

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN GÉNIE INDUSTRIEL

PAR
DANIEL NADEAU

ÉTUDE EN SYNTHÈSE DES TOLÉRANCES EN CONCEPTION
MÉCANIQUE

MARS 2006

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

Avant-propos

La mondialisation des marchés oblige les industries à optimiser leur rendement tant au niveau des coûts de production que du temps de mise en marché de leurs produits. Les industries doivent donc diminuer le temps de mise en marché de leurs produits tout en gardant le coût de fabrication le plus bas possible. Pour ce faire, elles ont besoin d'un outil qui donne de façon efficace et rapide les tolérances les plus larges tout en permettant aux mécanismes de demeurer fonctionnels. Il faut donc développer des outils qui faciliteront la tâche des industries œuvrant dans le domaine de la conception mécanique. Ce document présente le résultat de mes recherches dans le cadre de la maîtrise en génie industriel option productique à l'Université du Québec à Trois-Rivières. Dans ce document, on retrouve la problématique, une revue de la littérature scientifique sur le sujet, les méthodes utilisées, les résultats et retombées et finalement une conclusion. J'espère réussir à susciter votre intérêt pour ce domaine très important pour nos industries québécoises.

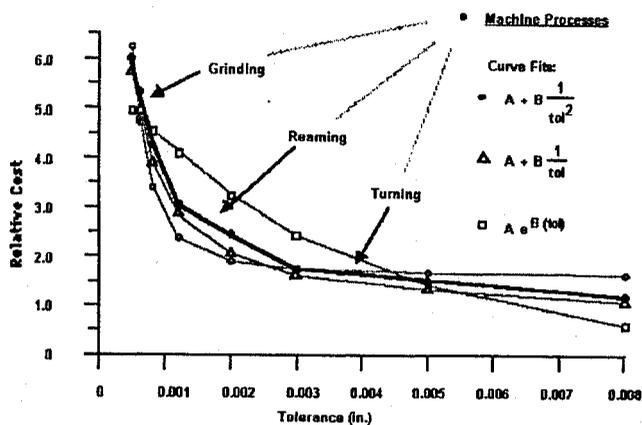
Remerciements

J'aimerais remercier monsieur Luc Laperrière, professeur au département de génie mécanique de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour sa disponibilité, son support et ses encouragements. J'aimerais aussi remercier Walid Ghie, chargé de cours au département de génie mécanique de l'Université du Québec à Trois-Rivières pour son support technique et les nombreuses heures qu'il m'a consacrées au cours des dernières années pour la réalisation de ce projet. Finalement, j'aimerais remercier mes collègues de travail messieurs Marc-André Gaudreau et Louis-Philippe Siméon, professeurs au département de Techniques de génie mécanique du Cégep de Drummondville pour leurs apports techniques et leur compréhension.

Mars 2006

Résumé

Les entreprises dépensent des sommes substantielles dans la modification de composantes lors de la conception de mécanismes. Elles conçoivent des pièces, font des tests sur les assemblages, modifient les composantes pour les rendre fonctionnelles sans moyen pour vérifier l'optimisation de la conception. C'est pour cette raison qu'il y a beaucoup de recherches sur le développement d'outils qui permettraient aux logiciels de CAO de déterminer des cotes fonctionnelles optimales et ainsi réduire les coûts de fabrication.



Graphique du coût de fabrication en fonction de la précision de la dimension [2]

La figure ci-dessus montre que la diminution des tolérances fait augmenter de façon exponentielle les coûts de fabrication et c'est pour cette raison qu'il est important d'avoir les tolérances les plus larges possibles.

Le but de cette étude est de doter les ingénieurs d'un outil informatique permettant de prévoir facilement et avec certitude les variations minimales dans un assemblage ainsi que d'identifier les causes principales du non respect de ces tolérances. Cela donnerait la possibilité aux fabricants et aux concepteurs de faire de meilleurs choix de conception plus tôt dans le cycle de développement du produit. En effet, cela réduirait de façon significative non seulement les coûts de conception mais surtout la durée de mise en marché qui est de plus en plus importante de nos jours.

Plusieurs modèles mathématiques ont été développés pour résoudre des problèmes de chaînes de cotes. Dans ce travail, la méthode du Jacobien-Torseur sera utilisée. Jusqu'à maintenant, ce modèle a été utilisé pour faire de l'analyse, c'est-à-dire que l'on fixait les intervalles de toutes les tolérances fonctionnelles et on calculait l'intervalle de tolérance de la condition fonctionnelle. Dans ce modèle, les matrices Jacobiennes sont utilisées pour tenir compte de la position des pièces et les torseurs sont utilisés pour prendre en compte les intervalles de tolérance.

Dans ce mémoire, on cible plutôt la synthèse, c'est-à-dire fixer la tolérance de la condition fonctionnelle et calculer les tolérances de chacun des éléments fonctionnels de la chaîne de cote. Pour ce faire, on utilisera la matrice pseudo inverse de la matrice Jacobienne et les torseurs.

Quatre exemples de complexité croissante seront utilisés pour vérifier le modèle mathématique. Le premier exemple consiste en un bloc en U dans lequel est inséré un autre bloc. Les tolérances sont égales et distribuées de façon symétrique pour toutes les cotes. Cet exemple a permis de constater que le modèle mathématique donne de bons résultats. Dans le deuxième exemple (bloc en U avec tolérance asymétrique en analyse) on reprend le bloc en U mais avec des tolérances non égales. Cet exemple montre que la somme des intervalles de tolérance est respectée mais par contre, avec un cas de tolérance non égale ou asymétrique, le modèle distribue uniformément les intervalles de la chaîne, ce qui diminue bien sûr l'intérêt en pratique.

Suite à ce deuxième exemple, une modification du modèle de départ est apportée afin de pouvoir obtenir des tolérances différentes pour chacun des intervalles de tolérance, ce qui sera plus applicable dans des cas concrets. En effet, dans un mécanisme, rarement les tolérances sont toutes symétriques et de valeurs égales. Dans le troisième exemple (exemple des trois blocs), on utilise un bloc en U avec cette fois trois blocs, ce qui permettra de démontrer la possibilité de faire la distribution des tolérances en attribuant des tolérances asymétrique à chacun des blocs. Cet exemple fût concluant et permet de véri-

fier le modèle en fixant et en calculant des tolérances différentes afin de tenir compte des difficultés de fabrication et des contraintes du manufacturier. Le dernier exemple (la perforatrice) est une application pratique qui consiste à faire la synthèse sur un perce-feuille à un trou qui est composé de quatre pièces principales soient une base, une matrice, un support et un poinçon.

Mots Clés

Intervalle de tolérance, conception, ajustement, synthèse, Jacobien-Torseur, cotation fonctionnelle, tolérances

Table des Matières

AVANT-PROPOS.....	I
REMERCIEMENTS	II
RÉSUMÉ	III
TABLE DES MATIÈRES	VI
LISTE DES FIGURES.....	VIII
LISTE DES TABLEAUX	IX
LISTE DES ÉQUATIONS	X
LISTE DES ABRÉVIATIONS.....	XVIII
CHAPITRE 1. PROBLÉMATIQUE	19
1.1 PROCESSUS DE CONCEPTION	19
1.2 ÉLÉMENTS DE BASE DE LA COTATION FONCTIONNELLE	19
1.3 PROBLÉMATIQUE	20
CHAPITRE 2. REVUE DE LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE.....	22
2.1 PROGRAMMATION NON LINÉAIRE.....	22
2.2 LINÉARISATION DIRECTE.....	23
2.3 LES TORSEURS	28
2.4 LES SATT	31
2.5 JACOBIEN.....	33
2.6 JACOBIEN-TORSEUR	34
2.7 RÉSEAU DE TOLÉRANCE (TOLERANCE-MAPS).....	37
2.8 AUTRES TRAVAUX	39
2.9 PRODUITS COMMERCIAUX	39
CHAPITRE 3. MÉTHODOLOGIE.....	41
3.1 MODÈLE UTILISÉE	41
3.2 EXEMPLE DU BLOC EN U AVEC TOLÉRANCE SYMÉTRIQUE EN ANALYSE	42
3.3 EXEMPLE DU BLOC EN U AVEC TOLÉRANCE SYMÉTRIQUE EN SYNTHÈSE.....	46
3.4 EXEMPLE DU BLOC EN U AVEC TOLÉRANCES ASYMÉTRIQUES EN ANALYSE	49
3.5 EXEMPLE DU BLOC EN U AVEC TOLÉRANCE ASYMÉTRIQUE EN SYNTHÈSE	50

3.6	INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS.....	51
3.7	MODIFICATION DU MODÈLE	53
3.7.1	<i>Première étape : obtention de la condition fonctionnelle restante</i>	54
3.7.2	<i>Deuxième étape : calcul des tolérances individuelles</i>	55
3.8	VALIDATION DU NOUVEAU MODÈLE.....	56
CHAPITRE 4.	RÉSULTATS.....	58
4.1	EXEMPLE DES 4 BLOCS EN SYNTHÈSE	58
4.2	EXEMPLE DE LA PERFORATRICE EN SYNTHÈSE	61
CHAPITRE 5.	CONCLUSIONS.....	67
5.1	ACCOMPLISSEMENTS	67
5.2	LIMITATIONS.....	68
5.3	DÉVELOPPEMENT FUTUR	68
	LISTE DES RÉFÉRENCES.....	70

Liste des Figures

Figure 2.1 : Mécanisme du « slider » avec ses dimensions [5].	26
Figure 2.2 Effet de bonus en tolérancement.....	38
Figure 3.1 : Définition des pièces de l'assemblage du bloc en U	42
Figure 3.2 : Identification des pièces et chaîne de cotes du bloc en U avec tolérance symétrique	43
Figure 3.3 : Graphe de liaisons de du bloc en U avec tolérance symétrique	43
Figure 3.4 : Spécification du torseur de l'élément fonctionnel 1	44
Figure 3.5 : Spécification du torseur de l'élément fonctionnel 2	44
Figure 3.6 : Définition des pièces de l'assemblage du bloc en U avec tolérance asymétrique en analyse.....	49
Figure 3.7 : Passage du torseur à la tolérance du dessin.	57
Figure 4.1 : Définition des paramètres utilisés pour l'exemple des trois blocs.	58
Figure 4.2 : Définition des systèmes de coordonnées utilisés pour l'exemple des trois blocs.....	59
Figure 4.3: dessin d'assemblage de la perforatrice	62
Figure 4.4: dessin d'assemblage simplifié de la perforatrice dans l'axe d'analyse	63
Figure 4.5: Identification des éléments fonctionnels et de la condition fonctionnelle de la perforatrice	63

Liste des Tableaux

Tableau 2-1: Informations géométriques du « slider » avec ses dimensions [5].....	26
Tableau 2-2: Types de surfaces élémentaires (SATT) [17]	32
Tableau 2-3: Matrices de transformation homogènes pour chacun des types de SATT [20].	32
Tableau 2-4: Tableau du calcul du bonus.....	38
Tableau 3-1 : Calcul des torseurs de liaisons T2/0 et T5/3 du bloc en U avec tolérance symétrique	45
Tableau 3-2: Torseurs des éléments fonctionnels et matrices Jacobiennes du bloc en U avec tolérance symétrique.....	45
Tableau 3-3: Torseurs des éléments fonctionnels et matrices Jacobiennes du bloc en U avec tolérance asymétrique en analyse	49

Liste des Équations

$[R_1][T_1][R_2][T_2] \dots [R_i][T_i] \dots [R_n][T_n][R_f] = [H]$	Équation 2-1..... 23
$R = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z & 0 \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Équation 2-2..... 23
$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Équation 2-3..... 24
$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & -\sin \phi_x & 0 \\ 0 & \sin \phi_x & \cos \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Équation 2-4..... 24
$R_y = \begin{bmatrix} \cos \phi_y & 0 & \sin \phi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Équation 2-5..... 24
$R_z = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z & 0 & 0 \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Équation 2-6..... 24
$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Équation 2-7..... 24
$[S] = -([B]^T [B])^{-1} [B]^T [A]$	Équation 2-8..... 25
$\Delta U_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} \text{tol}_j \leq T_{asm}$	Équation 2-9..... 25

$$\Delta U_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (S_{ij} tol_j)^2} \leq T_{asm}$$

Équation 2-10..... 25

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_x}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_x}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_x}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_x}{\partial U} \\ \frac{\partial H_y}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_y}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_y}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_y}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_y}{\partial U} \\ \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial U} \\ \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial U} \\ \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8579 & -13.967 & -3.1115 & -2.4467 & 1 \\ 8.4857 & -9.8516 & 26.078 & 4.3604 & 0 \\ -8.4857 & -6.7201 & -24.716 & -19.436 & 0 \\ 0 & -0.1566 & -0.3492 & 0.8721 & 0 \\ 0.7071 & 0.6984 & 0.6223 & 0.4894 & 0 \\ 0.7071 & -0.6984 & 0.7006 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 2-11..... 27

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial A} & \frac{\partial H_x}{\partial B} & \frac{\partial H_x}{\partial C} & \frac{\partial H_x}{\partial D} & \frac{\partial H_x}{\partial E} \\ \frac{\partial H_y}{\partial A} & \frac{\partial H_y}{\partial B} & \frac{\partial H_y}{\partial C} & \frac{\partial H_y}{\partial D} & \frac{\partial H_y}{\partial E} \\ \frac{\partial H_{ox}}{\partial A} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial B} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial C} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial D} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial E} \\ \frac{\partial H_{oy}}{\partial A} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial B} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial C} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial D} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial E} \\ \frac{\partial H_{oz}}{\partial A} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial B} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial C} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial D} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -9239 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.3535 & 0 \\ 1 & 0 & -0.7071 & -0.1464 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 2-12..... 27

$$[S] = -([B]^T [B])^{-1} [B]^T [A] = \begin{bmatrix} -0.0290 & 0 & 0.0355 & -0.0032 & 0.0290 \\ 0.0308 & 0 & 0.0064 & -0.0186 & -0.0308 \\ 0.0156 & 0 & -0.0345 & 0.0095 & -0.0156 \\ 0.0336 & 0 & -0.0102 & -0.0117 & -0.0336 \\ 0.5860 & 1 & -0.0735 & 0.6677 & -0.5860 \end{bmatrix}$$

Équation 2-13..... 27

$$\begin{Bmatrix} \Delta \phi_1 \\ \Delta \phi_2 \\ \Delta \phi_3 \\ \Delta \phi_4 \\ \Delta U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0766^\circ \\ 0.0851^\circ \\ 0.0656^\circ \\ 0.0804^\circ \\ 0.0496^\circ \end{Bmatrix} \text{ Au pire des cas}$$

Équation 2-14..... 28

$$\begin{Bmatrix} \Delta \phi_1 \\ \Delta \phi_2 \\ \Delta \phi_3 \\ \Delta \phi_4 \\ \Delta U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0492^\circ \\ 0.0549^\circ \\ 0.0371^\circ \\ 0.0528^\circ \\ 0.0278^\circ \end{Bmatrix} \text{ En statistique}$$

Équation 2-15..... 28

$$D = \left\{ \bar{R} \mid \bar{M}(A) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{array} \mid \begin{array}{l} u(A) \\ v(A) \\ w(A) \end{array} \right\}_A \quad \text{Équation 2-16..... 29}$$

$$\bar{M}(O) = \bar{M}(A) + \bar{R} \times \bar{OA} \quad \text{Équation 2-17..... 29}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{s} \\ \delta \bar{\alpha} \end{bmatrix} = [J_1 J_2 \dots J_n] \bullet \bar{\delta} \quad \text{Équation 2-18..... 33}$$

$$J^+ = J^T (JJ^T)^{-1} \quad \text{Équation 2-19..... 34}$$

$$\bar{\delta} = [J_1 J_2 \dots J_n]^+ \bullet \begin{bmatrix} \delta \bar{s} \\ \delta \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2-20..... 34}$$

$$[CF] = [J][EF] \quad \text{Équation 2-21..... 34}$$

$$\begin{bmatrix} [u, \bar{u}] \\ [v, \bar{v}] \\ [w, \bar{w}] \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \\ [\beta, \bar{\beta}] \\ [\delta, \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = \begin{bmatrix} [J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6]_{EP1} \dots [J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6]_{EPn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} [u, \bar{u}] \\ [v, \bar{v}] \\ [w, \bar{w}] \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \\ [\beta, \bar{\beta}] \\ [\delta, \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EP1} \dots \begin{bmatrix} [u, \bar{u}] \\ [v, \bar{v}] \\ [w, \bar{w}] \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \\ [\beta, \bar{\beta}] \\ [\delta, \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EPn} \quad \text{Équation 2-22..... 35}$$

$$[CF] = [J][EF] \quad \text{Équation 3-1..... 41}$$

$$[EF] = [J^+][CF] \quad \text{Équation 3-2..... 42}$$

$$[CF] = \begin{bmatrix} [1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ [0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11] \\ [0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} [1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ [0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0] \\ [0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1] \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} [-0.5 & 0.5] \\ [0 & 0] \\ [0 & 0] \\ [-0.01 & 0.01] \\ [-0.0125 & 0.0125] \\ [-0.5 & 0.5] \\ [0 & 0] \\ [0 & 0] \\ [0 & 0] \\ [-0.02 & 0.02] \\ [-0.025 & 0.025] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1 & 1] \\ [-0.1375 & 0.1375] \\ [-0.11 & 0.11] \\ [0 & 0] \\ [-0.03 & .03] \\ [-0.0375 & .0375] \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-3..... 46}$$

$$CF = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-4..... 46

$$J = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{J_1} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]_{J_2} \end{bmatrix}$$

Équation 3-5..... 47

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccc} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{array} \right] \end{bmatrix}$$

Équation 3-6..... 47

$$CF = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-7..... 47

$$[EF] = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccc} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{array} \right] \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-8..... 48

$$EF_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-9..... 48

$$EF_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-10..... 48

$$[CF] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \\ -0.0125 & 0.0125 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.02 & 0.02 \\ -0.025 & 0.025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ -0.1375 & 0.1375 \\ -0.11 & 0.11 \\ 0 & 0 \\ -0.03 & .03 \\ -0.0375 & .0375 \end{bmatrix}$$

Équation 3-11 50

$$CF = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-12..... 50

$$[EF] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-13..... 50

$$EF_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-14..... 51

$$EF_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-15..... 51

$$[CFr] = [CFi] - [CFf]$$

Équation 3-16..... 54

$$[CFf] = \sum_{k=1}^f [J]_k [EFi]_k$$

Équation 3-17..... 54

$$[CFr] = [CFi] - \sum_{k=1}^m [J]_k [EFi]_k$$

Équation 3-18..... 55

$$[EFc]_k = [J^{-1}]_k * [CFr] * [\%cont]_k$$

Équation 3-19..... 55

$$[CFr]_r = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-20..... 56

$$[EFc]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-21..... 56

$$[CFr]_r = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-1..... 59

$$[EFc]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.25 = \begin{bmatrix} -375 & .125 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-2..... 60

$$[EFc]_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.25 = \begin{bmatrix} -375 & .125 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-3..... 60

$$[EFc]_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times 0.5 = \begin{bmatrix} -.75 & .25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-4..... 60

$$[CFr] = \begin{bmatrix} -1 & .1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 27.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0145 & 0.0145 \\ -0.0145 & 0.0145 \\ 0 & 0 \\ -0.00019 & 0.00019 \\ -0.00019 & 0.00019 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0.0677 & -0.0677 \\ 0 & 0 \\ 0.0019 & -0.0019 \\ 0.0019 & -0.0019 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-5..... 64

$$[CFr] = \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-6..... 64

$$EF1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -27.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.1 = \begin{bmatrix} -0.00323 & 0.00323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-7..... 65

$$EF3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.4 = \begin{bmatrix} -0.01292 & 0.01292 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-8..... 65

$$EF5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.4 = \begin{bmatrix} -0.01292 & 0.01292 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-9..... 65

$$EF7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.1 = \begin{bmatrix} -0.00323 & 0.00323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-10..... 65

Liste des Abréviations

Cf	condition fonctionnelle
Ef	élément fonctionnel
CFr	condition fonctionnelle restante
CFi	condition fonctionnelle imposée
CFf	condition fonctionnelle fixe
EFc	élément fonctionnel calculé
EFi	élément fonctionnel imposé

Chapitre 1. Problématique

1.1 Processus de conception

La première étape pour faire la conception est généralement de faire les calculs de résistance des matériaux afin de trouver les dimensions nominales pour toutes les composantes d'un mécanisme. Une autre étape dans le travail du concepteur consiste à rendre le mécanisme élégant afin de pouvoir concurrencer les concurrents. Avec la mondialisation des marchés, l'esthétique est devenue un plus lors de la mise en marché de plusieurs produits. La dernière étape, mais non la moindre, consiste à déterminer les tolérances des pièces d'un assemblage en vue de sa fabrication et son assemblage.

1.2 Éléments de base de la cotation fonctionnelle

La cotation fonctionnelle consiste à apposer des tolérances sur toutes les pièces d'un assemblage. Parmi les types de tolérances, on peut déterminer des tolérances dimensionnelles ou des tolérances géométriques telles que des perpendicularités, des parallélismes, des circularités, etc.

Dans un assemblage, il y a des dimensions qui n'affectent pas le bon fonctionnement du mécanisme, le concepteur établit alors des tolérances générales pour ces cotes. Pour les cotes fonctionnelles, le concepteur doit déterminer, à l'aide de chaîne de cotes, les tolérances les plus larges possibles afin de garder le coût de fabrication au plus bas mais sans que le manque de précision nuise au bon fonctionnement du mécanisme. Le concepteur détermine une direction d'analyse dans laquelle une chaîne de cote est créée avec toutes les dimensions qui ont une influence sur le bon fonctionnement du mécanisme. Dans cette chaîne, on peut retrouver des dimensions qui dépendent des fournisseurs de pièces, des procédés de fabrication disponibles ou de la complexité des surfaces à usiner.

1.3 Problématique

Pour résoudre ce type de contrainte (chaîne de cotes), il faut déterminer les cotes fonctionnelles qui garantissent le bon fonctionnement d'un mécanisme et qui permettent aussi l'usinage le plus économique, c'est-à-dire les cotes de fabrication les plus grandes possible. Aujourd'hui, les cotes fonctionnelles sont déterminées par des personnes expérimentées qui procèdent par essais et erreurs pour déterminer la cotation fonctionnelle d'un mécanisme. Lorsque les assemblages sont complexes, le manque d'exactitude amène des modifications, après fabrication, qui coûtent très cher aux compagnies.

Pour réduire les coûts de modification, après la réalisation des pièces, on utilise aujourd'hui le prototypage rapide qui vérifie rapidement la conséquence de certains choix sur des valeurs de tolérances critiques. Par contre, la solution idéale serait d'avoir un outil informatique qui déterminerait la cotation fonctionnelle avec le plus grand intervalle de tolérance possible tout en gardant le mécanisme fonctionnel sans avoir à fabriquer un modèle physique pour tester l'assemblage. En pratique, plusieurs cotes tolérancées sont déterminées par des tables de fabricants ou des tables de références telles que les normes (American National Standard Preferred Hole Basis Metric Clearance Fits) [41].

Il existe deux façons de faire les calculs de tolérancement, soit l'analyse et la synthèse. L'analyse consiste à déterminer les tolérances de toutes les dimensions de la chaîne et de calculer les jeux maximal et minimal que l'on appelle jeux fonctionnels pour ensuite vérifier si ces jeux sont compatibles avec la fonction du mécanisme. La synthèse quant à elle consiste à déterminer les jeux fonctionnels maximal et minimal en fonction du bon fonctionnement du mécanisme et à calculer les tolérances des autres pièces en tenant compte des contraintes des fournisseurs ou des procédés de fabrication disponibles pour la fabrication des pièces.

Le tolérancement s'effectue aussi selon deux méthodes : la méthode au pire des cas et la méthode statistique. Selon la première méthode, le fonctionnement du mécanisme est garanti même si toutes les dimensions sont obtenues dans le pire des cas (worst case) et avec la deuxième méthode une répartition statistique est faite, i.e. les cotes nominales à l'intérieur de la zone de tolérance sont réparties suivant une distribution statistique. Ce mémoire traite du problème de tolérancement des pièces mécaniques en synthèse selon la méthode au pire des cas.

La détermination des cotes fonctionnelles reste aujourd'hui une tâche ardue pour les entreprises du monde entier qui font de la conception mécanique. La venue des logiciels 3D paramétriques et l'utilisation des éléments finis a facilité la résolution de problèmes liés au dimensionnement nominal des pièces. De plus, ce genre de logiciel (Catia, Solidworks, Solidedge, etc.) permet de simplifier la tâche des ingénieurs au niveau esthétique car on peut appliquer des finis de surface et des couleurs qui se rapprochent de plus en plus de la réalité. Par contre, peu de logiciels permettent de faciliter la tâche en ce qui concerne la détermination des cotes fonctionnelles.

Chapitre 2. Revue de la littérature scientifique

Les tolérances peuvent être séparées en deux catégories. Il y a les tolérances dimensionnelles et les tolérances géométriques. Chiabert et al. [1] mentionne dans un article les avantages d'utiliser les tolérances géométriques. Cependant, encore aujourd'hui, il y a beaucoup d'entreprises qui fonctionnent principalement avec des tolérances dimensionnelles.

La réduction des intervalles de tolérance engendre des coûts supplémentaires lors de la conception des mécanismes. Chase [2] mentionne que des tolérances serrées engendrent des coûts excessifs lors de la fabrication des pièces d'un assemblage. Par contre, des tolérances trop larges diminuent généralement la qualité du produit et rend ce dernier moins compétitif. Pour cette raison, il est important de trouver une façon d'automatiser la cotation fonctionnelle afin de minimiser les coûts de fabrication.

Plusieurs méthodes ont été développées pour calculer les tolérances à partir d'une chaîne de cotes. Il y a des modèles basés sur la programmation non-linéaire, la linéarisation directe, les torseurs de petit déplacement, les SATT (Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement), la Jacobienne, et finalement le Jacobien-Torseur.

2.1 Programmation non linéaire

Les premiers articles sur la synthèse ont été réalisés par Speckhart [3] et Spotts [4]. Cette méthode est basée sur la programmation non linéaire et sur l'optimisation des coûts en fonction des tolérances. Dans cette méthode, seules les tolérances dimensionnelles sont traitées car les tolérances géométriques seraient trop lourdes pour le calcul d'optimisation. Le principal problème avec cette méthode est en effet la lourdeur des calculs.

2.2 Linéarisation directe

Une autre méthode utilisée est la linéarisation directe utilisée par Chase [5]. Selon cette méthode, on utilise les joints cinématiques pour représenter les contacts du mécanisme. Par la suite, les matrices sont utilisées pour modéliser le mécanisme; l'analyse et la synthèse sont alors rendus possibles.

La linéarisation directe prend la forme d'un modèle simplifié tiré de l'expérimentation et des statistiques, et est décrite en détail dans [6] et [7]. Dans cette approche, le problème de cotation fonctionnelle peut être représenté par une chaîne (boucle de vecteurs) de cotes fermées ou une boucle ouverte entrecoupée par la condition fonctionnelle. Ce modèle peut être représenté par l'expression suivante qui représente une transformation de matrices homogènes :

$$[R_1][T_1][R_2][T_2] \dots [R_i][T_i] \dots [R_n][T_n][R_f] = [H] \quad \text{Équation 2-1}$$

Où :

R_i : matrice de transformation pour les rotations au nœud i ;

T_i : matrice de translation au nœud i ;

R_f : rotation finale;

Pour une boucle fermée,

H : matrice identité;

Pour une boucle ouverte,

H : représente le déplacement final et son orientation;

Pour un assemblage 2-D, la matrice de rotation est :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z & 0 \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2-2}$$

La matrice de translation est :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 2-3

Pour un assemblage 3-D, dans la direction des x, la matrice de rotation est :

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & -\sin \phi_x & 0 \\ 0 & \sin \phi_x & \cos \phi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 2-4

Dans la direction des y, la matrice de rotation est :

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \phi_y & 0 & \sin \phi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 2-5

Dans la direction des z, la matrice de rotation est :

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z & 0 & 0 \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 2-6

Finalement, la translation homogène est donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 2-7

Dans les équations ci-haut, ϕ_x, ϕ_y et ϕ_z sont les rotations selon les trois axes et T_x, T_y et T_z sont les composantes selon les trois axes du vecteur de translation pour chaque nœud de la boucle. La méthode de Chase détermine ensuite une matrice de sensibilité pour les chaînes en boucle fermée :

$$[S] = -([B]^T [B])^{-1} [B]^T [A] \quad \text{Équation 2-8}$$

Où

$[A]$: Matrice des dérivées partielles des variables pour les dimensions;

$[B]$: Matrice des dérivées partielles des variables pour les jeux;

Pour estimer les variations, il propose deux équations, une pour le pire des cas et une pour le calcul statistique :

Pour le pire des cas :

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^n |S_{ij}| \text{tol}_j \leq T_{asm} \quad \text{Équation 2-9}$$

Et en statistique :

$$\Delta U_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (S_{ij} \text{tol}_j)^2} \leq T_{asm} \quad \text{Équation 2-10}$$

Où :

$i = 1, \dots, n$: n variables pour les jeux;

tol_j : Tolérance de dimension de la j ème cote;

T_{asm} : Spécification de conception pour la i ème variable pour les jeux;

S : Matrice de sensibilité pour les jeux;

Chase utilise un exemple pour démontrer l'efficacité de cette méthode.

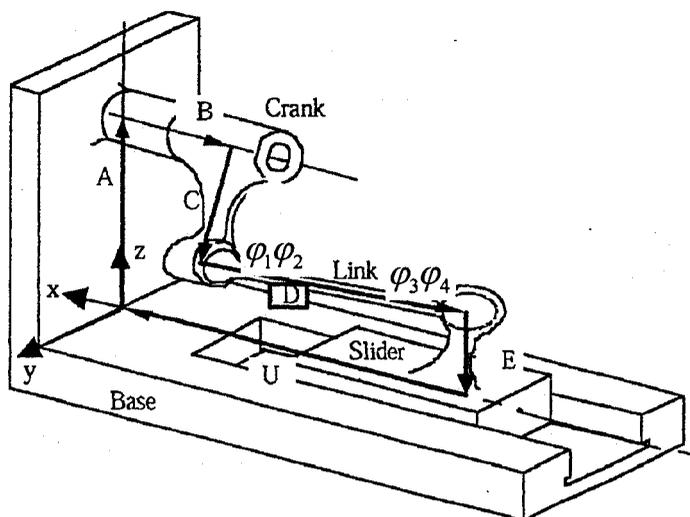


Figure 2.1 : Mécanisme du « slider » avec ses dimensions [5].

Le tableau 2-1 montre les dimensions nominales et les tolérances du mécanisme.

Tableau 2-1: Informations géométriques du « slider » avec ses dimensions [5]

Part name	Transformation	Nominal dimension	Tolerance (-)
Height of base	Rotation	$\Psi = -90^\circ \quad z = 0^\circ$	
	Translation A	20	0.025
Position of crank	Rotation	$\Psi = -90^\circ \quad z = 0^\circ$	
	Translation B	12	0.0125
Length of crank arm	Rotation	$\Psi = -90^\circ \quad z = 45^\circ$	
	Translation C	15	0.0125
Length of link	Rotation $\phi_1 \phi_2$	$\Psi = -99.007^\circ \quad z = -20.705^\circ$? ?
	Translation D	30	0.03
Height of slider	Rotation $\phi_3 \phi_4$	$\Psi = -78.157^\circ \quad z = -44.473^\circ$? ?
	Translation E	5	0.0025
Position of slider	Rotation	$\Psi = -90^\circ \quad z = -29.298^\circ$	
	Translation U		?

L'expression de la matrice des dérivées partielles pour les jeux prend la forme suivante :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_x}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_x}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_x}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_x}{\partial U} \\ \frac{\partial H_y}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_y}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_y}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_y}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_y}{\partial U} \\ \frac{\partial H_z}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_z}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_z}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_z}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_z}{\partial U} \\ \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial U} \\ \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial U} \\ \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_1} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_2} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_3} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial \phi_4} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8579 & -13.967 & -3.1115 & -2.4467 & 1 \\ 8.4857 & -9.8516 & 26.078 & 4.3604 & 0 \\ -8.4857 & -6.7201 & -24.716 & -19.436 & 0 \\ 0 & -0.1566 & -0.3492 & 0.8721 & 0 \\ 0.7071 & 0.6984 & 0.6223 & 0.4894 & 0 \\ 0.7071 & -0.6984 & 0.7006 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2-11}$$

De la même manière, la matrice des dérivées partielles respectant les variables pour les dimensions est obtenue :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial A} & \frac{\partial H_x}{\partial B} & \frac{\partial H_x}{\partial C} & \frac{\partial H_x}{\partial D} & \frac{\partial H_x}{\partial E} \\ \frac{\partial H_y}{\partial A} & \frac{\partial H_y}{\partial B} & \frac{\partial H_y}{\partial C} & \frac{\partial H_y}{\partial D} & \frac{\partial H_y}{\partial E} \\ \frac{\partial H_z}{\partial A} & \frac{\partial H_z}{\partial B} & \frac{\partial H_z}{\partial C} & \frac{\partial H_z}{\partial D} & \frac{\partial H_z}{\partial E} \\ \frac{\partial H_{ox}}{\partial A} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial B} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial C} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial D} & \frac{\partial H_{ox}}{\partial E} \\ \frac{\partial H_{oy}}{\partial A} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial B} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial C} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial D} & \frac{\partial H_{oy}}{\partial E} \\ \frac{\partial H_{oz}}{\partial A} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial B} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial C} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial D} & \frac{\partial H_{oz}}{\partial E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -9.239 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.3535 & 0 \\ 1 & 0 & -0.7071 & -0.1464 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2-12}$$

L'équation 2-8 est utilisée pour trouver la matrice solution :

$$[S] = -([B]^T [B])^{-1} [B]^T [A] = \begin{bmatrix} -0.0290 & 0 & 0.0355 & -0.0032 & 0.0290 \\ 0.0308 & 0 & 0.0064 & -0.0186 & -0.0308 \\ 0.0156 & 0 & -0.0345 & 0.0095 & -0.0156 \\ 0.0336 & 0 & -0.0102 & -0.0117 & -0.0336 \\ 0.5860 & 1 & -0.0735 & 0.6677 & -0.5860 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2-13}$$

Des équations 2-9 et 2-10 on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 \\ \Delta\phi_4 \\ \Delta U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0766^\circ \\ 0.0851^\circ \\ 0.0656^\circ \\ 0.0804^\circ \\ 0.0496^\circ \end{Bmatrix} \text{ Au pire des cas} \quad \text{Équation 2-14}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \\ \Delta\phi_3 \\ \Delta\phi_4 \\ \Delta U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0492^\circ \\ 0.0549^\circ \\ 0.0371^\circ \\ 0.0528^\circ \\ 0.0278^\circ \end{Bmatrix} \text{ En statistique} \quad \text{Équation 2-15}$$

L'équation de base est non linéaire et il faut un logiciel pour résoudre ce genre d'équation afin de trouver la solution. Cependant, si l'on considère que le déplacement est très petit par rapport à la dimension nominale, cette équation peut être approximée par une série de Taylor. Cette méthode de linéarisation simplifie l'expression de la relation fonctionnelle entre les déviations des éléments géométriques d'un assemblage mécanique.

Les équations résultantes peuvent être résolues pour l'analyse au pire des cas et aussi pour l'analyse statistique. La méthode ne permet pas de faire de la synthèse et elle reste difficile à informatiser.

2.3 Les torseurs

Bourdet [8] a utilisé les torseurs pour représenter les déviations détectées lors de la modélisation des pièces sur les machines à mesurer les coordonnées.

Par la suite, Bourdet [9] a développé les torseurs qui représentent de façon mathématique les tolérances d'un système. Selon ce modèle, le déplacement d'un solide dans l'espace peut être modélisé par six contraintes définies par deux vecteurs, un en translation et un en rotation. En appliquant ce modèle on obtient les limites de la zone de tolérance.

En se basant sur les notions de Bourdet, la relation générale d'un torseur de petits déplacements prend la forme suivante :

$$D = \left\{ \bar{R} \mid \bar{M}(A) \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha & u(A) \\ \beta & v(A) \\ \delta & w(A) \end{array} \right\}_A \quad \text{Équation 2-16}$$

Où :

u, v, w : Représentent respectivement les petits déplacements en x, y et z;

α, β, δ : Représentent respectivement les petits déplacements en rotation autour des axes x, y et z;

A : Indique la surface sur laquelle est apposé le torseur;

On peut également appliquer des transformations pour exprimer un torseur dans une autre base, par exemple du point A au point O :

$$\bar{M}(O) = \bar{M}(A) + \bar{R} \times \bar{OA} \quad \text{Équation 2-17}$$

Où :

\bar{M} : Vecteur de translation au point A;

\bar{R} : Vecteur de rotation au point A;

Où \times représente le produit vectoriel. Cette formulation met en évidence les éléments principaux à étudier dans un problème de tolérancement, c'est-à-dire une formulation qui rend explicite les petites translations et rotations que sont les tolérances.

Cette approche capitalise sur le fait que les tolérances sont suffisamment petites par rapport aux dimensions des pièces pour utiliser les torseurs de petits déplacements qui implique une linéarisation au premier ordre. Selon cette méthode, on peut assez facilement positionner un élément fonctionnel par rapport à un autre étant situé dans le même référentiel et dont la position est sans erreur. Les calculs sont cependant plus complexes si on tient compte de l'erreur engendrée par les défauts de fabrication et les changements d'axes de référence d'une face à l'autre.

Les torseurs ont aussi été utilisés par Desrochers [10] pour représenter mathématiquement les tolérances d'un système. Selon cette méthode, les déplacements d'un solide sont caractérisés par des matrices de rotation (matrice 3×3) et de translation (1×3). De cette façon on obtient les contraintes qui définissent les limites extrêmes d'une zone de tolérance. Adams J.D., et Whitney D [11] ont aussi utilisés les torseurs pour la détermination des tolérances.

Samper [12] [13] a utilisé les torseurs pour modéliser non seulement les défauts de fabrication mais aussi les déformations. Il présente trois modèles. Le premier consiste en un modèle rigide parfait c'est-à-dire sans tolérance. Le deuxième modèle utilisé introduit les défauts géométriques, mais la géométrie reste rigide. Le troisième modèle utilise un modèle parfait mais déformable. Par la suite, le même auteur [14] utilise l'analyse par élément fini pour déterminer les déformations et ainsi obtenir les torseurs qui représentent l'assemblage déformé. L'exemple étudié fut une paire d'engrenages.

Giordano [15] utilise aussi les torseurs et les déviations par domaines (deviation domains) pour modéliser les assemblages. Le modèle présenté permet de transformer la

zone de tolérance en un domaine représenté par une série (inequalities on differential parameters). Cette méthode est très efficace pour l'analyse mais nécessite l'utilisation de calcul par somme de Minkowski pour faire la synthèse. Pour l'utilisation générale le calcul est complexe mais dans le cas particulier d'un système symétrique Giordano démontre que le problème peut être résolu par des opérations linéaires.

2.4 Les SATT

Les premiers travaux sur les SATT ont été réalisés par Desrochers [16] [17]. Cette méthode, Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement, utilise le jumelage de surfaces ou d'ensemble de surfaces d'une même pièce. Ces paires sont ensuite considérées comme des entités autonomes possédant leurs propres caractéristiques (dimensions et tolérances). Ce modèle ne peut être utilisé seul : un référentiel doit être utilisé pour simuler un assemblage ou pour effectuer la cotation fonctionnelle.

On dénombre 7 types de surfaces que l'on peut associer entre elles. Ces types de surfaces sont regroupés dans le tableau 2-2. Pour chacun des types de SATT, une matrice de transformation homogène est développée. Le tableau 2-3 montre les matrices correspondantes aux types de surfaces élémentaires. Ces matrices représentent des déplacements.

Tableau 2-2: Types de surfaces élémentaires (SATT) [17]

Types de surfaces et EGRM	Dimension maximale	Sous-groupe de (D) associé	Éléments géométriques invariants
 Surfaces quelconques	0	{E} transformation identique	tout plan de E^3 toute droite de E^3 tout point de E^3
 Surfaces prismatiques	1	{T _D } translation unidirectionnelle	tout plan parallèle à D, toute droite parallèle à D
 Surfaces de révolution	1	{R _D } rotation autour d'un axe	toute droite parallèle à D, tout point appartenant à D
 Surfaces hélicoïdales	1	{H _{D,p} } mouvement hélicoïdal	toute droite parallèle à D
 Surfaces cylindriques	2	{C _D } mouvement de pivot glissant	toute droite parallèle à D
 Surfaces planes	3	{G _P } mouvement plan sur plan	tout plan parallèle à P
 Surfaces sphériques	3	{S _O } rotation sphérique	le point O centre de la sphère

Tableau 2-3: Matrices de transformation homogènes pour chacun des types de SATT [20].

Types de SATT	Repère associé	Matrice des déplacements non invariants
 SATT quelconques		$\begin{bmatrix} C_x C_\beta & -S_x C_\alpha + C_x \beta S_\alpha & S_x \beta \alpha + C_x \beta C_\alpha & u \\ S_x C_\beta & C_x C_\alpha + S_x \beta S_\alpha & -C_x \beta \alpha + S_x \beta C_\alpha & v \\ -S_\beta & C_\beta S_\alpha & C_\beta C_\alpha & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 SATT prismatiques		$\begin{bmatrix} C_x C_\beta & -S_x C_\alpha + C_x \beta S_\alpha & S_x \beta \alpha + C_x \beta C_\alpha & 0 \\ S_x C_\beta & C_x C_\alpha + S_x \beta S_\alpha & -C_x \beta \alpha + S_x \beta C_\alpha & v \\ -S_\beta & C_\beta S_\alpha & C_\beta C_\alpha & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 SATT de révolution		$\begin{bmatrix} C_x C_\beta & -S_x & C_x \beta & u \\ S_x C_\beta & C_x & S_x \beta & v \\ -S_\beta & 0 & C_\beta & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 SATT hélicoïdales		$\begin{bmatrix} C_x C_\beta & -S_x & C_x \beta & u \\ S_x C_\beta & C_x & S_x \beta & v \\ -S_\beta & 0 & C_\beta & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = \frac{\beta \alpha}{2x}$
 SATT cylindriques		$\begin{bmatrix} C_x C_\beta & -S_x & C_x \beta & 0 \\ S_x C_\beta & C_x & S_x \beta & v \\ -S_\beta & 0 & C_\beta & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 SATT plans		$\begin{bmatrix} C_x C_\beta & -S_x & C_x \beta & u \\ S_x C_\beta & C_x & S_x \beta & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 SATT sphériques		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L'auteur a également développé le concept d'élément géométrique de référence minimum (E.G.R.M.) qui est utilisé pour représenter le référentiel. Dans les faits, l'E.G.R.M.

est l'ensemble de points, de droites ou de plans minimum pour définir un déplacement. Cette méthode permet de représenter mathématiquement les SATT.

Plusieurs auteurs ont utilisé les SATT dans leurs approches du tolérancement. Charles [18] a utilisé les SATT pour les associer à la CFAO. Temmerman [19] a réutilisé cette méthode pour comparer les comportements reliés à la synthèse. Dubé [20] présente, pour chacun des types de SATT, le repère lié au SATT (déplacement qui ne laisse pas globalement invariant le SATT) et la matrice de transformation homogène représentant l'ensemble des déplacements associés.

2.5 Jacobien

Cette méthode est basée sur l'analyse des vitesses en robotique. Laperrière [21] et Lafond [22] ont donc proposé d'utiliser le Jacobien pour modéliser les mécanismes. Ils proposent le modèle suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{s} \\ \delta \bar{\alpha} \end{bmatrix} = [J_1 J_2 \dots J_n] \bullet \bar{\delta} \quad \text{Équation 2-18}$$

Où :

- $\delta \bar{s}$: 3-vecteurs de petites translations du point d'intérêt;
- $\delta \bar{\alpha}$: 3-vecteurs de petites rotations du point d'intérêt;
- J_i : ième colonne de la matrice Jacobienne;
- $\bar{\delta}$: Vecteur de petits déplacements locaux des divers EF de la chaîne;

Selon cette méthode, le vecteur de petits déplacements est utilisé avec la matrice Jacobienne. Le vecteur de petits déplacements représente le défaut local de la pièce (tolérance) et la matrice Jacobienne permet de calculer l'effet de ce défaut local au point d'analyse (condition fonctionnelle).

Ce modèle est très compact et est tridimensionnel car il prend en compte tant les déviations en translation qu'en rotation. Laperrière [23] [24] démontre l'efficacité de ce modèle pour analyser un mécanisme de contre pointe. Il propose aussi d'utiliser la matrice Jacobienne inverse pour faire la synthèse en tolérancement [25]. Le modèle prend la forme suivante :

$$J^+ = J^T (JJ^T)^{-1} \quad \text{Équation 2-19}$$

Où :

J^+ : Matrice Jacobienne inverse;

J^T : Matrice transposée;

L'équation 2-13 utilisée en analyse devient :

$$\bar{\delta} = [J_1 J_2 \dots J_n]^+ \cdot \begin{bmatrix} \delta \bar{s} \\ \delta \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2-20}$$

L'auteur démontre, à partir d'un exemple, l'application de cette équation en mode statistique. Selon ce modèle, on ne peut interagir sur un élément fonctionnel particulier.

2.6 Jacobien-Torseur

Desrochers, Laperrière et Ghie [26-31] ont démontré l'efficacité de l'unification de deux modèles : le modèle Jacobien et le modèle de zones de tolérance par Torseurs. La formulation mathématique proposée est la suivante :

$$[CF] = [J][EF] \quad \text{Équation 2-21}$$

Où :

$$CF: \begin{bmatrix} \bar{D}_s \\ \bar{\Omega}_\alpha \end{bmatrix};$$

\bar{D}_s : Vecteur de translation 3x1 de la condition fonctionnelle;

$\bar{\Omega}_\alpha$: Vecteur de rotation 3x1 de la condition fonctionnelle;

$$J: [J_1 \dots J_5 \ J_6]_{EF_1} \dots [J_{6n-5} \dots J_{6n-1} \ J_{6n}]_{EF_n};$$

$[J_1 \dots J_5 \ J_6]_{EF_1}$: Matrice Jacobienne 6 * 6n de l'élément fonctionnel 1;

n : Représente le nombre d'élément fonctionnel de la chaîne;

$$EF: \begin{bmatrix} \delta_{EF_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{EF_n} \end{bmatrix}; \text{ Torseur } 1 * 6n \text{ des éléments fonctionnels;}$$

Les auteurs proposent ensuite d'adapter le modèle pour permettre de faire du tolérancement en utilisant l'arithmétique par intervalle :

$$\begin{bmatrix} [u, \bar{u}] \\ [v, \bar{v}] \\ [w, \bar{w}] \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \\ [\beta, \bar{\beta}] \\ [\delta, \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} = [[J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6]_{EF_1} \dots [J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6]_{EF_n}] * \begin{bmatrix} [u, \bar{u}] \\ [v, \bar{v}] \\ [w, \bar{w}] \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \\ [\beta, \bar{\beta}] \\ [\delta, \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EF_1} \dots \begin{bmatrix} [u, \bar{u}] \\ [v, \bar{v}] \\ [w, \bar{w}] \\ [\alpha, \bar{\alpha}] \\ [\beta, \bar{\beta}] \\ [\delta, \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EF_n}$$

Équation 2-22

Où :

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} , \bar{u}] \\ [\underline{v} , \bar{v}] \\ [\underline{w} , \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} , \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} , \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} , \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{CF} : \text{Torseur de petits déplacements par intervalles de la CF;}$$

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} , \bar{u}] \\ [\underline{v} , \bar{v}] \\ [\underline{w} , \bar{w}] \\ [\underline{\alpha} , \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} , \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} , \bar{\delta}] \end{bmatrix}_{EF1} : \text{Torseur de petits déplacements par intervalles de EF1;}$$

$$\begin{bmatrix} [\underline{u} , \bar{u}] \\ [\underline{v} , \bar{v}] \\ [\underline{w} , \bar{w}] \end{bmatrix} : \text{Translation en x,y et z par intervalle;}$$

$$\begin{bmatrix} [\underline{\alpha} , \bar{\alpha}] \\ [\underline{\beta} , \bar{\beta}] \\ [\underline{\delta} , \bar{\delta}] \end{bmatrix} : \text{Rotation autour de x, y et z par intervalle;}$$

n : Représente le nombre d'élément fonctionnel de la chaîne de cotes;

$[J1, J2, J3, J4, J5, J6]_{EF1}$: Matrice Jacobienne 6*6 associée à EF1;

Laperrière [31] mentionne la possibilité de faire de la synthèse en inversant le modèle tel que présenté dans la méthode du Jacobien et l'équation 2-18.

On remarque que cette formulation est très compacte et possède plusieurs avantages dont la possibilité de prendre en compte les déviations en translation et en rotation ainsi que de pouvoir être utilisée pour le tolérancement en statistique. Plusieurs exemples ont été utilisés pour démontrer l'efficacité du modèle Jacobien Torseur en analyse (bloc en U [28], bloc en U avec plan incliné [29]). Les résultats ont été concluants.

Nadeau [32] propose de modifier le modèle ci-haut afin de le rendre plus flexible. Le modèle modifié permet de faire la synthèse en tolérancement. Ce modèle permet aux concepteurs de tenir compte des contraintes imposées par les règles de conception (jeu normalisé) et des contraintes de fabricants (roulements) pour ce qui est des tolérances. Cette méthode est élaborée aux chapitres suivants.

Ghie [33] propose finalement une méthode de synthèse itérative basée sur l'analyse en utilisant la méthode Jacobien-Torseur. Selon cette méthode, la première étape consiste à fixer des intervalles de tolérance pour chacun des éléments fonctionnels ayant une influence sur la condition fonctionnelle. Par la suite les calculs en analyse sont effectués pour déterminer la condition fonctionnelle. La condition fonctionnelle obtenue sera comparée avec la condition fonctionnelle imposée par le concepteur. Selon le résultat obtenu, les zones de tolérance sont modifiées. Le principe de modification est basé sur le pourcentage de contribution obtenu selon la fonctionnalité de l'assemblage et les contraintes de manufacturiers. Cette méthode permet de garantir le bon fonctionnement du mécanisme tout en faisant varier la tolérance des éléments fonctionnels.

2.7 Réseau de tolérance (tolerance-maps)

Davidson [34] modélise les tolérances en utilisant la notion de « bonus de tolérance » [35]. Selon cette notion, on utilise le jeu non utilisé entre deux surfaces pour distribuer

la partie non utilisée aux autres tolérances du mécanisme. Les auteurs présentent l'exemple suivant pour démontrer le bonus obtenu en fonction des dimensions. Dans cet exemple, le bonus est de 0.4mm car au maximum de matière la cote varie de 25.0 à 25.5 et au minimum de matière la cote varie de 25.0 à 25.9, ce qui donne un bonus de 0.4mm au minimum de matière (voir tableau 2-4).

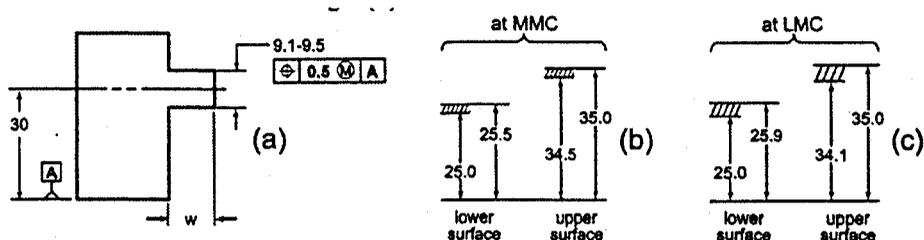


Figure 2.2 Effet de bonus en tolérancement

Tableau 2-4: Tableau du calcul du bonus

Largeur de la rainure	Tolérance sur la largeur	Bonus	Allocation totale
9.5	0.5	0	0.5
9.4	0.5	0.1	0.6
9.3	0.5	0.2	0.7
9.2	0.5	0.3	0.8
9.1	0.5	0.4	0.9

Par la suite l'auteur construit un modèle mathématique à partir de ces informations. La forme obtenue pour cet exemple est une di-pyramide (4D T-maps).

Dans un autre article Bhide [36] démontre l'obtention de T-maps de formes différentes par une opération d'intersection de T-maps primaires. L'auteur démontre l'obtention d'une hyper-pyramide (5D T-maps).

D'autres travaux portent sur la modélisation de formes géométriques obtenues en tenant compte du bonus obtenu par la cotation au maximum de matière [37]. Dans ce cas, l'application est une approximation planaire qui facilite le calcul informatisé.

2.8 Autres travaux

Mathieu et al. [38] [39] propose un modèle qui permet un processus complet et cohérent pour faire le tolérancement. La méthode prend la forme d'un algorithme et utilise le modèle surfacique de l'assemblage. Selon ce modèle, l'assemblage (geometric features) est divisé en trois types d'entités : les entités idéales, les entités non-idéales et les entités limitées. Par la suite, l'auteur divise le problème en six opérations : la *partition* qui consiste à identifier les éléments (feature) de la chaîne à partir des éléments idéaux et non-idéaux, la *filtration* qui consiste à filtrer l'information sur les éléments, l'*extraction* qui consiste à extraire les points pertinents de l'élément à étudier, la *collection* qui consiste à regrouper les éléments, l'*association* qui compare l'élément idéal à l'élément non-idéal selon certains critères, et finalement la *construction* qui consiste à construire les éléments idéaux avec leurs contraintes. Selon les auteurs, le modèle présenté est la base d'un processus de tolérancement et il prend en compte les données géométriques du modèle, les données relatives à la fabrication et à l'inspection des pièces.

2.9 Produits commerciaux

Un article paru sur le site Internet [40] fait état d'une annonce faites à Plano, Texas, le mercredi 30 janvier 2002. La compagnie EDS a annoncé la mise en marché du logiciel Quick Stack d'Unigraphics. Selon eux, il s'agit d'un nouvel outil de sa ligne d'activités PLM Solutions qui permettra aux utilisateurs du logiciel de conception et de fabrication par ordinateur (CAO/FAO) d'Unigraphics® de régler numériquement des problèmes de conception très tôt dans le processus. Unigraphics Quick Stack est une application d'analyse de tolérance dimensionnelle 3D automatisée et facile à utiliser. L'analyse de tolérance est un processus qui consiste à évaluer les conséquences potentielles des cotes

sur un assemblage, dans la situation au pire-des-cas « worst case » ou en mode statistique.

D'autres logiciels proposent aussi l'aide au tolérancement. CETOL 6σ [45] propose pour les logiciels Catia et Pro-Engineer un outil d'aide au tolérancement, ces logiciels sont cependant hors de prix pour les petites entreprises. Tasysworks [46] et Sigmundworks [47] développée par Varatech ont été développés pour être utilisé avec le logiciel Solidworks. Ces deux logiciels permettent de faire de l'analyse autant en mode au pire-des-cas qu'en mode statistique, les références de ces logiciels sont disponibles sur le site de Solidworks.

Les logiciels qui permettent une aide au tolérancement font de l'analyse, c'est-à-dire qu'ils trouvent la déviation totale obtenue à partir des tolérances fonctionnelles déjà fixées. Ils ne permettent pas de trouver les tolérances fonctionnelles à partir de la condition (synthèse). On le comprend, il est aussi très difficile d'obtenir des informations sur les modèles mathématiques utilisés par ces fabricants de logiciels.

Chapitre 3. Méthodologie

Comme très peu de recherches sont axées sur la synthèse en tolérancement et que la synthèse est une façon logique de concevoir, il est donc très pertinent de chercher une façon de faire dans ce domaine. Dans ce travail, le but est de montrer la réversibilité du modèle développé par Laperrière, Desrochers et Ghie basé sur le Jacobien-Torseur [26-31]. Le modèle devra pouvoir être utilisé en synthèse pour calculer au pire des cas.

3.1 Modèle utilisée

Pour vérifier la réversibilité du modèle Jacobien-Torseur, nous utiliserons un exemple (exemple du bloc en U) déjà utilisé en analyse [28]. En utilisant cet exemple, on pourra vérifier si lorsque l'on fait le processus inverse (la synthèse) on peut retrouver les données de départ en analyse. L'équation de base pour faire l'analyse avec cette méthode est la suivante :

$$[CF] = [J][EF] \quad \text{Équation 3-1}$$

Où :

$[CF]$: Matrice colonne 1 x 6 des spécifications d'une condition fonctionnelle ;

$[J]$: Ensemble des matrices Jacobiennes 6 x 6n des éléments fonctionnels, n étant le nombre d'éléments fonctionnels;

$[EF]$: Ensemble des matrices colonne 1 x 6n servant à définir les dispersions de translation et de rotation des éléments fonctionnels (torseur local de l'élément fonctionnel), n étant le nombre d'éléments fonctionnels;

Pour faire la synthèse, nous inverserons, tel que suggéré par Ghie [27], le modèle pour obtenir la formulation suivante :

$$[EF] = [J^+][CF] \quad \text{Équation 3-2}$$

Où :

$[J^+]$: Matrice pseudo inverse de l'ensemble des matrices Jacobiennes des éléments fonctionnels;

Les calculs seront effectués de façon automatique par un outil développé par Ghie dans le cadre de ses recherches sur le modèle Jacobien-Torseur [30] à l'Université de Sherbrooke. Les calculs pour trouver les matrices pseudo-inverses sont basés sur les travaux déjà réalisés en robotique [48]. Certains écrans générés par cet outil seront incorporés dans ce travail. Dans une première étape, on fera l'analyse pour déterminer la condition fonctionnelle en fixant les éléments fonctionnels. Par la suite, on reprendra la condition fonctionnelle pour en déterminer les éléments fonctionnels en réalisant les calculs en synthèse.

3.2 Exemple du bloc en U avec tolérance symétrique en analyse

Les figures 3.1 à 3.3 exposent le mécanisme et la chaîne étudiée.

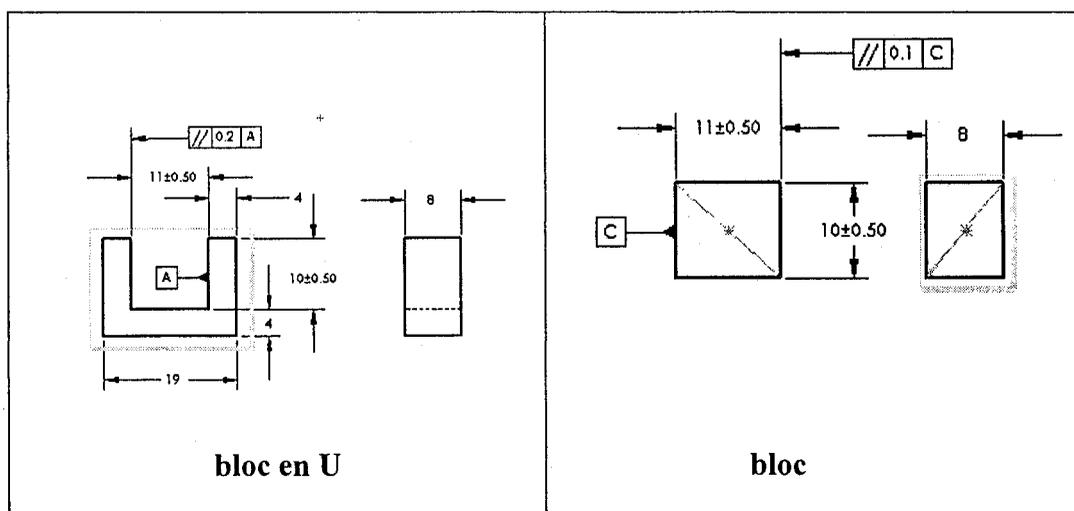


Figure 3.1 : Définition des pièces de l'assemblage du bloc en U

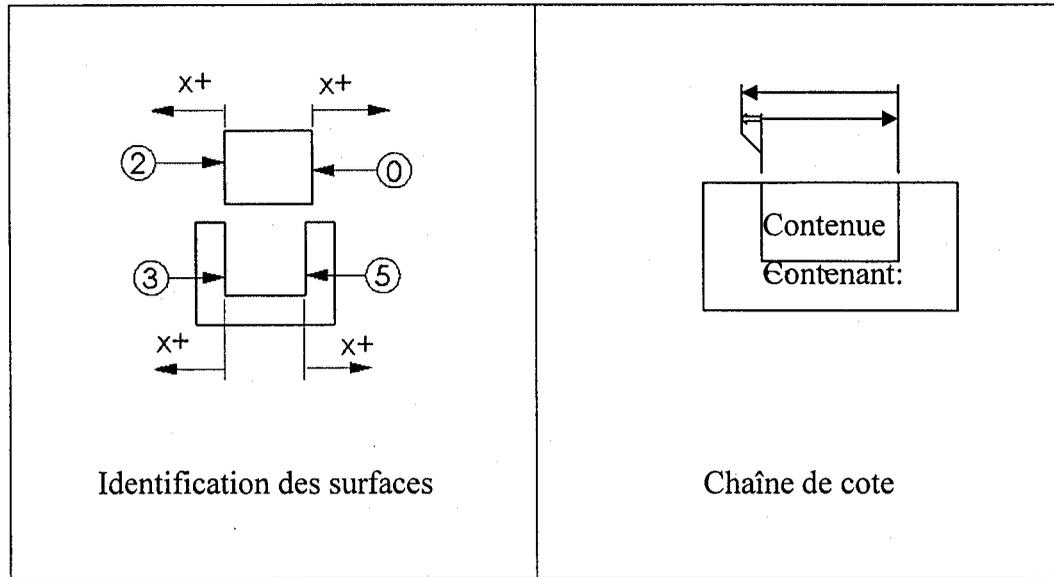


Figure 3.2 : Identification des pièces et chaîne de cotes du bloc en U avec tolérance symétrique

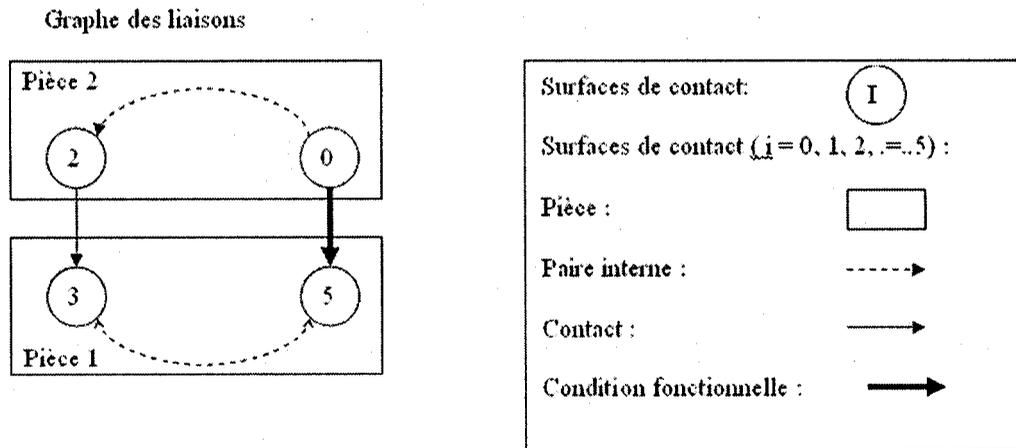


Figure 3.3 : Graphe de liaisons de du bloc en U avec tolérance symétrique

Les données relatives à cet exemple ont été entrées dans l'outil informatique développé par Ghie, figures 3.4 et 3.5

Informations de l'élément fonctionnel tolérancé

Information générale de la chaîne
 Nom de l'élément : EF1
 N'est pas considéré

Type de la paire
 Contact
 Zone de tolérance
 Type de contact : []
 Type de la zone : Plan
 Nom du référentiel défini par SW : B-droite

Informations de l'élément fonctionnel tolérancé
 Centre de l'EF
 Coordonnée en X : -11.00
 Coordonnée en Y : 0.00
 Coordonnée en Z : 0.00
 Axe d'EF
 X
 Y
 Z
 Matrice d'orientation / à l'origine de la chaîne

1.00	0.00	0.00
0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	1.00

 Sélectionner référentiel existant

Torseur classique de contact ou d'une zone de tolérance

Valeurs minimales		Valeurs maximales	
Translation en X (u)	-0.5	Translation en X (u)	0.5
Translation en Y (v)	0.00	Translation en Y (v)	0.00
Translation en Z (w)	0.00	Translation en Z (w)	0.00
Rotation en X (Alpha)	0.00	Rotation en X (Alpha)	0.00
Rotation en Y (Beta)	-0.01	Rotation en Y (Beta)	0.01
Rotation en Z (Gamma)	-0.0125	Rotation en Z (Gamma)	0.0125

EF suivant >>> EF Précédent <<< Jacobienne et Contribution à la CF Fermer

Figure 3.4 : Spécification du torseur de l'élément fonctionnel 1

Informations de l'élément fonctionnel tolérancé

Information générale de la chaîne
 Nom de l'élément : EF2
 N'est pas considéré

Type de la paire
 Contact
 Zone de tolérance
 Type de contact : []
 Type de la zone : Plan
 Nom du référentiel défini par SW : U-gauche

Informations de l'élément fonctionnel tolérancé
 Centre de l'EF
 Coordonnée en X : 0.00
 Coordonnée en Y : 0.00
 Coordonnée en Z : 0.00
 Axe d'EF
 X
 Y
 Z
 Matrice d'orientation / à l'origine de la chaîne

1.00	0.00	0.00
0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	1.00

 Sélectionner référentiel existant

Torseur classique de contact ou d'une zone de tolérance

Valeurs minimales		Valeurs maximales	
Translation en X (u)	-0.5	Translation en X (u)	0.5
Translation en Y (v)	0.00	Translation en Y (v)	0.00
Translation en Z (w)	0.00	Translation en Z (w)	0.00
Rotation en X (Alpha)	0.00	Rotation en X (Alpha)	0.00
Rotation en Y (Beta)	-0.02	Rotation en Y (Beta)	0.02
Rotation en Z (Gamma)	-0.025	Rotation en Z (Gamma)	0.025

EF suivant >>> EF Précédent <<< Jacobienne et Contribution à la CF Fermer

Figure 3.5 : Spécification du torseur de l'élément fonctionnel 2

Dans cette interface, les éléments rotationnels β et δ des torseurs sont calculées à partir des tolérances géométriques imposées et de la dimension des blocs, voir tableaux 3.1.

Tableau 3-1 : Calcul des torseurs de liaisons T2/0 et T5/3 du bloc en U avec tolérance symétrique

T _{2/0}		T _{5/3}	
Torseur classique :		Torseur classique :	
$T_{2/0} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}_{2/0}$		$T_{5/3} = \begin{Bmatrix} u & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & \delta \end{Bmatrix}_{5/3}$	
Tolérance d'orientation	Torseur final	Tolérance d'orientation	Torseur final
$-\frac{0.1}{10} \leq \beta \leq \frac{0.1}{10}$ $-\frac{0.1}{8} \leq \delta \leq \frac{0.1}{8}$	$\{T\}_{classique} = \{\bar{D} \quad \bar{\Omega}\}_{classique}$ $\begin{bmatrix} [-0.5, 0.5] \\ [0, 0] \\ [0, 0] \\ [0, 0] \\ [-0.01, 0.01] \\ [-0.0125, 0.0125] \end{bmatrix}_{EF2}$	$-\frac{0.2}{10} \leq \beta \leq \frac{0.2}{10}$ $-\frac{0.2}{8} \leq \delta \leq \frac{0.2}{8}$	$\{T\}_{classique} = \{\bar{D} \quad \bar{\Omega}\}_{classique}$ $\begin{bmatrix} [-0.5, 0.5] \\ [0, 0] \\ [0, 0] \\ [0, 0] \\ [-0.02, 0.02] \\ [-0.025, 0.025] \end{bmatrix}_{EF2}$

Tableau 3-2: Torseurs des éléments fonctionnels et matrices Jacobiennes du bloc en U avec tolérance symétrique

	Élément fonctionnel T2/0	Élément fonctionnel T5/3
Torseurs	$[EF]_1 = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.01 & .01 \\ -0.0125 & .0125 \end{bmatrix}$	$[EF]_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.02 & 0.02 \\ -0.025 & 0.025 \end{bmatrix}$
Matrices Jacobiennes	$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On peut dès lors calculer la condition fonctionnelle à partir des données du tableau 3-1 et de l'équation 3-2:

$$[CF] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \\ -0.0125 & 0.0125 \\ -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.02 & 0.02 \\ -0.025 & 0.025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -0.1375 & 0.1375 \\ -0.11 & 0.11 \\ 0 & 0 \\ -0.03 & .03 \\ -0.0375 & .0375 \end{bmatrix}$$

Équation 3-3

En analyse, le calcul prend en compte les tolérances géométriques. Par compte en synthèse, le calcul obtenu sera uniquement dimensionnel. Les deux hypothèses suivantes seront donc appliquées.

- Le calcul se fera dans la direction d'analyse
- On ne traite pas les tolérances géométriques

Étant donné que l'étude est appliquée dans la direction « x », seul le premier élément du torseur de la condition fonctionnelle est considéré:

$$CF = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-4

3.3 Exemple du bloc en U avec tolérance symétrique en synthèse

Pour effectuer la synthèse, on utilisera les torseurs des éléments fonctionnels de l'analyse et on retrouvera le torseur de la condition fonctionnelle. Rappelons la matrice Jacobienne utilisée dans l'exemple précédent :

$$J = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Équation 3-5

La matrice pseudo inverse de cette Jacobienne tel que déterminé par l'outil informatique est :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Équation 3-6

Rappelons la condition fonctionnelle de l'exemple précédent dans l'axe d'analyse et en respectant les hypothèses de l'équation 3-4.

$$CF = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-7

Le calcul en synthèse, qui donne les tolérances à apposer sur les éléments fonctionnels, est déduit de l'équation 3-2:

$$[EF] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-8

On en tire :

$$EF_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-9

$$EF_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-10

On conclut que dans le cas de tolérances symétriques, le modèle est réversible car on retrouve dans la section 3.3 (synthèse) les mêmes valeurs des torseurs des EF utilisés à la section 3.2 (analyse). Le prochain exemple, bloc en U avec tolérances asymétriques, permettra donc de vérifier le comportement du modèle lorsque les tolérances ne sont pas distribuées de façon symétrique.

3.4 Exemple du bloc en U avec tolérances asymétriques en analyse

On commence par modifier les tolérances des deux blocs selon la figure 3.6 :

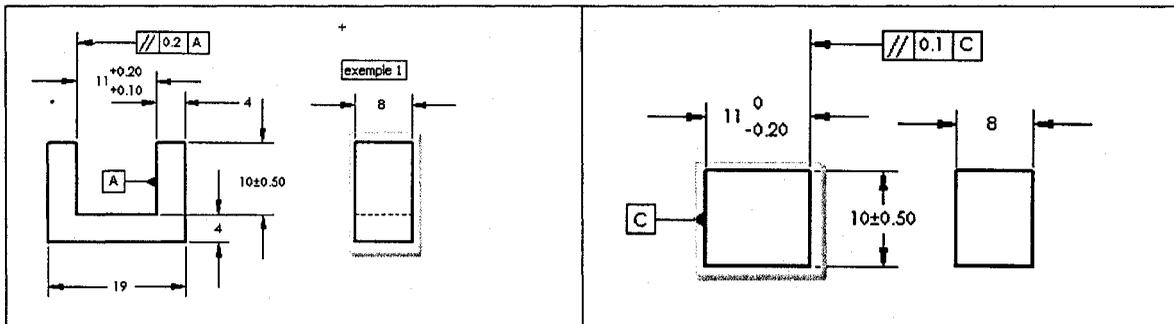


Figure 3.6 : Définition des pièces de l'assemblage du bloc en U avec tolérance asymétrique en analyse

On détermine ensuite les torseurs pour les éléments fonctionnels 1 et 2 à l'aide de l'outil informatique. Les résultats sont donnés au tableau 3-3.

Tableau 3-3: Torseurs des éléments fonctionnels et matrices Jacobiennes du bloc en U avec tolérance asymétrique en analyse

	Élément fonctionnel T2/0	Élément fonctionnel T5/3
Torseurs	$[EF]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.01 & .01 \\ -0.0125 & .0125 \end{bmatrix}$	$[EF]_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.02 & 0.02 \\ -0.025 & 0.025 \end{bmatrix}$
Matrices Jacobiennes	$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On obtient alors le modèle suivant à partir de l'équation 3-1 :

$$[CF] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \\ -0.0125 & 0.0125 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.02 & 0.02 \\ -0.025 & 0.025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ -0.1375 & 0.1375 \\ -0.11 & 0.11 \\ 0 & 0 \\ -0.03 & .03 \\ -0.0375 & .0375 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-11}$$

Selon l'axe d'analyse et les hypothèses de l'équation 3-4, le torseur utilisé pour la synthèse devient :

$$CF = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-12}$$

3.5 Exemple du bloc en U avec tolérance asymétrique en synthèse

Pour effectuer la synthèse, on utilisera encore ici le torseur de la condition fonctionnelle et on trouvera les torseurs des deux éléments fonctionnels impliqués. Le calcul en synthèse est encore ici tiré de l'équation 3-2 :

$$[EF] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.088 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & -0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.016 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.016 & 0 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 & -0.088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.088 & 0 & 0.984 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0 & 0 & 0 & 0.984 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-13}$$

D'où l'on tire :

$$EF_1 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-14

$$EF_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 3-15

Dans ce deuxième exemple, on remarque premièrement que la somme des intervalles de tolérances des éléments fonctionnels est égale à l'intervalle de tolérance de la condition fonctionnelle, ce qui est conforme à la règle de base en tolérancement. Par contre, on remarque aussi que les valeurs des tolérances sur les EF sont encore ici réparties de façons égales, malgré qu'initialement le problème en analyse en était un avec tolérances différentes pour les deux EF : [0, 0.2] en analyse versus [0.05, 0.2] en synthèse pour EF1, et [0.1, 0.2] en analyse versus [0.05, 0.2] en synthèse pour EF2. Cette répartition égale des tolérances sur chaque EF correspond rarement à la réalité des pièces d'un assemblage et elle amène donc certains problèmes d'utilisation de l'approche pseudo inverse proposée ici. La section suivante élabore un peu plus sur ce point important.

3.6 Interprétation des résultats

Pour un concepteur, le tolérancement consiste à déterminer le jeu de la condition fonctionnelle. Pour aider le concepteur il existe des tables normalisées (ANSI Standards Fits, ANSI B4.1-1967 (R1987)) ou (American National Standard Preferred Metric Limits and Fits, ANSI B4.2-1978 (R1994)) [41] qui déterminent le jeu en fonction du mode de

fonctionnement du mécanisme. Ces tables peuvent aussi servir à fixer certains ajustements à l'intérieur de la chaîne de cote.

Par la suite, le concepteur doit établir les chaînes de cotes et déterminer l'intervalle de tolérance de chacune des cotes constituantes de la chaîne. Le concepteur ne peut distribuer de façon égale les tolérances car plusieurs facteurs doivent être pris en compte.

Premièrement, dans un assemblage, il y a, la plupart du temps, des composants standards dont les tolérances sont fixées par le fabricant. C'est le cas des roulements ou les fournisseurs donnent les tolérances des alésages et des arbres pour assurer un bon fonctionnement. D'autres pièces sont achetées et les tolérances de fabrication sont déterminées par leurs fournisseurs, il en coûterait trop cher de faire des pièces sur mesure plutôt que d'utiliser des pièces de série.

Pour certains éléments, l'ajustement entre deux pièces est déterminé par les tables d'ajustement. Par exemple, le jeu entre les pièces qui coulissent les unes dans les autres peut être déterminé par ces tables.

Par la suite, le concepteur doit répartir le reste de la tolérance sur les éléments fonctionnels restants. Le concepteur peut rarement distribuer de façon égale les valeurs des tolérances car il doit tenir compte de plusieurs critères. Un des premiers critères est celui qui mentionne que l'intervalle de tolérance augmente en fonction des dimensions de la pièce. Un exemple de ce phénomène est que selon la table (American National Standard Preferred Hole Basis Metric Clearance Fits ANSI B4.2-1978(R1994) un alésage de 8mm coté H11 à un intervalle de tolérance de 0.09mm et un alésage de 25mm avec la même tolérance H11 à un intervalle de tolérance de 0.13mm.

Un autre point que le concepteur doit prendre en compte est le système de l'alésage normal qui est préconisé par la plupart des concepteurs. Dans ce système, la tolérance infé-

rière de l'alésage est toujours 0 et l'intervalle de tolérance est complètement réparti dans la partie supérieure de la tolérance comme par exemple dans le cas d'un 8 H11, on retrouve un intervalle de tolérance de moins 0 plus 0.09mm.

Il faut également prendre en considération que les surfaces ne sont pas toutes aussi facilement usinables. La rigidité des pièces, la forme des surfaces, la grandeur des surfaces sont tous des facteurs que le concepteur doit prendre en compte. De plus, certains outils de fabrication donnent, de façon économique, des tolérances serrées. Le Machinery's Handbook [41] donne la relation entre les différents procédés de fabrication et les tolérances. De ces relations, on peut prendre l'exemple d'un alésage qui peut être fabriqué avec une tolérance de grade 6 avec un alésoir qui est un outil qui réalise le travail de façon efficace et économique.

Bref, on voit qu'en pratique certains éléments fonctionnels sont déjà fixés alors que certains seront calculés et répartis selon l'expérience du concepteur. Dans ce contexte, il serait très difficile d'utiliser le modèle pseudo inverse tel que présenté précédemment car il ne permet pas d'imposer des intervalles de tolérances pour certains éléments fonctionnels, i.e. la mathématique impliquée fait en sorte qu'il renvoie toujours une répartition égale des tolérances. Dans les pages qui suivent, une modification sera donc proposée afin de pouvoir permettre aux concepteurs de fixer certains éléments fonctionnels et calculer les autres en tenant compte des contraintes citées précédemment.

3.7 Modification du modèle

Pour donner plus de flexibilité au modèle mathématique, nous garderons chacune des matrices Jacobiennes indépendantes pour ainsi permettre d'associer un poids à chacun des éléments fonctionnels. En synthèse, le nouveau modèle permettra de fixer les tolérances des pièces achetées et de partager le reste de l'intervalle disponible entre les différentes pièces restantes en tenant compte des contraintes citées précédemment.

3.7.1 Première étape : obtention de la condition fonctionnelle restante

Nous procédons en analyse pour trouver la tolérance de la condition fonctionnelle restante CFr . Pour obtenir cette condition fonctionnelle on devra enlever l'effet des tolérances fixes CFf qui seront calculées à partir des torseurs et matrices Jacobiennes des éléments fixes pour respecter les contraintes des constructeurs ou de fabrication. Le résultat de ce calcul sera enlevé à la condition fonctionnelle imposée CFi pour garder le mécanisme fonctionnel.

$$[CFr] = [CFi] - [CFf] \quad \text{Équation 3-16}$$

Où :

- CFr : Représente le torseur 1 X 6 restant après avoir enlevé l'effet des éléments fixes;
- CFf : Représente le torseur 1 X 6 de la somme des éléments fonctionnels fixes;
- CFi : Représente le torseur 1 X 6 de la condition fonctionnelle définie par le concepteur;

La condition fonctionnelle fixe est la somme de tous les éléments fonctionnels fixes pour respecter les contraintes de l'industrie. La formulation est la suivante :

$$[CFf] = \sum_{k=1}^f [J]_k [EFi]_k \quad \text{Équation 3-17}$$

Où :

- $[J]_k$: Matrice Jacobienne de l'élément fonctionnel imposé k ;
- $[EFi]_k$: Torseur de l'élément fonctionnel imposé k ;
- f : Nombre d'éléments imposés;

L'équation 3-16 devient :

$$[CFr] = [CFi] - \sum_{k=1}^m [J]_k [EFi]_k \quad \text{Équation 3-18}$$

Où :

$[EFi]$: Torseur 1 X 6 de l'élément fonctionnel fixée par les fabricants ou par les procédés de l'élément k;

m : Nombre d'élément fixe;

La deuxième étape utilisera la condition fonctionnelle restante qui sera distribuée selon les règles de conception.

3.7.2 Deuxième étape : calcul des tolérances individuelles

En synthèse on calcule les tolérances des éléments fonctionnels en utilisant la formulation suivante :

$$[EFC]_k = [J^{-1}]_k * [CFr] * [\%cont]_k \quad \text{Équation 3-19}$$

Où :

$[EFC]_k$: Torseur de l'élément fonctionnel calculé k;

$[J^{-1}]_k$: Matrice Jacobienne inverse ou pseudo-inverse de l'élément;

$k=1,2,\dots,m$: m est le nombre d'éléments à calculer;

$[CFr]$: Torseur de la tolérance de la condition fonctionnelle restante;

$[\%cont]_k$: Pourcentage appliqué à l'élément k;

Pour l'attribution des pourcentages, comme spécifié précédemment, il faut tenir compte de la grandeur des dimensions. En effet, plus la dimension est grande, plus il est difficile de respecter une tolérance serrée. La forme des surfaces joue un rôle important aussi; en

effet une surface complexe est plus difficile à obtenir avec des tolérances serrées qu'une surface simple. L'expérience du concepteur reste un atout important dans l'optimisation des coûts de production et le choix du pourcentage utilisé dans le modèle proposé.

3.8 Validation du nouveau modèle

Reprenons maintenant le bloc en U de la figure 3.6 en lui imposant (cote fixe) la même tolérance que dans l'exemple précédent de [0.1, 0.2]. Pour respecter les données du problème nous avons une tolérance sur la condition fonctionnelle de [0.1, 0.4].

Première étape: trouver la condition fonctionnelle restante (équation 3-18) :

$$[CFr]_r = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-20}$$

Deuxième étape : calcul des tolérances individuelles. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule autre cote à calculer ; on lui attribuera donc 100% de la tolérance restante :

$$[EFc]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-21}$$

Pour déterminer la tolérance on doit vérifier, selon les axes utilisés pour les calculs, l'influence sur la cote. En effet, une valeur positive dans le torseur (axes pour le calcul) donne la direction de la tolérance. Dans l'exemple présent, la direction de l'axe de calcul est vers la gauche ce qui engendre une diminution de la cote (figure 3.7) car la direction de la cote est vers la droite. Donc, dans notre cas on doit inverser les signes pour passer aux tolérances à apposer à la pièce.

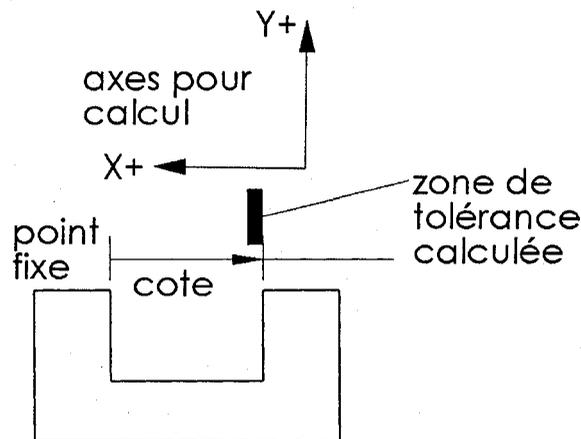


Figure 3.7 : Passage du torseur à la tolérance du dessin.

On obtient alors $11_{-0.2}^0$, Ce résultat est compatible avec les données du problème posé en analyse. Cet exemple simple montre donc que la modification de la formulation amène une plus grande flexibilité pour le concepteur. Le chapitre suivant présente des exemples de validation plus complexes.

Chapitre 4. Résultats

4.1 Exemple des 4 blocs en synthèse

Dans cet exemple tiré de [32], trois blocs sont insérés dans un bloc en U. La cote fonctionnelle a été fixée au maximum à 3 et au minimum à 0 pour simuler les jeux fonctionnels des tables pour une utilisation quelconque. Comme la condition fonctionnelle C_f a une cote nominale de 2, la tolérance appliquée sera de $+1$ et -2 . La cote A maximum a été fixée à 8.5 et le minimum à 7.5 pour simuler une contrainte de manufacturier. Les tolérances des cotes B, C et D sont donc recherchées et doivent être calculées par synthèse. Dans cet exemple, on suppose que la cote D doit avoir le double de la tolérance des cotes B ou C car le procédé de fabrication de cette cote est plus complexe.

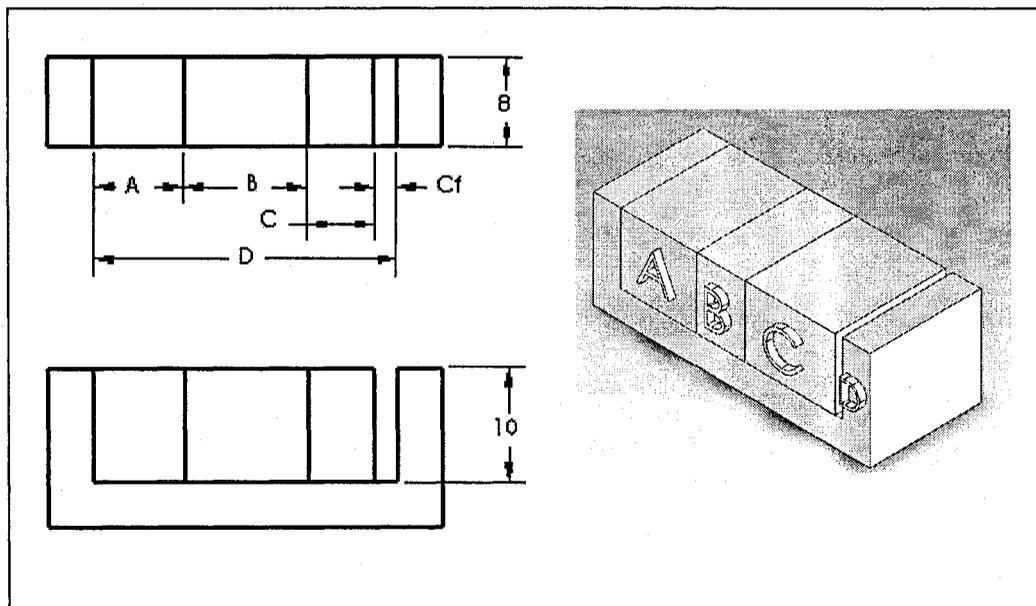


Figure 4.1 : Définition des paramètres utilisés pour l'exemple des trois blocs.

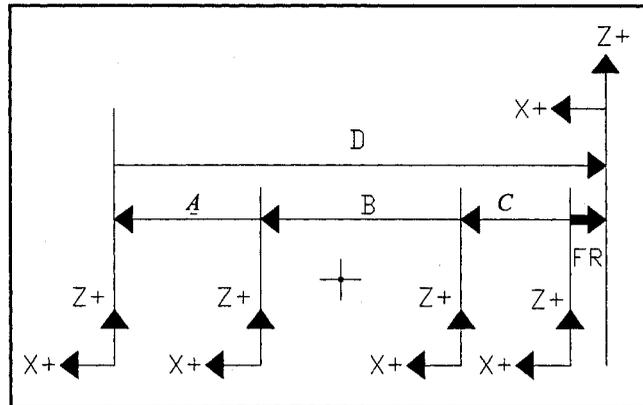


Figure 4.2 : Définition des systèmes de coordonnées utilisés pour l'exemple des trois blocs.

$$A \text{ max} = 8.5$$

$$A \text{ min} = 7.5$$

$$B = 11$$

$$C = 6$$

$$C_f \text{ max} = 3 \text{ (la cote nominale est de 2 mm, la tolérance appliquée sera de -2, +1)}$$

$$C_f \text{ min} = 0$$

$$D = 27$$

Première étape: trouver la condition fonctionnelle restante de l'équation 3-18 :

$$[CFr]_r = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-1

Deuxième étape : trouver l'apport de chaque élément avec les pourcentages définis dans la donné du problème :

$$[\%cont]_b = 25\%$$

$$[\%cont]_b = 25\%$$

$$[\%cont]_b = 50\%$$

Les tolérances calculées des pièces A, B et C à partir de l'équation 3-19 sont donc :

$$[EFc]_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.25 = \begin{bmatrix} -.375 & .125 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 4-2}$$

$$[EFc]_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.25 = \begin{bmatrix} -.375 & .125 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 4-3}$$

$$[EFc]_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times 0.5 = \begin{bmatrix} -.75 & .25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 4-4}$$

Tout comme dans l'exemple du bloc en U, (figure 3.7), les signes pour les cotes B et C doivent être inversés car une tolérance dans la direction des X+ amène une diminution de l'intervalle de tolérance.

On obtient finalement:

$$A = 8 \pm 0.5$$

$$B = 11 \begin{matrix} +0.375 \\ -0.125 \end{matrix}$$

$$C = 6 \begin{matrix} +0.375 \\ -0.125 \end{matrix}$$

$$D = 27 \begin{matrix} +0.25 \\ -0.75 \end{matrix}$$

$$Cf = 2 \begin{matrix} +1 \\ -2 \end{matrix}$$

Cet exemple montre bien l'amélioration de la flexibilité du modèle. Le nouveau modèle permet d'imposer la condition fonctionnelle, d'enlever l'effet des éléments fonctionnels fixés pour respecter les contraintes des fournisseurs et permet de distribuer selon un pourcentage le reste de la tolérance de façon à tenir compte de la difficulté d'usinage des différentes surfaces à usiner.

4.2 Exemple de la perforatrice en synthèse

Pour valider le modèle, on l'appliquera à un cas plus réel. On effectuera la cotation fonctionnelle d'une perforatrice à un trou pour le carton (voir figure 4.3). Cette perforatrice est constituée d'une base dans laquelle est insérée une matrice. L'ajustement entre les deux pièces est sans jeu. Sur la même base, un support est installé en appui sur une butée et le poinçon glisse dans le trou prévu à cette fin.

Le texte qui suit fait référence à la figure 4.5. Dans cet assemblage, le concepteur désire un jeu entre le poinçon et la matrice de $\pm 0,1\text{mm}$ (CFi) ce qui correspond à 10% de l'épaisseur du carton de 1mm d'épaisseur, cette contrainte représentera la condition fonctionnelle de notre chaîne de cotes. En effet, un jeu plus grand que 10% de l'épaisseur [42] [43] ferait en sorte que le matériel serait déformé autour du trou perforé.

Par contre, si le jeu est trop petit, l'effort nécessaire pour perforer serait trop grand pour rester fonctionnel.

Parmi les éléments fonctionnels, le jeu entre le poinçon et le support (EF2) est fixé selon les recommandations des normes (American National Standard Preferred Hole Basis Metric Clearance Fits), on utilise l'ajustement (sliding) H7/g6 ce qui donne pour un diamètre de 8 mm un jeu minimum de 0,005mm et un jeu maximum de 0,029mm.

Les autres spécifications fonctionnelles utilisées sont la coaxialité des deux diamètres sur le poinçon soit entre le diamètre de découpe et le diamètre de positionnement (EF1) et la coaxialité des deux diamètres de la matrice soit entre le diamètre extérieur qui sert au positionnement dans la base et le trou pour la découpe (EF7). Il y a aussi la distance entre le trou pour le poinçon et le plan d'appui EF3 ainsi que la distance entre le trou pour la matrice et le plan d'appui sur la base EF5 qui a la même valeur que EF3. En se basant sur ces dimensions on accordera un poids de 40% pour les deux dimensions de 30 mm soit la distance entre les plans d'appuis de la base et le support et 10% pour les coaxialités entre les deux diamètres du poinçon et les deux trous dans la matrice qui seront plus facile a usiner car ils peuvent être réalisées dans le même montage.

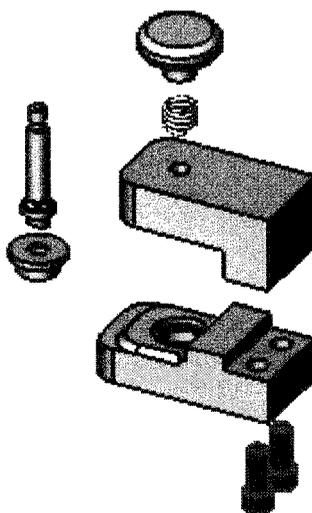


Figure 4.3: dessin d'assemblage de la perforatrice

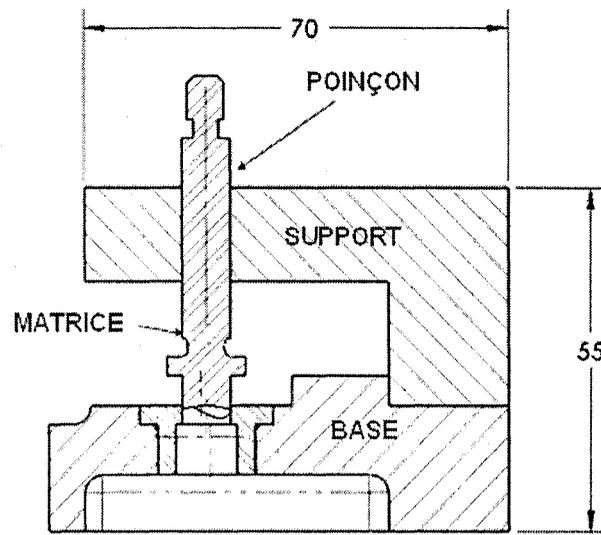


Figure 4.4: dessin d'assemblage simplifié de la perforatrice dans l'axe d'analyse

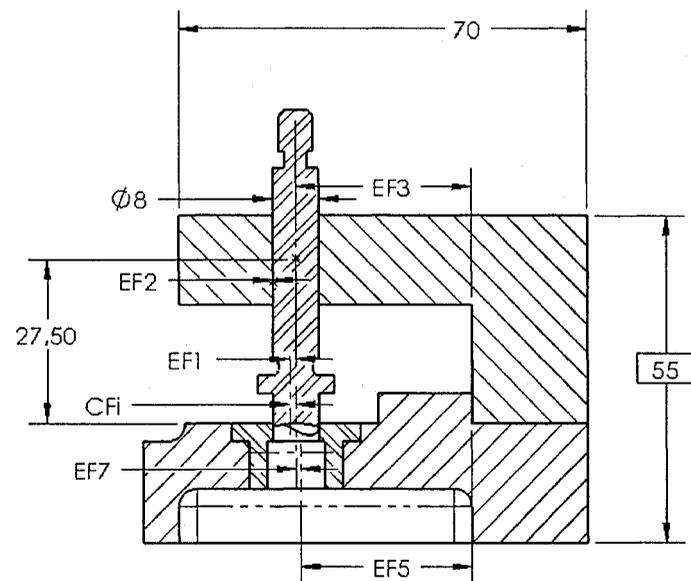


Figure 4.5: Identification des éléments fonctionnels et de la condition fonctionnelle de la perforatrice

Dans cet exemple :

EF1 : représente la coaxialité entre les deux diamètres du poinçon ;

EF2 : représente le jeu entre le poinçon et le support ;

EF3 : représente la distance entre le trou pour le poinçon dans le support et le plan d'appui sur la même pièce ;

EF5 : représente la distance du plan d'appui sur la base et le trou pour la matrice sur la même pièce ;

EF7 : représente la coaxialité entre l'extérieur de la matrice et le trou de la même pièce

CFi : représente le jeu entre le poinçon et la matrice ;

EF4 et EF6 : représentent des surfaces en contacts et ne sont pas considérées.

La première étape consiste à soustraire de la condition fonctionnelle l'effet de l'élément fonctionnel fixé par le concepteur pour le jeu entre le poinçon et le support, selon l'équation 3-18 :

$$[CFr] = \begin{bmatrix} -1 & .1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 27.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.0145 & 0.0145 \\ -0.0145 & 0.0145 \\ 0 & 0 \\ -0.0019 & 0.0019 \\ -0.0019 & 0.0019 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0.0677 & -0.0677 \\ 0 & 0 \\ 0.0019 & -0.0019 \\ 0.0019 & -0.0019 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 4-5}$$

Dans l'axe d'analyse et avec les hypothèses de l'équation 3-4, ce torseur devient :

$$[CFr] = \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 4-6}$$

La deuxième étape consiste à faire les calculs pour trouver les tolérances pour chacun des éléments fonctionnels, à partir de l'équation 3-19.

Calcul de l'élément 1 :

$$EF1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -27.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 27.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.1 = \begin{bmatrix} -0.00323 & 0.00323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-7

Calcul de l'élément 3 :

$$EF3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.4 = \begin{bmatrix} -0.01292 & 0.01292 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-8

Calcul de l'élément 5 :

$$EF5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.4 = \begin{bmatrix} -0.01292 & 0.01292 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-9

Calcul de l'élément 7 :

$$EF7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0323 & 0.0323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} * 0.1 = \begin{bmatrix} -0.00323 & 0.00323 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Équation 4-10

Une première analyse nous permet de constater que le jeu entre le poinçon et le support gruge la majorité des tolérances disponibles pour les éléments fonctionnels. En effet, à cause du bras de levier causé par la distance entre le support et la base, le jeu engendre une erreur plus grande que celle imposée par le concepteur. Cela se traduit par l'entrée de la dimension 27.5 dans la matrice Jacobienne qui multiplie le jeu entre le poinçon et

le porte poinçon. Cette multiplication représente bien la réalité car effectivement si la distance entre le poinçon et le porte poinçon augmente, le poinçon déviara davantage.

La conséquence se répercute dans la deuxième étape. En effet les intervalles de tolérance calculés sont très petits mais tout de même conformes à la logique de départ, c'est-à-dire que les tolérances des pièces 1 et 7, qui représentent des coaxialités, sont plus faciles à obtenir, surtout si ces pièces sont usinées dans le même montage (le défaut de coaxialité sera alors minime). Les deux autres intervalles de tolérance qui représentent des cotes linéaires seront plus difficiles à obtenir car ils représentent une cote machine qui dépend directement de la précision de celle-ci [44].

Chapitre 5. Conclusions

5.1 Accomplissements

Selon la recherche bibliographique, l'analyse fonctionnelle d'un mécanisme n'est pas une mince tâche. Il faut, pour apposer les tolérances sur un assemblage, une bonne dose d'expérience et de très bonnes connaissances dans plusieurs domaines tel que les machines outils, les outils, les normes d'ajustements, etc.,. Très peu d'outils sont disponibles pour faciliter la tâche aux concepteurs. La méthode du Jacobien-Torseur telle que présentée avant les modifications était certes très robuste et s'appliquait très bien en analyse mais n'était pas très appropriée pour faire de la synthèse en conception car elle ne permettait pas de tenir compte des contraintes de l'industrie. Après les modifications proposées dans ce travail le concepteur pourra tenir compte de ces contraintes.

Les analyses que nous avons réalisées nous mènent à des conclusions assez intéressantes :

- Le modèle permet aux concepteurs de fixer les tolérances des éléments fonctionnels pour les pièces standards déjà manufacturées ;
- Le modèle permet aussi aux concepteurs de fixer certains éléments pour tenir compte:
 - des difficultés d'usinage ;
 - des règles de conception (par exemple jeu normalisé) ;
- Les pourcentages sont déterminés par le concepteur selon les règles de conception et l'expérience de celui-ci ;
- Le logiciel nous permet de faire plusieurs itérations facilement et rapidement. Le concepteur peut donc fixer des pourcentages différents pour évaluer plusieurs solutions afin d'optimiser les résultats ;

Le modèle tel que modifié est bien adapté pour aider les concepteurs dans la lourde tâche de déterminer les intervalles de tolérance d'un assemblage. Le modèle de base ne permettait pas de tenir compte des contraintes que les concepteurs doivent respecter dans l'industrie. La modification de la modélisation permet de faire un pas en avant dans la recherche de tolérances optimales.

5.2 Limitations

Le modèle ne règle pas tous les problèmes du concepteur. En effet, il faudra encore une bonne dose d'expérience pour déterminer le pourcentage à attribuer aux éléments à calculer. Le concepteur devra attribuer les pourcentages en tenant compte des difficultés d'usinage, des surfaces à usiner et des coûts engendrés par la réduction des intervalles de tolérance. Les informations pour les pièces manufacturées sont déterminées par les fabricants ce qui ne pose pas de problème aux concepteurs à moins que les tolérances des pièces manufacturées ne soit pas compatible avec les précisions nécessaires au bon fonctionnement du mécanisme. Par contre, le concepteur devra aussi retrouver dans les normes, les bons jeux pour que le mécanisme soit fonctionnel sans pour autant diminuer les intervalles de tolérances des pièces à fabriquer. Finalement, les calculs ne prennent pas en compte les tolérances géométriques, le concepteur devra fixer les tolérances géométriques s'il y a avantage à utiliser ce type de tolérance.

5.3 Développement futur

Le modèle tel que présenté est utilisé pour le tolérancement au pire des cas et non en tolérancement statistique. Plusieurs articles montrent l'avantage d'utiliser les statistiques pour le tolérancement, le modèle présenté devra donc être adapté à ce type de tolérancement. Laperrière et al. [31] ont utilisé le modèle Jacobien-Torseur pour faire de l'analyse statistique en tolérancement; la partie statistique devra donc être adaptée au nouveau changement.

Une autre étape intéressante serait de jumeler à ce modèle, un algorithme d'optimisation qui permettrait d'évaluer les coûts engendrés par la fabrication d'un mécanisme suite aux calculs effectués par le modèle. De cette façon, le concepteur pourrait faire varier les pourcentages afin d'optimiser les tolérances d'un mécanisme. Le principal problème avec le calcul des coûts de fabrication est que les données changent d'année en année. En effet, le coût de fabrication des pièces varie en fonctions des équipements et des outils disponibles dans l'entreprise. La mondialisation des marchés a amené les compagnies à se spécialiser et les outils et les machines utilisées s'améliorent rapidement. Le coût de production d'un type de pièce usinée il y a quelques années n'est pas le même que si elle était usinée aujourd'hui et ne sera pas non plus le même que pour la pièce produite demain.

Liste des références

- [1] Chiabert P., Lombardi F., Orlando M., «Benefits of geometric dimensioning and tolerancing», *Journal of materials processing technology* 78, pp. 29-35, 1998
- [2]. Chase K.W., Grennwood W.H., Loosli B.G., Hauglund L.F., «Least Cost Tolerance Allocation for Mechanical Assemblies with Automated Process Selection», *Manufacturing Review*, v3, n1, pp. 49-59, Mars1990
- [3] Speckhart F. H., «Calculation of tolerance based on a minimum cost approach», *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, pp. 447-453, 1972
- [4] Spotts, M.F., «Allocation of tolerances to minimize cost of assembly», *Journal of Engineering for Industry, Transactions of the ASME*, pp. 762-764, 1973
- [5] Chase K. W., Magleby S.P., Jinsong G., «Tolerance analysis of 2-D and 3-D Mechanical Assemblies with Small Kinematics Adjustments», *Journal of Design and Manufacturing*, v5, pp. 263-274, 1995
- [6] Chase K.W., Gao J., Magleby S.P., «Generalized 3-D Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies With small Kinematic Adjustments», *ADCATS Report*, n94-2, 1999
- [7] Chase K.W., Gao J., Magleby S.P., Sorenson C.D., «Including Geometric Feature Variations in Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies», *IIE Transactions*, v28, pp. 795,807, 1996
- [8] Bourdet P., «Contribution à la mesure tridimensionnelle : Modèle d'identification géométrique des surfaces, Métrologie fonctionnelle des pièces mécaniques, Correction géométrique des machines à mesurer tridimensionnelles» Thèse de doctorat, Université de Nancy, Juin 1987
- [9] Bourdet P., Clément A., « A study of optimal-criteria identification based on small displacement screw model », *CIRP annals Manufacturing technology*, v37, pp.503-506, 1988
- [10] Desrochers A., «Modeling three-dimensional tolerance zones using screw parameters», *CD-ROM Proceedings 25th Design Automation Conference, DAC-8587*, Las-Vegas, 1999

- [11] Adams J.D., Whitney D., «Application of screw theory to motion analysis of assemblies of rigid parts», *Compte-rendu de IEEE International Symposium on assembly and task planning*, Porto, Portugal, pp.75-80, Juillet 1999
- [12] Samper S., Giordano M., «Modèle pour la prise en compte des déformations dans la démarche de tolérancement», *First international Conference, IDMME 96*, Nantes, France, Avril 15-17, 1996
- [13] Samper S., Giordano M., «Taking into account elastic displacements in 3D tolerancing Models and application», *Journal of Materials Processing Technology* 78, pp. 156-162, 1998
- [14] Samper S., Petit J.P., Giordano M., «Elastic clearance Domain and Use rate Concept Applications to Ball Bearings and Gears», *9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing*, Arizona, USA, Avril 2005
- [15] Giordano M., Samper S., Petit J.P., «Tolerance analysis and synthesis by means of deviation domains, axi-symmetric cases», *9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing*, Arizona, USA, Avril 2005
- [16] Desrochers A., «A CAD/CAM Representation Model Applied to Tolerance Transfer Methods», *24th Design Automation Conference*, Atlanta, Georgia, Septembre 1998
- [17] Desrochers A., «Modèle conceptuel du dimensionnement et du tolérancement des mécanismes : Représentation dans les systèmes CFAO», *Thèse de Doctorat, École Centrale de Paris*, 1991.
- [18] Charles B., Clément A., Rivière A., «Les SATT, un modèle technologique pour la CFAO», *TECHNOLOGIE n50*, Avril-Mai, 1992
- [19] Temmerman M., «Lois de comportement autorisant la synthèse du tolérancement», *IDMME 98*, Compiègne France, Mai 1998
- [20] Dubé I., «Rapport de stage S2, Représentation matriciel des tolérances dans les systèmes de CFAO», *I.S.M.C.M.*, France, 1993

- [21] Laperrière L., Lafond P., «Tolerances Analysis and synthesis using virtual joints», 6th CIRP international seminar on computer aided tolerancing, Enschede, Netherlands, pp. 405-414, Mars 22-24, 1999
- [22] Lafond P., «Proposition d'une méthodologie pour l'évaluation relative des dispersions affectant une condition fonctionnelle en conception mécanique», Mémoire de maîtrise, UQTR, 1996
- [23] Laperrière L., Elmagraghy A., Hoda A., «Tolerance Analysis and synthesis Using Jacobian Transforms», Annals of the CIRP, v49/1/2000, 2000
- [24] Laperrière L., «Modèle de sensibilité globale en tolérancement assistée par ordinateur», Revue de CFAO et d'informatique graphique, v17/1/2002, 2002
- [25] Laperrière L., Tassere K., «Monte Carlo simulation of tolerance synthesis equations», Int. J. Prod. Res., v39, n11, pp. 2395-2406, 2001
- [26] Desrochers A., Walid G., Laperrière L., «Application of a unified Jacobian-Torsor model for tolerance analysis», Journal of Computing and Information Science in Engineering, v3, n1, pp. 2-14, 2003
- [27] Ghie W., Laperrière L., Desrochers A., «A unified jacobian-torsor model for analysis in computer aided tolerancing, ouvrage : Recent advances in integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering», Kluwer Academic Publishers, Gogu G., Coutellier D., Chedmail P., Ray P. (EDS), ISBN 1-4020-1163-6, pp. 63-72, 2003
- [28] Ghie W., Laperrière L., Desrochers A., «A unified jacobian-torsor model for analysis in computer aided tolerancing», IDMME 2002, France, Mai 14-16, 2002
- [29] Laperrière L., Ghie W., Desrochers A., «Projection of torsors: a Necessary Step for Tolerance Analysis Using the Unified Jacobian-Torsor model», 8th CIRP Charlotte, North Carolina, USA, Avril 28-29, 2003
- [30] Ghie W., «Modèle unifié Jacobien-Torseur pour le tolérancement assisté par ordinateur», Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, Avril 2004

- [31] Laperrière L., Ghie W., Desrochers A., «Statistical and deterministic Tolerance Analysis and Synthesis Using a Unified Jacobian-Torsor Models», *Annals of the CIRP*, v51, n1, pp. 417-420, 2002
- [32] Nadeau D., Laperrière L., Walid G., «Tolerance synthesis by decoupled inversion of the Jacobian-Torsor model», 9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing, Arizona, USA, Avril 10-12, 2005
- [33] Ghie W., Laperrière L., Desrochers A., « Re-desing of Mechanical Assemblies using the Jacobian-Torsor model», 9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing, Arizona, USA, Avril 10-12, 2005
- [34] Bhide S., Ameta G., Davidson J.K., Shah J.J., «Tolerance-Maps Applied to the Straightness and Orientation of an Axis», 9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing, Arizona, USA, Avril 10-12, 2005
- [35] Krulikowski, «Fundamentals of Geometric Dimensioning and Tolerancing», DELMAR, 1997
- [36] Davidson J.K., Shah J.J., «Using Tolerance-Maps to represent material condition on both a feature and a datum», 9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing, Arizona, USA, Avril 10-12, 2005
- [37] Ostrovsky-Berman Y., Joskowicz L., Schwarzer F., «Tolerance envelopes of parametric planar part models», 8th CIRP Charlotte, North Carolina, USA, Avril 28-29, 2003
- [38] Mathieu L., Ballu A., «A Model for a Coherent and Complete Tolerancing Process», 9th CIRP International seminar on computer aided tolerancing, Arizona, USA, Avril 10-12, 2005
- [39] Mathieu L., Ballu A., «GEOSPELLING: a common language for Geometrical Product Specification and Verification to express method uncertainty», 8th CIRP Charlotte, North Carolina, USA, April 28-29, 2003
- [40] <http://www.ugsfrance.fr/quickstack.htm>, Janvier 2004
- [41] Oberg E., Jones, F.D., Horton, H.L., Ryffel H.H., «Machinery's Handbook (26th Edition) © 2000», Industrial Press, ISBN 0-8311-2625-6

- [42] Ostergaard E., «Basic Die making», McGraw-Hill, 1963, ISBN 07-046090-6
- [43] Boyes W., «Handbook of Jig end Fixture Design», Society of Manufacturing Engineers, 1989, ISBN 0-87263-365-9
- [44]. Chevalier A., Bohan J., «Guide du technicien en productique», Hachette technique, 1993-1994, ISBN 2.01.020108.6
- [45] (http://www.sigmetrix.com/about_cetol.asp), Novembre 2005
- [46] (<http://www.cadserver.co.uk/common/viewer/archive/2003/Jun/12/feature13.phtm>), Novembre 2005
- [47] (<http://www.varatech.com/sigmundworks.html>), Novembre 2005
- [48] Lallemand Jean-Paul, Zegloul Said, «Robotique : aspects fondamentaux : modélisation mécanique, CAO robotique, commande : avec exercices», Paris Masson, 1994, ISBN 2-225-84354-6 ISSN 0992-5538