UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE EN
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
ISABELLE STE-MARIE

SYMÉTRIES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS DE DIMENSION DEUX

MAI 2009

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Sébastien Tremblay, directeur de recherche
Département de mathématiques et d'informatique

M. Dominic Rochon, juré
Département de mathématiques et d'informatique

M.Mhamed Mesfioui, juré
Département de mathématiques et d'informatique

SYMÉTRIES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS DE DIMENSION DEUX

Isabelle Ste-Marie

SOMMAIRE

La classification des équations différentielles aux différences de la forme $\ddot{u}_{nm} = F_{nm}\big(t,\ \{u_{pq}\}|_{(p,q)\in\Gamma}\big)$ sera considérée en termes des groupes de symétries admissibles. L'ensemble Γ représente le point (n,m) ainsi que ses six voisins immédiats dans un réseau triangulaire de dimension deux.

La classification s'effectuera en considérant les groupes de symétries abéliens et non-résolubles. Pour cette classe d'équations, il est démontré que le groupe de symétries peut être de dimension 12, tout au plus, en ce qui concerne les algèbres de symétries abéliennes et de dimension 13 pour les algèbres de symétries non résolubles.

Un article portant sur les résultats présentés au chapitre 4 et 5 de ce mémoire sera publié dans *Journal of Physics A* en 2009.

SYMMETRIES OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS IN HEXAGONAL LATTICE

Isabelle Ste-Marie

ABSTRACT

Classification of differential-difference equation of the form

$\ddot{u}_{nm} = F_{nm}\big(t,\ \{u_{pq}\}|_{(p,q)\in\Gamma}\big)$ are considered according to their Lie point symmetry groups. The set Γ represents the point (n,m) and its six nearest neighbors in a two-dimensional triangular lattice.

This classification will be done by considering abeliens and semi-simple symmetry groups. For this class of equations, it is shown that the symmetry group can be at most 12-dimensional for abelian symmetry algebras and 13-dimensional for nonsolvable symmetry algebras.

An article on the work presented in chapter 4 and 5 will be published in *Journal of Physics A* (2009).

REMERCIEMENTS

Je voudrais remercier spécialement mon directeur de recherche, le Dr. Sébastien Tremblay, pour ses conseils, sa disponibilité, son support financier, mais surtout pour le dévouement qu'il a démontré tout au long de ce projet et la confiance qu'il m'a accordée.

Je profite également de l'occasion pour remercier l'Institut des Sciences Mathématiques du Québec pour son support financier tout au long de mes études graduées de maîtrise.

Table des matières

Introduction

Jusqu'à aujourd'hui, les physiciens mathématiciens ont cherché à comprendre de nombreux phénomènes de la physique afin de les modéliser sous différentes classes d'équations. La plupart du temps, les équations qui représentent les phénomènes de façon exacte sont non-linéaires. Les équations différentielles et les équations à variables discrètes sont les deux grandes classes d'équations couvrant une bonne partie de ces phénomènes.

Les symétries apparaissent de façon naturelle dans les lois de la physique. Elles sont souvent présentes, de façon intrinsèque, dans le système d'équations différentielles décrivant le modèle. Leur connaissance permet de mieux comprendre les phénomènes physiques complexes, de simplifier et de résoudre des problèmes et aussi d'approfondir la compréhension de certains phénomènes. Afin de trouver les solutions exactes des systèmes d'équations différentielles, on utilise souvent la théorie de Lie (ou théorie des groupes continus). Lorsqu'une symétrie est associée à une équation, on peut alors exploiter celle-ci afin d'obtenir une simplification. Si l'expression est une équation différentielle ordinaire, alors (généralement) l'ordre de l'équation pourra être réduit. Si on a affaire à une équation différentielle partielle, alors les variables dépendantes et indépendantes pourront habituellement être combinées dans le but de réduire le nombre de variables indépendantes. En général, une symétrie connue peut être utilisée afin de construire directement certaines solutions d'une équation non-linéaire. Dans certains cas, ce sont des classes entières de solutions qui peuvent être construites.

L'analyse des symétries n'est pas seulement qu'une simple procédure permettant de trouver des solutions. Les symétries apportent également des moyens systématiques pour une compréhension approfondie des phénomènes physiques et de leurs équations associées. Enfin, la théorie des groupes de Lie est un outil essentiel dans la résolution et l'analyse de systèmes non-linéaires. Lorsque les symétries d'un système sont connues, toutes les autres techniques de résolution d'équations différentielles, comme l'analyse numérique, peuvent être appliquées plus efficacement et ce, tout en ayant une meilleure compréhension.

Pour ce qui est des équations à variables discrètes, il est plus difficile de trouver des solutions exactes. Néanmoins, au cours des deux dernières décennies, beaucoup d'attention a été portée par les mathématiciens à la résolution des systèmes discrets non-linéaires. Ce mémoire se situe dans ce contexte. Nous allons considérer les symétries continues d'une classe d'équations différentielles aux différences contenant une variable continue t et deux variables discrètes n, m. Ces équations sont présentes dans plusieurs sphères de la science, il est donc primordial de leur accorder beaucoup d'attention.

Ce mémoire est donc l'aboutissement de l'analyse d'une classe d'équations dans un réseau de dimension deux. Pour ce faire, nous allons utiliser principalement la théorie de Lie présentée au chapitre 2, suivit d'une méthode développée par Levi, Vinet et Winternitz, soit *la méthode intrinsèque* démontrée au chapitre 3. Finalement, le chapitre 4 comprendra une description détaillée de notre modèle avant de conclure avec le dernier chapitre où les résultats principaux de ce mémoire seront présentés. Enfin, c'est avec l'aide du logiciel Maple 7 qu'une grande partie des calculs ont été réalisés.

Chapitre 1

Historique

Les équations différentielles sont un sujet fortement étudié en physique mathématique car elle permettent de décrire des phénomènes physiques présents dans la nature. Les méthodes les plus efficaces pour trouver des solutions exactes à ces équations sont basées sur la théorie des groupes de Lie.

Le mathématicien à qui l'on doit la théorie des groupes continus est Marius Sophus Lie. Afin de mieux comprendre son parcours, il faut absolument parler de lui en parallèle avec son plus grand collaborateur et ami Felix Klein. Lie et Klein ont été sans contredit les principaux protagonistes dans l'histoire du développement de la théorie des symétries encore utilisée aujourd'hui.

Marius Sophus Lie est né dans le presbytère du comté de Eid, dans le village de Nordfjord en Norvège le 17 décembre 1842. Neuf années plus tard, la famille Lie a déménagé à Moss où Sophus a terminé son secondaire à l'école de Kristiana. Ce n'est que dans la vingtaine qu'il a commencé à porter un intérêt plus sérieux envers les mathématiques. En 1869 il a publié son premier article à Kristiana alors que son talent commençait à être reconnu. Grâce à cette publication, Lie a reçu une subvention de l'université lui permettant ainsi de voyager en Allemagne et en France afin de pouvoir étudier avec les plus grands mathématiciens de l'époque. Au cours de cette même année, il s'est dirigé vers le haut-lieu du monde mathématique qu'était Berlin, où Karl Theodor Wilhelm Weierstrass régissait l'école des mathématiques. C'est à ce moment qu'une amitié éternelle est née puisque Sophus y a rencontré Felix Klein, alors âgé de vingt-six ans.

C'est en 1849 à Dusseldorf en Allemagne que Christian Felix Klein vit le jour. Pendant son enfance et son adolescence, Klein a étudié le cours classique selon les désirs de son père. Ensuite, il est entré à l'université de Bonn où il a fait la connaissance de Julius Plucker qui dirigeait le département de physique et de mathématiques. C'est à peine âgé de dix-sept ans que Klein est devenu l'assistant de Plucker. Malheureusement, ce-dernier rendit l'âme deux années plus tard. C'est alors que Klein a ressenti l'obligation de publier le travail non-terminé de son mentor.

FIG. 1.1 – **Marius Sophus Lie** (1842-1899)

FIG. 1.2 – **Christian Felix Klein** (1849-1925)

Grâce à ce travail de grande envergure pour un si jeune homme, il a pu se développer en tant que mathématicien. Klein était réputé pour avoir une façon très physique d'aborder les mathématiques et son enseignement, selon certains, manquait de rigueur par son approche plutôt graphique. Le travail fait sur les publications de Plucker a permis à Klein de prendre de l'expérience et de mûrir. Il avait d'importants contacts et était reconnu pour être un très bon organisateur. C'est Klein qui, par les années qui ont suivi, apporta l'aide que Lie nécessitait afin d'avancer sa carrière mathématique.

Les recherches de Klein se sont plutôt concentrées sur les groupes discrets, leurs relations avec la géométrie et l'utilisation des groupes dans la catégorisation des objets mathématiques. Les groupes discrets de symétries sont aussi connus sous le nom de *groupes cristallographique*, et l'importance de tels groupes pour l'étude des cristaux a été fortement reconnue vers la fin du 19ième siècle. En 1845, Riemann publia un document qui a déclenché une grande vague d'intérêt envers la recherche sur la géométrie. Une liste de nouveaux sujets à être étudiées est donc née de cette publication. La question de trouver une description générale de tous les systèmes géométriques considérés par les mathématiciens est devenue la question populaire de l'heure. Comme Klein était alors très actif dans ce domaine de recherche, il a décidé d'aborder le problème en trouvant une façon d'étudier la géométrie avec une approche portant sur la théorie des groupes.

Klein a rejoint à Paris son confrère qui était arrivé quelques mois auparavant au cours de l'année 1870. Ils ont alors contacté deux professeurs du Lycée Louis-le-Grande qui ont été d'une grande influence dans leurs recherches, soient Camille Jordan et Gaston Darboux. C'est à cet endroit qu'ils ont continué leur recherche entamée à Berlin portant sur les courbes-W. Ces courbes sont en fait des courbes homogènes qui demeurent invariantes sous un certain groupe de transformations. Les courbes homogènes sont décrites comme étant des courbes sur lesquelles aucun point ne diffère d'un autre. Par exemple, dans la géométrie Euclidienne plane, la ligne droite et le cercle correspondent à des courbes homogènes.

Le point commun de ces deux mathématiciens a été leur grand intérêt pour la théorie des groupes et la notion de symétrie. Bref, leur travail sur les courbes-W a eu un impact important dans les recherches futures de Sophus car cela l'a conduit à étudier les sous-groupes à un paramètre d'un groupe de transformations projectives. Sans le savoir, ces sous-groupes allaient jouer un rôle majeur dans la construction des algèbres de Lie. Leur collaboration a permis à Lie d'établir l'idée d'une transformation infinitésimale et de découvrir le concept de transformation de contact.

Le 18 juillet 1870, leurs activités ont été brusquement interrompues par le début de la guerre Franco-Prusse. Klein s'est empressé de rentrer au pays, tandis que Lie n'a quitté Paris qu'un mois plus tard. Prenant quelque peu cette guerre à la légère, Lie a décidé de marcher jusqu'à chez lui en passant par l'Allemagne. C'est en se promenant dans un parc de Fontainebleau qu'il a été arrêté par la police qui le prenait pour un espion Allemand vu son apparence nordique. Il a passé un mois en prison où il a travaillé sur sa thèse de doctorat avant d'être libéré par Darboux qui avait payé sa caution. En juin 1871, il a enfin soumis sa thèse à l'université de Kristiana.

Les résultats de son doctorat ont permis à Lie d'obtenir une certaine notoriété dans le monde mathématique. Klein admirait son ami plus que jamais et l'a aidé à devenir un membre du corps professoral de la seule université de Norvège, Kristiana, où Lie a travaillé pendant quatorze ans. Par contre, après tant d'années, Sophus a souffert du manque de confrérie intellectuelle. C'est alors que Klein, en 1886, lui a proposé de le remplacer comme professeur de géométrie à l'université de Leipzig. Il y a ainsi travaillé durant douze années pendant lesquelles il a publié la majorité de ses livres. Cette période a été très enrichissante au niveau scientifique, mais Lie s'est ennuyé de son pays natal. Il en est même venu à faire une dépression pour laquelle il a du être soigné à la clinique psychiatrique de Hanover.

Marius Sophus Lie a dévoué pratiquement toute sa vie à la théorie des groupes continus, maintenant connus sous le nom de groupes de Lie, et leurs relations avec les équations différentielles. Il a aussi, entre autre, analysé en profondeur la relation entre les algèbres et les groupes de Lie et posé le problème de la classification de tous les groupes et algèbres simples de Lie. On doit la solution complète de la classification des groupes de Lie simples à Eliè-Joseph Cartan.

Un an avant sa mort, Sophus Lie a reçu le premier prix de Lobachevsky pour l'ensemble de son travail. Ce prix a par la suite été très prisé par les physiciens-mathématiciens. Les deuxième, troisième et quatrième récipiendaires ont été Killing, Hilbert et Klein.

Un comité pour la publication du fabuleux travail mathématique de Lie a été créé en 1900. Il a fallu quinze ans et quinze gros volumes pour que tout son travail remarquable soit publié.

Depuis la mort de Lie, l'importance des groupes et algèbres de Lie n'a jamais diminué. Par contre, l'intérêt quant à ses méthodes de résolutions d'équations différentielles s'est quelque peu dissipé. Dans les années 1930, les chercheurs se sont plus concentrés, sous l'influence d'Hilbert, sur l'analyse de fonctions et les méthodes de transformations. Ce n'est qu'au début des années 60 que l'intérêt sur les méthodes de Lie a resurgi et depuis, n'a fait qu'augmenter. Après la guerre, les scientifiques ont posé de plus en plus de problèmes non-linéaires et ils ont alors réalisé que la théorie de Lie était la seule méthode systématique qui permettait d'analyser les équations non-linéaires. Conjointement, les physiciens travaillant sur la dynamique des fluides ont fortement commencé à apprécier l'importance centrale des symétries. Plusieurs publications ont paru sur le sujet depuis celles de Lie.

Chapitre 2

Concepts de bases

2.1 Les symétries

Symétrie est souvent synonyme de beauté, c'est pourquoi les gens préfèrent en général les objets symétriques, ou à tendance symétrique, plutôt que les objets irréguliers. Les objets dans la nature possèdent couramment une certaine forme de symétrie. Par exemple, les flocons de neige ont six cotés symétriques remplis de minuscules formes géometriques. Pensons aussi à la structure régulière des cristaux ou à certaines ondes de chocs. Bref, les symétries sont fascinantes, universelles et d'une très grande importance. Elles aident l'être humain à se familiariser avec son environnement et le guide dans ses mouvements.

2.1.1 Les symétries dans le plan

Afin de mieux comprendre les symétries d'équations différentielles, considérons les symétries de simples objets dans le plan. Une définition générale peut être qu'une symétrie d'un objet géométrique est une transformation qui, sous son action, laisse l'objet inchangé, c'est-à-dire invariant. Prenons l'exemple qui suit :

Exemple 2.1.1 *: Les deux triangles suivants admettent des symétries. Le premier (a) est un triangle équilatéral et l'autre (b) est un triangle isocèle. Les lignes pointillées représentent les réflexions possibles du triangle et la flèche, le fait que cette figure puisse subir une rotation. On voit que (a) admet trois réflexions et peut subir des rotations de $2\pi x/3$ tour, où x est un entier. Par contre, le triangle (b) n'a qu'un seul axe de symétrie et ne peut subir qu'une seule rotation, soit d'un tour complet.*

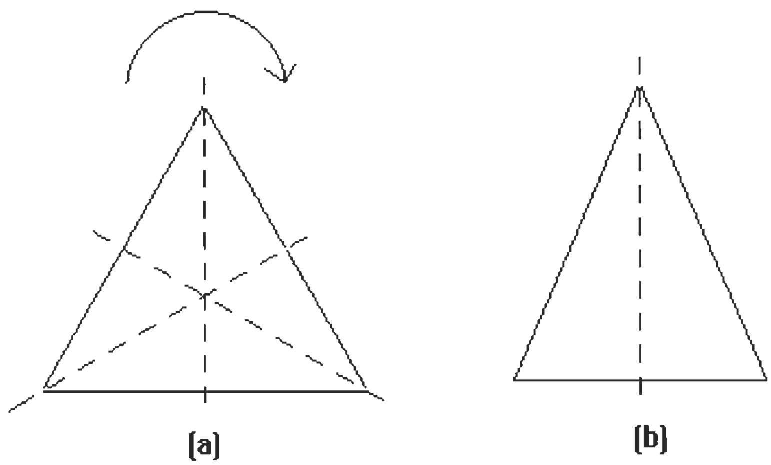

FIG. 2.1 – Deux triangles et leurs symétries

Les propriétés symétriques d'un objet peuvent habituellement être exprimées à l'aide d'un ensemble de matrices tel que lorsqu'une transformation est appliquée sur l'objet, le résultat des opérations matricielles nous redonne une matrice de l'ensemble.

Il existe par contre certaines lois régissant les symétries d'objets géométriques. L'une d'elle est que chaque symétrie a un inverse, et cet inverse est aussi une transformation symétrique. L'action combinée d'une symétrie et son inverse laisse l'objet inchangé. Par exemple, si nous revenons à l'exemple précédent et que Γ dénote la rotation du triangle équilatéral (a) de $2\pi/3$, alors Γ^{-1} (l'inverse de Γ) est une rotation de $4\pi/3$.

Nous nous concentrons, par simplicité, sur les symétries dites *lisses*. Supposons que x représente la position générale d'un objet. Si

$$\Gamma : x \mapsto \tilde{x}(x)$$

est une symétrie quelconque, alors $\tilde{x}$ est différentiable par rapport à x. De plus, puisque Γ^{-1} est aussi une symétrie, alors x est également différentiable par rapport à $\tilde{x}$. Donc comme Γ est injective et différentiable, tout comme son inverse, Γ est un difféomorphisme. Les symétries doivent aussi préserver leur structure, c'est-à-dire que l'objet ne doit pas subir de déformation sous l'action de la transformation. En résumé, une symétrie (en terme de transformation) se caractérise par trois propriétés :

1. La transformation préserve la structure de l'objet.
2. La transformation et son inverse sont lisses, c'est-à-dire différentiable en tout point (difféomorphisme).
3. La transformation déplace l'objet de façon à ce qu'il redevienne lui-même.

En fait, si les transformations satisfont (1) et (2), cela est suffisant. Par contre, certaines transformations sont des symétries si elles satisfont aussi à la propriété (3), connue sous le nom de *condition de symétrie*.

Exemple 2.1.2 *Le cercle*

$$x^2 + y^2 = 1$$

a une symétrie

$$\Gamma_\epsilon : (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x \cos \epsilon - x \sin \epsilon, x \sin \epsilon + x \cos \epsilon) \tag{2.1}$$

pour chaque $\epsilon \in (-\pi, \pi]$ *illustrée par*

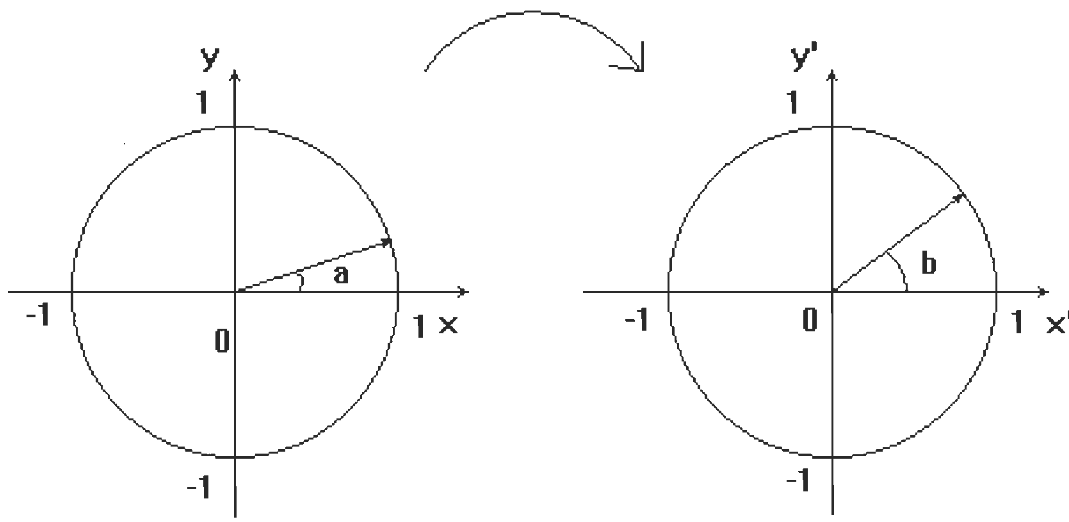

FIG. 2.2 – Rotation du cercle unitaire

où $a = \theta$ *et* $b = \theta + \epsilon$. *Réécrivons le tout en termes de coordonnées polaires, c'est-à-dire*

$$\Gamma_\epsilon : (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\cos(\theta + \epsilon), \sin(\theta + \epsilon)).$$

La transformation correspond donc à une rotation de degré ϵ *autour du centre du cercle. On voit que la structure est préservée (les rotations sont dites rigides, elle n'impliquent pas de déformations), que c'est lisse et inversible (l'inverse de cette rotation est une rotation de* $-\epsilon$*). Les deux premières propriétés sont satisfaites. Afin de démontrer la troisième, notons que*

$$\begin{aligned}
\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 &= (x \cos \epsilon - y \sin \epsilon)^2 + (x \sin \epsilon + y \cos \epsilon)^2 \\
&= x^2(\cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon) + y^2(\cos^2 \epsilon + \sin^2 \epsilon) \\
&= x^2 + y^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1, \text{ lorsque } x^2 + y^2 = 1,$$

qui est la condition de symétrie. La rotation n'est évidemment pas la seule symétrie du cercle unitaire, il y a aussi les réflexions par rapport à chaque ligne droite passant par le centre (diamètre). On remarque facilement que chaque réflexion est équivalente à la réflexion

$$\Gamma_R : (x, y) \mapsto (-x, y)$$

suivit d'une rotation Γ_ϵ.

Exemple 2.1.3 *On sait tous que l'équation différentielle la plus simple est sans aucun doute*

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

ayant comme ensemble de solutions

$$y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Malgré sa simplicité, cette équation admet plusieurs transformations de symétries telles que

$$\Gamma_\epsilon : \begin{cases} \tilde{y} = y + \epsilon \\ \tilde{x} = x. \end{cases}$$

Ainsi, on voit que

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{d}{dx}(y + \epsilon) = \frac{dy}{dx} = 0,$$

qui correspond à

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = 0 \quad \text{lorsque} \quad \frac{dy}{dx},$$

qui est évidemment la condition de symétrie.

2.2 Groupes de Lie à un paramètre

Dans cette section, nous allons aborder le sujet des *groupes de Lie à un paramètre* d'une façon générale. Soit un système de l équations aux dérivées partielles d'ordre n

$$E_s(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) = 0, \quad s = 1, \ldots, l, \tag{2.2}$$
$$x = (x^1, \ldots, x^p) \subset X \subset \mathbb{R}^p, \quad u = (u^1, \ldots, u^q) \subset U \subset \mathbb{R}^q,$$

de p variables indépendantes et q variables dépendantes où $u^{(k)}$ représente l'ensemble des variables dépendantes ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre k.

Exemple 2.2.1 *L'équation de la chaleur homogène*

$$u_t - u_{xx} = 0 \tag{2.3}$$

est une équation aux dérivées partielles d'ordre deux en $p = 2$ variables indépendantes x et t, en $q = 1$ variable dépendante u et où

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

À la base, ce que l'on cherche c'est un groupe G de transformations agissant sur l'espace $X \times U$ tel que

$$g \in G, \quad g \cdot (x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u}),$$

c'est-à-dire que pour tout élément g de l'ensemble G et pour toute solution $u(x)$ du système (2.2), $\tilde{u}(\tilde{x})$ est aussi une solution. Il existe une grande gamme de ces transformations mais les plus utiles, dans ce contexte, sont les groupes transformations à un paramètre.

Définition 2.2.1 *Un groupe de transformations G à un paramètre est un groupe de transformations agissant sur l'espace $X \times U$ dépendant continuellement d'un paramètre ϵ tel que tout élément $g \in G$ est décrit par la valeur du paramètre ϵ, i.e. $g = g(\epsilon)$. De plus, ces éléments forment un groupe agissant sur un élément $(x, u) \in X \times U$ de façon suivante :*

1. *L'élément identité est défini pour $\epsilon = 0 : g(0) \cdot (x, u) = (x, u)$.*
2. *L'action est fermée et associative : $g(\epsilon_1) \cdot (g(\epsilon_2) \cdot (x, u)) = g(\epsilon_1 + \epsilon_2) \cdot (x, u)$.*
3. *L'action est infiniment différentiable par rapport au paramètre ϵ.*

Si on revient à l'exemple portant sur le cercle unitaire, on peut voir facilement que (2.1) est un groupe de transformations locales à un paramètre. Le terme *locales* veut ici dire que la condition doit seulement être appliquée dans un voisinage de $\epsilon = 0$. Les symétries appartenant à un groupe de Lie à un paramètre dépendent continuellement du paramètre.

2.3 Symétries d'équations différentielles

2.3.1 Formalisme du groupe de symétrie

Le but de cette section sera d'établir le formalisme qui permet de trouver le groupe de symétries d'une équation différentielle quelconque. Cela se résume à chercher un groupe de transformations locales qui permet de transformer des solutions du système en d'autres solutions, groupe qui agit sur l'espace des variables dépendantes et indépendantes de notre équation. Bref, on cherche une méthode explicite afin d'établir le groupe de symétries. Afin de simplifier les notations, nous allons considérer un système d'une seule équation différentielle plutôt que le cas général d'un système de l équations.

Soit une équation différentielle donnée de la forme suivante

$$\begin{aligned} &E(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}, ..., u^{(n)}) = 0, \\ &x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où p et n sont des entiers positifs et $u^{(k)}$ représente les dérivées partielles de $u(x)$ d'ordre k.

Définition 2.3.1 *Un groupe de transformations locales de Lie G est appelé* ***groupe de symétries*** *du système d'équations différentielles partielles (2.4) si $u = f(x)$ est une solution, alors $\tilde{u} = g \cdot f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$ est aussi une solution pour tout f donné. Donc il nous faudra trouver un groupe de Lie G tel que*

$$G : (x, u) \longmapsto \big(\tilde{x}(x, u), \tilde{u}(x, u)\big)$$

où $\tilde{x}(x, u)$ et $\tilde{u}(x, u)$ sont des fonctions localement lisses.

Nous allons travailler sur l'algèbre de Lie L associée à ce groupe de Lie G. De plus, nous allons supposer que G est connexe. Cela implique alors que l'on peut travailler uniquement avec les générateurs infinitésimaux associés à G puisqu'ils forment un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie dont les opérateurs différentiels sont de la forme

$$\widehat{X} = \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x, u)\partial_{x_i} + \phi(x, u)\partial_u. \tag{2.5}$$

Les fonctions ξ_i et ϕ doivent maintenant être déterminées. L'utilisation de L est entre autres possible parce qu'elle contient tous les phénomènes continus contenus dans G. Le groupe de transformations dans G est recouvert par les générateurs infinitésimaux par un processus d'exponentiation. Les prochaines lignes présentent une méthode permettant de calculer ξ_i et ϕ . Il est à noter que lorsque ces coefficients sont connus, le groupe à un paramètre $G = \{g_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ généré par le champ de vecteurs (2.5) correspond à la solution $g_\lambda \cdot (x_0, u_0) = (x(\lambda), u(\lambda))$ du système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \lambda} &= \xi^i(\tilde{x},\tilde{u}), \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_i|_{\lambda=0} = x_i, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} &= \phi(\tilde{x},\tilde{u}), \quad \text{avec} \quad \tilde{u}|_{\lambda=0} = u, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où λ est le paramètre différentiable de G.

Afin de déterminer le champ de vecteurs (2.5), il faut connaître une notion très importante, celle de la prolongation.

Définition 2.3.2 *La prolongation d'une fonction est composée de la fonction elle-même et de toutes ses dérivées $n^{\text{ièmes}}$. Ainsi, si on a une fonction $f : X \to U$, $u = f(x)$, alors sa $n^{\text{ième}}$ prolongation est donnée par*

$$\mathrm{pr}^{(n)} f(x) = \left(f, f_{x_i}, f_{x_i x_j}, \ldots, f_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}\right).$$

On entend par *prolongement d'un groupe* G l'action de prolonger le groupe de transformations afin qu'il agisse aussi sur les dérivées. Donc, si on considère la $n^{\text{ième}}$ prolongation de (2.5), l'équation est décrite par

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}^{(n)} G: \; & \left\{x, u = f(x), f_{x_i}(x), \ldots, f_{x_{i_1} \ldots x_{i_n}}(x)\right\} \to \\ & \left\{\tilde{x}, \tilde{u} = f(\tilde{x}), f_{\tilde{x}_i}(\tilde{x}), \ldots, f_{\tilde{x}_{i_1} \ldots \tilde{x}_{i_n}}(\tilde{x})\right\}. \end{aligned}$$

Notons que l'information contenue dans la prolongation $\mathrm{pr}^{(n)} G$ est aussi entièrement contenue dans la transformation G elle-même.

Maintenant, il est important de comprendre comment la prolongation agit sur le champ de vecteurs (2.5). Ainsi, on peut ensuite déterminer l'algorithme qui permet de calculer l'algèbre de symétries d'une équation différentielle. Par conséquent, le champ de vecteurs qui génère l'action prolongée du groupe associé au champ de vecteurs (2.5) est décrit par

$$\mathrm{pr}^{(n)} \widehat{X} = \widehat{X} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{J} \phi^J \frac{\partial}{\partial u_J},$$

où la deuxième sommation se fait sur les k-tuples de nombres entiers $J = (j_1, \ldots, j_k)$ tel que $1 \leq j_k \leq p$, $k = j_1 + j_2 + \cdots + j_k$ et

$$u_J = \frac{\partial^k u}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_k}}.$$

Les coefficients ϕ_J de la prolongation sont donnés par la formule

$$\phi^J = D_J\Big(\phi - \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_i\Big) + \sum_{i=1}^{p} \xi_i u_{J,i}, \tag{2.7}$$

et ils dépendent de x, u et des dérivées de u jusqu'à l'ordre k. Il est à noter que D_J est une dérivée totale décrite comme suit :

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_i \frac{\partial u_{x_i}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u_{x_i}} + \cdots$$

On obtient l'algèbre de Lie de notre groupe de symétries de l'équation (2.4) en appliquant la $n^{\text{ième}}$ prolongation du champ de vecteurs $\widehat{X}$ sur (2.4) afin de l'évaluer sur l'ensemble des solutions de notre équation différentielle de départ, où n représente l'ordre le plus élevé. L'algorithme s'écrit comme suit

$$\mathrm{pr}^{(n)}\widehat{X} \cdot E|_{E=0} = 0. \tag{2.8}$$

Cette dernière condition nous permet d'extraire un système d'équations différentielles linéaires d'ordre n pour les coefficients ξ_i et ϕ de (2.5), coefficients qui dépendent uniquement de x et de u. On voit facilement que la condition (2.8) contient les dérivées de u. C'est en posant à zéro tous les coefficients de ces dérivées que l'on obtient des nouvelles équations que l'on baptise *équations déterminantes.*

2.3.2 Exemple : l'équation de Burger

Afin de mieux comprendre la procédure, considérons le cas de l'équation de Burger

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \tag{2.9}$$

où $u = u(x, t)$. Posons maintenant cette équation comme

$$E \equiv u_t - u_{xx} - u_x^2 = 0.$$

On écrit le champ de vecteurs (2.5) sous la forme

$$\widehat{X} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u.$$

Puisque l'équation (2.9) est de deuxième ordre, on doit considérer la seconde prolongation du champ de vecteur $\widehat{X}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{pr}^{(2)}\hat{X} = \xi\partial_x + \tau\partial_t + \phi\partial_u + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \phi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \phi^{tt}\partial_{u_{tt}},$$

et $\mathrm{pr}^{(2)}\hat{X} \cdot E|_{E=0} = 0$ nous donne

$$\phi^t - \phi^{xx} - 2u_x\phi^x \mid_{u_t=u_{xx}+u_x^2}= 0. \tag{2.10}$$

On calcule les coefficients ϕ^t, ϕ^x et ϕ^{xx} en utilisant l'équation (2.7) et on obtient

$$\begin{aligned}
\phi^t &= D_t\phi - D_t\xi \cdot u_x - D_t\tau \cdot u_t + \xi \cdot u_{tx} + \tau \cdot u_{tt}, \\
&= \phi_t + \phi_u u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_t u_x - \tau_t u_t - \tau_u u_t^2, \\
&= \phi_t + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_t u_x - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_x^2, \\
\phi^x &= D_x\phi - D_x\xi \cdot u_x - D_t\tau \cdot u_t + \xi \cdot u_{tx} + \tau \cdot u_{tt}, \\
&= \phi_x + \phi_u u_x - \xi_x u_x - \tau_u u_t u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{xx} &= D_x\phi^x - D_x\xi \cdot u_{xx} - D_x\tau \cdot u_{xt}, \\
&= D_x\big(\phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_u u_t - \tau_u u_x u_t - \xi_u u_x^2\big) - D_x\xi \cdot u_{xx} - D_x\tau \cdot u_{xx}, \\
&= D_x\phi_x + \big(D_x(\phi_u - \xi_x)\big)u_x + (\phi_u - \xi_x)D_x u_x - (D_x\tau_x)u_t \\
&\quad -\tau_x D_x u_t - D_x\tau_u(u_x u_t) - \tau_u D_x u_x u_t - \tau_u u_x D_x u_t - D_x\xi_u u_x^2 \\
&\quad -\xi_u D_x u_x^2 - D_x\xi \cdot u_{xx} - D_x\tau \cdot u_{xt},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^{xx} &= \phi_{xx} + 2\phi_{xu}u_x + \phi_{uu}u_x^2 - \xi_{xx}u_x - \xi_{xu}u_x^2 + \phi_u u_{xx} - \xi_x u_{xx} - \tau_{xx}u_t \\
&\quad -\tau_{xu}u_t u_x - \tau_x u_{xt} - \tau_{xu}u_x u_t - \tau_{uu}u_t u_x^2 - \tau_u u_{xx}u_t - \tau_u u_x u_{xt} \\
&\quad -\xi_{xu}u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 - 2\xi_u u_x u_{xx} - \xi_x u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_x u_{xt} - \tau_u u_x u_{xt}, \\
&= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - \tau_{xx}u_t - 2\tau_x u_{xt} \\
&\quad -\tau_{uu}u_t u_x^2 - \tau_u u_{xx}u_t - 2\tau_u u_x u_{xt} - \xi_{uu}u_x^3 - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\tau_{xu}u_x u_t.
\end{aligned}$$

On insère ces équations dans l'équation (2.10) et on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\phi_t - \phi_{xx} + (\tau_{xx} + \phi_u - \tau_t)u_t + (\xi_{xx} - 2\phi_{xu} - \xi_t - 2\phi_x)u_x + (2\tau_{xu} - \xi_u + 2\tau_x)u_x u_t \\
&+(2\xi_{xu} - \phi_{uu} + 2\xi_x - 2\phi_u)u_x^2 + (\tau_{uu} + 2\tau_u)u_x^2 u_t + (\xi_{uu} + 2\xi_u)u_x^3 + 2\tau_u u_x u_{xt} \\
&+3\xi_u u_x u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + (2\xi_x - \phi_u)u_{xx} - \tau_u u_t^2 + \tau_u u_t u_{xx} = 0.
\end{aligned}$$

On doit maintenant substituer tous les termes u_t ainsi que leurs dérivées qui se trouvent dans la dernière équation. Par la suite, cela va nous permettre de pouvoir en dégager les équations déterminantes. La substitution nous donne

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \quad u_{xt} = u_{xxx} + 2u_x u_{xx}, \quad u_t^2 = u_{xx}^2 + 2u_{xx}u_x^2 + u_x^4,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\phi^t - \phi^{xx} - 2u_x\phi^x &= \phi_t - \phi_{xx} + (2\xi_{xu} + 2\xi_x + \tau_{xx} - \tau_t - \phi_u - \phi_{uu})u_x^2 + (\tau_{uu} + \tau_u)u_x^4 \\
&+(2\tau_{xu} + 2\xi_u + 6\tau_x)u_x u_{xx} + (2\tau_{xu} + 2\tau_x + \xi_{uu} - \xi_u)u_x^3 + (\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x)u_{xx} \\
&+(\tau_{uu} + 5\tau_u)u_x^2 u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xxx} + (\xi_{xx} - \xi_t + 2\tau_x u_{xxx} - 2\phi_{xu} - 2\phi_x)u_x = 0.
\end{aligned}$$

Puisque ξ, τ et ϕ ne dépendent que de x, t et u, on peut annuler tous les coefficients qui sont entre parenthèses. Cela nous permet de finalement trouver les équations déterminantes qui suivent :

1. $\phi_t - \phi_{xx} = 0,$
2. $\tau_{xx} - \tau_t + 2\xi_x = 0,$
3. $2\xi_{xu} + 2\xi_x + \tau_{xx} - \tau_t - \phi_u - \phi_{uu} = 0,$
4. $\xi_{xx} - \xi_t - 2\phi_{xu} - 2\phi_x = 0,$
5. $\tau_{uu} + 5\tau_u = 0,$
6. $\tau_{uu} + \tau_u = 0,$
7. $2\tau_{xu} + 2\xi_u + 6\tau_x = 0,$
8. $2\tau_{xu} + 2\tau_x + \xi_{uu} - \xi_u = 0,$
9. $2\tau_x = 0,$
10. $2\tau_u = 0,$

Ces équations sont en réalité des équations différentielles linéaires, donc simples à résoudre. En les intégrant, on trouve la solution générale

$$\begin{aligned}
\tau &= c_1 + c_2 t + c_3 t^2, \\
\xi &= \tfrac{1}{2}(c_2 + 2c_3 t)x + c_4 + c_5 t, \\
\phi &= -k(x,t)e^{-u} - \tfrac{1}{4}c_3 x^2 - \tfrac{1}{2}c_5 x - \tfrac{1}{2}c_3 t + c_6,
\end{aligned}$$

où $c_1 \dots c_6$ sont des constantes d'intégration et $-k(x,t)e^{-u}$ est une solution quelconque de l'équation de Burger. C'est donc par les 6 champs de vecteurs suivants que l'équation de Burger est générée,

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_1 &= \partial_t, \\
\widehat{X}_2 &= \partial_x, \\
\widehat{X}_3 &= \partial_u, \\
\widehat{X}_4 &= tx\partial_x + 2t\partial_t, \\
\widehat{X}_5 &= 2t\partial_x - x\partial_u, \\
\widehat{X}_6 &= 4t^2\partial_t - x^2\partial_u - 2t\partial_u + 4tx\partial_x,
\end{aligned}$$

et par la sous-algèbre de dimension infinie

$$\widehat{X}_k = k(x,t)e^{-u}\partial_u,$$

où $k(x,t)$ est une solution de l'équation de la chaleur. La partie infinie ne reflète que le principe de superposition des équations différentielles linéaires. Les groupes à un paramètre G_i générés par les champs de vecteurs X_i sont obtenus en utilisant (2.6). On trouve

$$\begin{aligned}
G_1 &: \ (x+\epsilon, t, u), \\
G_2 &: \ (x, t+\epsilon, u), \\
G_3 &: \ (x, t, e^{\epsilon}u), \\
G_4 &: \ (e^{\epsilon}x, e^{2\epsilon}t, u), \\
G_5 &: \ (x + 2\epsilon t, t, u \cdot \exp(-\epsilon x - \epsilon^2 t)), \\
G_6 &: \ \left(\frac{x}{1-4\epsilon t}, \frac{t}{1-4\epsilon}, u\sqrt{1-4\epsilon t}\exp\left\{\frac{-\epsilon x^2}{1-4\epsilon t}\right\}\right) \\
G_k &: \ (x, t, u + \epsilon k(x,t)).
\end{aligned}$$

On remarque que l'algèbre de symétries de l'équation de Burger (2.9) est d'une grande similarité avec celle de l'équation de la chaleur, voir [22] pour le groupe de symétrie de (2.3). En effet, si on remplace u par $w = e^u$, alors $\widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_k$ prendront la même forme que ceux de l'algèbre de symétries de l'équation de la chaleur avec w en remplacement de u. Effectivement, si on place $w = e^u$ dans l'équation de Burger, on trouve

$$w_t = u_t e^u, \quad w_{xx} = (u_{xx} + u_x^2)e^u,$$

ce qui satisfait l'équation de la chaleur

$$w_t = w_{xx}.$$

Une transformation célèbre existe et permet de réduire les solutions de l'équation de Burger en solutions positives de l'équation de la chaleur. C'est la transformation de Hopf-Cole qui, pour le cas particulier de l'équation de Burger, prend la forme suivante :

$$v = (\log w)_x = w_x/w.$$

Nous n'aurions pas pu déduire cette transformation directement de (2.9). Ici, c'est l'algèbre de symétries qui a permis de trouver cette transformation. En fait, l'équivalence de deux algèbres de symétries qui correspondent à deux équations distinctes est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour conclure que ces deux équations sont équivalentes.

Chapitre 3

Symétries des équations différentielles aux différences

3.1 Méthode intrinsèque

Le chapitre précédent visait à expliquer et illustrer en détails la méthode développée par Lie afin de trouver des symétries d'équations différentielles générales. Maintenant, voici une méthode permettant de calculer les symétries pour les équations différentielles aux différences, soit la *méthode intrinsèque* développée par Levi et Winternitz [9]. Cette méthode sera appliquée aux chapitres 4 et 5 de ce mémoire, c'est-à-dire pour obtenir nos résultats principaux de ce travail.

Dans le but de simplifier la notation et de limiter les exemples, on va se concentrer sur les équations différentielles aux différences de deuxième ordre comprenant une fonction u qui dépend d'une variable discrète n et d'une variable continue t. On retrouve principalement ce type d'équation dans les systèmes dynamiques. Cette classe d'équations s'écrit

$$E_n^{(2)} \equiv E\left(t, n, u(n+k)|_{k=-a}^{b}, u_t(n+k)|_{k=-a_i}^{b_i}, u_{tt}(n+k)|_{k=-a_{ij}}^{b_{ij}}\right) = 0, \tag{3.1}$$

où $a, b, a_i, b_i, a_{ij}, b_{ij} \in Z^{>0}$ et $u(n) \equiv u(n,t)$. Les exemples les plus connus pour de telles équations sont le réseau de Toda et le réseau de Toda inhomogène décrits comme suit :

$$E_n^{(2)} \equiv u_{tt}(n) - e^{u(n-1)-u(n)} + e^{u(n)-u(n-1)}, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} \equiv\ & v_{tt}(n) - \tfrac{1}{2}v_t + \tfrac{1}{4} - \tfrac{n}{2} + \left(\tfrac{1}{4}(n-1)^2 + 1\right)e^{v(n-1)-v(n)} \\ & - \left(\tfrac{1}{4}n^2 + 1\right)e^{v(n)-v(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

On cherche maintenant les transformations de Lie ponctuelles qui laissent l'ensemble des solutions (3.1) invariant, c'est-à-dire

$$\tilde{t} = \Lambda_g(t, u(n,t)), \quad \tilde{u}(\tilde{n}, \tilde{t}) = \Omega_g(t, n, u(n,t)), \quad \tilde{n} = v_g(n), \tag{3.3}$$

où g représente un paramètre continu ou discret. Les transformations continues de la forme (3.3) sont générées par une algèbre de Lie ayant un champ de vecteurs de la forme

$$\widehat{X} = \tau(t, u(n))\partial_t + \phi(n, t, u(n,t))\partial_{u(n)}. \tag{3.4}$$

Il est à noter que n est traité comme une variable discrète. De plus, dans le cas des transformations continues, $\tilde{n} = n$ est exigé. Aussi, il est important de remarquer que l'on demande *a priori* que le coefficient τ ne dépende pas explicitement de n. Si cette condition n'est pas respectée, $\tilde{t}$ dépendra de n et l'équation (3.1) sera transformée en une équation différentielle aux différences non locale avec $\tilde{u}(n)$ et $\tilde{u}(n+1)$ calculés pour différentes valeurs de $\tilde{t}$. La condition suivante illustrée au dernier chapitre

$$\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X} \cdot E_n^{(2)}|_{E_n^{(2)}=0} = 0,$$

doit encore être vraie si $\widehat{X}$ est un élément de l'algèbre de symétrie $E_n^{(2)}$. On trouve facilement la deuxième prolongation de $\widehat{X}$ donnée par la formule suivante [9]

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X} = \tau(t, u(n))\partial_t \quad &+ \sum_{k=n-a}^{n+b} \phi\big(k, t, u(k)\big)\partial_{u(k)} \\
&+ \sum_{k=n-a_i}^{n+b_i} \phi^t\big(k, t, u(k), u_t(k)\big)\partial_{u_t(k)} \\
&+ \sum_{k=n-a_{ij}}^{n+b_{ij}} \phi^{tt}\big(k, t, u(k), u_t(k), u_{tt}(k)\big)\partial_{u_{tt}(k)},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi^t(k, t, u(k), u_t(k)) &= D_t\phi(k, t, u(k)) - [D_t\tau(t, u(k))]\, u_t(k), \\
\phi^{tt}(k, t, u(k), u_t(k), u_{tt}(k)) &= D_t\phi^t(k, t, u(k), u_t(k)) - [D_t\tau(t, u(k))]\, u_{tt}(k).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Notons que ϕ^t et ϕ^{tt} sont les coefficients de prolongation pour la variable continue. La prolongation pour la variable discrète est contenue dans la sommation sur k. Lorsque la méthode intrinsèque est utilisée, l'équation (3.5) doit être vue comme une équation unique ayant n comme variable discrète. On peut donc maintenant obtenir les équations déterminantes grâce à cet algorithme fini.

Une autre méthode, retrouvée en [10], permet aussi de trouver le groupe de symétries d'une équation différentielle aux différences. En résumé, elle consiste à considérer l'équation de départ (3.1) comme un système d'équations différentielles couplées pour les fonctions $u_n(t) \equiv u(n,t)$. Dans ce cas, n est vu comme un indice pour une infinité d'équations et une infinité de fonctions (ou dans le cas périodique, i.e. $u(n) = (n+N), N \in Z$ avec N équations et N fonctions). Donc, l'Ansatz pour le champ de vecteurs est décrit par

$$\widehat{X} = \tau(t, \{u_j(t)\})\partial_t + \sum_k \phi_k(t, \{u_j(t)\})\partial_{u_k(t)},$$

où $u_j(t)$ dénote l'ensemble de toutes les fonctions u_j (*a priori* infini). Alors, on peut calculer de façon générale la deuxième prolongation $\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X}$ et imposer

$$\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X} \cdot E_n^{(2)}|_{E_j^{(2)}=0} = 0, \quad \forall n, j.$$

Généralement, pour un nombre infini de fonctions on obtient un nombre infini d'équations déterminantes.

L'approche qui vient d'être illustrée est connue sous le nom *méthode des équations différentielles*, voir [10]. En principe, elle devrait donner un groupe de symétries plus grand que la méthode intrinsèque. Effectivement, la première approche donne seulement des transformations de Lie ponctuelles, tandis que la deuxième méthode permet parfois d'obtenir des transformations de Lie généralisées pour les différences (mais pas pour les dérivées). Par contre, en pratique il ne semble pas exister de symétrie d'ordre élevé pour la variable discrète. On peut donc en conclure que les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats.

3.1.1 Exemple : Symétrie pour le réseau de Toda

Afin de mieux comprendre la méthode intrinsèque, nous allons l'appliquer à l'équation de Toda (3.2). En considérant que le champ de vecteurs de notre algèbre de symétries prend la forme (3.4), on trouve la deuxième prolongation décrite par

$$\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X} = \tau\partial_t + \sum_{k=n-1}^{n+1} \phi(k)\partial_{u(k)} + \phi^{tt}(n)\partial_{u_{tt}(n)},$$

où ϕ^{tt} est donné explicitement par

$$\begin{aligned}\phi^{tt}(n) &= \phi_{tt}(n) + \phi_{tu}(n)2u_t + \phi_u(n)u_{tt} + \phi_u(n)u_{tt}^2 \\ &\quad -2\tau_t u_{tt} - 2\tau_{tu}u_t^2 - \tau_{tt}u_t - 3\tau_u u_t u_{tt} - 3\tau_{uu}u_t^3.\end{aligned}$$

Notons que pour simplifier les deux dernières équations, on a utilisé la notation $\tau \equiv \tau(t, u(n))$ et $\phi(k) \equiv \phi(k, t, u(k))$.

On doit maintenant appliquer la deuxième prolongation sur l'équation (3.2) et remplacer $u_{tt}(n)$ par $e^{u(n-1)-u(n)} - e^{u(n)-u(n+1)}$. Cela nous permet alors d'obtenir l'expression

$$
\begin{aligned}
&-\tau_{uu}(u_t(n))^3 + (\phi_{uu}(n) - 2\tau_{tu})(u_t(n))^2 \\
&+(2\phi_{tu}(n) - \tau^{tt}(n) - 3\tau_u\big(e^{u(n-1)-u(n)} - e^{u(n)-u(n+1)}\big))u_t(n) \\
&+\phi_{tt}(n) + (\phi_{tt}(n) - 2\tau_t(n))\big(e^{u(n-1)-u(n)} - e^{u(n)-u(n+1)}\big) \\
&-(\phi(n-1) - \phi(n))e^{u(n-1)-u(n)} + (\phi(n) - \phi(n+1))e^{u(n)-u(n+1)} = 0.
\end{aligned}
$$

Tout comme dans le cas de l'équation de Burger, on pose tous les coefficients de $(u_t)^\alpha$ égaux à zéro pour $\alpha = 3, 2, 1, 0$. On peut ainsi en extraire un système de quatre équations déterminantes. Ces équations peuvent se résoudre facilement lorsque l'on sait que la solution d'une équation purement discrète de la forme

$$\beta(n+1) - 2\beta(n) + \beta(n-1) = 0,$$

est donnée par

$$\beta(n) = \beta_1 n + \beta_0,$$

β_1 et β_0 étant des constantes.

Lorsque le système d'équations déterminantes est finalement résolu, on trouve

$$\tau = at + q(n), \quad \phi = b + 2an + ct,$$

où a, b et c sont des constantes réelles et $q(n)$ est une fonction quelconque de n. Les champs de vecteurs obtenus sont

$$\widehat{D} = t\partial_t + 2n\partial_{u(n)}, \quad \widehat{T} = q(n)\partial_t, \quad \widehat{W} = t\partial_{u(n)}, \quad \widehat{U} = \partial_{u(n)},$$

respectant les relations de commutation non-nulles suivantes

$$\left[\widehat{D}, \widehat{T}\right] = -\widehat{T}, \quad \left[\widehat{D}, \widehat{W}\right] = \widehat{W}, \quad \left[\widehat{T}, \widehat{W}\right] = q(n)\widehat{W}.$$

Comme différentes valeurs de n apparaissent dans (3.2), si les transformations générées par $\widehat{T}$ et $\widehat{W}$ sont appliquées d'une manière successive, le résultat obtenu ne correspondra pas à une transformation de symétrie. Afin de radier ce problème, $q(n)$

doit être restreint à une constante. Ainsi, une algèbre de Lie de dimension quatre peut être obtenue.

Il ne reste plus qu'à intégrer les générateurs de façon *standard*, c'est-à-dire de la même manière que pour les équations différentielles et on trouve

$$\tilde{u}(n,\tilde{t}) = u(n, \tilde{t}e^{\lambda_4/2} - \lambda_3) + \lambda_2(e^{\lambda_4/2} - \lambda_3) + \lambda_4 n + \lambda_1.$$

3.2 Symétries des systèmes dynamiques discrets

Un des grands intérêts directement en lien avec l'obtention des symétries d'une équation est qu'il est possible de classifier les équations selon leurs groupes de symétries en utilisant la théorie des groupes. Une autre motivation est la connexion possible entre les symétries et l'intégrabilité. En effet, il semble exister un lien entre les deux : les équations intégrables ont tendance à avoir un grand groupe de symétries.

Considérons une classe d'équations de la forme

$$\Delta_n \equiv \ddot{u}_n(t) - F_n\big(t, u_{n-1}(t), u_n(t), u_{n+1}(t)\big). \tag{3.7}$$

Les applications possibles des systèmes dynamiques de cette forme sont en grande majorité en biologie mathématique, en physique moléculaire ou en mécanique classique.

Le but de cette section est de faire une classification de la classe d'équations appartenant à (3.7). Cette classification se fait *modulo* le groupe de transformations permises, transformations de la forme

$$u_n(t) = \Omega_n(\tilde{u}_n(\tilde{t}), t, g), \quad \tilde{t} = \tilde{t}(t, g), \quad \tilde{n} = n, \tag{3.8}$$

où g est le paramètre de la transformation et Ω_n et t sont des fonctions inversibles et localement lisses. La transformation doit être définie de sorte que si elle est appliquée à une équation de la forme (3.7), elle la transforme en une équation de la même forme mais ayant une interaction $F_n(\tilde{t}, \tilde{u}_{n-1}(\tilde{t}), \tilde{u}_n(\tilde{t}), \tilde{u}_{n+1}(\tilde{t}))$ différente.

Il est à noter que seules les transformations ponctuelles de Lie seront considérées pour cette classification. Pour ce faire, on utilise la méthode démontrée à la section précédente, voire la méthode intrinsèque. On a donc, d'après (3.4), un champ de vecteurs de la forme

$$\widehat{X} = \tau(t, u_n)\partial_t + \phi_n(t, u_n)\partial_{u_n},$$

où $u_n \equiv u(n,t)$. L'algèbre de symétries peut être obtenue si la seconde prolongation de $\widehat{X}$ s'annule lorsqu'elle est appliquée sur l'équation (3.7) et évaluée sur l'ensemble des solutions. Cela se résume par

$$\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X} \cdot \Delta_n|_{\Delta_n=0} = 0. \tag{3.9}$$

3.2.1 Formulation du problème

Afin de pouvoir appliquer l'algorithme (3.9), la seconde prolongation du champ de vecteurs $\widehat{X}$ est nécessaire et se trouve à l'aide des formules (3.5) et (3.6)

$$\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X} = \tau(t,u_n)\partial_t + \sum_{k=n-1}^{n+1} \phi_k(t,u_k)\partial_{u_k} + \phi_n^{tt}\partial_{u_{n,tt}},$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi_n^{tt} &= D_t^2\phi_n - (D_t^2\tau)\, u_{n,t} - 2\,(D_t\tau)\, u_{n,tt}, \\
&= \phi_{n,tt} + (2\phi_{n,tu_n} - \tau_{tt})\, u_{n,t} \\
&\quad + (\phi_{n,u_n} - 2\tau_t)\, u_{n,tt} + (\phi_{n,u_nu_n} - 2\tau_{t,u_n})\, u_{n,t}^2 \\
&\quad - \tau_{u_nu_n} u_{n,t}^3 - 3\tau_{u_n} u_{n,t} u_{n,tt}.
\end{aligned}$$

On applique maintenant $\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X}$ à l'équation (3.7) en prenant soin de remplacer tous les termes $u_{n,tt}$ par F_n. Aussi, on exige que les coefficients $(u_{n,t})^\alpha$ s'annulent pour toutes valeurs $\alpha = 0,1,2,3$. Par contre, avant de résoudre les équations déterminantes, certaines conditions sur les interactions de F_n doivent impérativement être respectées :

1. Les cas où F_n contient des termes de la forme $[A \pm (-1)^n B]$ sont rejetés.
2. On exige que F_n soit non-linéaire et couplée, i.e.

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial u_i \partial u_k} \neq 0, \qquad \left(\frac{\partial F_n}{\partial u_{n-1}}, \frac{\partial F_n}{\partial u_{n+1}}\right) \neq (0,0),$$

   (dans un certain ensemble ouvert des variables). Lors de la classification, cette condition implique que tous les cas aboutissants à des cas non couplés ou linéaires seront rejetés.

On peut maintenant conclure que pour toutes fonctions F_n dépendant de façon non-triviale sur au moins un u_k ($k \neq n$), le champ de vecteurs $\widehat{X}$ prend finalement la forme

$$\widehat{X} = \tau(t)\partial_t + \left[\left(\frac{1}{2}\dot{\tau}(t) + a_n\right) u_n + \beta_n(t)\right]\partial_{u_n}, \tag{3.10}$$

où les fonctions $a_n, \tau(t)$ et $\beta(t)$ satisfont l'équation

$$\frac{1}{2}\dddot{\tau}u_n + \ddot{\beta}_n + \left(a_n - \frac{3}{2}\dot{\tau}\right)F_n - \tau F_{n,t} - \sum_{\alpha=n-1}^{n+1}\left[\left(\frac{1}{2}\dot{\tau} + a_\alpha\right)u_\alpha + \beta_\alpha\right]F_{u_{n,\alpha}} = 0. \quad (3.11)$$

La prochaine étape est de déterminer le groupe de transformations permises. Afin d'y parvenir, on doit insérer l'équation (3.8) dans (3.7) en y exigeant que les termes $\tilde{u}^2_{n,\tilde{t}}$ et $\tilde{u}_{n,\tilde{t}}$ soient absents. Ces transformations sont donc données par

$$u_n(t) = \frac{A_n}{\sqrt{\tilde{t}_t}}\tilde{u}_n(\tilde{t}) + B_n(t), \quad \tilde{t} = \tilde{t}(t), \quad A_{n,t} = 0, \quad \tilde{t}_t \neq 0, \quad A_n \neq 0, \quad \tilde{n} = n.$$

Sous ces transformations, (3.7) devient

$$\tilde{u}_{n,\tilde{t}\tilde{t}} = \frac{1}{A_n}(\tilde{t}_t)^{-3/2}\left\{F_n(t,u_k) + \left[-\frac{3}{4}A_n(\tilde{t}_t)^{-5/2}(\tilde{t}_{tt})^2 + \frac{A_n}{2}(\tilde{t}_t)^{-3/2}\tilde{t}_{tt}\right]\tilde{u}_n(\tilde{t}_t) + B_{n,tt}\right\},$$

ce qui implique aussi une transformation du champ de vecteurs (3.10) comme

$$\hat{\tilde{X}} = \tau(t)\tilde{t}_t\partial_{\tilde{t}} + \left\{\left[\frac{\tau}{2}\tilde{t}_{tt}(\tilde{t}_t)^{-1} + \frac{1}{2}\dot{\tau} + a_n\right]\tilde{u}_n + (\tilde{t}_t)^{1/2}A_n^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}\dot{\tau} + a_n\right)B_n + \beta_n + \tau B_{n,t}\right]\right\}\partial_{\tilde{u}_n}.$$

Maintenant, les transformations permises seront utilisées dans le but de simplifier le champ de vecteurs $\widehat{X}$ sous une forme canonique. Après avoir obtenu la forme voulue, on insère dans l'équation déterminante (3.11) les coefficients du champ de vecteurs canonique et on obtient une nouvelle équation qui se résout pour $F_n(t, u_k), k = n-1, n, n+1$. La résolution de cette dernière est de beaucoup simplifiée car on a maintenant une équation différentielle de premier ordre facilement résoluble par la méthode des caractéristiques.

3.2.2 Algèbres de symétries de dimension 1

Le but de cette sous-section est de trouver toutes les interactions possibles F_n de sorte que l'équation (3.7) admette au moins une algèbre de symétries uni-dimensionnelle. Il est important d'analyser tous les cas et sous-cas possibles. De l'équation (3.2.1), on peut déduire trois situations :

A) $\tau(t) \neq 0$ **:** Pour ce cas particulier, on choisit les fonctions $\tilde{t}(t)$ et $B_n(t)$ telles que

$$\tilde{t}(t) = [\tau(t)]^{-1}, \quad \tau B_{n,t} - \left(\frac{1}{2}\tau_t + a_n\right)B_n - \beta_n = 0, \quad (3.12)$$

ce qui nous donne

$$\widehat{X} = \partial_t + a_n u_n \partial_{u_n}. \quad (3.13)$$

On utilise ensuite l'équation (3.11) avec $\tau = 1$ et $\beta_n = 0$ pour trouver

$$F_n(t, u_k) = f_n(\xi_k)e^{a_n t}, \quad \xi_k = u_k e^{-a_k t}, \quad k = n-1, n-n+1.$$

B) $\tau(t) = 0, a_n \neq 0$: Dans ce cas, on choisit $B_n(t) = -\beta(t)/a_n$ ce qui nous donne

$$\widehat{X} = a_n u_n \partial_{u_n}, \tag{3.14}$$

$$F_n(t, u_k) = u_n f_n(t, \xi_k), \quad \xi_k = u_k^{a_n} u_n^{-a_k}, k = n \pm 1.$$

C) $\tau(t) = 0, a_n = 0, \beta_n(t) \neq 0$: De ces conditions, on déduit directement que

$$\widehat{X} = \beta_n(t)\partial_{u_n}, \tag{3.15}$$

$$F_n(t, u_k) = \frac{\ddot{\beta}_n}{\beta_n} u_n + f_n(t, \xi_k), \quad \xi_k = \beta_n(t)u_k - \beta_k(t)u_n, \quad k = \pm 1.$$

On voit que des restrictions ont été imposées sur la fonction F_n et ce, à cause de l'existence d'une algèbre de symétries uni-dimensionnelle. Néanmoins, on a pu amener le champ de vecteurs sous l'une des trois formes dites *standards* (3.13),(3.14) et (3.15) grâce aux transformations permises. La prochaine section va démontrer comment trouver des algèbres de symétries de dimensions supérieures à un.

3.2.3 Algèbres de symétries abéliennes

Tout d'abord, on doit débuter avec les algèbres de symétries de dimension deux. Afin d'y parvenir, on doit choisir un générateur $\widehat{X}_1$ qui est sous l'une des trois formes canoniques (3.13),(3.14) et (3.15) de l'algèbre uni-dimensionnelle. Par la suite, on ajoute un $\widehat{X}_2$ de forme générale (3.10). Les transformations permises doivent laisser l'espace $\left\{\widehat{X}_1\right\}$ invariant et permettre aux générateurs $\widehat{X}_2$ d'être simplifiés. Finalement, la relation de commutativité $\left[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2\right]$ doit être imposée. Ainsi, le générateur standardisé $\widehat{X}_2$ et la fonction F_n associée à la forme $\widehat{X}_1$ choisit peuvent être insérés dans l'équation déterminante (3.11). C'est alors que l'on pourra obtenir les algèbres de symétries de dimension deux et leurs interactions correspondantes.

Afin de bien illustrer les derniers principes, prenons le cas du générateur $\widehat{X}_1 = \partial_t + a_n u_n \partial_{u_n}$ de (3.13) et calculons l'algèbre de symétries associée.

Pour un générateur $\widehat{X}_2$ de forme générale (3.10), la commutativité $\left[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2\right] = 0$ implique que $\widehat{X}_2 = \tau_0 \partial_t + (b_n u_n + \beta_0 e^{a_n t})\partial_{u_n}$. Ensuite, on fait une combinaison linéaire de $\widehat{X}_1$ et $\widehat{X}_2$ afin d'obtenir

$$\widehat{X}_2 = (b_n u_n + \beta_0 e^{a_n t})\partial_{u_n}.$$

On peut déduire de l'équation (3.12) les transformations qui laissent l'espace $\left\{\widehat{X}_1\right\}$ invariant. Elles sont données par

$$\tilde{t}(t) = t, \quad B_n(t) = K_n e^{a_n t},$$

ce qui transforme le générateur $\widehat{X}_2$ sous la forme

$$\widehat{X}_2 \longrightarrow \widehat{X}_2 = \left[b_n \tilde{u}_n + A_n^{-1} e^{a_n t}(b_n K_n - \beta_0)\right] \partial_{\tilde{u}_n}.$$

Il y a deux cas possibles.

(i) $b_n \neq 0$: Dans ce cas, on choisit $K_n = \beta_0/b_n$, ce qui implique

$$\widehat{X}_1 = \partial_t + a_n u_n \partial_{u_n}, \quad \widehat{X}_2 = b_n u_n \partial_{u_n}.$$

Maintenant, on prend la fonction F_n correspondante à (3.13) et on l'insère dans l'équation déterminante (3.11). Ensuite on peut la résoudre à l'aide de la méthode des caractéristiques et on trouve

$$F_n = u_n g_n(\eta_k), \quad \eta_k = u_k^{a_n} u_n^{-b_k} exp[(a_n b_k - a_k b_n)t], \quad k = n+1, n-1.$$

(ii) $b_n = 0$: Ici, on choisit $A_n = \beta_0$, ce qui nous donne

$$\widehat{X}_1 = \partial_t + a_n u_n \partial_{u_n}, \quad \widehat{X}_2 = e^{a_n t} \partial_{u_n}.$$

On procède de la même façon que pour le cas **(i)** pour trouver

$$F_n = a_n^2 u_n(t) + e^{a_n t} g_k(\eta_k), \quad \eta_k = u_k e^{-a_n t} - u_n e^{-a_k t}, \quad k = n \pm 1.$$

Si l'on fait ce même travail en prenant comme générateur, à tour de rôle, les deux autres formes canoniques (3.14) et (3.15) de l'algèbre uni-dimensionnelle, on finit par trouver cinq algèbres de symétries abéliennes de dimension deux, c'est donc dire cinq classes d'interactions F_n.

Le même processus est appliqué afin de trouver les algèbres de symétries de dimension plus élevée. C'est aux algèbres de symétries de dimension deux obtenues précédemment que les générateurs linéairement indépendants sont ajoutés afin de trouver ceux de la dimension trois, et ainsi de suite. Ces nouveaux générateurs imposent aussi de nouvelles conditions sur les fonctions F_n. Ce processus se termine uniquement lorsque les restrictions imposées sur l'interaction sont données par des équations incompatibles pour F_n ou lorsque ces restrictions imposent à F_n d'être linéaire en u_{n+1}, u_n et u_{n-1}. On finit par trouver plusieurs classes d'interactions pour l'équation (3.7) admettant des algèbres de symétries de dimensions diverses. Avec les restrictions sur F_n, les conditions sur le couplage et la linéarité, on trouve pour des algèbres de Lie abéliennes que la dimension maximale est quatre.

Chapitre 4

Description de notre modèle

4.1 Quels modèles ont été étudiés ?

Les méthodes de la théorie des groupes peuvent être utilisées afin de classifier des équations par rapport à leurs groupes de symétries. D'ailleurs, cette question a déjà été étudiée pour plusieurs cas d'équations différentielles non-linéaires de la physique mathématique. Nous présentons ici quelques cas que nous avons répertoriés dans la littérature scientifique récente. D'une part, il y a les travaux de Winternitz *et al*

- Équations de KdV à coefficients variables [1],
- Équation de Schrödinger non-linéares à coefficients variable [2],
- Équations de K-P généralisées [3].

D'autre part, Gungor, Lahno et Zhdanov ont travaillé sur les équation d'évolution non-linéaires de types KdV, voir [4]. Ce type de classification peut également être considéré pour les équations différentielles aux différences non-linéaires. Dans ce cas, on retrouve trois systèmes discrets d'équations différentielles aux différences qui ont déjà été étudiés et pour lesquels une classification existe. Voici les classes d'équations étudiée :

1) « *Symmetries of discrete dynamical systems* » [11],

$$\ddot{u}_n = F_n\big(t, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}\big).$$

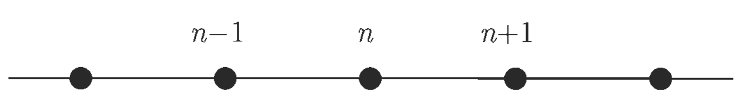

FIG. 4.1 - Chaînes d'atomes à une dimension.

2) « *Symmetries of discrete dynamical systems involving two species* » [13],

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_n &= F_n\big(t, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}\big),\\
\ddot{v}_n &= G_n\big(t, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, v_{n-1}, v_n, v_{n+1}\big).
\end{aligned}$$

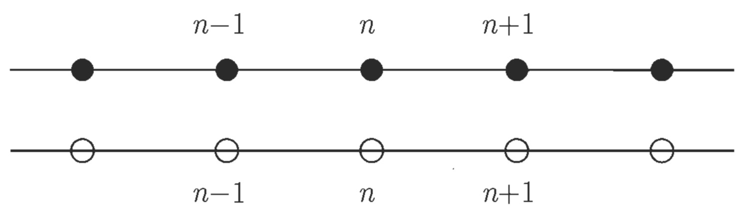

FIG. 4.2 - Chaînes moléculaires impliquant deux espèces.

3) « *Symmetry classification of diatomic molecular chains* » [12],

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_n &= F_n\big(t, \xi_n\big) + G_n\big(t, \eta_{n-1}\big),\\
\ddot{y}_n &= K_n\big(t, \xi_n\big) + P_n\big(t, \eta_n\big),\\
\xi_n : &= y_n - x_n, \qquad \eta_n := x_{n+1} - y_n.
\end{aligned}$$

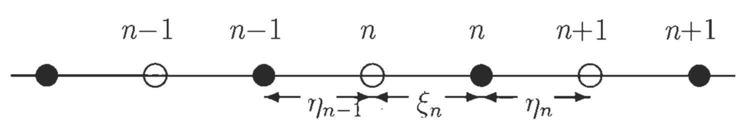

FIG. 4.3 - Chaîne moléculaire di-atomique.

On remarque que toutes les classifications répertoriée des équations différentielles aux différence sont pour des équations d'une seule variable discrète. Dans ce mémoire nous allons considérer, pour la première fois à notre connaissance, la classification d'une telle classe d'équations pour deux variables discrètes. Ce qui accroît considérablement la complexité du problème.

4.2 Notre modèle

En utilisant la théorie des chapitres précédents, on va appliquer les méthodes apprises afin de faire l'analyse des symétries de la classe d'équations différentielles aux différences suivante

$$\Delta_{nm} \equiv \ddot{u}_{nm} - F_{nm}\big(t,\ \{u_{pq}\}|_{(p,q)\in\Gamma}\big) = 0, \tag{4.1}$$

où les points sur le u représentent la dérivée par rapport au temps. L'ensemble Γ est constitué du point (n,m) et de ses six voisins dans un réseau triangulaire de dimension deux (voir Figure 4.4) donné par

$$\Gamma = \Big\{(n,m),\ (n{+}1,m),\ (n,m{+}1),\ (n{-}1,m{+}1),\ (n{-}1,m),\ (n,m{-}1),\ (n{+}1,m{-}1)\Big\}.$$

Notons que le réseau est uniforme, indépendant du temps et fixé. La variable indépendante $u_{nm}(t)$ peut être interprétée comme étant le déplacement atomique perpendiculaire au réseau par rapport à sa position d'équilibre. La fonction F_{nm}, appelée ici *interaction*, est *a priori* une fonction lisse non spécifiée. Notre principal objectif est d'étudier ce système en respectant les symétries de Lie permises, afin de classifier les fonctions F_{nm} en classes de conjugaison et de déterminer les symétries de Lie pour chacune de ces classes.

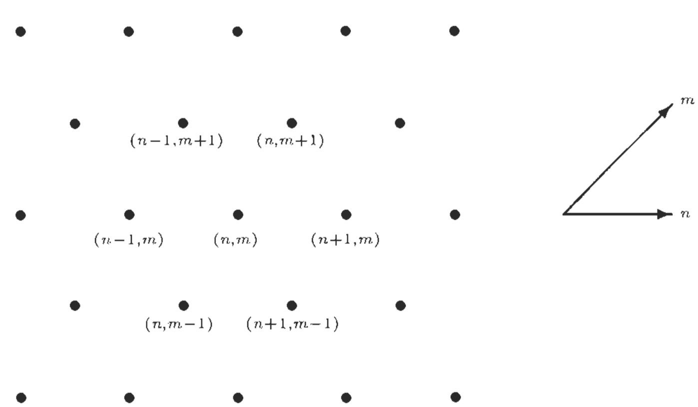

FIG. 4.4. - L'atome (n,m) et ses six voisins dans un réseau triangulaire de dimension deux.

Ce modèle comporte les hypothèses suivantes :

(i) L'interaction F_{nm} n'implique que les voisins immédiats du système, i.e. que l'atome (n,m) interagit uniquement avec les atomes de l'ensemble Γ, voir Figure 4.4.

(ii) On suppose que l'interaction F_{nm} est non-linéaire, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 F_{nm}}{\partial u_{pq} \partial u_{p'q'}} \neq 0, \text{ pour tout } (p,q),(p',q') \in \Gamma.$$

De plus, l'interaction doit être couplée, i.e.

$$\frac{\partial F_{nm}}{\partial u_{pq}} \neq 0, \text{ pour tout } (p,q) \in \Gamma.$$

(iii) L'interaction F_{nm} est isotropique dans les trois directions du réseau :

1) $\triangle n \neq 0$ et $\triangle m = 0$;
2) $\triangle n = 0$ et $\triangle m \neq 0$;
3) $\triangle n \neq 0$ et $\triangle m \neq 0$.

(iv) On suppose que l'interaction F_{nm} dépend de façon continue des variables discrètes n et m. Par exemple, les interactions qui dépendent d'un terme de forme $(-1)^{nm}$ sont exclues.

(v) Ce ne sont que les algèbres de symétries *maximales* pour une interaction donnée F_{nm} qui seront listées. En d'autres termes, si une interaction donnée admet des algèbres de symétries $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_N$ avec $\dim \mathcal{L}_1 < \dim \mathcal{L}_2 < \cdots < \dim \mathcal{L}_N$, alors ce n'est que le cas $\mathcal{L}_N$ qui sera listé.

Notre motivation est la même que pour la classification des équations différentielles en fonction de leurs symétries des cas [1, 2, 3, 4]. Lorsque (4.1) admet un groupe de symétries non-trivial, il est alors souvent possible d'obtenir des solutions analytiques exactes satisfaisant aux exigences de certaines symétries. Un modèle comme le notre a plusieurs applications en physique, voir par exemple le travail de Büttner *et al* [5, 6, 7, 8].

Afin de réaliser notre objectif, nous allons utiliser la méthode intrinsèque illustrée au chapitre 3 et aussi dans [9, 10]. C'est cette même méthode qui a été appliquée par Winternitz *et al* dans les cas mentionnés en première section de ce chapitre, voir [11, 12, 13]. Pour le cas de notre recherche, cette méthode sera adaptée à un système triangulaire de dimension deux. On sait maintenant que l'algèbre de Lie des groupes de symétries associée à l'équation (4.1), souvent appelée *algèbre de symétries*, est réalisée par le champ de vecteurs qui suit :

$$\widehat{X} = \tau(t, u_{nm})\partial_t + \phi_{nm}(t, u_{nm})\partial_{u_{nm}}. \tag{4.2}$$

De plus, on sait que l'algorithme permettant de trouver les fonctions τ,ϕ_{nm} correspond à trouver la seconde prolongation $\mathrm{pr}^{(2)}\widehat{X}$ de $\widehat{X}$ et d'imposer qu'elle s'annule pour l'ensemble solutions de (4.1), i.e.

$$\mathrm{pr}^{(2)}\hat{X} \cdot \Delta_{nm}\Big|_{\Delta_{nm}=0} = 0. \tag{4.3}$$

Notre objectif principal est de trouver et de classifier toutes les interactions F_{nm} pour lesquelles (4.1) admet au moins une algèbre de symétries de dimension un. Ensuite, nous allons spécifier ces interactions et trouver toutes celles qui admettent une algèbre de symétries de dimension plus élevée.

Dans le prochain chapitre, on retrouve les résultats décrits par deux types d'interactions : les interactions des algèbres de symétries abéliennes et celles qui sont non-résolubles. Celles des algèbres abéliennes sont représentées par A_{jk}, où le premier indice représente la dimension de l'algèbre, et le deuxième indice énumère les classes non-équivalentes. Leur dimension satisfait $1 \leq \dim \mathcal{L} \leq 12$ avec $\dim \mathcal{L} \neq 9, 11$. Pour ce qui est des algèbres de symétries non-résolubles, elles sont dénotées par NS_{jk}. Elles contiennent toutes $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ comme sous-algèbre et elles sont de dimension $3 \leq \dim \mathcal{L} \leq 13$ avec $\dim \mathcal{L} \neq 10, 12$.

4.2.1 Formulation du problème

La deuxième prolongation du champ de vecteurs (4.2) est donnée par [9, 10, 11]

$$\mathrm{pr}^{(2)}\hat{X} = \tau(t, u_{nm})\partial_t + \sum_{(p,q)\in\Gamma} \phi_{pq}(t, u_{pq})\partial_{u_{pq}} + \phi^{tt}_{nm}\partial_{\ddot{u}_{nm}}. \tag{4.4}$$

Le coefficient ϕ^{tt}_{nm} est une fonction qui dépend de $n, m, t, u_{nm}, \dot{u}_{nm}$ et $\ddot{u}_{nm}$ donné par

$$\phi^{tt}_{nm} = D_t^2\phi_{nm} - (D_t^2\tau)\,\dot{u}_{nm} - 2(D_t\tau)\,\ddot{u}_{nm}, \tag{4.5}$$

où D_t représente la dérivée totale par rapport au temps.

À partir de (4.3), (4.4) et (4.5) on peut obtenir les équations déterminantes des symétries. On élimine les termes $\ddot{u}_{nm}$ en utilisant (4.1) et on impose que les coefficients de $\dot{u}^3_{nm}$, $\dot{u}^2_{nm}$, $\dot{u}_{nm}$ et $\dot{u}^0_{nm}$ doivent s'annuler de façon indépendante. Selon les équations déterminantes des coefficients $\dot{u}^k_{nm}$ $k = 1, 2, 3$, le champ de vecteurs (4.2) doit avoir la forme

$$\widehat{X} = \tau(t)\partial_t + \left[\left(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\right)u_{nm} + \lambda_{nm}(t)\right]\partial_{u_{nm}}, \tag{4.6}$$

où $\dot{a}_{nm} = 0$. L'équation déterminante résultante implique explicitement l'interaction F_{nm} et est donnée par

$$\begin{aligned} &\frac{\dddot{\tau}}{2}u_{nm} + \ddot{\lambda}_{nm} + \left(a_{nm} - \frac{3}{2}\dot{\tau}\right)F_{nm} - \tau\partial_t F_{nm} \\ &= \sum_{(p,q)\in\Gamma}\left[\left(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{pq}\right)u_{pq} + \lambda_{pq}(t)\right]\partial_{u_{pq}}F_{nm}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Notre but est donc maintenant de résoudre (4.7) en respectant la forme non-linéaire de l'équation. Pour chaque interaction F_{nm} non-linéaire, nous comptons trouver le groupe de symétries maximal correspondant. Puisque pour chaque groupe de symétries il y a une classe d'équations différentielles aux différences non-linéaires (qui sont reliées entres elles par certaines transformations), nous recherchons l'élément le plus simple pour chacune de ces classes. Par conséquent, la classification de (4.1) se fera selon les classes d'équivalence sous l'action d'un groupe de transformations permises. Ces transformations sont les suivantes :

$$\tilde{t} = \tilde{t}(t), \qquad u_{nm}(t) = \Omega_{nm}\Big(t, \tilde{u}_{nm}(\tilde{t})\Big), \qquad (\tilde{n}, \tilde{m}) = (n, m),$$

où Ω_{nm} et $\tilde{t}$ sont des fonctions localement lisses et monotones, donc inversibles. En substituant ces transformations dans (4.1) et en exigeant que la forme de l'équation soit préservée, on trouve

$$u_{nm}(t) = \dot{\tilde{t}}^{-1/2} P_{nm}\, \tilde{u}_{nm}(\tilde{t}) + Q_{nm}(t),$$

où $P_{nm} \neq 0$, $\dot{P}_{nm} = 0$ et $\dot{\tilde{t}} \neq 0$. Le système transformé est donné par

$$\ddot{\tilde{u}}_{nm}(\tilde{t}) = \tilde{F}_{nm}\big(\tilde{t},\ \{\tilde{u}_{pq}\}|_{(p,q)\in\Gamma}\big),$$

où

$$\tilde{F}_{nm} = \dot{\tilde{t}}^{-3/2} P_{nm}^{-1}\Big(F_{nm} - \ddot{Q}_{nm}(t)\Big) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{t}}^{-3}\left(\dddot{\tilde{t}} - \frac{3}{2}\dot{\tilde{t}}^{-1}\ddot{\tilde{t}}^{-2}\right)\tilde{u}_{nm}(\tilde{t}).$$

Le champ de vecteurs donné par (4.6) est aussi transformé comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{X} &= \tau(t)\,\dot{\tilde{t}}\,\partial_{\tilde{t}} + \left\{\left(\tfrac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm} + \tfrac{1}{2}\dot{\tilde{t}}^{-1}\ddot{\tilde{t}}\,\tau\right)\tilde{u}_{nm}\right.\\ &+ \left.\dot{\tilde{t}}^{1/2}P_{nm}^{-1}\Big[\left(\tfrac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\right)Q_{nm}(t) + \lambda_{nm}(t) - \tau\dot{Q}_{nm}\Big]\right\}\partial_{\tilde{u}_{nm}}.\end{aligned}$$

En d'autres mots, sous les transformations permises, le champ de vecteurs (4.6) caractérisé par le triplet $\{\tau(t),\ a_{nm},\ \lambda_{nm}(t)\}$ l'est maintenant par le nouveau triplet $\{\tilde{\tau}(\tilde{t}),\ \tilde{a}_{nm},\ \tilde{\lambda}_{nm}(\tilde{t})\}$ où

$$\begin{aligned}\tau(t) &\rightarrow \tilde{\tau}(\tilde{t}) = \tau\big(t(\tilde{t})\big)\,\dot{\tilde{t}},\\ a_{nm} &\rightarrow \tilde{a}_{nm} = a_{nm},\\ \lambda_{nm}(t) &\rightarrow \tilde{\lambda}_{nm}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{t}}^{1/2}P_{nm}^{-1}\Big[\left(\tfrac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\right)Q_{nm}(t) + \lambda_{nm}(t) - \tau\dot{Q}_{nm}\Big].\end{aligned} \tag{4.8}$$

Chapitre 5

Résultats

5.1 Algèbres de symétries de dimension 1

Afin de simplifier ce qui va suivre, nous allons introduire quelques notations. Premièrement, on va écrire les fonctions g du type $g\big(\{\xi_{pq}\}|_{(p,q)\in S}\big)$, où S est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ et $\xi_{pq} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, simplement comme étant $g(\xi_{pq})$ avec $(p,q) \in S$. En second lieu, si $\{f_{pq}^{(1)},\ f_{pq}^{(2)}, \ldots, f_{pq}^{(N)}\}$ est un ensemble de N fonctions $f_{pq}^{(i)} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ qui dépendent des variables discrètes p, q, alors la fonction déterminant $\mathcal{D} : \mathbb{Z}^{2N} \to \mathbb{R}$ sera définie comme

$$\mathcal{D}\big[f_{p_1q_1}^{(1)}, f_{p_2q_2}^{(2)}, \ldots, f_{p_Nq_N}^{(N)}\big] := \begin{vmatrix} f_{p_1q_1}^{(1)} & f_{p_2q_2}^{(1)} & \cdots & f_{p_Nq_N}^{(1)} \\ f_{p_1q_1}^{(2)} & f_{p_2q_2}^{(2)} & \cdots & f_{p_Nq_N}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{p_1q_1}^{(N)} & f_{p_2q_2}^{(N)} & \cdots & f_{p_Nq_N}^{(N)} \end{vmatrix}.$$

Par exemple, nous avons $\mathcal{D}[f_{nm}, g_{n+1m}, 1_{nm+1}] = \begin{vmatrix} f_{nm} & f_{n+1m} & f_{nm+1} \\ g_{nm} & g_{n+1m} & g_{nm+1} \\ 1_{nm} & 1_{n+1m} & 1_{nm+1} \end{vmatrix}$ où la fonction $1_{pq} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ est la fonction constante $(p,q) \mapsto 1$. (Ici, les indices de la fonction constante sont écrits simplement dans le but de clarifier la fonction déterminant $\mathcal{D}[f_{nm}, g_{n+1m}, 1_{nm+1}]$.)

Théorème 5.1.1 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries de dimension* 1 *pour* 3 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction sont représentées comme suit :*

$$A_{1,1}: \quad \widehat{X} = \partial_t + a_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \tag{5.1}$$

$$F_{nm} = \exp(a_{nm}t) f_{nm}\big(\xi_{pq}\big), \quad \xi_{pq} = u_{pq}\exp(-a_{pq}t), \quad (p,q) \in \Gamma. \tag{5.2}$$

$$A_{1,2}: \quad \widehat{X} = a_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \tag{5.3}$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}\big(t,\, \xi_{pq}\big), \quad \xi_{pq} = \frac{(u_{nm})^{a_{pq}}}{(u_{pq})^{a_{nm}}}, \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m)\}. \tag{5.4}$$

$$A_{1,3}: \quad \widehat{X} = \lambda_{nm}(t)\, \partial_{u_{nm}}, \tag{5.5}$$

$$F_{nm} = \frac{\ddot{\lambda}_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm} + f_{nm}\big(t, \xi_{pq}\big),\ \xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{pq}],\ (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m)\}. \tag{5.6}$$

Preuve. On suppose que le système (4.1) possède au moins un groupe de symétries uni-dimensionnel généré par le champ de vecteurs de la forme (4.6). En utilisant les transformations permises, on peut transformer $\widehat{X}$ en trois classes non-équivalentes :

a) Dans le cas de $\tau(t) \neq 0$, on choisit les fonctions $\tilde{t}(t)$ et $Q_{nm}(t)$ telles que $\tau(t) \to 1$ et $\lambda_{nm}(t) \to 0$. Plus précisément, on veut que les fonctions $\tilde{t}(t)$ et $Q_{nm}(t)$ satisfassent aux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\tau(t)\, \dot{\tilde{t}} = 1, \qquad \tau \dot{Q}_{nm} - \lambda_{nm}(t) - \left(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\right) Q_{nm}(t) = 0.$$

Par conséquent, sous les transformations permises, le champ de vecteurs (4.6) avec $\tau(t) \neq 0$ est donné par (5.1). Ainsi, on peut maintenant résoudre l'équation résultante (4.7) pour $\tau = 1$ et $\lambda_{nm} = 0$. En appliquant la méthode des caractéristiques on trouve la fonction (5.2).

b) Dans le cas où $\tau = 0$ et $a_{nm} \neq 0$, on choisit la fonction $Q_{nm}(t)$ telle que $\lambda_{nm}(t) \to 0$, i.e.

$$a_{nm} Q_{nm}(t) + \lambda_{nm}(t) = 0.$$

Le champ de vecteurs (4.6) est alors donné par (5.3). L'équation résultante (4.7) donne (5.4).

c) Finalement, lorsque $\tau = 0$ et $a_{nm} = 0$, on a trouvé le champ de vecteurs (5.5) associé, et l'équation résultante (4.7) nous donne (5.6). $\square$

Remarque. Il est à noter que, dans certains cas, le champ de vecteurs (5.5) peut être simplifié puisque qu'il peut être transformé comme étant $\lambda_{nm}(t) \to \tilde{\lambda}_{nm}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{t}}^{1/2} P_{nm}^{-1} \lambda_{nm}(t)$ à partir des transformations permises (4.8). Par exemple, si $\lambda_{nm}(t)$ est séparable en fonction des variables discrètes n, m et de la variable continue t, i.e. $\lambda_{nm}(t) = \mu_{nm}\nu(t)$, alors $\lambda_{nm}(t)$ peut prendre la valeur 1.

On peut observer que l'existence d'une algèbre de symétries uni-dimensionnelle restreint l'interaction F_{nm} à des fonctions arbitraires à 7 variables, plutôt qu'à 8 variables comme dans l'équation originale (4.1). Comme on l'a bien illustré dans le chapitre précédent, nous allons nous servir de cette algèbre uni-dimensionnelle afin de construire les algèbres de symétries de dimensions plus élevées.

5.2 Algèbres de symétries abéliennes

Théorème 5.2.1 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 2 *pour* 4 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{2,1}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm}^{(1)} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = a_{nm}^{(2)} u_{nm}\partial_{u_{nm}},$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad \xi_{pq} = \frac{(u_{pq})^{a_{nm}^{(2)}}}{(u_{nm})^{a_{pq}^{(2)}}} \exp\left(\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{pq}^{(2)}]t\right), \ (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m)\}.$$

$$A_{2,2}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = \mathrm{e}^{a_{nm}t}\partial_{u_{nm}},$$

$$F_{nm} = a_{nm}^2 u_{nm} + \mathrm{e}^{a_{nm}t} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad \xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}\mathrm{e}^{-a_{nm}t}, 1_{pq}], \ (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m)\}.$$

$$A_{2,3}: \quad \widehat{X}_1 = a_{nm}^{(1)} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = a_{nm}^{(2)} u_{nm}\partial_{u_{nm}},$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m), (n+1,m)\},$$

$$\xi_{pq} = \left(u_{nm}\right)^{-\mathcal{D}[a_{n+1m}^{(1)}, a_{pq}^{(2)}]} \left(u_{n+1m}\right)^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{pq}^{(2)}]} \left(u_{pq}\right)^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}]}.$$

$$A_{2,4}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}},$$

$$F_{nm} = f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad \xi_{pq} = u_{pq} - u_{nm}, \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m)\}.$$

Il y a deux algèbres qui ne sont pas mentionnées ci-haut. Un des cas correspond à l'interaction F_{nm} avec $\widehat{X}_1$ et $\widehat{X}_2$ de $A_{4,4}$ (voir la liste des algèbres de symétries de dimension 4) et n'est pas listée ici puisque que l'algèbre de symétries peut aussi être de dimension 4 avec la même interaction, i.e. que l'algèbre n'est pas ≪maximale≫. Le deuxième cas correspond au cas dégénéré $\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}] = 0$ de $A_{2,4}$. Les générateurs sont donnés par $\widehat{X}_1 = \lambda_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}$ et $\widehat{X}_2 = \gamma_m(t)\,\lambda_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}$ avec $\gamma_m \neq \gamma_{m+1}$. Par conséquent, le générateur $\widehat{X}_2$ donne une interaction F_{nm} non-isotropique. En fait, pour toutes les dimensions, il en existe. Illustrons ce cas particulier pour cette dimension seulement, question d'avoir une idée générale de ce type de cas.

Cas dégénéré non-isotropique :

$$A_{2,5}: \quad \widehat{X}_1 = \lambda_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = \gamma_m(t)\,\lambda_{nm}(t)\partial_{u_{nm}},$$

$$F_{nm} = \quad \lambda_{nm}^{-1}\left\{ \ddot{\lambda}_{nm} u_{nm} + \frac{\ddot{\gamma}_m\lambda_{nm} + 2\dot{\gamma}_m\dot{\lambda}_{nm}}{(\gamma_{m+1} - \gamma_m)\lambda_{nm+1}} \cdot \left| \begin{matrix} u_{nm+1} & u_{nm} \\ \lambda_{nm+1} & \lambda_{nm} \end{matrix} \right| \right\}$$

$$+ \ f_{nm}(t, \xi_{n+1m}, \xi_{n-1m}, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \quad \gamma_{m+1} \neq \gamma_m,$$

$$\xi_{n+1m}, \xi_{n-1m} \text{ comme dans } (5.6),$$

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} u_{n-1m+1} & u_{nm+1} \\ \lambda_{n-1m+1} & \lambda_{nm+1} \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} u_{n+1m-1} & u_{nm-1} \\ \lambda_{n+1m-1} & \lambda_{nm-1} \end{vmatrix},$$

$$\eta_3 = \begin{vmatrix} u_{nm} & u_{nm-1} & u_{n-1m+1} \\ \lambda_{nm} & \lambda_{nm-1} & \lambda_{n-1m+1} \\ \gamma_m \lambda_{nm} & \gamma_{m-1}\lambda_{nm-1} & \gamma_{m+1}\lambda_{n-1m+1} \end{vmatrix}.$$

On peut vérifier qu'aucune algèbre de la liste ne peut être conjuguée à une autre et que toute algèbre de symétries abélienne de dimension deux est équivalente à une algèbre de cette liste.

Théorème 5.2.2 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 3 *pour* 3 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{3,1}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a^{(1)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = a^{(2)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_3 = a^{(3)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}},$$
$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m)\},$$
$$\xi_{pq} = (u_{nm})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{pq}]} (u_{n+1m})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{pq}]} (u_{pq})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}]} \exp\left(-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{pq}]t\right).$$

$$A_{3,2}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = \mathrm{e}^{a_{nm}t}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_3 = \kappa_{nm}\mathrm{e}^{a_{nm}t}\partial_{u_{nm}},$$
$$F_{nm} = a^2_{nm} u_{nm} + \mathrm{e}^{a_{nm}t} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m)\}$$
$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}\mathrm{e}^{-a_{nm}t}, \kappa_{n+1m}, 1_{pq}], \quad \dot{\kappa}_{nm} = 0, \quad \kappa_{nm} \neq \kappa_{n+1m}, \quad \kappa_{nm} \neq \kappa_{nm+1}.$$

$$A_{3,3}: \quad \widehat{X}_1 = a^{(1)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = a^{(2)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_3 = a^{(3)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}},$$
$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m),(n,m+1)\},$$
$$\begin{aligned}\xi_{pq} = \; & \left(u_{nm}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{pq}]} \left(u_{n+1m}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{pq}]} \left(u_{nm+1}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{pq}]} \\ & \times \left(u_{pq}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}]}.\end{aligned}$$

Une fois de plus, quatre algèbres de Lie de dimension 3 n'ont pas été listées. La raison pour trois d'entre elles est qu'elles ne sont pas sous la forme ≪maximale≫. Leur algèbre maximale correspondante sont données par $A_{6,4}$, $A_{4,4}$ et $A_{4,5}$ dans les résultats qui vont suivre. L'algèbre restante correspond au cas dégénéré $\lambda_{n+1m} = \lambda_{nm}$

de $A_{4,5}$ (sans $\widehat{X}_4$). Les générateurs sont donnés par $\widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}$, $\widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}}$ et $\widehat{X}_3 = \lambda_m(t)\partial_{u_{nm}}$ avec $\lambda_{m+1} \neq \lambda_m$. Par conséquent, on obtient un système non-isotropique.

La fonction discrète κ_{nm} de $A_{3,2}$ dépend autant de n que de m. Si ce n'était pas le cas, on obtiendrait un système non-isotropique découplé.

Théorème 5.2.3 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 4 *pour* 5 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit : :*

$$A_{4,1}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a^{(1)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \; i = 2,3,4$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m),(n,m+1)\},$$

$$\begin{aligned} \xi_{pq} &= (u_{nm})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{pq}]} (u_{n+1m})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{pq}]} (u_{nm+1})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{pq}]} \\ &\quad \times (u_{pq})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}]} \exp\left(-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{pq}]t\right). \end{aligned}$$

$$A_{4,2}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = \mathrm{e}^{a_{nm}t}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \kappa^{(i)}_{nm}\mathrm{e}^{a_{nm}t}\partial_{u_{nm}}, \quad i = 1,2$$

$$\dot{\kappa}^{(i)}_{nm} = 0, \; \kappa^{(i)}_{n+1m} \neq \kappa^{(i)}_{nm}, \; \kappa^{(i)}_{nm+1} \neq \kappa^{(i)}_{nm},$$

$$F_{nm} = a^2_{nm} u_{nm} + \mathrm{e}^{a_{nm}t} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m),(n,m+1)\},$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}\mathrm{e}^{-a_{nm}t}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, 1_{pq}].$$

$$A_{4,3}: \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \; i = 1,\ldots,4$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad (p,q) \in \{(n-1,m),(n,m-1),(n+1,m-1)\},$$

$$\begin{aligned} \xi_{pq} &= \left(u_{nm}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{pq}]} \left(u_{n+1m}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{pq}]} \\ &\quad \times \left(u_{nm+1}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{pq}]} \left(u_{n-1m+1}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{pq}]} \\ &\quad \times \left(u_{pq}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}]}. \end{aligned}$$

$$A_{4,4}: \widehat{X}_i = \lambda^{(i)}_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}, \; i = 1,2; \quad \widehat{Y}_k = \left(\sum_{j=1}^{2} \omega_{kj}(t)\lambda^{(j)}_{nm}(t)\right)\partial_{u_{nm}}, \; k = 1,2$$

$$F_{nm} = 1 + \begin{vmatrix} u_{nm} & 1 & u_{n+1m} \\ \lambda^{(1)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \lambda^{(2)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} \end{vmatrix} \left(\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}]\right)^{-1} + f_{nm}(t, \xi_{pq}),$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda^{(1)}_{n+1m}, \lambda^{(2)}_{pq}], \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m)\}, \ \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}] \neq 0.$$

$$avec \ \sum_{j=1}^{2} \left(\ddot{\omega}_{kj} \lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj} \dot{\lambda}^{(j)}_{nm} \right) = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

$$A_{4,5} : \widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_3 = \lambda_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_4 = \big(\omega(t)\lambda_{nm}(t) + \sigma(t)\big)\partial_{u_{nm}},$$

$$F_{nm} = \frac{\ddot{\lambda}_{nm}}{\lambda_{n+1m} - \lambda_{nm}}(u_{n+1m} - u_{nm}) + f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad \xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}, 1_{pq}],$$

$$\dot{\omega} > 0, \quad \lambda_{nm}(t) = \frac{1}{\sqrt{\dot{\omega}}} \left(c_{nm} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\ddot{\sigma}(s)}{\sqrt{\dot{\omega}(s)}} \mathrm{d}s \right), \quad \dot{c}_{nm} = 0,$$

$$\lambda_{n+1m} \neq \lambda_{nm}, \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m)\}.$$

Théorème 5.2.4 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 5 *pour* 3 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{5,1} : \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a^{(1)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad i = 2, \ldots, 5$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(\xi_{pq}), \qquad (p,q) \in \{(n-1,m),(n,m-1),(n+1,m-1)\},$$

$$\begin{aligned}
\xi_{pq} \;=\; & (u_{nm})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{pq}]} (u_{n+1m})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{pq}]} \\
& \times (u_{nm+1})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{pq}]} (u_{n-1m+1})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{pq}]} \\
& \times (u_{pq})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m+1}]} \exp\left(-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{pq}]t \right).
\end{aligned}$$

$$A_{5,2} : \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = \mathrm{e}^{a_{nm}t} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \kappa^{(i)}_{nm} \mathrm{e}^{a_{nm}t} \partial_{u_{nm}}, \ i = 1,2,3$$

$$\dot{\kappa}^{(i)}_{nm} = 0, \ \kappa^{(i)}_{n+1m} \neq \kappa^{(i)}_{nm}, \ \kappa^{(i)}_{nm+1} \neq \kappa^{(i)}_{nm},$$

$$F_{nm} = a^2_{nm} u_{nm} + \mathrm{e}^{a_{nm}t} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \{(n-1,m),(n,m-1),(n+1,m-1)\},$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}\mathrm{e}^{-a_{nm}t}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, \kappa^{(3)}_{n-1m+1}, 1_{pq}].$$

$$A_{5,3} : \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \ i = 1, \ldots, 5$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad (p,q) \in \{(n,m-1),(n+1,m-1)\},$$

$$\begin{aligned}
\xi_{pq} \;=\; & \big(u_{nm}\big)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{pq}]} \big(u_{n+1m}\big)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{pq}]} \\
& \times \big(u_{nm+1}\big)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{pq}]} \big(u_{n-1m+1}\big)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{pq}]} \\
& \times \big(u_{n-1m}\big)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{pq}]} \big(u_{pq}\big)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}]}.
\end{aligned}$$

Théorème 5.2.5 *L'équation (4.1) admet une algèbre de symétries abélienne de dimension 6 pour 5 classes d'interactions F_{nm}. Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{6,1}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a^{(1)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad i = 2, \ldots, 6$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \{(n, m-1), (n+1, m-1)\}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{pq} \;=\;& (u_{nm})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{pq}]} (u_{n+1m})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{pq}]} \\
& \times (u_{nm+1})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{pq}]} (u_{n-1m+1})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{mn}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{pq}]} \\
& \times (u_{n-1m})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m+1}, a^{(6)}_{pq}]} (u_{pq})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m+1}, a^{(6)}_{n-1m}]} \\
& \times \exp\left(-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{pq}]t\right).
\end{aligned}$$

$$A_{6,2}: \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = e^{a_{nm}t} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \kappa^{(i)}_{nm} e^{a_{nm}t} \partial_{u_{nm}},$$

$$\text{ß} = 1, \ldots, 4 \quad \dot{\kappa}^{(i)}_{nm} = 0, \;\; \kappa^{(i)}_{n+1m} \neq \kappa^{(i)}_{nm}, \;\; \kappa^{(i)}_{nm+1} \neq \kappa^{(i)}_{nm},$$

$$F_{nm} = a^2_{nm} u_{nm} + e^{a_{nm}t} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \{(n, m-1), (n+1, m-1)\},$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm} e^{-a_{nm}t}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, \kappa^{(3)}_{n-1m+1}, \kappa^{(4)}_{n-1m}, 1_{pq}].$$

$$A_{6,3}: \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad i = 1, \ldots, 6; \quad F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(t, \xi),$$

$$\begin{aligned}
\xi =\;& (u_{nm})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, a^{(6)}_{n+1,m-1}]} (u_{n+1m})^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, a^{(6)}_{n+1m-1}]} \\
& \times (u_{nm+1})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, a^{(6)}_{n+1m-1}]} (u_{n-1m+1})^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, a^{(6)}_{n+1m-1}]} \\
& \times (u_{n-1m})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{nm-1}, a^{(6)}_{n+1m-1}]} (u_{nm-1})^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{n+1m-1}]} \\
& \times (u_{n+1m-1})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{nm-1}]}.
\end{aligned}$$

$$A_{6,4}: \quad \widehat{X}_i = \lambda^{(i)}_{nm}(t) \partial_{u_{nm}}, \; i = 1, 2, 3; \quad \widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{3} \omega_{kj}(t) \lambda^{(j)}_{nm}(t)\Big) \partial_{u_{nm}}, \; k = 1, 2, 3$$

$$F_{nm} = 1 + \begin{vmatrix} u_{nm} & 1 & u_{n+1m} & u_{nm+1} \\ \lambda^{(1)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} & \lambda^{(1)}_{nm+1} \\ \lambda^{(2)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} & \lambda^{(2)}_{nm+1} \\ \lambda^{(3)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{n+1m} & \lambda^{(3)}_{nm+1} \end{vmatrix} \Big(\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}]\Big)^{-1} + f_{nm}(t, \xi_{pq})$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda^{(1)}_{n+1m}, \lambda^{(2)}_{nm+1}, \lambda^{(3)}_{pq}], \ (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m),(n,m+1)\},$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}] \neq 0, \ \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}] \neq 0,$$

$$\textit{avec} \ \sum_{j=1}^{3} \left(\ddot{\omega}_{kj} \lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj} \dot{\lambda}^{(j)}_{nm} \right) = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

$$A_{6,5} : \widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \lambda^{(i)}_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}, \quad i = 1,2$$

$$\widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{2} \omega_{kj}(t) \lambda^{(j)}_{nm}(t) + \sigma^{(k)}(t) \Big) \partial_{u_{nm}}, \ k = 1,2$$

$$F_{nm} = \frac{\ddot{\lambda}^{(1)}_{nm}}{\lambda^{(1)}_{n+1m} - \lambda^{(1)}_{nm}} (u_{n+1m} - u_{nm}) - \frac{\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda^{(1)}_{n+1m}, 1_{nm+1}]}{(\lambda^{(1)}_{n+1m} - \lambda^{(1)}_{nm}) \cdot \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, 1_{nm+1}]}$$

$$+ f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, 1_{nm+1}] \neq 0.$$

$$\mathcal{D}_1 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda^{(1)}_{n+1,m}, \lambda^{(2)}_{nm+1}, 1_{pq}],$$

$$(p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m),(n,m+1)\}, \quad \lambda^{(1)}_{n+1m} \neq \lambda^{(1)}_{nm},$$

$$\textit{avec} \ \sum_{j=1}^{2} \left(\ddot{\omega}_{kj} \lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj} \dot{\lambda}^{(j)}_{nm} \right) + \ddot{\sigma}^{(k)} = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

Théorème 5.2.6 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 7 *pour* 2 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{7,1} : \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a^{(1)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_i = a^{(i)}_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad i = 2, \ldots, 7$$

$$F_{nm} = u_{nm} f_{nm}(\xi),$$

$$\xi =$$

$$(u_{nm})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{nm-1}, a^{(7)}_{n+1,m-1}]} (u_{n+1m})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{nm-1}, a^{(7)}_{n+1,m-1}]}$$

$$\times (u_{nm+1})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{nm-1}, a^{(7)}_{n+1,m-1}]} (u_{n-1m+1})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{mn}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{nm-1}, a^{(7)}_{n+1,m-1}]}$$

$$\times (u_{n-1m})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m+1}, a^{(6)}_{nm-1}, a^{(7)}_{n+1,m-1}]} (u_{nm-1})^{\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m+1}, a^{(6)}_{n-1m} a^{(7)}_{n+1,m-1}]}$$

$$\times (u_{n+1,m-1})^{-\mathcal{D}[a^{(2)}_{nm}, a^{(3)}_{n+1m}, a^{(4)}_{nm+1}, a^{(5)}_{n-1m+1}, a^{(6)}_{n-1m}, a^{(7)}_{nm-1}]}$$

$$\times \exp\left(-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, a^{(6)}_{nm-1}, a^{(7)}_{n+1,m-1}]t \right).$$

$$A_{7,2} : \quad \widehat{X}_1 = \partial_t + a_{nm} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \ \widehat{X}_2 = \mathrm{e}^{a_{nm}t} \partial_{u_{nm}}, \ \widehat{X}_{i+2} = \kappa^{(i)}_{nm} \mathrm{e}^{a_{nm}t} \partial_{u_{nm}}, \ i = 1, \ldots, 5$$

$$F_{nm} = a_{nm}^2 u_{nm} + \mathrm{e}^{a_{nm}t} f_{nm}(\xi), \ \dot{\kappa}_{nm}^{(i)} = 0, \ \kappa_{n+1m}^{(i)} \neq \kappa_{nm}^{(i)}, \ \kappa_{nm+1}^{(i)} \neq \kappa_{nm}^{(i)},$$
$$\xi = \mathcal{D}[u_{nm}\mathrm{e}^{-a_{nm}t}, \kappa_{n+1m}^{(1)}, \kappa_{nm+1}^{(2)}, \kappa_{n-1m+1}^{(3)}, \kappa_{n-1m}^{(4)}, \kappa_{nm-1}^{(5)}, 1_{n+1m-1}].$$

Théorème 5.2.7 *L'équation (4.1) admet une algèbre de symétries abélienne de dimension 8 pour 2 classes d'interactions F_{nm}. Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{8,1}: \ \widehat{X}_i = \lambda_{nm}^{(i)}(t)\partial_{u_{nm}}, \ i = 1, \ldots, 4; \quad \widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{4} \omega_{kj}(t)\lambda_{nm}^{(j)}(t)\Big)\partial_{u_{nm}}, \ k = 1, \ldots, 4$$

$$F_{nm} = 1 + \begin{vmatrix} u_{nm} & 1 & u_{n+1m} & u_{nm+1} & u_{n-1m+1} \\ \lambda_{nm}^{(1)} & \ddot{\lambda}_{nm}^{(1)} & \lambda_{n+1m}^{(1)} & \lambda_{nm+1}^{(1)} & \lambda_{n-1m+1}^{(1)} \\ \lambda_{nm}^{(2)} & \ddot{\lambda}_{nm}^{(2)} & \lambda_{n+1m}^{(2)} & \lambda_{nm+1}^{(2)} & \lambda_{n-1m+1}^{(2)} \\ \lambda_{nm}^{(3)} & \ddot{\lambda}_{nm}^{(3)} & \lambda_{n+1m}^{(3)} & \lambda_{nm+1}^{(3)} & \lambda_{n-1m+1}^{(3)} \\ \lambda_{nm}^{(4)} & \ddot{\lambda}_{nm}^{(4)} & \lambda_{n+1m}^{(4)} & \lambda_{nm+1}^{(4)} & \lambda_{n-1m+1}^{(4)} \end{vmatrix} \Big(\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}. \lambda_{n-1m+1}^{(4)}]\Big)^{-1}$$

$$+ \ f_{nm}(t, \xi_{pq}), \quad (p,q) \in \{(n-1,m), (n,m-1), (n+1,m-1)\},$$
$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, \lambda_{n-1m+1}^{(3)}, \lambda_{pq}^{(4)}], \quad \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, \lambda_{n-1m+1}^{(4)}] \neq 0,$$
$$\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}] \neq 0, \quad \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}] \neq 0,$$
$$avec \ \sum_{j=1}^{4} \Big(\ddot{\omega}_{kj}\lambda_{nm}^{(j)} + 2\dot{\omega}_{kj}\dot{\lambda}_{nm}^{(j)}\Big) = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

$$A_{8,2}: \widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \lambda_{nm}^{(i)}(t)\partial_{u_{nm}}, \ i = 1, 2, 3$$
$$\widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{3} \omega_{kj}(t)\lambda_{nm}^{(j)}(t) + \sigma^{(k)}(t)\Big)\partial_{u_{nm}}, \ k = 1, 2, 3$$

$$F_{nm} = \frac{\ddot{\lambda}_{nm}^{(1)}}{\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}}(u_{n+1m} - u_{nm}) - \frac{\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, 1_{nm+1}]}{(\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}) \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1_{nm+1}]}$$

$$- \frac{\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(3)}, 1_{nm+1}] \cdot \mathcal{D}[u, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, 1_{n-1m+1}]}{(\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}) \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1_{nm+1}] \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, 1_{n-1m+1}]}$$

$$+ \frac{\mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}[u, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, 1_{n-1m+1}]}{(\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}) \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, 1_{n-1m+1}]} + f_{nm}(t, \xi_{pq}),$$
$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, \lambda_{n-1m+1}^{(3)}, 1_{pq}],$$

$$(p,q) \in \{(n-1,m),(n,m-1),(n+1,m-1)\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathcal{D}_3 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\lambda^{(1)}_{n+1m} \neq \lambda^{(1)}_{nm}, \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, 1_{nm+1}] \neq 0, \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, 1_{n-1m+1}] \neq 0.$$

$$\text{avec} \sum_{j=1}^{3} \left(\ddot{\omega}_{kj} \lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj} \dot{\lambda}^{(j)}_{nm} \right) + \ddot{\sigma}^{(k)} = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

Théorème 5.2.8 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 10 *pour* 2 *classes d'interactions* F_{nm}*. Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{10,1}: \ \widehat{X}_i = \lambda^{(i)}_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}, \ i = 1,\ldots,5; \quad \widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{5} \omega_{kj}(t) \lambda^{(j)}_{nm}(t) \Big) \partial_{u_{nm}}, \ k = 1,\ldots,5 \tag{5.7}$$

$$F_{nm} = 1 + \begin{vmatrix} u_{nm} & 1 & u_{n+1m} & u_{nm+1} & u_{n-1m+1} & u_{n-1m} \\ \lambda^{(1)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} & \lambda^{(1)}_{nm+1} & \lambda^{(1)}_{n-1m+1} & \lambda^{(1)}_{n-1m} \\ \lambda^{(2)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} & \lambda^{(2)}_{nm+1} & \lambda^{(2)}_{n-1m+1} & \lambda^{(2)}_{n-1m} \\ \lambda^{(3)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{n+1m} & \lambda^{(3)}_{nm+1} & \lambda^{(3)}_{n-1m+1} & \lambda^{(3)}_{n-1m} \\ \lambda^{(4)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(4)}_{nm} & \lambda^{(4)}_{n+1m} & \lambda^{(4)}_{nm+1} & \lambda^{(4)}_{n-1m+1} & \lambda^{(4)}_{n-1m} \\ \lambda^{(5)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(5)}_{nm} & \lambda^{(5)}_{n+1m} & \lambda^{(5)}_{nm+1} & \lambda^{(5)}_{n-1m+1} & \lambda^{(5)}_{n-1m} \end{vmatrix} \left(\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}] \right)^{-1} + f_{nm}(t, \xi_{pq}), \tag{5.8}$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda^{(1)}_{n+1m}, \lambda^{(2)}_{nm+1}, \lambda^{(3)}_{n-1m+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m}, \lambda^{(5)}_{pq}], \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}] \neq 0, \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}] \neq 0, \quad (p,q) \in \{(n,m-1),(n+1,m-1)\},$$

$$\text{avec} \sum_{j=1}^{5} \left(\ddot{\omega}_{kj} \lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj} \dot{\lambda}^{(j)}_{nm} \right) = 0, \ \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

$$A_{10,2} : \widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \lambda_{nm}^{(i)}(t)\partial_{u_{nm}}, \ i = 1, \dots, 4$$

$$\widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{4} \big(\omega_{kj}(t)\lambda_{nm}^{(j)}(t) \big) + \sigma^{(k)}(t) \Big) \partial_{u_{nm}}, \ k = 1, \dots, 4$$

$$F_{nm} = \frac{\ddot{\lambda}_{nm}^{(1)}}{\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}}(u_{n+1m} - u_{nm}) - \frac{\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, 1_{nm+1}]}{(\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}) \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1]}$$

$$+ \left(\mathcal{D}_2 - \frac{\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(3)}, 1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1_{nm+1}]} \right) \left(\frac{\mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, 1_{n-1m+1}]}{(\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}) \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, 1_{n-1m+1}]} \right)$$

$$+ \left(\mathcal{D}_4 - \frac{\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(4)}, 1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1_{nm+1}]} - \frac{\mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(4)}, 1_{n-1m+1}]}{\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, 1_{n-1m+1}]} \right) Z$$

$$+ \left(\frac{\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(3)}, 1_{nm+1}] \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(4)}, 1_{n-1m+1}]}{\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1_{nm+1}] \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, 1_{n-1m+1}]} \right) Z + f_{nm}(t, \xi_{pq}),$$

$$Z = \frac{\mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, \lambda_{n-1m+1}^{(3)}, 1_{n-1m}]}{(\lambda_{n+1m}^{(1)} - \lambda_{nm}^{(1)}) \cdot \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, \lambda_{n-1m+1}^{(4)}, 1_{n-1m}]},$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}_{nm}^{(1)} & \lambda_{nm}^{(1)} & \lambda_{n+1m}^{(1)} \\ \ddot{\lambda}_{nm}^{(2)} & \lambda_{nm}^{(2)} & \lambda_{n+1m}^{(2)} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \mathcal{D}_3 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}_{nm}^{(1)} & \lambda_{nm}^{(1)} & \lambda_{n+1m}^{(1)} \\ \ddot{\lambda}_{nm}^{(3)} & \lambda_{nm}^{(3)} & \lambda_{n+1m}^{(3)} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \mathcal{D}_4 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}_{nm}^{(1)} & \lambda_{nm}^{(1)} & \lambda_{n+1m}^{(1)} \\ \ddot{\lambda}_{nm}^{(4)} & \lambda_{nm}^{(4)} & \lambda_{n+1m}^{(4)} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\xi_{pq} = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda_{n+1m}^{(1)}, \lambda_{nm+1}^{(2)}, \lambda_{n-1m+1}^{(3)}, \lambda_{n-1m}^{(4)}, 1_{pq}], \ (p,q) \in \{(n, m-1), (n+1, m-1)\},$$

$$\lambda_{n+1m}^{(1)} \neq \lambda_{nm}^{(1)}, \quad \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, 1_{nm+1}] \neq 0, \quad \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, 1_{n-1m+1}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, \lambda_{n-1m+1}^{(4)}, 1_{n-1m}] \neq 0,$$

$$\textit{avec} \ \sum_{j=1}^{4} \Big(\ddot{\omega}_{kj}\lambda_{nm}^{(j)} + 2\dot{\omega}_{kj}\dot{\lambda}_{nm}^{(j)} \Big) + \ddot{\sigma}^{(k)} = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

Théorème 5.2.9 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries abélienne de dimension* 12 *pour* 2 *classes d'interactions* F_{nm}. *Les algèbres et les fonctions d'interaction peuvent être représentées comme suit :*

$$A_{12,1} : \ \widehat{X}_i = \lambda_{nm}^{(i)}(t)\partial_{u_{nm}}, \ i = 1, \dots, 6; \quad \widehat{Y}_k = \Big(\sum_{j=1}^{6} \omega_{kj}(t)\lambda_{nm}^{(j)}(t) \Big) \partial_{u_{nm}}, \ k = 1, \dots, 6$$

$$F_{nm} = 1 + \begin{vmatrix} u_{nm} & 1 & u_{n+1m} & u_{nm+1} & u_{n-1m+1} & u_{n-1m} & u_{nm-1} \\ \lambda^{(1)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} & \lambda^{(1)}_{nm+1} & \lambda^{(1)}_{n-1m+1} & \lambda^{(1)}_{n-1m} & \lambda^{(1)}_{nm-1} \\ \lambda^{(2)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} & \lambda^{(2)}_{nm+1} & \lambda^{(2)}_{n-1m+1} & \lambda^{(2)}_{n-1m} & \lambda^{(2)}_{nm-1} \\ \lambda^{(3)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{n+1m} & \lambda^{(3)}_{nm+1} & \lambda^{(3)}_{n-1m+1} & \lambda^{(3)}_{n-1m} & \lambda^{(3)}_{nm-1} \\ \lambda^{(4)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(4)}_{nm} & \lambda^{(4)}_{n+1m} & \lambda^{(4)}_{nm+1} & \lambda^{(4)}_{n-1m+1} & \lambda^{(4)}_{n-1m} & \lambda^{(4)}_{nm-1} \\ \lambda^{(5)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(5)}_{nm} & \lambda^{(5)}_{n+1m} & \lambda^{(5)}_{nm+1} & \lambda^{(5)}_{n-1m+1} & \lambda^{(5)}_{n-1m} & \lambda^{(5)}_{nm-1} \\ \lambda^{(6)}_{nm} & \ddot{\lambda}^{(6)}_{nm} & \lambda^{(6)}_{n+1m} & \lambda^{(6)}_{nm+1} & \lambda^{(6)}_{n-1m+1} & \lambda^{(6)}_{n-1m} & \lambda^{(6)}_{nm-1} \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

$$\times \left(\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}, , \lambda^{(6)}_{nm-1}]\right)^{-1} + \ f_{nm}(t,\xi),$$

$$\xi = \mathcal{D}[u_{nm}, \lambda^{(1)}_{n+1m}, \lambda^{(2)}_{nm+1}, \lambda^{(3)}_{n-1m+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m}, \lambda^{(5)}_{nm-1}, \lambda^{(6)}_{n+1m-1}],$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}, \lambda^{(6)}_{nm-1}] \neq 0, \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}] \neq 0, \ \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}] \neq 0, \quad \textit{avec} \ \sum_{j=1}^{6} \left(\ddot{\omega}_{kj}\lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj}\dot{\lambda}^{(j)}_{nm}\right) = 0, \quad \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0. \tag{5.10}$$

$$A_{12,2} : \widehat{X}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_{i+2} = \lambda^{(i)}_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}, \ i = 1, \ldots, 5$$

$$\widehat{Y}_k = \left(\sum_{j=1}^{5} \omega_{kj}(t)\lambda^{(j)}_{nm}(t) + \sigma_k(t)\right)\partial_{u_{nm}}, \ k = 1, \ldots, 5$$

$$F_{nm}=\frac{\ddot{\lambda}^{(1)}_{nm}}{\lambda^{(1)}_{n+1m}-\lambda^{(1)}_{nm}}(u_{n+1m}-u_{nm})-\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[u_{nm},\lambda^{(1)}_{n+1m},1_{nm+1}]}{(\lambda^{(1)}_{n+1m}-\lambda^{(1)}_{nm})\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}$$

$$+\left(\mathcal{D}_2-\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(3)}_{n+1m},1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}\right)\left(\frac{\mathcal{D}[u_{nm},\lambda^{(1)}_{n+1m},\lambda^{(2)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}{(\lambda^{(1)}_{n+1m}-\lambda^{(1)}_{nm})\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}\right)$$

$$+\left(\mathcal{D}_4-\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(4)}_{n+1m},1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}-\frac{\mathcal{D}_2\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(4)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}\right)Z$$

$$+\left(\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(3)}_{n+1m},1_{nm+1}]\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(4)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}\right)Z$$

$$+\left(\mathcal{D}_4-\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(4)}_{n+1m},1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}-\frac{\mathcal{D}_2\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(4)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}\right)Z_3$$

$$-\left(\mathcal{D}_2-\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(3)}_{n+1m},1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}\right)Z_2+\left(\mathcal{D}_5-\frac{\mathcal{D}_1\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(5)}_{n+1m},1_{nm+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}\right)Z_1$$

$$+\left(\frac{\mathcal{D}_3\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(3)}_{n+1m},1_{nm+1}]\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(4)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}{\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}\right)Z_3+f_{nm}(t,\xi),$$

$$\begin{aligned}
\xi&=\mathcal{D}[u_{nm},\lambda^{(1)}_{n+1m},\lambda^{(2)}_{nm+1},\lambda^{(3)}_{n-1m+1},\lambda^{(4)}_{n-1m},\lambda^{(5)}_{nm-1},1_{n+1m-1}],\\
Z&=\frac{\mathcal{D}[u_{nm},\lambda^{(1)}_{n+1m},\lambda^{(2)}_{nm+1},\lambda^{(3)}_{n-1m+1},1_{n-1m}]}{(\lambda^{(1)}_{n+1m}-\lambda^{(1)}_{nm})\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},\lambda^{(4)}_{n-1m+1},1_{n-1m}]},\\
Z_1&=\frac{\mathcal{D}[u_{nm},\lambda^{(1)}_{n+1m},\lambda^{(2)}_{nm+1},\lambda^{(3)}_{n-1m+1},\lambda^{(4)}_{n-1m},1_{nm-1}]}{(\lambda^{(1)}_{n+1m}-\lambda^{(1)}_{nm})\cdot\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},\lambda^{(4)}_{n-1m+1},\lambda^{(5)}_{n-1m},1_{nm-1}]},\\
Z_2&=\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(5)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]\cdot Z_1,\\
Z_3&=\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm},\lambda^{(2)}_{n+1m},\lambda^{(3)}_{nm+1},\lambda^{(5)}_{n-1m+1},1_{n-1m}]\cdot Z_1,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{nm} & \lambda^{(2)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \mathcal{D}_3 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{nm} & \lambda^{(3)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \mathcal{D}_4 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(4)}_{nm} & \lambda^{(4)}_{nm} & \lambda^{(4)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{D}_5 = \begin{vmatrix} \ddot{\lambda}^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{nm} & \lambda^{(1)}_{n+1m} \\ \ddot{\lambda}^{(5)}_{nm} & \lambda^{(5)}_{nm} & \lambda^{(5)}_{n+1m} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \lambda^{(1)}_{n+1m} \neq \lambda^{(1)}_{nm}, \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, 1_{nm+1}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, 1_{n-1m+1}] \neq 0, \quad \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, 1_{n-1m}] \neq 0,$$

$$\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}, 1_{nm-1}] \neq 0,$$

$$avec \sum_{j=1}^{5} \left(\ddot{\omega}_{kj} \lambda^{(j)}_{nm} + 2\dot{\omega}_{kj} \dot{\lambda}^{(j)}_{nm} \right) + \ddot{\sigma}^{(k)} = 0, \ \det(\dot{\omega}_{kj}) \neq 0.$$

5.3 Algèbres de symétries non-résolubles

Les champs de vecteurs de l'équation (4.1) doivent avoir la forme (4.6). On peut aussi se demander s'il est possible d'obtenir des algèbres de symétries simples à partir de ces champs de vecteurs. On obtient le théorème suivant.

Théorème 5.3.1 *L'équation* (4.1) *admet seulement une algèbre de Lie simple,* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, *donnée par :*

$$NS_{3,1} : \widehat{X}_1 = \partial_t, \quad \widehat{X}_2 = t\partial_t + \frac{1}{2} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{X}_3 = t^2 \partial_t + t u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \tag{5.11}$$

$$F_{nm} = \frac{1}{u^3_{nm}} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad \xi_{pq} = \frac{u_{pq}}{u_{nm}}, \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m)\},$$

$$[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = \widehat{X}_1, \quad [\widehat{X}_1, \widehat{X}_3] = 2\widehat{X}_2, \quad [\widehat{X}_2, \widehat{X}_3] = \widehat{X}_3.$$

On cherche maintenant les symétries additionnelles en considérant les algèbres de symétries non-résolubles de l'équation (4.1). Une algèbre de symétries non-résoluble doit contenir une sous-algèbre simple, i.e. l'algèbre de Lie $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ de $NS_{3,1}$ pour le cas présent. À cet effet, on ajoute des nouveaux champs de vecteurs $\widehat{Y}_i$ de la forme (4.6) à $NS_{3,1}$. Ces champs de vecteurs $\{\widehat{Y}_i\}$ forment ce que l'on appelle le *radical* des nouvelles algèbres de Lie. Les théorèmes qui vont suivre décrivent les algèbres de symétries non-résolubles de l'équation (4.1). Notons que seul le radical de chaque algèbre non-résoluble sera décrit puisque qu'elles ont toutes l'algèbre $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme (5.11) comme sous-algèbre.

Théorème 5.3.2 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 4 *pour* 1 *classe d'interaction :*

$$NS_{4,1}: \quad \widehat{Y}_1 = a_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m)\},$$

$$F_{nm} = u_{nm}\left[\left(u_{nm}\right)^{a_{n+1m}}\left(u_{n+1m}\right)^{-a_{nm}}\right]^{\frac{4}{\mathcal{D}[a_{nm},1_{n+1m}]}} f_{nm}(\xi_{pq}),$$

$$\xi_{pq} = \left(u_{nm}\right)^{-\mathcal{D}[a_{n+1m},1_{pq}]}\left(u_{n+1m}\right)^{\mathcal{D}[a_{nm},1_{pq}]}\left(u_{pq}\right)^{-\mathcal{D}[a_{nm},1_{n+1m}]}.$$

Théorème 5.3.3 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 5 *pour* 2 *classes d'interactions :*

$$NS_{5,1}: \widehat{Y}_1 = a^{(1)}_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = a^{(2)}_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}$$

$$\begin{aligned} F_{nm} &= u_{nm}\left[\left(u_{nm}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m},a^{(2)}_{nm+1}]}\left(u_{n+1m}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{nm+1}]}\left(u_{nm+1}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m}]}\right]^{\frac{4}{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}} \\ &\times f_{nm}(\xi_{pq}), \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m),(nm+1)\}, \\ \xi_{pq} &= \left(u_{nm}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m},a^{(2)}_{nm+1},1_{pq}]}\left(u_{n+1m}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{nm+1},1_{pq}]}\left(u_{nm+1}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},1_{pq}]} \\ &\left(u_{pq}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},1_{nm+1}]}. \end{aligned}$$

$$NS_{5,2}: \widehat{Y}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad F_{nm} = \left(\mathcal{D}[u_{nm},1_{n+1m}]\right)^{-3} f_{nm}(\xi_{pq})$$

$$\xi_{pq} = \frac{\mathcal{D}[u_{nm},1_{pq}]}{\mathcal{D}[u_{nm},1_{n+1m}]}, \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m),(n+1,m)\}.$$

Théorème 5.3.4 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 6 *pour* 1 *classe d'interaction :*

$$NS_{6,1}: \widehat{Y}_1 = a^{(1)}_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = a^{(2)}_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_3 = a^{(3)}_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}$$

$$\begin{aligned} F_{nm} &= u_{nm}\left[\left(u_{nm}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m},a^{(2)}_{nm+1},a^{(3)}_{n-1m+1}]}\left(u_{n+1m}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{nm+1},a^{(3)}_{n-1m+1}]}\right. \\ &\left.\times\left(u_{nm+1}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},a^{(3)}_{n-1m+1}]}\left(u_{n-1m+1}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},a^{(3)}_{nm+1}]}\right]^{\alpha_{nm}} f_{nm}(\xi_{pq}), \end{aligned}$$

$$\alpha_{nm} = \frac{4}{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},a^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}, \quad (p,q) \in \{(n-1,m),(n,m-1),(n+1,m-1)\}.$$

$$\begin{aligned} \xi_{pq} &= \left(u_{nm}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m},a^{(2)}_{nm+1},a^{(3)}_{n-1m+1},1_{pq}]}\left(u_{n+1m}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{nm+1},a^{(3)}_{n-1m+1},1_{pq}]} \\ &\times\left(u_{nm+1}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},a^{(3)}_{n-1m+1},1_{pq}]}\left(u_{n-1m+1}\right)^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},a^{(3)}_{nm+1},1_{pq}]} \\ &\times\left(u_{pq}\right)^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm},a^{(2)}_{n+1m},a^{(3)}_{nm+1},1_{n-1m+1}]}. \end{aligned}$$

Théorème 5.3.5 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 7 *pour* 2 *classes d'interactions :*

$$NS_{7,1} : Y_i = a_{nm}^{(i)} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (p,q) \in \{(n, m-1), (n+1, m-1)\},$$

$$\begin{aligned} F_{nm} &= u_{nm} \Big[(u_{nm})^{-\mathcal{D}[a_{n+1m}^{(1)}, a_{nm+1}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}]} (u_{n+1m})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{nm+1}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}]} \\ &\times (u_{nm+1})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}]} (u_{n-1m+1})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}]} \\ &\times (u_{n-1m})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}]} \Big]^{\alpha_{nm}} f_{nm}(\xi_{pq}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_{pq} &= (u_{nm})^{\mathcal{D}[a_{n+1m}^{(1)}, a_{nm+1}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, 1_{pq}]} (u_{n+1m})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{nm+1}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, 1_{pq}]} \\ &\times (u_{nm+1})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, 1_{pq}]} (u_{n-1m+1})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, 1_{pq}]} \\ &\times (u_{n-1m})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}, 1_{pq}]} (u_{pq})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}, 1_{n-1m}]}, \end{aligned}$$

$$\alpha_{nm} = \frac{4}{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}, 1_{n-1m}]}.$$

$$NS_{7,2} : \widehat{Y}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_3 = \kappa_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_4 = \kappa_{nm} t \partial_{u_{nm}},$$

$$\dot{\kappa}_{nm} = 0, \quad \kappa_{nm} \neq \kappa_{n+1m}, \quad \kappa_{nm} \neq \kappa_{nm+1},$$

$$F_{nm} = \big(\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}, 1_{nm+1}]\big)^{-3} f_{nm}(\xi_{pq}), \quad \xi_{pq} = \frac{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}, 1_{pq}]}{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}, 1_{nm+1}]},$$

$$\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}, 1_{nm+1}], \quad (p,q) \in \Gamma \setminus \{(n,m), (n+1,m), (n,m+1)\}.$$

Théorème 5.3.6 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 8 *pour* 1 *classe d'interaction :*

$$NS_{8,1} : \widehat{Y}_i = a_{nm}^{(i)} u_{nm} \partial_{u_{nm}}, \quad i = 1, \dots, 5;$$

$$\begin{aligned} F_{nm} &= u_{nm} \Big[(u_{nm})^{\mathcal{D}[a_{n+1m}^{(1)}, a_{nm+1}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, a_{nm-1}^{(5)}]} (u_{n+1m})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{nm+1}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, a_{nm-1}^{(5)}]} \\ &\times (u_{nm+1})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{n-1m+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, a_{nm-1}^{(5)}]} (u_{n-1m+1})^{-\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m}^{(4)}, a_{nm-1}^{(5)}]} \\ &\times (u_{n-1m})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}, a_{nm-1}^{(5)}]} (u_{nm-1})^{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}, a_{n-1m}^{(5)}]} \Big]^{\alpha_{nm}} \\ &\times f_{nm}(\xi). \quad \alpha_{nm} = \frac{4}{\mathcal{D}[a_{nm}^{(1)}, a_{n+1m}^{(2)}, a_{nm+1}^{(3)}, a_{n-1m+1}^{(4)}, a_{n-1m}^{(5)}, 1_{nm-1}]}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\xi = {} & (u_{nm})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{n+1m}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, 1_{n+1m-1}]} (u_{n+1m})^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{nm+1}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, 1_{n+1m-1}]} \\
& \times (u_{nm+1})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{n-1m+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, 1_{n+1m-1}]} (u_{n-1m+1})^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m}, a^{(5)}_{nm-1}, 1_{n+1m-1}]} \\
& \times (u_{n-1m})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{nm-1}, 1_{n+1m-1}]} (u_{nm-1})^{\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, 1_{n+1m-1}]} \\
& \times (u_{n+1m-1})^{-\mathcal{D}[a^{(1)}_{nm}, a^{(2)}_{n+1m}, a^{(3)}_{nm+1}, a^{(4)}_{n-1m+1}, a^{(5)}_{n-1m}, 1_{nm-1}]}.
\end{aligned}
$$

Théorème 5.3.7 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 9 *pour* 1 *classe d'interaction :*

$$
\begin{aligned}
NS_{9,1}: \quad & \widehat{Y}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_3 = \kappa^{(1)}_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_4 = \kappa^{(1)}_{nm}t\partial_{u_{nm}}, \\
& \widehat{Y}_5 = \kappa^{(2)}_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_6 = \kappa^{(2)}_{nm}t\partial_{u_{nm}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot{\kappa}^{(i)}_{nm} = 0, \quad \kappa^{(i)}_{nm} \neq \kappa^{(i)}_{n+1m}, \quad \kappa^{(i)}_{nm} \neq \kappa^{(i)}_{nm+1}, \quad i = 1, 2; \\
F_{nm} = \left(\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, 1_{n-1m+1}]\right)^{-3} f_{nm}(\xi_{pq}), \\
\xi_{pq} = \frac{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, 1_{pq}]}{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, 1_{n-1m+1}]}, \\
(p, q) \in \{(n-1, m), (n, m-1), (n+1, m-1)\}.
\end{gathered}
$$

Théorème 5.3.8 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 11 *pour* 1 *classe d'interaction :*

$$
NS_{11,1}: \widehat{Y}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_3 = \kappa^{(1)}_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_4 = \kappa^{(1)}_{nm}t\partial_{u_{nm}},
$$

$$
\widehat{Y}_5 = \kappa^{(2)}_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_6 = \kappa^{(2)}_{nm}t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_7 = \kappa^{(3)}_{nm}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_8 = \kappa^{(3)}_{nm}t\partial_{u_{nm}}, \tag{5.12}
$$

$$
\dot{\kappa}^{(i)}_{nm} = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (p, q) \in \{(n, m-1), (n+1, m-1)\},
$$

$$
F_{nm} = \left(\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, \kappa^{(3)}_{n-1m+1}, 1_{n-1m}]\right)^{-3} f_{nm}(\xi_{pq}), \tag{5.13}
$$

$$
\xi_{pq} = \frac{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, \kappa^{(3)}_{n-1m+1}, 1_{pq}]}{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa^{(1)}_{n+1m}, \kappa^{(2)}_{nm+1}, \kappa^{(3)}_{n-1m+1}, 1_{n-1m}]}.
$$

Théorème 5.3.9 *L'équation* (4.1) *admet une algèbre de symétries non-résoluble de dimension* 13 *pour* 1 *classe d'interaction :*

$$NS_{13,1}: \quad \widehat{Y}_1 = \partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_2 = t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_3 = \kappa_{nm}^{(1)}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_4 = \kappa_{nm}^{(1)}t\partial_{u_{nm}},$$

$$\widehat{Y}_5 = \kappa_{nm}^{(2)}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_6 = \kappa_{nm}^{(2)}t\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_7 = \kappa_{nm}^{(3)}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_8 = \kappa_{nm}^{(3)}t\partial_{u_{nm}},$$

$$\widehat{Y}_9 = \kappa_{nm}^{(4)}\partial_{u_{nm}}, \quad \widehat{Y}_{10} = \kappa_{nm}^{(4)}t\partial_{u_{nm}}, \quad \dot{\kappa}_{nm}^{(i)} = 0, \quad i = 1, \ldots, 4; \tag{5.14}$$

$$F_{nm} = \left(\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}^{(1)}, \kappa_{nm+1}^{(2)}, \kappa_{n-1m+1}^{(3)}, \kappa_{n-1m}^{(4)}, 1_{nm-1}]\right)^{-3} f_{nm}(\xi), \tag{5.15}$$

$$\xi = \frac{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}^{(1)}, \kappa_{nm+1}^{(2)}, \kappa_{n-1m+1}^{(3)}, \kappa_{n-1m}^{(4)}, 1_{n+1m-1}]}{\mathcal{D}[u_{nm}, \kappa_{n+1m}^{(1)}, \kappa_{nm+1}^{(2)}, \kappa_{n-1m+1}^{(3)}, \kappa_{n-1m}^{(4)}, 1_{nm-1}]}.$$

Conclusion

La théorie des groupes a été utilisée afin de classifier l'équation (4.1) en fonction de ses groupes de symétries. Dans la présente recherche, deux classes d'algèbres de symétries ont été considérées : les algèbres de Lie abéliennes et les algèbres de Lie non-résolubles $\mathcal{L}$. Les résultats de la classification des symétries peuvent être résumés par le tableau suivant :

$\dim \mathcal{L}$	Abelienne	Non-résoluble	Total
1	3	0	3
2	4	0	4
3	3	1	4
4	5	1	6
5	3	2	5
6	5	1	6
7	2	2	4
8	2	1	3
9	0	1	1
10	2	0	2
11	0	1	1
12	2	0	2
13	0	1	1

Table 1. Résultats de la classification des symétries de l'équation (4.1).

La classification donnée ci-haut peut être utilisée en physique du solide. En effet, l'intérêt d'un système de dimension deux vient du fait qu'il a des applications possibles autant pour les systèmes magnétiques que pour les couches absorbantes. Les modèles théoriques traités jusqu'à maintenant sont en grande majorité des modèles du spins, et plus précisément ceux provenant des systèmes d'Ising qui ont des interactions concurrentes aux modèles plans de Heisenberg [20, 21]. Les modèles qui impliquent une équation de la forme (4.1) apparaissent en références [5, 6, 7, 8] où des calculs analytiques et numériques ont déjà été effectués. Les symétries de Lie obtenues dans ce travail pourraient être considérées afin d'obtenir des solutions analytiques et ce, de deux façons : soit en utilisant les symétries afin de générer des nouvelles solutions à partir d'une solution connue ou soit en utilisant la *méthode* *de réduction par symétrie*. De plus, certaines interactions trouvées dans la présente recherche pourraient être considérées comme des modèles associés à des symétries appropriées.

On sait que l'existence de plusieurs symétries est un bon indice quant à l'intégrabilité. Conséquemment, il serait intéressant de poursuivre cette étude en cherchant quelles sont les équations obtenues complètement déterminées par leurs algèbres de Lie qui sont intégrables. Les équations qui sont complètement déterminées qui pourraient être considérées pour les algèbres de Lie abéliennes et non-résolubles sont les suivantes :

$$A_{6,3}, \quad A_{7,1}, \quad A_{7,2}, \quad A_{12,1} \quad \text{et} \quad A_{12,2},$$

et

$$NS_{8,1}, \quad \text{et} \quad NS_{13,1}.$$

Finalement, afin de compléter la classification débutée dans ce travail, il serait intéressant de traiter les cas des algèbres de Lie résolubles et nilpotentes de l'équation différentielle aux différences considérée.

Annexe

On retrouve dans cet annexe les détails de la preuve pour un cas particulier de la dimension la plus élevée d'une algèbre de symétries abélienne ainsi que pour une algèbre non-résoluble.

Pour l'algèbre de Lie abélienne, on considère la preuve du cas $A_{12,1}$ du théorème 5.9.2. Puisque la procédure permettant d'obtenir cette classification fait appel aux dimensions antérieures (pour chaque type d'algèbre : abélienne et non-résoluble), on suppose que nous avons déjà obtenu l'algèbre $A_{10,1}$ du théorème 5.2.8. On ajoute donc un nouveau champ de vecteurs de la forme (4.6), i.e.

$$\widehat{Z} = \tau(t)\partial_t + \left[\left(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\right) u_{nm} + \lambda_{nm}(t)\right] \partial_{u_{nm}}$$

, à l'algèbre de symétries de (5.7).

En considérant les relations de commutation $[\widehat{X}_i, \widehat{Z}] = 0$ et $[\widehat{Y}_i, \widehat{Z}] = 0$ pour $i = 1, \ldots, 5$ on obtient

$$\tau\dot{\lambda}_{nm}^{(i)} = \lambda_{nm}^{(i)}\Big(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\Big) \quad \text{et} \quad \tau\Big(\sum_{j=1}^{5} \dot{\omega}_{ij}\lambda_{nm}^{(j)} + \omega_{kj}\dot{\lambda}_{nm}^{(j)}\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{5} \omega_{ij}\lambda_{nm}^{(j)}\Big)\Big(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\Big). \tag{5.16}$$

La preuve se divise en deux cas :

A) Le cas $\tau = 0$. À partir de l'équation précédente correspondante, on trouve facilement que $\widehat{Z} = \lambda_{nm}^{(6)}(t)\partial_{u_{nm}}$, où $\lambda_{nm} := \lambda_{nm}^{(6)}(t)$. Nous voulons maintenant résoudre l'équation déterminante suivante (4.7) :

$$\ddot{\lambda}_{nm}^{(6)} = \sum_{(p,q)\in\Gamma} \lambda_{pq}^{(6)}\partial_{u_{pq}}F_{nm}$$

où F_{nm} est l'interaction (5.2.8) de $A_{10,1}$. Cette équation est équivalente à

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, \lambda_{n-1m+1}^{(4)}, \lambda_{n-1m}^{(5)}] \\ \times & \sum_{(p,q)\in\Gamma'} \mathcal{D}[\lambda_{nm}^{(1)}, \lambda_{n+1m}^{(2)}, \lambda_{nm+1}^{(3)}, \lambda_{n-1m+1}^{(4)}, \lambda_{n-1m}^{(5)}, \lambda_{pq}^{(6)}]\partial_{\xi_{pq}} f(t, \xi_{pq}) \\ + & \mathcal{D}[\ddot{\lambda}_{nm}^{(1)}, \lambda_{nm}^{(2)}, \lambda_{n+1m}^{(3)}, \lambda_{nm+1}^{(4)}, \lambda_{n-1m+1}^{(5)}, \lambda_{n-1m}^{(6)}] = 0, \end{aligned} \tag{5.17}$$

où $\Gamma' := \{(n, m-1),\ (n+1, m-1)\}$. En utilisant la méthode des caractéristiques, on trouve l'interaction (5.9) avec une algèbre de symétries de dimension 11 où le champ de vecteurs $\widehat{Z} := \widehat{X}_6 = \lambda^{(6)}_{nm}\partial_{u_{nm}}$ est ajouté à l'algèbre de Lie $A_{10,1}$.

B) Le cas $\tau \neq 0$. Parmi les transformations permises, on choisit $\tilde{t}$ tel que $\tau\tilde{t} = 1$, ce qui implique $\tau = 1$. De plus, on choisit $Q_{nm}(t)$ pour lequel $a_{nm}Q_{nm}(t) + \lambda_{nm}(t) - \dot{Q}_{nm} = 0$ et on obtient $\widehat{Z} = \partial_t + a_{nm}u_{nm}\partial_{u_{nm}}$. La première équation de (5.16) implique que $\lambda^{(i)}_{nm} = \kappa^{(i)}_{nm}e^{a_{nm}t}$ $i = 1, \ldots, 5$ où $\kappa^{(i)}_{nm}$ est une fonction arbitraire de n, m. Encore ici, en utilisant P_{nm} des transformations permises, on peut normaliser $\kappa^{(1)}_{nm}$ à 1. Par conséquent, l'algèbre de Lie que l'on considère contient la sous-algèbre $A_{6,2}$ dont la classification de cette dimension moins élevée a été fait ultérieurement.

On cherche donc maintenant si, pour l'interaction (5.9), un champ de vecteurs additionnel $\widehat{Z} = \tau(t)\partial_t + [(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm})u_{nm} + \lambda_{nm}(t)]\partial_{u_{nm}}$ pourrait être ajouté à l'algèbre de symétries obtenue dans le cas A. Les calculs sont similaires à ceux présentés ci-dessus. Les relations de commutation considérées sont alors $[\widehat{X}_i, \widehat{Z}] = 0$ et $[\widehat{Y}_j, \widehat{Z}] = 0$ pour $i = 1, \ldots, 6$ et $j = 1, \ldots, 5$. L'équation déterminante (4.7) implique :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}, \lambda^{(6)}_{nm-1}] \\
\times &\sum_{(p,q)\in\Gamma'} \mathcal{D}[\lambda^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{n+1m}, \lambda^{(3)}_{nm+1}, \lambda^{(4)}_{n-1m+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m}, \lambda^{(6)}_{nm-1}, \lambda^{(7)}_{n+1m-1}]\partial_\xi f(t,\xi) \qquad (5.18) \\
+ \ &\mathcal{D}[\ddot{\lambda}^{(1)}_{nm}, \lambda^{(2)}_{nm}, \lambda^{(3)}_{n+1m}, \lambda^{(4)}_{nm+1}, \lambda^{(5)}_{n-1m+1}, \lambda^{(6)}_{n-1m}, \lambda^{(7)}_{nm-1}] = 0,
\end{aligned}
$$

où $\lambda_{nm} := \lambda^{(7)}_{nm}(t)$ et F_{nm} est donné par l'interaction (5.9). L'interaction (5.9) est invariant lorsque $\widehat{Z}$ est ajouté à l'algèbre de A si $\lambda^{(7)}_{nm}(t) = \sum_{j=1}^{6}\omega_{6j}(t)\lambda^{(j)}_{nm}(t)$. L'équation (5.18) devient alors équivalente à la condition (5.10) de $A_{12,1}$. Par conséquent, pour ce cas le champ de vecteurs $\widehat{Z} := \widehat{Y}_6 = \left(\sum_{j=1}^{6}\omega_{6j}\lambda^{(j)}_{nm}\right)\partial_{u_{nm}}$ est ajouté au champ de vecteurs du cas A avec l'interaction (5.9). □

Nous considérons maintenant les détails de la preuve de la dimension la plus élevée du cas non-résoluble, i.e. pour le théorème 5.3.9. On suppose que l'on connaît déjà la classification de la dimension 11, i.e. que le théorème 5.3.8 a déjà été démontré. On ajoute un nouveau champ de vecteurs de la forme

$$\widehat{Y}_9 = \tau(t)\partial_t + \left[\left(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm}\right)u_{nm} + \lambda_{nm}(t)\right]\partial_{u_{nm}}$$

aux champs de vecteurs (5.12). Le théorème de Levi [25, 26] nous dit que chaque algèbre de Lie de dimension finie $\mathcal{L}$ est une somme semi-directe d'une algèbre de Lie semi-simple S et d'un idéal résoluble (le radical R) :

$$\mathcal{L} = S \rhd R, \qquad [S,S] = S, \qquad [S,R] \subseteq R, \qquad [R,R] \subset R,$$

tel que

$$[\widehat{X}_i, \widehat{Y}_9] = \sum_{k=1}^{9} \alpha_{ik} \widehat{Y}_k, \quad i = 1,2,3 \quad \text{et} \quad [\widehat{Y}_j, \widehat{Y}_9] = \sum_{k=1}^{9} \beta_{jk} \widehat{Y}_k, \quad j = 1, \dots, 8$$

où α_{ik}, β_{jk} sont des constantes réelles. La relation de commutation $[\widehat{X}_1, \widehat{Y}_9]$ nous donne que

$$\tau(t) = \tau_0 \mathrm{e}^{\alpha_{19} t}, \quad \alpha_{19} a_{nm} = 0,$$

$$\lambda_{nm}(t) = \begin{cases} \kappa_{nm}^{(4)} \mathrm{e}^{\alpha_{19} t} - \frac{1}{\alpha_{19}^2} \left(\alpha_{19} A_{nm}^{(1)} + \alpha_{19} B_{nm}^{(1)} t + B_{nm}^{(1)} \right), & \alpha_{19} \neq 0, \\ \frac{1}{2} B_{nm}^{(1)} t^2 + A_{nm}^{(1)} t + \kappa_{nm}^{(4)}, & \alpha_{19} = 0, \end{cases}$$

où

$$A_{nm}^{(i)} \;:=\; \alpha_{i1} + \alpha_{i3} \kappa_{nm}^{(1)} + \alpha_{i5} \kappa_{nm}^{(2)} + \alpha_{i7} \kappa_{nm}^{(3)},$$

$$B_{nm}^{(i)} \;:=\; \alpha_{i2} + \alpha_{i4} \kappa_{nm}^{(1)} + \alpha_{i6} \kappa_{nm}^{(2)} + \alpha_{i8} \kappa_{nm}^{(3)},$$

pour $i = 1,2,3$ (les fonctions avec $i = 2,3$ vont aussi apparaître ultérieurement) et $\kappa_{nm}^{(4)}$ est une fonction arbitraire de n, m. En considérant maintenant la relation de commutation $[\widehat{X}_2, \widehat{Y}_9]$, on obtient

$$\alpha_{19} \tau_0 = 0, \qquad (\alpha_{29} + 1) \tau_0 = 0, \qquad \alpha_{29} a_{nm} = 0,$$

et

$$\begin{cases} \kappa_{nm}^{(4)} = 0 \\ (2\alpha_{29} - 1) B_{nm}^{(1)} - 2\alpha_{19} B_{nm}^{(2)} = 0 \\ (1 + 2\alpha_{29}) \alpha_{19} A_{nm}^{(1)} + (1 + 2\alpha_{29}) B_{nm}^{(1)} + 2\alpha_{19}^2 A_{nm}^{(2)} = 0 \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha_{19} \neq 0,$$

$$\begin{cases} (\frac{3}{2} - \alpha_{29}) (B_{nm}^{(1)})^2 = 0 \\ (\alpha_{29 + \frac{1}{2}}) \kappa_{nm}^{(4)} + A_{nm}^{(2)} = 0 \\ (\alpha_{29} - \frac{1}{2}) A_{nm}^{(1)} + B_{nm}^{(2)} = 0. \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha_{19} = 0.$$

À partir de la relation de commutation $[\widehat{X}_3, \widehat{Y}_9]$ on trouve

$$\tau_0 = 0, \qquad \alpha_{39} a_{nm} = 0$$

et

$$\begin{cases} \alpha_{19} \alpha_{39} A_{nm}^{(1)} - \alpha_{19}^2 A_{nm}^{(3)} + \alpha_{39} B_{nm}^{(1)} = 0 \\ (1 + \alpha_{19} \alpha_{39}) B_{nm}^{(1)} - \alpha_{19}^2 B_{nm}^{(3)} + \alpha_{19} A_{nm}^{(1)} = 0 \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha_{19} \neq 0,$$

$$\begin{cases} B_{nm}^{(1)} = 0 \\ \kappa_{nm}^{(4)} + B_{nm}^{(3)} + \alpha_{39} A_{nm}^{(1)} = 0 \\ A_{nm}^{(3)} + \alpha_{39} \kappa_{nm}^{(4)} = 0 \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha_{19} = 0.$$

Finalement, pour $j = 1, \ldots, 8$ les relations de commutation $[\widehat{Y}_j, \widehat{Y}_9]$ impliquent $\beta_{j9} a_{nm} = 0$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa^{(\frac{j-1}{2})} a_{nm} = C_{nm}^{(j)} + \beta_{j9} \kappa_{nm}^{(4)} \\ D_{nm}^{(j)} + \beta_{j9} A_{nm}^{(1)} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{pour } j = 1, 3, 5, 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa^{(\frac{j-2}{2})} a_{nm} = D_{nm}^{(j)} + \beta_{j9} A_{nm}^{(1)} \\ C_{nm}^{(j)} + \beta_{j9} \kappa_{nm}^{(4)} = 0 \end{array} \right. \qquad \text{pour } j = 2, 4, 6, 8$$

où

$$\begin{aligned} C_{nm}^{(j)} &:= \beta_{j1} + \beta_{j3} \kappa_{nm}^{(1)} + \beta_{j5} \kappa_{nm}^{(2)} + \beta_{j7} \kappa_{nm}^{(3)}, \\ D_{nm}^{(j)} &:= \beta_{j2} + \beta_{j4} \kappa_{nm}^{(1)} + \beta_{j6} \kappa_{nm}^{(2)} + \beta_{j8} \kappa_{nm}^{(3)}, \end{aligned}$$

et $\kappa_{nm}^{(0)} := 1$.

Puisque $A_{nm}^{(i)}$, $B_{nm}^{(i)}$, $C_{nm}^{(j)}$ et $D_{nm}^{(j)}$ sont des combinaisons linéaires de fonctions linéairement indépendantes apparaissant dans le champ de vecteurs $\widehat{Y}_j$, on peut utiliser la combinaison linéaire pour simplifier $\widehat{Y}_9$. Pour tout α_{19}, nous avons que $a_{nm} = C_{nm}^{(1)}$ et en utilisant les combinaisons linéaires, on peut transformer $a_{nm} = 0$. De plus, on sait que $\tau = 0$ tel que $\widehat{Y}_9 = \lambda_{nm}(t) \partial_{u_{nm}}$, où λ_{nm} dépend de α_{19}. Dans le cas où $\alpha_{19} \neq 0$, on peut transformer $A_{nm}^{(1)} = B_{nm}^{(1)} = 0$ par combinaisons linéaires. À partir des équations obtenues plus haut, on voit que $A_{nm}^{(i)} = B_{nm}^{(i)} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Puisque $\kappa_{nm}^{(4)} = 0$, on ne peut ajouter de symétrie supplémentaire lorsque $\alpha_{19} \neq 0$. Lorsque $\alpha_{19} = 0$, on sait que $B_{nm}^{(1)} = 0$ et par combinaisons linéaires, on peut transformer $A_{nm}^{(1)}$ à zéro. On trouve ainsi que

$$\widehat{Y}_9 = \kappa_{nm}^{(4)} \partial_{u_{nm}}.$$

Notons qu'il est impossible d'utiliser les transformations permises pour simplifier $\widehat{Y}_9$. En effet, toutes les transformations permises ont déjà été utilisées afin de simplifier les champs de vecteurs, en particulier pour obtenir $\kappa_{nm}^{(0)} = 1$ dans $\widehat{Y}_1$ et $\widehat{Y}_2$.

À partir de l'équation déterminante (4.7), nous avons

$$0 = \sum_{(p,q) \in \Gamma} \kappa_{pq}^{(4)} \partial_{u_{pq}} F_{nm},$$

où F_{nm} est donné par (5.13). En utilisant la méthode des caractéristiques, on trouve que la nouvelle fonction invariant, où $\widehat{Y}_9$ est ajouté à $NS_{11,1}$, est donnée par (5.15).

Vérifions maintenant si chaque algèbre de Lie $\{\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_3, \widehat{Y}_1, \ldots, \widehat{Y}_9\}$ est 'maximale' ou non, i.e. si on peut y ajouter un nouveau champ de vecteurs de la forme $\widehat{Y}_{10} = \tau(t)\partial_t + \left[\left(\frac{\dot{\tau}}{2} + a_{nm} \right) u_{nm} + \lambda_{nm}(t) \right] \partial_{u_{nm}}$ avec la même fonction invariant (5.15). À partir du théorème de Levi, nous avons

$$[\widehat{X}_i, \widehat{Y}_{10}] = \sum_{k=1}^{10} \widetilde{\alpha}_{ik} \widehat{Y}_k, \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{et} \qquad [\widehat{Y}_j, \widehat{Y}_{10}] = \sum_{k=1}^{10} \widetilde{\beta}_{jk} \widehat{Y}_k, \quad j = 1, \ldots, 9$$

où $\widetilde{\alpha}_{ik}, \widetilde{\beta}_{jk}$ sont des constantes réelles. Définissons maintenant

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}^{(i)}_{nm} &:= \widetilde{\alpha}_{i1} + \widetilde{\alpha}_{i3}\kappa^{(1)}_{nm} + \widetilde{\alpha}_{i5}\kappa^{(2)}_{nm} + \widetilde{\alpha}_{i7}\kappa^{(3)}_{nm} + \widetilde{\alpha}_{i9}\kappa^{(4)}_{nm}, \\
\widetilde{B}^{(i)}_{nm} &:= \widetilde{\alpha}_{i2} + \widetilde{\alpha}_{i4}\kappa^{(1)}_{nm} + \widetilde{\alpha}_{i6}\kappa^{(2)}_{nm} + \widetilde{\alpha}_{i8}\kappa^{(3)}_{nm}, \\
\widetilde{C}^{(j)}_{nm} &:= \widetilde{\beta}_{j1} + \widetilde{\beta}_{j3}\kappa^{(1)}_{nm} + \widetilde{\beta}_{j5}\kappa^{(2)}_{nm} + \widetilde{\beta}_{j7}\kappa^{(3)}_{nm} + \widetilde{\beta}_{j9}\kappa^{(4)}_{nm}, \\
\widetilde{D}^{(j)}_{nm} &:= \widetilde{\beta}_{j2} + \widetilde{\beta}_{j4}\kappa^{(1)}_{nm} + \widetilde{\beta}_{j6}\kappa^{(2)}_{nm} + \widetilde{\beta}_{j8}\kappa^{(3)}_{nm},
\end{aligned}$$

les relations de commutation $[\widehat{X}_i, \widehat{Y}_{10}]$ et $[\widehat{Y}_j, \widehat{Y}_{10}]$ nous donne le même ensemble d'équations obtenu auparavant en remplaçant $A^{(i)}_{nm} \to \widetilde{A}^{(i)}_{nm}, \ldots, D^{(j)}_{nm} \to \widetilde{D}^{(j)}_{nm}, \alpha_{ik} \to \widetilde{\alpha}_{ik}, \beta_{jk} \to \widetilde{\beta}_{jk}$ et $\kappa^{(4)}_{nm} \to \widetilde{\kappa}^{(4)}_{nm}$ pour $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 9$ et $k = 1, \ldots, 10$. Encore ici, nous avons que $\tau = 0$ et $a_{nm} = \widetilde{C}^{(1)}_{nm}$. En utilisant les combinaisons linéaires on peut transformer a_{nm} à zéro tel que $\widehat{Y}_{10} = \lambda_{nm}(t)\partial_{u_{nm}}$. Pour $\alpha_{1\,10} = 0$, on peut transformer λ_{nm} à zéro par combinaisons linéaires. Dans le cas où $\alpha_{1\,10} \neq 0$, on peut transformer $\widetilde{A}^{(1)}_{nm}$ à zéro par combinaisons linéaires mais pas $\widetilde{B}^{(1)}_{nm}$ (puisque cette fonction ne dépend pas de $\kappa^{(4)}_{nm}$). Par conséquent, on obtient

$$\widehat{Y}_{10} = \kappa^{(4)}_{nm} t \partial_{u_{nm}}.$$

L'équation déterminante (4.7)

$$0 = \sum_{(p,q)\in\Gamma} \kappa^{(4)}_{pq} t \partial_{u_{pq}} F_{nm},$$

avec F_{nm} donné par (5.15), est zéro. Ceci complète la preuve pour le cas non-résoluble du théorème 5.3.9. □

Bibliographie

[1] Winternitz P and Gazeau J 1992 *Phys. Lett. A* **167** 246

[2] Gagnon L and Winternitz P 1993 *J. Phys. A* **26** 7061

[3] Güngör F and Winternitz P 2002 *J. Math. Anal. Appl.* **276** 314

[4] Güngör F Lahno V I and Zhdanov R Z 2004 *J. Math. Phys.* **45** 2280

[5] Vlastou-Tsinganos G Flytzanis N and Büttner H 1990 *J. Phys. A* **23** 225

[6] Coquet E Peyrard M and Büttner H 1988 *J. Phys. C* **21** 4895

[7] Büttner H and Heym J 1987 *Z. Phys. B Cond. Matter* **68** 279

[8] Behnke G and Büttner H 1982 *J. Phys. A* **15** 3869

[9] Levi D and Winternitz P 1991 *Phys. Lett. A* **152** 335

[10] Levi D and Winternitz P 1993 *J. Math. Phys.* **34** 3713

[11] Levi D and Winternitz P 1996 *J. Math. Phys.* **37** 5551

[12] Lafortune S Tremblay S and Winternitz P 2001 *J. Math. Phys.* **42** 5341

[13] Gómez-Ullate D Lafortune S and Winternitz P 1999 *J. Math. Phys.* **40** 2782

[14] Dorodnitsyn V A 1994 *Int. J. Mod. Phys. C* (Phys. Comp.) **5** 723

[15] Dorodnitsyn V A 2000 *Group Properties of Difference Equations*, (Maks Press Moscow)

[16] Levi D Tremblay S and Winternitz P 2000 *J. Phys. A* **33** 8507

[17] Levi D Tremblay S and Winternitz P 2001 *J. Phys. A* **34** 9507

[18] Levi D and Winternitz P 2006 *J. Phys. A* **39**, 1

[19] Yamilov R and Levi D 2004 *J. Nonlinear Math. Phys.* **11** 1

[20] Saito Y Furuta K and Hojou M 1987 *J. Phys. Soc. Jpn* **56** 178

[21] Katsura S Ide T Morita T 1986 *J. Stat. Phys.* **42** 381

[22] Olver P J 1993 *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, New York

[23] Hydon P 2000 *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge University Press

[24] Cantwell B J 2002 *Introduction to Symmetry Analysis*, Cambridge University Press

[25] Levi E E 1905 *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino* **50** 1

[26] Jacobson N 1979 *Lie Algebras* (New York : Dover)