équation suivante :

$$\Delta \equiv u_t - \exp(-u)b(u_{xt}) = 0, \tag{4.40}$$

où  $b(u_{xt})$  est une fonction indéterminée. On constate que l'équation (4.40) est d'ordre deux. De plus, elle est formée de deux variables indépendantes, c'est-à-dire  $x$  et  $t$ , et d'une variable dépendante  $u$ . Notre champ de vecteurs est donc celui de l'équation (4.9) et ainsi la seconde prolongation est donnée par (4.10). En appliquant la prolongation (4.10) à l'équation (4.40), on obtient son critère de symétrie, qui est

$$\varphi e^{-u}b(u_{xt}) + \varphi^t - e^{-u}\varphi^{xt}b'(u_{xt}) = 0, \tag{4.41}$$

quand l'équation (4.40) est respectée. Les coefficients  $\varphi^i$  nécessaires sont évidemment donnés par les équations (4.12) et (4.14). En introduisant ces coefficients dans l'équation (4.41) et en substituant les valeur de  $u_t$  par  $\exp^{-u} b(u_{xt})$  (puisque l'équation (4.40) doit

être respectée) on obtient, après quelques manipulations,

$$\begin{aligned}
 & (-\xi_t - \xi_u e^{-u} b - (\varphi_{tu} - \xi_{xt}) e^{-u} b' - (\varphi_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu}) e^{-2u} b b' + \tau_{uu} e^{-3u} b^2 b') u_x \\
 & + (\xi_{tu} e^{-u} b' + \xi_{uu} e^{-2u} b b') (u_x)^2 + (-e^{-u} (\varphi_u - \xi_x - \tau_t) b' + 2e^{-2u} \tau_u b b') u_{xt} \\
 & + (\xi_u e^{-2u} b b' + \xi_t e^{-u} b') u_{xx} + \tau_x e^{-u} b' u_{tt} + 2\xi_u e^{-u} b' u_x u_{xt} + \tau_u e^{-u} b' u_x u_{tt} \\
 & + \varphi e^{-u} b + \varphi_t + (\varphi_u - \tau_t) e^{-u} b - \tau_u e^{-2u} b^2 - \varphi_{xt} e^{-u} b' - (\varphi_{xu} - \tau_{xt}) e^{-2u} b b' \\
 & + \tau_{xu} e^{-3u} b^2 b' = 0
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

On exige, comme dans les exemples précédents, que les coefficients des différentes dérivées partielles de  $u$  s'annulent, ce qui nous donne un système d'équations différentielles partielles à résoudre. Le coefficient du terme en  $u_{tt}$  et celui du terme en  $u_x u_{tt}$  nous permettent de conclure que

$$\tau = \tau(t). \tag{4.43}$$

De même, les coefficients du terme en  $u_x u_{xt}$  et celui du terme en  $u_{xx}$  nous permettent de conclure que

$$\xi = \xi(x). \tag{4.44}$$

On peut dès lors réduire le système, de sorte qu'il devient

$$-\varphi_{tu} - \varphi_{uu} e^{-u} b = 0, \tag{4.45}$$

$$\varphi_u - \xi_x - \tau_t = 0, \tag{4.46}$$

$$\varphi e^{-u} b + \varphi_t + (\varphi_u - \tau_t) e^{-u} b - \varphi_{xt} e^{-u} b' - \varphi_{xu} e^{-2u} b b' = 0. \tag{4.47}$$

Puisque  $\tau = \tau(t)$  et  $\xi = \xi(x)$ , l'intégration par rapport à  $u$  de l'équation (4.46) donne

$$\varphi = (\xi_x + \tau_t) u + \beta(x, t), \tag{4.48}$$

où  $\beta$  est une fonction pour l'instant indéterminée. En conséquence de (4.48), nous avons que  $\varphi_{uu} = 0$ . En considérant ce résultat, nous avons de l'équation (4.45) que  $\varphi_{tu} = 0$ . En prenant la dérivée seconde mixte par rapport à  $t$  et à  $u$  de l'équation (4.48), nous trouvons que  $\tau_{tt} = 0$ . Ainsi, le coefficient  $\tau$  est une fonction linéaire du temps, *i.e.*

$$\tau = c_1 t + c_2, \tag{4.49}$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes arbitraires. En substituant la forme pour le coefficient  $\varphi$  donnée par l'équation (4.48), tout en tenant compte de l'équation (4.49), dans l'équation (4.47), on trouve

$$(((\xi_x + c_1) u + \beta + \xi_x) b - \beta_{xt} b') e^{-u} - \xi_{xx} e^{-2u} b b' + \beta_t = 0. \tag{4.50}$$

En prenant la dérivée seconde mixte  $\partial^2 / \partial t \partial u_{xt}$  de l'équation (4.50), on trouve

$$\beta_t b' + \beta_{xtt} b'' = 0. \tag{4.51}$$

Les deux solutions suivantes sont alors possibles :

- i)  $\beta = \beta(x) \Rightarrow \beta_t = \beta_{xtt} = 0$   
 ii)  $\frac{b''}{b'} = \frac{\beta_{tt}}{\beta_{xtt}} = A$ , où  $A$  est une constante et  $b' \neq 0$ .

Considérons tout d'abord le cas i). Puisque  $\beta$  ne dépend pas de la variable  $t$ , l'équation (4.50) peut se réduire à

$$((\xi_x + c_1)u + \beta + \xi_x) - \xi_{xx}e^{-u}b' = 0. \quad (4.52)$$

En dérivant l'équation (4.52) par rapport à  $u_{xt}$ , nous avons que

$$-\xi_{xx}e^{-u}b'' = 0.$$

Ici encore nous avons deux possibilités.

I)  $b'' \neq 0$

II)  $b'' = 0$ , c'est-à-dire que  $b$  est une fonction linéaire en  $u_{xt}$ .

Considérons le cas I). Puisque  $b'' \neq 0$ , nous avons que  $\xi_{xx}$  et par conséquent que

$$\xi = \tilde{c}x + c_3.$$

En introduisant cette forme pour  $\xi$  dans l'équation (4.52), nous obtenons

$$(\tilde{c} + c_1)u + \beta + \tilde{c} = 0. \quad (4.53)$$

Une conséquence évidente de l'équation (4.53) est que  $\tilde{c} = -c_1$  et que  $\beta = c_1$ . Nous avons donc que tous les coefficients du générateur infinitésimal  $\mathbf{v}$  sont déterminés pour le sous cas I) du cas i). Ceux-ci sont

$$\begin{aligned} \tau &= c_1 t + c_2, \\ \xi &= -c_1 x + c_3, \\ \varphi &= c_1. \end{aligned} \quad (4.54)$$

On se rappelle que pour trouver ces résultats nous avons fait les hypothèses que  $\beta = \beta(x)$  et que  $b'' \neq 0$ . Outre ces dernières hypothèses, aucune restriction ne s'impose sur le choix de la fonction  $b$ . En d'autres termes, la fonction  $b$  est n'importe quelle fonction de  $u_{xt}$  qui n'est aucune de ces trois types :

- fonction nulle,
- fonction constante,
- fonction linéaire.

Pour ce qui est du cas II) la fonction  $b$  est restreinte à être une fonction linéaire de  $u_{xt}$ , i.e.  $b = Au_{xt} + B$ . Si l'on suppose  $A \neq 0$ , nous retrouvons les mêmes valeurs de coefficients que (4.54). Pour ce qui est du cas ii), la fonction  $b$  est restreinte à être une fonction exponentielle. Cette restriction nous conduit rapidement à la condition  $\beta = \beta(x)$ , et ainsi nous nous retrouvons dans un sous cas du cas I) de i) que nous avons calculé en détail précédemment.

En conclusion, la base de générateurs de symétrie de l'équation (4.40), où  $b$  est une fonction totalement arbitraire autre qu'une fonction constante, est la suivante :

$$\begin{aligned} v_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ v_3 &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.55)$$

**Exemple 4.4 :** Nous allons maintenant chercher les symétries de l'équation

$$\Delta \equiv u_t - b(u_{xx}) = 0, \quad (4.56)$$

où  $b(u_{xx})$  est une fonction indéterminée. L'équation (4.56) est d'ordre deux et est formée de deux variables indépendantes, nommément  $x$  et  $t$ , ainsi que d'une variable dépendante,  $u$ . À l'instar des exemples précédents, notre champ de vecteurs est donné par l'équation (4.9) et sa prolongation d'ordre deux donnée par (4.10). En appliquant la deuxième prolongation à l'équation (4.56), on trouve que le critère de symétrie de cette équation est

$$\varphi^t - \varphi_{xx} b'(u_{xx}) = 0, \quad \Delta = 0. \quad (4.57)$$

En substituant les coefficients (4.12) et (4.13) dans l'équation (4.57) et en substituant  $u_t$  par  $b(u_{xx})$  conformément à  $\Delta = 0$ , on obtient, après quelques manipulations, que

$$\begin{aligned} &\xi_{uu} b'(u_{xx}) (u_x)^3 + (\tau_{uu} b'(u_{xx}) b(u_{xx}) - (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) b'(u_{xx})) (u_x)^2 \\ &+ (\tau_u b'(u_{xx}) b(u_{xx}) - (\varphi_u - 2\xi_x) b'(u_{xx})) u_{xx} + 3\xi_u b'(u_{xx}) u_x u_{xx} \\ &+ (2\tau_{xu} b'(u_{xx}) b(u_{xx}) - \xi_t - \xi_u b(u_{xx}) - (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) b'(u_{xx})) u_x \\ &+ 2\tau_u b'(u_{xx}) u_x u_{xt} + 2\tau_x b'(u_{xx}) u_{xt} + \tau_{xx} b'(u_{xx}) b(u_{xx}) \\ &- \tau_u (b(u_{xx}))^2 - \varphi_{xx} b'(u_{xx}) + \varphi_t + (\varphi_u - \tau_t) b(u_{xx}) = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

On détermine les coefficients  $\xi(x, t, u)$ ,  $\tau(x, t, u)$  et  $\varphi(x, t, u)$  du champ de vecteurs en résolvant le système sur-déterminé d'équations aux dérivées partielles obtenu en annulant les coefficients des dérivées partielles dans l'équation (4.58). Du coefficient de  $u_x u_{xx}$  on constate que

$$\xi = \xi(x, t). \quad (4.59)$$

Des coefficients de  $u_x u_{xt}$  et de  $u_{xt}$  on a que

$$\tau = \tau(t). \quad (4.60)$$

En tenant compte de (4.59) et (4.60), le système d'équations aux dérivées partielles se réduit à

$$\varphi_{uu} = 0, \quad (4.61)$$

$$2\xi_x - \varphi_u = 0, \quad (4.62)$$

$$-\xi_t - (2\varphi_{xu} - \xi_{xx})b' = 0, \quad (4.63)$$

$$\varphi_t - \varphi_{xx}b' + (\varphi_u - \tau_t)b = 0. \quad (4.64)$$

De (4.62), on a que

$$\varphi = 2\xi_x u + \beta(x, t), \quad (4.65)$$

où  $\beta(x, t)$  est une fonction à déterminer. L'équation (4.65) satisfait l'équation (4.61). En considérant l'équation (4.65), l'équation (4.63) devient

$$\xi_t + 3\xi_{xxx}b' = 0. \quad (4.66)$$

Toujours en considérant l'équation (4.65), l'équation (4.64) devient

$$2\xi_{xt}u + \beta_t - (2\xi_{xxx}u + \beta_{xx})b' + (2\xi_x - \tau_t)b = 0. \quad (4.67)$$

Le système est à présent formé des équations (4.65), (4.66) et (4.67). Commençons par dériver l'équation (4.66) par rapport à  $u_{xx}$ , ce qui donne

$$3\xi_{xxx}b'' = 0.$$

Il existe deux possibilités faisant en sorte que cette dernière équation soit vérifiée, c'est-à-dire i)  $\xi_{xx} = 0$  ou ii)  $b'' = 0$ .

**cas i) :** En substituant  $\xi_{xx} = 0$  dans l'équation (4.66), on conclut sans peine que  $\xi = \xi(x)$ , et ainsi

$$\xi = c_1 x + c_2. \quad (4.68)$$

On calcule les dérivées de  $\xi$  nécessaire à l'aide de l'équation (4.68) et on les substitue dans l'équation (4.64). On obtient alors

$$\beta_t + \beta_{xx}b' + (2c_1 - \tau_t)b = 0. \quad (4.69)$$

En dérivant la dernière équation par rapport à  $u_{xx}$ , on trouve

$$\beta_{xx}b'' + (2c_1 - \tau_t)b' = 0. \quad (4.70)$$

Dans cette équation le membre de gauche peut s'annuler de différentes manières.

- De manière à ce que la fonction  $b$  reste totalement arbitraire, considérons  $\beta_{xx} = 0$  et  $2c_1 - \tau_t = 0$ . Nous avons immédiatement des conditions que nous imposons que

$$\tau = 2c_1 t + c_3.$$

De l'équation (4.69), on a que  $\beta_t = 0$  et ainsi que

$$\beta = \beta(x).$$

De la conditions  $\beta_{xx} = 0$ , on obtient

$$\beta = c_4x + c_5.$$

Finalement, les coefficients du générateur infinitésimal sont

$$\tau = 2c_1t + c_3,$$

$$\xi = c_1x + c_2,$$

$$\varphi = 2c_1u + c_4x + c_5$$

La base de générateurs de l'équation (4.56) pour une fonction  $b(u_{xx})$  arbitraire est :

$$v_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,$$

$$v_2 = \partial_x,$$

$$v_3 = \partial_t,$$

$$v_4 = x\partial_u,$$

$$v_5 = \partial_u.$$

- Une autre façon que l'équation (4.70) soit vérifiée est la suivante, sous les hypothèses  $b' \neq 0$  et  $\beta_{xx} \neq 0$ , l'équation (4.70) implique

$$\frac{b''}{b'} = \frac{-(2c_1 - \tau_t)}{\beta_{xx}} = A, \tag{4.71}$$

où  $A$  est une constante. En effet, le terme à gauche de la première égalité est fonction de  $u_{xx}$ , tandis que celui à droite est fonction de  $x$  et  $t$ , l'égalité n'est possible que si ces deux termes sont des fonctions constantes. On peut donc écrire

$$\partial_{u_{xx}} \ln b' = A.$$

En intégrant, on obtient que la fonction  $b$  doit être de la forme

$$b = \frac{B}{A} \exp Au_{xx}, \tag{4.72}$$

où  $B$  est une constante d'intégration. En substituant la forme de  $b$  donnée par (4.72) dans l'équation (4.69), on arrive à la conclusion que  $\beta_t = 0$  et donc que  $\beta = \beta(x)$ . L'équation (4.70) peut s'écrire sous la forme

$$2c_1 - \tau_t = -A\beta_{xx}.$$

En dérivant cette équation par rapport à  $t$ , on obtient facilement que

$$\tau = c_3t + c_4.$$

En utilisant ce résultat, on conclut de l'équation (4.70) que

$$\beta = \frac{c_3 - 2c_1}{2A}x^2 + c_5x + c_6.$$

En résumé les coefficients sont

$$\begin{aligned}\tau &= c_3t + c_4, \\ \xi &= c_1x + c_2, \\ \varphi &= 2c_1u + \frac{c_3 - 2c_1}{2A}x^2 + c_5x + c_6.\end{aligned}$$

Les générateurs de symétries de l'équation (4.56) pour une fonction  $b$  donnée par (4.72) sont :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= x\partial_x + \left(2u - \frac{x^2}{A}\right)\partial_u, \\ \mathbf{v}_2 &= \partial_x, \\ \mathbf{v}_3 &= t\partial_t + \frac{x^2}{2A}\partial_u, \\ \mathbf{v}_4 &= \partial_t, \\ \mathbf{v}_5 &= x\partial_u, \\ \mathbf{v}_6 &= \partial_u.\end{aligned}$$

cas ii) : Considérons le cas où  $b'' = 0$ . Ainsi, la fonction  $b$  est une fonction linéaire, c'est-à-dire

$$b = Au_{xx} + B, \quad (4.73)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires. En introduisant cette forme pour  $b$  dans l'équation (4.67), on trouve rapidement les coefficients

$$\begin{aligned}\tau &= 2c_1t + c_3, \\ \xi &= c_1x + c_2, \\ \varphi &= 2c_1u + \beta(x, t),\end{aligned}$$

où  $\beta$  est une solution de l'équation

$$\beta_t = A\beta_{xx}.$$

La base de générateurs associée est :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u, \\ \mathbf{v}_2 &= \partial_x, \\ \mathbf{v}_3 &= \partial_t, \\ \mathbf{v}_\beta &= \beta\partial_u.\end{aligned}$$

**Exemple 4.5 :** Nous terminons cette section avec le calcul des groupes de symétrie de l'équation de Dirac

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - mc\Psi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (4.74)$$

où  $i$  est le nombre imaginaire,  $\hbar = 6,58 \times 10^{-16}$  eV.s,  $m$  est la masse de la particule et  $c$  est la vitesse de la lumière. Les  $\gamma^\mu$  sont les matrices de Dirac, données explicitement à l'équation (4.76), et le symbole  $\Psi$  représente le quadrivecteur des variables dépendantes

$$\Psi = (u^0, u^1, u^2, u^3)^\top. \quad (4.75)$$

L'équation (4.74) sert en fait à la description du comportement relativiste d'un électron libre, puisqu'aucun terme de potentiel n'y apparaît. C'est une équation qui joue un rôle fondamentale en mécanique quantique de l'électron. Elle est dans traité Marchildon [26] ou bien dans Messiah [27]. Les matrices (contravariantes) de Dirac sont

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Une forme équivalente de l'équation de Dirac est

$$\gamma^\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} + A\Psi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (4.77)$$

où  $A = -\frac{mc}{i\hbar}$ . L'équation de Dirac représente donc un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 que l'on peut écrire explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} u_{x^0}^0 + u_{x^1}^3 - iu_{x^2}^3 + u_{x^3}^2 + Au^0 &= 0, \\ u_{x^0}^1 + u_{x^1}^2 + iu_{x^2}^2 - u_{x^3}^3 + Au^1 &= 0, \\ -u_{x^0}^2 - u_{x^1}^1 - iu_{x^2}^1 - u_{x^3}^0 + Au^2 &= 0, \\ -u_{x^0}^3 - u_{x^1}^0 - iu_{x^2}^0 + u_{x^3}^1 + Au^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Le calcul des groupes de symétrie du système (4.78) est très élaboré, c'est pourquoi ne sont présentées que les principales étapes.

Tout d'abord, l'expression du champ de vecteurs (4.2) prend la forme

$$\mathbf{v} = \sum_{\mu=0}^3 \xi^\mu(x, u, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \sum_{\alpha=0}^3 \varphi^\alpha(x, u, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (4.79)$$

où les  $\bar{u}$  représentent les conjuguées complexes des  $u$ . Étant donné que notre système est d'ordre 1, nous allons travailler avec la première prolongation. Celle-ci prend la forme

$$\text{pr}^{(1)}v = v + \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\mu=0}^3 \left( \varphi_{\mu}^{\alpha}(x, u^{(1)}, \bar{u}^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_{\mu}^{\alpha}} \right), \quad (4.80)$$

où

$$\varphi_{\mu}^{\alpha} = D_{\mu}Q^{\alpha} + \sum_{\nu=0}^3 \xi^{\nu} u_{\mu, \nu}^{\alpha}, \quad (4.81)$$

où  $D_{\mu}$  sont les dérivées totales d'ordre 1. Les caractéristiques des champs de vecteurs sont

$$Q^{\alpha} = (x, u^{(1)}, \bar{u}^{(1)}). \quad (4.82)$$

Une fois l'expression pour les caractéristiques (4.82) introduite dans (4.81), et après y avoir explicité l'expression de la dérivée totale  $D_{\mu}$ , l'équation (4.81) s'écrit sous la forme

$$\varphi_{\mu}^{\alpha} = \varphi_{x\mu}^{\alpha} - \sum_{\nu=0}^3 \xi_{\mu}^{\nu} u_{\nu}^{\alpha} + \sum_{\beta=0}^3 (\varphi_{u_{\beta}}^{\alpha} u_{\mu}^{\beta} + \varphi_{\bar{u}_{\beta}}^{\alpha} \bar{u}_{\mu}^{\beta}) - \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 (\xi_{u_{\beta}}^{\nu} u_{\nu}^{\alpha} u_{\mu}^{\beta} + \xi_{\bar{u}_{\beta}}^{\nu} u_{\nu}^{\alpha} \bar{u}_{\mu}^{\beta}) \quad (4.83)$$

En respect avec le théorème 4.3, le critère de symétrie du système (4.78) est

$$\begin{aligned} \varphi^t + \sigma^x - i\sigma^y + \rho^z + A\varphi &= 0, \\ \theta^t + \rho^x + i\rho^y - \sigma^z + A\theta &= 0, \\ -\rho^t - \theta^x + i\theta^y - \varphi^z + A\rho &= 0, \\ -\sigma^t - \varphi^x - i\varphi^y + \theta^z + A\sigma &= 0, \end{aligned} \quad (4.84)$$

où

$$\begin{aligned} u_t^0 &= -u_x^3 + iu_y^3 - u_z^2 - Au^0, \\ u_t^1 &= -u_x^2 - iu_y^2 + u_z^3 - Au^1, \\ u_t^2 &= -u_x^1 + iu_y^1 - u_z^0 + Au^2, \\ u_t^3 &= -u_x^0 - iu_y^0 + u_z^1 + Au^3, \end{aligned} \quad (4.85)$$

dans la nouvelle notation suivante :

$$\begin{aligned} x^0 &= t, & \varphi^0 &= \varphi, & \varphi_0^0 &= \varphi^t, & \varphi_1^0 &= \varphi^x, & \varphi_2^0 &= \varphi^y, & \varphi_3^0 &= \varphi^z, \\ x^1 &= x, & \varphi^1 &= \theta, & \varphi_0^1 &= \theta^t, & \varphi_1^1 &= \theta^x, & \varphi_2^1 &= \theta^y, & \varphi_3^1 &= \theta^z, \\ x^2 &= y, & \varphi^2 &= \rho, & \varphi_0^2 &= \rho^t, & \varphi_1^2 &= \rho^x, & \varphi_2^2 &= \rho^y, & \varphi_3^2 &= \rho^z, \\ x^3 &= z, & \varphi^3 &= \sigma, & \varphi_0^3 &= \sigma^t, & \varphi_1^3 &= \sigma^x, & \varphi_2^3 &= \sigma^y, & \varphi_3^3 &= \sigma^z. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Il s'agit maintenant d'éliminer des dérivées par rapport à  $t$  des  $u^{\alpha}$  de l'équation (4.84) à l'aide de l'équation (4.85), ensuite expliciter les coefficients  $\varphi^t$ ,  $\sigma^x$ , etc. et regrouper les termes de mêmes puissance de  $u^{\alpha}$ ,  $u_{\mu}^{\alpha}$ ,  $u^{\alpha}u_{\mu}^{\beta}$ , etc., et puis exiger que les coefficients de ces différentes puissances soient nuls. Le système ainsi formé doit être résolu pour les coefficients du champ de vecteur (4.79). Par exemple, le coefficient  $\varphi^t$  de la première

équation de (4.84) dans lequel les dérivées par rapport à  $t$  sont éliminées à l'aide de (4.85) prend la forme

$$\begin{aligned}
 \varphi^t &= \varphi_t - \sum_{\beta=0}^3 A(-1)^{[\beta/2]} (\varphi_{u^\beta} u^\beta + \varphi_{\bar{u}^\beta} \bar{u}^\beta - A\tau_{u^\beta} u^0 u^\beta - A\tau_{\bar{u}^\beta} u^0 \bar{u}^\beta) + \tau_t A u^0 \\
 &- \tau_t (-u_x^3 + i u_y^3 - u_z^2) - \sum_{\nu=1}^3 \xi_t^\nu u_\nu^0 \\
 &+ \sum_{\beta=0}^3 (\tau_{u^\beta} A u^0 + \varphi_{u^\beta}) \left( -u_x^{3-\beta} + i(-1)^\beta u_y^{3-\beta} - (-1)^\beta u_z^{\beta+2(-1)^{[\beta/2]}} \right) \\
 &+ \sum_{\beta=0}^3 (u^\beta \tau_{u^\beta} + \bar{u}^\beta \tau_{\bar{u}^\beta}) (-1)^{[\beta/2]} A (-u_x^3 + i u_y^3 - u_z^2) + \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=1}^3 (-1)^{[\beta/2]} A (\xi_{u^\beta}^\nu u^\beta + \bar{u}^\beta \xi_{\bar{u}^\beta}^\nu) u_\nu^0 \\
 &+ \sum_{\beta=0}^3 (\tau_{\bar{u}^\beta} A u^0 + \varphi_{\bar{u}^\beta}) \left( -\bar{u}_x^{3-\beta} - i(-1)^\beta \bar{u}_y^{3-\beta} - (-1)^\beta \bar{u}_z^{\beta+2(-1)^{[\beta/2]}} \right) \\
 &- \sum_{\beta=0}^3 \tau_{u^\beta} (-u_x^3 + i u_y^3 - u_z^2) \left( -u_x^{3-\beta} + i(-1)^\beta u_y^{3-\beta} - (-1)^\beta u_z^{\beta+2(-1)^{[\beta/2]}} \right) \\
 &- \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=1}^3 \xi_{u^\beta}^\nu u_\nu^0 \left( -u_x^{3-\beta} + i(-1)^\beta u_y^{3-\beta} - (-1)^\beta u_z^{\beta+2(-1)^{[\beta/2]}} \right) \\
 &- \sum_{\beta=0}^3 \tau_{\bar{u}^\beta} (-u_x^3 + i u_y^3 - u_z^2) \left( -\bar{u}_x^{3-\beta} - i(-1)^\beta \bar{u}_y^{3-\beta} - (-1)^\beta \bar{u}_z^{\beta+2(-1)^{[\beta/2]}} \right) \\
 &- \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=1}^3 \xi_{\bar{u}^\beta}^\nu u_\nu^0 \left( -\bar{u}_x^{3-\beta} - i(-1)^\beta \bar{u}_y^{3-\beta} - (-1)^\beta \bar{u}_z^{\beta+2(-1)^{[\beta/2]}} \right).
 \end{aligned}$$

Pour se faciliter la tâche, on résout les équations de façon successive. Nous obtenons alors des sous-systèmes qui imposent des conditions sur les coefficients du champ de vecteurs (4.79). On résout par la suite, le système formé de ces quatre sous-systèmes. Par exemple, pour la première équation dans (4.84), nous obtenons les conditions

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau(X), & \xi &= \xi(X), & \psi &= \psi(X), & \zeta &= \zeta(X), \\
 \varphi &= \varphi(X, u), & \rho &= \rho(X, u), & \sigma &= \sigma(X, u).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_t + A\varphi + \sigma_x - i\sigma_y + \rho_z - \sum_{\beta=0}^3 \left[ A(-1)^{[\beta/2]} (\varphi_{u^\beta} u^\beta + \varphi_{\bar{u}^\beta} \bar{u}^\beta) \right] + \tau_t A u^0 \\
 - A\tau_x u^3 + iA\tau_y u^3 - A\tau_z u^2 = 0, \\
 \begin{aligned}
 \tau_x - i\tau_y - \xi_t - \varphi_{u^3} + \sigma_{u^0} &= 0, & i\tau_x + \tau_y - \psi_t - i\varphi_{u^3} - i\sigma_{u^0} &= 0, \\
 \tau_z - \zeta_t - \varphi_{u^2} + \rho_{u^0} &= 0, & \tau_z - \varphi_{u^2} + \sigma_{u^1} &= 0, \\
 \tau_z - \varphi_{u^2} + \sigma_{u^1} &= 0, & \tau_x - i\tau_y - \varphi_{u^3} - \rho_{u^1} &= 0, \\
 \xi_z + \varphi_{u^1} - \sigma_{u^2} &= 0, & i\psi_z - \varphi_{u^1} - \sigma_{u^2} &= 0, \\
 \tau_t - \zeta_z - \varphi_{u^0} + \rho_{u^2} &= 0, & \tau_t - \xi_x + i\xi_y - \varphi_{u^0} + \sigma_{u^3} &= 0, \\
 \tau_t - i\psi_x - \psi_y - \varphi_{u^0} + \sigma_{u^3} &= 0, & \zeta_x - i\zeta_y - \varphi_{u^1} - \rho_{u^3} &= 0.
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

Le système à résoudre pour les quatres équations est donné par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(X), & \xi &= \xi(X), & \psi &= \psi(X), & \zeta &= \zeta(X), \\ \varphi &= \varphi(X, u), & \theta &= \theta(X, u), & \rho &= \rho(X, u), & \sigma &= \sigma(X, u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_t + A\varphi + \sigma_x - i\sigma_y + \rho_z - A\varphi_{u^0}u^0 - A\varphi_{u^1}u^1 + A\varphi_{u^2}u^2 + A\varphi_{u^3}u^3 + \tau_t A u^0 \\ - A\tau_x u^3 + iA\tau_y u^3 - A\tau_z u^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_t + \rho_x + i\rho_y - \sigma_z + A\theta - A\theta_{u^0}u^0 - A\theta_{u^1}u^1 + A\theta_{u^2}u^2 + A\theta_{u^3}u^3 + A\tau_t u^1 \\ - A\tau_x u^2 - Ai\tau_y u^2 + A\tau_z u^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\rho_t + A\rho - \theta_x + i\theta_y - \varphi_z + A\tau_t u^2 + A\rho_{u^0}u^0 + A\rho_{u^1}u^1 - A\rho_{u^2}u^2 - A\rho_{u^3}u^3 \\ - A\tau_x u^1 + i\tau_y A u^1 - A\tau_z u^0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sigma_t - \varphi_x - i\varphi_y + \theta_z + A\sigma + A\sigma_{u^0}u^0 + A\sigma_{u^1}u^1 - A\sigma_{u^2}u^2 - A\sigma_{u^3}u^3 - A\tau_x u^0 \\ - Ai\tau_y u^0 + A\tau_z u^1 + A\tau_t u^3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_t - \zeta_z - \varphi_{u^0} + \rho_{u^2} &= 0, \\ \tau_t - i\psi_x - \psi_y - \varphi_{u^0} + \sigma_{u^3} &= 0, \\ \tau_t - \xi_x - i\xi_y - \theta_{u^1} + \rho_{u^2} &= 0, \\ \tau_t - \zeta_z + \varphi_{u^0} - \rho_{u^2} &= 0, \\ \tau_t - i\psi_x - \psi_y + \theta_{u^1} - \rho_{u^2} &= 0, \\ \tau_t + i\psi_x - \psi_y + \varphi_{u^0} - \sigma_{u^3} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_t - \xi_x + i\xi_y - \varphi_{u^0} + \sigma_{u^3}, \\ \tau_t + i\psi_x - \psi_y - \theta_{u^1} + \rho_{u^2} &= 0, \\ \tau_t - \zeta_z - \theta_{u^1} + \sigma_{u^3} &= 0, \\ \tau_t - \xi_x + i\xi_y + \theta_{u^1} - \rho_{u^2} &= 0, \\ \tau_t - \xi_x - i\xi_y + \varphi_{u^0} - \sigma_{u^3} &= 0, \\ \tau_t - \zeta_z + \theta_{u^1} - \sigma_{u^3} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_x - i\tau_y - \xi_t - \varphi_{u^3} + \sigma_{u^0} &= 0, \\ \tau_x - i\tau_y - \varphi_{u^3} - \rho_{u^1} &= 0, \\ \tau_x + i\tau_y - \xi_t - \theta_{u^2} + \rho_{u^1} &= 0, \\ \tau_x - i\tau_y - \xi_t + \theta_{u^2} - \rho_{u^1} &= 0, \\ \tau_x + i\tau_y - \xi_t + \varphi_{u^3} - \sigma_{u^0} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_x - i\tau_y + i\psi_t - \varphi_{u^3} - \sigma_{u^0} &= 0, \\ \tau_x + i\tau_y - \theta_{u^2} - \sigma_{u^0} &= 0, \\ \tau_x + i\tau_y - i\psi_t - \theta_{u^2} - \rho_{u^1} &= 0, \\ \tau_x - i\tau_y + i\psi_t - \theta_{u^2} - \rho_{u^1} &= 0, \\ \tau_x + i\tau_y - i\psi_t - \varphi_{u^3} - \sigma_{u^0} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_z - \zeta_t - \varphi_{u^2} + \rho_{u^0} &= 0, \\ \tau_z - \zeta_t + \theta_{u^3} - \sigma_{u^1} &= 0, \\ \tau_z - \zeta_t + \varphi_{u^2} - \rho_{u^0} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_z - \varphi_{u^2} + \sigma_{u^1} &= 0, \\ \tau_z + \theta_{u^3} - \rho_{u^0} &= 0, \\ \tau_z - \zeta_t - \theta_{u^3} + \sigma_{u^1} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_z + \varphi_{u^1} - \sigma_{u^2} &= 0, \\ i\psi_z - \varphi_{u^1} - \sigma_{u^2} &= 0, \\ \zeta_x - i\zeta_y - \varphi_{u^1} - \rho_{u^3} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_z - \theta_{u^0} + \rho_{u^3} &= 0, \\ i\psi_z - \theta_{u^0} - \rho_{u^3} &= 0, \\ \zeta_x + i\zeta_y + \theta_{u^0} + \sigma_{u^2} &= 0. \end{aligned}$$

Une façon de procéder, pour résoudre ce système, qui est efficace, est de d'abord résoudre individuellement chacun des sous-systèmes qui le compose et d'utiliser les nouvelles conditions obtenues par la résolution des sous-systèmes précédents. Les coefficients du générateur de symétrie (4.79) solutions de ce système sont

$$\tau = c^1 x + c^2 y + c^3 z + c^4,$$

$$\begin{aligned}
\xi &= c^1 t + c^5 y + c^6 z + c^7, \\
\psi &= c^2 t - c^5 x + c^8 z + c^9, \\
\zeta &= c^3 t - c^6 x - c^8 y + c^{10}, \\
\varphi &= \left(c^{11} + \frac{i}{2}c^5\right) u^0 - \frac{1}{2}(c^6 - ic^8) u^1 + \frac{c^3}{2} u^2 + \frac{1}{2}(c^1 - ic^2) u^3 + \omega^0, \\
\theta &= \frac{1}{2}(c^6 + ic^8) u^0 + \left(c^{11} - \frac{i}{2}c^5\right) u^1 + \frac{1}{2}(c^1 + ic^2) u^2 - \frac{c^3}{2} u^3 + \omega^1, \\
\rho &= \frac{c^3}{2} u^0 + \frac{1}{2}(c^1 - ic^2) u^1 + \left(c^{11} - \frac{i}{2}c^5\right) u^2 - \frac{1}{2}(c^6 - ic^8) u^3 + \omega^2, \\
\sigma &= \frac{1}{2}(c^1 + ic^2) u^0 - \frac{c^3}{2} u^1 + \frac{1}{2}(c^6 + ic^8) u^2 + \left(c^{11} + \frac{i}{2}c^5\right) u^3 + \omega^3,
\end{aligned}$$

où les  $c_i$  sont des constantes arbitraires et  $\Omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$  est une solution particulière de l'équation de Dirac.

On peut alors former la base de générateurs suivante :

$$\begin{aligned}
v^1 &= x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u^3}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{u^1}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{u^0}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\
v^2 &= y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{u^3}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + i \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{u^1}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} + i \frac{u^0}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\
v^3 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} - \frac{u^3}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{u^0}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} - \frac{u^1}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\
v^4 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\
v^5 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{u^0}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} - i \frac{u^1}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} + i \frac{u^3}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\
v^6 &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{u^1}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + \frac{u^0}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{u^3}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\
v^7 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\
v^8 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{u^1}{2} \frac{\partial}{\partial u^0} + i \frac{u^0}{2} \frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{u^3}{2} \frac{\partial}{\partial u^2} + i \frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial u^3}, \\
v^9 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\
v^{10} &= \frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned}$$

$$v^{11} = u^0 \frac{\partial}{\partial u^0} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + u^3 \frac{\partial}{\partial u^3}.$$

Nous avons de plus la sous algèbre de dimension infinie générée par

$$v^\Omega = \omega^0 \frac{\partial}{\partial u^0} + \omega^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + \omega^3 \frac{\partial}{\partial u^3}.$$

On vérifie aisément que l'action de des générateurs  $v^1$  à  $v^{11}$  sur le spineur  $\psi$  donne le même résultat que l'action des opérateurs suivants appliqués sur ce même spineur :

$$p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad L_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}, \quad (4.88)$$

où les  $\sigma_{\mu\nu}$  sont données par

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu].$$

Par exemple l'action de  $iv^1$  correspond à l'action de  $L_{10}$ . Noter que ici les matrices  $\gamma_\mu$  sont les matrices de Dirac covariante et non contravariante. Ces résultats sont donnés dans [1]. Cette exemple pour l'équation de Dirac conclut la présente section en démontrant les applications des techniques de Lie à un système physique. Une autre application de ces techniques sur les équations d'Einstein dans le vide est présenté dans [25].

## 4.2 Solutions invariantes dans un groupe

Nous allons maintenant introduire la notion classique d'une *solution invariante dans un groupe*. Ce type de solution inclut les solutions spéciales habituelles aux équations différentielles partielles, telles les solutions de similarité, les solutions en ondes de propagation, etc.

**Définition 4.2 :** Soit  $G$  un groupe de symétrie du système d'équations différentielles (4.1) et  $\Gamma_f$  le graphe de  $f$ . Une solution  $u = f(x)$  est dite invariante dans le groupe  $G$  si  $g \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$  pour tout  $g \in G$ .

En d'autres termes, une solution est invariante dans  $G$  si elle ne change pas sous l'action des transformations du groupe de symétrie  $G$ . Les solutions de similarité correspondent à des groupes de transformations d'échelle, tandis que les groupes de translations produisent des solutions en ondes de propagation.

**Théorème 4.4 :** Supposons qu'un groupe de symétrie  $G$  agit régulièrement et qu'il a une dimension d'orbite égale à  $r$ . Alors toutes les solutions du système  $\Delta = 0$  invariantes sous l'action de  $G$  peuvent être trouvées en résolvant un système réduit d'équations différentielles  $\Delta/G = 0$  en  $r$  variables indépendantes de moins que pour  $\Delta = 0$ .

Le théorème précédent signifie que dans le cas d'un système d'équations différentielles ayant deux variables indépendantes, les solutions invariantes sous un groupe de symétrie à un paramètre peuvent toutes être trouvées en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires. Toutefois, si l'orbite a une dimension  $r$  plus grande que le nombre  $p$  de variables indépendantes, alors le théorème ne tient plus. Si  $r = p$ , on obtient les solutions à partir d'un système d'équations algébriques. Il est intéressant de noter que la dimension d'orbite coïncide souvent avec la dimension ou le nombre de générateurs indépendants du groupe.

Il existe plusieurs manières d'obtenir le système réduit d'équations différentielles  $\Delta/G$ . Nous allons illustrer une de ces façons, mais tout d'abord énonçons une proposition.

**Proposition 4.1 :** *Soit  $G$  un groupe de Lie local de transformations ayant comme générateurs infinitésimaux  $v_1, \dots, v_r$ . Soient  $Q_1, \dots, Q_r$  les caractéristiques associées à ces champs de vecteurs, cf.[30]. Alors une fonction  $u = f(x)$  est invariante sous  $G$  si et seulement si elle est une solution du système d'équations différentielles partielles du premier ordre*

$$Q_\kappa^\alpha(x, u^{(1)}) = 0, \quad \kappa = 1, \dots, r, \quad \alpha = 1, \dots, q. \quad (4.89)$$

Ainsi, les solutions  $u = f(x)$  du système d'équations différentielles (4.1) qui sont invariantes sous les transformations de  $G$  sont celles qui, en plus de satisfaire le système, obéissent à une collection de *contraintes différentielles*, c'est-à-dire les E.D.P. du système (4.89). Autrement dit, on trouve les solutions invariantes sous  $G$ , en solutionnant le système sur-déterminé d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \Delta_\nu(x, u^{(n)}) &= 0, & \nu &= 1, \dots, m, \\ Q_\kappa^\alpha(x, u^{(1)}) &= 0, & \kappa &= 1, \dots, r, \quad \alpha = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Le théorème 4.4 implique que si  $G$  est un groupe de symétrie du système (4.1), alors le système sur-déterminé (4.90) peut être réduit à un système d'équations différentielles ayant moins de variables indépendantes. Une façon de procéder habituelle est de commencer par résoudre le système (4.89) par l'utilisation de coordonnées invariantes qui forment les nouvelles variables pour le système réduit. (Pour d'autres approches voir [19].)

**Définition 4.3 :** *Une fonction  $\eta(x, u)$  est dite un invariant du groupe de transformation  $G$  s'il n'est pas affecté par les transformations de  $G$  ; autrement dit*

$$\eta(g \cdot (x, u)) = \eta(x, u), \quad \text{pour tout } g \in G. \quad (4.91)$$

De façon générale, les invariants d'un groupe de transformations sont plutôt évidents. Toutefois, quand ce n'est pas le cas, nous pouvons les obtenir en résolvant le critère infinitésimal d'invariance  $\mathbf{v}_\kappa[\eta] = 0$ ,  $\kappa = 1, \dots, r$ , en utilisant la méthode des caractéristiques. Selon un résultat élémentaire, localement, n'importe quel groupe régulier avec une orbite de dimension  $r$  a un ensemble complet de  $p + q - r$  invariants fonctionnellement indépendants

$$y^1 = \eta^1(x, u), \dots, y^{p-r}(x, u) = \eta^{p-r}(x, u), \quad w^1 = \zeta^1(x, u), \dots, w^q = \zeta^q(x, u). \quad (4.92)$$

Les  $y$  deviendront les nouvelles variables indépendantes, tandis que les  $w$  deviendront les nouvelles variables dépendantes. Il arrive fréquemment que  $p - r$  invariants soient indépendants des  $u$ , ainsi nous choisissons naturellement ces invariants comme nouvelles variables indépendantes même si ce n'est pas strictement nécessaire. Une fonction  $u = f(x)$  sera invariante sous  $G$  ou, de façon équivalente, une solution du système (4.89), si et seulement si elle peut être réécrite en termes des invariants de base (4.92), i.e. sous la forme

$$w = h(y), \quad \text{ou explicitement,} \quad \zeta(x, u) = h[\eta(x, u)]. \quad (4.93)$$

Ces expressions sont alors substituées dans le système original (4.1). L'argument crucial de la preuve est que, parce que  $G$  est un groupe de symétrie de (4.1), les équations résultantes sont nécessairement équivalentes à un système réduit d'équations différentielles  $\Delta/G(y, w^{(n)}) = 0$  impliquant seulement  $y, w$  et les dérivées de  $w$ . À chaque solution du système réduit correspond une solution invariante sous le groupe du système original, via (4.93).

**Exemple 4.6 :** Considérons le cas de l'équation de chaleur (4.16). Pour chacun des générateurs de symétries, ainsi que toutes combinaisons linéaires de ceux-ci, l'algorithme de réduction mènera à une équation différentielle ordinaire pour les solutions invariantes dans un groupe associé. Nous allons traiter le cas associé à la symétrie d'échelle  $x\partial_x + 2t\partial_t + 2au\partial_u$  correspondant à une combinaison linéaire de  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_6$  de l'exemple 4.1, où  $a$  est une constante qui génère le groupe à un paramètre  $(x, t, u) \mapsto (\lambda x, \lambda^2 t, \lambda^{2a} u)$ . La caractéristique associée à ce générateur est  $Q = 2au - xu_x - 2tu_t$ . Ainsi le système sur-déterminé (4.90) dans ce cas particulier devient

$$u_t = u_{xx}, \quad xu_x + 2tu_t - 2au = 0 \quad (4.94)$$

Les fonctions invariantes de ce groupe sont  $y = x/\sqrt{t}$ ,  $w = t^{-a}u$ . Ainsi, de (4.93), toute solution invariante par changement d'échelle peut être écrite sous la forme  $w = w(y)$ , ou, explicitement,

$$u = t^a w(y) = t^a w(x/\sqrt{t}),$$

laquelle est juste la solution générale de l'équation caractéristique  $Q = 0$ . En dérivant cette formule, nous trouvons

$$u_t = t^{a-1} \left( -\frac{1}{2} y w' + a w \right), \quad u_{xx} = t^{a-1} w''.$$

En substituant ces résultats dans l'équation de chaleur et en annulant les puissances de  $t$  on obtient immédiatement l'équation réduite :

$$w'' + \frac{1}{2}yw' - aw = 0,$$

dont la solution générale est

$$w(y) = e^{-y^2/8}U(2a + \frac{1}{2}, y/\sqrt{2}),$$

où  $U$  dénote une fonction cylindrique parabolique. Par conséquent, la solution de similarité générale à l'équation de chaleur est

$$u(x, t) = t^a e^{-x^2/8t}U(2a + \frac{1}{2}, \frac{x}{\sqrt{2t}}).$$

### 4.3 Méthode non-classique

Dans la preuve du théorème 4.4, l'argument essentiel est que le groupe en question est un groupe de symétrie du système d'équations différentielles original (4.1). Toutefois, il n'est pas obligatoire d'exiger que  $G$  soit un groupe de symétrie. Il suffit seulement d'exiger que le système sur-déterminé (4.90) soit invariant sous le groupe  $G$ . Cet affaiblissement de conditions peut conduire à de nouveaux types de symétrie qui ne peuvent être obtenues à partir de la méthode classique, d'où le nom de «méthode non-classique». Cependant, il existe un inconvénient qui provient du fait que les équations déterminantes pour l'invariance des systèmes combinés (4.90) sont non-linéaires. Il est donc, habituellement, impossible de le résoudre parce que les fonctions coefficients  $\xi^i$ ,  $\varphi^\alpha$  du champ de vecteurs (4.2) apparaissent aussi dans les équations elles-mêmes via les caractéristiques (4.7). Néanmoins, toutes solutions aux équations déterminantes non-classiques apporteront des groupes de symétrie non-classiques et nous permettront de trouver des solutions invariantes qui peuvent être déterminées par le même algorithme de base que dans le cas classique.

**Exemple 4.7 :** Considérons l'équation de Boussinesq (4.36). Un exemple explicite d'un groupe «non-classique» est le groupe Galiléen généré par le champ de vecteur  $\mathbf{v} = t\partial_x + \partial_t - 2t\partial_u$ . Ce n'est pas une symétrie de l'équation de Boussinesq du fait qu'il n'apparaît pas dans le groupe de symétrie classique complet de l'exemple 4.2. Néanmoins, le système combiné sur-déterminé d'équations différentielles partielles

$$u_{tt} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0, \quad -Q = tu_x + u_t + 2t = 0,$$

admet  $\mathbf{v}$  comme une symétrie, ce qui peut être vérifié à partir du critère infinitésimal de symétrie (4.8). Les solutions invariantes Galiléennes de l'équation de Boussinesq s'ob-

tiennent comme dans le cas classique. Les invariants du groupe sont donnés par les fonctions  $y = x - \frac{1}{2}t^2$  et  $w = u + t^2$ , ainsi la solution invariante générale aura la forme

$$u(x, t) = w(y) - t^2 = w\left(x - \frac{1}{2}t^2\right) - t^2. \quad (4.95)$$

En dérivant et en substituant dans (4.36), nous obtenons l'équation différentielle ordinaire réduite

$$w'''' + ww'' + (w')^2 - w' + 2 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution explicite, mais est de type Painlevé.

**Exemple 4.8 :** Considérons la bien connue équation de sine-Gordon

$$u_{xt} = \frac{1}{2} \sin 2u. \quad (4.96)$$

Cherchons une solution invariante sous les champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_x + \varphi(x, t, u)\partial_u, \quad X_2 = \partial_t + \psi(x, t, u)\partial_u, \quad (4.97)$$

c'est-à-dire qui annule les caractéristiques de ces champs de vecteurs, d'où

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv \varphi - u_x = 0 \\ Q_2 &\equiv \psi - u_t = 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

La condition de compatibilité  $u_{xt} = \varphi_t + \varphi_u \psi = \psi_x + \psi_u \varphi = u_{tx}$  implique que (en tenant compte de l'équation (4.96))

$$\begin{aligned} \varphi_t + \varphi_u \psi &= \frac{1}{2} \sin 2u \\ \psi_x + \psi_u \varphi &= \frac{1}{2} \sin 2u. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Nous cherchons une solution du système (4.99) sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi &= A^1(x, t) \sin u + B^1 \cos u + C^1(x, t) \\ \psi &= A^2(x, t) \sin u + B^2 \cos u + C^2(x, t). \end{aligned} \quad (4.100)$$

En substituant (4.100) dans le système (4.99) et en manipulant quelque peu, on obtient

$$\begin{aligned} C_t^1 + \frac{A^1 B^2}{2} - \frac{A^2 B^1}{2} + (A_t^1 - B^1 C^2) \sin u + (B_t^1 + A^1 C^2) \cos u \\ + \left( \frac{A^1 B^2}{2} + \frac{A^2 B^1}{2} \right) \cos 2u + \frac{(A^1 A^2 - B^1 B^2 - 1)}{2} \sin 2u = 0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} C_x^2 + \frac{A^2 B^1}{2} - \frac{A^1 B^2}{2} + (A_x^2 - B^2 C^1) \sin u + (B_x^2 + A^2 C^1) \cos u \\ + \left( \frac{A^2 B^1}{2} + \frac{A^1 B^2}{2} \right) \cos 2u + \frac{(A^1 A^2 - B^1 B^2 - 1)}{2} \sin 2u = 0. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Les coefficients des différentes puissances de  $\sin u$  et  $\cos u$  doivent s'annuler. On obtient donc le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$A^1 A^1 - B^1 B^2 = 1, \quad (4.103)$$

$$A^1 B^2 - A^2 B^1 = 0, \quad (4.104)$$

$$A_t^1 - B^1 C^2 = 0, \quad (4.105)$$

$$A_x^2 - B^2 C^1 = 0, \quad (4.106)$$

$$B_t^1 + A^1 C^2 = 0, \quad (4.107)$$

$$B_x^2 + A^2 C^1 = 0, \quad (4.108)$$

$$C_t^1 + \frac{A^1 B^2}{2} - \frac{A^2 B^1}{2} = 0, \quad (4.109)$$

$$C_x^2 + \frac{A^2 B^1}{2} - \frac{A^1 B^2}{2} = 0. \quad (4.110)$$

En multipliant l'équation (4.105) par  $A^1$ , l'équation (4.107) par  $B^1$  et en additionnant les résultats, on trouve que

$$A^1 A_t^1 + B^1 B_t^1 = 0 \Rightarrow (A^1)_t^2 + (B^1)_t^2 = 0. \quad (4.111)$$

L'équation (4.111) implique

$$(A^1)^2 + (B^1)^2 = f(x). \quad (4.112)$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation (4.106) par  $A^2$ , l'équation (4.108) par  $B^2$  et en additionnant les résultats, on trouve que

$$A^2 A_x^2 + B^2 B_x^2 = 0 \Rightarrow (A^2)_x^2 + (B^2)_x^2 = 0, \quad (4.113)$$

ce qui implique

$$(A^2)^2 + (B^2)^2 = g(t). \quad (4.114)$$

En multipliant (4.103) par  $-B^2$ , (4.104) par  $A^2$  et en additionnant les résultats, on obtient

$$B^1 [(A^2)^2 + (B^2)^2] = -B^2. \quad (4.115)$$

En multipliant (4.103) par  $A^2$ , (4.104) par  $B^2$  et en additionnant les résultats, on obtient

$$A^1 [(A^2)^2 + (B^2)^2] = A^2. \quad (4.116)$$

En sommant le carré de l'équation (4.115) avec le carré de l'équation (4.116) et en divisant par  $[(A^2)^2 + (B^2)^2]$ , on obtient

$$[(A^1)^2 + (B^1)^2] [(A^2)^2 + (B^2)^2] = 1. \quad (4.117)$$

En substituant (4.112) et (4.114) dans (4.117), on a que  $f(x)g(t) = 1$ , ce qui implique  $f(x) = 1/g(t) = \lambda^2$ . On peut alors écrire

$$(A^1)^2 + (B^1)^2 = \lambda^2 \quad (4.118)$$

$$(A^2)^2 + (B^2)^2 = 1/\lambda^2. \quad (4.119)$$

En substituant (4.119) dans (4.115), puis dans (4.116), on obtient respectivement

$$A^1 = \lambda^2 A^2 \quad (4.120)$$

et

$$B^1 = -\lambda^2 B^2. \quad (4.121)$$

En sommant l'équation (4.109) à l'équation (4.110), on trouve immédiatement que

$$C_t^1 = -C_x^2. \quad (4.122)$$

Définissons une fonction  $v$  telle que  $dv = -C^1 dx + C^2 dt$ , ainsi

$$C^1 = -v_x \quad \text{et} \quad C^2 = v_t. \quad (4.123)$$

En prenant l'équation (4.123) en considération, les équations (4.105) à (4.108) peuvent être réécrite sous la forme

$$A_t^1 - B^1 v_t = 0, \quad (4.124)$$

$$A_x^2 + B^2 v_x = 0, \quad (4.125)$$

$$B_t^1 + A^1 v_t = 0, \quad (4.126)$$

$$B_x^2 - A^2 v_x = 0. \quad (4.127)$$

En isolant  $B^1$  dans l'équation (4.118), on trouve

$$B^1 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (A^1)^2}. \quad (4.128)$$

En substituant (4.128) dans (4.124) et en isolant  $v_t$ , on obtient

$$v_t = \pm \frac{A_t^1}{\sqrt{\lambda^2 - (A^1)^2}} = \pm \frac{A_t^1/\lambda}{\sqrt{1 - (A^1/\lambda)^2}}. \quad (4.129)$$

Ainsi,

$$v = \mp \int -\frac{A_t^1/\lambda}{\sqrt{1 - (A^1/\lambda)^2}} dt + \eta(x). \quad (4.130)$$

En effectuant l'intégrale, on obtient

$$v - \eta = \mp \arccos(A^1/\lambda) \quad (4.131)$$

En appliquant  $\mp$  de chaque côté de l'équation (4.131) et en égalisant par la suite le cosinus du membre de gauche à celui du membre de droite, on obtient

$$A^1 = \lambda \cos \mp(v - \eta) = \lambda \cos(v - \eta). \quad (4.132)$$

On trouve, en procédant de manière similaire à partir de l'équation (4.125), que

$$A^2 = \pm \frac{1}{\lambda} \sin(v - \sigma), \quad \sigma = \sigma(t). \quad (4.133)$$

En introduisant (4.132) et (4.133) dans (4.120), on a que  $\cos(v - \eta) = \pm \cos(v - \sigma)$ . Ceci implique que  $\eta = \sigma + n\pi$ , où  $n$  est un entier. Autrement dit,  $\eta$  (et du même coup  $\sigma$ ) est une constante qui ne représente qu'un déphasage. Sans perte de généralité, on peut donc éliminer les constantes  $\eta$  et  $\sigma$ . En introduisant (4.132) dans (4.128), on trouve

$$B^1 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (\lambda \cos v)^2} = \pm \lambda \sin v. \quad (4.134)$$

De plus, à l'aide de (4.120) et (4.121), on a immédiatement que

$$A^2 = \frac{1}{\lambda} \cos v, \quad B^2 = \mp \frac{1}{\lambda} \sin v. \quad (4.135)$$

En substituant les coefficients (4.132), (4.134) et (4.135) dans (4.100) et dans (4.110), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda \cos v \sin u \pm \lambda \sin v \cos u - v_x, \\ \psi &= \frac{1}{\lambda} \cos v \sin u \mp \frac{1}{\lambda} \sin v \cos u + v_t, \end{aligned} \quad (4.136)$$

où

$$v_{xt} = \mp \frac{1}{2} \sin 2v. \quad (4.137)$$

Finalement, en introduisant (4.136) dans les caractéristiques (4.98), on obtient les transformations de Backlund

$$\begin{aligned} u_x &= \lambda \sin(u \pm v) - v_x, \\ u_t &= \frac{1}{\lambda} \sin(u \mp v) + v_t, \end{aligned} \quad (4.138)$$

où

$$v_{xt} = \mp \frac{1}{2} \sin 2v. \quad (4.139)$$

**Exemple 4.9 :** Considérons ce coup ci une autre équation bien connue, c'est-à-dire l'équation de Korteweg-de Vries, qui est donnée par

$$u_t + u_{xxx} + 3u_x = 0, \quad (4.140)$$

où  $x$  et  $t$  sont les variables indépendantes, tandis que  $u$  est la variable dépendante. Cherchons une solution invariante sous les champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_x + \varphi(x, t, u)\partial_u, \quad X_2 = \partial_t + \psi(x, t, u)\partial_u. \quad (4.141)$$

Autrement dit, on cherche une solution de l'équation (4.140) telle qu'elle annule les caractéristiques de ces champs de vecteurs. De façon explicite cela signifie

$$Q_1 \equiv \varphi - u_x = 0, \quad Q_2 \equiv \psi - u_t = 0. \quad (4.142)$$

La condition de compatibilité  $u_{xt} = u_{tx}$  implique que

$$\varphi_t + \varphi_u \psi - \psi_x - \psi_u \varphi = 0. \quad (4.143)$$

En substituant les caractéristiques (4.142) dans l'équation (4.140), on obtient

$$\psi + \varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_{xu} + \varphi_x\varphi_u + \varphi\varphi_u^2 + \varphi^2\varphi_{uu} + 3\varphi^2 = 0. \quad (4.144)$$

Supposons que  $\varphi$  et  $\psi$  prennent une forme quadratique

$$\begin{aligned} \varphi(x, t, u) &= A^1(x, t)u^2 + B^1(x, t)u + C^1(x, t), \\ \psi(x, t, u) &= A^2(x, t)u^2 + B^2(x, t)u + C^2(x, t). \end{aligned} \quad (4.145)$$

En substituant (4.145) dans le système formé de l'équation (4.143) et de l'équation (4.144), tout en regroupant en terme des puissances de  $u$ , on obtient

$$\begin{aligned} (A_t^1 + A^1B^2 - A_x^2 - A^2B^1)u^2 + (B_t^1 + 2A^1C^2 - B_x^2 - 2A^2C^1)u + C_t^1 \\ + B^1C^2 - C_x^2 - B^2C^1 = 0 \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned} 3(A^1)^2(2A^1 + 1)u^4 + 6A^1(A_x^1 + 2A^1B^1 + B^1)u^3 \\ + (A^2 + A_{xx}^1 + 4A^1B_x^1 + 5A_x^1B^1 + 7A^1(B^1)^2 + 8(A^1)^2C^1 + 3(B^1)^2 + 6A^1C^1)u^2 \\ + (B^2 + B_{xx}^1 + 3B^1B_x^1 + 4A_x^1C^1 + 2A^1C_x^1 + (B^1)^3 + 8A^1B^1C^1 + 6B^1C^1)u \\ + C^2 + C_{xx}^1 + 2A^1(C^1)^2 + 2B_x^1C^1 + B^1C_x^1 + (B^1)^2C^1 + 3(C^1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.147)$$

On détermine les coefficients  $A^i$ ,  $B^i$  et  $C^i$  en résolvant le système d'équations aux dérivées partielles, obtenu en annulant les coefficients des différentes puissances de  $u$  dans les équations (4.146) et (4.147), suivant :

$$A_t^1 + A^1B^2 - A_x^2 - A^2B^1 = 0 \quad (4.148)$$

$$B_t^1 + 2A^1C^2 - B_x^2 - 2A^2C^1 = 0 \quad (4.149)$$

$$C_t^1 + B^1C^2 - C_x^2 - B^2C^1 = 0 \quad (4.150)$$

$$2A^1 + 1 = 0 \quad (4.151)$$

$$A_x^1 + 2A^1B^1 + B^1 = 0 \quad (4.152)$$

$$A^2 + A_{xx}^1 + 4A^1B_x^1 + 5A_x^1B^1 + 7A^1(B^1)^2 + 8(A^1)^2C^1 + 3(B^1)^2 + 6A^1C^1 = 0 \quad (4.153)$$

$$B^2 + B_{xx}^1 + 3B^1B_x^1 + 4A_x^1C^1 + 2A^1C_x^1 + (B^1)^3 + 8A^1B^1C^1 + 6B^1C^1 = 0 \quad (4.154)$$

$$C^2 + C_{xx}^1 + 2A^1(C^1)^2 + 2AB_x^1C^1 + B^1C_x^1 + (B^1)^2C^1 + 3(C^1)^2 = 0. \quad (4.155)$$

$$(4.156)$$

De l'équation (4.151), on a immédiatement que

$$A^1 = -\frac{1}{2}. \quad (4.157)$$

En substituant le coefficient (4.157) dans l'équation (4.153) on a que

$$A^2 = 2B_x^1 + \frac{1}{2}(B^1)^2 + C^1. \quad (4.158)$$

En substituant (4.157) et (4.158) dans (4.148), on obtient

$$B^2 = -(B^1)^3 - 6B^1B_x^1 - 4B_{xx}^1 - 2B^1C^1 - 2C_x^1. \quad (4.159)$$

En substituant (4.157), (4.158) et (4.159) dans (4.149), (4.150), (4.154) et (4.155), on obtient

$$\begin{aligned} B_t^1 - C^2 + 3(B^1)^2B_x^1 + 6(B_x^1)^2 + 6B^1B_{xx}^1 + 4B_{xxx}^1 + 2B_x^1C^1 + 2B^1C_x^1 \\ + 2C_{xx}^1 - 4B_x^1C^1 - (B^1)^2C^1 - 2(C^1)^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$C_t^1 + B^1C^2 - C_x^2 + (B^1)^3C^1 + 6B^1B_x^1C^1 + 4B_{xx}^1C^1 + B^1(C^1)^2 + 2C^1C_x^2 = 0, \quad (4.161)$$

$$B^1B_x^1 + B_{xx}^1 + C_x^1 = 0, \quad (4.162)$$

$$C^2 + C_{xx}^1 + 2B_x^1C^1 + B^1C_x^1 + (B^1)^2C^1 + 2(C^1)^2 = 0. \quad (4.163)$$

En dérivant l'équation (4.163) par rapport à  $x$  et en isolant  $-C_x^2$ , on obtient

$$-C_x^2 = C_{xxx}^1 + 2B_{xx}^1C^1 + 3B_x^1C_x^1 + B^1C_{xx}^1 + 2B^1B_x^1C^1 + (B^1)^2C_x^1 + 4C^1C_x^1. \quad (4.164)$$

En substituant (4.163) dans (4.160), on trouve

$$B_t^1 + 4B_{xxx}^1 + 3(B^1)^2B_x^1 + 6(B_x^1)^2 + 6B^1B_{xx}^1 + 3B^1C_x^1 + 3C_{xx}^1 = 0. \quad (4.165)$$

En substituant (4.161) dans (4.165), on obtient

$$B_t^1 + B_{xxx}^1 + 3(B_x^1)^2 = 0, \quad (4.166)$$

ainsi

$$B^1 = v(x, t), \quad (4.167)$$

où  $v$  est une solution de l'équation KdV, *i.e.* (4.140). En introduisant (4.167) dans (4.162) et en isolant  $C_x^1$ , on a que  $C_x^1 = -vv_x - v_{xx}$ , que l'on intègre pour obtenir

$$C^1 = -\frac{1}{2}v^2 - v_x + \lambda(t). \quad (4.168)$$

En substituant (4.163) et (4.164) dans (4.161), on trouve

$$C_t^1 + 3v_xC_x^1 + C_{xxx}^1 = 0. \quad (4.169)$$

En substituant (4.168) dans (4.169) et en isolant  $\lambda_t$ , on trouve

$$\lambda_t = v(v_t + 3(v_x)^2 + v_{xxx}) + \partial_x(v_t + 3(v_x)^2 + v_{xxx}).$$

Toutefois,  $v$  est une solution particulière de l'équation l'équation KdV, ce qui signifie que  $v_t + 3(v_x)^2 + v_{xxx} = 0$ . Ainsi,  $\lambda_t = 0$  et on en conclut que  $\lambda$  est une constante. En substituant, (4.167) et (4.168) dans les équations (4.158), (4.159) et (4.163), on obtient

$$A^2 = v_x + \lambda, \quad (4.170)$$

$$B^2 = -2v(v_x + \lambda) - 2v_{xx}, \quad (4.171)$$

$$C^2 = (v_x)^2 + 2vv_{xx} + v_{xxx} + (v^2 - 2\lambda)v_x + v^2\lambda - 2\lambda^2. \quad (4.172)$$

En introduisant les coefficients  $A^1, A^2, B^1, B^2, C^1$  et  $C^2$  dans (4.145), on a que

$$\begin{aligned}\varphi(x, t, u) &= -\frac{1}{2}u^2 + vu - \frac{1}{2}v^2 - v_x + \lambda(t), \\ \psi(x, t, u) &= (v_x + \lambda)u^2 - 2(v(v_x + \lambda) + v_{xx})u + (v_x)^2 \\ &\quad + 2vv_{xx} + v_{xxx} + (v^2 - 2\lambda)v_x + v^2\lambda - 2\lambda^2.\end{aligned}\tag{4.173}$$

Finalement, en substituant (4.173) dans (4.142), on obtient

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{1}{2}u^2 + vu - \frac{1}{2}v^2 - v_x + \lambda(t), \\ u_t &= (v_x + \lambda)u^2 - 2(v(v_x + \lambda) + v_{xx})u + (v_x)^2 \\ &\quad + 2vv_{xx} + v_{xxx} + (v^2 - 2\lambda)v_x + v^2\lambda - 2\lambda^2.\end{aligned}\tag{4.174}$$

**Exemple 4.10 :** Un autre exemple intéressant est celui de l'équation de Korteweg-de Vries modifiée donnée par

$$\omega_t + \omega_{xxx} + 2a^{-2}\omega_x^3 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.\tag{4.175}$$

Afin de simplifier les calculs effectuons la transformation  $\omega = a \ln u$  sur l'équation (4.175). Ainsi, nous cherchons des solutions de l'équation transformée

$$u_t + u_{xxx} - 3\frac{u_x u_{xx}}{u} = 0\tag{4.176}$$

qui sont invariantes sous les champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_x + \varphi(x, t, u)\partial_u, \quad X_2 = \partial_t + \psi(x, t, u)\partial_u.\tag{4.177}$$

En d'autres termes, nous cherchons les solutions faisant en sorte que les caractéristiques de ces champs de vecteurs s'annulent. Explicitement,

$$Q_1 \equiv \varphi - u_x = 0, \quad Q_2 \equiv \psi - u_t = 0.\tag{4.178}$$

La condition de compatibilité  $u_{xt} = u_{tx}$  implique que

$$\varphi_t + \varphi_u \psi - \psi_x - \psi_u \varphi = 0.\tag{4.179}$$

En substituant les caractéristiques (4.178) dans l'équation (4.175), on obtient

$$\psi + \varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_{xu} + \varphi_x\varphi_u + \varphi\varphi_u^2 + \varphi^2\varphi_{uu} + 3\frac{\varphi(\varphi_x + \varphi\varphi_u)}{u} = 0.\tag{4.180}$$

Supposons que  $\varphi$  et  $\psi$  sont de forme quadratique, ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(x, t, u) &= A^1(x, t)u^2 + B^1(x, t)u + C^1(x, t), \\ \psi(x, t, u) &= A^2(x, t)u^2 + B^2(x, t)u + C^2(x, t).\end{aligned}\tag{4.181}$$

En substituant (4.181) dans le système formé de l'équation (4.179) et de l'équation (4.180), tout regroupant en terme des puissances de  $u$ , on obtient

$$(A_t^1 - A_x^2 + A^1 B^2 - A^2 B^1)u^2 + (B_t^1 - B_x^2 + 2A^1 C^2 - 2A^2 C^1)u + C_t^1 - C_x^2 + B^1 C^2 - B^2 C^1 = 0 \quad (4.182)$$

$$3A^1(A_x^1 + A^1 B^1)u^3 + (A^2 + A_{xx}^1 + A^1 B_x^1 + 2A_x^1 B^1 - 5A^1(B^1)^2 - 4(A^1)^2 C^1)u^2 + (B^2 + B_{xx}^1 + A_x^1 C^1 - A^1 C_x^1 - 2(B^1)^3 - 10A^1 B^1 C^1)u + C^2 + C_{xx}^1 - B_x^1 C^1 - 2B^1 C_x^1 - 5(B^1)^2 C^1 - 4A^1(C^1)^2 + 3C^1 \frac{(C_x^1 + B^1 C^1)}{u} = 0. \quad (4.183)$$

On détermine les coefficients  $A^i$ ,  $B^i$  et  $C^i$  en résolvant le système d'équations aux dérivées partielles, obtenu en annulant les coefficients des différentes puissances de  $u$  dans les équations (4.182) et (4.183), suivant :

$$A_t^1 - A_x^2 + A^1 B^2 - A^2 B^1 = 0, \quad (4.184)$$

$$B_t^1 - B_x^2 + 2A^1 C^2 - 2A^2 C^1 = 0, \quad (4.185)$$

$$C_t^1 - C_x^2 + B^1 C^2 - B^2 C^1 = 0, \quad (4.186)$$

$$A_x^1 - A^1 B^1 = 0, \quad (4.187)$$

$$A^2 = -A_{xx}^1 - A^1 B_x^1 - 2A_x^1 B^1 + 5A^1(B^1)^2 + 4(A^1)^2 C^1 \quad (4.188)$$

$$B^2 = -B_{xx}^1 - A_x^1 C^1 + A^1 C_x^1 + 2(B^1)^3 + 10A^1 B^1 C^1, \quad (4.189)$$

$$C^2 = -C_{xx}^1 + B_x^1 C^1 + 2B^1 C_x^1 + 5(B^1)^2 C^1 + 4A^1(C^1)^2, \quad (4.190)$$

$$C_x^1 + B^1 C^1 = 0. \quad (4.191)$$

$$(4.192)$$

En substituant (4.188), (4.189) et (4.190) dans (4.186) (ainsi que leurs dérivées si nécessaire), on obtient

$$C_t^1 + C_{xxx}^1 - 3B_x^1 C_x^1 - 3B^1 C_{xx}^1 - 9B^1 B_x^1 C^1 - 3(B^1)^2 C_x^1 - 3A_x^1 (C^1)^2 - 9A^1 C^1 C_x^1 + 3(B^1)^3 C^1 - 6A^1 B^1 (C^1)^2 = 0. \quad (4.193)$$

En substituant (4.191) dans (4.193) et en utilisant (4.190), on trouve

$$C_t^1 + C_{xxx}^1 - 3 \frac{C_x^1 C_{xx}^1}{C^1} = 0. \quad (4.194)$$

L'équation (4.194) implique que  $C^1$  est une solution particulière de (4.175) que nous allons noter  $v$ , ainsi

$$C^1 = v. \quad (4.195)$$

En substituant  $C^1$  par  $v$  dans l'équation (4.191), on a alors que

$$B^1 = -\frac{v_x}{v}. \quad (4.196)$$

De l'équation (4.187), en y introduisant (4.196), on a que

$$vA_x^1 + v_xA^1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(vA^1) = 0,$$

d'où l'on trouve, en intégrant, que

$$A^1 = \frac{\lambda(t)}{v}. \quad (4.197)$$

En substituant (4.195), (4.196) et (4.197) dans (4.188), dans (4.189) et puis dans (4.190), on trouve

$$A^2 = 2\lambda \frac{v_{xx}}{v^2} + 4\frac{\lambda^2}{v}, \quad (4.198)$$

$$B^2 = -\frac{1}{v}(v_t + 8\lambda v_x), \quad (4.199)$$

$$C^2 = -2v_{xx} + 4\frac{v_x^2}{v} + 4\lambda v. \quad (4.200)$$

En introduisant (4.198), (4.199) et (4.200) dans (4.184), on obtient

$$\frac{\lambda_t}{v} - \frac{2\lambda}{v^2} \left( v_t + v_{xxx} - 3\frac{v_{xx}v_x}{v} \right) = 0 \Rightarrow \lambda_t = 0,$$

donc  $\lambda$  est une constante. Finalement, en substituant les coefficients (4.197), (4.196), (4.195), (4.198), (4.199) et (4.200) dans les caractéristiques (4.178), on obtient

$$u_x = \frac{\lambda}{v}u^2 - \frac{v_x}{v}u + v,$$

$$u_t = \frac{2\lambda}{v} \left( \frac{v_{xx}}{v} + 2\lambda \right) u^2 - \frac{(v_t + 8\lambda v_x)}{v}u - 2v_{xx} + 4\frac{v_x^2}{v} + 4\lambda v,$$

où

$$v_t + v_{xxx} - 3\frac{v_x v_{xx}}{v} = 0.$$

#### 4.4 L'approche directe de Clarkson-Kruskal

Une méthode directe de réduction des équations différentielles partielles à des équations différentielles ordinaires a été introduite par Clarkson et Kruskal, [30]. L'idée de base est de faire un «ansatz» du genre de celui de similarité

$$u(x, t) = U(x, t, w(z)), \quad \text{où } z = \zeta(x, t), \quad (4.201)$$

et de choisir les fonctions  $U$  et  $\zeta$  de telle manière que l'équation différentielle partielle se réduira à une équation différentielle ordinaire pour  $w(z)$ .

**Exemple 4.11** Pour l'équation de Boussinesq (4.36), il peut être démontré qu'il n'y a pas de perte de généralité si nous assumons que la fonction  $U$  dans l'«ansatz» (4.201) est linéaire en  $w$ , de la forme

$$u(x, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)w(z), \quad z = \zeta(x, t). \quad (4.202)$$

La substitution de (4.202) dans (4.36) mène à une expression polynomiale plus compliquée faisant intervenir divers produits de monômes des dérivées de  $w$  dont les coefficients dépendent des dérivées partielles de  $\alpha, \beta, \zeta$ . Pour que cette expression soit une équation différentielle ordinaire pour  $w(z)$ , les coefficients des différents monômes doivent être des fonctions de  $z$  seulement. Plutôt que de reproduire la longue analyse nécessaire, nous référons le lecteur à [30] et soulignerons seulement le résultat final.

**Théorème 4.5** *L'ansatz (4.201) le plus général réduisant l'équation de Boussinesq (4.36) à une équation différentielle ordinaire est*

$$u(x, t) = \theta(t)^2 w(z) - \theta(t)^{-2} (x\theta'(t) + \sigma'(t))^2, \quad z = x\theta(t) + \sigma(t),$$

où  $\theta, \sigma$  sont, en général, des fonctions elliptiques satisfaisant

$$\theta'' = A\theta^5, \quad \sigma'' = \theta^4(A\sigma + B),$$

pour  $A, B$  constants. La fonction  $w(z)$  correspondante satisfait une équation différentielle réduite de type Painlevé

$$w''' + ww'' + w^2 + (Az + B)w' + 2Aw = 2(Az + B)^2. \quad (4.203)$$

Levi et Winternitz, [8], ont montré comment toutes les réductions de Clarkson-Kruskal de l'équation de Boussinesq proviennent soit d'un groupe de réductions classique ou non-classique. Par exemple, le cas  $A = 0, B = -1$  inclut notre tout premier «ansatz» non-classique (4.95). Cependant, la connexion entre ces deux approches pour les équations différentielles partielles générales reste obscure.

## 4.5 Les groupes de symétrie faible

Dans [33], Peter J. Olver et Philip Rosenau ont proposé une meilleure généralisation de la méthode non-classique. Puisque le système combiné (4.90) est un système sur-déterminé d'équations différentielles partielles, on devrait, en le traitant, prendre en compte n'importe quelles conditions d'intégrabilité données en égalisant les dérivées mixtes partielles. (Le théorème de Cartan-Kuranishi, [34], nous assure que, sous des conditions de régularité moyenne, les conditions d'intégrabilité peuvent toutes être trouvées en un nombre fini d'étapes ; la méthode élémentaire de Gröbner, comme dans [18], [45], fournit des moyens pratiques de les calculer.) Par conséquent, on devrait calculer le groupe de symétrie du système (4.90) augmenté de toutes les conditions d'intégrabilité qui lui sont associées. Ainsi, un *groupe de symétrie faible* du système (4.1) est défini comme étant n'importe quel groupe de symétrie du système (4.90) et de toutes ces conditions d'intégrabilité.

Les groupes de symétrie faible, quoique à priori très prometteurs, ont quelques revers critiques. Il peut être démontré que tout groupe est un groupe de symétrie faible d'un système d'équations différentielles partielles donné, et en plus que toute solution du système peut être dérivée d'un certain groupe de symétrie faible, *cf.*[33]. Par conséquent, la généralisation est trop sévère. Néanmoins, elle donne quelques indices sur la façon de procéder lors d'une analyse pratique de telles méthodes de solution. Ce qui est nécessaire est une théorie appropriée des systèmes sur-déterminés d'équations différentielles partielles. Cela nous permettra d'écrire des classes de groupes raisonnables pour lesquelles le système combiné (4.90) est compatible, dans le sens qu'il a des solutions, ou plus restrictivement qu'il admet des solutions qui peuvent être calculées algorithmiquement. Par exemple, se restreindre aux groupes de changement d'échelle, ou aux autres classes de groupes élémentaires, pourrait être un point de départ utile.

**Exemple 4.12 :** Un exemple d'un groupe de symétrie faible pour l'équation de Boussinesq (4.36) est le groupe de changement d'échelle généré par le champ de vecteur  $\mathbf{v} = x\partial_x + t\partial_t$ . Ce n'est ni une symétrie de l'équation de Boussinesq, ni une symétrie du système combiné

$$u_{tt} + uu_{xx} + u_x^2 + u_{xxxx} = 0, \quad Q = xu_x + tu_t = 0. \quad (4.204)$$

Néanmoins, si on ajoute les conditions d'intégrabilité à (4.204), nous trouvons que  $\mathbf{v}$  satisfait les conditions de symétrie faible. Pour calculer les solutions invariantes, nous commençons comme avant, en introduisant les invariants,  $y = x/t$ , et  $w = u$ . En dérivant la formule  $u = w(y) = w(x/t)$  et substituant dans l'équation de Boussinesq, nous obtenons l'équation suivante

$$t^{-4}w'''' + t^{-2}[(y^2 + w)w'' + (w')^2 + 2yw'] = 0.$$

À ce point la différence cruciale entre les symétries faibles et les symétries non-classiques (ou classiques) apparaît. Dans le dernier cas, n'importe quelle coordonnée non-invariante, e.g. la variable  $t$  ici, peut être mise complètement en évidence du terme de gauche de l'équation précédente. Ainsi, il ne reste seulement qu'une équation différentielle ordinaire pour la fonction invariante  $w(y)$ . Pour les symétries faibles, ce n'est plus vrai, puisque nous avons déjà incorporé les conditions d'intégrabilité pour (4.204). Cependant, nous pouvons séparer les coefficients des différentes puissances de  $t$  dans l'équation ci-haut, conduisant à un système sur-déterminé d'équations différentielles ordinaires,

$$w'''' = 0, \quad (y^2 + w)w'' + (w')^2 + 2yw' = 0,$$

pour la fonction inconnue  $w$ . Dans ce cas particulier, le système sur-déterminé résultant a des solutions, soit  $w(y) = -y^2$ , ou  $w(y) = \text{constant}$ . La dernière expression est triviale, mais la première mène à une solution de similarité non-triviale :  $u(x, t) = -x^2/t^2$ . Ainsi nous avons le phénomène intrigant d'une équation avec une solution de similarité laquelle ne provient pas d'un groupe de symétrie d'échelle classique ! Ceci conduit à des considérations intéressantes concernant les comportements asymptotiques ou les catastrophes du gradient des solutions, souvent gouvernés par des solutions de similarité classique.

### 4.6 Les solutions partiellement invariantes

Le concept de solution partiellement invariante a été introduit par Ovsianikov, [23], comme une généralisation du concept classique d'une solution invariante dans un groupe. Supposons que  $G$  est un groupe de symétrie d'un quelconque système d'équations différentielles partielles qui agit régulièrement avec une orbite de dimension  $r$ . Soit  $u = f(x)$  une solution du système (4.1), dont le graphe  $\Gamma_f$  est une sous-variété de dimension  $p$  de l'espace des variables indépendantes et dépendantes. Considérons l'ensemble  $G \cdot \Gamma_f = \{g \cdot (x, u) | (x, u) \in \Gamma_f\}$  obtenu en transformant le graphe de  $f$  par tous les éléments de groupe possibles dans  $G$ . Comme mentionné plus tôt, une solution  $f$  est invariante dans  $G$  si et seulement si  $G \cdot \Gamma_f = \Gamma_f$ . D'un autre côté, si  $f$  est une solution «générique», alors on peut s'attendre que la sous-variété  $G \cdot \Gamma_f$  sera de dimension  $p + s$ , où  $s = \min\{r, q\}$ . Une *solution partiellement invariante* en est une telle que la dimension de  $G \cdot \Gamma_f$  a une certaine valeur intermédiaire, précisée par la prochaine définition.

**Définition 4.4 :** Le défaut  $\delta$  d'une solution  $f$  par rapport au groupe  $G$  est donné par  $\delta = \dim(G \cdot \Gamma_f) - p$ . Une solution  $f$  est *invariante* dans  $G$  si  $\delta = 0$ , *générique* si  $\delta = s = \min\{r, q\}$  et *partiellement invariante* si  $0 < \delta < s$ .

Ovsianikov a introduit un algorithme compliqué pour le calcul des solutions partiellement invariantes d'un défaut donné, exigeant la solution à un système sur-déterminé associé d'équations différentielles partielles. Une simplification significative, basée sur les suggestions dans [32], a été introduite dans la thèse de Ondich, [20]. À partir des caractéristiques  $Q_1, \dots, Q_r$  des générateurs infinitésimaux  $v_1, \dots, v_r$  de  $G$ , nous formons la «matrice caractéristique»  $r \times q$

$$Q(x, u^{(1)}) = (Q_\alpha^\kappa(x, u^{(1)})), \quad \alpha = 1, \dots, q \quad \kappa = 1, \dots, r. \quad (4.205)$$

**Proposition 4.2** La fonction  $u = f(x)$  est une solution partiellement invariante à (4.1) de défaut  $\delta$  si et seulement si

$$\text{rang } Q(x, u^{(1)}) = \delta. \quad (4.206)$$

Il est à noter que l'inégalité correspondante,  $\text{rang } Q(x, u^{(1)}) \leq \delta$ , correspondant aux solutions partiellement invariantes de rang au plus  $\delta$ , est prescrite par une collection de contraintes différentielles de premier ordre trouvée en égalisant tous les sous déterminants  $\delta \times \delta$  de  $Q$  à zéro.

**Exemple 4.13** Considérons les équations pour un flot régulier de gaz trans-sonique

$$u_t = v_x, \quad v_t + uv_x = 0, \quad (4.207)$$

(où  $t = y$  est la coordonnée verticale) lesquelles sont équivalentes à l'équation hyperbolique non-linéaire  $u_{tt} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} = 0$ , une limite de l'équation de Boussinesq (4.36) quand il n'y a pas de dispersion. Par exemple, nous trouvons les solutions partiellement invariantes

de défaut 1 du groupe de symétrie consistant des changements d'échelle en  $x, t$  et des translations en  $v$ , lesquelles sont générées par les deux champs de vecteurs  $x\partial_x + t\partial_t$  et  $\partial_v$ . La matrice caractéristique (4.205) est

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -xu_x - tu_t & -xv_x - tv_t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une solution de défaut 1 satisfera la condition rang  $\mathbf{Q} = 1$ , laquelle requiert  $xu_x + tu_t = 0$ . Par conséquent, nous avons besoin de résoudre le système combiné d'équation différentielles partielles

$$u_t = v_x, \quad v_t + uv_x = 0, \quad xu_x + tu_t = 0.$$

(Il est à noter que la contrainte, de plus, n'est pas la même que la contrainte d'invariance d'un groupe, (4.89), laquelle nécessiterait deux équations additionnelles; par exemple, l'invariance sous le sous-groupe d'échelle généré par  $x\partial_x + t\partial_t$  donne les contraintes  $xu_x + tu_t = xv_x + tv_t = 0$ .) La solution à l'équation de contrainte est  $u = \varphi(z)$ , où  $z = x/t$ . La substitution dans (4.207) mène au système  $v_x = u_t = -t^{-1}z\varphi'(x)$ ,  $v_t = -uv_x = -t^{-1}\varphi(z)\varphi'(z)$ , lequel a la condition d'intégrabilité  $[(z^2 + \varphi)\varphi']' = 0$ . Ceci peut être réduit à l'équation différentielle ordinaire de premier ordre  $(\varphi + z^2)\varphi' = k$ , qui, cependant, n'a pas de solution générale élémentaire.

**Exemple 4.14** Un exemple plus substantiel est donné par les équations de couches frontières de Prandtl (Prandtl boundary layer equations)

$$u_{yy} = u_t + uu_x + vu_y + p_x, \quad u_x + v_y = 0, \quad p_y = 0. \quad (4.208)$$

Les générateurs de symétrie classiques sont

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \partial_t, & \mathbf{v}_2 &= 2t\partial_t + 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v, & \mathbf{v}_3 &= x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p, \\ \mathbf{v}_\alpha &= \alpha(t)\partial_x + \alpha'(t)\partial_u - \alpha''(t)x\partial_p, & \mathbf{v}_\beta &= \beta(t)\partial_y + \beta'(t)\partial_v. \end{aligned}$$

Comme exemple particulier, nous considérons les solutions partiellement invariantes de défaut 2 pour le sous-groupe généré par

$$\mathbf{v}_1 = \partial_t, \quad \mathbf{v}_{\beta=1} = \partial_y, \quad \mathbf{v}_3 = x\partial_x + u\partial_u + 2p\partial_p.$$

La matrice caractéristique (4.205) est

$$-\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} u_t & v_t & p_t \\ u_y & v_y & 0 \\ xu_x - u & xv_x & xp_x - 2p \end{pmatrix}.$$

Pour un défaut  $\delta = 2$ , nous exigeons un rang  $\mathbf{Q} = 2$ . Nous nous concentrons sur le sous cas où les deux premières colonnes de  $\mathbf{Q}$  sont linéairement dépendantes, ce qui est équivalent à la condition  $v = \phi(u/x)$ . Substituant cet «ansatz» dans le système, on obtient

$$u_x + \frac{1}{x}\phi'\left(\frac{u}{x}\right)u_y = 0, \quad u_{yy} = u_t + uu_x + \phi\left(\frac{u}{x}\right)u_y + p_x, \quad p_y = 0.$$

Par exemple, si  $\phi(s) = s$ , alors  $u = \psi(xe^{-y}, t)$ , où  $\psi$  satisfait

$$\psi_{zt} = \psi_z + 3z\psi_{zz} + z^2\psi_{zzz}.$$

Ainsi, nous avons réduit le système non-linéaire (4.208) à une équation linéaire. Une solution particulière trouvée par les méthodes de séparation de variables standard est

$$u = \cos\left(\sqrt{k}[\log x - y]\right)e^{-kt}, \quad v = \frac{1}{x} \cos\left(\sqrt{k}[\log x - y]\right)e^{-kt}, \quad p = 0.$$

### 4.7 Contraintes différentielles

La généralisation ultime, proposée dans [32], laquelle inclut toutes les précédentes méthodes, et plusieurs autres, est l'introduction des «conditions frontières» générales ou des «contraintes différentielles». (Voir aussi les travaux plus récent de Yanenko, [29], et Meleshko, [39].) Maintenant, nous généralisons le système (4.90) en permettant la possibilité de contraintes lesquelles dépendent des dérivées de plus haut ordre, conduisant à un système sur-déterminé de la forme

$$\begin{aligned} \Delta_\nu(x, u^{(n)}) &= 0, & \nu &= 1, \dots, m, \\ Q_\kappa(x, u^{(n)}) &= 0, & \kappa &= 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{4.209}$$

Les contraintes différentielles  $Q_\kappa(x, u^{(n)}) = 0$  ne sont plus restreintes à être des équations différentielles partielles d'ordre 1 données par les caractéristiques de symétrie (faible, non-classique ou classique), ou les conditions d'invariance partielle. La méthode des contraintes différentielles inclut (pratiquement) toutes les méthodes connues pour la détermination de solutions spéciales à des équations différentielles partielles, comme les solutions invariantes dans un groupe, les non-classiques, les symétries faibles, les solutions partiellement invariantes, la séparation de variables, aussi bien que toutes les autres. À côté des contraintes de premier ordre discutées ci-haut, des contraintes d'ordre plus élevé incluent la séparation des variables additive «ansatz»  $u(x, t) = \alpha(x) + \beta(t)$ , correspondant à la contrainte  $u_{xt} = 0$  et la plus commune séparation des variables multiplicative  $u(x, t) = \alpha(x)\beta(t)$  correspondant à la contrainte  $uu_{xt} - u_xu_t = 0$  (Bien sûr, ces deux «ansatzes» sont très facilement mises en relation par le changement de variables  $u \mapsto \log u$ .) Les contraintes différentielles ont une interprétation théorique de groupe comme «les symétries faibles généralisées» bien que ça ne semble pas être une observation très utile. La difficulté principale est que cette approche, quoique apportant une structure générale complète laquelle inclut n'importe quelle approche spéciale, est beaucoup trop générale pour être d'une utilité calculatoire directe.

**Exemple 4.15 :** Considérons une fois encore l'équation de Boussinesq (4.36). Nous imposons la contrainte différentielle  $uu_{xt} - u_xu_t = 0$ , laquelle est équivalente à la séparation

de variables  $u = \alpha(x)\beta(t)$ . En substituant cette expression dans (4.36) et séparant les termes qui dépendent soit en  $x$  ou en  $t$ , nous obtenons un système réduit

$$\lambda\alpha + \alpha\alpha'' + \alpha'^2 + \alpha'''' = 0, \quad \beta'' = \lambda\beta^2.$$

La solution générale de ce système inclut nos solutions de similarité initiales  $u(x, t) = -x^2/t^2$ .

**Exemple 4.16 :** Considérons l'équation d'évolution parabolique non-linéaire

$$u_t = u_{xx} + u_x^2 + u^2, \quad (4.210)$$

apparaissant comme un modèle pour la combustion. La contrainte  $u_x u_{xxt} - u_{xx} u_{xt} = 0$  correspond à la séparation «ansatz»

$$u(x, t) = \alpha(t) + \beta(t)\theta(x), \quad (4.211)$$

où  $\alpha, \beta, \theta$  sont des fonctions d'une seule variable. En introduisant (4.211) dans (4.210), on obtient

$$(\alpha_t - \alpha^2) + (\beta_t - 2\beta\alpha)\theta - \beta\theta_{xx} = \alpha^2(\theta_x^2 + \theta^2) = 0. \quad (4.212)$$

Puisque  $\alpha, \beta$  dépendent seulement de  $t$ , tandis que  $\theta$  dépend seulement de  $x$ , l'équation (4.212) sera incompatible à moins que  $\theta$  satisfasse

$$\theta'' = a\theta + b, \quad \theta'^2 + \theta^2 = c\theta + d,$$

pour  $a, b, c, d$  constant. Ceci fonctionne si, par exemple,  $a = 1, b = c = 0, d = 1$ , avec  $\theta(x) = \cos(x)$ . Dans ce cas, (4.212) se réduit à un système couplé d'équations différentielles ordinaires de premier ordre

$$\alpha' = \alpha^2 + \beta^2, \quad \beta' = 2\beta\alpha - \beta,$$

pour lequel il reste des fonctions indéterminées  $\alpha(t), \beta(t)$ . Le dernier des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre n'a pas de solution générale explicite; néanmoins, des investigations numériques et analytiques conduisent à des applications importantes dans l'étude des «blow-up» des solutions à l'équation originale (4.210), cf. [44].

## Chapitre 5

# Solutions conditionnellement invariantes

Le dernier chapitre s'est terminé avec une section dans laquelle il est question de la méthode des contraintes différentielles. Cette dernière inclut toutes les autres méthodes d'obtention de classes de solutions des EDPs, telles que les solutions invariantes dans un groupe, la méthode non-classique, les symétries faibles, les solutions partiellement invariantes, etc. Toutefois, la méthode par les contraintes différentielles a une interprétation par la théorie des groupes, c'est-à-dire les symétries conditionnelles. Ce sont ces dernières qui font l'objet de notre attention dans ce chapitre. L'approche par les symétries conditionnelles peut être vue comme une extension de la méthode de réduction par symétrie pour les EDPs que l'on retrouve dans la théorie classique de Lie. Cette approche, dite non classique, consiste à appliquer le critère de symétrie au système sur-déterminé composé du système original augmenté de contraintes différentielles, lesquelles vérifient identiquement un critère de symétrie.

Tout d'abord, nous nous intéressons aux symétries conditionnelles du 1<sup>er</sup> ordre pour les systèmes d'EDPs du 1<sup>er</sup> ordre en  $p$  variables indépendantes et  $q$  variables dépendantes. Nous allons nous intéresser au cas particulier où le nombre de contraintes différentielles est égal au nombre de variables indépendantes. La raison pour laquelle nous nous concentrons sur ce cas est que nous allons établir un lien entre les contraintes différentielles et les transformations de Bäcklund. En effet, c'est M. Clairin [24] qui fut le premier à remarquer que le nombre de contraintes différentielles nécessaires à l'établissement de la transformation de Bäcklund pour une équation scalaire en deux variables indépendantes était deux. L'approche présentée peut donc être vue comme une généralisation de la méthode de Clairin combinée aux méthodes de réduction par symétrie.

Nous débutons en discutant l'existence des symétries conditionnelles pour un système d'EDPs du 1<sup>er</sup> ordre. Ensuite, nous mettons en évidence le lien avec les transformations de Bäcklund dans le cas où elles existent. Nous terminons, en présentant des exemples de

l'application de cette méthode.

### 5.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de symétries conditionnelles de 1<sup>er</sup> ordre pour un système de 1<sup>er</sup> ordre. Les transformations de Bäcklund associées

Considérons un système de premier ordre en  $p$  variables indépendantes  $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$  et  $q$  variables dépendantes  $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$

$$\Delta^s(x, u, u^{(1)}) = 0, \quad s = 1, \dots, m, \quad (5.1)$$

où  $u^{(1)} = (u_1^1, \dots, u_p^1, \dots, u_i^\alpha, \dots, u_p^q)$  et  $u_i^\alpha = \partial u^\alpha / \partial x^i$ . De plus, considérons les champs de vecteurs

$$Y_k = \xi_k^i(x, u) \partial_i + \varphi_k^\alpha(x, u) \partial_\alpha, \quad k = 1, \dots, p \quad (5.2)$$

définis dans  $J_0 = X \times U$ , où  $X = \mathbf{R}^p$  est l'espace des variables indépendantes et  $U = \mathbf{R}^q$  est l'espace des variables dépendantes et où  $\partial_i = \partial / \partial x^i$ ,  $\partial_\alpha = \partial / \partial u^\alpha$ . Les premières prolongations des champs de vecteurs (5.2) sont

$$\text{pr}^{(1)} Y_k = Y_k + (D_j Q_k^\alpha + \xi_k^i u^\alpha) \partial_{u_j^\alpha}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (5.3)$$

lesquelles sont définies dans l'espace des jets  $J^1 = J^1(X \times U)$  et où  $D_j$  dénote la dérivée totale par rapport à  $x^j$ . Le symbole  $Q_k^\alpha$  dans (5.3) représente les caractéristiques des champs de vecteurs (5.2). Explicitement celles-ci sont

$$Q_k^\alpha(x, u, u^{(1)}) = \varphi_k^\alpha - \xi_k u_i^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, p. \quad (5.4)$$

Exigeons maintenant que les caractéristiques  $Q_k^\alpha = 0$ , de sorte que nous obtenons  $p \times q$  contraintes différentielles que nous ajoutons au système d'EDPs (5.1) pour former le système sur-déterminé

$$\begin{aligned} \Delta^s(x, u, u^{(1)}) &= 0, \\ Q_k^\alpha(x, u, u^{(1)}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Par ailleurs, le système d'EDPs  $\Delta^s : J^1 \rightarrow \mathbf{R}^m$  peut être associé à la sous-variété de l'espace des solutions  $S_\Delta = \{(x, u, u^{(1)}) : \Delta^s(x, u, u^{(1)}) = 0, \quad s = 1, \dots, m\}$ , tandis que les caractéristiques  $Q_k^\alpha : J^1 \rightarrow \mathbf{R}^{p \times q}$  peuvent être associées à la sous-variété  $S_Q = \{(x, u, u^{(1)}) : Q_k^\alpha(x, u, u^{(1)}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, p\}$ .

**Définition 5.1 :** *Les champs de vecteurs  $Y_k$  sont dits des symétries conditionnelles si et seulement s'ils sont tangents à l'intersection des sous-variétés  $S_\Delta$  et  $S_Q$ , i.e., tangents à  $S = S_\Delta \cap S_Q$ .*

Le critère de symétrie du système sur-déterminé (5.5) est

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}Y_k(\Delta^s) &= 0, \\ \text{pr}^{(1)}Y_k(Q_i^\alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $\Delta^s = 0$  et  $Q_i^\alpha = 0$ . Dans un tel cas, les  $Y_k$  sont des symétries de (5.1) sous les conditions  $Q_i^\alpha = 0$ , en d'autres termes, ce sont des symétries conditionnelles de (5.1).

**Hypothèse 5.1 :** *Le système d'EDPs (5.1) admet un module de Lie  $\mathfrak{G}$  de dimension  $p$  de symétries conditionnelles dans le sens de la définition 5.1, tel que*

$$[Y_k, Y_l] = \tau_{kl}^r Y_r, \quad r = 1, \dots, p. \quad (5.7)$$

**Hypothèse 5.2 :**  $\det \xi_k \neq 0$ .

L'hypothèse 5.2 nous permet d'écrire les champs de vecteurs  $Y_k$  sous la forme

$$Z_r = (\xi^{-1})_r^i Y_i = \partial_r + \phi_r^\alpha \partial_\alpha, \quad (5.8)$$

où  $\phi_r^\alpha = (\xi^{-1})_r^i \varphi_i^\alpha$ . Les commutateurs des champs de vecteurs (5.8) sont

$$[Z_k, Z_j] = \left( \phi_{j,k}^\alpha + \phi_{j,u^\beta}^\alpha \phi_k^\beta - \phi_{k,j}^\alpha - \phi_{k,u^\beta}^\alpha \phi_j^\beta \right) \partial_\alpha. \quad (5.9)$$

Ainsi, les  $Z_k$  forment une algèbre de Lie seulement si

$$\phi_{j,k}^\alpha + \phi_{j,u^\beta}^\alpha \phi_k^\beta - \phi_{k,j}^\alpha - \phi_{k,u^\beta}^\alpha \phi_j^\beta = 0, \quad (5.10)$$

dans lequel cas, l'algèbre de Lie est abélienne. Il est clair que les conditions (5.10) sur les fonctions  $\phi_r^\alpha$  des champs de vecteurs  $Z_r$  sont nécessaires et suffisantes pour que les  $Z_k$  forment une algèbre de Lie abélienne. En considérant la forme (5.8) pour les champs de vecteurs, nous pouvons réécrire le système sur-déterminé (5.5) sous la forme

$$\Delta^s(x^i, u^\alpha, u_i^\alpha) = 0 \quad (5.11)$$

et

$$u_i^\alpha - \phi_i^\alpha(x, u) = 0. \quad (5.12)$$

En substituant (5.12) dans (5.11), on voit que les fonctions  $\phi_k^\alpha$  doivent, en particulier satisfaire

$$\Delta^s(x^i, u^\alpha, \phi_i^\alpha), \quad (5.13)$$

**Définition 5.2 :** Une algèbre de Lie générée par les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  est appelée une algèbre de Lie de symétries conditionnelles du système  $\Delta^s = 0$  si les conditions suivantes sont respectées :

$$(i) \quad [X_k, X_j] = C_{kj}^l X_l, \quad \text{où } C_{kj}^l X_l \text{ sont constantes de structure}$$

et

$$(ii) \quad \text{pr}^{(1)} X_k(\Delta^s) = 0 \quad \text{modulo } \Delta^s = 0 \text{ et } Q_i^\alpha = 0.$$

Sous les hypothèses précédentes nous avons le théorème suivant :

**Théorème 5.6 :** Soit  $p$  champs de vecteurs continuellement différentiables

$$Z_k = \partial_k + \phi_k^\alpha \partial_\alpha; \quad k = 1, \dots, p.$$

Si les fonctions  $\phi_k^\alpha$  sont choisies de sorte qu'elles satisfont

$$(a) \quad \phi_{j,k}^\alpha + \phi_{j,u^\beta}^\alpha \phi_k^\beta - \phi_{k,j}^\alpha - \phi_{k,u^\beta}^\alpha \phi_j^\beta = 0,$$

$$(b) \quad \Delta^s(x^i, u^\alpha, \phi_i^\alpha) = 0, \quad s = 1, \dots, m,$$

dans un certain voisinage de  $(x_0, u_0) \in S$ , alors le système de premier ordre

$$\Delta^s(x, u, u^{(1)}) = 0$$

admet une algèbre de Lie abélienne  $L$  de dimension  $p$  de symétries conditionnelles (dans le sens de la définition 5.2) avec générateurs  $Z_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ .

**Preuve** Les générateurs  $Z_k$  constituent des symétries conditionnelles pour le système (5.1) s'ils sont des symétries ponctuelles de Lie du système sur-déterminé (5.11)-(5.12). En effet, le critère infinitésimal (5.6) pour (5.12) est satisfait identiquement en considérant la condition (i), *i.e.*

$$\text{pr}^{(1)} Z_k(Q_j^\alpha) = \phi_{j,k}^\alpha + \phi_k^\beta \phi_{j,u^\beta}^\alpha - \phi_{k,j}^\alpha - \phi_j^\beta \phi_{k,u^\beta}^\alpha \equiv 0.$$

En appliquant le critère de symétrie (5.6) à (5.11), nous obtenons

$$\text{pr}^{(1)} Z_k(\Delta^s) = \partial_k \Delta^s + \phi_k^\alpha \partial_\alpha \Delta^s + \left( \phi_{k,j}^\alpha + \phi_j^\beta \phi_{k,u^\beta}^\alpha \right) \partial_{u_j^\beta} \Delta^s. \quad (5.14)$$

D'un autre côté, en dérivant (ii), nous trouvons

$$D_j \Delta^s = \partial_j \Delta^s + \phi_{k,j}^\alpha \partial_{u_k^\alpha} \Delta^s + \phi_j^\alpha (\partial_\alpha \Delta^s + \phi_{k,u^\alpha}^\beta \partial_{u_k^\beta} \Delta^s) = 0, \quad (5.15)$$

où les  $D_j$  sont les dérivées totales où (5.12) tient. En substituant (5.15) dans (5.14) en tenant compte de la condition (i), nous obtenons que l'équation (5.14) est identiquement nulle, ce qui termine la preuve.

**Remarque :**

- Si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors le graphe de la solution de (5.11)-(5.12) est invariant sous les champs de vecteurs  $Z_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ .
- Si l'ensemble des solutions des dites équations déterminantes obtenues en appliquant ce critère le symétrie au système sur-déterminé (5.11)-(5.12) est plus grand que le l'ensemble obtenu en appliquant ce critère au système initial (5.1), alors le système (5.11)-(5.12) admet un groupe de symétrie plus large que pour le système original (5.1). Ainsi, de nouvelles réductions pour le système (5.1) peuvent être obtenues.

Dans l'approche présentée, pour obtenir des solutions du système original (5.1), il faut résoudre le système (5.10)-(5.13) pour  $\phi_k^\alpha$  comme fonctions de  $x$  et  $u$ . Toutefois, ce système est en général non-linéaire et ne peut donc pas être résolu sous forme fermée, sauf dans quelques cas particuliers. Il existe quand même plusieurs cas physiquement intéressants pour lesquels les solutions de ce système conduisent aux transformations de Bäcklund de 1<sup>er</sup> ordre ou à des solutions qui dépendent de constantes arbitraires. Les solutions de (5.10)-(5.13) sont obtenues en effectuant l'expansion des fonctions  $\phi_k^\alpha$  en une forme polynomiale en  $u^\alpha$ .

Pour obtenir les transformations de Bäcklund à partir des conditions (5.10)-(5.13), il faut substituer la forme polynomiale assumée dans le système (5.10)-(5.13). Il faut ensuite exiger que les coefficients des différentes puissances de  $u^\alpha$  soit nuls, ce qui conduit à un système d'EDPs pour les coefficients  $a_{ik}^\alpha$ . Deux cas sont possibles pour les solutions de ce système. Soit l'ensemble des solutions est paramétré par certaines fonctions obéissant à des EDPs de premier ordre. Dans ce cas, des transformations de Bäcklund sont données par les relations (5.12). Soit l'ensemble des solutions est paramétré par des constantes arbitraires. Dans ce cas, nous n'avons que des solutions particulières. Pour plus de détail sur la façon d'obtenir les transformations de Bäcklund, on consultera [41].

## 5.2 Exemples d'applications

Présentons à présent plusieurs exemples d'application des techniques de construction des solutions conditionnellement invariantes. Notre étude portera sur une classe d'équations complètement intégrables. Nous allons, de plus, construire leurs transformations de Bäcklund. Un exemple d'une équation qui n'est pas complètement intégrable sera aussi illustré. Nous ne présenterons ici que les résultats principaux sans entrer dans les détails.

Nous commençons en considérant les implications du théorème (3.2 de la référence [41]) pour le cas d'une unique EDP d'ordre  $k$

$$\Delta(x, u^{(k)}) = 0. \quad (5.16)$$

Quand  $q = 1$ , la forme des contraintes différentielles ((3.4) de [41]) se simplifie considérablement. C'est un résultat bien connu, que dans ce cas la seule algèbre de Lie de dimension

finie pouvant être construite en terme du champ de vecteurs (3.5 de [41]) est  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , ainsi que ses sous algèbres. La représentation de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , à un changement de la variable  $u$  près, est donnée par

$$\hat{v}_0 = \frac{d}{du}, \quad \hat{v}_1 = u \frac{d}{du}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{2} u^2 \frac{d}{du}. \quad (5.17)$$

Ceci signifie que les contraintes différentielles ((3.4) de [41]), satisfaisant le théorème de Lie, deviennent une famille d'équations de Riccati, *i.e.*

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = A_i^0(x) + A_i^1(x)u + \frac{1}{2}A_i^2(x)u^2. \quad (5.18)$$

Ainsi, les fonctions  $\varphi_i^\alpha$  prennent une forme trinominale en  $u$ . Introduisons cette forme pour les fonctions  $\varphi_i^\alpha$  dans le système (5.11)-(5.12) et dans l'EDP (5.16). Nous exigeons ensuite que les coefficients des puissances successives de  $u$  dans les équations ainsi obtenues soient nulles. Ainsi, les conditions ((3.8) de [41]) peuvent être exprimées sous la forme

$$\begin{aligned} A_{[i,j]}^0 + A_{[i}^1 A_{j],u}^0 &= 0 \\ A_{[i,j]}^1 + A_{[i}^2 A_{j],u}^0 &= 0 \\ A_{[i,j]}^2 + A_{[i}^2 A_{j],u}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

et l'équation originale (5.16) devient une EDP d'ordre  $(k-1)$  pour les coefficients  $A_i^l$  de la fonction trinominale  $\varphi_i^\alpha$ .

**Exemple 5.17** Considérons l'équation de KdV de forme potentiel

$$u_t + 3u_x^2 + u_{xxx} = 0. \quad (5.20)$$

Nous cherchons des solutions de l'équation (5.20) invariantes sous les champs de vecteurs

$$Z_1 = \partial_x + \varphi(x, t, u)\partial_u, \quad Z_2 = \partial_t + \psi(x, t, u)\partial_u. \quad (5.21)$$

Exécutant la procédure décrite à la section précédente, nous construisons une algèbre de Lie de symétries conditionnelles à deux dimensions associées à l'équation KdV. Les conditions de l'invariance de l'équation (5.20) sous les champs de vecteurs (5.21) prennent la forme

$$u_x - \varphi(x, t, u) = 0, \quad u_t - \psi(x, t, u) = 0. \quad (5.22)$$

L'équation (5.20) prise avec les contraintes (5.22) correspond au système sur-déterminé composé de (5.11), (5.12) et (5.13) qui prend à présent la forme

$$\begin{aligned} \varphi_t + \psi\varphi_u - (\psi_x + \varphi\psi_u) &= 0 \\ \psi + \varphi_x\varphi_u + \varphi\varphi_u^2 + \varphi_{xx} + \varphi(2\varphi_{ux} + \varphi\varphi_{uu}) + 2\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pour résoudre les équations (5.23), nous considérons que les fonctions  $C^2$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont analytiques en  $u$  et qu'elles satisfont les critères du théorème de Lie. Ceci implique que les

fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont de forme trinomiale en  $u$  avec des coefficients réels qui dépendent de  $x$  et  $t$ .

$$\begin{aligned}\varphi &= a(x, t)u^2 + b(x, t)u + c(x, t) \\ \psi &= p(x, t)u^2 + q(x, t)u + r(x, t)\end{aligned}\tag{5.24}$$

En introduisant la forme (5.24) dans le système sur-déterminé (5.23) et en exigeant ensuite que les coefficients des puissances successives de  $u$  de l'équation ainsi obtenue s'annulent, on obtient

$$\begin{aligned}a_t - p_x + aq - pb &= 0 \\ b_t - q_x + a(ar - pc) &= 0 \\ c_t - r_x + rb - cq &= 0 \\ 3a^2(2a + 1) &= 0 \\ 6ab(2a + 1) &= 0 \\ p + 3b^2 + 6ac + 4ab_x + 5ba_x + 4a^2c + 7ab^2 + 4a + a_{xx} &= 0 \\ q + 6bc + 2ac_x + 3b_xb + 8abc + b^3 + b_{xx} + 4a_xc &= 0 \\ r + 3c^2 + c_xb + b^2c + c_{xx} + 2b_xc + 2ac^2 &= 0.\end{aligned}\tag{5.25}$$

L'intégrale générale de ces dernières équations est paramétrisée par une fonction  $b$ , laquelle satisfait l'équation de KdV (5.20), *i.e.*

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{2}u^2 + bu - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}b^2 + b_x\right) \\ \psi &= \left(b_x - \frac{\lambda}{2}\right)u^2 - 2\left(b_{xx} + \left(b_x - \frac{\lambda}{2}\right)b\right)u + b_{xxx} + 2bb_{xx} \\ &\quad + b_x^2 + (-\lambda + b^2)b_x - \frac{\lambda}{2}b^2 - \frac{\lambda^2}{2}\end{aligned}\tag{5.26}$$

et

$$b_t + 3b_x^2 + b_{xxx} = 0,\tag{5.27}$$

où  $\lambda$  est une constante réelle arbitraire. Ainsi, en prenant les caractéristiques (5.22) en considération, on voit que les transformations de Backlund prennent la forme

$$\begin{aligned}u_x &= -2\lambda - \frac{1}{2}(u - b)^2 - b_x \\ u_t &= -2(u_x^2 + u_xb_x + b_x^2) + (u - b)(u - b)_{xx} - b_t,\end{aligned}\tag{5.28}$$

ce qui est une autre méthode pour obtenir ce résultat connu.

**Exemple 5.18** Considérons à présent l'équation de Kadomste-Petviashvili (KP) dans sa forme du potentiel

$$(u_t + \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{1}{4}u_{xxx})_x + \frac{3}{4}l^2u_{yy} = 0,\tag{5.29}$$

où  $l = 1, \sqrt{-1}$ . Afin d'être en mesure d'utiliser les calculs déjà effectués pour l'équation de KdV (exemple 5.17), on réduit l'équation (5.29) à la forme plus convenable

$$\begin{aligned} u_t + \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{4}l^2 f_y &= 0 \\ u_y &= f_x. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Selon les exigences de la méthode, nous considérons un système d'E.D.P. sur-déterminé obtenu en augmentant le système (5.30) des contraintes différentielles de premier ordre

$$\begin{aligned} u_x &= \varphi(x, y, t, u, f), & u_t &= \psi(x, y, t, u, f), & u_y &= \rho(x, y, t, u, f) \\ f_t &= \eta(x, y, t, u, f), & f_x &= \rho(x, y, t, u, f), & f_y &= \xi(x, y, t, u, f). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Nous assumons le fait qu'il est possible de trouver des formules pour  $(u_t, u_x, u_y)$  et  $(f_t, f_x, f_y)$  en terme des variables  $x, y, t, u$  et  $f$ . Ceci signifie que nous cherchons une classe spéciale de solutions de (5.30) et (5.31), lesquelles sont invariantes sous les champs de vecteurs

$$\begin{aligned} Z_1 &= \partial_x + \varphi(x, y, t, u, f)\partial_u + \rho(x, y, t, u, f)\partial_f \\ Z_1 &= \partial_t + \psi(x, y, t, u, f)\partial_u + \eta(x, y, t, u, f)\partial_f \\ Z_1 &= \partial_y + \rho(x, y, t, u, f)\partial_u + \xi(x, y, t, u, f)\partial_f. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les conditions de compatibilité entre (5.30) et (5.31) sont trouvées par l'application des opérateurs différentielles (5.32), *i.e.*

$$\begin{aligned} \varphi_t + \psi\varphi_u + \eta\varphi_f + \rho_t + \psi\rho_u + \eta\rho_f - (\psi_x + \varphi\psi_u + \rho\psi_f + \eta_x + \varphi\eta_u + \rho\eta_f) &= 0 \\ \rho_t + \psi\rho_u + \eta\rho_f + \xi_t + \psi\xi_u + \eta\xi_f - (\psi_y + \rho\psi_u + \xi\psi_f + \eta_y + \rho\eta_u + \xi\eta_f) &= 0 \\ \varphi_y + \rho\varphi_u + \xi\varphi_f + \rho_y + \rho\rho_u + \xi\rho_f - (\rho_x + \varphi\rho_u + \rho\rho_f + \xi_x + \varphi\xi_u + \rho\xi_f) &= 0 \\ \psi + \frac{3}{4}\varphi^2 + \frac{1}{4}[\varphi_x\varphi_u + \varphi\varphi_u^2 + \varphi_{xx} + \varphi(2\varphi_{ux} + \varphi\varphi_{uu})] + \frac{3}{4}l^2\xi &= 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Nous postulons que les fonctions de classe  $C^2$ ,  $\varphi, \rho, \psi, \eta, \xi$  prennent la forme de séries de puissances en  $u$  et en  $f$  avec des coefficients réels qui dépendent de  $x, y, t$ , et nous substituons les fonctions sous cette forme dans (5.33). L'analyse des termes dominants de ces séries, dans l'équation ainsi construite, nous conduit à plusieurs cas. Un des cas les plus intéressants est celui où les séries ne dépendent pas de  $f$  et sont cubiques en  $u$  avec des coefficients ne dépendant que de  $x$  et  $t$ . En suivant la procédure décrite, on obtient un système de 12 E.D.P. pour ces coefficients. L'intégrale générale de ce système peut être paramétrisée par les fonctions  $v$  et  $g$ , lesquelles satisfont l'équation de KP, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \eta &= g_t = \frac{l}{4} \left( \varphi_x + \varphi\varphi_u - v_{xx} + 3 \left[ l(\rho + v_y) + (u - v)(\varphi + v_x + \frac{1}{3}(u - v)^2) \right] \right) \\ \rho &= g_x + l(u - v) \\ \xi &= g_y + \varphi + v_x + \frac{1}{2}(u - v)^2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

où

$$v_t + \frac{3}{4}v_x^2 + \frac{1}{4}v_{xxx} + \frac{3}{4}l^2g_y = 0, \quad v_y - g_x = 0. \quad (5.35)$$

Ainsi, en vertu de l'équation (5.31), les auto-transformations de Backlund, qui relie une solution de l'équation KP à une autre, sont données par les relations

$$(f - g)_t = -\frac{l}{4} \left( (u - v)_{xx} + 3 \left[ l(u + v)_y + 3(u - v)((u + v)_x + \frac{1}{3}(u - v)^2) \right] \right) \quad (5.36)$$

$$(f - g)_x = l(u - v), \quad (f - g)_y = (u + v)_x + \frac{1}{2}(u - v)^2,$$

lesquelles sont un résultat connu.

**Exemple 5.20** Un autre exemple intéressant est celui l'équation de Liouville généralisée (GL) en  $(n + 1)$  dimension. Elle a été formulée par P. Santini [35] et prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^n [u_{x^j x^j} - \frac{1}{2}(u_{x^j}^2)] \right) = 0. \quad (5.37)$$

L'analyse de cette équation par l'approche des symétries conditionnelles a été effectuée par P.Santini. Nous présentons ci-dessous ses résultats principaux. On cherche une solution de (5.37) invariante sous  $(n + 1)$  champs de vecteurs

$$Z_0 = \partial_t + \varphi^{(0)}(x, t, u)\partial_u, \quad Z_j = \partial_x^j + \varphi^{(j)}(x, t, u)\partial_u, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.38)$$

Nous complétons le système original (5.37) en exigeant que les caractéristiques des champs de vecteurs  $Z_0$  et  $Z_j$  soient nulles, *i.e.*

$$u_t - \varphi^{(0)}(x, t, u) = 0, \quad u_{x^j} - \varphi^{(j)}(x, t, u) = 0. \quad (5.39)$$

Les conditions de compatibilité pour (5.37) et (5.39) donnent les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{x^i}^{(j)} + \varphi^{(i)}\varphi_u^{(j)} &= \varphi_{x^j}^{(i)} + \varphi^{(j)}\varphi_u^{(i)} \\ \varphi_t^{(j)} + \varphi^{(0)}\varphi_u^{(j)} &= \varphi_{x^j}^{(0)} + \varphi^{(j)}\varphi_u^{(0)} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \left( \varphi_{xt}^{(j)} + \varphi^{(0)}\varphi_{x^j u}^{(0)} + \varphi_t^{(j)}\varphi_u^{(j)} + \varphi^{(0)}(\varphi_u^{(j)})^2 + \varphi^{(j)}\varphi_{ut}^{(j)} \right. \quad (5.40)$$

$$\left. + \varphi^{(j)}\varphi^{(0)}\varphi_{uu}^{(j)} - \varphi^{(j)}\varphi_t^{(j)} - \varphi^{(0)}\varphi^{(j)}\varphi_u^{(j)} \right) = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité, (5.40) prisent avec l'exigence que le système (5.39) satisfait les conditions ((3.4) de [41]) et ((3.6) de [41]), nous mènent aux équations de Riccati couplées de la forme (5.18). Il est approprié d'exprimer les fonctions  $\varphi^{(0)}$  et  $\varphi^{(j)}$  comme

des séries de Fourier en  $u$ . Ces séries sont au plus d'ordre 1 quand on les introduit dans (5.40), ainsi nous avons

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)} &= \alpha(x, t) + \beta(x, t)e^{u/2} \\ \varphi^{(j)} &= \gamma^{(j)}(x, t) + \lambda^{(j)}(x, t)e^{u/2}.\end{aligned}\quad (5.41)$$

En conséquence, (5.40) devient un système d'équations différentielles pour  $2(n+1)$  coefficients réels  $\alpha, \beta, \gamma^{(j)}$  et  $\lambda^{(j)}$ . L'intégrale générale de ce système prend la forme

$$\alpha = \gamma^{(j)} = 0, \quad \beta = \omega_t e^{-v/2}, \quad \lambda^{(j)} = \omega_{x^j} e^{-v/2}, \quad (5.42)$$

où la fonction  $v$  doit satisfaire l'équation de Liouville généralisée (5.37) et la fonction  $\omega$  satisfait l'équation différentielle linéaire

$$\sum_{j=1}^n (\omega_{x^j x^j} - v_{x^j} \omega_{x^j}) = 0. \quad (5.43)$$

Après avoir effectué les substitutions appropriées dans les équations (5.39), (5.41) et (5.42), nous obtenons les auto-transformations de Backlund de premier ordre pour l'équation de Liouville généralisée sous la forme

$$\begin{aligned}(u - v)_{x^j} &= w_{x^j} e^{(u-v)/2} \\ (u - v)_t &= w_t e^{(u-v)/2}.\end{aligned}\quad (5.44)$$

Noter que si l'équation différentielle (5.43) peut être résolue pour une solution  $v$  donnée de l'équation de Liouville généralisée (5.37), alors le système (5.44) définit une transformation spécifique entre l'équation GL pour  $u$  et celle pour  $v$ . De telle manière, on peut construire une solution  $u$  pour chaque solution  $v$  connue et vice versa. Nous remarquons qu'après la transformation  $u = 2 \ln p$  et  $v = 2 \ln q$  dans l'équation (5.44), nous pouvons réécrire l'auto-transformation de Backlund (5.44) sous la forme Riccati

$$Y_{x^j} = \frac{1}{2} w_{x^j} Y^2, \quad Y_t = \frac{1}{2} w_t Y^2, \quad \text{où } Y = p/q. \quad (5.45)$$

Une solution explicite de (5.45) en  $(2+1)$  dimensions peut facilement être construite à partir de la solution constante

$$u = 2 \ln |f(x_1 + ix_2, t) + g(x_1 - ix_2, t)| + h(t), \quad (5.46)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions arbitraires différentiables de leurs arguments et  $h$  est une fonction arbitraire différentiable en  $t$ . Dans le cas où la fonction  $w$  a la forme

$$w = w_0(t) + \sum_{j=1}^n w_j(x^j), \quad (5.47)$$

la solution multi-solitonique suivante peut être construite en  $(n+1)$  dimensions par des applications successives de l'auto-transformation de Backlund (5.45)

$$u = \ln \left| \frac{\dot{F}_0(t) \prod_{j=1}^n \dot{F}_j(x^j)}{\left( c_0 G(t) + \sum_{j=1}^n c_j F_j(x^j) \right)^2} \right|, \quad (5.48)$$

où  $F_0, F_j$  et  $G$  sont des fonctions arbitraires de leurs arguments et le point dénote la dérivée, *i.e.*  $\dot{F} = \frac{dF(s)}{ds}$ .

Finalement, considérons l'équation GL (5.37) pour une variété pseudo-Riemannienne  $(X, \cdot | \cdot)$  de dimension  $p = n + 1$ , où la métrique  $(\cdot | \cdot)$  est non-dégénérée mais nécessairement définie positivement. Alors, pour la fonction  $u$  (de la classe  $C^3$ ), définie dans un voisinage de  $\mathcal{D} \subset X$ , l'équation (5.37) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2 u - \frac{1}{2} (\nabla u | \nabla u) \right) = 0, \quad (5.49)$$

où  $\nabla u$  dénote le gradient de la fonction  $u$  et  $\nabla^2$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami par rapport à la métrique  $(\cdot | \cdot)$ . L'auto-BT de premier ordre (5.44) pour l'équation (5.49) a la même forme que lorsque la métrique est définie positivement (*i.e.* quand  $X$  est un espace Euclidien). Comme auparavant, la fonction  $w$  doit satisfaire l'équation différentielle linéaire de la forme

$$\nabla^2 w - (\nabla v | \nabla w) = 0. \quad (5.50)$$

Supposons maintenant que la variété  $X$  est un espace de Minkowski de dimension  $(2 + 1)$  avec les coordonnées cartésiennes  $(x_0, x_1, x_2)$  telles que  $|x|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ . Alors, une solution explicite de (5.49), écrite en coordonnées polaires, a la forme

$$u = -2 \ln \left| \left( A(t) \cos \frac{\varphi}{2} + B(t) \sin \frac{\varphi}{2} \right) r^{-1/2} F(x_0 - r, t) \right|, \quad (5.51)$$

où  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $F$  est une fonction réelle de deux variables,  $A$  et  $B$  sont deux fonctions arbitraires d'une variable.

**Exemple 5.21** L'exemple que voici constitue une application des méthodes présentées. Le résultat obtenu n'a jamais paru dans la littérature jusqu'ici.

On cherche les solutions de l'équation double sine-Gordon (DSG)

$$u_{xt} = \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u \quad (5.52)$$

sous les champs de vecteurs

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x + \varphi(x, t, u) \partial_u \\ X_2 &= \partial_t + \psi(x, t, u) \partial_u \end{aligned} \quad (5.53)$$

en exigeant que les caractéristiques de ces champs de vecteurs s'annulent, d'où

$$\begin{aligned} Q_1 &= \phi - u_x = 0 \\ Q_2 &= \psi - u_t = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

En dérivant (5.54.a) par rapport à  $t$  et (5.54.b) par rapport à  $x$ , on obtient

$$\begin{aligned}\phi_t + \phi_u \psi &= u_{xt} \\ \psi_x + \psi_u \phi &= u_{tx}.\end{aligned}\tag{5.55}$$

La condition  $u_{xt} = u_{tx}$  implique que

$$\phi_t + \phi_u \psi = \psi_x + \psi_u \phi = \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u,\tag{5.56}$$

d'où

$$\begin{aligned}\phi_t + \phi_u \psi &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u \\ \psi_x + \psi_u \phi &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u\end{aligned}\tag{5.57}$$

sont satisfaites. On cherche une solution sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{k=0}^r (A^k(x, t) \sin(ku) + B^k(x, t) \cos(ku)) \\ \psi &= \sum_{l=0}^s (C^l(x, t) \sin(lu) + D^l(x, t) \cos(lu))\end{aligned}$$

En introduisant cette forme de solution dans (5.57), on constate aisément que la solution est de degré 2. On cherche alors une solution sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi &= A^1(x, t) \sin(u) + B^1(x, t) \cos(u) + C^1(x, t) \\ \psi &= A^2(x, t) \sin(u) + B^2(x, t) \cos(u) + C^2(x, t).\end{aligned}\tag{5.58}$$

En substituant (5.58) dans (5.57), nous obtenons

$$\begin{aligned}A_t^1 \sin(u) + B_t^1 \cos(u) + C_t^1 \\ + (A^1 \cos(u) - B^1 \sin(u)) (A^2 \sin(u) + B^2 \cos(u) + C^2) &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u, \\ A_x^2 \sin(u) + B_x^2 \cos(u) + C_x^2 \\ + (A^2 \cos(u) - B^2 \sin(u)) (A^1 \sin(u) + B^1 \cos(u) + C^1) &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u,\end{aligned}\tag{5.59}$$

que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned}C_t^1 + (A_t^1 - B^1 C^2) \sin(u) + (B_t^1 + A^1 C^2) \cos(u) + \frac{A^1 B^2}{2} (1 + \cos(2u)) \\ - \frac{A^2 B^1}{2} (1 - \cos(2u)) + (A^1 A^2 - B^1 B^2) \frac{1}{2} \sin(2u) &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u, \\ C_x^2 + (A_x^2 - B^2 C^1) \sin(u) + (B_x^2 + A^2 C^1) \cos(u) + \frac{A^2 B^1}{2} (1 + \cos(2u)) \\ - \frac{A^1 B^2}{2} (1 - \cos(2u)) + (A^1 A^2 - B^1 B^2) \frac{1}{2} \sin(2u) &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u.\end{aligned}$$

Nous regroupons les termes en puissances de fonctions trigonométriques, ce qui donne

$$\begin{aligned}
 C_t^1 + \frac{A^1 B^2}{2} - \frac{A^2 B^1}{2} + (A_t^1 - B^1 C^2) \sin(u) + (B_t^1 + A^1 C^2) \cos(u) \\
 + \left( \frac{A^1 B^2}{2} + \frac{A^2 B^1}{2} \right) \cos(2u) + (A^1 A^2 - B^1 B^2) \frac{1}{2} \sin(2u) &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u, \\
 C_x^2 + \frac{A^2 B^1}{2} - \frac{A^1 B^2}{2} + (A_x^2 - B^2 C^1) \sin(u) + (B_x^2 + A^2 C^1) \cos(u) \\
 + \left( \frac{A^2 B^1}{2} + \frac{A^1 B^2}{2} \right) \cos(2u) + (A^1 A^2 - B^1 B^2) \frac{1}{2} \sin(2u) &= \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda \sin u.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

On exige que les coefficients de (5.60) des fonctions sinusoïdales s'annulent. On obtient alors le système suivant :

$$\sin(2u) : \quad A^1 A^2 - B^1 B^2 = 1 \tag{5.61}$$

$$\cos(2u) : \quad A^1 B^2 + A^2 B^1 = 0 \tag{5.62}$$

$$\sin(u) : \quad A_t^1 - B^1 C^2 = \lambda, \quad A_x^2 - B^2 C^1 = \lambda \tag{5.63}$$

$$\cos(u) : \quad B_t^1 + A^1 C^2 = 0, \quad B_x^2 + A^2 C^1 = 0 \tag{5.64}$$

$$1 : \quad C_t^1 + \frac{A^1 B^2}{2} - \frac{A^2 B^1}{2} = 0, \quad C_x^2 + \frac{A^2 B^1}{2} - \frac{A^1 B^2}{2} = 0. \tag{5.65}$$

À l'aide des équations (5.61) et (5.62), on trouve aisément que

$$\left( (A^1)^2 + (B^1)^2 \right) A^2 = A^1, \quad \left( (A^1)^2 + (B^1)^2 \right) B^2 = -B^1 \tag{5.66}$$

et

$$\left( (A^2)^2 + (B^2)^2 \right) A^1 = A^2, \quad \left( (A^2)^2 + (B^2)^2 \right) B^1 = -B^2 \tag{5.67}$$

En introduisant (5.66) dans (5.67), on conclut que

$$\left( (A^1)^2 + (B^1)^2 \right) \left( (A^2)^2 + (B^2)^2 \right) = 1. \tag{5.68}$$

En éliminant  $C^1$  et  $C^2$  des équations (5.63) et (5.64), on trouve

$$A^1 A_t^1 + B^1 B_t^1 = \lambda A^1 \tag{5.69}$$

et

$$A^2 A_x^2 + B^2 B_x^2 = \lambda A^2. \tag{5.70}$$

De (5.69), on a que

$$\left( (A^1)^2 + (B^1)^2 \right)_t = 2\lambda A^1, \tag{5.71}$$

tandis que de (5.80), on a que

$$\left( (A^2)^2 + (B^2)^2 \right)_x = 2\lambda A^2. \tag{5.72}$$

En divisant (5.71) par (5.66), on obtient

$$\frac{\left((A^1)^2 + (B^1)^2\right)_t}{\left((A^1)^2 + (B^1)^2\right)} = 2\lambda A^2. \quad (5.73)$$

En divisant (5.72) par (5.67), on obtient

$$\frac{\left((A^2)^2 + (B^2)^2\right)_x}{\left((A^2)^2 + (B^2)^2\right)} = 2\lambda A^1. \quad (5.74)$$

On a donc

$$\left[\ln \left((A^1)^2 + (B^1)^2\right)\right]_t = 2\lambda A^2 \quad (5.75)$$

et

$$\left[\ln \left((A^2)^2 + (B^2)^2\right)\right]_x = 2\lambda A^1. \quad (5.76)$$

On intègre ensuite (5.75) et (5.76), d'où

$$\ln \left((A^1)^2 + (B^1)^2\right) = \int 2\lambda A^2 dt + f(x), \quad (5.77)$$

$$\ln \left((A^2)^2 + (B^2)^2\right) = \int 2\lambda A^1 dx + g(t). \quad (5.78)$$

On additionne les équations (5.77) et (5.78), ce qui donne

$$\ln \left[\left((A^1)^2 + (B^1)^2\right) \left((A^2)^2 + (B^2)^2\right)\right] = \int 2\lambda A^1 dx + \int 2\lambda A^2 dt + g(t) + f(x), \quad (5.79)$$

mais en vertu de l'équation (5.68), (5.79) donne

$$\int 2\lambda A^1 dx + \int 2\lambda A^2 dt + g(t) + f(x) = 0, \quad (5.80)$$

que l'on peut dériver par rapport à  $x$  et ensuite par rapport à  $t$ , de telle sorte que

$$A_x^2 = -A_t^1. \quad (5.81)$$

Posons  $v_{xt} = A_x^2 = -A_t^1$ , ainsi (5.81)

$$A^2 = v_t, \quad A^1 = -v_x. \quad (5.82)$$

Ainsi, les équations (5.77) et (5.78) deviennent, en tenant compte de (5.82),

$$\ln \left((A^1)^2 + (B^1)^2\right) = 2\lambda v, \quad (5.83)$$

$$\ln \left((A^2)^2 + (B^2)^2\right) = -2\lambda v. \quad (5.84)$$

Ce qui implique

$$\left( (A^1)^2 + (B^1)^2 \right) = e^{2\lambda v}, \quad (5.85)$$

$$\left( (A^2)^2 + (B^2)^2 \right) = e^{-2\lambda v}. \quad (5.86)$$

En vertu de (5.66) et (5.67), nous avons

$$\left( (A^1)^2 + (B^1)^2 \right) = -\frac{v_x}{v_t}, \quad (5.87)$$

et

$$\left( (A^2)^2 + (B^2)^2 \right) = -\frac{v_t}{v_x}. \quad (5.88)$$

En comparant (5.85) et (5.86),

$$-\frac{v_x}{v_t} = e^{2\lambda v}. \quad (5.89)$$

En comparant (5.66) et (5.87), on a que

$$-\frac{B^1}{B^2} = e^{2\lambda v}. \quad (5.90)$$

$$B^1 = \pm e^{\lambda v} \sqrt{1 - v_t^2 e^{2\lambda v}}, \quad B^2 = \mp e^{-\lambda v} \sqrt{1 - v_x^2 e^{-2\lambda v}}. \quad (5.91)$$

Nous avons comme conséquence différentielle de (5.91.a) que

$$B_t^1 = \pm \frac{e^{\lambda v} v_t (\lambda - 2\lambda v_t^2 e^{2\lambda v} - v_{tt} e^{2\lambda v})}{\sqrt{1 - v_t^2 e^{2\lambda v}}}. \quad (5.92)$$

En substituant (5.92) dans (5.69), en tenant compte de (5.82), nous avons que

$$v_x v_{xt} + e^{\lambda v} \sqrt{1 - v_t^2 e^{2\lambda v}} \frac{e^{\lambda v} v_t (\lambda - 2\lambda v_t^2 e^{2\lambda v} - v_{tt} e^{2\lambda v})}{\sqrt{1 - v_t^2 e^{2\lambda v}}} = -\lambda v_x, \quad (5.93)$$

d'où, après quelques manipulations, nous obtenons

$$(2\lambda v + \ln v_t - \ln v_x)_t = 0. \quad (5.94)$$

Par ailleurs, nous avons comme conséquence différentielle de (5.91.b) que

$$B_x^2 = \mp v_x e^{-\lambda v} \left( \frac{-\lambda - v_{xx} e^{-2\lambda v} + 2\lambda v_x^2 e^{-2\lambda v}}{\sqrt{(1 - v_x^2 e^{-2\lambda v})}} \right). \quad (5.95)$$

En substituant (5.95) dans (5.80), on trouve

$$v_t v_{xt} + e^{-2\lambda v} v_x (-\lambda - v_{xx} e^{-2\lambda v} + 2\lambda v_x^2 e^{-2\lambda v}) = \lambda v_t, \quad (5.96)$$

d'où après quelques manipulations, on a

$$(\ln v_t - \ln v_x + 2\lambda v)_x = 0 \quad (5.97)$$

En comparant (5.94) et (5.97), on conclut que

$$2\lambda v + \ln v_t - \ln v_x = 0, \quad (5.98)$$

ce qui nous conduit à

$$e^{2\lambda v} = \frac{v_x}{v_t}. \quad (5.99)$$

Toutefois, (5.99) doit être consistante avec (5.89), ce qui implique

$$v_t = 0$$

et

$$v_x = 0,$$

et par conséquent

$$A^1 = 0, \quad A^2 = 0. \quad (5.100)$$

L'introduction de (5.100) dans les équations (5.61) à (5.65) réduit le système constitué de ces équations à

$$-B^1 B^2 = 1, \quad (5.101)$$

$$-B^1 C^2 = \lambda, \quad (5.102)$$

$$-B^2 C^1 = \lambda \quad (5.103)$$

$$B_t^1 = 0, \quad (5.104)$$

$$B_x^2 = 0, \quad (5.105)$$

$$C_t^1 = 0, \quad (5.106)$$

$$C_x^2 = 0. \quad (5.107)$$

De (5.104) et (5.105) on a immédiatement que

$$B^1 = B^1(x), \quad B^2 = B^2(t), \quad C^1 = C^1(x), \quad C^2 = C^2(t). \quad (5.108)$$

(5.108) dans (5.102) et (5.103) implique que

$$B^1, B^2, C^1, C^2$$

sont des constantes. Nous posons

$$B^1 = \mu,$$

ce qui implique

$$B^2 = -\frac{1}{\mu},$$

$$C^1 = \mu\lambda,$$

$$C^2 = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

En introduisant, ces valeurs de  $B^1$ ,  $B^2$ ,  $C^1$  et  $C^3$  dans (5.58), nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi &= \mu \cos(u) + \mu\lambda, \\ \psi &= -\frac{1}{\mu} \cos(u) - \frac{\lambda}{\mu}.\end{aligned}\tag{5.109}$$

Ainsi, en vertu de (5.54), nous avons

$$\begin{aligned}u_x &= \mu (\cos u + \lambda), \\ u_t &= -\frac{1}{\mu} (\cos u + \lambda).\end{aligned}\tag{5.110}$$

La paire d'équations (5.110) constitue la transformation de Bäcklund pour l'équation (5.52), où  $\mu$  est le paramètre de Bäcklund.

**Exemple 5.22** Considérons un cas spécial de l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS), c'est-à-dire l'équation de Schrödinger cubique

$$iu_t + u_{xx} = \epsilon u|u|^2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad u \in \mathbb{C},\tag{5.111}$$

où  $\bar{u}$  est la conjuguée complexe de  $u$ . Les résultats obtenus, ici, sont tout à fait nouveaux. Cherchons les classes de solutions de (5.111) qui sont invariantes sous les champs de vecteurs

$$\begin{aligned}Z_1 &= \partial_x + \varphi(x, t, u, \bar{u})\partial_u + \bar{\varphi}(x, t, u, \bar{u})\partial_{\bar{u}}, \\ Z_2 &= \partial_x + \psi(x, t, u, \bar{u})\partial_u + \bar{\psi}(x, t, u, \bar{u})\partial_{\bar{u}}.\end{aligned}\tag{5.112}$$

Ainsi, nous augmentons l'équation NLS avec le système obtenu en exigeant que les caractéristiques soient zéro, *i.e.*

$$\begin{aligned}Q_1 = (Q_1^\alpha) &= (\varphi - u_x, \bar{\varphi} - \bar{u}_x) = (0, 0), \\ Q_1 = (Q_1^\alpha) &= (\psi - u_t, \bar{\psi} - \bar{u}_t) = (0, 0).\end{aligned}\tag{5.113}$$

Les conditions (5.113) impliquent que  $\bar{\varphi}$  et  $\bar{\psi}$  sont les conjuguées complexes de  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement. Ainsi, nous cherchons des solutions du système sur-déterminé formé en ajoutant

$$u_x = \varphi(x, t, u, \bar{u}), \quad u_t = \psi(x, t, u, \bar{u})\tag{5.114}$$

à l'équation (5.111). Le problème est équivalent à l'étude de l'existence de solutions du système suivant :

$$\begin{aligned}(i) \quad &\varphi_t + \psi\varphi_u + \bar{\psi}\varphi_{\bar{u}} = \psi_x + \varphi\psi_u + \bar{\varphi}\psi_{\bar{u}}, \\ (ii) \quad &\varphi_x + \varphi\varphi_u + \bar{\varphi}\varphi_{\bar{u}} + i\psi - \epsilon u|u|^2.\end{aligned}\tag{5.115}$$

Supposons que les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont trinomiales en  $u$  seulement. En introduisant cette forme pour  $\varphi$  et  $\psi$  dans (5.115) et en exigeant que les coefficients des puissances successives

de  $u$  dans les équations ainsi obtenues soient nuls, nous obtenons alors 16 équations pour 6 coefficients complexes de  $\varphi$  et  $\psi$  à déterminer. La solution générale de ces équations est

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\epsilon}{2}\bar{v} - \lambda u - \frac{v}{2}u^2, \\ \psi &= -\frac{i\epsilon}{2}(\bar{v}_x - \lambda\bar{v}) - \frac{i}{2}(2\lambda^2 - \epsilon|v|^2)u - \frac{i}{2}(\lambda v + v_x)u^2\end{aligned}\quad (5.116)$$

où la fonction  $v$  satisfait l'équation de NLS cubique

$$iv_t + v_{xx} = \epsilon v|v|^2, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (5.117)$$

et  $\lambda$  est un paramètre complexe arbitraire. En considérant les équations caractéristiques (5.114), nous pouvons reconstruire l'auto-transformation de Bäcklund

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{1}{2}vu^2 - \lambda u + \frac{\epsilon}{2}\bar{v}, \\ u_t &= -\frac{i}{2}(\lambda v + v_x)u^2 + \frac{i}{2}(\epsilon|v|^2 - a\lambda^2)u + i\frac{\epsilon}{2}(\lambda\bar{v} - \bar{v}).\end{aligned}\quad (5.118)$$

Les exemples présentés ici démontrent l'efficacité de l'approche par symétrie conditionnelle. Notre reconstruction de résultats déjà bien connus pour les équations KdV, KP, SG et DSG prouve que les techniques proposées apportent une manière plus rapide et plus efficace de reconstruire les transformations de Bäcklund que les autres méthodes classique. L'exemple de l'équation de Liouville généralisée démontre le potentiel de cette technique pour produire de nouveaux résultats intéressants. Nous pouvons ajouter que la procédure est pratiquement complètement algorithmique et qu'il est possible d'utiliser des programmes mathématiques.

### 5.3 Contraintes différentielles d'ordre plus élevé.

Portons notre attention sur la possibilité d'obtenir des solutions conditionnellement invariantes à partir de contraintes différentielles d'ordre plus élevé que le premier ordre. Nous adaptons les résultats de la section 5.1 au cas d'une EDP unique d'ordre  $k$  soumise à des contraintes différentielles d'ordre deux. Soit

$$\Delta(x, u^{(k)}) = 0, \quad (5.119)$$

une EDP scalaire d'ordre  $k$  en  $p + 1$  variables indépendantes  $x = (\bar{x}, x_0) \in X \subset \mathbb{R}^{p+1}$ . Effectuons deux suppositions. La première est que le système (5.119) peut être développé comme une série de puissances finie des variables  $u^\alpha$  et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  avec des coefficients qui dépendent des  $x$ . La seconde supposition est que (5.119) admet un module de Lie  $\mathcal{A}$  de symétries conditionnelles dont la dimension est  $(p + 1)$  et dont les générateurs, définis sur  $J_0 = X \times U^2$ , sont donnés par

$$\begin{aligned}X_a &= \partial_{x_a} + \gamma_a \partial_u + \lambda_a \partial_v, & a = 1, \dots, p, \\ X_0 &= \partial_{x_0} + v \partial_u + \phi \partial_v,\end{aligned}\quad (5.120)$$

tels que

$$[X_\mu, X_\nu] = \tau_{\mu\nu}^\sigma X^\sigma, \quad 0 \leq \mu, \nu, \sigma \leq p,$$

où nous introduisons une nouvelle fonction réelle  $v : D \rightarrow U(D \subset X)$ . Nous considérons que les fonctions  $\phi, \gamma_a, \lambda_a$  et  $\tau_{\mu\nu}^\sigma$  dépendent des variables  $x, u$  et  $v$  seulement. Nous nous limitons au cas où l'EDP initial (5.119) est soumise à des contraintes différentielles obtenues en exigeant que les caractéristiques des champs de vecteurs  $X_\mu$  soient nulles, *i.e.*

$$\begin{aligned} Q_0(x, u^{(1)}, v^{(1)}) &\equiv (u_0 - v, v_0 - \phi) = (0, 0), \\ Q_a(x, u^{(1)}, v^{(1)}) &\equiv (u_a - \gamma_a, v_a - \lambda_a) = (0, 0). \end{aligned} \quad (5.121)$$

Nous formons un système sur-déterminé composé de (5.119) et (5.121). En éliminant la variable auxiliaire  $v$  des contraintes (5.121), ce système se réduit à un système sur-déterminé pour  $u$  seulement avec des contraintes d'ordre un et d'ordre deux, *i.e.*

$$\Delta(x, u^{(k)}) = 0, \quad (5.122)$$

$$\begin{aligned} u_0 - \phi(x, u, u_0) = 0, \quad u_{0a} - \lambda_a(x, u, u_0) = 0, \\ u_a - \gamma_a(x, u, u_0) = 0. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Les conditions de compatibilité pour (5.122) nous donnent

$$\begin{aligned} \gamma_{a,0} + u_0 \gamma_{a,u} + \phi \gamma_{a,u_0} - \lambda_a &= 0, \\ \lambda_{a,0} + u_0 \lambda_{a,u_0} - (\phi_{,a} + \gamma_a \phi_{,u} + \lambda_a \phi_{,u_0}) &= 0, \\ \gamma_{[b,a]} + \gamma_{[a} \gamma_{b],u} + \lambda_{[a} \gamma_{b],u_0} &= 0, \\ \lambda_{[a,b]} + \gamma_{[a} \lambda_{b],u} + \lambda_{[a} \lambda_{b],u_0} &= 0, \quad a, b = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (5.124)$$

et

$$\Delta(x, u, u_0, \phi^{(k-2)}, \lambda_a^{(k-2)}, \gamma_a^{k-1}) = 0, \quad (5.125)$$

où nous utilisons les opérateurs de dérivée totale modifiés

$$X_0 = \partial_{x_0} + u_0 \partial_u + \phi(x, u, u_0) \partial_{u_0}, \quad X_a = \partial_{x_a} + \gamma_a(x, u, u_0) \partial_u + \lambda_a(x, u, u_0) \partial_{u_0},$$

plutôt que (5.120).

Si les conditions (5.124) sont satisfaites, alors les commutateurs  $[X_\mu, X_\nu]$  sont égaux à zéro. Dans un tel cas, les champs de vecteurs  $\{X_0, X_1, \dots, X_p\}$  forment une distribution abélienne de dimension  $(p+1)$  définie sur  $X \times U^{(1)}$ . Les conditions (5.124) et (5.125) nous assurent que les solutions de (5.122)-(5.123) obtenues, constituent les solutions de l'EDP originale (5.119).

Le théorème sur l'existence des symétries conditionnelles associées à des contraintes différentielles d'ordre plus élevé prend la forme suivante.

[41] **Théorème 5.7** Une EDP (5.119) non dégénérée d'ordre  $k$  admet une algèbre  $L$  de dimension  $p$  de symétries conditionnelles si et seulement si les  $(p+1)$  champs de vecteurs linéairement indépendants (définis sur  $\mathcal{B} \subset X \times U^{(1)}$ )

$$\begin{aligned} X_0 &= \partial_{x_0} + u_0 \partial_u + \phi(x, u, u_0) \partial_{u_0}, \\ X_\alpha &= \partial_{x_\alpha} + \gamma_\alpha(x, u, u_0) \partial_u + \lambda_\alpha(x, u, u_0) \partial_{u_0}, \end{aligned}$$

satisfont les conditions (5.124) et (5.125) dans un voisinage de  $(x_0, u_0^{(1)}) \in \mathcal{B}$ .

La preuve de ce théorème s'effectue de manière similaire à celle du théorème 2.4. Les générateurs  $X_\mu$  sont des symétries conditionnelles de (5.119) s'ils sont des symétries du système sur-déterminé (5.119) et (5.121). On peut démontrer que sous les conditions (5.124) le critère de symétrie pour ce système est satisfait, *i.e.*

$$\text{pr}^{(1)} X_\mu(\Delta) \equiv 0, \quad \text{pr}^{(1)} X_\mu(Q_\nu) \equiv 0, \quad (5.126)$$

quand  $\Delta = 0$  et  $Q_\nu = 0$ ,  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, p$ .

Le restant de la section est consacré à des exemples qui illustrerons l'approche qui vient d'être présentée.

**Exemple 5.23** Considérons l'équation dissipative de Korteweg-de Vries (DKdV) sous sa forme du potentiel

$$u_t + 3u_x^2 + u_{xxx} + \gamma u_{xx} = 0. \quad (5.127)$$

Nous cherchons une classe de solutions de (5.127) qui sont invariantes sous les champs de vecteurs

$$Z_1 = \partial_x + v \partial_u + \varphi \partial_v, \quad Z_2 = \partial_t + \psi \partial_u + \lambda \partial_v, \quad (5.128)$$

où  $\varphi, \psi$  et  $\lambda$  sont des fonctions de  $(x, t, u, v)$  seulement. Les caractéristiques de ces champs de vecteurs doivent être égales à zéro, ainsi

$$Q_1 = (v - u_x, \varphi - v_x) = (0, 0), \quad Q_2 = (\psi - u_t, \lambda - v_t) = (0, 0). \quad (5.129)$$

En ajoutant les conditions (5.129) à l'équation initiale (5.127), nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned} u_t + 3u_x^2 + u_{xxx} + \gamma u_{xx} &= 0 \\ u_x &= v, & v_x &= \varphi(x, t, u, v) \\ u_t &= \psi(x, t, u, v), & v_t &= \lambda(x, t, u, v), \end{aligned} \quad (5.130)$$

où les fonctions  $\varphi, \psi$  et  $\lambda$  peuvent être déterminées à partir des conditions de compatibilité. Nous éliminons  $v$  de (5.130), de sorte que les dérivées  $(u_t, u_{xx}, u_{xxx})$  peuvent être exprimées en terme de  $(x, t, u, u_x)$  seulement, *i.e.*

$$u_t = \psi(x, t, u, u_x), \quad u_{xx} = \varphi(x, t, u, u_x), \quad u_{xt} = \lambda(x, t, u, u_x). \quad (5.131)$$

En utilisant les opérateurs différentiels (5.128) et "cross-differentiating" (5.127) et (5.131), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \psi_x + u_x \psi_u + \varphi \psi_{u_x} &= \lambda \\
 \varphi_t + \psi \varphi_u + \lambda \varphi_{u_x} &= \psi_{xx} + 2u_x(\psi_{xu} + \varphi \psi_{uu_x}) + u_x^2 \psi_{uu} + 2\varphi \psi_{xu_x} \\
 &\quad + \varphi^2 \psi_{u_x u_x} + \psi_{u_x}(\varphi_x + u_x \varphi_u + \varphi \varphi_{u_x}) + \varphi \psi_u, \\
 \varphi_t + \psi \varphi_u + \lambda \varphi_{u_x} &= \lambda_x + u_x \lambda_u + \varphi \lambda_{u_x} \\
 \psi + \varphi_x + u_x \varphi_u + \varphi \varphi_{u_x} + 3u_x^2 + \gamma \varphi &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.132}$$

Afin de simplifier le problème, nous assumons que  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\lambda$  sont analytiques en  $u$  et  $u_x$  et qu'elles peuvent être représentées par des séries de puissances en  $u$  et  $u_x$  avec coefficients constants. Nous substituons cette forme polynomiale de  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\lambda$  dans (5.132) et analysons leurs termes dominants. Pour les calculs qui vont suivre, nous choisissons le cas où les fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\lambda$  sont cubiques en  $u$  et  $u_x$ . Alors, la solution générale de ces fonctions, qui satisfait (5.132), est donnée par

$$\begin{aligned}
 \varphi &= 6u^2 + \frac{4\gamma^2}{25} \left( -\frac{24\gamma^2}{25}u + 5u_x \right) \\
 \psi &= -6\gamma \left( \frac{4}{5}\gamma + 1 \right) u^2 + 3u_x^2 - 12uu_x + \frac{96\gamma^5}{625} \left( 1 + \frac{4}{5}\gamma \right) u - \frac{4\gamma^3}{25} \left( 5 + \frac{76}{25}\gamma \right) u_x \\
 \lambda &= \left[ 6u^2 + \frac{4\gamma^2}{25} \left( -\frac{24}{25}\gamma^2 u + 5u_x \right) \right] \left( -12u + 6u_x - \frac{4\gamma^3}{25} \left( 5 + \frac{76}{25}\gamma \right) \right) \\
 &\quad + \left[ -12\gamma \left( \frac{4}{5}\gamma + 1 \right) u - 12u_x + \frac{96\gamma^5}{625} \left( 1 + \frac{4}{5}\gamma \right) \right] u_x.
 \end{aligned} \tag{5.133}$$

En introduisant (5.133) dans (5.131), nous obtenons un système sur-déterminé pour les fonctions  $u$ , compatible avec l'équation de départ (5.127), lequel est très facile à résoudre. Une solution non-triviale de ce système est

$$u = \frac{6\gamma^2}{25} - \mu - \frac{6\gamma^2}{25\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{3}-1)A^2}{2^{1/3}} e^{-\frac{2}{3}\gamma(\mu t+x)} \frac{cn \left[ Ae^{-\frac{2}{3}(\mu t+x)} + B, k \right] - (2+\sqrt{3})}{1 - cn \left[ Ae^{-\frac{2}{3}(\mu t+x)+B, k} \right]}, \tag{5.134}$$

où  $k = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^{1/2}$  et  $A, B$  et  $\mu$  sont des constantes arbitraires. Ce résultat était déjà existant mais avait été trouvé à l'aide d'une procédure plus complexe.

**Exemple 5.24** L'interaction résonante de trois ondes (3WR) en 1+1 dimensions peut être décrite par le système de trois équations de la forme

$$\tilde{u}_{\alpha,t} + c_{(\alpha)} \tilde{u}_{\alpha,x} = i \tilde{u}_{\beta}^* \tilde{u}_{\gamma}^*, \quad \alpha \neq \beta, \gamma = 1, 2, 3 - \text{cyclique}, \tag{5.135}$$

où  $\tilde{u}_i(x, t)$  sont les amplitudes complexes des paquets d'ondes et  $c_i$  dénote leur vitesse de groupe, telle que  $c_1 < c_2 < c_3$ . Supposons que  $u_\alpha$  satisfait l'équation (5.135). Sans perte de généralité, il est pratique du point de vue calculatoire d'effectuer la transformation

$$\tilde{u}_\alpha = \rho_\alpha + u_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \tag{5.136}$$

dans l'équation (5.135) où  $\rho_\alpha$  est une fonction complexe sur le sous-ensemble  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Alors, (5.135) peut être écrite sous la forme

$$\rho_{\alpha,t} + c_{(\alpha)}\rho_{\alpha,x} = i(u_\beta^*\rho_\gamma^* + u_\gamma^*\rho_\beta^* + \rho_\beta^*\rho_\gamma^*), \quad (5.137)$$

où  $\alpha \neq \beta\gamma$  cyclique. Selon les considérations faites à la section 5.1, nous cherchons des solutions de (5.137) invariantes sous les champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_x + A_\alpha \partial_{\rho_\alpha} + A_\alpha^* \partial_{\rho_\alpha^*}, \quad X_2 = \partial_t + B_\alpha \partial_{\rho_\alpha} + B_\alpha^* \partial_{\rho_\alpha^*}. \quad (5.138)$$

Nous assumons que les coefficients  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  sont des fonctions de  $\rho_\alpha, \rho_\alpha^*, u_\alpha$  et  $u_\alpha^*$  seulement et qu'elles ne dépendent pas explicitement de  $x$  et  $t$ . Ajoutons maintenant au système (5.137) un système obtenu en exigeant que les caractéristiques des champs de vecteurs (5.138) égalent zéro, *i.e.*

$$\begin{aligned} (i) \quad \rho_{\alpha,x} &= A_\alpha(\rho_\alpha, \rho_\alpha^*, u_\alpha, u_\alpha^*), & \rho_{\alpha,t} &= B_\alpha(\rho_\alpha, \rho_\alpha^*, u_\alpha, u_\alpha^*) \\ (ii) \quad \rho_{\alpha,x}^* &= A_\alpha^*(\rho_\alpha, \rho_\alpha^*, u_\alpha, u_\alpha^*), & \rho_{\alpha,t}^* &= B_\alpha^*(\rho_\alpha, \rho_\alpha^*, u_\alpha, u_\alpha^*). \end{aligned} \quad (5.139)$$

Les conditions (5.139) impliquent que  $A_\alpha^*$  et  $B_\alpha^*$  sont les conjuguées complexes de  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  respectivement. Ainsi, nous cherchons les solutions du système sur-déterminé formé par (5.137) et (5.139.i) qui sont invariantes sous l'algèbre de Lie abélienne de dimension deux générée par les champs de vecteurs (5.138). Étant donné le théorème 5.5, nous pouvons réduire le problème de la construction de solutions conditionnellement invariantes à celui de l'étude de l'existence de solutions du système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad X_1 A_\alpha &= X_2 B_\alpha \\ (ii) \quad B_\alpha + c_{(\alpha)} A_\alpha &= i(u_\beta^*\rho_\gamma^* + u_\gamma^*\rho_\beta^* + \rho_\beta^*\rho_\gamma^*). \end{aligned} \quad (5.140)$$

À partir de ces équations, nous avons que

$$(1 + c_{(\alpha)})X_1 A_\alpha = iX_2(u_\beta^*\rho_\gamma^* + u_\gamma^*\rho_\beta^* + \rho_\beta^*\rho_\gamma^*), \quad \alpha \neq \beta, \gamma - \text{cyclique}. \quad (5.141)$$

L'analyse des conditions d'intégrabilité (5.141) ainsi que l'exigence que le système (5.139.i) satisfasse les conditions (3.4 de [41]) et (3.6 de [41]) du théorème de Lie, nous conduit aux équations projectives de Riccati associées à l'algèbre  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ .

Dans les coordonnées affines

$$v_1 = \rho_3/\rho_1^*, \quad v_2 = \rho_3^*/\rho_2, \quad (5.142)$$

les équations (5.139.i) peuvent être réduites à un système d'équations de Riccati couplées de la forme

$$\begin{aligned} (i) \quad (c_1 - c_2)v_{\mu,x^i} &= a_\mu^i + b_{\mu\nu}^i v_\nu + v_\mu(c_\alpha^i v_\alpha), \quad \mu, \nu, \alpha = 1, 2 \\ (ii) \quad (c_1 - c_2)\rho_{3,x^i} &= A^i + B^i \rho_3 + c^i \rho_3^2, \end{aligned} \quad (5.143)$$

où les variables indépendantes sont notées  $(x^i) = (x, t)$ ,  $i = 1, 2$  et les coefficients  $a_\mu^i, b_{\mu\nu}^i$  et  $c_\alpha^i$  sont des fonctions de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ . Cependant, les coefficients  $A^i, B^i$  et

$C^i$  dépendent de  $u_1, u_2, u_3$  et de  $v_1, v_2$  aussi. On utilise les équations (5.142) et on substitue (5.143) dans (5.141) et (3.21 de [41]). Nous exigeons ensuite que les coefficients des différentes puissances de  $v_\mu$  et  $\rho_3$ , des équations ainsi obtenues, soient nuls. En résolvant ces équations, nous obtenons les conditions bien connues pour les coefficients de (5.143), *i.e.*

$$\begin{aligned} a_1^1 &= i\frac{\mu}{\lambda}u_2^* & b_{11}^1 &= \frac{-1}{\lambda\delta} & b_{12}^1 &= \frac{-i\mu}{\lambda}u_3 & c_1^1 &= iu_2 \\ a_1^2 &= -ic_2\frac{\mu}{\lambda}u_2^* & b_{11}^2 &= \frac{c_2}{\lambda\delta} & b_{12}^2 &= \frac{i\mu}{\lambda}c_3u_3 & c_1^2 &= iu_1^* \\ a_2^1 &= -i\mu u_1 & b_{21}^1 &= i\mu u_3^* & b_{22}^1 &= \frac{-1}{\delta} & c_2^1 &= -ic_2u_2 \\ a_2^2 &= -ic_1\mu u_1 & b_{21}^2 &= i\mu c_3u_3^* & b_{22}^2 &= \frac{c_1}{\delta} & c_2^2 &= -ic_1u_1^* \end{aligned} \quad (5.144)$$

et

$$\begin{aligned} A^1 = A^2 = 0, \quad c^1 &= -i\frac{\mu}{v_1v_2}(|v_1|^2 - 1), \quad c^2 = \frac{i\mu}{v_1v_2^*}(c_3|v_1|^2 - c_1) \\ B^1 &= i\mu \left( \frac{u_2^*}{\lambda v_1} + \frac{u_1^*}{v_2^*} - u_3 \left( \frac{v_1^*}{v_2^*} + \frac{1}{\lambda} \frac{v_2}{v_1} \right) - i\frac{\xi}{\lambda} \right) \\ B^2 &= -i\mu \left( \frac{c_2u_2^*}{\lambda v_1} + \frac{c_1u_1^*}{v_2^*} - c_3u_3 \left( \frac{v_1^*}{v_2^*} + \frac{1}{\lambda} \frac{v_2}{v_1} \right) - i\frac{c_3\xi}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (5.145)$$

où  $\delta$  est le paramètre de Backlund et où nous utilisons la notation

$$\lambda = \frac{c_3 - c_2}{c_3 - c_1}, \quad \mu = \frac{c_1 - c_2}{c_3 - c_1}, \quad \xi = \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^*} \right). \quad (5.146)$$

Les équations (5.143) constituent un ensemble de transformations de Backlund du premier ordre pour les équations 3WR (5.137). Noter aussi que l'équation (5.143) se sépare en deux types d'équations de Riccati. Le premier type d'équations est pour les fonctions  $v_\mu(x, t)$  et le second pour les fonctions  $\rho_3(x, t)$ , lesquelles deviennent une équation de Riccati une fois que les  $v_\mu(x, t)$  sont trouvées à partir (5.143.i) et ensuite substituées dans (5.143.ii).

## 5.4 Méthode de séparation généralisée appliquée aux équations non-linéaires de Laplace

À la présente section, il est question de l'existence et de l'obtention de solutions des équations non-linéaires de Laplace

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) u = b(u), \quad (5.147)$$

par la séparation de variables généralisée de la forme

$$u(x, y) = \Phi(s) \quad s := X(x) \cdot Y(y). \quad (5.148)$$

De plus, faisons l'hypothèse de l'existence de fonctions  $\xi = \xi(X)$  et  $\eta = \eta(Y)$  telles que

$$\frac{dX}{dx} = X' := \epsilon |\xi(X)|^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{dY}{dy} = Y' := \epsilon |\eta(Y)|^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \epsilon = \pm 1, \quad (5.149)$$

ce qui garantit localement l'inversibilité de  $X = X(x)$  et  $Y = Y(y)$ .

Il s'agit d'effectuer la classification des classes de fonctions  $b(u)$  qui permettent de solutionner l'équation de Laplace non-linéaire par la séparation de variables (5.148).

En introduisant le changement de variables (5.148) dans l'équation (5.147), tout en considérant les conditions (5.149), on a que

$$(Y^2\xi + X^2\eta)\Phi'' + \frac{1}{2}(Y\xi' + X\eta')\Phi' = b(\Phi(s)). \quad (5.150)$$

Soit deux opérateurs différentiels :

$$A_1 := X\partial_X - Y\partial_Y, \quad A_2 := X\partial_X + Y\partial_Y. \quad (5.151)$$

Les opérateurs différentiels (5.151) sont respectivement des annihilateurs de n'importe quelles fonctions  $M(s)$  et  $N(r)$ , où

$$s := X(x)Y(y), \quad r := \frac{X(x)}{Y(y)}. \quad (5.152)$$

Cela signifie que :

$$A_1M(s) \equiv 0 \text{ et } A_2N(r) \equiv 0. \quad (5.153)$$

L'application de l'opérateur  $A_1$  sur l'équation (5.150) donne

$$\Phi'' + \frac{1}{2}\Theta\Phi' = 0, \quad (5.154)$$

où on a introduit la notation

$$\Theta := \frac{A_1(Y\xi' + X\eta')}{A_1(Y^2\xi + X^2\eta)}. \quad (5.155)$$

En appliquant l'opérateur  $A_1$  sur l'équation (5.154), on obtient

$$A_1\Theta = 0 \quad (5.156)$$

ce qui signifie que  $\Theta$  doit s'exprimer comme une fonction de  $s$  seulement. En remplaçant l'expression de l'opérateur  $A_1$  dans (5.155), on trouve

$$\Theta = \frac{1}{s} \frac{\xi'' - \frac{1}{X}\xi' - \eta'' + \frac{1}{Y}\eta'}{\frac{1}{X}\xi' - 2\frac{1}{X^2}\xi - \frac{1}{Y}\eta' + 2\frac{1}{Y^2}\eta}. \quad (5.157)$$

Il est commode ici de définir la grandeur

$$F := \frac{1}{X}\xi' - 2\frac{1}{X^2}\xi - \frac{1}{Y}\eta' + 2\frac{1}{Y^2}\eta, \quad (5.158)$$

qui est le dénominateur de (5.157). L'application de l'annihilateur  $A_2$  sur  $\ln |F|$  donne

$$A_2 \ln |F| = \frac{\xi'' - \frac{\xi'}{X} - \eta'' + \frac{\eta'}{Y}}{\frac{\xi'}{X} - 2\frac{\xi}{X^2} - \frac{\eta'}{Y} + 2\frac{\eta}{Y^2}} - 2.$$

On en conclut que

$$\frac{\xi'' - \frac{\xi'}{X} - \eta'' + \frac{\eta'}{Y}}{\frac{\xi'}{X} - 2\frac{\xi}{X^2} - \frac{\eta'}{Y} + 2\frac{\eta}{Y^2}} = A_2 \ln |F| + 2. \quad (5.159)$$

En introduisant (5.159) dans (5.157), on obtient

$$\Theta = \frac{1}{s} (A_2 \ln |F| + 2). \quad (5.160)$$

En substituant (5.160) dans (5.156), on obtient

$$A_1 A_2 \ln |F| = 0. \quad (5.161)$$

En intégrant l'équation (5.161), on trouve que

$$F = H_1(s)H_2(r). \quad (5.162)$$

où  $H_1$  et  $H_2$  sont des fonctions à déterminer qui dépendent respectivement de  $s$  et  $r$ . En substituant (5.162) dans (5.160), on trouve la forme de  $\Theta$  en terme de  $s$

$$\Theta(s) = \frac{2}{s} \left( 1 + s \frac{H_1(s)'}{H_1(s)} \right). \quad (5.163)$$

On peut déterminer  $\Phi$  comme une fonction de  $s$ . En introduisant (5.163), (5.154) on obtient l'équation différentielle ordinaire pour  $\Phi$ , qui peut être résolue par séparation de variables :

$$\Phi'' + \frac{1}{s} \left( 1 + s \frac{H_1(s)'}{H_1(s)} \right) \Phi' = 0. \quad (5.164)$$

La solution de (5.164) s'écrit

$$\Phi = \int ds \frac{E}{sH_1(s)} \quad (5.165)$$

En comparant (5.162) à (5.158), on élimine  $F$ . En prenant la dérivée seconde mixte par rapport à  $X$  et  $Y$  de ce résultat, on obtient

$$\frac{(s^2 \partial_s^2 + s \partial_s) H_1(s)}{H_1(s)} = \frac{(r^2 \partial_r^2 + r \partial_r) H_2(s)}{H_2(s)}. \quad (5.166)$$

L'équation différentielle (5.166) peut être transformée en un système d'E.D.O. par séparation de variables :

$$\begin{aligned} s^2 \frac{d^2}{ds^2} H_1(s) + s \frac{d}{ds} H_1(s) - \lambda H_1(s) &= 0 \\ r^2 \frac{d^2}{dr^2} H_2(r) + r \frac{d}{dr} H_2(r) - \lambda H_2(r) &= 0, \end{aligned} \quad (5.167)$$

où  $\lambda$  est une constante de séparation. Les solutions du système (5.167) vont dépendre évidemment du signe de la constante de séparation  $\lambda$ . Il y a donc trois cas à considérer, soit  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  ou  $\lambda > 0$

#### 5.4.1 Classification de la fonction $b(u)$ pour le cas $\lambda = 0$

Dans ce cas, le système d'équations différentielles (5.167) devient

$$\begin{aligned} s^2 \frac{d^2}{ds^2} H_1(s) + s \frac{d}{ds} H_1(s) &= 0 \\ r^2 \frac{d^2}{dr^2} H_2(r) + r \frac{d}{dr} H_2(r) &= 0. \end{aligned} \quad (5.168)$$

Les solutions générales de (5.168) sont

$$\begin{aligned} H_1(s) &= C_1 \ln |s| + C_2 \\ H_2(r) &= D_1 \ln |r| + D_2, \end{aligned} \quad (5.169)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  et  $D_2$  sont des constantes d'intégration. En introduisant  $H_1$  dans l'équation (5.165) et en effectuant l'intégrale, on détermine la fonction  $\Phi$  comme une fonction de  $s$

$$\Phi(s) = \frac{1}{C_1} \ln |C_1 \ln |s| + C_2| + \Phi_0, \quad (5.170)$$

où  $\Phi_0$  est une constante d'intégration. En comparant (5.162) et (5.158), tout en tenant compte de (5.152), on obtient

$$C_1 D_1 \ln |XY| \ln \left| \frac{X}{Y} \right| + C_2 D_1 \ln \left| \frac{X}{Y} \right| + C_1 D_2 \ln |XY| + C_2 D_2 = \frac{\xi'}{X} - 2 \frac{\xi}{X^2} - \frac{\eta'}{Y} + 2 \frac{\eta}{Y^2}.$$

Par séparation de variables, on obtient

$$\begin{aligned} \xi' - 2 \frac{\xi}{X} &= C_1 D_1 X \ln^2 |X| + (C_2 D_1 + C_1 D_2) X \ln |X| + (\alpha_1 C_2 D_2 + \mu) X \\ \eta' - 2 \frac{\eta}{Y} &= C_1 D_1 Y \ln^2 |Y| + (C_2 D_1 - C_1 D_2) Y \ln |Y| + (-\alpha_2 C_2 D_2 + \mu) Y, \end{aligned} \quad (5.171)$$

où  $\mu$  est une constante de séparation et où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux constantes soumises à la condition  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . En intégrant (5.171) et en exprimant  $\alpha_2$  en terme de  $\alpha_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \xi &= X^2 \left[ \frac{C_1 D_1}{3} \ln^3 |X| + \frac{(C_2 D_1 + C_1 D_2)}{2} \ln^2 |X| + (\alpha_1 C_2 D_2 + \mu) \right] \\ \eta &= Y^2 \left[ \frac{C_1 D_1}{3} \ln^3 |Y| + \frac{(C_2 D_1 - C_1 D_2)}{2} \ln^2 |Y| + ((\alpha_1 - 1) C_2 D_2 + \mu) \right]. \end{aligned} \quad (5.172)$$

La substitution de (5.172) dans (5.149) permet d'obtenir  $x$  comme une fonction de  $X$  et  $y$  comme une fonction de  $Y$  par quadrature

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dX}{\left| X^2 \left[ \frac{C_1 D_1}{3} \ln^3 |X| + \frac{(C_2 D_1 + C_1 D_2)}{2} \ln^2 |X| + (\alpha_1 C_2 D_2 + \mu) \right] \right|^{1/2}} \\ y &= \int \frac{dY}{\left| Y^2 \left[ \frac{C_1 D_1}{3} \ln^3 |Y| + \frac{(C_2 D_1 - C_1 D_2)}{2} \ln^2 |Y| + ((\alpha_1 - 1) C_2 D_2 + \mu) \right] \right|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.173)$$

Pour certaines valeurs numérique, les intrégrales (5.173) peuvent être résolues et dans des cas spéciaux, on obtient des fonctions elliptiques. En substituant (5.170) et (5.172) dans l'équation (5.150), on trouve  $b$  comme fonction de  $s$ , sous la forme

$$\begin{aligned} b(\Phi(s)) &= \frac{E}{H_1} \left( \ln |s| \left[ \frac{C_1}{H_1} \left( \frac{C_1 D_1}{3} \ln^2 |s| - \mu - \frac{C_2 D_2 (2\alpha_1 - 1)}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2\alpha_1 - 1) C_2 D_2}{2} + \mu - \eta_0 - \xi_0 \right] \right) \end{aligned} \quad (5.174)$$

De l'équation (5.170), il est possible de trouver la fonction inverse  $s(\Phi)$

$$s = \exp \left\{ \frac{e^{C_1(\Phi - \Phi_0)}}{C_1} - \frac{C_2}{C_1} \right\}, \quad (5.175)$$

et conséquemment, en vertu de (5.169) la fonction  $H_1$  exprimée en terme de  $\Phi$  devient

$$H_1(s(\Phi)) = e^{C_1(\Phi - \Phi_0)}. \quad (5.176)$$

En substituant (5.175) et (5.176) dans (5.174) on obtient la fonction  $b(\Phi)$  qui admet la séparation de variables (5.148).

$$\begin{aligned} b(\Phi) &= \frac{E}{e^{C_1(\Phi - \Phi_0)}} \left( \left( e^{C_1(\Phi - \Phi_0)} - C_2 \right) \left[ \left( \frac{D_1}{3C_1} e^{C_1(\Phi - \Phi_0)} - \frac{2C_2 D_1}{3C_1} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{D_1 (C_2)^2}{3C_1} - \mu - \frac{C_2 D_2 (2\alpha_1 - 1)}{2} \right) e^{-C_1(\Phi - \Phi_0)} \right) + \frac{C_2 D_1}{2} \right] \\ &\quad \left. + \frac{C_2 D_2 (2\alpha_1 - 1)}{2} + \mu - \eta_0 - \xi_0 \right). \end{aligned} \quad (5.177)$$

On trouve une classe de fonctions  $b(\Phi)$  qui contient dix paramètres, soit huit constantes d'intégration et deux constantes de séparation.

#### 5.4.2 Classification de la la fonction $b(u)$ dans le cas $\lambda > 0$

Dans ce cas, les solutions générales de (5.167) pour  $H_1$  et  $H_2$  sont

$$\begin{aligned} H_1(s) &= C_1 s^{\sqrt{\lambda}} + C_2 s^{-\sqrt{\lambda}} \\ H_2(r) &= D_1 r^{\sqrt{\lambda}} + D_2 r^{-\sqrt{\lambda}}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

En remplaçant (5.178) dans (5.165), on trouve la forme de  $\Phi$  comme une fonction de  $s$

$$\Phi = \frac{E}{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}} \arctan \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} s^{\sqrt{\lambda}} \right) + \Phi_0, \quad (5.179)$$

où  $\Phi_0$  est une constante de séparation. À partir de (5.179), on trouve la fonction inverse  $s(\Phi)$

$$s^{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \tan \left[ \frac{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}}{E} (\Phi - \Phi_0) \right]. \quad (5.180)$$

En comparant (5.162) et (5.158), tout en tenant compte des solutions (5.178) et de la définition (5.152), on obtient que

$$\frac{\eta'}{Y} - 2\frac{\eta}{Y^2} + C_1 D_2 Y^{2\sqrt{\lambda}} + \frac{C_2 D_1}{Y^{2\sqrt{\lambda}}} = \frac{\xi'}{X} - 2\frac{\xi}{X^2} - C_1 D_1 X^{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_2 D_2}{X^{2\sqrt{\lambda}}}.$$

Par séparation des variables, on obtient le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{aligned} \xi' - 2\frac{\xi}{X} &= C_1 D_1 X^{2\sqrt{\lambda}+1} + \frac{C_2 D_2}{X^{2\sqrt{\lambda}-1}} + \mu X \\ \eta' - 2\frac{\eta}{Y} &= -C_1 D_2 Y^{2\sqrt{\lambda}+1} - \frac{C_2 D_1}{Y^{2\sqrt{\lambda}-1}} + \mu Y, \end{aligned} \quad (5.181)$$

où  $\mu$  est la constante de séparation. Les solutions du système (5.181) sont

$$\begin{aligned} \xi &= X^2 \left( \frac{C_1 D_1}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_2 D_2}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \ln |X| + \xi_0 \right) \\ \eta &= Y^2 \left( -\frac{C_1 D_2}{2\sqrt{\lambda}} Y^{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_2 D_1}{2\sqrt{\lambda}} Y^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \ln |Y| + \eta_0 \right), \end{aligned} \quad (5.182)$$

où  $\xi_0$  et  $\eta_0$  sont des constantes d'intégration. À l'aide de (5.149), on obtient  $x$  comme une fonction de  $X$  et  $y$  comme une fonction de  $Y$  par quadrature

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dX}{\left| X^2 \left( \frac{C_1 D_1}{2\sqrt{\lambda}} X^{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_2 D_2}{2\sqrt{\lambda}} X^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \ln |X| + \xi_0 \right) \right|^{1/2}} \\ y &= \int \frac{dY}{\left| Y^2 \left( -\frac{C_1 D_2}{2\sqrt{\lambda}} Y^{2\sqrt{\lambda}} - \frac{C_2 D_1}{2\sqrt{\lambda}} Y^{-2\sqrt{\lambda}} + \mu \ln |Y| + \eta_0 \right) \right|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (5.183)$$

En introduisant (5.179) et (5.182) dans (5.150), on détermine  $b$  comme une fonction de  $s$  sous la forme

$$b(\Phi(s)) = \frac{E}{C_1 s^{\sqrt{\lambda}} + C_2 s^{-\sqrt{\lambda}}} \left( \mu - \sqrt{\lambda} \frac{C_1 s^{\sqrt{\lambda}} - C_2 s^{-\sqrt{\lambda}}}{C_1 s^{\sqrt{\lambda}} + C_2 s^{-\sqrt{\lambda}}} (\mu \ln |s| + \xi_0 + \eta_0) \right), \quad (5.184)$$

où  $E$  est une constante d'intégration. En introduisant (5.180) dans (5.184), on obtient  $b$  comme une fonction de  $\Phi$ , qui admet la séparation de variables (5.148) sous la forme

$$b(\Phi) = \frac{E}{2C_2} \sin \left[ 2 \frac{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}}{E} (\Phi - \Phi_0) \right] \left( \mu - \sqrt{\lambda} \cos \left[ 2 \frac{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}}{E} (\Phi - \Phi_0) \right] \right. \\ \left. \left( \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \ln \left| \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \tan \left[ \frac{\sqrt{C_1 C_2 \lambda}}{E} (\Phi - \Phi_0) \right] \right| + \xi_0 + \eta_0 \right) \right). \quad (5.185)$$

On trouve une classe de fonction  $b(\Phi)$  qui contient huit paramètres, soit six constantes d'intégration et 2 constantes de séparation.

#### 5.4.3 Classification de la fonction $b(u)$ pour le cas $\lambda < 0$

Dans ce cas les solutions réelles du système d'équation (5.167) sont

$$H_1(s) = C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} \ln s) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|} \ln s) \\ H_2(r) = D_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} \ln r) + D_2 \sin(\sqrt{|\lambda|} \ln r), \quad (5.186)$$

où  $C_1, C_2, D_1$  et  $D_2$  sont des constantes d'intégration. En substituant (5.186) dans (5.165), on trouve

$$\Phi = E \left[ \frac{C_1}{\sqrt{|\lambda|}} \sin(\sqrt{|\lambda|} \ln |s|) - \frac{C_2}{\sqrt{|\lambda|}} \cos(\sqrt{|\lambda|} \ln |s|) \right] + \Phi_0, \quad (5.187)$$

où  $E$  et  $\Phi_0$  sont des constantes d'intégration. En introduisant (5.162) et (5.186) dans (5.158) on obtient que

$$\left( C_1 D_1 \cos^2(\sqrt{|\lambda|} \ln |X|) + C_2 D_2 \sin^2(\sqrt{|\lambda|} \ln |X|) \right. \\ \left. - (C_1 D_1 + C_2 D_2) \sin^2(\sqrt{|\lambda|} \ln |Y|) \right. \\ \left. + (C_1 D_2 + C_2 D_1) \sin(\sqrt{|\lambda|} \ln |X|) \cos(\sqrt{|\lambda|} \ln |X|) \right. \\ \left. + (C_2 D_1 - C_1 D_2) \sin(\sqrt{|\lambda|} \ln |Y|) \cos(\sqrt{|\lambda|} \ln |Y|) \right) \\ = \frac{\xi'}{X} - 2 \frac{\xi}{X^2} - \frac{\eta'}{Y} + 2 \frac{\eta}{Y^2}. \quad (5.188)$$

En appliquant la séparation de variables à l'équation (5.188), on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 \xi' - 2\frac{\xi}{X} &= (C_2D_2 - C_1D_1) X \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \\
 &\quad + (C_1D_2 + C_2D_1) X \sin \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \cos \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \\
 &\quad + (C_1D_1 + \mu) X \\
 \eta' - 2\frac{\eta}{Y} &= (C_1D_1 + C_2D_2) Y \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \\
 &\quad - (C_2D_1 - C_1D_2) Y \sin \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \cos \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \\
 &\quad + \mu Y,
 \end{aligned} \tag{5.189}$$

où  $\mu$  est une constante de séparation. La solution de ce système est

$$\begin{aligned}
 \xi &= X^2 \left[ -\frac{C_2D_2 - C_1D_1}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) + \frac{C_1D_2 + C_2D_1}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{C_2D_2 + C_1D_1}{2} + \mu \right) \ln |X| + \xi_0 \right] \\
 \eta &= Y^2 \left[ -\frac{C_1D_1 - C_2D_2}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) - \frac{C_2D_1 + C_1D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{C_2D_2 + C_1D_1}{2} + \mu \right) \ln |Y| + \eta_0 \right].
 \end{aligned} \tag{5.190}$$

En vertu de (5.149), on trouve  $x$  comme une fonction de  $X$  et  $y$  comme une fonction de  $Y$  par quadrature

$$\begin{aligned}
 x &= \int \left| X^2 \left[ -\frac{C_2D_2 - C_1D_1}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) + \frac{C_1D_2 + C_2D_1}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{C_2D_2 + C_1D_1}{2} + \mu \right) \ln |X| + \xi_0 \right] \right|^{-1/2} dX \\
 y &= \int \left| Y^2 \left[ -\frac{C_1D_1 - C_2D_2}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) - \frac{C_2D_1 + C_1D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{C_2D_2 + C_1D_1}{2} + \mu \right) \ln |Y| + \eta_0 \right] \right|^{-1/2} dY.
 \end{aligned} \tag{5.191}$$

En introduisant (5.187) et (5.190) dans (5.150), on obtient une expression pour  $b$  en fonction de  $s$  sous la forme

$$b(\Phi(s)) = \frac{-E}{H_1(s)} \left[ \left( \left( \frac{C_2 D_2 - C_1 D_1}{2} + \mu \right) \ln |s| + \frac{C_1 D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} + \xi_0 + \eta_0 \right) \left( \frac{H_1'(s)}{H_1(s)} + \frac{C_2 D_2 - C_1 D_1}{2} + \mu \right) \right] \quad (5.192)$$

De (5.187), il est possible de déterminer  $s$  comme une fonction de  $\Phi$ . Pour ce faire, on commence par écrire l'équation (5.187) sous la forme

$$\varphi = C_1 \sin(S) - C_2 \cos(S), \quad (5.193)$$

où l'on a effectué le changement de variable

$$\varphi = \sqrt{|\lambda|} \frac{\Phi - \Phi_0}{E}, \quad S = \sqrt{|\lambda|} \ln |s|. \quad (5.194)$$

En multipliant (5.194) par  $e^{iS}$  et en utilisant l'identité d'Euler pour exprimer les fonctions sinusoidales en terme d'exponentielles, on obtient, en isolant  $e^{iS}$ ,

$$e^{iS} = \frac{\pm C_1 \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - \varphi^2} - C_2 \varphi + i \left( C_1 \varphi \pm C_2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - \varphi^2} \right)}{C_1^2 + C_2^2}. \quad (5.195)$$

De (5.195), on conclut que

$$\sin(S) = \frac{C_1 \varphi \pm C_2 \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - \varphi^2}}{C_1^2 + C_2^2}, \quad (5.196)$$

$$\cos(S) = \frac{\pm C_1 \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - \varphi^2} - C_2 \varphi}{C_1^2 + C_2^2}. \quad (5.197)$$

Par ailleurs, l'identité

$$\sin^2(S) + \cos^2(S) = 1$$

doit être respectée, ce qui implique que

$$4C_1 C_2 \varphi \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - \varphi^2} = 0. \quad (5.198)$$

Pour respecter (5.198) tout en étant le plus général possible, il faut que  $C_1 C_2 = 0$ . Deux cas sont possibles, soit  $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ , soit  $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ .

cas où  $C_1 \neq 0, C_2 = 0$  :

En tenant compte de (5.196), (5.197) et du fait que  $C_2 = 0$ , les équations (5.187), (5.190), (5.191) et (5.192) subissent quelques changements. Finalement, l'équation (5.192)

devient

$$b(\Phi) = \frac{-E}{\pm\sqrt{C_1^2 - \varphi^2}} \left[ \left( \left( \frac{C_1 D_1}{2} + \mu \right) \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \arctan \left( \frac{\varphi}{\pm\sqrt{C_1^2 - \varphi^2}} \right) + \frac{C_1 D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} + \xi_0 + \eta_0 \right) \right. \\ \left. \left( \frac{-\varphi\sqrt{|\lambda|} \exp \left\{ -\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \arctan \left( \frac{\varphi}{\pm\sqrt{C_1^2 - \varphi^2}} \right) \right\}}{\pm\sqrt{C_1^2 - \varphi^2}} \right) - \frac{C_1 D_1}{2} + \mu \right]. \quad (5.199)$$

On se rappelle que  $\varphi = \sqrt{|\lambda|} \frac{\Phi - \Phi_0}{E}$ . Si dans l'équation (5.147), la fonction  $b$  peut s'exprimer, par un choix approprié des paramètres, comme (5.199), alors (5.147) admet une solution par la séparation de variables (5.148). La solution est donnée par

$$\Phi = E \left[ \frac{C_1}{\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |s| \right) \right] + \Phi_0, \quad (5.200)$$

dans la mesure où les intégrales

$$x = \int \left| X^2 \left[ -\frac{C_1 D_1}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) + \frac{C_1 D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{C_1 D_1}{2} + \mu \right) \ln |X| + \xi_0 \right] \right|^{-1/2} dX, \\ y = \int \left| Y^2 \left[ -\frac{C_1 D_1}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) - \frac{C_1 D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{C_1 D_1}{2} + \mu \right) \ln |Y| + \eta_0 \right] \right|^{-1/2} dY \quad (5.201)$$

se solutionnent.

cas où  $C_1 = 0, C_2 \neq 0$  :

En tenant compte de (5.196), (5.197) et du fait que  $C_1 = 0$ , les équations (5.187), (5.190), (5.191) et (5.192) subissent quelques changements. L'équation (5.192) devient

$$b(\Phi) = \frac{-E}{\pm\sqrt{C_2^2 - \varphi^2}} \left[ \left( \left( \frac{C_2 D_2}{2} + \mu \right) \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \arctan \left( \frac{\pm\sqrt{C_2^2 - \varphi^2}}{-\varphi} \right) + \xi_0 + \eta_0 \right) \right. \\ \left. \left( \frac{-\varphi\sqrt{|\lambda|} \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \arctan \left( \frac{\pm\sqrt{C_2^2 - \varphi^2}}{-\varphi} \right) \right\}}{\pm\sqrt{C_2^2 - \varphi^2}} \right) + \frac{C_2 D_2}{2} + \mu \right]. \quad (5.202)$$

On se rappelle que  $\varphi = \sqrt{|\lambda|} \frac{\Phi - \Phi_0}{E}$ . Si dans l'équation (5.147), la fonction  $b$  peut s'exprimer, par un choix approprié des paramètres, comme (5.202), alors (5.147) admet une solution par la séparation de variables (5.148). La solution est donnée par

$$\Phi = -E \frac{C_2}{\sqrt{|\lambda|}} \cos \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |s| \right) + \Phi_0, \quad (5.203)$$

dans la mesure où les intégrales

$$\begin{aligned} x &= \int \left| X^2 \left[ -\frac{C_2 D_2}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) + \frac{C_2 D_1}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |X| \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{C_2 D_2}{2} + \mu \right) \ln |X| + \xi_0 \right] \right|^{-1/2} dX \\ y &= \int \left| Y^2 \left[ \frac{C_2 D_2}{4\sqrt{|\lambda|}} \sin \left( 2\sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) - \frac{C_2 D_1 + C_1 D_2}{2\sqrt{|\lambda|}} \sin^2 \left( \sqrt{|\lambda|} \ln |Y| \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{C_2 D_2 + C_1 D_1}{2} + \mu \right) \ln |Y| + \eta_0 \right] \right|^{-1/2} dY. \end{aligned} \quad (5.204)$$

se solutionnent.

## Chapitre 6

# Conclusion

Ce mémoire constituait en première partie une revue théorique des transformations de Bäcklund, c'est-à-dire au cours des chapitres deux et trois. Le quatrième chapitre portait sur les symétries des systèmes d'EDPs et sur l'obtention de leurs solutions explicites par des méthodes de réduction par symétrie. Le dernier chapitre avant cette conclusion portait sur l'interprétation des contraintes différentielles comme étant des symétries conditionnelles.

Plus, précisément le chapitre deux a commencé par un rappel des notions essentielles de la géométrie différentielle classique. Ces notions ont servi de fondement pour l'étude des surfaces hyperboliques, plus précisément des surfaces pseudosphériques qui sont des surfaces hyperboliques à courbure totale (de Gauss) constante. Nous avons ensuite dérivé l'équation de sine-Gordon

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega$$

comme une condition de compatibilité du système d'équations composé des équations de Gauss et des équations de Weingarten qui décrivent une surface pseudosphérique. La transformation de Bäcklund

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right)_u &= \frac{\beta}{\rho} \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right), \\ \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right)_v &= \frac{1}{\beta\rho} \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right), \end{aligned}$$

reliant deux solutions de l'équation de sine-Gordon, a été dérivée comme une construction géométrique entre des surfaces pseudosphériques. Le chapitre s'est poursuivi avec l'introduction du théorème de permutabilité, lequel est un principe de superposition non-linéaire permettant l'application itérative de transformations de Bäcklund, ce qui nous a conduit à obtenir des solutions multi-solitoniques de l'équation de sine-Gordon. Le restant du chapitre a consisté, principalement, à assouplir l'exigence que la courbure de Gauss des surfaces étudiées soit constante, que nous avons remplacée par la condition plus générale  $\rho = f(u) + g(v)$ . Ainsi, nous avons cessé de nous restreindre aux surfaces pseudosphériques et nous avons considéré les systèmes de Gauss-Weingarten plus généraux

décrivant les surfaces hyperboliques respectant  $\rho = f(u) + g(v)$ . Nous avons, par la suite, obtenu les transformations de Bäcklund liées à ce système. Toutefois, puisque le système de Gauss-Mainardi-Codazzi associé est sous-déterminé, nous avons augmenté ce système des contraintes invariantes sous la transformation de Bäcklund.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté des dérivations alternatives de l'équation de sine-Gordon se basant sur le mouvement d'une courbe à torsion constante, puis à courbure constante. Nous avons vu que le mouvement d'une courbe à torsion constante peut être associé au mouvement d'une courbe paramétrique sur une surface pseudosphérique. Le restant du chapitre a été consacré aux surfaces pseudosphériques en mouvement, puis au système de Weingarten et sa transformation de Bäcklund.

Nous avons fait du chapitre quatre, une revue des techniques de réduction par symétrie ponctuelle de Lie. Nous y avons introduit rapidement la notion de groupe de symétrie et donné les formules nécessaires à leur calcul. Il faut garder en tête que les techniques présentées se limitent aux groupes connexes, ainsi les symétries discrètes n'ont pas été considérées. Cette technique a été illustrée par plusieurs exemples classiques, mais nous avons aussi obtenu les classes de fonctions  $b$  qui font en sorte que les équations

$$u_t - \exp -ub(u_{xt}) = 0$$

et

$$u_t - b(u_{xx}) = 0$$

admettent des symétrie. Nous avons calculé les générateurs des groupes de symétries pour les classes de fonctions admises. Par la suite, nous avons présenté brièvement de quelle manière les solutions invariantes sont obtenues de ces groupes en considérant les invariants de ces groupes. À la section qui suivait, nous avons présenté une généralisation de la méthode d'obtention des solutions invariantes. Nous avons remplacé l'exigence que les solutions soient invariantes sous un groupe de symétrie  $G$  du système considéré, par l'exigence plus faible que les solutions soient invariantes sous un groupe  $\bar{G}$  qui n'est pas nécessairement un groupe de symétrie du système considéré. Toutefois, cette méthode nous donne un système d'équations, pour les coefficients des générateurs du groupe de symétrie, qui est un système non-linéaire et qui est donc souvent difficile à résoudre. Nous avons ensuite souligné l'approche directe de Clarkson-Kruskal dans une très courte section, puis nous avons enchaîné avec les groupes de symétrie faible. Les symétries faibles d'un système sont les symétries du système composé du système original augmenté de la condition que les caractéristiques soient nulles et de toutes ces conditions de compatibilité. Les solutions partiellement invariantes ont, dans la section qui suit, été introduites comme une généralisation du concept de solutions invariantes dans un groupe. Le chapitre quatre s'est terminé avec une section sur les contraintes différentielles lesquelles peuvent être vues comme la généralisation ultime des méthodes précédentes. Dans ce cas plus général les contraintes différentielles ne sont pas restreintes à être les caractéristiques des générateurs et peuvent être d'ordre plus élevé que de premier ordre.

Les symétries conditionnelles nous fournissent une interprétation de groupe des contraintes différentielles. C'est de ces symétries conditionnelles qu'il y a eu question dans le chapitre cinq. Nous avons consacré la première section de ce cinquième chapitre à la question de l'existence des symétries conditionnelles de premier ordre pour les systèmes d'EDPs de premier ordre. Le résultat principal de cette section est le théorème 5.5. Des exemples de calcul par les symétries conditionnelles se basant sur ce théorème ont été illustrés dans la section d'après. Parmi ceux-ci, les calculs pour les équations DSG et NLS cubique sont des calculs n'ayant jamais paru, dont le résultat est l'obtention des transformations de Bäcklund. Dans la troisième section de ce cinquième chapitre, nous avons discuté des symétries conditionnelles pour des contraintes différentielles d'ordre plus élevé. Cette section contient aussi un calcul jamais paru qui aboutit à la transformation de Bäcklund pour l'équation de DKdV. La dernière section portait sur les solutions de l'équation de Laplace non-linéaire à l'aide d'une méthode de séparation de variables généralisée, ceci est également un résultat jamais paru.

# Bibliographie

- [1] Applications in engineering and physical sciences. In N.H. Ibragimov, editor, *CRC HANBOOK OF Lie Groups to Differential Equations*, volume 2, page 120.
- [2] A. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. SIAM, Philadelphia, 1985.
- [3] T.W. Barnard.  $2\pi$  ultrashort light pulses. *Phys. Rev. A*, 7 :373–376, 1973.
- [4] L. Bianchi. Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali. *Ann. Matem.*, 18 :301–358, 1890.
- [5] L. Bianchi. Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche. *Rend. Lincei*, 5 :3–12, 1892.
- [6] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. *J. l'École Polytech.*, 41 :201–239, 1865. ; *J. l'École Polytech.* 42 : 1-151, 1867.
- [7] B. Cenkli. Geometric deformations of the evolution equations and Bäcklund transformations. *Physica D*, 18 :217–219, 1986.
- [8] D. Levi et P. Winternitz. Nonclassical symmetry reduction : exemple of the Boussinesq equation. *J. Phys. A*, 22 :2915–2924, 1989.
- [9] L.P. Eisenhart. *Transformations of Surfaces*. Chelsea, New York, 1962.
- [10] F. Ernst. New formulation of the axially symmetric gravitationnal field problem. i/ii. *Phys. Rev.*, 167 :1175–1178, 1968.
- [11] A. Seeger et A. Kochendörfer. Theorie der versetzungen in eindimensionalen atomreihen ii. beliebig angeordnete und beschleunigte versetzungen. *Z. Phys.*, 130 :321–336, 1951.
- [12] A. Kochendörfer et A. Seeger. Theorie der versetzungen. *Z. Phys.*, 127 :533–550, 1950.
- [13] D. Levi et A. Sym. Integrable system describing surfaces of non-constant curvature. *Phys. Lett. A*, 149 :381–387, 1990.
- [14] T. Kakutani et H. Ono. Weak nonlinear hydromagnetic waves in cold collisionless plasma. *J. Phys. Soc. Japan*, 26 :1305–1318, 1969.
- [15] K. Konno et Hé Sanuki. Bäcklund transformation for equation of motion for nonlinear lattice under weak dislocation potential. *J. Phys. Soc. Japan*, 39 :22–24, 1975.
- [16] H.M. Gibbs et R.E. Slusher. Peak amplification and pulse breakup of a coherent optical pulse in a simple atomic absorber. *Phys. Rev. Lett.*, 24 :638–641, 1970.

- [17] C. Rogers et W.F. Shadwick. *Bäcklund Transformations and Their Applications*. Academic Press, New-York, 1982.
- [18] E.V. Pankrat'ev. Computations in differential and difference modules. *Acta Appl. Math.*, (16) :167–189, 1989.
- [19] G.W. Bluman et S. Kumei. *Symmetries and Differential Equations*. Springer-Verlag, New-York, 1989.
- [20] J. Ondich. *Partially Invariant Solutions of Partial Differential Equations*. PhD thesis, University of Minnesota, 1989.
- [21] G.L. Lamb Jr. Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium. *Rev. Mod. Phys.*, 43 :99–124, 1971.
- [22] L. Bianchi. *Lezioni di Geometria Differenziale*, volume 1-4. Zanichelli, Bologna, 1923-1927.
- [23] L.V. Ovsiannikov. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, New-York, 1982.
- [24] M. Clairin. Sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre. *Ann. Fac. Sci.*, Ser. 5 :437–459, 1903.
- [25] L. Marchildon. Lie symmetries of Einstein's vacuum equations in n dimensions. *Journal of nonlinear Mathematical Physics*, 5 :68–81, 1998.
- [26] L. Marchildon. *Mécanique Quantique*. DeBoeck Université, 2000.
- [27] A. Messiah. *Quantum Mechanics*. Dover Publication, Inc., 1999.
- [28] F. Minding. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht ; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichen Krümmungsmasse. *J. Für die Reine und Angewandte Mathematik*, 18 :217–302, 1838.
- [29] N.N. Yanenko. Theory of consistency and methods of integrating systems of nonlinear partial differential equations, in :. In *Proceedings of the Fourth All-Union Mathematics Congress*, pages 247–259, Leningrad, 1964.
- [30] P. Clarkson et M. Kruskal. New similarity reductions of the Boussinesq equation. *J. Math. Phys.*, 30 :2201–2213, 1989.
- [31] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag, New-York, 1986.
- [32] P.J. Olver et P. Rosenau. The construction of special solutions to partial differential equations. *Phys. Lett.*, 114A :107–112, 1986.
- [33] P.J. Olver et P. Rosenau. Group-invariant solutions of differential equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 47 :263–278, 1987.
- [34] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt et P.A. Griffiths. Mathematical sciences research institute publications. In *Exterior Differential Systems*, volume 18. Springer-Verlag, New-York, 1991.

- [35] P. Santni. Linear theories, hidden variables and integrable nonlinear equations (en préparation).
- [36] A.C. Scott. Propagation of magnetic flux on a long Josephson junction. *Il Nuovo Cimento B*, 69 :241–261, 1970.
- [37] R. Steuerwald. Über die Enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche transformation. *Abh. Bayer. Akad. Wiss.*, 40 :1–105, 1936.
- [38] D.J. Struick. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Publishing company, Inc., Reading, Mass., 2nd edition, 1961.
- [39] S.V. Meleshko. Differential constraints and one-parameter Lie-Bäcklund groups. *Sov. Math. Dokl.*, 28 :37–41, 1983.
- [40] A. Seeger, H. Donth et A. Kochendörfer. Theorie der versetzungen in eindimensionalen atomreihen iii. versetzungen, eigenbewegungen und ihre wechselwirkung. *Z. Phys.*, 134 :173–193, 1953.
- [41] A.M. Grundland, L. Martina et G. Rideau. Partial differential equations with differential constraints. *CRM Proceedings and Lecture Notes*.
- [42] K. Konno, W. Kameyama et H. Sanuki. Effect of weak dislocation potential on nonlinear wave equation in an anharmonic crystal. *J. Phys. Soc. Japan*, 37 :171–176, 1974.
- [43] M.E. Johnston, C. Rogers, W.K. Schief et M.L. Seiler. On moving pseudospherical surfaces : a generalised weingarten system. *Lie Group and Their Applications*, 1 :124–136, 1994.
- [44] V.A. Galaktionov. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications. *Diff. int. Eqs.*, 3 :863–874, 1990.
- [45] V.L. Topunov. Reducing systems of linear differential equations to passive form. *Acta Appl. Math.*, (16) :181–206, 1989.
- [46] M. Wadati. Wave propagation in nonlinear lattice :i. *J. Phys. Soc. Japan*, 38 :673–680, 1975.
- [47] N.J. Zabusky. *A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation*, in W.F. Ames, ed, *Nonlinear Partial Differential Equations*. Academic Press, New-York, 1967.