TRABAJO DE GRADO-TIPO MONOGRAFÍA

MÉTODOS PARAMÉTRICOS DE MEDICIÓN DEL VALOR EN RIESGO, APLICADOS A OPCIONES FINANCIERAS SOBRE DIVISAS

Elaborado por:

Carolina María Arboleda Arcila

Asesora Temática:

Diana Sirley Guzmán Aguilar

Asesor Metodológico:

Jorge Henry Betancur Amariles

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE INGENIERÍAS

ESPECIALIZACIÓN EN RIESGOS FINANCIEROS

MEDELLÍN

2014

MÉTODOS PARAMÉTRICOS DE MEDICIÓN DEL VALOR EN RIESGO, APLICADOS A OPCIONES FINANCIERAS SOBRE DIVISAS

Comité Evaluador:

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

FACULTAD DE INGENIERÍAS

ESPECIALIZACIÓN EN RIESGOS FINANCIEROS

MEDELLÍN

2014

Contenido

RESUMEN

Los reguladores y las entidades financieras se interesan cada vez más en la estimación del valor en riesgo de los activos del mercado de capitales; los primeros con el fin de definir su esquema de control, y los segundos con la intención de limitar las pérdidas por cambios en los precios. En los últimos años, las entidades le han dado una mayor participación a los productos derivados en sus portafolios de inversión. No obstante, las metodologías comúnmente utilizadas para la medición del riesgo de mercado son poco precisas cuando se aplican a portafolios que contienen instrumentos financieros no lineales, como las opciones. El objetivo de este trabajo es analizar y aplicar tres metodologías paramétricas utilizadas para la medición del riesgo de mercado en opciones financieras. Así mismo, se compara el desempeño de cada metodología y se concluye sobre los resultados obtenidos.

PALABRAS CLAVES

Riesgo de mercado, Volatilidad, Opciones Financieras, Sistema de Administración de Riesgo de Mercado, Modelos Paramétricos, Cornish-Fisher, Delta-Gamma

ABSTRACT

Regulators and financial institutions are increasingly interested in estimating the value-at-risk of the traded assets in the capital markets; the former in order to define their control scheme and the latter with the intention to limit losses for changes in prices. In recent years, financial institutions have given greater participation to derivatives in their investment portfolios. However, the commonly used methods for measuring market risk are inaccurate when applied to portfolios containing nonlinear financial instruments such as options. The aim of this paper is to analyze and apply three parametric methodologies for measuring market risk in financial options. Likewise, the performance of each method is compared and it concludes on the results obtained.

KEY WORDS

Market Risk, Volatility, Financial Options, Market Risk Management System, Parametric Models, Cornish-Fisher, Delta-Gamma

INTRODUCCIÓN

A partir de la creciente volatilidad en los mercados de capitales, la globalización y la creación de nuevos productos estructurados, el riesgo de mercado ha aumentado rápidamente, trayendo consigo la necesidad de contar con herramientas que permitan medir la exposición frente a los cambios de precios de los activos financieros.

La cuantificación del riesgo de mercado es clave en las entidades para la toma de decisiones y para evaluar la gestión que realizan sobre sus portafolios de inversión, especialmente para estimar las utilidades o pérdidas de acuerdo con el riesgo asumido, de acuerdo con el tipo de productos.

Así mismo, existen metodologías de tipo paramétricas, no-paramétricas y semi-paramétricas utilizadas para calcular el valor en riesgo en el mercado de capitales. En el caso de Colombia, la Superintendencia Financiera de Colombia establece dentro de su marco regulatorio un método estándar de tipo paramétrico, con criterios determinados por el regulador, para medir el riesgo de mercado de los portafolios de las entidades financieras, indicando la metodología que debe aplicarse a cada producto, incluyendo derivados como las opciones financieras. (Moncada y Bello, 2009)

El objetivo principal de esta monografía es comparar tres metodologías paramétricas para la medición del valor en riesgo: aproximación Delta-Gamma, aproximación cuadrática del precio del derivado, y expansión de Cornish-Fisher; aplicadas a opciones financieras con subyacente la tasa de cambio peso-dólar. Así mimo, se evaluará qué medida de riesgo ofrece la mejor estimación, según las metodologías aplicadas.

1. CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Definición del Problema

Actualmente, se conocen diversas metodologías matemáticas para medir el riesgo de mercado de productos financieros. Los modelos que cuantifican el riesgo de mercado de un portafolio que incluye opciones financieras deben estar diseñados propiamente para este tipo de derivados, así como ajustarse a la volatilidad propia de este tipo de productos.

A diferencia de la mayoría de productos financieros, las opciones tienen un comportamiento no lineal (García y Martínez, 2005), el cual no es contemplado en los supuestos de los principales modelos que miden el riesgo de mercado, por lo que se hace necesario establecer metodologías propias para este tipo de instrumentos y obtener así un valor en riesgo más ajustado a su comportamiento real.

El modelo estándar establecido por la Superintendencia Financiera de Colombia es un modelo estático, que no refleja la realidad de los movimientos de mercado y para el caso de las opciones financieras no brinda información de calidad, por lo cual las entidades se ven obligadas a implementar modelos internos adicionales que les permitan gestionar sus inversiones de forma apropiada y con información más ajustada a la realidad, especialmente cuando se tienen posiciones en instrumentos derivados, haciendo que los procesos de monitoreo y control sean más operativos e ineficientes.

1.2. Justificación

Una adecuada administración de los portafolios de inversión requiere tener presente los principales riesgos financieros que afectan el mercado de capitales, en especial el riesgo de mercado, el cual se define como la exposición del valor del portafolio a los cambios de precios de los activos financieros en el mercado (Moncada y Bello, 2009).

Actualmente, el mercado ofrece nuevos productos estructurados como las opciones financieras, las cuales tienen un comportamiento diferente a los productos tradicionales, de tipo no-lineal, creando la necesidad de contar con herramientas y metodologías matemáticas y estadísticas definidas propiamente para este tipo de productos derivados. Dichos modelos deben cuantificar el riesgo de mercado de forma precisa, teniendo en cuenta las particularidades y variables características de las opciones financieras, como son la volatilidad, el vencimiento, el precio del subyacente, entre otras.

Las entidades financieras que compran o venden opciones o cualquier otro derivado en el mercado *OTC*[1] (*over-the-counter)* se enfrentan al problema de administración de riesgo de este tipo de operaciones. Si las opciones negociadas pudieran ser transadas en un mercado organizado y estandarizado, la neutralización de la exposición al riesgo sería fácilmente realizable al adquirir una opción de las mismas características. Sin embargo, cuando las opciones que se negocian son hechas a la medida y de acuerdo a las necesidades de cada cliente, la cobertura a los riesgos se vuelve mucho más compleja.

Como parte del objetivo de supervisión del sistema financiero, la Superintendencia Financiera de Colombia propone dentro de su marco regulatorio un modelo para medir y reportar la exposición al riesgo de mercado de las entidades financieras. No obstante, dicho modelo consta de parámetros estáticos que no permiten reflejar la realidad de los mercados de productos derivados en sus resultados, y por ende obliga a las entidades a implementar modelos internos, adicional al modelo estándar, para obtener un resultado de valor en riesgo más próximo a la realidad.

En el presente trabajo, se analizarán metodologías paramétricas que pueden ser aplicados para medir el riesgo de mercado al que está expuesto un portafolio con opciones financieras, incluyendo el modelo determinado por la Superintendencia Financiera de Colombia, y concluir acerca del(los) modelo(s) más adecuado(s) para estimar el riesgo de mercado de opciones financieras.

1.3. Preguntas de Investigación

1.3.1. General

¿Qué resultado se obtiene del análisis de los métodos paramétricos para la medición del riesgo de mercado para opciones financieras, tales como Aproximación Delta-Gamma, Aproximación cuadrática del precio del derivado, y Expansión de Cornish y Fisher?

---

[1] El mercado Over The Counter, OTC, es un sistema de cotización de valores donde los participantes negocian directamente entre ellos, sin la intermediación de una bolsa. Las operaciones se realizan a través de redes de cómputo o telefónicas que conectan entre sí a los agentes de todo el mundo (Hull, 2002)

1.3.2. Específicas

- ¿Cuáles son las principales características de los métodos paramétricos para cuantificar el valor en riesgo de las opciones financieras?
- ¿Cómo se realiza la aplicación de los métodos paramétricos para calcular el valor en riesgo de las opciones financieras?
- ¿Cómo es la eficiencia de los métodos aplicados al cálculo valor en riesgo para opciones peso-dólar, evaluada a través de la metodología de Backtesting?

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Analizar los métodos paramétricos para la medición del riesgo de mercado para opciones financieras, tales como Aproximación Delta-Gamma, Aproximación cuadrática del precio del derivado, y Expansión de Cornish y Fisher.

1.4.2. Específicos

- Identificar las principales características de los métodos paramétricos para cuantificar el valor en riesgo de las opciones financieras.
- Realizar la aplicación de los métodos paramétricos para la medición de valor en riesgo en opciones financieras.
- Aplicar la metodología de Backtesting, y evaluar la eficiencia de los métodos paramétricos utilizados para medir el valor en riesgo de opciones peso-dólar.

2. CAPÍTULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Breve Marco Histórico

En la actualidad, los mercados de capitales a nivel global enfrentan diversos cambios, entre los cuales se encuentra principalmente un crecimiento acelerado en su desarrollo, el cual trae consigo nuevos riesgos asociados y por ende la necesidad de contar con herramientas adecuadas para gestionarlos de manera efectiva. Esta situación constituye una de las principales preocupaciones para los entes reguladores, encargados de supervisar dichos mercados, y quienes deben garantizar la estabilidad del sistema financiero a través de la determinación de normas aplicables al tema (Martínez, 2007).

En los últimos años, los fondos de inversión que invierten en los mercados de capitales han presentado pérdidas significativas en diversos periodos, debido en gran parte a la volatilidad en los precios de los activos que componen los portafolios. Adicionalmente, la creciente internacionalización de los mercados en el mundo y la introducción de nuevos productos exóticos han incrementado la exposición al riesgo de mercado, entendido como la probabilidad de incurrir en pérdidas por la variación de los precios de los activos en los que se tienen posiciones (Moncada y Bello, 2009).

2.2. Valor en Riesgo

A partir de la creciente complejidad en la negociación de instrumentos financieros, el poco conocimiento de las entidades para establecer la real exposición al riesgo en los mercados de capitales, y la falta de estándares aceptados a nivel internacional, se dio el surgimiento y divulgación del método conocido como Valor en Riesgo (VaR), y que actualmente es conocido y utilizado en todo el mundo. (Aragonés y Blanco, 2004)

RiskMetrics, metodología propuesta por JP Morgan Bank en 1995, expone un conjunto de herramientas para medir la exposición de un portafolio de inversión al riesgo de mercado, incluyendo la metodología de Valor en Riesgo, el cual permite estimar la máxima pérdida esperada de una inversión para un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dado.

García y Martínez (2005) señalan que el concepto de VaR se puede definir formalmente como la pérdida que puede acaecer en una cartera, con probabilidad y en un intervalo de tiempo *t*. Matemáticamente, el VaR es el *(1- α)*-cuantil de la distribución *P/G* (Pérdidas/Ganancias), es decir, que satisface la siguiente relación:

$$P[v(w) \leq VaR] = 1 - \propto \qquad 2{,}1$$

Donde *v(w)* denota el cambio en el valor de la cartera e implica que *v(0)=0* y suponemos que la distribución de *P/G* es una función continua y estrictamente monótona. Una cuestión importante es que el valor de α sea un nivel de confianza adecuado.

Con la introducción de esta metodología, los organismos de supervisión comenzaron a impulsarlo y así cumplir con su principal objetivo de vigilancia y control en los mercados financieros, garantizando un sistema seguro y confiable.

De igual forma, basados en las premisas del Modelo VaR, se han desarrollado varias metodologías para estimar el riesgo al que se está expuesto. Los modelos para medir el valor en riesgo de un portafolio se han convertido en los últimos años en las herramientas más ampliamente utilizadas para cuantificar el riesgo de mercado y que contribuyen en gran medida a su adecuada gestión dentro de las entidades. (García *et al*, 2005).

2.3. Derivados Financieros

Los derivados son instrumentos financieros cuyo valor se deriva de los precios de otros activos, los cuales son llamados subyacentes. Los subyacentes usados pueden ser: tasas de interés, acciones, bonos, divisas o incluso materias primas (Lamothe y Pérez, 2003). Los derivados financieros se reconocen por cumplir con las siguientes características:

- Su precio depende del cambio en el precio del activo subyacente
- Al inicio del derivado se puede presentar una inversión mínima o nula
- Sus condiciones se pactan al inicio
- Su liquidación se realiza siempre en una fecha futura

Los derivados financieros pueden negociarse en mercados organizados o estandarizados, o en el mercado *Over The Counter, OTC,* siendo el último donde las partes acuerdan cada una de las condiciones de los contratos según sus propias necesidades, mientras que en los mercados estandarizados las condiciones de los contratos se encuentran predeterminadas. (Mascareñas, 2012)

Según Hull (2002), los principales contratos de derivados son los que se relacionan a continuación:

- **Futuro o forward:** Acuerdo para comprar o vender un activo subyacente en una fecha futura a un precio determinado. Los futuros se negocian en mercados estandarizados mientras que los forward se negocian en los mercados OTC.
- **Opciones:** Acuerdo que otorga el derecho mas no la obligación a su tenedor de comprar o vender un activo subyacente en una fecha futura a un precio determinado.
- **Swaps:** Acuerdo entre dos partes para el intercambio de flujos de caja en el futuro, de acuerdo a unas fechas establecidas y los tipos de interés o de cambio que se intercambiarán (activo subyacente).

Así mismo, el autor describe que las principales variables que afectan el precio de un derivado son:

VARIABLES		DEFINICIÓN
Precio del activo subyacente	S_o	Precio al cual se transa el activo subyacente en los mercados de valores
Tasa de interés libre de riesgo	r	Tasa de interés local que se obtiene al invertir en un activo que está libre de un riesgo de impago
Precio de ejercicio	K	Precio pactado para realizar la compra o venta del activo subyacente determinado en el derivado
Volatilidad	σ	Medición de la variabilidad de los retornos del activo subyacente
Plazo al vencimiento	T	Tiempo de vigencia del derivado hasta su fecha de vencimiento, donde se liquidan las condiciones pactadas

Tabla 2,1. Variables de un derivado financiero
Fuente: Hull, 2002

2.3.1. Opciones financieras

De acuerdo con Hull (2012), y como se mencionó en las definiciones de los tipos de derivados existentes, una opción es aquella que le da a su tenedor o comprador el derecho para transar un activo subyacente. Quien adquiere la opción se encuentra en la posición larga y quien la vende en la posición corta. El propietario de la opción no está obligado a ejercer ese derecho, y por adquirir dicho derecho requiere realizar un pago inicial, llamado prima; por lo tanto quien vende la opción está obligado a ejecutar la operación a la que el comprador de la opción tiene derecho, y por esto recibe al inicio el valor de prima. Según el autor, existen básicamente dos tipos de opciones:

- **Opciones de compra:**

  Una opción de compra (call) es aquella que le da a su propietario el derecho a comprar un activo en una fecha determinada a un precio pactado. En este caso, la opción será ejercida cuando el precio del activo subyacente sea superior al precio pactado, ya que le darán la posibilidad al tenedor de comprar el activo a un menor precio, permitiendo obtener ganancias ilimitadas, pues no existe un límite en el aumento del precio del activo, y a su vez limita las pérdidas solamente al valor de la prima pagada con se observa en el *Gráfico 2,1*.

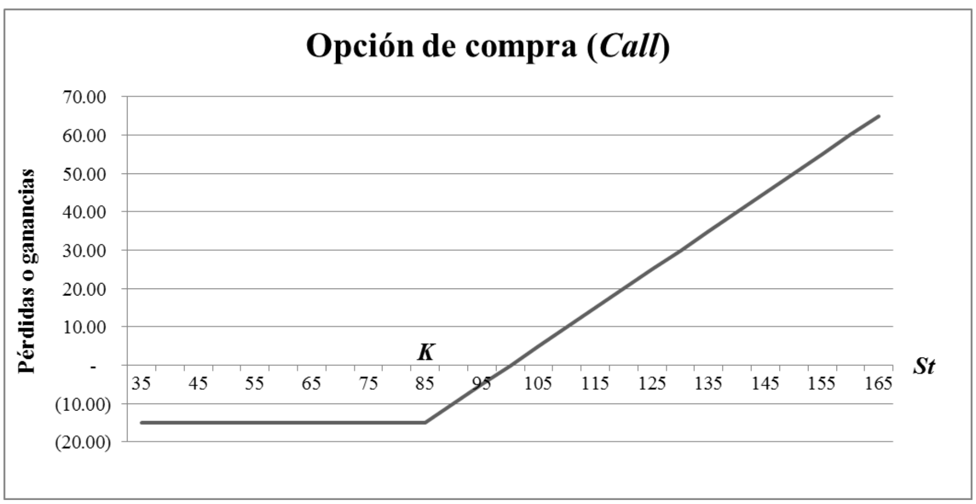

Gráfico 2,1. Pérdidas o ganancias posición larga opción de compra
Fuente: Elaboración propia

Siendo *St* el precio que puede tomar el activo subyacente en el momento t en que se ejerce la opción

Las metodologías de valor en riesgo del presente trabajo serán aplicadas sobre una posición larga en opciones de compra tipo europeas.

Por su parte, cuando un inversionista tiene la posición corta, es decir vende la opción, se ve obligado a cumplir la operación pactada en caso que la contraparte decida hacer ejercicio del derecho que adquirió, y por el cual pagó el valor de la prima a la posición corta de la operación. La función de pérdidas y ganancias obtenidas en una posición corta de una opción de compra se muestran en el *Gráfico 2,2*.

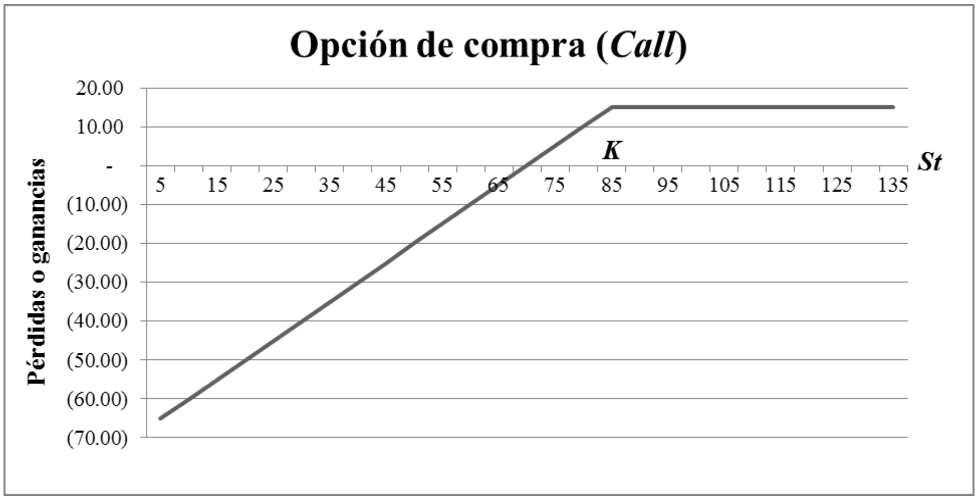

Gráfico 2,2. Pérdidas o ganancias posición corta opción de venta
Fuente: Elaboración propia

Según la fecha de ejercicio de una opción, éstas se pueden clasificar como opciones europeas o americanas. Las opciones europeas sólo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento, mientras que las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento pactada, (Jorion, 2007).

- **Opción de venta**

Una opción de venta (put) es aquella donde el tenedor tiene el derecho a vender un activo en una fecha determinada a un precio pactado. En este caso, la opción será ejercida cuando el precio del activo subyacente sea menor al precio pactado, ya que le darán la posibilidad al tenedor de vender el activo a un menor precio, permitiendo obtener ganancias limitadas, basados en el supuesto que el activo nunca tomará un valor menor que cero, y a su vez se limitan las pérdidas al valor de la prima pagada, como se observa en el *Gráfico 2,3*.

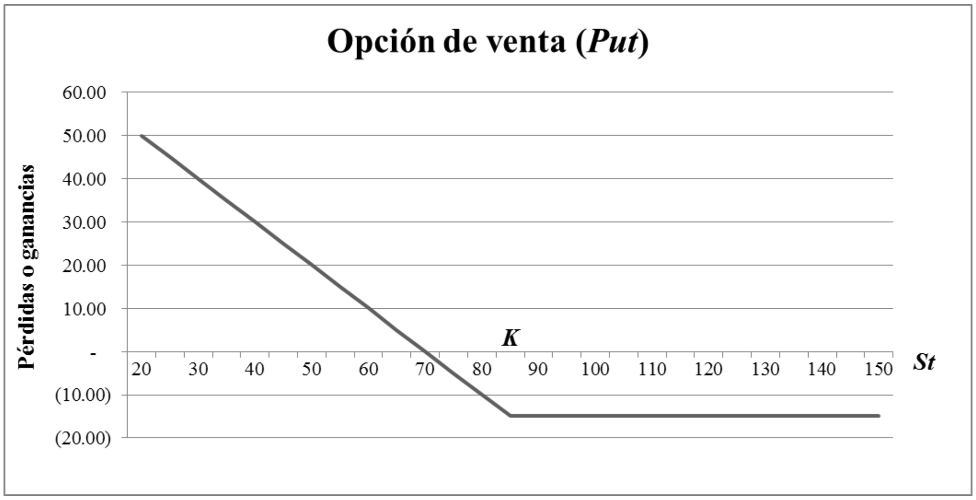

Gráfico 2,3. Pérdidas o ganancias posición larga opción de venta
Fuente: Elaboración propia

Por el contrario, una posición corta en una opción de venta genera ganancias limitadas al valor de la prima pagada por el comprador de la opción y pérdidas ilimitadas de acuerdo al aumento en el precio del activo subyacente. La función de pérdidas y ganancias obtenidas en una posición corta de una opción de venta se muestran en el *Gráfico 2,4*.

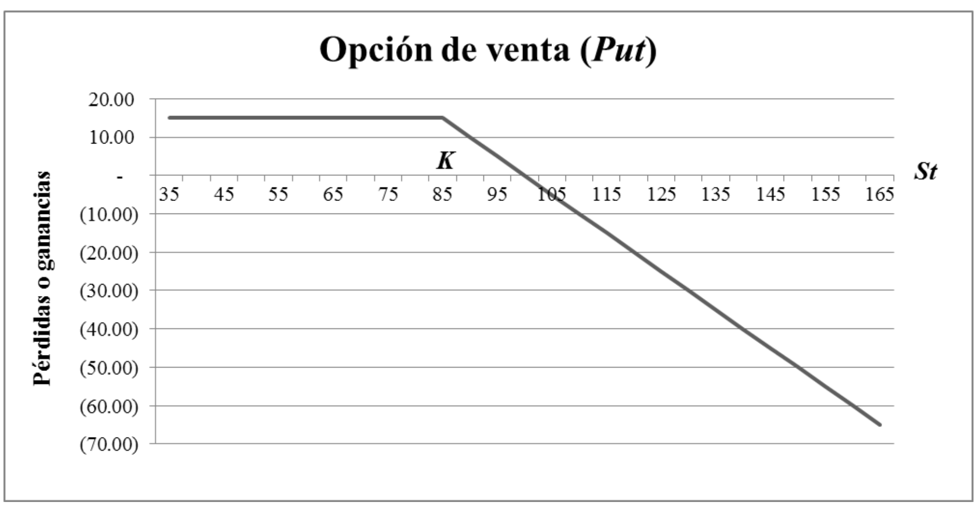

Gráfico 2,4. Pérdidas o ganancias posición corta opción de venta
Fuente: Elaboración propia

2.4.Valoración de opciones

La determinación del precio de las opciones se realiza de acuerdo con la oferta y demanda en los mercados de negociación, afectado por los factores propios de este instrumento, donde su valor es igual a la prima que se estima como pago inicial por parte del comprador. Su variación depende del tiempo y de los cambios que se presenten en el precio del activo subyacente en el mercado. Para el caso de las opciones de compra, su precio será la diferencia entre el precio de mercado del subyacente y el precio de ejercicio, si esta diferencia es positiva, de lo contrario será igual a cero (Durán, 2013):

$$c = max[S_t - K\ ;\ 0] \qquad 2,2$$

Donde, c es el precio de una opción de compra, o el valor de su prima. Para el caso de las opciones de venta, su precio estará dado por la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado del subyacente, si la diferencia es positiva, o en su defecto será de cero:

$$p = max[K - S_t\ ;\ 0] \qquad 2,3$$

A lo largo del tiempo se han desarrollado diversas metodologías para la valoración de opciones, es decir para calcular el valor de la prima que se debe pagar por una opción de ciertas características. Entre los más relevantes se encuentran árboles binomiales, diferencias finitas, simulación Montecarlo, modelo de Black Scholes (Meier, 2012).

2.4.1. Cálculo volatilidad

Para medir el riesgo de un activo, la estimación más utilizada es la volatilidad, medida a través de la desviación estándar, la cual representa qué tan dispersos se encuentran los datos respecto a la media, es decir representa la posibilidad que los retornos del precio del activo se alejen del valor esperado o más probable. Para el caso de la valoración de derivados financieros, la volatilidad incide en el riesgo que se corre al tener una posición en el activo subyacente correspondiente, además puede interpretarse como la fluctuación de los precios del activo subyacente en un periodo de tiempo, que estima la frecuencia e intensidad de los cambios que se dan en el precio del activo (Bahi, 2007).

De acuerdo con RiskMetrics[2], una forma de capturar las características dinámicas de la volatilidad es utilizar una media móvil exponencial de observaciones históricas, donde las últimas observaciones llevan el mayor peso en la estimación de la volatilidad, conocido como modelo *EWMA*[3]. Este enfoque tiene dos ventajas importantes sobre el modelo que pondera las observaciones por igual.

En primer lugar, la volatilidad reacciona más rápido a las crisis en el mercado, ya que los datos más recientes tienen más peso que los datos en el pasado distante. En segundo lugar, después de un choque (un gran rendimiento), la volatilidad disminuye exponencialmente a medida que el peso de la observación de choque cae. En contraste, el uso de un simple cálculo de media móvil lleva a cambios relativamente abruptos en la desviación estándar, una vez que el choque se sale de la muestra de medición, el cual, en la mayoría de los casos, puede ser de varios meses después de que ocurre.

Según Cobo (2003), el modelo EWMA consiste en asignarle un mayor peso a las observaciones más recientes, siendo consistente con la mayoría de series financieras las cuales son de memoria corta. Representa una ventaja sobre la volatilidad histórica ya que esta no captura rápidamente fuertes variaciones en los precios de los activos, de esta forma con esta clase de modelo es posible construir mejores y más precisas estimaciones en épocas donde se presentan turbulencias en los mercados financieros. El modelo define la varianza condicional en el día *t* mediante:

$$\sigma_t = \sqrt{\lambda\sigma^2{}_{t-1} + (1-\lambda)r^2{}_{t-1}} \qquad 2,4$$

Donde,

- λ es el factor de decaimiento seleccionado
- r^2 es el cuadrado del rendimiento del día anterior
- σ^2 es la varianza calculada para el día anterior
- *t* es el día en que se calcula la volatilidad

[2] Modelo de medición de riesgo introducido por JP Morgan (1996)
[3] Exponentially Weighted Moving Average

De acuerdo con la metodología propuesta por RiskMetrics (1996), el factor de decaimiento (*Lambda* λ) se selecciona mediante un proceso de optimización a través del criterio de la raíz del error cuadrático medio (RMSE). El error cuadrático medio es un estimador que mide como fueron los errores promedio en las predicciones realizadas, y es expresado como la diferencia entre el estimador y lo que se estima. Las diferencias son causadas principalmente a la aleatoriedad presente en las variables utilizadas o por falta de información necesaria para realizar pronósticos más precisos. Si se define la varianza del error de predicción ($\varepsilon_{t+1|t}$) como:

$$\varepsilon_{t+1|t} = r^2{}_{t+1} - \sigma^2{}_{t+1|t} \qquad 2{,}5$$

Se tiene entonces que el valor esperado del error de predicción es cero, es decir:

$$E_t\left[\varepsilon_{t+1|t}\right] = E_t[r^2{}_{t+1}] - \sigma^2{}_{t+1|t} = 0 \qquad 2{,}6$$

Con base en esta relación, un requisito natural para la elección de *Lambda (λ)* es reducir al mínimo los errores promedio al cuadrado. Cuando se aplica a los pronósticos diarios de la varianza, esto lleva a la raíz del error medio de predicción al cuadrado, que está dado por:

$$RMSE_v = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[r^2{}_{t+1} - \hat{\sigma}^2{}_{t+1|t}(\lambda)]^2} \qquad 2{,}7$$

Donde el valor de predicción de la varianza está escrito explícitamente como una función de *Lambda (λ)*. En la práctica nos encontramos con el factor de disminución óptima de *Lambda (λ)** mediante la búsqueda del mínimo RMSE sobre diferentes valores de *Lambda (λ)*. Es decir, buscamos el factor de decaimiento que produce los menores errores, es decir aquel que minimiza la medida del error (RiskMetrics, 1996).

2.4.2. Modelo de Black-Scholes para valoración de opciones

De acuerdo con Hull (2002), a principios de los años setenta, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton hicieron una contribución fundamental en la valoración de las opciones. A partir de esto se ha desarrollado lo que hoy se conoce como el modelo Black-Scholes. Este modelo ha influenciado en gran manera la forma en la que los operadores del mercado valoran y realizan coberturas con opciones. También se ha convertido en un elemento importante para el crecimiento y éxito de la ingeniería financiera en los últimos años.

Un modelo para valorar opciones debe realizar varios supuestos sobre cómo evolucionan los precios del activo subyacente a lo largo del tiempo. El principal supuesto que establece el modelo Black-Scholes es que el precio del activo sigue un paseo aleatorio. Esto significa que los cambios porcentuales en el precio del activo en un período corto de tiempo siguen una distribución normal (Hull, 2012).

Cuando se supone que la variable sigue un paseo aleatorio, implica que el precio del activo subyacente en cualquier momento del futuro sigue una distribución lognormal. Una variable que sigue esta distribución tiene la propiedad que su logaritmo natural se distribuye normalmente. (Hull, 2002)

Según Meier (2012), Black, Scholes y Merton asumieron que el precio del activo subyacente se comportaba de acuerdo a un movimiento browniano geométrico4. Al realizar esta hipótesis, y utilizando las propiedades del cálculo diferencial estocástico, determinaron que cualquier derivado de tipo europeo cuyo subyacente tuviera el mismo comportamiento de este modelo debía satisfacer una cierta ecuación diferencial.

La ecuación de Black-Scholes se basa en las siguientes hipótesis de mercado:

- El precio S(t) del subyacente tiene una distribución lognormal siguiendo el modelo:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \qquad 2,8$$

Donde,

- *S(t)* es la cotización del activo subyacente

[4] Proceso estocástico en tiempo continuo en el que el logaritmo de la cantidad que varía al azar sigue un movimiento aleatorio. Se entiende por proceso estocástico a un conjunto de variables aleatorias que dependen de un parámetro, por ejemplo el tiempo (Duana, 2008)

- *dS(t)* es la variación de S en un intervalo infinitesimal de tiempo dt
- μ es la esperanza matemática del rendimiento instantáneo del subyacente
- σ es la desviación estándar del rendimiento del activo subyacente
- *dW(t)* es un proceso que sigue un movimiento browniano geométrico

- Los precios del activo subyacente sigue una caminata aleatoria, asumiendo que un periodo corto de tiempo siguen una distribución normal, con parámetros μ y σ constantes
- El precio del activo y el precio de la opción dependen de la misma fuente de incertidumbre
- Se puede formar un portafolio con el activo subyacente y una opción sobre éste para eliminar la incertidumbre
- No se presentan costos de transacción, impuestos, o pago de dividendos en el caso de acciones
- No existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo
- Los inversionistas pueden prestar o pedir prestado al mismo interés libre de riesgo, r cuyo valor es constante
- El portafolio debe obtener una rentabilidad igual a la tasa libre de riesgo

Luego se considera que *V(t,s)* es una función de las variables *t* y *S(t).* Por lo tanto, *V[t, S(t)]* representará el valor de un derivado en el momento *t*, y *S(t)* el precio del activo subyacente en el mismo momento. De acuerdo con la fórmula de Îto[5] en forma diferencial indica que *V* satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica (Meier, 2012):

$$dV[t,S(t)] = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\big(t,S(t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big(t,S(t)\big)\sigma^2 S^2(t) + \frac{\partial V}{\partial S}\big(t,S(t)\big)\mu S(t)\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\big(t,S(t)\big)\sigma S(t)dW(t) \qquad 2{,}9$$

[5] Identidad utilizada en el cálculo para encontrar el diferencial de una función dependiente del tiempo de un proceso estocástico (Duana, 2008)

Si luego se agrega la hipótesis que no existe arbitraje en el mercado, es posible definir de mejor manera esta ecuación. Por lo tanto, se construye un portafolio dinámico en el tiempo formado por:

- Δ Acciones
- Una posición corta en el derivado

Ahora es posible determinar una medida de probabilidad en la cual todo portafolio libre de riesgo, rente a la tasa de mercado (r). En efecto, se puede ver que si elegimos:

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}\big(t, S(t)\big) \qquad 2{,}10$$

Entonces el portafolio

$$\pi\big(t, S(t)\big) = \Delta(t)S(t) - V\big(t, S(t)\big) \qquad 2{,}11$$

No tiene riesgo. Por lo tanto, bajo la probabilidad de riesgo neutral, su crecimiento a lo largo del tiempo debe estar determinado por la tasa de interés libre de riesgo, denotada como r:

$$\frac{\partial V}{\partial t}\big(t, S(t)\big) + r\frac{\partial V}{\partial S}\big(t, S(t)\big)S(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big(t, S(t)\big)\sigma^2 S^2(t) = rV\big(t, S(t)\big) \qquad 2{,}12$$

De acuerdo con Meier (2012), se conoce como fórmula de Black-Scholes a la solución de la ecuación diferencial *2,8*. Para dar una de las posibles soluciones, se consideran los siguientes parámetros para el caso de una opción call con precio de ejercicio *K* y vencimiento *T*, teniendo que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}\big(t, S(t)\big) + r\dfrac{\partial V}{\partial S}\big(t, S(t)\big)S(t) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}\big(t, S(t)\big)\sigma^2 S^2(t) - rV\big(t, S(t)\big) = 0 \\ V\big(T, S(T)\big) = \max[S(T) - K\,; 0] \quad con\ K \geq 0 \end{cases} \qquad 2{,}13$$

Donde la solución es:

$$c = e^{-rt}\tilde{E}\max[S(T) - K\,; 0] = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \qquad 2{,}14$$

Aquí, *N(*)* es una función de la distribución acumulada de una normal estándar:

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad 2{,}15$$

Teniendo las siguientes variables:

- c es el precio de la opción de compra
- S_0 es el precio del activo subyacente en la fecha de valoración
- K es el precio de ejercicio de la opción
- r es la tasa libre de riesgo local
- r_f es la tasa libre de riesgo del activo subyacente. Para el caso de divisas, se refiere a la tasa foránea
- σ es el valor de la volatilidad de los rendimientos del activo subyacente
- T es el plazo al vencimiento de la opción

Para el caso de una opción put con precio de ejercicio K y vencimiento T, se tiene la siguiente solución:

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \qquad 2{,}16$$

2.5. Valor en riesgo para derivados

Los métodos utilizados para medir el valor en riesgo de los derivados brindan información acerca de la velocidad de cambio de los parámetros y su exactitud. La velocidad se convierte en un factor importante cuando se tiene exposición a diferentes factores de riesgos lo que implica un gran número de correlaciones, como es el caso de las opciones, donde su valor se ve afectado por el cambio en el valor del subyacente, volatilidad implícita, tasa de interés o tiempo. Éstas variables se manejan de forma más fácil con un enfoque que involucre las griegas, dados los componentes no lineales de las opciones (García y Martínez, 2005).

Las griegas son llamadas así por su representación con letras del alfabeto griego. Se utilizan para cuantificar las exposiciones que contienen las opciones a los factores de riesgo. Cada una mide cómo el precio de la opción debería responder a un cambio en alguna variable, ya sea el precio del subyacente, la volatilidad implícita, la tasa de interés o el plazo (García y Martínez, 2005).

2.5.1. Letras griegas para derivados

De acuerdo con Mascareñas (2012), existen diversas variables externas que afectan el precio de una opción, cuyo efecto puede ser estudiado a través de ciertos coeficientes, y que sirven además para establecer medidas de riesgo en los portafolios con opciones. Estos coeficientes se denominas *letras griegas*. Según el autor, se definen y calculan de la siguiente manera:

- ***Delta (δ):*** Se define como la variación que se presenta en el precio de la opción por una unidad de cambio en el precio del activo subyacente. Se conoce también como el coeficiente de cobertura, el cual indica el número de unidades del activo subyacente necesario para cubrir una posición en opciones. Se calcula a través de la derivada parcial del precio de la opción con relación al precio del activo subyacente. Se calcula de la siguiente manera:

Opción de compra	Opción de venta
$\delta = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-r_f T} N(d_1)$	$\delta = \frac{\partial p}{\partial S} = -e^{-r_f T} N(-d_1)$

Tabla 2,2. Delta (δ) de una opción
Fuente: Hull, 2012

También puede definirse el *Delta (δ)* de una opción como la probabilidad de ejercer la misma.

- ***Gamma (γ):*** Mide el efecto que la inestabilidad del mercado produce en el valor de *Delta (δ)*. Por lo tanto, el *Gamma (γ)* de una opción mide la tasa de cambio del *Delta (δ)* cuando el precio de la acción varía una unidad. Matemáticamente se expresa como la segunda derivada del precio de la opción respecto a la variación en el precio del activo subyacente o la primera derivada de *Delta (δ)*:

Opción de compra	Opción de venta
$\gamma = \frac{\partial \delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = e^{-r_f T} \frac{Z(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$	$\gamma = \frac{\partial \delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = e^{-r_f T} \frac{Z(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$

Tabla 2,3. Gamma (γ) de una opción
Fuente: Hull, 2012

Siendo $Z(d_1)$ es el valor función de densidad de probabilidad de la distribución normal.

Gamma (γ) es una medida de la sensibilidad de *Delta (δ)*, si la última representa la velocidad de cambio, *Gamma (γ)* representa la aceleración de dicho cambio.

- ***Theta (θ):*** El precio de una opción depende directamente del tiempo que queda para el vencimiento de la misma. Cuanto más tiempo le falte, mayor valor tendrá la opción, por lo tanto la prima de la opción disminuirá con el paso del tiempo debido a la cercanía con la fecha de vencimiento (siempre que las demás variables se mantengan constantes). El coeficiente de *Theta (θ)* muestra la variación en el precio de una opción como consecuencia de una variación en el tiempo que resta para su vencimiento, se puede considerar una medida del deterioro temporal que sufre la opción. En términos matemáticos es la derivada del precio de la opción con respecto al tiempo restante hasta su vencimiento:

Opción de compra	Opción de venta
$\theta = \frac{\partial c}{\partial T} = -e^{-r_f T}\frac{S\sigma Z(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) + qSe^{-r_f T}N(d_1)$	$\theta = \frac{\partial p}{\partial T} = -e^{-r_f T}\frac{S\sigma Z(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2) - qSe^{-r_f T}N(-d_1)$

Tabla 2,4. Theta (θ) de una opción
Fuente: Hull, 2012

- ***Rho (ρ):*** Este coeficiente indica la sensibilidad del precio de la opción debida a los cambios del tipo de interés libre de riesgo. Es decir, mide la cobertura de la opción con respecto a dicho tipo de interés. Su cálculo se obtiene a través de la derivada parcial del precio de la opción con relación al tipo de interés:

Opción de compra	Opción de venta
$\rho = \frac{\partial c}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2)$	$\rho = \frac{\partial p}{\partial r} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$

Tabla 2,5. Rho (ρ) de una opción
Fuente: Hull, 2012

Rho (ρ) es una de las variables que menos incide en el valor de la opción. Se debe tener en cuenta que cuando se calcula *Rho (ρ)* se supone que si varía el tipo de interés, el precio de la acción se mantiene constante, lo cual no es necesariamente cierto, ya que en realidad esto causaría una baja en el precio de la opción.

- ***Vega (υ):*** Este coeficiente, también llamado *kappa* u *omega*, indica cómo cambia el precio de una opción con respecto a una variación producida en la volatilidad del precio del activo subyacente. Expresada de forma matemática, *Vega (υ)* es la derivada parcial del precio de la opción con relación a la volatilidad del activo subyacente:

Opción de compra	Opción de venta
$\upsilon = \frac{\partial c}{\partial r} = Se^{-r_f T} Z(d_1)\sqrt{T}$	$\upsilon = \frac{\partial p}{\partial r} = Se^{-r_f T} Z(d_1)\sqrt{T}$

Tabla 2,5. Vega (υ) de una opción
Fuente: Hull, 2012

Cuando el coeficiente de *Vega (υ)* es positivo, aumenta la volatilidad del precio del activo subyacente haciendo aumentar el valor de la opción, ya sea de compra o de venta. Esto se produce debido a que una mayor volatilidad conlleva a mayores probabilidades de oscilaciones en el precio del subyacente, y por ende se aumenta el valor de la opción.

Las demostraciones de las fórmulas de las letras griegas se presentan en detalle en los anexos de este trabajo.

2.6. Antecedentes

Las opciones financieras jugaron un papel muy importante durante la crisis de los mercados de capitales en el 2008, debido principalmente a que los derivados financieros ofrecen un nivel de apalancamiento, el cual tiene un efecto amplificador de los resultados esperados, haciendo posible que se materialicen altas utilidades o grandes pérdidas. Por lo tanto, los gobiernos y las entidades han puesto especial atención en la importancia de monitorear y gestionar los riesgos asociados a este tipo de instrumentos. Aún hoy, se siguen observando debilidades relacionadas con la regulación para el uso de derivados financieros, y la falta de modelos de riesgo que cuantifiquen efectivamente su impacto en las entidades y mercados. (Shackleton y Voukelatos, 2012)

Durante la crisis, fue posible evidenciar las debilidades del sistema financiero respecto al uso de los derivados, donde se generó una gran inestabilidad en el mercado. De acuerdo con la situación presentada, se evidenció la necesidad de establecer un marco regulatorio adecuado a las negociaciones con derivados como opciones, y mejorar las condiciones del mercado para que éste sea más transparente y confiable. Igualmente, se deben tener en cuenta los riesgos inherentes a este tipo de operaciones, para definir un adecuado sistema de administración y gestión de los mismos, permitiendo generar alertas dentro de diferentes escenarios. (Farhi y Macedo, 2009)

Por lo general, las compañías utilizan modelos paramétricos o no-paramétricos para estimar el valor en riesgo de un activo financiero. Sin embargo, ninguno de estos dos enfoques se puede aplicar con facilidad a las opciones. Se sabe que el precio de este tipo de productos dependen de diversas variables a diferencia de los activos habituales, como por ejemplo, la volatilidad, el precio del activo subyacente, la fecha de vencimiento, entre otras características, y por ende se requiere un volumen de información importante asociado a estos factores para determinar realmente su riesgo de mercado bajo las metodologías tradicionales de medición de riesgo de mercado. (Feria y Oliver, 2006)

Dentro de la literatura actual es posible encontrar diversos artículos publicados referentes al Riesgo de Mercado, los principales modelos utilizados para su medición y la regulación definida a nivel local e internacional en torno a la temática.

El Banco de la República, encargado de promover y administrar las principales variables macroeconómicas del país, tiene especial interés en los temas de riesgo que afectan los mercados financieros en Colombia y por ende influyen en la economía como tal. Dentro de sus investigaciones e informes económicos, han realizado estudios generales acerca del alcance de los modelos de riesgo de mercado en las entidades del sector financiero, teniendo en cuenta su desempeño dentro de la regulación actual de la Superintendencia Financiera. (BANCO DE LA REPÚBLICA, 2011)

Uno de los principales artículos, Regulación y Valor en Riesgo (Melo y Granados, 2011), analiza algunos fundamentos de la regulación, la cual establece dentro de la normatividad el uso del VaR como herramienta para el cálculo del valor en riesgo. Los autores describen que la norma no tiene en cuenta aspectos importantes para la medición del riesgo, además de establecer su cálculo a un día, no define lineamientos claros para el mismo, así como para realizar pruebas de desempeño a los modelos utilizados. Para el artículo se realizan cálculos bajo los esquemas de VaR y VaR Condicional, utilizando diversas metodologías para su aplicación y posterior análisis, basado en dos activos del mercado. Se establece como conclusión que las metodologías implementadas para pronosticar un periodo pequeño son acertadas, pero pueden fallar cuando se amplía el periodo de cálculo.

Según el análisis realizado en el artículo, se describen los antecedentes regulatorios en la materia y las definiciones usadas por los entes reguladores. Se describen, así mismo, las premisas con las que deben contar los modelos de las entidades, tanto el estándar propuesto en la normatividad, como los modelos internos definidos.

Es importante mencionar, que cualquier modelo debe ser revisado y ajustado periódicamente para verificar que efectivamente refleje los movimientos reales de las variables que mide. Para el VaR, se realizan pruebas de Backtesting para revisar que los resultados del modelo sean coherentes con los resultados obtenidos en la realidad del mercado. En el artículo mencionan algunas metodologías utilizadas para realizar pruebas de desempeño.

Por último, realizan un ejercicio aplicado según los métodos descritos. Como conclusión, destacan que cuando se reexpresan los resultados obtenidos a un día para un periodo más largo, el resultado no es adecuado. Bajo la regulación vigente, se tienen supuestos adecuados. Así mismo, las pruebas de Backtesting no comprueban las propiedades de las metodologías usadas por lo que no se alcanzan resultados claros, haciendo necesarias pruebas adicionales.

El siguiente artículo destacado, Estimación de los requerimientos de Capital por Riesgo de Mercado (Arango, Arias, Gómez, Salamanca y Vásquez, 2005) realizado como proyecto de investigación, hace un acercamiento al control de riesgos de mercado a través de la metodología VaR. Aquí se introduce con una descripción del entorno regulatorio, comenzando desde Basilea hasta la normatividad emitida por la Superintendencia Financiera. Se habla del VaR como medida de estimación del riesgo de mercado, y se detallan los principales modelos utilizados para su cálculo: Modelos paramétricos y no-paramétricos. También, se analizan modelos involucrados en el análisis de series financieras, como el Delta-Normal, que incluye definiciones como la Duración y la Convexidad de los títulos de renta fija, como insumos importantes dentro de la medición del riesgo de mercado de este tipo de activos. El modelo de Simulación Montecarlo es analizado, al igual que *Riskmetrics*, así como el modelo estándar propuesto por la Superintendencia Financiera.

El proyecto concluye que la regulación determinada por la Superintendencia Financiera está alineada con los parámetros internacionales en la medición y gestión del riesgo de mercado. Así mismo, se dan algunas conclusiones generales de cada metodología, y se dice que no existe un mejor modelo para el cálculo del Valor en Riesgo. Se destaca la implementación del SARM[6] para la entidades hecha por la Superintendencia Financiera de Colombia.

Dentro del cálculo del valor en riesgo para derivados existen múltiples artículos e investigaciones acerca de los diferentes modelos que pueden aplicarse, inclusive para las opciones financieras, que incluye las metodologías básicas y reconocidas, así como algunas metodologías derivadas de los modelos ya establecidos como aproximaciones Delta y Delta-Gamma, y su posible combinación con el método de Simulación Monte Carlo, utilizando diversos cálculos para la volatilidad, como principal variable que afecta el precio de las opciones en el mercado, y por ende su riesgo de mercado. (García y Martínez, 2005)

Dentro de la búsqueda realizada y los documentos encontrados y referenciados, no se ha evidenciado que se analice el riesgo de mercado en el sistema financiero colombiano, aplicado específicamente a opciones financieras, y que a través de un análisis del estado del arte en esta temática se pueda establecer la asertividad de la medición del riesgo bajo los supuestos determinados por la normatividad colombiana. Por lo tanto, se considera viable la investigación en el tema propuesto, como valor agregado para el mejoramiento del Sistema de Administración de Riesgo de Mercado que deben implementar las entidades del sector financiero, especialmente cuando cuentan con posiciones en derivados.

2.7. Metodologías de Valor en Riesgo

Los riesgos no lineales presentes en las opciones financieras son mucho más complejos que los de instrumentos con comportamiento lineal, ésto debido a que las opciones tienen pagos no lineales, además la distribución de los valores de una opción

[6] Sistema de Administración de Riesgo de Mercado. SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA, Circular Externa 051 de 2007 (Capítulo XXI, Circular Básica Contable y Financiera)

puede ser bastante asimétrica. Dado que las opciones pueden ser replicadas a través de estrategias de negociación con los activos subyacentes, ésto permite obtener información detallada sobre los riesgos de las posiciones activas. (Jorion, 2007).

Según lo anterior, a continuación se describirán las metodologías que se desarrollarán y aplicarán en el presente trabajo, explicando su definición, principales componentes y formulación matemática, que luego serán aplicados en un portafolio con una posición larga en opciones de compra sobre divisas, en este caso, peso-dólar. Se incluye además, de manera informativa para el caso de Colombia, una descripción del modelo estándar establecido por la Superintendencia Financiera de Colombia.

2.7.1. Modelo Estándar Superintendencia Financiera de Colombia

En el anexo 1 del capítulo XXI de la Circular Básica Contable y Financiera (CBCF), Circular Externa 100 de 1995, la Superintendencia Financiera de Colombia establece los lineamientos y parámetros bajo los cuales las entidades financieras deben medir el riesgo de mercado para sus posiciones en opciones.

De acuerdo con el anexo, para aquellas posiciones nocionales asimiladas a bonos cero cupón, se debe utilizar como fuente la curva cero cupón de TES, ya sea en pesos o UVR según la posición, que sea publicada por el respectivo proveedor de precios. Para posiciones en moneda extranjera, el regulador estipula que se debe utilizar como tasa de descuento la LIBOR (London Interbank Offer Rate).

Así mismo, se describe el tratamiento para las posiciones en opciones, de acuerdo con las siguientes aproximaciones:

- **Aproximación simplificada:** Se utiliza solamente cuando se tienen posiciones largas en opciones. Corresponde a la suma de las exposiciones individuales, como el menor valor entre:
  - El producto del valor razonable del instrumento subyacente y el factor de riesgo relevante, según las siguientes tablas:

Zona	Banda	Duración Modificada		Cambios en tasas de interés (pbs)			Factor de Ajuste Vertical	Factores de Ajuste Horizontal		
		Límite inferior	Límite superior	Moneda Legal	UVR	Moneda extranjera		Dentro de la Zona	Entre Zonas Adyacentes	Entre Zonas 1 y 3
Zona 1	1	0	0,08	**274**	**274**	100	$\beta = 5\%$	$\lambda_1 = 40\%$	$\lambda_{12} = 40\%$	$\lambda_{13} = 100\%$
	2	0,08	0,25	**268**	**274**	100				
	3	0,25	0,5	**259**	**274**	100				
	4	0,5	1	**233**	**274**	100				
Zona 2	5	1	1,9	**222**	**250**	90		$\lambda_2 = 30\%$		
	6	1,9	2,8	**222**	**250**	80				
	7	2,8	3,6	**211**	**220**	75			$\lambda_{23} = 40\%$	
Zona 3	8	3,6	4,3	**211**	**220**	75		$\lambda_3 = 30\%$		
	9	4,3	5,7	**172**	**200**	70				
	10	5,7	7,3	**162**	**170**	65				
	11	7,3	9,3	**162**	**170**	60				
	12	9,3	10,6	**162**	**170**	60				
	13	10,6	12	**162**	**170**	60				
	14	12	20	**162**	**170**	60				
	15	20		**162**	**170**	60				

Tabla 2,7. Bandas, choques de tasas de interés y factores de ajuste vertical y horizontal. Riesgo general de tasa de interés
Fuente: Cap. XXI, CBCF – Superintendencia Financiera de Colombia

Moneda	Factor de Sensibilidad
Dólar de Estados Unidos de Norteamérica	5.5%
Euro	6%
Otras monedas y oro	8%
Riesgo general precio de acciones	14.7%

Tabla 2,8. Factores de sensibilidad – Cálculo de riesgos de tasa de cambio y precio de acciones
Fuente: Cap. XXI, CBCF – Superintendencia Financiera de Colombia

- El valor de mercado de la opción de acuerdo a la metodología de valoración de la Superintendencia en el capítulo XVIII[7], de la CBCF.

- **Aproximación intermedia:** Se calcula el cargo de capital asociado a partir de los factores de sensibilidad (Letras griegas) *Delta (δ)*, *Gamma (γ)*, *Vega (υ)*.
  - Posición *Delta (δ)* ponderada: Está sujeta a los requerimientos de capital según el activo subyacente de la opción (tasa de interés, tasa de cambio, acciones, carteras colectivas)

i. **Riesgo *Gamma (γ)*:** Calculado como:

$$Impacto\ \gamma = \frac{1}{2}\gamma * VS^2 \qquad 2{,}17$$

[7] Capítulo XVIII, *Instrumentos financieros derivados y productos estructurados*. Circular Básica Contable y Financiera. Superintendencia Financiera de Colombia.

Donde,

- *VS* es la variación del activo subyacente
- *Gamma (γ)* es el cambio del factor *Delta* (δ) ante variaciones en el valor subyacente.

Las posiciones se agrupan por bandas para tasa de interés, por mercado nacional para acciones, y por moneda para tasa de cambio. Se calcula un impacto *Gamma (γ)* neto como la suma de los impactos *Gamma (γ)* individuales.

ii. **Riesgo *Vega (υ)*:** Sensibilidad de las opciones respecto a los cambios en la volatilidad del subyacente, calculado como un cambio del 25% en la volatilidad, según sea la posición (corta o larga).

Para el cálculo de los factores de sensibilidad y las volatilidades se deben utilizar las metodologías expuestas en el capítulo XVIII, de la CBCF.

2.7.2. Metodología Delta-Gamma

- **Expansión de Taylor**

De acuerdo con Vilariño, Pérez y García (2008), en la cuantificación del riesgo de mercado resulta útil obtener parámetros que muestren la relación entre la variación del precio del instrumento derivado respecto a las variaciones de cada una de las variables que afectan su valoración. Dichas relaciones se basan en el desarrollo en serie de Taylor de la función que describe el precio del derivado en función de las variables que lo afectan.

Suponiendo que *Y* es el precio del derivado, y que está en función de *n* variables, se tiene que:

$$Y = Y(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad 2{,}18$$

Por lo tanto, las variaciones del precio del derivado expresar a través de una función de las derivadas parciales, así:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_n^2}\Delta x_1^2 + \cdots + \frac{\partial^2 Y}{\partial x_n^2} + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \cdots + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\Delta x_{n-1}\Delta x_n\right) \qquad 2{,}19$$

Donde, *Δ* representa el cambio en las variables independientes x_n

Cuando se consideran las primeras derivadas parciales, la aproximación de primer orden se expresa de la siguiente forma:

$$\Delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial x_n}\Delta x_n \qquad 2{,}20$$

La anterior es una aproximación válida para los instrumentos derivados donde su precio sigue una función casi lineal de las variables que lo explican, como es el caso de futuros y forwards. No obstante, esta aproximación no es tan apropiada para los derivados cuyos precios están determinados por funciones convexas, como las opciones y otros productos estructurados, dado el factor de opcionalidad que incorpora, por lo cual se recomienda añadir términos de segundo orden. (Vilariño *et al*, 2008)

- **El VaR Delta-Gamma**

Los parámetros de sensibilidad de una opción proporcionan información del cambio del precio de la opción respecto a los cambios en alguna de las variables que afectan dicho precio según la metodología de valoración utilizada. En general, existe una fórmula para la valoración de opciones, por lo cual las sensibilidades son halladas como las derivadas parciales del precio de la opción respecto a la variable evaluada. (Vilariño *et al*, 2008). Las sensibilidades más importantes, que fueron descritas previamente, son:

- ***Delta (δ):*** Derivada parcial del precio de la opción, respecto al precio del activo subyacente

- ***Gamma (γ):*** Derivada parcial de *Delta (δ)*, respecto al precio del activo subyacente
- ***Theta (θ):*** Derivada parcial del precio de la opción, respecto al plazo de la opción
- ***Rho (ρ):*** Derivada parcial del precio de la opción, respecto a la tasa de interés
- ***Vega (υ):*** Derivada parcial del precio de la opción, respecto a la volatilidad

De acuerdo con Rakotondratsimba (2009), cuando se miden los riesgos asociados a un portafolio, a veces llevan a los analistas a utilizar aproximaciones a los valores del portafolio, en lugar de tomar los rendimientos exactos del mismo. Para cubrir un portafolio de derivados con respecto al cambio del precio del activo subyacente, la aproximación Delta- Gamma es útil para hacer coincidir la sensibilidad de la cartera con la de los instrumentos de cobertura.

El importante sesgo que surge con técnicas de primer orden, como la metodología Delta, sugiere que se pueden obtener ganancias significativas con la precisión que se alcanza con un método de segundo orden. La metodología Delta- Gamma es una forma simple de incluir la curvatura de los precios del derivado. (El-Jahel *et al*, 1999)

La aproximación Delta-Gamma establece que un cambio en el precio del derivado durante un periodo de tiempo determinado como consecuencia de la variación del precio del activo subyacente se puede aproximar por una función polinómica de segundo orden, cuyos coeficientes están dados por las sensibilidades principales de los derivados, como son *Delta (δ),* y *Gamma (γ)* (El-Jahel *et al*, 1999).

El método de aproximación Delta-Gamma (DGA) es similar al enfoque de aproximación Delta, pero con un orden más alto de sensibilidad. En la vida real, los portafolios se componen de instrumentos que no se relacionan de forma lineal con los factores de riesgo subyacentes, la aproximación Delta-Gamma arroja resultados pobres debido a la suposición lineal que implica (como la derivada de primer orden no es más que la pendiente de la curva en un punto determinado). (Kanth y Thiruvenkataswamy, 2012)

La solución a este inconveniente es incorporar la derivada de orden próximo. La aproximación Delta- Gamma requiere el cálculo de la derivada de segundo orden, además el *Delta (δ)* y la rentabilidad de cada instrumento se calculan de la siguiente manera (derivado de la serie de Taylor):

$$\Delta(P) = \delta * \Delta(S) + \frac{1}{2} * \gamma * \Delta(S^2) \qquad 2{,}21$$

Donde,

- *Δ(P)* representa el cambio en el valor del portafolio
- *Δ(S)* representa el cambio en el valor del activo subyacente
- *Delta (δ)* es la primera derivada del precio de la opción respecto al precio del activo subyacente
- *Gamma (γ)* es la derivada de segundo orden del instrumento con respecto al subyacente.

A partir de los rendimientos calculados usando la fórmula anterior, los rendimientos del portafolio se determinan y el cuantil requerido es elegido como el VaR. El método Delta-Gamma funciona razonablemente bien para los instrumentos no lineales simples, ya que la curvatura de la relación con el factor de riesgo del subyacente se puede aproximar con la medida de la convexidad.

En caso de no cumplirse el supuesto de normalidad en los rendimientos, se debe tomar una aproximación de la serie de Taylor de segundo orden para evaluar el portafolio. Al aplicar los métodos de valoración local se pierden todos los tipos de riesgos, menos el riesgo *Delta (δ)*. Se podría pensar en agregar términos que permitan incluir otros factores de riesgo, como por ejemplo el riesgo *Gamma (γ)*, los cuales serían términos adicionales en la expansión de la serie de Taylor de los cambios en la función de valoración del portafolio (Rivera, 2010).

Donde *Delta (δ)* y *Gamma (γ)* son valores netos para el portafolio de opciones referidas al mismo activo subyacente:

- *Delta (δ)* es la tasa de cobertura de la opción.
- *Gamma (γ)* es la segunda derivada del valor del portafolio o convexidad.

Es importante aclarar que el Comité Interbancario Basilea en los acuerdos de 1995 recomienda, que mínimamente, los métodos internos de cálculo del riesgo deberían incorporar el comportamiento del precio de la opción a través de un enfoque de aproximación no-lineal que involucre sensibilidades del factor riesgo de orden superior, como por ejemplo *Gamma (γ)*.

Según Vilariño (2008), bajo la hipótesis de que las variaciones del precio del activo subyacente siguen una distribución normal con media cero y desviación *σ*, se tendría que el valor crítico de *ΔS* (variación precio activo subyacente) estaría dado por:

$$\Delta S^* = Z_\alpha S\sigma\sqrt{T} \qquad 2{,}22$$

Para un nivel de confianza de *α* y un horizonte de tiempo *T*.

Cuando se aplica este resultado para el cálculo del VaR en una posición larga en una opción de compra, donde el riesgo esté determinado por la caída del precio del activo subyacente, es decir cuando *ΔS** sea menor que cero, se tiene que la variación extrema del precio de la opción está dada por:

$$\Delta V^* = -\delta\Delta S^* + \frac{1}{2}\gamma(\Delta S^*)^2 = -\delta Z_\alpha S\sigma\sqrt{T} + \frac{1}{2}\gamma(Z_\alpha S\sigma T)^2 \qquad 2{,}23$$

Con la medición en valor absoluto del VaR, se tendría que:

$$VaR = |\Delta V^*| = \delta Z_\alpha S\sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}\gamma {Z_\alpha}^2 S^2\sigma^2 T \qquad 2{,}24$$

Donde,

- Z_α corresponde al α-percentil de la distribución normal estándar, con parámetros *(0,1)*.
- *S* es el precio del activo subyacente en la fecha de cálculo
- σ es la volatilidad de los rendimientos del activo subyacente
- *T* es el periodo de tiempo al que se calcula el VaR

Este método es llamado Delta-Gamma ya que proporciona una corrección analítica y de segundo orden sobre la metodología de valor en riesgo Delta-Normal, es decir, al contar con información de la primera derivada se obtienen datos acerca de la velocidad de cambio, luego se introduce una corrección a través de la segunda derivada que aporta mayor exactitud acerca de la estimación de dichos cambios. Este método explica por qué posiciones largas en opciones, con *Gamma (γ)* positiva, tienen menores riesgos que con un modelo lineal. De otro lado, posiciones cortas en opciones tienen mayor riesgo que el calculado por un modelo lineal. (Jorion, 2007)

2.7.3. Aproximación cuadrática

Según Hull (2000), cuando un portafolio incluye opciones, los modelos lineales son una aproximación. Éstos no tienen en cuenta el *Gamma (γ)* del portafolio o posición. Se sabe que *Delta (δ)* se define como la tasa de cambio del valor del portafolio respecto a la variación de mercado del activo subyacente, mientras que *Gamma (γ)* se define como la tasa de cambio de *Delta (δ)* respecto a las variaciones del subyacente. *Gamma (γ)* mide la curvatura de la relación entre el valor del portafolio y la variación de mercado del subyacente.

Cuando *Gamma (γ)* es positiva, la distribución de probabilidad de los cambios del valor de la opción tiende a ser sesgados positivamente; cuando *Gamma (γ)* es negativa, tiende a sesgarse negativamente. Una posición larga en una opción de compra (*call*) es un ejemplo de una posición con un *Gamma (γ)* positivo. De otro lado, una posición corta en una opción tiene un *Gamma (γ)* negativo. En este caso, se observa que una distribución normal para el precio del activo subyacente se mapea en una distribución sesgada negativamente para el valor de la posición en la opción. (Jorion, 2007).

El VaR de un portafolio depende críticamente de la cola izquierda de la distribución de probabilidad de los cambios del valor de la opción, por lo tanto, para un nivel de confianza del 99%, el VaR es el valor en la cola izquierda por debajo de la cual se encuentra solamente el 1% de la distribución. Un portafolio con *Gamma (γ)* positiva tiende a tener una cola izquierda más delgada que una distribución normal, por el contrario, para un *Gamma (γ)* negativo, la cola izquierda es más pesada que en la distribución normal (Hull, 2000).

Entre los métodos más aplicados a la medición del riesgo de mercado, se encuentran las aproximaciones. Es preciso considerar dos aproximaciones, una lineal y otra cuadrática, en la aplicación a un portafolio con opciones, para hallar los rendimientos y variaciones en el precio de todo el portafolio. Allí se incluye el precio del activo subyacente, la griega *Delta (δ)*, que indica el cambio del precio de la opción respecto al cambio en el precio del activo subyacente, así como los rendimientos de la opción (Grajales y Pérez, 2010). La aproximación lineal se presenta de la siguiente forma:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i \delta_i \Delta x_i \qquad 2{,}25$$

Donde,

- ΔP representa la variación de un portafolio que contiene opciones
- S_i es el precio del activo subyacente *i*, en caso de contar con *n* activos diferentes
- *Delta* (δ_i) es la variación del precio de la opción respecto al precio del subyacente para cada activo *i*
- Δx_i representa el cambio en los rendimientos del activo subyacente *i*

Para el caso en donde sólo se cuente con un activo subyacente, como es el caso analizado en el presente trabajo, donde se estudiarán las opciones sobre el activo subyacente tasa de cambio peso-dólar, se tiene la siguiente ecuación:

$$\Delta P = S\delta\Delta x \qquad 2,26$$

De otro lado, la aproximación cuadrática se genera a partir de la expansión de Taylor de segundo orden para los cambios en los precios:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} S_i\delta_i\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} S_i^2\gamma_i(\Delta x_i)^2 \qquad 2,27$$

Donde, en el caso de tener en el portafolio un solo activo subyacente, se simplifica a la siguiente ecuación:

$$\Delta P = S\delta\Delta x + \frac{1}{2} S^2\gamma(\Delta x)^2 \qquad 2,28$$

Las aproximaciones expuestas se utilizan de acuerdo con la composición del portafolio y la dependencia que exista entre sus instrumentos, ya sea con uno o más activos subyacentes.

Si se asume que los rendimientos del portafolio siguen una distribución normal multivariada con media cero, y una varianza para cada día analizado, entonces se podría asumir que las variaciones en el precio del portafolio también se distribuyen normalmente. Según estos supuestos, el VaR para *t* días y con un nivel de confianza de $(1\text{-}\alpha)*100\%$ se podría calcular así:

$$VaR_{1-\alpha} = \sigma_{\Delta P} Z_\alpha \sqrt{T} \qquad 2,29$$

Donde Z_α es el percentil α de la distribución normal estándar. En caso de que la media no sea cero, se tendría como medida del VaR lo siguiente:

$$VaR_{1-\alpha} = \sigma_{\Delta P}{}^{*} Z_{\alpha}\sqrt{T} - \mu_{\Delta P}{}^{*} T \qquad 2,30$$

Donde se calcula una media para el portafolio, correspondiente a:

$$\mu_{\Delta P}{}^{*} = \frac{1}{2} S^2 \gamma \sigma^2 \qquad 2,31$$

Así mismo, se calcula la volatilidad del portafolio con la siguiente fórmula:

$$\sigma_{\Delta P}{}^{*} = \sqrt{\delta^2 S^2 \sigma^2 + \frac{3}{4} S^4 \gamma^2 \sigma^4 - (\mu_{\Delta P}{}^{*})^2} \qquad 2,32$$

La anterior expresión se obtiene a partir de la expresión de Taylor para los rendimientos del portafolio, la cual está dada por:

$$\Delta P = \delta S \Delta x + \frac{1}{2} \gamma S^2 (\Delta x)^2 \qquad 2,33$$

Donde se asume el supuesto que los rendimientos del activo subyacente Δx se distribuyen normalmente con media cero y varianza σ^2, es decir $\Delta x \sim N(0, \sigma^2)$. Luego,

$$\mu^{*} = E[\Delta P] = \delta S E[\Delta x] + \frac{1}{2} \gamma S^2 E[(\Delta x)^2] \qquad 2,34$$

$$\mu^{*} = \frac{1}{2} \gamma S^2 \{V[\Delta x] + E[(\Delta x)]^2\} \qquad 2,35$$

$$\mu^{*} = \frac{1}{2} \gamma S^2 \sigma^2 \qquad 2,36$$

$$pues \qquad E[\Delta x] = 0 \;\; ; \;\; V[\Delta x] = \sigma^2$$

Por su parte,

$$(\sigma^*)^2 = V[\Delta P] \qquad 2,37$$

$$(\sigma^*)^2 = V\left[\delta S\Delta x + \frac{1}{2}\gamma S^2(\Delta x)^2\right] \qquad 2,38$$

$$(\sigma^*)^2 = \delta^2 S^2\, V[\Delta x] + \frac{1}{4}\gamma^4 S^4\, V[(\Delta x)^2] + \frac{1}{2}\delta\gamma S^3 Cov[\Delta x, (\Delta x)^2] \qquad 2,39$$

Se tiene en cuenta que:

$$V[\Delta x] = \sigma^2 \qquad 2,40$$

$$V[(\Delta x)^2] = 2\sigma^4 \qquad 2,41$$

Pues,

$$\Delta x \sim N(0, \sigma^2) \quad ; \quad Z = \left(\frac{\Delta x}{\sigma}\right) \sim N(0,1) \quad ; \quad Z^2 = \frac{(\Delta x)^2}{\sigma^2} \sim {\chi^2}_1$$

Por un lado,

$$V[Z^2] = 2 \qquad 2,42$$

Por otro lado,

$$V[Z^2] = \frac{1}{\sigma^4} V[(\Delta x)^2] = 2 \qquad 2,43$$

Entonces,

$$V[(\Delta x)^2] = 2\sigma^4 \qquad 2,44$$

Además,

$$Cov[\Delta x, (\Delta x)^2] = E[(\Delta x - 0)((\Delta x)^2 - \sigma^2)] \qquad 2,45$$

$$Cov[\Delta x, (\Delta x)^2] = E[(\Delta x)^3 - \sigma^2 E(\Delta x)] = 0 - \sigma^2(0) = 0 \qquad 2,46$$

Reemplazando las ecuaciones (*2,42)*, *(2,44)* y (*2,46)* en la ecuación (*2,39)* se obtiene lo siguiente:

$$(\sigma^*)^2 = \delta^2 S^2\, \sigma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 S^4 \sigma^4 \qquad 2{,}47$$

La fórmula propuesta inicialmente para el cálculo de la varianza era:

$$(\sigma^*)^2 = \delta^2 S^2\, \sigma^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 S^4 \sigma^4 - (\mu^*)^2 \qquad 2{,}48$$

Al reemplazar μ^* se obtiene lo siguiente:

$$(\sigma^*)^2 = \delta^2 S^2\, \sigma^2 + \frac{3}{4}\gamma^2 S^4 \sigma^4 - \left(\frac{1}{2}\gamma S^2 \sigma^2\right)^2 \qquad 2{,}49$$

$$(\sigma^*)^2 = \delta^2 S^2\, \sigma^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 S^4 \sigma^4 \qquad 2{,}50$$

Donde la fórmula *(2,50)* es igual a la expresión *(2,47)*, demostrada anteriormente.

2.7.4. Expansión de Cornish-Fisher

Cuando los rendimientos de un activo financiero no se distribuyen normalmente, se tienen importantes implicaciones en la medición y gestión del riesgo de mercado. De igual forma, dentro del marco de optimización de la relación riesgo-rentabilidad, la presencia de asimetría y curtosis afecta la percepción y medida del riesgo (Maillard, 2012).

La expansión de Cornish-Fisher (1937) es una metodología que introduce una forma fácil y parsimoniosa de tomar en consideración los momentos de la distribución de los precios y retornos de un activo. Esta expansión brinda una relación simple entre los parámetros de asimetría y curtosis, y el valor en riesgo.

La aproximación Cornish-Fisher propone una forma de transformar una variable aleatoria Gaussiana estándar en una variable aleatoria no Gaussiana.

La expansión de Cornish-Fisher, también llamada VaR modificado o modificado Cornish-Fisher VaR, es un enfoque alternativo para el cálculo del VaR. Si el retorno de un portafolio no tiene una distribución Gaussiana entonces el método VaR clásico ya no será una medida eficiente del riesgo. El método de Cornish- Fisher es preciso cuando los rendimientos son cercanos a una distribución de Gauss. Este método tiene en cuenta los momentos más altos, es decir la asimetría y la curtosis (Aktaş y Sjöstrand, 2011).

La asimetría es la inclinación de los rendimientos y la curtosis es una medida de las colas pesada de los rendimientos. Los momentos de un portafolio pueden estimarse ya sea mediante el uso de sus rendimientos históricos o se puede utilizar la estimación multivariante de los momentos. Cuando los rendimientos tienen asimetría negativa o cola pesada (platicúrtica), la expansión de Cornish-Fisher para el VaR dará una estimación más grande de la pérdida que la medida de VaR tradicional. Por otro lado, cuando los rendimientos poseen asimetría positiva o son leptocúrticas, la estimación de la pérdida será más pequeña que el VaR tradicional. Cuando los rendimientos siguen una distribución Gaussiana, este método converge al VaR paramétrico regular. (Aktaş y Sjöstrand, 2011).

Una limitación de Cornish- Fisher para la estimación del VaR es que no es una buena estimación del riesgo cuando se está tratando con productos que tiene una estructura compleja y cuyas funciones son de rendimiento no continuo. La principal diferencia entre las medidas históricas y Cornish-Fisher para VaR es que mientras que los primeros no se desviarán de los rendimientos observados ya que depende de los rendimientos históricos, Cornish-Fisher para VaR intenta estimar la forma de la cola de los retornos matemáticamente a pesar de que los rendimientos extremos aún no se hayan observado. (Maillard, 2012).

- **Cumulantes bajo la expansión de Cornish-Fisher**

  De acuerdo con Aktaş y Sjöstrand (2011), para establecer los momentos primero empezamos definiendo la función generadora de momentos. Dada una variable aleatoria *X*, y una distribución de probabilidad *P(X)*, su función generadora de momentos estará dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \qquad 2{,}51$$

Con la condición de que el valor esperado es finito. En un caso continuo se tendría que:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} P(X) dX \qquad 2{,}52$$

La expansión de la serie de Taylor de e^{tX} sobre el origen es:

$$e^{tX} = 1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \frac{t^3X^3}{3!} + \cdots \qquad 2{,}53$$

Al tomar la esperanza matemática, la función generadora de momentos puede ser escrita de la siguiente manera:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = 1 + tm_1 + \frac{t^2m_2}{2!} + \frac{t^3m_3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} m_i \frac{t^i}{i!} \qquad 2{,}54$$

Donde, m_i es el momento *i* de $E[X^i]$

Si se toma logaritmo a la función generadora de momento para una variable aleatoria *X*, tomamos la representación de la serie de Taylor de la función generadora de cumulantes[8] sobre el origen:

$$C_X(t) = Ln\, M_X(t) = tC_1 + C_2\frac{t^2}{2!} + C_3\frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{N} C_i \frac{t^i}{i!} \qquad 2{,}55$$

[8] Los cumulantes de una distribución de probabilidad se consideran un conjunto de valores que proporcionan una alternativa a los momentos de la distribución (Aktaş y Sjöstrand, 2011)

Donde, C_i son los llamados cumulantes. La relación entre los momentos y los cumulantes es explicada de la siguiente manera:

$$C_1(t) = m_1 = E[t]\ (media) \qquad 2{,}56$$

$$C_2(t) = m_2 = E[(t - E[t])^2]\ (varianza) \qquad 2{,}57$$

$$C_3(t) = m_3 = E[(t - E[t])^3]\ (asimetría) \qquad 2{,}58$$

De acuerdo con Hull (2000), cuando los momentos anteriores, son aplicados a la ecuación de variación de la metodología Delta-Gamma, se obtienen los siguientes momentos, bajo la expansión Cornish-Fisher:

$$E(\Delta P) = \frac{1}{2} S^2 \gamma \sigma^2 \qquad 2{,}59$$

$$E[(\Delta P)^2] = S^2 \delta^2 \sigma^2 + \frac{3}{4} S^4 \gamma^2 \sigma^4 \qquad 2{,}60$$

$$E[(\Delta P)^3] = \frac{9}{2} S^4 \delta^2 \gamma \sigma^4 + \frac{15}{8} S^6 \gamma^3 \sigma^6 \qquad 2{,}61$$

Donde,

- *ΔP* representa las variaciones en los rendimientos del portafolio
- *S* es el precio del activo subyacente de la opción
- *Delta (δ)* es el cambio en el precio de la opción cuando se presentan cambios en el valor del activo subyacente
- *Gamma (γ)* corresponde al cambio que se presenta en *Delta (δ)* cuando existe un cambio en el precio del subyacente

Seguidamente, el autor menciona que para calcular la media, la varianza y la asimetría de las variaciones de la posición, se utilizan las fórmulas relacionadas a continuación:

$$\mu_p = E(\Delta P) \qquad 2,62$$

$$\sigma_p^2 = E[(\Delta P)^2] - [E(\Delta P)]^2 \qquad 2,63$$

$$\xi_p = \frac{1}{\sigma_p^3} E\left[\left(\Delta P - \mu_p\right)^3\right] = \frac{E[(\Delta P)^3] - 3E[(\Delta P)^2]\mu_p + 2\mu_p^3}{\sigma_p^3} \qquad 2,64$$

Finalmente, usando los primeros tres momentos de la variación del portafolio, la expansión de Cornish-Fisher estima el α - percentil de la distribución de ΔP, así:

$$\mu_p + w_p \sigma_p \qquad 2,65$$

Donde,

$$w_p = Z_\alpha + \frac{1}{6}(Z_\alpha^2 - 1)\xi_p \qquad 2,66$$

Siendo, Z_α el α - percentil de la distribución normal estándar, con parámetros *(0,1)*. (Hull, 2000)

2.8. Pruebas de desempeño a metodologías de valor en riesgo

El Comité de Basilea (1996) permitió el uso de modelos internos a las entidades para medir el riesgo de mercado, en gran parte porque éstos eran susceptibles de verificación. La verificación es el proceso general de comprobar si el modelo es adecuado. Esto se puede hacer con un conjunto de herramientas, incluyendo *backtesting*, las pruebas de estrés, y la revisión y supervisión independiente. El trabajo se centra en las técnicas de *backtesting* para la verificación de la exactitud de las metodologías para medir el VaR. El *Backtesting* es un marco de pruebas estadísticas, que consisten en comprobar si las pérdidas reales de un activo o portafolio, con los pronósticos realizados por el VaR. A cada exceso se le llama excepción (Jorion, 2007).

Las pruebas realizadas para verificar el desempeño del modelo de valor en riesgo utilizado, conocidas como *backtesting* le permiten al ejecutor del modelo saber si los resultados son una buena aproximación y si el modelo tiene la cobertura deseada. Una de las pruebas más utilizadas para determinar el comportamiento de diferentes métodos para calcular el VaR es la prueba de Kupiec (Alonso, 2013).

Debido a que la realización del VaR no es observable, es decir sólo se trata de un pronóstico del valor máximo de pérdidas bajo un nivel de confianza dado, se deben realizar varias consideraciones para evaluar las diferentes aproximaciones para estimar el VaR. La manera más intuitiva para corroborar el ajuste del modelo propuesto será comprobar cuál es la proporción de períodos de la muestra en que se observa una pérdida superior a la predicción del modelo (es decir, superior al resultado del VaR calculado). Dicha proporción debería ser en promedio igual al nivel de significancia elegido para la metodología (Alonso, 2013).

De acuerdo con Jorion (2007), antes de aplicar las pruebas de desempeño, primero se debe definir el resultado del portafolio para cada periodo evaluado. Uno de estos resultados es el beneficio real o pérdida. Este cambio, sin embargo, no se corresponde exactamente con el valor en riesgo (VaR) del día anterior. Todas las medidas del VaR suponen un portafolio estático desde el cierre de un día de negociación al siguiente, y pasan por alto los ingresos por comisiones. En la práctica, los portafolios de negociación cambian. Las transacciones de la jornada por lo general aumenta el riesgo. Los ingresos por comisiones son más estables y disminuyen el riesgo. Aunque estos efectos pueden compensarse entre sí, el portafolio real puede tener mayor o menor volatilidad que el VaR calculado para día.

Así mismo, el autor añade que el marco de *backtesting* que propone Basilea consiste en registrar excepciones diarias sobre el 99% del VaR calculado para el año pasado, es decir con un nivel de significancia del 1%. En promedio, esperaríamos como excepciones el 1% de 250 observaciones, o 2,5 casos en el último año. Demasiadas excepciones indican que, o bien el modelo está subestimando VaR o se han presentado muchos cambios atípicos y de gran magnitud en el mercado.

El test de Kupiec (1995) intenta determinar si la frecuencia observada de las excepciones es coherente con la frecuencia de las excepciones previstas de acuerdo con el modelo de VaR y el intervalo de confianza elegido. Utilizando la prueba propuesta por Kupiec, se calcula la proporción de excepciones ($\hat{p}$) para cada una de las aproximaciones que son estimadas (Jorion, 2007).

$$\hat{p} = \frac{Número\ de\ excepciones}{H} \qquad 2{,}67$$

La prueba de Kupiec es una prueba de hipótesis, en la cual la hipótesis nula es que $\hat{p}$ es estadísticamente igual a la probabilidad utilizada por el VaR, mientras que la hipótesis alternativa es que $\hat{p}$ es diferente a dicha probabilidad. Por lo tanto, el resultado que se desea es no rechazar la hipótesis nula (Melo y Granados, 2011).

De acuerdo con Alonso (2010), con el fin de evaluar la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 :\ \hat{p} = \alpha \qquad 2{,}68$$

Se puede emplear el estadístico *t* de Kupiec (1995), cuya expresión corresponde a:

$$t_U = \frac{\hat{p} - \alpha}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/H}} \qquad 2{,}69$$

Donde $\hat{p}$ es la proporción de excepciones observadas y *H* es el número total de observaciones, y α es el nivel de significancia del modelo VaR utilizado (probabilidad esperada de fallos del modelo). Kupiec (1995) demostró que el estadístico descrito sigue una distribución *t* con *H-1* grados de libertad y probabilidad $\alpha/2$. De esta manera, se rechazará la hipótesis nula si el valor absoluto de t_U es mayor que el valor de *t* de la tabla, en valor absoluto (valor crítico).

Si el estadístico de prueba utilizado, según el número de fallos, arroja como resultado un valor donde no se rechaza la hipótesis nula, se puede concluir que el modelo de VaR usado pasa la prueba de Kupiec, y se dice que el modelo es confiable y por lo tanto se acepta. En caso contrario, si el modelo de VaR no pasa la prueba, debido a que se presentan más excepciones de las toleradas estadísticamente, se entiende que el modelo para medir el VaR está subestimando el valor en riesgo real, por lo cual éste debe ser calibrado, para ajustarse al comportamiento real de los datos. (Melo y Granados, 2011).

Según De Lara (2005), en caso que el modelo utilizado deba ser calibrado existen dos opciones para ajustarlo:

- Aumentar el factor del percentil de la distribución normal estándar utilizado (Z_α) en el cálculo del VaR hasta tener el nivel de confianza deseado.
- Modificar el factor de decaimiento utilizado en el modelo *EWMA* para el cálculo de la volatilidad.

2.9. Contexto de las variables del problema.

Durante las últimas tres décadas, los sistemas financieros a nivel mundial han experimentado importantes avances y cambios en los aspectos económicos y financieros. Con la actual conexión entre los mercados de diferentes países, la flexibilización de las políticas monetarias y económicas, la liberación de restricciones entre los mercados de capitales, se ha desarrollado la necesidad de crear nuevos instrumentos financieros como son los productos derivados, entre ellos las opciones financieras, con el fin de asumir dos posiciones: 1) cubrirse el riesgo de cambios en los precios de mercado, 2) exponerse a dichos cambios de mercado con el fin de obtener una rentabilidad. (Ruiz, 2005)

Las opciones financieras son productos donde el comprador obtiene el derecho, mas no la obligación, de compra o venta de un activo subyacente. El precio de la opción se deriva del precio del activo en el mercado, afectado por las demás características de la opción como son la volatilidad del precio del activo, el plazo de vencimiento de la opción y la tasa de interés de mercado. La cantidad de variables involucradas hacen que las opciones financieras sean instrumentos de inversión complejos y riesgosos. (Hull, 2002)

2.10. Marco social, cultural, legal, institucional.

La globalización ha incrementado la interacción entre los mercados financieros de diferentes países, facilitando el intercambio de recursos y activos de todo tipo, pero a su vez transfiriendo y amplificando los riesgos inherentes a dichas operaciones y propios del mercado. Lo anterior ha causado las mayores crisis financieras de la historia, afectando no sólo los estados financieros de las compañías participantes en el mercado, sino que ha provocado que colapsos en los sistemas financieros de varios países, afectando la economía global. (Rivera, 2010)

Las crisis financieras vividas llevaron a que el sector privado se preocupara por la materialización de los riesgos evidenciados, y fue así como en 1996, JP Morgan introdujo su modelo de medición de riesgo *RiskMetrics*, donde mide el riesgo de mercado de los instrumentos financieros. El modelo fue más tarde utilizado por varias compañías del sector con el mismo propósito. Los reguladores internacionales comienzan a trabajar conjuntamente para establecer los lineamientos para monitorear el riesgo de mercado y de esta manera prevenir futuras crisis financieras. Años más tarde, el Comité de Basilea firma el acuerdo bajo el cual establece los requerimientos mínimos de capital para cubrir posibles pérdidas de mercado, el cual fue acogido por la mayoría de reguladores locales en varios países con el fin de contar con parámetros aceptados a nivel internacional para medir y monitorear el riesgo de mercado. (Ruiz, 2005)

3. CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Perspectivas o Enfoques

La presente monografía está dirigida a definir las posibles falencias del modelo estándar propuesto por la Superintendencia Financiera de Colombia para medir el Riesgo de Mercado de los portafolios de las Entidades que están obligadas a reportarlo, además de hacer un estudio enfocado a las opciones financieras y los principales modelos que existen para cuantificar el riesgo de este tipo de productos derivados, con el fin de determinar un modelo más ajustado y conveniente para regular y monitorear este riesgo por entes reguladores como el colombiano, permitiendo mejorar la labor que realizan en los mercados de capitales, para brindar mayor transparencia y seguridad al sistema financiero.

La investigación está enfocada principalmente en el análisis de la información disponible en el mercado para la medición efectiva y acertada del riesgo de mercado en opciones financieras, incluyendo un análisis de la información emitida por el ente regulador colombiano en el tema. El objetivo es analizar modelos paramétricos, tales como Aproximación Delta-Gamma, Aproximación cuadrática del precio del derivado, y Expansión de Cornish y Fisher, y verificar su desempeño en la medición del riesgo de mercado aplicados a opciones peso-dólar.

A través de esta perspectiva analítica es posible contar con los elementos suficientes para establecer las ventajas y desventajas de cada metodología mencionada, y permitirá fundamentar la selección de un modelo óptimo, basado en la información disponible en el medio, que elimine las principales debilidades encontradas en la regulación local.

Se tiene como principal referencia de la Superintendencia Financiera de Colombia, la regulación emitida en materia de Riesgo de Mercado en su Circular Básica Contable y Financiera de 1995 (Circular Externa 051 de 2007), donde se exponen las reglas relativas al Sistema de Administración de Riesgo de Mercado. Allí se describe la administración del riesgo en cuatro etapas principales: Identificación, medición, control y monitoreo. Igualmente, se determinan las condiciones de aplicación de las metodologías para la medición del riesgo de mercado para las diferentes entidades del sistema financiero en Colombia.

La Superintendencia Financiera brinda la posibilidad que las entidades presenten para su aprobación modelos internos para la cuantificación del riesgo de mercado al que están expuestas. Dentro de la normatividad se hace referencia a los requerimientos y estándares que dichos modelos interno deben cumplir, así como las pruebas de desempeño asociadas a los mismos.

Finalmente, la norma señala los elementos que debe tener un Sistema de Administración de Riesgo de Mercado, como son políticas, procedimientos, documentación, estructura organizacional, infraestructura tecnológica y las definiciones para la divulgación de información en torno al riesgo de mercado de la entidad.

3.2. Marcos de Referencia

La investigación está enmarcada dentro de los principales acontecimientos en los mercados de capitales de los últimos 25 años a nivel mundial, donde se define un nuevo concepto en el sector financiero, llamado Riesgo de Mercado. A partir de esta definición, se da lugar a la creación y establecimiento de metodologías ampliamente utilizadas en la mayoría de países para cuantificar este riesgo al que se está expuesto en activos financieros, y a su vez conlleva a que en los mercados locales se establezcan lineamientos normativos para controlar los efectos adversos en los mercados financieros, y proteger las economías internas.

Con la introducción del Comité de Basilea, se creó un marco referencial para las entidades que se desempeñan en el sector financiero a nivel mundial. Este organismo se encarga de definir lineamientos que de forma integral contribuyen a fortalecer la supervisión, normatividad y gestión de riesgos en los establecimientos financieros. Es así como en 1988, se establecen las primeras recomendaciones del Comité para el tema de riesgo de mercado, y que deberían acoger las entidades financieras en el mundo.

Este muevo marco de supervisión y estándares internacionales, y la evolución del sistema financiero en Colombia, fueron elementos que llevaron a que la Superintendencia Financiera determinara en su Circular Básica Contable Financiera un Capítulo donde se establecen los parámetros de adopción de un Sistema de Administración de Riesgo de Mercado para las diferentes entidades del sector financiero, según su actividad, con el fin de identificar, cuantificar, controlar y monitorear este riesgo, y de esta manera realizar una gestión efectiva del mismo.

3.3. Viabilidad

De acuerdo con la temática que se establece en el trabajo, es posible establecer que la información necesaria para su desarrollo está disponible y es de fácil acceso. A través de consultas avanzadas en Internet y Bases de Datos Especializadas se puede consultar la definición y parámetros de cada metodología de riesgo de mercado utilizada para derivados no lineales. Así mismo, en la página de la Superintendencia Financiera de Colombia se encuentra descrito el Sistema de Administración de Riesgo de Mercado, en el capítulo XXI de la Circular Básica Financiera Contable y sus anexos, donde se detalla el modelo estándar propuesto por el ente regulador.

De igual forma, se cuenta con el tiempo necesario y recurso humano suficiente para analizar la información consultada. Además, se tiene acceso a los aplicativos necesarios para ejecutar y analizar los diferentes modelos seleccionados.

3.4. Diseño Metodológico

3.4.1. Método

Para el desarrollo de la investigación en el presente trabajo de grado se aplicó el método deductivo. Se entiende por dicho método, aquel en el cual se parte de un tema a nivel general, para llegar a unas conclusiones particulares. Bajo el método deductivo se hacen inferencias para ideas puntuales partiendo de un contenido de carácter universal y conocido ampliamente, y para el cual no es necesario realizar demostraciones.

Dentro de los temas planteados para la investigación se partió de los conceptos establecidos por el Comité de Basilea en sus acuerdos, así como por la regulación emitida por la Superintendencia Financiera de Colombia en los últimos años para la Administración del Riesgo de Mercado. De igual forma, se analizaron los conceptos de modelos y valor en riesgo, desarrollados por la academia, donde se definen las principales metodologías que existen para cuantificar la exposición ante un riesgo, y cómo es su aplicación en las entidades financieras. Se analizaron igualmente los conceptos de valor en riesgo y portafolio de activos financieros, así como los derivados financieros específicamente la definición y comportamiento de las opciones financieras.

Finalmente, se realizó un análisis de las metodologías y conceptos descritos, y su relación en la administración de riesgos en los mercados financieros, y de esta manera comparar y concluir acerca de los modelos óptimos para medir el riesgo de mercado de un portafolio con opciones financieras que mejor se ajusten al comportamiento de este producto derivado.

3.4.2. Modalidad: Enfoque

La investigación propuesta se llevó a cabo desde un enfoque cuantitativo. El objetivo planteado es analizar las diferentes teorías y conceptos en torno a la modelación y medición del riesgo de mercado en instrumentos derivados, a partir de la definición de cada una de sus características, y teniendo en cuenta las teorías e hipótesis planteadas por expertos en la materia.

Con la información obtenida, se realizó un análisis de las propuestas encontradas para estudiar sus variables y principales supuestos, y de esta forma contar con los argumentos necesarios que permitieron realizar una comparación objetiva y bajo las mismas condiciones de las metodologías encontradas.

Adicionalmente, se tomaron datos y supuestos de un portafolio de opciones para realizar la medición del riesgo de mercado por cada método, tomando estos resultados como insumo para concluir cuál es el modelo que mejor se ajusta al tema de la investigación.

3.4.3. Tipo de Investigación: Alcance

El alcance propuesto para el trabajo es de tipo descriptivo. Para éste se tomaron y describieron las principales características, variables, y propiedades de cada una de las metodologías para cuantificar el riesgo de mercado en opciones financieras que se incluirán dentro del análisis, con el fin de contar con la información idónea para realizar comparaciones. El propósito que se buscó alcanzar es contar con el detalle de los principales componentes de los modelos para hacer una referencia adecuada a cada uno de ellos, y tener suficientes argumentos para analizarlos, compararlos y concluir sobre los mismos.

3.4.4. Tipo de Fuentes

Para el trabajo que se desarrolló se utilizaron como fuentes de consulta las de tipo secundario. Estas fuentes de información brindan la posibilidad de contar con datos consolidados donde se interpreta y analiza las fuentes directas de la información o investigaciones desarrolladas en torno a un tema, en este caso los modelos de medición de riesgo de mercado y su aplicación a las opciones.

Dentro de lo planeado, se realizaron consultas a fuentes de información como: páginas y bibliotecas de universidades, tesis de grado, bases de datos estructuradas y académicas, revistas académicas, libros y *papers* publicados en fuentes confiables.

A partir de la información recolectada, se analizaron los datos, se realizaron las comparaciones propuestas y se concluyó al respecto haciendo referencia bibliográfica a todas las fuentes consultadas y citadas en la investigación.

3.4.5. Unidad De Análisis

La investigación tuvo como unidad de análisis los Modelos de Riesgo de Mercado para Opciones Financieras. A partir de esta temática se centró la búsqueda y selección de información que se incluyó en el trabajo y que permitió un desarrollo adecuado del mismo, y el cumplimiento preciso de los objetivos propuestos. Por lo tanto, se realizó una depuración de los documentos encontrados en la búsqueda inicial para descartar aquellos que difirieran de la unidad de análisis seleccionada, garantizando la coherencia en la información utilizada y los propósitos de la investigación.

- **Análisis de Información**

  Luego de contar con la información seleccionada según la unidad de análisis que se trabajó en la investigación, se realizó un análisis detallado de los datos encontrados, a través de un establecimiento de relaciones entre los modelos y sus parámetros y características, y que a través de éste fue posible hacer comparaciones en función de lo establecido en la metodología descrita en los puntos anteriores.

3.4.6. Modelo: Diseño

Como objetivo principal se tiene analizar las metodologías de riesgo de mercado que actualmente se utilizan para portafolios con derivados, para el cual se realizó un diseño no experimental de tipo transeccional con el propósito de describir relaciones entre dos o más variables en un momento determinado, en este caso las variables que componen cada uno de los modelos seleccionados y que harán parte del análisis. La idea es identificar y establecer las diferentes relaciones que existen entre las metodologías seleccionadas para determinar cuál de los modelos es más óptimo para la medición que se desea realizar, en este caso para cuantificar el riesgo de mercado, teniendo en cuenta condiciones como su correcta aplicación a instrumentos derivados como opciones financieras.

4. CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE INFORMACIÓN Y RESULTADOS

La aplicación práctica de las metodologías para el cálculo del valor en riesgo en el caso de opciones financieras cuyo subyacente es la tasa de cambio peso-dólar, se desarrolló en varias etapas, las cuales se describen a continuación:

4.1. Selección y tratamiento de los datos

Debido a que el trabajo se basa en opciones cuyo subyacente es la tasa de cambio peso-dólar se tomó como referencia la Tasa Representativa de Mercado (TRM) consultada de la base oficial publicada en la página del Banco de la República de Colombia.[9] Se tomó la TRM diaria para un periodo de tres años comprendido entre el 1° de mayo de 2011 al 30 de abril de 2014, para un total de 1096 datos. La base de datos extraída contenía todos los días calendario del periodo por lo cual se procedió a eliminar los fines de semana y festivos, pues durante estos días el dólar no cotiza en el mercado colombiano, y por ende no se calcula una TRM, teniendo en la serie para estos días el último dato publicado, lo cual distorsiona el comportamiento real del dólar en el mercado. Luego de eliminar los valores descritos, se trabaja con una base de 737 datos en total.

4.1.1. Análisis de la serie de datos

A partir de los datos seleccionados, se construyeron los gráficos tanto de la tasa de cambio peso-dólar (*Gráfico 4,1*), como para los rendimientos de la TRM (*Gráfico 4,2*), para el mismo periodo de tiempo descrito anteriormente, con el fin de analizar su tendencia y posible comportamiento en el periodo analizado. En el gráfico del precio se observa un aumento importante al inicio del periodo y seguidamente vuelve a los niveles de su precio inicial, y de ahí continua en general con una tendencia alcista hasta el final del periodo, con algunas variaciones.

[9] Información tomada de http://banrep.gov.co/es/trm

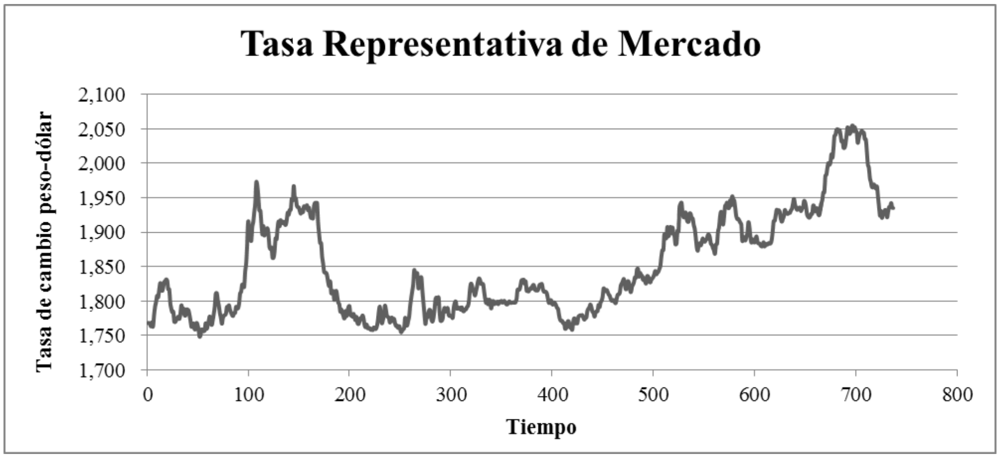

Gráfico 4,1. Tasa Representativa de Mercado
Fuente datos: Banco de la República. Elaboración propia

En el gráfico de los rendimientos de la tasa de cambio peso-dólar se observa claramente una serie estacionaria aproximadamente en torno al 0%. Se muestran rendimientos de gran magnitud, tanto positiva como negativa, al inicio del periodo analizado, con movimientos un poco más estables en la mitad del periodo, y finaliza con variaciones de menor magnitud que las iniciales.

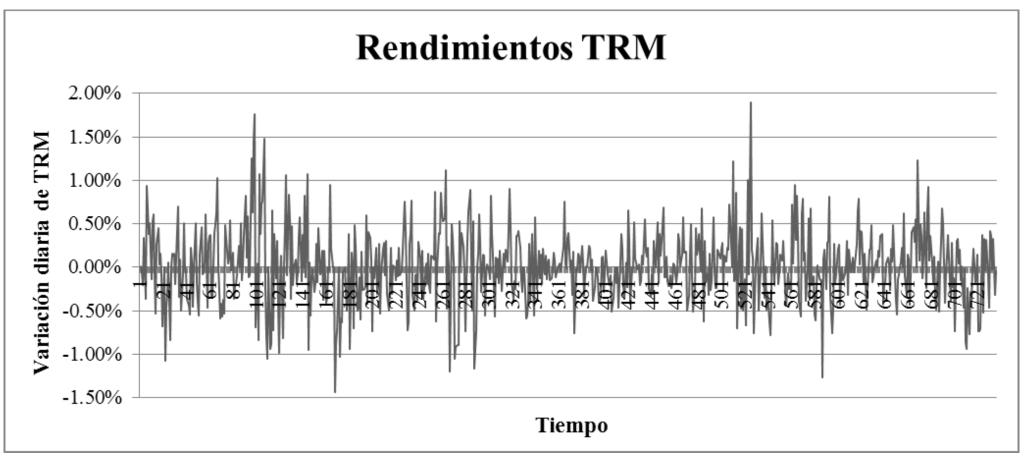

Gráfico 4,2. Rendimientos de la Tasa Representativa de Mercado
Fuente datos: Banco de la República. Elaboración propia

De igual forma, se realizó un análisis descriptivo a la serie de datos de los rendimientos de la tasa de cambio, cuyo resultado se relaciona a continuación:

RENDIMIENTOS	
Media	0.012259%
Error típico	0.00015639
Mediana	0.000000%
Moda	0.000000%
Desviación estándar	0.4242781%
Varianza de la muestra	1.80012E-05
Curtosis	1.302381361
Coeficiente de asimetría	0.226584473
Rango	0.033313619
Mínimo	-1.435069%
Máximo	1.896293%
Suma	0.090223251
Cuenta	736

Tabla 4,1. Análisis descriptivo de los rendimientos
Fuente: Elaboración propia

En los resultados obtenidos se observa una media de 0,01225%, dato muy cercano a cero, y una mediana y moda iguales al 0%. Por su parte, se tiene una desviación estándar del 0,4243%, indicando la distancia promedio de los datos respecto a la media. Así mismo, se observa que el rendimiento mínimo dentro de la serie tiene un valor de 1,4351%, mientras que el rendimiento máximo es de 1,8963%.

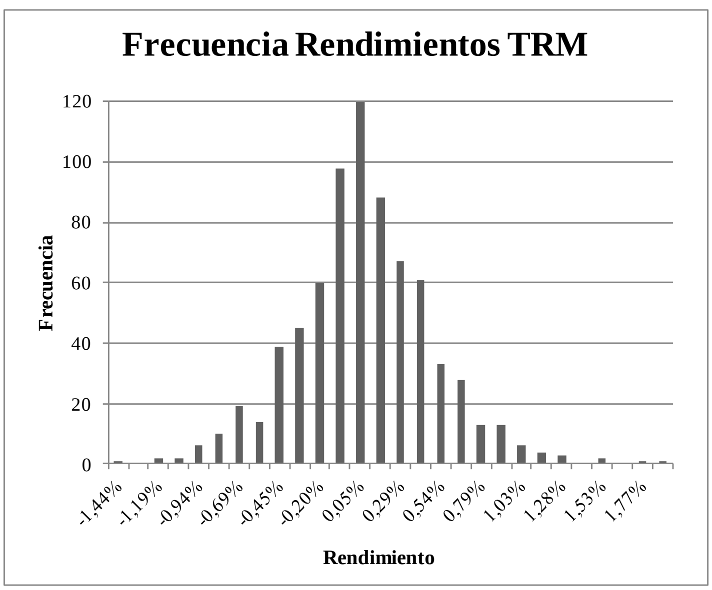

Gráfico 4,3. Frecuencia de los rendimientos de la Tasa Representativa de Mercado
Fuente datos: Banco de la República. Elaboración propia

El resultado para la curtosis en la *Tabla 4,1*, muestra el exceso presentado por un valor de 1,3024, indicando que los datos se distribuyen de manera leptocúrtica, es decir, los datos tienen poca dispersión respecto a la media y tienden a acercarse a ella, tal como lo muestra el *Gráfico 4,3*. Así mismo, el coeficiente de asimetría igual a 0,2266 muestra que la distribución de los datos es asimétrica positiva, es decir que los datos tienden a concentrarse ligeramente más hacia la derecha.

4.2. Cálculo volatilidad

Con el fin de aplicar las metodologías paramétricas descritas en el presente trabajo es necesario calcular la volatilidad, como uno de los parámetros principales para el cálculo del valor en riesgo, permitiendo conocer la frecuencia e intensidad de los cambios que ha sufrido la tasa de cambio peso-dólar para el periodo analizado.

Para la estimación de la volatilidad, se tomó la serie de datos diarios de la Tasa Representativa del Mercado, y se calcularon los rendimientos para cada día, como el logaritmo natural del precio actual sobre el precio del día anterior. Con este insumo se calculó la volatilidad de la serie de rendimientos mediante la metodología *EWMA*, que se trata de una medida móvil con ponderación exponencial, donde se calcula una media aritmética de los valores anteriores con un factor de ponderación que decae exponencialmente, aporta mayor peso a los datos más recientes y menor a los datos más antiguos. Para esto, se utilizó la siguiente fórmula para hallar las volatilidades diarias:

$$\sigma_t = \sqrt{\lambda {\sigma^2}_{t-1} + (1-\lambda) {r^2}_{t-1}} \qquad 4,1$$

Donde,

- λ es el factor de decaimiento seleccionado
- r^2 es el cuadrado del rendimiento del día anterior
- σ^2 es la varianza calculada para el día anterior
- t es el día para el cual se calcula la volatilidad

De acuerdo con el documento técnico de *RiskMetrics*, se recomienda utilizar un factor de decaimiento o *Lambda (λ)* para los retornos diarios de 0.94 y para los retornos mensuales de 0.97. En este caso se utilizó un *λ=0.94* como valor de *Lambda (λ)* inicial para correr el modelo por primera vez. Así mismo, para el primer día, al no tener datos pasados, se tomó como "semilla" la volatilidad histórica de los rendimientos de la serie.

No obstante, para el factor de decrecimiento, tal y como lo menciona el documento técnico de *RiskMetrics*, se realizó el proceso de optimización para encontrar el *Lambda (λ)* que minimiza el error cuadrático medio de los cálculos para la volatilidad, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$RMSE_v = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}[r^2{}_{t+1} - \hat{\sigma}^2{}_{t+1|t}(\lambda)]^2} \qquad 4{,}2$$

Aquí, se tomaron los rendimientos calculados al cuadrado (r^2) y se les restó cada varianza estimada ($\hat{\sigma}^2$) para el mismo periodo por el modelo EWMA inicialmente. Luego la sumatoria del cálculo para cada periodo se dividió por el número total de observaciones, en este caso 736 datos, y se tomó raíz cuadrada.

Seguidamente, se utilizó la herramienta *Solver* para encontrar el valor de *Lambda (λ)* para el cual el error cuadrático medio fuera el mínimo posible, encontrando como solución:

$$Lambda\ (\lambda) = 89{,}91112011\% \qquad 4{,}3$$

A partir de la metodología aplicada y contando con el *Lambda (λ)* óptimo, se obtuvo una volatilidad diaria para el 30 de abril de 2014 de 0,3821% para los retornos diarios de la TRM. Así mismo, se obtuvo el correspondiente dato para la volatilidad anual a partir de la siguiente fórmula:

$$\sigma_{anual} = \sigma_{diaria} * \sqrt{252} \qquad 4{,}4$$

Siendo,

- σ_{anual}, la volatilidad anual calculada
- σ_{diaria}, la volatilidad diaria arrojada por el modelo *EWMA*

- *252* el número promedio de días hábiles de un año, dato que permite anualizar la volatilidad diaria.

4.3. Valoración de las opciones

Para la aplicación de la fórmula de valoración de las opciones de compra (*call*) se tomaron los siguientes datos:

- **Tasa libre de riesgo**

  De acuerdo con la información publicada en la página de la Bolsa de Valores de Colombia[10] para la negociación de derivados, se expone que: *El valor de la tasa libre de riesgo corresponde a la tasa Cero Cupón del día de valoración para el plazo T expresada en forma continua.*

  Para el cálculo de la tasa continua se usa la siguiente fórmula:

$$r_c = p * ln\left(1 + \frac{r_e}{p}\right) \qquad 4{,}5$$

Donde,

- r_c es la tasa compuesta continua anualmente
- p es el número de periodos anuales de la tasa, en este caso es 1, ya que ambas tasas están expresadas para periodos de un año
- r_e es la tasa efectiva utilizada

La tasa libre de riesgo consultada se tomó de la Curva Cero Cupón, CEC, para títulos TES tasa fija en pesos, publicada por Infovalmer[11], el 30 de abril de 2014, donde se utilizó la tasa para un plazo de 365 días, con un valor de 4,3979% EA.

Por su parte, el Banco Mundial[12] publicó en su página de internet que la tasa de interés libre de riesgo es aquella a la que se emiten o negocian en el mercado público de valores las letras del Tesoro (Treasuries) a corto plazo. Por lo tanto, se tomó como tasa

---

[10] Información consultada en: http://www.bvc.com.co/
[11] Sistema Proveedor de precios de valoración, encargado de proveer insumos para valoración de inversiones de la Bolsa de Valores de Colombia.
[12] Información tomada de http://www.bancomundial.org/

libre de riesgo en dólares, la tasa diaria publicada por el Departamento de Tesorería de Estados Unidos[13], el 30 de abril para un periodo de un año de la curva de rendimientos de las Letras del Tesoro (Treasuries), con un valor de 0,11% EA.

Al expresar las tasas en forma continua, se obtiene el siguiente resultado:

		Efectiva Anual	Continua Anual
Tasa local (Colombia)	$\boldsymbol{r}$	4,3979%	4,3039%
Tasa foránea (EEUU)	$\boldsymbol{r_f}$	0,1100%	0,1099%

Tabla 4,2. Datos tasas libre de riesgo local y foránera
Fuente: Infovalmer, US Department of the Treasury

- **Condiciones de la opción:**

  Se definieron las siguientes condiciones para la aplicación de las metodologías de valor en riesgo: Un portafolio compuesto por 100,000 acciones sobre la tasa de cambio peso-dólar, con un precio de ejercicio de $1,900, y con un plazo de final de un año. A continuación, se relacionan todos los datos al 30 de abril de 2014, incluyendo el cálculo de la volatilidad:

Opción de compra con subyacente divisa (dólar)		
Cantidad de opciones	$\boldsymbol{N}$	100,000
Precio de ejercicio en pesos	$\boldsymbol{K}$	1,900.00
Precio subyacente en pesos	$\boldsymbol{S_0}$	1,935.14
Plazo de la opción	$\boldsymbol{T}$	1 año
Volatilidad anual	$\boldsymbol{\sigma_{1año}}$	6.0650%
Volatilidad diaria	$\boldsymbol{\sigma_{1día}}$	0.3821%

Tabla 4,3. Datos opción
Fuente: Elaboración propia

Para el cálculo de los parámetros *Delta (δ)* y *Gamma (γ)*, se utilizó la fórmula valoración de Black-Scholes para una opción de compra, *call*:

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \qquad 4,6$$

[13] U.S. Department of the Treasury. Disponible en: http://www.treasury.gov/

Con,

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad ; \quad d_2 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad 4,7$$

Donde se tienen los siguientes datos:

- c es el precio de la opción de compra
- S_0 es el precio del activo subyacente en la fecha de valoración
- K es el precio de ejercicio de la opción
- r es la tasa libre de riesgo local
- r_f es la tasa libre de riesgo del activo subyacente
- T es el plazo al vencimiento de la opción
- *N(.)* es el valor de la función de distribución acumulativa de la distribución normal

Al aplicar la fórmula de Black-Scholes, se tiene el siguiente resultado:

Precio opción	$ 122.64
Número de opciones	100,000
Posición total portafolio	$ 12,264,373

Tabla 4,4. Valoración opciones
Fuente: Elaboración propia

Con los datos anteriores se calculará la proporción del valor en riesgo hallado por cada metodología en la siguiente sección.

4.4. Aplicación de metodologías

Para la aplicación de las metodologías que estiman el valor en riesgo del portafolio conformado por opciones se deben hallar los parámetros de *Delta (δ)* y *Gamma (γ)*.

A partir de la ecuación de valoración de una opción *call*, se pueden hallar las sensibilidades de la opción a través de las derivadas parciales (Jorion, 2007). La primera derivada corresponde a *Delta (δ)*, e indicando el cambio en el precio de la opción ante cambios en el precio del activo subyacente. Se denota se la siguiente manera:

$$\delta = \frac{\partial c}{\partial S} = e^{-r_f T} N(d_1) \qquad 4,8$$

Así mismo, se toma la segunda derivada parcial de la fórmula de Black-Scholes para obtener *Gamma (γ)*, la cual indica el cambio en *Delta (δ)* cuando se presentan cambios en el precio del activo subyacente, y se denota así:

$$\gamma = \frac{\partial \delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = e^{-r_f T} \frac{Z(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \qquad 4,9$$

Donde,

- $Z(d_1)$ es el valor función de densidad de probabilidad de la distribución normal

Para el cálculo de las letras griegas utilizadas se tomó una volatilidad anual, estimada a partir del último dato diario obtenido a través de la metodología *EWMA*.

A partir de los datos relacionados en la *Tabla 4,3*, y los cálculos aplicados, se obtuvieron los siguientes resultados:

N(d₁)	0.847078
Z(d₁)	0.236169

Delta (δ)	0.846148
Gamma (γ)	0.002010

Tabla 4,5. Resultados Delta y Gamma
Fuente: Elaboración propia

4.4.1. Metodología Delta-Gamma

Luego de contar con los parámetros de sensibilidad *Delta (δ)* y *Gamma (γ)* para la opción seleccionada, se aplicó la metodología Delta-Gamma para la estimación del valor en riesgo para 10 días de la posición, según sus características. Se tomó la siguiente fórmula:

$$VaR = |\Delta V^*| = \left(\delta Z_\alpha S\sigma\sqrt{T} - \frac{1}{2}\gamma(Z_\alpha S\sigma)^2 T\right) * N \qquad 4,10$$

Donde,

- *N* corresponde a la cantidad de opciones de la posición, en este caso 100,000 opciones.
- α corresponde al nivel de significancia tomado, en este caso del 1%.
- Z_α corresponde al α-percentil de la distribución normal estándar, con parámetros *(0,1)*. En este caso es igual a (-2,33).

Para la estimación se utilizó una volatilidad diaria, tomando el último dato calculado por la metodología *EWMA*.

El resultado obtenido fue de un valor en riesgo de -$4.899.522, correspondiente al 39,95% de la posición total de $12.264.373. El VaR calculado muestra que con un nivel de confianza del 99% se espera que la máxima pérdida obtenida a 10 días con la posición inicial en opciones sea de $4.899.522.

4.4.2. Metodología Cornish-Fisher

La aplicación de la metodología Cornish-Fisher para el cálculo del valor en riesgo se realizó con base en los parámetros *Delta (δ)* y *Gamma (γ)* ya calculados para luego estimar los tres momentos de variaciones del portafolio (posición sobre las opciones descritas), y de esta manera calcular el percentil requerido para la distribución de estas variaciones, obteniendo un valor en riesgo.

Se calcularon los primeros tres momentos a partir de los datos ya conocidos en la *Tabla 4,3* y *Tabla 4,5*, utilizando las siguientes fórmulas:

$$E(\Delta P) = \frac{1}{2}S^2\gamma\sigma^2 \qquad 4{,}11$$

$$E[(\Delta P)^2] = S^2\delta^2\sigma^2 + \frac{3}{4}S^4\gamma^2\sigma^4 \qquad 4{,}12$$

$$E[(\Delta P)^3] = \frac{9}{2}S^4\delta^2\gamma\sigma^4 + \frac{15}{8}S^6\gamma^3\sigma^6 \qquad 4{,}13$$

Al igual que en el modelo Delta-Gamma, se utilizó el dato de volatilidad diaria estimado bajo la metodología *EWMA*. Los resultados obtenidos se relacionan a continuación:

Primer momento	$E(\Delta P)$	0.05494
Segundo momento	$E[(\Delta P)^2]$	39.14573
Tercer momento	$E[(\Delta P)^3]$	19.35273

Tabla 4,6. Resultados momentos bajo Cornish-Fisher
Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se calcularon la media, la volatilidad y la asimetría de las variaciones de la posición. A continuación se relacionan las fórmulas utilizadas, utilizando los parámetros de la expansión de Cornish-Fisher, y los resultados arrojados:

$$\mu_p = E(\Delta P) \qquad 4,14$$

$$\sigma_p^2 = E[(\Delta P)^2] - [E(\Delta P)]^2 \qquad 4,15$$

$$\xi_p = \frac{1}{\sigma_p^3} E\left[\left(\Delta P - \mu_p\right)^3\right] = \frac{E[(\Delta P)^3] - 3E[(\Delta P)^2]\mu_p + 2\mu_p^3}{\sigma_p^3} \qquad 4,16$$

Media	$\boldsymbol{\mu_p}$	0.0549364
Volatilidad	$\boldsymbol{\sigma_p}$	6.2564134
Asimetría	$\boldsymbol{\xi_p}$	0.0526822

Tabla 4,7. Resultados media, volatilidad y asimetría
Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la expansión de Cornish-Fisher, cuando se usan los primeros tres momentos de las variaciones, el percentil α de la distribución se estima de la siguiente manera:

$$VaR = \mu_p + w_\alpha \sigma_p \qquad 4,17$$

Donde,

$$\mathrm{w}_{\alpha} = \mathrm{Z}_{\alpha} + \frac{1}{6}(\mathrm{Z}_{\alpha}^{2} - 1)\xi_{\mathrm{p}} \qquad 4{,}18$$

Aquí, Z_α es el percentil α de la distribución normal estándar, en este caso se tomó $\alpha = 1\%$

Para el caso aplicado, se obtienen los siguientes parámetros y resultados:

Wα	-2,2876
VaR 10 días	-4.508.553
VaR% 10 días	36,76%

Tabla 4,8. Resultado VaR bajo metodología Cornish-Fisher
Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los resultados anteriores, se tiene un valor en riesgo de -$4.508.553, indicando que con un nivel de confianza del 99%, ésta sería la máxima pérdida esperada a 10 días, valor correspondiente al 36,76% del total de la posición en opciones.

4.4.3. Aproximación cuadrática

Al igual que en la aplicación de las metodologías anteriores, para la aproximación cuadrática se tienen en cuenta las estimaciones de *Delta (δ)* y *Gamma (γ)* para calcular el valor en riesgo del portafolio compuesto por 100,000 opciones sobre la tasa de cambio peso-dólar. De acuerdo con los datos ya obtenidos en esta etapa, relacionados en *Tabla 4,3* y *Tabla 4,5*, se aplicaron las siguientes ecuaciones:

$$VaR_{1-\alpha} = (\sigma_{\Delta P}{}^{*})Z_{\alpha}\sqrt{T} - (\mu_{\Delta P}{}^{*})T \qquad 4{,}19$$

Donde,

$$\mu_{\Delta P}{}^{*} = \frac{1}{2}S^{2}\gamma\sigma^{2} \qquad 4{,}18$$

$$\sigma_{\Delta P}{}^{*} = \sqrt{\delta^2 S^2 \sigma^2 + \frac{3}{4} S^4 \gamma^2 \sigma^2 - (\mu_{\Delta P}{}^{*})^2} \qquad 4{,}20$$

Tomando un *α=1%,* y partir de los cálculos realizados, se calculó el valor en riesgo a 10 días, obteniendo los siguientes resultados:

Media $\boldsymbol{\mu_{\Delta P}}^{*}$	0.05494
Volatilidad $\boldsymbol{\sigma_{\Delta P}}^{*}$	6.26197

VaR 10 días	-4,661.589
%VaR 10 días	38.0092%

Tabla 4,9. Resultado VaR bajo aproximación cuadrática
Fuente: Elaboración propia

Según los resultados obtenidos, se observa que bajo la aproximación cuadrática se tiene un valor en riesgo igual a -$4.661.589, el cual representa la máxima pérdida esperada en 10 días con un nivel de confianza del 99%. El valor del VaR corresponde al 38.01% de la posición total del portafolio.

4.5. Pruebas de desempeño

Con el fin de determinar la precisión de las metodologías aplicadas en la estimación del valor en riesgo, se realizaron pruebas de desempeño o *backtesting*, realizando una comparación entre las mediciones realizadas por cada metodología y la pérdida real del portafolio para el periodo analizado. Si se toma una estimación del VaR con un nivel de confianza de *(1-α)*, una excepción se presenta cuando el cambio real del portafolio excede el valor estimado del VaR. Si la metodología usada para calcular el VaR es adecuada, entonces se espera que la probabilidad que el VaR sea excedido en el periodo calculado por las pérdidas reales sea igual a *α*.

Para realizar las pruebas de *backtesting* se tomó la misma serie de la TRM, utilizada en el ejercicio inicial, para el periodo del 1° de mayo de 2011 al 30 de abril de 2014, con el fin de contar con datos suficientes para calcular la volatilidad diaria, y realizar el *backtesting* a las observaciones del último año, es decir del 30 de abril de 2013 al 30 de abril del 2014.

A partir de la serie inicial, se calcularon los rendimientos diarios de la tasa de cambio peso-dólar, y luego se hizo el cálculo de la volatilidad bajo la metodología *EWMA*, tomando los mismos datos de referencia utilizados en el ejercicio inicial, hallando la volatilidad diaria, así como su correspondiente volatilidad anual para cada día evaluado.

Para las pruebas de desempeño se tomó como dato de referencia opciones de compra que fueron emitidas o que iniciaron su vigencia el 30 de abril de 2013, y con un plazo de un año, es decir con vencimiento el día 30 de abril de 2014.

De acuerdo con lo anterior, se calcularon los datos necesarios para realizar la valoración de las opciones y estimar los parámetros *Delta (δ)* y *Gamma (γ)*. Estos cálculos fueron realizados para cada uno de los días durante el año analizado.

Más adelante, se halló la posición del portafolio, calculado como el precio de una opción cada día, multiplicado por la cantidad de opciones totales de la inversión, en este caso 100,000 opciones. Con estos datos fue posible hallar el *PyG* (Pérdidas y Ganancias) del portafolio para cada día evaluado, calculado a 10 días de la siguiente forma:

$$PyG_n = Valor\ portafolio_n - Valor\ portafolio_{n-10} \qquad 4{,}21$$

Donde, *n* corresponde al día para el que se calcula el *PyG*.

Luego de obtener los resultados, se estimó el valor en riesgo por cada una de las metodologías todos los días, utilizando los mismos datos y parámetros de los cálculos iniciales. Finalmente, se estimó el número de excepciones, de la siguiente manera: Para aquellos días donde el *PyG* a 10 días del portafolio fuera negativo, se comparó si su valor absoluto superaba el valor del VaR calculado para el mismo día por cada metodología. En caso de que el dato fuera mayor que el VaR, se tomaba como una excepción. De esta forma se analizaron todos los días del periodo seleccionado, con un total de 235 datos, obteniendo los siguientes resultados:

Metodología	Sobrepasos
Delta-Gamma	6
Cornish-Fisher	13
Aproximación cuadrática	9

Tabla 4,9. Número de excepciones por metodología
Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presentan los gráficos que muestran el comportamiento del valor en riesgo calculado por cada metodología respecto al *PyG* real obtenido:

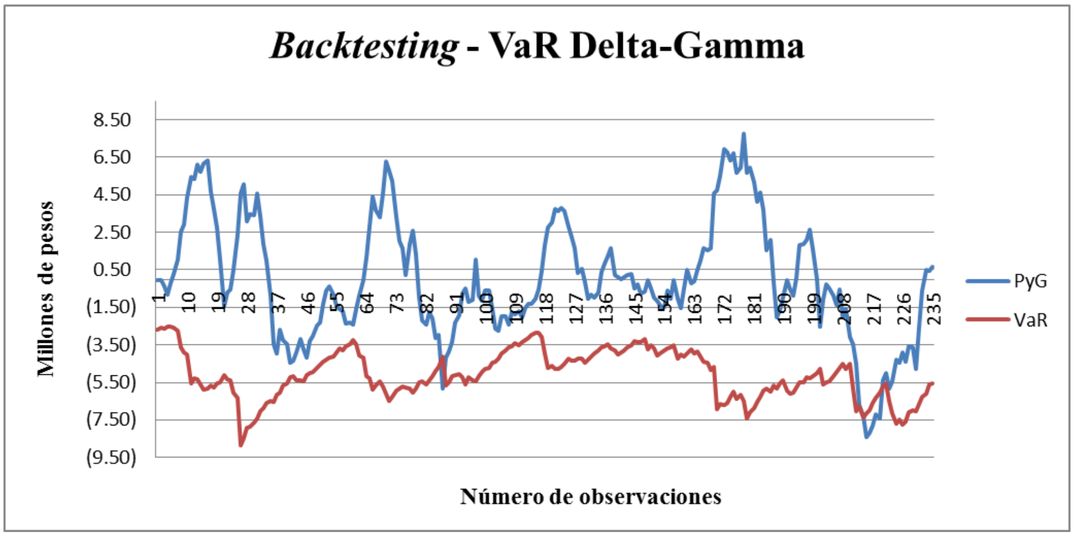

Gráfico 4,4. Backtesting – Metodología VaR Delta-Gamma
Fuente: Elaboración propia

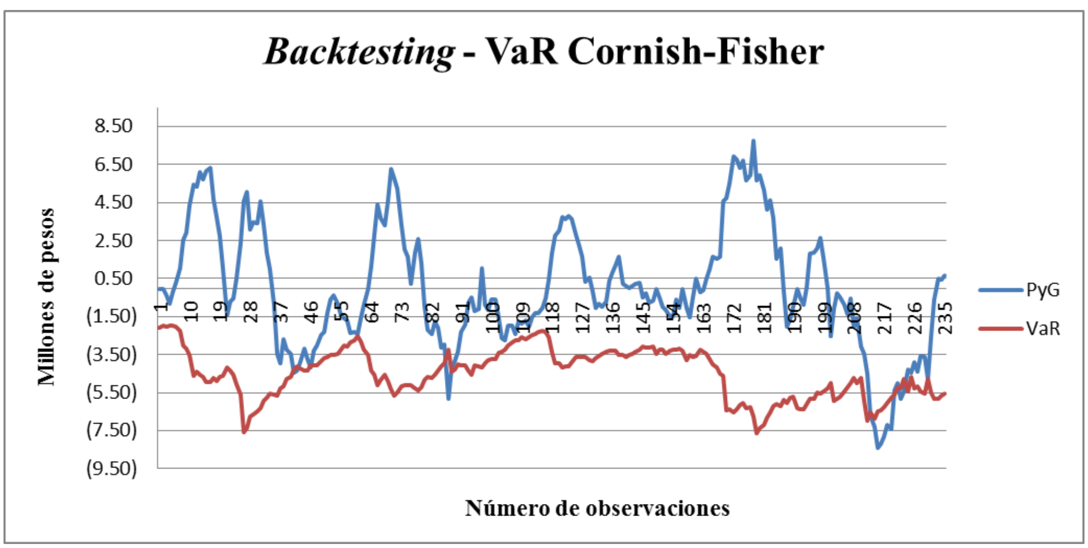

Gráfico 4,5. Backtesting – Metodología VaR Cornish-Fisher
Fuente: Elaboración propia

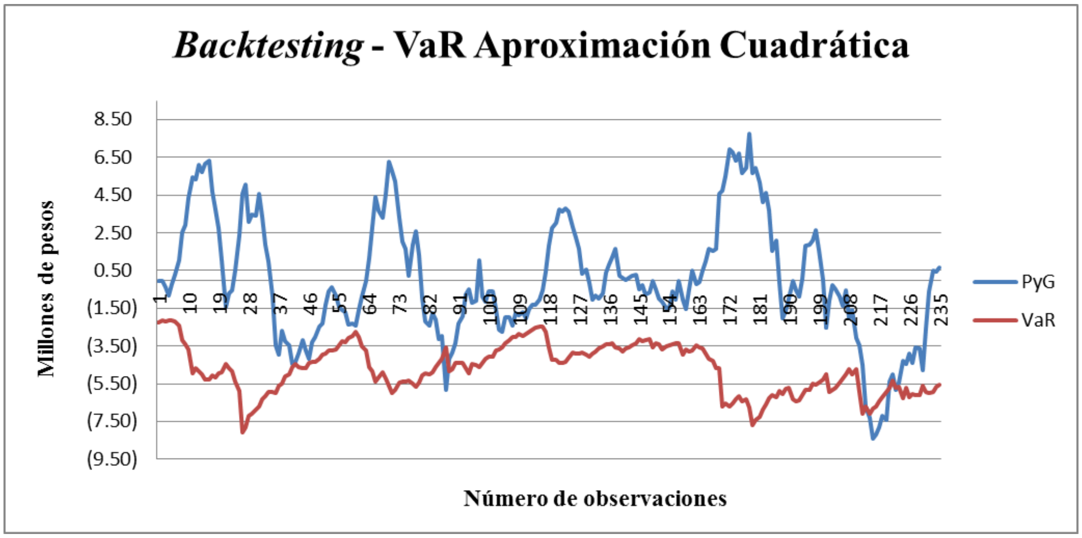

Gráfico 4,6. Backtesting – Metodología VaR Aproximación Cuadrática
Fuente: Elaboración propia

A partir de la información anterior es posible aplicar la prueba de Kupiec para determinar si los sobrepasos superan estadísticamente la probabilidad establecida para el modelo de VaR. Se calcula el siguiente estadístico de prueba:

$$t_U = \frac{\hat{p} - \alpha}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/H}} \qquad 4,22$$

Con,

$$\hat{p} = \frac{Número\ de\ excepciones}{H} \qquad 4,23$$

Obteniendo que,

	Delta-Gamma	**Cornish-Fisher**	**Aproximación cuadrática**
Excepciones	6	13	9
H	235	235	235
$\boldsymbol{\hat{p}}$	2.55%	5.53%	3.83%
$\boldsymbol{p}$	1,00%	1,00%	1,00%
$\boldsymbol{t_U}$	1.50950	3.03903	2.26037
$\lvert \boldsymbol{t_{H-1,\ \alpha/2}} \rvert$	2,5970	2,5970	2,5970
Nivel de eficacia	97.45%	97.02%	96.17%

Tabla 4,10. Resultados estadístico de prueba – Test de Kupiec
Fuente: Elaboración propia

Donde,

- $\boldsymbol{t_{H-1,\ \alpha/2}}$ corresponde al valor de la una distribución *t* con *H-1* grados de libertad y una probabilidad de *α/2*, en este caso de *0,005*.
- El nivel de eficacia indica qué porcentaje dentro de los datos donde el *PyG* real no superó el VaR estimado.

De acuerdo con la teoría, la prueba de Kupiec propone la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 :\ p = \alpha = 0.01 \qquad 4,24$$

Se sabe que, se rechaza la hipótesis nula cuando:

$$t_U > t_{H-1,\alpha/2} \qquad 4,25$$

En este caso se observa que el valor calculado del estadístico t_U para las metodologías Delta-Gamma y Aproximación cuadrática es menor que el valor crítico de la distribución *t* para los parámetros definidos, por lo tanto no existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, indicando que los valores en riesgo calculados por estas metodologías brinda una estimación adecuada del riesgo real del portafolio.

De acuerdo con la prueba realizada, se evidencia que las excepciones presentadas en las metodologías de VaR se encontraron dentro del 1% esperado de error, indicando que no sería necesario calibrar estas metodologías.

No obstante, el resultado obtenido utilizando la metodología Cornish-Fisher muestra que el estadístico calculado es mayor que el valor crítico de la distribución *t*, indicando que existe suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, y por ende la metodología de Cornish-Fisher no puede considerarse como una buena aproximación para calcular el valor en riesgo real del portafolio.

4.6. Interpretación de resultados

Uno de los principales objetivos de la estimación del valor en riesgo es conocer qué parte o porcentaje de capital de un portafolio está en riesgo, es decir que porción del mismo podría llegar a perder una entidad por causa de los movimientos de los precios en el mercado, permitiendo a las compañías "presupuestar" posibles pérdidas y de esta manera hacer un uso más eficiente del capital. (Martínez et al, 2005)

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta los datos obtenidos, resulta de gran importancia para las entidades con inversiones en el mercado de capitales contar un modelo que calcule la porción en riesgo de un portafolio de forma precisa y confiable, de manera que se asignen los recursos de un modo más eficiente.

	Delta-Gamma	Cornish-Fisher	Aproximación Cuadrática
VaR 10 días	(4,899,521.81)	(4,508,553.05)	(4,661,588.70)
Posición portafolio	12,264,372.76	12,264,372.76	12,264,372.76
% VaR 10 días	39.9492%	36.7614%	38.0092%

Tabla 4,11. Resultados VaR por cada metodología
Fuente: Elaboración propia

Según los resultados de la *Tabla 4,11*, se observa el valor en riesgo obtenido por cada metodología, mostrando que si una entidad se acoge a cada metodología, esperaría que su *PyG* del periodo analizado disminuya máximo en el valor calculado, permitiendo sólo un error del 1%, esto con el fin de controlar las pérdidas que la administración está dispuesta a tolerar debido a la volatilidad presente en los precios del mercado. Cuando el portafolio incluye opciones financieras, se puede observar que el riesgo es un porcentaje significativo de la posición total del portafolio, en este caso mayor al 30% según la metodología utilizada, indicando que existe mayor riesgo debido al tipo de instrumento y su comportamiento cuando varían los precios del activo subyacente.

De otro lado, contar con una aproximación adecuada del valor en riesgo de un portafolio, le permite a las entidades fijar límites de exposición y establecer parámetros de comparación entre otras unidades estratégicas de negocio y portafolios que maneje la compañía. Así mismo, un valor en riesgo preciso asegura que no se sobre o subestime el riesgo que se corre, ya que en caso de sobreestimación puede dar lugar a una mayor reserva de capital disminuyendo la capacidad de inversión, y por ende reducir la posibilidad de obtener mayores rendimientos en el portafolio. Por su parte, cuando se subestima el valor en riesgo, se puede llegar a incurrir en pérdidas inesperadas debido a estimaciones poco precisas (Aktaş y Sjöstrand, 2011).

CONCLUSIONES

Las aproximaciones lineales utilizadas para medir el riesgo de mercado asociado a los derivados, por lo general no son lo suficientemente adecuados para estimar con precisión el valor en riesgo real de un portafolio con opciones. De allí la importancia de incluir en las metodologías usadas los datos de la sensibilidad del precio de la opción ante los cambios en los factores de riesgo que lo afectan, principalmente la aproximación de primer orden *Delta (δ)* y la de segundo orden *Gamma (γ)*, con el fin de tener una medición más precisa y confiable que permita realizar una adecuada gestión de riesgos.

La importancia de incluir, además de *Delta (δ)*, la derivada de segundo orden en la medición del riesgo en opciones, es porque *Gamma (γ)* calcula la estabilidad de Delta. Es decir mientras *Delta (δ)* estima el riesgo asociado con el activo subyacente, *Gamma (γ)* mide el riesgo asociado con la opción, al mostrar con que velocidad o rapidez cambia el precio de la misma, permitiendo tener un panorama más completo del riesgo de la posición.

Las metodologías propuestas en este trabajo son más adecuadas que los modelos tradicionales utilizados para la medición del riesgo de mercado, cuando son aplicados sobre opciones financieras, ya que involucran en su desarrollo las sensibilidades de *Delta (δ)* y *Gamma (γ)*, como principales medidas de riesgo de las opciones. De igual forma, no requieren planteamientos complejos, permitiendo una fácil aplicación y entendimiento de los resultados, tanto por los ejecutores como por la administración de una entidad.

A través del uso de aproximaciones cuadráticas para la medición del valor en riesgo en portafolios con instrumentos no lineales, el resultado obtenido es mucho más efectivo para determinar la relación entre los valores de los activos subyacentes y los factores de riesgos a los que están expuestos. Con las metodologías de Delta-Gamma y la aproximación cuadrática, es posible obtener resultados precisos sin la necesidad de realizar complejos e intensivos cálculos, sino a través del uso de los parámetros descritos. Así mismo, es posible implementar estas metodologías tanto a nivel de un portafolio con varios activos subyacente, como para un solo instrumento financiero.

A través de las pruebas de backtesting, se pudo verificar el nivel de eficacia de las metodologías implementadas, evidenciando que las metodologías Delta-Gamma y la

Aproximación Cuadrática muestran coherencia con los resultados reales obtenidos y se ajustan a las condiciones propias de las opciones financieras. Por su parte, la aproximación de Cornish-Fisher no cumple con el nivel de aceptación de acuerdo con la prueba de Kupiec. Para esta última metodología es posible lograr un nivel de eficacia adecuado mediante la calibración de algunos de los parámetros de entrada utilizados, con el fin de disminuir el número de excepciones presentadas en el periodo evaluado.

Por su parte, el modelo estándar propuesto por la Superintendencia Financiera de Colombia presenta algunas falencias respecto a las demás metodologías conocidas y aquellas expuestas en el presente trabajo. Entre algunas de ellas se destacan, que entrega parámetros y valores de sensibilidades estándar, para divisas, acciones, entre otros activos, así mismo, el VaR total del portafolio es igual a la suma de los riesgos por factores (tasa de interés, tasa de cambio, divisas, entre otros). De esta forma es más sencillo para el regulador controlar que el modelo sea utilizado de igual forma por todas las entidades con estándares fijos, donde no existan parámetros que puedan ser subjetivos a la hora de aplicar un modelo. Así, el regulador puede hacer comparables los resultados de las entidades vigiladas entre sí y ejercer un control más práctico.

Por último, es importante mencionar que la mejor metodología para medir el riesgo de mercado no es aquella que sea más compleja en sus supuestos, variables e implementación, sino aquella que mejor se ajuste a las necesidades de la entidad, los productos y el mercado, siempre y cuando cumpla con los requerimientos mínimos de precisión y eficacia en su estimación, como objetivo principal que persiguen los administradores en la gestión del riesgo de mercado.

REFERENCIAS

- Aktaş, Ö., Sjöstrand, M. (2011) Cornish-Fisher Expansion and Value-at-Risk method in application to risk management of large portfolios. School of Information Science, Computer and Electrical Engineering. Halmstad University. Technical report, IDE1112 , September 7, 2011.
- Alonso, J., Berggrun, L. (2010) Introducción al análisis de Riesgo Financiero. Universidad ICESI. Segunda Edición. Cali, Colombia.
- Alonso, J., Chaves, J. (2013) Valor en riesgo: evaluación del desempeño de diferentes metodologías para 5 países latinoamericanos. Universidad ICESI. Publicado por Elsevier, España.
- Aragonés, J., Blanco, C. (2004) Crisis financieras y gestión del riesgo de mercado. Universia Business Review. Actualidad Económica. Cuarto Trimestre 2004.
- Arango J. y otros. (2005) Estimación de los requerimientos de capital por riesgo de mercado. Publicaciones Banco de la República Colombia.
- Bahi, C. (2007) Modelos de medición de la volatilidad en los mercados de valores: Aplicación al mercado bursátil argentino. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina.
- BANCOS DE PAGOS INTERNACIONALES. (2005) Enmienda al Acuerdo de Capital para incorporar riesgos de mercado. Comité de Supervisión Bancaria de Basilea.
- Cobo, A. (2003) La importancia de la volatilidad en la selección óptima de portafolios. Departamento de Análisis de Riesgo de la Fiduciaria y Banco Davivienda. Primera versión: Octubre de 2003. Bogotá, Colombia.
- Cornish, E., R. Fisher. (1937) Moments and Cumulants in the Specification of Distributions, Revue de l'Institut International de Statistiques 5, 307-320
- De Lara, A. (2005) Medición y control de riesgos financieros. Limusa, Noruega Editores, Tercera edición. México.
- Duana, D., Millán, C. (2008) Modelo Black-Scholes-Merton, para la toma de decisiones financieras. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México
- Durán, M. (2013) Valuación de Opciones Europeas con el Modelo de Volatilidad de Heston. Escuela Superior de Economía. Instituto Politécnico Nacional. México D.F.
- El-Jahel L. y otros. (1999) Value at Risk for Derivatives. Birkbeck College. Bank of England. Published in Journal of Derivatives
- Farhi, M., Maceda, M. (2009) Crisis Financiera Internacional: Contagio y respuestas regulatorias. Revista Nueva Sociedad N° 24. Noviembre-Diciembre 2009
- Feria, J.; Oliver, M. (2006) Valor en Riesgo (VeR): Concepto, parámetros y utilidad. Universia Business Review. Actualidad Económica. Segundo Trimestre 2006.
- García J., Martínez J. (2005) Enfoques diferentes para medir el valor en riesgo (VaR) y su comparación. Aplicaciones. XIII Jornadas ASEPUMA (Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa).
- Grajales C., Pérez F. (2010) Valor en Riesgo para un portafolio con opciones financieras. Revista de Ingenierías. Universidad de Medellín. Vol.9, Núm. 17.
- Hull, J. (2002) Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones. Prentice Hall. Cuarta Edición
- Hull, J. (2000) Options, Futures and Other Derivatives. University of Toronto. Prentice Hall. Fourth Edition. New Jersey.

- Hull, J. (2012) Options, Futures and Other Derivatives. University of Toronto. Prentice Hall. Eighth Edition. New Jersey.
- Jorion, P. (2007) Financial Risk Manager, Handbook, GARP, Global Association of Risk Professionals. Wiley Finance, Fourth Edition. New Jersey.
- JP MORGAN BANK. (1996) RiskMetrics / Technical Document. Fourth Edition. New York.
- Kanth, K., Thiruvenkataswamy, S. (2012) VaR Approximation Methods. Cognizant 20-20 insights. Cognizant, Banking and Financial Services Consulting Group. September, 2012
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. The Journal of Derivatives, 3. Washington DC.
- Lamothe, P., Pérez, M. (2003) Opciones Financieras y Productos Estructurados. Editorial McGraw-Hill. Segunda Edición. Madrid, España.
- Maillard, D. (2012) A User's Guide to the Cornish Fisher Expansion. Conservatoire National des Arts et Métiers - CNAM (Conservatorio Nacional de Artes y Oficios); Amundi Asset Management. Febrero 1, 2012.
- Marcareñas, J. (2012) Mercado de Derivados Financieros: Futuros y Opciones. Universidad Complutense de Madrid. Monografías de Juan Mascareñas sobre Finanzas Corporativas. España.
- Martínez, C. (2007) Basilea II, retos y oportunidades, hacia una mayor armonización de la regulación y la supervisión financiera en el siglo XXI. Gestión y Política Pública. Volumen XVI, número 2, II semestre de 2007, páginas 465-510
- Martínez, J., Bouza, C., Allende, S., y Chen, D. (2005) Modelos Paramétricos y No Paramétricos, para la previsión de la volatilidad. Su aplicación al cálculo del Valor en Riesgo. XIII Jornadas ASEPUMA (Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa).
- Meier, K. (2012) Métodos numéricos aplicados a modelos financieros. Universidad de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Argentina. Diciembre de 2012.
- Melo, L., Granados J. (2011) Regulación y Valor en Riesgo. Ensayos sobre Política Económica. Vol. 29, Núm. 64. Edición especial Riesgos de la Industria Bancaria. Banco de la República Colombia.
- Moncada F., Bello J. (2009) VaR: Un acercamiento al control de riesgos de mercado. Trabajo de investigación. Especialización en Finanzas y Mercado de Capitales. Universidad de la Sabana.
- Rakotondratsimba, Y. (2009) Modified delta-gamma approximation. ECE Paris-Graduate School of Engineering. April 28, 2009.
- Rivera, D. (2010) Valor en Riesgo: Metodologías para su estimación. Universidad Autónoma Chapingo. División de Ciencias Forestales. Departamento de Estadística, Matemática y Cómputo. Chapingo, Texcoco, Edo. de México, febrero del 2010.
- Ruiz, R. (2005) Control del Riesgo de Mercado en Portafolios mediante el uso del Valor en Riesgo. Universidad de Barcelona. Cali.
- Shackleton M., Voukelatos N. (2013) Hedging efficiency in the Greek options market before and after the financial crisis of 2008. Journal of Multinational Financial Management. Volume 23, Issues 1-2, April 2013, Pages 1-18. Retrieved from *ScienceDirect*.

- SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA. (2007) Circular Básica Contable y Financiera de 1995 (Circular Externa de 051 de 2007). Capítulo XXI, Reglas relativas al Sistema de Administración de Riesgo de Mercado.
- Vilariño, A., Pérez, J., García, F. (2008) Derivados, Valor razonable y contabilidad. Teoría y casos prácticos. Pearson, Prentice Hall. Madrid.

ANEXOS

I. Presupuesto y cronograma

PRESUPUESTO GLOBAL DEL PROYECTO			
RUBROS	FUENTES		
	U. De M.	PROPIOS	TOTAL
Personal	1.920.000	1.920.000	3.840.000
Material y suministro	-	415.000	415.000
Salidas de campo	-	50.000	50.000
Bibliografía	-	-	-
Equipos	-	1.800.000	1.800.000
Otros	-	-	-
TOTAL	**1.920.000**	**4.185.000**	**6.105.000**

DESCRIPCIÓN DE LOS GASTOS DE PERSONAL					
Nombre del Investigador	Función en el proyecto	Dedicación h/semana	Costo		
			U. De M.	Propios	Total
Asesor	Asesor	2	1.920.000	-	1.920.000
Carolina María Arboleda Arcila	Investigador	12	-	1.920.000	1.920.000
TOTAL		**14**	**1.920.000**	**1.920.000**	**3.840.000**

DESCRIPCIÓN DE MATERIAL Y SUMINISTRO			
Descripción de tipo de Material y/o suministro	Costo		
	U. De M.	Propios	Total
2 resmas de papel	-	20.000	20.000
1.000 fotocopias	-	100.000	100.000
4 lapiceros	-	20.000	20.000
4 lápices	-	10.000	10.000
1 cosedora	-	10.000	10.000
Carpetas	-	10.000	10.000
3 CD	-	20.000	20.000
2 tóner negro, 1 tóner color	-	200.000	200.000
Clips y ganchos	-	5.000	5.000
USB	-	20.000	20.000
TOTAL	-	**415.000**	**415.000**

DESCRIPCIÓN DE SALIDAS DE CAMPO			
Descripción de las salidas	Costo		
	U. De M.	Propios	Total
Transporte nacional	-	-	-
Transporte local	-	50.000	50.000
TOTAL	-	**50.000**	**50.000**

DESCRIPCIÓN DE EQUIPOS			
Descripción de compra de equipos	Costo		
	U. De M.	Propios	Total
Computador	-	1.000.000	1.000.000
1 impresora	-	800.000	800.000
TOTAL	-	**1.800.000**	**1.800.00**

CRONOGRAMA						
TIEMPO / ACTIVIDADES	Mes 1	Mes 2	Mes 3	Mes 4	Mes 5	Mes 6
Fundamentación conceptual	✓	✓				
Visitas empresariales	✓	✓				
Análisis documental		✓	✓			
Diseño de instrumentos			✓	✓		
Aplicación de instrumentos			✓	✓		
Procesamiento de la información			✓	✓		
Análisis de la información				✓	✓	
Elaboración del informe					✓	✓

II. Demostración de las letras griegas a partir de la fórmula de valoración de Black-Scholes

$$\boldsymbol{Lema\ Fundamental\ de\ las\ Letras\ Griegas}$$

$$s_t e^{-q(T-t)} N'(d_1) - x e^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0$$

$$Sabemos\ que \Rightarrow N(x) = \int_{-\infty}^{x} Z(t)dt \quad \wedge \quad Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$Cálculos\ para \Longrightarrow N'(d_1)$$

$$N'(d_1) = Z(d_1) * \frac{\partial}{\partial s} d_1 = Z(d_1) * \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{Ln\left({s_t}/{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$N'(d_1) = Z(d_1) * \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} * \frac{1}{{s_t}/{x}} * \frac{1}{x}$$

$$N'(d_1) = Z(d_1) * \frac{1}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\boldsymbol{N'(d_1) = \frac{Z(d_1)}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}}$$

$$Cálculos\ para \Longrightarrow N'(d_2)$$

$$N'(d_2) = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial s} d_2 = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial s}\left[d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

$$N'(d_2) = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial s} d_1 = Z(d_2) * \frac{1}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Se\ sabe\ que \;\Rightarrow\; Z(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1)^2}$$

$$Ahora\ para \Rightarrow\; Z(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d_2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{d_1} - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2}$$

$$Z(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{d_1}^2 - 2\boldsymbol{d_1}\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right)}$$

$$Z(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d_1})^2} e^{-\frac{1}{2}\left(-2\boldsymbol{d_1}\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right)}$$

$$Como \Rightarrow d_1 = \frac{Ln\left(\frac{S_t}{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Z(d_2) = Z(d_1)exp\left[-\frac{1}{2}\left[-2\frac{Ln\left(\frac{S_t}{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\sigma\sqrt{T - t} + \sigma^2(T - t)\right]\right]$$

$$Z(d_2) = Z(d_1)e^{\left(Ln\left(\frac{S_t}{x}\right) + (r-q)(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}$$

$$Z(d_2) = Z(d_1)e^{Ln\left(\frac{S_t}{x}\right)}e^{(r-q)(T-t)}$$

$$Ahora \Rightarrow \boldsymbol{Z(d_2) = Z(d_1)\left(\frac{S_t}{x}\right)e^{(r-q)(T-t)}}$$

$$Continuando\ con\ el\ cálculo\ de\ N'(d_2)$$

$$N'(d_2) = Z(d_2) * \frac{1}{s_t\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$N'(d_2) = \frac{Z(d_1)\left(\frac{S_t}{x}\right)e^{(r-q)(T-t)}}{s_t\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$Luego \Rightarrow \boldsymbol{N'(d_2) = \frac{Z(d_1)e^{(r-q)(T-t)}}{x\sigma\sqrt{T - t}}}$$

$$Reemplazando\ en\ la\ igualdad\ del\ Lema, se\ obtiene\ que:$$

$$s_te^{-q(T-t)}N'(d_1) - xe^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

$$\Rightarrow s_te^{-q(T-t)}\frac{Z(d_1)}{s_t\sigma\sqrt{T - t}} - xe^{-r(T-t)}\frac{Z(d_1)e^{(r-q)(T-t)}}{x\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\Rightarrow e^{-q(T-t)}\frac{Z(d_1)}{\sigma\sqrt{T - t}} - xe^{-r(T-t)}\frac{Z(d_1)e^{-q(T-t)}}{xe^{-r(T-t)}\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\Rightarrow e^{-q(T-t)}\frac{Z(d_1)}{\sigma\sqrt{T - t}} - e^{-q(T-t)}\frac{Z(d_1)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$\Rightarrow 0$$

$$Así\ queda\ demostrado\ el\ Lema$$

- **Demostración de las letras griegas**

- ***Theta (θ):***

Para una Opción Call, se tiene lo siguiente:

$$\theta = -\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[S_te^{-q(T-t)}N(d_1) - xe^{-r(T-t)}N(d_2)\right]$$

$$\theta = -\left\{-qS_te^{-q(T-t)}N(d_1) + S_te^{-q(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}N(d_1) - X\left[N(d_2)\frac{\partial}{\partial t}e^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}N(d_2)\right]\right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_te^{-q(T-t)}N(d_1) + S_te^{-q(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}N(d_1) - X\left[-rN(d_2)e^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}N(d_2)\right]\right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_te^{-q(T-t)}N(d_1) + S_te^{-q(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\left[-rN(d_2) + \frac{\partial}{\partial t}N(d_2)\right]\right\}$$

Primero se realiza lo siguiente

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right]$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{\partial}{\partial t}\left[Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right] + \left[Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right]\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \left[Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right]\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma(T-t)\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) + Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma(T-t)\sqrt{T-t}}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sigma(T-t)\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right)}{\sigma(T-t)\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = -\frac{1}{2(T-t)}\left[\frac{Ln\left(\frac{S_t}{x}\right) - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = -\frac{1}{2(T-t)}\left[\frac{Ln\left(\frac{S_t}{x}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t) - 2(r-q)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial d_1}{\partial t} = -\frac{d_2}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$$

Además,

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right] = \frac{\partial d_1}{\partial t} - \sigma\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{T-t}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}} = -\frac{d_2}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} = -\frac{d_1 - \sigma\sqrt{T-t}}{2(T-t)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}} = -\frac{d_1}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial d_2}{\partial t} = -\frac{d_1}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}}$$

Ahora,

$$\frac{\partial}{\partial t}N(d_1) = Z(d_1) * \frac{\partial}{\partial t}d_1 = Z(d_1)\left[-\frac{d_2}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}N(d_2) = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial t}d_2 = Z(d_1)\left(\frac{S_t}{x}\right)e^{(r-q)(T-t)}\left[-\frac{d_1}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$

Finalmente se reemplaza,

$$\theta = -\left\{-qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) + S_t e^{-q(T-t)}\frac{\partial}{\partial t}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}\left[-rN(d_2) + \frac{\partial}{\partial t}N(d_2)\right]\right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) + S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\left[-\frac{d_2}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] - Xe^{-r(T-t)}\left[-rN(d_2) + Z(d_1)\left(\frac{S_t}{x}\right)e^{(r-q)(T-t)}\left[-\frac{d_1}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right]\right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) + S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\left[-\frac{d_2}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] - S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\left[-\frac{d_1}{2(T-t)} + \frac{(r-q)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] + Xe^{-r(T-t)}rN(d_2) + \right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) + S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\frac{d_1 - d_2}{2(T-t)} + Xe^{-r(T-t)}rN(d_2)\right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) + S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\frac{d_1 - d_1 + \sigma\sqrt{T-t}}{2(T-t)} + Xe^{-r(T-t)}rN(d_2)\right\}$$

$$\theta = -\left\{-qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) + S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + Xre^{-r(T-t)}N(d_2)\right\}$$

$$\theta = qS_t e^{-q(T-t)}N(d_1) - S_t e^{-q(T-t)}Z(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - Xre^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Para una Opción Put, se tiene lo siguiente:

$$\theta_{put} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(c + \ Ke^{-r(T-t)} - S\ e^{-q(T-t)}\right)$$
$$\theta_{put} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\ Ke^{-r(T-t)}\right) - \frac{\delta}{\delta t}\ \left(S\ e^{-q(T-t)}\right)$$
$$\theta_{put} = q\ S\ e^{-q(T-t)}\ N(d1) - r\ Ke^{-r(T-t)}N(d2) - \frac{Z(d1)S\ e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + \ r\ Ke^{-r(T-t)} - q\ S\ e^{-q(T-t)}$$
$$\theta_{put} = -q\ S\ e^{-q(T-t)}[1 - N(d1)] + \ r\ Ke^{-r(T-t)}[1 - N(d2)] - \frac{Z(d1)S\ e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}}$$

- ***Delta (δ):***

$$se\ tiene\ para \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta} = \frac{\boldsymbol{\partial c}}{\boldsymbol{\partial s}}$$

$$c = s_t e^{-q(T-t)}N(d_1) - xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$\text{Luego} \rightarrow \Delta = \frac{\partial}{\partial s}\left[s_t e^{-q(T-t)}N(d_1) - xe^{-r(T-t)}N(d_2)\right]$$
$$\Delta = e^{-q(T-t)}[N(d_1) + s_t N'(d_1)] - -xe^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

$$Sabemos\ que \Rightarrow N(x) = \int_{-\infty}^{x} Z(t)dt \qquad \wedge \qquad Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$Cálculos\ para \Longrightarrow N'(d_1)$$
$$N'(d_1) = Z(d_1) * \frac{\partial}{\partial s}d_1 = Z(d_1) * \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{Ln\left({}^{S_t}/_{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$
$$N'(d_1) = Z(d_1) * \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} * \frac{1}{{}^{S_t}/_{x}} * \frac{1}{x}$$
$$N'(d_1) = Z(d_1) * \frac{1}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$\boldsymbol{N'(d_1) = \frac{Z(d_1)}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}}$$

$$Cálculos\ para \Longrightarrow N'(d_2)$$
$$N'(d_2) = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial s}d_2 = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial s}\left[d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right]$$
$$N'(d_2) = Z(d_2) * \frac{\partial}{\partial s}d_1 = Z(d_2) * \frac{1}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Se\ sabe\ que\ \Rightarrow\ Z(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{1}{2}(d_1)^2}$$

$$Ahora\ para \Rightarrow\ Z(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d_2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{d_1} - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2}$$

$$Z(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{d_1}^2 - 2\boldsymbol{d_1}\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right)}$$

$$Z(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{d_1})^2} e^{-\frac{1}{2}\left(-2\boldsymbol{d_1}\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right)}$$

$$Como \Rightarrow d_1 = \frac{Ln\left(\frac{s_t}{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Z(d_2) = Z(d_1)exp\left[-\frac{1}{2}\left[-2\frac{Ln\left(\frac{s_t}{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)\right]\right]$$

$$Z(d_2) = Z(d_1)e^{\left(Ln\left(\frac{s_t}{x}\right) + (r-q)(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)}$$

$$Z(d_2) = Z(d_1)e^{Ln\left(\frac{s_t}{x}\right)} e^{(r-q)(T-t)}$$

$$Ahora \Rightarrow \boldsymbol{Z(d_2) = Z(d_1)\left(\frac{s_t}{x}\right) e^{(r-q)(T-t)}}$$

$$Continuando\ con\ el\ cálculo\ de\ N'(d_2)$$

$$N'(d_2) = Z(d_2) * \frac{1}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Luego \Rightarrow \boldsymbol{N'(d_2) = \frac{Z(d_1)\left(\frac{s_t}{x}\right) e^{(r-q)(T-t)}}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}}$$

$$\boldsymbol{C}ontinuando\ con \rightarrow \Delta$$

$$\Delta = e^{-q(T-t)}N(d_1) + e^{-q(T-t)}s_t N'(d_1) - xe^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

$$\Delta = e^{-q(T-t)}N(d_1) + e^{-q(T-t)}s_t \frac{Z(d_1)}{s_t\sigma\sqrt{T-t}} - xe^{-r(T-t)} \frac{Z(d_1)\left(\frac{s_t}{x}\right) e^{(r-q)(T-t)}}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}$$

$Finalmente\ el\ \Delta$ para una Call es:

$$\boldsymbol{\Delta_c = e^{-q(T-t)}N(d_1)}$$

$Para\ el\ \Delta$ de una Put se tiene:

$$c + xe^{-r(T-t)} = p + s_t e^{-q(T-t)}$$

$$p = c + xe^{-r(T-t)} - s_t e^{-q(T-t)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial c}{\partial s} - e^{-q(T-t)}$$

$$\Delta_p = \Delta_c - e^{-q(T-t)}$$

$$Luego \Rightarrow \boldsymbol{\Delta_p = e^{-q(T-t)}[N(d_1) - 1]}$$

- ***Gamma (γ):***

$$Ahora \Longrightarrow \boldsymbol{\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial s^2}}$$

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial c}{\partial s}\right] = \frac{\partial}{\partial s}\Delta$$

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial s}\left[e^{-q(T-t)}N(d_1)\right]$$

$$\Gamma = e^{-q(T-t)}N'(d_1)$$

$Ahora\ la\ call\ de\ una\ \Gamma$ es:

$$\boldsymbol{\Gamma_c = e^{-q(T-t)}\frac{Z(d_1)}{s_t\sigma\sqrt{T-t}}}$$

$Para\ el\ \Gamma$ de una Put se tiene:

$$p = c + xe^{-r(T-t)} - s_t e^{-q(T-t)}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - e^{-q(T-t)}$$
$$\Gamma_p = \Gamma_c - e^{-q(T-t)}$$
$$Luego \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma_p = e^{-q(T-t)}[N(d_1) - 1]}$$

- ***Vega (ν):***

Para una Opción Call, se tiene lo siguiente:

$$\nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - x e^{-r(T-t)} N(d_2)\right]$$

$$\nu = S_t e^{-q(T-t)} \frac{\partial}{\partial \sigma} N(d_1) - x e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial \sigma} N(d_2)$$

Ahora observemos,

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right] + \left[Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right] \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \sigma (T-t) + \left[Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right]\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}}$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\left\{-\frac{1}{\sigma^2\sqrt{T-t}} \sigma^2 (T-t)\right\} + \left\{Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right\}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}}$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \left\{Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)\right\}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{T-t}}$$
$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma}\frac{Ln\left({S_t}/{x}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right) * (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -\frac{d_2}{\sigma}}$$

Además,

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right] = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t} = -\frac{d_2}{\sigma} - \sqrt{T-t} = -\frac{d_2 + \sigma\sqrt{T-t}}{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = -\frac{d_1}{\sigma}}$$

Ahora,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} N(d_1) = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = -Z(d_1)\frac{d_2}{\sigma}$$
$$\frac{\partial}{\partial \sigma} N(d_2) = N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = -Z(d_2)\frac{d_1}{\sigma} = -Z(d_1)\left(\frac{S_t}{x}\right)e^{(r-q)(T-t)}\frac{d_1}{\sigma}$$

Finalmente se reemplaza,

$$\nu = -S_t e^{-q(T-t)} Z(d_1)\frac{d_2}{\sigma} - x e^{-r(T-t)}(-Z(d_1))\left(\frac{S_t}{x}\right)e^{(r-q)(T-t)}\frac{d_1}{\sigma}$$
$$\nu = -S_t e^{-q(T-t)} Z(d_1)\frac{d_2}{\sigma} + Z(d_1) S_t e^{-q(T-t)}\frac{d_1}{\sigma}$$
$$\nu = Z(d_1) S_t e^{-q(T-t)}\left\{\frac{d_1 - d_2}{d_2}\right\} = Z(d_1) S_t e^{-q(T-t)}\sqrt{T-t}$$

Para una Opción Put, se tiene lo siguiente:

$$p = c + K e^{-r(T-t)} - S_0 e^{-q(T-t)}$$

$$\nu_{put} = \frac{d}{d\sigma}\left(c + Ke^{-r(T-t)} - S_0 e^{-q(T-t)}\right)$$
$$\nu_{put} = \frac{dc}{d\sigma} = Z(d_1)S_t e^{-q(T-t)}\sqrt{T-t}$$

- ***Rho (ρ):***

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial r}$$
$$c = S_t e^{-q(T-t)}N(d1) - Ke^{-r(T-t)}N(d2)$$

Para una Opción Call, se tiene lo siguiente:

$$\rho_{call} = \frac{\partial}{\partial r}(S_t e^{-q(T-t)}N(d1) - Ke^{-r(T-t)}N(d2)$$
$$\rho_{call} = Se^{-q(T-t)}N'(d1) - \left(-(T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d2) + Ke^{-r(T-t)}N'(d2)\right)$$
$$\rho_{call} = Se^{-q(T-t)}N'(d1) + (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d2) - Ke^{-r(T-t)}N'(d2)$$
$$\rho_{call} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d2)$$

Para una Opción Put, se tiene de la paridad Put-Call se tiene lo siguiente:

$$p = c + Ke^{-r(T-t)} - S_0 e^{-q(T-t)}$$
$$\rho_{put} = \frac{\partial f}{\partial r}\left(c + Ke^{-r(T-t)} - S_0 e^{-q(T-t)}\right)$$
$$\rho_{put} = \frac{\partial f}{\partial r} - (T-t)Ke^{-r(T-t)} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(d2) - (T-t)Ke^{-r(T-t)}$$
$$\rho_{put} = (T-t)Ke^{-r(T-t)}[N(d2) - 1] = (T-t)Ke^{-r(T-t)}N(-d2)$$