

Prima de la suma de dos riesgos dependientes PQD o NQD. Aplicación de algunas cópulas arquimedianas*

César E. Escalante Coterio**

Carmen C. Sánchez Zuleta***

Recibido: 11/02/2013 • Aceptado: 27/06/2014

Resumen

En este artículo se estudia cómo se afecta la prima de la suma de dos riesgos X y Y con dependencia positiva PQD y dependencia negativa NQD con el uso de las cópulas como estructura general que gobierna tal dependencia. Se propone una demostración del Lema de Hoëffding y se usa para el cálculo de la varianza de $X + Y$. Se exponen y usan varios principios de prima (de varianza, de desviación estándar, de varianza modificada) y de medidas de dependencia más usadas (τ de Kendall, dependencia en la cola). Son presentados varios ejemplos numéricos de dependencia de riesgos con algunas cópulas arquimedianas.

Palabras clave: dependencia de riesgos, cópulas arquimedianas, prima de riesgos dependientes, medidas de dependencia.

* Artículo resultado de investigación derivado del proyecto: órdenes estocásticos, medidas de riesgo y programación estocástica, cofinanciado por la Universidad de Medellín y la Universidad EAFIT.

** MSc matemática. Empresas Públicas de Medellín. Gerencia Integral de Riesgos. Correo: cesar.escalante@epm.com.co

*** MSc. Matemáticas. Profesora investigadora, Universidad de Medellín. Correo: ccsanchez@udem.edu.co

Premium of the sum from two risks dependent PQD or NQD - archimedean copulas application

Abstract

The premium of the sum of two risks X and Y with positive dependence PQD and NQD negative dependence and its impact is studied in this paper using copulas as the general structure that governs such dependence. We propose a demonstration of Hoeffding's lemma and is used to calculate the variance of $X + Y$. Various premium principles (variance, standard deviation, variance as amended) and most commonly used measures of dependence (τ of Kendall, dependence on the tail) are proposed and used. Several numerical examples risks of dependence with some Archimedean copulas are presented.

Keywords: Risk-dependent, Archimedean copulas, dependent risk premium, measures of dependence.

INTRODUCCIÓN

En actuaría, para fijar el precio de un producto de seguros, tradicionalmente se ha trabajado con las hipótesis de la teoría clásica del riesgo que supone que las variables aleatorias (v.a.) de las cuantías individuales de los siniestros son independientes y tienen igual distribución (véanse las hipótesis del *modelo de riesgo colectivo*). La prima de riesgo se obtiene aplicando, además, el principio de mutualidad a partir del cual los riesgos se distribuyen entre toda la cartera asegurada, de forma que en promedio los errores se compensan y la esperanza matemática de la siniestralidad total, o prima pura, es suficiente para llevar a cabo la cobertura. Sin embargo, este procedimiento de determinación del precio del seguro es incongruente con la valoración realizada en los mercados financieros, en los que la cuantificación de los activos derivados se obtiene, evitando las oportunidades de arbitraje, mediante la réplica de carteras formadas por activos simples cuyos resultados son iguales, en todo momento del período de negociación al del activo derivado objeto de valoración.

En el presente artículo se estudia cómo se afecta la prima de dos riesgos, con dependencia positiva *PQD* o negativa *NQD*, usando algunos modelos de cópulas arquimedianas. A manera de ejemplo citamos algunas situaciones en las que se pueden presentar riesgos dependientes:

- El momento de la muerte de un hombre y su esposa debido a la exposición a riesgos similares, además de los posibles componentes emocionales.
- El valor indemnizado en un siniestro y el pago realizado por el asegurador al ajustador del siniestro.
- El pago total en diferentes líneas de negocio. Por ejemplo, una epidemia puede hacer que la línea de renta vitalicia sea más rentable que la línea de seguros de vida.

De forma resumida una prima mínima técnica está compuesta de los siguientes elementos:

- Prima pura de riesgo.
- Sobreprima de seguridad.
- Costo adicional para el beneficio.

Por tanto, la prima o precio del servicio es el costo que para la empresa suponen los siniestros, más el margen de beneficio. El precio correcto, llamado *rating*, es vital, pues si es demasiado bajo representa una pérdida para el asegurador, y si es demasiado alto se pierde competitividad.

Existen diversas definiciones de riesgo y no es fácil encontrar una que sirva en todas las disciplinas en que se usa este concepto. En este artículo se entiende por riesgo una v.a. no negativa con esperanza finita.

Existe gran variedad de fuentes para modelos bivariados y multivariados. Entre ellos están los libros de Hutchinson & Lai [1], Kotz, Balakrishnan & Johnson [2] y Mardia [3]; la mayoría de textos se enfocan en distribuciones multivariadas con distribuciones marginales del mismo tipo. De más interés y valor práctico son los métodos de construcción de modelos bivariados o multivariados a partir de distribuciones marginales conocidas (posiblemente diferentes) y de la dependencia entre riesgos. Hay muchas formas para describir la dependencia o asociación entre v. a. Por ejemplo, la medida clásica de dependencia es el coeficiente de correlación, que es una medida de la relación de linealidad entre v. a., y que toma los valores 1 o -1 cuando existe una relación lineal perfecta, esto es, cuando se puede escribir $Y = aX + b$ para las v.a. X y Y , y constantes a y b . Si a es positiva, el coeficiente de correlación es 1; si a es negativa, el coeficiente de correlación es -1 .

Esto explica por qué la correlación mencionada se llama a menudo **correlación lineal**. Otras medidas de dependencia entre v. a. son la tau de Kendall τ_K y ro de Spearman ρ_S . Similar al coeficiente de correlación, existen medidas de dependencia que toman el valor 1 para la dependencia positiva perfecta (no necesariamente lineal) y de -1 para la dependencia negativa perfecta.

1. PRINCIPIOS DE CÁLCULO DE PRIMA

En esta sección se presentan los principios de cálculo de prima más comunes. Primero se exponen algunas propiedades generales, no todas verificables de manera simultánea.

1.1 Algunas propiedades

Antes de presentar algunos de los principios de cálculo de prima de seguro más comunes discutimos las propiedades generales que hay detrás de la idea **BUEN** principio de cálculo de prima. La definición de riesgo propuesta conduce usualmente a que la prima $\Pi(X)$, asociada a un riesgo X , sea finita, y en tal caso se dice que el riesgo X es **asegurable**. Sean X, Y , riesgos asegurables con funciones de distribución (*fd*) respectivas F y G . En Teugels *et ál.* [4] y Rolski *et ál.* [5] se listan, entre otras, las siguientes propiedades:

- **Carga de seguridad.** Para toda constante $a \geq 0$, $\Pi(a) = a$.
- **Proporcionalidad.** Para toda constante $a \geq 0$, $\Pi(aX) = a\Pi(X)$.
- **Consistencia.** Para toda constante $a \geq 0$, $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$.

- **Subaditividad.** $\Pi(X + Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$.
- **Aditividad.** $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$.
- **Superaditividad.** $\Pi(X + Y) \geq \Pi(X) + \Pi(Y)$.

Por lo general, la propiedad de aditividad se exige para riesgos independientes, caso contrario al del objetivo central del presente trabajo. La subaditividad de un principio de prima significa que un asegurado no obtiene ventaja económica por dividir un riesgo en dos o más partes. En realidad la prima de seguros de dos riesgos depende de la distribución conjunta de $X + Y$, y por tanto centraremos la atención en ésta.

1.2 Principios básicos para el cálculo de primas

Uno de los principios más básicos para el cálculo de una prima es

- **Principio de valor esperado.** Para alguna constante $a \geq 0$, $\Pi(X) = (1 + a)\mathbb{E}(X)$, bajo el supuesto que $\mathbb{E}(X) < \infty$, como es en nuestro caso, pues X es un riesgo. Para $a = 0$ se obtiene el conocido *principio de prima neta*.

El principio de valor esperado parece justo, pero no tiene en cuenta la variabilidad del riesgo subyacente X , y esto puede ser peligroso para el asegurador. En un intento de superar este inconveniente, se introducen principios en los que la carga de seguridad $a = \Pi(X) - \mathbb{E}(X)$ depende de la variabilidad de X . Por tanto, para alguna constante $a > 0$ tenemos los siguientes principios de prima:

- **Principio de varianza.** $\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + a\mathbb{V}ar(X)$. Se debe observar que este principio exige para su uso que las unidades en la que se expresa a sean iguales al recíproco de las unidades en la cual se expresa X .

- **Principio de desviación estándar.**

$$\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + a\sqrt{\mathbb{V}ar(X)} = \mathbb{E}(X) + a\sigma_X$$

- **Principio de varianza modificada.** $\Pi(X) = \mathbb{E}(X) + \frac{a\mathbb{V}ar(X)}{\mathbb{E}(X)}$ con $\mathbb{E}(X) > 0$.

Realicemos el análisis básico de las propiedades de subaditividad, aditividad y superaditividad para la prima de la suma de dos riesgos posiblemente no independientes, con respecto a los principios de prima de varianza, desviación estándar y varianza modificada. Sea el riesgo $X + Y$, entonces:

$$\mathbb{V}ar(X + Y) = \mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y) + 2\mathbb{C}ov(X, Y).$$

Prima del riesgo $X + Y$ bajo el principio de varianza. Para $a > 0$,

$$\begin{aligned}\Pi(X+Y) &= [\mathbb{E}(X) + a\text{Var}(X)] + [\mathbb{E}(Y) + a\text{Var}(Y)] + 2a\text{Cov}(X, Y) \\ &= \Pi(X) + \Pi(Y) + 2a\text{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

En consecuencia, si $\text{Cov}(X, Y) > 0$, entonces $\Pi(X+Y) > \Pi(X) + \Pi(Y)$, y por tanto, en este caso, el principio de varianza es superaditivo. De manera análoga, el principio de varianza es subaditivo si $\text{Cov}(X, Y) < 0$ y aditivo si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, esto es, cuando los riesgos son no correlacionados. Debemos recordar en este punto que la independencia implica la no correlación, pero en general el recíproco no es cierto, pues puede darse el caso de riesgos no correlacionados dependientes; Mari & Kotz [6].

Prima del riesgo $X+Y$ bajo el principio de desviación estándar. Para $a > 0$,

$$\Pi(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + a\sqrt{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)}$$

Para decidir sobre la (sub, super)-aditividad debemos comparar ahora este valor con $\Pi(X) + \Pi(Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + a(\sigma_X + \sigma_Y)$. Dado que el coeficiente de correlación lineal de X y Y es menor o igual a 1, se concluye que el principio de desviación estándar es subaditivo.

Prima del riesgo $X+Y$ bajo el principio de varianza modificada. Para $a > 0$

$$\Pi(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + a\frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}$$

Para decidir sobre la (sub, super)-aditividad debemos comparar ahora este valor con

$$\Pi(X) + \Pi(Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + a\left(\frac{\text{Var}(X)}{\mathbb{E}(X)} + \frac{\text{Var}(Y)}{\mathbb{E}(Y)}\right)$$

Para $\text{Cov}(X, Y) < 0$ este principio de prima es subaditivo; Rolski *et al.* [5].

En el estudio de la prima de $X+Y$ de la sección 4 usaremos estos tres principios de prima junto con algunas cópulas arquimedianas.

2. CÓPULAS

Durante las últimas décadas la teoría de cópulas se ha constituido en una herramienta esencial para el tratamiento de las estructuras de dependencia entre v. a. Este aspecto hace de esta teoría un elemento esencial para el desarrollo que nos hemos propuesto; por tanto, presentamos a continuación los conceptos y resultados de la teoría de cópulas que serán de interés a lo largo del artículo.

En esencia una cópula es una función que junta o *acopla* una *fd* multivariada a sus *fd* marginales unidimensionales Nelsen [7]. Dado el propósito de la teoría de cópulas en este artículo, centraremos este repaso en las cópulas bidimensionales.

Sean X y Y v.a. continuas con *fd* respectivas $F(x) = P(X \leq x)$ y $G(y) = P(Y \leq y)$ y *fd* conjunta $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Luego, para todo $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ ($\bar{\mathbb{R}}$ es llamado el conjunto de los reales extendidos $[-\infty, \infty]$); consideremos los puntos sobre la 3-caja $I^3 = I \times I \times I$, con $I = [0, 1]$, cuyas coordenadas están dadas por $(F(x), G(y), H(x, y))$, se tiene entonces que una proyección de este estilo, que va de I^2 en I , es llamada una *cópula bivariada*. De manera un poco más formal, podemos definir una cópula bivariada como se indica a continuación.

Definición 1 (Cópula). *Una cópula bidimensional, (también llamada una 2-cópula) es una función C que satisface las siguientes propiedades:*

- $Dom(C) = I \times I$
- $C(u, 0) = C(0, v) = 0$, esto es, es aterrizada (**grounded**).
- $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v$
- $\forall a_1 \leq a_2$ y $\forall b_1 \leq b_2$, $C(a_1, b_1) + C(a_2, b_2) - C(a_1, b_2) - C(a_2, b_1) \geq 0$, es decir, es 2-creciente.

Por otra parte sabemos que $F(x)$ y $G(y)$ se encuentran en el intervalo $[0, 1]$; por lo tanto, es pertinente establecer la relación $u = F(x)$ y que $v = G(y)$, que se encuentran en el dominio de la función C , de tal manera que la $C(u, v) = C(F(x), G(y))$ y de esta manera se logra establecer una relación entre las marginales de las variables aleatorias X y Y y una función bivariada que estamos llamando cópula; una relación de este estilo es presentada por Sklar [8], quien en su teorema plasma la relación existente entre las funciones de distribución marginales, de dos o más variables y su respectiva función de distribución conjunta, a través de un modelo cópula, estableciendo con él la importante relación entre la teoría de cópulas y el modelado en estadística.

Teorema de Sklar

Sea H la función de distribución conjunta de dos variables aleatorias X y Y con marginales respectivas F y G . Entonces existe una cópula C tal que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, se cumple

$$H(x, y) = C[F(x), G(y)].$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; además la cópula C está únicamente determinada sobre $\text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G)$, producto cartesiano de los rangos. De manera análoga, si C es una cópula y F y G son fd, entonces la fd conjunta H dada arriba como la cópula evaluada en las marginales, es una fd conjunta para las v. a. X y Y .

El teorema de Sklar es un resultado fundamental para el desarrollo de nuestro objetivo, puesto que demuestra que es posible separar la estructura de dependencia de las distribuciones marginales; de manera recíproca, también permite construir una distribución multivariada a partir del conjunto de distribuciones marginales y de la selección de una cópula. La estructura de dependencia es capturada en la función cópula y es independiente de las formas de las distribuciones marginales.

En la práctica es usual disponer de las distribuciones de pérdidas para los riesgos por separado. Por lo general, se tiene poco entendimiento de las posibles asociaciones o dependencias entre los distintos tipos de riesgos. Sin embargo, se reconoce el hecho de que puede haber vínculos. El teorema de Sklar nos permite experimentar con diferentes cópulas manteniendo idénticas distribuciones marginales.

Definición 2. Inversa generalizada o función cuantil

La inversa generalizada o función cuantil de la fd F se define por

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$$

La cantidad $x_t = F^{-1}(t)$ define el cuantil t de F .

Corolario 1. (Corolario del teorema de Sklar) Se definen H , C , F y G como en los enunciados anteriores, y F^{-1} y G^{-1} como las respectivas funciones inversas generalizadas de F y G . Entonces $\forall (u,v) \in [0,1]^2$,

$$C(u,v) = H(F^{-1}(x), G^{-1}(y)).$$

Definición 3. (Densidad de una cópula). Si existe, la densidad h de una fd H , se define como:

$$h(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x \partial y}$$

La expresión de la densidad de una cópula, simbolizada por c , es:

$$c(u, v) = \frac{\partial C(x, y)}{\partial u \partial v}$$

A partir de $c(u, v)$, la densidad h de la función de distribución H puede obtenerse con $h(x, y) = c(F(x), G(y))f(x)g(y)$, donde $f(x)$ y $g(y)$ son las respectivas densidades de X y Y .

A continuación presentamos algunas propiedades de las cópulas:

1. **Continuidad.** Una cópula $C(u, v)$ es continua en u y en v . Una cópula satisface la condición fuerte de Lipschitz:

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

2. **Diferenciabilidad.** Dado que $C(u, v)$ es 2 – creciente y continua en ambas variables, es entonces diferenciable en casi todas partes, y

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1.$$

Si bien existen diferentes clases de cópulas, centraremos este estudio a la clase de las cópulas arquimedianas, dado que sus propiedades resultan de gran interés en aplicaciones al sector asegurador; y dentro de esta clase, pondremos nuestra atención en las familias de Frank y Ali-Mikhail-Haq.

Definición 4. (Cópula arquimediana). Sea φ una función continua, estrictamente decreciente de $[0, 1]$ sobre $[0, \infty]$ tal que $\varphi(1) = 0$, y φ^{-1} es la función pseudo inversa de φ . Sea C la función definida de $[0, 1]^2$ sobre $[0, 1]$ tal que $C(u, v) = \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)]$. Esta función es cópula si y solo si φ es convexa; y será llamada cópula arquimediana.

La función φ de la definición anterior es llamada **generadora** de la cópula.

2.1 Medida de dependencia tau de Kendall, τ_K

Se sabe que el coeficiente de correlación lineal es una función de las distribuciones marginales. Por ejemplo, cambiando la forma de las marginales cambiará necesariamente el valor del coeficiente de correlación. Al describir la dependencia utilizando cópulas, sería mucho más natural que las medidas de dependencia se determinaran solo por la

cópula y no por las distribuciones marginales, porque la cópula no depende de la forma de los marginales y la dependencia es capturada de manera exclusiva por la cópula.

Por fortuna hay disponibles tales medidas de dependencia. Las dos medidas de asociación más conocidas son la rho de Spearman y la tau de Kendall, desarrolladas originalmente en el campo de la estadística no paramétrica. Recordaremos acá solo la medida de dependencia tau de Kendall, por ser más popular en el modelado con cópulas.

Sean (x, y) y (x', y') dos observaciones de un vector aleatorio (X, Y) , entonces diremos que (x, y) y (x', y') son concordantes si $(x - x')(y - y') > 0$; en caso contrario diremos que son discordantes.

Definición 5. (Tau de Kendall, τ_K). Sea (X, Y) un vector aleatorio. La medida de concordancia τ_K de Kendall se define como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia de dos observaciones distintas, (x, y) y (x', y') , del vector aleatorio:

$$\tau_K(X, Y) = P[(x - x')(y - y') > 0] - P[(x - x')(y - y') < 0]$$

τ_K tiene las siguientes propiedades:

- $-1 \leq \tau_K \leq 1$
- Si X e Y son concordantes, entonces, $\tau_K = 1$.
- Si X e Y no son concordantes, entonces, $\tau_K = -1$.
- Si X e Y son independientes entonces, $\tau_K = 0$. La implicación inversa no necesariamente se cumple.
- Si α y β son dos funciones estrictamente crecientes, entonces $\tau_K[\alpha(X), \beta(Y)] = \tau_K(X, Y)$. Esto es, el coeficiente de correlación de Kendall permanece invariante ante una transformación estrictamente creciente de las v.a.
- τ_K no depende de la cópula de (X, Y) .

Si la cópula es absolutamente continua, entonces el τ_K se puede expresar de la siguiente manera:

$$\tau_K(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) du dv - 1$$

Para las cópulas arquimedianas se tiene

$$\tau_K(X, Y) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du \quad (1)$$

2.2 Dependencia en la cola

La ocurrencia de pérdidas extremas se encuentra entre las principales preocupaciones de quienes tienen la responsabilidad de gestionar el riesgo y su volatilidad potencial. Cuando hay dependencia entre *v.a.* de pérdidas, es necesario entender el comportamiento conjunto de tales variables cuando se producen resultados extremos. Se ha observado que si ocurren resultados extremos en uno de los riesgos, puede haber mayor probabilidad de resultados extremos en otros riesgos. Se ha sugerido que, si bien en *tiempos normales* la correlación puede ser pequeña, esta puede llegar a ser significativa en *malos tiempos*, como si todo pareciera ir mal a la vez. El concepto de dependencia en la cola aborda esta cuestión. Se han desarrollado varias medidas de dependencia en la cola para evaluar qué tan fuerte es la correlación en los grandes (pequeños) valores.

Definición 6. (Índice de dependencia en la cola superior, λ_U) Para las *v.a.* X y Y con *fd* respectivas F y G , se define el índice de dependencia en la cola superior como

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P[X > F^{-1}(u) > G^{-1}(u)] \quad (2)$$

El índice de dependencia en la cola superior mide la posibilidad de que X tome un *gran valor*, si se sabe que Y toma un *gran valor*, donde el *gran valor* es medido en términos de percentiles equivalentes. Como λ_U es una probabilidad, entonces $\lambda_U \in [0, 1]$. Si U y V son *v.a.* uniformes en $(0, 1)$, entonces podemos reescribir (2) como

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}[F(x) > u \mid G(X) > u] = \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}[U > u \mid V > u] \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - \overbrace{\mathbb{P}[U \leq u]}^u - \overbrace{\mathbb{P}[V \leq u]}^u + \mathbb{P}[U \leq u, V \leq u]}{1 - \mathbb{P}[V \leq u]} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (3) \end{aligned}$$

La fórmula (3) muestra que λ_U también puede expresarse en términos de la cópula en lugar de hacerlo con las distribuciones originales. Existe también el concepto de Índice de dependencia en la cola inferior, λ_L , pero dado que nuestro interés se centra en la cola derecha o superior, no lo presentamos. El índice de dependencia en la cola es una medida muy útil en la descripción de una cópula y sirve para comparar dos cópulas.

3. DEPENDENCIA POSITIVA Y DEPENDENCIA NEGATIVA

Sean X y Y dos riesgos con *fd* marginales respectivas $F(x)$ y $G(y)$ y *fd* conjunta $H(x,y)$. Son conocidas las respectivas cotas inferior y superior de Fréchet para H ([6, 7, 9]):

$$H^i(x, y) = [F(x) + G(y) - 1]_+ \leq H(x, y) \leq \min[F(x), G(y)] = H^s(x, y),$$

donde $(a)_+ = \max(0, a)$.

A la familia de todas las distribuciones bivariadas con marginales conocidas F y G las denotamos por $\mathcal{H}(F, G)$ (o \mathcal{H} cuando no es necesario especificar las *fd* marginales), y escribimos, dependiendo del contexto, $(X, Y) \in \mathcal{H}$ o $H \in \mathcal{H}$. Si X y Y son riesgos con dependencia positiva, escribimos $(X, Y) \in \mathcal{H}^+$ o $H \in \mathcal{H}^+$, siempre que X y Y (F y G) verifiquen las condiciones de Kimeldorf & Sampson indicadas a continuación.

3.1 Condiciones de Kimeldorf & Sampson

La subfamilia \mathcal{H}^+ de riesgos con dependencia positiva verifica las siguientes propiedades ([10]):

1. Para todo x y todo y : $H \in \mathcal{H}^+ \Rightarrow H(x, y) \geq F(x)G(y)$. Esta condición se denomina dependencia **PQD**, y se estudia en la siguiente sección.
2. Si $H \in \mathcal{H}^+$, entonces $H^s \in \mathcal{H}^+$.
3. Si $H \in \mathcal{H}^+$, entonces $H^0(x, y) = F(x)G(y) \in \mathcal{H}^+$
4. Si $(X, Y) \in \mathcal{H}^+$, entonces, para toda función creciente φ , $(\varphi(X), Y) \in \mathcal{H}^+$.
5. Si $(X, Y) \in \mathcal{H}^+$, entonces $(Y, X) \in \mathcal{H}^+$.
6. Si $(X, Y) \in \mathcal{H}^+$, entonces $(-X, -Y) \in \mathcal{H}^+$.
7. Si $H_n \in \mathcal{H}^+$ y $H_n \xrightarrow{D} H$, entonces $H \in \mathcal{H}^+$ donde el símbolo D significa “convergencia en distribución”.

3.2 Dependencia cuadrante-positiva (-negativa), PQD (NQD)

Los riesgos X y Y con fd conjunta H y marginales respectivas F y G tienen dependencia cuadrante positiva, o son **PQD**, si y solo si

$$\forall x \forall y: H(x, y) \geq F(x)G(y). \quad (4)$$

La ecuación (4) es equivalente a

$$\forall x \forall y: \bar{H}(x, y) \geq \bar{F}(x)\bar{G}(y), \quad (5)$$

donde

$$\bar{H}(x, y) = \mathbb{P}(X > x, Y > y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y),$$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad \bar{G}(y) = 1 - G(y),$$

son las probabilidades de excedencia o funciones de supervivencia conjunta y marginales de H , F y G , respectivamente.

Si se invierte la desigualdad (4) o la (5), obtenemos la definición de dependencia cuadrante-negativa o **NQD**. Las distribuciones **PQD** satisfacen las condiciones de Kimeldorf & Sampson; [10]. A continuación presentamos un lema necesario para la prueba del resultado central ulterior. El lema se debe a Hoëffding, el cual en 1940 apareció en una publicación poco conocida, y fue reimpresso en la compilación de sus trabajos por Fisher & Sen [6, 11].

Lema. Hoëffding

Para los riesgos X y Y con marginales respectivas $F(x)$ y $G(y)$, fd conjunta $H(x, y)$ y esperanza finita $\mathbb{E}(XY)$, se verifica

$$\text{Cov}(X, Y) = \iint_{00}^{\infty\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy \quad (6)$$

Nota. En realidad el lema se verifica en general para v. a. con soporte en los reales. Acá tratamos con riesgos, v. a. no negativas con esperanza finita.

Demostración: Para todo $u, v \geq 0$ se verifica $u - v = \int_0^{\infty} [I(v \leq x) - I(u \leq x)] dx$,

donde I denota la función indicadora. La justificación es por casos, de acuerdo con el orden de los números u y v . La presentamos para el caso $u > v$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [I(v \leq x) - I(u \leq x)] dx &= \int_0^v \underbrace{I(v \leq x)}_0 dx + \int_v^u \underbrace{I(v \leq x)}_1 dx + \int_u^{\infty} \underbrace{I(v \leq x)}_1 dx \\ &\quad - \int_0^u \underbrace{I(v \leq x)}_0 dx - \int_u^{\infty} \underbrace{I(v \leq x)}_1 dx = \int_u^v dx = u - v \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) &= \int_0^{\infty} [I(x_2 \leq x) - I(x_1 \leq x)] dx \int_0^{\infty} [I(y_2 \leq y) - I(y_1 \leq y)] dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [I(x_2 \leq x) - I(x_1 \leq x)] [I(y_2 \leq y) - I(y_1 \leq y)] dx dy.\end{aligned}$$

Ahora, sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) dos parejas independientes e idénticamente distribuidas con iguales distribuciones que (X, Y) . Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)] &= \underbrace{\mathbb{E}[(X_1 Y_1)] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[Y_1]}_{\text{Cov}(X, Y)} + \underbrace{\mathbb{E}[(X_2 Y_2)] - \mathbb{E}[X_2] \mathbb{E}[Y_2]}_{\text{Cov}(X, Y)} \\ &= 2\text{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}2\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [I(X_2 \leq x) - I(X_1 \leq x)] [I(Y_2 \leq y) - I(Y_1 \leq y)] dx dy\right] \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathbb{E}\left\{[I(X_2 \leq x) - I(X_1 \leq x)] [I(Y_2 \leq y) - I(Y_1 \leq y)]\right\} dx dy\end{aligned}$$

donde hemos podido intercambiar la esperanza con las integrales por la finitud de $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathbb{E}(XY)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}2\text{Cov}(X, Y) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \mathbb{E}[I(X_2 \leq x)I(Y_2 \leq y)] - \mathbb{E}[I(X_2 \leq x)I(Y_1 \leq y)] \right\} dx dy \\ &\quad + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \mathbb{E}[I(X_1 \leq x)I(Y_1 \leq y)] - \mathbb{E}[I(X_1 \leq x)I(Y_2 \leq y)] \right\} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \mathbb{E}[I(X_2 \leq x, Y_2 \leq y)] - \mathbb{E}[I(X_2 \leq x)] \mathbb{E}[I(Y_1 \leq y)] \right\} dx dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \mathbb{E} \left[I(X_1 \leq x, Y_1 \leq y) \right] - \mathbb{E} \left[I(X_1 \leq x) \right] \mathbb{E} \left[I(Y_2 \leq y) \right] \right\} dx dy \\
 & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\left[\mathbb{P}(X_2 \leq x, Y_2 \leq y) - \mathbb{P}(X_2 \leq x) \mathbb{P}(Y_1 \leq y) \right]}_{H(x,y) - F(x)G(y)} dx dy \\
 & + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \underbrace{\left[\mathbb{P}(X_1 \leq x, Y_1 \leq y) - \mathbb{P}(X_1 \leq x) \mathbb{P}(Y_2 \leq y) \right]}_{H(x,y) - F(x)G(y)} dx dy \\
 & = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(x, y) - F(x)G(y) dx dy
 \end{aligned}$$

La siguiente proposición se basa en el lema anterior y es de importancia principal para el objetivo buscado. Su prueba es una consecuencia inmediata de la definición de variables **PQD** (**NQD**) y el lema de Hoëffding [6, 12].

Proposición 1

Para los riesgos X y Y con marginales respectivas $F(x)$ y $G(y)$, *fd* conjunta $H(x, y)$ y esperanza finita $\mathbb{E}(XY)$, se verifica

$$H \in PQD(NQD) \Rightarrow Cov(X, Y) \geq 0 (\leq 0) \quad (7)$$

En la siguiente sección estudiaremos la prima de la suma de dos riesgos con dependencia **PQD** (**NQD**).

4. PRIMA DE LA SUMA DE DOS RIESGOS CON DEPENDENCIA DESCRITA POR CÓPULAS ARQUIMEDIANAS

Supongamos que X y Y son dos riesgos con marginales respectivas F y G . Estudiamos a continuación la prima del riesgo $X + Y$ bajo el supuesto que la estructura de dependencia de los riesgos X y Y es capturada por algunas cópulas arquimedianas en modelado de riesgos dependientes, a saber, la de Frank y la Ali-Mikhail-Haq.

Sabemos por el Teorema de Sklar, que si $C(u, v)$ es la cópula que describe la estructura de dependencia de los riesgos X y Y , entonces la *fd* conjunta de X y Y es

$$H(x, y) = C[F(x), G(y)]. \quad (8)$$

y su densidad conjunta es

$$h(x, y) = c[F(x), G(y)]f(x)g(y), \quad (9)$$

donde f y g son las densidades respectivas de X y Y y

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v).$$

En este momento podemos calcular la varianza de la v.a. $X + Y$ usando el Lema de Hoëffding:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X + Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [H(x, y) - F(x)G(y)] dx dy, \end{aligned}$$

sabiendo que el signo del integrando determina si la distribución H es **PQD** o **NQD**, con lo cual quedan determinados los valores de las primas según los tres principios en estudio en el presente artículo.

Para estudiar la distribución del riesgo $X + Y$, usaremos el siguiente resultado presentado en no pocos textos de probabilidad, p. e. [13]:

Sean las v. a. X y Y con densidades marginales respectivas f y g y densidad conjunta h . Sea $\ell = \{(x, y) : h(x, y) > 0\}$. Supongamos que

- i. $s = m(x, y)$ y $q = n(x, y)$ definen una transformación uno a uno de ℓ a \mathcal{P} .
- ii. Las primeras derivadas parciales de $x = m^{-1}(s, q)$ y $y = n^{-1}(s, q)$ son continuas sobre \mathcal{P} .
- iii. El (determinante) jacobiano de la transformación es no nulo para $(s, q) \in \mathcal{P}$.

Entonces la densidad conjunta de las v.a. $S = m(X, Y)$ y $Q = n(X, Y)$ está dada por

$$b(s, q) = |J| h[m^{-1}(s, q), n^{-1}(s, q)] I_{\mathcal{P}}(s, q), \quad (10)$$

donde $|J|$ es el valor absoluto del jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial q} \end{vmatrix},$$

e $I_p(\cdot, \cdot)$ es la función indicadora.

Con este resultado procedemos a calcular la densidad marginal de $X+Y$ definiendo las v.a. $S = m(X, Y) = X+Y$ y $Q = n(X, Y) = X/Y$, para $Y > 0$. El objetivo principal es hallar la densidad marginal de S , pero como resultado adicional podemos encontrar también la de Q . Para las funciones m y n indicadas la ecuación (10) toma la forma

$$b(s, q) = \frac{s}{(q+1)^2} h\left(\frac{sq}{q+1}, \frac{s}{q+1}\right), \quad (11)$$

pues $J = -\frac{s}{(q+1)^2}$, y $s \geq 0$. Así, la densidad marginal de S es

$$b_S(s) = \int_0^{\infty} b(s, q) dq = s \int_0^{\infty} \frac{1}{(q+1)^2} h\left(\frac{sq}{q+1}, \frac{s}{q+1}\right) dq. \quad (12)$$

De manera análoga, la densidad marginal de Q es

$$b_Q(q) = \int_0^{\infty} b(s, q) ds = \frac{1}{(q+1)^2} \int_0^{\infty} h\left(\frac{sq}{q+1}, \frac{s}{q+1}\right) ds$$

Con la densidad dada en (12) se calcula el valor esperado de S y su varianza, que también puede obtenerse a partir de (9). Con la densidad también obtenemos la *fd* de la v. a. S : $B_S(s) = \int_0^s b_S(x) dx$. Esta *fd* se puede *comparar* con la *fd* de la v.a. $X+Y$ bajo el supuesto de independencia entre X y Y , que como se sabe, está dada por

$$\mathbb{P}(X+Y < z) = \int_0^{\infty} F(z-y)g(y)dy, \text{ cuando las v. a. } X \text{ y } Y \text{ son independientes.}$$

Es evidente que también es posible calcular el valor en riesgo de S a un nivel

especificado $\alpha \in [0, 1]$ ($VaR_\alpha(S)$ o π_α cuando no es indispensable indicar la v.a. S) y el valor en riesgo condicional o $CVaR_\alpha(S) = \mathbb{E}(S | S > \pi_\alpha)$. Recordamos que el $VaR_\alpha(S)$ es el percentil α de la v.a. S . Es útil disponer de las siguientes expresiones para el $CVaR_\alpha(S)$:

$$CVaR_\alpha(S) = \frac{\int_{\pi_\alpha}^{\infty} s b_S(s) ds}{1 - \alpha} = \frac{\int_{\alpha}^1 VaR_u(S) du}{1 - \alpha}$$

donde la segunda expresión se obtiene observando que $VaR_u(S) = s$ es equivalente a $B_S(s) = u$, por lo que $b_S(s) ds = du$.

Por otra parte, usando la variable exceso de pérdida de S

$$e_S(s) = \mathbb{E}(S - s | S > s) = \frac{\int_s^{\infty} \overline{B_S}(x) dx}{\overline{B_S}(s)},$$

se obtiene sin dificultad otra expresión usual para el valor en riesgo condicional de S , a saber:

$$CVaR_\alpha(S) = VaR_\alpha(S) + e(\pi_\alpha),$$

con lo cual se evidencia que el $CVaR$ es mayor que el correspondiente VaR en una cantidad igual al promedio de las pérdidas que exceden el VaR .

En el resto de la sección veremos dos cópulas arquimedianas con un único parámetro θ usadas en modelos de riesgos dependientes. En cada una de ellas mostraremos un ejemplo numérico concreto para ilustrar los conceptos vistos y el rol del parámetro θ en la determinación de la positividad o negatividad de la dependencia de las v. a. X y Y estudiadas.

4.1 Cópula de Frank

La función generadora de la cópula de Frank es

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right),$$

y la fd de la cópula es

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right], \quad \theta \in (-\infty, \infty) \setminus 0 \quad (13)$$

Esta cópula es **PQD** para valores de θ positivos y **NQD** para valores de θ negativos, y tiende a la cópula independencia cuando θ tiende a cero.

4.2 Cópula Ali-Mikhail-Haq

La función generadora de la cópula de Ali-Mikhail-Haq es

$$\varphi(t) = \ln\left(\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right),$$

y la *fd* de la cópula es

$$C(u, v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}, \quad \theta \in [-1, 1] \quad (14)$$

Esta cópula es **PQD** para valores de θ positivos y **NQD** para valores de θ negativos, y contiene a la cópula independencia cuando $\theta = 0$.

4.3 Ejemplos numéricos

Presentamos a continuación algunos ejemplos para las cópulas arquimedianas uniparamétricas de Frank y Ali-Mikhail-Haq realizados con la ayuda del programa R [14] y la biblioteca *cópula* [15, 16]. Para esto fijaremos dos distribuciones marginales para las v. a. X y Y . Suponemos que X tiene distribución inversa de Gauss (o distribución de Wald) con parámetros $\nu = 10$ y $\lambda = 15.62498$ ($X \sim \text{InvGauss}(\nu, \lambda)$), y Y tiene distribución lognormal con parámetros $\mu = 2$ y $\sigma = 0.85308111$ ($Y \sim \text{LNorm}(\mu, \sigma)$). Así, $\mathbb{E}(X) = 10$, $\mathbb{V}\text{ar}(X) = 64$, $\mathbb{E}(Y) = 10.632$ y $\mathbb{V}(Y) = 121$. El valor esperado de $X + Y$ es $\mathbb{E}(X + Y) = 20.632$. La varianza del riesgo $X + Y$ bajo el supuesto de independencia, es $\mathbb{V}_{\text{ind}}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 185$.

Ejemplo 1. (Cópula de Frank con $\theta = 2$)

Como vimos, la cópula de Frank con $\theta > 0$ es **PQD**, la covarianza entre X y Y es positiva. Usando (8) obtenemos la *fd* $H(X, Y)$, y con el Lema de Hoëffding (6) calculamos la covarianza: $\text{Cov}(X, Y) = 18.566$, y por tanto, $\mathbb{V}\text{ar}(X + Y) = 222.133 > \mathbb{V}_{\text{ind}}(X + Y) = 185$, con lo cual podemos calcular las primas de la suma de los riesgos X y Y . La tabla 1 contiene los resultados. Los valores del coeficiente a para los principios de prima de desviación estándar y de varianza

modificada fueron calculados para que la prima bajo el supuesto de independencia entre las variables aleatorias X y Y fueran iguales. No es difícil probar que al calcular de esta forma los valores de los coeficientes a , las primas con el principio de varianza y de varianza modificada son iguales. No obstante, cuando se suman las primas de X y de Y , los valores de estas son diferentes bajo los principios de primas mencionados.

Tabla 1: Prima de riesgo de $X+Y$ con la cópula Frank (2)

Principio de Prima	a	$\Pi_{Ind}(X+Y)$	$\Pi_{Dep}(X+Y)$	$\Pi(X)+\Pi(Y)$
De varianza	0.1587456	50.00	55.89	50.00
De desviación Estándar	2.1591741	50.00	52.81	61.66
De varianza modificada	3.2752483	50.00	55.89	78.87

Fuente: elaboración propia

Se observa en todos los casos, que, como era de esperarse, al haber dependencia **PQD** entre los riesgos, la prima considerando la dependencia, $\Pi_{Dep}(X+Y)$, es mayor que si se supone la independencia entre los riesgos X y Y , $\Pi_{Ind}(X+Y)$. La tabla 2 muestra el VaR y el $CVaR$ para diferentes valores de α . Como se sabe, el $CVaR_0(X+Y) = \mathbb{E}(X+Y)$.

La figura 1 muestra la función de supervivencia (o de probabilidad de excedencia) de la v.a. en estudio $X+Y$ bajo el supuesto de independencia y de dependencia. Se observa que las curvas se cortan.

Como en este caso la dependencia es **PQD**, entonces, en la cola de la distribución, la probabilidad de que la suma sea mayor que un valor especificado, es mayor en el caso de dependencia que en el de independencia. Caso contrario ocurriría si las v.a. fueran **NQD** (véase el siguiente ejemplo).

Tabla 2. VaR y CVaR del riesgo $X+Y$ con la cópula de Frank(2)

α	$VaR_\alpha(X+Y)$	$CVaR_\alpha(X+Y)$
0.000	0.00	20.63
0.500	16.56	30.75
0.900	38.94	54.15
0.950	48.78	65.02
0.990	73.82	94.07
0.999	120.99	151.60

Fuente: elaboración propia

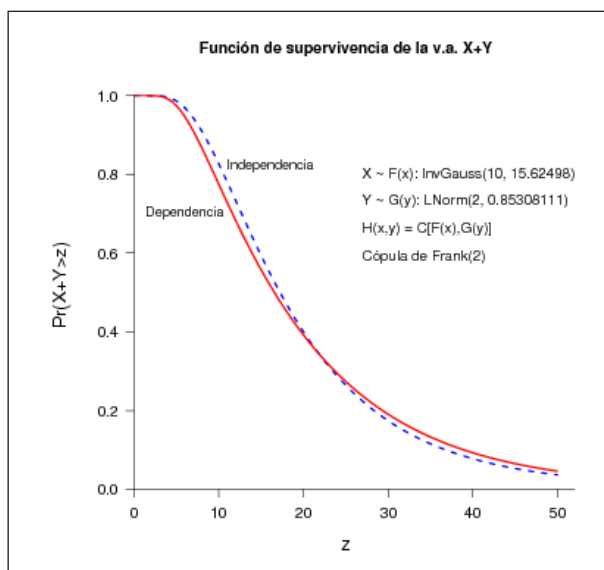


Figura 1. Funciones de supervivencia para las v.a. X+Y cuando X y Y son independientes o dependientes. Ejemplo 1.

Fuente: elaboración propia

Por último, usando (1), $\tau_K = 0.214$ y con (3), $\lambda_U = 0$. La biblioteca *copula* de R tiene los comandos adecuados para calcular ambas medidas.

Ejemplo 2. (Cópula de Frank con $\theta = -2$)

Como vimos, la cópula de Frank con $\theta < 0$ es **NQD**, la covarianza entre X y Y es negativa: $Cov(X, Y) = -16.984$, por tanto, $Var(X + Y) = 151.033 < Var_{ind}(X + Y) = 185$. La tabla 3 contiene las primas de riesgo. Son válidos también acá, y en los siguientes ejemplos, los comentarios sobre los coeficientes a indicados arriba.

Tabla 3. Prima de riesgo de X+Y con la cópula de Frank(-2)

Principio de Prima	a	$\Pi_{Ind}(X + Y)$	$\Pi_{Dep}(X + Y)$	$\Pi(X) + \Pi(Y)$
De varianza	0.1587456	50.00	44.61	50.00
De desviación Estándar	2.1591741	50.00	47.17	61.66
De varianza modificada	3.2752483	50.00	44.61	78.86

Fuente: elaboración propia

Se observa que al haber dependencia **NQD** entre los riesgos, la prima considerando la dependencia, $\Pi_{Dep}(X + Y)$ es menor que si se supone la independencia entre los riesgos X y Y , $\Pi_{Ind}(X + Y)$.

La figura 2 muestra la función de supervivencia de la v. a. $X + Y$ bajo el supuesto de independencia y de dependencia. Las curvas se cortan. Como en este caso la dependencia es **NQD**, entonces, en la cola de la distribución, la probabilidad de que la suma sea mayor que un valor especificado, es mayor en el caso de independencia que en el de dependencia, como se había anticipado en el ejemplo anterior. La tabla 4 muestra el VaR y el $CVaR$ para diferentes valores de α .

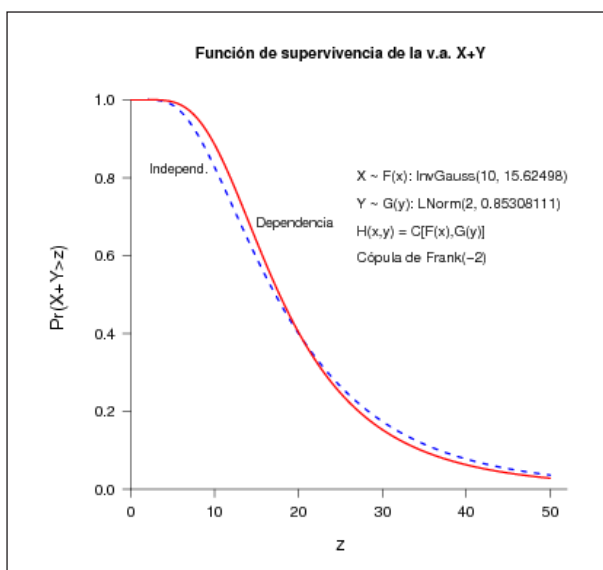


Figura 2 Funciones de supervivencia para las v. a. $X+Y$ cuando X y Y son independientes o dependientes. Ejemplo 2.

Fuente: elaboración propia

Tabla 4. VaR y $CVaR$ del riesgo $X+Y$ con la cópula de Frank(-2)

α	$VaR_{\alpha}(X + Y)$	$CVaR_{\alpha}(X + Y)$
0.000	0.00	20.63
0.500	17.72	28.71
0.900	34.63	47.83
0.950	42.75	57.50
0.990	65.21	85.01
0.999	111.81	142.17

Fuente: elaboración propia

Por último $\tau_K = -0.214$, el negativo de la cópula de Frank(2), y $\lambda_U = 0$.

Ejemplo 3. (Cópula Ali-Mikhail-Haq con $\theta = 0.9$)

Como vimos, la cópula Ali-Mikhail-Haq con $\theta > 0$ es **PQD**, la covarianza entre X y Y es positiva. Usando (8) obtenemos la fd $H(X, Y)$, y con el Lema de Hoëffding (6) calculamos la covarianza: $Cov(X, Y) = 18.931$, y por tanto, $\mathbb{V}ar(X + Y) = 222.862 > \mathbb{V}ar_{ind}(X + Y) = 185$, con lo cual podemos calcular las primas de la suma de los riesgos X y Y . La tabla 5 contiene los resultados. Son válidos también acá los comentarios sobre los coeficientes α en el primer ejemplo.

Tabla 5. Prima de riesgo de $X+Y$ con la cópula Ali-Mikhail-Haq(0.9)

Principio de Prima	α	$\Pi_{Ind}(X + Y)$	$\Pi_{Dep}(X + Y)$	$\Pi(X) + \Pi(Y)$
De varianza	0.1587456	50.00	56.01	50.00
De desviación Estándar	2.1591741	50.00	52.87	61.66
De varianza modificada	3.2752483	50.00	56.01	78.86

Fuente: elaboración propia

Se observa en todos los casos, que al haber dependencia **PQD** entre los riesgos, la prima considerando la dependencia, $\Pi_{Ind}(X + Y)$, es mayor que si se supone la independencia entre los riesgos X y Y $\Pi_{Dep}(X + Y)$. La tabla 6 muestra el VaR y el $CVaR$ para diferentes valores de α .

Tabla 6. VaR y $CVaR$ del riesgo $X+Y$ con la cópula Ali-Mikhail-Haq(0.9)

α	$VaR_\alpha(X + Y)$	$CVaR_\alpha(X + Y)$
0.000	0.00	20.63
0.500	16.88	30.94
0.900	38.93	53.80
0.950	48.49	64.46
0.990	73.06	93.22
0.999	120.03	150.80

Fuente: elaboración propia

Por último $\tau_K = 0.278$ y $\lambda_U = 2.98 \times 10^{-8}$.

Ejemplo 4. (Cópula Ali-Mikhail-Haq con $\theta = -0.9$)

La cópula Ali-Mikhail-Haq con $\theta < 0$ es **NQD**, la covarianza entre X y Y es negativa. Usando (8) obtenemos la fd $H(X, Y)$, con el Lema de Hoëffding (6) calculamos la covarianza: $Cov(X, Y) = -15.625$, y por tanto, $\mathbb{V}ar(X + Y) = 153.751 < \mathbb{V}ar_{ind}(X + Y) = 185$, con lo cual podemos calcular las primas de la suma de los riesgos X y Y . La tabla 7 contiene los resultados. Son válidos también los comentarios sobre los coeficientes α en el primer ejemplo.

Tabla 7. Prima de riesgo de $X+Y$ con la cópula Ali-Mikhail-Haq(-0.9)

Principio de Prima	α	$\Pi_{Ind}(X + Y)$	$\Pi_{Dep}(X + Y)$	$\Pi(X) + \Pi(Y)$
De varianza	0.1587456	50.00	45.04	50.00
De desviación Estándar	2.1591741	50.00	47.41	61.66
De varianza modificada	3.2752483	50.00	45.04	78.86

Fuente: elaboración propia

Al haber dependencia NQD entre los riesgos, $\Pi_{Dep}(X + Y) < \Pi_{Ind}(X + Y)$. La tabla 8 muestra el VaR y el $CVaR$ para diferentes valores de α .

Tabla 8. VaR y $CVaR$ del riesgo $X+Y$ con la cópula Ali-Mikhail-Haq(-0.9)

α	$VaR_{\alpha}(X + Y)$	$CVaR_{\alpha}(X + Y)$
0.000	0.00	20.63
0.500	17.72	28.71
0.900	34.63	47.83
0.950	42.75	57.50
0.990	62.21	85.01
0.999	111.81	142.17

Fuente: elaboración propia

Por último $\tau_K = -0.166$ y $\lambda_U = 0$.

CONCLUSIONES

Las cópulas proveen una posibilidad de gran versatilidad para capturar la dependencia entre riesgos cuando se conocen las distribuciones de probabilidad marginales. Estu-

diar dos riesgos en conjunto con estas herramientas brinda la posibilidad de saber su comportamiento conjunto: ¿qué le pasa, en términos de probabilidad, a un riesgo si el otro toma un gran (pequeño) valor?, ¿cuál podría ser la prima de riesgo si se contrata una póliza para cubrir ambos riesgos?, ¿será menor o mayor que la suma de ambos tomados como si fueran independientes?

En el artículo solo se ha mostrado un par de cópulas arquimedianas con un solo parámetro, ambas con la posibilidad de mostrar dependencia PQD o NQD, pero es posible aplicar la metodología a otras cópulas arquimedianas uniparamétricas o de más parámetros. Es obvio que para hacerlo en la práctica se debe disponer de un número *suficiente* de datos y se deben usar técnicas de ajustes de cópulas, aspecto que está por fuera del alcance del presente artículo, pero para el cual existe ya extensa bibliografía. Véase por ejemplo [9], y la bibliografía citada en él, en particular el algoritmo de Klugman & Parsa, p. 489.

Es de gran utilidad disponer de la posibilidad de calcular el valor en riesgo y el valor en riesgo condicional del riesgo $X + Y$ para un nivel de seguridad dado cuando se considera la dependencia entre los riesgos. De esta forma se afina la medida del riesgo visto en conjunto y se evita caer en una sobrevaloración o subvaloración de la prima de riesgo.

REFERENCIAS

- [1] Hutchinson, T. and Lai, C. (1990). *Continuous Bivariate Distributions, Emphasizing Applications*. Adelaide: Rumsby.
- [2] Kotz, S., Balakrishnan, N. and Johnson, N. (2000). *Continuous Multivariate Distributions*. Vol. 1, Models and Applications, New York: Wiley.
- [3] Mardia, K. (1970). *Families of Distributions Bivariates*. London. Griffin.
- [4] Teugels, J. L.; Sundt, B. *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley, 2004.
- [5] Rolski, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V.; Teugels, J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, 1999.
- [6] Mari, D. D. and Kotz, S. (2001). *Correlation and Dependence*. Imperial College Press.
- [7] Nelsen, R. (2006). *An Introduction to Copulas*. Second Edition. New York: Springer.
- [8] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.
- [9] Klugman, Stuart A.; Panjer, Harry H.; Willmot, Gordon E. (2008). *Loss Models. From Data to Decisions*. Third Edition. Wiley.

- [10] Kimeldorf, G.; Sampson, A. R. Positive dependence orderings. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **39**, Part A, 113-128, 1987.
- [11] Hoëffding, W. *Collected Works*. Editors: N. I. Fisher & P. K. Sen, Springer, (1994).
- [12] Lehmann, E. L. Some concepts of dependence. *Annals of Mathematical Statistics*, **37**, 1137-1153, 1966.
- [13] Mood, A; Graybill, F; Boes, D. *Introduction to the Theory of Statistics*. McGrawHill. Third Edition, 1974.
- [14] R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.
- [15] Yan, Jun (2007). Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula. *Journal of Statistical Software*, 21(4), 1-21. URL <http://www.jstatsoft.org/v21/i04/>.
- [16] Kojadinovic, Ivan; Yan, Jun (2010). Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using the copula R Package. *Journal of Statistical Software*, 34(9), 1-20. URL <http://www.jstatsoft.org/v34/i09/>.