

АНАЛИЗ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ЦЕПОЧКИ ФАЗОВЫХ ЗВЕНЬЕВ В АРИФМЕТИКЕ С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ

*Вашкевич М.И., к.т.н., доцент кафедры электронных вычислительных средств
Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники,
e-mail: vashkevich@bsuir.by*

Необходимость реализации цепочки (каскада) фазовых, всепропускающих звеньев возникает при построении систем обработки звуковых сигналов на основе фазового преобразования. Использование фазового преобразования позволяет получать дискретные системы, в которых представление спектральной информации приближено к тому, которое формируется в ухе человека. Целью данной работы являлось исследование шумов квантования возникающих при реализации цепочки фазовых звеньев в арифметике с фиксированной запятой. Исследовались различные схемы квантования результатов арифметических операций: усечение, детерминированное и вероятностное округление, а также метод формирования спектра ошибки. Анализировался уровень ошибок округления, возникающих при использовании данных различной разрядности. Показано, что наилучших результатов удастся достигнуть при использовании метода формирования спектра ошибки, а наихудших при использовании усечения.

Ключевые слова: *фазовое преобразование, квантование, ошибки округления, округление, вероятностное округление, формирование спектра ошибки, цепочка фазовых звеньев, реализация с фиксированной запятой*

ROUND OFF ERRORS ANALYSIS IN FIXED-POINT ALLPASS CHAIN IMPLEMENTATION

M.I. Vashkevich

The necessity of allpass chain (cascade) implementation is emerged in the realization of audio signal processing systems based on allpass transformation. The use of allpass transformation makes it possible to obtain discrete systems in which representation of spectral information in close correspondence with that in the human ear. The purpose of this work was to study the quantization noise and roundoff errors in fixed-point implementation of allpass chain. Various schemes for quantizing the results of arithmetic operations were investigated: truncation, deterministic and probabilistic rounding, as well as the error spectral shaping method. The level of quantization errors, which depends on data word length, was analyzed. The best results are achieved when using the error spectral shaping method, and the worst when using truncation.

Key words: *allpass transform, quantization, roundoff error, rounding, probabilistic rounding, error spectral shaping, allpass chain, fixed-point implementation*

Введение

Реализация цепочки (или каскада) фазовых звеньев является практической задачей, возникающей при построении систем обработки речевых и звуковых сигналов на основе фазового преобразования (англ. *allpass transformation*)[1-5]. Фазовое преобразование широко используется для отображения спектра сигнала в психоакустическую шкалу Барков, которая также называется шкалой критических частотных полос (англ. *critical band rate*) [6]. Отображение спектральной энергии сигнала в частотную шкалу Барков позволяет получить представление спектральной информации близкое к тому, которое формируется в ухе человека.

В работе [7] было предложено использовать фазовое преобразование для получения неравнополосной версии ДПФ-модулированного банка фильтров. Фазовое преобразование заключается в замене элементов задержки полифазной структуры банка фильтров на фазовые звенья (см. рис. 1).

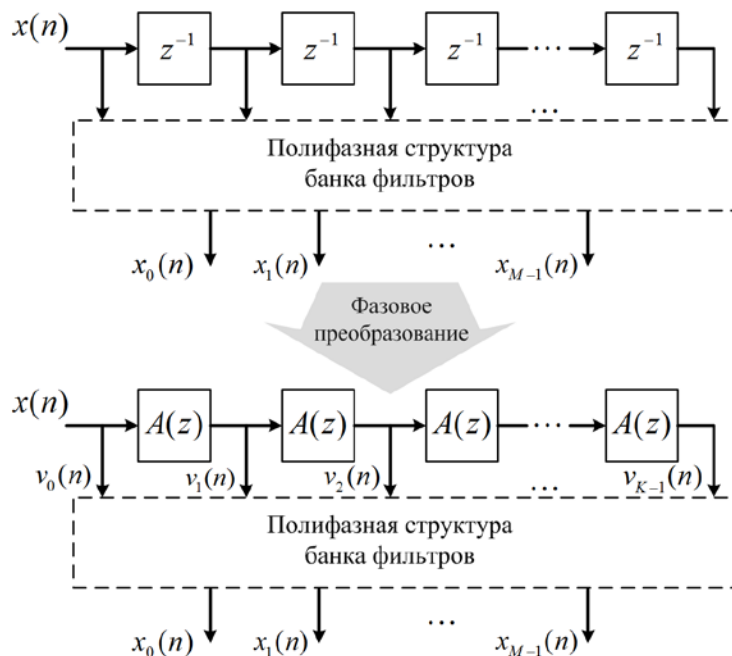


Рис 1. – Применение фазового преобразования к полифазной структуре банка фильтров [7]; $A(z)$ – передаточная функция фазового звена

С одной стороны, такой подход позволяет получить дискретную систему с деформированной частотной осью, которая может работать в реальном масштабе времени, однако с другой стороны возникает необходимость реализации цепочки фазовых звеньев (ЦФЗ). Настоящая работа посвящена исследованию подходов к реализации ЦФЗ с использованием арифметики с фиксированной запятой. Статья организована следующим образом: вначале описывается структура ЦФЗ, далее рассматриваются различные подходы к квантованию результата арифметических операций в структуре ЦФЗ, после чего приводятся результаты применения различных схем квантования при различной разрядности данных. В конце статьи делаются обобщающие выводы.

Структура цепочки фазовых звеньев

Цепочка фазовых звеньев, анализируемая в данной работе, состоит из каскада БИХ-фильтров первого порядка с передаточной функцией вида [1]:

$$A(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |\alpha| < 1. \quad (1)$$

Данная передаточная функция соответствует разностному уравнению

$$y(n) = -\alpha x(n) + x(n-1) + \alpha y(n-1) = x(n-1) + \alpha (y(n-1) - x(n)). \quad (2)$$

В соответствии с (2) блок-схему ЦФЗ можно представить в виде показанном на рис. 2 [4]. Число звеньев в цепочке колеблется от нескольких десятков [3, 7] до сотен [2] в зависимости от конкретного приложения.

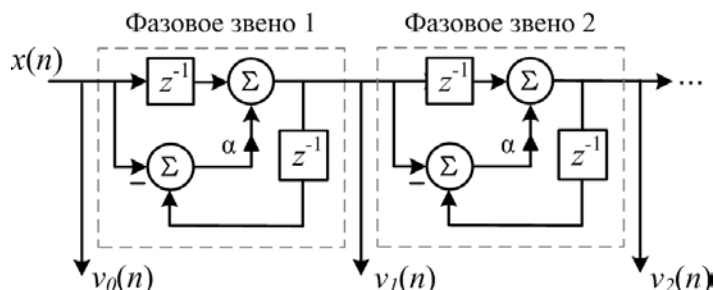


Рис 2. – Блок-схема цепочки фазовых звеньев

На рис. 2 через $x(n)$ обозначен входной сигнал, а через $v_0(n), v_1(n), \dots$ выходы ЦФЗ. При реализации ЦФЗ с использованием B -разрядной арифметики с фиксированной запятой, для предотвращения неограниченного роста разрядности промежуточных данных необходимо выполнять квантование результатов арифметических операций. Известно, что квантование является нелинейной операцией и часто приводит к нежелательным эффектам (например, эффекту мертвой зоны и др. [8]). Данные эффекты можно наблюдать даже в простых БИХ-фильтрах первого порядка, в случае же с ЦФЗ ситуация усложняется. Фазовые звенья следуют каскадом друг за другом, поэтому ошибки, образующиеся при квантовании в одном звене, передаются в следующее звено, что в результате приводит к усилению шума квантования на выходе цепочки.

Анализ эффектов квантования

Для анализа эффектов квантования была разработана программа, позволяющая измерять уровень шумов округления, возникающих в цепочке фазовых звеньев. Измерение шума округления основано на сравнении выходного сигнала, генерируемого опорной реализацией ЦФЗ и структуры ЦФЗ с квантованием результатов арифметических операций [8]. Блок-схема программы для анализа эффектов квантования в ЦФЗ приведена на рис. 3.

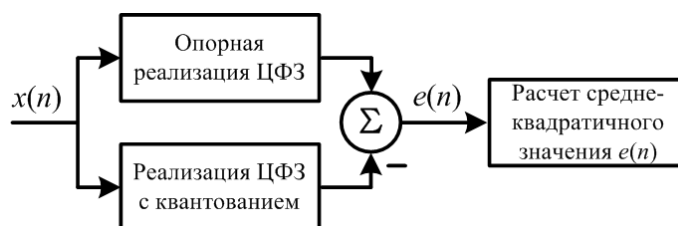


Рис 3. – Блок-схема программы для анализа эффектов квантования

В опорной реализации ЦФЗ используется арифметика с плавающей запятой двойной точности стандарта IEEE 754, поэтому её можно считать свободной от ошибок округления. Во втором блоке реализовывалась ЦФЗ с использованием различных методов квантования результатов арифметических операций. В третьем блоке вычисляется среднеквадратическое значение сигнала ошибки $e(n)$:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n), \quad (3)$$

где N – длина сигнала $e(n)$.

Параметр MSE использовался в качестве критерия для определения эффективности различных методов квантования. Чем меньшее значение имеет MSE , тем ближе реализация ЦФЗ с квантованием к опорной реализации.

Квантователь в структуре фазового звена

Ранее упоминалось, что для реализации фазового звена используется B -разрядная арифметика с фиксированной запятой. В частности, использовалось представление данных в дополнительном коде с нормированием к единице ($|x| \leq 1$):

$$x = -b_0 + \sum_{n=1}^{B-1} b_n 2^{-n}, \quad (4)$$

где b_n – двоичные разряды числа x .

При перемножении двух B -разрядных чисел вида (4) получается $2B$ -разрядное произведение. Чтобы не допускать роста разрядности данных произведения необходимо квантовать. На рис. 4 показана схема фазового звена с добавленным в структуру блоком квантования Q . Задача блока квантования сформировать B -разрядное представление произведения из имеющихся на выходе сумматора точного $2B$ -разрядного значения выхода фазового звена.

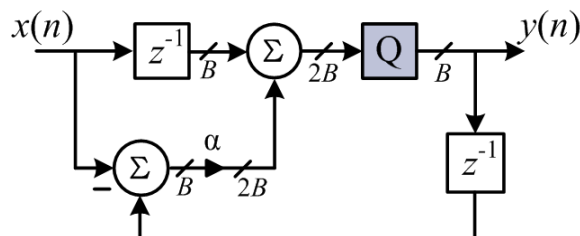


Рис 4. – Квантователь в структуре фазового звена

Методы квантования

В работе анализировались следующие варианты квантования:

- 1) усечение;
- 2) детерминированное округление;
- 3) вероятностное округление;
- 4) использование схемы формирования спектра ошибки (англ. ESS – errorspectralshaping) [9].

При *усечении* $2B$ -разрядного числа отбрасываются все младшие разряды, стоящие после наименьшего сохраняемого разряда. В случае, когда сохраняются только B разрядов, ошибка, получающаяся при усечении положительного числа, представленного дополнительном коде, удовлетворяет неравенству

$$-2^{-B} \leq x_{\text{yc}} - x \leq 0, \quad (5)$$

где x_{yc} – усеченное значение x . Для отрицательных чисел справедливо неравенство:

$$0 \leq x_{\text{yc}} - x \leq 2^{-B}. \quad (6)$$

Таким образом, ошибка усечения всегда находится в пределах от -2^{-B} до 2^{-B} .

При *детерминированном округлении* $2B$ -разрядное число заменяется на ближайшее B -разрядное число. Ошибка округления числа удовлетворяет неравенству:

$$-\frac{2^{-B}}{2} \leq x_{\text{окр}} - x \leq \frac{2^{-B}}{2}. \quad (7)$$

Можно заметить, что диапазон ошибки округления в два раза меньше, чем в случае ошибки усечения. Кратко опишем процесс округления. Исходное число x разбивается на две части – сохраняемую (x_{yc}) и отбрасываемую (z), другими словами на старшие и младшие B разрядов. Отбрасываемая часть интерпретируется, как некоторое число z , лежащее в интервале $[0, 1]$. При детерминированном округлении квантованное значение формируется как

$$x_{\text{окр}} = x_{\text{yc}} + c, \quad (8)$$

где $c \in \{0, 1\}$ – одnorазрядное число (перенос), которое прибавляется к младшему значащему разряду x_{yc} . Значение c зависит от отбрасываемой части z :

$$c = \begin{cases} 0, & \text{при } z < 0,5 \\ 1, & \text{при } z \geq 0,5 \end{cases}. \quad (9)$$

При *вероятностном округлении* [10] значение переноса определяется следующим образом:

$$c = \begin{cases} 1, & \text{если } R < z \\ 0, & \text{если } R \geq z \end{cases}, \quad (10)$$

где R – случайное число с равномерным распределением в интервале $[0, 1]$.

Метод *формирования спектра ошибки* формально не является способом квантования, но относится к техническим приемам, позволяющим уменьшить влияние ошибок округления. Ошибки округления, возникающие в процессе квантования произведений можно описать при помощи линейной модели процесса квантования

$$e_q = Q(x) - x, \quad (11)$$

где $Q(x)$ – квантованное значение числа x . Используя (11) процесс квантования можно описать, как добавление к исходному сигналу ошибки (или шума) квантования:

$$Q(x) = x + e_q. \quad (12)$$

Учитывая (12) можно получить линейную модель эффекта квантования в фазовом звене (см. рис. 5).

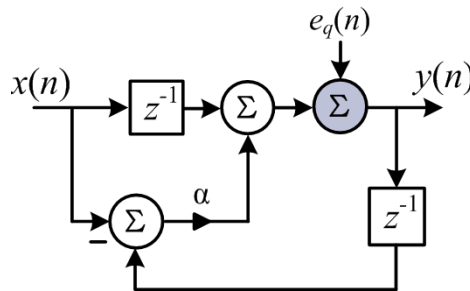


Рис 5. – Шумовая модель фазового звена с квантованием произведения

Используя принцип суперпозиции, можно показать, что z -преобразование выхода шумовой модели запишется как

$$Y(z) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} X(z) + \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} E_q(z) = A(z)X(z) + H_e(z)E_q(z), \quad (13)$$

где $E_q(z)$ – z -образ сигнала ошибок квантования $e_q(n)$.

Исходя из выражения (13) можно сделать вывод, что спектр ошибки усиливается полюсом фазового звена ($p = \alpha$). В зависимости от значения коэффициента α шум может усиливаться либо в нижней либо в верхней части частотного диапазона. На рис. 5 приведена диаграмма нулей и полюсов, а также частотная характеристика передаточной функции сигнала ошибки $H_e(z)$.

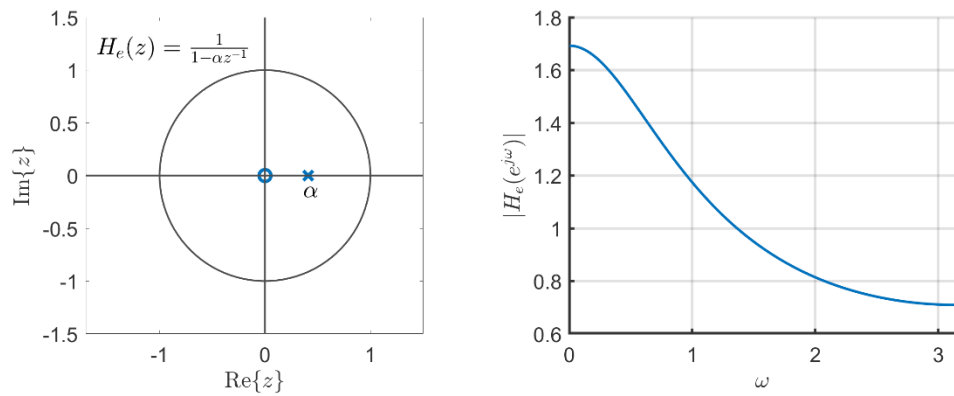


Рис 6. – Передаточная функция сигнала ошибки ($\alpha = 0.4092$): слева – диаграмма нулей и полюсов; справа – амплитудно-частотная характеристика

Из выражения (13) видно, что спектр квантованного выхода равен сумме идеального выхода и масштабированного спектра сигнала ошибки. Для снижения влияния шума округления можно использовать обратную связь по ошибке. Для этого введем нуль в точке $(1, 0)$ z -плоскости, как показано на рис. 7.

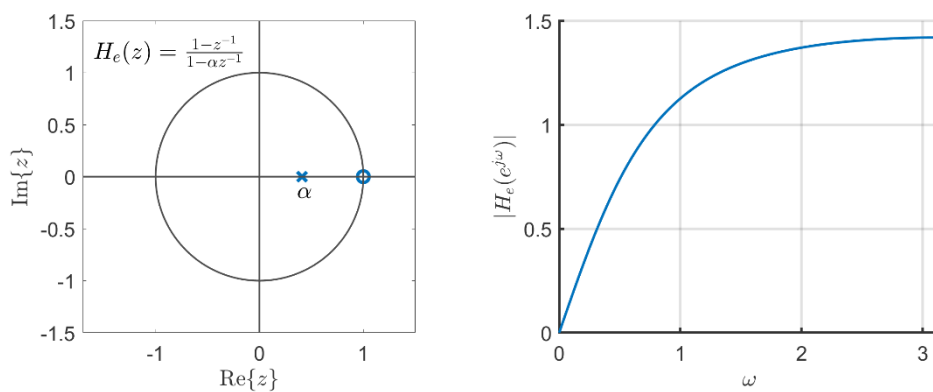


Рис. 7. – Модифицированная передаточная функция сигнала ошибки: слева – диаграмма нулей и полюсов; справа – амплитудно-частотная характеристика

Влияние нуля в обратной связи по ошибке на АЧХ $H_e(e^{j\omega})$ демонстрируется на рис. 7 (правая панель). Очевидно, что введение нуля приводит к уменьшению коэффициента передачи ошибки в области нижних частот.

Использование данного подхода приводит к изменению схемы реализации фазового звена (см. рис. 8).

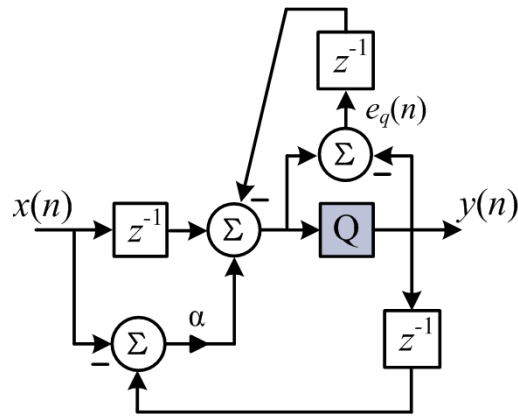


Рис. 8. – Структура фазового звена со схемой формирования спектра ошибки

Сравнивая структуры фазовых звеньев, показанные на рис. 4 и рис. 8 необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, фазовое звено на рис. 8 требует дополнительного элемента задержки и сумматора. Причем, если в исходной структуре используется B -разрядная арифметика, то для схемы формирования спектра ошибки необходим $2B$ -разрядный сумматор. Во-вторых, сумматор такой же разрядности необходим и на выходе, при этом, однако, для формирования выхода $y(n)$ используются только B старших разрядов этого сумматора. Следует отметить, что блок квантования Q в схеме на рис. 8 выполняет операция усечения.

Экспериментальные исследования

Для исследования рассмотренных подходов к квантованию результатов арифметических операций в ЦФЗ была выполнена программная реализация данных методов на языке C++. В частности, моделировалась цепочка состоящая из 180 звеньев, коэффициент $\alpha = 0,4092$, что соответствует фазовому преобразованию, аппроксимирующему шкалу барков для частоты дискретизации $f_s = 8$ кГц [6]. Измерение среднеквадратичного значения сигнала ошибки (см. выражение (3)) производилось для четырех различных входных воздействий: 1) дельта-импульса; 2) единичного скачка; 3) синусоидального сигнала; 4) последовательности дельта-импульсов. На рис. 9 представлены тестовые сигналы, использовавшиеся в процессе тестирования ЦФЗ.

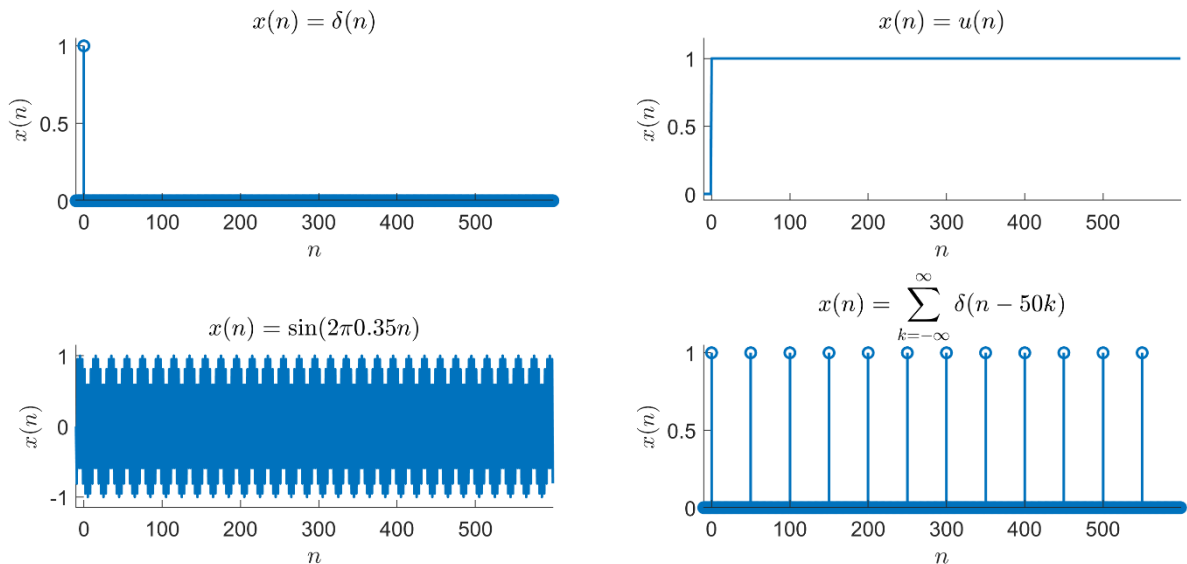


Рис. 9. – Тестовые сигналы

На рис. 10 представлены отклики моделируемой цепочки фазовых звеньев на тестовые сигналы.

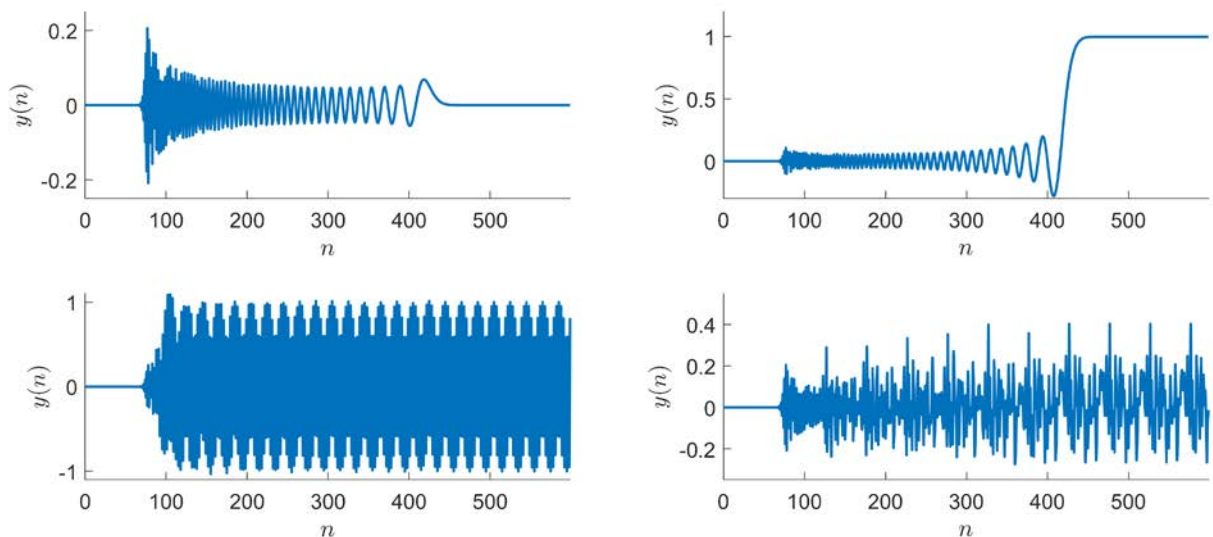


Рис. 10. – Отклик ЦФЗ на тестовые сигналы (верхний ряд: слева отклик на дельта-импульс, справа – на единичную скачок; нижняя ряд: слева отклик на синусоиду, справа – на последовательность дельта-импульсов)

Моделирование ЦФЗ производилось для различной разрядности данных $V = \{10, 12, 14, 16\}$ бит. Сигналы ошибки, возникающие при использовании различной разрядности данных, удобно сравнивать опираясь не на абсолютное значение MSE, а соотнося его с величиной шага квантования q . Для этой цели рассчитывалась величина

$$20 \log_{10} \left(\frac{\sqrt{\text{MSE}}}{q} \right), \text{ [dBq]} \quad (14)$$

где $q = 2^{-(B-1)}$ – шаг квантования.

На рис. 11 представлены сигналы ошибок $e(n)$, возникающих в ЦФЗ при использовании рассмотренных выше методов квантования. В качестве примера выбран случай, когда на вход ЦФЗ подавался дельта-импульс, а разрядность данных равнялась 10.

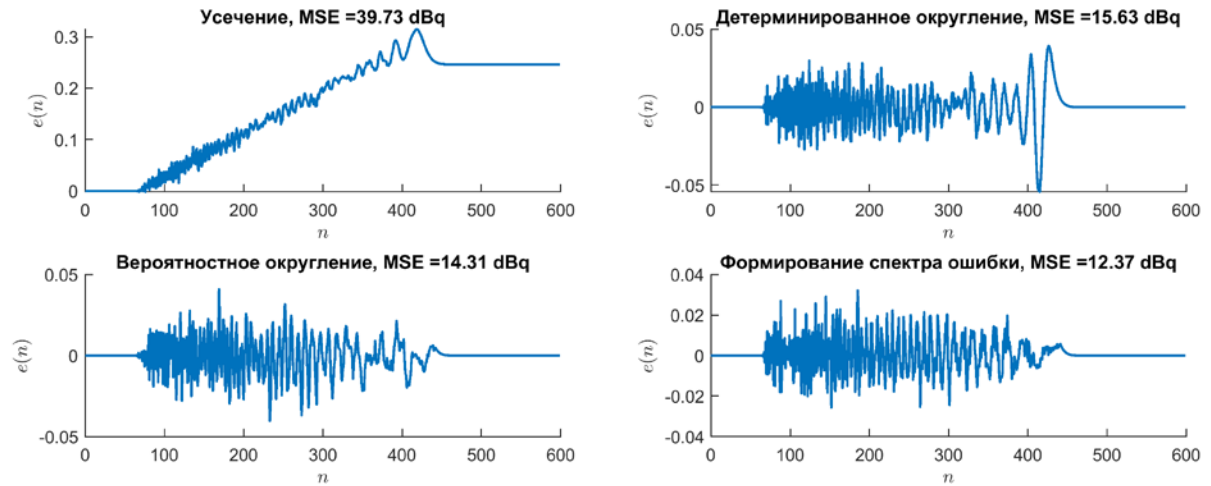


Рис. 11. – Сигнал ошибки возникающий при использовании различных методов квантования в цепочке фазовых звеньев (разрядность данных $B = 10$ бит)

Вид сигнала ошибки практически не зависит от способа квантования, за исключением случая усечения. Использование усечения ведет к появлению смещения в сигнале ошибки, вследствие чего среднеквадратическое значение сигнала ошибки является наибольшим для данного метода квантования.

В таблицах 1–4 приведены результаты экспериментов по измерению уровня сигнала ошибки, возникающих при использовании различных тестовых сигналов и различной разрядности данных в ЦФЗ.

Таблица 1 – MSE для различных схем квантования, входной сигнал – дельта-импульс

Число разрядов	Величина ошибки квантования, dBq			
	Усечение	Дет. округление	Вер. округление	Формирование спектра ошибки
10	39,73	15,63	14,31	12,37
12	37,25	13,87	14,22	13,66
14	37,23	13,27	13,76	13,62
16	37,44	13,60	13,50	12,44
Среднее	37,91	14,09	13,95	13,02

Таблица 2 – MSE для различных схем квантования, входной сигнал – единичный скачок

Число разрядов	Величина ошибки квантования, dBq			
	Усечение	Дет. округление	Вер. округление	Формирование спектра ошибки

10	41,30	17,45	17,29	16,82
12	41,30	17,47	16,57	17,00
14	41,30	17,12	17,55	16,81
16	41,28	16,14	17,21	16,75
Среднее	41,30	17,05	17,16	16,85

Таблица 3 – MSE для различных схем квантования, входной сигнал – синусоида

Число разрядов	Величина ошибки квантования, dBq			
	Усечение	Дет. округление	Вер. округление	Формирование спектра ошибки
10	41,05	31,77	31,67	31,77
12	41,14	31,71	31,64	31,56
14	41,03	31,57	31,59	31,42
16	40,93	29,89	29,92	29,95
Среднее	41,04	31,24	31,21	31,18

Таблица 4 – MSE для различных схем квантования, входной сигнал – последовательность дельта-импульсов

Число разрядов	Величина ошибки квантования, dBq			
	Усечение	Дет. округление	Вер. округление	Формирование спектра ошибки
10	40,32	21,20	21,04	20,66
12	40,44	20,66	21,36	21,34
14	40,43	21,47	21,32	21,10
16	40,49	21,06	20,98	20,60
Среднее	40,42	21,10	21,18	20,93

Анализируя полученные результаты можно сделать несколько выводов. Во-первых, величина сигнала ошибки, возникающая при использовании различных схем квантования в ЦФЗ, существенно зависит от вида тестового сигнала. Наибольший уровень ошибки зафиксирован для синусоидального входного сигнала, а наименьший для дельта-импульса. Во-вторых, если брать усредненное значение величины ошибки, то наилучший результат дает использование схемы формирования спектра ошибки, а наихудший – усечение. В-третьих, если не учитывать усечение, то можно сказать, что оставшиеся три схемы квантования дают весьма близкие результаты. На практике наиболее предпочтительным является использованием детерминированного округления, как наименее затратного с вычислительной точки зрения.

Заключение

Рассмотрен вопрос реализации цепочки фазовых звеньев в арифметике с фиксированной запятой. Исследовались эффекты квантования, возникающие при использовании различных схем квантования результатов арифметических операций: усечения, детерминированного и вероятностного округления, а также метода формирования спектра ошибки. Анализировался сигнал ошибки, который формировался как разность между выходами опорной реализации цепочки фазовых звеньев и реализации с фиксированной запятой. Проведенные эксперименты показали, что величина сигнала ошибки существенно зависит от вида тестового сигнала. Наибольший уровень ошибки зафиксирован для синусоидального входного сигнала, а наименьший при подаче на вход дельта-импульса. Сравнивая различные методы квантования результатов арифметических операций можно сделать вывод, что наилучший результат дает использование схемы формирования спектра ошибки, а наихудший – усечение.

Литература

- [1] A. Oppenheim, D. Johnson, and K. Steiglitz, "Computation of spectra with unequal resolution using the fast Fourier transform," *Proceedings of the IEEE*, vol. 59, no. 2, pp. 299-301, 1971.
- [2] T. Gülzow, A. Engelsberg, and U. Heute, "Comparison of a discrete wavelet transformation and a nonuniform polyphase filterbank applied to spectral-subtraction speech enhancement," *Signal processing*, vol. 64, no. 1, pp. 5-19, 1998.
- [3] J. M. Kates and K. H. Arehart, "Multichannel dynamic-range compression using digital frequency warping," *EURASIP journal on advances in signal processing*, vol. 2005, no. 18, pp. 1-12, 2005.
- [4] М. И. Вашкевич, И. С. Азаров, and А. А. Петровский, *Косинусно-модулированные банки фильтров с фазовым преобразованием: реализация и применение в слуховых аппаратах*. М.: Горячая линия – Телеком, 2014, p. 210.
- [5] М. И. Вашкевич and И. С. Азаров, "Сравнение частотно-временных преобразований: Фурье-анализ, вейвлеты и банки фильтров на основе фазового преобразования," *Цифровая обработка сигналов*, no. 2, pp. 13-26, 2020.
- [6] J. O. Smith and J. S. Abel, "Bark and ERB bilinear transforms," *IEEE Transactions on speech and Audio Processing*, vol. 7, no. 6, pp. 697-708, 1999.
- [7] P. Vary, "Digital filter banks with unequal resolution," in *Short Communication Digest of European Signal Processing Conf.(EUSIPCO)*, 1980, pp. 41-42.
- [8] Б. Голд and Р. Рэйдер, *Цифровая обработка сигналов*. М.: Советское радио, 1973, p. 368.
- [9] Э. Айфичер and Б. Джервис, *Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е издание*. Издательский дом "Вильямс", 2004, p. 992.
- [10] В. С. Гладкий, "Выбор разрядности чисел при передаче информации о вероятностных характеристиках процесса," *Автоматика и телемеханика*, no. 3, pp. 159-166, 1973.