

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN PHYSIQUE

PAR
GUILLAUME PLANTE

SOLUTION ANALYTIQUE DE L'ÉQUATION DE
SCHRÖDINGER POUR UN POTENTIEL
COULOMBIEN-PLUS-LINÉAIRE : LES FONCTIONS D'ONDE

AVRIL 2005

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à offrir mes plus sincères remerciements à mon directeur, Monsieur Adel F. Antippa, pour sa générosité, sa grande disponibilité et sa confiance en mes capacités. Sa rigueur, son dévouement et son expertise de chercheur m'ont servi comme appui à la réalisation de ce travail.

Je désire également adresser des remerciements à tous les professeurs du département de physique avec qui j'ai eu la chance d'acquérir et de consolider de multiples connaissances au cours de mes études à l'UQTR. Plus particulièrement, j'aimerais remercier Monsieur Louis Marchildon, Monsieur Jacques Goyette et Monsieur Paul Lafrance, qui par leurs enseignements ont fait grandir mon intérêt pour la physique.

Finalement, je dois mentionner ma reconnaissance au Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour leur soutien financier, par le biais d'une bourse d'études supérieures, grâce auquel j'ai pu me consacrer entièrement à mes études.

Résumé

Nous résolvons l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour le cas d'un système quark-antiquark interagissant via un potentiel donné par la somme d'un potentiel coulombien et d'un potentiel linéaire. La solution en série de l'équation de Schrödinger pour ce potentiel mène à une équation récursive linéaire homogène à quatre termes et à coefficients variables reliant les coefficients du développement en série de puissances. Nous obtenons la solution de cette équation récursive en termes de fonctions appelées fonctions combinatoires. Les fonctions combinatoires sont définies par rapport à l'ensemble des partitions d'un intervalle en parts. Les parts disponibles pour la partition de l'intervalle sont les différences d'ordre entre les termes de l'équation récursive et les fonctions combinatoires correspondent à des sommes de produits des coefficients des termes de l'équation récursive évalués à différents points de l'intervalle. Ces points sont déterminés par les partitions possibles de l'intervalle. Nous exprimons par la suite les coefficients du développement en série en termes de fonctions de structure par la réduction des fonctions combinatoires en ces dernières. Finalement, nous calculons les six premiers coefficients du développement en série de la solution à l'aide des fonctions de structure.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vi
Notation	vii
1 Introduction	1
2 Équation radiale	7
2.1 Équation radiale sans dimension	7
2.2 Solution en série pour $u_{nl}(x)$	9
2.3 Solution de l'équation récursive	13
2.4 Les fonctions combinatoires	15
2.5 Simplification des fonctions combinatoires	18
2.6 Partitions	21
2.7 La somme sur r	22
3 Fonctions de structure	27
3.1 Cas fondamentaux	27
3.1.1 Segments de longueur 1 ($m = n$ et $p_1 = n$)	27
3.1.2 Segments de longueur 2 ($m = 2n$ et $p_2 = n$)	28
3.1.3 Segments de longueur 3 ($m = 3n$ et $p_3 = n$)	29
	iii

3.2	Équations récursives pour les fonctions de structure	29
3.2.1	Fonctions de structure de la forme $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$. . .	29
3.2.2	Fonctions de structure de la forme $\beta_l(0, m; n, p_2)$. . .	35
4	Les fonctions d'onde	40
4.1	Expression générale pour les fonctions d'onde	40
4.2	Expressions explicites pour les coefficients de la série de puissances	41
5	Conclusion	44
	Bibliographie	47
A	Méthodologie	49
A.1	Introduction	49
A.2	Partitions	50
A.2.1	Terminologie	50
A.2.2	Longueur d'intervalle, nombre de parts et parts utilisées	51
A.2.3	Parts et points	52
A.2.4	Lemmes sur les partitions	55
A.2.5	Représentation fonctionnelle	58
A.3	Fonctions combinatoires	59
A.3.1	Fonctions combinatoires spéciales	59
A.3.2	Fonctions combinatoires contraintes	60
A.3.3	Quelques propriétés	63
A.3.4	Relations récursives	65
A.4	Équations récursives linéaires	73

A.5 Conclusion	78
B Symboles de Pochhammer	79
C L'équation récursive pour $\beta_i(m_1, m_2; n, 0)$	80
D Fichier Mathematica	81

Liste des figures

1	Conditions de frontière pour b_m en fonction des paramètres N , j_0 et a_N	15
2	Représentation graphique des partitions qui sont des éléments de $\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$ et les fonctions de structure qui leur correspondent.	30
3	Représentation graphique des partitions qui sont des éléments de $\mathcal{O}_{p_2-1}(0, m - m' - 2, n - n' - 1)$, de $\mathcal{O}_{p_2=0}(m - m', m, n')$ et de $\mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n)$, ainsi que les fonctions de structure qui leur correspondent.	35

Liste des tableaux

1	Tableau synthèse des différentes méthodes utilisées pour obtenir le spectre et/ou les fonctions d'onde pour le potentiel coulombien-plus-linéaire.	4
2	Les relations entre les paramètres m , n , p_1 , p_2 et p_3	22
3	Les partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$	52
4	Les vecteurs $\Delta_{nq}(M)$ et $\mathbf{S}_{nq}(m_1, m_2)$ associés aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$	53
5	Les fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$ associées aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$	59
6	Les fonctions combinatoires spéciales associées aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$	61

Notation

b_m	Coefficient du développement en série de puissances de $u_{nl}(r)$
l	Nombre quantique lié au moment cinétique orbital
m	Longueur d'un intervalle
n	Nombre de parts d'une partition (aussi utilisé pour désigner le nombre quantique principal)
$o_{\max}(p)$	Nombre de partitions ordonnées correspondant à la partition p
p_i	Nombre de parts de longueur i d'une partition
$p(m, n)$	Partition d'un intervalle de longueur m en n parts
s_j	Point où se termine la j -ième part d'une partition ordonnée
t_{nl}, t	Paramètre sans dimension lié à l'énergie
$u_{nl}(r)$	Solution de l'équation de Schrödinger radiale
$C_1(m_1, m_2, n)$	Fonction combinatoire spéciale de première espèce
$C_2(m_1, m_2)$	Fonction combinatoire spéciale de seconde espèce
$\bar{C}_2(m_1, m_2, d)$	Fonction combinatoire contrainte de seconde espèce
E_{nl}	Valeur propre de l'énergie
$F_n^q(m_1, m_2)$	Fonctionnelle associée à la q -ième partition ordonnée d'un intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts
$R_{nl}(r)$	Partie radiale de la fonction d'onde
$V(r)$	Potentiel
V_0	Terme constant du potentiel coulombien-plus-linéaire
$Y_l^m(\theta, \phi)$	Harmonique sphérique
α	Coefficient du terme coulombien du potentiel coulombien-plus-linéaire
$\beta_l(m_1, m_2; n, p_2)$	Fonction de structure associée aux partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts, p_2 étant de longueur 2
δ_j	La j -ième part d'une partition ordonnée

κ	Coefficient du terme linéaire du potentiel coulombien-plus-linéaire
λ_0	Valeur à la frontière de l'équation récursive pour les coefficients b_m
μ	Masse réduite du système quark-antiquark
ρ	Constante de couplage sans dimension
$\psi_{nlm}(\vec{r})$	Fonction d'onde
\mathcal{A}	Ensemble des parts disponibles pour la partition d'un intervalle
$\mathcal{N}(m)$	Ensemble de toutes les valeurs possibles du nombre de parts d'une partition d'un intervalle de longueur m
$\mathcal{O}(m_1, m_2)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$
$\mathcal{O}_{p_3}(m_1, m_2)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ ayant exactement p_3 parts de longueur 3
$\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ ayant exactement p_2 parts de longueur 2 et p_3 parts de longueur 3
$\mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts ayant exactement p_2 parts de longueur 2
$\mathcal{S}_{p_2}^{m', n'}(0, m, n)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[0, m]$ en n parts pour lesquelles les dernières n' parts sont de longueur 1 ou 3, la $(n - n')$ -ième part est de longueur 2 et la longueur totale des n' dernières parts est de m'
$\mathcal{T}(m_1, m_2, n)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts appartenant à l'ensemble $\{1, 3\}$
$\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$	Ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts appartenant à l'ensemble $\{1, 3\}$ pour lesquelles les dernières i parts sont de longueur 3 et la $(n - i)$ -ième part est de longueur 1

1 Introduction

Le potentiel coulombien-plus-linéaire, $V(r) = -a/r + br$, aussi appelé potentiel de Cornell, a reçu beaucoup d'attention autant en physique des particules, plus particulièrement en spectroscopie des mésons, où il est utilisé pour décrire des états liés de quarks et d'antiquarks, qu'en physique atomique et moléculaire, où il représente un effet Stark radial pour l'atome d'hydrogène.

Le potentiel coulombien-plus-linéaire a été utilisé avec beaucoup de succès dans des modèles décrivant des systèmes de quarks massifs [1, 2, 3, 4, 5]. Il a été introduit en tant que potentiel mathématiquement simple incorporant les caractéristiques de base des interactions entre quarks et permettant de rendre compte des particularités du spectre de l'énergie des états liés de quarks et d'antiquarks charmés. Le potentiel inclut l'interaction coulombienne à courte distance des quarks, déduite de calculs en chromodynamique quantique (CDQ) perturbative et le confinement à grande distance des quarks, déduit de calculs en CDQ sur réseau, et ce, via le terme linéaire du potentiel.

Les solutions de l'équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien-plus-linéaire ont été étudiées avec un grand nombre de techniques. Elles ont aussi été étudiées en tant que cas particulier du potentiel de Killingbeck généralisé $V(r) = -a/r + br + cr^2$.

Dans le cadre de la théorie des perturbations, Mehta et Patil [6] ont montré que les valeurs propres du potentiel coulombien-plus-linéaire ont une série perturbative asymptotique en b , la constante de couplage linéaire. Killingbeck [7] a montré comment utiliser le théorème hyperviriel pour calculer la série perturbative de l'énergie des états sphériquement symétriques ($l = 0$) sans

calculer les fonctions d'onde perturbées. Des approximants de Padé de la série divergente ont été utilisés pour obtenir les valeurs propres. Austin [8] a étendu le calcul de la série perturbative aux ordres plus élevés et à de plus grandes valeurs du paramètre perturbatif. En utilisant la même technique, Lai et Lin [9] a obtenu les valeurs propres pour différentes valeurs du nombre quantique lié au moment cinétique orbital.

Dans le cadre de l'approximation WKB, Seetharaman *et al.* [10] ont obtenu une expression analytique approximative non-perturbative pour l'énergie en fonction d'intégrales elliptiques complètes. Thidé et Linnaeus [11] et Brau [12] ont aussi obtenu des résultats analytiques approximatifs pour les valeurs propres en utilisant respectivement la quantification par intégrale de phase d'ordre supérieur et la quantification de Bohr-Sommerfeld.

Chhajlany et Letov [13] ont obtenu des résultats exacts pour des valeurs spécifiques des paramètres de couplage du potentiel coulombien-plus-linéaire en s'inspirant d'une technique utilisée par Saxena et Varma [14] pour trouver des solutions exactes au problème d'un potentiel de Coulomb avec une perturbation polynomiale radiale $2\lambda r + 2\lambda^2 r^2$. Cette technique prescrit la recherche d'une solution sous la forme du produit d'une fonction d'interpolation et de deux fonctions ayant le comportement approprié aux frontières. Si les coefficients de la série de puissances de la fonction d'interpolation sont reliés entre eux par une équation récursive d'ordre N , alors les valeurs propres sont obtenues en exigeant que la fonction d'interpolation soit un polynôme de degré n , c'est-à-dire en forçant N coefficients successifs de la série de puissances à s'annuler. Cette condition arbitraire entraîne aussi la quantification de certains

paramètres de couplage du potentiel. Les valeurs propres obtenues convergent vers les véritables valeurs propres lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini.

Dans la référence [13], cette technique est appliquée au cas d'un potentiel coulombien avec une perturbation radiale $\mu r + \alpha^2 r^2$. Le fait d'exiger que la solution soit de forme polynomiale entraîne la quantification de la constante de couplage α associée au terme quadratique. La constante α devient alors dépendante de la constante de couplage μ et du nombre quantique lié au moment cinétique orbital. Les valeurs propres du potentiel coulombien-plus-linéaire sont récupérées, car la constante α tend vers zéro lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini, permettant ainsi de faire tendre le potentiel de Killingbeck vers le potentiel désiré.

Les solutions de l'équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien-plus-linéaire ont aussi été étudiées par Chaudhuri *et al.* [15] à l'aide de la méthode du déterminant de Hill. Dans cette méthode, les valeurs propres correspondent aux zéros d'un déterminant de dimension infinie. Ce dernier est associé au système infini d'équations linéaires qui relie les coefficients du développement en série de puissances de la solution.

Fulcher *et al.* [16] ont montré qu'il est possible d'obtenir des expressions analytiques pour les valeurs propres des états de faible énergie en développant la partie radiale de la fonction d'onde en un produit d'une barrière répulsive centrifuge, d'une fonction exponentielle et d'un polynôme de Laguerre. Leur approche transforme le problème de l'équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien-plus-linéaire en un problème de diagonalisation matricielle où les

Auteur(s)	Année	Réf.	$V(r)$	E_n	Ψ_n	Méthode
Eichten <i>et al.</i>	1975	[1]	$-\frac{\alpha_s}{r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$	✓		Numérique
Eichten <i>et al.</i>	1978	[2]	$-\frac{\kappa}{r} + \frac{r}{a^2}$	✓	✓	Numérique
Quigg et Rosner	1979	[3]	$-\frac{4\alpha_s}{3r} + \frac{r}{a^2}$	✓		Numérique
Chaichian <i>et al.</i>	1980	[4]	$-\frac{4\alpha_s}{3r} + \lambda r + V_0$	✓	✓	Numérique
Bykov <i>et al.</i>	1984	[5]	$-\frac{a}{r} + kr$	✓		Numérique
Mehta et Patil	1978	[6]	$-\frac{z}{r} + \lambda r$	✓		Perturbations
Killingbeck	1978	[7]	$-\frac{1}{r} + \lambda r$	✓		Perturbations, Padé
Austin	1980	[8]	$-\frac{1}{r} + \lambda r$	✓		Perturbations, Padé
Lai et Lin	1981	[9]	$\frac{z}{r} + \lambda r$	✓		Perturbations, Padé
Seetharaman <i>et al.</i>	1983	[10]	$-\frac{\beta}{r} + \mu r$	✓		WKB
Thidé et Linnaeus	1985	[11]	$-\frac{b}{r} + ar$	✓		Intégrale de phase
Brau	2000	[12]	$-\frac{\kappa}{r} + ar$	✓		Bohr-Sommerfeld
Chhajlany et Letov	1991	[13]	$-\frac{1}{r} + \mu\rho + \alpha^2\rho^2$	✓		Analytique
Saxena et Varma	1982	[14]	$-\frac{1}{r} + 2\lambda r + 2\lambda^2 r^2$	✓		Analytique
Chaudhuri <i>et al.</i>	1987	[15]	$-\frac{a}{r} + br$	✓		Déterminant de Hill
Fulcher <i>et al.</i>	1993	[16]	$-\frac{\kappa}{r} + Ar$	✓	✓	Analytique

Tableau 1 – Tableau synthèse des différentes méthodes utilisées pour obtenir le spectre et/ou les fonctions d’onde pour le potentiel coulombien-plus-linéaire.

éléments de la matrice sont donnés par des expressions analytiques. Les valeurs propres de la matrice convergent vers les véritables valeurs propres lorsque la taille de la base du développement devient suffisamment grande. Le tableau 1 récapitule les différentes méthodes utilisées pour solutionner l’équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien-plus-linéaire.

Les solutions de l’équation de Schrödinger pour un potentiel central polynomial du type $V(r) = \sum_{i=1}^l a_i r^{\nu_i}$ avec $\nu_i \geq -1$ peuvent être exprimées sous la forme du produit d’une harmonique sphérique, d’une barrière répulsive centrifuge r^l , d’une fonction exponentielle décroissante et d’une fonction inconnue $\eta(r)$ qui peut être développée en série de puissances. Le facteur r^l domine près de l’origine, la fonction exponentielle est la fonction avec le comportement asymptotique approprié et la fonction $\eta(r)$ est la fonction qui domine aux dis-

tances intermédiaires. Seulement deux cas particuliers du potentiel admettent des solutions explicites en termes de fonctions spéciales : $\nu_1 = -1$ et $\nu_1 = 2$, tous deux avec $I = 1$. Ceci s'explique par le fait qu'il s'agit des deux seuls cas où les coefficients du développement en série de puissances de la fonction $\eta(r)$ sont reliés par une équation récursive à deux termes. Dans tous les autres cas, ils sont reliés par une équation récursive à trois termes ou plus.

La méthode habituellement utilisée pour résoudre les équations récursives à plusieurs termes et à coefficients variables est de calculer les premiers termes de la série, de deviner la forme générale de la solution et puis de la prouver par induction. Alors que cela peut être fait assez aisément pour des équation récursives à deux termes, cela devient pratiquement impossible pour des équations récursives à trois termes ou plus. Antippa et Phares ont développé un formalisme général permettant la résolution d'équations récursives à plusieurs termes [17]. La solution est obtenue en termes d'expressions algébriques combinatoires appelées fonctions combinatoires. La première application de ce formalisme à la résolution de l'équation de Schrödinger pour des potentiels centraux polynomiaux a été celle du potentiel linéaire [18, 19]. Les fonctions d'onde ont été obtenues sous la forme d'une série de puissances avec leur coefficients donnés par des fonctionnelles appelées fonctions de structure, une sorte particulière de fonction combinatoire. L'équation aux valeurs propres a été quant à elle obtenue en exigeant que la forme asymptotique des fonctions d'ondes corresponde à la solution asymptotique de l'équation de Schrödinger pour le potentiel linéaire. Les valeurs propres obtenues correspondent aux zéros d'un polynôme de degré infini.

La solution en série de puissances de l'équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien-plus-linéaire fait intervenir une équation récursive à quatre termes et à coefficients variables. La même méthode que celle employée pour résoudre l'équation de Schrödinger pour le potentiel linéaire peut être utilisée pour obtenir une solution pour le potentiel coulombien-plus-linéaire. Le but de notre travail est l'obtention d'une expression analytique pour les fonctions d'onde non relativistes du potentiel coulombien-plus-linéaire.

L'organisation de ce mémoire est la suivante : dans la section 2, nous posons le problème et nous obtenons les coefficients du développement en série de puissances des fonctions d'ondes en termes de fonctions de structure ; dans la section 3, nous dérivons des équations récursives pour les fonctions de structure ; et dans la section 4 nous présentons l'expression générale pour les fonctions d'onde du potentiel coulombien-plus-linéaire et nous donnons des expressions explicites pour les six premiers coefficients de la série de puissances.

2 Équation radiale

2.1 Équation radiale sans dimension

Considérons un système quark-antiquark interagissant via un potentiel coulombien-plus-linéaire

$$V(r) = V_0 + \kappa r - \frac{\alpha}{r}. \quad (1)$$

Puisque le potentiel est sphériquement symétrique, les solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps sont de la forme

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2)$$

où $R_{nl}(r) = u_{nl}(r)/r$, et où $u_{nl}(r)$ est une solution de l'équation de Schrödinger radiale

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] u_{nl}(r) = E_{nl} u_{nl}(r). \quad (3)$$

En insérant le potentiel donné par l'équation (1) dans l'équation (3), nous obtenons que

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V_0 + \kappa r - \frac{\alpha}{r} \right] u_{nl}(r) = E_{nl} u_{nl}(r). \quad (4)$$

En appliquant la transformation d'échelle $x = ar$ à l'équation ci-dessus et en divisant par $-\frac{\hbar^2 a^2}{2\mu}$, nous obtenons alors que

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - \frac{2\mu\kappa x}{\hbar^2 a^3} + \frac{2\mu\alpha}{\hbar^2 a x} + \frac{2\mu}{\hbar^2 a^2} (E_{nl} - V_0) \right] u_{nl}(x) = 0. \quad (5)$$

Le paramètre a est maintenant fixé à la valeur

$$a = \left(\frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

de manière à ce que sa dimension devienne celle de l'inverse d'une longueur et que, conséquemment, x devienne sans dimension. La substitution de cette expression pour a dans l'équation (5) transforme cette dernière en

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - x + \frac{1}{x} \left(\frac{4\mu^2 \alpha^3}{\hbar^4 \kappa} \right)^{1/3} + \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar \kappa} \right)^{2/3} (E_{nl} - V_0) \right] u_{nl}(x) = 0. \quad (7)$$

En définissant la constante de couplage sans dimension ρ et le paramètre sans dimension lié à l'énergie t_{nl} respectivement comme

$$\rho = \left(\frac{4\mu^2}{\hbar^4 \kappa} \right)^{1/3} \alpha \quad (8)$$

et

$$t_{nl} = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2 \kappa^2} \right)^{1/3} (E_{nl} - V_0), \quad (9)$$

nous obtenons finalement l'équation radiale de Schrödinger en termes de paramètres sans dimension

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - x + \frac{\rho}{x} + t_{nl} \right] u_{nl}(x) = 0. \quad (10)$$

La résolution de l'équation de Schrödinger, pour le potentiel coulombien-plus-linéaire, a donc été réduite à la résolution de l'équation radiale (10), pour les fonctions $u_{nl}(x)$.

2.2 Solution en série pour $u_{nl}(x)$

L'équation (10) est de la forme

$$\frac{d^2 u_{nl}}{dx^2} + p(x) \frac{du_{nl}}{dx} + q(x) u_{nl} = 0 \quad (11)$$

avec

$$p(x) = 0, \quad (12)$$

$$q(x) = -\frac{l(l+1)}{x^2} - x + \frac{\rho}{x} + t_{nl}. \quad (13)$$

Puisque $xp(x)$ et $x^2q(x)$ sont partout analytiques, l'équation (10) possède une solution en série de puissances de rayon de convergence infini de la forme [20]

$$v_{nl}(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) x^{i+s} \quad (14)$$

avec les coefficients $a_i(s)$ donnés par l'équation réursive

$$F(s+i)a_i(s) + \sum_{j=0}^{i-1} [(j+s)p_{i-j} + q_{i-j}]a_j(s) = 0, \quad (15)$$

où $F(s)$ est défini par

$$F(s) = s(s-1) + p_0s + q_0 \quad (16)$$

et où p_k et q_k sont les coefficients du développement en série de puissances de $xp(x)$ et $x^2q(x)$, respectivement. C'est-à-dire que

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k (xp(x))}{dx^k} \right|_{x=0} \quad (17)$$

$$q_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k (x^2q(x))}{dx^k} \right|_{x=0}. \quad (18)$$

Les solutions indépendantes de l'équation (11) sont obtenues, via l'équation (14), en choisissant la valeur de s égale à celle des racines

$$s_{\pm} = \frac{(1-p_0) \pm \sqrt{(1-p_0)^2 - 4q_0}}{2} \quad (19)$$

de l'équation indicelle

$$F(s) = 0. \quad (20)$$

À partir des équations (12) et (13) nous remarquons que, dans le cas de l'équation différentielle de second ordre (11), $p_k = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ et

$q_k = 0$ pour $k = 4, 5, 6, \dots, \infty$, tandis que les valeurs non-nulles de q_k sont

$$q_0 = -l(l+1), \quad q_1 = \rho, \quad q_2 = t_{nl} \quad \text{et} \quad q_3 = -1. \quad (21)$$

Conséquemment, l'équation réursive (15) se réduit à

$$F(s+i)a_i(s) + \rho a_{i-1}(s) + t_{nl} a_{i-2}(s) - a_{i-3}(s) = 0. \quad (22)$$

La fonction $F(s)$, donnée par l'équation (16), prend alors la forme

$$F(s) = s(s-1) - l(l+1). \quad (23)$$

Les racines, données par l'équation (19), de l'équation indicielle (20) se réduisent à la forme simplifiée

$$s_+ = l+1 \quad \text{et} \quad s_- = -l. \quad (24)$$

Lorsque ces valeurs sont insérées dans l'équation (23), elles donnent respectivement

$$F(s_+ + i) = i(i + 2l + 1) \quad (25)$$

et

$$F(s_- + i) = i(i - 2l - 1). \quad (26)$$

La différence entre les racines de l'équation indicielle est un nombre entier,

alors la solution générale de l'équation (11) est donnée par [20]

$$h_{nl}(x) = Au_{nl}(x) + Bw_{nl}(x), \quad (27)$$

où

$$\begin{aligned} u_{nl}(x) &= v_{nl}(x, s_+) \\ &= x^{l+1} \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \quad \text{avec} \quad b_m = a_m(s)|_{s=l+1} \end{aligned} \quad (28)$$

et où

$$\begin{aligned} w_{nl}(x) &= u_{nl}(x) \ln x + v_{nl}(x, s_-) \\ &= x^{l+1} \ln x \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m + x^{-l} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad \text{avec} \quad c_m = a_m(s)|_{s=-l}. \end{aligned} \quad (29)$$

Pour que $R_{nl}(r)$ soit normalisable, $h_{nl}(x)/x$ doit être finie à l'origine. À la limite, $u_{nl}(x)/x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^l$ et est donc finie pour toute valeur non-négative de l . En revanche, le premier terme de $w_{nl}(x)/x$ a un comportement limite $[w_{nl}(x)]_1/x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^l \ln x$ et a donc une singularité logarithmique à l'origine, tandis que le second terme a un comportement limite $[w_{nl}(x)]_2/x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{-l-1}$ et possède donc un pôle d'ordre $l+1$ à l'origine pour toute valeur non-négative de l . Conséquemment, la contrainte de normalisabilité de R_{nl} requiert que l'on choisisse $B = 0$ et la solution de l'équation (11) qui satisfait la condition de frontière à l'origine est $Au_{nl}(x)$. Puisque l'équation récursive ne détermine pas b_0 , le coefficient A peut être absorbé par b_0 . La solution de l'équation (11) qui

satisfait aux conditions de frontière à l'origine est donnée par

$$u_{nl}(x) = x^{l+1} \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m, \quad (30)$$

où les coefficients $b_m = a_m(s_+)$ sont déterminés à partir de l'équation récursive

$$m(m+2l+1)b_m + \rho b_{m-1} + t_{nl}b_{m-2} - b_{m-3} = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (31)$$

soumise aux conditions de frontière $b_m = \lambda_0 \delta_{m0}$ pour $m \leq 0$. La résolution de l'équation radiale (10) pour la fonction $u_{nl}(x)$ a donc été réduite à la résolution de l'équation récursive (31) pour les coefficients b_m .

2.3 Solution de l'équation récursive

Nous définissons la fonction $f(m, l)$ par

$$f(m, l) = \frac{1}{F(s_+ + m)} = \frac{1}{m(m+2l+1)} \quad (32)$$

de manière à ce que l'équation récursive obtenue plus haut puisse être réécrite comme

$$b_m = -\rho f(m, l) b_{m-1} - t_{nl} f(m, l) b_{m-2} + f(m, l) b_{m-3}. \quad (33)$$

De plus, nous définissons

$$f_1(m) = -\rho f(m, l), \quad f_2(m) = -t_{nl} f(m, l), \quad f_3(m) = f(m, l) \quad (34)$$

pour obtenir

$$b_m = f_1(m) b_{m-1} + f_2(m) b_{m-2} + f_3(m) b_{m-3} \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (35)$$

avec les conditions de frontière

$$b_m = \lambda_0 \delta_{m0} \quad \text{pour } m \leq 0. \quad (36)$$

L'équation réursive (35), soumise aux conditions de frontière (36), est maintenant écrite sous la forme standard [17].

L'équation (35) est une équation réursive linéaire à quatre termes et à coefficients variables. Une solution de cette équation en termes de fonctions combinatoires spéciales peut être obtenue en employant la méthode introduite par Antippa *et al.* [17]. La solution d'une équation réursive linéaire de la forme

$$b_m = \sum_{k=1}^N f_{a_k}(m) b_{m-a_k} \quad \text{pour } m > j_0 \quad (37)$$

satisfaisant aux conditions de frontière

$$b_{j_0-i} = \lambda_i \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, a_N - 1, \quad (38)$$

où N et a_N sont respectivement le nombre de termes et l'ordre de l'équation réursive et où j_0 correspond à la plus grand valeur de m pour laquelle une

condition de frontière est spécifiée (voir figure 1), est donnée par [17]

$$b_m = \sum_{i=0}^{a_N-1} \lambda_i \overline{C}_2(j_0 - i, m, i), \quad (39)$$

où $\overline{C}_2(m_1, m_2, d)$ est une fonction combinatoire contrainte de seconde espèce. La résolution de l'équation réursive (35) a donc été réduite à l'évaluation des fonctions combinatoires $\overline{C}_2(j_0 - i, m, i)$.

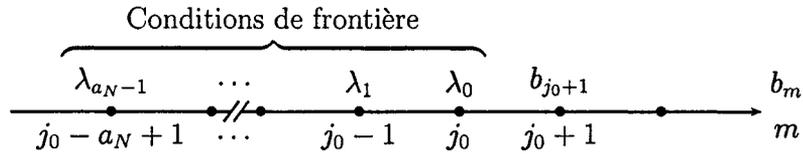


Figure 1 – Conditions de frontière pour b_m en fonction des paramètres N , j_0 et a_N .

2.4 Les fonctions combinatoires

La fonction combinatoire contrainte de seconde espèce $\overline{C}_2(m_1, m_2, d)$ est une fonctionnelle discrète définie en correspondance avec les partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$, où la première part de la partition est de longueur supérieure à d . Les parts a_i , disponibles pour la partition, sont les éléments de l'ensemble \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}, \quad 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N. \quad (40)$$

Les parts d'une partition ordonnée sont notées δ_j et une partition ordonnée réalisable est représentée par $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, où $\delta_j \in \mathcal{A}$. Les points où se terminent les parts sont notés s_j :

$$s_0 = m_1, \quad s_j = m_1 + \sum_{i=1}^j \delta_i, \quad s_n = m_2. \quad (41)$$

Les « briques » à partir desquelles les fonctions combinatoires sont construites sont les fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$. La fonctionnelle $F_n^q(m_1, m_2)$ est associée à la q -ième partition ordonnée de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts appartenant à l'ensemble \mathcal{A} . Selon la référence [17],

$$F_n^q(m_1, m_2) = \prod_{j=1}^n f_{\delta_j}(s_j). \quad (42)$$

Les fonctions combinatoires spéciales de première espèce, $C_1(m_1, m_2, n)$, sont obtenues en sommant les fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$ sur les partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts

$$C_1(m_1, m_2, n) = \sum_{q=1}^{q_{\max}(m_1, m_2, n)} F_n^q(m_1, m_2). \quad (43)$$

Les fonctions combinatoires spéciales de seconde espèce sont obtenues en sommant les fonctions combinatoires spéciales de première espèce sur les valeurs possibles de n

$$C_2(m_1, m_2) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} C_1(m_1, m_2, n), \quad (44)$$

où $\mathcal{N}(m_2 - m_1)$ est l'ensemble de toutes les valeurs possibles du nombre de parts d'une partition d'un intervalle de longueur $m_2 - m_1$. Les fonctions combinatoires spéciales de seconde espèce peuvent donc être réécrites sous la forme d'une somme des fonctionnelles $F_n^r(m_1, m_2)$ sur toutes les partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$

$$C_2(m_1, m_2) = \sum_{r=1}^{r_{\max}(m_1, m_2)} F_{n(r)}^r(m_1, m_2), \quad (45)$$

où le nombre de parts $n(r)$ est maintenant une fonction du numéro de la partition. Les fonctions combinatoires contraintes de seconde espèce sont reliées aux fonctions combinatoires spéciales de seconde espèce par¹

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, d) = \sum_{\substack{a_k \in \mathcal{A} \\ a_k > d}} f_{a_k}(m_1 + a_k) C_2(m_1 + a_k, m_2). \quad (46)$$

Dans le cas particulier où $d = 0$, l'équation ci-dessus se réduit à

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, 0) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m_1 + a_k) C_2(m_1 + a_k, m_2), \quad (47)$$

mais les fonctions combinatoires spéciales obéissent à l'équation récursive [21]

$$C_2(m_1, m_2) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m_1 + a_k) C_2(m_1 + a_k, m_2). \quad (48)$$

¹La preuve de cette équation n'est pas donnée ici, parce qu'elle est analogue à la preuve de l'équation (48), apparaissant dans la référence [21].

Par conséquent, en combinant (47) et (48),

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, 0) = C_2(m_1, m_2). \quad (49)$$

Notons que l'équation (49) est aussi une condition de cohérence qui peut être dérivée directement à partir des définitions des fonctions combinatoires contraintes et spéciales de seconde espèce.

2.5 Simplification des fonctions combinatoires

Dans le cas de l'équation (35), l'ensemble \mathcal{A} des parts disponibles est donné par (voir référence [17])

$$\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}. \quad (50)$$

Donc, $N = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$. De plus, les conditions de frontière sont données par

$$b_m = \lambda_0 \delta_{m0} \quad \text{pour } m \leq 0; \quad (51)$$

donc, $j_0 = 0$. Dans le cas de l'équation (35) soumise aux conditions de frontière (36), la solution pour les coefficients b_m , donnée par l'équation (39), se réduit

donc à :

$$b_m = \sum_{i=0}^2 b_{-i} \bar{C}_2(-i, m, i) \quad (52)$$

$$= \sum_{i=0}^2 \lambda_0 \delta_{-i0} \bar{C}_2(-i, m, i) \quad (53)$$

$$= \lambda_0 \bar{C}_2(0, m, 0). \quad (54)$$

Et en utilisant l'équation (49),

$$b_m = \lambda_0 C_2(0, m). \quad (55)$$

Les fonctions combinatoires spéciales de seconde espèce $C_2(0, m)$ s'expriment, via l'équation (45), en termes des fonctionnelles $F_{n(r)}^r(m_1, m_2)$. Nous devons donc évaluer ces dernières.

Définissons le triplet (p_1, p_2, p_3) représentant la distribution du nombre de parts de longueur $(1, 2, 3)$ pour une partition ordonnée r d'un intervalle $[0, m]$ en n parts, où p_i est le nombre de parts de longueur i . En examinant l'équation (34), nous remarquons que les $f_{\delta_j}(s_j)$ sont toutes égales à une constante multipliée par $f(m, l)$. Le nombre fois que ces constantes vont apparaître dans l'expression (42) comme constantes multiplicatives est relié au nombre de parts de longueur 1 pour $-\rho$, au nombre de parts de longueur 2 pour $-t_{nl}$ et au nombre de parts de longueur 3 pour 1. Afin de simplifier la notation, nous allons, à partir de maintenant, laisser tomber les indices n et l sur t . Les $F_{n(r)}^r(0, m)$

peuvent donc être exprimées ainsi :

$$F_{n(r)}^r(0, m) = (-\rho)^{p_1} (-t)^{p_2} \prod_{j=1}^{n(r)} f(s_j, l). \quad (56)$$

Les fonctions combinatoires spéciales de seconde espèce deviennent quant à elles²

$$C_2(0, m) = \sum_{r=1}^{r_{\max}(0, m)} (-\rho)^{p_1} (-t)^{p_2} \prod_{j=1}^{n(r)} f(s_j, l), \quad (57)$$

ce qui mène, via l'équation (55), à l'expression suivante pour b_m :

$$b_m = \lambda_0 \sum_{r=1}^{r_{\max}(0, m)} (-\rho)^{p_1} (-t)^{p_2} \prod_{j=1}^{n(r)} f(s_j, l), \quad (58)$$

où s_j est donné par l'équation (41) et $f(s_j, l)$ est donné, via l'équation (32), par

$$f(s_j, l) = \frac{1}{s_j(s_j + 2l + 1)}. \quad (59)$$

L'évaluation du produit sur $f(s_j, l)$ dans l'équation (58) est un problème de partition ordonnée de combinatoire algébrique et la somme sur r l'est aussi.

²Les facteurs qui dépendent de p_1 ou p_2 ne peuvent pas sortir de la somme sur r , car le nombre de parts de longueur 1 ou de longueur 2 dépend de la partition ordonnée, et donc de r .

2.6 Partitions

Une partition $p(m, n) = 1^{p_1}2^{p_2}3^{p_3}$ d'un intervalle de longueur m en n parts, qui appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, est assujettie aux contraintes

$$p_1 + p_2 + p_3 = n \quad (60a)$$

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 = m. \quad (60b)$$

En soustrayant (60b) de (60a) multipliée par λ , nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^3 (\lambda - i)p_i = \lambda n - m. \quad (61)$$

En choisissant successivement λ égal à 1, 2 et 3 nous éliminons p_i pour $i = 1, 2, 3$ respectivement, ce qui nous mène à l'expression

$$(\lambda - j)p_j|_{j=(\lambda+1) \bmod 3} + (\lambda - j)p_j|_{j=(\lambda+2) \bmod 3} = \lambda n - m \quad (62)$$

à partir de laquelle nous obtenons les résultats présentés dans le tableau 2. Les résultats du tableau 2 seront utilisés à plusieurs reprises tout au long de ce mémoire. Par exemple, à partir de la quatrième rangée du tableau, nous voyons que la partition d'un intervalle $[0, m]$ en n parts appartenant à $\{1, 2\}$ est possible si et seulement si $m = n + p_2$ ou $m = 2n - p_1$. De manière similaire, la partition est possible en n parts appartenant à $\{2, 3\}$ si et seulement si $m = 2n + p_3$ ou $m = 3n - p_2$. Finalement, la partition est possible en n parts appartenant à $\{1, 3\}$ si et seulement si $m = n + 2p_3$ ou $m = 3n - 2p_1$.

L'équation (60) impose deux contraintes linéaires sur les cinq paramètres

λ	1	2	3
$\sum_{i=1}^3 (\lambda - i)p_i = \lambda n - m$	$p_2 + 2p_3 = m - n$	$p_3 - p_1 = m - 2n$	$2p_1 + p_2 = 3n - m$
$n = \lambda^{-1} \left(m + \sum_{i=1}^3 (\lambda - i)p_i \right)$	$n = m - p_2 - 2p_3$	$n = \left\lfloor \frac{m + p_1 - p_3}{2} \right\rfloor$	$n = \left\lfloor \frac{m + 2p_1 + p_2}{3} \right\rfloor$
$m = \lambda n - \sum_{i=1}^3 (\lambda - i)p_i$	$m = n + p_2 + 2p_3$	$m = 2n + p_3 - p_1$	$m = 3n - 2p_1 - p_2$
$(\lambda - j)p_j _{j=(\lambda+1) \bmod 3} = \lambda n - m - (\lambda - j)p_j _{j=(\lambda+2) \bmod 3}$	$p_2 = m - n - 2p_3$	$p_3 = m - 2n + p_1$	$p_1 = \left\lfloor \frac{3n - m - p_2}{2} \right\rfloor$
$(\lambda - j)p_j _{j=(\lambda+2) \bmod 3} = \lambda n - m - (\lambda - j)p_j _{j=(\lambda+1) \bmod 3}$	$p_3 = \left\lfloor \frac{m - n - p_2}{2} \right\rfloor$	$p_1 = 2n - m + p_3$	$p_2 = 3n - m - 2p_1$

Tableau 2 – Les relations entre les paramètres m , n , p_1 , p_2 et p_3 .

m , n , p_1 , p_2 , et p_3 , donc seulement trois paramètres sont indépendants. Étant donné m , la connaissance de deux autres paramètres détermine donc entièrement la partition $p(m, n) = 1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}$. Ce résultat est aussi explicitement évident si l'on consulte le tableau 2. Spécifiquement, les paramètres p_2 et p_3 déterminent entièrement la partition $p(m, n) = 1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}$, puisque m est connu. À partir du tableau 2, le nombre de parts n est alors donné par

$$n(m, p_2, p_3) = m - p_2 - 2p_3, \quad (63)$$

tandis que le nombre de parts de longueur 1 est donné par

$$p_1(m, p_2, p_3) = m - 2p_2 - 3p_3. \quad (64)$$

2.7 La somme sur τ

Les résultats obtenus dans la section 2.6 nous permettent maintenant d'évaluer la somme sur les partitions ordonnées (la somme sur τ) qui apparaît

dans les équations (57) et (58) de la section 2.5.

Soit $\mathcal{O}(m_1, m_2)$, l'ensemble de toutes les *partitions ordonnées* d'un intervalle $[m_1, m_2]$ en parts appartenant à $\{1, 2, 3\}$, et soit $\mathcal{O}_{p_3}(m_1, m_2)$, un sous-ensemble de $\mathcal{O}(m_1, m_2)$ ayant comme éléments tous les éléments de $\mathcal{O}(m_1, m_2)$ qui ont exactement p_3 parts de longueur 3. Puisque le nombre minimal de parts de longueur 3 d'une partition est de 0 et que le nombre maximal est de $\lfloor (m_2 - m_1) / 3 \rfloor$, la relation entre les deux ensembles s'exprime comme ceci :

$$\mathcal{O}(m_1, m_2) = \bigcup_{p_3=0}^{\lfloor (m_2 - m_1) / 3 \rfloor} \mathcal{O}_{p_3}(m_1, m_2). \quad (65)$$

De plus, soit $\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)$, un sous-ensemble de $\mathcal{O}_{p_3}(m_1, m_2)$ ayant comme éléments tous les éléments de $\mathcal{O}_{p_3}(m_1, m_2)$ qui ont exactement p_3 parts de longueur 3 et p_2 parts de longueur 2. Le nombre minimal de parts de longueur 2 d'une partition est de 0 et le nombre maximal est de $\lfloor (m_2 - m_1 - 3p_3) / 2 \rfloor$. Par conséquent, l'ensemble des partitions ordonnées d'un intervalle $[m_1, m_2]$ ayant exactement p_3 parts de longueur 3 peut s'exprimer

$$\mathcal{O}_{p_3}(m_1, m_2) = \bigcup_{p_2=0}^{\lfloor (m_2 - m_1 - 3p_3) / 2 \rfloor} \mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2), \quad (66)$$

menant, via l'équation (65), à

$$\mathcal{O}(m_1, m_2) = \bigcup_{p_3=0}^{\lfloor (m_2 - m_1) / 3 \rfloor} \bigcup_{p_2=0}^{\lfloor (m_2 - m_1 - 3p_3) / 2 \rfloor} \mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2). \quad (67)$$

Les partitions ordonnées de l'ensemble $\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)$ correspondent toutes à

la même partition $p(m, n) = 1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}$, puisque la connaissance de la longueur de l'intervalle, de p_2 et de p_3 la spécifie complètement. De plus, les différents sous-ensembles $\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)$ sont disjoints

$$\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2) \cap \mathcal{O}_{p'_3, p'_2}(m_1, m_2) = \emptyset \quad \text{pour } p_3 \neq p'_3 \text{ or } p_2 \neq p'_2. \quad (68)$$

Par conséquent,

$$\sum_{o \in \mathcal{O}(m_1, m_2)} = \sum_{p_3=0}^{\lfloor (m_2 - m_1)/3 \rfloor} \sum_{p_2=0}^{\lfloor (m_2 - m_1 - 3p_3)/2 \rfloor} \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)}. \quad (69)$$

La somme sur r (la somme sur les partitions ordonnées) qui apparaît dans les équations (57) et (58) de la section 2.5 peut donc être exprimée comme suit :

$$\sum_{r=1}^{r_{\max}(0, m)} = \sum_{p_3=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} \sum_{p_2=0}^{\lfloor (m - 3p_3)/2 \rfloor} \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)}. \quad (70)$$

Soit $o_{\max}(p)$, le nombre de partitions ordonnées correspondant à une partition $p(m, n) = 1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}$ donnée (cardinal de l'ensemble $\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2)$). Alors [22],

$$o_{\max}(p) = \frac{n!}{p_1! p_2! p_3!} \quad n = p_1 + p_2 + p_3. \quad (71)$$

De plus, soit $\mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)$, l'ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts correspondant à la partition $1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}$. Notons que puisque n'importe quel triplet de paramètres du système d'équations (60) détermine

entièrement la partition $p(m, n) = 1^{p_1} 2^{p_2} 3^{p_3}$, alors

$$\mathcal{O}_{p_3, p_2}(m_1, m_2) = \mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)|_{n=m_2-m_1-p_2-2p_3}. \quad (72)$$

En utilisant les équations (70) et (72), la fonction combinatoire donnée par l'équation (57) peut être réécrite comme ceci :

$$C_2(0, m) = \sum_{p_3=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} \sum_{p_2=0}^{\lfloor (m-3p_3)/2 \rfloor} \left(\sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2}(0, m, n)} (-\rho)^{p_1} (-t)^{p_2} \prod_{j=1}^n f(s_j, l) \right), \quad (73)$$

où n et p_1 sont respectivement donnés par les équations (63) et (64). Puisque p_1 et p_2 ne dépendent pas de l'ordre (de o), nous pouvons les faire sortir de la troisième somme pour obtenir

$$C_2(0, m) = \sum_{p_3=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} \sum_{p_2=0}^{\lfloor (m-3p_3)/2 \rfloor} (-\rho)^{p_1} (-t)^{p_2} \left(\sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2}(0, m, n)} \prod_{j=1}^n f(s_j, l) \right). \quad (74)$$

En analogie avec les fonctions de structure introduites dans la référence [18], nous introduisons les fonctions de structure $\beta_l(m_1, m_2; n, p_2)$. Ces fonctions sont associées aux partitions ordonnées de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts, p_2 étant de longueur 2, et sont définies par

$$\beta_l(m_1, m_2; n, p_2) = \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)} \prod_{j=1}^n f(s_j, l), \quad (75)$$

de manière à ce que l'équation (74) puisse être exprimée, en remplaçant p_1 et n par leurs expressions respectives en termes de m , p_2 et p_3 (équations (63) et

(64)), comme suit :

$$C_2(0, m) = \sum_{p_3=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} \sum_{p_2=0}^{\lfloor (m-3p_3)/2 \rfloor} (-\rho)^{m-2p_2-3p_3} (-t)^{p_2} \times \beta_t(0, m; m - p_2 - 2p_3, p_2). \quad (76)$$

En insérant l'expression ci-dessus à la place de la fonction combinatoire de seconde espèce dans l'équation (55) et en réarrangeant, nous obtenons finalement que les coefficients b_m sont donnés par

$$b_m = \lambda_0 (-1)^m \sum_{j=0}^{\lfloor m/3 \rfloor} (-1)^j \sum_{i=0}^{\lfloor (m-3j)/2 \rfloor} (-1)^i \times \beta_t(0, m; m - 2j - i, i) \rho^{m-3j-2i} t^i. \quad (77)$$

Les coefficients b_m sont des polynômes en t d'ordre $m/2$ si m est pair et d'ordre $(m - 1)/2$ si m est impair.

3 Fonctions de structure

3.1 Cas fondamentaux

Les fonctions $\beta_l(m_1, m_2; n, p_2)$ sont, en général, des expressions compliquées. Cependant, dans trois cas particuliers elles peuvent être exprimées sous une forme compacte. Ces cas sont $\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0)$, $\beta_l(m_1, m_1 + 2n; n, n)$ et $\beta_l(m_1, m_1 + 3n; n, 0)$. Ils ont tous en commun le fait que $\sigma_{\max}(p) = 1$, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule partition ordonnée pour chaque partition p . Les trois fonctions de structure $\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0)$, $\beta_l(m_1, m_1 + 2n; n, n)$ et $\beta_l(m_1, m_1 + 3n; n, 0)$ correspondent aux valeurs $p_1 = n$, $p_2 = n$ et $p_3 = n$, respectivement.

3.1.1 Segments de longueur 1 ($m = n$ et $p_1 = n$)

Dans le cas de $\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0)$, la longueur de l'intervalle est $m = n$ et $p_2 = 0$. Par conséquent, en utilisant le tableau 2, nous avons $p_1 = n$ et $p_3 = 0$, c'est-à-dire que la partition de l'intervalle est constituée exclusivement de parts de longueur unitaire. Donc, $\sigma_{\max}(p) = 1$ et $s_j = m_1 + j$, ce qui mène à

$$\begin{aligned}\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_1+n, n)} \prod_{j=1}^n f(s_j, l) \\ &= \prod_{j=1}^n f(m_1 + j, l); \end{aligned} \tag{78}$$

et, en utilisant l'équation (32), nous avons

$$\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(m_1 + j)} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(m_1 + 2l + 1 + j)}. \quad (79)$$

En faisant usage de la notation de Pochhammer (voir l'appendice B ou l'appendice de la référence [19]), l'équation ci-dessus peut être réécrite comme suit :

$$\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0) = \left\{ (m_1 + 1)^{[n]} (m_1 + 2l + 2)^{[n]} \right\}^{-1}. \quad (80)$$

3.1.2 Segments de longueur 2 ($m = 2n$ et $p_2 = n$)

Dans le cas de $\beta_l(m_1, m_1 + 2n; n, n)$, la longueur de l'intervalle est $m = 2n$ et $p_2 = n$. Par conséquent, en utilisant le tableau 2, nous avons $p_1 = 0$ et $p_3 = 0$, c'est-à-dire que la partition de l'intervalle est constituée exclusivement de parts de longueur 2. Donc, $o_{\max}(p) = 1$ et $s_j = m_1 + 2j$, ce qui mène à

$$\begin{aligned} \beta_l(m_1, m_1 + 2n; n, n) &= \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2=n}(m_1, m_1+2n, n)} \prod_{j=1}^n f(s_j, l) \\ &= \prod_{j=1}^n f(m_1 + 2j, l) \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{(m_1 + 2j)} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(m_1 + 2j + 2l + 1)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(m_1/2 + j)} \prod_{j=1}^n \frac{1}{((m_1 + 1)/2 + l + j)}. \end{aligned} \quad (81)$$

L'équation ci-dessus peut être réécrite comme ceci :

$$\beta_l(m_1, m_1 + 2n; n, n) = \left\{ 2^{2n} [(m_1 + 2)/2]^{[n]} [(m_1 + 2l + 3)/2]^{[n]} \right\}^{-1}. \quad (82)$$

3.1.3 Segments de longueur 3 ($m = 3n$ et $p_3 = n$)

Dans le cas de $\beta_l(m_1, m_1 + 3n; n, 0)$, la longueur de l'intervalle est $m = 3n$ et $p_2 = 0$. Par conséquent, en utilisant le tableau 2, nous avons $p_3 = n$ et $p_1 = 0$, c'est-à-dire que la partition de l'intervalle est constituée exclusivement de parts de longueur 3. Donc, $o_{\max}(p) = 1$ et $s_j = m_1 + 3j$, ce qui mène à

$$\beta_l(m_1, m_1 + 3n; n, 0) = \left\{ 3^{2n} [(m_1 + 3) / 3]^{[n]} [(m_1 + 2l + 4) / 3]^{[n]} \right\}^{-1}. \quad (83)$$

3.2 Équations récursives pour les fonctions de structure

Nous procédons en deux étapes pour déterminer les fonctions de structure. Tout d'abord, en utilisant les résultats de la section précédente comme conditions initiales, nous établissons une procédure récursive pour déterminer les fonctions de structure $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$. Puis, nous utilisons ces valeurs de $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$ comme conditions initiales et nous obtenons une expression récursive pour $\beta_l(m_1, m_2; n, p_2)$ dans le cas $p_2 \neq 0$.

3.2.1 Fonctions de structure de la forme $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$

Suivant la procédure de la référence [18], les fonctions de structure de la forme $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$ sont obtenues récursivement en établissant une relation entre les fonctions de structure $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$, correspondant aux partitions ayant p_3 parts de longueur 3, et les fonctions de structure $\beta_l(m_1, m'_2; n', 0)$, correspondant aux partitions ayant un nombre inférieur de parts de longueur 3.

Soit $\mathcal{T}(m_1, m_2, n)$, l'ensemble de toutes les *partitions ordonnées* de l'in-

tervalle $[m_1, m_2]$ en n parts correspondant à la *partition* $1^{p_1}2^{0}3^{p_3}$. Puisque sont donnés m_1 , m_2 et n , la valeur de p_2 détermine de manière unique la partition $p(m_2 - m_1, n) = 1^{p_1}2^{p_2}3^{p_3}$. Alors,

$$\mathcal{T}(m_1, m_2, n) = \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2, n) \quad (84)$$

et

$$\sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2, n)} = \sum_{\pi \in \mathcal{T}(m_1, m_2, n)} . \quad (85)$$

Soit $\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$, pour $i = 0, 1, 2, \dots, p_3$, un sous-ensemble de $\mathcal{T}(m_1, m_2, n)$ dont les éléments satisfont deux contraintes additionnelles : (i) les dernières i parts de la partition ordonnée sont de longueur 3 et (ii) la $(n - i)$ -ième part de la partition ordonnée est de longueur 1 (voir figure 2). Notons que

$$\mathcal{T}(m_1, m_2, n) = \bigcup_{i=0}^{p_3} \mathcal{T}_i(m_1, m_2, n) \quad (86)$$

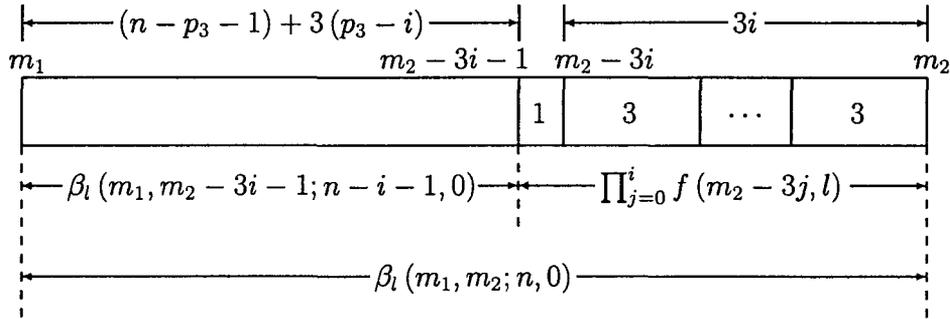


Figure 2 – Représentation graphique des partitions qui sont des éléments de $\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$ et les fonctions de structure qui leur correspondent.

et que les sous-ensembles $\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$ sont disjoints

$$\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n) \cap \mathcal{T}_j(m_1, m_2, n) = \emptyset, \quad \text{pour } i \neq j; \quad (87)$$

par conséquent,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{T}(m_1, m_2, n)} = \sum_{i=0}^{p_3} \sum_{\pi \in \mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)}. \quad (88)$$

En combinant les équations (85) et (88), nous avons la relation entre sommes

$$\sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2, n)} = \sum_{i=0}^{p_3} \sum_{\pi \in \mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)}. \quad (89)$$

Notons aussi qu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$ et les éléments de $\mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2 - 3i - 1, n - i - 1)$ (voir figure 2)

$$\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n) \longleftrightarrow \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2 - 3i - 1, n - i - 1); \quad (90)$$

par conséquent,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)} = \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2 - 3i - 1, n - i - 1)}. \quad (91)$$

La fonction de structure $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$ est donnée, via l'équation (75),

par

$$\beta_l(m_1, m_2; n, 0) = \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)} \prod_{j=1}^n f(s_j, l) \quad (92)$$

et, en raison de l'équation (89), peut être réécrite ainsi :

$$\beta_i(m_1, m_2; n, 0) = \sum_{i=0}^{p_3} \left(\sum_{\pi \in \mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)} \prod_{j=1}^n f(s_j, l) \right). \quad (93)$$

Nous avons

$$\prod_{j=1}^n f(s_j, l) = \left(\prod_{j=1}^{n-i-1} f(s_j, l) \right) \left(\prod_{j=n-i}^n f(s_j, l) \right). \quad (94)$$

Puisque toutes les partitions ordonnées appartenant à l'ensemble $\mathcal{T}_i(m_1, m_2, n)$ ont comme propriété que leurs dernières i parts sont de longueur 3, alors, selon l'équation (41), avec $\delta_j = 3$ pour $n - i + 1 \leq j \leq n$ et $s_{n-i} = m_2 - 3i$, nous avons

$$s_{n-i+j'} = s_{n-i} + 3j' = m_2 - 3(i - j') \quad \text{pour } j' = 1, 2, \dots, i \quad (95)$$

et, conséquemment,

$$\begin{aligned} \prod_{j=n-i}^n f(s_j, l) &= \prod_{j'=0}^i f(s_{n-i+j'}, l) \\ &= \prod_{j'=0}^i f(m_2 - 3(i - j'), l) \\ &= \prod_{j=0}^i f(m_2 - 3j, l). \end{aligned} \quad (96)$$

En combinant les équations (91), (94) et (96), l'équation (93) peut être réécrite

$$\begin{aligned} & \beta_i(m_1, m_2; n, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{p_3} \left(\prod_{j=0}^i f(m_2 - 3j, l) \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2 - 3i - 1, n - i - 1)} \prod_{j=1}^{n-i-1} f(s_j, l) \right). \end{aligned} \quad (97)$$

Mais

$$\begin{aligned} & \sum_{o \in \mathcal{O}_{p_2=0}(m_1, m_2 - 3i - 1, n - i - 1)} \prod_{j=1}^{n-i-1} f(s_j, l) \\ &= \beta_i(m_1, m_2 - 3i - 1; n - i - 1, 0), \end{aligned} \quad (98)$$

par conséquent, l'équation (97) devient

$$\begin{aligned} & \beta_i(m_1, m_2; n, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{p_3} \beta_i(m_1, m_2 - 3i - 1; n - i - 1, 0) \prod_{j=0}^i f(m_2 - 3j, l). \end{aligned} \quad (99)$$

La quatrième cellule de la quatrième rangée du tableau 2 donne une expression pour la longueur d'un intervalle en termes de n , p_2 et p_3 . En choisissant $p_2 = 0$, nous obtenons que la longueur des intervalles pour lesquels la partition en n parts qui appartiennent à $\{1, 3\}$ est possible est $m_2 - m_1 = n + 2p_3$. En insérant

ce résultat dans l'équation (99), nous obtenons

$$\beta_l(m_1, m_1 + n + 2p_3; n, 0) = \sum_{i=0}^{p_3} \beta_l(m_1, m_1 + n + 2p_3 - 3i - 1; n - i - 1, 0) \times \prod_{j=0}^i f(m_1 + n + 2p_3 - 3j, l). \quad (100)$$

Le produit peut être exprimé

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^i f(m_1 + n + 2p_3 - 3j, l) \\ &= \prod_{j=0}^i \frac{1}{(m_1 + n + 2p_3 - 3j)} \prod_{j=0}^i \frac{1}{(m_1 + n + 2p_3 - 3j + 2l + 1)} \\ &= \frac{1}{3^{2(i+1)}} \prod_{j=0}^i \frac{1}{((m_1 + n + 2p_3)/3 - j)} \\ & \quad \times \prod_{j=0}^i \frac{1}{((m_1 + n + 2p_3 + 2l + 1)/3 - j)} \end{aligned} \quad (101)$$

ou dans la notation de Pochhammer

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^i f(m_1 + n + 2p_3 - 3j, l) \\ &= \frac{3^{-2(i+1)}}{[(m_1 + n + 2p_3)/3]^{(i+1)} [(m_1 + n + 2p_3 + 2l + 1)/3]^{(i+1)}}. \end{aligned} \quad (102)$$

En substituant ce resultat dans l'équation (100), nous obtenons finalement que

$$\begin{aligned} & \beta_l(m_1, m_1 + n + 2p_3; n, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{p_3} \frac{3^{-2(i+1)} \beta_l(m_1, m_1 + n + 2p_3 - 3i - 1; n - i - 1, 0)}{[(m_1 + n + 2p_3)/3]^{(i+1)} [(m_1 + n + 2p_3 + 2l + 1)/3]^{(i+1)}}. \end{aligned} \quad (103)$$

L'équation réursive (103) peut alternativement être exprimée comme une équation réursive pour p_1 en utilisant la relation $p_3 = n - p_1$ de manière à obtenir

$$\begin{aligned} & \beta_l(m_1, m_1 + 3n - 2p_1; n, 0) \\ &= \sum_{i=0}^{n-p_1} \frac{3^{-2(i+1)} \beta_l(m_1, m_1 + 3n - 2p_1 - 3i - 1; n - i - 1, 0)}{[(m_1 + 3n - 2p_1)/3]^{(i+1)} [(m_1 + 3n - 2p_1 + 2l + 1)/3]^{(i+1)}}. \end{aligned} \quad (104)$$

Dans l'appendice C, nous évaluons l'expression ci-dessus pour $p_1 = n$ et reproduisons l'équation (80).

3.2.2 Fonctions de structure de la forme $\beta_l(0, m; n, p_2)$

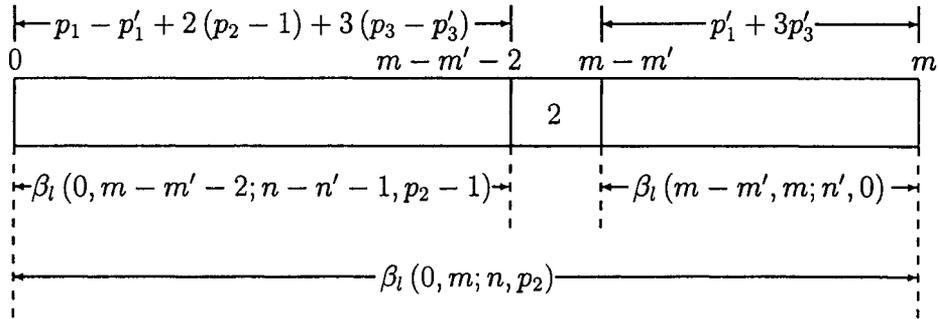


Figure 3 – Représentation graphique des partitions qui sont des éléments de $\mathcal{O}_{p_2-1}(0, m - m' - 2, n - n' - 1)$, de $\mathcal{O}_{p_2=0}(m - m', m, n')$ et de $\mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n)$, ainsi que les fonctions de structure qui leur correspondent.

Dans cette section, nous dérivons une équation réursive pour les fonctions de structure de la forme $\beta_l(0, m; n, p_2)$, évaluées sur les partitions ordonnées de l'intervalle $[0, m]$ en n parts qui appartiennent à $\{1, 2, 3\}$ correspondant à la partition $1^{p_1}2^{p_2}3^{p_3}$.

À cette fin, notons que les fonctions de structure $\beta_l(m_1, m_2; n, p_2)$ sont des fonctions combinatoires (voir les sections 2.3 et 2.4) évaluées sur l'ensemble des partitions ordonnées $\mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)$, avec l'ensemble de parts $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ donné par $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ et les coefficients variables correspondants, $f_{a_i}(m)$ pour $a_i = 1, 2, 3$, donnés par

$$f_1(m) = f_2(m) = f_3(m) = f(m, l), \quad (105)$$

où $f(m, l)$ est donné par l'équation (32). Par conséquent, $\beta_l(m_1, m_2; n, p_2)$ est obtenu de l'ensemble $\mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)$ par un homomorphisme H de $(\mathcal{O}^*, \cup, \otimes)$ vers $(R, +, \times)$, où $*$ indique l'ensemble-puissance (voir la référence [21] section II.C, la référence [23] section III.A ou la référence [24] section 2.2.1)

$$(\mathcal{O}^*, \cup, \otimes) \xrightarrow{H} (R, +, \times). \quad (106)$$

L'équation (92) peut être réécrite

$$\beta_l(m_1, m_2; n, p_2) = H(\mathcal{O}_{p_2}(m_1, m_2, n)). \quad (107)$$

Soit $\mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n)$, l'ensemble des partitions ordonnées de l'intervalle $[0, m]$ en n parts (p_1, p_2, p_3) (avec $p_2 \geq 1$ et $m \geq 2$) qui satisfont les contraintes

suivantes : (i) les dernières n' parts ne sont *pas* de longueur 2, (ii) la $(n - n')$ -ième part est de longueur 2, et (iii) la longueur totale des n' dernières parts est m' . Donc,

$$n' = p'_1 + p'_3 \quad (108)$$

$$m' = p'_1 + 3p'_3, \quad (109)$$

où p'_1 et p'_3 correspondent respectivement aux nombres de parts de longueur 1 et 3 à la droite de la $(n - n')$ -ième part, qui est de longueur 2. Leurs intervalles de valeurs possibles sont $0 \leq p'_1 \leq p_1$ et $0 \leq p'_3 \leq p_3$. Les partitions ordonnées de l'ensemble $\mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n)$ sont présentées à la figure 3.

L'ensemble $\mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n)$ peut s'exprimer comme suit (voir la figure 3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n) &= \mathcal{O}_{p_2-1}(0, m - m' - 2, n - n' - 1) \\ &\otimes \{m - m' - 2, m - m'\} \otimes \mathcal{O}_{p_2=0}(m - m', m, n'). \end{aligned} \quad (110)$$

De plus, l'ensemble de toutes les partitions ordonnées de l'intervalle $[0, m]$ en n parts (p_1, p_2, p_3) (avec $p_2 \geq 1$ et $m \geq 2$) est donné par l'union des ensembles $\mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n)$ sur toutes les valeurs possibles de n' et m' , c'est-à-dire,

$$\mathcal{O}_{p_2}(0, m, n) = \bigcup_{n'} \left(\bigcup_{m'} \mathcal{S}_{p_2}^{n', m'}(0, m, n) \right). \quad (111)$$

En combinant les équations (110) et (111) nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{p_2}(0, m, n) &= \bigcup_{n'} \bigcup_{m'} \mathcal{O}_{p_2-1}(0, m - m' - 2, n - n' - 1) \\ &\quad \otimes \{m - m' - 2, m - m'\} \otimes \mathcal{O}_{p_2=0}(m - m', m, n'). \end{aligned} \quad (112)$$

L'application de l'homomorphisme H à l'équation (112) donne

$$\begin{aligned} H(\mathcal{O}_{p_2 \geq 1}(0, m, n)) &= \sum_{n'} \sum_{m'} H(\mathcal{O}_{p_2-1}(0, m - m' - 2, n - n' - 1)) \\ &\quad \times H(\{m - m' - 2, m - m'\}) H(\mathcal{O}_{p_2=0}(m - m', m, n')), \end{aligned} \quad (113)$$

qui s'évalue à

$$\begin{aligned} \beta_l(0, m; n, p_2) &= \sum_{n'} \sum_{m'} \beta_l(0, m - m' - 2; n - n' - 1, p_2 - 1) \\ &\quad \times f_2(m - m') \beta_l(m - m', m; n', 0) \end{aligned} \quad (114)$$

et qui, en raison de l'équation (105), devient

$$\begin{aligned} \beta_l(0, m; n, p_2) &= \sum_{n'} \sum_{m'} \frac{\beta_l(0, m - m' - 2; n - n' - 1, p_2 - 1)}{(m - m')(m - m' + 2l + 1)} \\ &\quad \times \beta_l(m - m', m; n', 0). \end{aligned} \quad (115)$$

En faisant usage des équations (108) et (109), la double somme sur les valeurs de m' et n' peut être transformée en une double somme sur p'_1 et p'_3 , allant

respectivement de 0 à p_1 et de 0 à p_3 . Et nous obtenons finalement

$$\beta_l(0, m; n, p_2) = \sum_{p'_1=0}^{p_1} \sum_{p'_3=0}^{p_3} \frac{\beta_l(m - p'_1 - 3p'_3, m; p'_1 + p'_3, 0)}{(m - p'_1 - 3p'_3)(m - p'_1 - 3p'_3 + 2l + 1)} \\ \times \beta_l(0, m - p'_1 - 3p'_3 - 2; n - p'_1 - p'_3 - 1, p_2 - 1). \quad (116)$$

4 Les fonctions d'onde

Dans cette section, nous utilisons les résultats de la section précédente pour obtenir les fonctions d'onde du potentiel coulombien-plus-linéaire et nous procédons par la suite au calcul des six premiers coefficients de la série de puissances des fonctions d'onde.

4.1 Expression générale pour les fonctions d'onde

Les fonctions d'onde pour le potentiel coulombien-plus-linéaire sont données par l'équation (2)

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = r^{-1} u_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (117)$$

Les fonctions $u_{nl}(r)$ sont données par l'équation (30), avec $x = (2\mu\kappa/\hbar^2)^{1/3} r$, menant à

$$u_{nl}(r) = r^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} \right)^{(k+l+1)/3} r^k. \quad (118)$$

En substituant l'expression ci-dessus pour $u_{nl}(r)$ dans l'équation (117), en insérant l'expression pour les coefficients b_k (équation (77)) et en remplaçant ρ et t par les équations (8) et (9) respectivement, nous trouvons finalement que les fonctions d'onde pour le potentiel coulombien-plus-linéaire sont données

par

$$\begin{aligned} \psi_{nlm}(\vec{r}) = & \lambda_0 Y_l^m(\theta, \phi) r^l \left(\frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} \right)^{(l+1)/3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^{\lfloor k/3 \rfloor} (-1)^j \sum_{i=0}^{\lfloor (k-3j)/2 \rfloor} (-1)^i \\ & \times \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right)^{k-2j-i} \beta_l(0, k; k-2j-i, i) \kappa^j \alpha^{k-3j-2i} (E_{nl} - V_0)^i r^k. \quad (119) \end{aligned}$$

4.2 Expressions explicites pour les coefficients de la série de puissances

Nous donnons maintenant des expressions pour les six premiers coefficients b_m , pour $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, de la série de puissances. Le calcul d'un coefficient procède de la manière suivante : (i) l'équation (77) est utilisée pour obtenir une expression pour le coefficient b_m en termes de fonctions de structure ; (ii) les équations récursives (104) et (116), obtenues dans la section 3.2, sont utilisées afin de transformer l'expression pour le coefficient en une expression contenant seulement des fonctions de structure fondamentales, c'est-à-dire des fonctions de structure de la forme $\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0)$, $\beta_l(m_1, m_1 + 2n; n, n)$ ou $\beta_l(m_1, m_1 + 3n; n, 0)$ — les limites supérieures des sommes de l'équation (116) sont obtenues en utilisant le tableau 2 ; (iii) les fonctions de structure fondamentales peuvent alors être évaluées en utilisant les équations (80), (82) et (83).

Le coefficient b_0 fut arbitrairement choisi comme étant égal à λ_0 et nous pouvons vérifier que l'équation (77) avec $m = 0$ donne

$$b_0 = \lambda_0 \beta_l(0, 0; 0, 0) = \lambda_0. \quad (120)$$

Les coefficients b_1 à b_6 sont donnés par

$$b_1 = -\lambda_0 \beta_l(0, 1; 1, 0) \rho \quad (121)$$

$$b_2 = \lambda_0 [\beta_l(0, 2; 2, 0) \rho^2 - \beta_l(0, 2; 1, 1) t] \quad (122)$$

$$b_3 = \lambda_0 [-\beta_l(0, 3; 3, 0) \rho^3 + \beta_l(0, 3; 2, 1) \rho t + \beta_l(0, 3; 1, 0)] \quad (123)$$

$$b_4 = \lambda_0 [\beta_l(0, 4; 4, 0) \rho^4 - \beta_l(0, 4; 3, 1) \rho^2 t + \beta_l(0, 4; 2, 2) t^2 - \beta_l(0, 4; 2, 0) \rho] \quad (124)$$

$$b_5 = -\lambda_0 [\beta_l(0, 5; 5, 0) \rho^5 - \beta_l(0, 5; 4, 1) \rho^3 t + \beta_l(0, 5; 3, 2) \rho t^2 - \beta_l(0, 5; 3, 0) \rho^2 + \beta_l(0, 5; 2, 1) t] \quad (125)$$

$$b_6 = \lambda_0 [\beta_l(0, 6; 6, 0) \rho^6 - \beta_l(0, 6; 5, 1) \rho^4 t + \beta_l(0, 6; 4, 2) \rho^2 t^2 - \beta_l(0, 6; 3, 3) t^3 - \beta_l(0, 6; 4, 0) \rho^3 + \beta_l(0, 6; 3, 1) \rho t + \beta_l(0, 6; 2, 0)]. \quad (126)$$

Après l'évaluation des fonctions de structure nous trouvons que

$$b_1 = -\lambda_0 \frac{\rho}{(2l+2)^{[1]}} \quad (127)$$

$$b_2 = \frac{\lambda_0}{2! (2l+2)^{[2]}} [\rho^2 - (2l+2) t] \quad (128)$$

$$b_3 = \frac{\lambda_0}{3! (2l+2)^{[3]}} \left\{ -\rho^3 + [2(2l+3) + (2l+2)] \rho t + 2(2l+2)^{[2]} \right\} \quad (129)$$

$$b_4 = \frac{\lambda_0}{4! (2l+2)^{[4]}} \left\{ \rho^4 - [3(2l+4) + 2(2l+3) + (2l+2)] \rho^2 t \right. \\ \left. + 3(2l+2)(2l+4)t^2 - [2(2l+2)^{[2]} + 6(2l+3)^{[2]}] \rho \right\} \quad (130)$$

$$b_5 = \frac{-\lambda_0}{5! (2l+2)^{[5]}} \left\{ \rho^5 - [4(2l+5) + 3(2l+4) + 2(2l+3) + (2l+2)] \rho^3 t \right. \\ \left. + [8(2l+3)(2l+5) + 4(2l+2)(2l+5) + 3(2l+2)(2l+4)] \rho t^2 \right. \\ \left. - [2(2l+2)^{[2]} + 6(2l+3)^{[2]} + 12(2l+4)^{[2]}] \rho^2 \right. \\ \left. + [8(2l+2)^{[2]}(2l+5) + 12(2l+2)(2l+4)^{[2]}] t \right\} \quad (131)$$

$$b_6 = \frac{\lambda_0}{6! (2l+2)^{[6]}} \left\{ \rho^6 - [5(2l+6) + 4(2l+5) + 3(2l+4) + 2(2l+3) + (2l+2)] \rho^4 t \right. \\ \left. + \{5(2l+6)[3(2l+4) + 2(2l+3) + (2l+2)] + 4(2l+5)[2(2l+3) \right. \\ \left. + (2l+2)] + 3(2l+4)(2l+2)\} \rho^2 t^2 - 15(2l+2)(2l+4)(2l+6)t^3 \right. \\ \left. - [2(2l+2)^{[2]} + 6(2l+3)^{[2]} + 12(2l+4)^{[2]} + 20(2l+5)^{[2]}] \rho^3 \right. \\ \left. + \left\{ 5(2l+6) [2(2l+2)^{[2]} + 6(2l+3)^{[2]}] + 8(2l+2)^{[2]}(2l+5) \right. \right. \\ \left. \left. + 12(2l+2)(2l+4)^{[2]} + 20[(2l+2) + 2(2l+3)](2l+5)^{[2]} \right\} \rho t \right. \\ \left. + 40(2l+2)^{[2]}(2l+5)^{[2]} \right\}. \quad (132)$$

Nous avons vérifié la validité de ces expressions en répétant le calcul des coefficients à l'aide du logiciel Mathematica via deux méthodes : tout d'abord en utilisant les fonctions de structure et puis par l'application successive de l'équation récursive. Le fichier Mathematica est donné à l'appendice D.

5 Conclusion

Nous avons résolu l'équation de Schrödinger pour un système quark-antiquark interagissant via un potentiel coulombien-plus-linéaire. La solution en série a fait intervenir une équation récursive à quatre termes reliant les coefficients du développement en série de puissances des fonctions d'onde. La solution de cette équation récursive a été obtenue en termes de *fonctions combinatoires* qui ont été plus tard réduites à des *fonctions de structure*.

Nous aurions pu procéder en supposant une solution de la forme $u(r) = \exp[-\gamma r^\delta] \phi(r)$ cependant l'emploi de cette forme n'est pas plus avantageuse que la forme générale. En effet, une dérivation similaire à celle effectuée dans les sections 2.1 et 2.2 pour une solution de cette forme conduit aussi à une équation récursive à quatre termes pour les coefficients du développement de $\phi(r)$ ³. Il est cependant intéressant de noter qu'il est possible d'obtenir une équation récursive à trois termes pour le potentiel $V(r) = -a/r + br + cr^2$, apparemment plus complexe, en supposant une solution donnée par $u(r) = \exp[-\frac{1}{2}\gamma_1 r - \gamma_2 r^2] \phi(r)$ (voir par exemple Chaudhuri [25]).

Dans la limite où le couplage linéaire tend vers zéro ($\kappa \rightarrow 0$) nous nous attendons à ce que les coefficients obtenus tendent vers les coefficients du développement en série des fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène. Il est évident que cette limite est délicate à effectuer si l'on regarde l'expression pour la fonction d'onde (équation (119)). Tout d'abord, mentionnons que la présence de la constante de couplage κ dans le facteur $\kappa^{(l+1)/3}$ n'est dû qu'à notre choix pour la forme de la variable x et pourrait être éliminée en redéfinissant la

³Chaudhuri *et al.* ont abordé le problème de cette manière dans la référence [15].

constante a de manière à ce qu'elle ne contienne pas κ et en définissant une nouvelle constante de couplage sans dimension pour le terme linéaire et une pour le terme coulombien.

La présence de κ dans le facteur κ^j est par contre plus instructive. En effet, le seul terme de la somme sur j qui survit à la limite $\kappa \rightarrow 0$ est le terme $j = 0$, ce qui indique que les seules partitions acceptables sont celles pour lesquelles le nombre de parts de longueur trois est égal à zéro. Ceci implique que l'équation récursive à quatre termes avec $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ se transforme en une équation récursive à trois termes avec $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ lorsque le terme linéaire du potentiel disparaît. Notons de plus que lorsque seul le terme $j = 0$ de l'équation (119) survit, les coefficients du développement en série de la fonction d'onde comporte des fonctions de structure du type $\beta_l(0, m; k - i, i)$. La difficulté réside alors dans le fait qu'il est nécessaire de prouver que la somme (infinie) de ces fonctions de structure est essentiellement égale au produit d'une exponentielle et d'un polynôme de Laguerre, un exercice que nous avons débuté mais qui s'est révélé être passablement difficile. Nous avons par contre vérifié explicitement pour les vingt premiers coefficients que ceux que l'on obtient via le processus de limite sont les mêmes que ceux de la fonction d'onde de l'atome d'hydrogène.

Le présent travail sur les fonctions d'onde de l'équation de Schrödinger pour le potentiel coulombien-plus-linéaire met en place le cadre mathématique nécessaire à la formulation et à la résolution de l'équation aux valeurs propres correspondante. La technique qui serait utilisée pour calculer le spectre du potentiel coulombien-plus-linéaire dans l'approche présentée ici serait analogue

à celle développée dans la référence [18]. Dans le cadre de cette technique, la condition de normalisabilité de la fonction d'onde se transforme en l'exigence que le comportement asymptotique des coefficients du développement de la fonction d'onde tende vers le comportement des coefficients du développement de la solution normalisable de la forme asymptotique de l'équation de Schrödinger. L'équation aux valeurs propres est alors obtenue en reliant cette condition sur les coefficients de la fonction d'onde aux conditions de frontière grâce à une équation récursive inverse. Le formalisme permettant de résoudre les équations récursives est étendu de manière à permettre la résolution d'équations récursives inverses en termes de fonctions combinatoires dites conjuguées. L'équation aux valeurs propres prend la forme d'un polynôme en t , la variable sans dimension correspondant à l'énergie, d'ordre infini et où les valeurs propres correspondent aux zéros de ce polynôme. Nous avons fait un travail exploratoire de ce problème et il semble que la même technique puisse être employée pour obtenir l'équation aux valeurs propres pour le potentiel coulombien-plus-linéaire.

Bibliographie

- [1] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, J. Kogut, K. D. Lane et T.-M. Yan, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 369 (1975).
- [2] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane et T.-M. Yan, *Phys. Rev. D* **17**, 3090 (1978).
- [3] C. Quigg et J. L. Rosner, *Phys. Rep.* **56**, 167 (1979).
- [4] M. Chaichian et R. Kögerler, *Ann. Phys.* **124**, 61 (1980).
- [5] A. A. Bykov, I. M. Dremin et A. V. Leonidov, *Sov. Phys. Usp.* **27**, 321 (1984).
- [6] C. H. Mehta et S. H. Patil, *Phys. Rev. A* **17**, 34 (1978).
- [7] J. Killingbeck, *Phys. Lett. A* **65**, 87 (1978).
- [8] E. J. Austin, *Mol. Phys.* **40**, 893 (1980).
- [9] C. S. Lai et W. C. Lin, *Can. J. Phys.* **59**, 733 (1981).
- [10] M. Seetharaman, Sekhar Raghavan et S. S. Vasana, *J. Phys. A* **16**, 455 (1983).
- [11] Bo Thidé et Staffan Linnaeus, *Ann. Phys.* **164**, 495 (1985).
- [12] F. Brau, *Phys. Rev. D* **62**, 014005 (2000).
- [13] S. C. Chhajlany et D. A. Letov, *Phys. Rev. A* **44**, 4725 (1991).
- [14] R. P. Saxena et V. S. Varma, *J. Phys. A* **15**, L149 (1982).
- [15] R. N. Chaudhuri, M. Tater et M. Znojil, *J. Phys. A* **20**, 1401 (1987).
- [16] Lewis P. Fulcher, Zheng Chen et K. C. Yeong, *Phys. Rev. D* **47**, 4122 (1993).

- [17] Adel F. Antippa et Alain J. Phares, *J. Math. Phys.* **18**, 173 (1977).
- [18] Adel F. Antippa et Alain J. Phares, *J. Math. Phys.* **19**, 308 (1978).
- [19] Adel F. Antippa et Nguyen Ky Toan, *Can. J. Phys.* **57**, 417 (1979).
- [20] Barry Spain et M. G. Smith, *Functions of Mathematical Physics*, pages 1–19, Van Nostrand, London, 1970.
- [21] Adel F. Antippa, *J. Math. Phys.* **18**, 2214 (1977).
- [22] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and its Application*, page 277, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [23] Adel F. Antippa et Nguyen Ky Toan, *J. Math. Phys.* **20**, 2375 (1979).
- [24] Adel F. Antippa, *J. Differ. Equations Appl.* **8**, 255 (2002).
- [25] R. N. Chaudhuri, *J. Phys. A* **16**, 209 (1983).

A Méthodologie

A.1 Introduction

Le but cet appendice est de présenter une méthode générale de résolution d'équations récursives lineaires homogènes introduite par Antippa et Phares dans l'article *General formalism solving linear recursion relations* [17]. Les équations récursives sont un type d'équations où la valeur de la solution pour un certain point est donnée en termes des valeurs pour d'autres points. Les problèmes où une variable prend un ensemble discret de valeurs et où n'est connu que la variation de cette variable peuvent souvent s'exprimer grâce à une équation récursive. La résolution d'une équation différentielle en série de puissances donne aussi lieu à une équation récursive reliant les coefficients du développement en série de la solution.

Les méthodes traditionnelles offrent une méthode générale de solution pour les équations récursives à coefficients constants et pour les équations récursives à coefficients variables à deux termes. Dans les autres cas, la technique usuelle est d'observer le comportement des premiers termes de la solution, de deviner la forme de la solution et de la prouver par induction. La méthode présentée permet de résoudre des équations récursives lineaires homogènes à plusieurs termes à coefficients variables. Les solutions sont obtenues en termes de fonctions particulières appelées fonctions combinatoires reliées à la partition d'intervalles en parts.

L'appendice est divisée en trois parties : la partition d'intervalles, les fonctions combinatoires et finalement l'utilisation des fonctions combinatoires

dans la résolution d'équation récursives.

A.2 Partitions

A.2.1 Terminologie

Commençons d'abord par présenter la terminologie et la notation qui sera utilisée dans la description des partitions d'intervalles. La partition d'un intervalle correspond à la décomposition de celui-ci en une somme de sous-intervalles de longueurs données où l'ordre des sous-intervalles est important. Les sous-intervalles sont appelés *parts* de la partition.

Définissons \mathcal{A} , l'ensemble contenant les parts disponibles pour construire les partitions comme

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \quad (133)$$

où les parts a_i obéissent à la contrainte

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N, \quad (134)$$

c'est-à-dire qu'il n'existe aucune part de longueur nulle et que la part a_{i+1} est toujours plus grande que la part a_i . Il existe une partition de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts si le système de deux équations

$$\sum_{i=1}^N a_i p_i = m_2 - m_1 \quad (135)$$

$$\sum_{i=1}^N p_i = n \quad (136)$$

possède une solution entière pour les p_i , où p_i correspond au nombre de parts a_i . Dans le cas particulier où l'intervalle est de longueur nulle ($m_1 = m_2$) alors la solution triviale $p_i = 0$ pour tout i satisfait au système d'équations, c'est-à-dire qu'un intervalle de longueur nulle peut être partitionné en zéro parts.

Le n -tuplet (p_1, p_2, \dots, p_n) correspondant à une solution du système est appelé la distribution de parts de la partition. Les parts d'une partition sont dénotées δ_i , où $\delta_i \in \mathcal{A}$, et une partition est représentée par $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$. Plusieurs partitions différentes peuvent être obtenues de la même distribution de parts en interchangeant les δ_i de position. Puisque le système d'équations ne dépend que de la longueur de l'intervalle ($m_2 - m_1$), alors une partition de l'intervalle $[m_1, m_2]$ est aussi une partition de l'intervalle $[m_1 + m_0, m_2 + m_0]$ où $m_0 \geq -m_1$.

A.2.2 Longueur d'intervalle, nombre de parts et parts utilisées

L'ensemble \mathcal{M} est défini comme l'ensemble contenant toutes les longueurs d'intervalles pouvant être partitionnées en un nombre quelconque de parts appartenant à \mathcal{A} . Par exemple, dans le cas où les parts disponibles pour les partitions sont $\mathcal{A} = \{2, 3, 5\}$, l'ensemble \mathcal{M} est donné par l'ensemble de tous les entiers supérieurs à deux, $\mathcal{M} = \{2, 3, 4, \dots\}$, car toutes ces longueurs d'intervalles peuvent être partitionnées avec les parts disponibles. Le tableau 3 contient les partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$.

L'ensemble $\mathcal{N}(M)$ est défini comme l'ensemble des valeurs possibles du nombre de parts des partitions d'un intervalle de longueur M . Dans le cas des partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts de $\{2, 3, 5\}$, l'ensemble $\mathcal{N}(7)$ est donné

M	n	q				
			8 10 15			
7	2	1	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 40px; text-align: center;">5</td></tr></table>	2	5	
2	5					
			8 13 15			
7	2	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 40px; text-align: center;">5</td><td style="width: 20px; text-align: center;">5</td></tr></table>	5	5	
5	5					
			8 10 12 15			
7	3	1	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; text-align: center;">3</td></tr></table>	2	2	3
2	2	3				
			8 10 13 15			
7	3	2	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; text-align: center;">3</td><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td></tr></table>	2	3	2
2	3	2				
			8 11 13 15			
7	3	3	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="width: 20px; text-align: center;">3</td><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td><td style="width: 20px; text-align: center;">2</td></tr></table>	3	2	2
3	2	2				

Tableau 3 – Les partitions de l’intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$.

par $\mathcal{N}(7) = \{2, 3\}$ puisqu’il est possible de partitionner cet intervalle en deux ou en trois parts.

Deux autres ensembles importants, sous-ensembles de \mathcal{A} , sont définis. Ils sont reliés aux partitions d’un intervalle de longueur M en n parts. L’ensemble $\mathcal{A}'(M, n)$ est le sous-ensemble de \mathcal{A} contenant les éléments utilisés pour partitionner un intervalle de longueur M en n parts et $\mathcal{A}''(M, n)$ est le sous-ensemble de \mathcal{A} contenant les éléments non-utilisés. Dans le cas de l’exemple précédent, $\mathcal{A}'(7, 2) = \{2, 5\}$ et $\mathcal{A}''(7, 2) = \{3\}$ puisque les parts de longueur deux et cinq sont utilisées pour les partitions d’un intervalle de longueur sept en deux parts et la part de longueur trois n’est pas utilisée.

A.2.3 Parts et points

Le vecteur $\Delta_{nq}(M)$ est défini comme le n -tuplet ordonné des parts de la q -ième partition d’un intervalle de longueur M en n parts appartenant à \mathcal{A} ,

c'est-à-dire que

$$\Delta_{nq}(M) = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n). \quad (137)$$

Les points où se terminent les parts d'une partition de $[m_1, m_2]$ sont notés s_j

$$s_0 = m_1, \quad s_j = m_1 + \sum_{i=1}^j \delta_i, \quad s_n = m_2. \quad (138)$$

Le vecteur $\mathbf{S}_{nq}(m_1, m_2)$ associé à la q -ième partition de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts est formé des points où se terminent les parts et est donné par

$$\mathbf{S}_{nq}(m_1, m_2) = (s_0, s_1, \dots, s_n). \quad (139)$$

Le tableau 4 présente les vecteurs associés aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$.

$\Delta_{nq}(M)$	$\mathbf{S}_{nq}(m_1, m_2)$
$\Delta_{21}(7) = (2, 5)$	$\mathbf{S}_{21}(8, 15) = (8, 10, 15)$
$\Delta_{22}(7) = (5, 2)$	$\mathbf{S}_{22}(8, 15) = (8, 13, 15)$
$\Delta_{31}(7) = (2, 2, 3)$	$\mathbf{S}_{31}(8, 15) = (8, 10, 12, 15)$
$\Delta_{32}(7) = (2, 3, 2)$	$\mathbf{S}_{32}(8, 15) = (8, 10, 13, 15)$
$\Delta_{33}(7) = (3, 2, 2)$	$\mathbf{S}_{33}(8, 15) = (8, 11, 13, 15)$

Tableau 4 – Les vecteurs $\Delta_{nq}(M)$ et $\mathbf{S}_{nq}(m_1, m_2)$ associés aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$.

L'ensemble $\mathcal{D}(M, n)$ est l'ensemble de tous les vecteurs $\Delta_{nq}(M)$ correspondant aux partitions d'un intervalle de longueur M en n parts et est donné par

$$\mathcal{D}(M, n) = \{\Delta_{n1}(M), \Delta_{n2}(M), \dots, \Delta_{nq_{\max}}(M)\}. \quad (140)$$

où q_{\max} est le nombre total de partitions d'un intervalle de longueur M en n parts. Dans le cas des partitions de $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$, les deux ensembles $\mathcal{D}(7, 2)$ et $\mathcal{D}(7, 3)$ sont donnés par

$$\mathcal{D}(7, 2) = \{\Delta_{21}(7), \Delta_{22}(7)\} \quad (141)$$

$$\mathcal{D}(7, 3) = \{\Delta_{31}(7), \Delta_{32}(7), \Delta_{33}(7)\}. \quad (142)$$

L'ensemble $\bar{\mathcal{D}}(M)$ est défini comme l'ensemble des vecteurs $\Delta_{nq}(M)$ correspondant à toutes les partitions d'un intervalle de longueur M et est donné par l'union des ensembles $\mathcal{D}(M, n)$ sur toutes les valeurs possibles de n , donc pour tout $n \in \mathcal{N}(M)$. Dans le cas de l'exemple précédent, puisque $\mathcal{N}(7) = \{2, 3\}$, alors

$$\bar{\mathcal{D}}(7) = \mathcal{D}(7, 2) \cup \mathcal{D}(7, 3) \quad (143)$$

$$= \{\Delta_{21}(7), \Delta_{22}(7), \Delta_{31}(7), \Delta_{32}(7), \Delta_{33}(7)\}. \quad (144)$$

L'ensemble $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ est défini comme l'ensemble des vecteurs $\Delta_{nq}(M)$ correspondant aux partitions d'un intervalle de longueur M en n parts ayant comme α -ième part la part a_k . Dans le cas des partitions de $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$ nous avons par exemple que l'ensemble des vecteurs ayant comme deuxième composante la part $a_1 = 2$ est donné par

$$\mathcal{D}_{a_1}^2(7, 3) = \{\Delta_{31}(7), \Delta_{33}(7)\}. \quad (145)$$

A.2.4 Lemmes sur les partitions

Dans cette section, nous allons reprendre les quatres lemmes présentés dans la section C. de [17] et donner une preuve un peu moins formelle mais plus facile à lire pour chacun d'eux.

Lemme 1. *Pour toute part $a_k \in \mathcal{A}'(M, n)$ il existe au moins une partition ayant comme α -ième part la part a_k .*

Preuve. L'ensemble $\mathcal{A}'(M, n)$ est défini comme l'ensemble de toutes les parts utilisées dans la partition d'un intervalle de longueur M en n parts. Il existe donc au moins une partition q pour laquelle $\delta_i = a_k$, c'est-à-dire une partition dont la i -ième part est a_k . Nous pouvons donc obtenir une partition q' à partir de la partition q en échangeant la i -ième part (a_k) avec la α -ième part. La partition q' a alors comme α -ième part la part a_k . \square

Lemme 2. *L'ensemble des partitions d'un intervalle de longueur M en n parts peut être séparé en un nombre donné de sous-ensembles disjoints non-vides en correspondance biunivoque avec les éléments de $\mathcal{A}'(M, n)$.*

Preuve. Considérons un vecteur $\Delta_{nq}(M)$ de l'ensemble $\mathcal{D}(M, n)$. Puisque ce vecteur est composé de parts appartenant à $\mathcal{A}'(M, n)$, alors la α -ième composante du vecteur appartient nécessairement à $\mathcal{A}'(M, n)$. Si la α -ième composante du vecteur est a_k , alors le vecteur $\Delta_{nq}(M)$ est élément de l'ensemble $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$. Les ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ sont non-vides puisque selon le lemme 1, pour chaque élément de a_k , il existe au moins une partition, et donc un vecteur, ayant comme α -ième part la part a_k .

Les ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ et $\mathcal{D}_{a_{k'}}^\alpha(M, n)$ sont disjoints puisque les parts disponibles pour les partitions sont distinctes et qu'il est alors impossible qu'un vecteur ait à la fois la part a_k et la part $a_{k'}$ comme α -ième composante.

L'ensemble $\mathcal{D}(M, n)$ peut être séparé en sous-ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ car tout vecteur de $\mathcal{D}(M, n)$ est composé de parts appartenant à $\mathcal{A}'(M, n)$ et la α -ième composante de ces vecteur appartient aussi à $\mathcal{A}'(M, n)$ et donc tous les vecteurs de $\mathcal{D}(M, n)$ peuvent être classés dans les ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ pour tout $a_k \in \mathcal{A}'(M, n)$.

Finalement, la correspondance entre les éléments a_k de $\mathcal{A}'(M, n)$ et les sous-ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ est biunivoque puisque : les ensembles sont disjoints, à un élément a_k correspond un et un seul ensemble, et à un ensemble correspond un et un seul élément a_k . Comme l'ensemble des partitions d'un intervalle de longueur M en n parts est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{D}(M, n)$ de tous les vecteurs $\Delta_{nq}(M)$ correspondant à ces partitions alors les résultats obtenus sont valides pour l'ensemble des partitions d'un intervalle de longueur M en n parts. \square

Lemme 3. *Il existe une correspondance biunivoque entre les partitions d'un intervalle de longueur M en n parts ayant comme α -ième part la part a_k et les partitions d'un intervalle de longueur $M - a_k$ en $n - 1$ parts.*

Preuve. À une partition q d'un intervalle de longueur M en n parts ayant comme α -ième part la part a_k est associé le vecteur $\Delta_{nq}(M)$ ayant comme α -ième composante la part a_k . Ce vecteur est élément de $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$. Le vecteur $\Delta_{n-1, q'}(M - a_k)$ correspond au vecteur $\Delta_{nq}(M)$ duquel a été enlevé la α -ième composante. Par définition, le vecteur $\Delta_{n-1, q'}(M - a_k)$ correspond à une partition d'un intervalle de longueur $M - a_k$ en $n - 1$ parts. Puisque deux

vecteurs de l'ensemble $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ diffèrent au minimum par deux composantes autres que la α -ième, alors à deux partitions différentes d'un intervalle de longueur M en n parts ayant comme α -ième part la part a_k correspond deux partitions différentes d'un intervalle de longueur $M - a_k$ en $n - 1$ parts.

Inversement, à une partition d'un intervalle de longueur $M - a_k$ en $n - 1$ parts est associé un vecteur $\Delta_{n-1, q''}(M - a_k)$ auquel on peut ajouter la part a_k comme α -ième composante pour obtenir le vecteur $\Delta_{n, q}(M)$ ayant comme α -ième composante la part a_k . Le vecteur $\Delta_{n, q}(M)$ correspond alors à une partition d'un intervalle de longueur M en n parts ayant comme α -ième part la part a_k . Puisque le vecteur $\Delta_{n-1, q''}(M - a_k)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}(M - a_k, n - 1)$ et que deux vecteurs de cet ensemble diffèrent d'au moins deux composantes alors à deux partitions différentes d'un intervalle de longueur $M - a_k$ en $n - 1$ parts correspondent nécessairement deux partitions différentes d'un intervalle de longueur M en n parts ayant comme α -ième part la part a_k et la correspondance est donc biunivoque. \square

Lemme 4. *Un intervalle de longueur $M - a_k$ peut être partitionné en $n - 1$ parts si et seulement si un intervalle de longueur M peut être partitionné en n parts et $a_k \in \mathcal{A}'(M, n)$.*

Preuve. Selon le lemme 2, l'ensemble des partitions d'un intervalle de longueur M en n parts peut être séparé en sous-ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(M, n)$ en correspondance biunivoque avec les éléments a_k de $\mathcal{A}'(M, n)$. À chacune des partitions de ces sous-ensembles, selon le lemme 3, est en correspondance biunivoque une partition d'un intervalle de longueur $M - a_k$ en $n - 1$ parts. Puisque la correspondance est biunivoque, alors à toutes les partition d'un intervalle de longueur

$M - a_k$ en $n - 1$ parts correspond une partition d'un intervalle de longueur M en n parts. \square

A.2.5 Représentation fonctionnelle

La q -ième partition d'un intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts possède une représentation fonctionnelle définie à l'aide du vecteur $\Delta_{nq}(m_2 - m_1)$, du vecteur $S_{nq}(m_1, m_2)$ et de N fonctions arbitraires de m notées $f_{a_k}(m)$ associées aux N parts disponibles pour la partition. La fonctionnelle associée à la q -ième partition d'un intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts est donnée par

$$F_n^q(m_1, m_2) = \begin{cases} \prod_{i=0}^n f_{\delta_i}(s_i) & \text{pour } n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1) \\ 0 & \text{pour } n \notin \mathcal{N}(m_2 - m_1) \end{cases} \quad (146)$$

où δ_i est la i -ième composante de $\Delta_{nq}(m_2 - m_1)$ et s_i la i -ième composante de $S_{nq}(m_1, m_2)$ et où $\delta_0 \equiv 0$ et $f_0(m) \equiv 1$. Dans le cas particulier de la partition d'un intervalle de longueur nulle en zéro parts il n'existe qu'une partition possible, alors $q_{\max} = 1$, et la représentation fonctionnelle de la partition est

$$F_0^1(m_1, m_1) = 1. \quad (147)$$

Les fonctionnelles associées aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\mathcal{A} = \{2, 3, 5\}$ sont présentées au tableau 5.

n	q	$F_n^q(m_1, m_2)$
2	1	$F_2^1(8, 15) = f_2(10) f_5(15)$
2	2	$F_2^2(8, 15) = f_5(13) f_2(15)$
3	1	$F_3^1(8, 15) = f_2(10) f_2(12) f_3(15)$
3	2	$F_3^2(8, 15) = f_2(10) f_3(13) f_2(15)$
3	3	$F_3^3(8, 15) = f_3(11) f_2(13) f_2(15)$

Tableau 5 – Les fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$ associées aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$.

A.3 Fonctions combinatoires

Les fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$ associées aux partitions d'un intervalle en parts servent à définir les fonctions combinatoires sur cet intervalle. Ces fonctions sont appelées fonctions combinatoires dans le but de faire ressortir la manière combinatoire selon laquelle elles sont construites. Il existe deux types particuliers de fonctions combinatoires, les fonctions combinatoires spéciales et les fonctions combinatoires contraintes.

A.3.1 Fonctions combinatoires spéciales

La fonction combinatoire spéciale de première espèce est définie par la somme sur toutes les partitions d'un intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts appartenant à \mathcal{A} des fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$ associées à ces partitions, c'est-à-dire que

$$C_1(m_1, m_2, n) = \sum_{q=0}^{q_{\max}} F_n^q(m_1, m_2). \quad (148)$$

La fonction combinatoire spéciale de seconde espèce est définie par la somme sur toutes les partitions d'un intervalle $[m_1, m_2]$ en un nombre quelconque de

parts appartenant à \mathcal{A} des fonctionnelles $F_n^q(m_1, m_2)$ associées à ces partitions. La somme sur toutes les partitions peut être convertie en double somme, une sur le nombre de parts et une sur les partitions en un nombre donné de parts. Puisque l'ensemble des valeurs possibles du nombre de parts des partitions d'un intervalle de longueur M est donné par $\mathcal{N}(M)$ alors les valeurs possibles du nombre de parts pour toutes les partitions d'un intervalle $[m_1, m_2]$ sont celles de l'ensemble $\mathcal{N}(m_2 - m_1)$ et la fonction combinatoire spéciale de seconde espèce est donnée par

$$C_2(m_1, m_2) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} \sum_{q=0}^{q_{\max}} F_n^q(m_1, m_2). \quad (149)$$

Manifestement, il est aussi possible de définir la fonction combinatoire spéciale de seconde espèce comme la somme sur les valeurs du nombre de parts des partitions de $[m_1, m_2]$ des fonctions combinatoires spéciales de première espèce associées aux partitions en n parts de cet intervalle, c'est-à-dire que

$$C_2(m_1, m_2) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} C_1(m_1, m_2, n). \quad (150)$$

A.3.2 Fonctions combinatoires contraintes

Dans la section précédente, les fonctions combinatoires spéciales ont été construites en effectuant la somme sur les représentations fonctionnelles des partitions possibles d'un intervalle $[m_1, m_2]$. Dans le cas des fonctions combinatoires spéciales de première espèce, l'ensemble des partitions sur lequel la

$C_1(m_1, m_2, n)$
$C_1(8, 15, n) = 0$ pour $n \notin \mathcal{N}(7)$
$C_1(8, 15, 2) = F_2^1(8, 15) + F_2^2(8, 15)$
$C_1(8, 15, 3) = F_3^1(8, 15) + F_3^2(8, 15) + F_3^3(8, 15)$
$C_2(m_1, m_2)$
$C_2(8, 15) = C_1(8, 15, 2) + C_1(8, 15, 3)$

Tableau 6 – Les fonctions combinatoires spéciales associées aux partitions de l'intervalle $[8, 15]$ en parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$.

somme est effectuée est l'ensemble des partitions de $[m_1, m_2]$ en n parts et dans le cas des fonctions combinatoires spéciales de deuxième espèce il s'agit de l'ensemble des partitions de $[m_1, m_2]$. En général, il est possible de sommer les représentations fonctionnelles d'un ensemble particulier de partitions et d'obtenir une fonction combinatoire associée à cet ensemble. Les fonctions combinatoires contraintes correspondent à des sommes de représentations fonctionnelles de partitions appartenant à des ensemble qui comporte des contraintes sur leurs éléments.

L'ensemble $\mathcal{Q}_\alpha(m_2 - m_1, n, d)$ est l'ensemble des valeurs de q qui correspondent à des partitions de l'intervalle $[m_1, m_2]$ en n parts pour lesquelles la α -ième part est plus grande que d . La fonction combinatoire $C_1^\alpha(m_1, m_2, n, d)$ donnée par la somme des représentations fonctionnelles des partitions identifiées par les valeurs de q de l'ensemble $\mathcal{Q}_\alpha(m_2 - m_1, n, d)$ est appelée fonction combinatoire contrainte de première espèce et

$$C_1^\alpha(m_1, m_2, n, d) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_\alpha(m_2 - m_1, n, d)} F_n^q(m_1, m_2). \quad (151)$$

L'ensemble des valeurs de q qui correspondent à des partitions de l'intervalle

$[m_1, m_2]$ en un nombre quelconque de parts pour lesquelles la première part est plus grande que d correspond à l'union des ensembles $\mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d)$ sur toutes les valeurs de n possibles, donc à

$$\bigcup_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} \mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d). \quad (152)$$

La fonction combinatoire $\bar{C}_2(m_1, m_2, d)$ donnée par la somme des représentations fonctionnelles des partitions identifiées par les valeurs de q de cet ensemble est appelée fonction combinatoire contrainte de seconde espèce et

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, d) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} \sum_{q \in \mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d)} F_n^q(m_1, m_2). \quad (153)$$

Dans le cas des partition de l'intervalle $[8, 15]$ en n parts appartenant à $\{2, 3, 5\}$, les ensembles $\mathcal{Q}_1(7, n, d)$ sont donnés par

$$\mathcal{Q}_1(7, 2, d) = \begin{cases} \{1, 2\} & \text{pour } d = 0, 1 \\ \{2\} & \text{pour } 2 \leq d \leq 4 \\ \emptyset & \text{pour } d \geq 5 \end{cases} \quad (154)$$

$$\mathcal{Q}_1(7, 3, d) = \begin{cases} \{1, 2, 3\} & \text{pour } d = 0, 1 \\ \{3\} & \text{pour } d = 2 \\ \emptyset & \text{pour } d \geq 3 \end{cases} \quad (155)$$

La fonction combinatoire contrainte de seconde espèce, par sa définition, est

reliée à la fonction combinatoire contrainte de première espèce par

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, d) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} C_1^1(m_1, m_2, n, d). \quad (156)$$

A.3.3 Quelques propriétés

Dans les sections précédentes, nous avons vu qu'une fonction combinatoire est toujours définie comme la somme des représentations fonctionnelles d'un certain ensemble de partitions d'un intervalle. Cette définition commune entraîne que les fonctions combinatoires partagent certaines propriétés et que certaines fonctions combinatoires se réduisent à d'autres dans certaines conditions.

La fonction combinatoire spéciale de seconde espèce est donnée par

$$C_2(m_1, m_2) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} C_1(m_1, m_2, n). \quad (157)$$

Dans le cas d'un intervalle de longueur nulle, $\mathcal{N}(0) = \{0\}$, c'est-à-dire que la seule partition possible est la partition en zéro parts,

$$C_2(m_1, m_1) = C_1(m_1, m_1, 0) \quad (158)$$

$$= \sum_{q=0}^1 F_0^q(m_1, m_1) \quad (159)$$

$$= F_0^0(m_1, m_1) + F_0^1(m_1, m_1) \quad (160)$$

$$= 1. \quad (161)$$

Dans le cas où il n'existe aucune partition de l'intervalle $[m_1, m_2]$, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{N}(m_2 - m_1) = \emptyset$,

$$C_2(m_1, m_2) = 0 \quad \text{pour } \mathcal{N}(m_2 - m_1) = \emptyset. \quad (162)$$

La fonction combinatoire spéciale de première espèce possède aussi un cas similaire, lorsque $n \notin \mathcal{N}(m_2 - m_1)$ et donc que $q_{\max} = 0$, et donne

$$C_1(m_1, m_2, n) = F_n^0(m_1, m_2) = 0 \quad \text{pour } n \notin \mathcal{N}(m_2 - m_1). \quad (163)$$

De la même manière, pour la fonction combinatoire contrainte de seconde espèce donnée par

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, d) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1)} C_1^1(m_1, m_2, n, d), \quad (164)$$

nous avons que pour un intervalle de longueur nulle

$$\bar{C}_2(m_1, m_1, d) = C_1^1(m_1, m_1, 0, d) \quad (165)$$

$$= \sum_{q=0}^1 F_0^q(m_1, m_1) \quad (166)$$

$$= F_0^0(m_1, m_1) + F_0^1(m_1, m_1) \quad (167)$$

$$= 1. \quad (168)$$

Dans le cas où il n'existe aucune partition de l'intervalle $[m_1, m_2]$ qui satisfait la contrainte, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d) = \emptyset$ pour $n \in$

$$\mathcal{N}(m_2 - m_1),$$

$$\bar{C}_2(m_1, m_2, d) = 0, \quad \mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d) = \emptyset \text{ pour } n \in \mathcal{N}(m_2 - m_1). \quad (169)$$

La fonction combinatoire contrainte de première espèce possède aussi un cas similaire, lorsque $\mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d) = \emptyset$ et donc que $q_{\max} = 0$, et donne

$$C_1^\alpha(m_1, m_2, n, d) = F_n^0(m_1, m_2) = 0, \quad \mathcal{Q}_1(m_2 - m_1, n, d) = \emptyset. \quad (170)$$

A.3.4 Relations récursives

Dans cette section nous allons reprendre en détail la dérivation de deux des quatre théorèmes fondamentaux liés aux fonctions combinatoires, les relations récursives des fonctions combinatoires contraintes de première et de seconde espèce.

Fonctions combinatoires contraintes de première espèce

Théorème 1. *Soit un intervalle $[j, m]$, avec $j \leq j_0$, et un ensemble \mathcal{A} de parts disponibles pour partitionner l'intervalle, alors*

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j) \quad (171)$$

pour $m > j_0$ et $n \geq 1$.

Preuve. Dans le cas de la partition d'un intervalle de longueur M en n parts, l'ensemble \mathcal{A} peut être divisé en deux sous-ensembles, $\mathcal{A}'(M, n)$ et $\mathcal{A}''(M, n)$.

La somme sur les éléments a_k de \mathcal{A} peut donc être séparée en deux sommes

$$\begin{aligned} C_1^1(j, m, n, j_0 - j) &= \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j) \\ &+ \sum_{a_k \in \mathcal{A}''(m-j, n)} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j). \end{aligned} \quad (172)$$

Selon le lemme 4 la partition d'un intervalle de longueur $m - j - a_k$ en $n - 1$ parts existe si et seulement si la partition d'un intervalle de longueur $m - j$ en n parts existe et $a_k \in \mathcal{A}'(m - j, n)$. Puisque par définition, l'ensemble $\mathcal{A}''(m - j, n)$ contient les éléments inutilisés dans les partitions d'un intervalle de longueur $m - j$ en n parts, alors la partition d'un intervalle de longueur $m - j - a_k$ en $n - 1$ parts avec $a_k \in \mathcal{A}''(m - j, n)$ est impossible et donc $C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j) = 0$ pour $a_k \in \mathcal{A}''(m - j, n)$. Nous avons donc que la preuve du théorème se réduit à montrer que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j). \quad (173)$$

Considérons tout d'abord le cas où l'intervalle $[j, m]$ ne peut être partitionné en n parts. Nous avons alors, selon le lemme 4, qu'aucune partition de l'intervalle $[j, m - a_k]$ en $n - 1$ parts n'existe, donc que les fonctions combinatoires $C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j) = 0$ pour $n \notin \mathcal{N}(m - j)$, et finalement que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = 0 \quad \text{pour } n \notin \mathcal{N}(m - j) \quad (174)$$

prouvant donc le théorème dans le cas où $n \notin \mathcal{N}(m - j)$.

Dans le cas où l'intervalle $[j, m]$ ne peut être partitionné qu'en une seule part, la part a_t , alors nécessairement l'ensemble $\mathcal{A}'(m - j, 1) = \{a_t\}$ et la longueur de l'intervalle est $m - j = a_t$. La contrainte est que $a_t > j_0 - j$ donc que $m - j > j_0 - j$, c'est-à-dire que $m > j_0$. Nous avons donc que, pour $m > j_0$,

$$C_1^1(j, j + a_t, 1, j_0 - j) = f_{a_t}(m) C_1^1(j, j + a_t - a_t, 1 - 1, j_0 - j) \quad (175)$$

$$= f_{a_t}(m) C_1^1(j, j, 0, j_0 - j) \quad (176)$$

$$= f_{a_t}(m). \quad (177)$$

Puisque la seule partition possible d'un intervalle $[j, j + a_t]$ en une part plus grande que $j_0 - j$ est donnée par la part a_t elle-même si elle est plus grande que $j_0 - j$, alors l'expression obtenue correspond à la fonction combinatoire $C_1^1(j, j + a_t, 1, j_0 - j)$ et le lemme est prouvé pour $n = 1$.

Dans le cas où l'intervalle $[j, m]$ peut être partitionné en n parts où $n \geq 2$, par définition des fonctions combinatoires contraintes de première espèce, nous avons que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{q \in \mathcal{Q}_1(m - j, n, j_0 - j)} F_n^q(j, m). \quad (178)$$

L'ensemble $\mathcal{Q}_1(m - j, n, j_0 - j)$ comprend toutes les valeurs de q associées aux partitions qui satisfont à la contrainte que la première part de la partition soit plus grande que $j_0 - j$. Comme $\mathcal{D}(m - j, n)$, l'ensemble des vecteurs $\Delta_{nq}(m - j)$, est isomorphe à l'ensemble des partitions de l'intervalle $[j, m]$ en n parts, alors la somme sur les partitions satisfaisant à la contrainte $\delta_1 > j_0 - j$ peut être remplacée par une somme sur les vecteurs $\Delta_{nq}(m - j)$ de $\mathcal{D}(m - j, n)$ ayant une première composante plus grande que $j_0 - j$. Nous

avons donc que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{\substack{\Delta_{nq}(m-j) \in \mathcal{D}(m-j, n) \\ \delta_1 > j_0 - j}} F_n^q(j, m). \quad (179)$$

Selon le lemme 2, l'ensemble $\mathcal{D}(m-j, n)$ peut être séparé en sous-ensembles $\mathcal{D}_{a_k}^\alpha(m-j, n)$ de vecteurs ayant comme α -ième part la part a_k . Ceci veut dire que, si nous choisissons de contraindre la n -ième part, la somme sur les vecteurs $\Delta_{nq}(m-j)$ de $\mathcal{D}(m-j, n)$ peut être convertie en double somme, l'une sur les parts appartenant à $\mathcal{A}'(m-j, n)$ et l'autre sur les vecteurs de $\mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n)$

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} \sum_{\substack{\Delta_{nq}(m-j) \in \mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n) \\ \delta_1 > j_0 - j}} F_n^q(j, m). \quad (180)$$

En utilisant la définition des représentations fonctionnelles,

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} \sum_{\substack{\Delta_{nq}(m-j) \in \mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n) \\ \delta_1 > j_0 - j}} \prod_{i=0}^n f_{\delta_i}(s_i) \quad (181)$$

$$= \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} \sum_{\substack{\Delta_{nq}(m-j) \in \mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n) \\ \delta_1 > j_0 - j}} f_{\delta_n}(s_n) \prod_{i=0}^{n-1} f_{\delta_i}(s_i). \quad (182)$$

Puisque l'intervalle considéré est $[j, m]$ alors la n -ième composante de tous les vecteurs $\mathbf{S}_{nq}(j, m)$ est $s_n = m$ et puisque tous les vecteurs $\Delta_{nq}(m-j)$ font parti de l'ensemble $\mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n)$ alors ils ont tous comme n -ième composante

$\delta_n = a_k$. En utilisant ces résultats, nous avons que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} \sum_{\substack{\Delta_{nq}(m-j) \in \mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n) \\ \delta_1 > j_0 - j}} f_{a_k}(m) \prod_{i=0}^{n-1} f_{\delta_i}(s_i). \quad (183)$$

La fonction $f_{a_k}(m)$ ne dépendant plus du vecteur $\Delta_{nq}(m-j)$, alors nous avons que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) \sum_{\substack{\Delta_{nq}(m-j) \in \mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n) \\ \delta_1 > j_0 - j}} \prod_{i=0}^{n-1} f_{\delta_i}(s_i). \quad (184)$$

Puisque l'expression $\prod_{i=0}^{n-1} f_{\delta_i}(s_i)$ ne dépend pas de la n -ième composante du vecteur $\Delta_{nq}(m-j)$ et puisque, selon le lemme 3, chaque partition de l'intervalle $[j, m]$ en n parts ayant comme α -ième part la part a_k est en correspondance biunivoque avec une partition de l'intervalle $[j, m - a_k]$ en $n - 1$ parts alors la somme sur les vecteurs de $\mathcal{D}_{a_k}^n(m-j, n)$ peut être transformée en somme sur les vecteurs de l'ensemble $\mathcal{D}(m-j-a_k, n-1)$

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) \sum_{\substack{\Delta_{n-1, q}(m-j-a_k) \in \mathcal{D}(m-j-a_k, n-1) \\ \delta_1 > j_0 - j}} \prod_{i=0}^{n-1} f_{\delta_i}(s_i). \quad (185)$$

De plus, puisque la $n - 1$ -ième composante des vecteurs $\mathbf{S}_{n-1, q}(j, m - a_k)$ associés aux vecteurs $\Delta_{n-1, q}(m-j-a_k)$ de $\mathcal{D}(m-j-a_k, n-1)$ est $s_{n-1} =$

$m - a_k$, alors nous avons que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) \sum_{\substack{\Delta_{n-1, q}(m-j-a_k) \\ \in \mathcal{D}(m-j-a_k, n-1) \\ \delta_1 > j_0 - j}} F_{n-1}^q(j, m - a_k). \quad (186)$$

Comme $\mathcal{D}(m - j - a_k, n - 1)$, l'ensemble des vecteurs $\Delta_{n-1, q}(m - j - a_k)$, est isomorphe à l'ensemble des partitions de l'intervalle $[j, m - a_k]$ en $n - 1$ parts, alors la somme sur les vecteurs dont la première composante est plus grande que $j_0 - j$ peut être remplacée par une somme sur les partitions de $[j, m - a_k]$ en $n - 1$ parts satisfaisant à la contrainte $\delta_1 > j_0 - j$, donc sur les partitions identifiées par les éléments de l'ensemble $\mathcal{Q}_1(m - j - a_k, n - 1, j_0 - j)$,

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) \sum_{q \in \mathcal{Q}_1(m-j-a_k, n-1, j_0-j)} F_{n-1}^q(j, m - a_k). \quad (187)$$

Finalement, en utilisant la définition des fonctions combinatoires contraintes de première espèce, nous avons que

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}'(m-j, n)} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j) \quad (188)$$

ce qui termine la preuve du théorème. \square

Fonctions combinatoires contraintes de seconde espèce

Théorème 2. Soit un intervalle $[j, m]$, avec $j \leq j_0$, et un ensemble \mathcal{A} de parts

disponibles pour partitionner l'intervalle, alors

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) \bar{C}_2(j, m - a_k, j_0 - j) \quad (189)$$

pour $m > j_0$.

Preuve. Nous allons considérer que la deuxième borne de l'intervalle est plus grande que j_0 car c'est le seul cas qui permet à l'intervalle d'être partitionné et de satisfaire à la contrainte. Puisque $m > j_0$ et que $j_0 > j$ alors $m > j$, c'est-à-dire que l'intervalle ne peut être de longueur nulle et donc que le nombre de parts est toujours supérieur ou égal à un.

Selon le lemme 4, dans le cas où l'intervalle ne peut être partitionné, c'est-à-dire lorsque $(m - j) \notin \mathcal{M}$, il n'existe aucune partition de $[j, m - a_k]$ en $n - 1$ parts et par conséquent les fonctions combinatoires contraintes de première espèce sont toutes nulles ce qui donne

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = 0 \quad (190)$$

donc le théorème est valide dans ce cas.

Dans le cas où l'intervalle peut être partitionné, lorsque $(m - j) \in \mathcal{M}$, la relation entre les fonctions combinatoires contraintes de première et de seconde espèce, donne que

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m-j)} C_1^1(j, m, n, j_0 - j). \quad (191)$$

Le théorème 1 stipule que, pour $m > j_0$ et $n \geq 1$, les fonctions combinatoires

contraintes de première espèce obéissent à la relation récursive

$$C_1^1(j, m, n, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j). \quad (192)$$

Nous avons alors que

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{n \in \mathcal{N}(m-j)} \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j). \quad (193)$$

Puisque la somme sur a_k ne dépend pas des valeurs de n alors l'ordre de sommation peut être inversé

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} \sum_{n \in \mathcal{N}(m-j)} f_{a_k}(m) C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j). \quad (194)$$

De plus, puisque la fonction $f_{a_k}(m)$ est indépendante du nombre de parts,

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) \sum_{n \in \mathcal{N}(m-j)} C_1^1(j, m - a_k, n - 1, j_0 - j). \quad (195)$$

Selon le lemme 4, si la partition de l'intervalle $[j, m]$ en n parts existe alors la partition de l'intervalle $[j, m - a_k]$ en $n - 1$ parts avec $a_k \in \mathcal{A}'(m - j, n)$ existe. Ceci veut donc dire que l'ensemble des valeurs de n telles que $(n - 1) \in \mathcal{N}(m - j - a_k)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{N}(m - j)$. La somme sur les valeurs de n de $\mathcal{N}(m - j)$ peut donc être séparée en deux sommes, une sur l'ensemble des valeurs de n telles que $(n - 1) \in \mathcal{N}(m - j - a_k)$ et l'autre sur l'ensemble

des valeurs de n de $\mathcal{N}(m-j)$ telles que $(n-1) \notin \mathcal{N}(m-j-a_k)$,

$$\begin{aligned} \bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = & \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) \\ & \left(\sum_{(n-1) \in \mathcal{N}(m-j-a_k)} C_1^1(j, m-a_k, n-1, j_0-j) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{(n-1) \notin \mathcal{N}(m-j-a_k) \\ n \in \mathcal{N}(m-j)}} C_1^1(j, m-a_k, n-1, j_0-j) \right). \end{aligned} \quad (196)$$

Cependant, comme il n'existe aucune partition de l'intervalle $[j, m-a_k]$ en $n-1$ parts tel que $(n-1) \notin \mathcal{N}(m-j-a_k)$ alors les fonctions combinatoires $C_1^1(j, m-a_k, n-1, j_0-j)$ pour $(n-1) \notin \mathcal{N}(m-j-a_k)$ sont toutes nulles et

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) \sum_{(n-1) \in \mathcal{N}(m-j-a_k)} C_1^1(j, m-a_k, n-1, j_0-j). \quad (197)$$

Finalement, en utilisant l'expression reliant les fonctions combinatoires contraintes de première et de seconde espèce, nous avons que

$$\bar{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) \bar{C}_2(j, m-a_k, j_0-j). \quad (198)$$

ce qui termine la preuve du théorème. \square

A.4 Équations récursives linéaires

Dans cette section nous allons reprendre les preuves des deux théorèmes les plus importants concernant les fonctions combinatoires. L'application la

plus utile de ces deux théorèmes est de permettre de trouver une solution analytique à des équations récursives linéaires homogènes à plusieurs termes à coefficients variables.

Théorème 3. *La fonction combinatoire contrainte de seconde espèce $\overline{C}_2(j, m, j_0 - j)$ est une solution de l'équation récursive*

$$b_m = \sum_{k=1}^N f_{a_k}(m) b_{m-a_k} \quad \text{avec } m > j_0 \quad (199)$$

satisfaisant aux conditions de frontière

$$b_{j_0-i} = \delta_{j_0-j,i} \quad \text{avec } i = 0, 1, 2, \dots, a_N - 1, \quad (200)$$

en autant que les a_k soient utilisées comme parts disponibles pour les partitions de l'intervalle $[j, m]$ et que les coefficients $f_{a_k}(m)$ soit les fonctions associées à ces parts pour construire les représentations fonctionnelles des partitions.

Preuve. En substituant b_m par la fonction combinatoire $\overline{C}_2(j, m, j_0 - j)$, pour $j_0 \leq j \leq j_0 - a_N + 1$, dans l'équation récursive

$$b_m = \sum_{k=1}^N f_{a_k}(m) b_{m-a_k} \quad (201)$$

nous obtenons

$$\overline{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{k=1}^N f_{a_k}(m) \overline{C}_2(j, m - a_k, j_0 - j). \quad (202)$$

Avec $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, la somme sur k des N parts a_k peut être trans-

formée en une somme sur les parts qui appartiennent à \mathcal{A} . Nous obtenons alors

$$\overline{C}_2(j, m, j_0 - j) = \sum_{a_k \in \mathcal{A}} f_{a_k}(m) \overline{C}_2(j, m - a_k, j_0 - j), \quad (203)$$

la relation récursive à laquelle obéissent les fonctions combinatoires contraintes de seconde espèce montrant donc que $b_m = \overline{C}_2(j, m, j_0 - j)$ est effectivement une solution de l'équation récursive pour $m > j_0$.

Dans le cas où $m = j_0 - i$ avec $i = 0, 1, 2, \dots, a_N - 1$, nous avons que

$$b_{j_0-i} = \overline{C}_2(j, j_0 - i, j_0 - j). \quad (204)$$

L'intervalle $[j, j_0 - i]$ ne possède pas de partitions avec $n \geq 1$ satisfaisant la contrainte sur la première part de la partition puisque que la longueur de l'intervalle est toujours plus petite que la contrainte sur la première part, c'est-à-dire que $j_0 - j - i \leq j_0 - j$. Cependant, lorsque l'intervalle est de longueur nulle, c'est-à-dire lorsque $j_0 - i = j$, il existe une partition qui satisfait à la contrainte, il s'agit de la partition en zéro parts. Nous avons donc que

$$b_{j_0-i} = \overline{C}_2(j, j_0 - i, j_0 - j) \quad (205)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j_0 - j \\ 1 & \text{pour } i = j_0 - j \end{cases} \quad (206)$$

$$= \delta_{j_0-j, i}, \quad (207)$$

la solution $b_m = \overline{C}_2(j, m, j_0 - j)$ satisfait aux conditions de frontière $b_{j_0-i} = \delta_{j_0-j, i}$. □

Théorème 4. *La solution générale de l'équation réursive*

$$b_m = \sum_{k=1}^N f_{a_k}(m) b_{m-a_k} \quad (208)$$

satisfaisant aux conditions de frontière

$$b_{j_0-i} = \lambda_i \quad \text{avec } i = 0, 1, 2, \dots, a_N - 1, \quad (209)$$

est donnée par

$$b_m = \sum_{i=0}^{a_N-1} \lambda_i \bar{C}_2(j_0 - i, m, i). \quad (210)$$

Preuve. Selon le théorème 3, la solution de l'équation réursive pour $m > j_0$ est donnée par

$$b_m = \bar{C}_2(j, m, j_0 - j) \quad \text{avec } j_0 \leq j \leq j_0 - a_n + 1 \quad (211)$$

Si $i = j_0 - j$, nous avons que la solution est donnée par

$$b_m = \bar{C}_2(j_0 - i, m, i) \quad \text{avec } 0 \leq i \leq a_N - 1. \quad (212)$$

Puisque l'équation réursive est linéaire alors une somme de solutions est aussi une solution et donc

$$b_m = \sum_{i=0}^{a_N-1} \lambda_i \bar{C}_2(j_0 - i, m, i), \quad (213)$$

c'est-à-dire que la somme des fonctions combinatoires sur toutes les valeurs de

i est aussi une solution. Les conditions de frontière donnent que

$$b_{j_0-k} = \sum_{i=0}^{a_N-1} \lambda_i \overline{C}_2(j_0 - i, j_0 - k, i) \quad \text{avec } 0 \leq k \leq a_N - 1. \quad (214)$$

Puisque l'intervalle $[j_0 - i, j_0 - k]$ ne possède pas de partitions lorsque $k > i$ alors $\overline{C}_2(j_0 - i, j_0 - k, i) = 0$ pour $k > i$. De plus, puisqu'il n'existe aucune partition pour laquelle $\delta_1 > i$ lorsque $k < i$ car la longueur de l'intervalle est de $i - k$, alors $\overline{C}_2(j_0 - i, j_0 - k, i) = 0$ dans ce cas aussi. Lorsque $k = i$, la partition en zéro parts est possible et $\overline{C}_2(j_0 - i, j_0 - i, i) = 1$. Nous avons donc que

$$\overline{C}_2(j_0 - i, j_0 - k, i) = \delta_{ik} \quad (215)$$

conséquemment

$$b_{j_0-k} = \sum_{i=0}^{a_N-1} \lambda_i \delta_{ik} \quad \text{avec } 0 \leq k \leq a_N - 1 \quad (216)$$

$$= \lambda_k \quad \text{avec } 0 \leq k \leq a_N - 1 \quad (217)$$

ce qui prouve que la solution

$$b_m = \sum_{i=0}^{a_N-1} \lambda_i \overline{C}_2(j_0 - i, m, i) \quad (218)$$

satisfait aux conditions de frontière. \square

A.5 Conclusion

Nous avons présenté le développement de la méthode de résolution générale d'équation récurrentes linéaires homogènes introduite par Antippa et Phares dans [17]. La particularité de cette méthode est qu'elle est applicable à des équations récurrentes à plusieurs termes et à coefficients variables. La solution de l'équation récurrente est obtenue en termes de fonctions appelées fonctions combinatoires. Ces fonctions combinatoires sont définies par rapport à l'ensemble des partitions d'un intervalle en parts. Les parts disponibles pour la partition de l'intervalle sont les différences d'ordre entre les termes de l'équation récurrente et les fonctions combinatoires correspondent à des sommes de produits des coefficients des termes de l'équation récurrentes évalués à différents points de l'intervalle. Ces points sont déterminés par les partitions possibles de l'intervalle. Finalement, l'utilité des fonctions combinatoires est d'offrir une méthode générale de résolution d'équations récurrentes et une solution à des problèmes où la technique traditionnelle est inapplicable ou inefficace.

B Symboles de Pochhammer

La notation suivante est utilisée pour les symboles de Pochhammer (voir l'appendice A de la référence [19]) :

$$x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1) = \prod_{i=1}^n (x+1-i) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}, \quad (219)$$

$$x^{[n]} = x(x+1)\dots(x+n-1) = \prod_{i=1}^n (x-1+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}, \quad (220)$$

où $x^{(n)}$ est appelé symbole de Pochhammer (ou factorielle) descendant(e) et $x^{[n]}$ est appelé symbole de Pochhammer (ou factorielle) ascendant(e). Il est possible de passer d'un symbole de Pochhammer ascendant à un symbole de Pochhammer descendant et vice-versa via

$$x^{(n)} = (x-n+1)^{[n]}, \quad (221)$$

$$x^{[n]} = (x+n-1)^{(n)}. \quad (222)$$

De plus, les symboles de Pochhammer peuvent être factorisés en utilisant les propriétés suivantes :

$$x^{(n)} = x^{(i)} (x-i)^{(n-i)}, \quad (223)$$

$$x^{[n]} = x^{[i]} (x+i)^{[n-i]}. \quad (224)$$

C L'équation réursive pour $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$

Dans cet appendice, nous démontrons que l'équation réursive pour la fonction de structure $\beta_l(m_1, m_2; n, 0)$, donnée par l'équation (104), dans le cas particulier où $p_1 = n$, se réduit à l'expression de la fonction de structure fondamentale pour laquelle toutes les parts sont de longueur unitaire (équation (80)). En choisissant $p_1 = n$ dans l'équation (104), nous obtenons

$$\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0) = \frac{\beta_l(m_1, m_1 + n - 1; n - 1, 0)}{3^2 [(m_1 + n)/3]^{(1)} [(m_1 + n + 2l + 1)/3]^{(1)}} \quad (225)$$

$$= \frac{\beta_l(m_1, m_1 + n - 1; n - 1, 0)}{(m_1 + n)(m_1 + n + 2l + 1)}. \quad (226)$$

mais

$$\beta_l(m_1, m_1 + n - 1; n - 1, 0) = \left\{ (m_1 + 1)^{[n-1]} (m_1 + 2l + 2)^{[n-1]} \right\}^{-1}. \quad (227)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0) \\ &= \left\{ (m_1 + n)(m_1 + 1)^{[n-1]} (m_1 + n + 2l + 1)(m_1 + 2l + 2)^{[n-1]} \right\}^{-1}; \end{aligned} \quad (228)$$

ce qui mène à

$$\beta_l(m_1, m_1 + n; n, 0) = \left\{ (m_1 + 1)^{[n]} (m_1 + 2l + 2)^{[n]} \right\}^{-1}, \quad (229)$$

qui est identique à l'équation (80).

D Fichier Mathematica

Fonctions

Symboles de Pochhammer

Définition des fonctions `DescendingPochhammer[x,n]` et `AscendingPochhammer[x,n]` et leur apparence pour `StandardForm`

```
In[1] := DescendingPochhammer /: MakeBoxes[DescendingPochhammer[x., n.], StandardForm] :=  
SuperscriptBox[RowBox[{"(", MakeBoxes[x, StandardForm], ")"}],  
RowBox[{"(", MakeBoxes[n, StandardForm], ")"}]]
```

```
In[2] := AscendingPochhammer /: MakeBoxes[AscendingPochhammer[x., n.], StandardForm] :=  
SuperscriptBox[RowBox[{"(", MakeBoxes[x, StandardForm], ")"}],  
RowBox[{"(", MakeBoxes[n, StandardForm], ")"}]]
```

Simplifications pour les symboles de Pochhammer

```
In[3] := PochhammerSimplify[y_] := y//.  
{DescendingPochhammer[x_Integer, n_Integer] => Product[x + 1 - i, {i, 1, n}]/; (n >= 1),  
AscendingPochhammer[x_Integer, n_Integer] => Product[x - 1 + i, {i, 1, n}]/; (n >= 1),  
DescendingPochhammer[x_Rational, n_Integer] => Product[x + 1 - i, {i, 1, n}]/; (n >= 1),  
AscendingPochhammer[x_Rational, n_Integer] => Product[x - 1 + i, {i, 1, n}]/; (n >= 1),  
DescendingPochhammer[x., n.] => 1/AscendingPochhammer[x + 1, -n]/; (n < 0),  
AscendingPochhammer[x., n.] => 1/DescendingPochhammer[x - 1, -n]/; (n < 0),  
DescendingPochhammer[x., 1] -> x,  
AscendingPochhammer[x., 1] -> x}
```

Conversion des symboles de Pochhammer en fonctions Gamma

```
In[4] := PochhammerToGamma[y_] := y//.  
{DescendingPochhammer[x., n.] => Gamma[x + 1]/Gamma[x - n + 1]/; (n >= 1),  
AscendingPochhammer[x., n.] => Gamma[x + n]/Gamma[x]/; (n >= 1),  
DescendingPochhammer[x., n.] => 1/AscendingPochhammer[x + 1, -n]/; (n < 0),  
AscendingPochhammer[x., n.] => 1/DescendingPochhammer[x - 1, -n]/; (n < 0)}
```

Conversion des symboles de Pochhammer en simple produits

```
In[5] := PochhammerToProducts[y_] := y//.  
{DescendingPochhammer[x., n_Integer] => Product[x + 1 - i, {i, 1, n}]/; (n >= 1),  
AscendingPochhammer[x., n_Integer] => Product[x - 1 + i, {i, 1, n}]/; (n >= 1)}
```

Fonctions de structure

Définition de l'apparence des fonctions de structure pour `StandardForm`

```
In[6] := StructureFunctionBeta /: MakeBoxes[StructureFunctionBeta[l., m1., m2., n., p2.],  
StandardForm] := RowBox[{SubscriptBox["β", MakeBoxes[1, StandardForm]],  
"(", MakeBoxes[m1, StandardForm], ", ", MakeBoxes[m2, StandardForm], ", ",  
MakeBoxes[n, StandardForm], ", ", MakeBoxes[p2, StandardForm], ")"}]]
```

Conversion des fonctions de structure en symboles de Pochhammer

```
In[7] := StructureFunctionBetaToPochhammer[y_] := y/.
  {StructureFunctionBeta[1., m1., m2., n., 0] => DescendingPochhammer[m1, -n] +
    DescendingPochhammer[m1 + 2l + 1, -n] /; (n > 0 && m2 == m1 + n),
  StructureFunctionBeta[1., m1., m2., n., n] => 2^(-2n) * DescendingPochhammer[m1/2, -n] +
    DescendingPochhammer[(m1 + 2l + 1)/2, -n] /; (n > 0 && m2 == m1 + 2n),
  StructureFunctionBeta[1., m1., m2., n., 0] => 3^(-2n) * DescendingPochhammer[m1/3, -n] +
    DescendingPochhammer[(m1 + 2l + 1)/3, -n] /; (n > 0 && m2 == m1 + 3n)}
```

Simplifications pour les fonctions de structure

```
In[8] := StructureFunctionBetaSimplify[y_] := y//.
  {StructureFunctionBeta[1., m1., m1., 0, 0] => 1 /; (m1 > 0),
  StructureFunctionBeta[1., m1., m2., n., 0] =>
  Module[{p3 = (m2 - m1 - n)/2},
    Sum[StructureFunctionBeta[1, m1, m1 + n + 2p3 - 3i - 1, n - i - 1, 0]
      / (3^(2(i + 1)) * DescendingPochhammer[(m1 + n + 2p3)/3, i + 1] *
        DescendingPochhammer[(m1 + n + 2p3 + 2l + 1)/3, i + 1]), {i, 0, p3}]]
  /; (m1 > 0 && m2 > 0 && n >= 2 && IntegerQ[(m2 - m1 - n)/2]
    && (m2 - m1 - n)/2 > 0 && n - (m2 - m1 - n)/2 > 0),
  StructureFunctionBeta[1., 0, m., n., p2.] =>
  Module[{p1 = Floor[(3n - m - p2)/2], p3 = Floor[(m - n - p2)/2]},
    Sum[
      StructureFunctionBeta[1, m - p1p - 3p3p, m, p1p + p3p, 0] *
      StructureFunctionBeta[1, 0, m - p1p - 3p3p - 2, n - p1p - p3p - 1, p2 - 1] /
      ((m - p1p - 3p3p) (m - p1p - 3p3p + 2l + 1))
      , {p1p, 0, p1}, {p3p, 0, p3}]]
  /; (p2 >= 1 && m >= 2)}
```

Coefficients

Fonction pour le calcul des coefficients utilisant les fonctions de structure

```
In[9] := ComputeCoefficient[m_] := Module[{}, Subscript[λ, 0] (-1)^m *
  Sum[(-1)^j * Sum[(-1)^i * StructureFunctionBeta[l, 0, m, m - 2j - i, i]
    * ρ^(m - 3j - 2i) * t^i, {i, 0, Floor[(m - 3j)/2]}], {j, 0, Floor[m/3]}]]
```

Fonction pour le calcul des coefficients récursifs

```
In[10] := RecursiveComputeCoefficient[m_] := Which[m > 0, 1/(m(m + 2l + 1)) *
  (-ρ * RecursiveComputeCoefficient[m - 1] - t * RecursiveComputeCoefficient[m - 2] +
  RecursiveComputeCoefficient[m - 3]), m == 0, Subscript[λ, 0], m < 0, 0]
```

Calcul des coefficients

Coefficient b_1

Calcul du coefficient via les fonctions de structure

In[11] := b1coeff1 = ComputebCoefficient[1]

Out[11] = $-\rho \beta_r(0, 1; 1, 0) \lambda_0$

In[12] := b1coeff2 = StructureFunctionBetaToPochhammer[b1coeff1];

In[13] := b1coeff3 = PochhammerSimplify[b1coeff2];

In[14] := b1coeff4 = FullSimplify[b1coeff3]

Out[14] = $\frac{\rho \lambda_0}{-2 - 2t}$

Résultat du calcul via l'équation récursive

In[15] := b1computedcoeff1 = FullSimplify[RecursiveComputebCoefficient[1]]

Out[15] = $\frac{\rho \lambda_0}{-2 - 2t}$

Coefficient b_2

Calcul du coefficient via les fonctions de structure

In[16] := b2coeff1 = ComputebCoefficient[2]

Out[16] = $(-t \beta_r(0, 2; 1, 1) + \rho^2 \beta_r(0, 2; 2, 0)) \lambda_0$

In[17] := b2coeff2 = StructureFunctionBetaToPochhammer[b2coeff1];

In[18] := b2coeff3 = PochhammerSimplify[b2coeff2];

In[19] := b2coeff4 = PochhammerToProducts[b2coeff3];

In[20] := b2coeff5 = FullSimplify[b2coeff4]

Out[20] = $-\frac{(2t(1+t) - \rho^2) \lambda_0}{4(1+t)(3+2t)}$

Résultat du calcul via l'équation récursive

In[21] := b2computedcoeff1 = FullSimplify[RecursiveComputebCoefficient[2]]

Out[21] = $\frac{(-2t(1+t) + \rho^2) \lambda_0}{4(1+t)(3+2t)}$

Coefficient b_3

Calcul du coefficient via les fonctions de structure

```
In[22] := b3coeff1 = ComputebCoefficient[3]
Out[22] =  $(-\beta_r(0, 3; 1, 0) - t \rho \beta_r(0, 3; 2, 1) + \rho^3 \beta_r(0, 3; 3, 0)) \lambda_0$ 

In[23] := b3coeff2 = StructureFunctionBetaSimplify[b3coeff1];
In[24] := b3coeff3 = StructureFunctionBetaToPochhammer[b3coeff2];
In[25] := b3coeff4 = PochhammerSimplify[b3coeff3];
In[26] := b3coeff5 = PochhammerToProducts[b3coeff4];
In[27] := b3coeff6 = FullSimplify[b3coeff5]
Out[27] =  $\frac{(12 + 4t(5 + 2t) + 8t\rho + 6t\rho - \rho^3) \lambda_0}{24(1+t)(2+t)(3+2t)}$ 
```

Résultat du calcul via l'équation récursive

```
In[28] := b3computedcoeff1 = FullSimplify[RecursiveComputebCoefficient[3]]
Out[28] =  $\frac{(12 + 4t(5 + 2t) + 8t\rho + 6t\rho - \rho^3) \lambda_0}{24(1+t)(2+t)(3+2t)}$ 
```

Coefficient b_4

Calcul du coefficient via les fonctions de structure

```
In[29] := b4coeff1 = ComputebCoefficient[4]
Out[29] =  $(-\rho \beta_r(0, 4; 2, 0) + t^2 \beta_r(0, 4; 2, 2) - t \rho^2 \beta_r(0, 4; 3, 1) + \rho^4 \beta_r(0, 4; 4, 0)) \lambda_0$ 

In[30] := b4coeff2 = StructureFunctionBetaSimplify[b4coeff1];
In[31] := b4coeff3 = StructureFunctionBetaToPochhammer[b4coeff2];
In[32] := b4coeff4 = PochhammerSimplify[b4coeff3];
In[33] := b4coeff5 = PochhammerToProducts[b4coeff4];
In[34] := b4coeff6 = FullSimplify[b4coeff5]
Out[34] =  $\frac{(12t^2(1+t)(2+t) - 4(3+2t)(7+4t)\rho - 4t(5+3t)\rho^2 + \rho^4) \lambda_0}{96(1+t)(2+t)(3+2t)(5+2t)}$ 
```

Résultat du calcul via l'équation récursive

```
In[35] := b4computedcoeff1 = FullSimplify[RecursiveComputebCoefficient[4]]
Out[35] =  $\frac{(12t^2(1+t)(2+t) - 4(3+2t)(7+4t)\rho - 4t(5+3t)\rho^2 + \rho^4) \lambda_0}{96(1+t)(2+t)(3+2t)(5+2t)}$ 
```

Coefficient h_5

Calcul du coefficient via les fonctions de structure

```
In[36] := b5coeff1 = ComputeCoefficient[5]
Out[36] = -(t beta_r(0, 5; 2, 1) - rho^2 beta_r(0, 5; 3, 0) + t^2 rho beta_r(0, 5; 3, 2) - t rho^3 beta_r(0, 5; 4, 1) + rho^5 beta_r(0, 5; 5, 0)) lambda_0
In[37] := b5coeff2 = StructureFunctionBetaSimplify[b5coeff1];
In[38] := b5coeff3 = StructureFunctionBetaToPochhammer[b5coeff2];
In[39] := b5coeff4 = PochhammerSimplify[b5coeff3];
In[40] := b5coeff5 = PochhammerToProducts[b5coeff4];
In[41] := b5coeff6 = FullSimplify[b5coeff5]
Out[41] = -((4 t^2 (46 + 5 t (11 + 3 t)) rho - 4 (81 + 20 t (4 + t)) rho^2 + rho^5 + 4 t (4 (1 + t) (5 + 2 t) (9 + 5 t) - 5 (2 + t) rho^3)) lambda_0) / (960 (1 + t) (2 + t) (3 + t) (3 + 2 t) (5 + 2 t))
```

Résultat du calcul via l'équation récursive

```
In[42] := b5computedcoeff1 = FullSimplify[RecursiveComputeCoefficient[5]]
Out[42] = -((4 t^2 (46 + 5 t (11 + 3 t)) rho - 4 (81 + 20 t (4 + t)) rho^2 + rho^5 + 4 t (4 (1 + t) (5 + 2 t) (9 + 5 t) - 5 (2 + t) rho^3)) lambda_0) / (960 (1 + t) (2 + t) (3 + t) (3 + 2 t) (5 + 2 t))
```

Coefficient h_6

Calcul du coefficient via les fonctions de structure

```
In[43] := b6coeff1 = ComputeCoefficient[6]
Out[43] = (beta_r(0, 6; 2, 0) + t rho beta_r(0, 6; 3, 1) - t^3 beta_r(0, 6; 3, 3) - rho^3 beta_r(0, 6; 4, 0) + t^2 rho^2 beta_r(0, 6; 4, 2) - t rho^4 beta_r(0, 6; 5, 1) + rho^6 beta_r(0, 6; 6, 0)) lambda_0
In[44] := b6coeff2 = StructureFunctionBetaSimplify[b6coeff1];
In[45] := b6coeff3 = StructureFunctionBetaToPochhammer[b6coeff2];
In[46] := b6coeff4 = PochhammerSimplify[b6coeff3];
In[47] := b6coeff5 = PochhammerToProducts[b6coeff4];
In[48] := b6coeff6 = FullSimplify[b6coeff5]
Out[48] = ((-40 (1 + t) (3 + t) (3 t^3 (2 + t) - 4 (3 + 2 t) (5 + 2 t)) + 8 t (1005 + t (1561 + 2 t (383 + 60 t))) rho + 4 t^2 (196 + 15 t (13 + 3 t)) rho^2 - 4 (231 + 10 t (19 + 4 t)) rho^3 - 10 t (7 + 3 t) rho^4 + rho^6) lambda_0) / (5760 (1 + t) (2 + t) (3 + t) (3 + 2 t) (5 + 2 t) (7 + 2 t))
```

Résultat du calcul via l'équation récursive

```
In[49] := b6computedcoeff1 = FullSimplify[RecursiveComputeCoefficient[6]]
Out[49] = ((-40 (1 + t) (3 + t) (3 t^3 (2 + t) - 4 (3 + 2 t) (5 + 2 t)) + 8 t (1005 + t (1561 + 2 t (383 + 60 t))) rho + 4 t^2 (196 + 15 t (13 + 3 t)) rho^2 - 4 (231 + 10 t (19 + 4 t)) rho^3 - 10 t (7 + 3 t) rho^4 + rho^6) lambda_0) / (5760 (1 + t) (2 + t) (3 + t) (3 + 2 t) (5 + 2 t) (7 + 2 t))
```