

ciup

UNA INTERPRETACION MATEMATICA
DEL MODELO SUNKEL SOBRE EL SUBDESARROLLO
LATINOAMERICANO

Por: Carlos Boloña Behr.

Serie: Ensayos N° 11
Lima, Setiembre de 1975.



UNIVERSIDAD DEL PACIFICO

CENTRO DE INVESTIGACION

UNIVERSIDAD DEL PACIFICO
BIBLIOTECA

15907

Correspondencia:

Fernando González Vigil
Editor - "Cuadernos"
Centro de Investigación
Universidad del Pacífico/Ap. 4683
Av. Salaverry 2020
LIMA (11) - PERU
Teléf. 71-2277

I N D I C E

		Página
I	Introducción	3
II	El Período Mercantilista (1500 - 1750)	4
	1. Descripción y análisis del Modelo Colonial	4
	2. Formulación Matemática del Modelo Colonial	8
III	El Período Liberal (1750 - 1950)	
	1. Descripción y Análisis del Modelo Liberal (o de Crecimiento hacia afuera)	30
	2. Formulación Matemática del Modelo Liberal	35
IV	Comentarios, Observaciones y Limitaciones	47
ANEXO		
I	Un intento de Dinamizar el Modelo Colonial	49

INTRODUCCION. -

El presente trabajo pretende formular en términos matemáticos el Modelo de Osvaldo Sunkel sobre el subdesarrollo Latinoamericano (*).

Los motivos que me llevaron a realizar esta tarea poco común fueron los de mostrar que con el lenguaje matemático (sin dejar de reconocer las limitaciones inherentes a éste) se pueden reproducir las ideas y conclusiones que elabora Sunkel a manera de ensayo.

El estudio presenta un resumen del modelo colonial y liberal tal como lo elaboran sus autores para luego presentar un intento de formulación matemática y presentación gráfica; para finalmente desarrollar algunos comentarios y limitaciones a los modelos. Asimismo se adjunta un anexo con un intento de dinamizar el modelo colonial.

Es importante mencionar que este trabajo está basado en un documento presentado por el autor hace algún tiempo durante su permanencia en Iowa State University. Para fines de esta publicación se ha reformado y ampliado en algunos aspectos el documento inicial. Finalmente deseo agradecer al Sr. Jorge Cortez C por los comentarios que hizo a este trabajo.

(*) Sunkel, Osvaldo; Paz, Pedro
El Subdesarrollo Latinoamericano y la Teoría del Desarrollo.
Siglo XXI editores S.A., México 1970

II

EL PERIODO MERCANTILISTA (1500 - 1750)

1. Descripción y Análisis del Modelo Colonial

a. La conquista (1500 - 1570)

Los españoles cuando llegaron a América encontraron 3 tipos de organización social y económica:

Una sociedad relativamente avanzada basada en un sistema agrícola de tipo excedentario que correspondía a los aztecas en México y a los Incas cuyo centro era el Perú y se extendía a la mayoría de las regiones andinas, en Sudamérica. Un segundo tipo de sociedad se caracterizaba por una organización tribal que vivía de acuerdo a una agricultura de subsistencia. Y finalmente un tercer tipo que se puede denominar el de áreas vacías que se caracterizaba por poseer abundantes recursos naturales y una población constituida por tribus nómades.

De acuerdo con estas condiciones iniciales se da el proceso de institucionalización. La política del conquistador era de producir, extraer y exportar a España la máxima cantidad posible de oro, plata y productos altamente deseados en los mercados europeos. La metrópoli organizó sus instituciones en sus colonias de manera tal que monopolizase la producción y el comercio de ésta. Más aún los principales centros coloniales se establecieron en México y Perú debido principalmente al relativo avance de sus culturas, la abundancia de metales preciosos y el potencial de estas áreas junto con las de agricultura de subsistencia para proveer de alimento y trabajo para la explotación minera y una restringida producción agrícola de tipo comercial.

b. El Apogeo del Mercantilismo Colonial (1570 - 1650)

En este acápite se formulará un modelo para describir el mercantilismo colonial. Para ello se deben identificar los actores de este modelo, éstos se han clasificado en dos grandes categorías:

El Dominante que estaba constituida por los conquistadores, tanto en el área rural como urbana. En la sub-categoría rural se puede distinguir los hacendados y los españoles a cargo de la explotación minera; la urbana estaba constituida por la burocracia colonial, los comerciantes, artesanos y los proveedores de servicios. La categoría dominada estaba formada por los indios y los mestizos.

En el Modelo Colonial se pueden distinguir tres tipos de economía que estaban determinados por las condiciones iniciales existentes. Estas eran el tipo colonial; el de subsistencia y las áreas vacías. El tipo colonial dependía directamente de la metrópoli en el contexto económico, político, militar y cultural. Los otros tipos estaban indirectamente relacionados con España por intermedio de la economía colonial. A manera de información convendría describir brevemente el papel de cada tipo de economía.

(i) Tipo Colonial: México y Perú

La minería y el tipo de agricultura excedentaria se hallaban concentrados en esta economía. Esta área generaba excedente, para ser transferidos a España.

(ii) Tipo de Subsistencia

Dependía de la economía de tipo colonial. (Ej. Centro América dependía de México y Chile, Ecuador y el Noreste de Argentina de Perú). En estas áreas se establecía un gobierno, la burocracia y un ejército. La agricultura que se desarrollaba era principalmente para mantener a dichas instituciones. El papel de esta área era el de proveer mano de obra a la economía de tipo colonial y producción agrícola secundariamente.

(iii) Áreas Vacías

Dependían del tipo de economía colonial (Ej. la región del Río de la Plata para el caso del Perú.) El papel que desempeñaban estas áreas era más de carácter estratégico y político ya que sólo se constituía una burocracia administrativa y un ejército

para evitar el contrabando y la conquista de otras metrópolis compe
tidoras.

Para visualizar mejor las relaciones mencionadas se refiere al lector a el diagrama 1 que muestra las relaciones de los sectores entre los distin
tos tipos de economías (flujos reales y monetarios).

El modelo colonial puede resumirse de acuerdo a los siguientes aspectos:

Económico:

Los dos sectores generadores de excedente eran la minería y la agricul-
tura. De acuerdo con la política mercantilista el Tro. era el dominante,
"La producción minera regula la monetización del sistema y, por consi-
guiente, el nivel de ingreso monetario, el volumen de las transacciones
comerciales, el monto de las recaudaciones tributarias, las transferencias
de metales preciosos a la metrópoli y el nivel de las importaciones. Ade-
más, se observa cómo las instituciones que regulan la propiedad, la pro-
ducción, la disponibilidad de mano de obra, el comercio y la distribu-
ción, conducen todas a que la mayor parte de la producción minera va-
ya a parar finalmente a España o Portugal."(*)

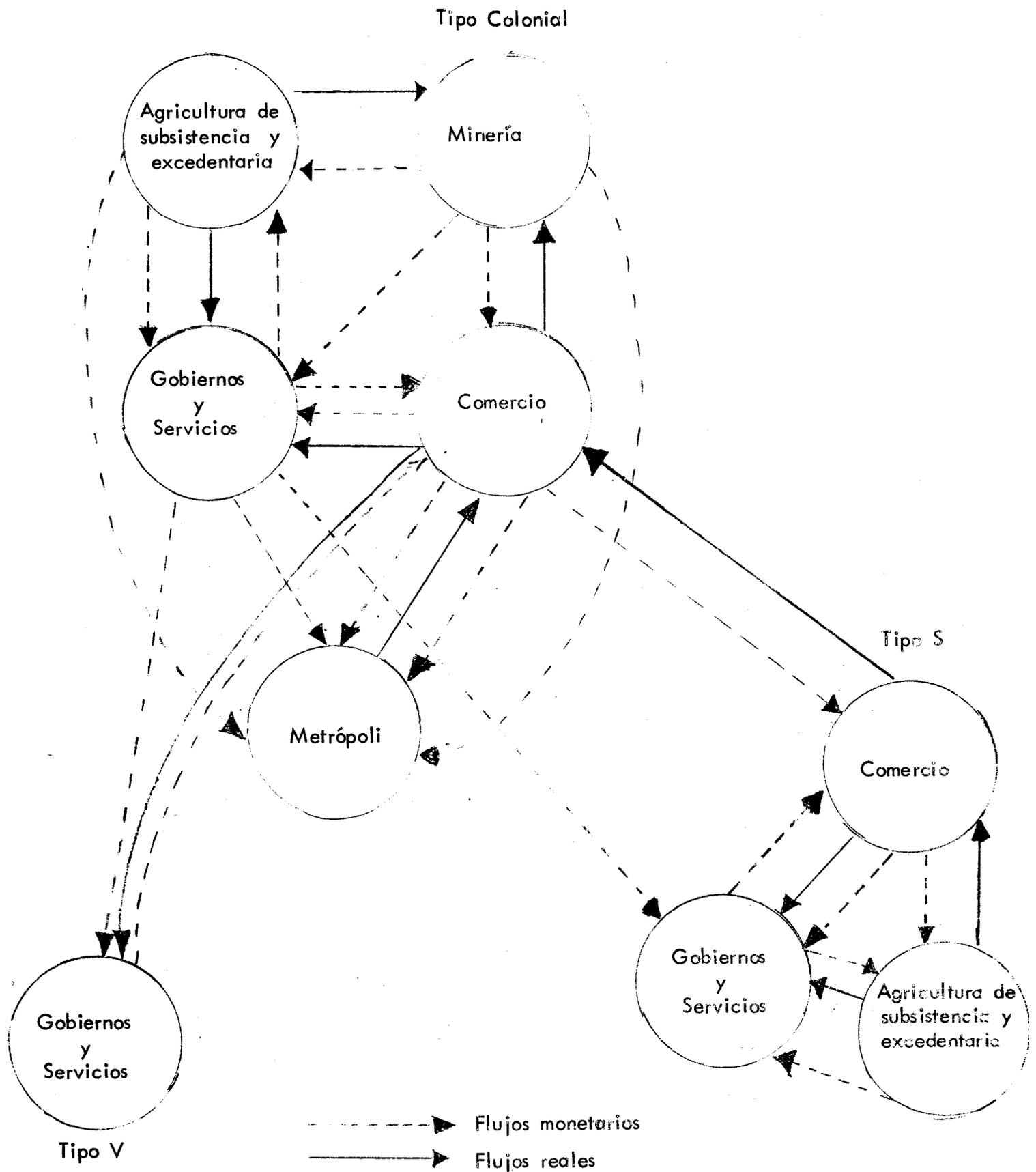
Más aún se le puede atribuir a este sector la gran inflación que ocurrió
en Europa debido a la excesiva oferta monetaria con relación a los bie
nes producidos, pero esto no es nuestra principal preocupación.

Los límites del proceso acumulativo no estaban dados por factores exter
nos debido a que la absorción de oro y plata por parte de España era ca
si ilimitada. Las restricciones eran principalmente internas: las existencias
de recursos minerales y mano de obra, esta última dependía de la capaci

(*) Sunkel O., Paz, P.
P. 284.

DIAGRAMA N° 1

FLUJOS REALES Y MONETARIOS ENTRE CENTRO Y PERIFERIA COLONIAL



Fuente: Osvaldo Sunkel y Pedro Paz, El subdesarrollo Latinoamericano y la Teoría del Desarrollo (México, 1970 - Ed. Siglo XXI). Pág. 283.

dad que tenía el sector agrícola de liberar fuerza laboral y esto a su vez dependía de la productividad del campesino.

Social:

Se caracterizó por una desigualdad extrema en la distribución del ingreso. Respecto al prestigio y poder. También existió un proceso de discriminación en contra de los mestizos, indios y negros por parte de los blancos (tanto españoles como criollos).

Político:

Se dio un extremo centralismo y una burocracia caracterizada por una gran rigidez, judicial y administrativa.

Demográfico:

La gran expansión de la demanda de mano de obra llevó a una explotación máxima de este recurso productivo, causando una disminución en términos absolutos de la fuerza laboral que no pudo ser sustituida enteramente por la importación de esclavos.

c) Crisis en el Modelo Colonial (1650 - 1750)

Las dos causas principales de la crisis en el modelo colonial fueron el agotamiento de los recursos minerales (principalmente en el Perú), debido a que el tipo de explotación se realizaba de acuerdo a una tecnología de excavación poco profunda y la escasez de mano de obra debido a la disminución en términos absolutos del nivel de población.

Es interesante notar que la crisis se sintió principalmente en los centros coloniales en donde se produjo un proceso de estancamiento. Mientras que en las economías de subsistencias y las áreas vacías si bien fueron afectadas por la crisis, el impacto de ésta fue reducido debido al tipo de actividad que desempeñaban. Más aún a partir de entonces dichas áreas crecen a tasas mayores que las economías coloniales.

Dado un breve resumen de las características del modelo colonial se desarrollará un modelo matemático simple y de tipo descriptivo cuyo propósito será el de capturar las relaciones esenciales del modelo descrito.

UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
BIBLIOTECA

2. UNA FORMULACION MATEMATICA DEL 'MODELO COLONIAL' :

a) Supuestos Explícitos

Los supuestos explícitos en la formulación matemática del "Modelo Colonial" se resumen en los siguientes

- (i) No se da la acumulación de capital (sólo existe inversión de reposición)
- (ii) Dos sectores generadores de excedentes: el sector Minero y el agrícola cuyo objetivo es la maximización de sus respectivos excedentes.
- (iii) El sector minero es el predominante i.e se da una mayor prioridad a la maximización del excedente en este sector que en el agrícola.
- (iv) La tecnología se asume constante a lo largo del análisis.
- (v) Es un análisis de corto plazo en el que se considera a la fuerza laboral como el único factor variable.

b) Formulación Matemática:

Primera Parte

Sector I : Minería

$$(1) \quad Y_1 = Y_1(L_1, K_1, T_1, N_1) \quad \text{donde} \quad \frac{\delta Y_1}{\delta(L_1; K_1; T_1; N_1)} > 0; \quad \frac{\delta^2 Y_1}{\delta(L_1; K_1; T_1; N_1)^2} < 0$$

$$(2) \quad R_1 = Y_1 - W_1$$

$$(3) \quad W_1 = \bar{W}_1 \cdot L_1$$

Sector II : Agrícola (no incluye el sector agrícola de subsistencia)

$$(1) \quad Y_2 = Y_2(L_2, K_2, T_2, N_2) \quad \text{donde} \quad \frac{\delta Y_2}{\delta(L_2; K_2; T_2; N_2)} > 0; \quad \frac{\delta^2 Y_2}{\delta(L_2; K_2; T_2; N_2)^2} < 0$$

$$(2) \quad L_2 = RP - L_1 \quad : \quad (0 < k < J)$$

$$(3) \quad R_2 = Y_2 - W_2$$

$$(4) \quad W_2 = \bar{W}_2 * L_2$$

Relaciones de Consistencia

$$(1) \quad \frac{L_1}{L_2} \leq m$$

$$(2) \quad \frac{R_2}{W_1} > n$$

Relaciones Demográficas

$$(1) \quad L = kP$$

$$(2) \quad L = L_1 + L_2$$

$$(3) \quad P = P_s + L$$

Variables exógenas: K_i, T_i, N_i, P, P_s (i = 1,2)

Variables endógenas: Y_i, R_i, W_i, L_i (i = 1,2)

Parámetros: \bar{W}_i, k, m, n (i = 1,2)

Segunda Parte

Ecuaciones de definición

$$(1) \quad Y = Y_1 + Y_2$$

$$(2) \quad Y = C + G + R_m + X^I + I^R - M$$

$$(3) \quad C = C_S + C_E$$

$$(4) \quad C_S = W_1 + W_2$$

Ecuaciones de comportamiento

$$(1) \quad R_m = t_1 R_1 + t_2 R_2 + t_3 G + t_4 X + t_5 M; \quad t_{1,2,\dots,5} < 1$$

$$(2) \quad G = g_1 R_1 + g_2 R_2; \quad g_1, g_2 < 1$$

$$(3) \quad C_E = C_1 (1 - t_1 - g_1) R_1 + C_2 (1 - t_2 - g_2) R_2; \quad C_i < 1$$

$$(4) \quad M = m_1 (1 - t_1 - g_1) R_1 + m_2 (1 - t_2 - g_2) R_2; \quad m_i < 1$$

$$(5) \quad X^1 = (1 - t_4) X$$

Variables exógenas: X, I^R, X^1

Variables endógenas: $R_m, G, C_E, M, Y, C, C_S$

Parámetros: $T_i - (i = 1, 2, 3, \dots, 5)$

$g_i, C_i, m_i \quad (i = 1, 2)$

Lista de símbolos y variables

Parte I : Variables

Y_1 = Valor de la producción en el sector minero

Y_2 = Valor de la producción en el sector agrícola

L_i = Fuerza laboral utilizada en el sector 'i' ($i = 1, 2$)

K_i = Capital utilizado en el sector 'i' ($i = 1, 2$)

N_i = Recursos Naturales utilizados en el sector 'i' ($i = 1, 2$)

T_i = Tecnología utilizada en el sector 'i' ($i = 1, 2$)

R_i = Renta o excedente generado en el sector 'i' ($i = 1, 2$)

- W_i = Monto total de salarios que recibe el sector 'i'
 P = Población
 L = Fuerza Laboral
 P_S = Población en el sector de subsistencia

Parte I : Parámetros

- \overline{W}_i = Salarios de subsistencia en el sector i
 k = Proporción de la población abosribida por la fuerza laboral
 ($0 < k < 1$) *!!HORROR!!*
 m = Número de trabajadores en el sector minero que pueden ser mantenidos por el excedente producido por un trabajador agrícola (relación técnica).
 n = Proporción entre el excedente en el sector agrícola y los salarios en el sector minero; es una relación de consistencia que indica si la cantidad de alimentos disponibles para el sector minero es compatible con los salarios de los trabajadores en ese sector (Nota: R_2 y W_i están medidos en unidades monetarias).

Parte II : Variables

- Y = Valor total de la Producción.
 C = Consumo total
 C_S = Consumo de las clases a nivel de subsistencia (en los sectores 1 y 2)
 C_E = Consumo de las clases que viven de los excedentes
 G = Gastos del gobierno (referidos al gobierno del centro colonial, áreas de subsistencias y áreas vacías).
 I^R = Inversión de Reposición
 X^I = Exportaciones netas (después de impuestos)
 X = Exportaciones brutas
 M = Importaciones
 R_M = Remesas a la Metrópoli

Parte II : Parámetros

- C_i = Propensión marginal a consumir del sector 'i'
 m_i = Propensión marginal a importar del sector 'i'
 t_i = Tasas impositivas ($i = 1, 2, \dots, 5$)
 g_i = La proporción del excedente de cada sector expropiada por el gobierno para gastarse por este.

c) Comentarios acerca de algunas ecuaciones y relaciones.-

La primera parte del modelo ha sido construida de acuerdo al esquema Neoclásico. La mayoría de las ecuaciones no necesitan mayor explicación pero es conveniente analizar las siguientes relaciones:

$L_2 = k P = L_1$, esta relación implica que la cantidad de mano de obra empleada en el sector agrícola es un residual del total de mano de obra disponible una vez que el sector minero ha satisfecho sus necesidades de mano de obra para maximizar su excedente.

$\frac{L_1}{L_2} \leq m$, para aclarar esta relación técnica nos referimos a un ejemplo específico. Supongamos que $\frac{L_1}{L_2} \leq 20$, esto significa a lo más 20 trabajadores del sector minero pueden ser sostenidos por el excedente agrícola producido por un trabajador del sector agrícola. Esta proporción está dada por consideración tecnológica, y no significa que la producción de un individuo en el sector agrícola equivale a la producción de 20 personas en el sector minero.

$\frac{R_2}{W_1} \geq n$, esta relación se considera como una relación de consistencia i. e., la razón de los valores del excedente generado en el sector agrícola debe ser consistente con el monto total de salarios del sector minero ya que consideramos que este último sector se alimenta del agrícola vía la utilización del monto de salarios.

Es importante señalar que si bien nada se ha dicho de la relación entre \bar{W}_1 y \bar{W}_2 puede ser razonable suponer que $\bar{W}_1 > \bar{W}_2$.

La segunda parte del modelo se presenta de acuerdo al enfoque Keynesiano. Las relaciones, ecuaciones e identidades se obtienen de el dia-

grama N° 1. Respecto a las ecuaciones de comportamiento es necesario señalar que los gastos del gobierno no son exógenos sino que asumimos que hay una relación entre éstos y los excedentes de los sectores 1 y 2 dado por los parámetros g_i ($i = 1, 2$). Asimismo para justificar el supuesto inicial de la no existencia de acumulación de capital se puede argüir que los altos valores de t_i que posiblemente se dieran (lo que significa mayores remesas a la Metrópoli), los C_i y m_i pueden ser los responsables de una inversión neta casi nula que se observó en la época de la colonia.

d) Trabajando con el Modelo

Nuestra tarea en la primera parte del modelo será la de maximizar los excedentes de ambos sectores con respecto a la fuerza laboral, considerando una situación de corto plazo i , e. $\bar{N}_i, \bar{K}_i, \bar{T}_i$ y tomando en cuenta la prioridad que tiene el sector minero frente al agrícola en cuanto a la maximización de su excedente.

$$R_1 = Y_1 - W_1$$

$$dR_1 = dY_1 - dW_1$$

$$dR_1 = \frac{\delta Y_1}{\delta L_1} \times dL_1 - \bar{W}_1 \cdot dL_1$$

$$\frac{dR_1}{dL_1} = \frac{\delta Y_1}{\delta L_1} - \bar{W}_1$$

Para un máximo las condiciones de primer orden son:

$$\frac{dR_1}{dL_1} = 0; \text{ i.e. } \frac{\delta Y_1}{\delta L_1} - \bar{w}_1 = 0; \quad \boxed{\frac{\delta Y_1}{\delta L_1} = \bar{W}_1}$$

Las condiciones de segundo orden son:

$$\frac{d^2 R_1}{dL_1^2} < 0 \quad \text{pero} \quad \frac{d^2 R_1}{dL_1^2} = \frac{\delta^2 Y_1}{\delta L_1^2}$$

Y de acuerdo a los supuestos iniciales $\frac{\delta^2 Y_1}{\delta L_1^2} < 0$ ∴ la condición de segundo orden se cumple.

El máximo relativo de R_2 sujeto a la restricción de $kP - L_1 - L_2 = 0$ está dado en caso que dicha restricción nos dé un valor de L_2 menor que el requerido para obtener el máximo absoluto de R_2 .

Si el valor de L_2 es mayor que el requerido para maximizar; la restricción $kP - L_1 - L_2 = 0$ pierde su condición restrictiva y se maximiza libremente R_2 respecto a L_2 .

Para que los valores de maximización sean factibles es necesario que cumplan asimismo las relaciones de consistencia de la primera parte

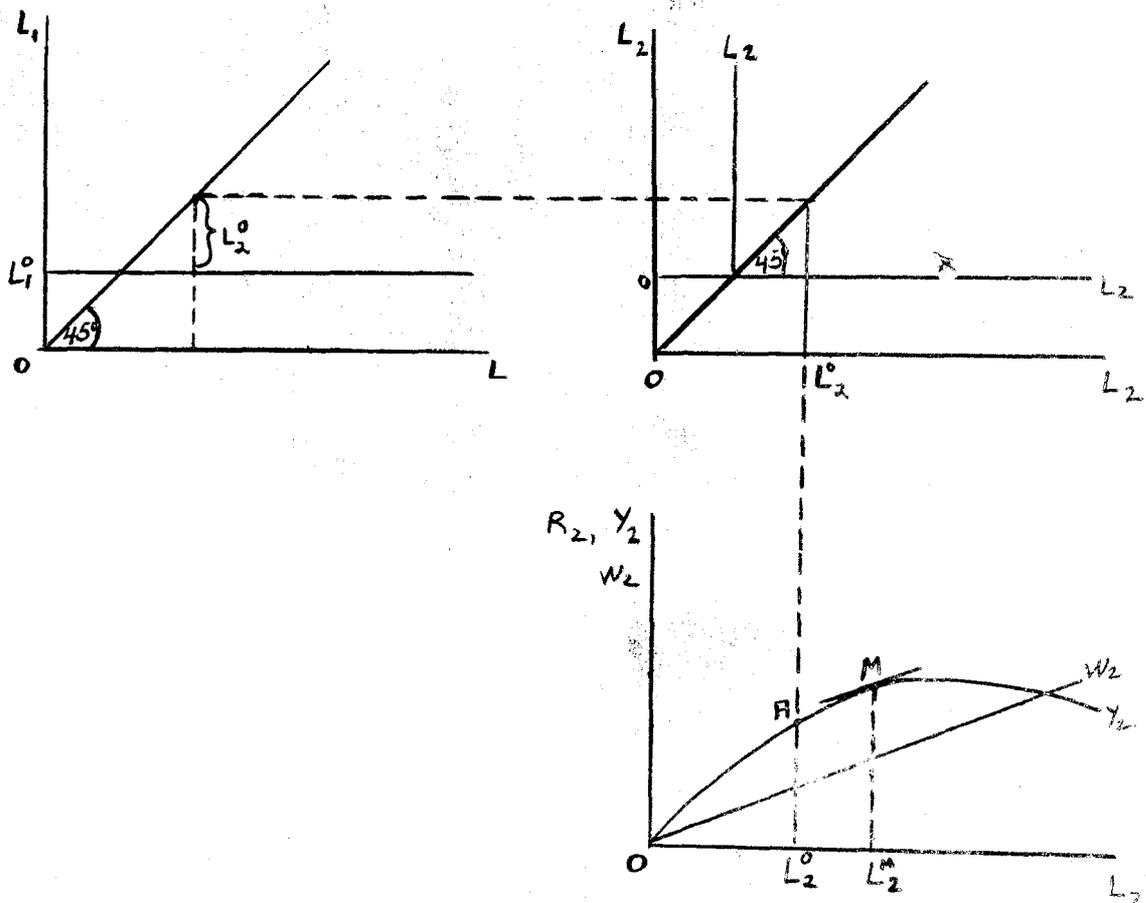
$$\text{i.e. } \frac{L_1}{L_2} \leq m, \quad \frac{R_2}{W_2} \geq n.$$

La maximización de R_2 con respecto a L_2 es indeterminado debido a que

λ es un multiplicador de Lagrange y en vista que el valor máximo de R_2 está determinado cuando L_2 se conoce a través de la ecuación $L_2 = kP - L_1$. El máximo relativo de R_2 coincide con el máximo -máximum si el valor de L_2 dado coincide con el valor de L_2 que iguala

$$\frac{\delta Y_2}{\delta L_2} = \bar{W}_2$$

Para una aclaración de este punto podemos desarrollar un gráfico para mostrar lo expresado anteriormente.



Dado L_1 (exógenamente determinado por la población) y L_2 (endógenamente determinado para maximizar Y_1) se determina L_2 como un residual; sustituyendo este valor en la función de producción y en la ecuación $W_2 = \bar{W}_2$. L_2 se obtiene R_2 que constituirá un máximo relativo de R_2 para un nivel dado de L_2 e.g. el punto A. Si $\frac{\delta Y_2}{\delta L_2} = \bar{W}_2$

(como en el punto M) el máximo relativo para ese L_2^M coincidirá con el máximo absoluto para esa función. Un aspecto importante a establecer es el de la aparente existencia de conflicto entre los dos sectores en el proceso de maximización de sus excedentes; esto no significa que no puedan surgir inconsistencias en dicho proceso.

La segunda parte del modelo será menos relevante para el propósito de este trabajo pero hallaremos la forma reducida:

$$Y = C + G + R_M + X^I + \bar{I}^R - M$$

$$Y = C_S + C_1 (1 - t_1 - g_1) R_1 + C_2 (1 - t_2 - g_2) R_2 + g_1 R_1 + g_2 R_2 + t_1 R_1 + t_2 R_2 + t_3 [g_1 R_1 + g_2 R_2] + t_4 X + t_5 [m_1 (1 - t_1 - g_1) R_1 + m_2 (1 - t_2 - g_2) R_2] + X^I - [m_1 (1 - t_1 - g_1) R_1 + m_2 (1 - t_2 - g_2) R_2] + \bar{I}^R$$

$$Y = [C_S + X + \bar{I}^R] + \{C_1 (1 - t_1 - g_1) + g_1 + t_1 + t_3 g_1 + t_5 [m_1 (1 - t_1 - g_1)] - [m_1 (1 - t_1 - g_1)]\} R_1 + \{C_2 (1 - t_2 - g_2) + g_2 + t_2 + t_3 g_2 + t_5 [m_2 (1 - t_2 - g_2)] - m_2 (1 - t_2 - g_2)\} R_2$$

Sea:

$$\alpha = \{C_1 (1 - t_1 - g_1) + g_1 + t_1 + t_3 g_1 + t_5 [m_1 (1 - t_1 - g_1)] - m_1 (1 - t_1 - g_1)\}$$

$$\beta = \{C_2 (1 - t_2 - g_2) + g_2 + t_2 + t_3 g_2 + t_5 [m_2 (1 - t_2 - g_2)] - m_2 (1 - t_2 - g_2)\}$$

$$Y = [C_S + X + \bar{I}^R] + \alpha R_1 + \beta R_2$$

$$\mu = (Y - C_S - \bar{I}^R) = X + \alpha R_1 + \beta R_2$$

Donde:

$$\frac{\partial \mu}{\partial R_1} = \alpha \quad \text{i.e.; } \Delta \mu = \alpha \Delta R_1$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial R_2} = \beta \quad \text{i.e.; } \Delta \mu = \beta \Delta R_2$$

Como podemos observar en la forma reducida hemos expresado el valor total de la producción como una función de los excedentes de ambos sectores. Asimismo podemos establecer que los valores de los multiplicadores α y β deben ser menores que uno ya que si ambos fueran iguales a 1 entonces $X = I^R = 0$

$$\therefore 0 < \alpha < 1 \text{ y } 0 < \beta < 1$$

Pero $\alpha + \beta = 1$ mas no ambos, con la excepción ya mencionada. El apogeo del mercantilismo colonial puede ser explicado en el modelo considerando las siguientes características: la población en términos absolutos estaba creciendo ($\frac{dP}{dt} > 0$), los multiplicadores son constantes en este período (α, β) y la tecnología, el capital y los recursos naturales no variaran mucho y pueden considerarse hasta cierto punto constantes (i. e. $\bar{T}, \bar{K}, \bar{N}$)

La tendencia a lo largo del tiempo será de maximizar el excedente prioritariamente en el sector minero y luego maximizar el excedente en el sector agrícola ya que el parámetro k puede variar para absorber de P de tal manera de maximizar el excedente en ambos sectores. Si $P = P_S + L$ podemos asumir que dado el tiempo suficiente el parámetro k se puede acomodar para proveer la mano de obra para maximizar los excedentes de ambos sectores.

Para analizar el período de crisis debemos considerar dos factores importantes: el agotamiento de los recursos minerales ($\frac{dN_1}{dt} < 0$) y la

disminución del nivel absoluto de la población ($\frac{dP}{dt} < 0$)

Representada simbólicamente la crisis puede ser descrita de la siguiente manera:

$$dR_1 = MPP_L^{(*)} dL_1 - \bar{W}_1 dL_1$$

luego la $MPP_L > 0$ y creciente a medida que L_1 decrece.

$$dL_1 < 0$$

$$\bar{W}_1 > 0 \text{ y constante}$$

$$\therefore dR_1 \leq 0$$

$$\text{Si: } \frac{dN_1}{dt} \leq 0$$

luego la $MPP_L > 0$ pero decreciente a medida que N_1 decrece.

$W_1 \geq 0$ y constante.

dL_1 se considera constante (para separar los dos efectos, i.e. el agotamiento de los recursos naturales y la población en el análisis).

$$\therefore dR_1 \leq 0$$

Habiendo analizado los efectos individuales podemos desarrollar el efecto combinado.

$$dR_1 = MPP_L \cdot dL_1 - \bar{W}_1 \cdot dL_1 = (MPP_L - \bar{W}_1) dL_1$$

$$\text{Si } \frac{dP}{dt} \leq 0 \text{ y } \frac{dN_1}{dt} \leq 0$$

$$\text{luego: } MPP_L \geq 0 \text{ pero decreciente i.e. } \frac{dMPP_L}{dt} \leq 0$$

$$dL_1 \leq 0$$

$\bar{W}_1 > 0$ pero constante,

Lo anterior significa que el efecto combinado de $\frac{dP}{dt} \leq 0$ y $\frac{dN_1}{dt} \leq 0$

aceleraron la crisis en este sector.

Un pregunta interesante puede surgir referida a las consecuencias de esta crisis en el sector agrícola?

Si $\frac{dP}{dt} \leq 0$ luego $dL \leq 0$ y se puede llegar en el tiempo a una situación tal en que $dL_2 < 0$

$$\text{ción tal en que } dL_2 < 0$$

$$dR_2 = (MPP_{L_2} - \bar{W}_2) dL_2$$

(*) MPP_L = Productividad física marginal de la fuerza laboral.

luego $MPP_{L_2} \geq 0$, se incrementará

$\bar{W}_2 > 0$ es constante

$$dL_2 < 0$$

$$\therefore dR_2 < 0$$

Pero la crisis en el sector agrícola no será tan intensa como en el sector minero debido a que un efecto combinado no se ha generado en este sector. Si aplicamos los resultados obtenidos en la parte II del modelo podemos concluir que $d\mu$ tenderá a decrecer a lo largo de este período crítico debido a que dR_1 y $dR_2 < 0$ i.e.:

$$\Delta \mu = \alpha \Delta R_1$$

$$\Delta \mu = \beta \Delta R_2$$

ya que $\Delta R_1 < 0$ y $\Delta R_2 < 0$ y $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$

$$\therefore \Delta \mu < 0$$

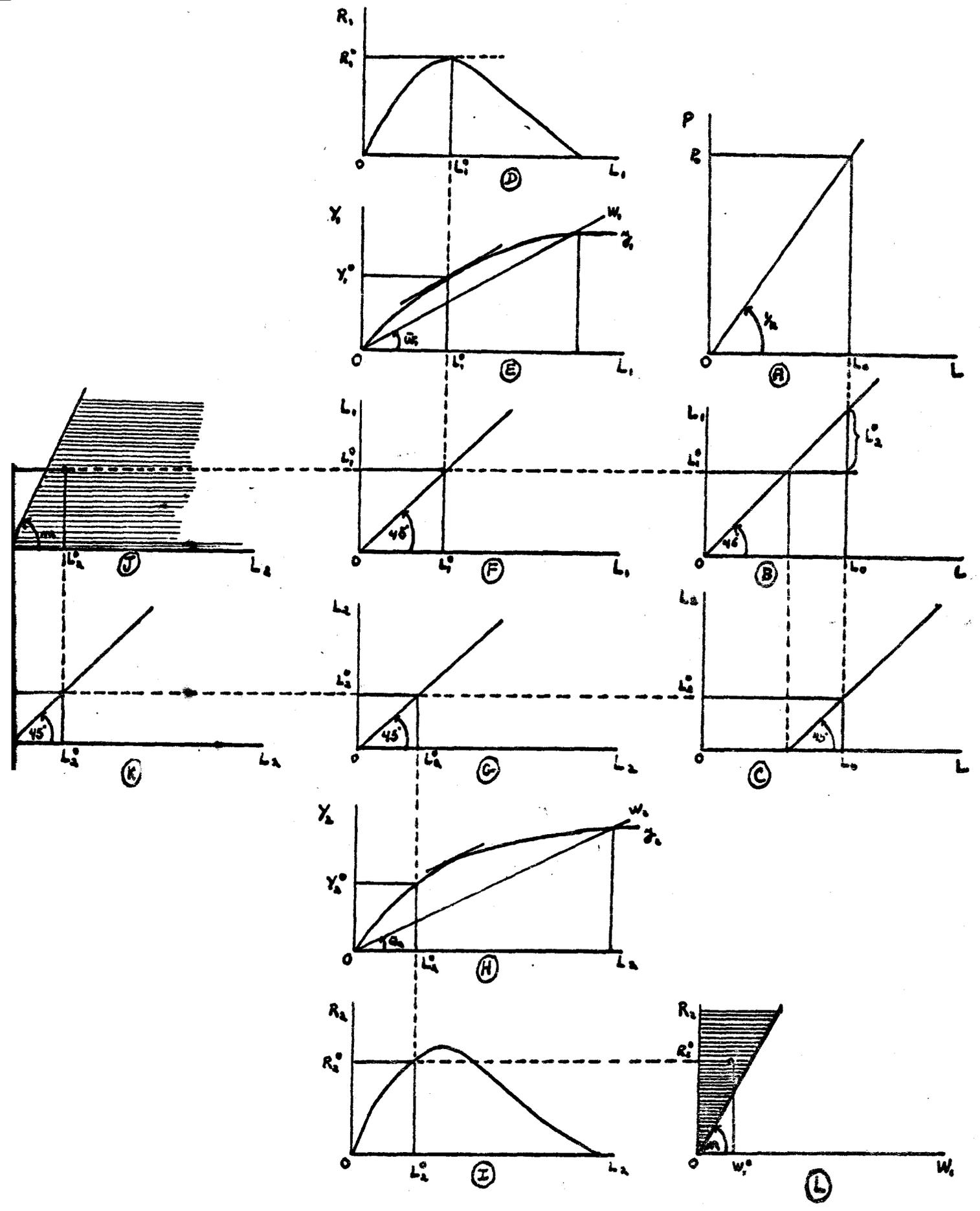
El producto neto que puede ser expropiado principalmente por el Centro comienza a disminuir. De esta manera podemos visualizar la crisis del modelo colonial y como se exportó esta crisis hacia España.

Para clarificar lo que se ha desarrollado se hará una presentación gráfica del modelo.

- e) Representación Gráfica del Modelo Colonial (secuencia de etapas explicativas)
- i) El modelo colonial: una solución factible de maximizar (ver fig. 1)
- 1) Nuestro punto de partida es el gráfico A, que relaciona P y L por medio del parámetro k ; asumiendo un k dado y un nivel de $P = P_0$ determinamos el nivel correspondiente de $L = L_0$
 - 2) El gráfico E determina la cantidad de L_1 necesaria para maximizar R_1 ; digamos L_1^0 . Lo mismo se representa en el gráfico D.
 - 3) El gráfico F es un gráfico auxiliar ($L_1 = L_1$)

- 4) El gráfico B chequea la consistencia entre L_1 y L para determinar también $L_2 = L_2^0$. Este chequeo de consistencia es débil en el sentido de que estamos determinando si L es compatible con L_1 pero no si L_2 es compatible con L_1 .
- 5) El gráfico C muestra una relación entre L_2 y L (obtenida del gráfico B) digamos que L_2^0 corresponde a un nivel de L_0 .
- 6) El gráfico G es un gráfico auxiliar ($L_2 = L_2$)
- 7) El gráfico H determina el valor de Y_2 y W_2 dado el valor de L_2 ; para L_2^0 corresponde Y_2^0 y W_2^0 obteniendo también un valor de R_2^0 (un máximo relativo dado el valor de L_2^0).
- 8) El gráfico I determina el valor de R_2 (i.e. R_2^0) dado el valor de L_2 (i.e. L_2^0)
- 9) El gráfico L chequea la consistencia de los valores de las variables en un momento dado. Si la razón $\frac{R_2}{W_1}$ obtenida en el modelo cae en el área sombreada los valores actuales del modelo son factibles
- 10) El gráfico K es un gráfico auxiliar ($L_2 = L_2$)
- 11) El gráfico J chequea la consistencia entre las cantidades L_1 y L_2 . Si la razón entre estas cantidades cae en el área sombreada los valores actuales del modelo son factibles como solución de maximización.

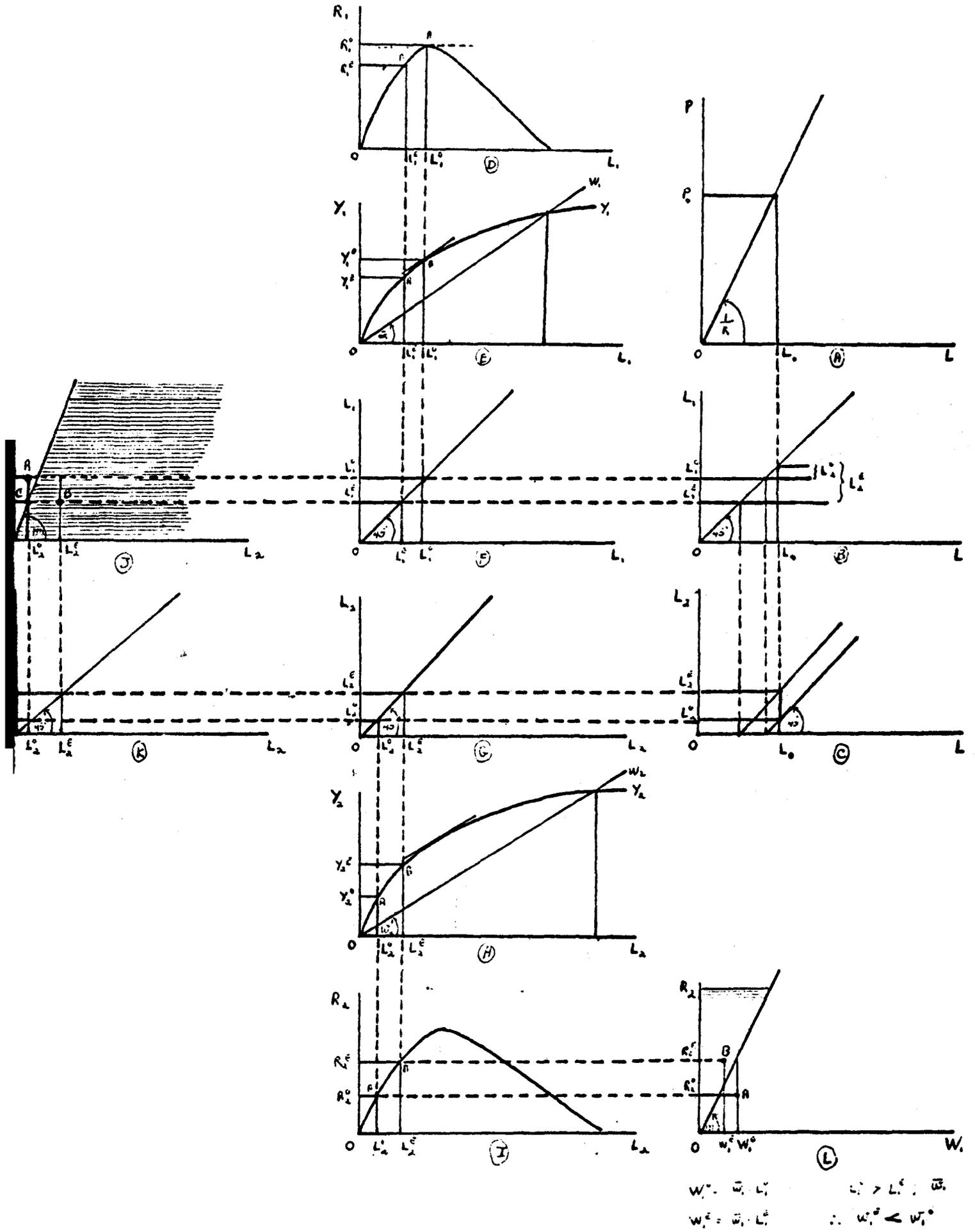
Figura N° 1 El Modelo Colonial: Una Solución Factible de Maximización



ii) El Modelo Colonial: Una solución factible no óptima (ver Figura N° 2)

- 1) Dado P_0 y k el gráfico A determina el valor de L_0
- 2) El gráfico D y E determinan el nivel deseado de L_1 (i.e. L_1^0) para maximizar R_1
- 3) El gráfico F es un gráfico auxiliar ($L_1 = L_1^0$)
- 4) El gráfico B chequea la consistencia entre L y L_1 y a su vez determina L_2^0
- 5) El gráfico C relaciona L_0 con L_2^0
- 6) El gráfico G es un gráfico auxiliar ($L_2 = L_2^0$)
- 7) El gráfico H determina el valor de Y_2^0 y W_2^0 una vez obtenido el valor de L_2^0
- 8) El valor de R_2^0 se obtiene en el gráfico I una vez conocido el valor de L_2^0 (Punto A)
- 9) La consistencia entre R_2^0 y W_2^0 se observa en el gráfico L (debido a que el punto A no cae en el área sombreada) *
- 10) El gráfico L es un gráfico auxiliar ($L_2 = L_2^0$)
- 11) El gráfico J muestra la inconsistencia entre L_1 y L_2 (debido a que el punto A no cae en el área sombreada).

* Nota: Es razonable asumir que la inconsistencia en el gráfico J implica una inconsistencia en el gráfico L pero lo contrario no es necesariamente cierto.



Hasta el momento los valores dados por el modelo no constituyen una solución factible debido a que estos no son compatibles con nuestras relaciones de consistencia. Pero esto no significa que el modelo carezca de solución, de hecho podemos obtener una solución no óptima mediante el siguiente procedimiento: Con los valores de L_2^o y L_1^o es posible ubicarse en el punto C. (que se halla en la línea cuya pendiente es m , gráfico J) esto determinará un nuevo valor de L_1^E compatible con L_2^o . Dicho valor de L_1^E determina Y_1^E y R_1^E (una solución no óptima).

La diferencia $(L_1^o - L_1^E)$ puede pensarse que será absorbida por la fuerza laboral en el sector 2, i.e., L_2 se incrementará en $(L_2^E - L_2^o)$, esta solución incrementaría Y_2 y R_2 a los niveles de Y_2^E y R_2^E . Finalmente chequeando nuestra relación de consistencia vemos que los nuevos valores son compatibles con dichas relaciones (ya que el punto B cae en el área sombreada en los gráficos J y L).

Pero ésta no es una solución no óptima factible final debido a que hemos asumido que el sector 1 tiene prioridad sobre el sector 2. Este primer sector presionará al segundo para liberar fuerza de trabajo hasta que alcance el punto B consistente con las pendientes m y n en los gráficos J y L. Tan pronto como el punto B en uno de los gráficos mencionados caiga en una de estas líneas el sector minero dejará de presionar al agrícola para recibir mano de obra. Haciendo esto el sector minero puede incrementar su valor de R , pero no logrará un valor máximo, y los nuevos valores factibles obtenidos serán: L_1 caerá entre L_1^E y L_1^o , L_2 entre L_2^E y L_2^o ; R_2 entre R_2^E y R_2^o y finalmente W_1 entre W_1^E y W_1^o .

iii) El Modelo Colonial: el caso de una explosión demográfica (ver fig. 3)

Ahora estamos preparados para trabajar con el modelo en un esquema estático comparativo. Consideremos la solución inicial de maximización factible que se presenta con los valores de las variables con supraíndice de cero, asumamos que la población se incrementa de P_0 a P_1 (digamos que se duplica), el sector I no se va a ver afectado por este fenómeno ya que ha logrado un valor máximo para R_1 . Por lo tanto el impacto será absorbido por el segundo sector que deberá utilizar todo el incremento de la fuerza laboral. En este caso particular el incremento de L_2 de L_2^0 a L_2^1 reducirá R_2 de R_2^0 a R_2^1 que es igual a cero. Como puede apreciarse el sector agrícola no producirá excedente alguno lo que implicará que los nuevos valores obtenidos no constituyen una solución factible ya que el punto B en el gráfico I no cae en la región factible, más aún cae en el eje horizontal.

Como podemos observar, no se puede obtener una solución factible bajo el supuesto de explosión demográfica i.e el modelo no puede contemplar aparentemente esta situación. Sin embargo es posible pensar en un escape a este problema y se basa en lo siguiente: Una explosión demográfica sólo se dará en el largo plazo y este problema puede contemplarse considerando que el parámetro k (cuyos límites son $0 \leq k \leq 1$) tenderá a aproximarse a cero a medida que la explosión demográfica se incrementa en magnitud.

Esto significa que ningún sector absorberá los incrementos de población una vez que han logrado alcanzar sus valores máximos para R_1 y R_2 (si es que esos valores son compatibles con las relaciones de consistencia). De tal manera que el sector (implícito al modelo) de agricultura de subsistencia absorberá la mayor parte de este incremento en la población (debemos ser concientes que este sector tiene un límite también).

(iv) El Modelo Colonial: Un caso de detrimento en el nivel de población

(Ver fig. 4)

Partiendo de una solución de maximización factible descrita por el supraíndice cero en las variables asumimos un detrimento en el nivel de población, ello trae como consecuencia:

- (1) P decrece de P_0 a P_1 (gráfico A)
 L decrece de L_0 a L_1 (gráfico B)
- (2) L_1^0 es la cantidad de fuerza laboral para maximizar R_1 (gráfico D y E)
- (3) Chequeamos L_1^0 en el eje vertical (gráfico F)
- (4) L_1^0 es consistente con L_1 (gráfico B)
- (5) L_2 decrece de L_2^0 a L_2^1 (gráfico C)
- (6) Chequeamos L_2^1 en el eje horizontal (gráfico G)
- (7) Determinamos Y_2^1 y W_2^1 que corresponden a L_2^1 (gráfico H)
- (8) Determinamos R_2^1 que corresponde a L_2^1 (gráfico I)
- (9) Chequeamos si $\frac{R_2^1}{L_2^1} \geq n$; en este caso no se cumple (Gráfico L)
- (10) Chequeamos $L_2^1 \frac{W_2^1}{W_1^0}$ en el eje horizontal
- (11) Chequeamos si $\frac{L_1^0}{L_2^1} \leq m$; en este caso no se cumple (Gráfico J)

No hemos logrado una solución factible, pero siguiendo el proceso descrito en el caso 2 podemos lograr una solución factible de no óptima. Lo importante de comprender en este caso es que: un detrimento en la población produce disminuciones en R_1 y R_2 .

Figura N° 3 El Modelo Colonial: El caso de Explosión Demográfica.

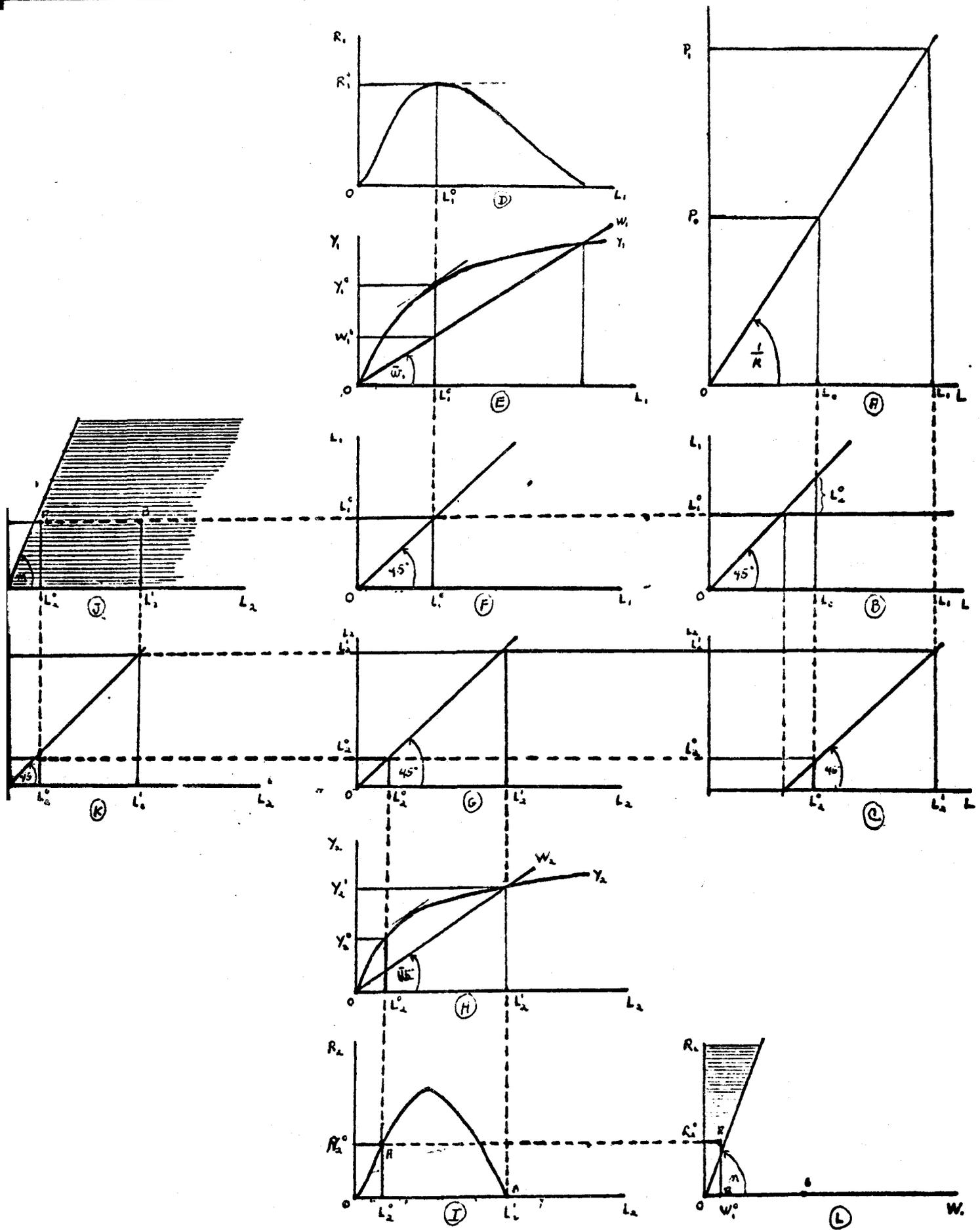
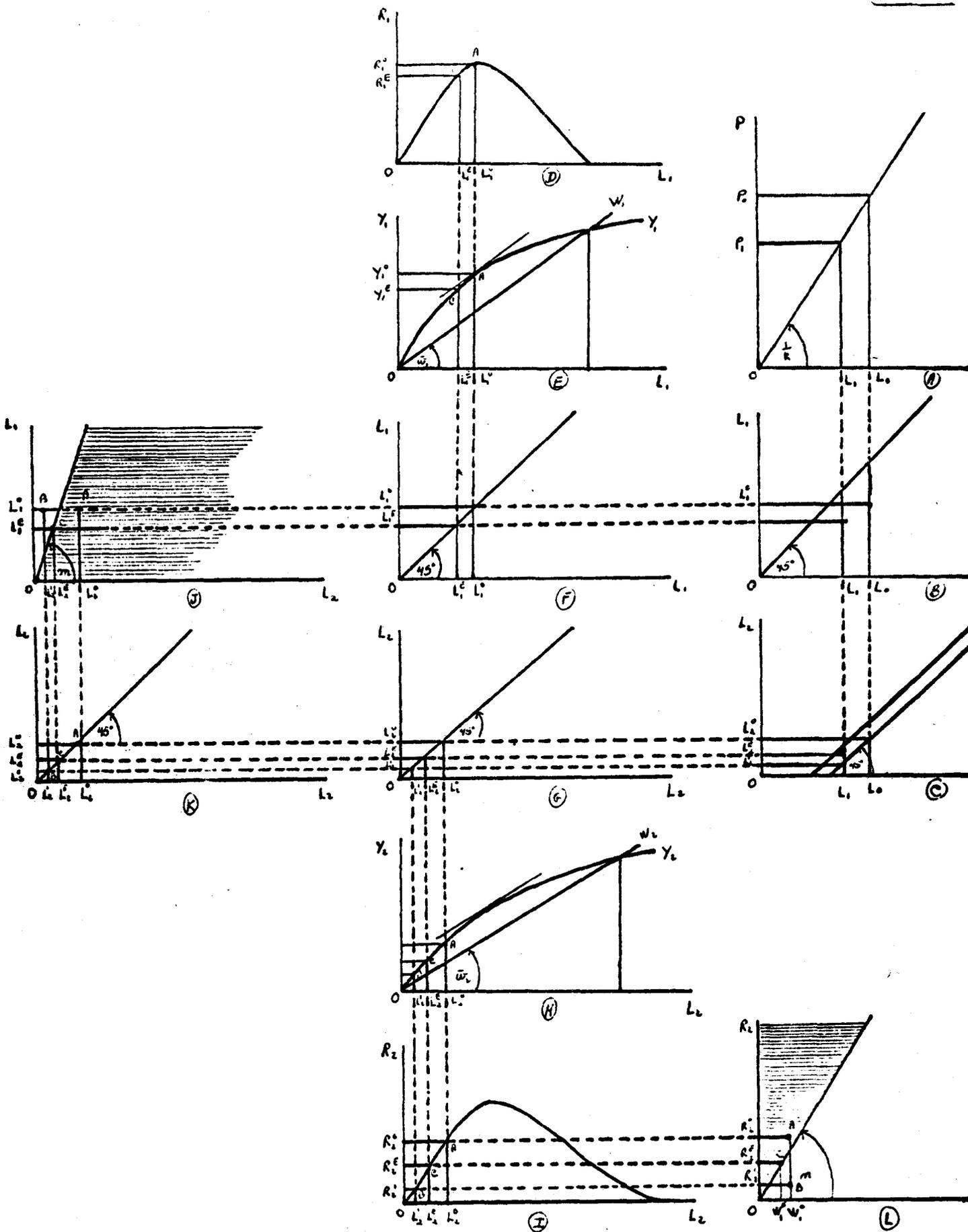


Figura N° 4 El Modelo Colonial: Un Caso de Detrimento en el Nivel de la Población.

LEVEL



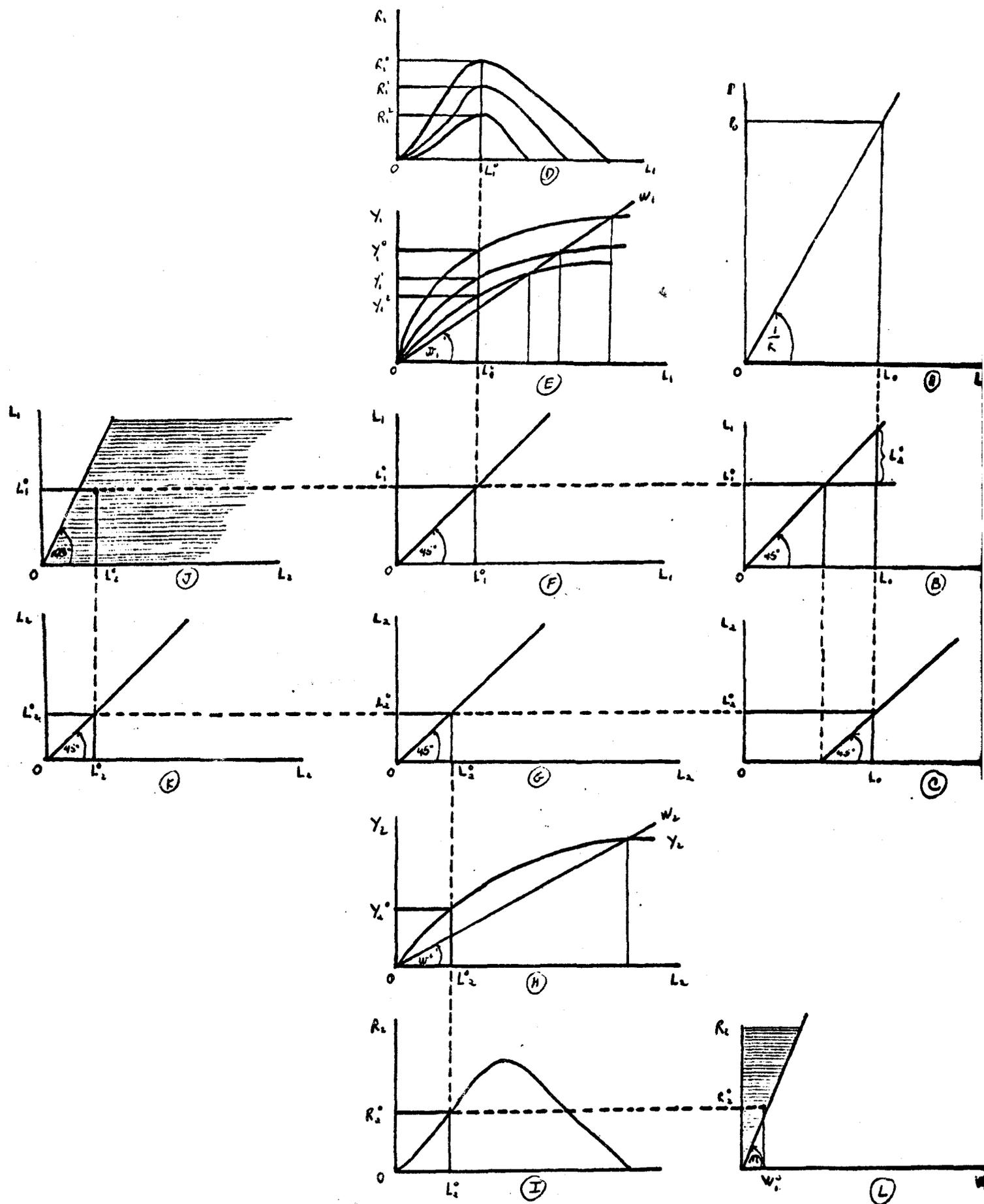
(v) El Modelo Colonial: Un caso de agotamiento en los recursos minerales

(Ver fig. 5)

Asumamos en aras de la simplificación que detrimentos en N_1 no van a afectar la forma de la función de producción sino mas bien la despiazarán hacia abajo; pero la MPP_L a cada nivel de L_1 será igual en cada curva Y_1 ~~será igual en cada curva Y_1~~ .

Partiendo de una situación inicial de solución factible de maximización (supraíndices de cero), los descensos en N_1 reducirán sucesivamente el valor máximo de R_1 . Si N_1 continúa disminuyendo, R_1 tenderá a cero. Si tal punto es alcanzado la actividad minera cesará y el sector inducirá a una situación de crisis en el modelo.

Figura 5. El Modelo Colonial : Un caso de agotamiento en los recursos minerales



PERIODO LIBERAL (1750 -1950)

Descripción y análisis del Modelo Liberal

Organización e Institucionalización de los Estados Nacionales (1750-1850)

Este subperíodo puede ser referido como transicional y su descripción puede concentrarse en dos aspectos principales: Político y Socioeconómico.

(i) Aspectos Políticos

- Guerras internas en Latino América entre la colonia principal (Perú) y las áreas periféricas. Estas últimas se independizaron antes de la Metrópoli (España) y este hecho les otorgó una ventaja relativa para el establecimiento de las relaciones con el nuevo centro (Gran Bretaña).
- Partidos Políticos: Los liberales que se hallaban influenciados por las recientes corrientes políticas en Europa y los Estados Unidos; representaban los intereses de los exportadores agrícolas y mineros que se encontraban comprometidos con el comercio y las finanzas internacionales. Los conservadores que a su vez trataban de mantener un sistema mercantilista colonial.
- Después de la independencia y de los diferentes estados nacionales surge una situación de anarquía que se superó más rápidamente en los países periféricos que en los centros coloniales.

(ii) Aspectos Socioeconómicos.

- Surge un nuevo centro, Gran Bretaña, con una nueva ideología i.e. el Liberalismo que proponía el libre comercio como una de sus políticas más importantes respecto a las relaciones con el resto del mundo.
- El impacto económico de Inglaterra fue distribuido en forma desigual entre los países latino americanos, beneficiándose más las áreas periféricas por las consideraciones de orden político expuestas.
- El surgimiento de nuevos grupos sociales como exportadores e importadores.
- Las colonias principales tales como Perú y México perdieron su importancia económica relativa: las áreas de subsistencia tales como Bolivia, Ecuador y Colombia cayeron en la anarquía y tendieron a un es

tancamiento relativo. Los economías del tipo 'plantación de subsistencia' tales como Brasil, Cuba, Venezuela, República Dominicana y Haití mantuvieron su status de productores de agricultura comercial y sus relaciones tradicionales. Sin embargo Chile (área de subsistencia), Argentina y Uruguay (áreas vacías) se beneficiaron grandemente de sus relaciones con el nuevo centro.

b) El Auge del Liberalismo (1870 -1914):

(i) El modelo de una economía de crecimiento hacia afuera

El sector relevante en el tiempo era el exportador que puede subdividirse en minero y agrícola comercial. Este sector jugó un papel clave en el nuevo modelo, su impacto en el resto de la economía puede ser relativamente reducido o por el contrario puede inducir la creación y desarrollo de nuevas actividades productivas, pero la consideración importante a plantearse es que el sector exportador es el determinante de las variables más relevantes en el sistema económico.

Características económicas del modelo:

- El nivel y la tasa de crecimiento del ingreso dependían grandemente en las fluctuaciones del corto plazo del mercado internacional del producto de exportación y en el largo plazo de la tendencia del mercado y las posibilidades del sector exportador con respecto a la expansión del producto.
- El sector exportador podía afectar el nivel de empleo.
- El sector exportador determinaba los ingresos del gobierno.
- El proceso de acumulación de capital dependía de la forma en que el sector exportador orientara su excedente. Las posibilidades en América Latina eran las siguientes: reinversión en el país, remesas al exterior, aumento en el consumo y en las importaciones o incremento en el ahorro.

- La creación de un sector doméstico industrial dependía en el grado de competitividad de la industria nacional y los productos de importación. Los factores que podían influir este grado de competitividad eran: los costos de transporte, las tarifas y el tipo de cambio. Con respecto a este último se puede mencionar que fue un instrumento útil para incrementar los ingresos de los exportadores si es que contaban con el suficiente poder político para inducir a sus respectivos gobiernos a una devaluación de la moneda nacional.
- Si el sector exportador era de tipo 'enclave' entonces deterioraba la distribución del ingreso; pero si este sector tenía una mayor interrelación con el resto del sistema el incremento en el ingreso nacional no era acompañado por un deterioro drástico en la distribución del ingreso.

Los límites al crecimiento de este modelo pueden resumirse en los siguientes:

Por el lado de la demanda:

El límite estaba dado por la capacidad de absorción de los mercados internacionales.

Por el lado de la oferta:

Mano de obra: En este modelo una escasez de la fuerza laboral no era tan crítica como en el modelo mercantilista ya que existían mayores posibilidades de importar mano de obra calificada y no calificada y hasta habilidades empresariales. Es pues importante enfatizar que la fuerza laboral no era la limitante más fuerte al modelo.

Recursos naturales: Aquí el problema es crucial ya que existen dos tipos de recursos (renovables y no renovables). La limitante que podía generar este factor es crítica pero sin embargo se dieron algunos elementos que pudieron contrarrestar la tendencia de agotamiento de los recursos naturales en el largo plazo tales como:

- El progreso tecnológico que podría contrarrestar la tendencia de agotamiento de recursos no renovables e incrementar la productividad de los renovables.
- El mantenimiento de una variedad de recursos naturales para ser exportados para la exportación en los diferentes puntos en el tiempo de acuerdo con las variaciones de la demanda del mercado mundial. Esto estaba determinado por la dotación inicial de recursos en los países.

Otras limitantes pueden señalarse pero la que si conviene mencionar es la disponibilidad limitada de alimentos que puede liberar el sector agrícola para mantener al sector exportador.

Para mayor aclaración respecto al modelo nos referiremos al diagrama N° 2 que muestra los flujos monetarios y reales entre los sectores en la periferia y entre esta y el centro.

c) Crisis del Liberalismo (1914-1950)

Durante y después de la Primera Guerra Mundial se dió un cambio en el centro de Gran Bretaña hacia los Estados Unidos de Norte América. La periferia se considerará que estaba constituida por los países latinoamericanos. De 1925 a 1929 la economía norteamericana experimentó un período de gran crecimiento económico causando un impacto positivo en los sectores exportadores de los diferentes países latinoamericanos causando en ellos una tendencia de sobreproducción, e incremento de stocks.

En 1929, como es bien conocido, se dió la Gran Depresión continuando hasta 1933. Ello quebró el sistema monetario internacional (Patrón Oro) y paralizó la movilidad de los recursos humanos. El impacto de la Gran Depresión puede entenderse mejor si consideramos las repercusiones en el Centro y los países periféricos:

(i) El Centro:

- Devaluación de las monedas principales (El Dólar y la Libra Esterlina).

- Desempleo y caída de los precios domésticos.
- Disminución en la demanda para la importación de productos primarios.
- Políticas proteccionistas y disminución sustancial de inversiones en el extranjero.

(ii) En los Países Periféricos:

- Deterioro de los términos de intercambio y reducción sustancial de las exportaciones.
- Desempleo.
- Reducción de la capacidad para importar.
- Disminución de las importaciones e incremento en los precios de los bienes manufacturados.

La crisis que se extendió del Centro a los países periféricos generó cam bios sustanciales en el modelo de crecimiento hacia afuera para algunos países, dependiendo del grado de integración y diversificación de estos.

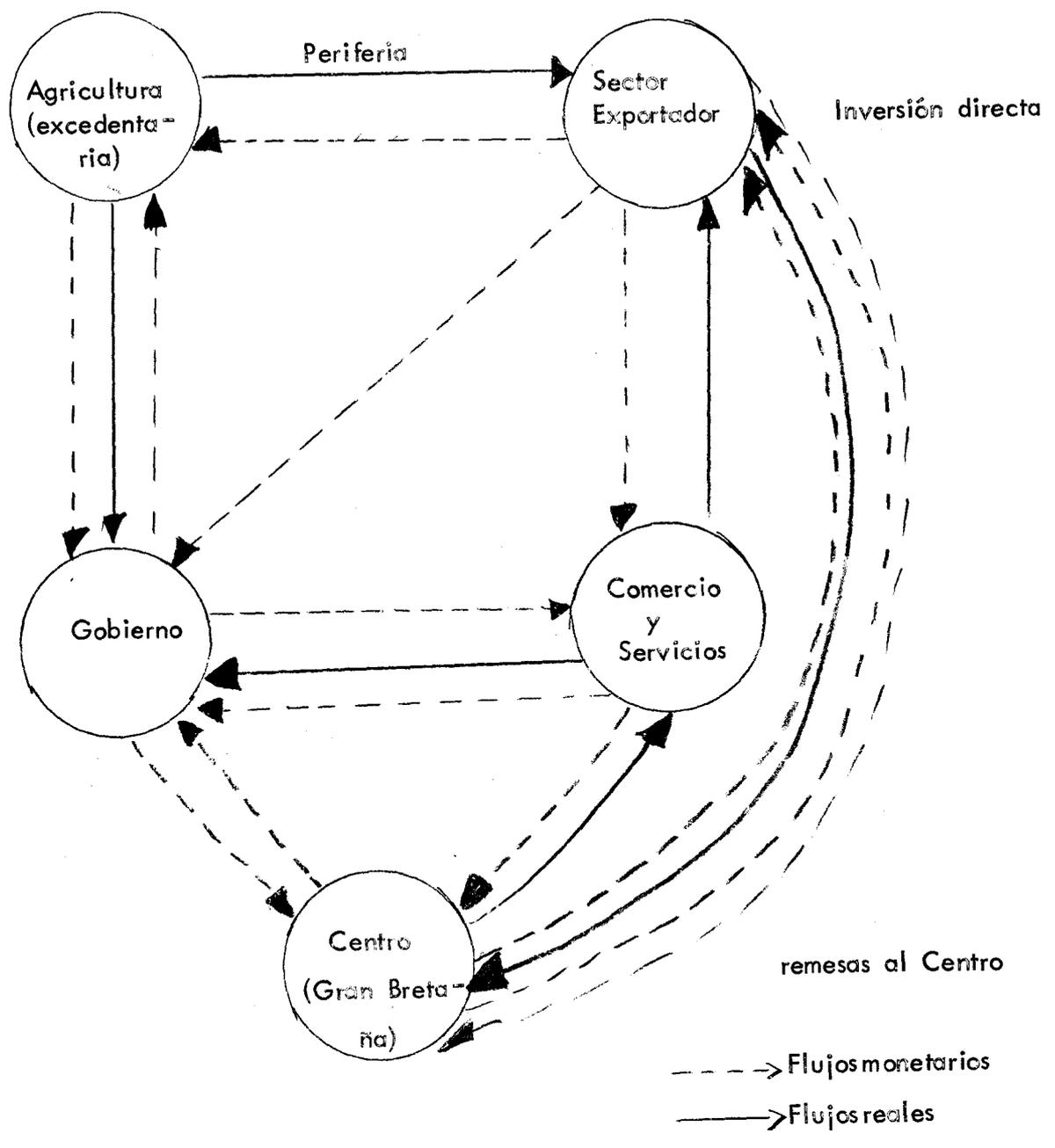
Los dos tipos de reacciones que se generaron se pueden resumir en los siguientes:

- Reajuste en el sistema económico interno y su relación con el Centro: Esta reacción se experimentó en los países cuyo sector exportador estaba relativamente integrado con el resto de la economía y que contribuyó a una mayor diversificación. Los países bajo estas circunstancias fueron: Argentina, Brasil, México y Uruguay.

El efecto conjunto de la crisis de 1930 y las características del sector exportador crearon una situación favorable para el nuevo proceso de indus-
trialización que se generaba que posteriormente tomaría el nombre de proceso de sustitución de importaciones. Mas aún las condiciones generadas durante la Segunda Guerra Mundial estimularon el desarrollo de este proceso:

- Ausencia de reajuste de la estructura económica interna y sus relaciones con el centro. Esta reacción fue peculiar de los países que desarollaron un sector exportador tipo enclave. Estos países (i.e. el res-

AMA N° 2: MODELO DE UNA ECONOMIA ORIENTADA HACIA AFUERA



to de los países latinoamericanos) se adaptaron a la situación de depresión absorbiendo todos los efectos del exterior. La recuperación de estos países se obtuvo solamente cuando el comercio internacional se normalizó. Algunos países sin embargo iniciaron un proceso de sustitución de importaciones aunque en etapa posterior a la de los países enumerados en (i), i.e. durante la Segunda Guerra Mundial debido a la gran expansión que experimentaron las exportaciones y la limitación de las importaciones, principalmente bienes manufacturados.

Con respecto al proceso de sustitución de importaciones no se hace el intento en este trabajo de reproducirlo o describirlo mediante un modelo matemático debido a consideraciones de tiempo y espacio.

2. Formulación matemática del modelo de crecimiento hacia afuera

a) Supuestos explícitos

- (i) Dos son los sectores generadores de excedentes: el exportador (1) y el agrícola (2). El primero consiste de la minería y la agricultura de exportación, el segundo está constituido por el sector agrícola que abastece de alimentos a las áreas urbanas y al sector exportador.
- (ii) Es un análisis de corto plazo principalmente i.e. la fuerza laboral es el factor variable.
- (iii) El sector exportador es considerado en cierta forma un monopolista con respecto al resto del mundo. (RDM).
- (iv) El nivel del ingreso del RDM esta determinado exógenamente.
- (v) Las importaciones de la fuerza laboral si bien están bajo el control del sector 1 tienen cierta relación con el total de la población.
- (vi) Existe la posibilidad de la Inversión Neta

(vii) El sector exportador no domina al sector agrícola como en el mo
delo colonial

b) Formulación matemática

Primera Parte

Sector 1: Exportador

1. $Q_1 = Q_1(L_1, K_1, T_1, N_1)$; donde $\frac{\delta Q_1}{\delta (L_1^0, K_1^0, T_1^0, N_1^0)} > 0$ y

$$\frac{\delta^2 Q_1}{\delta (L_1, K_1, T_1, N_1)^2} < 0$$

2. $Y_1 = P_1 Q_1$

3. $R_1 = Y_1 - W_1$

4. $W_1 = \bar{W}_1 \cdot L_1$

5. $D_X = D_X(P_1, Y_{ROW})$

Sector 2: Agrícola (no incluye el sector de subsistencia)

1. $Y_2 = Y_2(L_2, K_2, T_2, N_2)$: donde $\frac{\delta Y_2}{\delta (L_2, K_2, T_2, N_2)^2} > 0$ y

$$\frac{\delta^2 Y_2}{\delta (L_2, K_2, T_2, N_2)^2} < 0$$

2. $R_2 = Y_2 - W_2$

3. $W_2 = \bar{W}_2 \cdot L_2$

Relaciones Demográficas

1. $L = kP + L_M$

2. $L \equiv L_1 + L_2$

3. $L_M = \gamma P$

Relaciones de consistencia

$$1. \frac{L_1}{L_2} \leq m$$

$$2. \frac{R_1}{W_1} \geq n$$

Variables exógenas: $K_i, T_i, N_i, D_x, P, L_m, Y_{ROW}, P_1$ ($i = 1, 2$)

Variables endógenas: Y_i, Q_1, R_i, W_i, L_i ($i = 1, 2$)

Parámetros: $\bar{W}_i, \bar{N}_i, k, \gamma, m, n$ ($i = 1, 2$)

Segunda ParteEcuaciones de Definición

$$1. Y \equiv Y_1 + Y_2$$

$$2. Y \equiv W_1 + W_2 + R_1 + R_2$$

$$3. Y \equiv C + G + I + X - M + R_c$$

$$4. C = C_S + C_R$$

$$5. X \equiv Y_1$$

Ecuaciones de Comportamiento

$$1. C_R = C_1 (1 - t_1) R_1 + C_2 (1 - t_2) R_2$$

$$2. T = t_1 R_1 + t_2 R_2$$

$$3. M = m_1 (1 - t_1) R_1 + m_2 (1 - t_2) R_2$$

Variables exógenas: R_c, I, G

Variables endógenas: Y, C, T, M, C_R, C_S

Parámetros: C_i, T_i, m_i ($i = 1, 2$) (1)

Lista de símbolos y variables

Muchos de los símbolos usados en este modelo fueron utilizados y definidos en el modelo colonial; las nuevas variables introducidas que necesitan una definición son las siguientes:

Primera Parte

Variabes:

P_1 = Precio de los bienes de exportación en moneda nacional

Y_{ROW} = Nivel de ingreso en el resto del mundo (RDM)

D_x = Demanda para exportaciones del RDM.

L_m = importación de fuerza laboral

Parámetros

γ = relación entre las importaciones de fuerza laboral y el nivel de población. Debemos enfatizar que es un parámetro bajo el control del sector exportador.

Segunda Parte

Variabes:

T = ingresos tributarios

R_c = remesas al centro

C_r = consumo de clase rentista

Parámetros

t_i = tipo impositivo ($i = 1, 2$)

c) Comentarios acerca del modelo

Este modelo es muy similar al primero pero es importante anotar que se le han introducido cambios sustanciales. En la primera parte del modelo hemos introducido una nueva relación referida a la demanda

de exportaciones procedentes de los países periféricos de parte del RDM, que es una función de los precios de los bienes de exportación y del nivel de ingreso del RDM. El nivel de precios no es fijo como en el modelo colonial y puede estar sujeto a fluctuaciones como veremos posteriormente en la descripción de la crisis del modelo de crecimiento hacia afuera. Esta ecuación de demanda de las exportaciones es esencial al modelo ya que muestra un nuevo tipo de dependencia entre el centro y la periferia i.e. una crisis en el centro probablemente se transmitirá a la periferia y como veremos a continuación la crisis en este modelo fue inducida por la crisis en el centro; en contraste con la crisis en el modelo colonial que se originó en la periferia misma. Con esta última afirmación no se está argumentando que en el modelo colonial una crisis en la metrópoli no hubiera tenido repercusiones en las colonias pero la pregunta relevante a plantearse es: En qué modelo la dependencia es mayor con respecto al Centro? Si bien hoy que reconocer que es difícil comparar los dos tipos de dependencia pero se podrían elaborar indicadores adecuados para compararlos. Lamentablemente no intentaremos responder esta interrogante ya que no es materia de este trabajo.

Otra relación crucial es la introducción de la posibilidad de importar mano de obra de parte del sector exportador. Las implicancias de esta nueva variable son muy sugestivas. Con esta posibilidad que se le abre al sector exportador no habrán problemas de lograr un máximo en el excedente debido a la escasez de mano de obra, de tal forma que en el modelo de crecimiento hacia afuera no se dará una crisis debido a escasez de mano de obra tal como sucedió en el modelo colonial. Más aún habiendo supuesto que el sector agrícola no estaba dominado por el sector exportador ya no se abre la posibilidad de conflicto entre ambos sectores, en el logro de la maximización de su excedente. Ello significa que la fuerza laboral disponible para el sector 2 no tiene características residuales.

Otra restricción importante en nuestro modelo es la consideración del sector exportador como un monopolista en los productos que produce respecto al RDM. La razón que llevó a hacer este tipo de consideración es simplemente didáctica, ya que simplifica grandemente el análisis. Debido a que el sector exportador es un monopolista se le presentan dos alternativas: seleccionar el precio o la cantidad que desea vender. Consideremos que el monopolista elige la segunda alternativa ya que el precio está dado por el mercado internacional.

Una última interrogante a plantearse está referida a porqué se consideraba L_m relacionada con el nivel de la población si esta variable está controlada por el sector exportador. La razón una vez más puede ser para facilitar la presentación gráfica del modelo, pero en caso de considerarla exógena al modelo ello no cambiaría sustancialmente nuestro análisis.

Con respecto a la segunda parte del modelo poco es lo que hay que decir ya que no se utiliza en la descripción de la crisis del modelo. Si bien es útil anotar que una nueva relación se introduce referido a la función impositiva.

a) Trabajando con el modelo

Maximización del excedente en ambos sectores

Sector I:

$$R_1 = P_1 Q_1 - \bar{W}_1 L_1$$

$$dR_1 = Q_1 \cdot dP_1 + P_1 \cdot dQ_1 - \bar{W}_1 \cdot dL_1$$

$$dR_1 = \left(P_1 + Q_1 \cdot \frac{dP_1}{dQ_1} \right) dQ_1 - \bar{W}_1 \cdot dL_1$$

$$dR_1 = \left(P_1 + Q_1 \frac{dP_1}{dQ_1} \right) \frac{\partial Q_1}{\partial L_1} \cdot dL_1 - \bar{W}_1 dL_1$$

R_1 será un máximo cuando $dR_1 = 0$

$$\text{i.e. } (P_1 + Q_1 \frac{dP_1}{dQ_1}) \frac{\delta Q_1}{\delta L_1} \cdot dL_1 = \bar{W}_1 dL_1$$

$$\therefore (P_1 + Q_1 \frac{dP_1}{dQ_1}) \frac{\delta Q_1}{\delta L_1} = \bar{W}_1$$

La solución que obtenemos en la maximización del excedente de este sector es familiar ya que implica que el valor de producto marginal del trabajo de ese sector sea igual al salario pagado al trabajador de este sector.

Asumiendo que las condiciones de segundo orden se cumplen i

$$\text{i.e. } d^2 R_1 < 0$$

Sector II:

$$R_2 = Y_2 - \bar{W}_2 L_2$$

$$dR_2 = dY_2 - \bar{W}_2 dL_2$$

$$dR_2 = \frac{\delta Y_2}{\delta L_2} dL_2 - \bar{W}_2 dL_2$$

$$\text{i.e. } \frac{\delta Y_2}{\delta L_2} dL_2 = \bar{W}_2 dL_2$$

$$\frac{\delta Y_2}{\delta L_2} = \bar{W}_2$$

Asumimos también que las condiciones de segundo orden se cumplen.

i.e. $d^2 R < 0$, esto implica que $\frac{\delta^2 Y_2}{\delta L_2^2} < 0$ que es cierto de acuerdo a nuestros supuestos iniciales.

Hallando la forma reducida de la segunda parte del modelo:

$$Y = C + I + G + X - M + R_C$$

$$Y = C_S + C_1 (1 - t_1) R_1 + C_2 (1 - t_2) R_2 + I + G + X + R_C - m_1 \\ (1 - t_1) R_1 - m_2 (1 - t_2) R_2$$

$$Y = [C_3 + I + G + X + R_C] + [(C_1 - M_1)(1 - t_1)] R_1 + [(C_2 - M_2)(1 - t_2)] R_2$$

$$(Y - P) = [(C_1 - M_1)(1 - t_1)] R_1 + [(C_2 - M_2)(1 - t_2)] R_2$$

Donde $P = C_3 + I + G + X + R_C$

$$\frac{\partial (Y - P)}{\partial R_1} = [(C_1 - M_1)(1 - t_1)] = \alpha^1$$

$$\frac{\partial (Y - P)}{\partial R_2} = [(C_2 - M_2)(1 - t_2)] = \beta^1$$

Descripción de la crisis del liberalismo en términos del modelo:

La depresión de 1929-33 se considera como factor determinante de la crisis, ello implica que la demanda RDM por exportaciones se traslada hacia abajo con su respectiva curva de ingreso marginal,

El nuevo máximo logrado para R_1 será necesariamente a un menor nivel debido a que la curva de ingreso total se traslada hacia abajo así como la curva de excedente R_1 .

- La depresión continuará trasladando hacia abajo la curva de demanda de ingreso marginal y el máximo del excedente (R_1) tenderá a decrecer a lo largo del tiempo i. e. $\frac{d R_1}{d t} < 0$

Las implicancias en el resto del sistema puede trabajarse y desarrollarse pero olvidemos esto para no extender este trabajo. Sin embargo es importante recalcar que el impacto de la crisis en el sector exportador al resto de la economía y especialmente al sector 2 son distintos que el impacto del sector minero en el resto de la economía en el modelo colonial.

e) Una representación gráfica del modelo de 'crecimiento hacia afuera'

El instrumental gráfico a utilizarse en la presentación del modelo de crecimiento hacia afuera son similares a los utilizados en el modelo previo, los mayores cambios se encuentran en los gráficos A, D, E y F.

El gráfico A incluye L_M como una función lineal de P ; el gráfico D muestra la demanda para exportaciones del Centro hacia los países periféricos (también la curva de ingreso y costo marginal). El gráfico E se deriva de los gráficos D y muestra el ingreso total y el costo total y finalmente el gráfico F presenta una función de producción del sector exportador, con los ejes nominados de una forma distinta a la convencional.

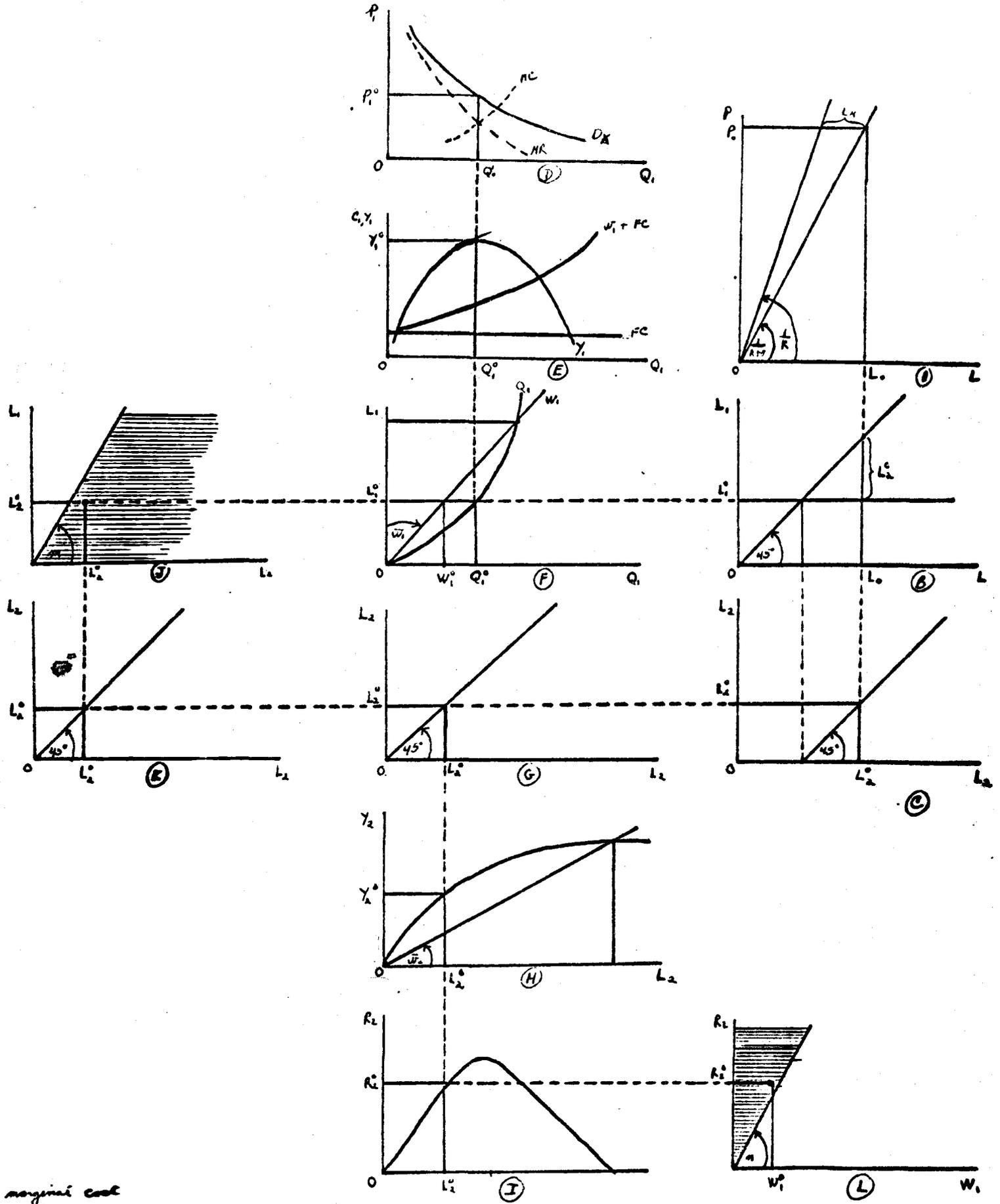
La figura N° 6 representa las soluciones factibles del modelo en la cual el sector exportador maximiza su excedente de acuerdo con las condiciones iniciales dadas y el nivel de L_M (determinado por el sector exportador). Sin embargo el sector II no logra un máximo en su función de excedente pero los valores obtenidos en ese sector son consistentes con aquellos obtenidos del primer sector. Para obtener la solución descrita en la fig. 6 se sigue el camino que se describe a continuación:

- (1) Dado P_0 , L_{M0} se determina L_0 en el gráfico A.
- (2) Del gráfico E se obtiene el valor Y_1^0 y el respectivo Q_1^0 que maximiza Y .
- (3) Obtenido Q_1^0 se halla P_1^0 en el gráfico D.
- (4) El nivel de Q_1^0 determinará la cantidad de mano de obra necesaria para producir esa cantidad (gráfico F).
- (5) Gráfico B determina L_2^0
- (6) Gráfico M determina Y_2^0 dado el valor de L_2^0
- (7) Gráfico I determina R_2^0 dado el valor de L_2^0

- (8) El propósito de los gráficos J y L es para chequear la consistencia de los valores obtenidos.
- (9) Los gráficos G y K son gráficos auxiliares.

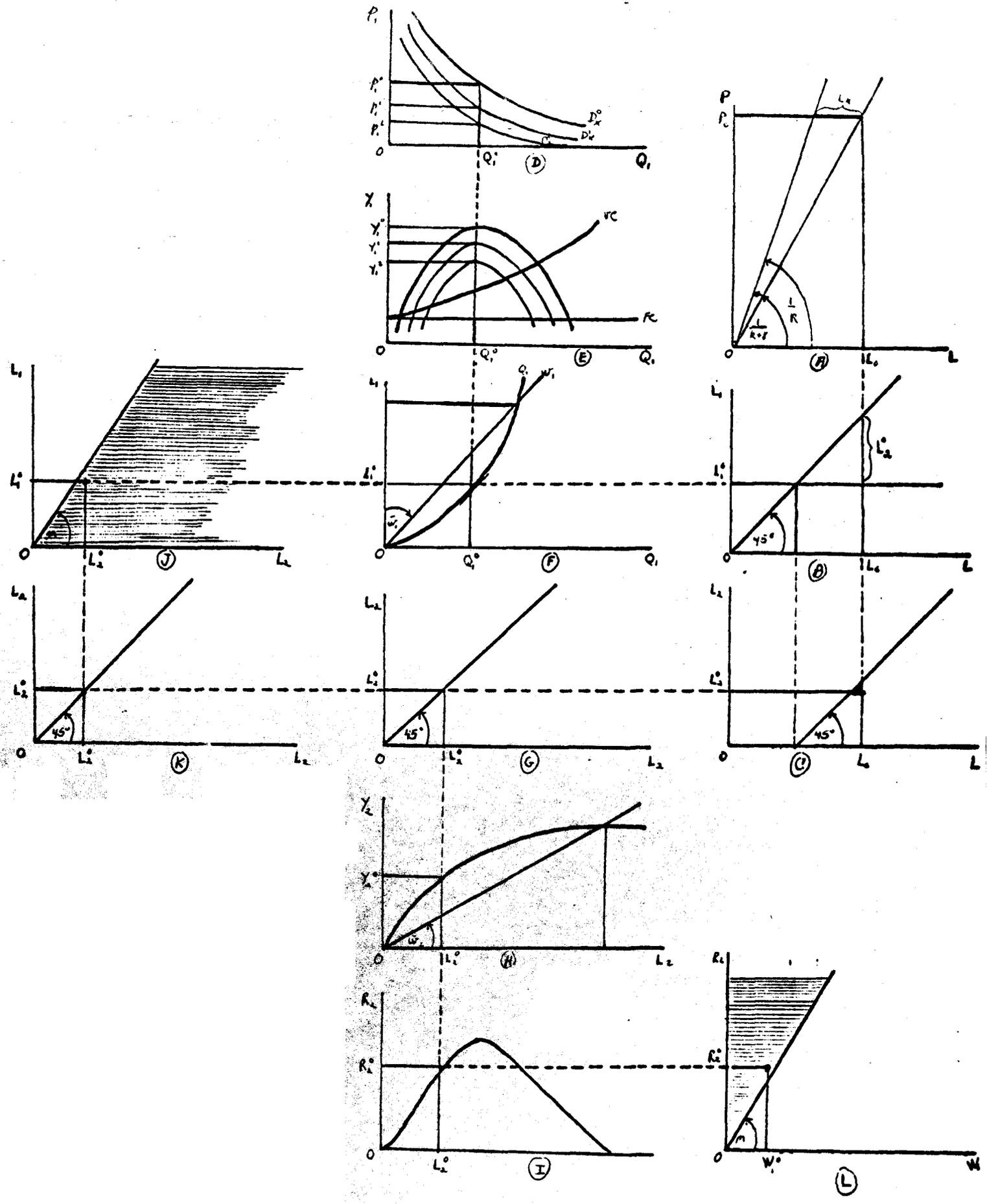
La figura 7 pretende describir la crisis del modelo. Para simplificar el análisis asumimos que los sucesivos traslados de la curva de demanda no afectarán su forma i.e. los valores máximos del ingreso total coincidirán con el mismo nivel de producción. Podemos observar que a medida que la depresión económica continúa en el centro (i.e. Y_{RDM}) la demanda por exportaciones se desplaza hacia la izquierda. Esto llevará a una disminución en los precios de bienes de exportación, en el nivel de ingreso y excedentes del sector exportador llegando a una situación de crisis.

FIGURA N° 6 EL MODELO DE CRECIMIENTO HACIA AFUERA: UNA SOLUCION FACTIBLE DE MAXIMIZACION PARA EL SECTOR EXPORTADOR.



C = marginal cost
 R = marginal revenue
 FC = FIXED COST
 C = TOTAL COST - C

FIGURA N° 7 EL MODELO DE CRECIMIENTO HACIA AFUERA, EL CASO DE DEPRESION ECONOMICA EN EL RESTO DEL MUNDO



IV. COMENTARIOS, OBSERVACIONES Y LIMITACIONES

Los modelos elaborados en este trabajo son de tipo descriptivo en los cuales las consideraciones demográficas tienen una influencia importante. Asimismo estos modelos se caracterizan por ser simplistas en el sentido de que están determinados principalmente por la interrelaciones entre dos sectores solamente (dejando de lado otros sectores importantes tales como el sistema económico del centro, el gobierno, etc.).

Dentro de las muchas limitaciones que se pueden formular a estos modelos se mencionan las siguientes.

1. Se ha desarrollado un análisis del corto plazo considerando a la fuerza laboral como el factor variable.
2. Los modelos se han trabajado en un esquema estático y comparativo estático. Algunas consideraciones dinámicas se han descrito y se han tratado de elaborar en el anexo pero sin representar algo definitivo.
3. No se presentan relaciones explícitas que reflejen la distribución del ingreso entre los distintos sectores.
4. No se ha desarrollado la segunda parte de los modelos en forma adecuada y revisado las inconsistencias que sepearían dar.
5. No se ha introducido en los modelos esquemas de acumulación de capital.
6. La posible experimentación del grado de flexibilidad de los modelos (i.e. las posibles causas del colapso del modelo) no se ha realizado.
7. Nos hemos restringido a instrumentos Neoclásicos y Keynesianos para formular los modelos en términos matemáticos.
8. Restricciones en el modelo colonial
 - (a) La no explicitación de los determinantes del parámetro K .
 - (b) La posibilidad que una explosión demográfica genere un colapso al modelo.

Finalmente podemos referirnos a la construcción de un modelo ideal (tentativo) que incluya al modelo colonial y al modelo de crecimiento hacia afuera como

de éste. Este modelo ideal podría presentar las siguientes características:

1. Debe ser un modelo dinámico con posibilidades de acumulación de capital.
2. Debe considerar en forma explícita el problema de la distribución del ingreso.
3. Ser capaz de describir o reflejar los cambios cualitativos.
4. Este modelo general debe ser capaz de generar modelos particulares para diferentes situaciones y tiempo.
5. El centro y la periferia deben incluirse en el modelo, sin considerar el primero de estos como una variable exógena. Lo importante es analizar las relaciones entre el centro y la periferia
6. El modelo debe contemplar elementos políticos, sociales y demográficos no sólo los económicos.
7. El modelo debe permitir distinguir los distintos grados (en un sentido cuantitativo) y clases (en un sentido cualitativo) de dependencia entre el centro y la periferia.
8. Finalmente el modelo no debe restringirse a los instrumentos y conceptos Neoclásico y Keynesianos si es que deseamos lograr las características enumeradas.

Los puntos 4, 5 y 7 pueden entenderse mejor si analizamos el diagrama N° 3 que presenta como este modelo general podría describir la historia económica latinoamericana.

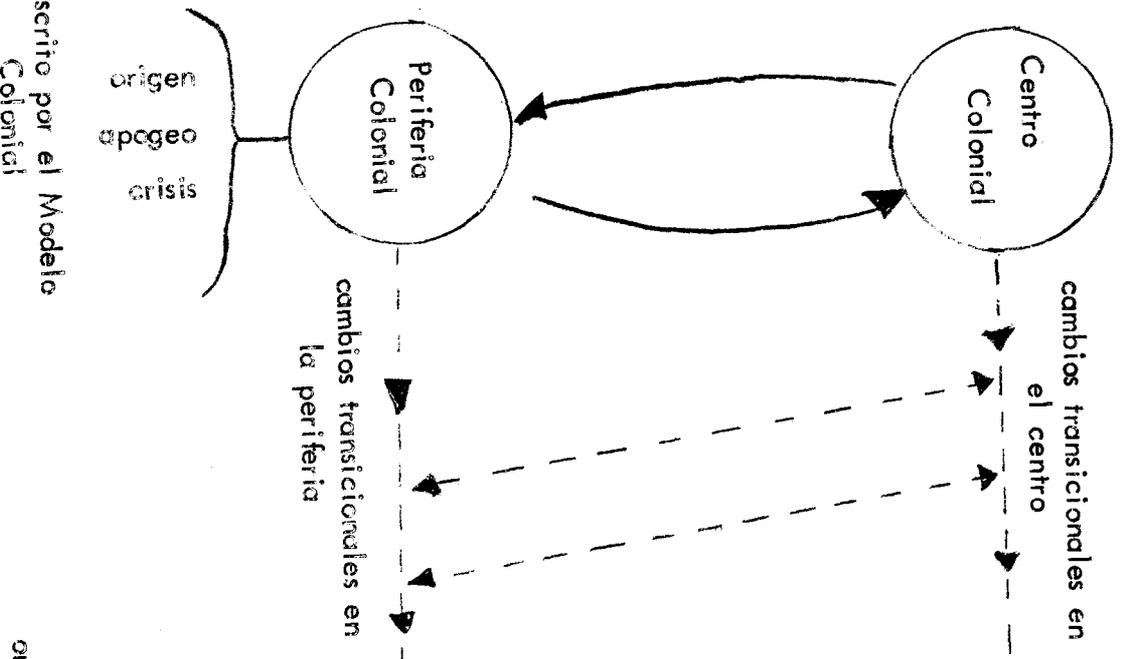
El modelo ideal debe ser capaz de explicar las relaciones entre el centro y la periferia en los períodos: colonial, liberal y actual. Más aún debe ser posible describir la transición de una etapa a la siguiente i.e. el modelo debe tener el poder de generar nuevos modelos a partir de una inicial.

Lo expuesto puede parecer irreal y complejo para ser obtenido por un modelo pero consideramos que es un reto interesante y constructivo para los individuos que se interesan en la construcción de modelos.

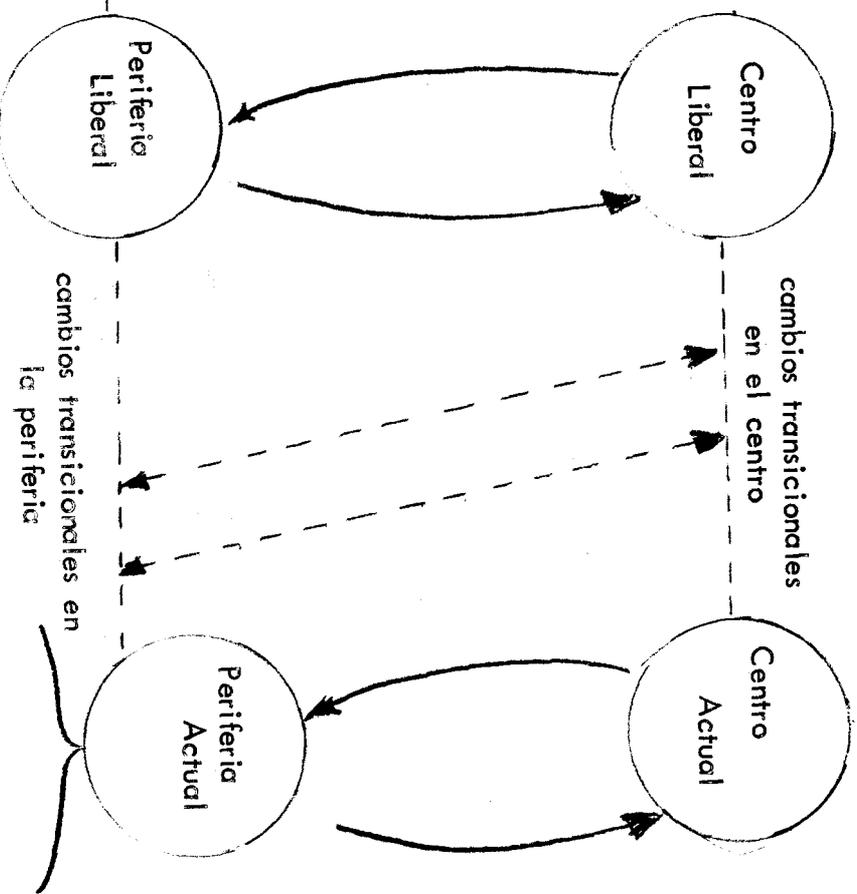
DIAGRAMA N° 3: EL MODELO IDEAL

Relaciones entre el centro y la periferia

Descrito por el Modelo Colonial



Descrito por el Modelo orientado hacia afuera



UNIVERSIDAD DEL PACIFICO
BIBLIOTECA

ANEXO. UN INTENTO DE DINAMIZAR EL MODELO COLONIAL

En el presente anexo se pretende dinamizar el Modelo Colonial en el sentido de encontrar ecuaciones que reflejan el comportamiento de las variables más importantes del modelo. Por motivos de espacio y tiempo nos limitaremos a tratar de dinamizar la función de producción y los factores de producción del sector minero en la versión simple (i.e. expresar cada variable en función del tiempo) para luego comparar la tendencia obtenida con las estadísticas disponibles.

La función de producción del sector minero puede escribirse:

$$Y(t) = Y [L(t), K(t), T(t), N(t)] \quad \text{donde } t = \text{tiempo}$$

De esta función podemos deducir lo siguiente

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{dL}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial N} \frac{dN}{dt}$$

$$\left(\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt}\right) \frac{Y}{Y} = \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{L}{Y} \left(\frac{1}{L} \frac{dL}{dt}\right) + \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} \left(\frac{1}{K} \frac{dK}{dt}\right) + \frac{\partial Y}{\partial T} \frac{T}{Y} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}\right) + \frac{\partial Y}{\partial N} \frac{N}{Y} \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}\right)$$

$$\Delta \% Y = \eta_L \Delta \% L + \eta_K \Delta \% K + \eta_T \Delta \% T + \eta_N \Delta \% N$$

donde η_i = elasticidad, asimismo asumimos que η_i son constantes y que

$$\frac{dA/dt}{A} = \frac{dA}{A} = \Delta \% A \quad (A = L, K, T, N)$$

$$\int \frac{dY}{Y} = \eta_L \int \frac{dL}{L} + \eta_K \int \frac{dK}{K} + \eta_T \int \frac{dT}{T} + \eta_N \int \frac{dN}{N}$$

$$\ln |Y| = \eta_L \ln |L| + \eta_K \ln |K| + \eta_T \ln |T| + \eta_N \ln |N| + (C_L + C_K + C_T + C_N)$$

$$\ln |Y| = \ln \left(L^{\eta_L} K^{\eta_K} T^{\eta_T} N^{\eta_N} \right) + C \quad C = C_L + C_K + C_T + C_N$$

$$\text{si } C = C_L + C_K + C_T + C_N \quad \text{y } C^C = A$$

$$Y = e^C L^{\eta_L} K^{\eta_K} T^{\eta_T} N^{\eta_N}$$

$$Y = A L^{\eta_L} K^{\eta_K} T^{\eta_T} N^{\eta_N}$$

Asumimos a continuación las siguientes relaciones:

$$(1) \quad L = L_0 e^{r(t) \cdot t}$$

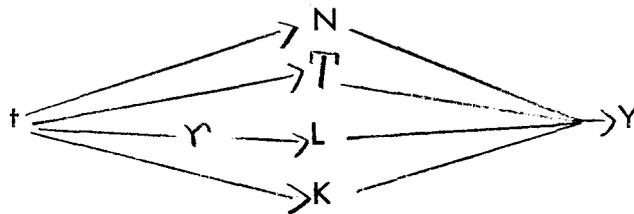
$$r(t) = \sigma \sin \theta t + \xi \quad (\sigma > 0, \theta > 0)$$

$$(2) \quad N = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

$$(3) \quad K = I t \alpha n^{-1} t \quad (\alpha > 0)$$

$$(4) \quad T = \beta t \alpha n^{-1} t \quad (\beta > 0)$$

La función de producción se puede expresar por el siguiente diagrama:



En este diagrama se observa que esta dinamización es la más simple e ingenua (o poco útil) que se pueda realizar ya que todas las variables están en función del tiempo y no se ha elaborado un sistema de simultaneidad con esquemas de "retroalimentación" de variables. Sin embargo esta función de producción en función del tiempo puede permitirnos reproducir la tendencia de los datos estadísticos que se disponen para la producción del sector minero.

Trabajando con las relaciones enumeradas:

$$(1) \quad \frac{dL}{dt} = L_0 r e^{rt} \quad ; \quad \frac{dL}{dt} \cdot \frac{1}{L} = r = \sigma \sin \theta t + \xi$$

$$(2) \frac{dN}{dt} = -\lambda^2 e^{-\lambda t} \quad ; \quad \frac{dN}{dt} \cdot \frac{1}{N} = -\lambda$$

$$(3) \frac{dK}{dt} = \frac{T}{1+t^2} \quad ; \quad \frac{dK}{dt} \cdot \frac{1}{K} = \frac{1}{\tan^{-1} t (1+t)^2}$$

$$(4) \frac{dT}{dt} = \frac{P}{1+t^2} \quad ; \quad \frac{dT}{dt} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{\tan^{-1} t (1+t)^2}$$

$$\therefore \Delta \% Y = \eta_L [\cos \theta t + \xi] - \lambda \eta_N + (\eta_K + \eta_T) \left(\frac{1}{\tan^{-1} t (1+t)^2} \right)$$

Graficando cada término de esta función podemos esperar las siguientes tendencias (ver gráfico 1) y agregando estas tendencias obtenemos una curva (ver gráfico 2) de una forma tal que podría asemejarse (dependiendo de los valores que se asignen a los parámetros) a la curva que se obtiene de graficar los $\Delta\%$ de los valores de exportación de oro y plata (que están muy relacionados con los montos de producción) que presenta Sunkel en el cuadro que a continuación se adjunta. (Ver gráfico 3).

Una segunda versión para el sector minero algo más complicada que la primera podría ser la siguiente:

$$(1) Y(t) = Y [L(t), K(t), T(t), N(t)]$$

$$(2) K(t) = K \left[\frac{dR_i(t)}{dt} \right]; R(t) = Y(t) - W(t)$$

$$(3) L(t) = L [Y(t)]$$

$$(4) T(t) = T [t]$$

$$(5) N(t) = N [t]$$

Cuyo diagrama de flujos puede representarse de la siguiente forma:

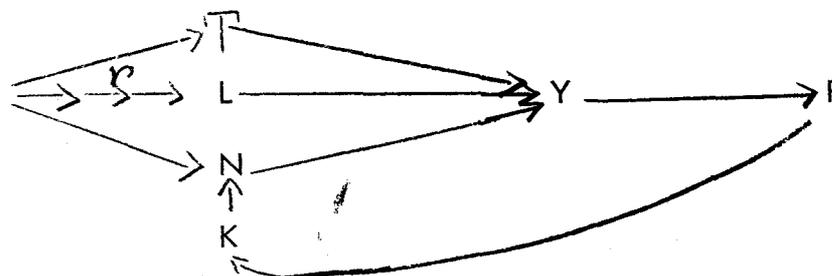


Gráfico N° 1 Tendencias de cada uno de los factores de Producción en relación al $\Delta \%Y$.

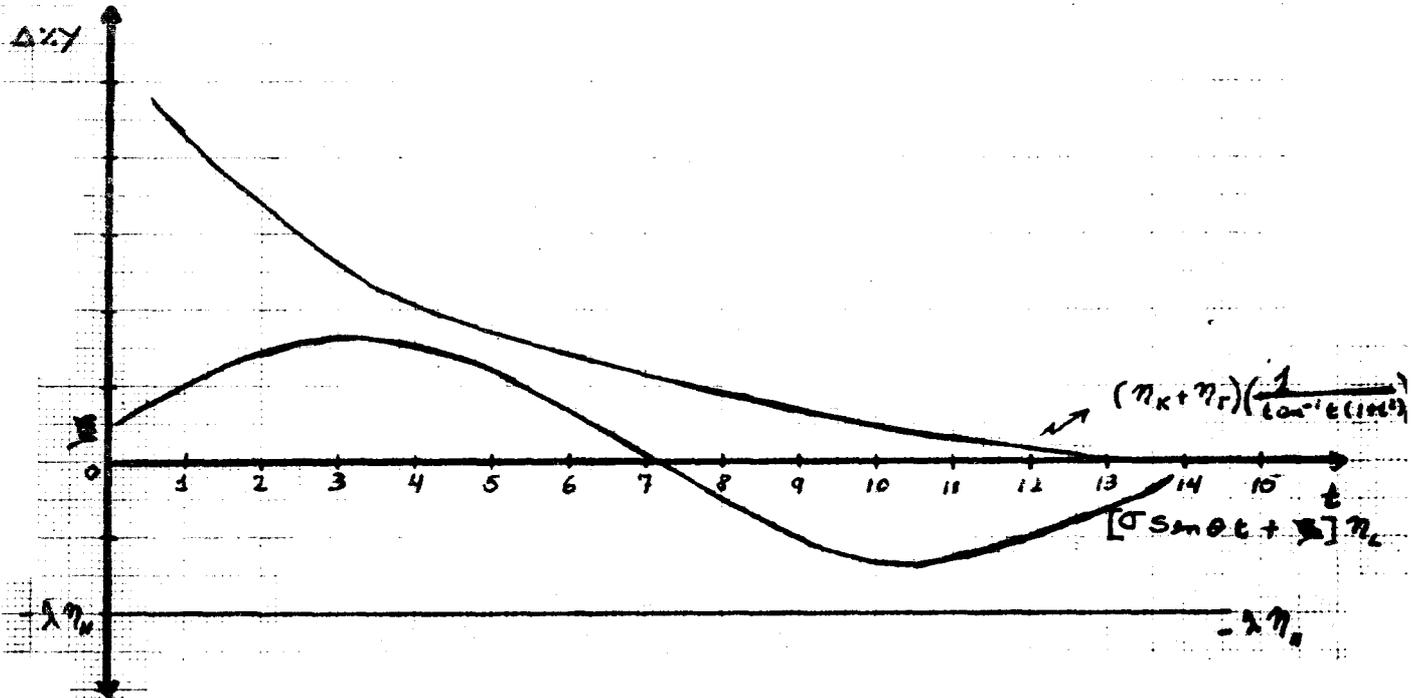
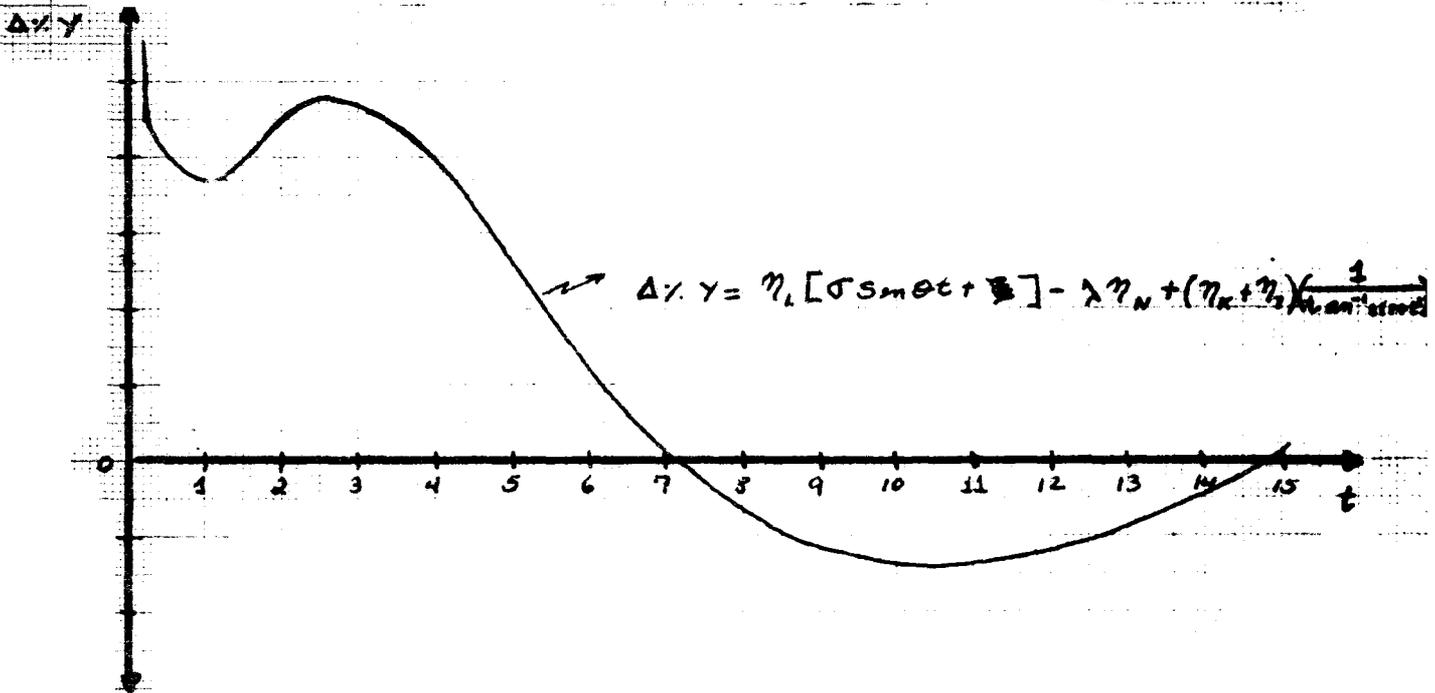


Gráfico N° 2 Curva agregada de tendencias de los factores de producción en relación al $\Delta \%Y$.



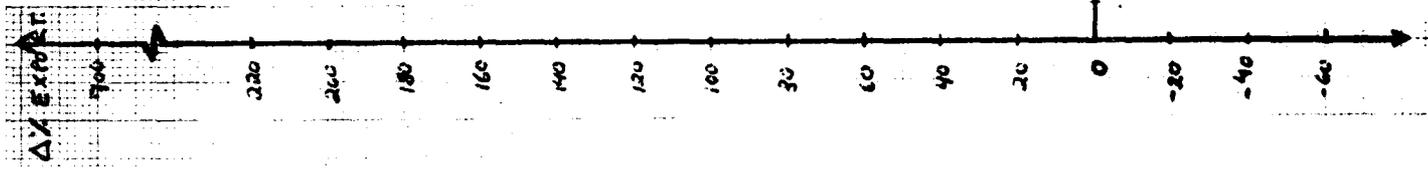


Gráfico N° 3 Contratación | Descriptiva de datos reales de exportación con la función agregada.

$$\Delta\% X_t = \eta_L \left[\sigma_{\text{Dom}} \sigma_L + \frac{\sigma}{\sigma} \right]$$

$$\nearrow - \lambda \eta_N + (\eta_K + \eta_I) \left(\frac{\sigma_{\text{Dom}} \sigma_L}{\sigma} \right)$$

La solución a este modelo no se hará ya que, se complica mucho la introducción del sistema de retroalimentación entre variables, queda pues como un ejemplo ilustrativo de las posibles formas de ampliar y dinamizar el modelo para el sector minero.

CUADRO N° 1 Exportaciones de metales preciosos de América a España (en maravedís)

N°	PERIODO	EXPORTACIONES	Δ % EXPORTACIONES
1	1503 - 1505	266,974,885	
2	1506 - 1510	367,306,425	37.58
3	1511 - 1515 ¹	537,999,075	46.47
4	1516 - 1520	446,938,425	-1.69
5	1521 - 1525	60,376,650	-86.48
6	1526 - 1530	467,296,650	673.96
7	1531 - 1535	742,603,950	58.91
8	1536 - 1540 ¹	1,772,051,400	138.62
9	1541 - 1545	2,229,302,250	25.80
10	1546 - 1550	2,478,919,950	11.97
11	1551 - 1555	4,439,488,950	79.08
12	1556 - 1560	3,599,549,325	-18.92
13	1561 - 1565	5,043,390,975	40.11
14	1566 - 1570	6,363,546,975	26.18
15	1571 - 1575	5,757,974,050	-9.51
16	1576 - 1580	7,763,373,450	39.83
17	1581 - 1585	13,218,575,400	70.23
18	1586 - 1590	10,724,683,725	-18.87
19	1591 - 1595	15,832,788,125	47.63
20	1596 - 1600	15,492,825,225	-2.15
21	1601 - 1605	10,981,479,600	-29.12

N°	PERIODO	EXPORTACIONES	EXPORTACIONES
22	1606 - 1610	14, 132, 343, 150	28.69
23	1611 - 1615	12, 096, 542, 250	-14.41
24	1616 - 1620	13, 550, 607, 000	12.02
25	1621 - 1625	12, 154, 805, 325	-10.30
26	1626 - 1630	11, 229, 536, 925	-7.61
27	1631 - 1635	7, 699, 884, 300	-31.43
28	1636 - 1640	7, 341, 570, 900	-4.26
29	1641 - 1645	6, 139, 711, 125	-1.64
30	1646 - 1650	1, 515, 501, 975	-75.37
31	1651 - 1655	3, 282, 195, 150	117.00
32	1656 - 1660	1, 512, 501, 975	-53.92

Fuente: Oswaldo Sunkel y Pedro Paz

op. cit. p. 293