

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À
TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE EN
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR SYLVAIN LAVALLÉE

MÉTHODES DE RÉOLUTION D'ÉQUATIONS D'ONDES NON
LINÉAIRES ET LES INVARIANTS DE RIEMANN

MARS 2004

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur Alfred Michel Grundland, mon directeur de recherche, pour ses suggestions ainsi que pour son support constant lors de la réalisation de ce travail de recherche. En effet, je lui suis très redevable de m'avoir supervisé et surtout pour les lectures essentielles à l'aboutissement de cette recherche.

Je tiens également à remercier le docteur Louis Marchildon et le docteur Alain Chalifour d'avoir accepté de corriger ce travail de recherche. Bien que leur contribution se résume surtout à la dernière partie de mon mémoire, leurs expertise m'ont été indispensables afin que ce travail de recherche soit structuré, rigoureux et pertinent à ma formation.

Je tiens également à remercier ma mère Thérèse et ma famille, Paul, Jacinthe, Paméla et Michaël pour leur support moral tout au long de la réalisation de ce mémoire. Finalement, je tiens à remercier mes amis, Benoît, Philippe, Yannick, Tony, Line et Émilie pour leur support et leurs conseils.

Table des matières

Introduction	6
1 Solution d'une EDP d'ordre un par la méthode de Monge.	10
1.1 Introduction	10
1.2 Une description analytique du cône de Monge	14
1.3 Équations du ruban caractéristique	17
1.4 Le problème initial de Cauchy	19
1.5 Conditions de compatibilité	21
1.6 Exemple	24
2 Fondements de la théorie des systèmes d'équations quasili- néaires de type hyperbolique à deux variables indépendantes	29
2.1 Définitions de base	29
2.2 Les directions caractéristiques d'un système d'équations qua- silineaires	35
2.2.1 La dérivée directionnelle.	35
2.2.2 Systèmes d'équations quasilineaires de type hyperbo- lique.	37
2.2.3 Système d'équations non linéaires de type hyperbolique.	42
2.3 Les invariants de Riemann	45
2.3.1 Les invariants de systèmes d'équations semilineaires. .	45
3 Solutions d'équations d'ondes de Riemann pour les systèmes quasilineaires.	49
3.1 Solution des ondes de Riemann.	49
3.2 Exemples	56
3.2.1 Exemple 1: EDP quasilineaire de type hyperbolique dé- crivant une onde.	56

TABLE DES MATIÈRES

3.2.2	Exemple 2: système d'EDP quasilineaires de type hyperbolique décrivant une onde.	59
4	Les solutions d'ondes simples d'EDP décrivant un écoulement isentropique.	61
4.1	Système d'EDP décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.	61
4.2	Les solutions d'ondes simples d'EDP décrivant un écoulement isentropique.	64
5	Les solutions d'ondes doubles d'EDP décrivant un écoulement isentropique.	69
5.1	Système d'EDP décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.	69
5.2	Exemples	71
5.2.1	Ondes non dispersées avec des hodographes linéaires.	71
5.2.2	Autres ondes non dispersées	75
5.2.3	Ondes rotationnelles influencées par les ondes potentielles.	78
6	Les solutions d'ondes triples d'EDP décrivant un écoulement isentropique.	82
6.1	Système d'EDP décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.	82
6.2	Exemples.	93
7	Symétries conditionnelles et ondes multiples.	98
7.1	Ondes simples	98
7.2	Ondes multiples	106
7.3	Exemples	110
	Conclusion	117
A	Enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre.	120
B	Théorème des fonctions implicites.	123

TABLE DES MATIÈRES

C Codes du programme permettant d'obtenir des solutions d'ondes triples	126
C.1 Exemple linéaire	126
C.2 Exemple non linéaire	128
D Description du programme MACSYMA effectuant la méthode de réduction par symétrie pour les EDPs	130
D.1 Types de données	130
D.2 Données d'entrée.	132
D.3 Liste des principaux identificateurs	133
D.4 Description des fonctions principales	133
D.5 Données de sortie	137
D.6 Générateurs d'un système d'EDP quasilinéaire de type hyperbolique.	137
Index	140
Bibliographie	144

Table des figures

1.1	La surface intégrale S	11
1.2	La paramétrisation des dérivées partielles de u par rapport à x et à y	12
1.3	Famille de plans tangents formant un cône de Monge	12
1.4	Cône de Monge engendré par des plans tangents	13
1.5	L'enveloppe d'une sphère est un cylindre	14
1.6	Cônes de Monge et courbes caractéristiques	17
1.7	Le ruban caractéristique	17
1.8	La courbe initiale Γ sur la surface S	19
2.1	Famille de courbes à un paramètre	36
5.1	Angle φ entre deux ondes superposées	74
6.1	Graphique de la fonction W et sa racine	91
6.2	Exemple 1: Graphique d'une solution linéaire d'un système hydrodynamique en $(3 + 1)$ dimensions.	96
6.3	Exemple 2: Graphique d'une solution non linéaire d'un système hydrodynamique en $(3 + 1)$ dimensions.	97

Introduction

Les techniques permettant d'obtenir des solutions exactes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires sont plus efficaces dans le cas où les équations ont deux variables indépendantes que dans le cas où les équations ont trois variables indépendantes et plus. Cela est particulièrement vrai dans le cas de la méthode de la diffusion inverse et dans le cas des techniques d'intégration classiques telle que la méthode des caractéristiques. Pour les équations différentielles ayant deux variables indépendantes, la méthode des caractéristiques permet d'obtenir, dans certains cas, les solutions générales de ces équations différentielles. Cependant dans l'état actuel de la recherche, cette technique ne semble pas être la méthode la plus appropriée pour les systèmes de plus grande dimension, du moins, dans le cas des systèmes soulevant le plus d'intérêt en physique-mathématique.

Ainsi, dans le cas de systèmes ayant plus de deux variables indépendantes, il serait plus avantageux d'isoler des classes de solutions exactes en utilisant des propriétés géométriques ou physiques. Depuis les dernières années, plusieurs auteurs ont entrepris une étude systématique d'un groupe de solutions invariantes pour de tels systèmes. Cette étude a souvent exigé une étude détaillée de la structure d'un sous-groupe d'un groupe de Lie qui est un groupe de symétries de plusieurs systèmes d'EDP.

Dans ce mémoire, nous utiliserons la méthode des caractéristiques et nous considérerons une certaine classe de solutions d'EDP non linéaires de type hyperbolique en lien avec la généralisation du concept de solutions d'ondes planes pour des équations linéaires. Plus précisément, nous considérons un système d'EDP non linéaires homogène de type hyperbolique de la forme

TABLE DES FIGURES

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^{s\mu}(u^1, u^2, \dots, u^n) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (0.1)$$

où les $a_j^{s\mu}$ sont des fonctions réelles différentiables par rapport à tous les arguments u^1, u^2, \dots, u^n . Nous nous pencherons sur l'existence et la construction de ce qui est appelé les **ondes de Riemann** et les **k-ondes de Riemann**. Ces solutions fournissent une généralisation appropriée de la solution d'ondes planes mentionnée précédemment. Ces ondes ont été introduites par Siméon Denis Poisson au début du *XIX^e* siècle (1808) pour des équations décrivant l'écoulement d'un gaz compressible isothermique en une dimension. Poisson a formulé le problème suivant : trouver les solutions de ces équations et les considérer comme étant des équations de propagation d'ondes. Il a trouvé ces solutions en supposant qu'elles sont représentées par des équations implicites dépendantes d'une fonction arbitraire de la forme

$$u = F((u + u_0) t - x). \quad (0.2)$$

Cette idée a été généralisée par Bernhard Riemann (1854). Il s'est également penché sur l'exactitude mathématique des problèmes de propagation et de superposition d'ondes. Il a considéré les équations d'Euler pour un gaz à deux variables indépendantes et de deux variables dépendantes décrivant la propagation d'ondes à (1 + 1) dimensions

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (0.3)$$

où u est la vitesse locale du fluide isentropique et p est la pression considérée comme étant une fonction différentiable de la densité ρ . Pour une entropie constante, les solutions correspondent à la superposition de deux ondes ayant une vitesse égale à

$$u = \epsilon \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s}, \quad \epsilon = \pm 1$$

TABLE DES FIGURES

et cela, lorsque les directions de propagation sont parallèles. De plus, mis en évidence le le comportement asymptotique de la perturbation initiale localisée reliée à ces ondes.

Riemann a également noté que la solution du système (0.3) avec des données différentiables arbitraires, ne peut pas être continue indéfiniment dans le temps. En effet, celle-ci diverge après un certain temps. Plus précisément, les dérivées premières des solutions deviennent infinies pour certains $t > T > 0$, dans ce cas, les solutions différentiables du problème de Cauchy n'existent pas. Nous sommes en présence d'un phénomène appelé la catastrophe du gradient [1]. Cependant, Riemann s'est aussi intéressé à la continuité de la solution pour $t < T$ de la propagation. En se basant sur les lois de la conservation de la masse et de la vitesse, il introduisit les solutions non continues sous une forme d'ondes de choc et il démontra les lois liées à la vitesse du front d'ondes et les paramètres de l'état du gaz avant et après la discontinuité. Le problème des ondes de Riemann ainsi que leur superposition ont été étudiés par plusieurs auteurs. L'élément principal de cette méthode est l'introduction de nouvelles variables (appelées les invariants de Riemann) ayant comme propriété spécifique d'être constantes le long des courbes caractéristiques du système d'équations de départ. Cette approche nous permet de réduire le nombre de variables dépendantes pour le problème de superposition d'ondes et par le fait même, simplifie la tâche de résoudre le système initial.

Ce travail de recherche se présente comme suit ; le premier chapitre traite de la notion de la courbe caractéristique de Monge afin de résoudre les EDP d'ordre un non linéaires. Le second chapitre portera sur un système d'EDP quasilinéaires de type hyperbolique à deux variables indépendantes résolu par la méthode des caractéristiques généralisée. Cette résolution est basée sur la notion des invariants de Riemann.

Le troisième chapitre traitera des systèmes d'EDP quasilinéaires de type hyperbolique à plusieurs variables. Aux chapitres quatre, cinq et six, nous effectuerons respectivement la construction d'une solution d'onde simple, d'une onde double (superposition de deux ondes de Riemann) et d'une onde triple (superposition de trois ondes de Riemann) d'un système d'EDP quasilinéaire de type hyperbolique décrivant un flux isentropique compressible à l'aide de la méthode généralisée des caractéristiques. Une nouvelle classe de solutions correspondant à la superposition de trois ondes a été construite.

TABLE DES FIGURES

Le dernier chapitre présente la construction d'ondes multiples à l'aide de l'approche classique de Lie. Des exemples de constructions d'ondes simples, doubles et triples y sont présentés. En conclusion nous présentons un résumé de ce mémoire ainsi que les développements futurs enseignants à nos travaux.

Finalement, quatre annexes complètent ce mémoire. Nous y trouvons la description d'une enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre, la démonstration du théorème des fonctions implicites, le code du programme permettant d'obtenir des ondes triples et un résumé du programme MAC-SYMA permettant de calculer les symétries d'un système d'EDP.

Chapitre 1

Solution d'une EDP d'ordre un par la méthode de Monge.

1.1 Introduction

Considéré comme étant le père de la géométrie descriptive, Gaspard Monge a, à la fin du *XVIII^e* siècle, rationalisé l'art du trait pour en faire la géométrie descriptive. Rénovateur des méthodes géométriques en mathématiques, il est l'un des fondateurs de la géométrie différentielle. Il a été le premier à utiliser les notions mathématiques afin de les appliquer aux EDP.

Considérons l'EDP suivante :

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1.1)$$

Introduisons la notation suivante

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Notons que la fonction F dépend notamment de u_x et de u_y de sorte que l'équation (1.1) soit une équation aux dérivées partielles.

Soit S une surface intégrale plongée dans \mathbb{R}^3 définie par la fonction

$$u = u(x, y). \quad (1.2)$$

1.1. INTRODUCTION

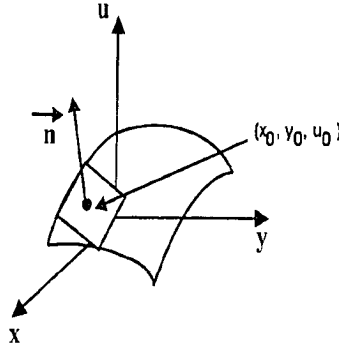


FIG. 1.1 - La surface intégrale S.

En se rapportant à la figure (1.1) nous avons que $u(x, y)$ obéit à l'équation (1.1) :

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) \equiv 0. \quad (1.3)$$

Soit \vec{n} le vecteur normal à la surface intégrale S pour un certain point fixe (x_0, y_0, u_0) . En vertu de l'équation (1.2) le vecteur normal dans \mathbb{R}^3 est donné par :

$$\vec{n} = \nabla[u(x, y) - u] \Rightarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

En ce point $(x_0, y_0, u_0) \in S$, l'équation (1.1) nous donne

$$F(x_0, y_0, u_0, u_x, u_y) = 0. \quad (1.5)$$

Donc, l'équation (1.5) établit un lien entre les dérivées partielles u_x et u_y . Soit la notation suivante :

$$u_x = p, \quad u_y = q. \quad (1.6)$$

En vertu de l'équation (1.5), pour tout point $(x_0, y_0, u_0) \in S$, les variables p et q obéissent à l'équation paramétrique :

$$F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0. \quad (1.7)$$

1.1. INTRODUCTION

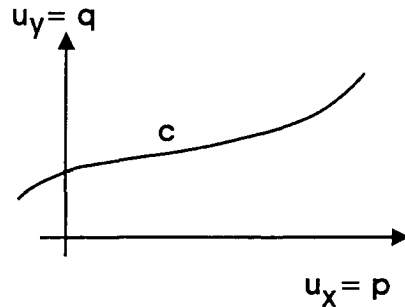


FIG. 1.2 – La paramétrisation des dérivées partielles de u_x et u_y .

De plus, les variables p et q peuvent être représentées sous la forme paramétrique suivante :

$$p = p(\lambda), \quad q = q(\lambda), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (1.8)$$

et, l'équation (1.4) devient :

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} p(\lambda) \\ q(\lambda) \\ -1 \end{bmatrix} \sim p_\lambda. \quad (1.9)$$

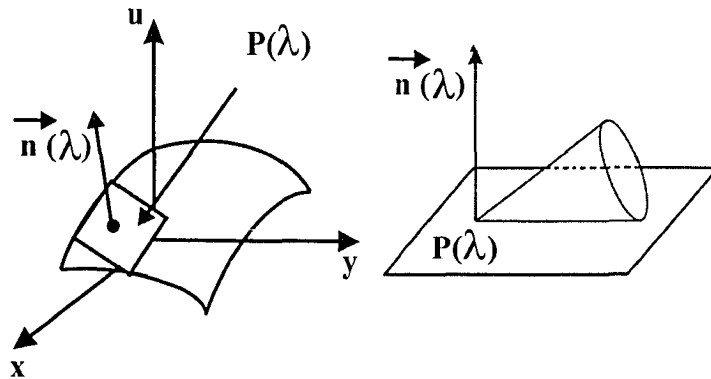


FIG. 1.3 – Famille de plans tangents formant un cône de Monge.

Par conséquent, nous obtenons une famille de vecteurs normaux en chaque point $(x_0, y_0, u_0) \in S$. De l'équation (1.9), nous pouvons associer en ces points une famille de plans tangents P_λ dans l'espace $M \subset \mathbb{R}^5$, où M est engendré par les variables x, y, u, p et q tel que montré à la figure (1.4).

1.1. INTRODUCTION

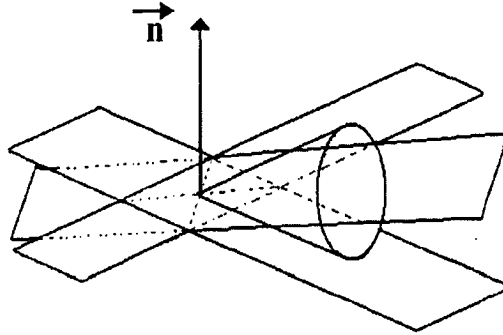


FIG. 1.4 – Cône de Monge engendré par des plans tangents.

Une enveloppe d'une famille de courbes [2] (voir annexe A) est représentée par les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} f(x, y, a) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) &= 0. \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{cases} x = x(a), \\ y = y(a). \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans notre cas, nous pouvons démontrer qu'à chaque point $(x_0, y_0, u_0) \in S$, l'enveloppe d'une famille de plans tangents forme le cône de Monge défini par l'équation (1.10) comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.1.

Considérons une famille de sphères à un paramètre donnée par

$$f(x, y, a) = x^2 + y^2 + (z - a)^2 - 1 = 0.$$

L'enveloppe de cette famille est décrite par l'équation (1.10) :

$$\begin{cases} f(x, y, a) = x^2 + y^2 + (z - a)^2 - 1 = 0, \\ f_a(x, y, a) = 2(z - a) = 0. \end{cases}$$

1.2. UNE DESCRIPTION ANALYTIQUE DU CÔNE DE MONGE

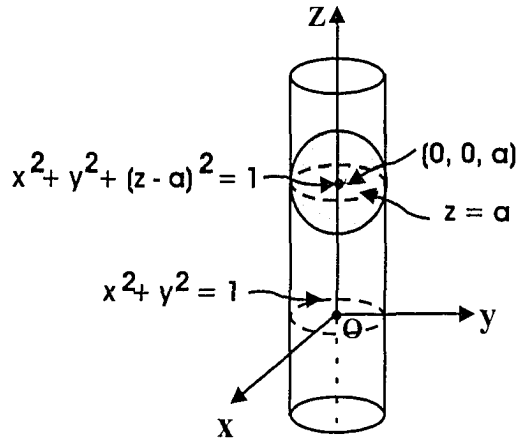


FIG. 1.5 – L'enveloppe d'une sphère est un cylindre.

Nous obtenons à partir de ces identités

$$\begin{cases} z = a, \\ x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1. \end{cases}$$

D'où, nous obtenons la relation suivante :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Autrement dit, l'enveloppe est un cylindre droit (voir figure 1.5).

1.2 Une description analytique du cône de Monge

Nous présentons ici une description analytique du cône de Monge ([3] et [4]) associé à chaque point de la surface intégrale S plongée dans \mathbb{R}^5 . Notons que pour deux plans tangents correspond deux vecteurs normaux $\vec{n}(\lambda)$ et $\vec{n}(\lambda + \Delta\lambda)$ où $\Delta\lambda$ est un accroissement de λ . Notons que l'intersection de ces plans donne une droite qui demeure sur la génératrice du cône de Monge. Nous utilisons le calcul infinitésimal pour déterminer la direction de cette droite.

Soit

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda.$$

1.2. UNE DESCRIPTION ANALYTIQUE DU CÔNE DE MONGE

et soit les deux vecteurs normaux évalués aux paramètres λ_1 et λ_2 , déterminés par l'équation (1.9).

$$\vec{n}_1 = \vec{n}(\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda) \\ q(\lambda) \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \vec{n}(\lambda + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} p(\lambda + \Delta\lambda) \\ q(\lambda + \Delta\lambda) \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Le produit vectoriel de ces vecteurs donne

$$\begin{aligned} \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 &= \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p(\lambda + \Delta\lambda) & q(\lambda + \Delta\lambda) & -1 \\ p(\lambda) & q(\lambda) & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q(\lambda) - q(\lambda + \Delta\lambda) \\ p(\lambda + \Delta\lambda) - p(\lambda) \\ p(\lambda + \Delta\lambda) \cdot q(\lambda) - q(\lambda + \Delta\lambda) \cdot p(\lambda) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En divisant l'équation (1.12) par $\Delta\lambda$, nous obtenons le vecteur suivant :

$$\frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_1}{\Delta\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{q(\lambda) - q(\lambda + \Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \\ \frac{p(\lambda + \Delta\lambda) - p(\lambda)}{\Delta\lambda} \\ \frac{p(\lambda + \Delta\lambda) \cdot q(\lambda) - q(\lambda + \Delta\lambda) \cdot p(\lambda)}{\Delta\lambda} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Maintenant, évaluons la limite de cette expression vectorielle lorsque $\Delta\lambda \rightarrow 0$, en définissant $\vec{T}(\lambda)$ comme étant la direction du vecteur (1.13) ;

$$\vec{T}(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\vec{n}_2 \times \vec{n}_1}{\Delta\lambda} = \begin{bmatrix} -q'(\lambda) \\ p'(\lambda) \\ p'(\lambda) \cdot q(\lambda) - q'(\lambda) \cdot p(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

où,

$$p'(\lambda) = \frac{dp}{d\lambda}, \quad q'(\lambda) = \frac{dq}{d\lambda}. \quad (1.15)$$

L'équation (1.7) étant valide pour tout $\lambda \in [0, 1]$, alors nous avons que

$$F(x_0, y_0, u_0, p(\lambda), q(\lambda)) \equiv 0. \quad (1.16)$$

En dérivant l'équation (1.16) par rapport à λ , nous obtenons l'équation suivante :

1.2. UNE DESCRIPTION ANALYTIQUE DU CÔNE DE MONGE

$$F_p \cdot p'(\lambda) + F_q \cdot q'(\lambda) = 0. \quad (1.17)$$

Comme l'équation (1.1) est une EDP, nous avons que F dépend essentiellement de $p(\lambda) \neq 0$ et $q(\lambda) \neq 0$. De plus, nous posons comme hypothèses que leur dérivées par rapport à λ soient non nulles ;

$$p'(\lambda) \neq 0, \quad q'(\lambda) \neq 0. \quad (1.18)$$

Puisque l'équation (1.17) représente le produit scalaire des vecteurs,

$$[F_p, F_q] \quad \text{et} \quad [p'(\lambda), q'(\lambda)]$$

alors que ces deux vecteurs sont perpendiculaires et il existe une constante $C(\lambda)$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} p'(\lambda) \\ q'(\lambda) \end{bmatrix} = C(\lambda) \begin{bmatrix} F_q \\ -F_p \end{bmatrix}.$$

Cela signifie que

$$p'(\lambda) = C(\lambda) \cdot F_q, \quad q'(\lambda) = -C(\lambda) \cdot F_p. \quad (1.19)$$

En substituant l'équation (1.19) dans l'équation (1.14), nous obtenons la direction sur la génératrice du cône de Monge (voir figure 1.6) est

$$\vec{T}(\lambda) = \begin{bmatrix} C(\lambda) \cdot F_p \\ C(\lambda) \cdot F_q \\ C(\lambda) \cdot (p \cdot F_p + q \cdot F_q) \end{bmatrix} = C(\lambda) \cdot \begin{bmatrix} F_p \\ F_q \\ p \cdot F_p + q \cdot F_q \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons poser que, sans perte de généralité, $C(\lambda) = 1$. Dans ce cas, nous obtenons le vecteur suivant :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} F_p \\ F_q \\ p \cdot F_p + q \cdot F_q \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Le vecteur \vec{T} correspond à la direction de la génératrice du cône de Monge coïncidant avec la tangente au point (x_0, y_0, u_0) sur la surface intégrale S . Donc, le vecteur \vec{T} est perpendiculaire au vecteur \vec{n} défini par l'équation (1.4). La trajectoire intégrale du vecteur \vec{T} est la courbe appelée "courbe caractéristique C'' "; voir figure (1.7).

1.3. ÉQUATIONS DU RUBAN CARACTÉRISTIQUE

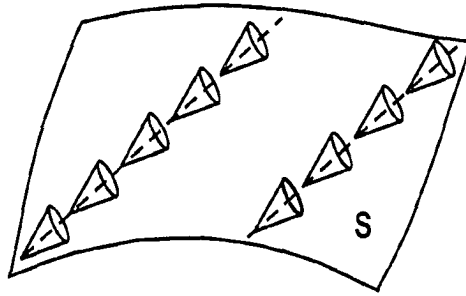


FIG. 1.6 – Cônes de Monge et courbes caractéristiques.

1.3 Équations du ruban caractéristique

Nous introduisons la notion du ruban caractéristique. Pour cela, nous considérons une courbe caractéristique C et en chaque point de celle-ci, associons le plan tangent à la surface intégrale S . De cette façon, nous obtenons la courbe caractéristique C et les plans tangents associés à chaque point sur C . Cet ensemble ainsi constitué est appelée le ruban caractéristique (figure 1.7).

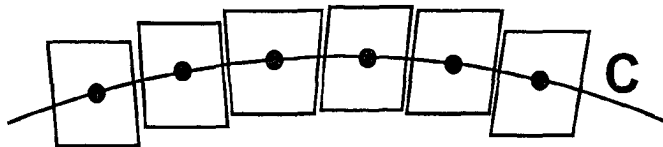


FIG. 1.7 – Le ruban caractéristique.

Cette courbe est déterminée par le vecteur $[x, y, u, p, q]$ où les trois premiers paramètres, i.e. x, y et $u(x, y)$, déterminent la position des points de la courbe caractéristique C tandis que les deux dernières composantes, p et q , déterminent les pentes des plans tangents à chaque point de C .

Soit $u = u(x, y)$ la surface intégrale qui obéit à l'équation (1.1) et

$$C = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ u(x(t), y(t)) = u(t) \end{cases} \quad (1.21)$$

est la représentation paramétrique de la courbe caractéristique C du paramètre t sur S .

1.3. ÉQUATIONS DU RUBAN CARACTÉRISTIQUE

Les vecteurs tangents à la courbe caractéristique C doivent être dans la même direction que le vecteur \vec{T} donnée par l'équation (1.20). Donc, ces vecteurs sont colinéaires et nous écrivons

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ du/dt \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} F_p \\ F_q \\ p \cdot F_p + q \cdot F_q \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

Sans perte de généralité, nous choisissons la paramétrisation de la courbe C telle que les vecteurs de l'équation (1.22) soient égaux

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ du/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p \\ F_q \\ p \cdot F_p + q \cdot F_q \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Dérivons l'équation (1.1) par rapport aux variables x et y . Nous obtenons

$$F_x + F_u \cdot p + F_p \cdot u_{xx} + F_q \cdot u_{yx} = 0, \quad (1.24)$$

$$F_y + F_u \cdot q + F_p \cdot u_{xy} + F_q \cdot u_{yy} = 0. \quad (1.25)$$

Le long de la courbe caractéristique C , nous avons que

$$p(t) = u_x(x(t), y(t)), \quad q(t) = u_y(x(t), y(t)). \quad (1.26)$$

Dérivons les équations (1.26) par rapport à t

$$\frac{dp}{dt} = u_{xx} \cdot \frac{dx}{dt} + u_{xy} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (1.27)$$

$$\frac{dq}{dt} = u_{yx} \cdot \frac{dx}{dt} + u_{yy} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

En substituant l'équation (1.23) dans l'équation (1.27), nous obtenons que

$$\frac{dp}{dt} = u_{xx} \cdot F_p + u_{xy} \cdot F_q, \quad \frac{dq}{dt} = u_{yx} \cdot F_p + u_{yy} \cdot F_q.$$

En vertu des équations (1.24) et (1.25), nous obtenons

$$\frac{dp}{dt} = -(F_x + p \cdot F_u), \quad \frac{dq}{dt} = -(F_y + q \cdot F_u). \quad (1.28)$$

1.4. LE PROBLÈME INITIAL DE CAUCHY

En résumé, à partir des équations (1.23) et (1.28), nous décrivons le ruban caractéristique défini à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_p, \\ \frac{dy}{dt} = F_q, \\ \frac{du}{dt} = p \cdot F_p + q \cdot F_q, \\ \frac{dp}{dt} = -(F_x + p \cdot F_u), \\ \frac{dq}{dt} = -(F_y + q \cdot F_u). \end{cases} \quad (1.29)$$

Le ruban caractéristique doit obéir à l'équation (1.1) et donc,

$$F(x(t), y(t), u(t), p(t), q(t)) = 0. \quad (1.30)$$

1.4 Le problème initial de Cauchy

Nous étudierons le problème des conditions initiales admises par les équations (1.29) permettant de reconstruire la surface intégrale S plongée dans \mathbb{R}^3 . Supposons que la courbe initiale Γ reste sur la surface intégrale et est paramétrisée par s comme suit :

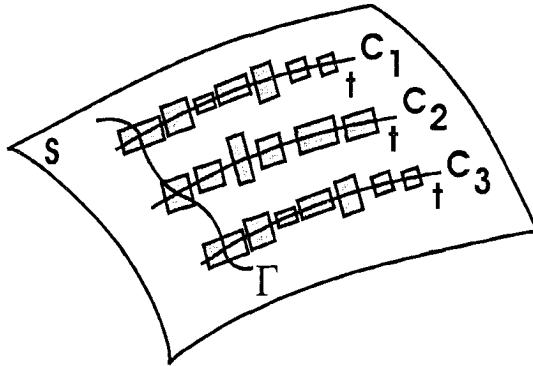


FIG. 1.8 – La courbe initiale Γ sur la surface S .

1.4. LE PROBLÈME INITIAL DE CAUCHY

$$\Gamma = \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ u = u(s) = u(x(s), y(s)). \end{cases} \quad (1.31)$$

Nous posons les conditions suivantes :

- (i) Comme la courbe initiale Γ reste sur la surface intégrale S , le vecteur tangent à Γ sera perpendiculaire au vecteur normal \vec{n} à la surface S :

$$\vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{du}{ds} \right) \perp \vec{n} = (p(s), q(s), -1).$$

Donc le produit scalaire, $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$ et par conséquent

$$p(s) \cdot \frac{dx}{ds} + q(s) \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{du}{ds}. \quad (1.32)$$

- (ii) Comme la courbe initiale Γ est élément de la surface intégrale S , elle doit obéir à l'équation (1.1). Ce qui correspond à la seconde condition :

$$F(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) = 0. \quad (1.33)$$

L'intégration du ruban caractéristique, soit le système (1.29), sujet aux conditions initiales décrites aux équations (1.32) et (1.33) nous permet de déterminer les fonctions x , y , u , p et q en termes de s et t .

- (iii) Nous ajoutons une troisième condition qui nous assure que la solution u peut s'exprimer en termes de x et de y si le jacobien est non nul,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \neq 0. \quad (1.34)$$

La troisième condition nous permet de trouver la transformation inverse (voir le théorème des fonctions implicites à l'annexe B).

$$s = s(x, y) \quad \text{et} \quad t = t(x, y).$$

Donc, nous avons exprimé u en termes de x et de y .

$$u = u(s, t) = u(s(x, y), t(x, y)) = u(x, y). \quad (1.35)$$

1.5. CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ

1.5 Conditions de compatibilité

Il nous reste maintenant, à discuter les conditions de compatibilité des équations $p = u_x$ et $q = u_y$ pour lesquelles $p_y = q_x$. Pour cela, nous précéderons de manière analytique en se basant sur la démonstration faite par R. Courant et D. Hilbert [5]. En vertu des équations (1.31) et (1.34), une courbe initiale Γ sur la surface intégrale S , est définie par

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \\ u = u(s, t) \end{cases} \Leftrightarrow u = u(x, y) \Leftrightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \neq 0.$$

Démontrons que $p = u_x$ et $q = u_y$ admet une solution unique, c'est-à-dire que

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Démonstration.

Comme le jacobien de x et de y soit non nul, (équation (1.34)),

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial s & \partial y / \partial s \\ \partial x / \partial t & \partial y / \partial t \end{bmatrix} \neq 0,$$

alors, si nous multiplions l'équation (1.36) par \mathcal{J} , nous obtenons le système

$$\begin{bmatrix} u_x \cdot \partial x / \partial s + u_y \cdot \partial y / \partial s \\ u_x \cdot \partial x / \partial t + u_y \cdot \partial y / \partial t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \cdot \partial x / \partial s & q \cdot \partial y / \partial s \\ p \cdot \partial x / \partial t & q \cdot \partial y / \partial t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

D'autre part, les dérivées de u par rapport à s et t s'expriment par :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_x \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + u_y \cdot \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Donc, en substituant les équations (1.38) dans l'équation (1.37) nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \partial u / \partial s - (p \cdot \partial x / \partial s + q \cdot \partial y / \partial s) \\ \partial u / \partial t - (p \cdot \partial x / \partial t + q \cdot \partial y / \partial t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

1.5. CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ

ou encore,

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \left(p \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) = 0, \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(p \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + q \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.41)$$

En substituant l'équation (1.29) dans l'équation (1.41), nous obtenons :

$$p \cdot F_p + q \cdot F_q - (p \cdot F_p + q \cdot F_q) \equiv 0.$$

Maintenant, définissons le côté gauche de l'équation (1.40) comme étant une certaine fonction $Z(s, t)$.

$$Z(s, t) = \frac{\partial u}{\partial s} - \left(p \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right), \quad (1.42)$$

ensuite, posons comme conditions initiales que

$$t = 0, \quad Z(s, 0) = 0. \quad (1.43)$$

Nous arrivons à la question suivante : Est-ce que $Z(s, t) \equiv 0$ pour $\forall t > 0$?

En premier lieu, dérivons Z par rapport à t

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \left(p \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \right) \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} - p \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - q \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - p \frac{\partial x}{\partial t} - q \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.44)$$

La substitution de l'équation (1.41) dans l'équation (1.44), donne

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t},$$

en tenant compte des équations du ruban caractéristique (équation (1.29)), nous obtenons que :

1.5. CONDITIONS DE COMPATIBILITÉ

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial t} &= (F_x + p \cdot F_u) \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + (F_y + q \cdot F_u) \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} \cdot F_p + \frac{\partial q}{\partial s} \cdot F_q \\ &= \frac{\partial p}{\partial s} \cdot F_p + \frac{\partial q}{\partial s} \cdot F_q + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot F_u + \frac{\partial x}{\partial s} \cdot F_x + \frac{\partial x}{\partial s} \cdot F_x + p \cdot F_u \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot F_u \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} \cdot F_u.\end{aligned}$$

Nous parvenons donc à l'équation suivante :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial s} \cdot F_p + \frac{\partial q}{\partial s} \cdot F_q + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot F_u + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot F_y + \frac{\partial x}{\partial s} \cdot F_x + p \cdot F_u \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot F_u \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} \cdot F_u. \quad (1.45)$$

Revenons à l'équation (1.1) que nous dérivons par rapport à s pour d'obtenir

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} \cdot F_p + \frac{\partial q}{\partial s} \cdot F_q + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot F_u + \frac{\partial x}{\partial s} \cdot F_x + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot F_y = 0. \quad (1.46)$$

En substituant l'équation (1.46) dans l'équation (1.45), nous obtenons que

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial s} &= p \cdot F_u \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot F_u \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} \cdot F_u \\ &= F_u \cdot \underbrace{\left(p \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + q \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial s} \right)}_{-Z} \\ &= -F_u \cdot Z(s, t).\end{aligned}$$

Ainsi, nous venons de réécrire l'équation (1.45) en une EDP de la forme

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -F_u \cdot Z(s, t). \quad (1.47)$$

Considérant les conditions initiales (1.43), si nous résolvons l'EDP (1.47) par la méthode de séparation des variables

$$Z(s, t) = Z(s, 0) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t (F_u \cdot dt') \right\} \equiv 0. \quad (1.48)$$

En tenant compte de l'équation (1.40), l'équation (1.37) est satisfaite si et seulement si $Z(s, t) \equiv 0$; ce qui démontre que $p = u_x$ et $q = u_y$ (1.36). \square

1.6. EXEMPLE

1.6 Exemple

Trouvons la solution générale de l'équation suivante :

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2) + (u_x - x) (u_y - y) - u = 0 \quad (1.49)$$

assujettie aux conditions initiales suivantes :

$$\text{pour } t = 0, \quad x(s, 0) = s, \quad y(s, 0) = 0, \quad u(s, 0) = 0. \quad (1.50)$$

Substituons $p = u_x$ et $q = u_y$ dans l'équation (1.49). Nous obtenons l'équation suivante :

$$F(x, y, u, p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) + (p - x)(q - y) - u = 0. \quad (1.51)$$

Trouvons les conditions initiales pour $p(s,0)$ et $q(s,0)$ à l'aide des deux premières conditions ; soient les équations (1.32) et (1.33). De l'équation (1.32), nous avons que

$$p(s, 0) \cdot 1 + q(s, 0) \cdot 0 = 0;$$

donc,

$$p(s, 0) = 0. \quad (1.52)$$

De l'équation (1.33), nous avons

$$\frac{1}{2}(q^2 + 0^2) + (0 - s)(q - 0) - 0 = 0.$$

Donc,

$$p(s, 0) = 0, \quad (1.53a)$$

$$q(s, 0) = 2s. \quad (1.53b)$$

Intégrons les équations du ruban caractéristique (1.29),

1.6. EXEMPLE

$$\frac{dx}{dt} = F_p = p + q - y, \quad (1.54a)$$

$$\frac{dy}{dt} = F_q = p + q - x, \quad (1.54b)$$

$$\frac{du}{dt} = p \cdot F_p + q \cdot F_q = p \cdot (p + q - y) + q \cdot (p + q - x), \quad (1.54c)$$

$$\frac{dp}{dt} = -(F_x + p \cdot F_u) = -(-(q - y) + p \cdot (-1)) = p + q - y, \quad (1.54d)$$

$$\frac{dq}{dt} = -(F_y + q \cdot F_u) = -(-(p - x) + q \cdot (-1)) = p + q - x. \quad (1.54e)$$

Des équations (1.54a) et (1.54d), nous avons que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt},$$

cela implique que

$$x(s, t) = p(s, t) + \varphi(s).$$

En appliquant les conditions initiales (1.53), nous avons pour $t = 0$:

$$\varphi(s) = s, \quad x(s, t) = p(s, t) + s.$$

Nous obtenons donc l'équation suivante :

$$x = p + s. \quad (1.55)$$

Des équations (1.54b) et (1.54e), nous avons que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dq}{dt}, \quad \Rightarrow y(s, t) = q(s, t) + \gamma(s).$$

En appliquant les conditions initiales (1.53), nous avons pour $t = 0$,

$$\gamma(s) = -2s, \quad y(s, t) = q(s, t) - 2s.$$

Nous obtenons donc l'équation suivante :

$$y = q - 2s. \quad (1.56)$$

1.6. EXEMPLE

Par les équations (1.54a), (1.54d) et (1.54e), nous avons la relation :

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} - \frac{dx}{dt} &= p + q - x, \\ \Rightarrow \frac{d(p + q - x)}{dt} &= p + q - x \\ \Rightarrow \frac{d(p + q - x)}{p + q - x} &= dt.\end{aligned}$$

Posons $w = p + q - x$. Nous obtenons

$$\frac{dw}{w} = dt \quad \Rightarrow w = \rho(s) \cdot e^t \quad \Rightarrow p + q - x = \rho(s) \cdot e^t.$$

En appliquant les conditions initiales (1.53), nous avons pour $t = 0$,

$$\begin{aligned}p(s, 0) + q(s, 0) - x(s, 0) &= \rho(s) \\ \Rightarrow 0 + 2s - s &= \rho(s) \\ \Rightarrow \rho(s) &= s \\ \Rightarrow p + q - x &= s \cdot e^t.\end{aligned}\tag{1.57}$$

Des équations (1.54b), (1.54d) et (1.54e), nous avons la relation :

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dt} - \frac{dy}{dt} &= p + q - y \\ \Rightarrow \frac{d(p + q - y)}{dt} &= p + q - y \\ \Rightarrow \frac{d(p + q - x)}{p + q - x} &= dt.\end{aligned}$$

Posons $w = p + q - y$. Nous obtenons

$$\frac{dw}{w} = dt \quad \Rightarrow w = \mu(s) \cdot e^t \quad \Rightarrow p + q - y = \mu(s) \cdot e^t.$$

En appliquant les conditions initiales (1.53), nous avons pour $t = 0$:

1.6. EXEMPLE

$$\begin{aligned}p(s, 0) + q(s, 0) - y(s, 0) &= \mu(s) \\ \Rightarrow 0 + 2s - 0 &= \mu(s) \\ \Rightarrow \mu(s) &= 2s \\ \Rightarrow p + q - y &= 2s \cdot e^t.\end{aligned}\tag{1.58}$$

En résumé, nous avons.

$$\begin{aligned}x &= p + s, \\ y &= q - 2s, \\ p + q - x &= s \cdot e^t, \\ p + q - y &= 2s \cdot e^t.\end{aligned}$$

Les fonctions x , y , p et q peuvent maintenant s'écrire en termes de s et de t , d'où

$$\begin{aligned}x &= s \cdot (2e^t - 1), \\ y &= s \cdot (e^t - 1), \\ p &= 2s \cdot (e^t - 1), \\ q &= s \cdot (e^t + 1).\end{aligned}\tag{1.59}$$

Substituons l'équation (1.59) dans l'équation (1.54c), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= p \cdot (p + q - y) + q \cdot (p + q - x) \\ \Rightarrow u &= s^2 \cdot \left(\frac{5}{2} e^{2t} - 3 e^t \right) + l(s)\end{aligned}\tag{1.60}$$

Appliquons les conditions initiales (1.53) à l'expression de u (1.60)

$$0 = s^2 \cdot \left(\frac{5}{2} - 3 \right) + l(s) \quad \Rightarrow l(s) = \frac{1}{2} s^2.$$

Donc,

1.6. EXEMPLE

$$u = \frac{5}{2}s^2 \cdot (e^{2t} - 1) - 3s^2 \cdot (e^t - 1). \quad (1.61)$$

Afin que la solution (1.61) s'exprime en termes de x et de y , nous utilisons la troisième condition (équation (1.34)).

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} 2 \cdot e^t - 1 & 2s \cdot e^t \\ e^t - 1 & s \cdot e^t \end{vmatrix} = s \cdot e^t \neq 0.$$

Donc, il reste à exprimer les fonctions s et t en termes de x et de y . Utilisons les équations (1.59) et (1.61), nous obtenons :

$$e^t = \frac{y - x}{2y - x}, \quad s = x - 2y. \quad (1.62)$$

En substituant l'équation (1.62) dans l'équation (1.61), nous obtenons la solution du problème de Cauchy (équation (1.49)) soumise aux conditions définies par les équations (1.50), (1.52) et (1.53).

$$u = \frac{1}{2}y(4x - 3y). \quad (1.63)$$

Chapitre 2

Fondements de la théorie des systèmes d'équations quasilinéaires de type hyperbolique à deux variables indépendantes

2.1 Définitions de base

Dans ce chapitre, nous allons restreindre notre étude aux EDP de fonctions à deux variables indépendantes [3], [6], [7], [8], [9], [10], [11] et [12]. Soit le système de m relations

$$\mathcal{F}_i \left(x, t, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = 0, \quad i \in [1, \dots, m] \quad (2.1)$$

associé aux fonctions inconnues $u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)$ ainsi qu'à leurs dérivées premières par rapport à x et à t $\frac{du_1}{dx}, \dots, \frac{du_n}{dx}, \frac{du_1}{dt}, \dots, \frac{du_n}{dt}$ est appelé un **système d'EDP de premier ordre** pour les fonctions u_1, \dots, u_n . Le système (2.1) est bien posé si $m = n$. Nous allons nous limiter qu'à ce cas uniquement.

Introduisons les vecteurs

2.1. DÉFINITIONS DE BASE

$$\begin{cases} u &= (u_1, \dots, u_n), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right). \end{cases}$$

De cette façon, nous pouvons réécrire le système (2.1) d'une façon plus compacte.

$$\mathcal{F}_i \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Les fonctions $u_i = u_i(x, t)$ possédant leurs premières dérivées continues et satisfaisant le système (2.2) constituent une **solution** du système (2.1). Si le système d'EDP (2.2) peut être représenté en une forme résolue pour les dérivées des fonctions u_1, \dots, u_n par rapport à une des variables (par exemple, t)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \varphi_i \left(x, u, t, \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

alors cette forme du système (2.2) est appelée la **forme normale**. Le système (2.3) sera un système du type de Cauchy-Kovalevskaya. Nous remarquons que la réduction du système (2.2) en une forme normale par la transformation des variables x et t est admissible.

Le système (2.2) est appelé un **système d'équations quasilineaires** si les fonctions \mathcal{F}_i sont linéaires en $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. Si le système est linéaire en u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ alors le système (2.2) est appelé **linéaire**.

Un système d'équations quasilineaires de premier ordre peut être écrit sous la forme suivante

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = c_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

où les coefficients a_{ij} , b_{ij} et c_i dépendent de x , t et u . Si les coefficients a_{ij} et b_{ij} ne dépendent pas de u , alors le système (2.4) est appelé **semilineaire**. Dans ce cas, si c_i dépend linéairement de u , alors c'est linéaire. Il est possible de

2.1. DÉFINITIONS DE BASE

simplifier la notation pour le système (2.4) si nous introduisons les vecteurs u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ considérés plus haut, le vecteur $c = (c_1, \dots, c_n)$ et les matrices,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}).$$

En utilisant la notation matricielle, nous considérons que les symboles $A \cdot \mu$ et $\mu \cdot A$ représentent des vecteurs avec des composantes calculées selon les règles.

$$(A \cdot \mu)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \mu_j, \quad (\mu \cdot A)_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \mu_j = (A^T \mu)_k \quad (2.5)$$

où $k = 1, \dots, n$ et A^T est la matrice transposée de A .

Si la matrice A est symétrique, alors $A = A^T$ et $A \cdot \mu = \mu \cdot A$. Sous l'hypothèse que nous considérons des matrices et des vecteurs réels, le produit scalaire des vecteurs u et v est défini par :

$$u \cdot v = (u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

De l'équation (2.5), il s'ensuit que

$$v(A \cdot \mu) = (vA) \cdot \mu = vA \cdot \mu.$$

La **norme d'un vecteur u** est la quantité

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

La **norme spectrale d'une matrice A** [12] est le plus petit nombre $\|A\|$ tel que pour n'importe quel vecteur u l'inégalité suivante est vérifiée

$$\|Au\| \leq \|A\| \|u\|.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\|A\| = \sqrt{\lambda},$$

2.1. DÉFINITIONS DE BASE

où λ est la plus grande valeur propre de la matrice AA^T (ou $A^T A$). Puisque $\lambda \leq \text{Tr}(AA^T)$, il s'ensuit que

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum a_{ij}^2}.$$

Un vecteur

$$l = [l_1, \dots, l_n]$$

et un nombre ξ sont appelés respectivement un **vecteur propre à gauche** et une **valeur propre de la matrice A** si

$$lA = \xi l, \quad \|l\| \neq 0. \quad (2.6)$$

De façon similaire, nous définissons un vecteur r comme étant un **vecteur propre à droite** d'une matrice A si

$$Ar = \xi r, \quad \|r\| \neq 0. \quad (2.7)$$

En vertu des équations (2.5) et (2.6), nous pouvons affirmer qu'une valeur propre de A (ξ) est une racine de l'équation caractéristique.

$$\det(A - \xi I) = 0. \quad (2.8)$$

Pour chaque valeur propre ξ d'une matrice A (ξ) correspond un espace linéaire engendré par un vecteur propre à gauche l et d'un vecteur propre de droite r . Les dimensions de ces espaces sont égales à $n - \beta$ où β est le rang de la matrice

$$A - \xi E = (a_{ij} - \xi \delta_{ij}). \quad (2.9)$$

Or, nous savons que le rang de la matrice (2.9) n'est pas inférieur à $(n - \alpha)$ où α est la multiplicité de la racine ξ donnée par l'équation (2.8). Nous considérons que les valeurs propres ξ de A sont réelles car, par hypothèse, nous avons supposé que nous les matrices et les vecteurs sont réels. Notons ces valeurs propres en ordre croissant.

$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n. \quad (2.10)$$

Le signe d'égalité de l'équation (2.10) représente le cas où il y a multiplicité d'au moins une racine ξ et ce signe sera répété dans l'équation (2.10) autant de fois que la multiplicité de la racine ξ .

2.1. DÉFINITIONS DE BASE

Si pour chaque valeur propre ξ de A de multiplicité α , le rang de la matrice défini par l'équation (2.9) est égal à $(n - \alpha)$, alors les vecteurs propres de gauche (l) et de droite (r) correspondront à toutes les valeurs propres d'une base de l'espace E_n .

De plus, dans ce cas, nous supposons qu'il existe des vecteurs propres l^1, \dots, l^n qui formeront une base de l'espace E_n , c'est-à-dire qui satisfont la condition

$$\det \Lambda = \det(l_i^k) = \det \begin{vmatrix} l_1^1 & \dots & l_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1^n & \dots & l_n^n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.11)$$

Ici, l'index du vecteur propre de gauche l^k correspond à la valeur propre ξ_k donnée par l'équation (2.10). Si $\xi_k \neq \xi_j$, alors l^k et r^j sont orthogonaux. Supposons que

$$l^k \cdot A = \xi_k \cdot l^k \quad \text{et} \quad A \cdot r^j = \xi_j \cdot r^j, \quad (2.12)$$

faisons la soustraction du produit de la première égalité de l'équation (2.12) par r^j du produit de la seconde égalité par l^k ; nous obtenons :

$$(\xi_k - \xi_j)l^k r^j = (l^k \cdot A)r^j - l^k \cdot (A \cdot r^j) = l^k(Ar^j) - l^k(Ar^j) = 0. \quad (2.13)$$

Puisque $\xi_k \neq \xi_j$, cela implique que l^k et r^j sont orthogonaux. Dans le cas où toutes les valeurs propres de A sont simples (ou non dégénérées), il ne peut pas y avoir de signe d'égalité dans l'équation (2.10), et les vecteurs propres de gauche et de droite sont définis par un système biorthogonal; c'est-à-dire que

$$l^k \cdot r^j = \sum_{a=1}^n l_a^k \cdot r_a^j = 0, \quad \forall k \neq j. \quad (2.14)$$

Si la matrice A est symétrique, nous pouvons supposer que $r^k = l^k$. Nous exigeons alors que les vecteurs propres de gauche l^k de A satisfont la condition de normalisation

$$\|l^k\| = 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Alors, si pour toute valeur $\xi = \xi_k$ le rang de la matrice défini par l'équation (2.9) est égal à $(n - \alpha)$, les vecteurs propres l^k forment une base normalisée

2.1. DÉFINITIONS DE BASE

dans E_n , donc ils satisfont l'équation (2.11). De plus, si A est symétrique, alors la base l^k peut être choisie comme base orthogonale.

Une matrice A est appelée **non singulière** si $\xi = 0$ n'est pas une valeur propre et **singulière** sinon.

Après ce bref aperçu des définitions d'algèbre linéaire, nous pouvons écrire le système décrit par l'équation (2.4) sous la forme :

$$A \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + B \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = c. \quad (2.16)$$

Dans le cas où la matrice A est non singulière, le système défini par l'équation (2.16) est réduit à la forme définie par l'équation (2.3). La transformation peut être écrite sous la forme suivante,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = b, \quad (2.17)$$

où $A_1 = A_1(x, t, u)$ et $b = b(x, t, u)$ sont une nouvelle matrice et un nouveau vecteur respectivement. Notre étude se limitera aux systèmes définis par l'équation (2.16) qui seront réduits en la forme normale définie par l'équation (2.17).

Notons que A dépend de u , c'est-à-dire de la fonction inconnue. Par contre, nous pouvons maintenant préciser les coefficients des systèmes définis par les équations (2.16) et (2.17). Nous pouvons utiliser l'une ou l'autre des deux méthodes suivantes :

- 1) Nous supposons que la solution $u = u(x, t)$ des systèmes définis par les équations (2.16) et (2.17) est une fonction dépendante des variables x et t . Les conditions initiales étant vérifiées.
- 2) Nous supposons que ces conditions initiales soient satisfaites (pour toutes valeurs de $u = u(x, t)$) dans plusieurs régions simplement connexes de l'espace (x, t, u) dans lesquelles le système d'équations quasilineaires et ses solutions sont considérés.

Dans la prochaine section, nous définirons les conditions définies par la seconde méthode.

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

2.2 Les directions caractéristiques d'un système d'équations quasilineaires

2.2.1 La dérivée directionnelle.

Soit $f(x, t)$ une fonction différentiable en x et en t . Pour tout point (x_0, t_0) nous considérons l'expression

$$A \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + B \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.18)$$

où A et B ne sont pas nuls simultanément. Pour tout A et B pour lesquels il y a continuité dans un voisinage près du point (x_0, t_0) , il est possible de trouver une courbe Γ passant par ce point tel que pour une certaine paramétrisation de (2.18), la courbe soit proportionnelle aux dérivées de $f(x, t)$ sur la courbe Γ respectivement au paramètre τ . Conséquemment, nous pouvons supposer que la courbe Γ est définie par les équations suivantes :

$$\Gamma : x = x(\tau), \quad t = t(\tau), \quad x(\tau_0) = x_0, \quad t(\tau_0) = t_0. \quad (2.19)$$

Sur la courbe Γ , la fonction $f(x, t)$ est alors une fonction de la variable, τ car :

$$f(x, t) = f(x(\tau), t(\tau)) = f(\tau).$$

De plus, nous exigeons que l'expression (2.18) soit proportionnelle à $f'(\tau)$ pour toute fonction f . Cette condition sera satisfaite si :

$$\frac{dx}{d\tau} = \alpha B, \quad \frac{dt}{d\tau} = \alpha A \quad (2.20)$$

où α est une fonction continue arbitraire dépendante de τ . Donc, la condition essentielle qui détermine de façon unique les directions de la courbe Γ au point (x_0, t_0) est la suivante

$$\frac{dx}{B} = \frac{dt}{A}. \quad (2.21)$$

La dérivée de la fonction f dans la direction de Γ est la dérivée $f'(\tau)$ pour la paramétrisation naturelle de Γ , où

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dans ce cas, le paramètre τ correspondra à la mesure d'arc de la courbe Γ . Si $\alpha = 1$, nous appelons à l'expression (2.18) la dérivée de f par rapport au paramètre τ dans la direction de Γ . Ce concept de base a d'importantes applications dans la théorie des EDP.

Considérons l'EDP la plus élémentaire.

$$A(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

où les fonctions A et B sont des fonctions continues et différentiables. Les équations

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = A(x, t), \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = B(x, t) \quad (2.23)$$

où l'équation (2.21) détermine une famille de courbes Γ à un seul paramètre. Le paramètre τ est déterminé de manière unique le long de ces courbes si plusieurs courbes γ_0 (choisies arbitrairement) coupent les courbes Γ . Nous notons alors $\tau = \tau_0$ (voir figure 2.1).

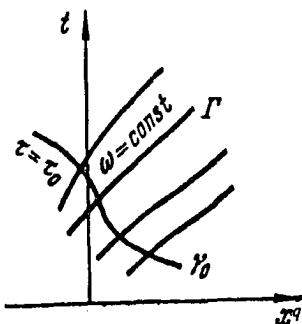


FIG. 2.1 – Famille de courbes à un paramètre

Pour chaque courbe Γ , nous assignons une certaine valeur pour plusieurs paramètres ω , par exemple, la longueur d'arc de la courbe γ_0 reliant n'importe quels points d'intersection avec la courbe Γ . Donc, pour tout point (x, t) correspond une et une seule paire de nombres τ et ω .

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

La fonction $u(x, t)$ doit être considérée comme une fonction dépendant des variables τ et ω . Les équations des courbes Γ ont la forme $\omega = \text{constante}$ d'où nous pouvons écrire l'équation (2.22) sous la forme suivante ;

$$\frac{\partial u(\tau, \omega)}{\partial \tau} = 0. \quad (2.24)$$

Cela implique que $u = F(\omega)$ est la solution générale de l'équation (2.22), et la fonction $u(x, t)$ est constante le long des courbes Γ . Les directions des courbes Γ définies par le vecteur $[B, A]$ sont appelées **les directions caractéristiques** de l'équation (2.22) et les courbes Γ sont appelées **courbes caractéristiques**.

Nous observons que la forme définie par l'équation (2.24) ne nous permet pas de supposer l'existence des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$. En effet, l'équation (2.24) est satisfaite par n'importe quelle fonction $F(\omega)$, en particulier, par une fonction discontinue. La fonction $u = F(\omega)$ dans ce cas peut être traitée comme une solution généralisée de l'équation (2.22).

2.2.2 Systèmes d'équations quasilinearaires de type hyperbolique.

Considérons le système d'EDP quasilinearaires

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = b. \quad (2.25)$$

Multipliant cette équation par la gauche par le vecteur propre de gauche l , nous obtenons l'équation scalaire

$$l \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + l \cdot A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = l \cdot b. \quad (2.26)$$

Si l est un vecteur propre de gauche de la matrice A , l'équation (2.26) s'écrit sous la forme suivante :

$$l \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = l \cdot b, \quad (2.27)$$

où ξ est la valeur propre correspondante de A .

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

Dans l'équation (2.27), toutes les composantes u_i du vecteur u sont dérivées dans la même direction. L'équation (2.27) réécrite en termes de ces composantes u_i devient :

$$\sum_{i=1}^n l_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^n l_i b_i.$$

Définissons par :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x},$$

la dérivée de $u_i(x, t)$ par rapport à t dans la direction de $\frac{dx}{dt} = \xi$. Nous observons que l'équation (2.27) est une combinaison linéaire des dérivées $\frac{du_i}{dt}$. L'équation

$$\frac{dx}{dt} = \xi$$

définit une direction de la dérivée dans l'équation (2.27) pour toute fonction $u_i(x, t)$ appelée **direction caractéristique** du système d'équations (2.25).

Nous appelons l'équation (2.25) un **système d'équations quasilinear** (2.25) **de type hyperbolique** si pour tout domaine D simplement connexe de l'espace des variables x, t et u si en chaque point de ce domaine, les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Toutes les valeurs propres $\xi = \xi_k(x, t, u)$ de la matrice $A = A(x, t, u)$ sont réelles.

(ii) Il existe une base

$$[l^1(x, t, u), \dots, l^n(x, t, u)] \subset E_n$$

étant un élément de E_n composée des vecteurs propres de gauche de A et sujette aux conditions de normalisation, c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs normalisés l^1, \dots, l^n satisfaisant l'équation (2.11).

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

Notons que si l'équation (2.25) est semilinéaire, les valeurs propres ξ_k et les vecteurs propres l^k ne dépendent pas de u . Par conséquent, les propriétés hyperboliques pour les systèmes semilinéaires sont définies dans un domaine des variables x et t pour une valeur de u arbitraire (dans une région cylindrique).

En lien avec la définition du type hyperbolique, soulignons que les conditions de différentiabilité des vecteurs propres à gauche l^k et des valeurs propres ξ_k sont souvent ajoutées aux conditions i) et ii). Par exemple, dans le livre de I.G. Petrovskii (1961), le système défini par l'équation (2.25) est de type hyperbolique si les conditions i) et ii) sont satisfaites et en plus, $\xi_k(x, t, u)$ et $l^k(x, t, u)$ possèdent la même différentiabilité que les éléments de la matrice $A(x, t, u)$.

Évidemment, nous devons recourir aux hypothèses de différentiabilité de ξ_k et l^k . Nous les imposerons si cela s'avère nécessaire. En lien avec ce que nous notons, quelle que soit la différentiabilité de ξ_k et l^k , il n'est pas toujours permis de se fier à une hypothèse concernant la différentiabilité de A .

Illustrons cette remarque à l'aide de l'exemple suivant. Soit le système de deux EDP quasilinearaires.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + a(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice A est de la forme suivante :

$$A(u) = \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ a(u_1, u_2) & u_2 \end{bmatrix}$$

et les valeurs propres sont $\xi_1 = u_1$ et $\xi_2 = u_2$. Les vecteurs propres $l^1 = (l_1^1, l_2^1)$ et $l^2 = (l_1^2, l_2^2)$ vérifient les équations suivantes :

$$0 \cdot l_1^1 + a(u_1, u_2) \cdot l_2^1 = 0, \quad 0 \cdot l_1^1 + (u_2 - u_1) \cdot l_2^1 = 0, \quad (2.28)$$

$$(u_1 - u_2) \cdot l_1^2 + a(u_1, u_2) \cdot l_2^2 = 0, \quad 0 \cdot l_1^2 + 0 \cdot l_2^2 = 0. \quad (2.29)$$

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

Utilisons la condition de normalisation avec laquelle nous déterminerons l^1 et l^2 dans la région où $u_1 \neq u_2$.

$$l^1 = [1, 0], \quad l^2 = \left[\frac{\frac{a(u_1, u_2)}{u_2 - u_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{u_2 - u_1}\right)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{u_2 - u_1}\right)^2}} \right]. \quad (2.30)$$

Dans le plan des variables (u_1, u_2) , nous considérons la droite $u_1 = u_2$. Si $a(u_1, u_2) \neq 0$, alors de l'équation (2.29) nous trouvons que

$$l^2 = [1, 0].$$

Par contre, la seconde condition du type hyperbolique n'est pas satisfaite pour la droite $u_1 = u_2$. Nous allons considérer plus en détails le cas $a(u_1, u_2) = 0$. Dans ce cas, les équations (2.28) et (2.29) sont satisfaites sur la droite $u_1 = u_2$ et pour (l^1, l^2) , il est possible de choisir n'importe quels deux vecteurs unitaires non colinéaires; le système sera alors de type hyperbolique.

Supposons par exemple que nous exigeons que les vecteurs l^1 et l^2 soient continus sur la droite $u_1 = u_2$.

Il est évident que le seul vecteur l^1 continu sur la droite $u_1 = u_2$ est

$$l^1(u_1, u_2) = [1, 0].$$

En ce qui concerne le vecteur l^2 , la continuité de la fonction $\frac{a(u_1, u_2)}{(u_2 - u_1)}$ doit être nécessaire afin que le vecteur l^2 soit continu. Par exemple, si

$$a(u_1, u_2) = |u_1 - u_2|^\alpha b(u_1, u_2), \quad b(u_1, u_2) \neq 0,$$

alors pour $\alpha > 1$, le vecteur l^2 continu désiré est donné par l'équation (2.30) (pour $u_1 \neq u_2$) et par

$$l^2(u_1, u_2) = [0, 1].$$

Pour $\alpha < 1$, il n'existe pas de vecteur l^2 continu.

Il est facile de vérifier que la continuité des n^e dérivées de l^2 . Si c'est nécessaire, il faut exiger que $a(u_1, u_2)$ a n dérivées continues et que la droite $u_1 = u_2$ a aussi ses $(n + 1)$ premières dérivées continues.

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

La situation est encore plus simple dans le cas d'un système d'EDP de type hyperbolique n'ayant que des équations de type hyperbolique.

Un système d'équations (2.25) est de type **strictement hyperbolique** dans un domaine simplement connexe D des variables, x , t et u si pour tout point de ce domaine, les valeurs propres ξ_1, \dots, ξ_n de la matrice A sont réelles et distinctes.

Dans ce cas, les valeurs propres peuvent être ordonnées et nous supposons que dans le domaine D

$$\xi_1(x, t, u) < \xi_2(x, t, u) < \dots < \xi_n(x, t, u).$$

Tel que vu à la section (2.1), les vecteurs propres $l^k(x, t, u)$ sont linéairement indépendants. Il est facile de vérifier que dans ce cas, $l^k(x, t, u)$ et $\xi^k(x, t, u)$ possèdent le même degré de différentiabilité que les éléments de $A(x, t, u)$.

De plus, en multipliant par le vecteur propre à gauche $l^k(x, t, u)$ le système d'équations (2.25) dans le domaine D , nous obtenons

$$l^k(x, t, u) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k(x, t, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_k(x, t, u), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

où

$$f_k = l^k \cdot b = \sum_{\alpha=1}^n l_{\alpha}^k b_{\alpha}.$$

De la seconde condition de la définition d'un système de type hyperbolique (2.25), il s'ensuit que le système (2.31) est équivalent au système (2.25).

Nous appelons l'équation (2.31) la **forme caractéristique** de l'équation (2.25). La forme étendue de ce système s'écrit

$$\sum_{\alpha=1}^n l_{\alpha}^k(x, t, u) \cdot \left(\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} + \xi_k(x, t, u) \cdot \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right) = f_k(x, t, u), \quad k = 1, \dots, n.$$

Parfois, nous réécrivons l'équation sous la forme suivante :

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

$$l^k(x, t, u) \cdot \left(\frac{du}{dt} \right)_k = f_k(x, t, u), \quad k = 1, \dots, n.$$

où

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_k = \frac{\partial u}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

2.2.3 Système d'équations non linéaires de type hyperbolique.

Considérons le système d'EDP non linéaires écrit sous la forme normale

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \varphi_i \left(x, t, v, \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

Posons

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \omega_i \quad (2.33)$$

et écrivons l'équation (2.32) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \varphi_i(x, t, v, \omega) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

Supposons que $\varphi_k(x, t, v, \omega)$ soit de classe C_2 . Définissons par $A(x, t, v, \omega)$ la matrice carrée d'ordre n

$$A = \left[\frac{\partial \varphi_k(x, t, v, \omega)}{\partial \omega_i} \right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \right]. \quad (2.35)$$

Nous appelons un système d'équations non linéaires **de type hyperbolique dans plusieurs domaines** [12], [13], [14], [15] et [16] de variation des variables x, t, v et ω si pour tout point de ces domaines les valeurs propres $\xi = \xi_k(x, t, v, \omega)$ sont réelles et des vecteurs propres de gauche de la matrice A , il est possible de construire une base de E_n .

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

Le système d'équations non linéaires de type hyperbolique défini par l'équation (2.32) se réduit à un système d'équations quasilinearaires de type hyperbolique. En dérivant chacune des équations du système défini par l'équation (2.32) et en utilisant la notation de l'équation (2.33), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i(x, t, v, \omega)}{\partial x} = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \omega_\alpha} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\alpha} \cdot \omega_\alpha + (\varphi_i)'_x = 0. \quad (2.36)$$

Dans l'équation (2.36), nous avons utilisé la sommation implicite par rapport à α où $\alpha = 1, \dots, n$.

En combinant les équations (2.34) et (2.36), nous obtenons un système de $2n$ équations

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\varphi(x, t, v, \omega), \quad (2.37a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + A(x, t, v, \omega) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = \bar{f}(x, t, v, \omega), \quad (2.37b)$$

où

$$\begin{cases} \bar{f}_i = -[\varphi_i(x, t, v, \omega)]'_x - \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_\alpha} \omega_\alpha, \\ v = [v_1, \dots, v_n], \\ \omega = [\omega_1, \dots, \omega_n], \\ \varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n], \\ \bar{f} = [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n] \end{cases} \quad (2.38)$$

duquel nous pouvons considérer un système d'équations quasilinearaires pour les $2n$ inconnues.

$$u = [u_1, \dots, u_{2n}] = [v_1, \dots, v_n, \omega_1, \dots, \omega_n] = [v_1, \dots, v_n, \frac{\partial v_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial x}].$$

Nous allons montrer que le système de $2n$ équations quasilinearaires défini par l'équation (2.37) est de type hyperbolique. Multiplions l'équation (2.37 b) par le vecteur propre à gauche $l^k(x, t, v, \omega)$ de la matrice $A(x, t, v, \omega)$. Nous obtenons

2.2. LES DIRECTIONS CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS QUASILINÉAIRES

$$l^k \cdot \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] = f_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

$$f_k = l^k \cdot \bar{f}. \quad (2.40)$$

De plus, le système (2.37) peut être écrit sous la forme suivante :

$$l^k \cdot \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] = f_k, \quad (2.41a)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = -\varphi_k(x, t, v, \omega), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.41b)$$

cela implique le type hyperbolique. Si $\varphi_k = \varphi_k(x, t, \omega)$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_i} \equiv 0,$$

alors l'équation (2.41a) peut être considérée indépendamment comme un système de n équations quasilinearaires de type hyperbolique pour les n variables inconnues $\omega_1, \dots, \omega_n$.

Par conséquent ce n'est pas possible d'avoir une équivalence entre les systèmes définis par les équations (2.32) et (2.41).

Premièrement, aucune solution v_k, ω_k du système défini par l'équation (2.41) n'est une solution $v_k(x, t)$ du système défini par l'équation (2.32). Ceci implique que la solution v_k, ω_k du système défini par l'équation (2.41) ne satisfait pas l'équation (2.33).

Il y aura satisfaction de l'équation (2.33) si la solution est satisfaite sur la droite $t = 0$. De plus, les solutions de l'équation (2.41) ont une solution générale $v(x, t)$ de l'équation (2.32) seulement si les conditions définies par l'équation (2.33) sont satisfaites. D'un autre côté, le fait qu'il n'y ait pas d'équivalence entre les systèmes définis par les équations (2.32) et (2.41) se manifeste également dans le cas où la solution satisfait l'équation (2.33) et où il y a exigence que $v(x, t)$ soit de classe C^2 . D'un autre côté, la définition d'une solution $v(x, t)$ de l'équation (2.32) exige seulement qu'elle soit continûment dérivable. Par conséquent, il y aura équivalence entre les systèmes définis par les équations (2.32) et (2.41) seulement pour les solutions $v(x, t)$ de classe C^2 .

2.3 Les invariants de Riemann

2.3.1 Les invariants de systèmes d'équations semilinéaires.

Dans chaque équation de la forme caractéristique, les fonctions $u_i(x, t)$ sont dérivables suivant une seule direction. Dans ce cas, des simplifications supplémentaires de la forme caractéristique sont possibles, soit par un changement de variable ayant comme conséquence que chacune des équations devient une seule fonction des variables, x , t et u dérivable.

Nous considérons le cas d'un système semilinéaire

$$\left(\frac{dr_k}{dt}\right)_k = \frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.42)$$

où

$$r_k = l^k \cdot u = l_\alpha^k \cdot u_\alpha, \quad g_k = f_k + u_\alpha \cdot \left(\frac{dl_\alpha^k}{dt}\right)_k = f_k + u_\alpha \cdot \left(\frac{\partial l_\alpha^k}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial l_\alpha^k}{\partial x}\right). \quad (2.43)$$

Depuis, pour un système de type hyperbolique,

$$\det \Lambda = \det(l_i^k) \neq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial[r_1, \dots, r_n]}{\partial[u_1, \dots, u_n]} = \det \Lambda \neq 0, \quad (2.44)$$

et les quantités $r_k(x, t, u)$ peuvent être considérées comme des nouvelles fonctions inconnues. Nous pouvons écrire u_1, \dots, u_n en fonction de r_1, \dots, r_n de l'équation (2.43) :

$$u_k = \lambda_\alpha^k \cdot r_\alpha = \lambda^k \cdot r \quad (2.45)$$

où

$$r = [r_1, \dots, r_n],$$

et λ_α^k sont les coefficients de la matrice Λ^{-1} inverse de la matrice Λ :

2.3. LES INVARIANTS DE RIEMANN

$$\Lambda = [l_i^k(x, t)], \quad \Lambda^{-1} = [\lambda_i^k(x, t)].$$

Substituons l'équation (2.45) dans les côtés droits des équations (2.43), nous obtenons :

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k(x, t, r), \quad k = 1, \dots, n.. \quad (2.46)$$

Ce système est appelé le **système exprimé en terme invariants de Riemann** [17], [14], [15] et [18].

Nous allons illustrer le concept d'invariants avec l'exemple de l'équation d'onde en une dimension

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

En réduisant cette équation en un système semilinéaire de type hyperbolique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

avec les formes caractéristiques

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) - a \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

D'où nous obtenons les invariants définis par l'équation (2.43) sont

$$r_1 = u - a \cdot v \quad \text{et} \quad r_2 = u + a \cdot v.$$

Remarquons que nous avons utilisé ici les vecteurs propres à gauche l^1 et l^2 qui sont non unitaires. Le système écrit en termes d'invariants devient

2.3. LES INVARIANTS DE RIEMANN

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0,$$

ce qui nous indique que l'invariant r_1 est constant le long des droites

$$x + a = \text{constante},$$

et que l'invariant r_2 est constant le long des droites

$$x - a = \text{constante}.$$

Par conséquent, nous avons

$$r_1 = f(x + a \cdot t) \quad \text{et} \quad r_2 = g(x - a \cdot t)$$

où f et g sont des fonctions arbitraires.

Si nous retournons à la fonction u , alors nous obtenons une solution générale caractéristique (forme d'Alembert) de l'équation d'onde, soit

$$u = \frac{f(x + a \cdot t) + g(x - a \cdot t)}{2}.$$

Dans le cas d'un système d'équations quasilineaires, les vecteurs propres de gauche l^k dépendent de x , t et u . Considérons les formes différentielles suivantes :

$$\omega_k(x, t, u, du) = l^k(x, t, u) du = l_\alpha^k(x, t, u) du_\alpha. \quad (2.47)$$

Supposons que chacune de ces formes soit considérée pour des valeurs fixes, les variables x et t ont un facteur d'intégration

$$u_k = u_k(x, t, u), \quad k = 1, \dots, n.$$

Nous avons que :

$$u_k(x, t, u) \cdot \omega_k(x, t, u, du) = u_k \cdot l_\alpha^k \cdot du_\alpha = \frac{\partial r_k(x, t, u)}{\partial u_\alpha} du_\alpha. \quad (2.48)$$

2.3. LES INVARIANTS DE RIEMANN

Suite à la multiplication de l'équation (2.31) par u_k nous obtenons les formes suivantes :

$$\left(\frac{dr_k(x, t, u)}{dt} \right)_k = \frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial x} = \bar{g}_k(x, t, u), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.49)$$

et

$$\bar{g}_k = u_f \cdot f_k + r'_{kt} + \xi \cdot r'_{kx}. \quad (2.50)$$

Dans l'équation (2.50), les quantités r'_{kt} et r'_{kx} sont les dérivées partielles de $r_k(x, t, u)$ respectivement par rapport à t et à x pour des valeurs fixes des variables

$$u = [u_1, \dots, u_n].$$

Puisque les fonctions $r_k(x, t, u)$ sont fonctionnellement indépendantes, nous pouvons écrire les variables u_k en termes de $r_k(x, t, u)$, après quoi nous obtenons de l'équation (2.49) le système d'équations quasilineaires

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial x} = g_k(x, t, r). \quad (2.51)$$

Les fonctions variables r_k sont appelées **les invariants de Riemann** et le système défini par l'équation (2.51) est un **système d'invariants**. Bernhard Riemann a été le premier à introduire ce concept dans ses travaux (1860). Si les systèmes définis par les équations (2.25) et (2.31) sont homogènes et ne dépendent pas explicitement de x et t ($A = A(u)$, $f \equiv 0$), alors les équations (2.51) sont aussi homogènes.

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \xi_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0, \quad (2.52)$$

c'est-à-dire que les fonctions $r_k(x, t)$ sont constantes le long des courbes intégrales des équations :

$$\frac{dx}{dt} = \xi_k(r(x, t)), \quad (2.53)$$

et ces courbes sont appelées les **caractéristiques du système** définies par l'équation (2.52).

Chapitre 3

Solutions d'équations d'ondes de Riemann pour les systèmes quasilineaires.

Au chapitre 2, nous avons utilisé le concept des invariants de Riemann pour résoudre un système d'EDP quasilineaire de type hyperbolique à deux variables indépendantes. Dans ce chapitre, nous allons appliquer la même méthode mais aux systèmes d'EDP quasilineaires de type hyperbolique à plusieurs variables indépendantes ($n \geq 2$).

3.1 Solution des ondes de Riemann.

Considérons un système non elliptique de m EDP quasilineaires à n variables indépendantes x^μ et l inconnues u^j ([19] et [20]) de la forme :

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (3.1)$$

Notons par H l'espace des variables dépendantes $u = (u^1, \dots, u^l)$ et par E les espaces des variables indépendantes $x = (x^1, \dots, x^n)$. Soit v une application lisse

$$v : E \rightarrow H,$$

nous pouvons considérer la différentielle de v comme une application linéaire

$$dv|_x : T_x E \rightarrow T_{v(x)} H \quad \forall x \in E.$$

3.1. SOLUTION DES ONDES DE RIEMANN.

Maintenant, pour chaque $x_0 \in E$, et pour toutes les applications lisses $v : E \rightarrow H$, nous allons considérer le sous-ensemble de toutes les applications telles que le rang $(dv|_{x_0}) = 1$.

Définition 3.1.

Soit une paire $(x_0, dv|_{x_0})$ où $x_0 \in E$ et $v : E \rightarrow H$ est une application lisse, alors v appelée **un élément simple intégral** si le rang $(dv|_{x_0}) = 1$.

Théorème 3.1.

Si $(x_0, dv|_{x_0})$ est un élément simple intégral alors il existe $(n + l)$ nombres réels

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad \beta^1, \dots, \beta^l$$

tels que

$$\frac{\partial v^j}{\partial x^\mu}(x_0) = \alpha_\mu \beta^j, \quad n = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l.$$

Démonstration.

Le rang $(dv|_{x_0}) = 1$ implique que la matrice de Jacobi évaluée au point x_0

$$\left(\frac{\partial v^j}{\partial x^\mu}(x_0) \right)$$

a un rang = 1. Par le théorème du rang minimal, cette matrice est décomposable. \square

Maintenant, si $v : E \rightarrow H$ est lisse et $(x_0, dv|_{x_0})$ est un élément simple intégral, alors il existe un voisinage $K(x_0)$ de x_0 tel que pour tout $x_1 \in K(x_0)$, $(x_1, dv|_{x_1})$ est un élément simple intégral. Donc, il en résulte une collection de $(n + l)$ valeurs réelles de fonctions différentiables

$$\begin{aligned} \alpha_\mu &: K \rightarrow \mathbb{R}, & \mu = 1, \dots, n \\ \beta^j &: K \rightarrow \mathbb{R}, & j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

3.1. SOLUTION DES ONDES DE RIEMANN.

tel que pour tout $x_1 \in K$

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}(x_1) = \alpha_\mu(x_1) \beta^j(x_1).$$

Nous allons utiliser la notion d'éléments simples intégraux pour obtenir les solutions d'ondes de Riemann associées au système (3.1).

Définition 3.2.

Une solution $u : E \rightarrow H$ du système quasilinéaire (3.1) est appelée une **solution d'ondes de Riemann** s'il existe un sous-ensemble ouvert $D \subseteq E$ et des fonctions réelles

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \quad \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^l, \quad \xi : E \rightarrow \mathbb{R}$$

tel que pour tout $x_0 \in D$, nous avons que

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu}(x_0) = \xi(x_0) \alpha_\mu(x_0) \beta^j(x_0). \quad (3.2)$$

Pour calculer des solutions d'ondes de Riemann, nous procédons de la façon suivante. Premièrement, nous nous interrogeons sur l'existence de fonctions $\in C^1$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^l : H \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaisant les égalités suivantes sur un sous-ensemble ouvert $U \subseteq H$.

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^s{}^\mu(u) \lambda_\mu(u) \gamma^j(u) = 0, \quad s = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

Supposons que de telles fonctions existent, alors nous identifions l'ensemble des fonctions γ^i à l'aide d'un champ de vecteurs tangents sur H en considérant la courbe intégrale du champ de vecteurs

$$\gamma = \gamma^j(u) \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

3.1. SOLUTION DES ONDES DE RIEMANN.

La courbe $\Gamma \in C^1$ sur H et nous paramétrisons celle-ci par R . Donc, Γ est l'image d'une certaine application $f: \mathbb{R} \rightarrow H$ définie par l'ensemble des équations différentielles ordinaires suivantes

595 ✓

$$\frac{df^j}{dR} = \gamma^j(f^1, f^2, \dots, f^l), \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.4)$$

La méthode de construction des fonctions λ et γ est la suivante : nous cherchons des fonctions $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que

$$\text{rang}(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) < l.$$

Pour chaque λ_μ , nous trouvons les fonctions γ^i , solutions de

$$(a_j^{s\mu} \lambda_\mu) \gamma^j = 0.$$

Une façon alternative est d'inverser les rôles de λ et de γ sont interchangés et nous trouvons les fonctions γ tel que

$$\text{rang}(a_j^{s\mu} \gamma^j) < n.$$

De plus, nous trouvons les solutions λ_μ vérifiant ;

$$(a_j^{s\mu} \gamma^j) \lambda_\mu = 0.$$

Supposons que nous avons construit un ensemble de fonctions (λ, γ) sur $U \subseteq H$ satisfaisant l'équation (3.3) et tel que Γ soit une courbe intégrale sur le champ de vecteurs dérivables γ sur U . Considérons les fonctions $f^*(\lambda_\mu)$; les fonctions $\lambda_\mu(u)$ sont "pulled back" sur la courbe $\Gamma \subset H$. Les fonctions $\lambda_\mu(u)$ deviennent des fonctions paramétrisées par R sur Γ . Afin de simplifier la notation, nous noterons $f^*(\lambda_\mu)$ par $\lambda_\mu(R)$. Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une différentielle de classe C^1 et définissons R comme étant une fonction implicite sur E par la relation

$$R = \phi(\lambda_\mu(R) \cdot x^\mu). \quad (3.5)$$

Nous avons le théorème suivant.

3.1. SOLUTION DES ONDES DE RIEMANN.

Théorème 3.2.

Soit (λ, γ) un ensemble de fonctions de classe C^1 satisfaisant l'équation (3.3) et tel que $f : \mathbb{R} \rightarrow H$ est une courbe intégrale du champ de vecteurs

$$\gamma^j(u) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

défini sur H et paramétrisé par R . Considérons pour une application de classe C^1 $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble des relations définies implicitement entre les variables, u^j , x^μ et R par

$$\begin{cases} R = \phi(\lambda_\mu(R) \cdot x^\mu), \\ u^j = f^j(R). \end{cases} \quad (3.6)$$

Les équations peuvent être résolues de sorte que R et u^j peuvent être les graphes sur un sous-ensemble ouvert $D \subseteq E$; alors les fonctions $u^j = f^j(R(x))$ constituent une solution exacte d'ondes de Riemann du système quasilinéaire (3.1). La fonction scalaire $R(x)$ est appelée un **invariant de Riemann**.

Démonstration.

La matrice de Jacobi est donnée par :

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \frac{df^j}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\mu},$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial \phi(\lambda_\mu(R) \cdot x^\mu)}{\partial x^\mu} = \left(x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\nu} + \lambda_\mu(R) \delta_\nu^\mu \right) \phi' \\ &= \frac{\phi \lambda_\mu(R) \delta_\nu^\mu}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi'}, \quad \text{pour } 1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi' \neq 0, \\ &= \frac{\phi \lambda_\nu(R)}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi'}, \quad \phi' = \frac{d\phi}{ds}, \quad s = \lambda_\mu(R) x^\mu. \end{aligned}$$

3.1. SOLUTION DES ONDES DE RIEMANN.

En appliquant le théorème des fonctions implicites (voir annexe B), la condition pour que R et u^j soient exprimés par le graphe d'un certain sous-ensemble ouvert D de E peut être montrée comme étant

$$1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi' \neq 0. \quad (3.7)$$

Cela évite le cas de la catastrophe du gradient. D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} &= \frac{df^j}{dR} \frac{\partial R}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{df^j}{dR} \left(\frac{\phi' \lambda_\mu(R)}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi'} \right) \\ &= \left(\frac{\phi'}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi'} \right) \frac{df^j}{dR} \lambda_\mu(R) \\ &= \left(\frac{\phi'}{1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi'} \right) \gamma^j \lambda_\mu(R) \\ &= \xi(x) \gamma^j \lambda_\mu(R), \quad \text{où } \gamma^j = \frac{df^j}{dR}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \xi(x) \gamma^j \lambda_\mu(R). \quad (3.8)$$

Nous venons de démontrer le principe de décomposition de Riemann des dérivées partielles comme le produit tensoriel de

$$\xi(x) \gamma^j \lambda_\mu(R)$$

sous la condition (3.7) est satisfaite. Afin de vérifier que u^j défini plus haut est vraiment une solution exacte, considérons

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l a_j^{s\mu}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\mu} = \sum_{\mu=1}^n \sum_{j=1}^l \phi' \left(1 - x^\mu \frac{d\lambda_\mu}{dR} \phi' \right)^{-1} a_j^{s\mu}(u) \gamma^j \lambda_\mu = 0$$

3.1. SOLUTION DES ONDES DE RIEMANN.

étant donné que l'équation (3.3) tient à chaque point de U et en particulier le long de $\Gamma \subset U$.

Il est bien connu que les conditions de compatibilité des conditions de l'équation (3.8) sont identiquement satisfaites, la quantité $\xi(x)$ peut être traitée comme une fonction arbitraire de x étant donné que ϕ soit arbitraire. \square

De plus, il est pratique du point de vue calculatoire de choisir la paramétrisation éliminant la fonction arbitraire ϕ dans l'équation (3.6). D'où nous réécrivons cette équation comme suit

$$u(x) = \bar{f}(\bar{R}), \quad \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} = \bar{\gamma}(\bar{f}),$$

$$\bar{R} = \bar{\lambda}_\mu(\bar{R}(x)) x^\mu, \quad a_j^{s\mu} \bar{\gamma}^j \bar{\lambda}_\mu = 0.$$

En changeant les variables dépendantes et en supposant que ϕ est inversible, nous avons que

$$\bar{R} = \phi^{-1} \circ R$$

dans l'équation et si nous définissons

$$\bar{\lambda}_\mu(\bar{R}) := \lambda_\mu(R),$$

nous obtenons alors

$$\bar{R}(x) = \lambda_\mu(R(x)) x^\mu = \bar{\lambda}_\mu(\bar{R}) x^\mu. \quad (3.9)$$

En vertu de l'équation (3.6), nous avons

$$\bar{\lambda}_\mu := \lambda_\mu \circ \phi \quad \text{et} \quad \bar{f} := f \circ \phi;$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{f}}{d\bar{R}} &= \frac{d(f \circ \phi(\bar{R}))}{d\bar{R}} \\ &= \frac{df(\phi(\bar{R}))}{dR} \frac{d\phi}{d\bar{R}} \\ &= \gamma(f \circ \phi(\bar{R})) \frac{d\phi}{d\bar{R}} := \bar{\gamma}(\bar{f}). \end{aligned}$$

3.2. EXEMPLES

Si nous effectuons les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{R} &:= \phi^{-1} \circ R, & \bar{\lambda}_\mu &:= \lambda_\mu \circ \phi, \\ \bar{f}^j &= f^j \circ \phi, & \bar{\gamma}^i(\bar{f}) &:= \gamma^i(f \circ \phi(\bar{R})) \frac{d\phi}{d\bar{R}}\end{aligned}$$

alors la relation (3.6) est équivalente à l'équation (3.9).

3.2 Exemples

Les exemples suivants donnent une illustration théorique de la construction des ondes de Riemann.

3.2.1 Exemple 1 : EDP quasilinéaire de type hyperbolique décrivant une onde.

Le premier exemple considère le cas $n = 3$ et $l = s = 1$, alors, il y a juste une équation à une inconnue et la solution d'ondes de Riemann est la solution générale donnée par la méthode des caractéristiques (voir chapitre 1).

Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad t > 0 \quad (3.10)$$

sujet aux conditions initiales

$$u(0, x, y) = \psi(x, y) \quad \text{pour } t = 0.$$

Nous cherchons les fonctions $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation (3.3), laquelle devient

$$\lambda_0 \gamma + u \lambda_1 \gamma + u^2 \lambda_2 \gamma = 0,$$

d'où nous avons

3.2. EXEMPLES

$$(\lambda_0 + u \lambda_1 + u^2 \lambda_2) \gamma = 0. \quad (3.11)$$

L'objectif est de déterminer s'il existe une solution non triviale γ . Si nous supposons que

$$\lambda_0 + u \lambda_1 + u^2 \lambda_2 = 0,$$

alors

$$\lambda_0 = -u \lambda_1 - u^2 \lambda_2,$$

et

$$\lambda = (-u \lambda_1 - u^2 \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 (-u, 1, 0) + \lambda_2 (-u^2, 0, 1).$$

Donc,

$$\lambda \in \text{span}\{(-u, 1, 0), (-u^2, 0, 1)\}. \quad (3.12)$$

Étant donné l'homogénéité de la relation d'onde (3.11), nous pouvons choisir, sans perte de généralité, le vecteur λ de la forme suivante :

$$\lambda = (-u, 1, 0) + \alpha(u) (-u^2, 0, 1) \quad (3.13)$$

pour $\alpha(u)$ arbitraire dans laquelle $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est également arbitraire. Par la construction obtenue au théorème 3.2 nous considérons une fonction $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie implicitement par l'équation (3.5).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow H$ la courbe intégrale des champs $\gamma(u) \frac{\partial}{\partial u}$, cette courbe $u = f(R)$ satisfait la condition

$$\frac{du}{dR} = \gamma(u).$$

Étant donné que γ est arbitraire, nous obtenons une courbe arbitraire de classe C^1 dans H . Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est arbitraire, alors la fonction R est définie implicitement par la relation

$$R = \phi((-u - \alpha u^2) t + x + \alpha y) = \phi(x - u t + \alpha(u) (y - u^2 t)).$$

3.2. EXEMPLES

Puisque $u = f(R)$, nous avons que

$$u = f(R) = f \circ \phi(x - u t + \alpha(u) (y - u^2 t)).$$

Mais f et ϕ étant arbitraires, nous obtenons que :

$$u(t, x, y) = F(x - u t + \alpha(u) (y - u^2 t)), \quad F = f \circ \phi \quad (3.14)$$

où u définit implicitement la solution d'ondes de Riemann pour des fonctions f et α arbitraires.

Dans ce cas, il faut généraliser la solution (3.14) car l'espace des covecteurs λ est de dimension 2 comme l'indique l'équation (3.12).

Par conséquent, il existe une fonction $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $u = f(R)$ est la solution générale de l'EDP de premier ordre où R est défini implicitement par l'équation (3.10)

$$R = \Psi(\tilde{\lambda}_\mu^1 x^\mu, \tilde{\lambda}_\mu^2 x^\mu) \quad (3.15)$$

où $\tilde{\lambda}_\mu^1$ et $\tilde{\lambda}_\mu^2$ sont les composantes des vecteurs $(-u, 1, 0)$ et $(-u^2, 0, 1)$ linéairement indépendants. Ce qui nous donne immédiatement la solution générale ayant la forme :

$$u = f \circ \Psi(x - u t, y - u^2 t).$$

Puisque f et Ψ sont arbitraires, nous avons la solution générale suivante

$$u = G(x - u t, y - u^2 t).$$

où $G = f \circ \Psi$. La solution est alors définie comme suit :

$$u(t, x, y) = \psi(x - u t, y - u^2 t). \quad (3.16)$$

Cette solution est connue dans la littérature comme étant une onde simple non-plane.

3.2. EXEMPLES

3.2.2 Exemple 2 : système d'EDP quasilinéaires de type hyperbolique décrivant une onde.

Considérons le système ayant deux variables dépendantes $(u^1, u^2) \in U$ et trois variables indépendantes $(t, x, y) \in F$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^1 \frac{\partial u^2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u^2}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^1}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

La relation d'onde (3.3) nous donne que :

$$\begin{aligned}\lambda_0 \gamma^1 + \lambda_1 \gamma^2 + u^1 \lambda_2 \gamma^2 &= 0, \\ \lambda_0 \gamma^2 + u^2 \lambda_1 \gamma^1 + \lambda_2 \gamma^1 &= 0.\end{aligned}$$

La relation de dispersion nous donne que

$$\lambda_0^2 - (\lambda_1 + u^1 \lambda_2) (\lambda_2 + u^2 \lambda_1) = 0.$$

Cela nous donne deux possibilités

$$\lambda_0^\epsilon = \epsilon \sqrt{(\lambda_1 + u^1 \lambda_2) (\lambda_2 + u^2 \lambda_1)}$$

selon $\epsilon = \pm 1$. De celles-ci, nous obtenons deux types de fonctions (λ, γ) :

$$\begin{aligned}\lambda^\epsilon &= \left(\epsilon \sqrt{(\lambda_1 + u^1 \lambda_2) (\lambda_2 + u^2 \lambda_1)}, \lambda_1, \lambda_2 \right), \\ \gamma^\epsilon &= \left(1, -\epsilon \sqrt{\frac{\lambda_2 + u^2 \lambda_1}{\lambda_1 + u^1 \lambda_2}} \right), \quad \epsilon = \pm 1.\end{aligned}$$

Plusieurs solutions d'ondes de Riemann peuvent être construites après une spécification de λ_1 et de λ_2 . Pour l'illustrer, nous montrons comment obtenir une famille de solutions explicites à deux paramètres en choisissant $\lambda_1 =$

3.2. EXEMPLES

$\lambda_2 = 1$ et $\phi =$ identité dans le cas où $\epsilon = 1$. Les équations différentielles ordinaires à résoudre sont :

$$\begin{cases} \frac{du^1}{dR} = 1, \\ \frac{du^2}{dR} = -\sqrt{\frac{1+u^2}{1+u^1}}, \end{cases}$$

ayant comme solution générale

$$\begin{aligned} u^1 &= R + c_1, \\ u^2 &= (c_2 - \sqrt{R + c_1 + 1})^2 - 1, \end{aligned}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Maintenant, choisissons $\phi =$ identité dans la relation implicite (3.5). La fonction R s'exprime comme une fonction de x , y et t .

$$R = \left(c_2 \sqrt{R + c_1 + 1} - (R + c_1 + 1) \right) t + x + y.$$

Il est facile de résoudre cette équation pour obtenir R explicitement :

$$R_{\pm} = \left(\frac{c_2 t \pm \sqrt{c_2^2 t^2 + 4(1+t)(x+y+c_1+1)}}{2(1+t)} \right)^2 - c_1 - 1,$$

et nous avons une famille de solutions d'ondes de Riemann à deux paramètres :

$$\begin{aligned} u_{\pm}^1 &= \left(\frac{c_2 t \pm \sqrt{c_2^2 t^2 + 4(1+t)(x+y+c_1+1)}}{2(1+t)} \right)^2 - 1, \\ u_{\pm}^2 &= \left(c_2 - \frac{c_2 t \pm \sqrt{c_2^2 t^2 + 4(1+t)(x+y+c_1+1)}}{2(1+t)} \right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Il peut être vérifié que u_{\pm}^1 et u_{\pm}^2 sont des solutions explicites du système (3.17). Évidemment, des choix différents de λ_1 , de λ_2 et de ϕ donneront des solutions différentes. Le problème de la classification de ces solutions est largement ouvert ; cependant, plusieurs résultats sont connus.

Chapitre 4

Les solutions d'ondes simples d'EDP décrivant un écoulement isentropique.

Au chapitre 3, nous avons trouvé la solution d'onde d'une EDP quasiliénaire de type hyperbolique. Dans ce chapitre, nous allons construire une solution d'onde simple, c'est-à-dire une seule onde, satisfaisant un système d'EDP quasiliénaires de type hyperbolique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible. Un exemple concret provenant de la dynamique des fluides.

4.1 Système d'EDP décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.

Les EDP décrivant l'écoulement non stationnaire isentropique d'un fluide compressible idéal ([14], [15], [19] et [21]), ont la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} + \frac{(\kappa - 1)}{2} a (\nabla \cdot \vec{u}) &= 0, \\ \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{2}{(\kappa - 1)} a \nabla a &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

où \vec{u} est la vitesse de l'écoulement, κ est la constante d'adiabacité,

4.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

est la vitesse de propagation du son dans le fluide et notons la dérivée convective, substantive ou Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla).$$

Pour simplifier les calculs, nous allons utiliser les notations suivantes :

- (i) $\gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ est le vecteur de polarisation associé à la vitesse et à la direction de la propagation de l'onde $(a, u^1, u^2, u^3) = (u^0, \vec{u}) \in \mathbb{R}^4$:
- (ii) $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ correspond à $(t, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$,
- (iii) $\vec{\gamma}, \vec{\lambda}$ représentent les trois dernières composantes de γ, λ . Ils représentent respectivement les éléments simples associés à la vitesse et à la direction de propagation de l'onde. Donc, $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ et $\vec{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$,

- (iv) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ est le produit scalaire dans l'espace euclidien E^3 ,

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2 + \alpha^3 \beta^3.$$

- (v) $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ est le produit vectoriel,

- (vi) le produit mixte est noté comme suit,

$$[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] := \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}),$$

- (vii) et

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2}{\kappa - 1} \alpha^0 \beta^0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

représente le produit scalaire dans l'espace en quatre dimensions (E^4).

4.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

Avec ces notations, le système (4.1) s'écrit sous la forme algébrique

$$\begin{aligned}(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda}) \gamma^0 + a \frac{(\kappa - 1)}{2} \vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma} &= 0, \\(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\gamma} + \frac{2a}{(\kappa - 1)} \vec{\lambda} \gamma^0 &= 0,\end{aligned}$$

détermine les éléments simples. De ces équations, les directions caractéristiques γ et λ , qui peuvent être du type 1) ou 2), ont des propriétés différentes [12] pour être déduites de la façon suivante

$$\begin{aligned}1) \quad \gamma &= \left(\frac{\kappa - 1}{2}, \vec{e} \right) \sim \lambda(u) = (\langle u, \gamma \rangle, -\vec{e}), \\2) \quad \gamma &= (0, \vec{e}) \sim \lambda(u) = ([\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}], -\vec{e} \times \vec{m}),\end{aligned}\tag{4.2}$$

où \vec{e} est un vecteur unitaire arbitraire en trois dimensions et \vec{m} est un vecteur arbitraire. De la seconde équation, il s'ensuit que si $\gamma^0 \neq 0$, alors $\vec{\lambda}$ est proportionnel à $\vec{\gamma}$.

Prenons $\vec{\gamma} = -\vec{\lambda} = \vec{e}$ où $\vec{e}^2 = 1$. Alors les équations déterminant les éléments simples se réduisent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma^0 (\lambda_0 - \vec{u} \cdot \vec{e}) - a \frac{(\kappa - 1)}{2} &= 0, \\(\lambda_0 - \vec{u} \cdot \vec{e}) - \frac{2a}{(\kappa - 1)} \gamma^0 &= 0.\end{aligned}$$

Cela implique que $\gamma^0 = \frac{\kappa - 1}{2}$ et $\lambda_0 = \langle u, \gamma \rangle$. De façon similaire, pour $\gamma^0 = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\kappa - 1}{2} a \lambda \cdot \gamma &= 0, \\\lambda_0 + u \cdot \lambda &= 0.\end{aligned}$$

D'où, en posant $\vec{\gamma} = \vec{e}$, nous obtenons $\vec{\lambda} = \vec{m} \times \vec{e}$ et $\lambda_0 = [\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]$, où \vec{m} est un vecteur arbitraire. Ces deux types d'éléments simples génèrent toutes

4.2. LES SOLUTIONS D'ONDES SIMPLES D'EDP DÉCRIVANT UN ÉCOULEMENT ISENTROPIQUE.

les solutions du système d'EDP (4.1). De plus, nous avons les propriétés suivantes.

- (i). Les solutions construites à partir des éléments du premier type sont seulement les solutions potentielles : $\nabla \times \vec{u} = 0$. Cependant, nous appelons ces solutions des éléments potentiels. En effet, soit $u^j(x)$ une solution construite des éléments simples du premier type, c'est-à-dire

$$u^j(x)_v = \xi^1(x) \gamma_1^j \lambda_v^1 + \dots + \xi^k(x) \gamma_k^j \lambda_v^k, \quad v, j = 0, 1, 2, 3.$$

Si nous restreignons notre étude aux variables spatiales ($v, j = 1, 2, 3$) et nous prenons en compte la forme des éléments simples du premier type définis par le système (4.2), alors nous avons que :

$$u_\beta^\alpha = -\xi^1 \gamma_1^\alpha \gamma_1^\beta - \dots - \xi^k \gamma_{(k)}^\alpha \gamma_k^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Cette expression est symétrique en α, β ; d'où $\nabla \times \vec{u} = 0$.

- (ii). Les solutions provenant des éléments simples du second type sont en général des solutions rotationnelles, $\nabla \times \vec{u} \neq 0$. Il est alors facile d'observer que

$$\nabla \times u = \xi^1 \vec{\gamma}_1 \times \vec{\lambda}^1 + \dots + \xi^k \vec{\gamma}_k \times \vec{\lambda}^k.$$

En général $\nabla \times \vec{u}$ n'est pas nul si des éléments du second type sont présents. En fait, pour de tels éléments et en vertu du second type du système (4.2), nous avons que

$$\vec{\gamma} \times \vec{\lambda} = -\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{m}).$$

4.2 Les solutions d'ondes simples d'EDP décrivant un écoulement isentropique.

La solution d'une telle EDP représente une courbe dans l'espace des variables dépendantes et cet espace est appelé l'espace hodographe. L'espace hodographe d'une onde simple est donné par une courbe caractéristique Γ

4.2. LES SOLUTIONS D'ONDES SIMPLES D'EDP DÉCRIVANT UN ÉCOULEMENT ISENTROPIQUE.

tangente à un vecteur caractéristique $\gamma(u)$. Si cette courbe Γ est donnée par $u = f(s)$, alors s doit être une fonction associée au gradient, proportionnel au vecteur caractéristique $\lambda(f(R))$, lié à γ . En utilisant ce fait, nous montrons que toute courbe dérivable dans l'espace en trois dimensions de u^1, u^2 et u^3 génère deux familles d'ondes simples dont une décrit un écoulement irrotationnel et l'autre, un écoulement rotationnel.

En effet, soit

$$u^1 = f^1(s), \quad u^2 = f^2(s), \quad u^3 = f^3(s),$$

une courbe paramétrisée par ses longueurs d'arcs s , alors les vecteurs unitaires tangents

$$\frac{d}{ds}(f^1, f^2, f^3) = \vec{f}'(s)$$

peuvent être utilisés pour construire les deux éléments simples des types 1) et 2) du système (4.2). Ils sont définis par :

1)

$$\begin{cases} \gamma &= \left(\frac{\kappa-1}{2}, f'(s)\right) \sim \lambda = (\langle u, \gamma \rangle, -\vec{f}'(s)), \\ \frac{du^j}{ds} &= \gamma(s), \quad j = 0, 1, 2, 3, \end{cases} \quad (4.3)$$

2)

$$\begin{cases} \gamma &= (0, \vec{f}'(s)) \sim \lambda = ([\vec{u}, \vec{f}', \vec{m}], -\vec{f}' \times \vec{m}), \\ \frac{du^j}{ds} &= \gamma(s), \quad j = 0, 1, 2, 3, \end{cases} \quad (4.4)$$

où le vecteur \vec{m} est un vecteur de fonctions arbitraires de s . En intégrant, nous obtenons

1)

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\kappa-1}{2} s + a_0, \vec{f}'(s) \right), \\ \lambda(s) &= \left(\frac{\kappa-1}{2} s + a_0 + \vec{f}' \cdot \vec{f}', -\vec{f}'(s) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2. LES SOLUTIONS D'ONDES SIMPLES D'EDP DÉCRIVANT UN ÉCOULEMENT ISENTROPIQUE.

2)

$$u = (a_0, \vec{f}^1(s)), \quad a_0 = \sqrt{\kappa \frac{P_0}{\rho_0}},$$

$$\lambda(s) = ([\vec{f}, \vec{f}^1, \vec{m}], -\vec{f}^1 \times \vec{m}).$$

Soit l'équation de Pfaff donnée par $ds = \xi \lambda_v(s) dx^v$. Dans chacun des cas, nous pouvons intégrer et nous obtenons

1)

$$s = \left[\psi \left(\frac{\kappa - 1}{2} s + a_0, \vec{f} \cdot \vec{f}^1 \right) t - \vec{f}^1 \cdot \vec{x} \right],$$

$$u = \left(\frac{\kappa - 1}{2} s + a_0, f^1(s), f^2(s), f^3(s) \right).$$

2)

$$s = \psi ([\vec{f}, \vec{f}^1, \vec{m}] t - [\vec{f}^1, \vec{m}, \vec{x}]),$$

$$u = (a_0, f^1(s), f^2(s), f^3(s)).$$

Le second cas admet la généralisation mentionnée à la section précédente s'il existe deux vecteurs indépendants : $\lambda, \tilde{\lambda}$ liés à γ . Par exemple, si \vec{m}_1, \vec{m}_2 et $\vec{\gamma}$ sont des vecteurs indépendants, alors nous utilisons le second cas de l'équation (4.1) pour obtenir les deux vecteurs indépendants

$$\begin{aligned} \lambda &= ([\vec{f}, \vec{f}^1, \vec{m}_1] t, -\vec{f}^1 \times \vec{m}_1), \\ \tilde{\lambda} &= ([\vec{f}, \vec{f}^1, \vec{m}_2] t, -\vec{f}^1 \times \vec{m}_2). \end{aligned}$$

La combinaison linéaire est un vecteur caractéristique. Cependant, l'équation de Pfaff contient deux coefficients arbitraires, $\xi(x)$ et $\tilde{\xi}(x)$

4.2. LES SOLUTIONS D'ONDES SIMPLES D'EDP DÉCRIVANT UN ÉCOULEMENT ISENTROPIQUE.

$$ds = \xi \lambda_v(s) dx^v + \tilde{\xi} \lambda_v(s) dx^v.$$

Sa solution est alors :

$$s = \theta \left([\vec{f}, \vec{f}', \vec{m}_1] t - [\vec{f}', \vec{m}_1, \vec{x}], [\vec{f}, \vec{f}', \vec{m}_2] t - [\vec{f}', \vec{m}_2, \vec{x}] \right), \quad (4.9)$$

où la fonction θ est une fonction arbitraire différentiable à deux variables. Les vecteurs \vec{m}_1 et \vec{m}_2 peuvent être choisis comme des constantes ; alors, en général, cela ne restreint pas les solutions. La fonction $u(s)$ est la même que celle de l'équation (4.8)

$$u = (a_0, f^1(s), f^2(s), f^3(s)). \quad (4.10)$$

Dans le cas où f est une fonction linéaire de s , $\vec{f} = s \vec{e}$, l'onde devient indépendante du temps. Sans perte de généralité, nous pouvons prendre $\vec{e} = (0, 0, 1)$, $\vec{m}_1 = (0, -1, 0)$ et $\vec{m}_2 = (1, 0, 0)$. Il s'ensuit que

$$s = \theta(x^1, x^2),$$

avec θ , une la fonction arbitraire. D'où l'écoulement peut être écrit de la façon suivante :

$$a = a_0, \quad u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \theta(x^1, x^2).$$

Par contre, ceci n'est pas intéressant du point de vue physique. Nous considérons alors l'équation (4.7) pour la forme de l'onde simple potentielle dans le cas où $f(s)$ est une fonction linéaire de s . Dans ce cas, nous pouvons écrire

$$a = \frac{\kappa - 1}{2} s + a_0, \quad u^1 = s, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = 0.$$

Nous pouvons toujours obtenir ces équations en utilisant les transformations galiléennes. Pour l'équation (4.7), définissons $s(x, t)$; nous obtenons alors

$$s = \left[\psi \left(\frac{\kappa + 1}{2} s + a_0 \right) t - x^1 \right].$$

4.2. LES SOLUTIONS D'ONDES SIMPLES D'EDP DÉCRIVANT UN ÉCOULEMENT ISENTROPIQUE.

Si $\frac{\kappa + 1}{2}s \ll a_0$, alors le terme $\frac{\kappa + 1}{2}s$ peut être négligé dans la dernière expression et nous avons la forme d'une onde acoustique

$$a = a_0, \quad u^1 = \psi (a_0 t - x^1),$$

ayant une vitesse de propagation égale à a_0 . La fonction ψ définit le profil de l'onde. Cependant, dans les cas généraux (4.7) et (4.8), nous discutons alors des fonctions ψ et θ qui définissent le profil des ondes appropriées.

Chapitre 5

Les solutions d'ondes doubles d'EDP décrivant un écoulement isentropique.

Au chapitre 3, nous avons trouvé la solution d'onde d'une EDP quasilinéaire de type hyperbolique. Au chapitre 4, nous avons généralisé cette méthode. En effet, une solution d'onde simple, satisfaisant un système d'EDP quasilinéaires de type hyperbolique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible a été construite. Dans ce chapitre, nous allons construire une solution d'ondes doubles correspondant à la superposition de deux ondes de Riemann satisfaisant le même système d'EDP.

5.1 Système d'EDP décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.

Le système (4.1) peut s'écrire sous une forme équivalente, soit

5.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial t} + \left(u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x^1} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x^3} \right) + \frac{\kappa - 1}{2} a \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \right) &= 0, \\
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^3} \right) + \frac{2}{\kappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x^1} &= 0, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x^3} \right) + \frac{2}{\kappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + \left(u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x^1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x^2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) + \frac{2}{\kappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x^3} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

À ce système, nous associons la décomposition de la dérivée partielle au sens de Riemann

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \gamma^\alpha \lambda_i, \tag{5.2}$$

où, nous associons

$$\begin{aligned}
(t, x, y, z) \sim \lambda &= (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_0, \vec{\lambda}) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \\
(a, u_1, u_2, u_3) = (u_0, \vec{u}) \sim \gamma &= (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma_0, \vec{\gamma}).
\end{aligned}$$

En substituant l'équation (5.2) dans le système (5.1), nous obtenons le **système caractéristique**

$$\begin{aligned}
(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \vec{\lambda}) \gamma_0 + \frac{\kappa - 1}{2} a \vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma} &= 0, \\
(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \lambda_1) \vec{\gamma} + \frac{2}{\kappa - 1} a \lambda_1 \gamma_0 &= 0, \\
(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \lambda_2) \vec{\gamma} + \frac{2}{\kappa - 1} a \lambda_2 \gamma_0 &= 0, \\
(\lambda_0 + \vec{u} \cdot \lambda_3) \vec{\gamma} + \frac{2}{\kappa - 1} a \lambda_3 \gamma_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Réécrivons ce système sous une forme matricielle.

5.2. EXEMPLES

$$A\gamma = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0 + (\vec{u} \cdot \vec{\lambda}) & a \frac{(\kappa-1)}{2} \lambda_1 & a \frac{(\kappa-1)}{2} \lambda_2 & a \frac{(\kappa-1)}{2} \lambda_3 \\ \frac{2a}{(\kappa-1)} \lambda_1 & \lambda_0 + \vec{u}\lambda_1 & 0 & 0 \\ \frac{2a}{\kappa-1} \lambda_1 & 0 & \lambda_0 + \vec{u}\lambda_2 & 0 \\ \frac{2a}{(\kappa-1)} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_0 + \vec{u}\lambda_3 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nous cherchons une solution non triviale γ . Il faut donc que le déterminant de la matrice A soit nul. Dans ce cas, nous avons deux possibilités correspondant aux deux cas énumérés pour le système (4.2)

(i)

$$\langle u, \gamma \rangle = \lambda_0 \Leftrightarrow \lambda = (\lambda_0, -\vec{e}) \Leftrightarrow \gamma = \left(\frac{\kappa-1}{2}, \vec{e} \right), \quad (5.4)$$

(ii)

$$[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}] = \lambda_0 \Leftrightarrow \lambda = (\lambda_0, -\vec{e} \times \vec{m}) \Leftrightarrow \gamma = (0, \vec{e}). \quad (5.5)$$

L'existence des ondes doubles est déterminée par deux conditions. De plus, une analyse systématique des ondes doubles du système (4.1) a déjà été présentée. [22].

5.2 Exemples

5.2.1 Ondes non dispersées avec des hodographes linéaires.

Comme premier exemple, nous allons considérer une solution représentée à l'aide d'une fonction hodographe linéaire que nous pouvons obtenir en utilisant des vecteurs constants γ . Du système (4.3), nous avons que

$$\begin{aligned} u^j &= \gamma_r^j R^r, \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ \lambda^r &= (\langle \gamma_r, \gamma_s \rangle R^r, -\vec{\gamma}_r), \quad r, s = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2. EXEMPLES

Nous obtenons alors

$$\lambda_{R^s}^r = (\langle \gamma_r, \gamma_s \rangle, 0, 0, 0),$$

exprime les produits vectoriels $\lambda^s \wedge \lambda^{(r)} \wedge \lambda_{R^r}^s$; sous la forme du déterminant, nous avons que

$$\Delta = \lambda^s \wedge \lambda^{(r)} \wedge \lambda_{R^r}^s = \det \begin{vmatrix} q^0 & q^1 & q^2 & q^3 \\ \langle \gamma_r, \gamma_s \rangle & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_0^r & -\gamma_r^1 & -\gamma_r^2 & -\gamma_r^3 \\ \lambda_0^s & -\gamma_s^1 & \gamma_s^2 & -\gamma_s^3 \end{vmatrix} = -\langle \gamma_r, \gamma_s \rangle \vec{\gamma}_r \times \vec{\gamma}_s,$$

où q^0, q^1, q^2 et q^3 sont les vecteurs unitaires le long des axes x^0, x^1, x^2 et x^3 .

Les conditions $\Delta_s^r \equiv 0, r \neq s$ peuvent être satisfaites dans les cas suivants :

- (i) $\vec{\gamma}_r$ et $\vec{\gamma}_s$ sont linéairement indépendants pour chaque paire $r, s = 1, 2, \dots, k$.
D'où nous avons seulement deux vecteurs indépendants

$$\gamma_1 = \left(\frac{\kappa - 1}{2}, \vec{e}_1 \right), \quad \gamma_2 = \left(\frac{\kappa - 1}{2}, -\vec{e}_2 \right).$$

Ce cas est connu des équations d'écoulement non stationnaires à une dimension.

- (ii)

$$\langle \gamma_r, \gamma_s \rangle = \frac{2}{\kappa - 1} \gamma_s^0 \gamma_r^0 + \vec{\gamma}_s \cdot \vec{\gamma}_r = \frac{\kappa - 1}{2} + \vec{e}_s \cdot \vec{e}_r = 0.$$

Si $\cos(120^\circ) \leq \frac{1-\kappa}{2} \leq 1$, il existe dans E_3 trois vecteurs unitaires \vec{e}_s satisfaisant la dernière condition, c'est-à-dire que l'angle entre \vec{e}_r et $\vec{e}_s, s \neq r$ est donné par $\cos(\varphi_{sr}) = \frac{1-\kappa}{2}$. Par exemple :

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{1-\kappa}{2}, A, 0 \right), \quad \vec{e}_3 = \left(\frac{1-\kappa}{2}, B, C \right),$$

où

5.2. EXEMPLES

$$A = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \kappa}{2}\right)^2}, \quad B = \frac{1 - \kappa^2}{4A}, \quad C = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \kappa}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \kappa^2}{4A}\right)^2}.$$

De plus, le vecteur λ^s dépend uniquement de R^s ; en effet

$$\begin{aligned} \langle \gamma_r, \gamma_s \rangle &= 0, \quad r \neq s, \\ \langle \gamma_s, \gamma_s \rangle &= \frac{\kappa + 1}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda^s = \left(\frac{\kappa + 1}{2} R^s, -\vec{e}_s \right).$$

Les équations de Pfaff sont séparables et leurs solutions sont données par ;

$$R^s = \psi^s \left(\frac{\kappa + 1}{2} R^s t - \vec{e}_s \cdot \vec{x} \right), \quad s = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

où ψ^s sont des fonctions différentiables arbitraires à une variable. Il faut noter que les solutions (5.7) possèdent une propriété intéressante. Lorsque $\psi^2 \equiv 0$ et $\psi^3 \equiv 0$ dans les solutions (5.7), nous obtenons la forme suivante :

$$\begin{aligned} u^j &= \gamma_1^j R^1, \quad R^1 = \psi^1 (\lambda_0 t + \vec{\lambda} \cdot \vec{x}), \\ \lambda^1 &= \left(\frac{\kappa + 1}{2} R^1 - \vec{e}_1 \right), \end{aligned}$$

qui représente l'onde simple la plus générale avec l'espace hodographe donné par la ligne $u^j = \gamma_1^j R^1$. Maintenant, remarquons que la solution

$$u^j = \gamma_s^j R^s, \quad R^s = \psi^s \left(\frac{\kappa + 1}{2} R^s t - \vec{e}_s \cdot \vec{x} \right) \quad (5.8)$$

est une somme de trois ondes simples indépendantes avec leurs espaces hodographes respectivement donnés par $u^j = \gamma_1^j R^1$, $u^j = \gamma_2^j R^2$ et $u^j = \gamma_3^j R^3$. De plus, leurs directions de propagation sont données respectivement par

5.2. EXEMPLES

les vecteurs unitaires \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . Les interactions linéaires entre ces ondes montrent qu'aucune des ondes n'interfère avec les autres. Ce phénomène apparaît seulement dans les cas où l'angle entre les directions de propagation est donnée par

$$\cos \varphi = \frac{1 - \kappa}{2}.$$

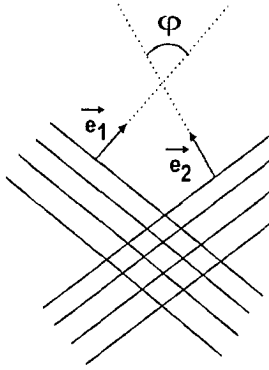


FIG. 5.1 – Angle φ entre deux ondes superposées

Lorsque $\varphi > 120^\circ$ (voir la figure (5.1)), il peut exister seulement deux ondes non dispersées. De plus, la constante κ doit aussi satisfaire

$$\left| \frac{1 - \kappa}{2} \right| \leq 1.$$

En général, les espaces hodographiques sont de la forme

$$u^j = \gamma_s^j R^s + u_0^j,$$

où $u_0^j = (a_0, u_0^1, u_0^2, u_0^3)$. L'introduction de ces termes ne change pas les considérations précédentes. Le second cas reste valide et les termes u_0^j se retrouvent dans λ_0^s qui domine dans les expressions suivantes pour les fonctions $R^s(x)$.

$$R^s = \psi^s \left(\left[\frac{\kappa + 1}{2} R^s + \langle u_0, \gamma_s \rangle \right] t - \vec{e}_s \cdot \vec{x} \right).$$

L'expression

5.2. EXEMPLES

$$\frac{\kappa + 1}{2} R^s + a_0, \quad s = 1, 2, 3,$$

représente la vitesse de propagation de l'onde par rapport au milieu dans lequel elle se propage.

5.2.2 Autres ondes non dispersées

Pour le second exemple, nous imposons des conditions plus fortes, soit $\lambda_{R^s}^r \equiv 0, r \neq s$ au lieu de $\Delta_s^r = \lambda^r \wedge \lambda^s \wedge \lambda_{R^s}^r \equiv 0$. Ce qui nous permet d'obtenir des solutions sous une forme fermée. En effet, il résulte que $\lambda_j^r = \lambda^r(R^r)$; d'où les équations de Pfaff $dR^s = \xi^s \lambda_v^s dx^v$ sont séparables et, dans le cas d'une onde simple, elles peuvent être intégrées. Nous obtenons que

$$R^s = \psi^s(\lambda_v^s(R^s) x^v), \quad s = 1, \dots, k \quad (5.9)$$

avec la fonction différentiable arbitraire ψ^s . Il est facile de voir que l'espace hodographe d'une telle solution peut être donné par l'équation (5.9). De plus, cela implique que seuls les éléments simples du premier type peuvent être composés d'une somme de fonctions dépendantes à une variable seulement; c'est-à-dire que

$$u = v_1(R^1) + \dots + v_k(R^k), \quad v = (v^0, v^1, v^2, v^3).$$

Nous sommes alors assurés que $\gamma_s = \frac{\partial u}{\partial R^s} = v'_s(R^s)$ dépend uniquement de R^s . Les fonctions $v_s(R^s), s = 1, \dots, k$ décrivent des courbes dans l'espace en trois dimensions engendré par u^1, u^2 et u^3 . Ainsi nous pouvons prendre les paramètres $R^s, s = 1, \dots, k$ pour être les mesures d'arcs de ces courbes. D'où $|\gamma_s| = 1$, et $\frac{\partial a}{\partial R^s} = \gamma_s^0 = \frac{\kappa - 1}{2}$. Comme la vitesse du son $a(R)$ devient une fonction linéaire des variables R^1, \dots, R^k soit

$$a = \frac{\kappa - 1}{2} (R^1 + \dots + R^k) + a_0.$$

De plus, nous avons que

$$\vec{\lambda}^s = -\vec{\gamma}_s = -(\vec{v}_s)'(R^s), \quad (\vec{v})' = (v^1, v^2, v^3),$$

5.2. EXEMPLES

et

$$\lambda_0^s = \langle \gamma_s, u \rangle = \frac{\kappa + 1}{2} (R^1, \dots, R^k) + a_0 + \vec{u} \cdot (\vec{v}_s)'. \quad (5.10)$$

La contrainte que λ_0^s dépende seulement d'un R^s donné, après la dérivation par rapport à R^r a comme conséquence,

$$\frac{\kappa - 1}{2} + (\vec{v}_s)' \cdot (\vec{v}_r)' = 0, \quad s \neq r. \quad (5.11)$$

Cela signifie que dans la solution précédente, l'angle entre les vecteurs unitaires $(\vec{v}_s)'$ et $(\vec{v}_r)'$, $s \neq r$ est donné par

$$\cos(\varphi_{rs}) = \frac{1 - \kappa}{2}.$$

Une simple considération géométrique conduit à la conclusion que, excepté dans le cas où $(\vec{v})'(R^s)$ est constant (comme le cas ci-dessus), il existe seulement deux vecteurs unitaires dont un seul est constant. Cependant, nous pouvons choisir

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1)'(R^1) &= \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \\ (\vec{v}_2)'(R^2) &= \vec{e}_2 = \left(\frac{1 - \kappa}{2}, A \cos(\varphi(R^2)), A \sin(\varphi(R^2)) \right) \\ &= \left(\frac{1 - \kappa}{2}, (v_2^2)', (v_2^3)' \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

où

$$A = \sqrt{1 - \frac{(1 - \kappa)^2}{4}},$$

et où $\varphi(R^2)$ sont des fonctions arbitraires. Cela signifie que la projection de $\frac{1}{A}\vec{v}_2(R^2)$ dans le plan engendré par u^2 et u^3 est une courbe arbitraire $v_2^2 = v_2^2(R^2)$, $v_2^3 = v_2^3(R^2)$ paramétrisée par ses longueurs d'arcs. D'où, en récapitulant

$$a = \frac{\kappa - 1}{2} (R^1 + R^2) + a_0, \quad (5.13)$$

$$\vec{u} = \vec{v}_1(R^1) + \vec{v}_2(R^2),$$

5.2. EXEMPLES

avec

$$\begin{aligned}\vec{v}_1(R^1) &= (R^1, 0, 0) + \vec{u}_0, \\ \vec{v}_2(R^2) &= \left(\frac{\kappa-1}{2} R^2, v_2^2(R^2), v_2^3(R^2) \right).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Notons que $(v^2(R^2), v^3(R^2))$ est une courbe uniforme paramétrisée de telle façon que $(v_2^2)^2 + (v_2^3)^2 = A^2$, a_0 et \vec{u}_0 soient constants. Les vecteurs caractéristiques γ et λ sont

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left(\frac{\kappa-1}{2}, 1, 0, 0 \right), \\ \gamma_2 &= \left(\frac{\kappa-1}{2}, \frac{1-\kappa}{2}, (v_2^2)', (v_2^3)' \right), \\ \lambda^1 &= \left(\frac{\kappa-1}{2} R^1 + a_0 + u_0^1, -1, 0, 0 \right), \\ \lambda^2 &= \left(\left(\frac{\kappa-1}{2} \right) R^2 + (\vec{v}_2)' \cdot (\vec{v}_2 + \vec{u}_0) + a_0, \frac{\kappa-1}{2}, -(v_2^2)' - (v_2^3)' \right).\end{aligned}$$

Les équations de Pfaff $dR^s = \xi^s \lambda_v dx^v$ sont séparables ; cela nous amène à

$$\begin{aligned}R^1 &= \psi^1 \left(\left[\frac{\kappa+1}{2} R^1 + a_0 + u_0^1 \right] t - x^1 \right), \\ R^2 &= \psi^2 \left(\left[\left(\frac{\kappa-1}{2} \right) R^2 + (\vec{v}_2)' \cdot (\vec{v}_2 + \vec{u}_0) + a_0 \right] t \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa-1}{2} x^1 - (v_2^2)'(R^2) x^2 - (v_2^3)'(R^2) x^3 \right).\end{aligned}$$

Ces équations, combinées avec les équations (5.13) et (5.14), donnent la solution (5.9). Elles décrivent également deux ondes simples non dispersées dépendant de trois fonctions à une variable ; c'est-à-dire ψ^1 , ψ^2 et la fonction $\varphi(R^2)$ définie par l'expression (5.12). Les vecteurs suivants sont les directions de propagation des ondes.

5.2. EXEMPLES

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{v}_1 = (1, 0, 0), \\ \vec{e}_2 &= \vec{v}_2 = \left(\frac{1-\kappa}{2}, (v_2^2)', (v_2^3) \right).\end{aligned}$$

Les quantités suivantes représentent la vitesse par rapport milieu dans lequel les ondes se propagent.

$$\begin{aligned}\lambda_1^1 &= \frac{\kappa+1}{2} R^1 + a_0, \\ \lambda_1^2 &= \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) R^2 + (\vec{v}_2)' \cdot (\vec{v}_2 + \vec{u}_0) + a_0.\end{aligned}$$

5.2.3 Ondes rotationnelles influencées par les ondes potentielles.

Comme troisième exemple, nous allons utiliser les deux types d'éléments simples. De cette façon, nous pourrions obtenir deux groupes de solutions. Dans le cas où seulement deux éléments simples sont considérés, nous retrouvons les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}i) \quad \Delta_2^1 &= 0, \quad \Delta_{\frac{1}{2}}^1 = 0, \\ ii) \quad \Delta_1^2 &= 0, \quad \Delta_1^{\tilde{2}} = 0,\end{aligned}\tag{5.15}$$

où nous supposons que l'indice 1 fait référence à l'élément du premier type et l'indice 2, au second type, lequel est rotationnel. De façon similaire aux premiers cas, nous sommes intéressés aux solutions avec des espaces hodographes qui sont seulement la somme des deux espaces hodographes d'ondes simples; c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}a &= \frac{\kappa-1}{2} s + a_0, \\ \vec{u} &= \vec{v}_1(s) + \vec{v}_2(\tau).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Notons

5.2. EXEMPLES

$$v_1(s) = \left(\frac{\kappa - 1}{2}, \vec{v}_1(s) \right), \quad v_2(t) = (a_0, \vec{v}_2(\tau)).$$

En utilisant la forme du déterminant du produit vectoriel dans le cas où les vecteurs \vec{m}_1 et \vec{m}_2 sont choisis comme des vecteurs constants, nous obtenons la forme suivante pour les Δ_s^r :

$$\begin{aligned} \Delta_2^1 &= \det \begin{vmatrix} q^0 & (q^1, q^2, q^3) \\ \langle v'_1, v'_2 \rangle & (0, 0, 0) \\ [\vec{u}, (\vec{v}_2)', \vec{m}_1] & -(\vec{v}_2)' \times \vec{m}_1 \\ \langle v'_1, u \rangle & -(\vec{v}_1)' \end{vmatrix} \\ &= \langle v'_1, v'_2 \rangle \vec{v}_1 \times ((\vec{v}_2)' \times \vec{m}_1), \\ \Delta_2^1 &= \langle v'_1, v'_2 \rangle \vec{v}_1 \times ((\vec{v}_2)' \times \vec{m}_2), \\ \Delta_1^2 &= \begin{vmatrix} [\vec{v}_1, (\vec{v}_2)', \vec{m}_1] & (0, 0, 0) \\ \langle u, v'_1 \rangle & -(\vec{v}_1)' \\ [\vec{u}, (\vec{v}_2)', \vec{m}_2] & -(\vec{v}_2)' \times \vec{m}_2 \\ [\vec{u}, (\vec{v}_1)', \vec{m}_1] & -(\vec{v}_2)' \times \vec{m}_1 \end{vmatrix} \\ &= -[(\vec{v}_1)', (\vec{v}_2)', \vec{m}_1][(\vec{v}_1)', (\vec{v}_2)' \times \vec{m}_2, (\vec{v}_2)' \times \vec{m}_1], \\ \Delta_1^2 &= -[(\vec{v}_1)', (\vec{v}_2)', \vec{m}_2][(\vec{v}_1)', (\vec{v}_2)' \times \vec{m}_2, (\vec{v}_2)' \times \vec{m}_1]. \end{aligned}$$

Cependant, les conditions (5.15) peuvent être satisfaites si les vecteurs $(\vec{v}_1)'(s)$ et $(\vec{v}_2)'(\tau)$ sont orthogonaux. Cela implique qu'une des directions $\vec{v}_1'(s)$ ou $(\vec{v}_2)'(\tau)$ doit être constante. Nous avons résumé nos résultats dans le tableau 5.1. Dans les deux cas, nous supposons que le plan de la courbe $u^1 = f^1$ et $u^2 = f^2$ est paramétrisé par ses longueurs d'arcs. En conséquence, nous arrivons au système de Pfaff suivant pour le cas A)

$$\begin{aligned} ds &= \xi^1 \left(\left[\frac{\kappa - 1}{2} s + a_0 \right] dt - dx^3 \right), \\ d\tau &= \xi^2 ([f^1 (f^2)' - (f^1)' f^2] dt - (f^2)' dx^1 + (f^1)' dx^2) + \xi^2 (-s (f^2)' dt + (f^2)' dx^3). \end{aligned}$$

5.2. EXEMPLES

TAB. 5.1 – Résumé des équations lorsque $\vec{v}_1'(s)$ ou $(\vec{v}_2)'(\tau)$ est constant

A) $\vec{v}_1'(s)$ constant	B) $\vec{v}_2'(t)$ constant
$a = \frac{\kappa - 1}{2} s + a_0$	$a = \frac{\kappa - 1}{2} s + a_0$
$u^1 = f^1(\tau)$	$u^1 = f^1(s)$
$u^2 = f^2(\tau)$	$u^2 = f^2(s)$
$u^3 = s + u_0^3$	$u^3 = \tau + u_0^3$
$\vec{m}_1 = (0, 0, 1)$	$\vec{m}_1 = (1, 0, 0)$
$\vec{m}_2 = (1, 0, 0)$	$\vec{m}_2 = (0, 1, 0)$

Les solutions sont données par la formule implicite suivante

$$s = \psi \left(\left[\frac{\kappa - 1}{2} s + a_0 \right] t - x^3 \right), \quad \tau = \Phi(\varphi(t, x), \tilde{\tau}(t, x^3)) \quad (5.17)$$

où Φ est une variable arbitraire à deux variables et $\tilde{\tau}(t, x^3)$ est la solution de l'équation de Pfaff

$$d\tilde{\tau} = \xi^2(-s dt + dx^3).$$

Cette équation est équivalente à l'équation linéaire

$$\frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial t} = -s(t, x^3) \tilde{\tau}_{x^3}. \quad (5.18)$$

Par φ , nous notons $[f^1(\tau) (f^2)'(\tau) - (f^1)'(\tau) f^2(\tau)] t - (f^2)'(\tau) x^1 + (f^1)'(\tau) x^2$.

Pour le cas B), nous obtenons les équations de Pfaff suivantes :

$$ds = \xi^1 \left(\left[\frac{\kappa - 1}{2} s + a_0 + f^1 (f^1)' + f^2 (f^2)' \right] dt - (f^1)' dx^1 - f^2 dx^2 \right), \quad (5.19)$$

$$d\tau = \xi^2(f^2 dt - dx^2) + \tilde{\xi}^2(-(f^1)' dt + dx^1), \quad f^i = f^i(s), \quad i = 1, 2.$$

5.2. EXEMPLES

De façon similaire au cas précédent, les solutions sont données par :

$$s = \psi \left(\left[\frac{\kappa - 1}{2} s + a_0 + f^1 (f^1)' + f^2 (f^2)' \right] t - (f^1)'(s) x^1 - f^2(s) x^2 \right)$$

et par linéarisation de l'équation (5.19), nous avons

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial x^1} f^1(s) + \frac{\partial \tau}{\partial x^2} f^2(s) = 0, \quad \tau = \tau(t, x^1, x^2). \quad (5.20)$$

De la seconde équation de (5.19), nous avons que

$$\frac{du^3}{dt} = 0.$$

Considérons le champ de vecteurs $\mathcal{L} = (1, f^1(s(t, x)), f^2(s(t, x)))$ dans l'espace engendré par t, x^1 et x^2 . La signification géométrique de l'équation (5.20) est que la fonction $\tau(t, x^1, x^2)$ est constante le long des courbes tangentes du champ de vecteurs $\mathcal{L}(t, x^1, x^2)$, et la variable x^3 n'est pas impliquée.

Dans les deux cas, la solution dépend de trois fonctions arbitraires à une variable et d'une fonction arbitraire à deux variables. Les deux fonctions f^1 et f^2 décrivent l'espace hodographe H ; l'autre fonction, c'est-à-dire ψ décrit le "profil" de l'onde potentielle. La fonction à deux variables définit la fonction $\tau(t, x)$, soit par la fonction Φ de l'équation (5.17) ou par les conditions initiales de l'équation (5.20). Le comportement de la fonction $\tau(t, x^1, x^2)$ définit le "profil" d'une onde rotationnelle dépendant de la fonction $s(t, x)$, qui décrit l'onde potentielle, et $s(t, x)$ ne dépend pas de τ . Ce fait est dû aux propriétés des ondes rotationnelles qui sont des écoulements isobares ; puisque la vitesse de l'onde potentielle, par rapport au milieu de propagation, dépend de la pression. Cependant, nous observons les effets du courant des ondes potentielles seulement par la vitesse des ondes rotationnelles.

Chapitre 6

Les solutions d'ondes triples d'EDP décrivant un écoulement isentropique.

Au chapitre 3, nous avons trouvé la solution d'onde d'une EDP quasilineaire de type hyperbolique. Aux chapitres 4 et 5, nous avons généraliser la méthode, en effet, nous avons trouvé respectivement des solutions d'ondes simples et d'ondes doubles satisfaisant un système d'EDP quasilineaires de type hyperbolique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible. Dans ce chapitre, nous allons construire une solution d'ondes triples correspondant à la superposition de trois ondes de Riemann satisfaisant le même système d'EDP.

6.1 Système d'EDP décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.

Une analyse systématique des ondes doubles du système (4.1) a été faite au chapitre 5. Nous pouvons généraliser cette analyse aux ondes triples. Nous cherchons une solution non triviale. Comme au chapitre 5, nous avons les deux mêmes possibilités correspondant aux deux cas énumérés pour le système (4.2), soient

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

(i)

$$\langle u, \gamma \rangle = \lambda_0 \Leftrightarrow \lambda = (\lambda_0, -\vec{e}) \Leftrightarrow \gamma = \left(\frac{\kappa-1}{2}, \vec{e} \right). \quad (6.1)$$

(ii)

$$[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}] = \lambda_0 \Leftrightarrow \lambda = (\lambda_0, -\vec{e} \times \vec{m}) \Leftrightarrow \gamma = (0, \vec{e}). \quad (6.2)$$

Ces conditions limitent les vecteurs γ et λ . Selon la littérature, la solution d'un système quasilinear existe pour le type de système d'EDP quasilinear (4.2) [20].

(1)

$$[\gamma_i, \gamma_j] = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

(2)

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial u^s} = \gamma_j^s \in \text{span}\{\lambda^i, \lambda^j\}. \quad (6.3)$$

La première condition est appelée la **condition de Frobenius**; condition qui garantit l'existence d'une hypersurface plongée dans l'espace hodographe H. Elle peut aussi s'écrire sous la forme

$$[\gamma_i, \gamma_j] = \frac{\partial \gamma_i}{\partial u^s} \gamma_j^s - \frac{\partial \gamma_j}{\partial u^s} \gamma_i^s = 0.$$

Comme conséquence de la première condition de l'équation (6.3) il existe une fonction dépendante f de trois variables, R^1 , R^2 et R^3 définie par

$$u^\alpha = f^\alpha (R^1, R^2, R^3), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

telle que

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial R^s} = \gamma_s^\alpha, \quad s = 1, 2, 3.$$

Maintenant, nous allons montrer que les éléments simples du premier type satisfont les conditions définies par l'équation (6.3). En effet, en ce qui concerne les éléments simples du premier type, les vecteurs γ_s et λ^s sont définis à partir de l'équation (6.1).

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

$$\gamma_s = \left(\frac{\kappa - 1}{2}, \vec{e}_s \right) := (\sigma, \vec{e}_s), \quad |\vec{e}_s|^2 = 1, \quad \sigma = \frac{\kappa - 1}{2} = \gamma_s^0, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \lambda^s &= \left(\frac{1}{\sigma} u^0 \gamma_s^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_s, -\vec{e}_s \right) = \left(\frac{1}{\sigma} u^0 \sigma + \vec{u} \cdot \vec{e}_s, -\vec{e}_s \right) \\ &= (u^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_s, -\vec{e}_s), \quad s = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Vérifions si la première condition est satisfaite, c'est-à-dire

$$[\gamma_s, \gamma_r] = 0, \quad r \neq s, \quad r, s = 1, 2, 3.$$

Nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial R^i} &= \frac{\partial u^0}{\partial R^j} = \gamma_0 = \sigma, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial R^i} &= \vec{\gamma}_i = \vec{e}_i, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial R^j} = \vec{\gamma}_j = \vec{e}_j, \quad |\vec{e}_i|^2 = |\vec{e}_j|^2 = 1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire qu'il existe un potentiel vectoriel $\vec{\varphi}$ tel que

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^i}.$$

Nous avons alors que

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^i}, & \vec{e}_j &= \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^j}, & i, j &= 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial R^j} &= \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^i \partial R^j}, & \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial R^i} &= \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^j \partial R^i} \\ & \Rightarrow \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial R^j} &= \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial R^i}. \end{aligned}$$

De plus, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial R^1} &= \sigma \Leftrightarrow u^0 = \sigma R^1 + f(R^2, R^3), \\ \frac{\partial u^0}{\partial R^2} &= \sigma \Leftrightarrow u^0 = \sigma R^2 + g(R^1, R^3), \\ \frac{\partial u^0}{\partial R^3} &= \sigma \Leftrightarrow u^0 = \sigma R^3 + h(R^1, R^2). \end{aligned}$$

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

Donc,

$$u^0 = \sigma(R^1 + R^2 + R^3) + u_0^0, \quad (6.6)$$

$$\vec{u} = \vec{\varphi}(R), \quad R = (R^1, R^2, R^3), \quad \left| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^i} \right|^2 = 1.$$

La seconde condition de l'équation (6.3) exige que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^s}{\partial R^r} &\in \text{span}\{\lambda^s, \lambda^r\}, \quad R = (R^1, R^2, R^3), \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda^s}{\partial R^s} &= \alpha_r^s \lambda^s + \beta_{(r)}^s \lambda^r, \quad \alpha_r^s = \alpha_r^s(R), \quad \beta_{(r)}^s = \beta_{(r)}^s(R). \end{aligned}$$

En vertu des équations (6.5) et (6.6), nous avons que les vecteurs d'ondes ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_s &= (u^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_s, -\vec{e}_s) = \left(\sigma(R^1 + R^2 + R^3) + u_0^0 + \vec{\varphi} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} - \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \right) \\ &= \left(\vec{\varphi} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \sigma(R^1 + R^2 + R^3) + u_0^0, -\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \right). \end{aligned}$$

En conséquence, nous avons que la dérivée première par rapport à R^r devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^s}{\partial R^r} &= \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \vec{\varphi} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} + \sigma, -\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} \right) \\ &= \alpha_r^s \left(\vec{\varphi} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \sigma(R^1 + R^2 + R^3) + u_0^0, -\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \right) \\ &\quad + \beta_{(r)}^s \left(\vec{\varphi} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} + \sigma(R^1 + R^2 + R^3) + u_0^0, -\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right). \quad (6.7) \end{aligned}$$

De la composante spatiale de l'équation (6.7), nous avons que

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} = \alpha_r^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \beta_{(r)}^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r}.$$

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

En multipliant cette équation par

$$\left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right) &= \left[\alpha_r^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \beta_{(R)}^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right] \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right) \\ &= \alpha_r^s \underbrace{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right)}_0 + \beta_{(r)}^s \underbrace{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right)}_0 \\ &= \alpha_r^s \cdot 0 + \beta_{(R)}^s \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous décomposons la dérivée seconde de $\vec{\varphi}$ en terme des dérivées premières

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} = \sum_{k=1}^3 h_{rs}^k(R) \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^k}. \quad (6.8)$$

Nous définissons le tenseur métrique comme le produit scalaire de $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r}$ par $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s}$

$$g_{rs} = g_{sr} := \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s}, \quad g_{rr} = 1 \quad (6.9)$$

car g_{rs} est symétrique et défini positif.

Notons que l'équation (6.7) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^s}{\partial R^r} &= \left(g_{rs} + \sum_{k=1}^3 h_{rs}^k \vec{\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^k} + \sigma, - \sum_{k=1}^3 h_{rs}^k(R) \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^k} \right) \\ &= \alpha_r^s \left(\vec{\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \sigma \sum_{i=1}^3 R^i + u_0^0, - \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \right) \\ &\quad + \beta_{(r)}^s \left(\vec{\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} + \sigma \sum_{i=1}^3 R^i + u_0^0, - \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \right) \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

De la composante spatiale de l'équation (6.10), nous avons que :

$$\sum_{k=1}^3 h_{rs}^k(R) \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^k} = \alpha_r^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \beta_{(r)}^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r}. \quad (6.11)$$

En vertu des équations (6.10) et (6.11), nous obtenons alors que :

$$\begin{aligned} \alpha_r^s &= h_{rs}^s \quad \text{car} \quad \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \right)^2 = 1, \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} = 0, \\ \beta_{(r)}^s &= h_{rs}^r = \alpha_s^r, \quad r \neq s, \\ h_{rs}^k &= 0, \quad k \neq r \neq s. \end{aligned}$$

En effet, en vertu de l'équation (6.8)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 h_{rs}^k(R) \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^k} &= h_{rs}^k \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^k} + h_{rs}^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + h_{rs}^r \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} = 0 + \alpha_r^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \beta_{(r)}^s \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \\ &\Rightarrow \beta_{(r)}^s = \alpha_s^r. \end{aligned}$$

De la composante temporelle de de l'équation (6.10), nous avons que :

$$\begin{aligned} g_{rs} + \alpha_r^s \vec{\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} + \alpha_s^r \vec{\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} + \sigma &= \alpha_r^s \alpha_r^s + \alpha_s^r \cdot \vec{\varphi}_s + \sigma \sum_{i=1}^3 R^i + u_0^0 \\ &\quad + \alpha_s^r \left(\vec{\varphi} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} + \sigma \sum_{i=1}^3 R^i + u_0^0 \right) \\ \Rightarrow g_{rs} + \sigma &= \alpha_r^s \left(\sigma \sum_{i=1}^3 R^i + u_0^0 \right) + \alpha_s^r \left(\sigma \sum_{i=1}^3 R^i + u_0^0 \right), \quad s \neq r. \end{aligned}$$

Donc, nous avons

$$g_{rs} = \sigma \left(-1 + (\alpha_r^s + \alpha_s^r) \sum_{i=1}^3 R^i \right) + (\alpha_r^s + \alpha_s^r) u_0^0, \quad r \neq s. \quad (6.12)$$

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} \\
 &= \sum_{k=1}^3 h_{rs}^k g_{ks} \\
 &= h_{rs}^s g_{ss} + h_{rs}^r g_{rs} + h_{rs}^t g_{ts}, \quad \text{sachant que } k = \{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}, \quad r \neq s \neq t \\
 &= \alpha_r^s \cdot 1 + \alpha_s^r g_{rs} + 0 \cdot g_{ts}.
 \end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons

$$0 = \alpha_r^s + \alpha_s^r g_{rs}, \quad (6.13a)$$

$$0 = \alpha_s^r + \alpha_r^s g_{rs} \quad (6.13b)$$

En substituant l'équation (6.13b) dans l'équation (6.13a), nous avons que

$$\alpha_r^s - (\alpha_r^s g_{rs}) g_{rs} = 0.$$

Donc

$$\alpha_r^s (1 - g_{rs}^2) = 0, \quad r \neq s, \quad (6.14)$$

et

$$|\vec{\varphi}_s|^2 = 1 \Rightarrow 0 = \vec{\varphi}_{ss} \cdot \vec{\varphi}_s = \sum_{k=1}^3 h_{ss}^k g_{ks}. \quad (6.15)$$

En vertu de l'équation (6.9), le tenseur métrique g_{rs} doit être défini positif. Nous démontrons que ce n'est pas le cas.

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

Lemme 6.1.

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & a & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

une matrice symétrique avec $a \in \{-1, 1\}$, alors A n'est pas définie positive .

Démonstration.

Soit $X = (-1, a, 0, \dots, 0) \neq 0$. Il n'est pas difficile de vérifier que $X A X^T = 0$. Donc, A n'est pas définie positive. \square

En vertu du lemme (6.1) et de l'équation (6.14), nous avons que

$$g_r s^2 \neq 1 \Rightarrow \alpha_r^s = 0. \quad (6.16)$$

Donc l'équation (6.10) devient

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial R^r} = 0, \quad s \neq r.$$

Ce qui nous donne que

$$\lambda^s(R) = \lambda^s(R^s), \quad s \neq r.$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^r \partial R^s} = 0. \quad (6.17)$$

La solution générale de l'équation (6.17) est

$$\vec{\varphi}(R) = \vec{\chi}_1(R^1) + \vec{\chi}_2(R^2) + \vec{\chi}_3(R^3),$$

d'où

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

$$g_{rr} = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^r} = \frac{d\vec{\chi}(R^r)}{dR^r} \cdot \frac{d\vec{\chi}(R^r)}{dR^r} = 1.$$

Décomposons maintenant $\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^s \partial R^s}$ dans la base suivante

$$\left\{ \frac{d\vec{\chi}_1}{dR^1}, \frac{d\vec{\chi}_2}{dR^2}, \frac{d\vec{\chi}_3}{dR^3} \right\},$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^s \partial R^s} &= \frac{d^2 \vec{\chi}(R^s)}{dR^s} \\ &= h_{ss}^1 \frac{d\vec{\chi}_1}{dR^1} + h_{ss}^2 \frac{d\vec{\chi}_2}{dR^2} + h_{ss}^3 \frac{d\vec{\chi}_3}{dR^3} \\ &= b_s^1 \frac{d\vec{\chi}_1}{dR^1} + b_s^2 \frac{d\vec{\chi}_2}{dR^2} + b_s^3 \frac{d\vec{\chi}_3}{dR^3} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \vec{\chi}(R^s)}{dR^s} &= \sum_{k=1}^3 b_s^k \frac{d\vec{\chi}_k}{dR^k}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\sum_{k=1}^3 b_s^k \frac{d\vec{\chi}_k}{dR^k} \cdot \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s} = 0 \quad \text{car} \quad \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial R^s \partial R^s} \cdot \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial R^s} = 0.$$

De plus, nous savons que

$$g_{ks} = \frac{d\vec{\chi}_k}{dR^k} \cdot \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s},$$

et

$$g_{ss} = \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s} \cdot \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s} = 1.$$

L'équation (6.12) devient donc

$$g_{rs} = \frac{d\vec{\chi}_r}{dR^r} \cdot \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s} = -\sigma.$$

Donc, nous obtenons la matrice suivante :

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

$$|g_{rs}| = \left| \frac{d\vec{\chi}_r}{dR^r} \cdot \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s} \right| = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma & -\sigma \\ -\sigma & 1 & -\sigma \\ -\sigma & -\sigma & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Nous avons $W = \det(g_{rs}) = -(\sigma + 1)(2\sigma^2 + \sigma - 1)$. Le graphe de $W(\sigma)$ est représenté dans la figure (6.1). Nous remarquons alors que $W(\sigma) > 0$ si $-1 < \sigma < \frac{1}{2}$; d'où,

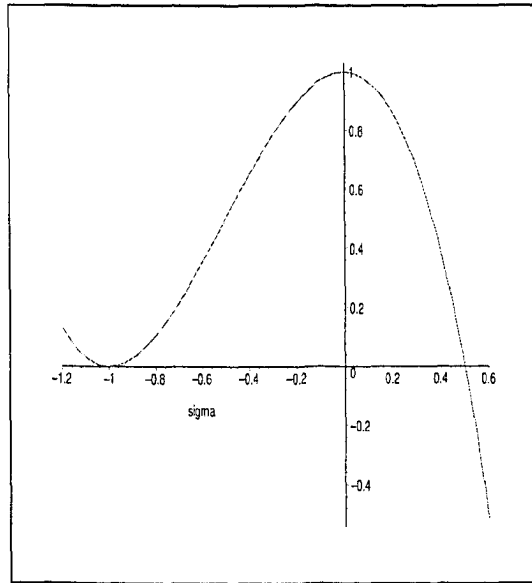


FIG. 6.1 – Graphique de la fonction W et sa racine

$$\kappa = 2\sigma + 1 \in]-1, 2[.$$

L'équation (6.18) devient alors

$$g_{rs} = \frac{d\vec{\chi}_r}{dR^r} \cdot \frac{d\vec{\chi}_s}{dR^s} = \begin{bmatrix} 1 & -\sigma & -\sigma \\ -\sigma & 1 & -\sigma \\ -\sigma & -\sigma & 1 \end{bmatrix} = \left| \vec{\psi}_r \cdot \vec{\psi}_s \right|. \quad (6.19)$$

Nous avons donc

$$\vec{\psi}_1 \cdot \vec{\psi}_2 = \vec{\psi}_2 \cdot \vec{\psi}_3 = \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\psi}_3 = \sigma$$

6.1. SYSTÈME D'EDP DÉCRIVANT UN FLOT ISENTROPIQUE D'UN FLUIDE IDÉAL COMPRESSIBLE.

$$\cos \left(\angle(\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2) \right) = \cos \left(\angle(\vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3) \right) = \cos \left(\angle(\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_3) \right) = -\sigma.$$

Fixons R_0^1 et R_0^2 , nous avons alors que

$$\vec{\psi}_3(R^3) \cdot \vec{\psi}_1(R_0^1) = \vec{\psi}_3(R^3) \cdot \vec{\psi}_2(R_0^2) = -\sigma. \quad (6.20)$$

Fixons R_0^2 et R_0^3 , nous avons alors que

$$\vec{\psi}_1(R^1) \cdot \vec{\psi}_2(R_0^2) = \vec{\psi}_1(R^1) \cdot \vec{\psi}_3(R_0^3) = -\sigma. \quad (6.21)$$

Fixons R_0^1 et R_0^3 , nous avons alors que

$$\vec{\psi}_2(R^2) \cdot \vec{\psi}_1(R_0^1) = \vec{\psi}_2(R^2) \cdot \vec{\psi}_3(R_0^3) = -\sigma. \quad (6.22)$$

Nous avons donc un cycle ; donc

$$\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3 \text{ sont constants.}$$

Donc, la solution de l'équation (6.19) est

$$\frac{d\vec{\chi}_s(R^s)}{dR^s} = (R^1 + R^2 + R^3)\vec{\psi}_0^s + \vec{\beta}_s,$$

où $\vec{\psi}_s$ et $\vec{\beta}_s$ sont des vecteurs constants. L'équation (6.19) devient

$$u^0(R) = \sigma (R^1 + R^2 + R^3) + C^0, \quad (6.23)$$

$$\vec{u}(R) = \sum_{s=1}^3 R^s \vec{\psi}_0^s + \vec{C}, \quad \vec{\psi}_0^i \cdot \vec{\psi}_0^j = -\sigma, \quad i \neq j, \quad \sigma = \frac{\kappa - 1}{2}, \quad (6.24)$$

et l'équation (6.5) devient

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \left(R^1 - \sigma (R^2 + R^3) + D + \sigma (R^1 + R^2 + R^3) + C^0, -\vec{\psi}_0^1 \right) \\ &= \left((1 + \sigma) R^1 + D^0, -\vec{\psi}_0^1 \right), \quad D^0 = D + C^0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\lambda^s = \left((1 + \sigma) R^s + D^0, -\vec{\psi}_0^s \right). \quad (6.25)$$

6.2. EXEMPLES.

Nous avons vu que la dépendance de R en terme de x est définie par la relation

$$\lambda_{\mu}^s \cdot x^{\mu} = f^s(R^1, R^2, R^3) \quad (6.26)$$

où λ^s respecte l'équation (6.25).

Dans notre cas, nous obtenons que la solution est donnée sous une forme implicite

$$\begin{aligned} f^s(R^1, R^2, R^3) &= \left((1 + \sigma)R^s + D^0, -\vec{\psi}_0^s \right)_{\mu} \cdot x^{\mu} \\ &= ((1 + \sigma)R^s + D^0) t - \vec{\psi}_0^s \cdot \vec{x}, \quad s = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (6.27)$$

où

$$1 + \sigma = \frac{\kappa + 1}{2}.$$

La solution composée des équations (6.23), (6.24) et (6.27) décrit une onde triple (superposition non linéaire de trois ondes). Cette nouvelle solution est le résultat de ce travail de recherche.

6.2 Exemples.

Les solutions ainsi que les graphiques présentées dans cette section ont été obtenus à l'aide du progiciel Maple. Nous trouvons le programme développé à l'annexe C.

Exemple 6.1.

Les équations (6.23), (6.24) et (6.27) déterminent une solution exprimée en termes de t et de \vec{x} du système (4.1). Par un choix des fonctions f^i , $i = 1, 2, 3$ linéaires en R^1 , R^2 et R^3 , nous construisons la solution sous une forme explicite.

$$\begin{aligned} f^1 &= a_1 R^1 + a_2 R^2 + a_3 R^3 = ((1 + \sigma) R^1 + D^0) t - \vec{\psi}_0^1 \cdot \vec{X}, \\ f^2 &= b_1 R^1 + b_2 R^2 + b_3 R^3 = ((1 + \sigma) R^2 + D^0) t - \vec{\psi}_0^2 \cdot \vec{X}, \\ f^3 &= c_1 R^1 + c_2 R^2 + c_3 R^3 = ((1 + \sigma) R^3 + D^0) t - \vec{\psi}_0^3 \cdot \vec{X}, \end{aligned}$$

6.2. EXEMPLES.

Le système, écrit sous une forme matricielle devient

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix}.$$

En résolvant le système, nous obtenons que

$$\begin{aligned} R^1 &= \frac{At^3 + B_1t^2 + C_1xt^2 + D_1yt^2 + E_1zt^2 + F_1xt + G_1yt + H_1zt + I_1t + J_1x + K_1y + L_1z}{Mt^3 + Nt^2 + Pt + S}, \\ R^2 &= \frac{At^3 + B_2t^2 + C_2xt^2 + D_2yt^2 + E_2zt^2 + F_2xt + G_2yt + H_2zt + I_2t + J_2x + K_2y + L_2z}{Mt^3 + Nt^2 + Pt + S}, \\ R^3 &= \frac{At^3 + B_3t^2 + C_3xt^2 + D_3yt^2 + E_3zt^2 + F_3xt + G_3yt + H_3zt + I_3t + J_3x + K_3y + L_3z}{Mt^3 + Nt^2 + Pt + S}. \end{aligned}$$

Ces fonctions sont définies si

$$Mt^3 + Nt^2 + Pt + S \neq 0.$$

Comme les coefficients $A, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i, I_i, J_i, K_i, L_i, i = 1, 2, 3$, ainsi que M, N, P et S s'expriment en fonctions de $D^0, \psi_0^1, \psi_0^2, \psi_0^3$ et κ et que ces dernières sont constantes et arbitraires, alors les coefficients sont également des constantes. De plus, notons que le coefficient de t^3 , c'est-à-dire A ainsi que le dénominateur des trois variables sont les mêmes pour ces mêmes variables. La solution a forme suivante

$$\begin{aligned} u^0(t, \vec{x}) &= \sigma (R^1 + R^2 + R^3) + C^0 \\ &= \frac{At^3 + Bt^2 + Cxt^2 + Dyt^2 + Ezt^2 + Fxt + Gyt + Hzt + It + Jx + Ky + Lz}{Mt^3 + Nt^2 + Pt + S} + C_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, \vec{x}) &= \sum_{s=1}^3 R^s \vec{\psi}_0^s + \vec{C} = C_0 + \\ &\frac{At^3 + B^1t^2 + C^1xt^2 + D^1yt^2 + E^1zt^2 + F^1xt + G^1yt + H^1zt + I^1t + J^1x + K^1y + L^1z}{Mt^3 + Nt^2 + Pt + S}. \end{aligned}$$

6.2. EXEMPLES.

où

$$B = B_1 + B_2 + B_3,$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

⋮

$$L = L_1 + L_2 + L_3,$$

$$B^1 = B_1 \cdot \psi_0^1 + B_2 \cdot \psi_0^2 + B_3 \cdot \psi_0^3,$$

$$C^1 = C_1 \cdot \psi_0^1 + C_2 \cdot \psi_0^2 + C_3 \cdot \psi_0^3,$$

⋮

$$L^1 = L_1 \cdot \psi_0^1 + L_2 \cdot \psi_0^2 + L_3 \cdot \psi_0^3.$$

Par exemple, fixons les valeurs suivantes pour les coefficients :

$$\begin{array}{cccccc} A = 1 & B_1 = 2 & C_1 = 3 & D_1 = 4 & E_1 = 5 & F_1 = 6 \\ G_1 = 7 & H_1 = 8 & I_1 = 9 & J_1 = 10 & K_1 = 11 & L_1 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} A = 1 & B_2 = 3 & C_2 = 4 & D_2 = 5 & E_2 = 6 & F_2 = 7 \\ G_2 = 8 & H_2 = 9 & I_2 = 10 & J_2 = 11 & K_2 = 12 & L_2 = 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} A = 1 & B_3 = 4 & C_3 = 5 & D_3 = -6 & E_3 = 7 & F_3 = 8 \\ G_3 = 9 & H_3 = 10 & I_3 = 11 & J_3 = 12 & K_3 = 13 & L_3 = 14 \\ M = 5 & N = 2 & P = 3 & S = 1 & t = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 = 1 & a_2 = 2 & a_3 = 3 \\ b_1 = -2 & b_2 = -1 & b_3 = 3 \\ c_1 = -1 & c_2 = 5 & c_3 = -4 \end{array}$$

La solution est représentée par la figure (6.2).

Exemple 6.2.

En faisant un choix différent des f^i en fonction de R^1 , R^2 et R^3 , par exemple,

$$f^1 = \frac{C_1}{R^1} = ((1 + \sigma) R^1 + D^0) t - \vec{\psi}_0^1 \cdot \vec{X},$$

$$f^2 = C_2 (R^2) = ((1 + \sigma) R^2 + D^0) t - \vec{\psi}_0^2 \cdot \vec{X},$$

$$f^3 = C_3 (R^3) = ((1 + \sigma) R^3 + D^0) t - \vec{\psi}_0^3 \cdot \vec{X},$$

6.2. EXEMPLES.

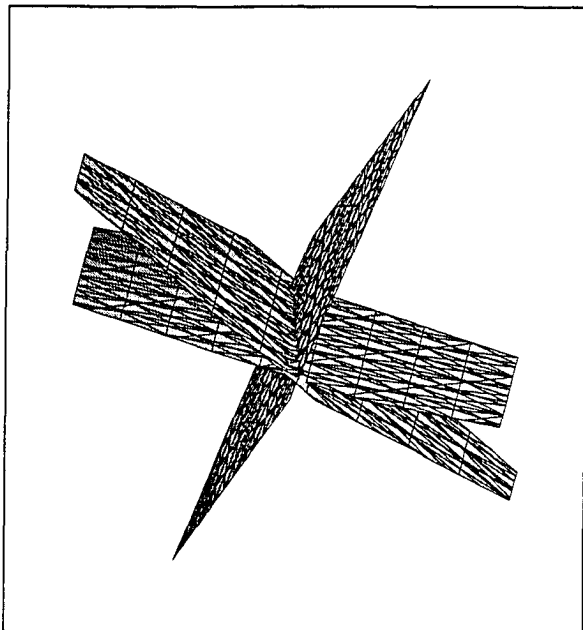


FIG. 6.2 – Exemple 1 : Graphique d'une solution linéaire d'un système hydrodynamique en $(3 + 1)$ dimensions.

nous obtenons une autre classe de solutions explicites. En effet,

$$R^1 = \frac{Ax+By+Cz+Dt+2\sqrt{Ex^2+Fy^2+Gz^2+Hxy+Ixz+Jyz+Kxt+Lyt+Mzt+Nt^2+Pt}}{Qt}, \quad t \neq 0,$$

$$R^2 = \frac{Rt+Sx+Ty+Uz}{Vt+W}, \quad Vt+W \neq 0,$$

$$R^3 = \frac{\alpha t + \beta x + \xi y + \delta z}{\epsilon t + \mu}, \quad \epsilon t + \mu \neq 0.$$

La solution est alors de la forme suivante

$$\begin{aligned} u^0(t, \vec{x}) &= \sigma(R^1 + R^2 + R^3) + C^0 \\ &= \frac{Ax+By+Cz+Dt+2\sqrt{Ex^2+Fy^2+Gz^2+Hxy+Ixz+Jyz+Kxt+Lyt+Mzt+Nt^2+Pt}}{Qt} \\ &\quad + \frac{Rt+Sx+Ty+Uz}{Vt+W} + \frac{\alpha t + \beta x + \xi y + \delta z}{\epsilon t + \mu} + C_0, \end{aligned}$$

6.2. EXEMPLES.

$$\begin{aligned} \vec{u}(t, \vec{x}) &= \sum_{s=1}^3 R^s \vec{\psi}_0^s + \vec{C} \\ &= \left(\frac{Ax+By+Cz+Dt+2\sqrt{Ex^2+Fy^2+Gz^2+Hxy+Ixz+Jyz+Kxt+Lyt+Mzt+Nt^2+Pt}}{Qt} \right) \vec{\psi}_0^1 \\ &\quad + \left(\frac{Rt+Sx+Ty+Uz}{Vt+W} \right) \vec{\psi}_0^2 + \left(\frac{\alpha t + \beta x + \xi, y + \delta z}{\epsilon t + \mu} \right) \vec{\psi}_0^3 + \vec{C}_0. \end{aligned}$$

Par exemple, fixons les valeurs suivantes pour les coefficients :

$$\begin{array}{llllll} A = 1 & B = 2 & C = 3 & D = 4 & E = 5 & F = 6 \\ G = 7 & H = 8 & I = -9 & J = 10 & K = 11 & L = 12 \\ M = 5 & N = 2 & P = 3 & Q = 3 & & \\ \\ R = 21 & S = 22 & T = 23 & U = 24 & V = 25 & W = 1 \\ \\ \alpha = -2 & \beta = 5 & \xi = -3 & \delta = 4 & \epsilon = 5 & \mu = 6 \\ C_1 = -1 & C_2 = 5 & C_3 = -4. & & & \end{array}$$

La solution est représentée par la figure (6.3).

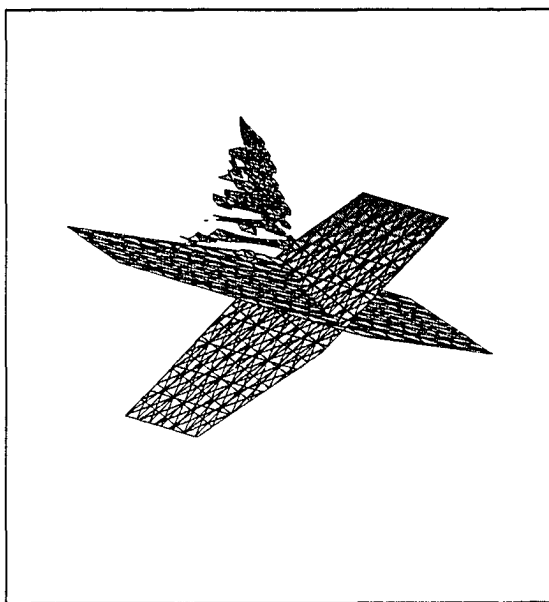


FIG. 6.3 - Exemple 2 : Graphique d'une solution non linéaire d'un système hydrodynamique en (3 + 1) dimensions.

Chapitre 7

Symétries conditionnelles et ondes multiples.

Jusqu'à présent, nous avons construit des ondes simples, doubles, triples d'un système d'EDP quasilinéaires de type hyperbolique à l'aide de la méthode généralisée des caractéristiques. Dans ce chapitre, nous allons obtenir les solutions définies par les équations (6.23), (6.24) et (6.27) par l'approche classique de Lie. Des exemples de construction de solutions représentant des ondes simples, doubles et triples sont présentés. Notons que les symétries ponctuelles de Lie de ce système ont été trouvées à l'aide du logiciel MAC-SYMA. Ces symétries sont présentées à l'annexe (D).

7.1 Ondes simples

Soit un système de r équations quasilinéaires de type hyperbolique du premier ordre à p variables indépendantes et q variables dépendantes de la forme suivante

$$\sum_{i=0}^p \sum_{\beta=1}^q A_{\beta}^{i\alpha}(u) u_i^{\beta}, \quad \alpha = 1, \dots, r. \quad (7.1)$$

Le système est bien déterminé si $r = q$. Il suffit de trouver des solutions définies dans un voisinage de $x = 0$. Sous une forme matricielle, le système (7.1) devient

7.1. ONDES SIMPLES

$$A^i(u)u_i = 0, \quad (7.2)$$

où A^0, A^1, \dots, A^p sont des matrices de fonctions de dimensions $r \times q$. Il est plus convenable de noter les variables indépendantes par $t = x^0, x^1, \dots, x^n$, où $p = (n + 1)$. Donc, le système (7.1) a la forme suivante

$$A^0(u) u_t + \sum_{i=1}^n A^i(u) u_i = 0.$$

Si $r = q$ et A^0 est la matrice identité, alors le système a la forme d'une équation d'évolution

$$u_t + \sum_{i=1}^n A^i(u) u_i = 0. \quad (7.3)$$

Un **vecteur d'onde** du système (7.2) est une fonction vectorielle non nulle

$$\lambda(u) = (\lambda_0(u), \dots, \lambda_p(u))$$

telle que

$$\ker(\lambda_i A^i) \neq 0.$$

Donc, il existe un γ tel que

$$(\lambda_i A^i) \gamma = 0.$$

Définition 7.1.

La fonction

$$r(x, u) = \lambda_i(u) x^i$$

est l'invariant de Riemann pour un vecteur d'onde λ donné.

L'équation

$$u = f(r(x, u)) \quad (7.4)$$

définit une fonction unique $u(x)$ dans un voisinage de $x = 0$ pour une certaine fonction arbitraire

7.1. ONDES SIMPLES

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^q$$

et les dérivées partielles se décomposent au sens de Riemann de la façon suivante

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \phi^{-1}(x) \lambda(u(x)) f'^\alpha(r(x), u(x)). \quad (7.5)$$

où

$$\begin{cases} f'^\alpha &= \frac{df^\alpha}{dr}, \\ \phi(x) &= 1 - \frac{\partial r(x, u(x))}{\partial u^\alpha} f'^\alpha(r(x), u(x)). \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} &= f'^\alpha \left(\frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{\partial r}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right) \\ &= f'^\alpha \left(\lambda_i + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\beta} x^i \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right), \\ \Rightarrow \lambda_i f'^\alpha &= \left(\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\beta} x^i f'^\alpha \right) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Soit la matrice inversible ψ_β^α définie par

$$\begin{aligned} \psi_\beta^\alpha &= \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\beta} x^i f'^\alpha \\ \Rightarrow \psi_\beta^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} &= \lambda_i f'^\alpha \\ \Rightarrow \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} &= \lambda_i (\psi^{-1})_\beta^\alpha f'^\beta. \end{aligned}$$

Trouvons la matrice ϕ telle que

$$\psi_\beta^\alpha (f')^\beta = (f')^\alpha - \frac{\partial r}{\partial u^\beta} (f')^\alpha (f')^\beta = (f')^\alpha \left(1 - \frac{\partial r}{\partial u^\beta} (f')^\beta \right).$$

Si nous écrivons $\psi_\beta^\alpha (f')^\beta$ sous une forme matricielle devient

7.1. ONDES SIMPLES

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \psi f' = \phi(x) f' \\
 \Rightarrow \psi^{-1} (\psi f') &= \phi(x) \psi^{-1} f' \\
 \Rightarrow \psi^{-1} f' &= \frac{1}{\phi} f' \\
 \Rightarrow \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} &= \lambda_i (\psi^{-1})^\alpha_\beta f'^\beta = \lambda_i \frac{1}{\phi} f'^\alpha
 \end{aligned}$$

□

Notons que $u(x)$ a un rang d'au plus égale à 1. Si le vecteur

$$\xi_a(u) = \begin{bmatrix} \xi^1(u) \\ \vdots \\ \xi^p(u) \end{bmatrix}, \quad a = 1, \dots, p-1,$$

satisfait la condition $\lambda \cdot \xi = 0$ alors pour tout α , nous avons

$$\xi_a^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}(x) = 0, \quad a = 1, \dots, p-1,$$

et $u^1(x), \dots, u^q(x)$ sont des invariants par rapport aux champs de vecteurs de \mathbb{R}^p suivants

$$\xi_a^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

D'où le graphe $\{(x, u(x))\}$ est invariant par rapport aux champs de vecteurs

$$X_a = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad a = 1, \dots, p-1 \quad (7.6)$$

dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Réciproquement, si $u(x)$ est un vecteur à q composantes dans un voisinage de $x = 0$ tel que $\{(x, u(x))\}$ est invariant par rapport aux champs de vecteurs (7.6) et $\lambda \cdot \xi = 0$, alors $u(x)$ est la solution de l'équation (7.4) pour toute fonction f . Cela caractérise géométriquement les solutions des équations de la forme (7.4). Dorénavant, si $u(x)$ est une solution de l'équation (7.4), alors nous obtenons l'équation suivante :

$$A^i(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x^i} = \phi^{-1}(x) \lambda_i(u(x)) A^i(u(x)) f'(r(x, u(x))). \quad (7.7)$$

7.1. ONDES SIMPLES

De plus, $u(x)$ est une solution de l'équation initiale (7.2) si et seulement si

$$\lambda_i(f) A^i(f) f' = 0 \quad (7.8)$$

c'est-à-dire si et seulement si f' est élément du $\ker(\lambda_i A^i)$. Notons que l'équation (7.8) est un système d'équations aux dérivées ordinaires du premier ordre indéterminé pour les fonctions f . L'importance de l'équation (7.8) imposée sur f dépend de la dimension de $\ker(\lambda_i A^i)$. Par exemple, si $\lambda_i A^i = 0$, alors il n'y a aucune contrainte sur f . Dans n'importe quel cas, nous avons une classe de solutions $u(x)$ de l'équation (7.2). Le rang de $u(x)$ est au plus égal à 1 et le graphe $\{(x, u(x))\}$ est invariant par rapport au champ de vecteurs (7.6) avec $\lambda \cdot \xi = 0$. Notons que le fait de changement d'échelle du vecteur λ donne les mêmes solutions. Notons aussi que les champs de vecteurs de la forme (7.6) sont commutatifs (abéliens).

Un changement de variables nous permet d'obtenir des ondes simples par l'obtention de contraintes différentielles. Nous supposons que $\lambda_1 \neq 0$. Les champs de vecteurs indépendants

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(u) \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, X_p = \frac{\partial}{\partial x^p} - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}(u) \frac{\partial}{\partial x^1} \quad (7.9)$$

sont de la forme de l'équation (7.6) avec $\lambda \cdot \xi = 0$. Le changement de coordonnées

$$\bar{x}^1 = r(x, u), \bar{x}^2 = x^2, \dots, \bar{x}^n = x^n, \bar{u}^1 = u^1, \dots, \bar{u}^q = u^q.$$

permet de rectifier les champs de vecteurs

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2}, \dots, X_p = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}.$$

Démonstration.

Soit $\bar{u} = f(\bar{x}^1)$ est la solution générale avec les conditions invariantes suivantes

$$\bar{u}_{\bar{x}^2}, \dots, \bar{u}_{\bar{x}^p} = 0.$$

Considérons par exemple X_2 . Nous pouvons généraliser la preuve aux autres X_p .

7.1. ONDES SIMPLES

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial x^1} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} \\
 &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} \left(\frac{\partial r}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2} \right)}_{i=1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^2}}_{i=2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} \underbrace{\left(\frac{\partial r}{\partial x^1} + \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} \right)}_{i=1}
 \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\beta} \underbrace{\frac{\partial u^\beta}{\partial u^\alpha}}_{=\delta_\alpha^\beta} x^i \\
 &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i, \\
 \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} &= \phi^{-1} \lambda_i f'^\alpha.
 \end{aligned}$$

Donc, nous obtenons que

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} \left(\lambda_2 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \phi^{-1} \lambda_2 f'^\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} \left(\lambda_2 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \phi^{-1} \lambda_2 f'^\alpha \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^2}.
 \end{aligned}$$

□

Notons que le graphe de dimension p est transversal à la projection $(x, u) \mapsto x$, $x = 0$ si et seulement si la transversalité a la transformation $(\bar{x}, \bar{u}) \mapsto \bar{x}$ à $\bar{x} = 0$. La surface de dimension p , invariante sous X_2, \dots, X_p , est définie par les équations de la forme

$$\bar{u} = f(\bar{x}^1)$$

où $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^q$ est arbitraire, comparé à l'équation (7.4). Le système (7.2) est décrit dans les coordonnées (\bar{x}, \bar{u}) par

$$\bar{A}^i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_x) \bar{u}_i = 0, \quad (7.10)$$

7.1. ONDES SIMPLES

où

$$\bar{A}^i = \frac{D \bar{x}^i}{Dx^j} A^j,$$

c'est-à-dire que

$$\bar{A}^1 = \frac{D r}{Dx^i} A^i, \bar{A}^2 = A^2, \dots, \bar{A}^p = A^p.$$

Désormais,

$$\left. \frac{Dr}{Dx^i} \right|_{\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p=0} = \phi^{-1} \lambda_i,$$

où

$$\phi = 1 - \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} \bar{u}_1^\alpha.$$

L'équation (7.10) soumise aux conditions d'invariance (7.6) produit le système

$$\lambda_i(\bar{u}) A^i(\bar{u}) \bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p = 0 \quad (7.11)$$

avec la solution générale

$$\bar{u}(\bar{x}) = f(\bar{x}^1),$$

où $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^q$ satisfait l'équation (7.8). Cela nous donne des ondes simples.

Démonstration.

$$\begin{aligned} & A^i(u) u_i = 0 \\ \Leftrightarrow & A^1_\alpha(u) \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial \bar{x}^1} + \dots + A^p_\alpha(u) \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial \bar{x}^p} = 0 \\ \Leftrightarrow & A^1(u) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^1} \right) + \dots + A^p(u) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^1} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^p} + \dots + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^p} \right) = 0 \end{aligned}$$

7.1. ONDES SIMPLES

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow A^1(u) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^1} \left(\lambda_1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} \right) + \dots + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^p} \right) \\
&+ \dots + A^p(u) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^p} \left(\lambda_p + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^p} \right) + \dots + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^p} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow A^1(u) \left(\lambda_1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \phi^{-1} \lambda_1 f'^\alpha \right) + \dots + A^p(u) \left(\lambda_p + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \phi^{-1} \lambda_p f'^\alpha \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (A^i \lambda_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^i} \left(1 + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^\alpha} x^i \phi^{-1} f'^\alpha \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (A^i \lambda_i) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^i} (1 + (1 - \phi) \phi^{-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (A^i \lambda_i) \frac{1}{\phi} = 0
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $\frac{Dr}{Dx^i}$

$$\begin{aligned}
\frac{Dr}{Dx^i} \Big|_{\bar{u}_2 = \bar{u}_p = 0} &= \left[\frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} \frac{\bar{u}^\alpha}{\partial x^i} \right]_{\bar{u}_2 = \bar{u}_p = 0} \\
&= \frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{\partial r}{\partial u^1} \frac{\bar{u}^1}{\partial x^i} \\
&= \lambda_i + \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^1} x^i \phi^{-1} \lambda_i f' \\
&= \lambda_i \left(1 + \phi^{-1} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^1} x^i f' \right) \\
&= \lambda_i (1 + \phi^{-1} (1 - \phi)) \\
&= \phi^{-1} \lambda^i.
\end{aligned}$$

□

7.2. ONDES MULTIPLES

7.2 Ondes multiples

Nous allons généraliser ce procédé de construction. Fixons les vecteurs d'ondes linéairement indépendants $\lambda^1, \dots, \lambda^l$, $1 \leq l \leq p$, avec les invariants de Riemann correspondants

$$r^1 = \lambda_i^1 x^i, \dots, \quad r^l = \lambda_i^l x^i.$$

L'équation

$$u = f(r^1(x, u), \dots, r^p(x, u)) \quad (7.12)$$

définit une fonction unique $u(x)$ sur un voisinage de $x = 0$ pour toute fonction $f : \mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^q$ et

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}(x) = (\phi_j^k)^{-1}(x) \lambda_i^j(u(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k}(r(x, u(x))),$$

où $\phi_i^j(x)$ est une matrice de dimension $l \times l$

$$\phi_i^j(x) = \delta_j^i - \frac{\partial r^i}{\partial u^\alpha}(x, u(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^j}(r(x, u(x))).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} &= \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k} \left(\frac{\partial r^k}{\partial x^i} + \frac{\partial r^k}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k} \left(\lambda_i^k + \frac{\partial \lambda_i^k}{\partial u^\beta} x^i \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \right) \\ \Rightarrow \lambda_i^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k} &= \left(\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \lambda_i^k}{\partial u^\beta} x^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k} \right) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Soit la matrice inversible ψ_β^α définie par

$$\begin{aligned} \psi_\beta^\alpha &= \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial \lambda_i^k}{\partial u^\beta} x^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k} \\ \Rightarrow \psi_\beta^\alpha \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} &= \lambda_i^k \frac{\partial f^\alpha}{\partial r^k} \\ \Rightarrow \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} &= (\psi^{-1})_\beta^\alpha \lambda_i^k \frac{\partial f^\beta}{\partial r^k}. \end{aligned}$$

7.2. ONDES MULTIPLES

Trouvons la matrice ϕ

$$\begin{aligned}\psi_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial r^k} &= \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial r^i} - \frac{\partial r^k}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial r^k} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial r^i} \left(\delta_j^k - \frac{\partial r^k}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial r^i} \right) \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial r^i} \\ &= (\phi(x))_j^k \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial r^i}.\end{aligned}$$

Dans une forme matricielle, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Rightarrow \psi \frac{\partial f}{\partial r} &= \phi(x) \frac{\partial f}{\partial r} \\ \Rightarrow \phi^{-1} \left(\psi \frac{\partial f}{\partial r} \right) &= \frac{\partial f}{\partial r} \\ \Rightarrow \phi^{-1} \left(\psi \frac{\partial f}{\partial r} \right) \psi^{-1} &= \frac{\partial f}{\partial r} \psi^{-1} \\ \Rightarrow \phi^{-1} (\psi \psi^{-1}) \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} \psi^{-1} \\ \Rightarrow \phi^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial r} \psi^{-1}.\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i} &= (\psi^{-1})_{\beta}^{\alpha} \lambda_i^k \frac{\partial f^{\beta}}{\partial r^k} \\ &= (\phi(x)^{-1})_j^k \lambda_i^k \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial r^k}.\end{aligned}$$

□

Notons que le rang de $u(x)$ est au plus égal à l . Si le vecteur

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^1(u) \\ \vdots \\ \xi^p(u) \end{bmatrix}$$

satisfait $\lambda^i \cdot \xi = 0$, $i = 1, \dots, l$ alors

$$\xi_a^i(u^{\alpha}(x)) \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i}(x) = 0, \quad a = 1, \dots, p-l.$$

7.2. ONDES MULTIPLES

De plus, $u^1(x), \dots, u^l(x)$ sont invariants par rapport aux champs de vecteurs

$$\xi_a^i(u(x)) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad a = 1, \dots, (p-1)$$

dans \mathbb{R}^p . D'où les graphes $\{x, u(x)\}$ sont invariants par rapport aux champs de vecteurs

$$X_a = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (7.13)$$

sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. De façon réciproque, si $u(x)$ est une fonction à q variables sur un voisinage de $x = 0$ tel que $\{(x, u(x))\}$ est invariant par rapport aux champs de vecteurs (7.13) et $\lambda \cdot \xi = 0$, alors $u(x)$ est la solution de l'équation (7.12) pour toute fonction f . Cela caractérise géométriquement les solutions des équations de la forme (7.12).

Si $u(x)$ est une solution de l'équation (7.12), alors nous obtenons l'équation suivante :

$$A^i(u(x)) \frac{\partial u}{\partial x^i} = \phi_j^k(x)^{-1} \lambda_j^i(u(x)) A^i(u(x)) \frac{\partial f}{\partial r^k}(r(x, u(x))). \quad (7.14)$$

La comparaison avec l'équation (7.7) suggère que nous ne pouvons pas généralement nous attendre à une réduction analogue à l'équation (7.8) parce que ϕ n'est plus un scalaire.

Donc, avant de procéder au changement de coordonnées, nous allons supposer que la matrice $l \times l$

$$\Lambda = (\lambda_j^i)_{1 \leq i, j \leq l}$$

est inversible. Les champs de vecteurs linéairement indépendants

$$X_{l+1} = \frac{\partial}{\partial x^{l+1}} - \sum_{i,j=1}^l (\Lambda^{-1})_i^j \lambda_p^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \dots, X_p = \frac{\partial}{\partial x^p} - \sum_{i,j=1}^l (\Lambda^{-1})_i^j \lambda_p^i \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ont la forme (7.13) avec $\lambda^i \cdot \xi = 0$, $i = 1, \dots, l$. Les fonctions

$$\bar{x}^1 = r^1(x, u), \dots, \bar{x}^l = r^l(x, u), \bar{x}^{l+1} = x^{l+1}, \dots, \bar{x}^p = x^p, \bar{u}^1 = u^1, \dots, \bar{u}^p = u^p$$

7.2. ONDES MULTIPLES

sont les nouvelles coordonnées dans l'espace $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ qui nous permettent de rectifier

$$X_{l+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{l+1}}, \dots, X_p = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}.$$

Notons que le graphe de dimension p est transversal à la projection $(x, u) \mapsto x$, $x = 0$ si et seulement si la transversalité a la transformation $(\bar{x}, \bar{u}) \mapsto \bar{x}$ à $\bar{x} = 0$. La surface de dimension p est invariante sous X_{l+1}, \dots, X_p , est définie par les équations de la forme

$$\bar{u} = f(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^l),$$

où $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ est arbitraire contrairement à l'équation (7.12), c'est-à-dire que $\bar{u}(\bar{x}) = f(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ est la solution générale sous les conditions invariantes

$$\bar{u}^{l+1}, \dots, \bar{u}^p = 0. \quad (7.15)$$

Le système (7.2) peut être décrit dans les coordonnées (\bar{x}, \bar{u}) par les relations

$$\bar{A}^i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_x) \bar{u}_i = 0, \quad (7.16)$$

où

$$\bar{A}^1 = \frac{D \bar{x}^1}{Dx^i} A^i, \dots, \bar{A}^l = \frac{D \bar{x}^l}{Dx^i} A^i, \bar{A}^{l+1} = A^{l+1}, \dots, \bar{A}^p = A^p.$$

Nous avons donc que,

$$\left. \frac{D \gamma^i}{Dx^j} \right|_{\bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_p=0} = (\Phi^{-1})_k^i \lambda_j^k,$$

où

$$\Phi_j^i = \delta_j^i - \frac{\partial r^i}{\partial u^\alpha} \bar{u}_j^\alpha,$$

de plus, l'équation (7.16) ajoutée aux conditions d'invariance (7.15) produit le système suivant

7.3. EXEMPLES

$$\sum_{i,j=1}^l \sum_{k=1}^p ((\Phi^{-1})_j^i A^k \bar{u}_i) = 0, \quad \bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_p = 0. \quad (7.17)$$

Notons que si $l \geq 2$, alors le système (7.17) est plus complexe que son système analogue (7.11) à cause de la présence de la matrice Φ .

7.3 Exemples

Exemple 7.1. Les ondes simples de type potentiel.

Soit le vecteur d'onde simple de type potentiel est défini par l'équation (4.2 1), soit

$$\lambda(u) = (\langle u, \gamma \rangle, -\vec{e}), \quad |\vec{e}|^2 = 1.$$

Par exemple,

$$\vec{e}_1 = (\cos \phi, \sin \phi, 0),$$

où ϕ est une fonction arbitraire de t et de \vec{x} . Définissons des vecteurs ξ^j linéairement indépendants tels que $\langle \lambda, \xi^j \rangle = 0$, $j = 1, 2, 3$. Par exemple,

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \xi_0^1 \\ \xi_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \xi_0^2 \\ 0 \\ \xi_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} \xi_0^3 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_3^3 \end{bmatrix}.$$

Supposons que $\lambda_0 = \langle u, \gamma \rangle \neq 0$, alors nous obtenons que

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\cos \phi}{\langle u, \gamma \rangle} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sin \phi}{\langle u, \gamma \rangle} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nous trouvons alors que

7.3. EXEMPLES

$$\begin{aligned}
 X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\cos \phi}{\langle u, \gamma \rangle} \frac{\partial}{\partial t}, \\
 X_3 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sin \phi}{\langle u, \gamma \rangle} \frac{\partial}{\partial t}, \\
 X_4 &= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

La solution (4.7) est invariante dans les champs de vecteurs (7.18).

Exemple 7.2. Les ondes simples de type rotationnel.

Soit le vecteur d'onde simple de type rotationnel est défini par l'équation (4.2 2), soit

$$\lambda(u) = ([\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}], -\vec{e} \times \vec{m}), \quad |\vec{e}|^2 = |\vec{m}|^2 = 1.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_1 &= (\cos \theta \sin \phi, \cos \theta \cos \phi, \sin \theta), \\
 \vec{m} &= (m_1, m_2, 1).
 \end{aligned}$$

Donc, le vecteur λ devient

$$\lambda(u) = \begin{bmatrix} [\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}] \\ -\cos \theta \cos \phi + m_2 \sin \theta \\ -m_1 \sin \theta + \cos \theta \sin \phi \\ -m_2 \cos \theta \sin \phi + m_1 \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}^T.$$

Définissons des vecteurs ξ^j linéairement indépendants tels que $\langle \lambda, \xi^j \rangle = 0, j = 1, 2, 3$. Par exemple,

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} \xi_0^1 \\ \xi_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \xi_0^2 \\ 0 \\ \xi_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} \xi_0^3 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_3^3 \end{bmatrix}.$$

Supposons que $\lambda_0 = \langle u, \gamma \rangle \neq 0$, nous obtenons que

7.3. EXEMPLES

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left[- \left(\frac{-\cos\theta \cos\phi + m_2 \sin\theta}{[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]} \right), 1, 0, 0 \right]^T, \\ \xi_2 &= \left[- \left(\frac{-m_1 \sin\theta + \cos\theta \sin\phi}{[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]} \right), 0, 1, 0 \right]^T, \\ \xi_3 &= \left[- \left(\frac{-m_2 \cos\theta \sin\phi + m_1 \cos\theta \cos\phi}{[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]} \right), 0, 0, 1 \right]^T.\end{aligned}$$

Nous trouvons alors que

$$\begin{aligned}X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{-\cos\theta \cos\phi + m_2 \sin\theta}{[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]} \right) \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{-m_1 \sin\theta + \cos\theta \sin\phi}{[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]} \right) \frac{\partial}{\partial t}, \\ X_4 &= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{-m_2 \cos\theta \sin\phi + m_1 \cos\theta \cos\phi}{[\vec{u}, \vec{e}, \vec{m}]} \right) \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}\tag{7.19}$$

La solution (4.7) est invariante par rapport aux champs de vecteurs (7.19).

Exemple 7.3. Les ondes doubles : onde rotationnelle influencée par une onde potentielle.

Soit les deux vecteurs d'onde fixés que nous représentons sous la forme de vecteurs colonnes.

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= (\lambda_0^1, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1)^T \equiv (\lambda_0^1, \vec{\lambda}^1)^T \quad \text{associé aux ondes de type potentiel,} \\ \lambda^2 &= (\lambda_0^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)^T \equiv (\lambda_0^2, \vec{\lambda}^2)^T \quad \text{associé aux ondes de type rotationnel.}\end{aligned}$$

Nous supposons que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Définissons la matrice formée par les vecteurs colonnes λ

$$\Lambda = (\lambda_j^i) = \begin{bmatrix} \lambda_0^1 & \lambda_0^2 \\ \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \end{bmatrix}$$

où i correspond au type et j correspond à la composante. La matrice inverse de Δ est donnée par

7.3. EXEMPLES

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\det(\Lambda)} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & -\lambda_0^2 \\ -\lambda_1^1 & \lambda_0^1 \end{bmatrix}, \quad \det(\Lambda) = \lambda_1^2 \lambda_0^1 - \lambda_1^1 \lambda_0^2.$$

Nous savons que les champs de vecteurs sont définis par

$$\begin{aligned} X_{l+1} &= \frac{\partial}{\partial x^{l+1}} - \sum_{i,j=1}^l (\Lambda^{-1})_i^j \lambda_p^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ &\vdots \\ X_p &= \frac{\partial}{\partial x^p} - \sum_{i,j=1}^l (\Lambda^{-1})_i^j \lambda_p^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

où i correspond à l'indice de la colonne et j correspond à l'indice de la ligne.

Ces champs de vecteurs sont de la forme

$$X_a = \xi_a^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

où les ξ_a sont des vecteurs tels que

$$\lambda^a \xi_a = 0,$$

de sorte que λ^a et ξ_a forment une base dans l'espace des variables indépendantes X .

Nous trouvons alors

$$\xi_2(u) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^1 - \lambda_1^1 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_0^1 - \lambda_1^1 \lambda_0^2} \\ \frac{\lambda_0^2 \lambda_2^1 - \lambda_0^1 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \lambda_0^1 - \lambda_1^1 \lambda_0^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_3(u) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^1 \lambda_3^2 - \lambda_1^2 \lambda_3^1}{\lambda_1^2 \lambda_0^1 - \lambda_1^1 \lambda_0^2} \\ \frac{\lambda_0^2 \lambda_3^1 - \lambda_0^1 \lambda_3^2}{\lambda_1^2 \lambda_0^1 - \lambda_1^1 \lambda_0^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculons X_2 et X_3 , nous obtenons

7.3. EXEMPLES

$$\begin{aligned}
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} - \sum_{i=1}^2 (\Lambda^{-1})_i^0 \lambda_2^i \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 (\Lambda^{-1})_i^1 \lambda_2^j \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} - \left((\Lambda^{-1})_1^0 \lambda_2^1 + (\Lambda^{-1})_2^0 \lambda_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} - \left((\Lambda^{-1})_1^1 \lambda_2^1 + (\Lambda^{-1})_2^1 \lambda_2^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\det(\Lambda)} (\lambda_1^2 \lambda_2^1 - \lambda_1^1 \lambda_2^2) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\det(\Lambda)} (-\lambda_0^2 \lambda_2^1 + \lambda_0^1 \lambda_2^2) \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^2 (\Lambda^{-1})_i^0 \lambda_3^i \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^2 (\Lambda^{-1})_i^1 \lambda_3^j \frac{\partial}{\partial x} \tag{7.20} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} - \left((\Lambda^{-1})_1^0 \lambda_3^1 + (\Lambda^{-1})_2^0 \lambda_3^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} - \left((\Lambda^{-1})_1^1 \lambda_3^1 + (\Lambda^{-1})_2^1 \lambda_3^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{\det(\Lambda)} (\lambda_1^2 \lambda_3^1 - \lambda_1^1 \lambda_3^2) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\det(\Lambda)} (-\lambda_0^2 \lambda_3^1 + \lambda_0^1 \lambda_3^2) \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Le système (5.1) est invariant par rapport au champ de vecteurs X_2 et X_3 .

Exemple 7.4. Soit les ondes triples d'un système d'EDP décrivant un écoulement isentropique.

Les vecteurs d'ondes $\lambda^s(u)$, $u = 1, 2, 3$ sont donnés par l'équation (6.5) soit

$$\lambda^s = (u^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_s, -\vec{e}_s).$$

Les vecteurs \vec{e}_s sont des vecteurs orthonormaux

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad i \neq j \quad |\vec{e}_s|^2 = 1, \quad s = 1, 2, 3.$$

Par exemple, nous pourrions prendre

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\
\vec{e}_2 &= (-\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\
\vec{e}_3 &= (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons

7.3. EXEMPLES

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= (u^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_1, \sin \varphi, \cos \varphi, 0), \\ \lambda^2 &= (u^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_2, -\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \lambda^3 &= (u^0 + \vec{u} \cdot \vec{e}_3, 0, 0, 1).\end{aligned}$$

Nous supposons que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Définissons la matrice formée par les vecteurs colonnes λ

$$\Lambda = [\vec{e}_1^T, \vec{e}_2^T, \vec{e}_3^T] = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où i correspond au type et j correspond à la composante. La matrice inverse est donnée par

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous savons que les champs de vecteurs sont définis par

$$\begin{aligned}X_{l+1} &= \frac{\partial}{\partial x^{l+1}} - \sum_{i,j=1}^l (\Lambda^{-1})_i^j \lambda_p^i \frac{\partial}{\partial x^j}, \\ &\vdots \\ X_p &= \frac{\partial}{\partial x^p} - \sum_{i,j=1}^l (\Lambda^{-1})_i^j \lambda_p^i \frac{\partial}{\partial x^j},\end{aligned}$$

où i correspond à l'indice de la colonne et j correspond à l'indice de la ligne. Ces champs de vecteurs sont de la forme

$$X_a = \xi_a^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

où les ξ_a sont des vecteurs tels que

$$\lambda^a \xi_a = 0$$

de sorte que λ^a et ξ_a forment une base dans l'espace des variables indépendantes X .

7.3. EXEMPLES

Nous trouvons alors

$$\xi_3(u) = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \lambda_3^1 - \cos \varphi \lambda_3^2 \\ \cos \varphi \lambda_3^1 - \sin \varphi \lambda_3^2 \\ -\lambda_3^3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dans notre cas, il faut calculer X_3

$$\begin{aligned} X_3 &= \frac{\partial}{\partial z} - (\sin \varphi \lambda_3^1 + \cos \varphi \lambda_3^2 + 0 \cdot \lambda_3^3) \frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad - (-\cos \varphi \lambda_3^1 + \sin \varphi \lambda_3^2 + 0 \cdot \lambda_3^3) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad - (0 \cdot \lambda_3^1 + 0 \cdot \lambda_3^2 + 1 \cdot \lambda_3^3) \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} - (\sin \varphi \lambda_3^1 + \cos \varphi \lambda_3^2) \frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad - (-\cos \varphi \lambda_3^1 + \sin \varphi \lambda_3^2) \frac{\partial}{\partial x} - \lambda_3^3 \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Les solutions définies par les équations (6.23), (6.24) et (6.27) sont invariantes par rapport au champ de vecteurs (7.21).

Conclusion

Ce travail de recherche portait sur la résolution d'un système quasilinéaire de type hyperbolique décrivant un flot isentropique idéal compressible. Les effets dissipatifs ont été négligés. L'objectif principal était de trouver une nouvelle classe de solutions non connue dans la littérature qui représentait la superposition de trois ondes, soient les équations (6.23), (6.24) et (6.27). Cette classe de solution a été obtenue sous la même hypothèse exigée par la méthode généralisée des caractéristiques. De plus, nous avons reconstruit ces mêmes classes de solutions à l'aide de l'approche classique de Lie. Suivant notre approche, nous avons subdivisé ce mémoire comme suit.

Dans le premier chapitre, nous avons abordé les systèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles d'ordre premier par la méthode de Monge. La nouveauté de cette présentation est l'aspect géométrique des cônes de Monge plongés dans des espaces multidimensionnels ($n \geq 5$). Une compréhension fondamentale afin de bien de poser le problème initial de Cauchy y a été présentée. Ensuite, la résolution du système ainsi que la solution ont été illustrés à l'aide d'un exemple pertinent.

Le second chapitre se voulait une revue des systèmes d'équations aux dérivées partielles quasilinéaires de type hyperbolique d'ordre premier. De plus, ce chapitre généralise les concepts proposés dans le premier chapitre pour ces types de systèmes. La méthode proposée pour résoudre ce type d'équation est la méthode des invariants de Riemann. L'aspect algébrique de cette méthode a été considéré. De plus, nous avons trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres et, à partir de ces grandeurs, des solutions représentant des ondes simples ont été construites. Par la suite, nous avons appliqué cette méthode au système de la dynamique des fluides et les solutions obtenues ont été analysées dans le quatrième chapitre.

7.3. EXEMPLES

Le troisième chapitre est une généralisation du chapitre précédent. En effet, nous cherchons des solutions d'ondes représentant la superposition d'ondes simples par la méthode généralisée des caractéristiques développée par le professeur Alfred Michel Grundland. Les conditions nécessaires et suffisantes ont été présentées et une analyse géométrique a également été faite.

Le quatrième chapitre portait sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles quasilinéaires de type hyperbolique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible en $(3 + 1)$ dimensions. Les ondes simples de deux types, potentielles et rotationnelles, sont connues dans la littérature et ont été construites par la méthode généralisée des caractéristiques.

Le cinquième et le sixième chapitre montrent que nous pouvons utiliser cette procédure afin de trouver des ondes doubles du type potentiel correspondant à la superposition de deux ondes simples (chapitre 5) et des ondes triples de type potentiel correspondant à la superposition de trois ondes simples (chapitre 6). De plus, une analyse des classes de solutions représentant des ondes dispersées et non dispersées a été faite.

De nouveaux résultats non connus dans la littérature ont été trouvés. Cela nous confirme que la plupart des solutions représentant des ondes triples du système d'EDP hydrodynamique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible pour trois ondes ou plus sont toujours des ondes non dispersées.

Le septième chapitre présente une version des symétries conditionnelles qui nous permet d'obtenir des solutions sous une forme qui inclut des ondes simples, doubles, triples ou multiples. Nous avons appliqué cette méthode aux systèmes d'équations aux dérivées partielles quasilinéaires de type hyperbolique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible. Cette approche est plus générale que la méthode des caractéristiques car il n'y a pas de contraintes spécifiques sur les vecteurs d'ondes étant en superposition. De plus, les dérivées $\partial u^\alpha / \partial x^i$ se décomposent comme une combinaison linéaire d'éléments simples intégraux

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \xi^s \gamma_s^\alpha \lambda_i^s$$

où les ξ^s ne sont plus des scalaires qui dépendent seulement de $x \in \mathbb{R}^p$, mais sont remplacés par une matrice Φ_j^i de dimension $k \times k$ dépendant de $x \in \mathbb{R}^p$

7.3. EXEMPLES

et de $u(x)$. La difficulté avec la méthode des symétries conditionnelles est que cela réduit le système initial en des équations aux dérivées partielles qui sont généralement difficiles à résoudre. Si nous imposons des conditions additionnelles provenant de la méthode généralisée des caractéristiques, nous pouvons reconstruire des solutions spécifiques à cette méthode représentant des ondes multiples. Des exemples de ce type de solutions ont été effectués dans le cadre de cette recherche.

Une comparaison de la méthode généralisée des caractéristiques et des symétries conditionnelles a été effectuée avec succès. Dans ce cas, de nouveaux résultats ont été trouvés et analysés. Pour cela, des programmes ont été conçus à l'aide de Maple et MACSYMA. Par la suite, nous avons analysé ces solutions et trouvé les graphiques des solutions, voir l'annexe C. À l'annexe D, nous trouvons un résumé sur le programme MACSYMA concernant les critères de symétries pour n'importe quelle équation différentielle. Des symétries classiques ponctuelles de Lie ont été trouvées pour un système d'équations aux dérivées partielles quasilineaire de type hyperbolique décrivant un flot isentropique d'un fluide idéal compressible.

Finalement, nous trouvons quatre annexes. L'annexe A démontre que les points d'une enveloppe de la famille de surfaces satisfont les équations suivantes :

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \alpha) &= 0, \\ F_\alpha(x, y, z, \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

L'annexe B porte sur la démonstration du théorème des fonctions implicites. L'annexe C contient le code Maple permettant d'obtenir les solutions et les graphiques d'ondes triples obtenus au chapitre 6. En annexe D, nous avons un résumé sur le programme MACSYMA concernant les critères de symétries pour n'importe quelle équation différentielle ainsi que les symétries ponctuelles classiques de Lie.

Ce mémoire m'a permis d'acquérir une plus grande compréhension des EDP quasilineaires de type hyperboliques en hydrodynamique. Soulignons que les deux méthodes peuvent être appliquées à d'autres systèmes d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique. Il existe plusieurs domaines d'applications, notamment en physique; par exemple, la théorie non linéaire de champs classiques ou quantiques.

Annexe A

Enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre.

Considérons une famille de surfaces à un paramètre

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{A.1}$$

de classe C^1 et supposons que la dérivée de F par rapport à α soit continue. Supposons que l'équation (A.1) représente une fonction pour chaque α . Si $F_\alpha \neq 0$, sur plusieurs surfaces de la famille correspondante à une valeur α_0 du paramètre, alors l'équation (A.1) représente différentes surfaces pour différentes valeurs de α dans un voisinage de α_0 .

L'enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre (A.1) est une surface \mathcal{F} qui est tangente à chaque point à une surface de la famille et, en plus, à chaque voisinage d'un point de contact avec la surface, il y a des points de contact avec d'autres surfaces de la famille. D'où le fait que l'enveloppe ne peut pas coïncider avec une des surfaces de la famille dans un voisinage ouvert. Nous supposons que la famille des surfaces est une enveloppe qui est elle-même une surface représentée localement par une équation paramétrique $r = r(u^1, u^2)$. À chaque point (u^1, u^2) de l'enveloppe correspond une surface de la famille tangente à l'enveloppe en ce point. À travers cette correspondance, α devient une fonction de u^1 et de u^2 ; donc $\alpha = \alpha(u^1, u^2)$ est une fonction de classe C^1 . Avec ces hypothèses, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème A.1.

Les points d'une enveloppe de la famille de surfaces (A.1) satisfont les équations suivantes :

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{A.2}$$

$$F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Ces équations sont aussi satisfaites par les points singuliers des surfaces de la famille, même si ces points n'appartiennent pas à l'enveloppe.

Démonstration.

Soit $r = r(u^1, u^2)$ la représentation paramétrique de l'enveloppe. Comme le point (u^1, u^2) de l'enveloppe est le point de contact avec la surface de la famille (A.1) auquel correspond la valeur $\alpha(u^1, u^2)$ du paramètre, nous avons l'identité

$$F(x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2), \alpha(u^1, u^2)) = 0.$$

En dérivant cette équation respectivement par u^1 et par u^2 , nous obtenons

$$F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 + F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} = 0, \tag{A.3}$$

$$F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 + F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = 0.$$

Comme l'enveloppe et la surface sont tangentes, ils ont un plan tangent commun. Donc, le vecteur $\{F_x, F_y, F_z\}$ normal à la surface de la famille, doit être perpendiculaire aux vecteurs $\{x_1, y_1, z_1\}$ et $\{x_2, y_2, z_2\}$ qui sont tangent à l'enveloppe, d'où nous avons que

$$\begin{aligned} F_x x_1 + F_y y_1 + F_z z_1 &= 0, \\ F_x x_2 + F_y y_2 + F_z z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Des équations (A.3) et (A.4), il s'ensuit que les conditions suivantes

$$F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} = 0,$$

$$F_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = 0$$

doivent être satisfaites. De notre hypothèse, les dérivées

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u^1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}$$

ne peuvent pas être nulles simultanément. Donc, nous devons avoir aux points de l'enveloppe $F_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0$ dont, avec l'équation de la famille nous obtenons les équations (A.2).

Il est évident que les points singuliers des surfaces de la famille, c'est-à-dire des points tels que $F_x = F_y = F_z = 0$, satisfont également le système (A.4), et conséquemment le système (A.2). Si les points satisfaisant le système (A.2) ne sont pas des points singuliers de la famille d'une surface, le système (A.2) sous-entend le système (A.4), cela signifie donc que cette surface est tangente à la surface de la famille correspondante. En d'autres mots, elle doit être une enveloppe.

La fonction $\alpha(u^1, u^2)$ dépend de la paramétrisation de l'enveloppe et cette paramétrisation n'est pas connue à l'avance. Afin de trouver une enveloppe d'une famille à un paramètre, nous devons procéder de la façon suivante. Après avoir trouver les équations du système (A.2), soit que nous éliminons α et que nous obtenons une équation implicite, soit que nous exprimons x, y, z comme des fonctions de deux paramètres auxiliaires afin d'obtenir les équations paramétriques. En particulier, α peut être un de ces paramètres. L'équation résultante représente l'union de l'enveloppe et de l'ensemble des points singuliers. D'où une vérification doit être apportée afin de déterminer quelle partie de l'équation représente l'enveloppe.

Pour une valeur de α , les équations (A.2) représentent, en général, un courbe sur la surface correspondant à la valeur du paramètre. Si ce n'est pas une ligne de points singuliers, les courbes sont également sur l'enveloppe. La surface et l'enveloppe sont tangents le long de cette courbe. De telles courbes sont appelées les lignes caractéristiques.

□

Annexe B

Théorème des fonctions implicites.

Théorème B.1.

Soit un ensemble ouvert $E \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{k+m}$ et f , une fonction de classe $C^1 \in E$ telle que

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Supposons que $F(x_0, y_0) = 0$ et que $D_y F(x_0, y_0) \neq 0$; c'est-à-dire $J_{F_y}(x_0, y_0)$ soit inversible.

Alors il existe un voisinage U de $x_0 \in \mathbb{R}^k$ et un voisinage ω de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+m}$ et une fonction f de classe $C^1 \in U$ telle que $y_0 = f(x_0)$,

$$\{(x, y) \in \omega \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$$

et

$$f'(x_0) = -(D_y F(x_0, y_0))^{-1} \circ D_x F(x_0, y_0) (\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m))$$

ou, sous une forme matricielle

$$J_f(x_0) = -(J_{F_y}(x_0, y_0))^{-1} J_{F_x}(x_0, y_0).$$

Démonstration.

Introduisons la fonction

$$G : \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^{k+m}$$

$$G(x, y) = (x, F(x, y)),$$

alors G est de classe C^1 et

$$G'(x, y) = (id_{\mathbb{R}^k}, F'(x, y)).$$

Sous une forme matricielle

$$J_G(x, y) = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \dots 0}^k & \overbrace{0 \dots 0}^m \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 1 & 0 \dots 0 \\ \underbrace{J_F(x, y)}_{k+m} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_{k \times k} & 0_{k \times m} \\ J_{F_x}(x, y) & J_{F_y}(x, y) \end{bmatrix},$$

$$G(x_0, y_0) = (x_0, 0).$$

$G'(x_0, y_0)$ est inversible car $J_{F_y}(x_0, y_0)$ est inversible. En effet,

$$J_G^{-1}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_k & 0_{k \times m} \\ -J_{F_y}^{-1}(x_0, y_0) \circ J_{F_x}(x_0, y_0) & J_{F_y}^{-1}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

En vertu du théorème des fonctions inverses, il existe un voisinage $\omega \in (x_0, y_0)$ et ω_1 $G(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ et une fonction inverse de classe C^1

$$G : \omega_1 \rightarrow \omega | G^{-1}(x_0, 0) = (x_0, y_0).$$

Sans perdre la généralité, nous pouvons supposer que $\omega_1 = U \times V$. Donc, Y est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^k$ et V est un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^m .

De plus, nous avons que

$$(G^{-1})'(G(x, y)) = (G'(x, y))^{-1}.$$

Sous une forme matricielle, nous avons

$$J_G^{-1}(G(x, y)) = \begin{bmatrix} I_k & 0_{k \times m} \\ -J_{F_y}^{-1}(x, y) \circ J_{F_x}(x, y) & J_{F_y}^{-1}(x, y) \end{bmatrix}.$$

La fonction G^{-1} a la forme suivante :

$$G^{-1} = (x, H(x, y)).$$

Rappelons que nous nous intéressons aux points (x, y) tels que

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0 &\Rightarrow G(x, y) &= (x, 0) \\ \Rightarrow (x, y) &= G^{-1}(x, 0) = (x, H(x, y)) \\ &\Rightarrow y &= H(x, 0). \end{aligned}$$

Posons

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ et } f(x) = H(x, 0),$$

où f est la fonction qu'il faut trouver. En effet, f est de classe C^1 car H est de classe C^1

$$\begin{aligned} f(x_0) &= H(x_0, y_0) = y_0 \\ \Rightarrow f'(x_0) &= D_x H(x_0, y_0) \\ &= -J_{F_y}^{-1}(x_0, y_0) \circ J_{F_x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Finalement, nous avons que

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \omega \mid F(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in \omega \mid G(x, y) = (x, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \omega \mid (x, y) \in G^{-1}(x, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \omega \mid (x, y) = (x, H(x, 0)) = (x, f(x))\} \\ &= \{(x, y) \in \omega \mid y = f(x) \text{ et } x \in U\}. \end{aligned}$$

□

Annexe C

Codes du programme permettant d'obtenir des solutions d'ondes triples

C.1 Exemple linéaire

```
> restart;
```

Déterminons la matrice A ainsi que les vecteurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 et B.

```
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3]);
> psi_1:=vector(3, [psi_11, psi_12, psi_13]);
> psi_2:=vector(3, [psi_21, psi_22, psi_23]);
> psi_3:=vector(3, [psi_31, psi_32, psi_33]);
> X:=vector(3,[x, y, z]);
> B:=vector(3,[
> ( (kappa+1)/2 * R1 + D0)*t - innerprod(psi_1, X),
> ( (kappa+1)/2 * R2 + D0)*t - innerprod(psi_2, X),
> ( (kappa+1)/2 * R3 + D0)*t - innerprod(psi_3, X)]);
```

Trouvons les invariants de Riemann R_1, R_2 et R_3 .

C.1. EXEMPLE LINÉAIRE

```

> temp1:=matrix(3,3,[B[1], A[1,2], A[1,3], B[2], A[2,2], A[2,3],
B[3],
> A[3,2], A[3,3] ]):
> temp2:=matrix(3,3,[A[1,1], B[1], A[1,3], A[2,1], B[2], A[2,3],
A[3,1],
> B[3], A[3,3] ]):
> temp3:=matrix(3,3,[A[1,1], A[1,2], B[1], A[2,1], A[2,2], B[2],
A[3,1],
> A[3,2], B[3] ]):
> R:=vector(3, [simplify(det(temp1)/det(A)),
> simplify(det(temp2)/det(A)), simplify(det(temp3)/det(A))]);
> solve({R1=R[1], R2=R[2], R3=R[3]}, {R1, R2, R3});

```

Comme la matrice A , les vecteurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 et B, κ et D^0 dépendent de valeurs arbitraires, nous pouvons réécrire les invariants de Riemann de la façon suivante

```

> Den:=(M*t^3+N*t^2+P*t+S):
> R1:=(x,y,z)->(A*t^3+B1*t^2+C1*x*t^2+D1*y*t^2+E1*z*t^2+F1*x*t+G1*y*t+H
> 1*z*t+I1*t+J1*x+K1*y+L1*z)/Den;
> R2:=(x,y,z)->(A*t^3+B2*t^2+C2*x*t^2+D2*y*t^2+E2*z*t^2+F2*x*t+G2*y*t+H
> 2*z*t+I2*t+J2*x+K2*y+L2*z)/Den;
> R3:=(x,y,z)->(A*t^3+B3*t^2+C3*x*t^2+D3*y*t^2+E3*z*t^2+F3*x*t+G3*y*t+H
> 3*z*t+I3*t+J3*x+K3*y+L3*z)/Den;
> f1:=(x,y,z)->a1*R1(x,y,z)+a2*R2(x,y,z)+a3*R3(x,y,z);
> f2:=(x,y,z)->b1*R1(x,y,z)+b2*R2(x,y,z)+b3*R3(x,y,z);
> f3:=(x,y,z)->c1*R1(x,y,z)+c2*R2(x,y,z)+c3*R3(x,y,z);
> t:=2:
> A:=1: B1:=2: B2:=3: B3:=4: C1:=3: C2:=4: C3:=5: D1:=4: D2:=5:
D3:=-6:
> E1:=5: E2:=6: E3:=7: F1:=6: F2:=7: F3:=8: G1:=7: G2:=8: G3:=9:
H1:=8:
> H2:=9: H3:=10: I1:=9: I2:=10: I3:=11: J1:=10: J2:=11: J3:=12:
K1:=11:
> K2:=12: K3:=13: L1:=12: L2:=13: L3:=14: M:=5: N:=2: P:=3: S:=1:
a1:=1:
> a2:=2: a3:=3: b1:=-2: b2:=-1: b3:=3: c1:=-1: c2:=5: c3:=-1:
> with(plots):
> implicitplot3d({f1(x,y,z)=0,f2(x,y,z)=0,f3(x,y,z)=0
> },x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10, orientation=[3,116]);

```

C.2. EXEMPLE NON LINÉAIRE

C.2 Exemple non linéaire

```
> restart:
```

Déterminons la matrice A, les vecteurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 et B ainsi que les fonctions $f^i, i = 1, 2, 3$.

```
> with(linalg):
> f1:=C1/R1;
> f2:=C2*R2;
> f3:=C3*R3;
> psi_1:=vector(3, [psi_11, psi_12, psi_13]):
> psi_2:=vector(3, [psi_21, psi_22, psi_23]):
> psi_3:=vector(3, [psi_31, psi_32, psi_33]):
> X:=vector(3, [x, y, z]):
> B:=vector(3, [
> ( (kappa+1)/2 * R1 + D0)*t - innerprod(psi_1, X),
> ( (kappa+1)/2 * R2 + D0)*t - innerprod(psi_2, X),
> ( (kappa+1)/2 * R3 + D0)*t - innerprod(psi_3, X)]):
```

Trouvons les invariants de Riemann R_1, R_2 et R_3 .

```
> R1:=solve(B[1]=f1, R1):
> R2:=solve(B[2]=f2, R2):
> R3:=solve(B[3]=f3, R3):
```

Comme la matrice A, les vecteurs ψ_1, ψ_2, ψ_3 et B, κ et D^0 dépendent de valeurs arbitraires, nous pouvons réécrire les invariants de Riemann de la façon suivante

```
> R1:=(x, y, z) -> (A*x + B*y + C*z + d*t + 2*sqrt(E*x^2 + F*y^2 +
+
> G*z^2 + H*x*y + i*x*z + J*y*z
> + K*x*t + L*y*t + M*z*t + N*t^2 + P*t))/(Q*t);
> R2:=(x,y,z) -> (R*t + S*x +T*y + U*z)/(V*t + W);
> R3:=(x,y,z) -> (alpha*t + beta*x +xi*y + delta*z)/(epsilon*t
+ mu);
> f1:=(x, y, z)->C1/(R1(x, y, z));
> f2:=(x, y, z)->C2*(R2(x, y, z));
> f3:=(x, y, z)->C3*(R3(x, y, z));
> t:=2.5;
> A:=1: B:=2: C:=3: d:=4: E:=5: F:=6: G:=7: H:=8: i:=-9: J:=10:
K:=11:
> L:=12: M:=5: N:=2: P:=3: Q:=3: R:=21: S:=22: T:=23: U:=24:
V:=25:
> W:=1: alpha:=-2: beta:=5: xi:=-3: delta:=4: epsilon:=5: mu:=6:
> C1:=-1: C2:=5: C3:=-4:
```

C.2. EXEMPLE NON LINÉAIRE

```
> with(plots):
> G1:=implicitplot3d(f1(x,y,z),x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,
> numpoints=20000, orientation=[-156,-149]):
> G2:=implicitplot3d(f2(x,y,z),x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,
> color=grey, orientation=[-156,-149]):
> G3:=implicitplot3d(f3(x,y,z),x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,
> orientation=[-156,-149]):
> display(G1, G2, G3);
```

Annexe D

Description du programme MACSYMA effectuant la méthode de réduction par symétrie pour les EDPs

Cette annexe, basée sur les références [23] et [24], présente le programme SYMMGRP.MAX de MACSYMA donnant un ensemble d'équations différentielles déterminantes pour les symétries de Lie d'un système arbitraire d'équations différentielles.

Le programme SYMMGRP.MAX est essentiellement constitué de définitions de fonctions. Il y a une fonction définie pour chacune des tâches majeures du processus. La première fonction se nomme SYMMETRY et est considérée comme le programme principal. Une fois appelée, cette fonction lit les données et effectue les étapes majeures de l'algorithme en appelant séquentiellement les autres fonctions.

En plus des définitions de fonctions, il existe un ensemble d'énoncés au début du programme, utile à l'exécution du programme. Cet ensemble contient la règle de remplacement des définitions (RULE), l'énoncé de déclaration d'identité (MATCH_DECLARE) et les définitions de l'identité de modèles (PATTERN MATCHING).

D.1 Types de données

Ce programme fonctionne pour des systèmes de m équations différentielles d'ordre k comportant p variables dépendantes et q variables indépendantes,

D.1. TYPES DE DONNÉES

où p , q et $m \in \mathbb{N}$. Le système d'équations différentielles dont nous voulons calculer les équations déterminantes peut contenir des paramètres arbitraires et même des fonctions arbitraires des variables x^i et u_l . De ce fait, les noms pour ces paramètres ou fonctions ne doivent pas être en conflit avec aucun autre nom utilisé par le programme, en particulier : I, J, L, M, P, Q, E1, E2, ..., V1, V2, etc. Il faut également porter attention aux lettres majuscules et minuscules car MACSYMA ne fait pas la différence. Pour les fonctions arbitraires, les dépendances doivent être déclarées à l'aide de la déclaration `DEPENDS` avant d'appeler `SYMMETRY`.

Le programme prend en considération que les u^l sont des fonctions de $\mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$. Si un système d'équations différentielles contient des variables dépendantes de type complexe $\mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{C}$, alors la décomposition en parties réelle et imaginaire doit être faite avant d'utiliser le programme.

En entrant le système original des équations différentielles, nous ne pouvons pas utiliser les symboles C1, C2, ..., D1, D2, ... car MACSYMA utilise ces symboles dans ses lignes de commande et d'affichage. L'utilisation des lettres grecques est prescrite.

Il faut aussi noter que MACSYMA commence l'allocation de données dans un vecteur mis à 0 (comme dans le langage C). La première composante du vecteur `ETA` se situe à `ETA[0]`.

D.2. DONNÉES D'ENTRÉE.

D.2 Données d'entrée.

Tous les fichiers de données doivent avoir les informations suivantes :

- 1) Le nombre de variables indépendantes : $p \in \mathbb{N}$
- 2) Le nombre de variables dépendantes : $q \in \mathbb{N}$
- 3) Le nombre d'équations que comporte le système complet : $m \in \mathbb{N}$
- 4) La liste des paramètres non nuls (apparaissant dans une équation donnée) qui pourraient être mis en évidence et supprimée. parameters : [a1, s1, aa, ..., w2]. S'il n'en existe pas dans l'équation, alors nous avons "parameters" : [].
- 5) Le nombre d'équations que le programme doit traiter est contrôlé par sublisteqs. Par exemple, sublisteqs : [e1] pour la première équation. sublisteqs : [ei, ..., em] pour la $i^{\text{ème}}$ à la $m^{\text{ème}}$ équation seulement, sublisteqs : [all] pour toutes les équations du système.
- 6) Le sous-ensemble désiré d'équations déterminantes est contrôlé en ajustant highest_derivatives : s, où s est un entier positif qui indique le décompte pour l'ordre des dérivées dans la prolongation.
- 7) L'avertissement "flag" : false ou true contrôle la sortie des messages à propos de la division par paramètre et autres simplifications.
- 8) Le "flag" info_given : false ou true est utilisé en connexion avec le mécanisme de rétroaction pour la résolution du système déterminant. Les informations à propos des coefficients ξ^i et φ_l dans le champ de vecteurs ν doivent être entrées.
- 9) Δ^j doit être donnée comme ei, $i = 1, \dots, m$. Il suffit uniquement de donner le côté gauche de l'équation.
- 10) Les variables ν^i choisies pour la substitution sont données comme suit : v^i avec $i = 1, \dots, m$.

D.3. LISTE DES PRINCIPAUX IDENTIFICATEURS

D.3 Liste des principaux identificateurs

Liste des principaux identificateurs

Texte	Programme	Signification
p	P	nombre de variables indépendantes
q	Q	nombre de variables dépendantes
m	M	nombre d'équations du système
x_i	X[I]	variables indépendantes $I = 1, \dots, P$
u_l	U[L]	variables dépendantes $L = 1, \dots, Q$
J_i	J[i]	vecteur canonique, par exemple, J[2], [0, 1, 0, ..., 0]
	J[1], J[2], ..., J[P]	liste des vecteurs canoniques
u_l^j	U[L, J]	les dérivées de u_l par rapport à la j^{me} variable indépendante.
ξ^i	ETA[I]	coefficients de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dans le champ de vecteurs
φ_l	PHI[L]	coefficients de $\frac{\partial}{\partial u^l}$ dans le champ de vecteurs
φ_l^j	PHI[L, J]	les dérivées de φ_l par rapport à la j^{me} variable indépendante.
Δ^i	EI	équations du système E1, E2, etc.
v^i	VI	variables pour la substitution V1, V2, etc

D.4 Description des fonctions principales

PROVF(F) : Applique la k^{me} prolongation de ν dans l'équation

$$\nu = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^q \varphi_a(x, u) \frac{\partial}{\partial u_a}$$

à une fonction $F(x, u^{(k)})$ et affiche le résultat.

TOTDF(I, F) : Applique l'opérateur de la dérivée totale D, définie par

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_a} + \sum_{a,j} \frac{\partial u_{axj}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial u_{axj}} + \dots$$

à une fonction $F(x, u^{(k)})$ et affiche le résultat.

D.4. DESCRIPTION DES FONCTIONS PRINCIPALES

FPSI(L, J) : Calcule les coefficients φ_l^j de l'équation

$$pr^{(k)}\nu = \nu + \sum_{a=1}^q \sum_{i=1}^k \sum_j \varphi_a^j \frac{\partial}{\partial u_j^a}$$

en utilisant les formules récurrentes

$$\begin{aligned} \varphi_a^j &\equiv \varphi_a^{x_i}(x, u, u_{x_i}, \dots, u_{x_p}) \\ &= D_{x_i} \varphi_a^j - \sum_{l=1}^p (D_{x_i} \xi^l) u_{x_l}^a, \end{aligned} \quad (D.1)$$

$$\varphi_a^{j,l} = D_l \varphi_a^j - \sum_{l=1}^p (D_l \xi^a) u_{j,a}^a. \quad (D.2)$$

De façon à appeler PSI au lieu de FPSI, ces coefficients sont affectés à un vecteur PSI[I, J] défini par PSI[I, J] := FPSI(L, J). Nous devons procéder de cette façon puisque nous pouvons effacer les données du vecteur PSI sans effacer la fonction des définitions utilisée pour calculer les φ_l^j . Notons ici que J doit être une liste MAC-SYMA de p entiers.

EXTSUBST(EXPR) : Applique à une expression EXPR dépendant de x et de $u^{(k)}$ la substitution des équations (D.1) et (D.2) jusqu'à ce que tous les v^j et leurs dérivées partielles soient éliminées de EXPR. Cette fonction nous retourne la nouvelle expression obtenue.

LODE[1] : Les équations de LODE seront ordonnées en ordre croissant selon la longueur de l'opérateur "+" (commençant avec le monôme et finissant avec le plus long polynôme)

LODE[2] : Les équations mononômiales de LODE seront ordonnées par ordre croissant selon leur niveau de différentiation par rapport à x_j et u^l .

D.4. DESCRIPTION DES FONCTIONS PRINCIPALES

- SEARCHCOEFF(EXPR) : En donnant à cette fonction une expression (EXPR) polynômiale par rapport aux dérivées de u_j^l (les exposants de u_j^l n'ont pas besoin d'être naturels, ils peuvent être réels), cette dernière trouve tous ces coefficients et, dépendamment des longueurs, ces coefficients sont insérés dans une des deux listes. En fait, à la fin de la procédure LODE[1] sera la liste contenant tous les coefficients monômiaux et LODE[2] sera la liste contenant tous les coefficients qui sont polynômiaux. Dans ce contexte, ces coefficients sont précisément les équations déterminantes.
- SIMPEQN() : Après avoir trouvé les deux listes déterminantes LODE[1] et LODE[2], cette fonction donne une unique liste appelé LODE d'équations déterminantes. Celle-ci est équivalente à l'union des deux listes mais sans répétitions et redondances différentielles.
- PRINTEQN(LIST) : Cette fonction imprime les éléments d'une liste sous une forme ressemblant à une équation.
- SYMMETRY(IND1, IND2, IND3) : Cette fonction est considérée comme le programme principal. En appelant cette fonction, le programme s'exécute. Les trois arguments permettent à l'usagé de contrôler partiellement son exécution. Les arguments peuvent prendre soit 0 ou 1 comme valeur. Des actions différentes sont prises pour des valeurs différentes, voir le tableau suivant.

D.4. DESCRIPTION DES FONCTIONS PRINCIPALES

Description des arguments de la fonction SYMMETRY

Paramètre	Valeur	L'effet sur l'exécution
IND1	0	Le programme est utilisé en mode interactif
	1	Le programme est utilisé en mode fichier
IND2	0	La valeur PSI est remise à 0 avant que les calculs commencent
	1	PSI n'est par remis à 0, seulement le nouveau PSI sera calculé
IND3	0	Aucune trace des calculs ne sera donnée
	1	Une trace des calculs sera donnée

Que le programme soit utilisé en mode fichier en mode fichier ou interactif, les données doivent être introduites de la façon appropriée

1) Mode fichier :

Ce mode est conseillé pour les équations d'ordre élevé ou pour les systèmes d'équations. Un fichier contient les commandes MACSYMA nécessaires pour faire fonctionner le programme et lire les données. Les données sont mises dans un fichier à l'aide de la syntaxe du langage MACSYMA. Ce fichier est lu avant que la fonction SYMMETRY soit appelée (avec $IND1 = 1$).

2) Mode interactif :

Ce mode est activé en appelant SYMMETRY avec $IND1 = 0$. Ce mode est utile pour une seule équation ou pour les systèmes très simples ; donc, pour les équations dont l'ordre de dérivation est petit. Tous les paramètres peuvent être contrôlés de façon interactive. Le programme demandera les dix informations listées à la section (D.2) et enregistrera ces informations dans un fichier "input data".

Si `info_given` est initialisé à `true`, le programme demandera à l'utilisateur de lui donner les formes explicites de tous les ξ et φ . Si pour certaines de ces fonctions aucune information explicite n'est disponible, il faut donner les noms ; par exemple, `eta1`, `phi1`, etc. Les informations concernant les dépendances doivent être données avec une déclaration

D.5. DONNÉES DE SORTIE

DEPENDS avant d'appeler la fonction SYMMETRY, autrement, les dépendances doivent explicitement être données comme arguments des fonctions.

D.5 Données de sortie

À la fin des calculs, les équations déterminantes ne sont pas automatiquement imprimées. Elles sont placées dans une liste d'équations déterminantes appelée LODE. Une copie des équations déterminantes peut être obtenue avec la commande PRINTEQN(LODE).

La fonction PRINTEQN est séparée du programme principal et se retrouve sous le nom de PRINTEQN.MAX Si nous voulons utiliser séparément l'une des fonctions décrites par la famille d'équations non-linéaires de la chaleur

$$u_t = (f(u) u_x) + g(u),$$

alors SYMMETRY doit être appelé avec seulement p, q et $m = 0$ comme données d'entrées. Le tableau suivant fait le résumé des informations disponibles à la fin des calculs et nous dit comment y accéder.

Informations disponibles à la fin des calculs

Identificateur	Type	Sortie	Contenu
LODE	liste	printeqns(lode);	liste des équations déterminantes
PSI	vecteur	listarray(psi);	φ_i^j évalué lors des calculs
ALGSOLS	liste	printeqn(algsols);	Solutions algébriques pour les équations $\Delta^i = 0$ pour les variables v^i .
DIFSUB	vecteur	listarray(difsub);	Substitution utilisée pour éliminer les v^j ainsi que de leurs dérivées.
ETA	vecteur	listarray(eta);	composantes de ETA
PHI	vecteur	listarray(phi);	composantes de PHI

D.6 Générateurs d'un système d'EDP quasili-néaire de type hyperbolique.

Nous avons utilisé le programme MACSYMA afin d'obtenir les générateurs d'un système d'EDP quasili-néaire de type hyperbolique décrivant un flot

D.6. GÉNÉRATEURS D'UN SYSTÈME D'EDP QUASILINÉAIRE DE TYPE HYPERBOLIQUE.

isentropique (4.1) d'un fluide idéal compressible. Nous obtenons les résultats suivants

(i) Si $k \neq 3$, l'algèbre de Lie est générée par les douze générateurs suivants :

$$\begin{aligned}
 P_\mu &= \partial_{x^\mu}, \\
 K_i &= x^0 \partial_{x^i} + \partial_{u^i}, \\
 F &= x^\mu \partial_{x^\mu}, \\
 G &= -x^0 \partial_{x^0} + u^\mu \partial_{u^\mu}, \\
 J_k &= \epsilon_{kij} (x^i \partial_{x^j} + u^i \partial_{u^j}),
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

où ϵ_{kij} est le symbole de Levi-Cevita, $u^\mu = (a, u, v, w)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $i, j, k = 1, 2, 3$.

(ii) Si $k = 3$, l'algèbre de Lie est générée par les douze générateurs du système (D.3) et par le générateur

$$C = x^0 (x^\mu \partial_{x^\mu} - u^0 \partial_{u^0}) + (x^i - x^0 u^i) \partial_{u^i}.$$

Notons que pour le cas où $k = 3$, nous avons la situation d'un gaz diatomique lorsque l'exposant polytropique $\gamma = \frac{5}{3}$.

Ces opérateurs représentent la translation temporelle (P_0), les translations (P_1, P_2 et P_3), les rotations (J_1, J_2 et J_3) les transformations galiléennes (K_1, K_2 et K_3), les dilatations (F et G) ainsi que la transformation projective C. Les relations de commutation des générateurs sont les suivantes :

(i) L'algèbre galiléenne, sans extension centrale de l'algèbre de Lie, est générée par $\{P_\mu, J_k, K_i\}$:

$$\begin{aligned}
 [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J_k, & [J_i, P_l] &= \epsilon_{ijk} P_k, \\
 [J_i, P_0] &= 0, & [J_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} K_k, \\
 [K_i, P_0] &= -P_i, & [K_i, K_j] &= 0, \\
 [P_i, P_j] &= 0, & [K_i, P_j] &= 0.
 \end{aligned}$$

D.6. GÉNÉRATEURS D'UN SYSTÈME D'EDP QUASILINÉAIRE DE TYPE HYPERBOLIQUE.

- (ii) L'algèbre de similitude galiléenne, sans extension centrale, est générée par $\{P_\mu, J_k, K_i, F, G\}$:

$$\begin{aligned} [F, P_0] &= -P_0, & [F, P_i] &= -P_i, & [F, K_j] &= 0, \\ [F, J_i] &= 0, & [F, G] &= 0, & [G, J_i] &= 0, \\ [G, P_0] &= P_0, & [G, P_i] &= 0, & [F, K_i] &= -K_i. \end{aligned}$$

- (iii) L'algèbre projective galiléenne, sans extension centrale, est générée par $\{P_\mu, J_k, K_i, F, G, C\}$:

$$\begin{aligned} [C, P_0] &= G - F, & [C, P_i] &= -K_i, & [C, K_i] &= 0, \\ [C, J_i] &= 0, & [C, F] &= -C, & [C, G] &= C. \end{aligned}$$

Par exemple, dans le cas de la transformation projective C, nous obtenons

$$e^{\epsilon C}(x^\mu, u^i, a) = \left(\frac{x^\mu}{1 - \epsilon x^0}, u^i + (x^i - u^i x^0), a(1 - \epsilon x^0) \right)$$

où $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ et ϵ est le paramètre du groupe.

Convention

Aux pages suivantes, l'index sera présenté. Par convention, les nombres écrits en gras correspondent aux définitions des termes. Les nombres qui ne sont pas écrits en gras représentent les pages où les termes et les notions sont réutilisés.

Index

- B**
 - Biorthogonal
 - Système, **33**
- C**
 - Cône
 - Génératrice du, **16**
 - Monge, **13, 14**
 - Caractéristique
 - Courbe, **16, 37**
 - Direction, **38, 63**
 - Du système, **48**
 - Ruban, **17**
 - Système, **70**
 - Vecteur ... en quatre dimensions, **62**
 - Catastrophe du gradient, **8**
 - Compressible
 - Écoulement non stationnaire isentropique d'un fluide ... idéal, **E 61**
 - Condition de Frobenius, **83**
 - Constante
 - adiabacité, **61**
 - Courbe
 - Caractéristique, **16, 37**
 - Famille à 1 paramètre, **36**
 - Initiale, **19, 35**
- D**
 - Décomposition
 - De la dérivée partielle au sens de Riemann, **70**
 - Dérivée
 - Décomposition de la ... partielle au sens de Riemann, **70**
 - Directionnelle, **35**
 - Déterminant, **29**
 - Dimension
 - Produit scalaire en quatre..., **62**
 - Vecteur caractéristique en quatre ..., **62**
 - Direction
 - Caractéristique, **38, 63**
 - caractéristique, **37**
 - Propagation d'une onde, **77**
 - Directionnelle
 - Dérivée, **35**
 - Droite
 - Vecteur propre de, **32**
 - Écoulement
 - Non stationnaire isentropique d'un fluide compressible idéal, **61**
 - Vitesse d', **61**
 - Élément
 - Potentiel, **64**
 - Simple intégral, **50**
 - Type d'... simple, **63**
 - Éléments simples, **63**
 - Équation
 - Pfaff, **66**

INDEX

- Système non linéaire de type hyperbolique, **42**
- Système quasilineaire de type hyperbolique, **38**
- Système quasilineaire de type strictement hyperbolique, **41**
- Équation caractéristique
 - Racine d'une, **32**
- Elliptique
 - Système non, **49**
- Espace hodographe, **64**
- F**
 - Famille
 - Courbes à 1 paramètre, **36**
 - Famille de courbes, **13**
 - Fluide
 - Écoulement non stationnaire isentropique d'un...compressible idéal, **61**
 - Fonction
 - Implicite, **54, 123**
 - Fonctions
 - Pull back, **52**
 - Forme
 - Caractéristique, **41**
 - Normale, **30**
 - Frobenius
 - Condition de, **83**
- G**
 - Génératrice du cône de Monge, **16**
 - Gauche
 - Vecteur propre de, **32**
 - Gradient
 - Catastrophe du, **8**
- H**
 - Hodographe
 - Espace, **64**
- Hyperbolique
 - Système d'équations non linéaires de type, **42**
 - Système d'équations quasilineaires de type, **38**
 - Système d'équations quasilineaires de type strictement, **41**
- I**
 - Idéal
 - Écoulement non stationnaire isentropique d'un fluide compressible, **61**
 - Implicite
 - Fonction, **54, 123**
 - Initiale
 - Courbe, **19, 35**
 - Intégral
 - Élément simple, **50**
 - Invariant
 - Riemann, **48, 53**
 - Système exprimé en, **46, 48**
 - Isentropique
 - Écoulement non stationnaire d'un fluide compressible idéal, **61**
- J**
 - Jacobien, **20**
- L**
 - Linéaire
 - Système d'équations, **30**
- M**
 - Métrique
 - Tenseur, **86**
 - Matrice
 - Non singulière, **34**
 - Norme spectrale d'une, **31**
 - Rang d'une, **32**
 - Singulière, **34**
 - Symétrique, **89**

INDEX

- Transposée, **31**
- Monge
 - Cône de, **13**, 14, 16
 - Génératrice du cône de, **16**
- Multiciplité d'une racine, **32**
- N**
 - Non singulière
 - Matrice, 34
 - Normale
 - Forme, **30**
 - Norme
 - Matrice, **31**
 - Vecteur, **31**
- O**
 - Onde
 - Direction de propagation d'une, 77
 - Solution d'onde de Riemann, **51**
 - Vitesse de propagation d'une, 75, 78
- P**
 - Pfaff
 - Équation de, **66**
 - Potentiel
 - Élément, **64**
 - Potentielle
 - Solution, **64**
 - Produit
 - Scalaire, **31**
 - Scalaire en quatre dimensions, **62**
 - sclaire, 62
 - Vectoriel, **62**
 - Propagation
 - Direction de ... d'une onde, 77
 - Vitesse de ... d'une onde, 75, 78
 - Pull back
 - Fonctions, **52**
- Q**
 - Quasilinéaire
 - Système d'équations de type hyperbolique, **38**
 - Système d'équations de type strictement hyperbolique, **41**
- R**
 - Racine
 - Équation caractéristique, 32
 - Multiplicité d'une, **32**
 - Rang d'une matrice, **32**
 - Riemann
 - Décomposition de la dérivée partielle au sens de, **70**
 - Invariant de, 48, 53
 - Solution d'ondes de, **51**
 - Rotationnelle
 - Solution, **64**
 - Ruban caractéristique, **17**
 - Équations du, **19**
- S**
 - Scalaire
 - Produit, **31**, 62
 - Produit ... en quatre dimensions, **62**
 - Semilinéaire
 - Système d'équations, 30
 - Simple
 - Élément, 63
 - Élément intégral, **50**
 - Singulière
 - Matrice, **34**
 - Solution
 - Ondes de Riemann, **51**
 - Potentielle, **64**
 - Rotationnelle, **64**
 - Son
 - Vitesse du, **62**

INDEX

- Stationnaire
 - Écoulement non ... isentropique d'un fluide compressible idéal, **61**
- Strictement
 - Système d'équations quasilineaires de type hyperbolique, **41**
- Symétrique
 - Matrice, **89**
- Système
 - Équations linéaires, **30**
 - Équations non linéaires de type hyperbolique, **42**
 - Équations quasilineaires, **30**
 - Équations quasilineaires de type hyperbolique, **38**
 - Équations quasilineaires de type strictement hyperbolique, **41**
 - Équations semilineaires, **30**
 - Biorthogonal, **33**
 - Caractéristique, **70**
 - Caractéristiques du, **48**
 - EDP de premier ordre, **29**
 - Exprimé en invariants, **46, 48**
 - Non elliptique, **49**
- T**
 - Tenseur métrique, **86**
 - Type
 - Éléments simples, **63**
- V**
 - Valeur propre, **32**
 - Vecteur
 - Caractéristique en quatre dimensions, **62**
 - Norme d'un, **31**
 - Vecteur propre
 - droite, **32**
 - gauche, **32**
- Vectorel
 - Produit, **62**
- Vitesse
 - Écoulement, **61**
 - Propagation d'une onde, **75, 78**
 - Son, **62**

Bibliographie

- [1] R. Courant et K.O. Friedrichs. *Supersonic flow and shock waves*. Interscience, New York, 1948.
- [2] J.N. Sneddon. *Elements of Partial Differential Equations*. Mc-Graw-Hill, New York, 1957.
- [3] F. John. Formulation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation. *Comm. Pure Appl. Math*, volume, 27 :377–405, (1974).
- [4] A.M. Grundland. Cours d'équations aux dérivées partielles pour les étudiant du 3^e cycle, ism, 2000.
- [5] R. Courant et D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, volume 2. Interscience, New York, 1962.
- [6] E.T. Copson. *Partial differential equations*. Cambridge University Press, London, 1975.
- [7] R. Courant et P. Lax. On nonlinear hyperbolic differential equations with two independent variables. *Comm. Pure Appl. Math*, volume 2, pages 255–273, (1949).
- [8] A. Douglis. Some existence theorems for hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables. *Comm. Pure Appl. Math*, volume 5, pages 119–154, (1952).
- [9] K.O. Friedrichs. Nonlinear hyperbolic differential equations of two independent variables. *Amer. J. Math*, volume, 7 :555–589, (1948).
- [10] P. Hartman et A. Winter. On hyperbolic partial differential equation. *Amer. J. Math*, volume, 74 :834–864, (1952).
- [11] B. Rosdestvenski et A. Sidorenko. On the impossibility of gradient catastrophe for weakly nonlinear systems. *Comm. Math and Math. Phys*, volume 7, (1967).

BIBLIOGRAPHIE

- [12] B. Rozdestvenski et N. Janenko. Systems of quasilinear equation and their applications to gaz dynamics. *A.M.S. , volume 55*, (1983).
- [13] H. Lighthill. *Hyperbolic equations and waves*. Springer-Verlag, New York, 1968.
- [14] G.B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John-Wiley, New York, 1974.
- [15] A. Jeffrey. *Quasilinear hyperbolic systems and wave propagation*. Pitman, 1976.
- [16] A. Majda. *Compressible fluid and system conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [17] B. Riemann. Über die fortpflanzung ebener luftwellen von endlicher schwingungsweite. *Göttingen Abhandlungen, volume viii*, page 43, (1858).
- [18] S.D. Poisson. Mémoire sur la théorie du son. *Journal de l'école polytechnique, 14e cahier, volume 7*, pages 319–392, (1808).
- [19] A.M. Grundland et Zelazny R. Simple waves in quasilinear hyperbolic systems. *Math, phys, volume 24*, page 9, (1983).
- [20] A.M. Grundland et P.I. Vassiliou. On the solvability of the cauchy, problem for riemann waves by the monge-darboux method. *Int. J. Analysis*.
- [21] Mises R. *Mathematical theory of compressible fluid flow*. Academic Press, New York, 1958.
- [22] Z. Peradzynski. On certain classes of exact solutions for gaz dynamic equations. *Archieves of Mechanic, 24, 2*, pages 287–303, (1972).
- [23] P. Winterwitz B. Champagne, W.Hereman. *The computer calculation of Lie Point Symmetries of large systems of differential equations*, volume 66. Computer Physics communications, 1991.
- [24] *MACSYMA, A reference Manual*. Computer Aided Mathematics group, symbolic.