



**CARACTERIZACIÓN  
DEL RAZONAMIENTO  
ALGEBRAICO  
ELEMENTAL DE  
ESTUDIANTES DE  
PRIMARIA SEGÚN  
NIVELES DE  
ALGEBRIZACIÓN**

**Trabajo de Grado**

**Universidad de Medellín  
Departamento de Ciencias Básicas**



CARACTERIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL DE ESTUDIANTES DE  
PRIMARIA SEGÚN NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación Matemática.

AUTOR: JOHN DAVID MARTÍNEZ ESCOBAR

ASESOR: Dr. WALTER F.CASTRO G.



MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN

MAYO – 2014



## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco inmensamente a Dios, por escuchar y conceder mis anhelos.

A mi asesor Walter Fernando, por ser instrumento en las manos de Dios, por su carisma y profesionalismo.

A mi madre, por ser padre y madre, por sacarme adelante, y por convencerme de las grandes cosas que puedo lograr.

A mis amigos Mauricio y Didier, por su valiosa ayuda en momentos de tanta tensión y ansiedad.

A mis compañeros de cohorte, por su colegaje y su ayuda incondicional.



## RESUMEN

El presente trabajo muestra los resultados de una investigación que se realizó en el marco de un programa de Maestría en Educación Matemática. La investigación aborda la correspondencia entre los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), las tareas de naturaleza algebraica en los libros de texto, y los desempeños que exhiben los escolares de primaria cuando se enfrentan a dichas tareas. La investigación se desarrolló con estudiantes del “Colegio Montessori”, en la ciudad de Medellín. Se utilizó la colección de libros de matemáticas para primaria titulada “Envision Math” (Ed. Pearson). La propuesta de Godino y colaboradores es reciente, y no ha sido contrastada ni con los libros de texto, ni con los desempeños de los estudiantes de escuela elemental.

La investigación considera cuatro fases: la primera refiere a la clasificación de las tareas de carácter algebraico que se proponen en los libros de texto analizados; la segunda refiere al diseño de una prueba para ser aplicada a los niños. Los ejercicios incluidos en la prueba fueron tomados de los libros de texto analizados. La tercera fase refiere a la aplicación de la prueba. La cuarta refiere a la contrastación entre los niveles de algebrización atribuidos a las tareas y los desempeños de los niños. Durante la primera fase se encontró que la descripción de las características algebraicas propuesta por Godino et.al. -Ibid- no incluía ciertos tipos de tareas de naturaleza algebraica incluidas en los textos analizados. La propuesta de Godino et.al. (2014) , se complementó con la taxonomía de tareas algebraica de Burkhardt (2001). Se informa sobre la coherencia entre los niveles ampliados de algebrización, las tareas propuestas en los libros de texto y los desempeños de los niños.

## ABSTRACT

This work shows the end results of a research project conducted in the frame of a Mathematics Education masters' program. The research addresses the correspondence between the algebraization levels proposed by Godino, Ake, Gonzato and Wilhelmi, (2014), the tasks of algebraic nature in textbooks, and the performances exhibited by elementary schoolchildren when faced with such tasks. The research was conducted with students from "Montessori School," in the city of Medellin, Colombia. The text book used was "Envision Math" (Ed Pearson). Godino's et.al proposal is recent and has not been contrasted neither with textbooks, nor with the performances of students in elementary school.

The research considers four stages: the first stage refers to the classification of algebraic character tasks proposed in the textbooks analyzed, the second stage relates to the design of a test to be applied to children; the exercises included in the test were taken from the textbooks analyzed. Furthermore, the third stage concerns the application of the test and the fourth stage refers to the contrast between levels algebraization attributed to the tasks and the children's performance. During the first stage it was found that the description of algebraic properties proposed by Godino- Ibid- did not include certain types of algebraic nature tasks included in the texts analyzed. The proposal for Godino et.al., was complemented by the taxonomy of algebraic performance of Burkhardt (2001). A report on the consistency between algebraization expanded levels, the tasks proposed in textbooks, and children's performance is given.

## INDICE

Introducción	13
1. Planteamiento del problema	
1.1 Antecedentes y problemática de estudio	16
1.2 Pregunta de investigación	19
1.3 Objetivos	20
2. Marco Teórico	
2.1 Enfoque Ontosemiótico	21
2.2 Razonamiento algebraico	23
2.3 Niveles de algebrización	27
2.4 Taxonomía de tareas algebraicas	29
2.5 Niveles de algebrización ampliados	31
3. Metodología	
3.1 Metodología de investigación	34
3.2 Descripción del contexto de estudio	34
3.3 Etapas del trabajo	35
3.4 Fuentes de datos	36
3.4.1 Análisis de textos	36
3.4.2 Pruebas.	44
3.4.2.1 Diseño	44
3.4.2.2 Aplicación	66
4. Análisis de datos	
4.1 Libros de texto	68
4.2 Desempeño de los niños	74

5. Conclusiones	86
6. Problemas abiertos	89
Referencias	90

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Expectativas formuladas por los Principios y Estándares NCTM 2000 sobre el bloque de Álgebra para los grados K-2 y para los grados 3-5.	25
Tabla 2. Niveles ampliados de algebrización por categorías.	32
Tabla 3. Estructura general de la colección de libros EnVision Math (Ed Pearson, 2012).	37
Tabla 4. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Primer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.	38
Tabla 5. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Segundo Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.	39
Tabla 6. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Tercer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.	40
Tabla 7. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Cuarto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.	40
Tabla 8. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Quinto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.	41
Tabla 9. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Primer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.	42
Tabla 10. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Segundo Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.	42
Tabla 11. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Tercer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.	43
Tabla 12. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Cuarto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.	43
Tabla 13. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Quinto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.	43
Tabla 14. Número de actividades de naturaleza algebraica según niveles de algebrización y grado escolar.	68

Tabla 15. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad temática común a lo largo de los grados.	71
Tabla 16. Número de actividades de naturaleza algebraica por categorías basadas en Godino et.al., (2014) y Burkhardt (2001).	72

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Conjunto de nociones teóricas que componen el EOS.	22
Figura 2. Traducción de la taxonomía de desempeño algebraico (Burkhardt, 2001; pág 142).	30
Figura 3. Propuesta de taxonomía de desempeño algebraico en inglés. (Burkhardt, 2001; pág 142).	30
Figura 4. Cantidad de actividades de naturaleza algebraica según niveles de algebrización y grado escolar.	69
Figura 5. Cantidad de actividades de corte algebraico por unidad temática común a lo largo de la colección.	70
Figura 6. Cantidad de actividades de corte algebraico por categorías basadas en Godino et.al., (2014) y Burkhardt (2001).	72
Figura 7. Nivel de algebrización superior al esperado.	73
Figura 8. Patrón extendido a la izquierda.	75
Figura 9. Método tabular para comprobar la ecuación de una función.	76
Figura 10. Identificación de la regla que forma una relación funcional en estudiante de primer grado.	77
Figura 11. Solución de tarea de carácter funcional por estudiante de Tercer grado.	78
Figura 12. Uso de la propiedad modulativa para completar ejercicio de espacios en blanco.	78
Figura 13. Relación de incremento – disminución entre dos sentencias numéricas.	80
Figura 14. Completación para conservar la igualdad de dos sentencias numéricas por estudiante de Primer grado.	81
Figura 15. Resta para convertir un proceso de equivalencia entre dos sentencias numéricas en una ecuación lineal simple, por estudiante de Primer grado.	81
Figura 16. Solución de una inecuación lineal sin uso de simbología algebraica por parte de un estudiante de tercer grado.	82
Figura 17. Generalización a partir de características conceptuales.	84
Figura 18. Ejercicios ejes de simetría de cuadrados y rectángulos.	84

## INTRODUCCIÓN

La investigación que se presenta indaga sobre la correspondencia entre niveles de algebrización atribuidos a tareas matemáticas propuestas en libros de texto de nivel primario, y sobre la contrastación entre tales niveles atribuidos y los desempeños de niños de escuela primaria.

La investigación pone en cuestión los niveles de actividad algebraica atribuidos a tareas propuestas en un libro de texto en lengua inglesa que se sigue en un colegio bilingüe localizado en la ciudad de Medellín, Colombia.

Interesa conocer tres aspectos: el primero refiere a la atribución de niveles de algebrización a tareas matemáticas propuestas en un libro de texto; el segundo refiere al desempeño de los niños de escuela elemental cuando resuelven tareas con niveles de algebrización atribuidos; y el tercero refiere a la pertinencia de los niveles de algebrización propuestos.

Para lograrlo se hizo una atribución de niveles de algebrización a las tareas del libro de texto. La atribución se basó en la propuesta de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014). Posteriormente se hizo una selección de tareas y se diseñaron cinco pruebas que se aplicaron a estudiantes en cada uno de los grados de la escuela primaria.

El análisis subsecuente de la información obtenida con las pruebas tuvo en consideración tanto las soluciones a las preguntas como entrevistas focalizadas.

Las preguntas que orientan este trabajo son: ¿Cuáles son las características algebraicas que se identifican en la colección de libros de texto de matemáticas usados en la escuela primaria en el Colegio Montessori?; ¿Cuáles son los niveles de algebrización identificados en tal colección de libros de texto de matemáticas para la primaria?; ¿Se corresponden los niveles de algebrización propuestos por Godino et al., (2014), identificados en los libros de texto, con los desempeños de niños de escuela elemental?

Se prestó especial atención a determinar la correspondencia entre los niveles de algebrización propuestos por Godino et. al., (2014) y el desempeño de los niños de escuela primaria. Los niveles de algebrización propuestos inician en un nivel cero que considera aquellas tareas que no incluyen características algebraicas, pasan por un nivel uno en el que se consideran tareas con características algebraicas incipientes, continúan en un nivel dos en el que se inicia el uso de la simbología algebraica y el reconocimiento de la generalidad, y llegan hasta un nivel tres en el que además de usar y comprender la simbología algebraica, se opera con ella y se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando su equivalencia. Durante el transcurso del trabajo se incluyeron dimensiones adicionales que consideran aspectos tales como los descritos por Burkhardt (2001) en su taxonomía de desempeño algebraico en donde se distinguen cinco categorías de actividades de naturaleza algebraica y unos niveles que describen la experticia frente a dichos tipos de tarea.

Los resultados del trabajo dejan ver que: 1) la propuesta EnVision Math ofrece una cantidad considerable de actividades de naturaleza algebraica –o *algebrizables*-, siendo fiel a la propuesta didáctica de la inmersión del álgebra desde la escuela elemental, y propiciando el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico por parte de los estudiantes, evidente en la continuidad de la propuesta grado a grado; 2) No siempre los niveles de algebrización (Godino et. al., 2014) atribuidos a una tarea matemática tienen correspondencia con el desempeño de los estudiantes cuando se enfrentan a ésta; 3) La propuesta de niveles de algebrización (Godino et. al. , 2014) no considera algunos tipos de tareas matemáticas de naturaleza algebraica, por lo que se incluye la propuesta de taxonomía algebraica de Burkhardt (2001), y el aporte del investigador, para proponer unos niveles ampliados de algebrización; 4) El desempeño real de los niños frente a los talleres diseñados, supera las expectativas del investigador. El desempeño de los niños aporta maneras interesantes de abordar las tareas: unas abandonando la naturaleza algebraica de estas, y otras por el contrario, reafirmando una vez más la viabilidad de la algebrización del currículo en términos de los resultados obtenidos, y su impacto en el desempeño de los estudiantes.

Este informe de tesis de maestría, incluye siete capítulos. A continuación se explicita sucintamente el contenido de cada uno de ellos.

El primer capítulo presenta el planteamiento del problema considerando los antecedentes de la problemática de estudio, las preguntas de investigación y los objetivos del trabajo.

El segundo capítulo presenta el marco teórico sobre el cual se desarrolla el trabajo y como desde éste se hace una propuesta de niveles ampliados de algebrización.

El tercer capítulo presenta la metodología usada para realizar el estudio.

El cuarto capítulo presenta el análisis de resultados, tanto del estudio de la serie de libros analizada, como de los desempeños exhibidos por los estudiantes en las pruebas aplicadas.

El quinto capítulo presenta las conclusiones obtenidas a partir del presente estudio.

El sexto capítulo presenta algunas cuestiones abiertas que surgen en el trabajo, y que eventualmente serán objeto de investigación en futuros trabajos.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

### 1.1 ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA DE ESTUDIO.

El álgebra es uno de los pilares sobre los cuales se construye el conocimiento matemático. Ésta, a su vez, tiene un rol protagónico en el desarrollo de avances científicos y tecnológicos, en los cuales se utilizan sistemas de codificación, se diseñan y evalúan modelos, se plantean y analizan generalizaciones, estimaciones y predicciones. Así su enseñanza se vincula con el desarrollo de competencias que representan un aspecto esencial en el proceso de formación matemática de los escolares. El álgebra está vinculada con la geometría y con el análisis matemático. Fallas en el desarrollo de competencias algebraicas podrían obstaculizar el acceso a niveles superiores de formación escolar, lo cual podría, a su vez, constituirse en un factor de discriminación (Moses, 2001).

La experiencia en el aula de matemáticas, a lo largo de varias décadas, ha mostrado variadas dificultades en el aprendizaje y en la enseñanza del álgebra (Davis, 1985; Linchevski y Livneh, 1999; Filloy y Rojano, 1989; Freiman y Lee, 2004), que a su vez, han motivado investigaciones para estudiar las causas y las posibles soluciones a estas dificultades. Se ha encontrado que dichas dificultades de aprendizaje están relacionadas con aspectos tales como: la forma de entender el signo igual (Molina, 2007), la diferencia entre las convenciones de notación en la transición entre la aritmética y el álgebra (Kieran, 1989), el uso y las implicaciones de la simbolización algebraica, las disimilitudes entre las variables y las incógnitas, entre otras. Así mismo, en la enseñanza del álgebra, se tienen como posibles dificultades: la transición desde la aritmética hasta el álgebra, su uso descontextualizado, la falta de planeación de las actividades de aprendizaje, el desconocimiento del objeto de la enseñanza del álgebra, la falta de conocimiento específico del docente, entre otras (Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L; 1996; Socas y cols, 1996).

Aunque el álgebra incluya como uno de sus aspectos característicos la generalización del estudio de la aritmética, no es necesario que el álgebra aparezca posteriormente a ésta; de hecho, estudios recientes (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Brizuela y Schliemann, 2003; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher et al., 2006; Fujii, 2003; Kaput, 2000; Molina, 2009) muestran cómo la inmersión en actividades de naturaleza algebraica que le abran camino al álgebra simbólica, puede tener lugar en los primeros años de la escuela primaria, favoreciendo así la comprensión de las nociones algebraicas elementales y la utilización de modos de pensamiento algebraicos.

Una vía de solución a la problemática descrita anteriormente consiste en la inclusión temprana del álgebra en el currículo. Dicha inclusión, pretende promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora (Aké, 2013) y ofrecer oportunidades a los estudiantes para fomentar un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad (Lins y Kaput, 2004, p.58).

La algebrización del currículo (Kaput y Blanton, 2008) consiste, esencialmente, en una atribución de carácter algebraico a tareas matemáticas que originalmente tenían una intencionalidad numérica o geométrica. Sin embargo, debemos afirmar que no es la atribución de carácter algebraico lo que determina que una tarea lo tenga, sino la actividad matemática manifestada por los estudiantes cuando la resuelven. No se trata de impartir un curso de álgebra tradicional a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (Godino y Font, 2003).

Como consecuencia del estudio exhaustivo que se ha adelantado en la didáctica del álgebra, y en el cómo y el porqué de su inmersión temprana en la escuela, han surgido algunos estudios descriptivos que se orientan a puntualizar qué tipo de habilidades y destrezas deben desarrollarse por los estudiantes -de manera paralela con su proceso de consolidación del pensamiento numérico y el pensamiento espacial- de modo que al entrar en niveles superiores de conceptualización matemática, se minimicen las dificultades en el uso y la comprensión del álgebra. Algunos autores (Kaput, 1989; Kieran, 1989; Gascon, 1999; Burkhardt, 2001; Godino et. al., 2014) han propuesto considerar niveles de algebrización que distinguen acciones de los

estudiantes frente a diferentes tipos de tareas matemáticas a las que se les concede cierto carácter “algebraico”. La propuesta más reciente es la descrita por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014). Tales estudios, sin embargo, no han sido contrastados ni con los libros de texto, ni con los desempeños de los estudiantes de escuela elemental.

## 1.2 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas que orientan esta investigación son:

- ¿Cuáles son las características algebraicas que se identifican en la colección de libros de texto de matemáticas usados en la escuela primaria en el Colegio Montessori?
- ¿Cuáles son los niveles de algebrización identificados en la colección de libros de texto de matemáticas para la primaria?
- ¿Se corresponden los niveles de algebrización propuestos por Godino et. al. (2014), identificados en los libros de texto, con los desempeños de niños de escuela elemental?

### 1.3 OBJETIVOS.

#### 1. 3. 1 Objetivo general

Describir la correspondencia entre los niveles de algebrización de las tareas algebraicas identificadas en los libros de texto, y los desempeños de los niños de la escuela elemental cuando las resuelven.

#### 1. 3. 2 Objetivos específicos.

- Indagar sobre las características algebraicas de tareas matemáticas propuestas en libros de texto de matemáticas, en la escuela primaria.
- Identificar los niveles de algebrización presentes en los libros de texto de nivel primario.
- Caracterizar los libros de texto estudiados, en términos de las características algebraicas identificadas y de los niveles de algebrización.
- Describir el desempeño de los niños de escuela elemental cuando resuelven tareas algebraicas.

## 2. MARCO TEORICO.

### 2.1 DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

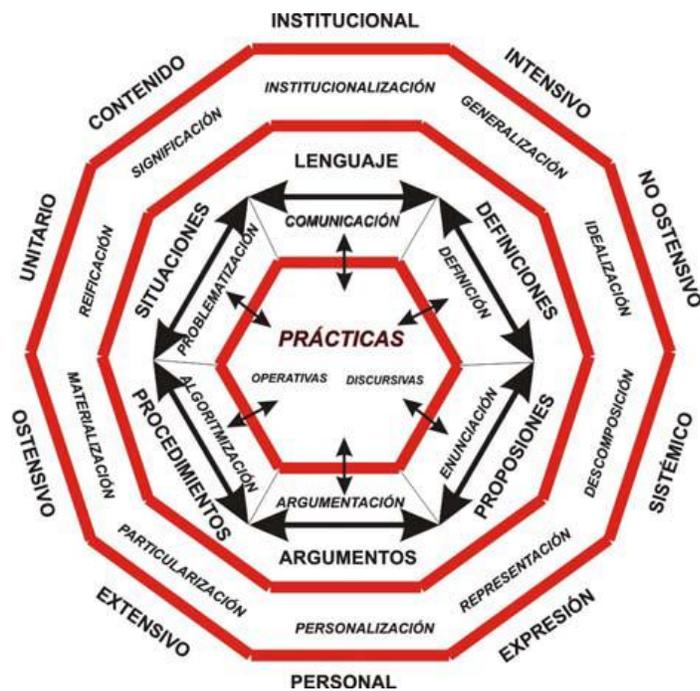
El *Enfoque Ontosemiótico* de investigación en Educación Matemática es un modelo que asume una perspectiva sistémica e interdisciplinaria (Steiner, 1985) para trabajar la complejidad de la educación matemática como un campo de investigación, desarrollo y práctica. Algunos de sus objetos de indagación son: el estudio de la relación entre los significados personales e institucionales que se le atribuyen a un objeto matemático y su relación con la noción de comprensión; y el estudio de los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos usados en las interacciones didácticas.

De acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico, todo proceso de instrucción matemática considera seis dimensiones: epistémica (referente a la naturaleza del objeto matemático a tratar), educativa (referente a las funciones del profesor), estudiantil (referente a las funciones del estudiante), mediacional (que se refiere al uso de recursos para el proceso de instrucción), cognitiva (referente a las capacidades y nivel de desarrollo mental del aprendiz) y emocional (que da cuenta de las emociones, actitudes, prevenciones y motivaciones del estudiante durante el proceso de instruccional).

El modelo ontológico y semiótico de la cognición proporciona criterios para identificar los estados posibles de las trayectorias epistémica y cognitiva, y la adopción de la "negociación de significados" como noción clave para la gestión de las trayectorias didácticas. La enseñanza incluye la participación de los estudiantes en una comunidad de práctica donde se comparten significados institucionales, y el aprendizaje - que es entendido como una competencia- supone la apropiación de éstos significados por parte de los estudiantes.

En una práctica matemática intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos) y no-ostensivos (lo que llega a la mente cuando se “hace matemática”) que son representados de manera textual, oral, gráfica o incluso gestual. Se consideran seis tipos de objetos matemáticos primarios: las situaciones problema, el lenguaje, los argumentos, los procedimientos, las proposiciones y los conceptos. Las situaciones problema promueven y contextualizan la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficas,...) representa otra entidad y sirve como herramienta de acción; los argumentos justifican los procedimientos – o las soluciones dadas por los individuos- y las proposiciones se relacionan con las propiedades de los conceptos, que suelen ser usadas para resolver la actividad. Dichos objetos matemáticos que intervienen en, o emergen de, una práctica matemática, dependen de un juego de lenguaje del que forman parte y pueden ser considerados desde las siguientes facetas duales: personal-institucional, ostensivo-no ostensivo, extensivo-intensivo, unitario- sistémico, expresión- contenido.

Figura 1. Conjunto de nociones teóricas que componen el EOS. Tomado de Font, V. Badillo, E. Trigueros, M. Rubio, N. (2012).



## 2.2 DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO.

Entender el álgebra en el restringido sentido de *la manipulación de variables o incógnitas en sentencias numéricas*, fortalece aún más la concepción de los estudiantes acerca de su nivel de dificultad y abstracción. Así mismo, el docente que así la entiende encuentra dificultades para reconocer y promover la inclusión temprana del álgebra en el currículo escolar, ya que, según la concepción antes descrita, haría falta un sólido desarrollo aritmético que sirva de soporte para tal trabajo, el cual sólo se logra después de muchos años de escolaridad. Se desconoce de esta forma que el razonamiento algebraico requiere de tiempo y de un desarrollo cognitivo. Lo anterior provoca un estudio descontextualizado, abrupto, disfuncional, tardío, y superficial del álgebra escolar (Kaput, 1999).

Los modos característicos del razonamiento de los estudiantes y en especial las formas del razonamiento algebraico, son insumo de prueba de sus desarrollos cognitivos en el proceso de escolarización, ya que en éste se hacen evidentes las habilidades para usar lo que se sabe tanto en “contextos reales” como matemáticos. Pueden encontrarse estudiantes que, a pesar de tener un “buen desempeño” en lo algorítmico, no logran exhibir los resultados que describen un adecuado razonamiento algebraico; y por el contrario, pueden encontrarse estudiantes con un “desempeño insatisfactorio” en lo algorítmico que logran niveles de abstracción superiores mediante el uso de métodos alternativos de análisis y computación numérica.

Concebir el razonamiento algebraico como una habilidad superior y más compleja que la tarea de aprender álgebra, está en sintonía con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, que propone el *pensamiento variacional* como un tipo de pensamiento matemático superior, que incluye los demás tipos (numérico, estadístico, métrico y geométrico). En este sentido, “el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas

de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2003). Esta concepción ampliada, apunta al desarrollo progresivo del concepto de función, como un objeto matemático protagonista en los aspectos que refieren a la variación y la modelación, ya que permite desarrollos matemáticos más elaborados que son de gran utilidad en el contexto de la ingeniería, la economía, el estudio científico y la investigación.

El razonamiento algebraico implica identificar patrones y regularidades, codificarlos, generalizarlos y formalizarlos en cualquier contexto, sea éste matemático o no. A medida que se avanza en estas habilidades, se refina paralelamente el uso del lenguaje y del simbolismo que representa y permite comunicar el pensamiento algebraico, y de manera espontánea y llena de significado, se da lugar al uso de las variables, las ecuaciones y las funciones.

Se afirma que el razonamiento algebraico *está en el corazón de las matemáticas*, ya que ésta es concebida como la ciencia de los patrones y el orden; sin embargo, el desarrollo de este tipo de razonamiento, se puede abordar desde varios procesos, habilidades y contenidos del currículo que son inicialmente concebidos de manera independiente y apartada del álgebra. De hecho, en Ferrero et. al.(1999), se puede observar algunos elementos teóricos que suponen un acercamiento al estudio de la estructura algebraica de los conjuntos y de las operaciones con números.

En sintonía con lo anterior, Kaput (1999) propone “algebrizar” el currículo de matemáticas en la escuela primaria para que el estudiante, de manera natural y paralela con su proceso de formación numérica, desarrolle habilidades que le permitan justificar procesos algorítmicos, modelar matemáticamente el contexto de un problema, describir y completar patrones numéricos o geométricos, comprobar y proponer generalizaciones acerca de los resultados de las operaciones, y obtener y relacionar diversos ostensivos del mismo objeto matemático; aspectos que conducirán a un posterior uso consciente de variables o incógnitas en todo tipo de sentencias numéricas.

Diversos estudios (Klismann et. al., 2007; Strother, 2011) informan que los niños expuestos tempranamente a experiencias algebraicas, exhiben buenos desempeños cuando asumen tareas localizadas en el modelo del álgebra en la escuela secundaria. Tales niños tampoco exhiben las dificultades reportadas en la literatura de los años 90, y que informaban sobre las dificultades en la transición desde la aritmética hasta el álgebra (Filloy y Rojano, 1989)

Esta concepción de razonamiento algebraico se ilustra mejor con las propuestas contenidas en los Principios y Estándares 2000 del NCTM. Como se puede ver en la siguiente tabla, el objetivo no es que los estudiantes de la escuela elemental manipulen símbolos algebraicos, que con frecuencia es a lo que se limitan los cursos álgebra en secundaria.

Tabla 1. Expectativas formuladas por los Principios y Estándares NCTM 2000 sobre el bloque de Álgebra para los grados K-2 y para los grados 3-5. Tomada de Godino y Font (2003), Matemáticas y su didáctica para maestros: manual para el estudiante.

<i>Estándares de contenido</i>	<i>En los grados K-2 todos los alumnos deberán,</i>
<b>Comprender patrones, relaciones, y funciones</b>	- clasificar y ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades; - reconocer, describir, y continuar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples, y pasar de una representación a otra.
<b>Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos</b>	- Ejemplificar principios y propiedades generales de las operaciones, tales como la conmutatividad, usando números específicos. - usar representaciones concretas, gráficas y verbales para mejorar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
<b>Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas</b>	- modelizar situaciones que impliquen la adición y sustracción de números naturales, usando objetos, dibujos, y símbolos.
<b>Analizar el cambio en diversos Contextos</b>	- describir cambios cuantitativos, tales como el mayor crecimiento de un alumno; - describir cambios cuantitativos, tales como que un alumno crece dos centímetros en un año.
<i>Estándares de contenido</i>	<i>En los grados 3-5 todos los alumnos deberán,</i>
<b>Comprender patrones, relaciones, y funciones</b>	- describir, continuar y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos; -representar y analizar patrones y funciones, usando palabras, tablas y gráficos.

<p><b>Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- identificar propiedades tales como la conmutativa, asociativa, distributiva y usarlas para calcular con números naturales,</li> <li>- representar la idea de variable como una cantidad desconocida usando una letra o un símbolo;</li> <li>- expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones.</li> </ul>
<p><b>Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- modelizar situaciones problemas con objetos y usar representaciones tales como gráficos, tablas, y ecuaciones para extraer conclusiones.</li> </ul>
<p><b>Analizar el cambio en diversos Contextos</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- investigar cómo el cambio en una variable se relaciona con el cambio en otra;</li> <li>- identificar y describir situaciones con tasas de variación constante o variable y compararlas.</li> </ul>

### 2.3 DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN.

Diversos autores (Kaput, 1989; Kieran, 1989; Gascon, 1999) han propuesto considerar niveles de algebrización que distinguen acciones de los estudiantes frente a diferentes tipos de tareas matemáticas a las que se les concede cierto carácter algebraico.

Las actividades se consideran “algebraicas” en tanto que exhiban algunas características atribuidas por el maestro y utilizadas por los estudiantes para resolverlas, muchas de las cuales fueron expuestas en el apartado anterior. Godino et.al. (2014) proponen características que permiten definir distintos niveles o grados de algebrización. El nivel se asigna no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro.

A continuación se describen los cuatro niveles de algebrización que se consideran en esta investigación:

Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0)

*Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización. (Godino, 2012. p. 289)*

Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1)

*Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican*

*relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal (Idem)*

Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2)

*Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma  $Ax \pm B = C$  . En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. (Idem)*

Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)

*Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo  $Ax \pm B = Cx \pm D$ , y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones. (Idem)*

Los anteriores niveles, podrían describir una ruta algebraica que oriente al docente en el qué y cómo de la inclusión temprana del álgebra en la escuela primaria. A continuación, una propuesta similar pero menos reciente: taxonomía de desempeño algebraico (Burkhardt, 2001).

## 2.4 DE LA TAXONOMÍA DEL DESEMPEÑO ALGEBRAICO.

La idea de hacer extensiva la enseñanza del álgebra a la escuela elemental va más allá de forzar el uso de expresiones simbólicas desde temprana edad, y se enfoca más en el desarrollo del *razonamiento algebraico* de los escolares. Así, la tarea del docente consiste en promover el trabajo algebraico por parte del estudiante y que, independiente de si usa símbolos algebraicos o no, se familiarice cada vez más con tareas de exploración, análisis, argumentación, predicción, estimación y generalización de los resultados obtenidos en las tareas matemáticas que resuelve.

Como resultado de un proceso de investigación en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, Burkhardt (2001) propone una taxonomía de desempeño algebraico en la que se distinguen tipos de tareas algebraicas y sus diferentes niveles de dificultad. Dichas tareas están organizadas de forma creciente, siendo el primer tipo de tarea la más sencilla, y el último tipo de tarea la más compleja. Los juicios que hacen referencia a la simpleza o dificultad de la tarea, están sujetos a la novedad o familiaridad que represente cada problema específico para el estudiante, como consecuencia del diseño curricular<sup>1</sup> al que ha sido expuesto y las experiencias de aprendizaje que haya tenido. A continuación, se presenta una traducción al español de la propuesta original de Burkhardt (2001).

Figura 2. Traducción de la taxonomía de desempeño algebraico (Burkhardt, 2001; pág 142).

---

<sup>1</sup> Se entiende como “diseño curricular” el conjunto de cursos que el estudiante ha tomado durante su formación escolar.

- P1. Extensión de patrones numéricos y geométricos, paso a paso. (Puedes escoger si llamar dicha generalización -sin el uso de símbolos- algebra o pre-álgebra).
- P2. Formulación de reglas verbales para la extensión de patrones paso a paso.
- S1. Sustitución de números en fórmulas, evaluadas con calculadora.
- C1. Seguimiento de comandos algebraicos simples de programación de la forma  $A=B+C$ . Entender fórmulas simples en hojas de cálculo.
- F1. Formulación reglas verbales para relaciones funcionales, o explicaciones para resultados generales. (Por ejemplo, para patrones y situaciones proporcionales).
- C2. Formulación de comandos algebraicos simples de programación de la forma  $A=B+C$ . Formulación de fórmulas simples en hojas de cálculo.
- C3. Formulación de programas simples con estructuras ramificadas. Construcción de hojas de cálculo simples, copiando fórmulas.
- S2. Formulación acertada de relaciones funcionales de manera simbólica.
- S3. Modificación expresiones algebraicas lineales. Solución ecuaciones simples.
- S4. Modificación expresiones algebraicas. Solución ecuaciones simples.
- R1. Seguimiento, análisis y modificación de cadenas de razonamiento simbólico. Seguimiento, análisis y modificación de estructuras en hojas de cálculo.
- C3. Formulación de programas procesuales. Construcción de hojas de cálculos vinculadas.
- S5. Inversión de relaciones funcionales. Solución de ecuaciones.
- R2. Construcción de cadenas deductivas de razonamiento simbólico.
- R3. Construcción de demostraciones simbólicas generales.

Figura 3. Propuesta de taxonomía de desempeño algebraico en inglés. (Burkhard, 2001; pág 142)

P1	extending number and geometric patterns, stepwise (You may choose whether to call such unsymbolised generalisation algebra or pre-algebra)
P2	formulating verbal rules for stepwise pattern extensions
S1	substituting numbers in formulas, evaluated with calculators
C1	following simple algebraic programming commands, let $A=B+C$ understanding simple formulas in spreadsheets
F1	formulating verbal rules for functional relationships, or explanations for general results (eg in patterns, proportional situations)
C2	formulating simple algebraic programming commands, let $A=B+C$ formulating simple formulas in spreadsheets
C3	formulating simple programs with branching structures constructing simple spreadsheets, copying formulas
S2	formulating well-understood functional relationships symbolically
S3	rearranging linear algebraic expressions, solving simple equations
S4	rearranging algebraic expressions, solving simple equations
R1	following, critiquing and modifying chains of symbolic reasoning following, critiquing and modifying spreadsheet structures
C3	formulating procedural programs constructing linked spreadsheets
S5	inverting functional relationships, solving equations
R2	constructing deductive chains of symbolic reasoning
R3	constructing general symbolic proofs

## 2.5 NIVELES AMPLIADOS DE ALGEBRIZACIÓN.

En consideración con los apartados 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 del presente trabajo, y luego de la asignación de niveles de algebrización a las tareas de naturaleza algebraica en la serie de libros EnVision Math (Ed. Pearson, 2012) según la propuesta de Godino y cols (2014), se identifica la necesidad de incluir una descripción más amplia para cada nivel de algebrización, y se tienen en la cuenta los aportes de la propuesta de taxonomía de desempeño algebraico de Burkhardt (2001).

Se proponen, entonces, las siguientes categorías, con el objetivo de describir de manera más clara y concisa las habilidades que exhibe el estudiante que se enfrenta a diferentes tipos de tareas algebraicas, y poder hacer una asignación más cuidadosa del nivel de algebrización en el que se encuentra. De la propuesta original de Godino et.al. (2014), se conserva la numeración en niveles y los aspectos descriptivos para cada nivel, para cada una de las categorías.

(A) Secuencias y patrones.

(B) Solución de ecuaciones.

(C) Variación y cambio.

(D) Modelación.

(E) Fórmulas y equivalencias.

(F) Desigualdades e inecuaciones.

(G) Propiedades de las operaciones.

A continuación, se presenta una tabla en la que sea amplia la descripción para cada nivel de algebrización, según las categorías previamente presentadas.

Tabla 2. Niveles ampliados de algebrización por categorías (páginas 32 y 33)

NIVEL	Secuencias y patrones A	Solución de ecuaciones B	Variación y cambio C	Modelación D	Fórmulas y equivalencias E	Desigualdades e Inecuaciones F	Propiedades de las operaciones. G	Pertenencia e inclusión. H
0	Extiende patrones numéricos y geométricos simples.	Resuelve ecuaciones planteadas en esquemas gráficos (espacios en blanco) mediante ensayo y error.		Representa gráficamente un problema que incluye datos desconocidos. Describe un problema a partir de su representación gráfica.	Estima y compara las equivalencias entre dos magnitudes, sentencias numéricas, monedas o sistemas de numeración dados.	Identifica si un número es una solución de una inecuación lineal. Establece relaciones de orden entre dos números o entre dos sentencias numéricas.	Reconoce las propiedades modulativa, asociativa y conmutativa de la suma y la multiplicación en el conjunto de los números naturales. Valora la plausibilidad del resultado de una operación numérica. Identifica el inverso aditivo de un número natural. Reconoce las operaciones inversas.	Establece relaciones de pertenencia. Determina la falsedad o veracidad de un enunciado que incluya relaciones de pertenencia.
1	Identifica patrones numéricos y geométricos simples, y los explica verbalmente. Crea patrones numéricos y geométricos simples. Completa tablas siguiendo patrones preestablecidos que usan simbología algebraica.	Resuelve ecuaciones representadas con esquemas gráficos (espacios en blanco) y ecuaciones planteadas verbalmente, mediante ensayo y error o mediante el uso de operaciones inversas.	Identifica variables dependientes e independientes en un fenómeno cualquiera. Describe la relación entre dos elementos matemáticos cualesquiera. Enumera las posibles permutaciones de los elementos de un conjunto dado.	Representa algebraicamente situaciones aditivas que incluyen incógnitas. Representa algebraicamente sentencias numéricas simples.	Establece equivalencias entre dos sentencias numéricas, dos unidades de medida, dos monedas o dos sistemas de numeración. Usa fórmulas que involucran varias variables para la resolución de problemas en contextos matemáticos o no matemáticos.	Determina gráficamente el conjunto solución de una inecuación lineal.	Formula y comprueba generalizaciones sobre los resultados de las operaciones de números naturales. Identifica y usa el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de un número racional. Identifica patrones en los resultados de las operaciones. Usa para los patrones en los resultados de las operaciones para simplificar procesos. Utiliza la propiedad distributiva. Reemplaza una variable por un valor numérico pre-establecido dentro de una sentencia numérica.	Identifica características comunes en un conjunto de objetos matemáticos, y establece relaciones de inclusión y pertenencia entre conjuntos y elementos de un conjunto respectivamente. Determina la falsedad o veracidad de un enunciado que incluya relaciones de pertenencia e inclusión entre conjuntos y elementos de un conjunto respectivamente.
2	Identifica patrones numéricos y geométricos simples, y los modela por medio	Resuelve ecuaciones utilizando simbología algebraica mediante el uso de	Predice el cambio de una variable en función de la otra y toma como referencia fenómenos	Representa algebraicamente situaciones aditivas y multiplicativas que incluyen	Establece equivalencias entre varias sentencias numéricas, varias unidades de medida, varias monedas y	Describe (con intervalos, verbal y gráficamente), el conjunto solución para	Formula y comprueba generalizaciones sobre las operaciones de los números racionales positivos. Usa las propiedades	Comprueba generalizaciones sobre relaciones (pertenencia e inclusión) entre

	de simbología algebraica.	propiedades numéricas.  Encuentra valores posicionales desconocidos como resultado del análisis de una sentencia numérica	matemáticos y no matemáticos. Diseña tablas para analizar el cambio de dos variables relacionadas.	incógnitas. Utiliza indistintamente símbolos para representar incógnitas.	varios sistemas de numeración.  Modifica fórmulas dadas en función de un problema.  Utiliza las propiedades de las igualdades.	una inecuación lineal.	modulativa, asociativa, conmutativa y distributiva de la suma y la multiplicación en el conjunto de los racionales positivos. Representa algebraicamente las propiedades de las operaciones en un conjunto dado	objetos matemáticos, geométricos ó sistemas numéricos dados.
3	Formula reglas canónicas simbólicas equivalentes para representar patrones.	Resuelve ecuaciones (o sistemas de ecuaciones) mediante métodos numéricos, algebraicos, gráficos o tabulares.	Describe el cambio de una variable en función de la otra, tomando como referencia situaciones representados simbólicamente.	Representa algebraicamente situaciones diversas tomando a partir de referentes verbales, escritos, gráficos o tabulares. Encuentra la relación de equivalencia entre distintos ostentivos del mismo objeto matemático.	Distingue los diversos sentidos de una igualdad según el contexto matemático.	Resuelve una inecuación lineal.	Formula y comprueba, algebraicamente, relaciones entre los elementos de un conjunto numérico bajo una operación específica. Opera con expresiones racionales que involucran incógnitas.	Formula generalizaciones sobre relaciones (pertenencia e inclusión) entre objetos matemáticos, geométricos ó sistemas numéricos dados.

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.

La investigación es de corte cualitativo, estudio de caso ( el caso se conforma por los libros de texto utilizados en la básica primaria y los niños de los grados 1, 2, 3, 4 y 5 del Colegio Montessori). Los padres de familia y los estudiantes fueron consultados para solicitar su consentimiento informado para la toma de datos. Se garantizará que ni los nombres de los estudiantes ni rasgos que puedan ser usados para identificarlos estarán disponibles en los documentos académicos que resulten de la investigación. Para la publicación de artículos en revistas nacionales e internacionales se omitirá el nombre de la institución educativa.

#### 3.2 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO DE ESTUDIO.

El presente trabajo fue desarrollado en el Colegio Montessori, Institución Educativa de carácter privado, que atiende a una población de 1100 estudiantes pertenecientes a los estratos 4, 5 y 6 del área metropolitana de Medellín. El colegio está ubicado en el barrio San Lucas, El Poblado. Ésta institución ha figurado en los últimos años entre los cinco mejores colegios de calendario “A” a nivel regional según los resultados de las pruebas Saber y el ranking publicado por la revista Dinero, ocupando el año pasado el segundo lugar en Antioquia.

El Colegio Montessori brinda una propuesta educativa bilingüe desde pre-escolar hasta undécimo grado, que incluye la enseñanza del inglés como segunda lengua como una materia y la inmersión en el lenguaje en las áreas de matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales. La propuesta de bilingüismo se apoya en libros de texto en inglés. En el caso de matemáticas, la colección de libros para la básica primaria es “*EnVision Math*”; dicha colección ha sido implementada por dos años consecutivos.

### 3.3 ETAPAS DEL TRABAJO.

Para que el razonamiento algebraico sea adecuadamente trabajado en las aulas escolares se requiere tanto que los profesores reconozcan y promuevan el razonamiento algebraico (Carragher y Schliemann, 2007) como que los libros de texto involucren tareas que pongan en juego la naturaleza algebraica de las mismas.

La propuesta de la colección de libros para la básica primaria en el Colegio Montessori “*EnVision Math*” fue puesta bajo estudio para el desarrollo de esta investigación. Se consideraron dos fases: la primera refiere a los tipos de tareas de carácter algebraico que se proponen en los libros de texto de nivel primario; y la segunda, refiere a la validación de los niveles de algebrización en dichas tareas, tal como son propuestos en Godino et al., (2012).

De acuerdo con los hallazgos de la primera fase-identificación de tareas de carácter algebraico y con la clasificación de las mismas según los niveles descritos de algebrización- se escogieron un número representativo de ellas.

Los criterios de escogencia atendieron a: grado escolar, capítulos del libro, contenidos temáticos, niveles de algebrización. A partir de estos criterios se escogió un número representativo de ejercicios para diseñar un cuestionario. El cuestionario fue sometido a juicio de expertos.

A partir del cuestionario o prueba, validado por el juicio de expertos se procedió a su implementación. Con los resultados de la aplicación de la prueba se estudiaron, entre otros, la correspondencia entre los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) conferidos a las tareas y los desempeños de los niños, la relación entre los niveles de algebrización (Godino et al., 2014) y el nivel de escolaridad, y el vínculo entre algunas unidades de contenidos que se repiten a lo largo de la colección de libros y la intensidad de actividades de naturaleza algebraica en ellas. Se consideró realizar algunas entrevistas a estudiantes. La escogencia se hizo con base en los resultados de la aplicación de la prueba lo cual permitirá identificar estudiantes.

### 3.4 FUENTES DE DATOS

Las fuentes de datos en este trabajo son tres: una colección de libros de texto, escritos en inglés (EnVision Math, Ed. Pearson); las pruebas escritas diseñadas por el investigador y aplicadas a estudiantes del colegio Montessori; y las entrevistas a estudiantes.

En lo que sigue se describen cada una de estas fuentes y el procedimiento para la toma de los datos.

#### 3.4.1 ANÁLISIS DE TEXTOS

Cada uno de los cinco libros de texto que forman la colección EnVision Math para la básica primaria del Editorial Pearson, fue analizada bajo los siguientes criterios:

- 1) Cantidad de actividades de naturaleza algebraica en cada texto.
- 2) Cantidad de actividades de naturaleza algebraica según unidades de contenido temático.
- 3) Clasificación de las actividades de naturaleza algebraica según niveles de algebrización asignados bajo la propuesta de Godino et.al., (2014). (Presentados en el apartado 2.3, página 27 de este trabajo).
- 4) Clasificación de las actividades de naturaleza algebraica según niveles de algebrización modificados (Presentados en el apartado 2.5, página 31 de éste trabajo).

Cada uno de los libros de la serie EnVision Math, propone un promedio de 20 capítulos que organizan los contenidos temáticos a desarrollar a lo largo del año, siendo común en todos ellos la siguiente estructura general:

Tabla 3. Estructura general de la colección de libros EnVision Math (Ed Pearson, 2012).

---

### **BLOQUE DE NUMERACIÓN**

Incluye el trabajo del valor posicional, relaciones de orden en los elementos de diferentes conjuntos numéricos, lectura y escritura de números, entre otros.

Se dedican, por lo general, 1 unidad a este bloque.

---

### **BLOQUE DE ÁLGEBRA**

Incluye el trabajo con secuencias y patrones (numéricos y geométricos), el trabajo con las propiedades de las operaciones, el estudio de relaciones funcionales (por medio de tablas, expresiones simbólicas y gráficos, la solución de ecuaciones, y entre otros.

Se resalta también la presencia de la sección “Algebra connections”, como una subsección de cada unidad, en donde se *algebriza* su contenido temático.

Se dedican en promedio 2 unidades a este bloque.

---

### **BLOQUE DE SISTEMAS NUMÉRICOS**

Incluye el estudio de las propiedades de los elementos de conjuntos numéricos tales como los naturales, los enteros y los racionales positivos; y sus operaciones.

Se dedican, por lo general, 8 unidades a este bloque.

---

### **BLOQUE DE GEOMETRÍA**

Incluye el estudio de la geometría plana y espacial, y sus relaciones métricas. Por lo general, se asocia con el estudio de la medición y cálculos de áreas, perímetros y volúmenes. Se destaca la presencia de algunos contenidos geométricos en algunas unidades para ilustrar conexiones y aplicaciones.

Se dedican en promedio 3 unidades a este bloque.

---

### **BLOQUE DE MEDICIÓN**

En los grados inferiores (1°, 2° y 3°), incluye el trabajo del concepto de medición y la utilización de instrumentos y unidades para medir diferentes atributos, tales como: longitud, tiempo, temperatura, área y volumen, tanto en el sistema internacional como en el sistema inglés.

En los otros grados (4° y 5°), se centra en la conversión de unidades dentro de un sistema y entre varios sistemas, especialmente en lo relacionado con la longitud, el área, el volumen, la capacidad y la masa.

Se dedica, por lo general, una unidad a este bloque.

---

### **BLOQUE DE ESTADÍSTICA**

Incluye el trabajo con la estadística descriptiva elemental, las permutaciones y combinaciones, y una introducción a la probabilidad.

Se dedica, el promedio, 2 unidades a estos contenidos.

---

En disposición de los criterios se inició una revisión de la sección de ejemplo y ejercicios propuestos en los libros y se procedió a clasificar las tareas matemáticas propuestas entre las que tenían naturaleza algebraica (de manera explícita o implícita) y las que no. Se hizo una revisión inicial de prueba del libro de tercer grado, y se encontró que el libro ofrecía tareas que parecían incluir características algebraicas no consideradas en la propuesta de Godino et.al., (2014), ya que algunas tareas parecían corresponder a dos niveles diferentes o no estar incluidas en ningún nivel. Para dirimir esta condición se buscó en la literatura propuestas sobre indicadores sobre razonamiento algebraico. Así fue que se incluyó el trabajo de Burkhardt (2001). En virtud de lo anterior la propuesta de Godino se amplió en una dimensión descriptiva (Ver el apartado 2.5 del trabajo).

A continuación se muestran tablas, numeradas desde la 4 hasta la 8, en las que se consigna el número de tareas algebraicas por nivel de algebrización y por unidad temática. Mientras que en las tablas numeradas 9 hasta la 13 se consignan los niveles de algebrización y las categorías propuesta en el apartado 2.5.

Tabla 4. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Primer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.

# Unidad	Nombre de la Unidad	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Número de actividades
1	Understanding Addition and Substraction	3	0	0	0	3
2	Addition Strategies	5	2	0	0	7
3	Substraction Strategies	4	1	0	0	5
4	Place Value: Numbers to 100	2	1	0	0	3
5	Counting Money	1	3	0	0	4
6	Mental Addition	4		0	0	4
7	Mental Subtraction	4	1	0	0	5
8	Adding Two-Digit Numbers	4	1	0	0	5
9	Subtracting Two-Digit Numbers	1	1	0	0	2
10	Using Addition and Subtraction	0	0	0	0	0
11	Geometry	1	1	0	0	2
12	Fraction	1	0	0	0	1
13	Measurement: Length and Area	0	0	0	0	0

<b>14</b>	Measurement: Capacity and Weight	0	0	0	0	0
<b>15</b>	Time and Temperature	2	0	0	0	2
<b>16</b>	Graphs and Probability	0	0	0	0	0
<b>17</b>	Numbers and Patterns to 1,000	1	3	0	0	4
<b>18</b>	Three-Digit Addition and Subtraction	2	0	0	0	2
<b>19</b>	Multiplication Concepts	3	1	0	0	4
<b>20</b>	Divisions Concepts and Facts	0	0	0	0	0
<b>Totales</b>		<b>38</b>	<b>15</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>53</b>

Tabla 5. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Segundo Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización.

<b># Unidad</b>	<b>Unidad</b>	<b>Número de actividades</b>	<b>Nivel 0</b>	<b>Nivel 1</b>	<b>Nivel 2</b>	<b>Nivel 3</b>
<b>1</b>	Numeration	8	7	1	0	0
<b>2</b>	Adding Whole Numbers	6	4	2	0	0
<b>3</b>	Subtraction Number Sense	2	0	2	0	0
<b>4</b>	Subtracting Whole Nubers to Solve Problems	1	0	1	0	0
<b>5</b>	Multiplication Meanings and Facts	15	5	9	1	0
<b>6</b>	Multiplication Fact Strategies: Use Known Facts	2	0	2	0	0
<b>7</b>	Division Meanings	1	0	1	0	0
<b>8</b>	Division Facts	1	0	1	0	0
<b>9</b>	Patterns and Relationships	11	3	8	0	0
<b>10</b>	Solids and Shapes	5	0	5	0	0
<b>11</b>	Congruence and Symmetry	2	0	2	0	0
<b>12</b>	Understanding Fractions	4	3	1	0	0
<b>13</b>	Decimals Money	2	1	1	0	0
<b>14</b>	Customary Measurement	2	2	0	0	0
<b>15</b>	Metric Measurement	1	1	0	0	0
<b>16</b>	Perimeter, Area, and Volume	0	0	0	0	0
<b>17</b>	Time and Temperature	1	0	1	0	0
<b>18</b>	Multiplying Greater Numbers	3	1	2	0	0
<b>19</b>	Dividing with 1-Digit Numbers	4	2	2	0	0
<b>20</b>	Data, Graphs, and Probabiliy	3	2	1	0	0
<b>Totales</b>		<b>74</b>	<b>31</b>	<b>42</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

Tabla 6. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Tercer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebraización.

# Unidad	Unidad	Número de actividades	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	Numeration	6	1	5	0	0
2	Adding and Subtracting Whole Numbers	10	9	1	0	0
3	Multiplication Meanings and Facts	7	3	4	0	0
4	Division Meanings and Facts	5	3	2	0	0
5	Multiplying by 1-Digit Numbers	8	3	3	2	0
6	Patterns and Expressions	13	1	6	6	0
7	Multiplying by 2-Digit Numbers	2	0	2	0	0
8	Diving by 1-Digit Divisors	14	6	8	0	0
9	Lines, Angles, and Shapes	9	4	5	0	0
10	Understanding Fractions	5	4	1	0	0
11	Adding and Subtracting Fractions	4	1	3	0	0
12	Understanding Decimals	3	1	2	0	0
13	Operations with Decimals	3	2	1	0	0
14	Area and Perimeter	2	0	2	0	0
15	Solids	4	3	1	0	0
16	Measurement, Time, and Temperature	7	5	1	1	0
17	Data and Graphs	1	0	1	0	0
18	Equations	8	1	5	2	0
19	Transformations, Congruence, and Symetry	0	0	0	0	0
20	Probability	1	1	0	0	0
<b>Totales</b>		<b>112</b>	<b>48</b>	<b>53</b>	<b>11</b>	<b>0</b>

Tabla 7. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Cuarto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebraización.

# Unidad	Unidad	Número de actividades	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	Numeration	2	2	0	0	0

2	Adding and Subtracting Whole Numbers and Decimals	4	1	4	0	0
3	Multiplying Whole Numbers	6	2	2	2	0
4	Dividing by 1-Digit Divisors	8	1	3	4	0
5	Dividing by 2-Digit Divisors	1	1			
6	Variables and Expressions	17	1	9	5	2
7	Multiplying and Dividing Decimals	9	0	4	5	0
8	Shapes	6	0	3	3	0
9	Fractions and Decimals	5	0	3	2	0
10	Adding and Subtracting Fractions and Mixed Numbers	4	1	3	0	0
11	Multiplying Fractions and Mixed Numbers	4	0	3	1	0
12	Perimeter and Area	7	0	4	2	1
13	Solids	4	0	4	0	0
14	Measurement Units, Time, and Temperature	0	0	0	0	0
15	Solving and writing Equations and Inequalities	19	0	8	9	2
16	Ratio and Percent	4	0	2	2	0
17	Equations and Graphs	5	0	3	2	0
18	Graphs and Data	2	0	1	1	0
19	Transformations, Congruence, and Symmetry	2	0	1	1	0
20	Probability	3	0	1	2	0
	<b>Totales</b>	<b>112</b>	<b>9</b>	<b>58</b>	<b>41</b>	<b>5</b>

Tabla 8. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad en el libro de Quinto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebraización.

# Unidad	Unidad	Número de actividades	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1	Numeration	3	1	1	1	0
2	Variables, Expressions, and Properties	7	0	5	2	0
3	Operations with Decimals	4	0	3	1	0
4	Solving Equations	7	0	5	2	0
5	Number and Fraction Concepts	6	0	3	3	0
6	Decimals, Fractions, and Mixed Numbers	0	0	0	0	0
7	Adding and Subtracting Fractions and Mixed Numbers	3	0	1	2	0
8	Multiplying Fractions and Mixed Numbers	0	0	0	0	0

<b>9</b>	Dividing Fractions and Mixed Numbers	5	0	2	3	0
<b>10</b>	Integers	8	0	5	4	0
<b>11</b>	Properties of Two-Dimensional Figures	9	0	3	5	1
<b>12</b>	Ratios, Rates, and Proportions	2	0	0	2	0
<b>13</b>	Solving Proportions	5	0	0	5	0
<b>14</b>	Understanding Percent	4	0	1	3	0
<b>15</b>	Equations and Graphs	23	0	6	17	2
<b>16</b>	Measurement	2	0	0	2	0
<b>17</b>	Perimeter and Area	10	0	1	8	1
<b>18</b>	Volume and Surface Area	8	0	4	6	1
<b>19</b>	Data and Graphs	9	0	3	8	0
<b>20</b>	Probability	3	0	1	2	1
<b>Totales</b>		<b>118</b>	<b>1</b>	<b>44</b>	<b>76</b>	<b>6</b>

Tabla 9. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Primer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebraización discriminadas por categorías.

<b>NIVE L</b>	<b>Secuencia y patrones</b>	<b>Solución de ecuaciones</b>	<b>Variación y cambio</b>	<b>Modelación</b>	<b>Pertenencia e inclusión</b>	<b>Equivalencias</b>	<b>Desigualdades e Inecuaciones</b>	<b>Propiedades de las operaciones.</b>
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>
<b>0</b>	7	28	0	0	0	1	0	2
<b>1</b>	6	6	0	0	0	4	0	1

Tabla 10. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Segundo Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebraización discriminadas por categorías.

<b>NIVE L</b>	<b>Secuencias y patrones</b>	<b>Solución de ecuaciones</b>	<b>Variación y cambio</b>	<b>Modelación</b>	<b>Pertenencia e inclusión</b>	<b>Equivalencias</b>	<b>Desigualdades e Inecuaciones</b>	<b>Propiedades de las operaciones</b>
	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>
<b>0</b>	10	7	0	6	1	2	5	2
<b>1</b>	17	2	0	2	2	0	1	19
<b>2</b>	0	0	0	0	0		0	1

Tabla 11. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Tercer Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.

NIVEL	Secuencia s y patrones	Solución de ecuaciones	Variación y cambio	Modelación	Pertenencia e inclusión	Equivalencias	Desigualdades e Inecuaciones	Propiedades de las operaciones
	A	B	C	D	E	F	G	H
<b>0</b>	8	22	0	24	0	5	1	6
<b>1</b>	7	11	1	9	4	4	3	22
<b>2</b>	10	7	0	8	0	0	0	0

Tabla 12. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Cuarto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.

NIVEL	Secuencias y patrones	Solución de ecuaciones	Variación y cambio	Modelación	Pertenencia e inclusión.	Equivalencias	Desigualdades e Inecuaciones	Propiedades de las operaciones
	A	B	C	D	E	F	G	H
<b>0</b>	3	0	0	0	0	0	0	2
<b>1</b>	14	9	5	15	2	1	2	17
<b>2</b>	5	17	3	7	0	3	1	6
<b>3</b>	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 13. Número de actividades de naturaleza algebraica en el libro de Quinto Grado de la serie EnVision Math clasificados según niveles de algebrización discriminadas por categorías.

NIVEL	Secuencias y patrones	Solución de ecuaciones	Variación y cambio	Modelación	Pertenencia e inclusión	Equivalencias	Desigualdades e Inecuaciones	Propiedades de las operaciones
	<b>0</b>	1	1	0	0	0	0	1
<b>1</b>	14	5	2	9	1	4	1	15
<b>2</b>	11	16	9	17	4	14	1	13
<b>3</b>	1	0	0	6	0	0	1	0

### 3.4.2. PRUEBAS.

#### 3.4.2.1 Diseño.

Las pruebas aplicadas a los estudiantes -con la intención de analizar su desempeño al resolverlas, y de describirlo usando los niveles de algebrización- fueron diseñadas a partir de las tareas encontradas en el análisis de texto, cuya naturaleza algebraica fue estudiada.

La selección de las actividades que harían parte de cada prueba, atendió a los siguientes criterios:

1. Criterio del investigador. Ejercicio que, a discreción del investigador, resulta interesante para ser analizado.
2. Representatividad. Ejercicio que representa a un grupo de ejercicios similares, o que es único según un criterio de escogencia establecido. Los criterios de escogencia fueron:
  - Al menos un ejercicio por cada uno de los niveles de algebrización de Godino.
  - Al menos un ejercicio por cada una de las categorías en los niveles ampliados de algebrización.
  - Al menos un ejercicio que se ubique dentro de los bloques temáticos especificados en el apartado 3.4.1 de éste trabajo.
3. Motivación para el estudiante. Ejercicio que pueda resultar interesante para el estudiante por motivos como: su relación con el contexto próximo, intereses académicos, utilización de material concreto, y nivel de dificultad.

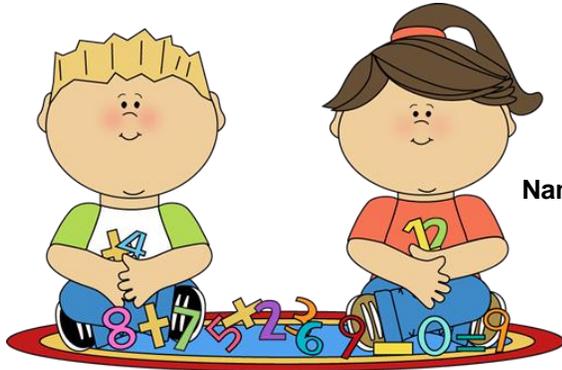
Las 5 pruebas fueron enviadas a revisión de expertos. Se destaca el aporte de la doctora Lilia Aké, coautora de la primera publicación de los niveles de algebrización de Godino, presentados en una comunicación para la SEIEM en el 2012.

A continuación se presentan las 5 pruebas diseñadas. Para cada prueba, se incluyen algunos comentarios<sup>2</sup> que, de manera general, abordan aspectos de diseño de la prueba y el nivel de algebrización asignado bajo la propuesta de Godino, junto con la categoría de los niveles

---

<sup>2</sup> Algunos de estos comentarios fueron tomados de la revisión por parte de la doctora Lilia Aké.

ampliados de algebrización. Se invita al lector a revisar la tabla 2 de niveles de algebrización (página 32) ampliados que se presentó en el apartado 2.5 de este trabajo.



**MATH DIAGNOSTIC TEST**

**1<sup>st</sup> GRADE.**

Name: \_\_\_\_\_

Read carefully each exercise. Then solve.

**A.**

Find the missing number.

$$6 + \square + 3 = 10$$



$$5 + 5 + \square = 15$$

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  La tarea implica resolver una ecuación que se podría resolver por ensayo y error o completando. La actividad que se demanda al resolutor queda en un nivel cero.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	

**B.**

Write the missing number.

$$\square + 4 = 4$$



$$9 + \square = 10$$

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  La tarea fomenta el uso del neutro aditivo, en el primer caso de la tarea B. Si se aplicara las propiedades de las operaciones en la resolución de la tarea, según la tabla de descriptores de los niveles de algebrización para la resolución de ecuaciones, se estaría en un nivel 2.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones y propiedades de las operaciones.	

C. Look at the addition sentence. Find the missing number.

$$\square + \square = 16 \qquad \square = \underline{\quad}$$

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  El planteamiento es una variante de las tareas anteriores. Nivel cero.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	

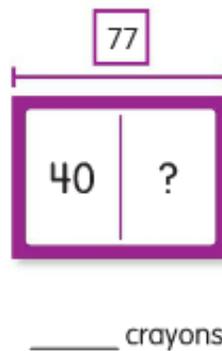
D. Use a related addition fact to complete the subtraction fact.

$$12 - \underline{\quad} = 8 \qquad \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  La tarea propicia el uso de la suma y la resta como operaciones inversas, por esto se ubica en el nivel 1.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

E. Use mental math to solve.

Shandra has 77 crayons on her desk.  
She puts 40 crayons into boxes.  
How many crayons are left on her desk?



NIVEL: 1	COMENTARIOS:  En este caso, el niño tiene que resolver la expresión que se le proporciona y que representa al problema verbal dado: $40 + \underline{\quad} = 77$ similar a las tareas anteriormente planteadas. Nivel cero.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	

F. Write the digit that makes each number sentence true.

$$34 + 2\boxed{\phantom{0}} = 57$$

$$1\boxed{\phantom{0}} + 51 = 67$$

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  La tarea propicia la identificación del valor posicional. Se presume que el resolutor la aborda por medio de ensayo y error.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones	

Find two parts to make 100.

G.

$$37 + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} = 100$$

$$54 + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{\phantom{0}} = 100$$

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  Se entiende que en cada expresión, los cuadrados representan al mismo valor. Para el primer caso ( $37 + \_ + \_ = 100$ ) no se tendría un valor exacto para el cuadrado; esto no ocurre en el segundo caso ( $54 + \_ + \_ = 100$ ) el cual el valor del cuadrado es 23. Según los descriptores se está en un nivel cero.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	

H.

Find the pattern. Write the missing numbers.

3, 5, 8, 12, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  La tarea implica extender el patrón numérico identificando los valores de aumento. En este caso, para poder continuar la secuencia se tiene que reconocer la regla de aumento para hallar el término siguiente, aunque sea de modo implícito. Nivel cero. La tarea implicaría un primer nivel si se le pidiera que explicara cuál es la regla (tal como se realiza en la tarea I).
CATEGORÍA: Secuencias y patrones	

I. What is the rule?

230 → 130    430 → 330    630 → 530

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Al realizar el cuestionamiento sobre cuál es la regla, se motiva al estudiante a poner de manifiesto de manera explícita que <i>se tiene que restar 100</i> . Nivel 1.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones.	

J. Find the missing number.

$$42 - 9 = 43 - \square$$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  La tarea fomenta la interpretación del signo igual como equivalencia. El rubro de fórmulas y equivalencias indica que si se establecen relaciones de equivalencias numéricas se trata de un primer nivel. Si se analiza desde la categoría solución de ecuaciones el resolver la tarea por ensayo y error indicaría un nivel 1. ( 2 actividades diferentes, una con una exigencia mayor que la otra, desembocan en un mismo nivel)
CATEGORÍA: Fórmulas y equivalencias. Solución de ecuaciones.	

MATH DIAGNOSTIC TEST

2<sup>ND</sup> GRADE.



Name:

\_\_\_\_\_

Use the information below to solve exercise A.

What whole numbers make this number sentence true?

$$\square \leq 6$$

The whole numbers 0, 1, 2, 3, 4, 5, and 6 make this number sentence true. The greatest whole number that makes this number sentence true is 6.

The value of  $\square$  is **at most** 6.

A. Describe each list of numbers using **at most** or **at least**. Then use  $\geq$  or  $\leq$  to write a number sentence for each list.

a. 0, 1, 2, 3, 4

b. 9, 10, 11, 12, and so on

c. 3, 4, 5, 6, 7, and so on

d. 20, 21, 22, 23, and so on

NIVEL: 0	COMENTARIOS: Nivel cero, se identifica si un número es una solución de una inecuación lineal (numérica) y se identifican relaciones de orden.
CATEGORÍA: Desigualdades e inecuaciones.	

B. The product of two factors is 0. One of the factors is 0. Can you tell what the other factor is? Explain your answer.

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  La tarea exige poner de manifiesto la propiedad del cero en la multiplicación (modulativa). Es posible llegar a una generalización respecto a esta propiedad. De acuerdo a lo anterior y según los descriptores se estaría frente a un nivel 2 dentro del rubro propiedades de las operaciones.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

C. copy and complete each number sentence.

$$35 + \blacksquare = 50 + 5$$

$$\blacksquare - 10 = 38 + 1$$

$$\blacksquare + 22 = 30 - 2$$

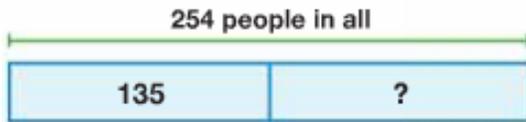
$$50 - \blacksquare = 46 + 3$$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Si se resuelve estableciendo relaciones de equivalencias numéricas, se trata de un nivel 1.
CATEGORÍA: Fórmulas y equivalencias; solución de ecuaciones.	

D. You have learned that a square is a type of rectangle. Do all rectangles have the same number of lines of symmetry as all squares? Explain your answer.

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Si se identifica las características comunes entre las dos figuras se trata de una actividad de primer nivel.
CATEGORÍA: Inclusión y pertenencia.	

- E. A total of 254 people entered a bicycle race. So far 135 people have finished the race. How many people are still racing?



NIVEL: 0	COMENTARIOS: Similar a la tarea E del primer test.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	En este caso, el niño tiene que resolver la expresión que se le proporciona y que representa al problema verbal dado: $135 + \_ = 254$ similar a las tareas anteriormente planteadas. Nivel cero.

- F. Copy and complete. Write the number that completes each pattern.

3, 6, 9, 12, ■, 18

14, ■, 18, 20, 22, 24

25, 50, 75, 100, 125, ■

3, 8, 13, 18, 23, ■

7, 9, 11, ■, 15, 17

12, ■, 20, 24, 28

22, 20, 18, 16, ■, 12

86, 81, ■, 71, 66, 61

NIVEL: 0	CATEGORIA: Secuencias y patrones
COMENTARIOS: En cada una de las secuencias, para poder continuarlas se tiene que reconocer la regla de aumento para hallar los términos que se desconocen aunque no se le pide al niño expresarlo verbalmente. Nivel cero.	

- H. Pam is setting up tables and chairs.  
She puts 4 chairs at each table.
- Explain how the number of chairs changes as the number of tables changes.
  - Copy and complete the table.

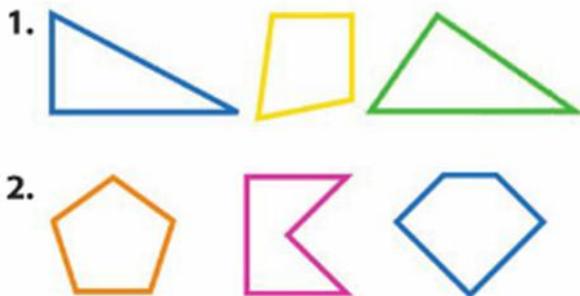
Number of Tables	1	2	3	4	5
Number of Chairs	4	8	12	■	■

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Para completar la tabla se precisa identificar la relación entre el número de sillas y mesas para hallar los 2 términos faltantes. La exigencia de proporcionar una explicación es lo que implica un primer nivel.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones.	

- I. What is the greatest possible remainder you can have if you divide a number by 7? Explain.

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  El estudiante debe plantear una generalización de los residuos que obtiene al dividir números naturales entre 7.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

- J. Make and test a generalization for each set of polygons.



NIVEL: 1	COMENTARIOS:  El estudiante debe identificar la característica geométrica común a cada grupo de figuras y plantear una generalización que describa la característica esencial de las figuras que hacen parte de cada grupo.
CATEGORÍA: Pertenencia e inclusión.	

**MATH DIAGNOSTIC TEST**

**3<sup>rd</sup> GRADE.**



Name: \_\_\_\_\_

Read each exercise carefully. Try your best and do not leave any exercises without solving.

- A. Line  $AB$  is parallel to line  $CD$ , and line  $CD$  is perpendicular to line  $EF$ . What can you conclude about  $AB$  and  $EF$ ?

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Se pretende que se relacione dos objetos matemáticos para identificar una propiedad que es posible ser demostrada. Nivel 1 de acuerdo a los descriptores de variación y cambio.
CATEGORÍA: Variación y cambio	

- B. Use  $<$ ,  $>$  or  $=$  in the circle, to compare by estimating the results of each multiplication/addition.

$$5 \times 71 \bigcirc 5 \times 70 \qquad 8 \times 30 \bigcirc 8 \times 35$$

$$4 \times 56 \bigcirc 200 \qquad 6 \times 37 \bigcirc 37 \times 6$$

$$3 \times 33 \bigcirc 100 \qquad 80 \bigcirc 4 \times 19$$

$$1 \times 67 \bigcirc 1 + 67 \qquad 2 + 34 \bigcirc 2 \times 34$$

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  El niño tiene que estimar y comparar las expresiones para establecer un orden por lo que se trata de un nivel cero. Sin embargo, la actividad también permite poner de manifiesto ciertas propiedades como la conmutativa; los modos en los que se estima y compara determinan el nivel de algebraización.
CATEGORÍA: Desigualdades e inecuaciones. Fórmulas y equivalencias.	

C. In 1 through 3, copy and complete the table.

	$c$	$c + 8$
1.	4	<input type="text"/>
2.	9	<input type="text"/>
3.	13	<input type="text"/>

NIVEL: 1	CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.
COMENTARIOS:  El estudiante debe reemplazar el valor pre-establecido en la expresión $c+8$ . Dependiendo de la intervención que el docente haga al orientar la actividad, podrían generarse predicciones y generalizaciones que ubicarían la actividad en otro nivel.	

D. For 1, use the table below.

Total number of test questions ( $q$ )	20	30	40	50
Number of multiple-choice questions	10	20	30	<input type="text"/>

1. What is a rule for the table in words?  
in symbols?

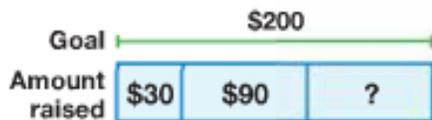
NIVEL: 2	COMENTARIOS:  La exigencia de expresar la regla en términos verbales, pero sobre todo en términos simbólicos catalogan a esta actividad de un nivel 2 de acuerdo a los niveles de algebrización.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones, modelación.	

E. Elijah has  $n$  customers in his lawn-mowing business. He mows each lawn once a week. Which expression shows how many lawns he mows in 12 weeks?

- A**  $n + 12$                       **C**  $12 - n$   
**B**  $n \times 12$                       **D**  $12 \div n$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  El niño tiene que modelar la situación planteando una ecuación y verificar la correspondencia con alguna de las opciones proporcionadas. Modelación, nivel 1.
CATEGORÍA: Modelación	

- F. Ted, Jason, and Angelina are trying to raise 200 dollars for a local shelter. Ted raised 30 dollars. Jason raised 90 dollars. How much money does Angelina need to raise in order to reach their goal?



NIVEL: 0	COMENTARIOS:  El niño tiene que resolver la expresión que se le proporciona y que representa al problema verbal dado: $30+90+ \_ = 200$ . Nivel cero.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	

- G. find each product.

$3 \times 7 = \square$	$6 \times 4 = \square$	$8 \times 5 = \square$
$3 \times 70 = \square$	$6 \times 40 = \square$	$8 \times 50 = \square$
$3 \times 700 = \square$	$6 \times 400 = \square$	$8 \times 500 = \square$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Si el estudiante formula algún tipo de generalización donde reconozca lo que ocurre con los ceros, entonces sería un nivel 1 Sin embargo, la tarea no le exige hacer alguna inferencia al respecto, el niño bien podría multiplicar simplemente y no llegar a alguna conclusión que lo lleve a generalizar.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

H. In **1** and **2**, use patterns to find each quotient.

<b>1.</b> $28 \div 7 = \square$	<b>2.</b> $64 \div 8 = \square$
$280 \div 7 = \square$	$640 \div 8 = \square$
$2,800 \div 7 = \square$	$6,400 \div 8 = \square$
$28,000 \div 7 = \square$	$64,000 \div 8 = \square$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Similar reflexión a la realizada en la tarea G
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

I. Copy and complete each number sentence.

- a**  $\square \times 14 = A$  where A is greater than 100.
- b**  $\square \times 24 = B$  where B is less than 100.

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Con los casos que se le presenta al niño, es posible que se promueva el análisis sobre el conjunto solución del recuadro azul y los valores que se obtienen de A. Si la actividad del niño se limita a situar un valor cualquiera al cuadrado azul y obtener una respuesta no es de nivel 1.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones – Desigualdades e inecuaciones.	

J. What number comes next in the pattern?

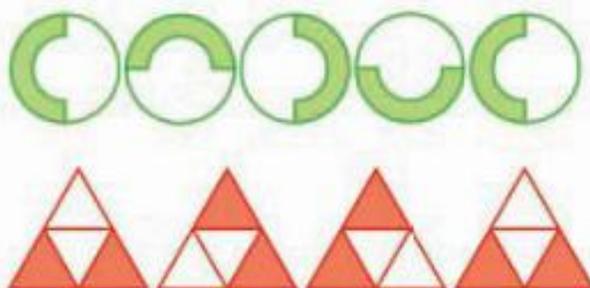
**4, 16, 64, 256,  $\square$**

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  Para poder continuar la secuencia se tiene que reconocer la regla de aumento, aunque no se le pide al niño expresarlo verbalmente. Nivel cero.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones.	

- K. Is the generalization that every four sided polygon has at least one right angle correct? If not, draw a picture to show why not.

<p>NIVEL: 1</p>	<p>COMENTARIOS:</p> <p>El niño tiene que determinar la falsedad o veracidad de un enunciado. Nivel 1.</p>
<p>CATEGORÍA: Pertenencia e inclusion.</p>	

- L. Explain the pattern, Draw the next two shapes.



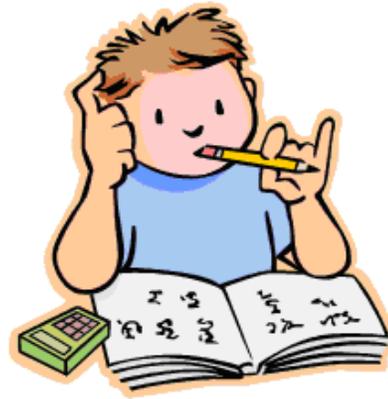
<p>NIVEL: 1</p>	<p>COMENTARIOS:</p> <p>Se trata de nivel cero, el niño solo tiene que continuar la secuencia dibujando las siguientes 2 figuras.</p>
<p>CATEGORÍA: Secuencias y patrones.</p>	

MATH DIAGNOSTIC TEST

4<sup>th</sup> GRADE.

Name:

\_\_\_\_\_



Read each exercise carefully. Try your best and do not leave any exercises without solving.

A. For 1 through 15, use the table of values at the right. For each equation, determine if the given replacements form a solution pair. Write yes or no.

- |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1. $y + z = 10$ | 2. $63 = b - c$ | 3. $b = a + 15$ |
| 4. $c + x = a$  | 5. $40 - c = x$ | 6. $c - x = 6$  |
| 7. $b - y = 43$ | 8. $b = 99 - z$ | 9. $60 - y = b$ |

Table of Values
$a = 30$
$b = 45$
$c = 18$
$x = 12$
$y = 8$
$z = 2$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  La actividad del estudiante se limita a decir, si o no. Los procedimientos implicados en la tarea pueden, también, limitarse al sustituir y realizar la operación correspondiente. Corresponde a un nivel 1 en el rubro de propiedades de las operaciones.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

B. Write an algebraic expression for each word phrase. Let  $x$  represent the number.

Three times a number, plus 10

Four less than a number times 2

Eight plus a number times 5

Forty minus two times a number

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  El estudiante se ve motivado a representar de manera algebraica, sentencias verbales. Nivel 1.
CATEGORÍA: Modelación.	

C. Use the distributive property to find another expression for  $3(2x + 7)$ .

- A  $6x + 7$                       C  $(9x) \times 3$   
 B  $3(14x)$                       D  $6x + 21$

NIVEL: 3	COMENTARIOS:  Se promueve en el estudiante la aplicación de la propiedad distributiva e identificar entre las opciones dadas la respuesta adecuada. Resultaría interesante plantear las propiedades en términos de sentencias numéricas.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

D. Complete the table of values for the equation:  
 $y = x - 6$ .

x	6	7	□	11
y	0	□	2	□

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  La tarea no se clasifica de manera adecuada en el rubro de secuencias y patrones. La actividad implica el análisis de los cambios que se producen en la variable dependiente respecto a la independiente.
CATEGORÍA: Variación y cambio	

E. In the equation  $y = x - 6$ , which positive numbers would you use for  $x$  if you wanted  $y < 0$ ?

NIVEL: 2	COMENTARIOS:  La tarea implica analizar una ecuación para posteriormente pensarla en términos de una inecuación. El estudiante puede describir el conjunto solución (nivel 2), sin embargo, también se motiva a resolver la inecuación (nivel 3).
CATEGORÍA: Desigualdades e inecuaciones.	

F.

Which equation shows the relationship of the values in the table?

x	y
9	6
8	5
7	4
6	3
3	0

**A**  $y = x + 3$

**B**  $x = y - 3$

**C**  $y = x - 3$

**D**  $y = x$

NIVEL: 2	CATEGORÍA: Modelación
COMENTARIOS:  La tabla indica un análisis funcional que describe un comportamiento modelizado por alguna de las ecuaciones proporcionadas.	

G.

use the number line below to write and solve each equation. Simplify, if possible. The distance between each consecutive label on the number line is the same.



$A + A = \square$

$K - A = \square$

$F - B = \square$

$G + \square = K$

$J - \square = E$

$K - A - \square = \frac{3}{4}$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  Se resuelve las expresiones apoyándose en el gráfico proporcionado. Nivel 1.
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones.	

H. find a rule for each table. Write an equation for each rule.

x	y
0	16
20	36
36	52
42	58

x	y
25	17
32	24
46	38
59	51

x	y
6	2
12	4
24	8
33	11

NIVEL: 3	COMENTARIOS:  Según los descriptores es una actividad de nivel 3, ya que se exige representar algebraicamente situaciones tabulares.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones. Modelación.	

I. Find the pattern in the numbers below, and then write the next three numbers.

32, 16, 8, 4, 2, 1, 0.5, ...

NIVEL: 0	COMENTARIOS:  Para poder continuar la secuencia se tiene que reconocer la sucesión geométrica, aunque no se le pide al niño expresarlo verbalmente. Nivel cero.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones.	

**MATH DIAGNOSTIC TEST**

**5<sup>th</sup> GRADE.**

Name: \_\_\_\_\_



Read each exercise carefully. Try your best and do not leave any exercises without solving.

A. copy the table and find two values for each variable that make the equation true.

$y = 4 + x$

x	<input type="text"/>	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	<input type="text"/>

$b = a - 2$

a	<input type="text"/>	<input type="text"/>
b	<input type="text"/>	<input type="text"/>

$t = 3w$

w	<input type="text"/>	<input type="text"/>
t	<input type="text"/>	<input type="text"/>

$y = x \div 2$

x	<input type="text"/>	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	<input type="text"/>

NIVEL: 3	COMENTARIOS: Se tiene que analizar una ecuación de 2 variables a través de tablas que pueden favorecer el análisis de la variable independiente y dependiente. (Nivel 3, según el rubro de resolución de ecuaciones y se corresponde con un nivel 3 del rubro variación y cambio)
CATEGORÍA: Solución de ecuaciones, variación y cambio.	

B. Use the input/output table

INPUT	0	1	2	3	4
OUTPUT	3	4	5	6	7

If the input number is 8, what is the output number?

Write an algebraic expression that describes the output pattern.

NIVEL: 3	COMENTARIOS:  La tabla indica un análisis que el alumno tiene que modelizar en términos de una expresión algebraica. Nivel 3.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones. Modelación.	

C.

Sally and her mother went to the sale at the Garden Center. Sally bought  $x$  large plants and  $y$  small plants. She paid with a twenty-dollar bill. Make a table using the expression  $20 - (4x + 2y)$  to show how much change she received if she bought 2 large plants and 4 small plants; 4 large plants and 2 small plants; or 1 large plant and 7 small plants.



*Make a separate column for each variable.*

NIVEL: 2	COMENTARIOS:  En términos de la variación y el cambio es una actividad de nivel 2.
CATEGORÍA: Variación y cambio.	

D.

Test these conjectures. Explain whether they are correct or incorrect.

1. The difference of two odd numbers is always even.
2. The sum of a negative integer and a positive integer is always negative.

NIVEL: 2	COMENTARIOS:  Se exige una comprobación de la cual puede surgir una generalización.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

- E. If  $x$  is a whole number greater than 0, which is always true?
- A  $6x$  is divisible by 3.
  - B  $6x$  is divisible by 4.
  - C  $6x$  is divisible by 5.
  - D  $6x$  is divisible by 9.

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  En esta actividad se comprueba una generalización, se trabaja con números enteros positivos, esto indica un nivel 1 según la tabla de descriptores.
CATEGORÍA: Propiedades de las operaciones.	

- F. Copy and complete the T-table below for  $y = 5x - 5$ . Then graph the equation.

$x$	$y$	$y = 5x - 5$
-1	-10	← $y = 5(-1) - 5$
0	■	$y = -5 - 5$
1	■	$y = -10$

NIVEL: 3	COMENTARIOS:  Se tiene que analizar una ecuación de 2 variables a través de tablas que pueden favorecer el análisis de la variable independiente y dependiente sustituyendo los valores proporcionados para "x". Nivel 3.
CATEGORÍA: Modelación.	

- G. Complete the equations.

$$12 + 15 = 27$$

$$12 + 15 + 6 = 27 + \blacksquare$$

$$\blacksquare = \blacksquare$$

$$57 - 9 = 48$$

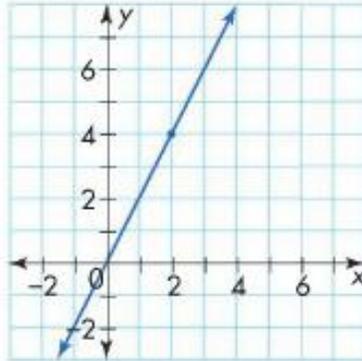
$$57 - 9 - 7 = 48 - \blacksquare$$

$$\blacksquare = \blacksquare$$

NIVEL: 1	COMENTARIOS:  La tarea fomenta la interpretación del signo igual como equivalencia. El rubro de fórmulas y equivalencias indica que si se establecen relaciones de equivalencias numéricas se trata de un primer nivel.
CATEGORÍA: Fórmulas y equivalencias	

H. Which equation was used to make the graph on the right?

- A  $y = 4x$
- B  $y = x + 2$
- C  $y = 2x$
- D  $y = x + 2$



NIVEL: 3	COMENTARIOS:  En la categoría de modelación se corresponde con el nivel 3.
CATEGORÍA: Modelación.	

I. Solve for  $x$ . Then graph each solution.

1.  $3x - 7 < 2$

2.  $2x - 5 \geq x - 3$

NIVEL: 3	COMENTARIOS:  Se resuelve la inecuación lineal se trata de un nivel 3 según los descriptores. Sin embargo, si se resuelve por ensayo y error se trataría de un nivel 2. (Identifica el significado de una variable en una inecuación y puede entender qué números podían utilizarse para hacer la sentencia verdadera, sin necesidad de usar métodos algorítmicos.
CATEGORÍA: Desigualdades e inecuaciones	

J. Use the table at right for **19** through **21**.

**19.** The Swiss mathematician Leonhard Euler (OY-ler) and the French mathematician Rene Descartes (dã KART) both discovered a pattern in the numbers of edges, vertices, and faces of polyhedrons. Complete the table to look for a pattern.

Polyhedron	Faces (F)	Vertices (V)	F + V	Edges (E)
Triangular Pyramid				
Cube				
Pentagonal Prism				

**20.** Describe any pattern you see in the table that relates the number of edges to the number of faces and vertices.

**21.** Write a formula to describe your pattern. Does the pattern work for a hexagonal prism?

NIVEL: 3	COMENTARIOS:  Se corresponde con un nivel 3 según la tabla de descriptores.
CATEGORÍA: Secuencias y patrones.	

### 3.4.2.2. APLICACIÓN.

La prueba fue aplicada durante las primeras semanas del calendario académico en el 2014. Los estudiantes fueron seleccionados aleatoriamente, 10 por cada nivel académico de la escuela elemental para un total de 50 estudiantes. Los estudiantes tomaron la prueba correspondiente al año anterior cursado; así, los estudiantes de segundo tomaron la prueba de primero, los de tercero la prueba de segundo y así análogamente. Lo anterior se explica porque quienes acabaron el año académico presuponen un conocimiento y unas habilidades desarrolladas en las clases y demandas en las actividades de los textos guías previamente analizados.

Cada prueba fue aplicada en la primera hora de la mañana. Los estudiantes fueron retirados de su aula regular, durante la clase de matemáticas, y presentaron las pruebas en el laboratorio de matemáticas. Los padres dieron el consentimiento informado, se informó a los niños que los resultados deficientes en la prueba no tenían efecto alguno en sus notas del curso de matemáticas, se les pidió estar tranquilos y hacer su mejor esfuerzo. Se informó a los estudiantes la intencionalidad investigativa en la aplicación de la prueba, y así mismo se vinculó su presentación como una actividad académica en el área que serviría para mejorar la programación de los cursos.

### 3.4.2. ENTREVISTAS

Se ha seleccionado la entrevista semi-estructurada para tener una guía que oriente la información que se desea obtener. Se trata de entrevistas dirigidas e individuales que, según Cohen y Manion (1990) permiten cierto control del entrevistador sobre los aspectos sobre los que desea indagar, al tiempo que puede flexibilizar el guión: se diseñan unas preguntas previamente, pero en el transcurso pueden surgir otras más, que sustenten de manera más completa la evidencia que con la entrevista se quiere recolectar.

Las entrevistas fueron realizadas cuatro semanas luego de la aplicación de las pruebas. Cada una con una duración aproximada de cinco minutos. Los estudiantes fueron retirados de su clase de Matemáticas, previa autorización de los colegas, y con el consentimiento informado de los padres de familia.

Se protege la privacidad de los entrevistados, no se revela su identidad, y para efectos de análisis de resultados, son nominados por números (estudiante 1, estudiante 2). Los padres de familia son informados sobre el estudio y autorizan la aplicación y publicación de las entrevistas. El Colegio apoya el proceso de investigación y un espacio privado en una oficina cerrada para aplicación de la prueba.

## 4. ANÁLISIS DE DATOS.

### 4.1 ANÁLISIS DE TEXTOS

Luego de la identificación de las tareas de naturaleza algebraica, y de la atribución de los niveles de algebrización según la propuesta de Godino et.al. (2014), se encuentra que la inclusión del álgebra escolar desde la escuela elemental es una realidad en propuesta de la serie EnVision Math (Ed. Pearson, 2012). En la Tabla 14, se presenta la cantidad de actividades de naturaleza algebraica en cada libro de la colección, y su clasificación por niveles de algebrización.

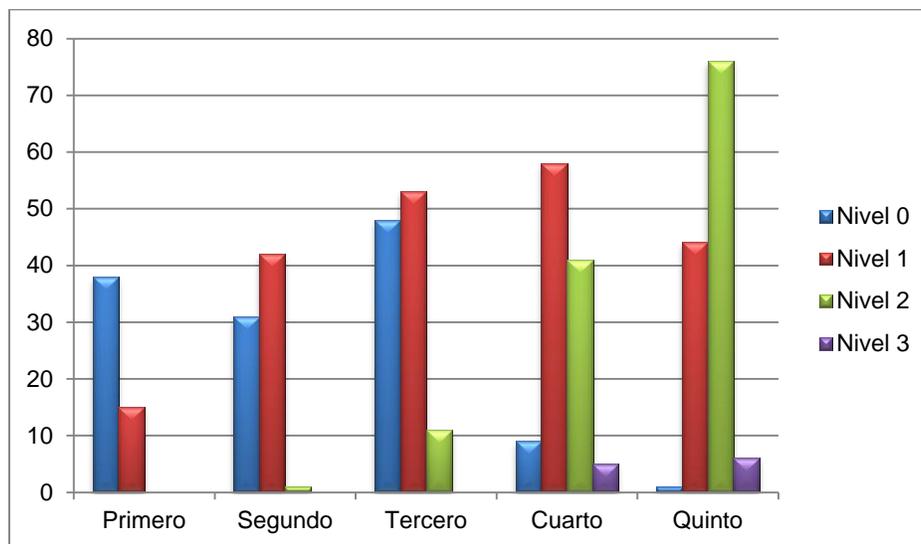
Tabla 14. Número de actividades de naturaleza algebraico según niveles de algebrización y grado escolar.

GRADO	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Primero	38	15	0	0
Segundo	31	42	1	0
Tercero	48	53	11	0
Cuarto	9	58	41	5
Quinto	1	44	76	6

Se puede observar que hay una elevada concentración de tareas *algebrizadas* o *algebrizables*, en todos los libros de la serie para la básica primaria y especialmente, en los libros para tercero y quinto grado, donde algunas incluso llegan a alcanzar el nivel 3 de algebrización.

Se resalta que, algunas de las actividades que en el libro estaban identificadas con el marcador “Algebra”, no fueron incluidas en el estudio al no ser consideradas actividades de naturaleza algebraica según el marco teórico descrito en el presente trabajo.

Figura 4. Número de actividades de naturaleza algebraica según niveles de algebraización y grado escolar.



Se aprecia en la Figura 4 que los niveles de algebraización propuestos por Godino et al. (2014) aparecen paulatinamente en los libros de texto estudiados. Con una presencia mayoritaria del nivel cero y escasa del nivel 1, para el grado Primero, mientras que el nivel cero se hace menor para los grados Cuarto y Quinto.

En el gráfico se observa que el nivel cero tiende a disminuir en frecuencia de actividades conforme se incrementa el grado escolar, hasta casi desaparecer en grado Quinto. Lo contrario ocurre con el nivel dos, que incrementa su frecuencia progresivamente cada que se incrementa el grado escolar, hasta lograr la frecuencia más alta en toda la tabla en grado Quinto.

El nivel tres crece de manera evidente entre el grado Cuarto y el grado Quinto, aunque la cantidad de actividades de exigen este nivel, es significativamente inferior a la cantidad en los demás niveles.

Entre los grados Cuarto y Quinto se evidencia un curioso cambio de frecuencias entre los niveles uno y dos, evidenciándose la importancia del uso de la simbología algebraica al cierre del ciclo en la escuela elemental.

Llama la atención que en segundo grado hay una disminución notable en el número de tareas de naturaleza algebraica. Es una pregunta abierta las razones que justifican esta disminución.

Al realizársele el análisis a cada uno de los libros de la serie, se identificaron algunas unidades con títulos iguales o muy similares grado a grado. Se considera importante analizar la presencia de actividades de naturaleza algebraica en este tipo de unidades temáticas, ya que se podrían encontrar evidencias que apoyen la hipótesis que defiende la relación cronológica entre paso de un nivel de algebrización a otro y el grado escolar. Esta información se presenta en la Tabla 15 y en la Figura 5.

Figura 5. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad temática común a lo largo de la colección.

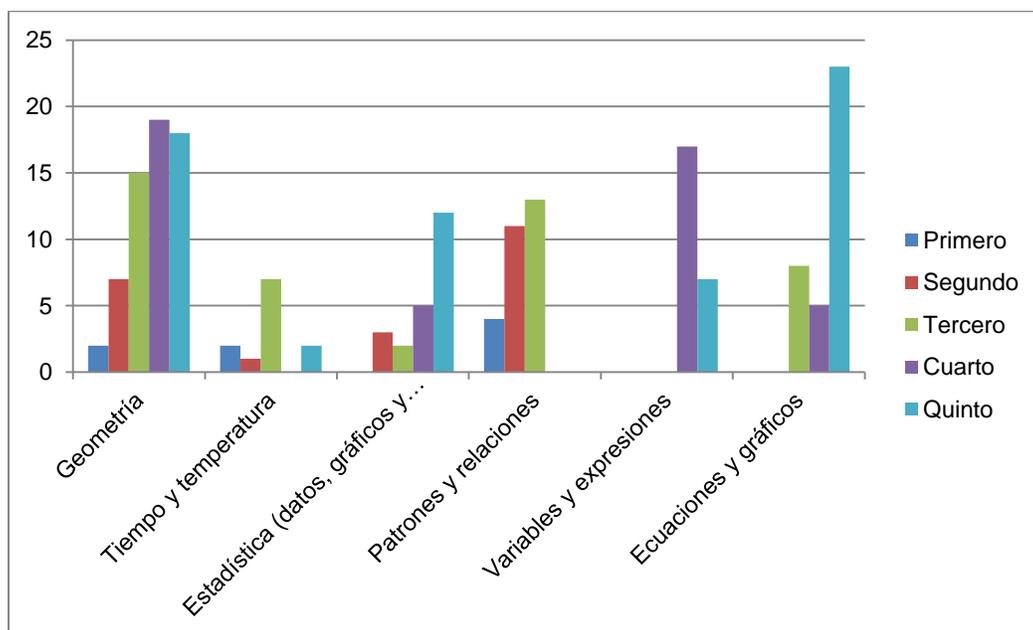


Tabla 15. Número de actividades de naturaleza algebraica por unidad temática común a lo largo de los grados.

Unidad común	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto
Geometría	2	7	15	19	18
Tiempo y temperatura	2	1	7	0	2
Estadística (datos, gráficos y probabilidad)	0	3	2	5	12
Patrones y relaciones	4	11	13	N.A	N.A
Expresiones y variables	N.A	N.A	N.A	17	7
Ecuaciones y gráficos	N.A	N.A	8	5	23

N.A : No aplica.

Las actividades de naturaleza algebraica en la unidad de Geometría, aparecen en todos los grados de primaria. De manera similar, la unidad de estadística propone actividades de naturaleza algebraica desde Primero hasta Cuarto: el estudio de la estadística descriptiva en quinto deja de lado una posible conexión con el álgebra escolar.

Para esta colección, Ecuaciones y Gráficos aparece en los grados Tercero, Cuarto y Quinto. Esta aparición es temprana en términos de la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), que considera que tales temáticas deben ser trabajadas en el currículo de matemáticas a partir de Sexto Grado. Llama la atención que esta aparición no es motivo de presentación alguna por parte de los autores. Una búsqueda en el libro de la NCTM ( 2000) muestra que recomiendan el estudio de estas temáticas desde grados inferiores de escolaridad.

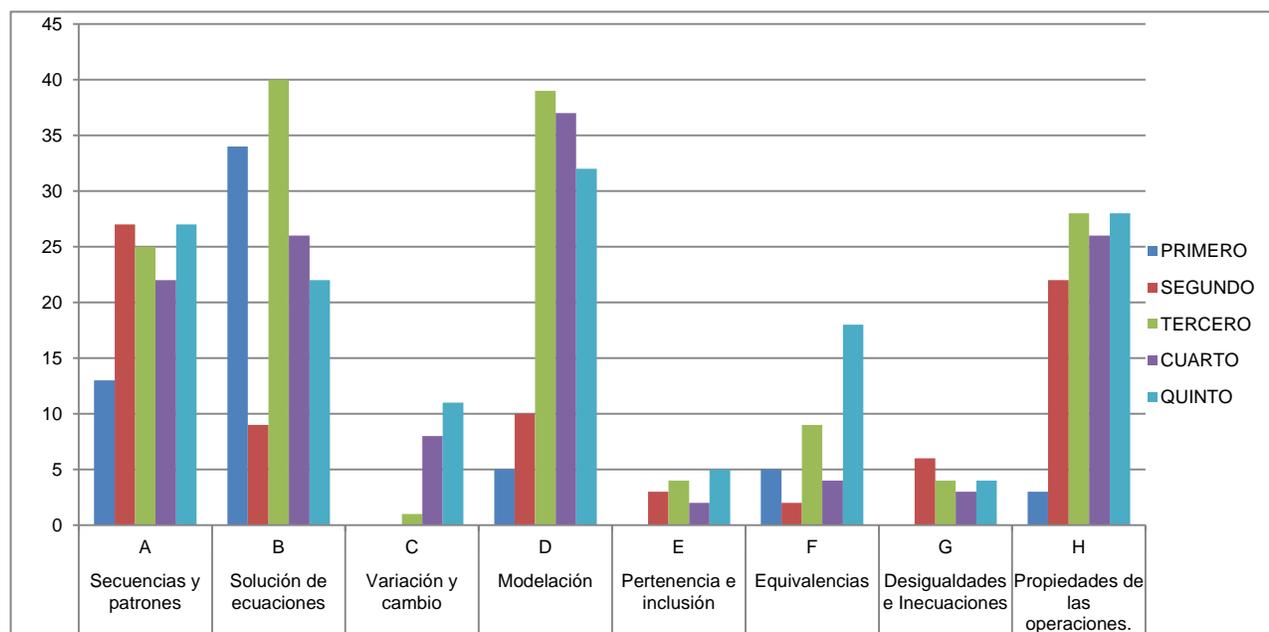
Existe en los grados superiores –Cuarto y Quinto- una tendencia a organizar las actividades de naturaleza algebraica en una unidad específica de contenido, como es el caso de “variables y expresiones”, que aparece con altas frecuencias que por lo general están ubicadas entre los niveles 2 y 3 de algebrización como se puede observar en la tabla 15.

En la Tabla 16 y en la Figura 6, se muestra la cantidad de actividades de naturaleza algebraica en toda la colección, discriminadas por las categorías propuestas en los niveles ampliados de algebrización.

Tabla 16. Número de actividades de naturaleza algebraica por categorías basadas en Godino et.al (2014) y Burkhardt (2001)

GRADO	Secuencias y patrones	Solución de ecuaciones	Variación y cambio	Modelación	Pertenencia e inclusión	Equivalencias	Desigualdades e Inecuaciones	Propiedades de las operaciones.
	A	B	C	D	E	F	G	H
PRIMERO	13	34	0	5	0	5	0	3
SEGUNDO	27	9	0	10	3	2	6	22
TERCERO	25	40	1	31	4	9	4	28
CUARTO	22	26	8	37	2	4	3	26
QUINTO	27	22	11	32	5	18	4	28
<b>TOTAL</b>	<b>114</b>	<b>131</b>	<b>20</b>	<b>135</b>	<b>14</b>	<b>38</b>	<b>17</b>	<b>107</b>

Figura 6. Número de actividades de corte algebraico por categorías basadas en Godino et.al (2014) y Burkhardt (2001).



Se observa una gran concentración de actividades de naturaleza algebraica en las categorías A, B, D y H; éstas, junto con la categoría C, representan los tipos de actividades que regularmente se clasifican como algebraicas. No obstante, se destacan las frecuencias de las categorías E, F y G, que regularmente no se consideran de naturaleza algebraica, pero que como se colige del estudio, tienen una cantidad representativa de actividades que completan el desarrollo del pensamiento algebraico (variacional) en diferentes contextos matemáticos donde se da lugar a procesos de

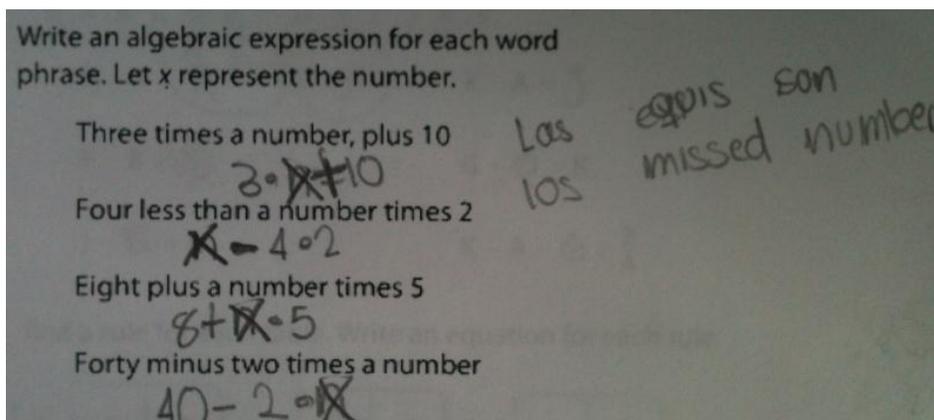
argumentación, validación, generalización, representación en varios registros, predicción, modelación y comprensión de la variación en contextos matemáticos y extramatemáticos.

Se evidencia cómo el trabajo de las propiedades de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos, es considerado un importante recurso en proceso de algebrización de los estudiantes. El texto estudiado, aporta una gran variedad de tareas que apoyan este desarrollo y propician la reflexión sobre las regularidades y generalizaciones a encontrarse entre los elementos de un mismo conjunto por su naturaleza o como producto de las operaciones que en el conjunto estén definidas.

#### 4.2 DESEMPEÑO DE LOS NIÑOS

Los hallazgos sobre los desempeños, frente a las tareas de carácter algebraico, muestran que el nivel de algebrización atribuido a la tarea, no siempre se corresponde con el desempeño exhibido por el estudiante, cuando soluciona la tarea. La Figura 7 muestra una tarea cuyo nivel de algebrización es uno –según la tabla de niveles ampliados por categorías-, pero el desempeño exhibido por el niño puede ser valorado como superior –nivel dos-, ya que allí se evidencia claramente que *utiliza indistintamente símbolos para representar incógnitas*.

Figura 7. Nivel de algebrización superior al esperado.



En la Figura 7 se observa como el estudiante procede a representar cada frase con la letra “n”, sin percatarse que la instrucción invita al uso de la “x” como variable. Luego, revisa lo que hizo y corrige su error; el cambio de variable parece no significar nada importante para él. El estudiante fue entrevistado. A continuación se reporta lo que se halló en la entrevista

*P: mira, yo estuve mirando el ejercicio B del taller que solucionaste y vi que antes de poner las x que pusiste encima, escribiste “n” en todas las expresiones que representaste con símbolos... ¿Por qué pusiste la “n”?*

*E: Eh... porque no había leído la instrucción.*

*P: ¿Y servía la n?*

*E: sí,*

*N: ¿Por qué usaste la “n”? ¿Por qué (con relación a qué) palabra?*

*E: por número*

*N: y se podía poner cualquier letra*

*E: no, ahí decía (lee la instrucción)...*

*N: ¿y si no dijera que tenía que ser “x”?*

*E: Puede ser cualquier letra*

*N: ¿y no cambia?*

*E: No, sigue igual.*

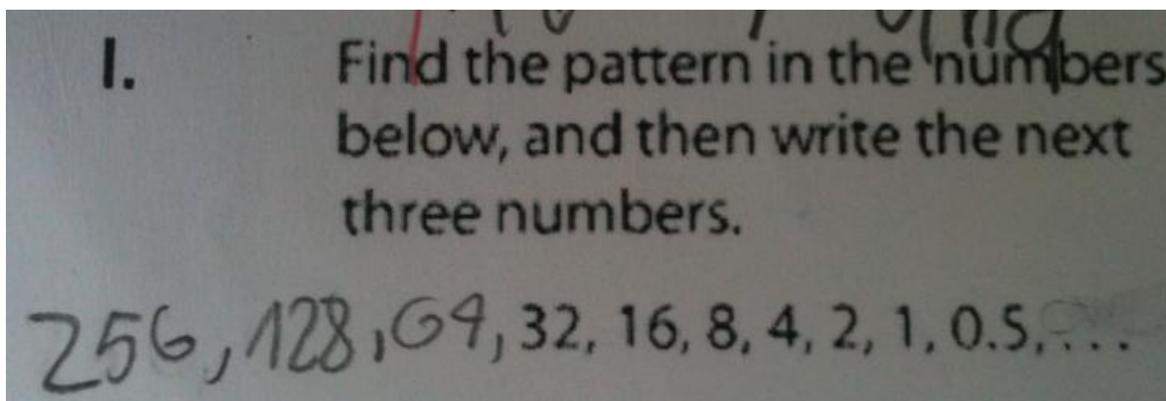
*(Estudiante 1, Quinto grado, 10 años. Marzo 28, 2014)*

El desempeño del estudiante 1 fue clasificado en un nivel 2 de la algebrización según la categoría de Modelación en los niveles de algebrización ampliados por categorías.

Se encuentra otro tipo de tareas en las que se pide completar una secuencia numérica. Si bien esta tarea es de Nivel Cero de algebrización en tanto que se pide identificar un patrón, el mismo requiere la identificación de una característica que surge mediante el uso de operaciones. Se apreció que cuando las operaciones son de tipo sumativas o incremental (incremento constante) los niños las resuelven fácilmente; sin embargo, cuando la operación que describe el patrón es de tipo multiplicativo (multiplicación entera o división entera) los niños manifestaron ciertas

dificultades. También sorprende la respuesta que un niño dio a una tarea (Figura 8) en donde debe completar una secuencia: la secuencia va hacia la derecha, y el niño, aunque ha identificado el patrón, tiene dificultad para completar la tarea -en tanto que requiere conocimientos sobre los números decimales-, por lo que la completa a la izquierda con tres números, que efectivamente cumplen la regla.

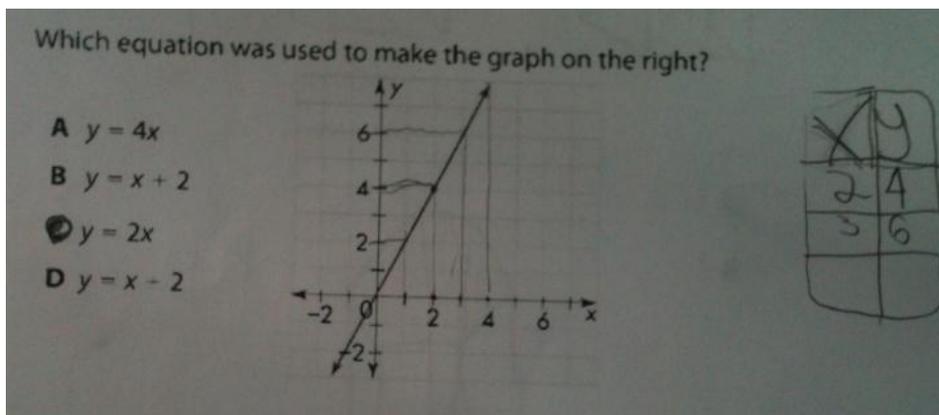
Figura 8. Patrón extendido a la izquierda.



Este hecho puede estar vinculado con la dificultad que las tareas de carácter multiplicativo tienen para los niños (Vergnaud, 1983).

A pesar que muchos de los ítems propuestos en las pruebas no habían sido objeto de enseñanza por parte del investigador (quien conoce al grupo de estudiantes desde hace dos años), ni por parte de los colegas, es notable que los estudiantes pudieron resolverlos. Parece que los niños han usado creativamente el conocimiento matemático al que han sido expuestos y pueden usarlo en nuevas situaciones. Vygostky (1988) afirma que las tareas ubicadas en la zona de desarrollo próximo pueden ser más fácilmente resueltas por los niños y que además, tales tareas aportan al desarrollo cognitivo de los estudiantes. El ejercicio que se muestra en la Figura 9, es una de estas tareas.

Figura 9. Método tabular para comprobar la ecuación de una función.



A continuación, se reporta cómo el estudiante sustenta la respuesta que dio, acompañada por una tabulación que lo ubica en el nivel 3 de algebrización, al ser capaz de *representar algebraicamente situaciones diversas tomando a partir de referentes verbales, escritos, gráficos o tabulares* (ver la categoría de Modelación, Tabla 2, sección 2.5).

(Saludos)

P: ... quiero que me expliques cómo fue que lo solucionaste... además yo veo que hiciste una tablita, entonces quiero que me cuentes cómo encontraste la ecuación de la recta...

E: yo la encontré dado a que en el plano cartesiano aparece una recta intersecante donde se juntan los números de abajo, o sea "x", con "y" los números de arriba... y yo vi por ejemplo que el uno en la recta se encontraba con el dos, el dos con el cuatro, el tres con el seis.. entonces yo me puse a analizarlos y vi que cada número que está en "x" es el doble de los... digo, cada número que está en "y" es el doble que los números que están en "x" cuando se encuentran en la recta.

P: ¿entonces la ecuación...?

E: es igual a "x", "x" es igual a los números de "x" a la dos

P: a la dos no es lo mismo que por dos... osea los números de "y" son iguales a dos veces los números de "x"...¿y esta tabla?(señala la tabulación que se observa en la figura 9)

E: la tabla quiere decir lo que dije... puse los números de "x", y puse el dos, y en "y" el 4... y eso quiere decir que es donde se encuentran los dígitos en la recta.

P: ¿con estos números que pusiste aquí (en la tabla) se cumple la ecuación que elegiste? ¿Por qué?

E: Si, porque por ejemplo el 4 es el doble del 2.

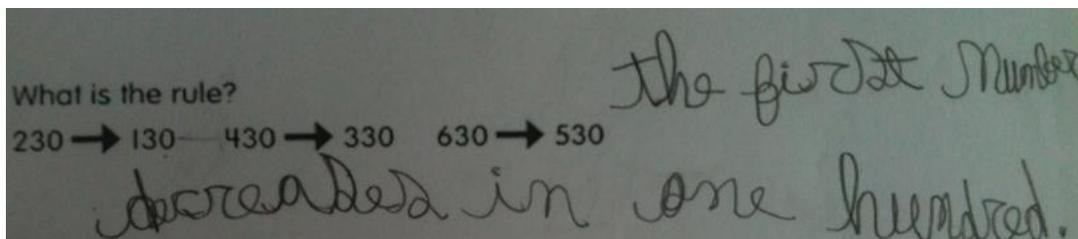
P: ¿A ti alguien te enseñó a hacer esa tabla?

E: No la verdad... pues... No que yo me acuerde. Yo lo hice porque era una tabla normal y me ayudaba.

(Estudiante 2, Sexto grado, 11 años. Marzo 28, 2014)

De igual manera, llama la atención cómo un niño expresa claramente el patrón que se aplica en esta relación entre dos cantidades numéricas (Figura 10). Este desempeño lo ubica en un nivel 1 de algebrización.

Figura 10. Identificación de la regla que forma una relación funcional en estudiante de primer grado.



Para diversos autores el concepto de función se presenta de manera natural en el ámbito numérico y de exploración de patrones por parte de los niños (Nemirosky, 1996). De otro lado, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) proponen que el pensamiento funcional es uno de los últimos eslabones en el proceso de comprensión de la variación. Vale notar que esta investigación aporta evidencias en favor de la postura de aquellos que opinan el pensamiento funcional puede y debe abordarse desde los grados iniciales de la educación.

En la Figura 11 se muestra la solución de una tarea de carácter funcional, y la expresión verbal de la regla, que podría ser fácilmente expresable en términos simbólicos, manifestando así la comprensión del carácter funcional. Es claro que, a partir de esta comprensión manifestada verbalmente, no es difícil pasar a un siguiente nivel de algebrización que requiera la expresión simbólica, como se observa en la solución dada por el estudiante. El carácter progresivo de la experiencia algebraica de los estudiantes es claro en este ejemplo y apoya la idea de introducción temprana del razonamiento algebraico, en tanto que este es complejo y se desarrolla a lo largo del tiempo.

Figura 11. Solución de tarea de carácter funcional por estudiante de Tercer grado.

For 1, use the table below.

Total number of test questions (q)	20	30	40	50
Number of multiple-choice questions	10	20	30	40

1. What is a rule for the table in words?  
in symbols?

The total number of test questions is ten more than the number of multiple choice questions.  $q+10$

Elijah has  $n$  customers in his lawn-mowing business

La prueba de primer grado, arroja interesantes resultados. En la Figura 12 se observa cómo el estudiante hace uso de la propiedad modulativa de la adición para completar una sentencia numérica y formar una igualdad. Aunque esto lo ubica en un Nivel Cero de algebrización, es importante el reconocimiento y la utilización de las propiedades de las operaciones en el desarrollo paulatino de habilidades de algebrización.

Figura 12. Uso de la propiedad modulativa para completar ejercicio de espacios en blanco.

Find two parts to make 100.

$$37 + \boxed{60} + \boxed{3} = 100$$

$$54 + \boxed{46} + \boxed{0} = 100$$

A continuación se reporta cómo sustenta el estudiante el uso del cero en el ejercicio de completación anterior.

*(Saludos)*

*P: quisiera que me dijeras cómo solucionaste este ejercicio*

*E: yo cogí el 50 y le resté 4, y entonces me dio 46*

*P: ahh, y entonces ¿porqué le quistaste 4? ¿porque ya los tenía acá? (apunta el 54)*

*E: si*

*...*

*P: veo este número que pusiste acá (señala cero) ¿Cuál es?*

*E: el cero*

*P: ¿Por qué lo pusiste ahí?*

*E: porque  $54 + 46$  ya me da*

*P: y qué pasa cuándo le sumo cero a un número*

*E: no pasa nada*

*...*

*P: Aquí en el ejercicio de arriba, ¿Habría podido poner cero también en uno de los dos cuadritos?*

*E: si, pero en el otro habría tenido que poner 63*

*(Estudiante 3, segundo grado, 7 años. Abril 25, 2014)*

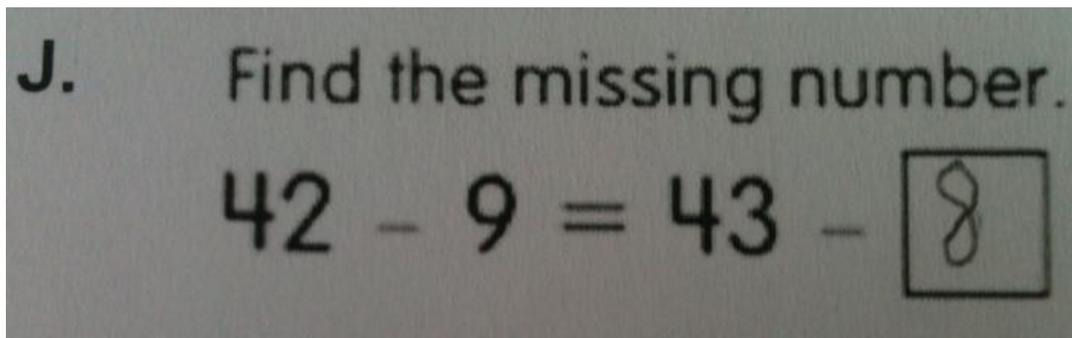
En el ejercicio anterior, durante el desarrollo de la prueba uno de los estudiantes se acercó al docente a indagar por la relación entre los recuadros y los números a escribir: ¿Si los cuadrados son iguales, los números que escriban deben ser iguales? Se evidencia que para él no es indistinto que sean dos figuras iguales... en esencia, para el ejercicio  $37 + \_ + \_$ , los cuadrados podrían ser dos figuras diferentes, ya que como los números a escribir no pueden ser iguales, no deberían ser representados por la misma figura. Esta precisión sería importante en un proceso de formación algebraica escolar.

Para el ejercicio J, en la prueba de primero, se evalúa la categoría de “fórmulas y equivalencias”, se encuentran varios asuntos interesantes que se informan a continuación

En la Figura 13, se ve cómo el estudiante intenta abordar el ejercicio desde un razonamiento numérico y una relación de correspondencia de aumento y disminución; es decir, si el minuendo en un lado es 42 y en el otro 43 se incrementa en 1. Como el sustraendo en un lado es 1, y la resta

lleva implícita la idea de disminución, el estudiante disminuye en 1 la cantidad que tiene a la izquierda para completar el recuadro a la derecha. No obstante el razonamientos es erróneo. Se informa la reacción del estudiante en una entrevista.

Figura 13. Relación de incremento – disminución entre dos sentencias numéricas.



*(Saludos)*

*P: ¿Este signo cómo se lee? (señala el signo igual)*

*E: Es el signo que se utiliza para poner los resultados*

*P: Entonces ¿42-9 = 43?*

*E: ...No, me equivoqué...*

*P: Yo ví que ahorita mientras le hacía la entrevista a tu compañera estabas corrigiendo el ejercicio (puso como respuesta correcta 10), cuéntame que hiciste..*

*E: Este (el 42) es uno menos que este (el 43), entonces este (el 9) tiene que ser uno menos que el que va acá (señala el recuadro vacío)*

*P: ¿Y tú como sabes si la solución está buena? ¿Intentaste hacer las operaciones? ¿Son iguales?*

*(se calculan los resultados)*

*E: Ahh, Entonces las operaciones son iguales.*

*P: O sea que el igual no siempre dice el resultado...*

*E: No, también me muestra dos cosas con el mismo resultado.*

*(Estudiante 4, 7 años, Segundo grado. Marzo 26, 2014)*

El desempeño del estudiante en el ejercicio anterior, lo ubica en un Nivel cero de algebrización.

Paralelamente, en la Figura 14, se observa cómo el estudiante comprende de una manera más amplia el significado de la igualdad matemática, y junto con el soporte que se observa en la Figura

15, justifica la completación de la casilla para que las dos sentencias numéricas sean equivalentes. El desempeño del estudiante se ubica en el nivel dos del rubro de “fórmulas y equivalencias”.

Figura 14. Completación para conservar la igualdad de dos sentencias numéricas por estudiante de Primer grado.

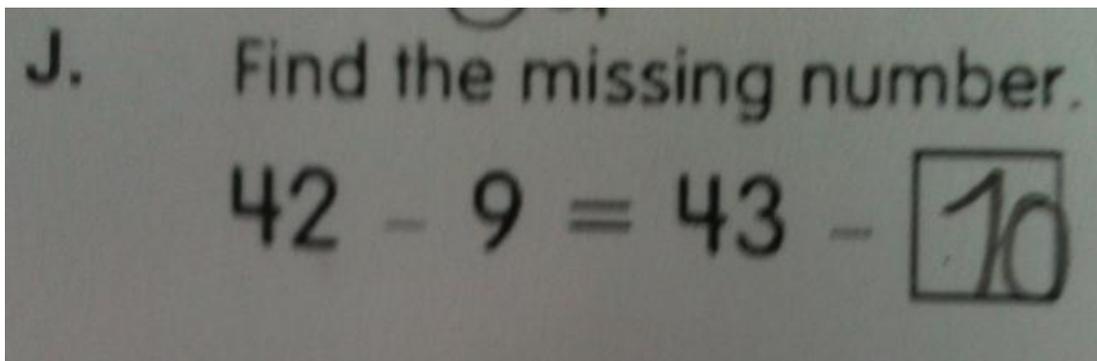
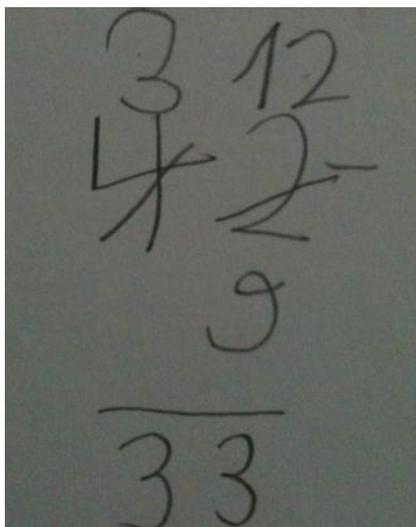


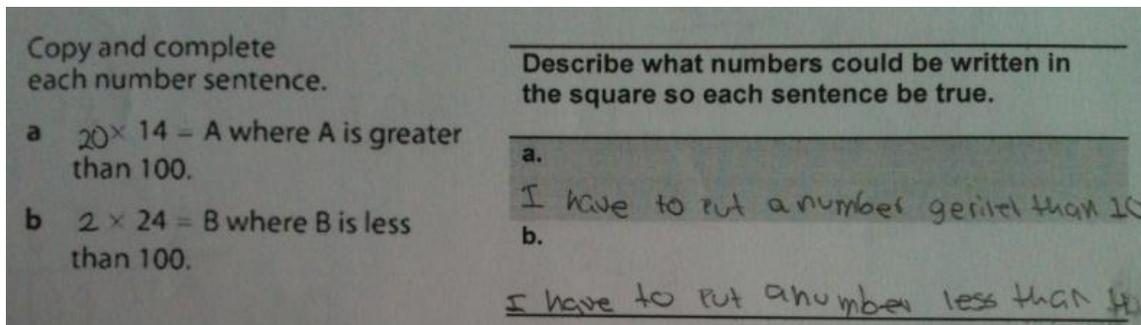
Figura 15. Resta para convertir un proceso de equivalencia entre dos sentencias numéricas en una ecuación lineal simple, por estudiante de Primer grado.



Haciendo un análisis de la prueba de tercer grado, nos encontramos con un ejercicio de inequaciones. En la Figura 16, se evidencia como el estudiante describe de manera acertada qué

posibles resultados podrían estar en el recuadro. El estudiante muestra asimilar que, a diferencia de otro tipo de ejercicios, en este recuadro pueden haber diferentes respuestas que harían la inecuación verdadera. No hay uso de simbología algebraica pero se solucionan inecuaciones lineales.

Figura 16. Solución de una inecuación lineal sin uso de simbología algebraica por parte de un estudiante de tercer grado.



A continuación se informa la reacción del estudiante, cuando se le pide sustentar su respuesta.

P: ... yo quiero que me cuentes cómo lo hiciste

E: Ehh porque  $10 \times 10$  da 100, entonces un número mayor que 10 da más que 100

P: ¿Y en el ejercicio b?

E: Es que  $10 \times 10$  da 100, entonces un número menor que 10 daría menor que 100

P: Ahh, pero aquí no es 10 sino 24

E: (Silencio)... Sí pero  $2 \times 24$  da 48 y es menor que 100

P: Ahh o sea, con el 2 funciona, ¿y con el 3?

E: (Silencio)... Ehhh sí

P: ¿Y el 4?

E: Sí, también

P: ¿Y el 5?

E: No, no funciona

P: ¿Con el 5 da qué más grande o más pequeño que 100?

E: Más grande, porque el 24 es un número grande

....

*P: Yo te voy a mostrar algo que es otra forma de escribir este ejercicio (Muestra y explica la inequación correspondiente) ¿Cómo te parece más fácil?*

*E: Así, en letras normales*

*(Estudiante 5, Cuarto grado, 10 años. Marzo 26, 2014)*

En la entrevista, se observa cómo la estudiante denomina “letras normales” la instrucción verbalizadas, manifestando de esta forma la falta de familiaridad con el lenguaje algebraico. El desempeño de esta estudiante la ubica en un nivel 1 de algebrización según el rubro de “desigualdades e inequaciones”.

También se encuentran ejercicios como el que se muestra en la Figura 17, en el que el estudiante debe identificar un elemento común a los tres polígonos dibujados. Este ejercicio inicialmente no fue considerado de naturaleza variacional por no incluirse en ninguna descripción de la propuesta original de niveles de algebrización (Godino et. al ; 2014). En la tabla de niveles ampliados por categorías (pág 32), se ubica en la categoría de “inclusión y pertenencia”.

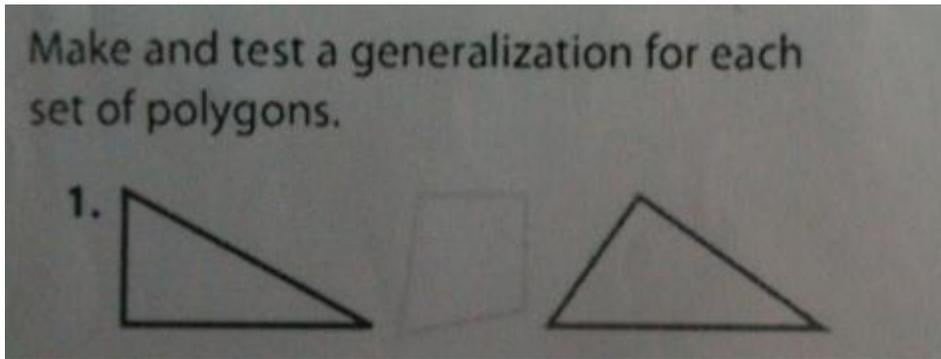
El desempeño de los todos estudiantes en este ejercicio fue insatisfactorio. Se esperaba que identificaran que todas las figuras tenían un ángulo recto<sup>3</sup>. A continuación algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

- *Todos son polígonos*
- *Todos son triángulos*
- *Todos tienen ángulos agudos*
- *Todos tienen un lado más largo*
- *No tienen nada en común*
- *Toda las figuras están paradas en el lado más largo*

---

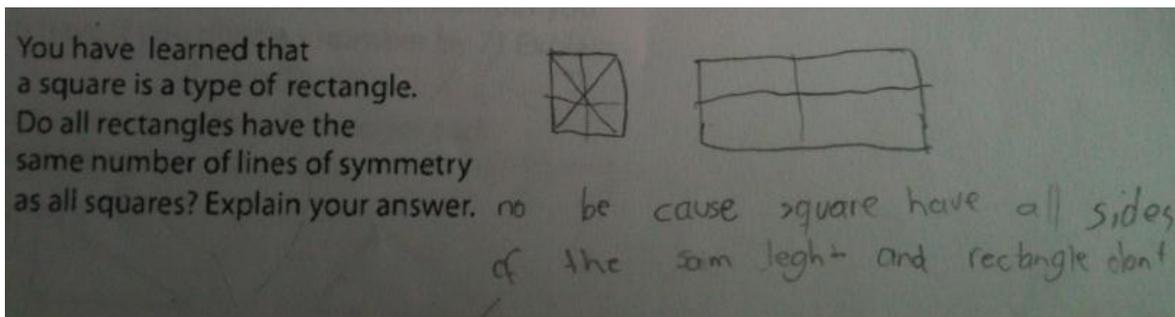
<sup>3</sup> Se espera dicha respuesta ya que, en el contexto en el que se plantea el ejercicio en el libro de texto, se analiza la medida de los ángulos en polígonos. En el contexto de esta instrucción sin ningún preámbulo, algunas de las características comunes identificadas por los estudiantes se puede considerar válidas.

Figura 17. Generalización a partir de características conceptuales.



Finalmente, en la Figura 18, se observa otro ejercicio clasificado en el rubro de de “pertenencia e inclusión”. Se exige un dominio conceptual para poder responder a la pregunta. Se puede ver el buen desempeño del estudiante frente a la tarea que se le propone. Es evidente aquí la naturaleza algebraica (variacional) de la tarea propuesta.

Figura 18. Ejercicios ejes de simetría de cuadrados y rectángulos.



El desempeño de los estudiantes fue, en términos generales, mejor que el esperado. Sorprenden algunas respuestas que serán objeto de posteriores estudios y publicaciones.

## 5. CONCLUSIONES

Las conclusiones son de tres tipos: con relación a los niveles de algebrización, acerca de los libros de texto y al respecto de los desempeños de los estudiantes.

### **Niveles de algebrización**

Los niveles de algebrización, si bien permiten ubicar ciertos niveles teóricos de actividad matemática, parecen no adecuarse en todos los casos para describir la diversidad de tareas de naturaleza algebraica propuestas en los libros de texto estudiados.

Se observan algunas dualidades al clasificar cierto tipo de tareas en un nivel determinado de algebrización. Por ejemplo, en el Nivel 0 de algebrización, los estudiantes completan secuencias numéricas y geométricas sin explícito por el patrón utilizado. Este requerimiento del nivel, si bien es apropiado dificulta la identificación del mismo, en tanto que cuando se interroga a los niños, estos no expresan una justificación que pueda ser aceptada como indicativo de comprensión explícita, y si lo informan, a su vez podrían clasificar en un nivel 1.

Hay muchas tareas cuya naturaleza algebraica parece clara, sin embargo no es fácil ubicarlas en un nivel de algebrización. A manera de ejemplo, se encontraron tareas de inecuaciones (ver Figura 16) cuya naturaleza variacional es clara, pero cuyas características no se incluyen explícitamente en ninguno de los niveles de algebrización.

Se encontró que algunas tareas que requieren una exploración, la toma de decisiones y la propuesta de una regla (Figura 18). Otra tarea que fue difícil de clasificar es aquella en donde se dan tres figuras geométricas (Figura 17) y se pide identificar un elemento común. Si bien este tipo

de tareas presta atención a características de carácter gráfico y conceptual (todas las figuras del ejemplo tienen un ángulo recto) no puede ser ubicada fácilmente en alguno de los niveles.

Es menester indicar a los usuarios que los niveles, que los mismos pueden ser usados para identificar una “ruta algebraica” en el conjunto de tareas propuestas en los libros de texto. Entendemos como “ruta algebraica” una secuenciación de tareas cuya naturaleza algebraica es atribuida según los niveles, y que señalan el proceso gradual de introducción del razonamiento algebraico elemental a través de las tareas. Cabe señalar que el razonamiento algebraico se desarrolla a lo largo del tiempo dada su complejidad.

Adicionalmente, hay otro tipo de tareas en las que se pide asignar valores a letras para ser reemplazadas en una sentencia algebraica, donde se manifiestan una o varias variables. De esta forma, se introduce la aparición de las variables y la atribución numérica que tienen, ya sea porque se dio previamente –como en el caso de éste ejercicio-, ó porque se obtuvo como consecuencia de un *análisis variacional*. Esta inclusión de expresiones para hallar su valor numérico se encuentra desde Tercer grado, en el libro analizado. Esta particularidad se contrasta con el desarrollo que se observa en otras propuestas de casas editoriales, donde este tipo de tareas se presentan en Octavo grado como introducción al álgebra.

### **Libros de texto:**

Los libros de texto estudiados proponen tareas diversas de naturaleza algebraica. A partir de las Tablas 4 a la 8, se puede apreciar la introducción paulatina y sistemática de tareas de naturaleza algebraica. Se aprecia sin embargo, que introducen muy tempranamente aspectos simbólicos y variacionales. Con base en mi experiencia con los niños que participaron en el estudio, parece un poco prematuro pedir a los niños que relacionen expresiones simbólicas para la línea recta, junto con propiedades métricas y topológicas del plano cartesiano. Vale decir que, sorprendentemente, mucho niños pudieron lidiar con tales ejercicios. Queda por determinar los niveles de comprensión que subyacen el buen desempeño de los niños frente a dichas tareas.

Parece que el desempeño de los niños puede estar apoyado en una enseñanza sistemática y organizada desde los primeros grados, sin embargo este asunto debe ser indagado.

### **Desempeño de los niños**

El desempeño de los niños con las tareas de naturaleza algebraica ha sobrepasado las expectativas del investigador. Los niños ubicados en niveles de grado, respondieron a la mayoría de las tareas que se ubicaron en sus respectivos grados. Desde esta perspectiva los niños son, espontáneamente, competentes al resolver ciertas tareas.

Parece haber una correspondencia entre el nivel de algebrización en el que se encuentra el estudiante y el grado de escolaridad en el que está inscrito. Este asunto se puede observar en las Tabla 14, y se corrobora con el desempeño de los estudiantes frente a las tareas propuestas en los talleres.

## 6. PROBLEMAS ABIERTOS

Uno de los problemas abiertos es indagar más sobre la comprensión de los niños en términos de las relaciones entre lo sintáctico y lo semántico, en el marco de las tareas por ellos resueltas.

Otro asunto que se considera importante es efectuar un seguimiento de los estudiantes en su tránsito hacia el álgebra de la escuela secundaria, y determinar si manifiestan las dificultades reportadas en la literatura ( Filloy y Rojano, 1989; Puig, L. 1997; Puig, L. 2008).

A partir de mis interacciones con los colegas del colegio donde laboro, surgió la inquietud de carácter epistémico, acerca de la verdadera naturaleza del álgebra, y como para muchos de los maestros las tareas propuestas en las Pruebas, o no eran de tipo algebraico, o lo eran pero inapropiadas para ser propuestas a niños de escuela primaria. Parece interesante efectuar un estudio acerca de las creencias que los maestros de la Institución Educativa donde laboro, tienen sobre el álgebra y sobre el pensameinto variacional. Es interesante determinar el efecto que tienen las creencias epistemológicas de los maestros en su labor de reconocer y promover el desarrollo del pensamiento algebraico de los niños. Parece que los profesores adolecen de cierta "sensibilidad" para reconocer la naturaleza algebraica no explícita de muchas tareas.

## 8. REFERENCIAS

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L (1996). Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching. Mathematics Education Library, Vol. 18.

Burkhardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra (Vol. 1): 140-146. Melbourne: University of Melbourne, Australia.

Cohen, L. and L. Manion (2000). Research Methods in Education. London, Routledge.

Davis, R. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. Journal of Mathematical Behavior, 4, 195-208.

Fillo, E. Puig, L., & Rojano, T.(2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. Enseñanza de las Ciencias, 26(3), pp. 327-342

Fillo, E, Rojano T. 1989. Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 9 (2), 12-25.

Font, V. Badillo, E. Trigueros, M. Rubio, N. (2012) La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. SEIM 2012.

Freiman y Lee (2004). Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2 pp 415–422.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36.

Godino, J, Castro. W, Ake, L, Wilhelmi.(2012) Naturaleza del razonamiento algebraico. *Bolema*, pp.483-511.

Godino, J.D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.

Kaput, B (1999). Reasoning in the context of elementary mathematics: making it implementable on a massive scale.

Kaput, J. (1995). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum. Paper presented at the 1995 NCTM meeting, 17 pp.

Lincevski, L. & Livneh, D.(1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.

Moses, Robert P (2001). Algebra and activism: Removing the shackles of low expectations - A conversation with Robert P. Moses. *Educational Leadership* 59 (2): 6–1

Nemirovsky, R. (1996). A Functional Approach to Algebra: Two Issues that Emerge. *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers: 295-313.

Puig, L. (2008). History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education*. CD-version. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Socas, M; Camacho, M; Palarea, M; & Hernández, J (1996). *Iniciación al álgebra*. Serie: Matemáticas, cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, Madrid-España. 23: 11-35

Vergnaud, G.(1983). Multiplicative structures. *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), 127-174.