

# Sztochasztikus népesség-előrejelzés magyar adatokon

Készítette: Varga Livia

PhD-hallgató, Budapesti Corvinus Egyetem

AZ INNOVÁCIÓS ÉS TECHNOLÓGIAI MINISZTERIUM KOOPERATÍV DOKTORI PROGRAM DOKTORI HALLGATÓI  
ÖSZTÖNDÍJ PROGRAMJÁNAK A NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI ÉS INNOVÁCIÓS ALAPBÓL FINANSZÍROZOTT  
SZAKMAI TÁMOGATÁSÁVAL KÉSZÜLT.



NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI  
ÉS INNOVÁCIÓS HIVATAL

2020

## Tartalom

<b>I.</b>	<b>Kivonat</b> .....	3
<b>II.</b>	<b>Lee és Carter modellje</b> .....	5
<b>III.</b>	<b>A Lee–Carter-féle modell módosításai</b> .....	6
	<i>III.1. A GAPC modellkeret</i> .....	7
	<i>III.2. A Poisson Lee–Carter modell</i> .....	8
	<i>III.3. A Lee–Carter modell kohorszhatással (RH modell)</i> .....	9
	<i>III.4. A kor–periódus–kohorsz (APC) modell</i> .....	10
	<i>III.5. A CBD modell</i> .....	11
	<i>III.6. Kvadratikus CBD modell kohorszhatással (M7 modell)</i> .....	11
	<i>III.7. Plat modellje</i> .....	12
<b>IV.</b>	<b>Sztochasztikus mortalitási modellek illesztése magyar adatokon</b> .....	14
	<i>IV.1. A férfiak halandósága</i> .....	15
	<i>IV.2. A nők halandósága</i> .....	34
<b>V.</b>	<b>A TTA átmenetének elmélete és a TTA előrejelzése</b> .....	51
<b>VI.</b>	<b>A születési átlagos életkor kiszámítása és előrejelzése</b> .....	56
<b>VII.</b>	<b>A korszpecifikus fertilitási ráta számítása és a születések számának alakulása</b> .....	58
<b>VIII.</b>	<b>A népességszám várható alakulása</b> .....	60
	<b>Melléklet</b> .....	66
	<b>Irodalom</b> .....	89

## I. Kivonat

Jelen kutatás első felének célja annak bemutatása, hogy a nemzetközi szakirodalomban elterjedt sztochasztikus mortalitási modellek alkalmasak-e a halálozási arányszám előrejelzésére Magyarországon és a kapott eredmények felhasználhatóak-e a magyar népességszám modell alapú, valószínűségi előreszámításához. Lee és Carter 1992-ben megalkotott modellje nagy hatást gyakorolt a sztochasztikus mortalitási modellek fejlődésére. Lee és Carter modelljéből kiindulva jött létre az általánosított kor–periódus–kohorsz modellkeret (angolul 'generalized age–period–cohort stochastic mortality models', röviden GAPC). Jelen tanulmány ennek a modellcsaládnak a tagjait ismerteti, illetve alkalmazza magyar adatokon. A cél a legjobban illeszkedő modell megtalálása.

A Lee–Carter modellben a halálozási ráta logaritmususa egy nem megfigyelt időspecifikus index, az ún. mortalitási index ( $\kappa_t$ ) lineáris függvénye. A becslés nagy előnye, hogy a halálozást befolyásoló múltbeli orvostudományi, társadalmi és egyéb hatások számszerűsítésére nincs szükség. A számítások elvégzéséhez elegendő a koréves halálozás- és népességszám ismerete. A szinguláris értékfelbontás módszerével vagy 'maximum likelihood' becslés révén kiszámíthatóak a  $\kappa_t$  értékek, amelyek idősoros elemzésével és előrejelzésével adható becslés a jövőbeni halálozási rátákra vonatkozóan és így a halandósági tábla további adatai is meghatározhatóak. Ezt a módszert alkalmazva azt kapjuk eredményül, hogy mi történne akkor, ha a múltban megfigyelhető hosszú távú trend tovább folytatódna.

A Lee–Carter modellt érő bírálatoknak köszönhetően az elmúlt években számos továbbfejlesztett változat született. Villegas et al. (2018) tanulmánya az eredeti Lee–Carter modellnek és módosított változatainak kiváló összefoglalását nyújtja.<sup>1</sup> Jelen elemzés nagymértékben támaszkodik erre a tanulmányra és az alapmodell mellett olyan továbbfejlesztett változatok alkalmazására kerül sor, amelyek alapvetően két dologban különböznek az eredeti modelltől. Ez a két tényező a mortalitási index többtényezős felfogása és/vagy a kohorszhatás számszerűsítése. A többtényezős felbontás alatt azt kell értenünk, hogy  $\kappa_t$  nem egyetlen változóként jelenik meg az egyenletben, hanem többször (eltérő együtthatóval). A kohorszhatás szerepeltetése annak kifejezésére szolgál az egyes modellekben, hogy a mortalitás egyik évről másik évre történő javulása nem független a születés évétől. Attól függően, hogy a halálozások számának Poisson- vagy binomiális eloszlását tételezzük fel, a GAPC modellcsalád tagjait két nagy csoportra bonthatjuk. A Poisson-eloszlással számolt modelleknél az évközepi népességszámot vesszük alapul, míg binomiális eloszlás feltevése mellett az év eleji népességszámot használjuk fel. Jelen tanulmányban összesen hétféle modell kerül bemutatásra, amelyek közül négy Poisson-eloszlással és központi kitétséggel számol, három pedig binomiális eloszlással és kezdeti kitétséggel.

Külön elemezve a férfiak és nők adatait végeredményként az a következtetésünk adódik, hogy mindkét nem esetében a kor–periódus–kohorsz (röviden APC) modell lehet a leginkább alkalmas előrejelzés készítéséhez. Ez a modell a Lee–Carter-féle egyenlet kohorszhatással bővített változata, amelyben egyetlen mortalitási index szerepel. Ahogyan majd az elemzésből kiderül, Lee és Carter modellje nem tartozik a legjobban illeszkedő modellek közé.<sup>2</sup> A nőknél és férfiaknál egyaránt jól teljesítő APC modell szerint a nők születéskori várható élettartama az előrejelzett 2019. évi 79,9 évről 2068-ban 90,8 évre emelkedik. A férfiaknál 73,0 és 87,5 év ugyanez a két érték, vagyis a nemek közötti várható élettartam különbség csökkenése prognosztizálható hosszú távon. A mortalitás elemzése során a 90 évesek és annál idősebbek csoportját egy kohorszként kezeltük (tekintettel arra, hogy ezt a

<sup>1</sup> Érdemes elolvasni továbbá a Hunt–Blake (2014), Hunt–Blake (2015) és Vékás (2019) tanulmányokat mint összegző műveket.

<sup>2</sup> Ugyanakkor alkalmazására találunk példát a hazai irodalomban: lásd Bajkó et al. (2015).

kort kevesen érik meg Magyarországon). Emiatt a legidősebbek koréves halálozási rátáinak számításához egy simítási módszerre volt szükség.

A kutatás másik fő része a fertilitás előrejelzéséről szól. Alkema et al. (2010) és Alkema et al. (2011) egy új módszertant dolgoztak ki a teljes termékenységi arányszám (röviden TTA) valószínűségi előrejelzésére. Ezt támogatja az R program 'bayesTFR' nevű csomagja, amely fejlesztés Ševčíková et al. (2011) nevéhez fűződik. A TTA sztochasztikus előrejelzésének olyan módszeréről van szó, amely nem csak az alacsony fertilitással jellemezhető országok esetében használható, hanem valamennyi országra alkalmazható és az ENSZ idősorait felhasználva a világ országaira egyszerre futtatható. A kidolgozott módszertan egyik fontos kiindulópontja a TTA „evolúciója”, amely 3 nagy fázisra bontható. Ezek az alábbiak: 1. magas fertilitás az átmenet előtti időszakban, 2. a fertilitás átmenete: a TTA egy magas szintről indulva csökkenni kezd és akár a reprodukcióhoz szükséges szint alá is süllyedhet, 3. alacsony fertilitás az átmenetet követő időszakban, amely fázis magában foglalja a reprodukciós szint újbóli közelítését/elérését, esetleg a reprodukciós szint körüli oszcillálást is. Az egyes országok a rájuk jellemző TTA érték alapján ugyanabban az időben más-más fázisban járhatnak. Az említett szerzők módszertana szerint a 2. fázis modellezése egy bayesi hierarchikus modell segítségével történik. Az átmenet utáni időszak modelljét tekintve a TTA hosszú távú előrejelzésével kapcsolatos feltevés az, hogy értéke a reprodukciós szint felé konvergál és akörül fluktuál. Alkema et al. (2011) módszertana alapján a TTA előrejelzett értékei Magyarországon hosszú távon emelkedést mutatnak. A 2018. évi 1,5 alatti szintről indulva a TTA értéke 2068-ra elérheti, illetve kismértékben meghaladhatja az 1,7-es szintet.

A TTA előrejelzése után a következő lépés annak meghatározása volt, hogy a nők szüléskori átlagos életkora hogyan alakul hosszú távon. Az elmúlt évtizedekben a gyermekvállalás fokozatosan kitolódott, a szüléskori átlagos életkor folyamatosan növekedett. Ez az emelkedés napjainkban egyre lassabb ütemű. A megfigyelt időszak éveire kiszámolt szüléskori átlagos életkort idősorelemzési módszerrel jeleztük előre a későbbi évekre. Eszerint a nők szüléskori várható átlagos életkora az elkövetkező évtizedekben tovább emelkedik: a 2016. évi 29,05 éves szintről indulva 2068-ra 29,68 évre nőhet.

Ha már előrejeleztük a TTA-t és a szüléskori átlagos életkor értékeket, ki tudjuk számolni a korszpecifikus fertilitási rátákat az előrejelzési időszakokra. A korszpecifikus fertilitási ráta és az adott korcsoportba tartozó női népesség száma alapján meg lehet határozni a születések számát. Ehhez a népesség előreszámítására is szükség van, amelyet – felhasználva a fertilitásra és mortalitásra vonatkozó előrejelzéseket – kohorsz–komponens módszerrel határoztunk meg. A születések számának és a halálozás korévenkénti alakulásának előrejelzését alapul véve évről évre haladva előreszámítható a népesség. Mindemellett azonban szükség volt a migráció nettó egyenlegére is koréves bontásban. A nettó egyenlegre vonatkozó, alapváltozat szerinti előrejelzést az Eurostat oldaláról töltöttük le.

Az Eurostat több tízezres pozitív egyenleget valószínűsít évente, ami a migrációt illeti. A 2019 és 2068 közötti időszakban az átlagos nettó egyenleg 13,0 ezer fő a férfiaknál és közel 11,0 ezer fő a nőknél. Részben ennek köszönhetően, továbbá a javuló halandóság és a kismértékben növekvő TTA eredményeként azt láthatjuk, hogy a népesség csökkenése 2040-től egyre lassabb ütemű lesz és 2045–2068 között 9,22 és 9,25 millió fő közötti szinten fog stagnálni. Valószínűsíthetően 2068-ban is egy öregedő korösszetételű népességről beszélhetünk majd.

## II. Lee és Carter modellje

Lee és Carter 1992-ben írt tanulmánya fontos kiindulópontját jelenti a sztochasztikus mortalitási modellek fejlődésének. A szerzők az USA 1900 és 1989 közötti halálzási adatait elemezték és időszerelemzési módszereken nyugvó előrejelzést készítettek. Egy takarékos modell építésére törekedtek, így modelljükben a központi halálzási ráta logaritmusá egy nem megfigyelt időspecifikus index ( $\kappa_t$ ) lineáris függvénye. A becsléshez nem szükséges a halálzási befolyásoló múltbeli orvostudományi, társadalmi és egyéb hatások ismerete. Ezek helyett egy hosszú távú, historikus trendre, vagyis a mortalitási indexre támaszkodik a modell:

$$\ln m_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt},$$

$$m_{xt} = e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}},$$

ahol a központi halálzási ráta  $m_{xt} = \frac{D_{xt}}{E_{xt}}$ , vagyis a halálzások számának és az évközepi népességszámának a hányadosa korévenként, adott évben. A hibateg ( $\varepsilon_{xt}$ ) 0 átlagú és  $\sigma^2$  szórású fehér zaj, továbbá  $\alpha$  és  $\beta$  kortól függ,  $\kappa$  pedig az időtől.

A felírt egyenlet azonban aluldeterminált. Tegyük fel, hogy  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\kappa$  vektorok egy megoldást jelentenek. Bármely  $c$  skalár esetén  $\alpha - \beta c$ ,  $\beta$ ,  $\kappa + c$  szintén megoldás. Továbbá  $\alpha$ ,  $\beta c$ ,  $\kappa/c$  ugyanúgy megoldás. Ezért a szerzők  $\beta_x$ -re és  $\kappa_t$ -re vonatkozóan korlátozást tesznek: így az előbbi összege 1-gyel, míg utóbbié 0-val lesz egyenlő. Mindez azt eredményezi, hogy a megoldás egyedi lesz, továbbá  $\alpha_x$  egyszerűen az időbeli átlagát fogja jelenteni az  $\ln m_{xt}$  tagnak. A  $\beta_x$  együttható elvben lehetne negatív néhány életkor esetében (a halálzás bizonyos életkorokban emelkedik, miközben más életkort tekintve csökken), de ez hosszú távon nem merül fel problémaként. Negatív halálzási ráta nem jelenik meg a modellben – ez előnynek számít.

A kiinduló egyenlet nem illeszthető a legkisebb négyzetek módszerével, vagyis OLS regresszióval (angolul 'ordinary least squares regression'), mert a jobb oldalon csak paraméterek állnak és egy ismeretlen index szerepel. A szerzőpáros a szinguláris értékfelbontás (angolul 'singular value decomposition', röviden SVD) módszerének segítségével kereste meg a megoldást. Mivel az illesztett halálzási ráták általában nem egyeznek meg a ténylegessel,  $\kappa$  újrabecslésére is szükség van.<sup>3</sup> Ennek az oka, hogy az alacsonyabb halálzási rátával jellemezhető fiatal korcsoportok ugyanolyan súlyt kapnak becsléskor, mint az idősebbek – emiatt mutatkozik eltérés a becslés és a tényleges adatok között. Az újrabecsléskor a különböző korcsoportok eltérő nagysága más-más súlyt eredményez. A  $\kappa$  tényező előrejelzésével adható becslés a jövőbeni halálzási rátákra vonatkozóan és így a halandósági tábla további adatai is számolhatóak. Minden egyéb adat (pl. várható élettartam) előrejelzése  $\kappa$  előrejelzésén nyugszik, és nem közvetlenül a várható élettartam időszoros elemzésén. A mortalitási index előrejelzésével azt kapjuk eredményül, hogy mi történne akkor, ha a hosszú távú trend tovább folytatódna. Az USA adatait elemezve Lee és Carter megállapították, hogy 1900 és 1989 között  $\kappa$  hozzávetőlegesen lineárisan csökkent, vagyis a halandóság javult. Ennek a trendnek a folytatását jelezték előre egészen 2065-ig.

---

<sup>3</sup> A mortalitási index második lépcsőben történő becslése során az alábbi formula teljesülését kell keresni:  $D_t = \sum\{\exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) E_{xt}\}$ .

A Box–Jenkins modellezési technikát követve  $\kappa$  előrejelzése során a szerzők úgy találták, hogy ez az index eltolásos véletlen bolyongást követ. Az előrejelzések egyik fontos jellemzője, hogy a standard hiba az idő előrehaladtával egyre nagyobb, a konfidencia intervallum pedig egyre szélesebb lesz. Az előrejelzések nem érzékenyek a vizsgált időszak 90 évről 30 évre történő csökkentésére, azonban a 10-20 éves periódus már instabilitást eredményez – ennek megfelelően egy kellően hosszú halálzási idősor kiválasztására van szükség. Hosszabb és rövidebb időszakon is elvégezve a becslést, az eredmények hasonlósága azt jelenti, hogy a választott periódus strukturális homogenitása teljesül. A modell egy tesztelési lehetőségét jelenti, ha olyan időszakra is elvégezzük az előrejelzést, amelynek a tényleges adatait már ismerjük, így a tény adatokat és a becsült értékeket össze tudjuk vetni egymással.

### III. A Lee–Carter-féle modell módosításai

A Lee–Carter modellt több bíráló is érte az eltelt évek során, amelynek köszönhetően számos továbbfejlesztett változata született. Ugyanakkor már Lee–Carter (1992) tanulmánya is bővítette az eredeti modellt: az 1918. évi influenza járvány miatt egy 'dummy'-t vontak be az egyenletbe, hogy annak hatását kiszűrjék. Ha nem illesztünk a modellbe ilyen kétértékű változót, akkor a járványra olyan eseményként tekintünk, amely a jövőben újra megjelenik és így fontos információt hordoz a jövőre vonatkozóan. Szerencsére ez csak a konfidencia intervallumot befolyásolja a mortalitás előrejelzésekor, és nem magát az előrejelzést. Ha nem használunk 'dummy'-t, akkor a konfidencia intervallum szélesebb lesz.

Lee (2000) tanulmánya összegyűjti az eredeti modellt ért kritikákat. A Lee–Carter-féle becslés egyik gyengesége például, hogy a múltban gyökerező minták nem feltétlenül érvényesülnek a jövőben: strukturális változások következhetnek be (pl. ugrásszerű fejlődés az orvostudomány területén). A mortalitási index 20. századi idősorát tekintve linearitást figyelhetünk meg, azonban nem biztos, hogy ez a régebbi időkben is így volt, és hogy a jövőben is így lesz. Nem biztos, hogy a trend folytatódik. További problémát jelenthet, ha a különböző korcsoportokat tekintve  $\kappa$  hanyatlásának gyorsasága eltér, vagy ha sérül a feltételezés, miszerint a hibatagok korrelálatlanok az egyes kohorszok között. Lee (2000) megemlíti, hogy a mortalitási index esetén alkalmazott kétlépcsős eljárás helyett Wilmoth (1993) kifejlesztett egy egylépcsősét: ez a súlyozott SVD módszer, amely a halálzások számát minden életkor esetében súlyként használja.

Ma már többféle változata létezik a modellnek. Beépíthető például kohorszspecifikus tényező a modell bővítéseként. A becslést nemenként külön-külön is elvégezhetjük, amelyet indokol a nők és férfiak halálzása közötti eltérés. Területileg, regionálisan is bonthatjuk a modellt, de halálok szerint is modellezhetünk. Egy teljes mértékben sztochasztikus népesség-előrejelzés akkor készíthető, ha a fertilitást (és a migrációt) is ilyen módszerrel jelezzük előre. A migrációt illetően lehetnek determinisztikus elképzeléseink is.

### III.1. A GAPC modellkeret

Villegas et al. (2018) tanulmánya az eredeti Lee–Carter modellnek és módosított változatainak kiváló összefoglalását nyújtja, s egyúttal R programozási segédletet is jelent.<sup>4</sup> Az alábbiakban Villegas et al. (2018) nyomán ismertetem az egységes keretbe foglalt GAPC modellcsalád (angolul ‘generalized age-period-cohort stochastic mortality models’) tagjait.

Az egyes modellek bemutatásához az alábbi jelölések bevezetése szükséges:  $D_{xt}$  a halálozások számát jelöli a populációban  $t$  évben és  $x$  éves korban,  $d_{xt}$  pedig a halálozások megfigyelt száma.  $E_{xt}^c$  az ún. központi kitétség, amely nem más, mint a halálozás kockázatának kitett egyének száma  $t$  év során,  $x$  éves korban.  $E_{xt}^0$  a kezdeti kitétség: a halálozás kockázatának kitett egyének száma  $t$  év elején,  $x$  éves korban.<sup>5</sup> Jelölje  $q_{xt}$  a halálozás valószínűségét  $t$  évben és  $x$  éves korban, amely az alábbi módon becsülhető:  $\hat{q}_{xt} = d_{xt}/E_{xt}^0$ . A kezdeti mortalitási ráta, vagyis  $q_{xt}$  annak a valószínűsége, hogy egy  $x$  éves személy  $t$  év során meghal.<sup>6</sup> Legyen  $\mu_{xt}$  a központi halálozási ráta. Ennek empirikus becslése a következő:  $\hat{\mu}_{xt} = d_{xt}/E_{xt}^c$ .

A GAPC modellek felépítése és egymástól való eltérése az alábbi négy komponens segítségével érthető meg:

1. A *random komponens* azt fejezi ki, hogy a halálozások száma ( $D_{xt}$ ) Poisson-eloszlást vagy binomiális eloszlást követ-e.

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}^c \mu_{xt})$$

vagy

$$D_{xt} \sim \text{Binomial}(E_{xt}^0, q_{xt}),$$

ahol  $\mathbb{E}\left(\frac{D_{xt}}{E_{xt}^c}\right) = \mu_{xt}$  és  $\mathbb{E}\left(\frac{D_{xt}}{E_{xt}^0}\right) = q_{xt}$ .

2. A *szisztematikus komponens* magát a becsülni kívánt egyenletet írja le. A halálozás intenzitását befolyásoló tényezők: az életkor, az év (periódus) és a kohorszhatás.<sup>7</sup> Ennek megfelelően az egyenlet általános alakja az alábbiak szerint írható fel:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x},$$

ahol  $N \geq 0$  és egész számértéket vehet fel;  $\kappa_t^{(i)}$  a mortalitási index, amelyből több tag is szerepelhet az egyenletben, ennek megfelelően  $i = 1, \dots, N$ .

A  $\beta_x^{(i)}$  együttható a mortalitási index hatását fejezi ki korévenként.

A  $\gamma_{t-x}$  jelöli a kohorszhatást, amelynek  $\beta_x^{(0)}$  az együtthatója.

A  $\beta_x^{(i)}$  vagy egy előre definiált függvénye a kornak ( $\beta_x^{(i)} \equiv f^i(x)$ ) vagy egy nemparaméteres tag, amelyet nem kell előre megbecsülni (pl. Lee–Carter modell).

A GAPC modellek esetében azt feltételezzük, hogy  $\kappa_t^{(i)}$  és  $\gamma_{t-x}$  sztochasztikus folyamatok. Ez a kulcsa a valószínűségi előrejelzéseknek.

<sup>4</sup> Az általuk bemutatott modellek gyakorlati alkalmazásához a ‘StMoMo’ csomag telepítése szükséges.

<sup>5</sup>  $E_{xt}^0 \approx E_{xt}^c + \frac{1}{2} d_{xt}$

<sup>6</sup>  $q_x \approx 1 - e^{-m_x}$

<sup>7</sup> A kohorsz a következők szerint számítható:  $c = t - x$ .

3. A *kapocsfüggvény* (angolul 'link function'), amelyet  $g$ -vel jelölünk, mutatja meg azt, hogy az egyenlet bal oldalán álló tagot milyen függvény írja le. Poisson-eloszlás esetén logaritmus, míg binomiális eloszlás esetén logit függvényt kell érteni alatta.

$$g\left(\mathbb{E}\left(\frac{D_{xt}}{E_{xt}}\right)\right) = \eta_{xt}$$

4. Ahhoz, hogy a felírt egyenlet megoldása egyedi legyen, *paraméter korlátozásokra* van szükség. Ezeket egybegyűjtve,  $\nu$  függvényként is megadhatjuk:

$$\nu(\theta) = \tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}_x, \tilde{\beta}_x^{(1)}, \dots, \tilde{\beta}_x^{(N)}, \tilde{\kappa}_t^{(1)}, \dots, \tilde{\kappa}_t^{(N)}, \tilde{\beta}_x^{(0)}, \tilde{\gamma}_{t-x}).$$

Az alábbiakban bemutatásra kerül a Lee–Carter modell hat továbbfejlesztett változata, amelyek mindegyike illeszkedik a fent leírt keretbe.

### III.2. A Poisson Lee–Carter modell

Ez a Brouhns et al. (2002) által kidolgozott modell a Lee és Carter által felírt egyenlettel kapcsolatban azt tételezi fel, hogy a mortalitás Poisson-eloszlást követ.<sup>8</sup> A Lee–Carter-féle modell fontos feltevése a homoszkedaszticitás és az, hogy a hibatagok eloszlása normális. Ez nem realiztikus, mert a mortalitás logaritmus sokkal változékonnyabb az idősebb korcsoportokat tekintve (nagyobb a variabilitás), mint a fiatalabbak körében. Brouhns et al. (2002) modellje logaritmus függvényt és központi halálozási rátát ( $\mu_{xt}$ ) használ. Az eredeti Lee–Carter modellhez hasonlóan egy statikus kor függvény ( $\alpha_x$ ) és egy nemparaméteres kor–időszak faktor szerepel az egyenlet jobb oldalán. Tehát a mortalitási index ( $\kappa$ ) száma egy, így  $N = 1$ . Kohorszattal nem számolnak. Ennek megfelelően az egyenlet:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}.$$

Ahhoz, hogy a későbbi (a vizsgált időszak utáni) halálozási rátákat megbecsüljük,  $\kappa_t^{(1)}$  előrejelzése szükséges. Lee és Carter elemzése szerint a mortalitási index egy eltolásos véletlen bolyongás folyamatként írható le:

$$\kappa_t^{(1)} = \delta + \kappa_{t-1}^{(1)} + \xi_t, \quad \xi_t \sim N(0, \sigma_\kappa^2),$$

ahol  $\delta$  az eltolás paraméter,  $\xi_t$  pedig fehér zaj.

Ha a kiinduló egyenletet  $c_1$  és  $c_2 \neq 0$  konstansok segítségével transzformáljuk, vagyis a következőket hajtjuk végre:

$$\left(\alpha_x, \beta_x^{(1)}, \kappa_t^{(1)}\right) \rightarrow \left(\alpha_x + c_1 \beta_x^{(1)}, \frac{1}{c_2} \beta_x^{(1)}, c_2 (\kappa_t^{(1)} - c_1)\right),$$

<sup>8</sup> Megemlítik, hogy Brillinger (1986) szerint is a Poisson-eloszlás feltevése sokkal kézenfekvőbb a halálozást tekintve.



akkor azt láthatjuk, hogy  $\eta_{xt}$  értéke változatlan marad. Az egyedi megoldás megtalálása érdekében az alábbi korlátozásokra van szükség:

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1,$$

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0.$$

Brouhns et al. (2002) modellje ugyanazt a két korlátfüggvényt alkalmazza. Az együtthatók, paraméterek értelmezése is ugyanaz, mint a Lee–Carter modellnél. A megoldásra 'maximum likelihood' becslés révén jutnak, amelyet Newton–Raphson-féle módszerrel oldanak meg.<sup>9</sup> Második lépcsőben végrehajtott becslésre, a mortalitási index kiigazítására nincs szükség. A Lee–Carter (1992) által javasolt ARIMA(0,1,0) modell helyett Brouhns et al. (2002)  $\kappa_t$  előrejelzése során ARIMA(0,1,1) modellt illesztettek. Ez a következőképpen írható fel:

$$\kappa_t^{(1)} = C + \kappa_{t-1}^{(1)} + \xi_t + \theta \xi_{t-1},$$

ahol  $C$  konstans  $\kappa_t$  éves átlagos változását fejezi ki.

A Poisson modell a magasabb életkorokat tekintve illeszkedik jobban. Ezért alkalmazása akkor különösen célszerű, ha csak az idősök mortalitása érdekel bennünket.

### III.3. A Lee–Carter modell kohorszhatással (RH modell)

Renshaw és Haberman (2006) nevéhez fűződik az eredeti Lee–Carter modell kohorszhatással történő bővítése (ezt  $\gamma_{t-x}$  tag jelöli). Az, hogy érdemes-e a kohorszhatással törődni, a kohorszhatást nem tartalmazó modell reziduálisainak elemzéséből látszódik. Renshaw és Haberman modelljében egyetlen időtől függő mortalitási index szerepel, amely szimultán módon befolyásolja a halálozás intenzitását minden korcsoportban.

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x}$$

$\kappa_t^{(1)}$ -hez hasonlóan  $\gamma_{t-x}$  előrejelzése is időszerelemzési eszközökkel történik. A halálozások száma a modell szerint Poisson-eloszlást követ és ennek megfelelően logaritmus függvényt használnak a szerzők.

A megoldáshoz korlátokra van szükség, mivel  $\eta_{xt}$  invariáns az alábbi transzformációra:

$$\left( \alpha_x, \beta_x^{(1)}, \kappa_t^{(1)}, \beta_x^{(0)}, \gamma_{t-x} \right) \rightarrow \left( \alpha_x + c_1 \beta_x^{(1)} + c_2 \beta_x^{(0)}, \frac{1}{c_3} \beta_x^{(1)}, c_3 (\kappa_t^{(1)} - c_1), \frac{1}{c_4} \beta_x^{(0)}, c_4 (\gamma_{t-x} - c_2) \right),$$

ahol  $c_1, c_2, c_3 \neq 0$  és  $c_4 \neq 0$  konstansok. Az alkalmazott paraméterkorlátok:

$$\sum_x \beta_x^{(0)} = 1,$$

<sup>9</sup> Ezzel kapcsolatban lásd bővebben a mellékletet.

$$\sum_x \beta_x^{(1)} = 1,$$

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0.$$

Renshaw és Haberman javaslata szerint egy kétlépcsős becslési eljárást kell alkalmazni, amelyben  $\alpha_x$ -et becsljük meg először. Ezek után  $F$  paraméterei maradnak hátra, ahol  $F(x, t) = \exp(\beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(0)} \gamma_{t-x})$ . Renshaw és Haberman későbbi munkájuk során már a  $\beta_x^{(0)} = 1$  egyszerűsítéssel élnek. Ezzel megoldják a kiinduló egyenlet instabilitási problémáját.

#### III.4. A kor–periódus–kohorsz (APC) modell

Renshaw és Haberman módosított modellje az ún. APC (angolul 'age–period–cohort') modell, amelyben:

$$\beta_x^{(1)} = 1,$$

$$\beta_x^{(0)} = 1,$$

$$\text{így } \eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}.$$

Az APC modell invariáns az alábbi transzformációkra, ahol  $c_1$ ,  $\phi_1$  és  $\phi_2$  konstansok.

$$\left( \alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \gamma_{t-x} \right) \rightarrow \left( \alpha_x + \phi_1 - \phi_2 x, \kappa_t^{(1)} + \phi_2 t, \gamma_{t-x} - \phi_1 - \phi_2 (t - x) \right)$$

$$\left( \alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \gamma_{t-x} \right) \rightarrow \left( \alpha_x + c_1, \kappa_t^{(1)} - c_1, \gamma_{t-x} \right)$$

Az alkalmazott korlátok:

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \gamma_c = 0.$$

Az utolsó két korlátozás azt implikálja, hogy a kohorszhatás 0 körül fluktuál megfigyelhető lineáris trend nélkül. A kohorszhatással összefüggő korlátozásokból és az első transzformációból következik, hogy:

$$\gamma_{t-x} = \phi_1 + \phi_2 (t - x) + \epsilon_{t-x}, \quad \epsilon_{t-x} \sim N(0, \sigma^2).$$

### III.5. A CBD modell

Cairns et al. (2006) modelljében két mortalitási index szerepel ( $N = 2$ ), vagyis egy kéttényezős sztochasztikus modellt alakítottak ki. Az első index a mortalitási ráta dinamikájára ugyanolyan módon hat mindegyik életkort tekintve, míg a második faktor az idősebb korcsoportok esetében sokkal inkább kifejti hatását, mint a fiatalabb kohorszokban. Az egyenletben a  $\beta_x^{(i)}$  együtthatók az alábbiak szerint írhatóak fel:

$$\beta_x^{(1)} = 1,$$

$$\beta_x^{(2)} = x - \bar{x}.$$

A CBD modell nem számol kohorszhatással és nincs benne  $\alpha_x$  sem. A halálozást tekintve binomiális eloszlást tételeznek fel és logit függvényt<sup>10</sup> használnak.

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)},$$

ahol  $\bar{x}$  az átlagos életkor.

A  $\kappa_t^{(1)}$  és  $\kappa_t^{(2)}$  előrejelzése kétváltozós, eltolásos véletlen bolyongás (angolul 'bivariate random walk with drift') modellel történik.<sup>11</sup> A CBD modellnek nincs identifikációs problémája, ezért korlátozásokra sincs szükség.

### III.6. Kvadratikus CBD modell kohorszhatással (M7 modell)

Cairns et al. (2009) kibővítették az eredeti CBD modellt, amely már kohorszhatást és egy kvadratikus kor függvényt is tartalmaz.

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x},$$

ahol  $\hat{\sigma}_x^2$  az átlagos értéke az  $(x - \bar{x})^2$  tényezőnek.<sup>12</sup> Ezt a modellt M7 névvel is illeti a szakirodalom.

A modell invariáns az alábbi transzformációra:

$$\begin{aligned} & (\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x}) \rightarrow \\ & \left( \kappa_t^{(1)} + \phi_1 + \phi_2(t - \bar{x}) + \phi_3((t - \bar{x})^2 + \hat{\sigma}_x^2), \kappa_t^{(2)} - \phi_2 - 2\phi_3(t - \bar{x}), \kappa_t^{(3)} + \phi_3, \gamma_{t-x} - \phi_1 - \right. \\ & \left. - \phi_2(t - x) - \phi_3(t - x)^2 \right), \end{aligned}$$

<sup>10</sup>  $\text{logit}(q_{xt}) = \ln\left(\frac{q_{xt}}{1-q_{xt}}\right) = \eta_{xt}$

<sup>11</sup> Egy másik lehetőség a mortalitási indexek előrejelzésére, ha külön-külön illesztjük az ARIMA(p,d,q) modelleket.

<sup>12</sup>  $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{x} \sum_x (x - \bar{x})^2$

ahol  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  és  $\phi_3$  konstansok, amelyek változatlanul hagyják  $\eta_{xt}$ -t.

Az alkalmazott paraméterkorlátok:

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \gamma_c = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \gamma_c = 0.$$

A korlátozások azt implikálják, hogy a kohorszhatás 0 körül fluktuál megfigyelhető lineáris vagy kvadratikus trend nélkül. A kohorszhatással összefüggő korlátozásokból és az első transzformációból következik, hogy  $\gamma_{t-x}$ -t megkaphatjuk az alábbiak szerint:

$$\gamma_{t-x} = \phi_1 + \phi_2(t-x) + \phi_3(t-x)^2 + \epsilon_{t-x}, \quad \epsilon_{t-x} \sim N(0, \sigma^2).$$

Az ún. M6 és M8 modellek két egyszerűbb struktúrát jelentenek:

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x},$$

$$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + (x_c - x) \gamma_{t-x},$$

ahol  $x_c$  egy konstans paraméter, amelyet becsülni kell.

### III.7. Plat modellje

Plat (2009) olyan modell megalkotására törekedett, amely a korábbi sztochasztikus mortalitási modellek kedvező tulajdonságait megtartja és a kedvezőtleneket eliminálja. Plat modellje kombinálja a CBD modellt a Lee–Carter modell néhány jellemzőjével, hogy létrejöjjön egy olyan egyenlet, amely minden életkort tekintve megfelelő és tartalmazza a kohorszhatást is. Szerepel még benne  $\alpha_x$  és három mortalitási index ( $N = 3$ ). Az előre specifikált paraméterek az alábbiak:

$$\beta_x^{(0)} = 1,$$

$$\beta_x^{(1)} = 1,$$

$$\beta_x^{(2)} = \bar{x} - x,$$

$$\beta_x^{(3)} = (\bar{x} - x)^+ = \max(0, \bar{x} - x).$$

Ennek megfelelően:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \kappa_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+ \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}.$$

Plat (2009) Poisson-eloszlást és logaritmus függvényt tételez fel. Modelljében összesen négy sztochasztikus faktor  $(\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x})$  szerepel.  $\kappa_t^{(1)}$  reprezentálja a mortalitás szintjében bekövetkező változást minden életkorban.  $\kappa_t^{(2)}$  faktor megengedi, hogy a mortalitás szintjének változása variábilis legyen az egyes életkorokat tekintve. A múltbeli adatok tanúsága szerint a mortalitási ráta dinamikája a fiatalabb korcsoportokat tekintve különbözhet (pl. AIDS, drogok és alkohol használata miatt).  $\kappa_t^{(3)}$  ezt a dinamikát ragadja meg. Ha csak az idősebb korosztály érdekel bennünket, akkor a  $\kappa_t^{(3)}$  faktor elhagyható a modellből.

$\eta_{xt}$  invariáns az alábbi transzformációkra, ahol  $c_1, c_2, c_3, \phi_1, \phi_2$  és  $\phi_3$  konstansok.

$$\begin{aligned} & \left( \alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x} \right) \rightarrow \\ & \left( \alpha_x + \phi_1 - \phi_2 x + \phi_3 x^2, \kappa_t^{(1)} + \phi_2 t + \phi_3 (t^2 - 2\bar{x}t), \kappa_t^{(2)} + 2\phi_3 t, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x} - \phi_1 - \phi_2 (t-x) - \phi_3 (t-x)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \alpha_x, \kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}, \gamma_{t-x} \right) \rightarrow \\ & \left( \alpha_x + c_1 + c_2 (\bar{x} - x) + c_3 (\bar{x} - x)^+, \kappa_t^{(1)} - c_1, \kappa_t^{(2)} - c_2, \kappa_t^{(3)} - c_3, \gamma_{t-x} \right) \end{aligned}$$

A szükséges korlátok:

$$\sum_t \kappa_t^{(1)} = 0,$$

$$\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0,$$

$$\sum_t \kappa_t^{(3)} = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} \gamma_c = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c \gamma_c = 0,$$

$$\sum_{c=t_1-x_k}^{t_n-x_1} c^2 \gamma_c = 0,$$

ahol  $c = t_1 - x_k$  a legkorábbi,  $t_n - x_1$  pedig a legkésőbbi születési év.

Az első három korlátozás garantálja, hogy a mortalitási indexek 0 körül alakulnak. A másik három korlátozás pedig azt jelenti, hogy a kohorszthatás 0 körül fluktuál és nincs lineáris vagy kvadratikus trend. A  $\phi_1, \phi_2$  és  $\phi_3$  konstansok az alábbiak szerint számíthatóak:

$$\gamma_{t-x} = \phi_1 + \phi_2 (t-x) + \phi_3 (t-x)^2 + \epsilon_{t-x}, \quad \epsilon_{t-x} \sim N(0, \sigma^2).$$

A legmegfelelőbb előrejelzést Plat (2009) szerint  $\kappa_t^{(1)}$  esetében az ARIMA(0,1,0) illesztése, míg  $\kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}$  és  $\gamma_{t-x}$  esetén a konstans nélküli ARIMA(1,0,0) modell jelenti.

Azokban az esetekben, amikor csak az idősebb korcsoportba tartozók érdekelnek bennünket, Plat (2009) az alábbi egyenletet javasolja, amely nem más, mint az M6 modell  $\alpha_x$  taggal bővítve:

$$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}.$$

#### IV. Sztochasztikus mortalitási modellek illesztése magyar adatokon

Jelen fejezet az előzőekben ismertetett sztochasztikus mortalitási modellek alkalmazásáról szól. Célunk annak megállapítása, hogy a GAPC modellcsalád tagjai közül melyik illeszkedik legjobban a magyar adatok tekintetében. A 'Human Mortality Database'<sup>13</sup> 1950-től évenkénti bontásban tartalmaz koréves halálozási adatokat, továbbá a népességszám alakulása is lekérdezhető ugyanilyen szerkezetben. Idősoros adatok esetében a minél hosszabb időszakra vonatkozó adatsor preferált, azonban az elemzés során 1950 helyett 1960-tól vettük figyelembe a halálozási és népesség adatokat. Ennek oka, hogy 1960-tól áll rendelkezésre adat a 86-90 éves népességre vonatkozóan. Az 1950-es években a 85 éveseket és annál idősebbeket összevontan kezelték.

Tekintettel arra, hogy a sztochasztikus modellek logit vagy logaritmus kapocsfüggvényt használnak-e, a kezdeti kitétség mellett szükség volt a központi kitétség meghatározására is. Az évközepi népességgel számoló modellek időszora egy évvel rövidebb, hiszen két szomszédos év január 1-jei népességszámának átlagolásával az utolsó időszakra vonatkozó adat „elveszik”. Ennek okán 2018 jelenti az utolsó megfigyelési évet, így az idősorok hosszúsága nem tér el. Az 1. táblázat bemutatja, hogy az egyes modellek esetében milyen kitétségre volt szükség.

1. táblázat: Az illesztett sztochasztikus mortalitási modellek főbb jellemzői

Modell	Egyenlet	Kitétség
Poisson Lee–Carter	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}$	központi
binomiális Lee–Carter	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)}$	kezdeti
CBD	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)}$	kezdeti
APC	$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$	központi
M7	$\eta_{xt} = \kappa_t^{(1)} + (x - \bar{x}) \kappa_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2) \kappa_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$	kezdeti
PLAT	$\eta_{xt} = \alpha_x + \kappa_t^{(1)} + (\bar{x} - x) \kappa_t^{(2)} + \gamma_{t-x}$	központi
RH	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$	központi

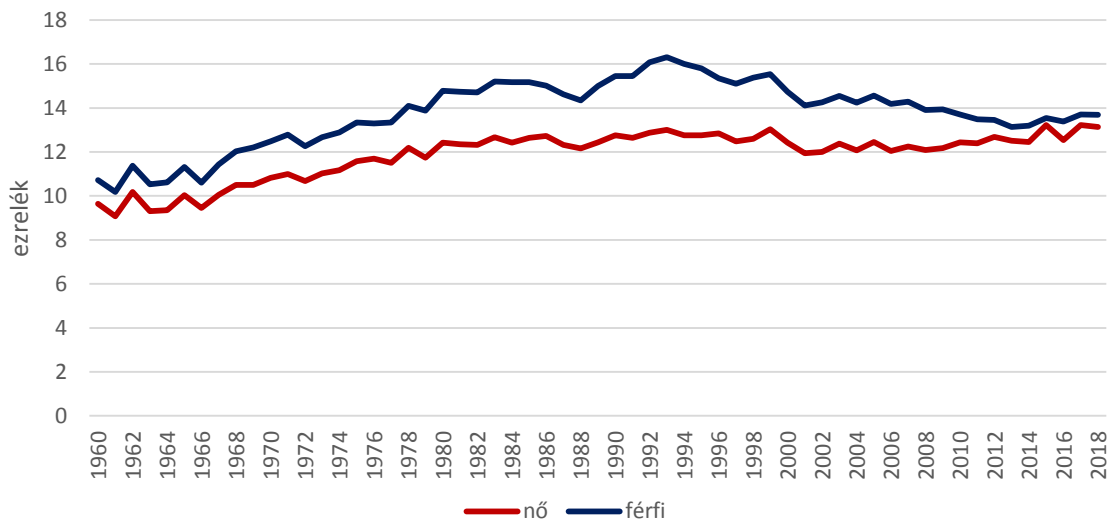
A becslés minden modell esetében koréves bontásban történt, azonban a 90 éves vagy annál idősebb korosztályra vonatkozó halálozási adatokat összevontuk. Ezt egyrészt indokolta az, hogy a kisebb létszámú csoportok esetében megnőhet a becslés bizonytalansága, másrészt pedig a népesség adatok is ilyen szerkezetben állnak rendelkezésre. A későbbiekben egy simítási módszer segítségével határozzuk meg, hogy hogyan alakul a legidősebbek koréves halálozási rátája.

<sup>13</sup> Elérhetősége: <https://www.mortality.org/>

Az oldalról letölthető halálozási adatok nem tartalmazzák az ismeretlen korban bekövetkező halálozások számát.

Mivel a nők és férfiak halandósága eltéréseket mutat, nemek szerinti bontásban elemeztük az idősorokat. Az 1. ábráról leolvashatjuk, hogy miként alakult a férfiak, illetve a nők népességarányos halálózási rátája 1960 és 2018 között. A mutató kiszámítása során a halálozások számát az évközepi népességszámhoz viszonyítottuk. Látható például, hogy az 1990-es években jellemző magasabb mértékű halálozás a férfiakat sújtotta erőteljesebben.

1. ábra: A központi halálózási ráta alakulása 1960 és 2018 között



A továbbiakban nemenkénti bontásban kerül bemutatásra, hogy a mortalitási modellek illesztésével az egyes paraméterek ( $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t, \gamma_{t-x}$ ) pályája hogyan vizualizálható. Mivel célunk a valósághoz legközelebb álló modell megtalálása, különböző szempontok (pl. reziduálisok, információs kritériumok, előrejelzett halálózási ráta elemzése) mentén értékeljük a modelleket egymáshoz képest. A sztochasztikus modellek illesztése és az előrejelzés egyaránt R programmal készült. A programcsomagok közül elsősorban a 'StMoMo', illetve a 'forecast' függvényeire volt szükség.

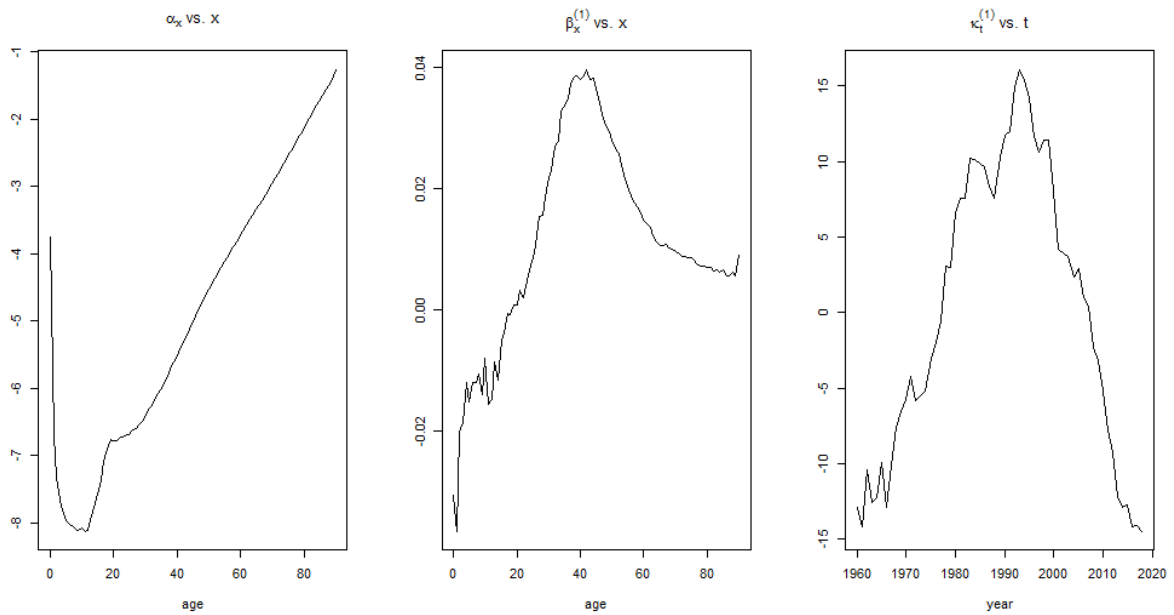
#### IV.1. A férfiak halandósága

A 2-7. ábrák szemléltetik, hogy a különböző mortalitási modelleket tekintve hogyan alakul a kor, valamint az idő függvényében  $\alpha_x, \beta_x$  és  $\kappa_t$  pályája, illetve amennyiben a modellnek része a kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ), akkor annak alakulását is láthatjuk. Az USA adatait elemezve Lee és Carter (1992) a mortalitási indexet egy negatív meredekségű görbeként ábrázolták. A magyar adatokat tekintve  $\kappa_t$  időtől függő adatsora csak az 1990-es évek elején megfigyelhető magasabb szintről indulva írható le egy negatív meredekségű görbével (lásd a Poisson Lee–Carter modellt).<sup>14</sup> Mindez a halandóság időbeni javulását az 1990-es évek második felétől támasztja alá. Érdekes a férfiak és a nők mortalitási indexét összevetni egymással (lásd 2. ábra és 28-29. ábra). Látható, hogy a nőknél a mortalitási index értékének

<sup>14</sup> Az 1960–2018. év közötti időszakot alapul véve a binomiális Lee–Carter modell nem konvergált, így annak eredményeivel nem tudtunk a későbbiekben sem számolni.

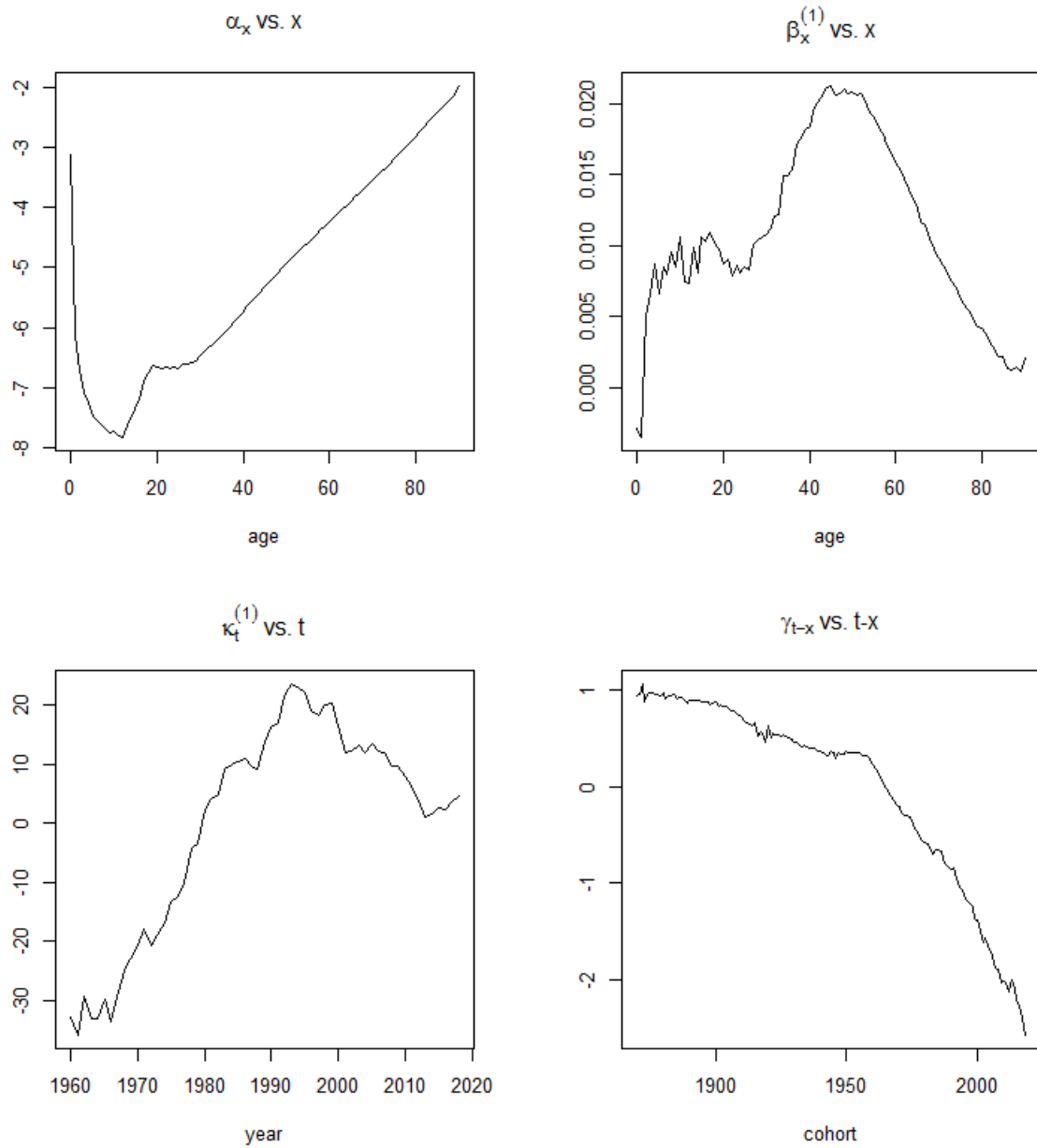
időbeni csökkenése a megfigyelt időszak során egyenletesebb, míg a férfiaknál az 1990-es évek kiugrásainak köszönhetően egészen más pályáról beszélhetünk. Attól függően, hogy egy modell tartalmaz-e kohorszhatást, illetve hogy a mortalitási index egy vagy több komponensű-e,  $\kappa_t^{(i)}$  pályája más-más képet mutathat, azonban a Lee–Carter modell kapcsán leírt trend a többi modellnél is tetten érhető.

2. ábra: A Poisson Lee–Carter modell paraméterei 1960–2018. évi bázison (férfiak)

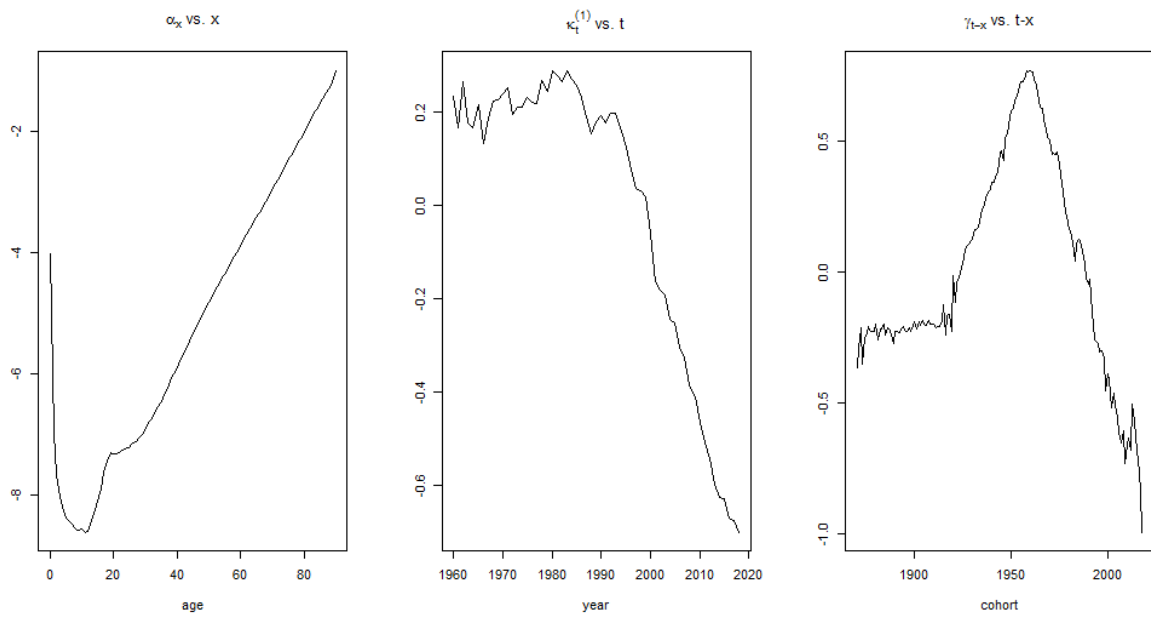




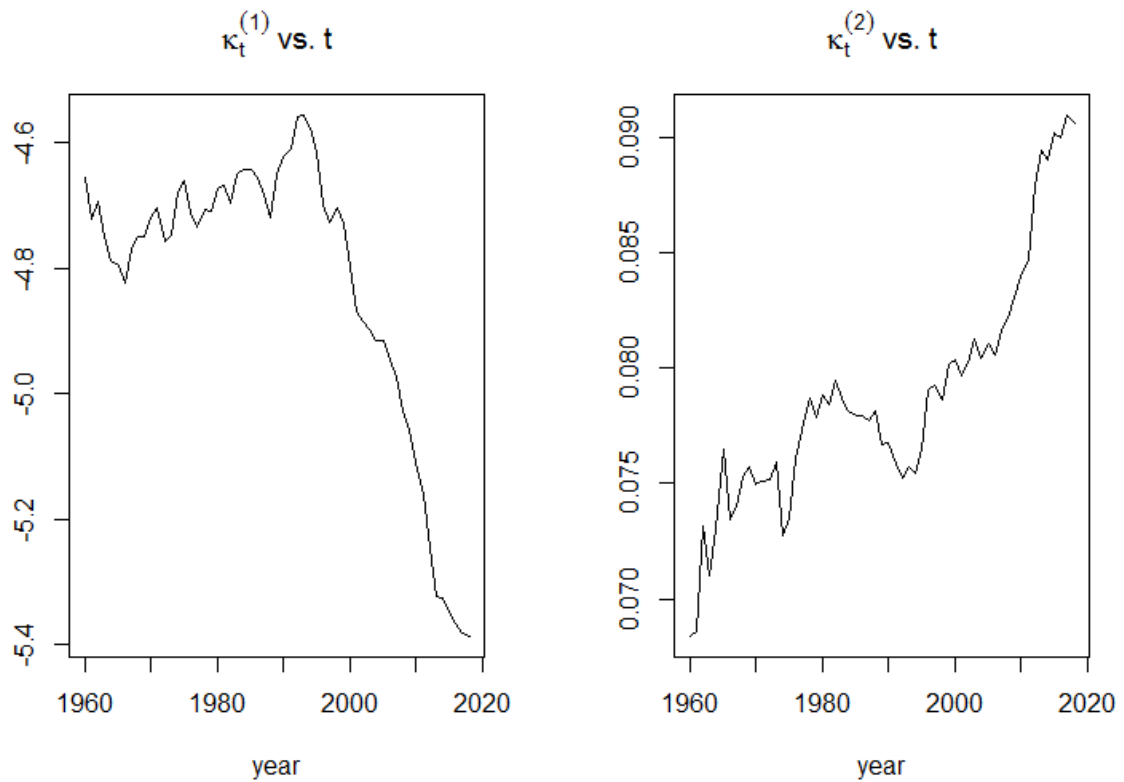
3. ábra: Az RH modell paraméterei 1960–2018. évi bázison (férfiak)



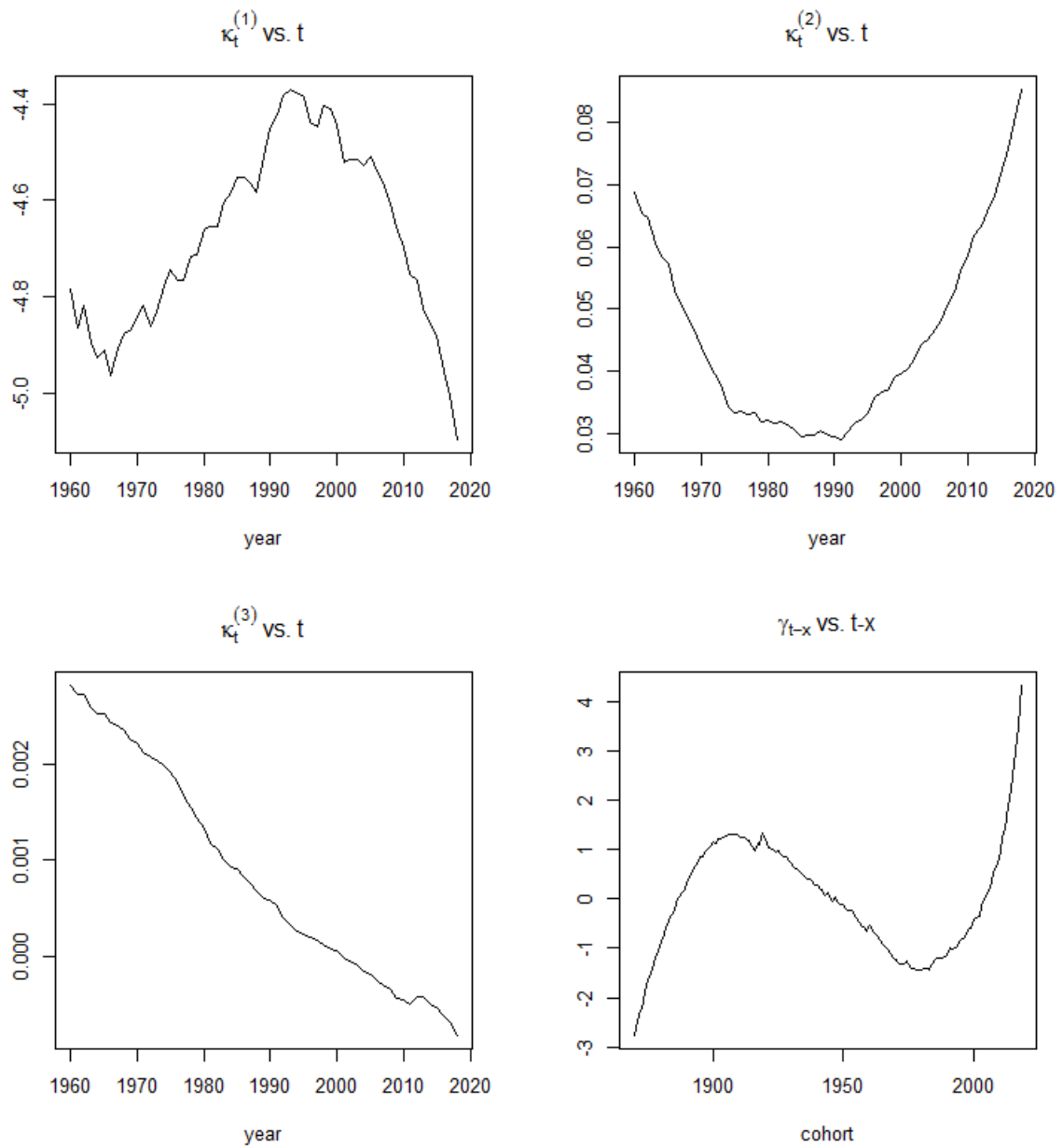
4. ábra: Az APC modell paramétereit 1960–2018. évi bázison (férfiak)



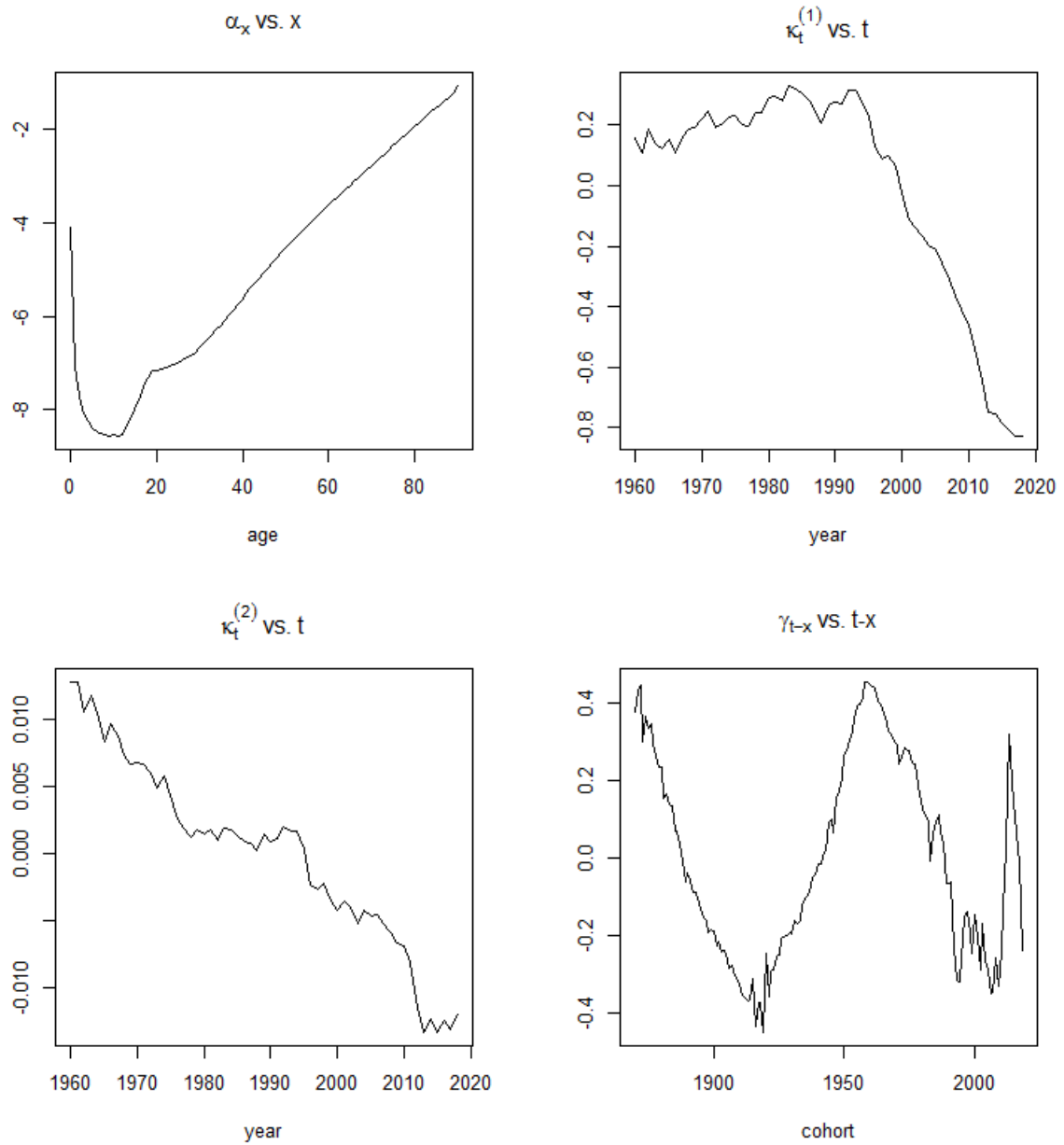
5. ábra: A CBD modell paramétereit 1960–2018. évi bázison (férfiak)



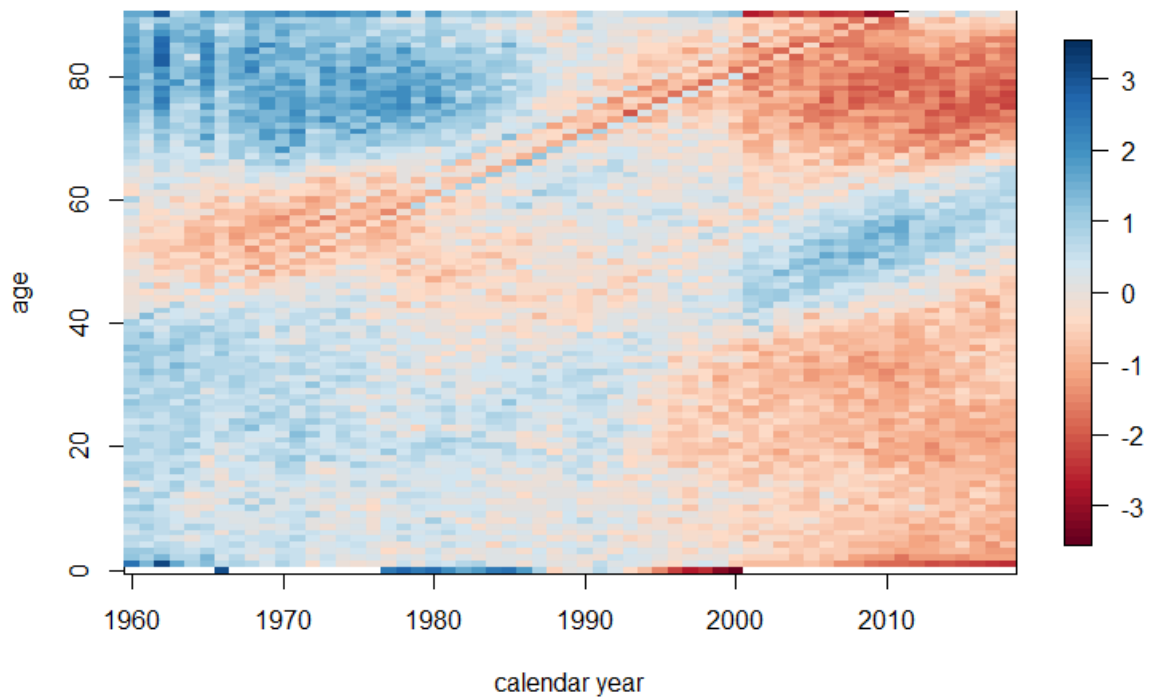
6. ábra: Az M7 modell paraméterei 1960–2018. évi bázison (férfiak)



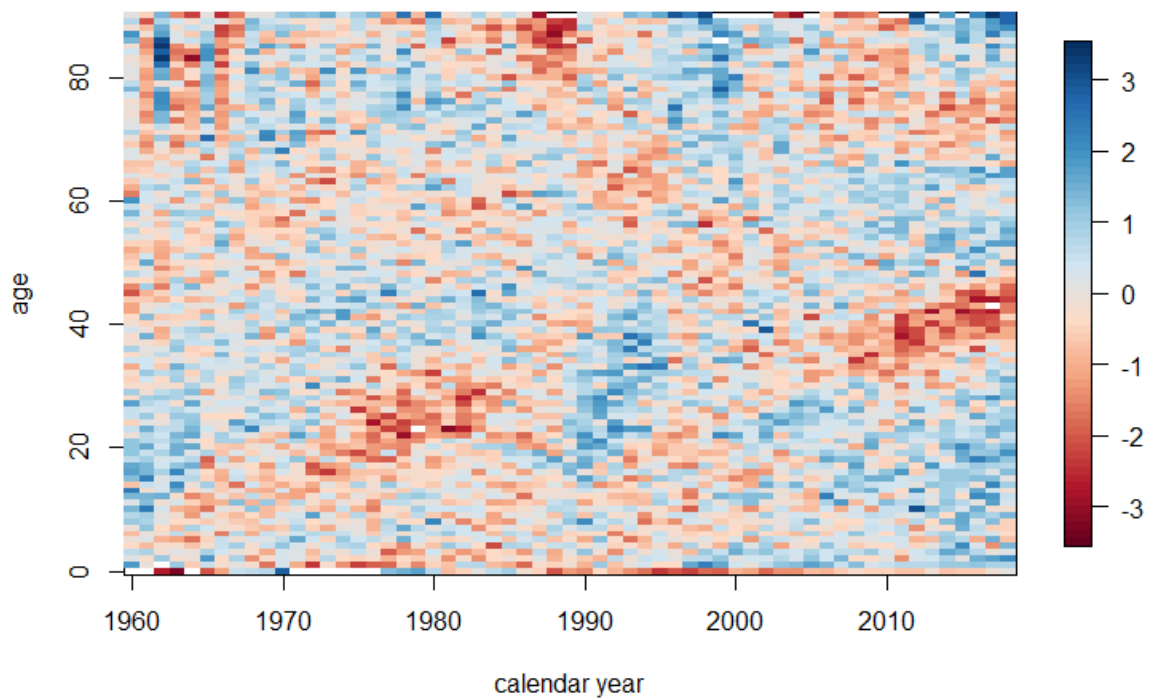
7. ábra: A Plat modell paraméterei 1960–2018. évi bázison (férfiak)



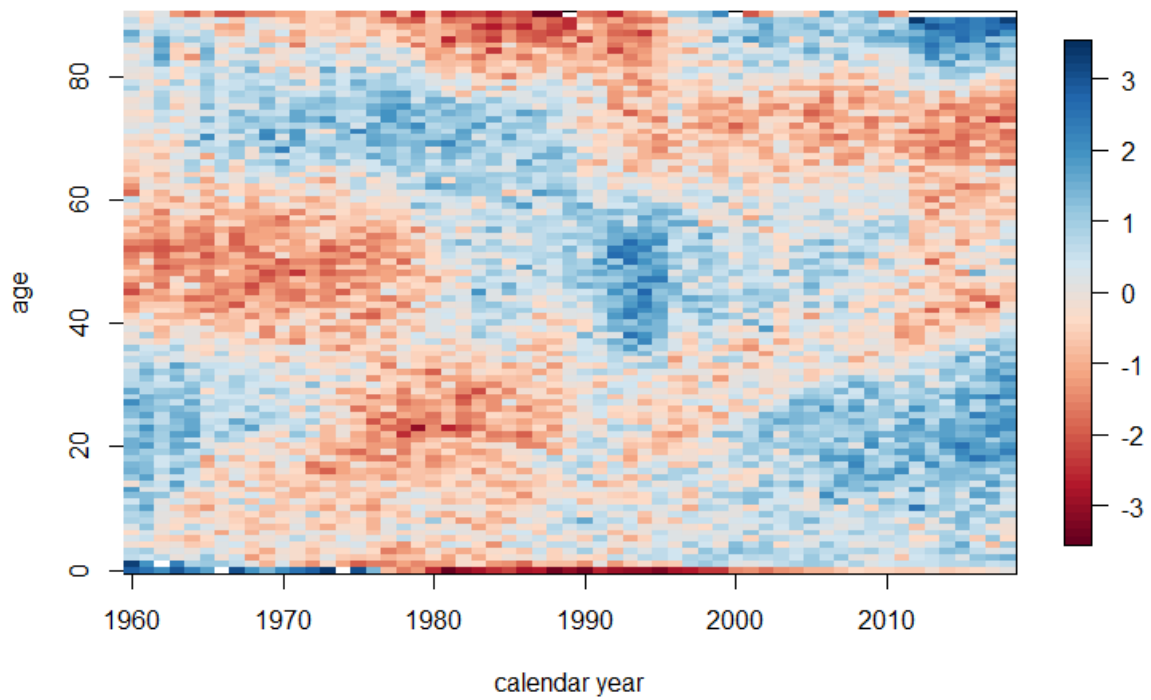
8. ábra: A Poisson Lee–Carter modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (férfiak)



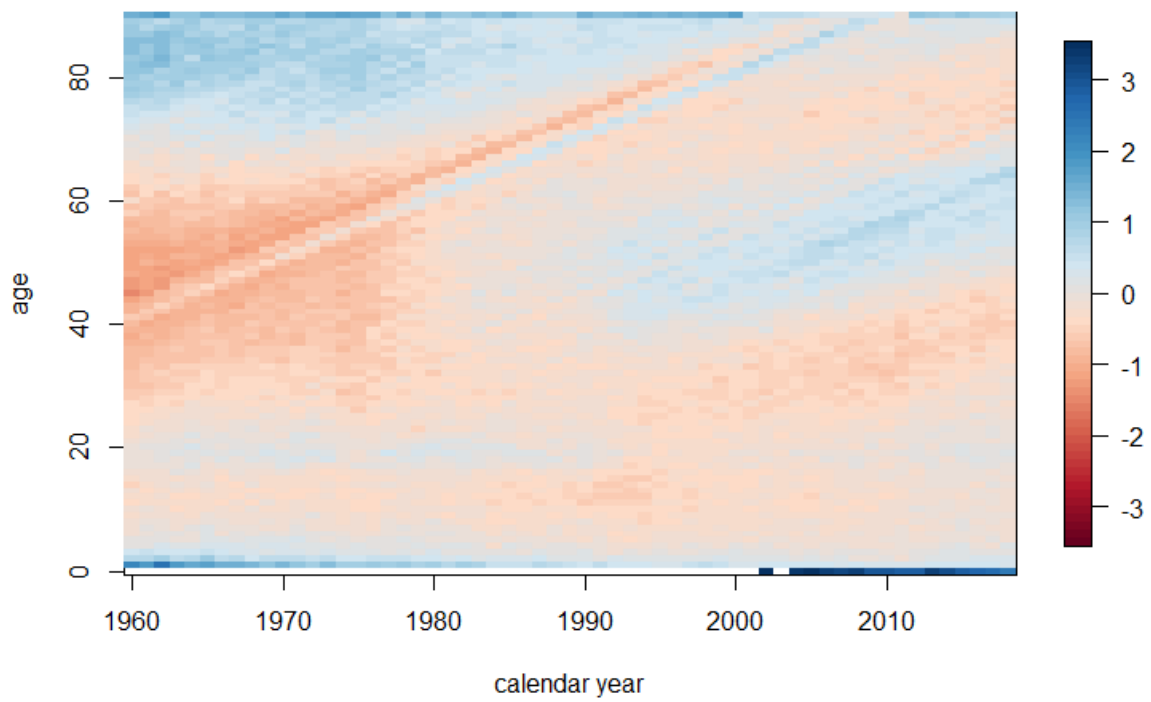
9. ábra: Az RH modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (férfiak)



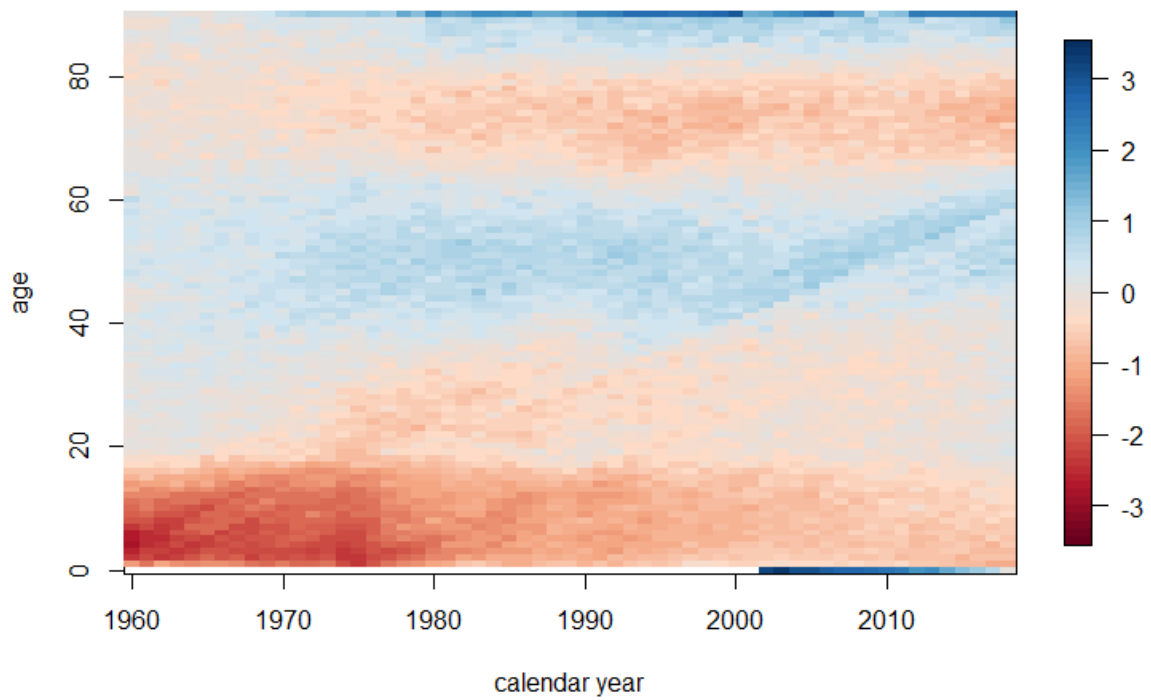
10. ábra: Az APC modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (férfiak)



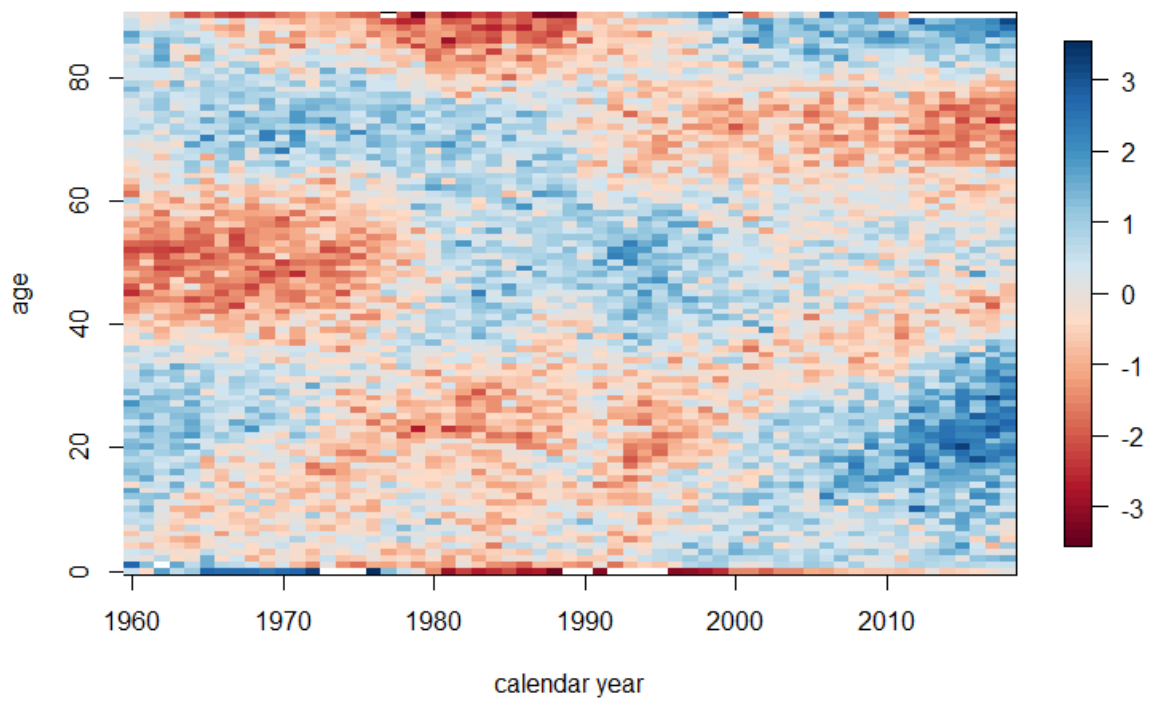
11. ábra: A CBD modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (férfiak)



12. ábra: Az M7 modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (férfiak)



13. ábra: A Plat modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (férfiak)



A különböző mortalitási modellek összehasonlításának egyik alapja lehet a reziduálisok elemzése. A hibatagok hőtérképe alapján következtetni lehet arra, hogy például a kohorszthatás figyelembevételre indokolt-e. A 8-13. ábrák a férfiak esetében szemléltetik a különböző modellek hibatagjait. A Poisson és a binomiális Lee–Carter, továbbá a CBD modell nem számol kohorszthatással. Mindez a reziduálisok hőtérképén is jól látható, hiszen az átlósan jelentkező mintázat erre utal. Minél inkább véletlenszerűnek tűnik a reziduálisok értékének elrendeződése, annál inkább megfelelő lehet egy modell. Ezt szem előtt tartva megállapíthatjuk, hogy Renshaw és Haberman modellje esetén bizonyul leginkább véletlenszerűnek az elrendeződés – ebben az esetben semmilyen jellegzetes mintázat nem fedezhető fel.

A modellek közötti választást segítheti az információs kritériumok értékének egymással történő összevetése. A 2. táblázat ismerteti modellenként az AIC és BIC (angolul 'Akaike information criterion', illetve 'Bayesian information criterion') értékeket.<sup>15</sup> Ahhoz, hogy két modell ilyen szempontból összehasonlítható legyen, ugyanarra a periódusra kell megbecsülni őket. (Enders 2014) Az összehasonlítás során a minél kisebb AIC vagy BIC érték preferált. Megállapíthatjuk, hogy ezek alapján a Renshaw–Haberman-féle modell tűnik a legmegfelelőbbnek.

2. táblázat: AIC és BIC értéke a sztochasztikus mortalitási modellek esetén 1960–2018. évi bázison (férfiak)

Modellek központi kitétséggel	AIC	BIC	Modellek kezdeti kitétséggel	AIC	BIC
Poisson Lee–Carter	136 772,8	138 347,5	CBD	872 714,6	873 492,0
APC	65 237,3	67 187,5	M7	430 561,6	432 689,7
PLAT	62 634,1	64 959,8			
RH	51 924,9	54 474,6			

Az elemzés legfontosabb célja, hogy előrejelezzük a koréves halálozási rátát. Ehhez időszorelemzési módszerekre van szükség. A mortalitási index(ek) ( $\kappa_t^{(i)}$ ) és a kohorszthatás ( $\gamma_{t-x}$ ) 1960 és 2018 közötti időszakra illesztett értékeinek előrejelzése révén becsülhetőek a jövőbeni mortalitási ráták. Jelen vizsgálat során 2068 jelenti az előrejelzési időhorizont végét.

A mortalitási index(ek) és a kohorszthatás függetlenségét feltételezve külön-külön vizsgáltuk meg, hogy melyik a legjobban illeszkedő ARIMA (angolul 'autoregressive integrated moving average') modell. A Box–Jenkins modellezési technika értelmében a megfelelő idősoros modell kiválasztása három lépésben történik. Az első az identifikáció, amelynek során a vizsgálni kívánt változó idősorát ellenőrizzük, megnézzük például, hogy van-e kiugró, hiányzó érték, esetleg strukturális törés az adatsorban. Az autokorreláció függvény (ACF), illetve a parciális autokorreláció függvény (PACF) segítségével megpróbáljuk megsejteni, hogy hány késleltetett tagra van szükség az ARIMA(p,d,q) modellünkhöz. A második lépésben egy takarékos modellt illesztünk, mert ezek jobb előrejelzők, mint a túl sok paraméterrel rendelkező modellek. A harmadik teendő pedig annak ellenőrzése, hogy a becsült modell reziduálisai biztosan fehér zaj folyamatot követnek-e. (Enders 2014) A Box–Jenkins modell szelekciós eljárást követve a 3. táblázatban található ARIMA(p,d,q) modellek kerültek kiválasztásra a férfiak adatait tekintve. A paraméterek ( $\kappa_t^{(i)}, \gamma_{t-x}$ ) értékeinek előrejelzéséhez ezeket

<sup>15</sup>  $AIC = T \ln(SSR) + 2n$ , illetve  $BIC = T \ln(SSR) + n \ln(T)$ , ahol  $T$  a megfigyelések száma,  $n$  a becsült paraméterek száma,  $SSR$  pedig a reziduális négyzetösszeg.



használtuk fel.<sup>16</sup> Az egységgyök tesztelése kibővített Dickey–Fuller,<sup>17</sup> míg a reziduálisok ellenőrzése Ljung–Box Q-statisztika<sup>18</sup> segítségével történt.

A 3. táblából látható, hogy a Poisson Lee–Carter modell tekintetében a férfiak mortalitási indexe nem írható fel eltolásos véletlen bolyongásként, ahogyan az a Lee–Carter (1992) tanulmányban szerepel. Emiatt a 'StMoMo' programcsomagban alapbeállításként szereplő eltolásos véletlen bolyongás modellt is felül kellett írni, nem beszélve a többi sztochasztikus modellről, amelyeknél szintúgy nem az eredeti beállítást követtük, hanem a táblázatban szereplő ARIMA(p,d,q) modelleket alkalmaztuk az előrejelzés során.

---

<sup>16</sup> Az előrejelzett értékeket a melléklet ábrái szemléltetik. Férfiak esetében lásd a 66-75. ábrákat, míg nők esetén a 76-84. ábrákat.

<sup>17</sup> A  $\Delta y_t = a_0 + \beta y_{t-1} + a_2 t + \omega_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \omega_k \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t$  formában felírható idősorok esetében a kibővített Dickey–Fuller-teszt nullhipotézése:  $\beta = 0$ . Az egyenletben  $a_2 t$  tag a trendet jelöli.

<sup>18</sup> Képlettel:  $Q = T(T + 2) \sum_{k=1}^s r_k^2 / (T - k)$ , ahol  $T$  a megfigyelések száma és  $r$  a mintabeli autokorrelációt jelöli.

3. táblázat: A  $\kappa_t^{(i)}$  és  $\gamma_{t-x}$  paraméterek ARIMA(p,d,q) modelljei 1960–2018. évi bázison (férfiak)

	$\kappa_t^{(1)}$	$\kappa_t^{(2)}$	$\kappa_t^{(3)}$	$\gamma_{t-x}$
<b>Poisson Lee-Carter</b>	ARIMA(1,1,1) $\Delta\kappa_t^{(1)} = \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	–	–	–
<b>CBD</b>	ARIMA(1,1,1) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	ARIMA(0,1,1) eltolással $\Delta\kappa_t^{(2)} = C + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	–	–
<b>APC</b>	ARIMA(3,1,0) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(1)} + \Delta\kappa_{t-3}^{(1)} + \varepsilon_t$	–	–	ARIMA(1,1,2) $\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\gamma_{t-1-x} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$
<b>M7</b>	ARIMA(0,2,1) $\Delta\Delta\kappa_t^{(1)} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	ARIMA(0,2,1) $\Delta\Delta\kappa_t^{(2)} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	ARIMA(3,1,1) eltolással $\Delta\kappa_t^{(3)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(3)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(3)} + \Delta\kappa_{t-3}^{(3)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	ARIMA(1,2,2) $\Delta\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\Delta\gamma_{t-1-x} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$
<b>PLAT</b>	ARIMA(1,1,0) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t$	ARIMA(0,1,0) eltolással $\kappa_t^{(2)} = C + \kappa_{t-1}^{(2)} + \varepsilon_t$	–	ARIMA(0,1,0) $\gamma_{t-x} = \gamma_{t-1-x} + \varepsilon_t$
<b>RH</b>	ARIMA(0,1,0) eltolással $\kappa_t^{(1)} = C + \kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t$	–	–	ARIMA(1,1,2) eltolással $\Delta\gamma_{t-x} = C + \Delta\gamma_{t-1-x} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$

Megjegyzés:

$$\Delta\kappa_t^{(i)} = \kappa_t^{(i)} - \kappa_{t-1}^{(i)}$$

$$\Delta\Delta\kappa_t^{(i)} = \Delta\kappa_t^{(i)} - \Delta\kappa_{t-1}^{(i)}$$

$$\Delta\gamma_{t-x} = \gamma_{t-x} - \gamma_{t-1-x}$$

$$\Delta\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\gamma_{t-x} - \Delta\gamma_{t-1-x}$$

Az idősoros elemzést a mortalitási ráta 2068-ig történő becslése követte. Az összesen hat konvergáló, sztochasztikus mortalitási modellnek köszönhetően tízféle előrejelzés készült, ugyanis az  $\alpha_x$  tagot tartalmazó modellek esetében kipróbáltuk azt a változatot is, amikor  $\alpha_x$  nem a teljes megfigyelt időszak átlagos mortalitási rátáját jelenti, hanem csak az utolsó időszak értékével számol az előrejelzéskor.<sup>19</sup> A modellek közötti választást nagymértékben segíti, ha az előrejelzett értékeket összevetjük a tényleges adatokkal. Erre akkor nyílik lehetőségünk, ha a bázis időszak hosszát rövidítjük és olyan évekre készítünk előrejelzést, amelyek tényleges mortalitási rátáit már ismerjük. A melléklet 10-12. táblázata<sup>20</sup> azt mutatja be, hogy eltérő hosszúsági időszakokat alapul véve az egyes modellek találatainak száma mennyi, vagyis a 0–90 évesek halálozási arányszámához az előrejelzett értékek közül hány darab esik statisztikailag közel. Ennek megfelelően egy modell találatainak maximális száma 91 lehet,<sup>21</sup> ilyen magas értéket azonban nem találunk a táblázatokban. A találatok 70 fölötti számával viszont már elégedettek lehetünk. A mortalitási modellek előrejelző képességét hétféle bázis időszak alapján mértük össze, ezek az alábbiak voltak: 1960–1989, 1960–1995, 1960–2000, 1960–2005, 1960–2010, 1960–2015 és 1990–2015.<sup>22</sup> Mindezek alapján a legkorábbi év, amelyre az előrejelzett és tényleges adatok összehasonlítását elvégeztük, 1990 volt, míg a legkésőbbi 2018. Az előrejelzésekhez választott ARIMA(p,d,q) modelleket a melléklet 8. táblázata ismerteti.<sup>23</sup> Ebből láthatjuk, hogy a férfiaknál a Poisson Lee–Carter modell<sup>24</sup> esetében, az 1960–1989. évi és az 1960–1995 közötti bázis időszakok alapján még megfelelőnek bizonyul a véletlen bolyongás – ARIMA(0,1,0) – eltolással típusú modell, ennél hosszabb időszakokat alapul véve azonban már nem. A tényleges és előrejelzett értékek hasonlóságát a QDEV-statisztika<sup>25</sup> (angolul 'weighted quadratic deviation') segítségével ellenőriztük.

$$QDEV = \sum_{i=K}^N \frac{E_i(q_{i1} - q_{i0})^2}{q_{i0}},$$

ahol  $N$  és  $K$  az életkortartomány alsó és felső határát jelöli,  $E_i$  az  $i$  évesek száma, vagyis a kitettség,  $q_{i0}$  a tényleges mortalitási rátákat,  $q_{i1}$  pedig a becsült mortalitási rátákat jelöli. A sztochasztikus modell jellegétől függően számoltunk kezdeti vagy központi kitettséggel, ill. kezdeti vagy központi tényleges halálozási rátával. A QDEV-statisztika határeloszlása khí-négyzet  $N - K + 1$  szabadságfokkal. Életkoronként külön-külön elvégezve az összehasonlítást (ekkor a szabadságfok 1-gyel egyenlő), 95%-os konfidencia intervallum esetén a kritikus érték: 3,84. Férfiaknál és nőknél is az utolsó időszak korszpecifikus mortalitási rátájával számolt APC modell tűnik az egyik legmegfelelőbbnek.

Az előrejelzett és tényleges adatok hasonlóságát szemléltetik a 14-19. ábrák, amelyek az 1960–2015. évi bázison illesztett modellek koréves mortalitási rátáinak természetes alapú logaritmusát ábrázolják. Az ismert, vagyis tény adatokat fekete színnel jelöltük. A kezdeti kitettségű CBD és M7 modellek nem tekinthetőek jól illeszkedőnek. A központi kitettségű modellek esetében pedig az aktuális  $\alpha_x$ -szel, vagyis az utolsó időszak korszpecifikus mortalitási rátájával számolt modellek

<sup>19</sup> A Lee–Carter modell esetében a Lee–Miller (2001) tanulmány javasolja ezt a módszert. A későbbiekben e változatok jelölésére használjuk a 'jump' kifejezést.

<sup>20</sup> Nők esetében a 13-15. számú táblázat a releváns.

<sup>21</sup> Mivel a 90 évesek csoportja egy összevont csoport, ezért ebben az életkor kategóriában eleve nem vártunk statisztikai egyezőséget az előrejelzett és tényleges adatok között.

<sup>22</sup> Az 1990-től kezdődő időszak kiválasztása különösen a férfiak esetében tűnik célszerűnek, azonban a megfigyelt időszak rövidsége miatt több évtizedes előrejelzésre nem alkalmas.

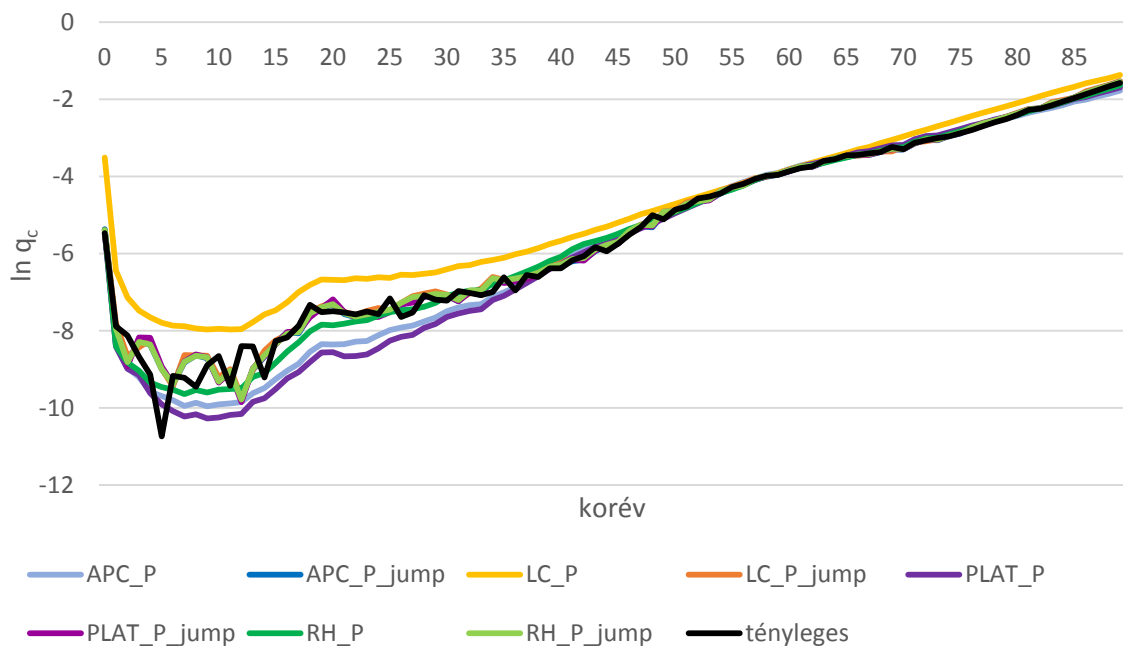
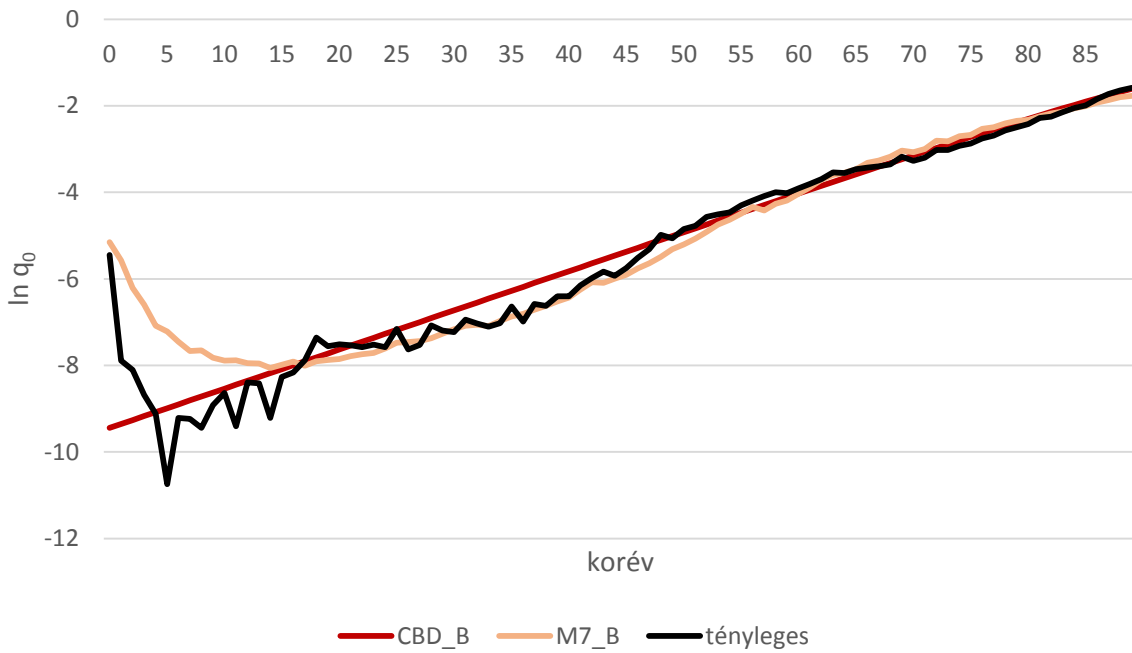
<sup>23</sup> Nők esetében a 9. számú táblázat a releváns.

<sup>24</sup> Mivel a férfiaknál a binomiális Lee–Carter modell nem konvergált az 1960–2018. évi bázison, ezért az összehasonlításból is kihagytuk. A nőknél a Renshaw–Haberman-féle modellt kellett kihagyni hasonló okokból.

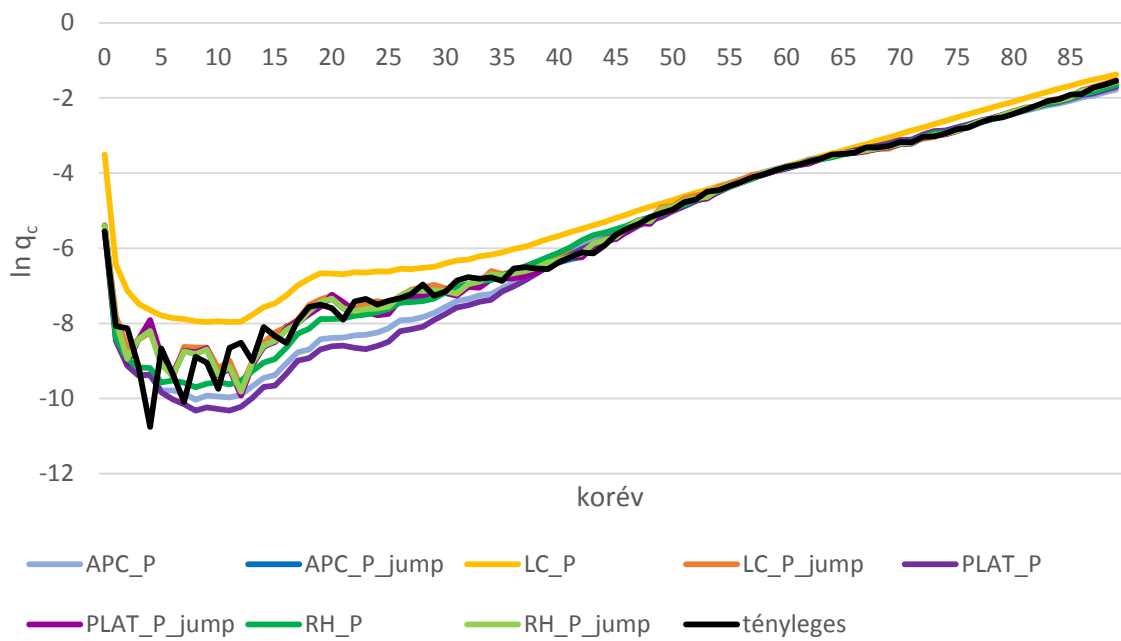
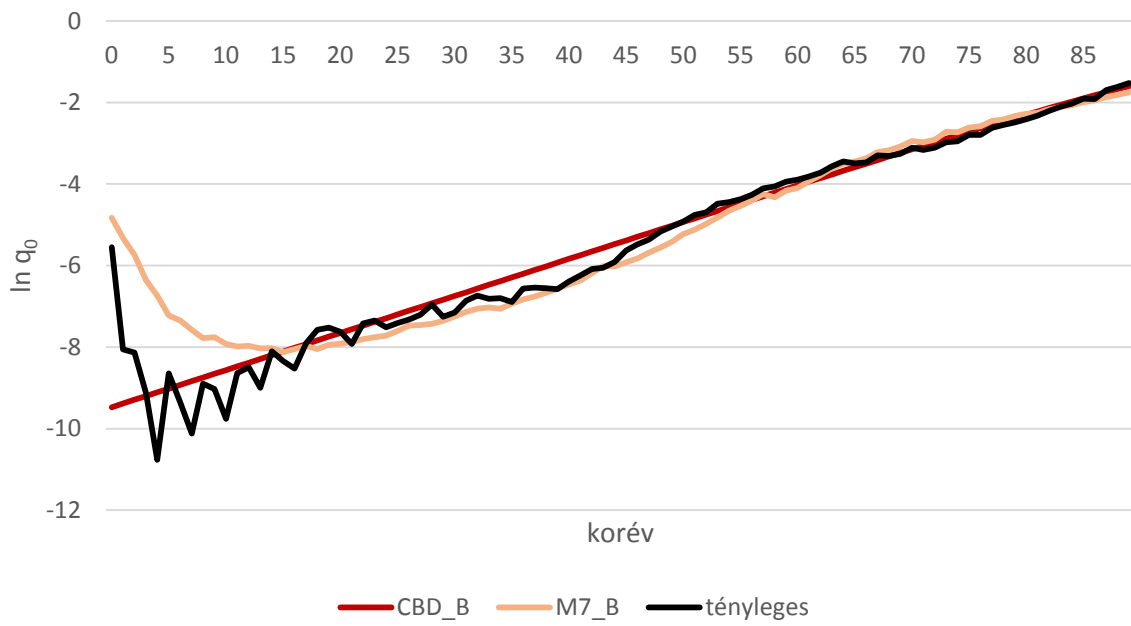
<sup>25</sup> Ehhez kapcsolódóan lásd például Arató et al. (2009) és Ágoston et al. (2019) tanulmányokat.

meglehetősen hasonlóknak tűnnek, tulajdonképpen elfedik egymást az előrejelzés első éveiben. A 20-25. ábrák a halandósági tábla  $l_x$  oszlopának értékeit, vagyis a hipotetikus továbbélési rend alakulását szemléltetik az előrejelzési horizont különböző éveiben. A halandósági tábla számítása során az Eurostat módszertanát követtük azzal a különbséggel, hogy 90 éves kortól 110 éves korig simítottuk a halálozási rátát.

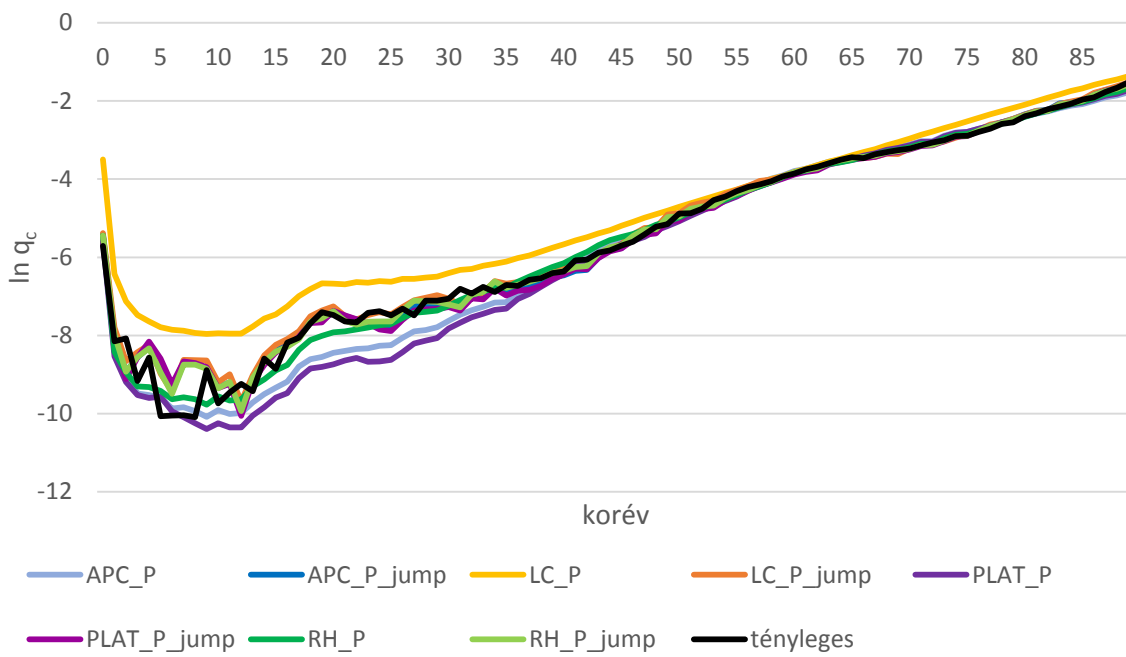
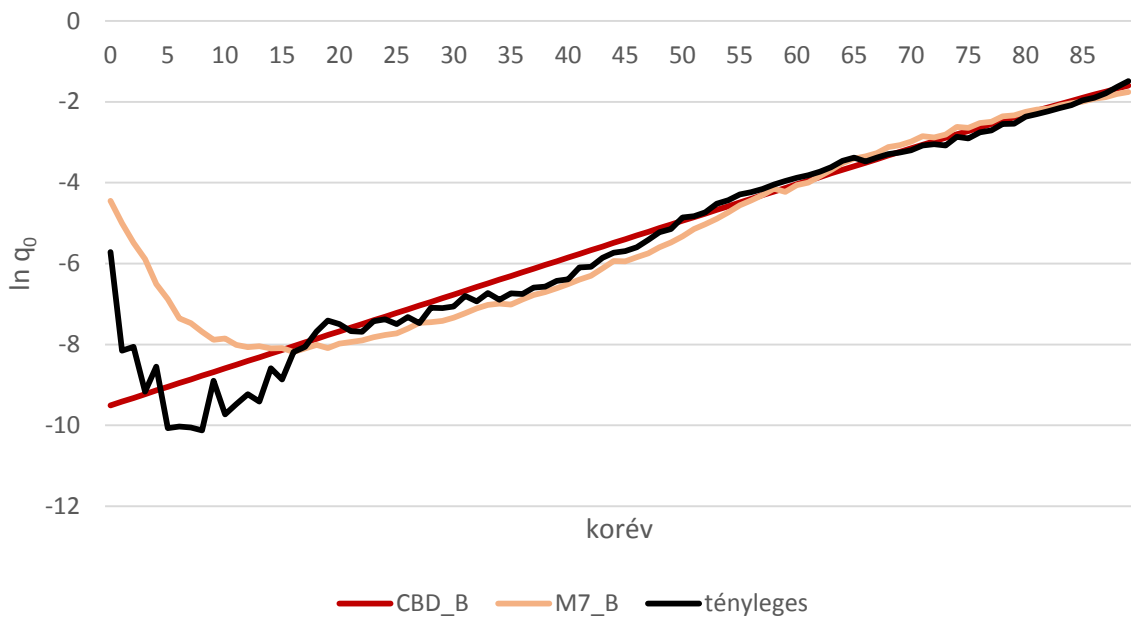
14-15. ábra: Az előrejelzett mortalitási ráták logaritmusai 2016-ban 1960–2015. évi bázison (férfiak)



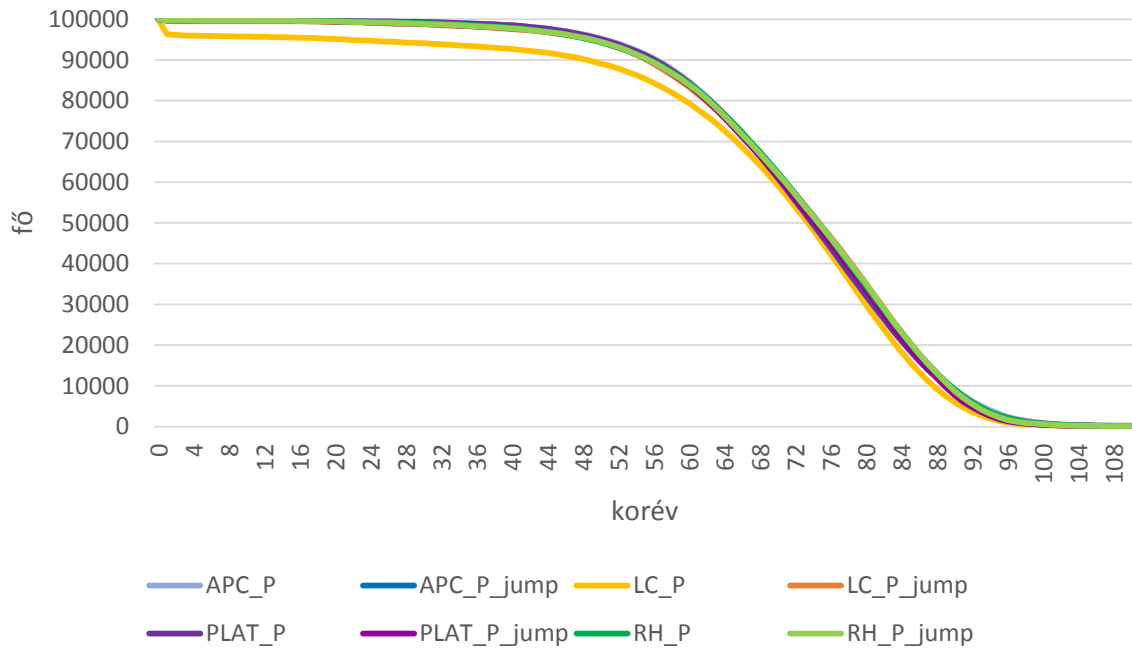
16-17. ábra: Az előrejelzett mortalitási ráták logaritmusai 2017-ben 1960–2015. évi bázison (férfiak)



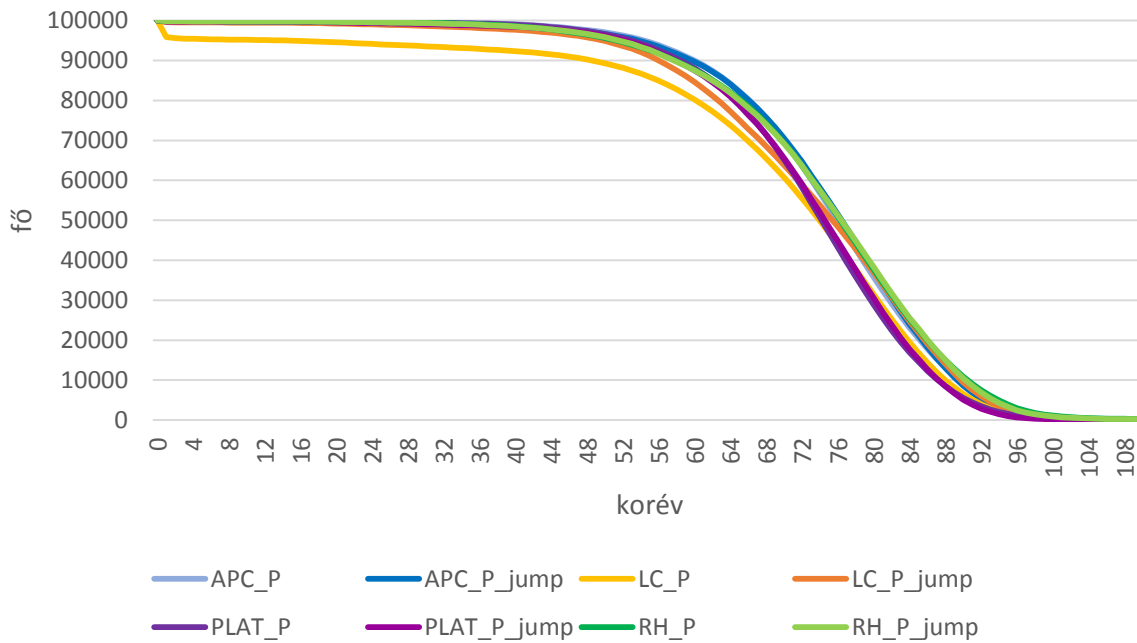
18-19. ábra: Az előrejelzett mortalitási ráták logaritmusza 2018-ban 1960–2015. évi bázison (férfiak)



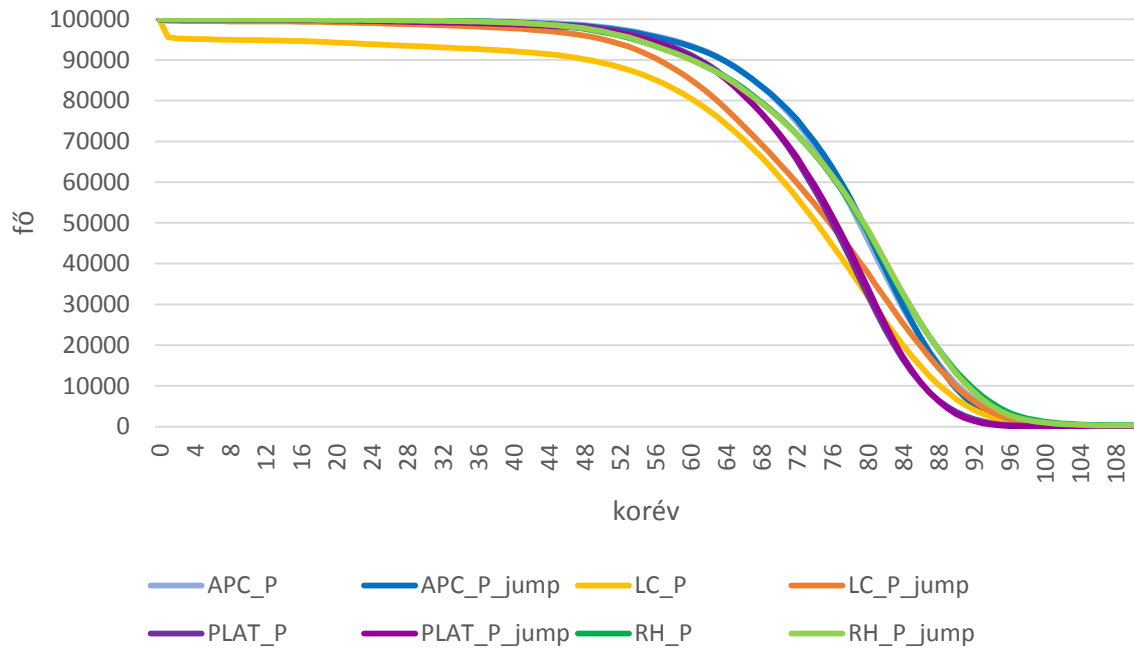
20. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2020-ban 1960–2018. évi bázison (férfiak)



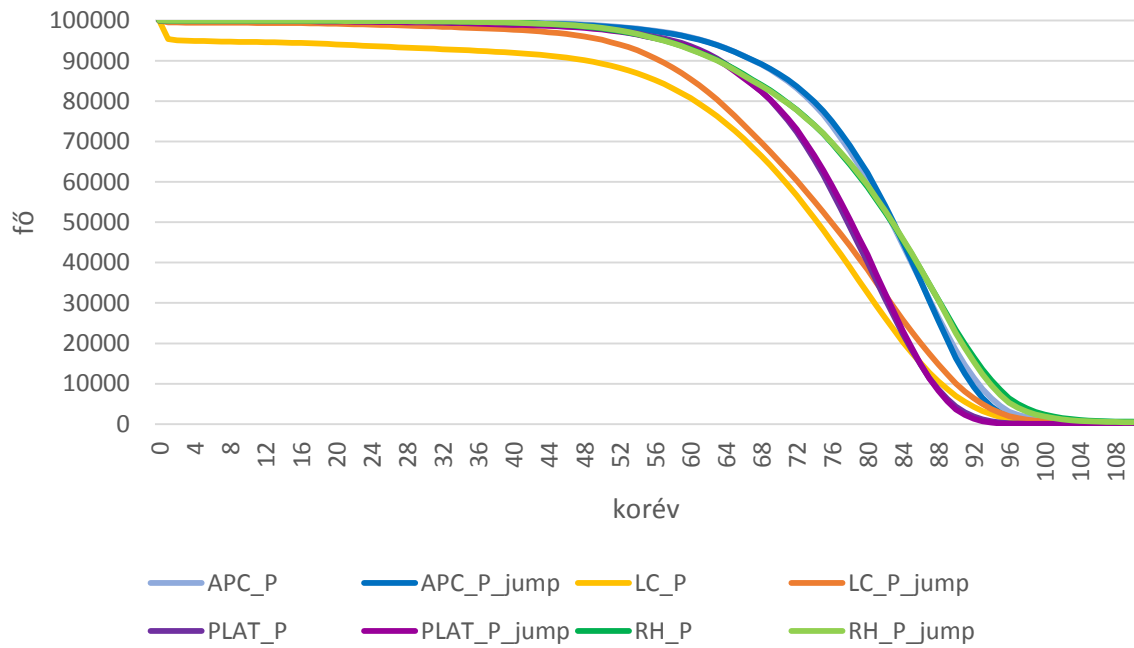
21. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2030-ban 1960–2018. évi bázison (férfiak)



22. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2040-ben 1960–2018. évi bázison (férfiak)

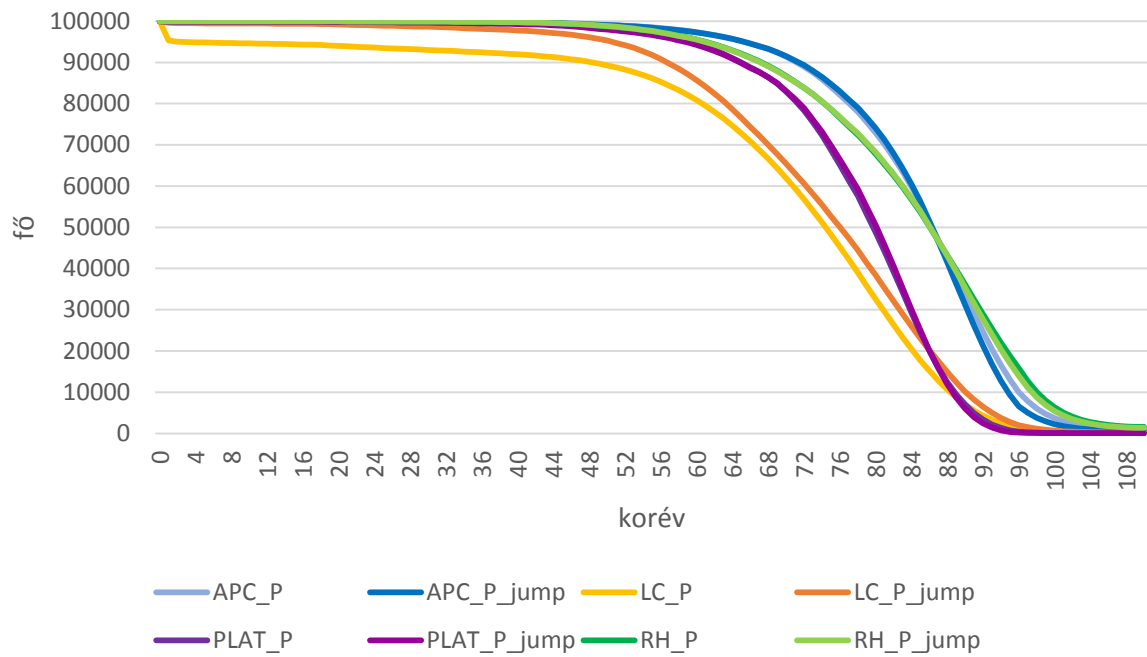


23. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2050-ben 1960–2018. évi bázison (férfiak)

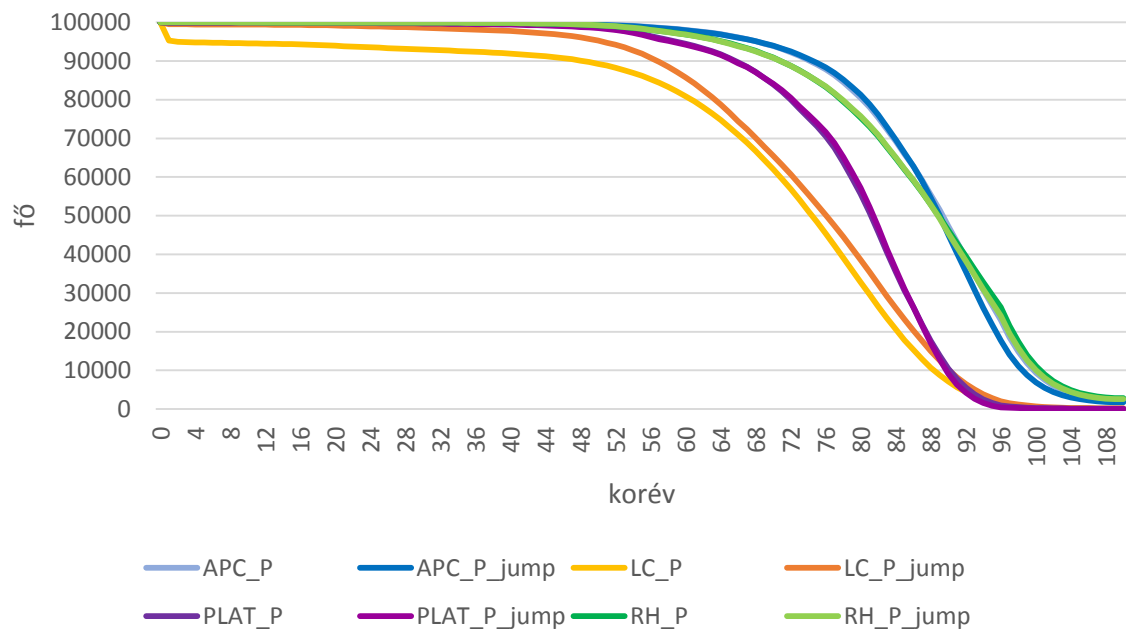




24. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2060-ban 1960–2018. évi bázison (férfiak)



25. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2068-ban 1960–2018. évi bázison (férfiak)



## IV.2. A nők halandósága

A nők esetében a 28-33. ábrák mutatják be, hogy a megfigyelt adatokra illesztett mortalitási modellek paramétereinek értéke hogyan alakul. A nők koréves halálozási és népesség adatait is 1960-tól vettük számításba, ugyanúgy, mint a férfiaknál. A Poisson és a binomiális Lee–Carter modellek mortalitási indexe a nők esetében más pályát ír le, mint amit a férfiaknál a Poisson változat esetén láttunk. Az index negatív meredeksége itt egyértelműen beigazolódik.

A reziduálisok hőterképei alapján az APC vagy Plat-féle modellt választanánk, mert ezekben az esetekben kevésbé azonosítható jellegzetes mintázat (lásd a 34-39. ábrákat). A nőkre vonatkozó adatok alapján a hétféle mortalitási modell közül hatot sikerült illeszteni. Renshaw és Haberman modellje nem konvergált – ez éppen az a modell, amelyet a férfiak esetében az egyik legjobbnak ítéltünk. Az AIC és BIC értékek tanúsága szerint a központi kitettséggel számított modellek közül Plat modellje a legmegfelelőbb. A kezdeti kitettséggel számoló modellek közül pedig a Lee–Carter modellt preferálnánk, ha csak az információs kritériumok alapján ítélnénk (lásd a 4. táblázatot).

4. táblázat: AIC és BIC értéke a sztochasztikus mortalitási modellek esetén 1960–2018. évi bázison (nők)

Modellek központi kitettséggel	AIC	BIC	Modellek kezdeti kitettséggel	AIC	BIC
Poisson Lee–Carter	58 605,9	60 180,5	binomiális Lee–Carter	67 272,2	68 846,8
APC	57 267,2	59 217,4	CBD	905 023,0	905 800,4
PLAT	54 776,5	57 102,2	M7	333 927,5	336 055,5

A mortalitási index(ek) és a kohorszhatás tekintetében külön-külön vizsgáltuk meg, hogy melyik a legjobban illeszkedő ARIMA(p,d,q) modell. Ahogyan korábban említettük, ez az értékek előrejelzése miatt fontos. A nők esetében is a Box–Jenkins modellezési technikát követtük. Az eredményeket az 5. táblázat foglalja össze. Ez alapján látható, hogy a nők adatsora másként viselkedik, mint a férfiaké: az idősoros elemzés más eredményt hozott. A két Lee–Carter modellt tekintve nem igazolódott be a nemzetközi irodalomban is hangsúlyos ARIMA(0,1,0) feltevés, ami  $\kappa_t$  idősorát illeti.

A mortalitási ráta 2068-ig történő becslését tízféle modell szerint sikerült elkészíteni – ideértve egyes modellek 'jump' típusú változatát is. Különböző bázis időszakok alapján illesztettünk modelleket, hogy a tényleges adatokkal történő összevetést a nőknél is elvégezhessük. Ezekhez kapcsolódóan lásd a melléklet 8. és 12-14. számú tábláit. Ahogyan a férfiakról szóló fejezetben már említettük, az előrejelzett és tényleges adatok közötti egyezőség alapján az utolsó időszak  $\alpha_x$  értékével számolt APC modellt választanánk a nők esetében is. A 40-45. ábrák szemléltetik a nők előrejelzett, koréves mortalitási rátáinak természetes alapú logaritmusát az 1960–2015. évi bázison illesztett modellek esetében. A tény adatokat ebben az esetben is fekete színnel jelöltük, míg az egyes modellváltozatok eredményeit színes görbék jelzik. Ezek alapján a 'jump' típusú modellek, vagyis az utolsó megfigyelt időszak korszpecifikus mortalitási rátáival számolt (kezdeti vagy központi kitettséggű) modellek meglehetősen hasonlítanak. A CBD és az M7 modellek pedig ugyanúgy rosszul teljesítenek, mint a férfiaknál.<sup>26</sup>

<sup>26</sup> E modellekben nincs  $\alpha_x$  tag, így nem beszélhetünk 'jump' változatokról sem.

A 46-51. számú ábrák a nők hipotetikus továbbélési rendjét tükrözik különböző előrejelzési években az 1960–2018. évi bázison illesztett modellek szerint. Ahogyan már említettük, a halandósági táblát az Eurostat módszertana alapján számoltuk. Nyers halálozási valószínűségeket használtunk 0 és 89 éves kor között, 90 éves kortól azonban simítottuk az értékeket. A 90-95 évesek halálozási valószínűségeit Kannisto módszerét<sup>27</sup> alkalmazva igazítottuk ki. A simítást nők és férfiak vonatkozásában egyaránt elvégeztük. Kannisto módszere alapján a halálozási ráta simítása az idősebb korcsoportokat tekintve az alábbiak szerint történik (minden előrejelzési évre külön számítva):

$$m_x = \frac{ce^{dx}}{1+ce^{dx}} e^{\varepsilon_x},$$

amely felírható így is:

$$\text{logit}(m_x) = \ln(c) + dx + \varepsilon_x,$$

ahol  $m_x$  a mortalitási ráta,  $x$  az életkor,  $c$  és  $d$  konstansok,  $\varepsilon_x$  pedig a hibatag. A számítás legkisebb négyzetek módszerével történt. Férfiaknál és nőknél is a 80-89 évesek mortalitási rátáit vettük alapul.

Mindkét nemet tekintve a 96-110 éves korúaknál a 2012 és 2019 között évről évre megfigyelhető népességváltozást (vagyis tulajdonképpen a koréves halálozást) vettük számításba a simításhoz – ehhez a január 1-jei népesség adatokat használtuk fel. A legidősebbek mortalitási rátáinak előrejelzett értékeit úgy igazítottuk ki, hogy az utóbbi években megfigyelhető 90-110 évesek mortalitási rátáinak négyzetes változásával számoltunk. Nagyon idős korban ugyanis akár kisebb mortalitási rátákat is megfigyelhetünk, mint például a 89 éves korúaknál. Ennek megfelelően a legidősebeknél a tapasztalati mortalitási ráta alakulása leginkább parabolikus. Az utolsó megfigyelt néhány évre az alábbi polinomot illesztettük:

$$m_{xt} = C + ax + bx^2 + \varepsilon_{xt}, \quad (x = 90, \dots, 110),$$

ahol  $t$  az időszakot jelöli,  $x$  az életkort. Az  $a$ ,  $b$  és  $C$  paramétereket a legkisebb négyzetek módszerével számítottuk ki. Az így kapott paraméter értékek átlagát használtuk fel az előrejelzéshez, ahol a 90-95 évesek korábban már simított értékeihez igazítottuk a 96-110 évesek mortalitását.

Azoknál a modelleknél, amelyek központi kitettséggel számolnak, az előrejelzett központi mortalitási rátákat kezdeti halálozási arányszámokká alakítottuk át a következő összefüggésnek megfelelően:

$$m^0 = \frac{m^c}{1 + 0,5 m^c}$$

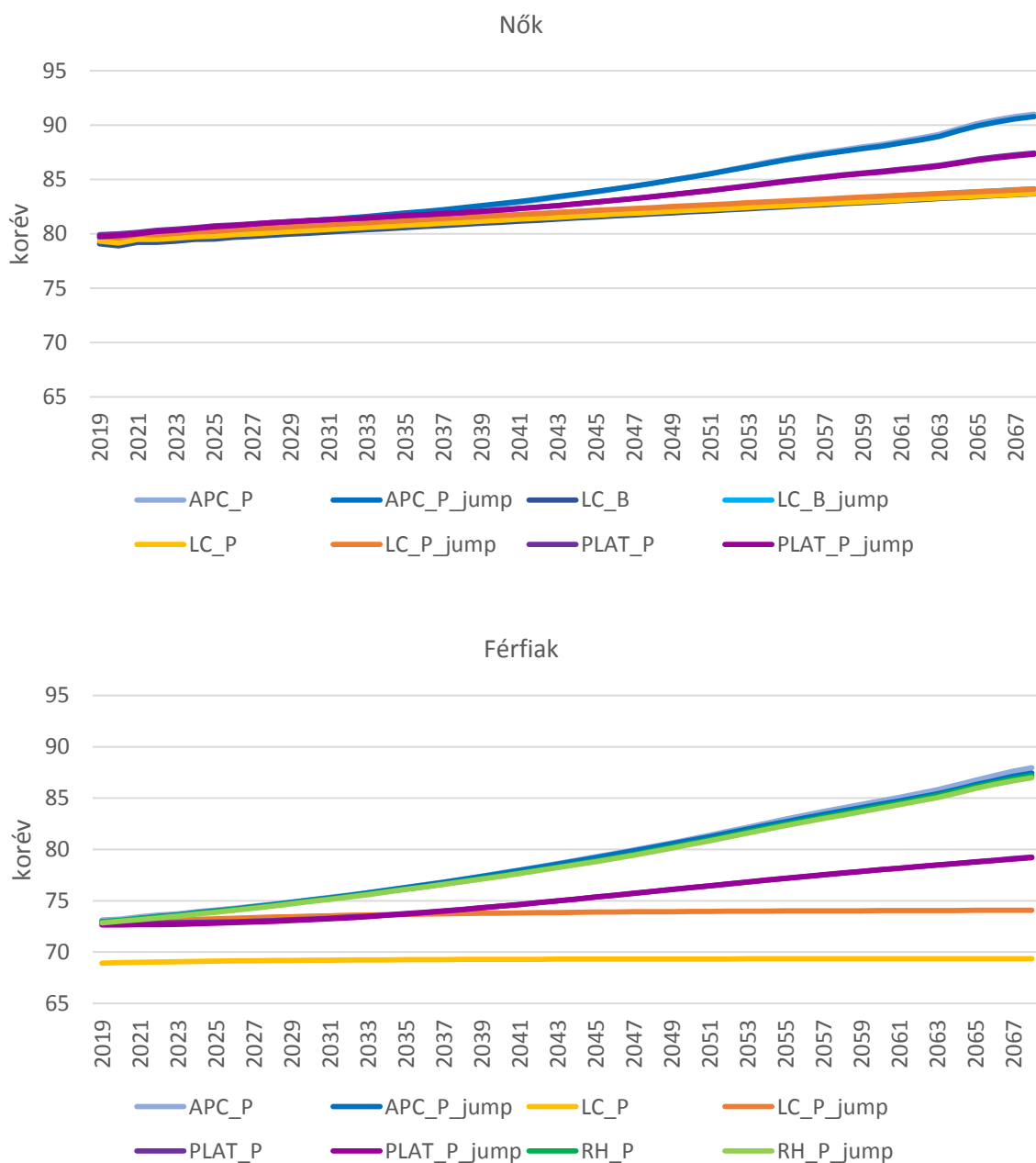
Így valamennyi sztochasztikus modell eredményei egy olyan népesség-előrejelzéshez használhatóak fel, amelyek az év eleji népességszámot tükrözik. A halandósági tábla készítésekor is ezeket a rátákat vettük figyelembe.

A nők és férfiak esetében külön-külön illesztett mortalitási modellek eredményeinek ismeretében összehasonlíthatjuk a születéskor várható élettartam alakulását. Az előrejelzett mortalitási rátákból kiindulva megadható a születéskor várható élettartam is. A 26-27. ábra mutatja be, hogy ez a fontos demográfiai mutató várhatóan hogyan alakul a jövőben a nőknél, illetve a férfiaknál. A rosszul illeszkedő CBD és M7 modellek eredményei ezeken az ábrákon nem szerepelnek.

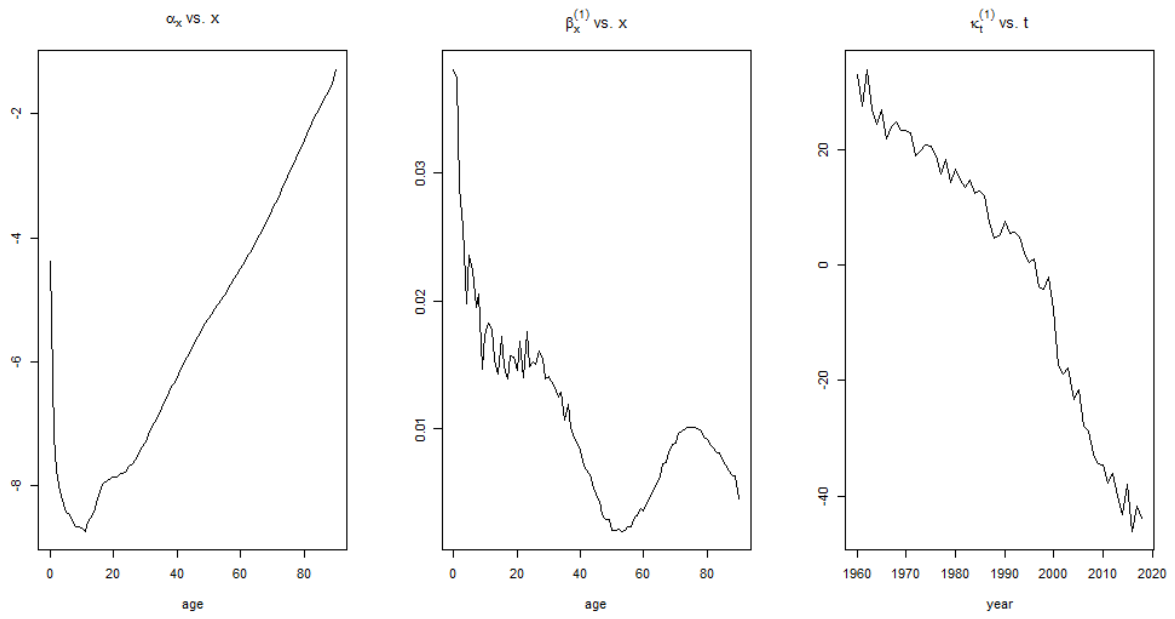
<sup>27</sup> Lásd Thatcher et al. (1998).

Látható, hogy a legmegfelelőbbnek gondolt APC és Renshaw–Haberman-féle modellek értelmében a nők és a férfiak közötti várható élettartam különbség az előrejelzési időhorizont előrehaladtával fokozatosan csökken. Az utolsó időszakra jellemző  $\alpha_x$ -szel számolt APC modell szerint a nők születés kori várható élettartama az előrejelzett 2019. évi 79,9 évről 2068-ban 90,8 évre emelkedik. A férfiaknál 73,0 és 87,5 év ugyanez a két érték. A többi modell nem szolgál ilyen pozitív előrejelzéssel. A Lee–Carter modelleknél és Plat modelljénél nem figyelhető meg közeledés a két nem várható élettartamát tekintve – 2068-ban ugyanúgy nagy különbséggel számolnak, mint ami jelenleg is megállapítható. Férfiak esetében a Poisson Lee–Carter modell előrejelzése szerint nem várható élettartam növekedés. A vizsgált sztochasztikus mortalitási modellek közül végeredményben az aktuális  $\alpha_x$ -szel számolt APC modellt választottuk ki népesség-előrejelzés készítéséhez.

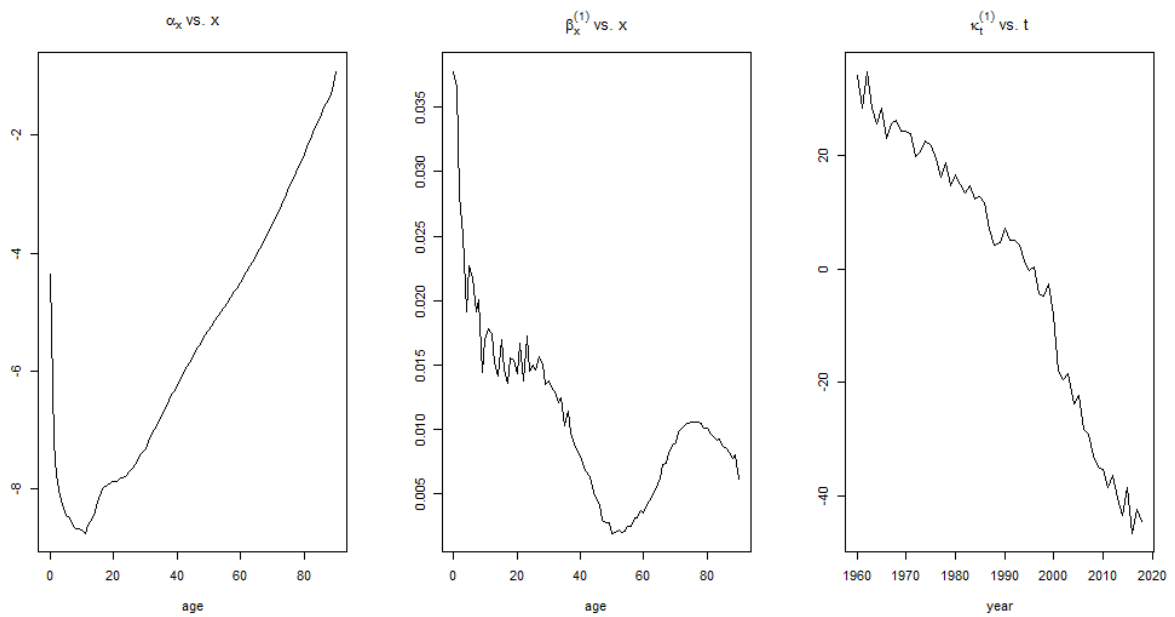
26-27. ábra: Születés kor várható élettartam a sztochasztikus mortalitási modellek esetében 1960–2018. évi bázison



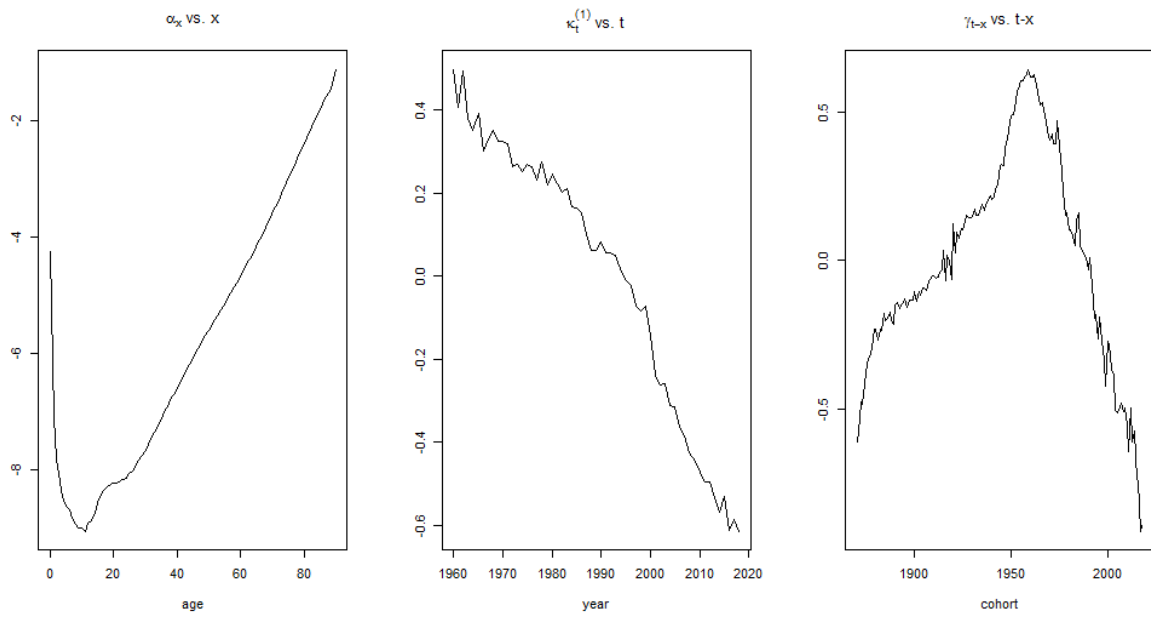
28. ábra: A Poisson Lee–Carter modell paramétereit 1960–2018. évi bázison (nők)



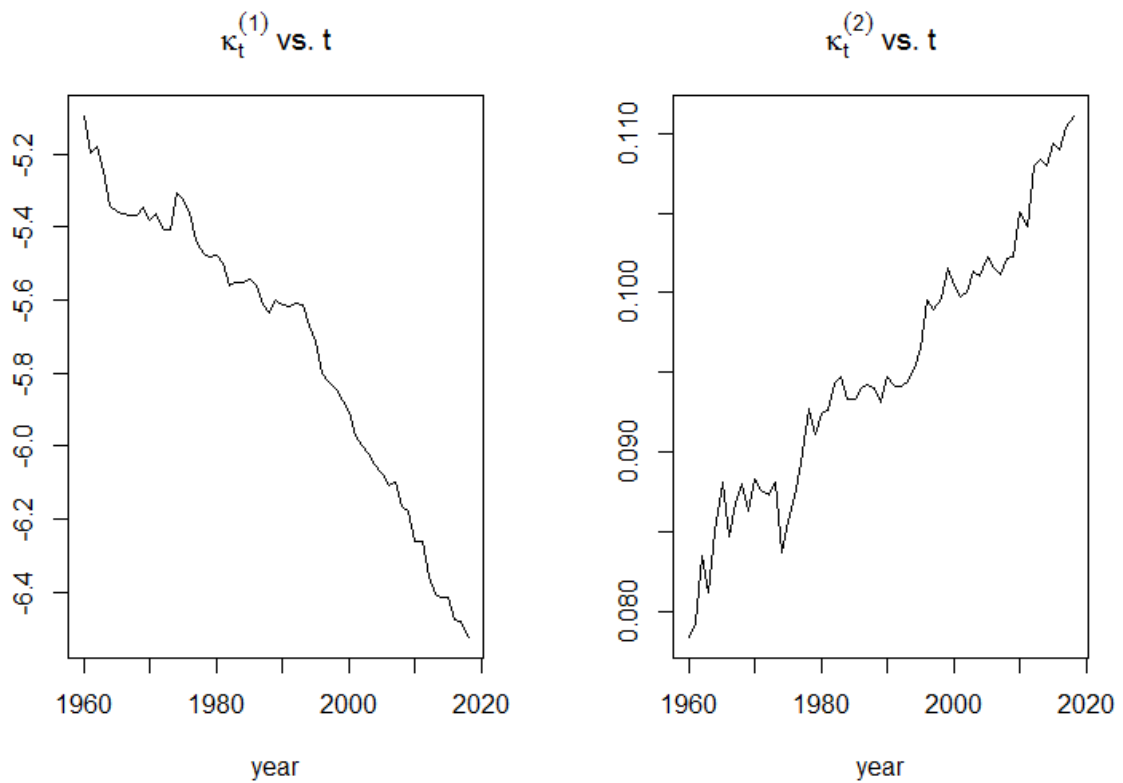
29. ábra: A binomiális Lee–Carter modell paramétereit 1960–2018. évi bázison (nők)



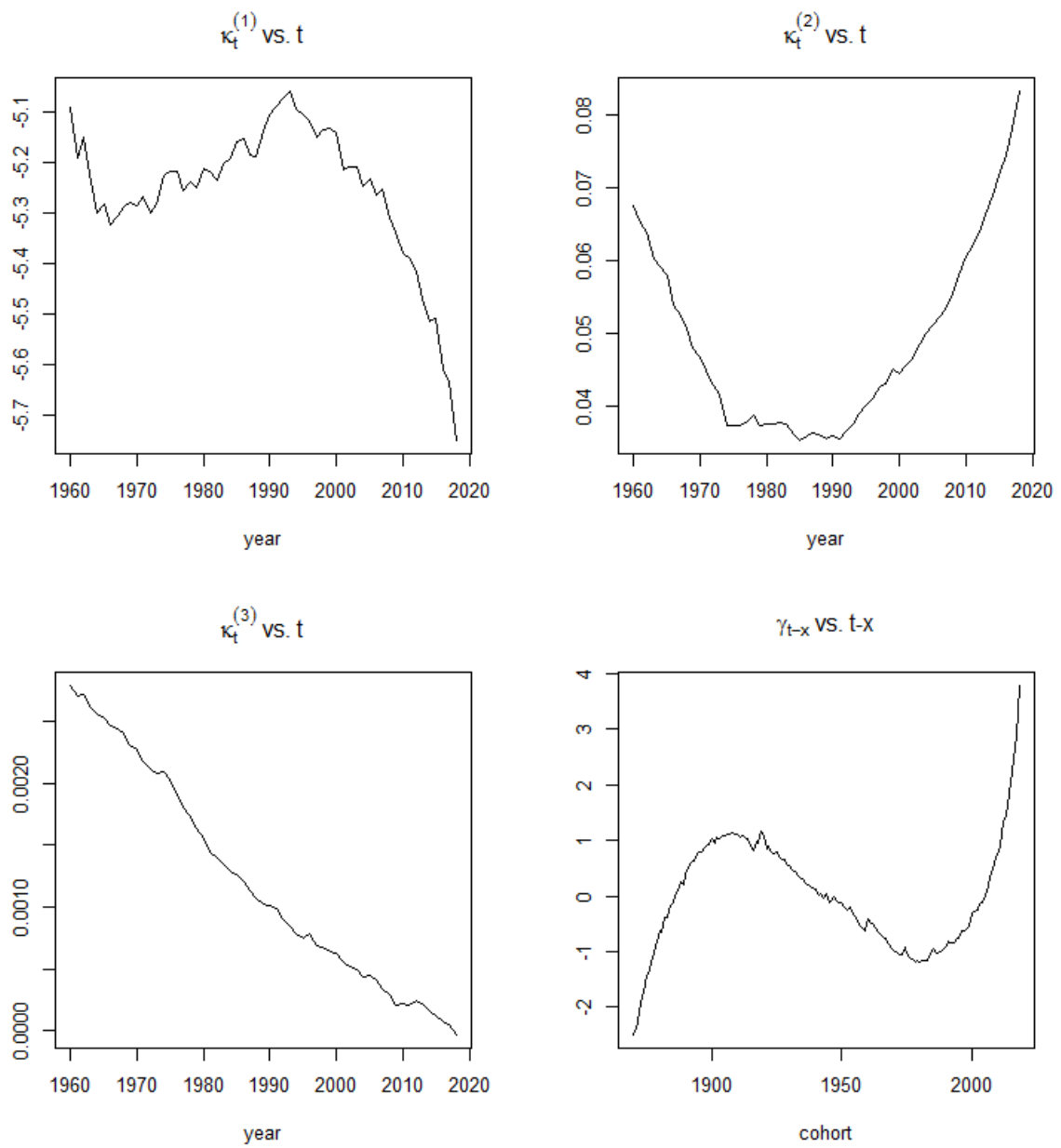
30. ábra: Az APC modell paramétereit 1960–2018. évi bázison (nők)



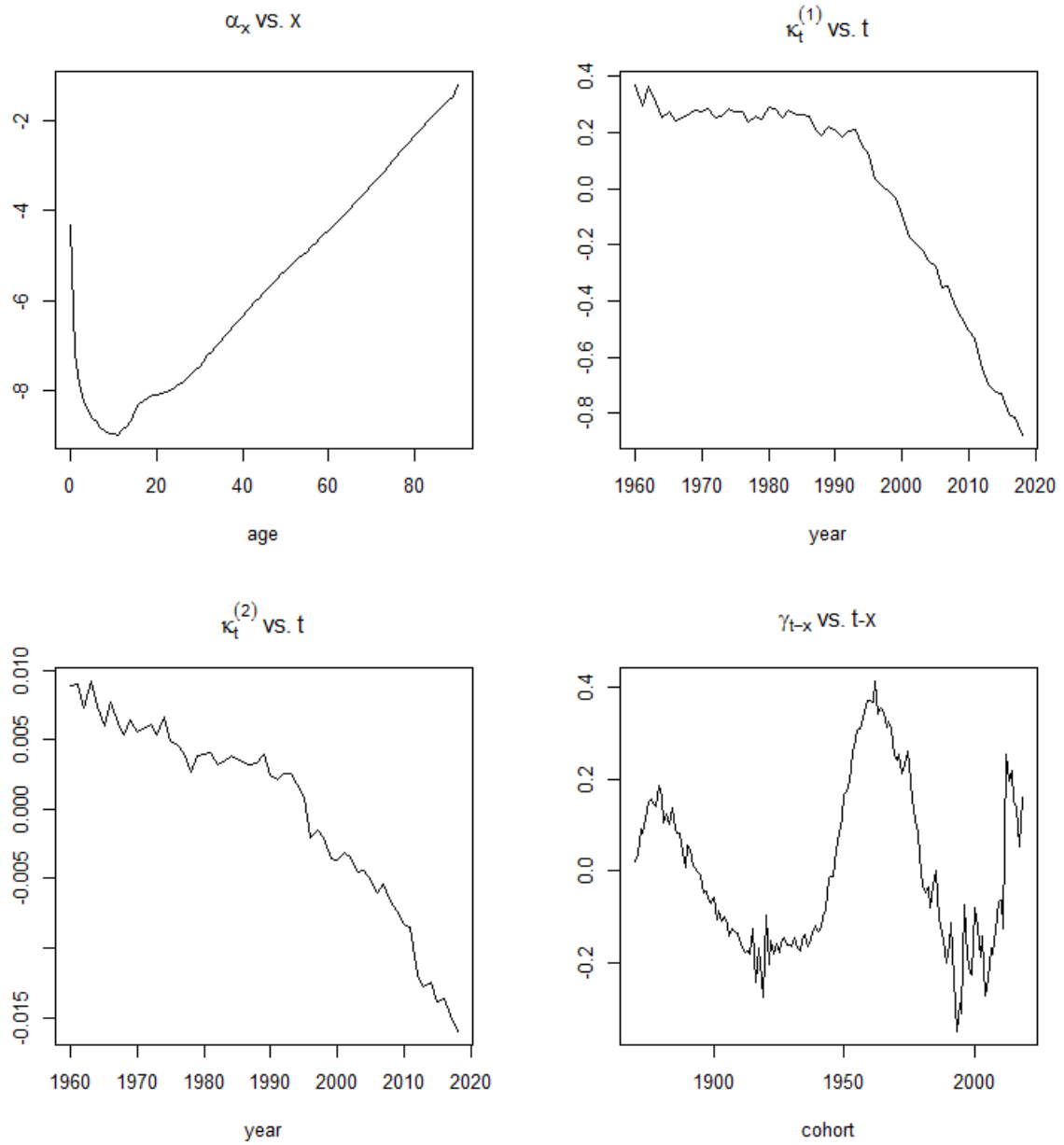
31. ábra: A CBD modell paramétereit 1960–2018. évi bázison (nők)



32. ábra: Az M7 modell paraméterei 1960–2018. évi bázison (nők)

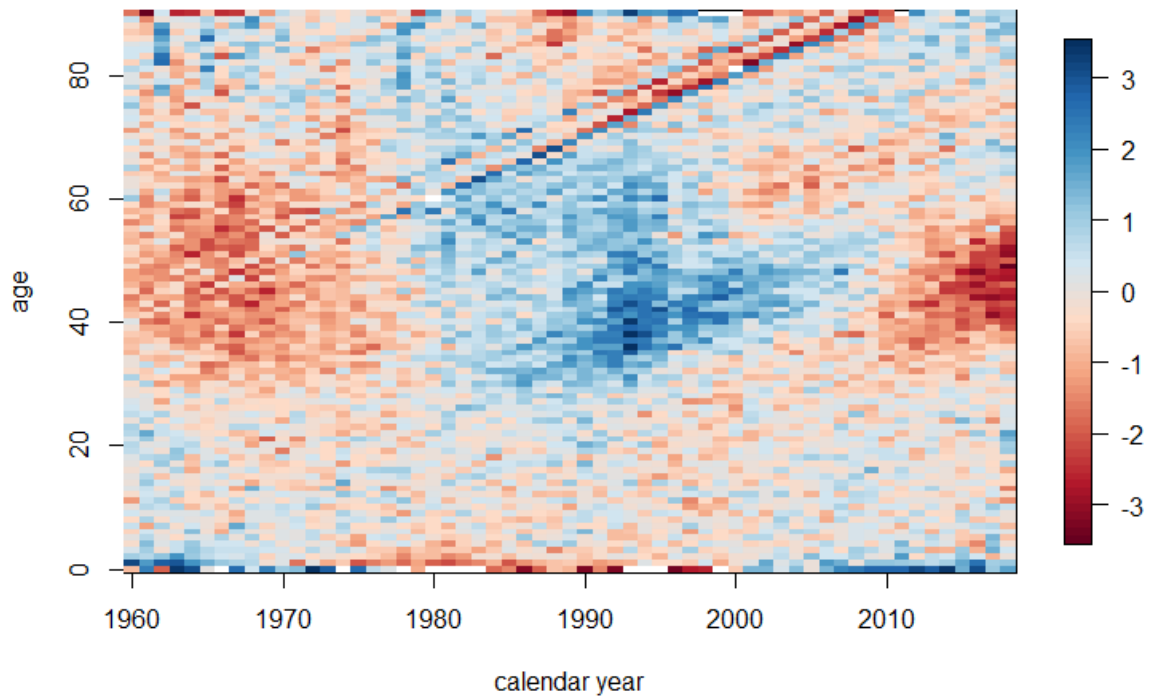


33. ábra: A Plat modell paraméterei 1960–2018. évi bázison (nők)

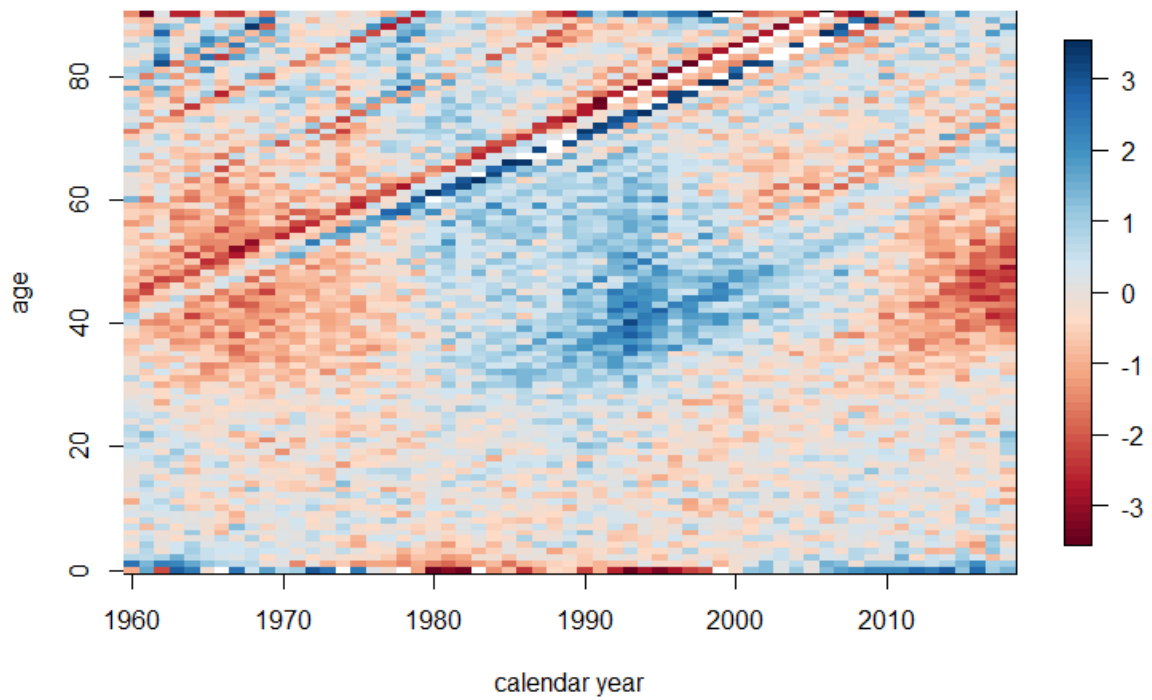




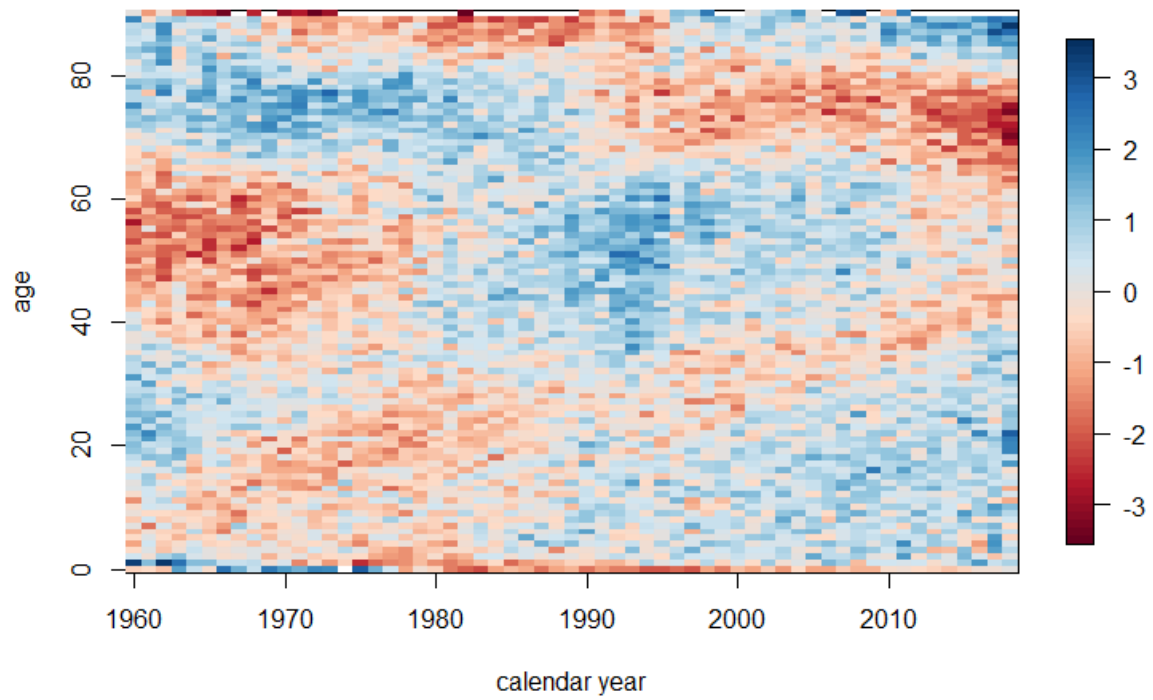
34. ábra: A Poisson Lee–Carter modell reziduálisainak hőterképe 1960–2018. évi bázison (nők)



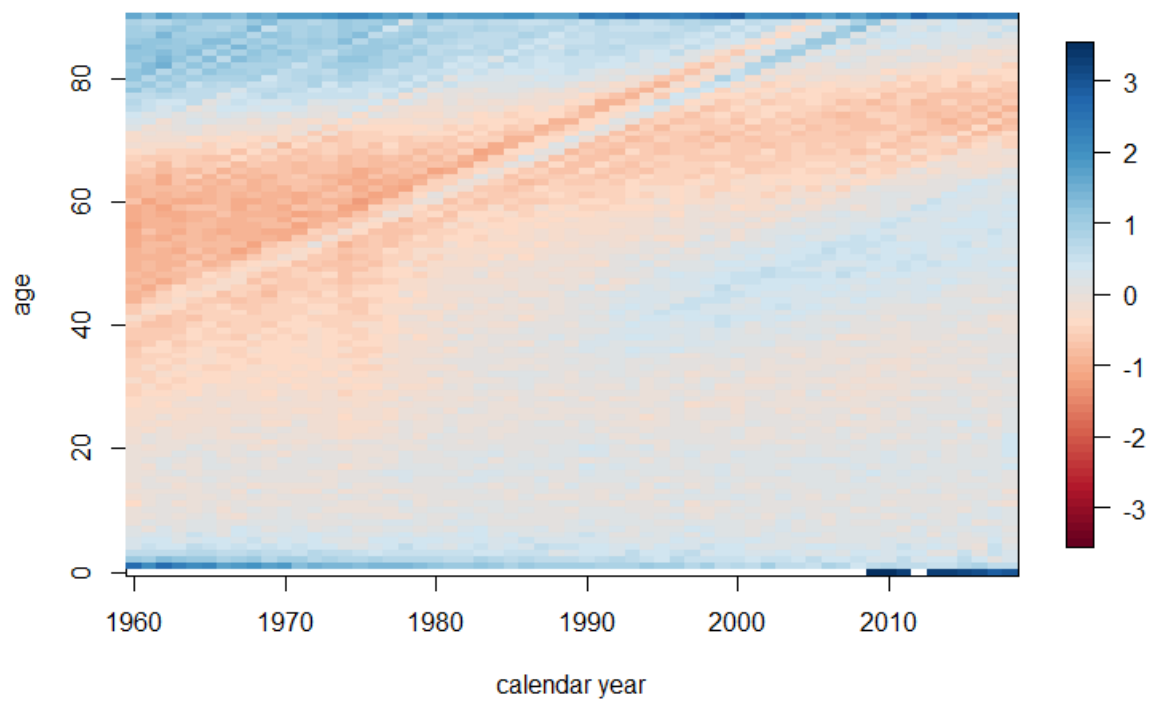
35. ábra: A binomiális Lee–Carter modell reziduálisainak hőterképe 1960–2018. évi bázison (nők)



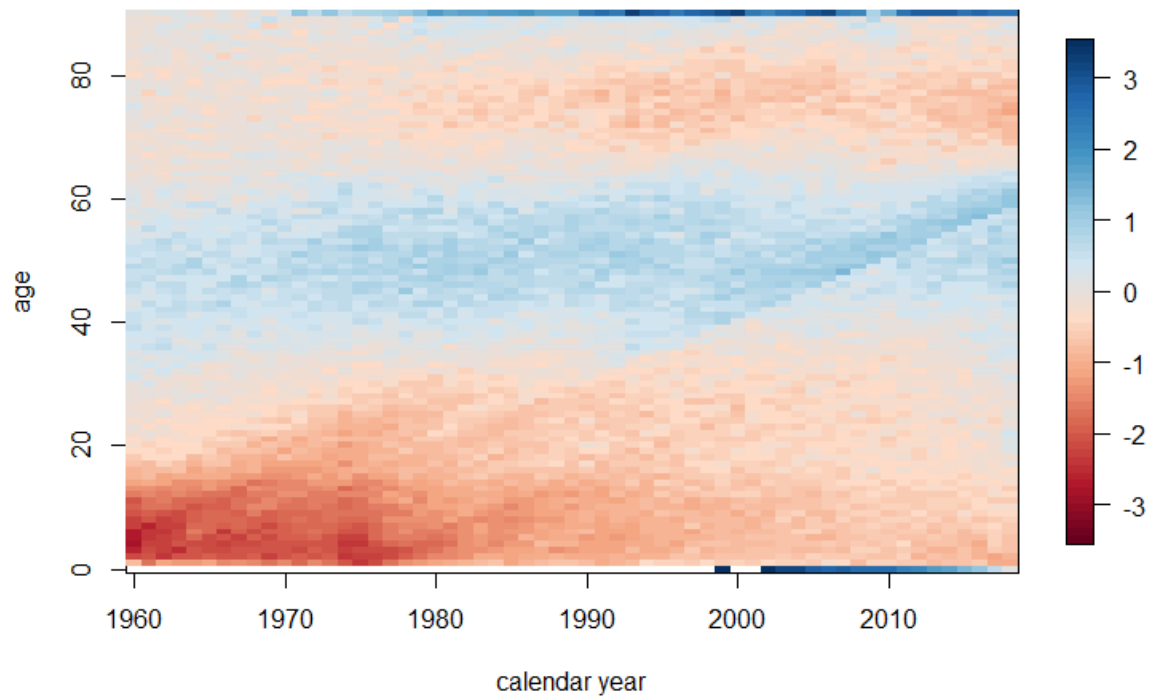
36. ábra: Az APC modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (nők)



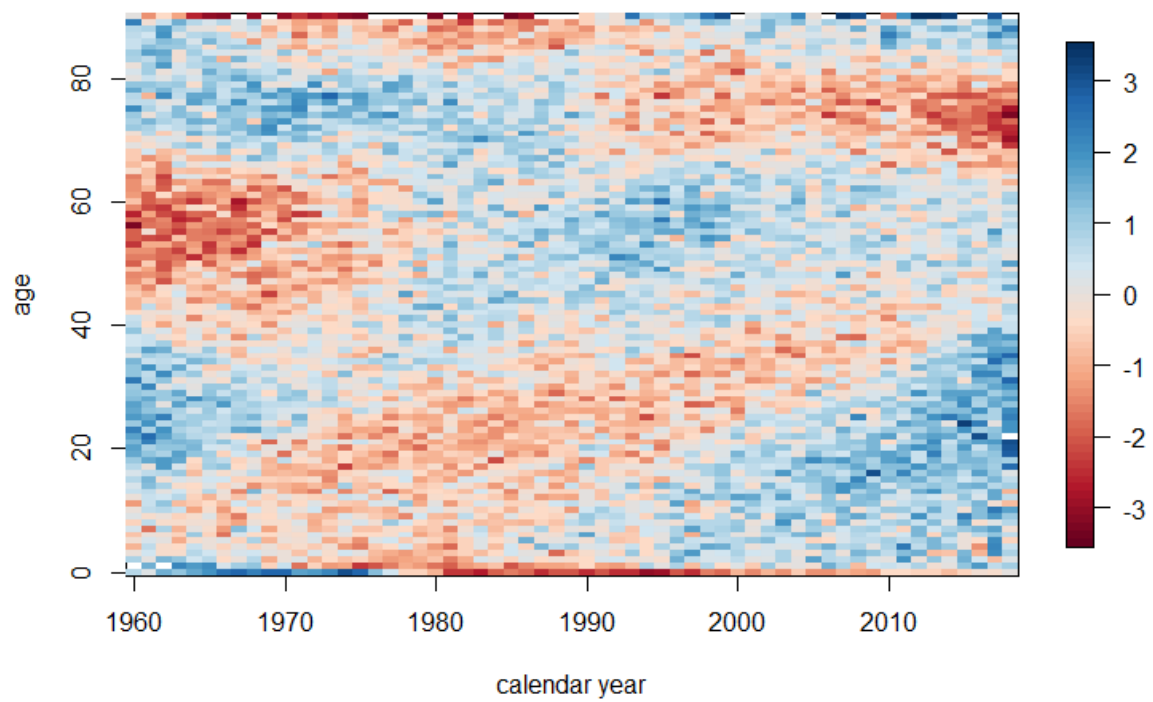
37. ábra: A CBD modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (nők)



38. ábra: Az M7 modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (nők)



39. ábra: A Plat modell reziduálisainak hő térképe 1960–2018. évi bázison (nők)



5. táblázat: A  $\kappa_t^{(i)}$  és  $\gamma_{t-x}$  paraméterek ARIMA(p,d,q) modelljei 1960–2018. évi bázison (nők)

	$\kappa_t^{(1)}$	$\kappa_t^{(2)}$	$\kappa_t^{(3)}$	$\gamma_{t-x}$
<b>Poisson Lee-Carter</b>	ARIMA(2,1,1) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(1)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	–	–	–
<b>binomiális Lee-Carter</b>	ARIMA(2,1,1) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(1)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	–	–	–
<b>CBD</b>	ARIMA(0,1,0) eltolással $\kappa_t^{(1)} = C + \kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t$	ARIMA(2,1,2) eltolással $\Delta\kappa_t^{(2)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(2)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(2)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$	–	–
<b>APC</b>	ARIMA(3,1,0) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(1)} + \Delta\kappa_{t-3}^{(1)} + \varepsilon_t$	–	–	ARIMA(2,1,1) $\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\gamma_{t-1-x} + \Delta\gamma_{t-2-x} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
<b>M7</b>	ARIMA(0,1,0) eltolással $\kappa_t^{(1)} = C + \kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t$	ARIMA(0,2,1) $\Delta\Delta\kappa_t^{(2)} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$	ARIMA(0,1,0) eltolással $\kappa_t^{(3)} = C + \kappa_{t-1}^{(3)} + \varepsilon_t$	ARIMA(1,2,1) $\Delta\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\Delta\gamma_{t-1-x} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
<b>PLAT</b>	ARIMA(1,1,2) eltolással $\Delta\kappa_t^{(1)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(1)} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$	ARIMA(3,1,0) eltolással $\Delta\kappa_t^{(2)} = C + \Delta\kappa_{t-1}^{(2)} + \Delta\kappa_{t-2}^{(2)} + \Delta\kappa_{t-3}^{(2)} + \varepsilon_t$	–	ARIMA(1,1,0) $\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\gamma_{t-1-x} + \varepsilon_t$

Megjegyzés:

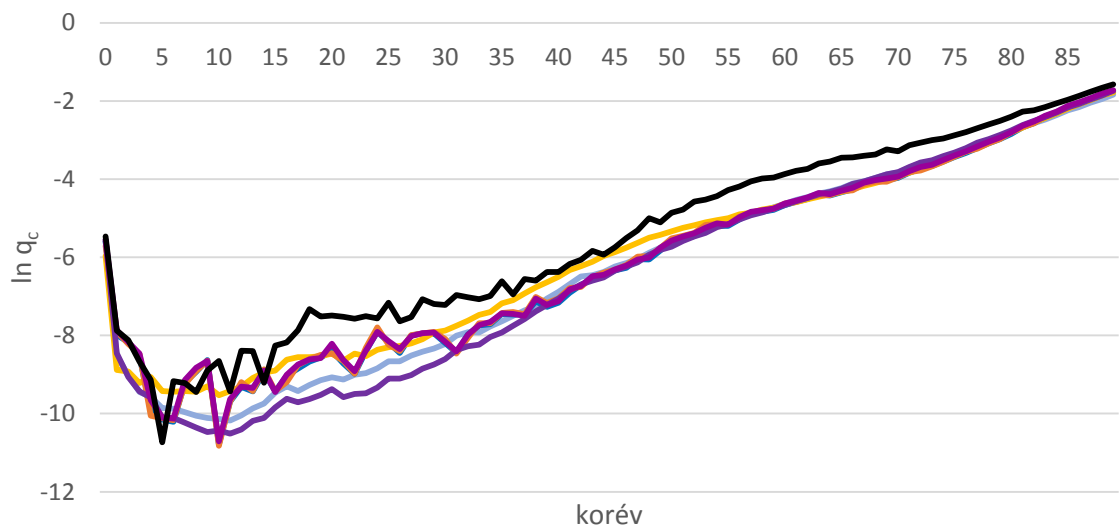
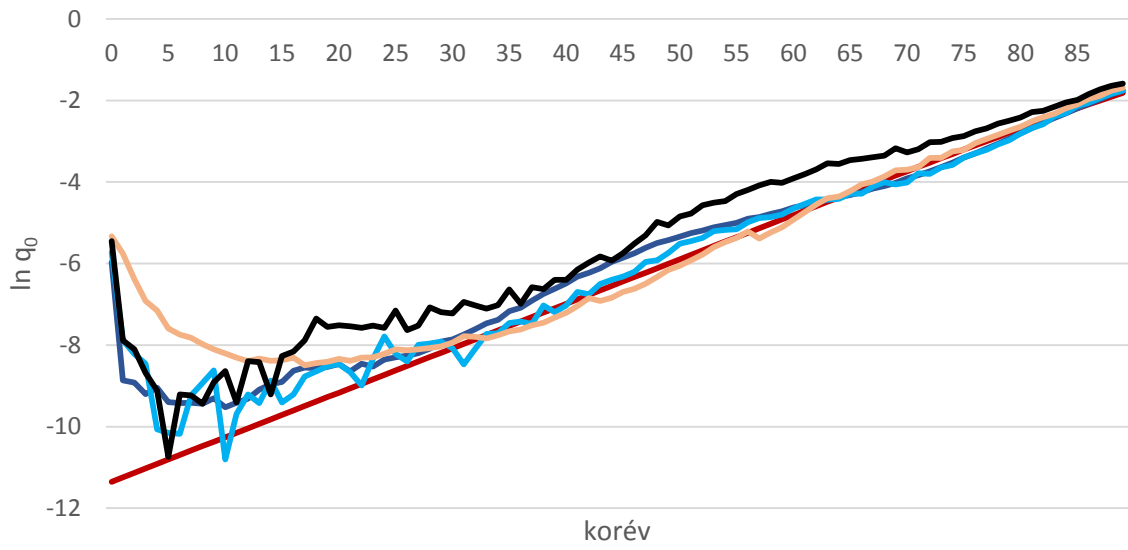
$$\Delta\kappa_t^{(i)} = \kappa_t^{(i)} - \kappa_{t-1}^{(i)}$$

$$\Delta\Delta\kappa_t^{(i)} = \Delta\kappa_t^{(i)} - \Delta\kappa_{t-1}^{(i)}$$

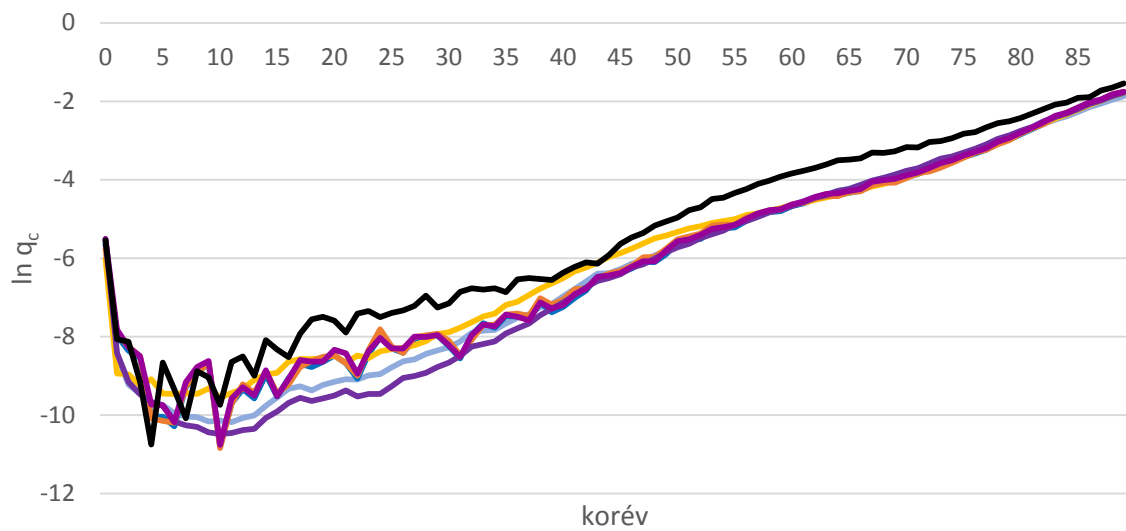
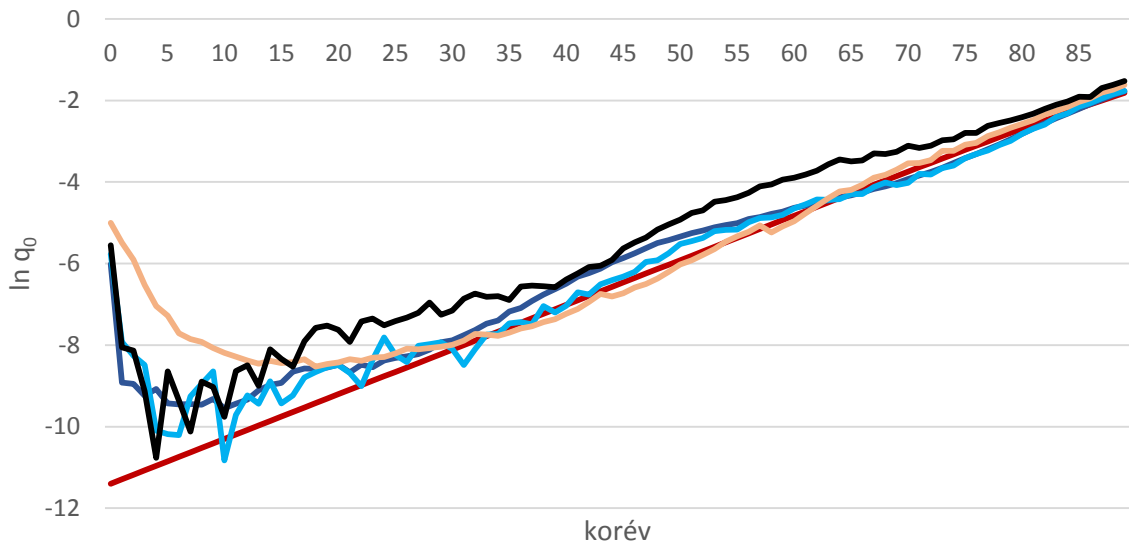
$$\Delta\gamma_{t-x} = \gamma_{t-x} - \gamma_{t-1-x}$$

$$\Delta\Delta\gamma_{t-x} = \Delta\gamma_{t-x} - \Delta\gamma_{t-1-x}$$

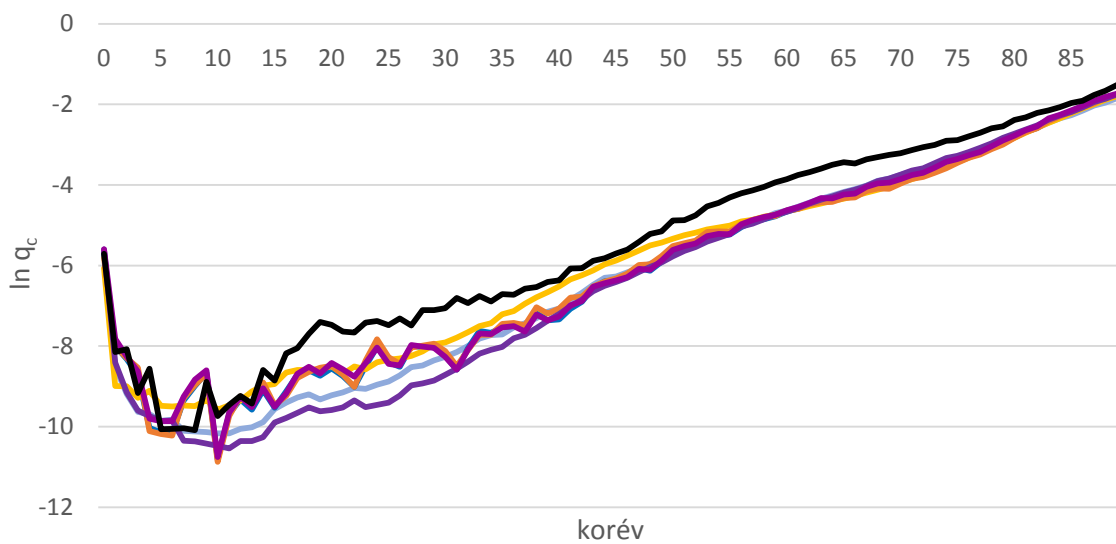
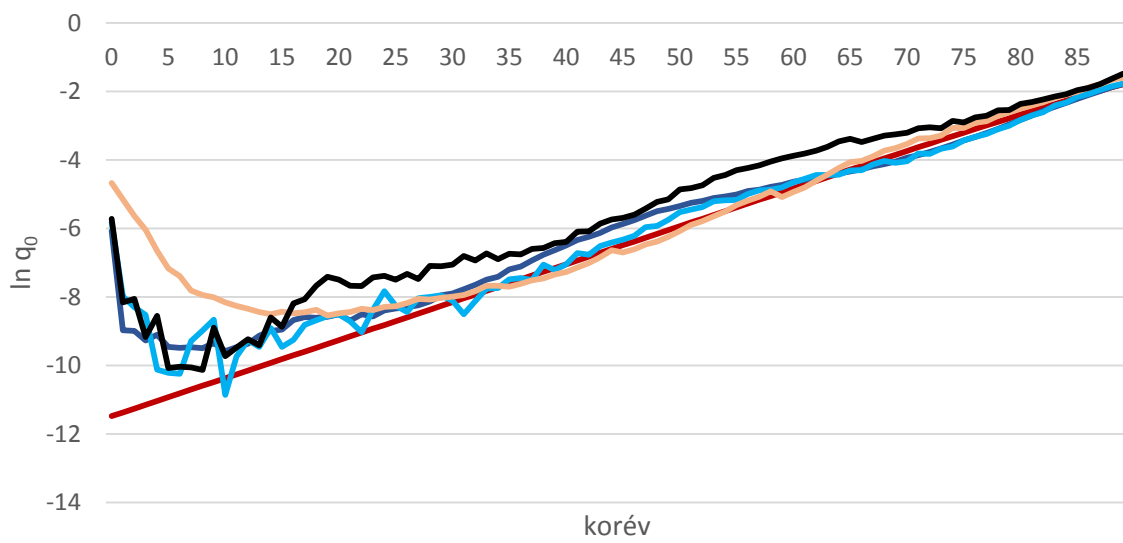
40-41. ábra: Az előrejelzett mortalitási ráták logaritmusai 2016-ban 1960–2015. évi bázison (nők)



42-43. ábra: Az előrejelzett mortalitási ráták logaritmusai 2017-ben 1960–2015. évi bázison (nők)

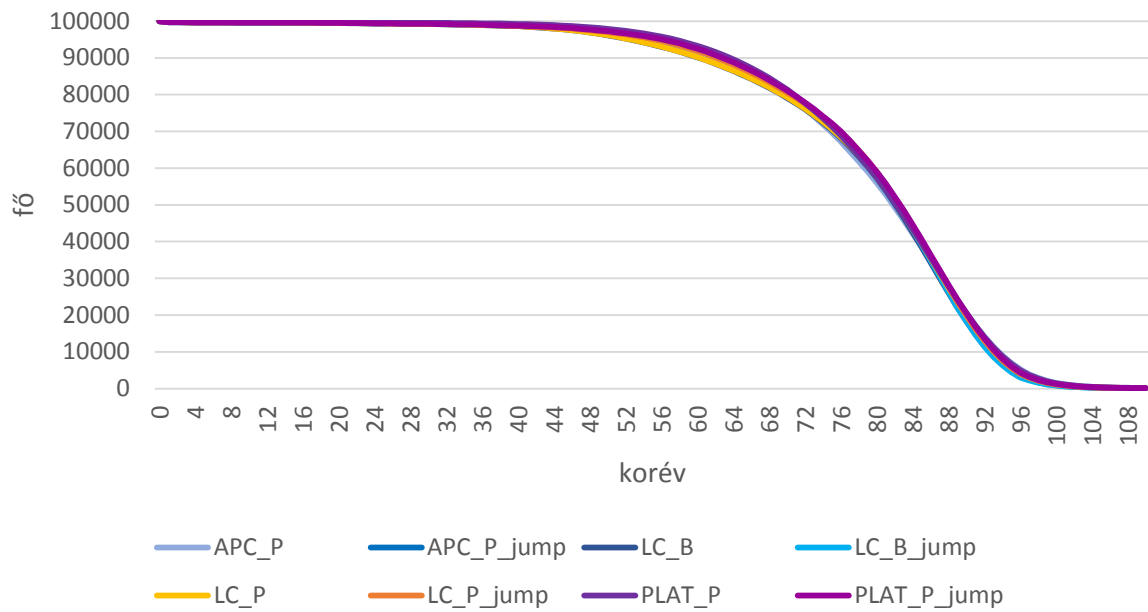


44-45. ábra: Az előrejelzett mortalitási ráták logaritmusai 2018-ban 1960–2015. évi bázison (nők)

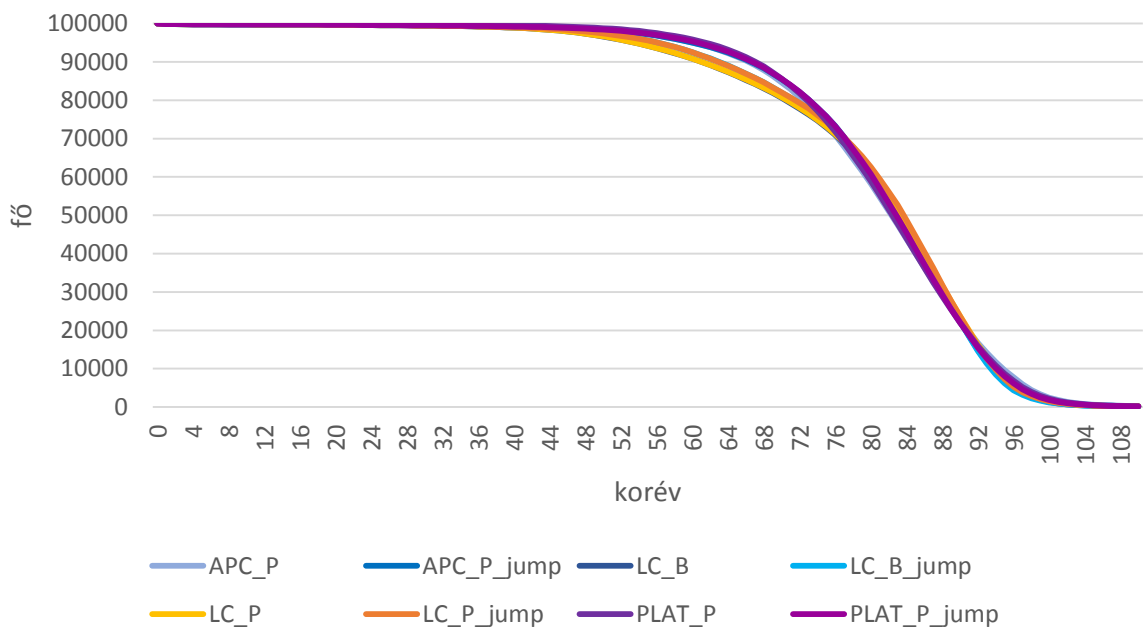


APC\_P      APC\_P\_jump      LC\_P      LC\_P\_jump  
 PLAT\_P      PLAT\_P\_jump      tényleges

46. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2020-ban 1960–2018. évi bázison (nők)

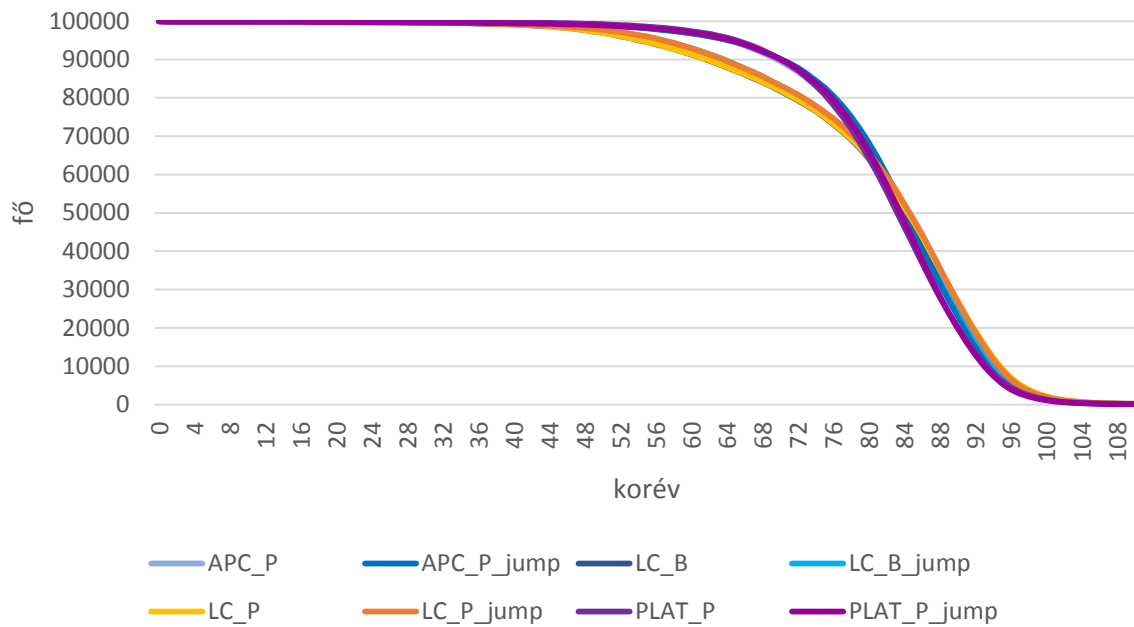


47. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2030-ban 1960–2018. évi bázison (nők)

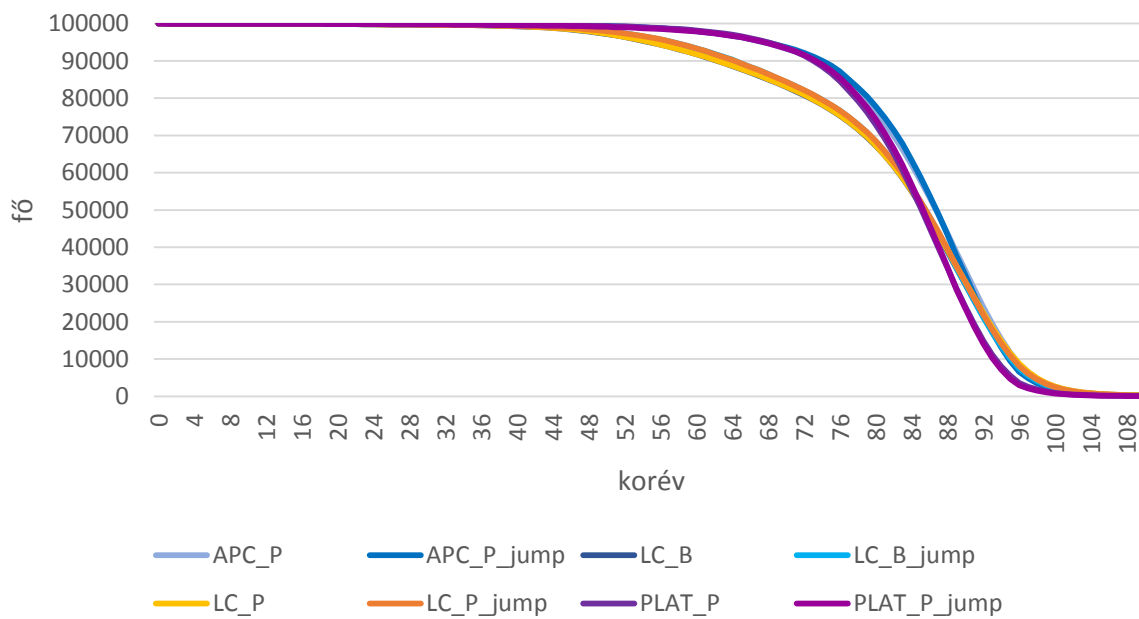




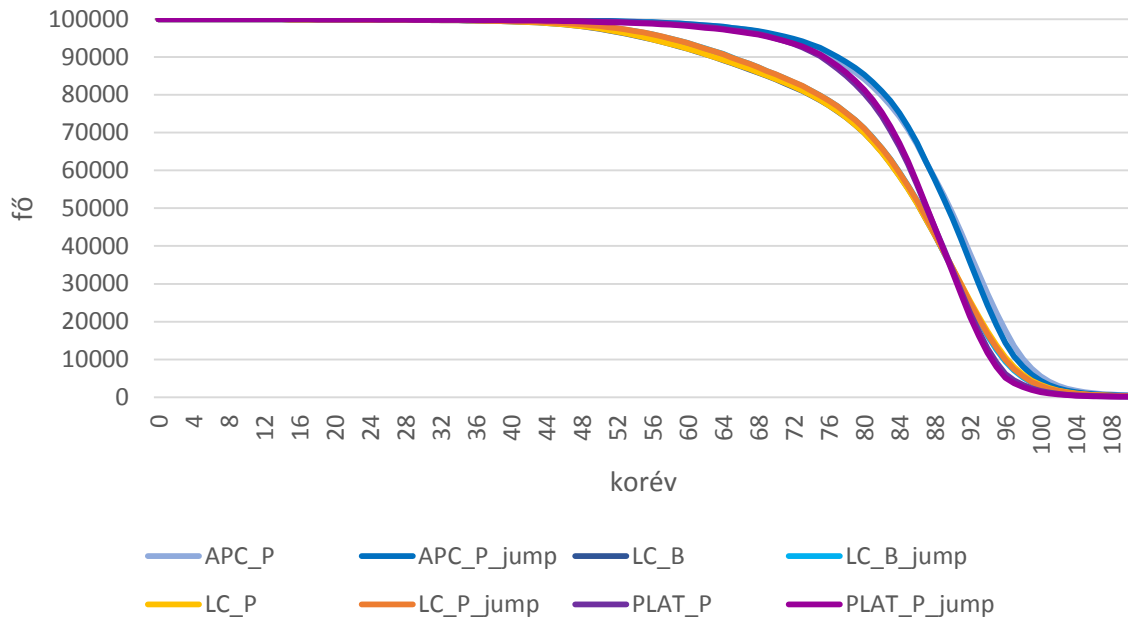
48. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2040-ben 1960–2018. évi bázison (nők)



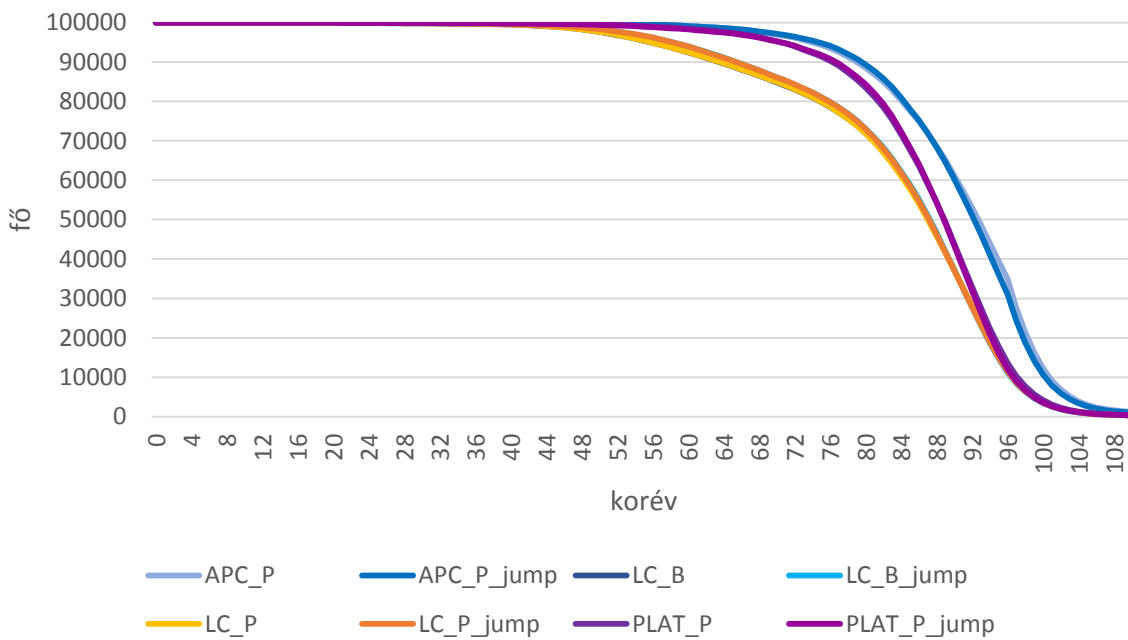
49. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2050-ben 1960–2018. évi bázison (nők)



50. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2060-ban 1960–2018. évi bázison (nők)



51. ábra: A halandósági tábla hipotetikus továbbélési rendje ( $l_x$ ) 2068-ban 1960–2018. évi bázison (nők)



## V. A TTA átmenetének elmélete és a TTA előrejelzése

Alkema et al. (2010) és Alkema et al. (2011) egy új módszertant dolgoztak ki a TTA valószínűségi előrejelzésére. Ezt támogatja az R program 'bayesTFR' nevű csomagja, amely fejlesztés Ševčíková et al. (2011) nevéhez fűződik. A TTA sztochasztikus előrejelzésének olyan módszeréről van szó, amely nem csak az alacsony fertilitással jellemezhető országok esetében használható, hanem valamennyi országra alkalmazható és az ENSZ idősorait felhasználva a világ országaira egyszerre futtatható. A kidolgozott módszertan egyik fontos kiindulópontja a TTA „evolúciója”, amely 3 nagy fázisra bontható. Ezek az alábbiak: 1. magas fertilitás az átmenet előtti időszakban, 2. a fertilitás átmenete: a TTA egy magas szintről indulva csökkenni kezd és akár a reprodukcióhoz szükséges szint alá is süllyedhet, 3. alacsony fertilitás az átmenetet követő időszakban, amely fázis magában foglalja a reprodukciós szint újbóli közelítését/elérését, esetleg a reprodukciós szint körüli oszcillálást. Az egyes országok a rájuk jellemző TTA érték alapján ugyanabban az időben más-más fázisban járhatnak, ennek megfelelően az átmenet időszaka nem ugyanakkor köszönt be a különböző országok esetében.

Az említett szerzők módszertana szerint a 2. fázis modellezése egy bayesi hierarchikus modell segítségével történik. A megfigyelt és előrejelzett időszakot 5 éves periódusokra bontva végezték el a becsléseket, az adatok időszora 1950–1955-től indul. Az 1. időszak végének és ezáltal a 2. időszak kezdetének meghatározása a következő szabály szerint történik: ha a TTA értéke 1950–55-ben 5,5 alatt volt, akkor ezt az időszakot a 2. fázishoz tartozónak tekintik. A többi ország esetében a fertilitás csökkenésének kezdő periódusa az az 5 éves időszak, amelynek lokális maximuma fél gyermekszámmal kevesebb, mint a TTA maximuma adott országban, a teljes megfigyelt időszakban. Ennek megfelelően a 2. fázis kezdete (jelöljük  $\tau$ -val)  $c$  országra az alábbiak szerint írható fel:

$$\tau_c = \begin{cases} \max\{t: (M_c - L_{c,t}) < 0,5\}, & \text{ha } L_{c,t} > 5,5; \\ < 1950-1955, & \text{különbben,} \end{cases}$$

ahol  $M_c$  a megfigyelt TTA maximuma  $c$  országban,  $L_{c,t}$  a lokális maximum  $t$  periódus során.

A 3. fázis akkor kezdődik (jelöljük  $\lambda$ -val), amikor a reprodukciós szint alatti, 2-nél kisebb TTA két 5 éves perióduson át emelkedést mutat, vagyis képlettel kifejezve:

$$\lambda_c = \min\{t: f_{c,t} > f_{c,t-1}, f_{c,t+1} > f_{c,t} \text{ és } f_{c,p} < 2, \text{ ahol } p = t - 1, t, t + 1\},$$

ahol  $f_{c,t}$  a TTA  $c$  országban,  $t$  időszakban (5 éves periódusban).

A 2. fázisnak (a fertilitás átmenetének) a modellezése egy eltolásos véletlen bolyongással történik:

$$f_{c,t+1} = f_{c,t} - d_{c,t} + \varepsilon_{c,t}, \quad \tau_c \leq t < \lambda_c - re,$$

ahol  $f_{c,t}$  a TTA  $c$  országban,  $t$  időszakban,  $d_{c,t}$  a csökkenést modellezi a fertilitás átmeneti időszakában,  $\varepsilon_{c,t}$  a hibatag,  $\tau_c$  a 2. fázis kezdetét jelöli,  $\lambda_c$  a 3. fázis kezdete.

$\varepsilon_{c,t}$ -ről azt feltételezik, hogy normális eloszlású:

$$\varepsilon_{c,t} \sim \begin{cases} N(m_t, s_t^2), & t = \tau_c - \text{re}; \\ N(0, \sigma(f_{c,t})^2), & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol  $m_t$ , illetve 0 az átlagot jelöli,  $s_t$  és  $\sigma(f_{c,t})$  pedig a szórást.

A későbbi periódusokra a szórás az alábbiak szerint adható meg:

$$\sigma(f_{c,t}) = c_{1975}(t) \left( \sigma_0 + (f_{c,t} - S) \left( -a I_{[S,\infty)}(f_{c,t}) + b I_{[0,S)}(f_{c,t}) \right) \right),$$

ahol  $\sigma_0$  a maximális szórás, amikor a TTA elér egy  $S$  szintet;  $a$  és  $b$  szorzótényezők a TTA változásának linearitását fejezik ki.

A  $c_{1975}(t)$  konstans tag beépítése a magasabb hibavarianciát modellezi 1975 előtt:

$$c_{1975}(t) = \begin{cases} c_{1975}, & t \in [1950-1955, 1970-1975]; \\ 1, & t \in [1975-1980, \infty). \end{cases}$$

A  $d_{c,t}$  megadása:

$$d_{c,t} = d(\boldsymbol{\theta}_c, \lambda_c, \tau_c, f_{c,t}) = \begin{cases} g(\boldsymbol{\theta}_c, f_{c,t}) & f_{c,t} > 1 - \text{re}; \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol  $g(\cdot, \cdot)$  egy paraméteres csökkenő függvény. Ez a függvény specifikálja egy 5 éves periódusban a csökkenést a TTA szintjének és a  $\boldsymbol{\theta}$  paraméter vektornak a függvényeként.  $\boldsymbol{\theta}$  vektor a  $c$  országban:

$$\boldsymbol{\theta}_c = (\Delta_{c1}, \Delta_{c2}, \Delta_{c3}, \Delta_{c4}, d_c).$$

A csökkenő függvény két logisztikus függvény összege, vagyis egy bi-logisztikus függvény.<sup>28</sup>

$$\frac{-d_c}{1 + \exp\left(\frac{-2 \ln(p_1)}{\Delta_{c1}} (f_{c,t} - \sum_i \Delta_{ci} + 0,5 \Delta_{c1})\right)} + \frac{d_c}{1 + \exp\left(\frac{-2 \ln(p_2)}{\Delta_{c3}} (f_{c,t} - \Delta_{c4} - 0,5 \Delta_{c3})\right)},$$

ahol  $d_c$  a csökkenés maximálisan lehetséges üteme,  $p_1 = p_2 = 9$  konstans. Továbbá  $\Delta_{ci}$  írja le a TTA terjedelmet, amin belül a fertilitás csökkenő üteme változik,  $U_c = \sum_{i=1}^4 \Delta_{ci}$  a fertilitás hanyatlásának kezdő szintje. A csökkenő függvény paraméterei minden ország esetében becsültek. Azokban az országokban, amelyekben  $\tau_c$  kezdő periódus a megfigyelt időszakba esik,  $U_c$  fix (a TTA-val egyenlő abban a periódusban), vagyis  $U_c = f_{c,\tau_c}$ . Azokban az országokban, ahol az átmenet a megfigyelt időszak előtt veszi kezdetét, a kezdő szint mint paraméter hozzáadódik a modellhez:

$$U_c \sim U(\min\{5, 5, \max_t f_{c,t}\}, 8, 8).$$

<sup>28</sup> Magyarország esetében lásd az 53. ábrát.

Egy bayesi hierarchikus modellt használnak a szerzők annak érdekében, hogy minden országra megbecsüljék a paramétereket. A bayesi hierarchikus modell az alábbiak szerint adható meg:

$$d_c^* = \log\left(\frac{d_c - 0,25}{2,5 - d_c}\right),$$

$$d_c^* \sim N(\chi, \psi^2),$$

$$\Delta_{c4}^* = \log\left(\frac{\Delta_{c4} - 1}{2,5 - \Delta_{c4}}\right),$$

$$\Delta_{c4}^* \sim N(\Delta_4, \delta_4^2),$$

$$p_{ci} = \frac{\Delta_{ci}}{U_c - \Delta_{c4}} \quad i = 1, 2, 3,$$

$$p_{ci} = \frac{\exp(\gamma_{ci})}{\sum_{j=1}^3 \exp(\gamma_{cj})}$$

$$\text{és } \gamma_{ci} \sim N(\alpha_i, \delta_i^2)$$

világ szintű átlaggal és variancia paraméterekkel  $\{\chi, \psi^2, \Delta_4, \delta_4, \alpha, \delta\}$ . Az országspecifikus paraméterek a 2. fázis modelljében:  $\{\gamma_{ci}, U_c, d_c, \Delta_{c4}\}, i = 1, 2, 3$ . A hiperparaméterek:  $\{\chi, \psi^2, \Delta_4, \alpha_i, \delta_i, \delta_4\}, i = 1, \dots, 3$  és  $\{a, b, S, \sigma_0, c_{1975}, m_\tau, s_\tau\}$ . A  $d_c$  paraméter maximuma 0,25 és 2,5 között korlátozva van. A 2,5-es érték a múltban megfigyelhető értékeken alapszik. A  $d_c^*$  jelölés arra utal, hogy  $d_c$  logaritmusos transzformáltjáról beszélünk. A  $\Delta_{c4}$  paraméter értéke 1 és 2,5 közötti. A  $\Delta_{c4}^*$  a transzformált  $\Delta_{c4}$  paramétert jelöli.

A bayesi hierarchikus modell azt feltételezi a világ országaira vonatkozóan, hogy minden ismeretlen paraméter egy valószínűségi eloszlásból származik. Az ún. Markov lánc Monte Carlo (angolul 'Markov Chain Monte Carlo', röviden MCMC) algoritmus arra szolgál, hogy legyen mintánk az *a posteriori* eloszlást tekintve, a fertilitás átmeneti modelljének minden paraméterére vonatkozóan. Az algoritmus különböző mintavételi lépéseknek a kombinációja.

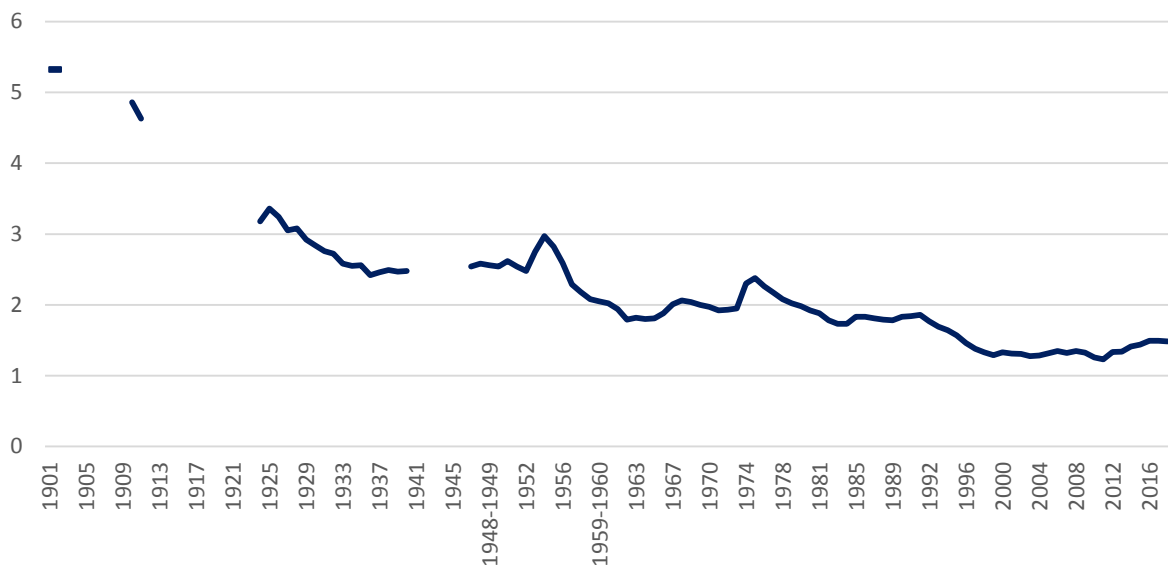
A 2. fázis, vagyis az átmenet utáni időszak modelljét tekintve a TTA hosszú távú előrejelzésével kapcsolatos feltevés az, hogy értéke a reprodukciós szint felé konvergál és akörül fluktuál (ez az érték 2,1 az alacsony mortalitási szintű országokban). Ezt az elképzelést Lee–Tuljapurkar (1994) nyomán egy AR(1) folyamattal modellezik, amelynek átlaga fix:  $\mu = 2,1$ . Az AR(1) modell:

$$f_{c,t} = f_{c,t-1} + (1 - \rho)(\mu - f_{c,t-1}) + e_{c,t}, \quad t \geq \lambda_c - re,$$

ahol  $\rho$  az autoregresszív paraméter,  $|\rho| < 1$ . E paraméter becslése 'maximum likelihood' becsléssel történik. A hibatagról feltételezik, hogy normális eloszlású:  $e_{c,t} \sim N(0, s^2)$ . Ebben a modellben a 2,1 felé tartó növekedés vagy csökkenés nagyobb, ha a jelenlegi TTA messze esik a 2,1-es értéktől, továbbá  $\rho$ -tól is függ. Például ha a TTA értéke 1,5, akkor a várható következő TTA érték:  $2,1 - 0,6 \rho$ . Minél kisebb  $\rho$ , annál gyorsabban fog a TTA növekedni és a reprodukciós szint felé tartani.

Magyarország esetében a TTA történelmi időszora alapján azt feltételezhetjük, hogy a 3. fázis küszöbén áll (lásd az 52. ábrát). Az ENSZ öt éves periódusokra bontott időszora alapján olyan előrejelzés készíthető az R program 'bayesTFR' nevű csomagjával, amely 5 évenként becsüli előre a TTA értéket. Tehát az előrejelzett értékek 5 évente változnak. Az utolsó megfigyelt év 2018 volt, ennek megfelelően 5 éves periódusokban gondolkodva 2068-ig számítottuk előre a TTA értékeket. Alkema et al. (2011) módszertana alapján a TTA előrejelzett értékei Magyarországon hosszú távon emelkedést mutatnak. A 2018. évi 1,5 alatti szintről indulva a TTA értéke 2068-ra elérheti, illetve kismértékben meghaladhatja az 1,7-es szintet (lásd az 54. ábrát).

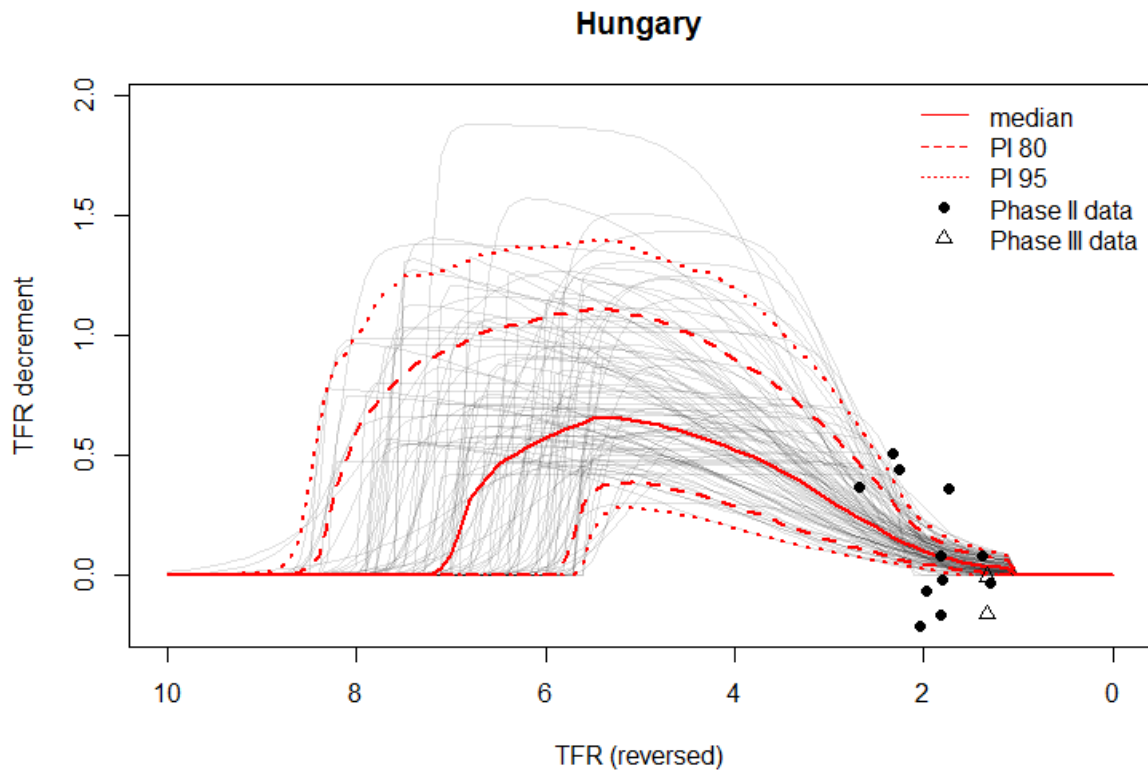
52. ábra: A teljes termékenységi arányszám történelmi időszora



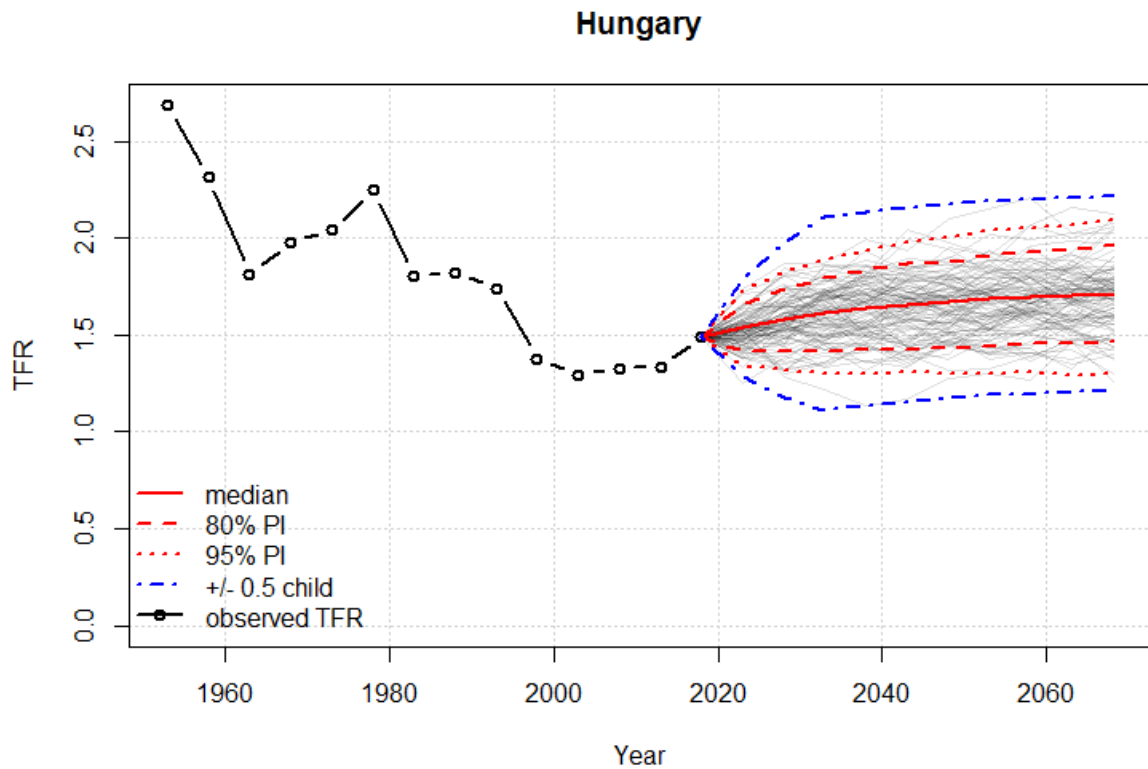
Adatok forrása: Klinger (1992)

Megjegyzés: 1901 és 1911 között Magyarország és Fiume, 1921-től Magyarország mai területe

53. ábra: A bi-logisztikus függvény *a posteriori* eloszlása



54. ábra: A teljes termékenységi arányszám előrejelzése



## VI. A szüléskori átlagos életkor kiszámítása és előrejelzése

A TTA előrejelzése után a következő lépés annak meghatározása volt, hogy a nők szüléskori átlagos életkora hogyan alakul hosszú távon. Az elmúlt évtizedekben a gyermekvállalás fokozatosan kitolódott, a szüléskori átlagos életkor folyamatosan növekedett. Ez az emelkedés napjainkban egyre lassabb ütemű, amely nyilvánvalóan biológiai okokkal is magyarázható.

A 'Human Fertility Database'<sup>29</sup> 1950-től kezdődően éves bontásban tartalmazza a születések számát az anya életkora szerint. A születések számának és az adott korcsoportba tartozó nők számának ismeretében kiszámítható a korszpecifikus fertilitási ráta. Ennek meghatározásához a nők évközepi népességszámát használtuk fel és az 1960–2016 közötti időszakot vettük figyelembe. A korszpecifikus fertilitási ráta:

$$F_{xt} = \frac{B_{xt}}{F E_{xt}^c},$$

ahol  $B_{xt}$  a születések száma az  $x$  éves nők körében, adott évben,  $F E_{xt}^c$  pedig az adott korcsoportba tartozó nők évközepi száma  $t$  év során. A korszpecifikus fertilitási ráták kiszámításakor a 15–49 éves nők csoportját emeltük ki – az ennél fiatalabbakat és idősebbeket a későbbiekben figyelmen kívül hagytuk. Ahhoz, hogy adott évre a szüléskori átlagos életkort meghatározzuk, a korszpecifikus fertilitási ráta értékét mindegyik évre egyre normáltuk.<sup>30</sup> Ha ezeket a korévenkénti normalizált értékeket beszorozzuk az életkorral és összegezzük őket mindegyik évre, akkor megkapjuk a szüléskori átlagos életkort.

$$\sum_{x=15}^{49} \left( \frac{F_{xt}}{\sum_{x=15}^{49} F_{xt}} \cdot x \right) = MAC_t$$

A megfigyelt időszak éveire kiszámolt szüléskori átlagos életkort időszorelemzési módszerrel jeleztük előre a későbbi évekre. Ezt az adatsort tekintve egy ARIMA(0,2,2) modell illeszkedett a legjobban:

$$\Delta \Delta MAC_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2},$$

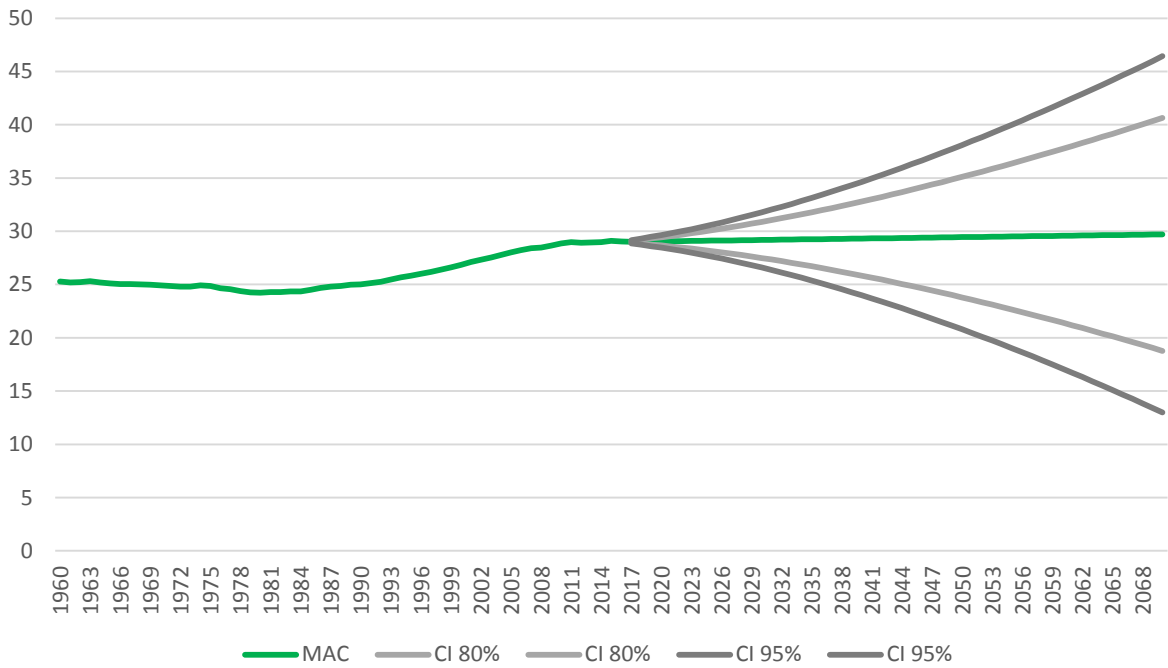
ahol  $MAC_t$  az anya szüléskori átlagos életkora  $t$  évben, továbbá  $\Delta \Delta MAC_t = \Delta MAC_t - \Delta MAC_{t-1}$  és  $\Delta MAC_t = MAC_t - MAC_{t-1}$ . E modellt alkalmazva a nők szüléskori várható átlagos életkora az elkövetkező évtizedekben tovább emelkedik: a 2016. évi 29,05 éves szintről indulva 2068-ra 29,68 évre nőhet (lásd az 55-56. ábrákat).

<sup>29</sup> <https://www.humanfertility.org/>

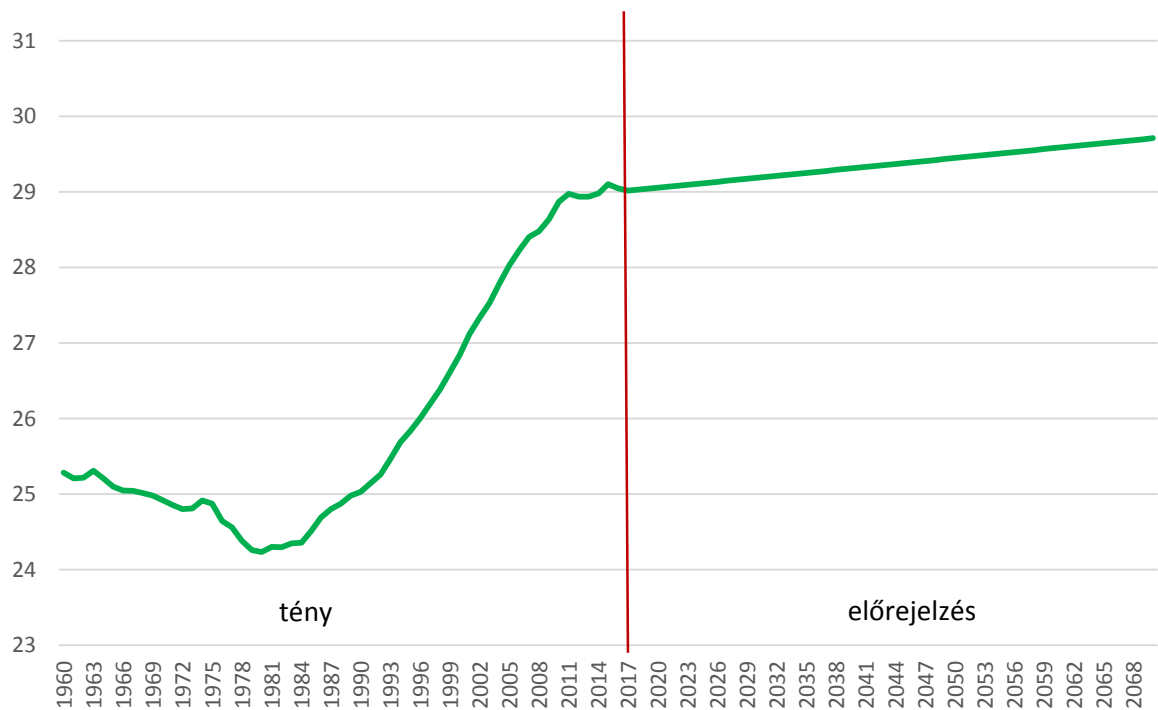
<sup>30</sup> A szüléskori átlagos életkor kiszámításában segítségünkre volt Li–Gerland (2009) írása.



55. ábra: A szüléskori átlagos életkor változása és előrejelzett értékei a konfidencia intervallumok alsó és felső határértékeivel



56. ábra: A szüléskori átlagos életkor változása és előrejelzett értékei konfidencia intervallum nélkül



## VII. A korszpecifikus fertilitási ráta számítása és a születések számának alakulása

Az előzőekben a bayesi hierarchikus modell segítségével sikerült előrejelezni a TTA várható értékeit 5 éves időperiódusokra, továbbá ARIMA(p,d,q) modellt alkalmazva kiszámoltuk az anyák szüléskori átlagos életkorának várható alakulását. Ha már előrejeleztük a TTA és MAC értékeket, ki tudjuk számolni a korszpecifikus fertilitási rátákat az előrejelzési időszakra. Ediev (2013) alapján ehhez először a tény adatokra illesztünk kell az alábbi regressziós egyenest:

$$F_{xt} \approx a_x + b_x TFR_t + c_x MAC_t,$$

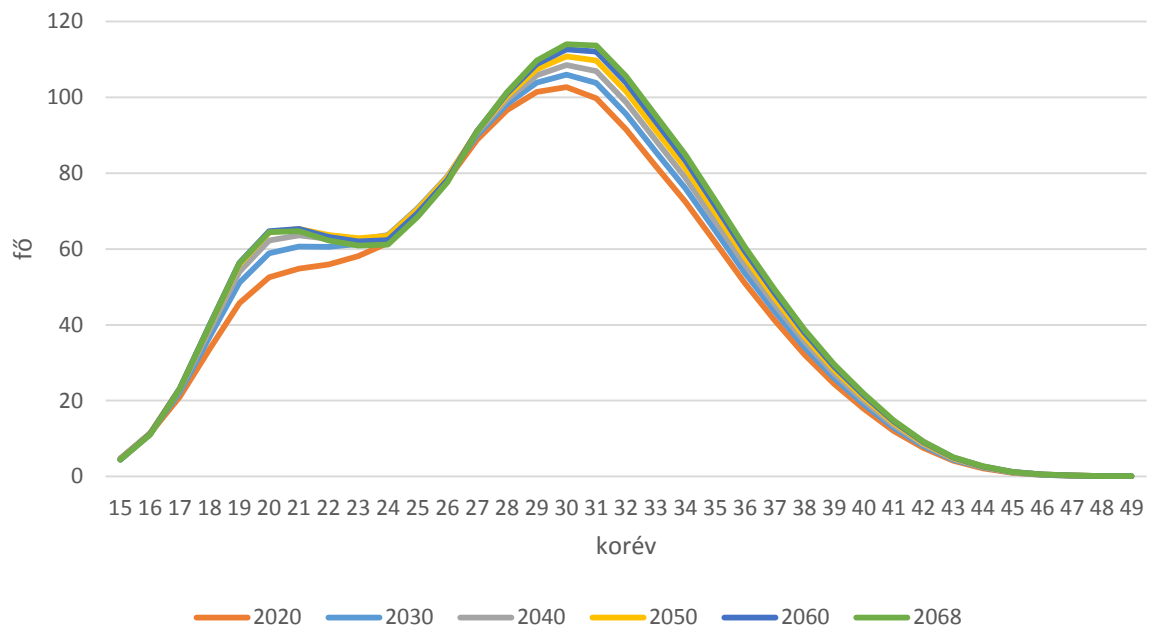
ahol  $F_x$  a korszpecifikus fertilitási ráta,  $TFR$  a teljes termékenységi arányszám,  $MAC$  a szüléskori átlagos életkor,  $t$  pedig az idő index. A felírt OLS (angolul 'ordinary least squares') regresszió a megfigyelési időszak már ismert adatai (vagyis  $F_{xt}$ ,  $TFR_t$  és  $MAC_t$ ) alapján egyszerűen számolható. A regressziós egyenes tengelymetszetét  $a_x$  jelöli. A  $b_x$  azt fejezi ki, hogy a teljes termékenységi arányszám változásával hogyan módosul a korszpecifikus fertilitási ráta értéke, miközben a szüléskori átlagos életkort kontroll alatt tartjuk. A  $c_x$  meredekség pedig a szüléskori átlagos életkor fertilitási rátára gyakorolt parciális hatását mutatja meg. A paraméterek értéke pozitív vagy negatív előjelű egyaránt lehet – ez kohorsztól függ.

A megfigyelt időszak adatai alapján becsült paraméterek ( $a_x$ ,  $b_x$ ,  $c_x$ ), valamint a korábban előrejelzett teljes termékenységi arányszám és szüléskori átlagos életkor értékek felhasználásával – behelyettesítve őket a fenti egyenletbe – kiszámíthatóak a korszpecifikus fertilitási ráták egészen 2068-ig. A korszpecifikus fertilitási ráta és az adott korcsoportba tartozó női népesség száma alapján meg lehet határozni a születések számát (lásd az 57. ábrát).<sup>31</sup> Ehhez a népesség előreszámítására is szükség van, amelyet – felhasználva a fertilitásra és mortalitásra vonatkozó eddigi ismereteket, előrejelzéseket – kohorsz–komponens módszerrel határoztunk meg. A születések számának és a halálozás korévenkénti alakulásának előrejelzését alapul véve évről évre haladva előreszámítható a népesség. A későbbi évekre történő becslést tekintve a fiú és lány születések számának meghatározásakor az 1,06-os értéket vettük alapul, vagyis úgy számoltunk, hogy 100 lány születése esetén 106 fiú is születik.

---

<sup>31</sup> Az utóbbi években megfigyelhető kétcsúcsú eloszlás a jövőben egyre markánsabbá válhat.

57. ábra: Éveszületés az anya életkora szerint 2020 és 2068 között, ezer nőre



## VIII. A népességszám várható alakulása

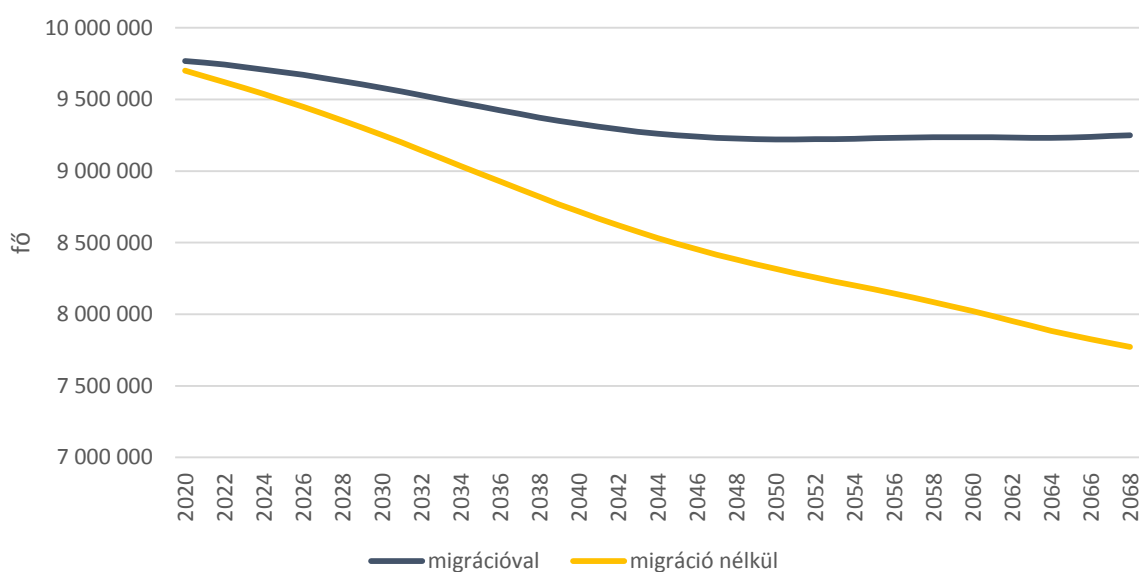
Ahogy az előzőekben említettük, a fertilitásra és mortalitásra vonatkozó előrejelzéseket használtuk fel a népesség előreszámításához. Mindemellett szükség volt a nemzetközi migráció nettó egyenlegére is koréves bontásban. A nettó egyenlegre vonatkozó, alapváltozat szerinti előrejelzést az Eurostat oldaláról<sup>32</sup> töltöttük le.

Az Eurostat több tízezres pozitív egyenleget valószínűsít évente, ami a migrációt illeti. A 2019 és 2068 közötti időszakban az átlagos nettó egyenleg 13,0 ezer fő a férfiaknál és közel 11,0 ezer fő a nőknél. Részben ennek köszönhetően, továbbá a javuló halandóság és a kismértékben növekvő TTA eredményeként azt láthatjuk az 58. számú ábrán, hogy a népesség csökkenése 2040-től egyre lassabb ütemű lesz és 2045–2068 között 9,22 és 9,25 millió fő közötti szinten fog stagnálni. A nemzetközi migrációt figyelmen kívül hagyva a népességfogyás drasztikusabb méreteket öltene (lásd az 58. ábrát). Eszerint 2068-ban 7,8 millió főnél is kevesebben élénk Magyarországon.

A migrációt figyelembe vevő forgatókönyv szerinti korszerkezetet az 59-64. számú ábrák, illetve a 6. táblázat mutatják be. A korfákról jól látható, hogy valószínűsíthetően 2068-ban is egy öregedő korösszetételű népességről beszélhetünk majd.

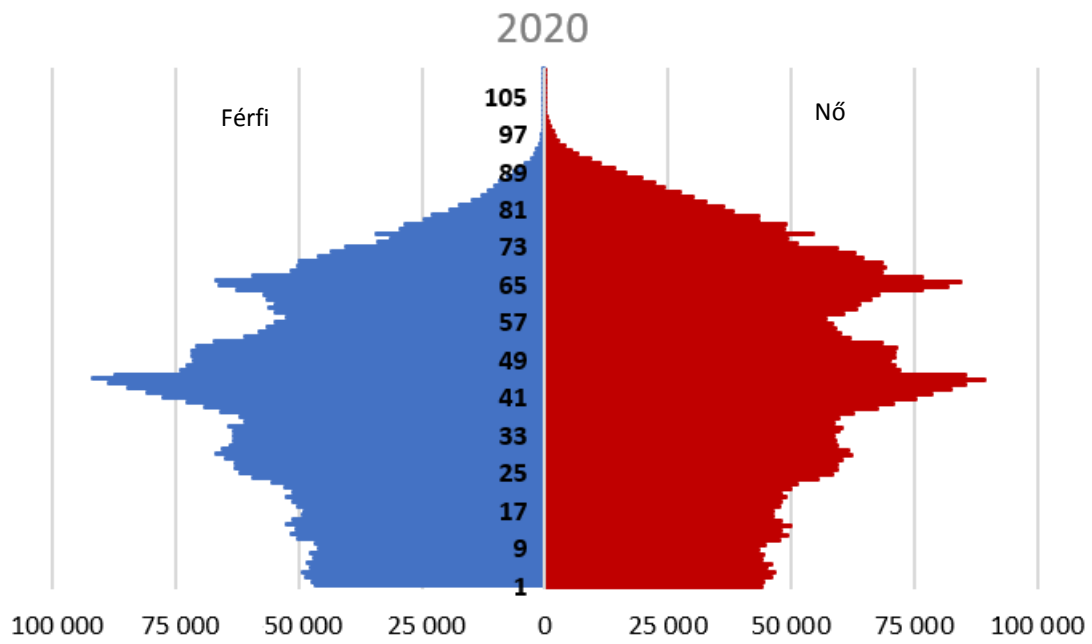
Hazánkban az egy nőre jutó TTA értéke 40 éve 2-nél kevesebb. Ennek a több évtizedes időszaknak a negatív hatása jól tetten érhető a szülőképes korú, 15–49 éves nők létszámának csökkenésében, amely – pozitív vándorlási egyenleget feltételezve – a javuló halandóság és a 2-höz közeledő TTA ellenére is várhatóan tovább fogy a következő évtizedekben. Előrejelzésünk szerint a 2020. évi 2,2 millió főről 2068-ra 1,7 millió főre apadhat a szülőképes korú nők kohorsza (lásd a 65. ábrát). Ennek megfelelően a születések száma is évről évre egyre kevesebb lesz: 50 éves távlatban akár több mint 10 ezer fővel is csökkenhet az éves születésszám, így az előrejelzési időhorizont végén már 80 ezer alá süllyedhet (lásd a 7. táblázatot). Összességében megállapíthatjuk, hogy a népességcsökkenés folyamata elkerülhetetlen és még hosszú távon is csak nehezen állítható meg.

58. ábra: A népességszám várható alakulása 2020 és 2068 között

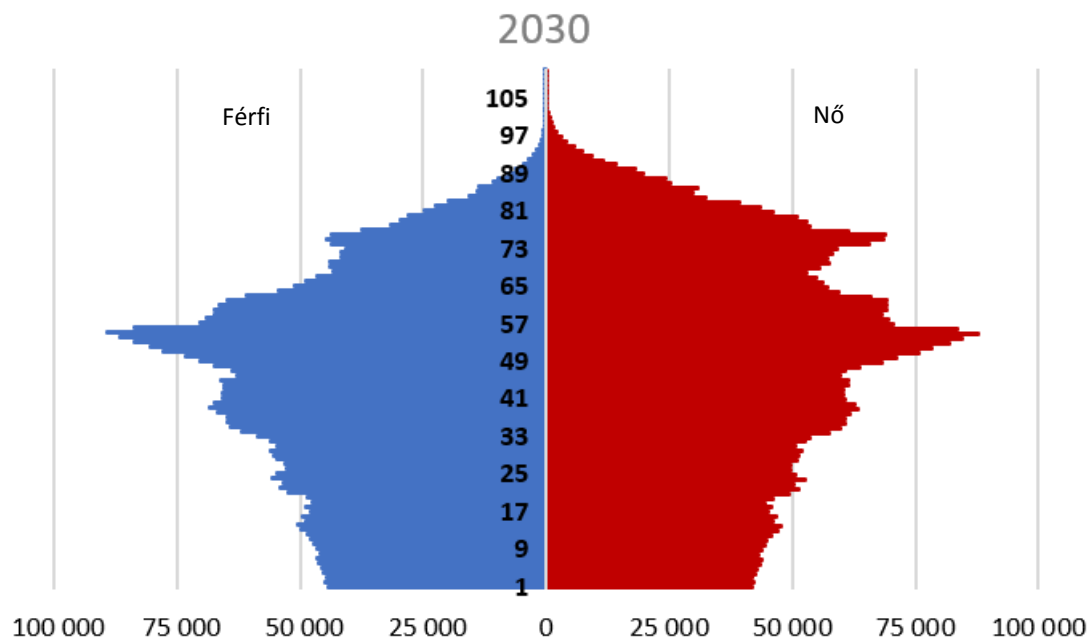


<sup>32</sup> <https://ec.europa.eu/eurostat/data/database>

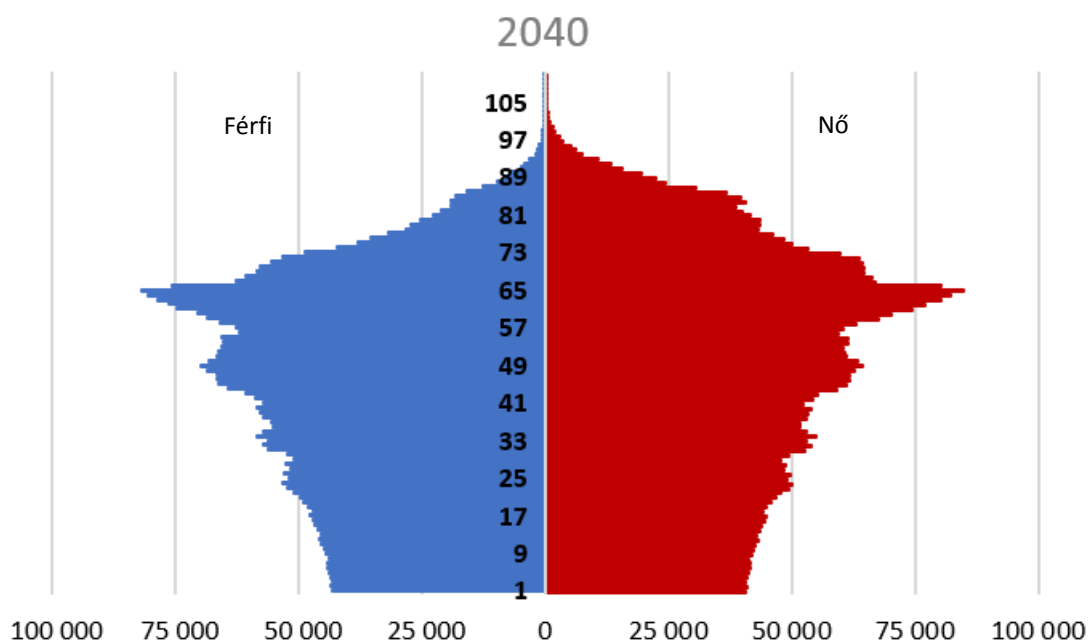
59. ábra: Korfa 2020-ban



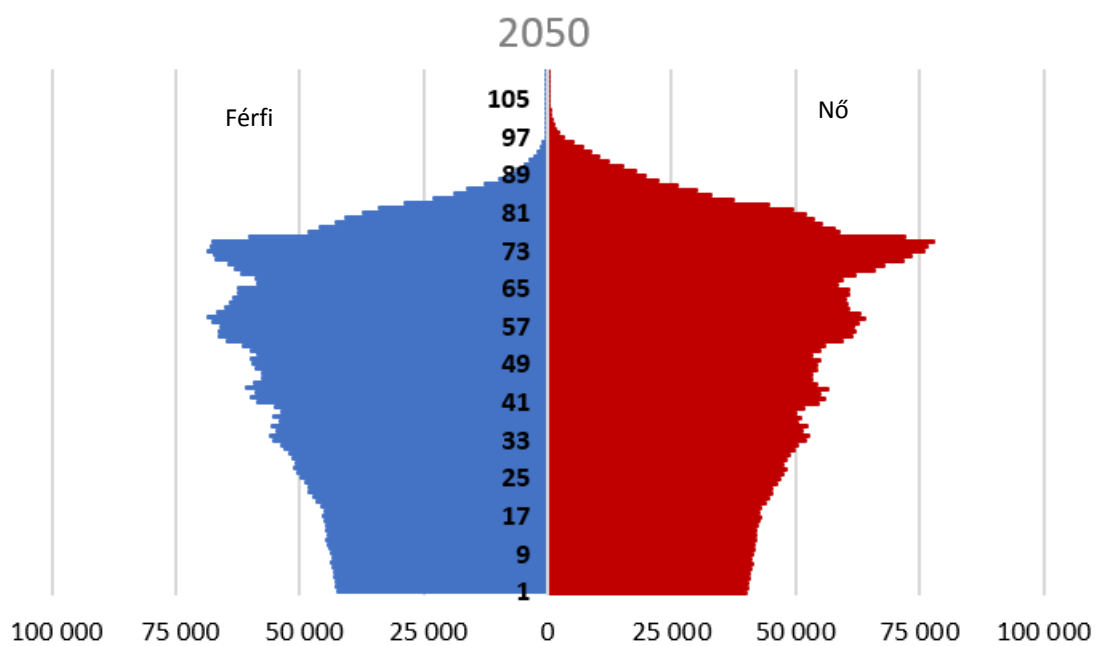
60. ábra: Korfa 2030-ban



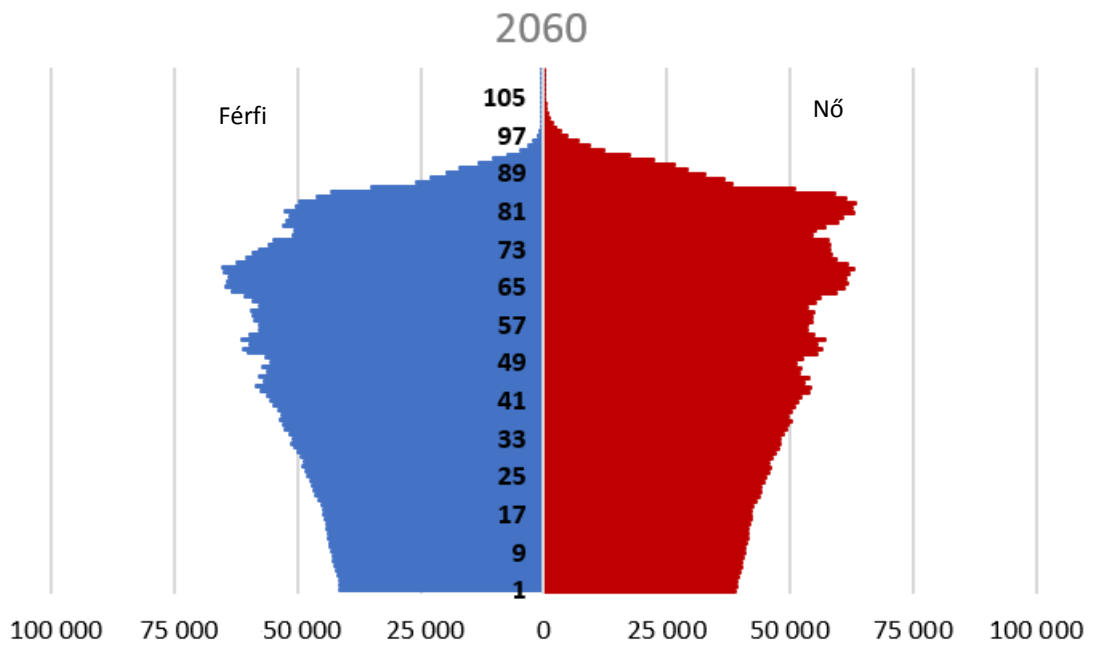
61. ábra: Korfa 2040-ben



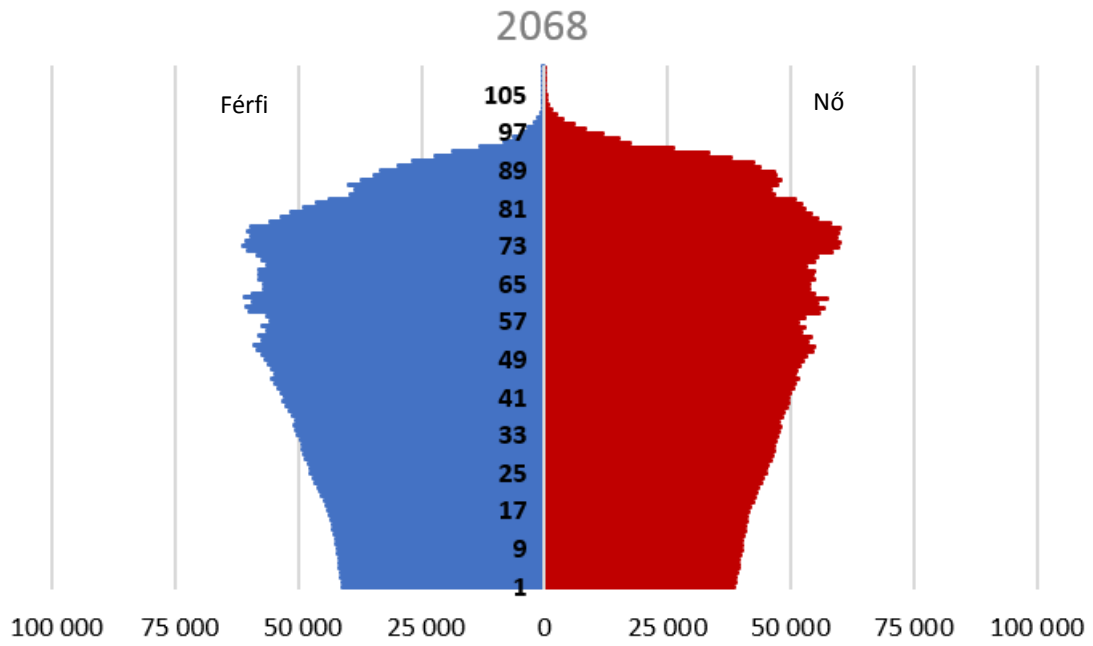
62. ábra: Korfa 2050-ben



63. ábra: Korfa 2060-ban



64. ábra: Korfa 2068-ban



6. táblázat: A korcsoportonkénti népességszám várható alakulása nemek szerint

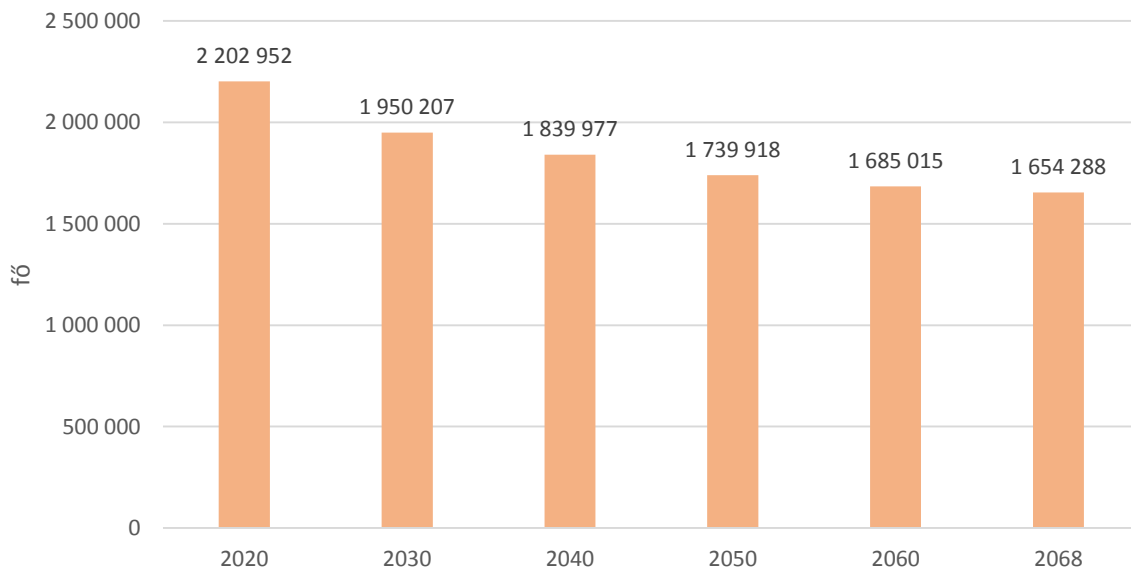
Kor- csoport	2020		2030		2040		2050		2060		2068	
	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi	nő	férfi
<b>0-4</b>	226 607	239 868	211 667	224 463	204 828	217 047	202 087	214 002	197 101	208 598	195 302	206 594
<b>5-9</b>	222 946	235 785	219 045	232 406	208 891	221 242	206 208	218 066	202 744	214 090	199 412	210 327
<b>10-14</b>	242 976	256 465	231 681	245 584	216 376	229 393	209 928	222 068	207 595	219 143	203 822	214 788
<b>15-19</b>	237 905	252 455	228 859	242 706	224 550	238 624	214 636	227 572	212 310	224 633	210 274	222 126
<b>20-24</b>	263 021	281 017	254 784	270 278	243 062	258 409	227 956	242 260	222 025	235 228	220 493	233 055
<b>25-29</b>	303 112	323 206	253 957	271 845	244 519	260 354	240 158	255 780	230 945	244 845	229 724	242 656
<b>30-34</b>	297 482	317 904	274 706	295 513	267 419	284 803	256 077	272 597	241 625	256 729	236 945	250 645
<b>35-39</b>	319 697	330 320	309 511	332 095	263 723	284 094	255 273	273 153	251 050	268 355	243 798	259 229
<b>40-44</b>	411 653	424 078	304 444	328 788	282 664	307 057	276 077	296 923	265 060	284 356	252 992	270 926
<b>45-49</b>	370 082	377 238	323 946	338 086	314 038	339 370	269 741	293 238	262 001	282 648	260 062	280 437
<b>50-54</b>	333 315	328 406	408 339	417 729	305 752	329 345	285 330	310 384	279 643	301 736	269 618	289 549
<b>55-59</b>	298 798	274 468	361 407	357 802	321 540	329 808	313 402	334 982	271 296	293 070	270 264	290 286
<b>60-64</b>	356 946	296 939	320 933	297 722	398 941	391 730	303 073	317 256	285 446	305 215	275 692	294 104
<b>65-69</b>	367 513	277 841	277 444	226 726	343 570	315 488	313 713	306 663	309 655	320 598	272 197	287 988
<b>70-74</b>	287 581	195 214	308 938	212 777	291 131	237 358	374 887	338 017	291 881	287 912	293 499	300 142
<b>75-79</b>	239 394	139 419	288 092	170 663	224 798	147 749	297 394	237 988	287 402	257 611	288 066	280 386
<b>80-84</b>	165 003	75 569	191 161	97 072	200 825	99 995	216 394	141 763	309 050	241 290	249 473	217 209
<b>85-89</b>	96 898	38 688	118 311	48 333	133 920	52 651	115 911	52 918	188 222	120 215	233 333	174 466
<b>90-94</b>	37 000	11 936	48 981	14 178	53 809	15 616	53 481	13 920	87 693	38 262	157 548	89 537
<b>95-99</b>	9 051	2 579	12 751	3 151	15 833	3 318	13 426	2 130	19 398	4 726	45 474	17 598
<b>100+</b>	1 412	647	2 733	1 108	4 282	1 308	3 763	1 042	4 146	883	7 147	2 591
<b>Összesen</b>	<b>5 088 392</b>	<b>4 680 040</b>	<b>4 951 689</b>	<b>4 629 027</b>	<b>4 764 471</b>	<b>4 564 761</b>	<b>4 648 917</b>	<b>4 572 724</b>	<b>4 626 288</b>	<b>4 610 141</b>	<b>4 615 134</b>	<b>4 634 640</b>



7. táblázat: A születések és halálozások számának várható alakulása 2020 és 2068 között, nemek szerint

Év	2020	2030	2040	2050	2060	2068
halálozás (fő)						
<b>nő</b>	65 453	68 788	67 993	55 150	53 470	49 911
<b>férfi</b>	62 733	64 605	58 390	50 425	50 890	48 281
<b>Összesen</b>	128 186	133 393	126 384	105 575	104 360	98 191
születés (fő)						
<b>lány</b>	43 864	41 707	40 643	40 012	38 945	38 572
<b>fiú</b>	46 496	44 210	43 081	42 413	41 282	40 887
<b>Összesen</b>	90 359	85 917	83 724	82 425	80 227	79 459

65. ábra: A szülőképes korú, 15–49 éves nők létszámának 2020 és 2068 közötti előrejelzése



## Melléklet

## Maximum likelihood becslés<sup>33</sup>

Poisson-eloszlás esetén a likelihood függvény:

$$L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \frac{\lambda_{xt}^{d_{xt}} e^{-\lambda_{xt}}}{d_{xt}!}$$

$$\theta = (\alpha_x, \beta_x, \kappa_t)$$

A log-likelihood függvény:

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \ln\left(\frac{\lambda_{xt}^{d_{xt}} e^{-\lambda_{xt}}}{d_{xt}!}\right)$$

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \ln(\lambda_{xt}^{d_{xt}} e^{-\lambda_{xt}}) - \ln(d_{xt}!)$$

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = d_{xt} \ln(\lambda_{xt}) + \ln(e^{-\lambda_{xt}}) - \ln(d_{xt}!)$$

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = d_{xt} \ln(\lambda_{xt}) - \lambda_{xt} - \ln(d_{xt}!)$$

A függetlenség feltételezése miatt felírhatjuk, hogy:

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} d_{xt} \ln(\lambda_{xt}) - \lambda_{xt} - \ln(d_{xt}!)$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} d_{xt} \ln(E_{xt}^c \mu_{xt}) - E_{xt}^c \mu_{xt} - \ln(d_{xt}!)$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} d_{xt} (\ln(E_{xt}^c) + \ln(\mu_{xt})) - E_{xt}^c \mu_{xt} - \ln(d_{xt}!)$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} d_{xt} \ln(E_{xt}^c) + d_{xt} \ln(\mu_{xt}) - E_{xt}^c \mu_{xt} - \ln(d_{xt}!)$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} d_{xt} \ln(\mu_{xt}) - E_{xt}^c \mu_{xt} - \ln(d_{xt}!) + d_{xt} \ln(E_{xt}^c)$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \{d_{xt} \ln(\mu_{xt}) - E_{xt}^c \mu_{xt}\} + C$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \{d_{xt} \ln(e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) - E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}\} + C$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \{d_{xt} (\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}\} + C$$

Ahol C konstans.

---

<sup>33</sup> Ehhez kapcsolódóan lásd például *Brouhns et al. (2002)* munkáját.

Elsőrendű parciális deriváltak, a gradiens vektor ( $\mathbf{g}$ ) elemei:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_x} = \sum_t (d_{xt} - E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) = \sum_t (d_{xt} - \mathbb{E}[D_{xt}]) = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_x} = \sum_t (d_{xt} - E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) \kappa_t = \sum_t (d_{xt} - \mathbb{E}[D_{xt}]) \kappa_t = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \kappa_t} = \sum_x (d_{xt} - E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) \beta_x = \sum_x (d_{xt} - \mathbb{E}[D_{xt}]) \beta_x = 0$$

Másodrendű deriváltak, a Hesse-mátrix főátlóbeli elemei:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\alpha_x)^2} = - \sum_t (E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) = - \sum_t \text{Var}(D_{xt})$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\beta_x)^2} = - \sum_t (E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) \kappa_t^2 = - \sum_t \text{Var}(D_{xt}) \kappa_t^2$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\kappa_t)^2} = - \sum_x (E_{xt}^c e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) \beta_x^2 = - \sum_x \text{Var}(D_{xt}) \beta_x^2$$

Hesse-mátrix:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial (\alpha_x)^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_x \partial \beta_x} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \alpha_x \partial \kappa_t} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_x \partial \alpha_x} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial (\beta_x)^2} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta_x \partial \kappa_t} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \kappa_t \partial \alpha_x} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \kappa_t \partial \beta_x} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial (\kappa_t)^2} \end{bmatrix}$$

Az optimalizációs probléma  $-\ell(\boldsymbol{\theta})$  minimalizálása. A Hesse-mátrix annak meghatározásához használatos, hogy vajon  $-\ell(\boldsymbol{\theta})$  függvény minimumát kapjuk-e  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  megoldások mellett, vagyis  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  stacioner pontja-e  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  függvénynek. Ha ez fennáll, akkor  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  maximum likelihood becslése  $\boldsymbol{\theta}$ -nak.

A Newton–Raphson iterációs formula értelmében a likelihood függvény maximalizálása az  $i$ -edik iteráció során:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)} - H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)})^{-1} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(i)})$$

A Newton–Raphson módszer esetében ajánlott, hogy a kezdőérték közel essen a megoldáshoz – ez garantálja a konvergenciát. A Hesse-mátrixnak invertálhatónak kell lennie mindegyik iterációs lépés során.

**Binomiális eloszlás** esetén a likelihood függvény:

$$L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \frac{E_{xt}^0!}{d_{xt}!(E_{xt}^0 - d_{xt})!} q_{xt}^{d_{xt}} (1 - q_{xt})^{E_{xt}^0 - d_{xt}}$$

A log-likelihood függvény:

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \ln \left( \frac{E_{xt}^0!}{d_{xt}!(E_{xt}^0 - d_{xt})!} q_{xt}^{d_{xt}} (1 - q_{xt})^{E_{xt}^0 - d_{xt}} \right)$$

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \ln(E_{xt}^0!) - \ln(d_{xt}!(E_{xt}^0 - d_{xt})!) + d_{xt} \ln q_{xt} + (E_{xt}^0 - d_{xt}) \ln(1 - q_{xt})$$

$$\ln L_{xt}(\theta; d_{xt}) = \ln(E_{xt}^0!) - \ln(d_{xt}!) - \ln((E_{xt}^0 - d_{xt})!) + d_{xt} \ln q_{xt} + (E_{xt}^0 - d_{xt}) \ln(1 - q_{xt})$$

A függetlenség feltételezése miatt felírhatjuk, hogy:

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \ln(E_{xt}^0!) - \ln(d_{xt}!) - \ln((E_{xt}^0 - d_{xt})!) + d_{xt} \ln q_{xt} + (E_{xt}^0 - d_{xt}) \ln(1 - q_{xt})$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \{d_{xt} \ln q_{xt} + (E_{xt}^0 - d_{xt}) \ln(1 - q_{xt})\} + C$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \{d_{xt} \ln(e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}) + (E_{xt}^0 - d_{xt}) \ln(1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})\} + C$$

$$\ell(\theta) = \sum_{xt} \{d_{xt} (\alpha_x + \beta_x \kappa_t) + (E_{xt}^0 - d_{xt}) \ln(1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})\} + C$$

Ahol C konstans.

Elsőrendű parciális deriváltak, a gradiens vektor (**g**) elemei:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha_x} = \sum_t \left( d_{xt} - \frac{E_{xt}^0 - d_{xt}}{1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta_x} = \sum_t \left( d_{xt} - \frac{E_{xt}^0 - d_{xt}}{1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \right) \kappa_t = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \kappa_t} = \sum_x \left( d_{xt} - \frac{E_{xt}^0 - d_{xt}}{1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t}} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \right) \beta_x = 0$$

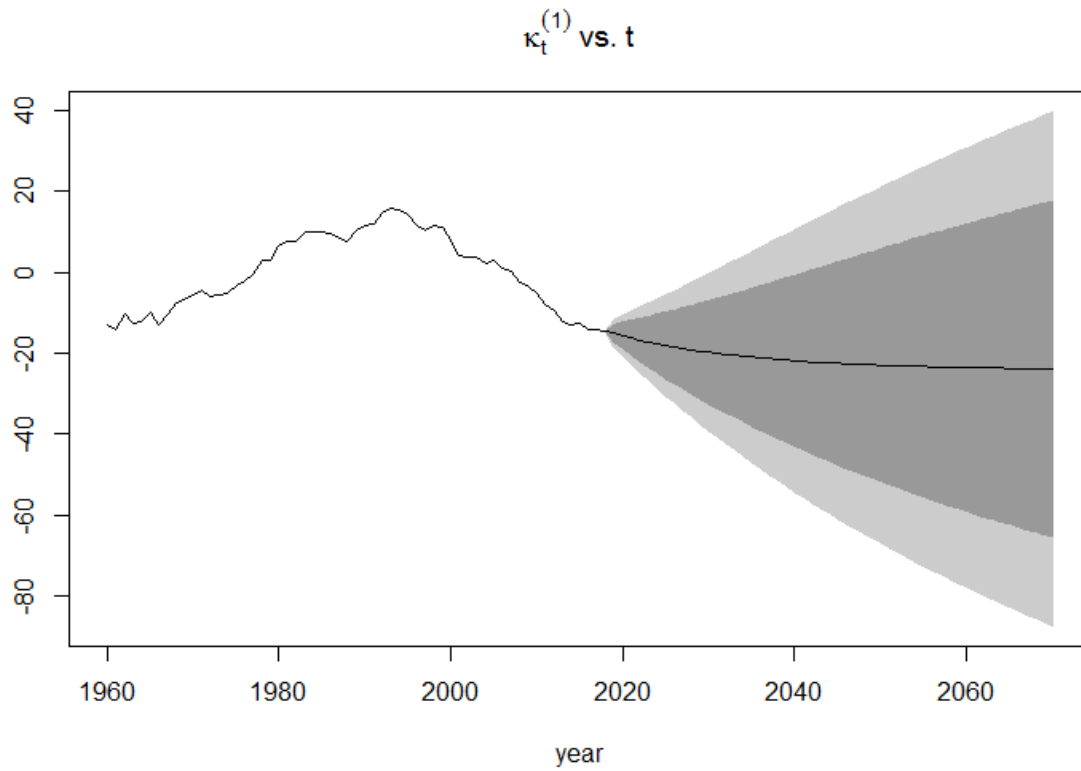
Másodrendű deriváltak, a Hesse-mátrix főátlóbeli elemei:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\alpha_x)^2} = - \sum_t \left( \frac{E_{xt}^0 - d_{xt}}{(1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})^2} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \right)$$

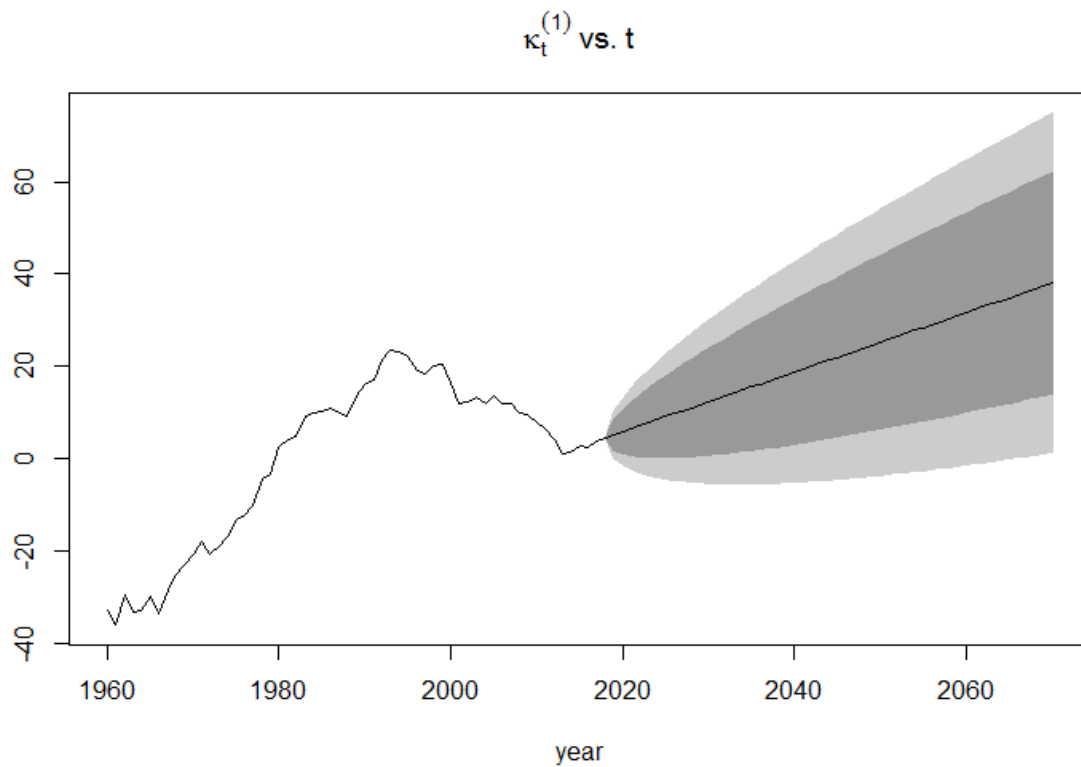
$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\beta_x)^2} = - \sum_t \left( \frac{E_{xt}^0 - d_{xt}}{(1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})^2} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \right) \kappa_t^2$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial (\kappa_t)^2} = - \sum_x \left( \frac{E_{xt}^0 - d_{xt}}{(1 - e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t})^2} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t} \right) \beta_x^2$$

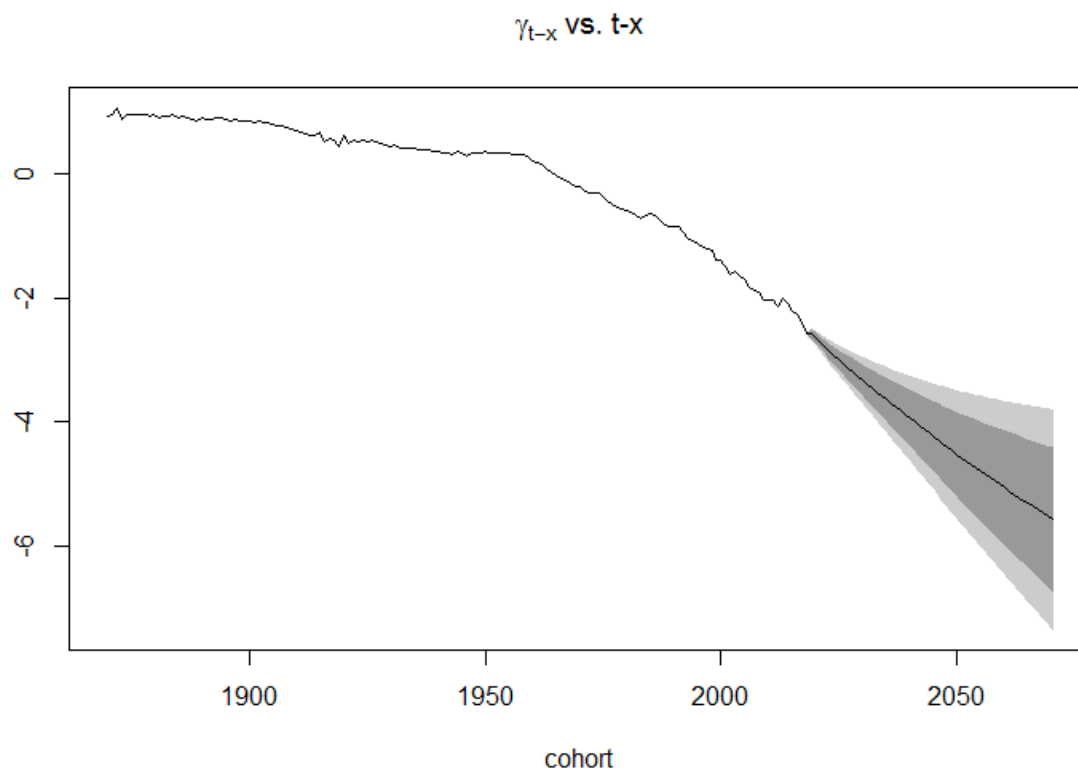
66. ábra: A mortalitási index ( $\kappa_t^{(1)}$ ) előrejelzése a Poisson Lee–Carter modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



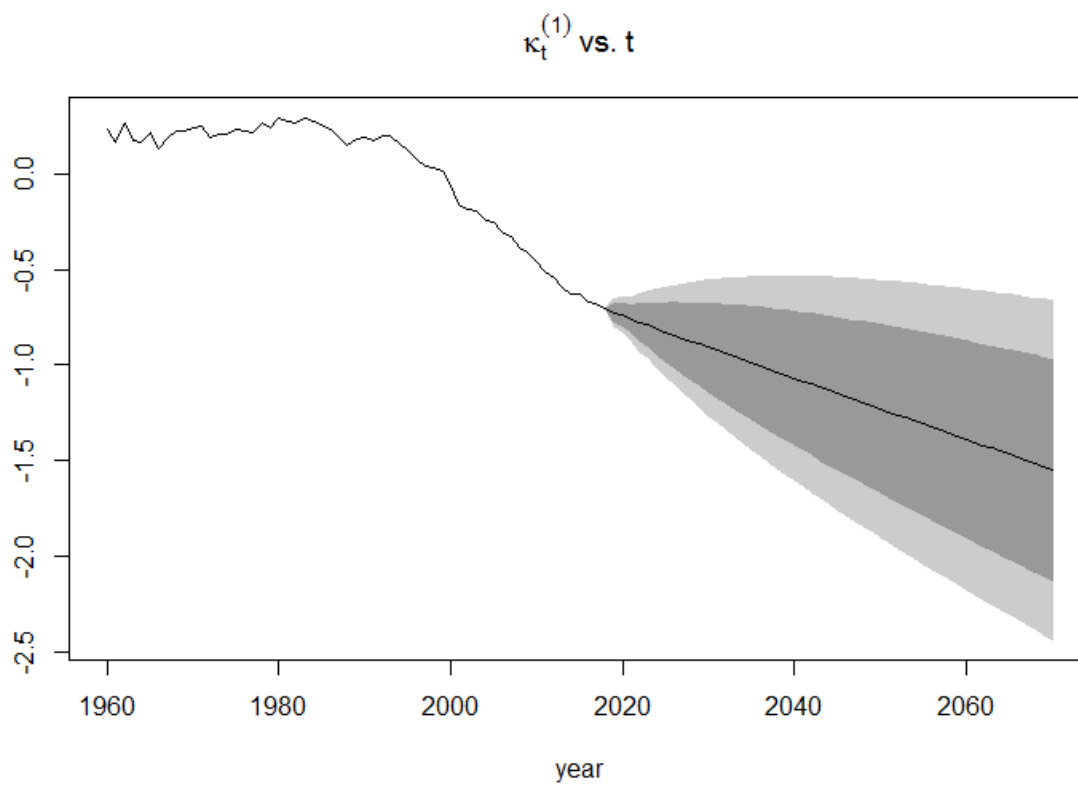
67. ábra: A mortalitási index ( $\kappa_t^{(1)}$ ) előrejelzése az RH modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



68. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése az RH modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)

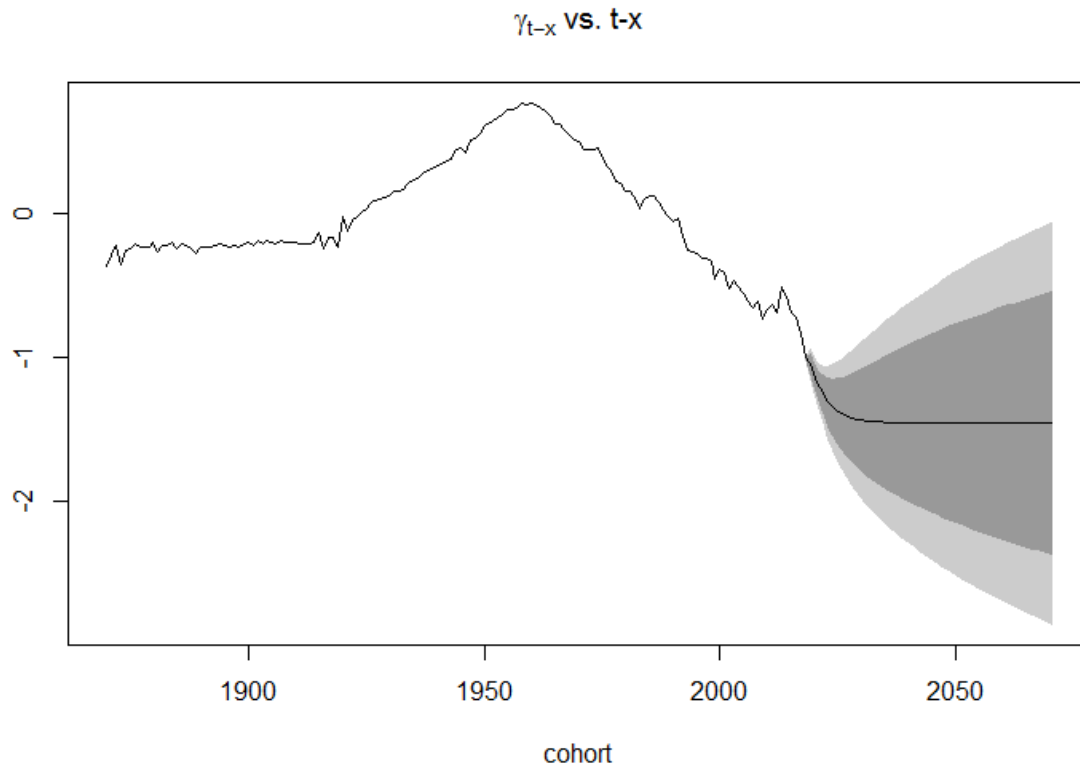


69. ábra: A mortalitási index ( $\kappa_t^{(1)}$ ) előrejelzése az APC modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)

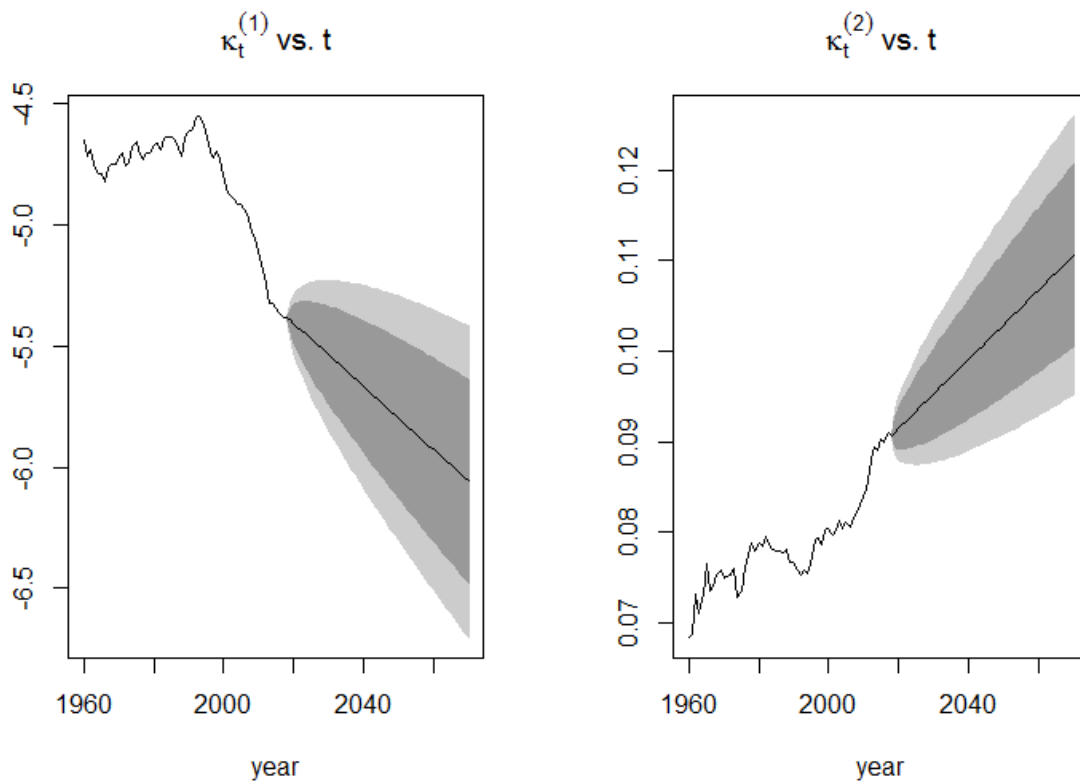




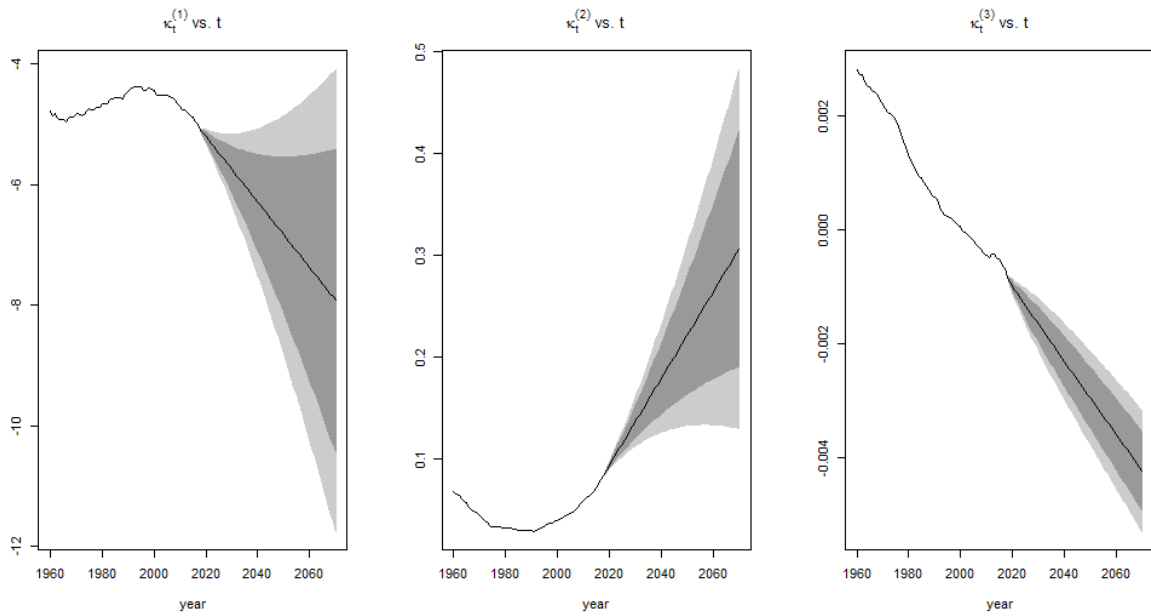
70. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése az APC modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



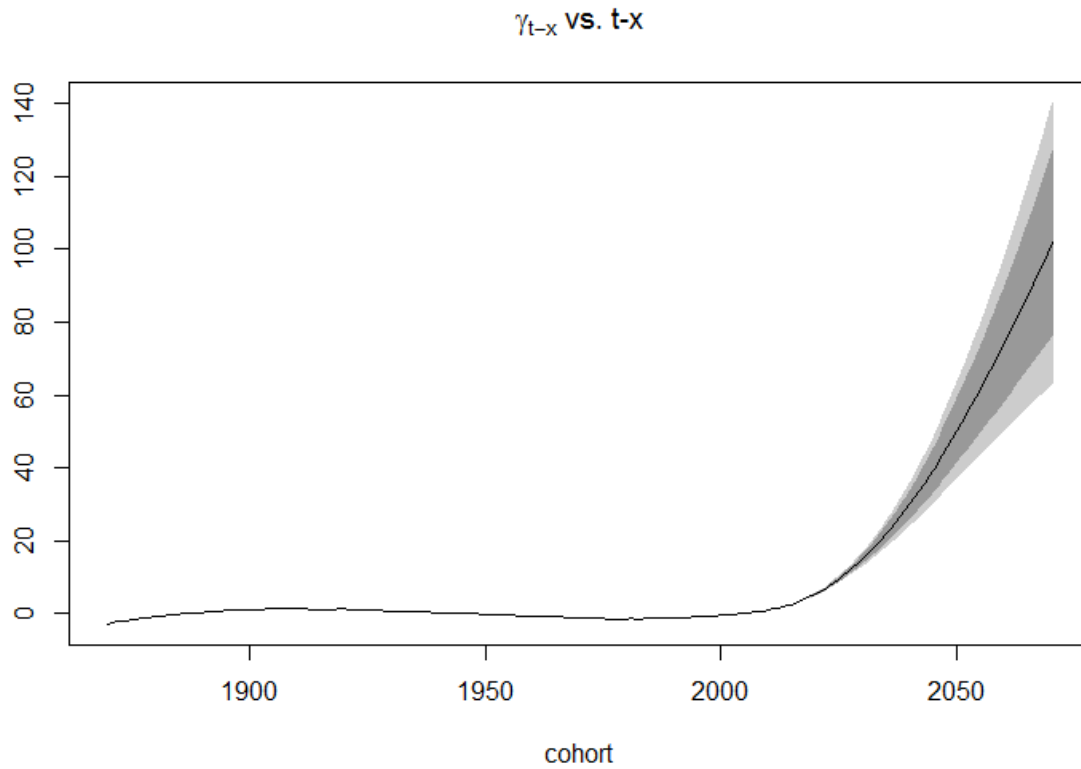
71. ábra: A mortalitási indexek ( $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$ ) előrejelzése a CBD modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



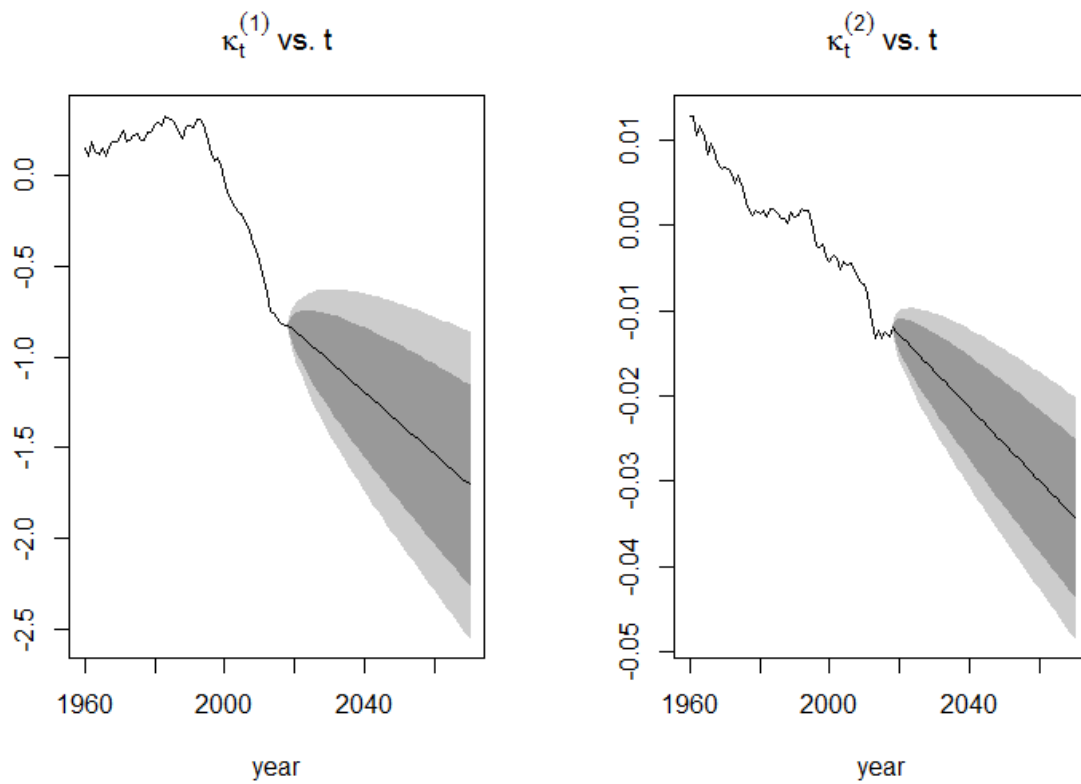
72. ábra: A mortalitási indexek ( $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}$ ) előrejelzése az M7 modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



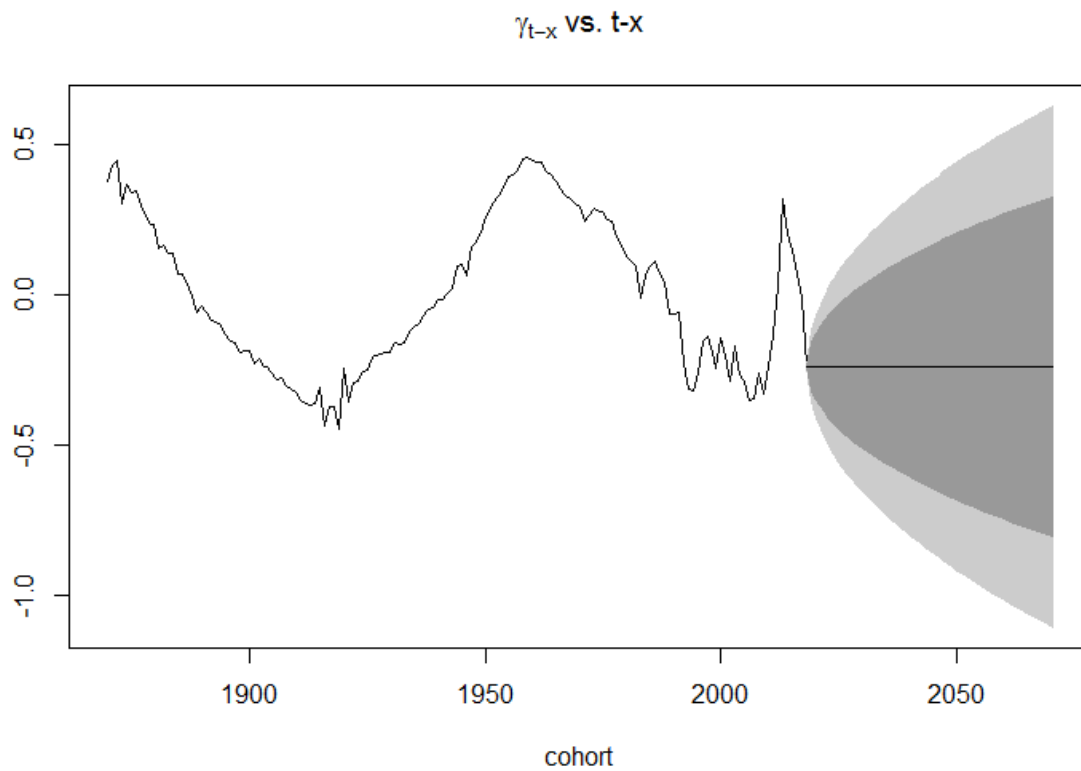
73. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése az M7 modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



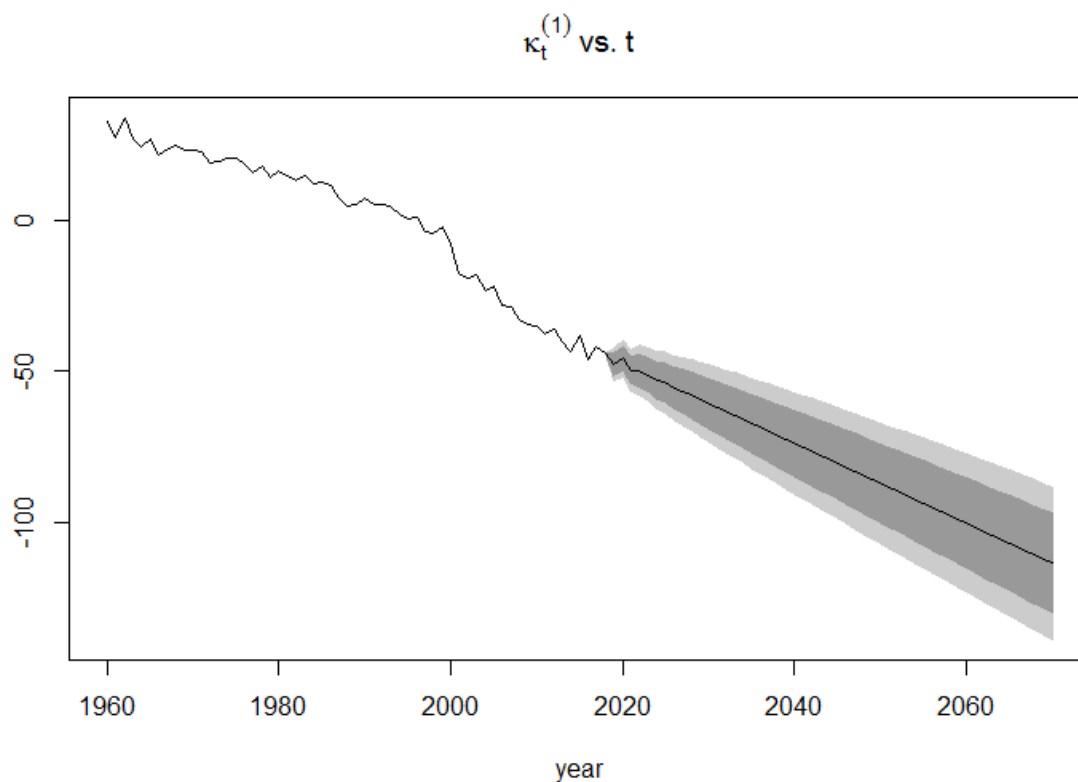
74. ábra: A mortalitási indexek ( $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$ ) előrejelzése a Plat modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



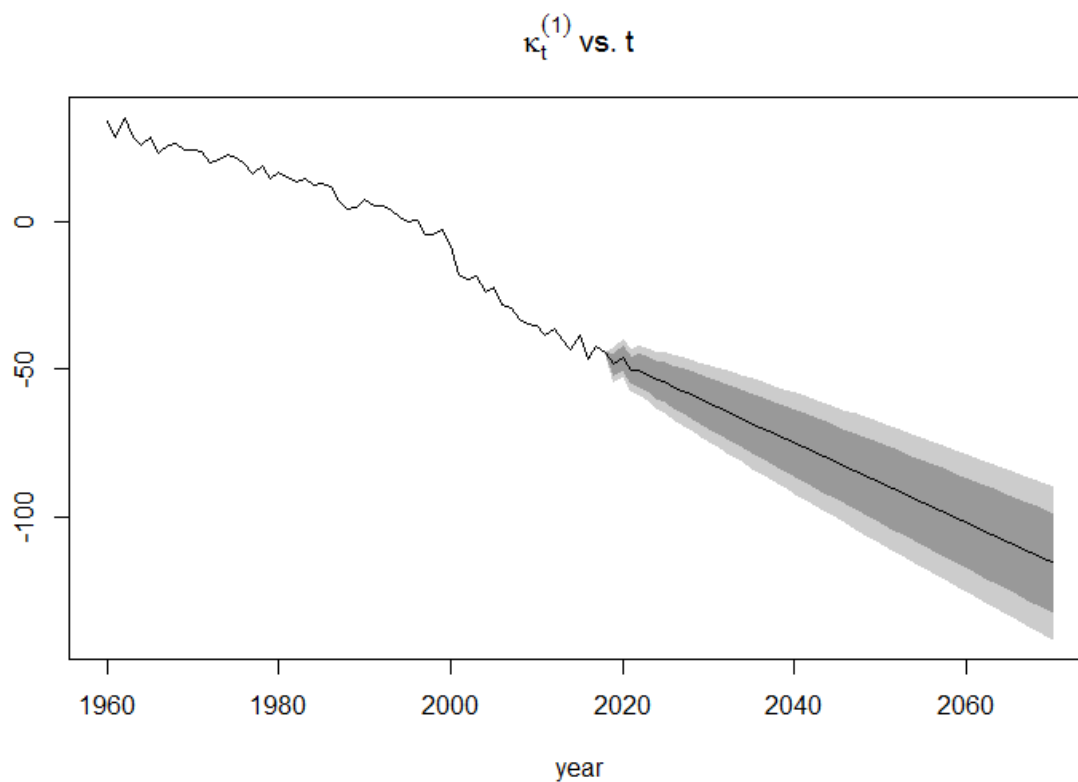
75. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése a Plat modell esetében 1960–2018. évi bázison (férfiak)



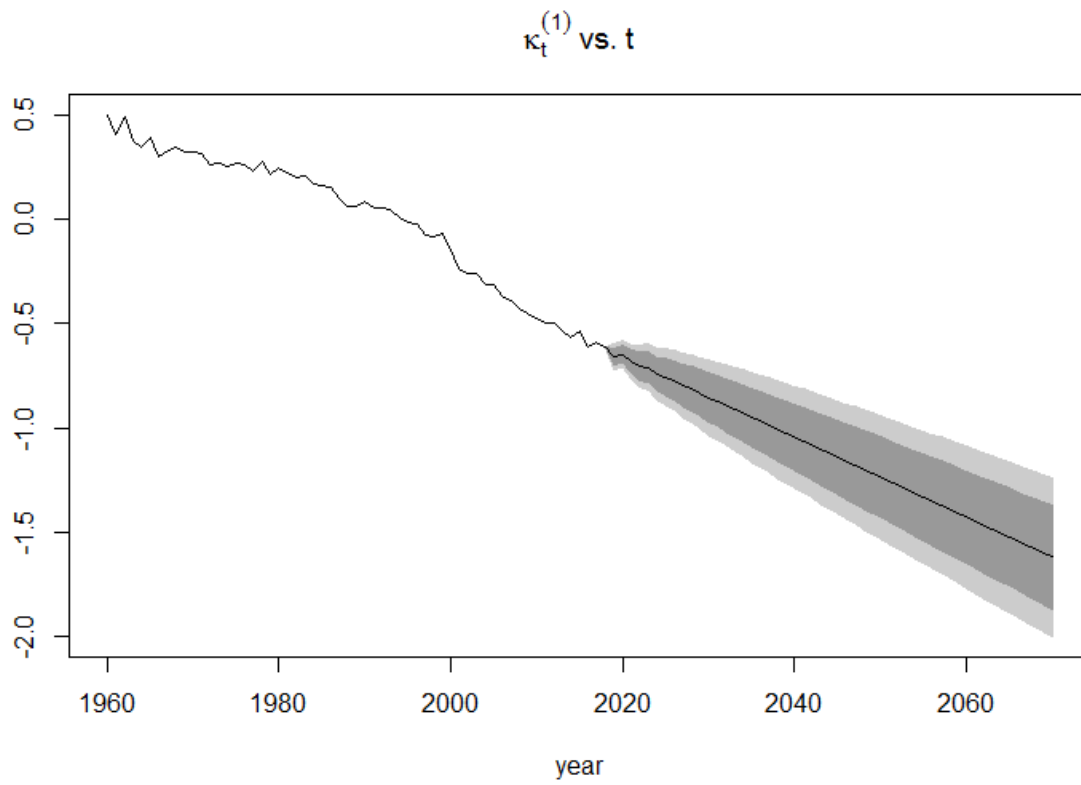
76. ábra: A mortalitási index ( $\kappa_t^{(1)}$ ) előrejelzése a Poisson Lee–Carter modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



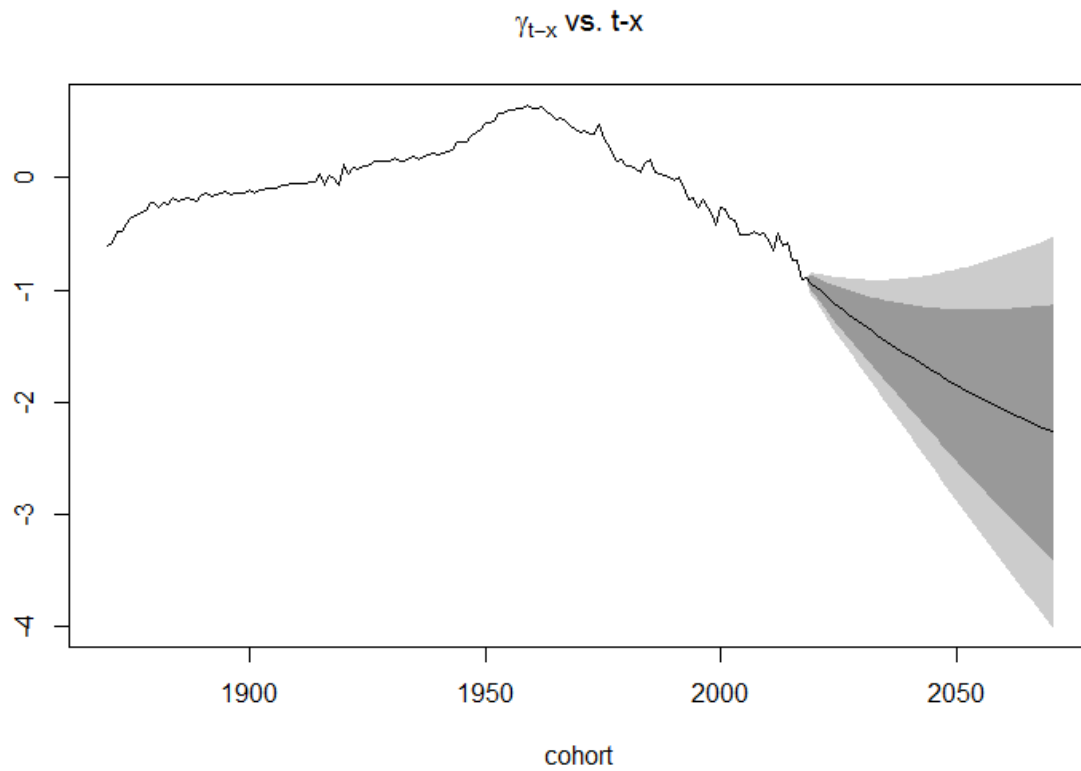
77. ábra: A mortalitási index ( $\kappa_t^{(1)}$ ) előrejelzése a binomiális Lee–Carter modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



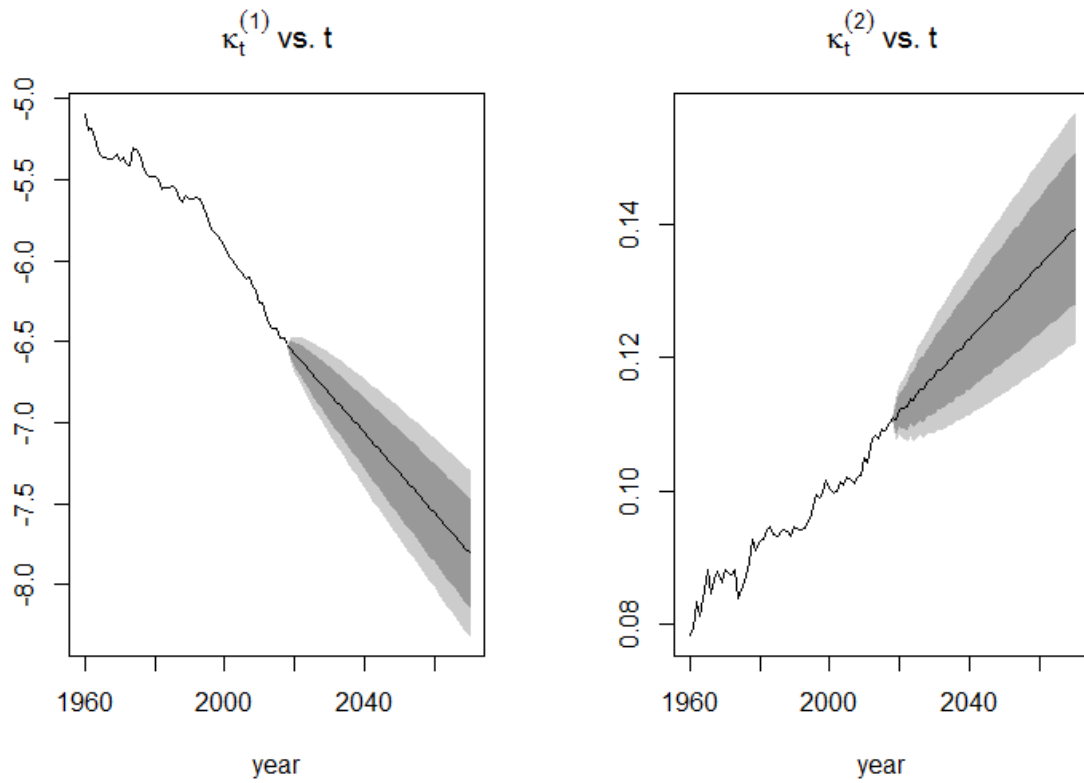
78. ábra: A mortalitási index ( $\kappa_t^{(1)}$ ) előrejelzése az APC modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



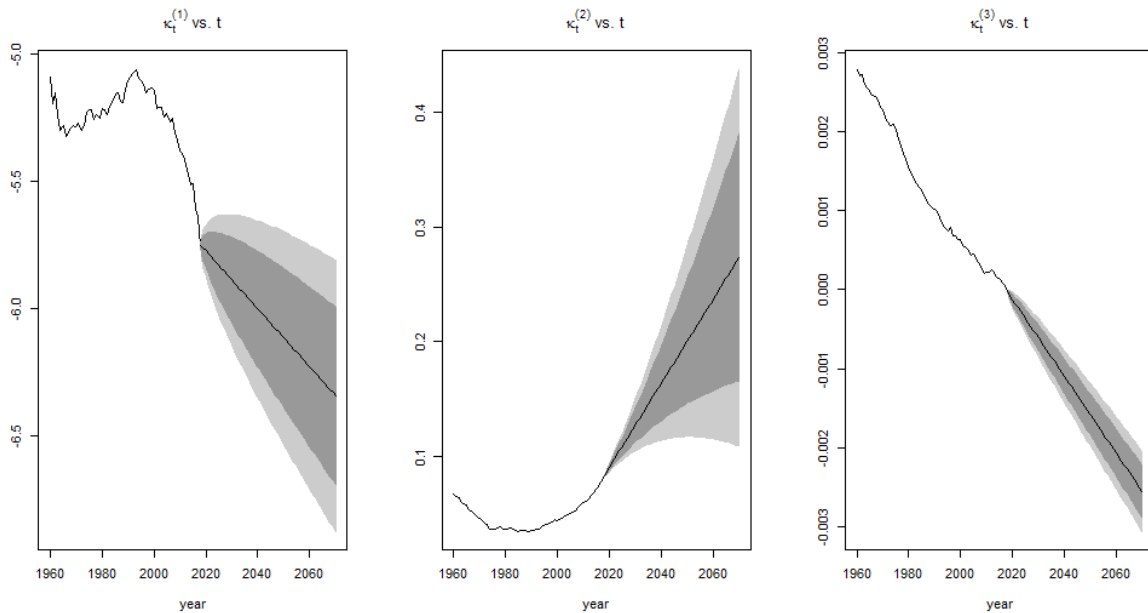
79. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése az APC modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



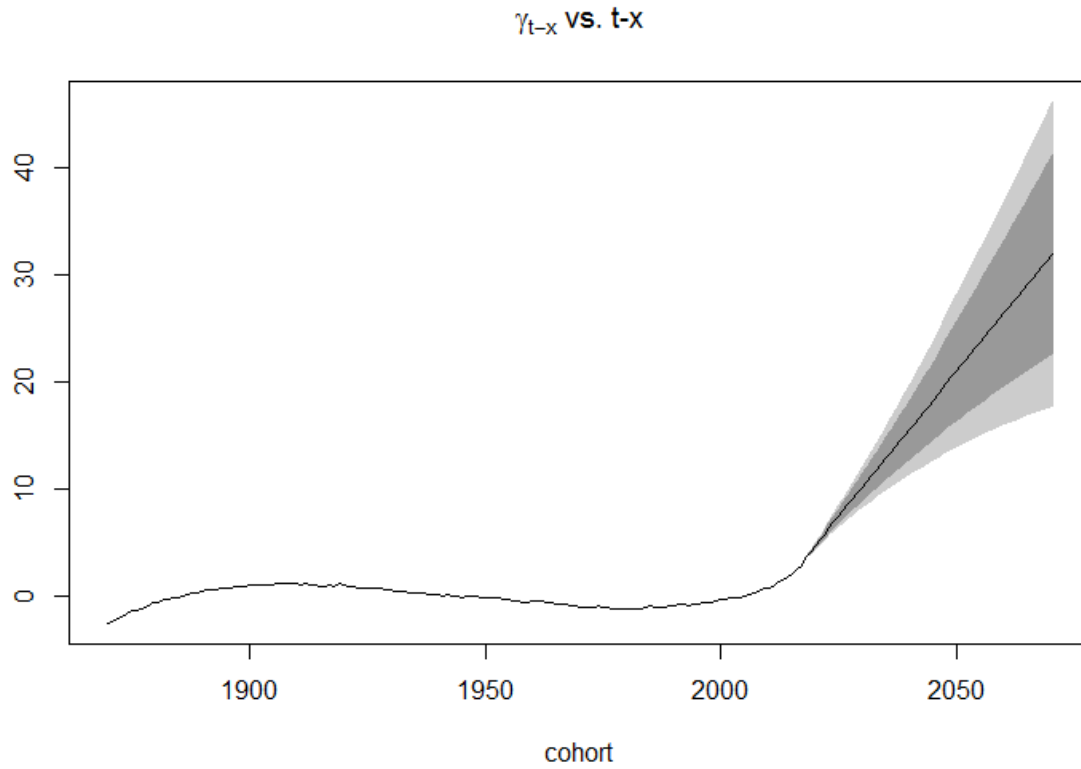
80. ábra: A mortalitási indexek ( $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$ ) előrejelzése a CBD modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



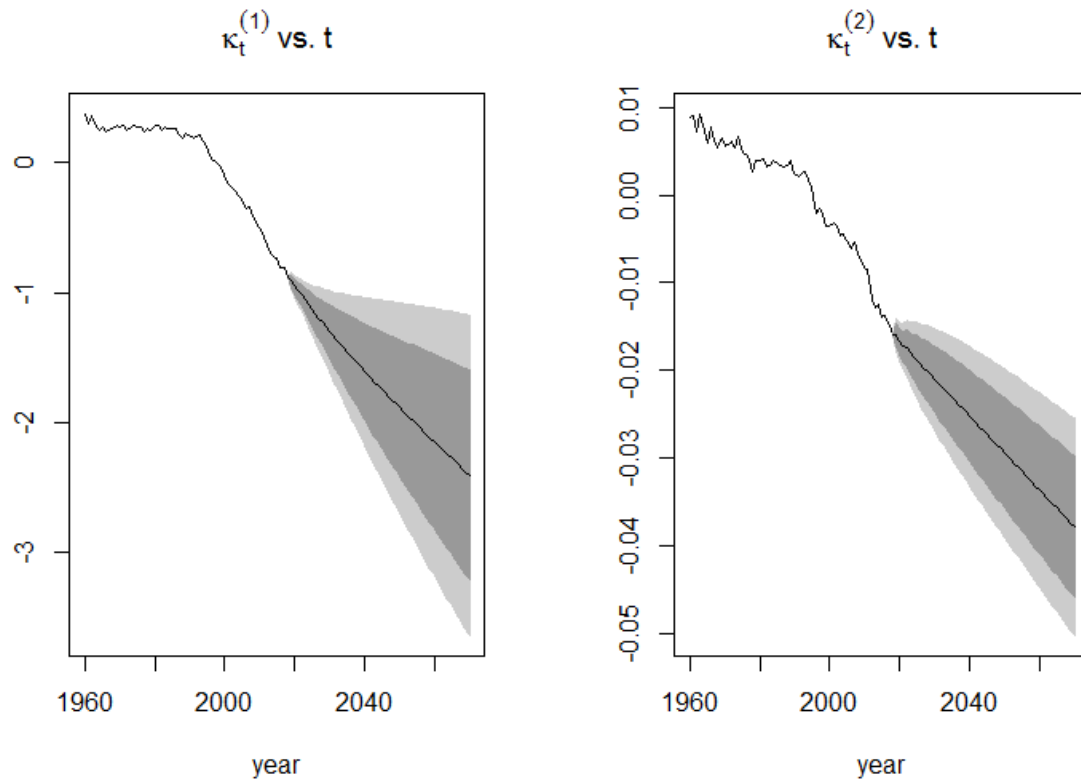
81. ábra: A mortalitási indexek ( $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}, \kappa_t^{(3)}$ ) előrejelzése az M7 modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



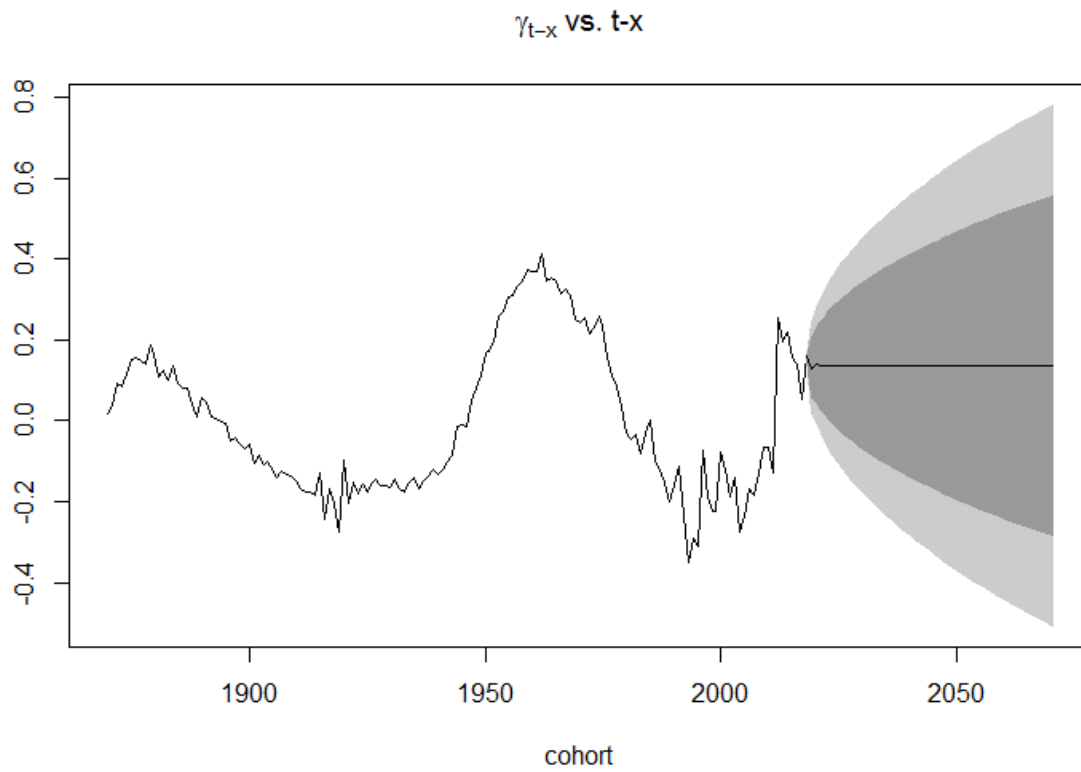
82. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése az M7 modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



83. ábra: A mortalitási indexek ( $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$ ) előrejelzése a Plat modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)



84. ábra: A kohorszhatás ( $\gamma_{t-x}$ ) előrejelzése a Plat modell esetében 1960–2018. évi bázison (nők)





8. táblázat: A  $\kappa_t^{(i)}$  és  $\gamma_{t-x}$  paraméterek ARIMA(p,d,q) modelljei különböző bázis időszakok mellett (férfiak)

bázis időszak	modell	$\kappa_t^{(1)}$	$\kappa_t^{(2)}$	$\kappa_t^{(3)}$	$\gamma_{t-x}$
1960–1989	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,0) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(1,0,0) nem nulla átlaggal		
	APC	ARIMA(1,1,0)			ARIMA(2,1,1)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,2)	ARIMA(4,2,0)	ARIMA(1,2,2)
	Plat	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(1,0,0) nulla átlaggal		ARIMA(0,1,3) eltolással
	RH	ARIMA(1,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,0) eltolással
1960–1995	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,0) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(1,0,0) nem nulla átlaggal		
	APC	ARIMA(1,1,0)			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,2)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(1,2,2)
	Plat	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(1,0,0) nulla átlaggal		ARIMA(1,1,2)
	RH	ARIMA(1,1,0) eltolással			ARIMA(0,1,1) eltolással
1960–2000	Poisson Lee–Carter	ARIMA(1,2,2)			
	CBD	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(1,0,0) nem nulla átlaggal		
	APC	ARIMA(3,1,2)			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(1,2,2)
	Plat	ARIMA(0,1,0)	ARIMA(0,1,0) eltolással		ARIMA(0,1,0)
	RH	ARIMA(0,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,0) eltolással
1960–2005	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(1,1,1)	ARIMA(0,1,1) eltolással		
	APC	ARIMA(0,1,0)			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,2)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(1,2,2)
	Plat	ARIMA(1,1,1)	ARIMA(0,1,0) eltolással		ARIMA(0,1,0)
	RH	ARIMA(0,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,2) eltolással
1960–2010	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(1,1,1) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		
	APC	ARIMA(3,1,0)			ARIMA(3,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(1,1,1) eltolással	ARIMA(1,2,2)
	Plat	ARIMA(2,1,2)	ARIMA(0,1,1) eltolással		ARIMA(1,1,2)
	RH	ARIMA(0,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,0) eltolással
1960–2015	Poisson Lee–Carter	ARIMA(1,1,0)			
	CBD	ARIMA(0,1,1) eltolással	ARIMA(0,1,0) eltolással		
	APC	ARIMA(3,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(1,2,2)	ARIMA(1,1,0) eltolással	ARIMA(1,2,2)
	Plat	ARIMA(1,1,1)	ARIMA(0,1,0) eltolással		ARIMA(0,1,0)
	RH	ARIMA(0,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,0) eltolással

9. táblázat: A  $\kappa_t^{(i)}$  és  $\gamma_{t-x}$  paraméterek ARIMA(p,d,q) modelljei különböző bázis időszakok mellett (nők)

bázis időszak	modell	$\kappa_t^{(1)}$	$\kappa_t^{(2)}$	$\kappa_t^{(3)}$	$\gamma_{t-x}$
1960–1989	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	binomiális Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		
	APC	ARIMA(3,1,2) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(2,2,1)	ARIMA(2,2,1)	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,1)
	Plat	ARIMA(1,1,0) eltolással	ARIMA(2,1,1) eltolással		ARIMA(1,1,2)
1960–1995	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	binomiális Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(2,1,2) eltolással		
	APC	ARIMA(2,1,1) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(2,2,2)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,2,1)
	Plat	ARIMA(0,1,1) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		ARIMA(1,1,2)
1960–2000	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	binomiális Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		
	APC	ARIMA(3,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(1,2,1)
	Plat	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		ARIMA(3,1,4)
1960–2005	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	binomiális Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		
	APC	ARIMA(2,1,1) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(1,2,1)
	Plat	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(2,1,1) eltolással		ARIMA(1,1,0)
1960–2010	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	binomiális Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,1,1) eltolással		
	APC	ARIMA(3,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(1,2,0)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(2,2,0)
	Plat	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(2,1,1) eltolással		ARIMA(1,1,2)
1960–2015	Poisson Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	binomiális Lee–Carter	ARIMA(0,1,1) eltolással			
	CBD	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(2,1,2) eltolással		
	APC	ARIMA(3,1,0) eltolással			ARIMA(1,1,2)
	M7	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,2,1)	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(0,2,2)
	Plat	ARIMA(0,1,0) eltolással	ARIMA(3,1,0) eltolással		ARIMA(0,1,5)

10-12. táblázat: A különböző bázis időszakon illesztett modellek előrejelző képessége (férfiak)

bázis időszak	előrejelzés éve	CBD	M7	APC	APC (jump)	Poisson LC	Poisson LC (jump)	PLAT	PLAT (jump)	RH	RH (jump)
1960-1989	1990	42	8	43	63	65	66	59	64	69	62
	1991	39	7	40	61	69	64	47	65	69	61
	1992	31	3	45	54	52	60	47	58	57	61
	1993	22	5	42	53	48	53	39	53	46	53
	1994	22	6	39	48	53	57	38	47	50	58
	1995	25	5	35	46	60	55	32	40	52	50
1960-1989 1960-1995	1996	29	6	40	44	31	28	38	38	25	27
		18	15	57	52	31	54	52	55	38	49
	1997	26	5	41	39	15	20	35	35	17	19
		21	15	47	34	20	35	36	34	30	39
	1998	30	5	32	42	19	27	37	37	23	24
		21	9	44	37	22	43	39	41	32	43
	1999	26	6	33	36	19	22	36	37	20	18
		20	10	45	36	22	35	35	33	30	38
	2000	25	4	35	42	14	20	36	32	23	23
		20	9	36	29	17	32	28	28	27	33
1960-1989 1960-1995 1960-2000	2001	15	1	31	30	12	13	29	25	19	21
		11	13	24	20	12	21	26	20	22	24
		21	19	36	41	24	49	41	39	42	47
	2002	10	4	35	33	17	17	33	30	20	21
		10	11	22	22	14	25	24	26	22	24
		25	18	28	41	24	54	34	39	36	46
	2003	15	7	38	33	13	15	31	27	20	20
		8	12	29	23	12	17	29	26	26	28
		19	15	38	37	20	52	38	23	45	40
	2004	10	10	34	29	12	12	29	27	20	20
		6	10	21	21	14	16	30	24	27	27
		15	12	26	26	19	37	28	20	32	28
	2005	16	19	33	37	8	10	32	27	22	19
		9	14	23	19	8	16	29	23	26	26
		16	12	30	29	11	38	29	27	40	41

bázis időszak	előrejelzés éve	CBD	M7	APC	APC (jump)	Poisson LC	Poisson LC (jump)	PLAT	PLAT (jump)	RH	RH (jump)
1960-1989 1960-1995 1960-2000 1960-2005	2006	9	23	29	28	11	12	28	24	22	22
		6	18	22	23	12	19	28	21	28	26
		21	9	25	30	14	33	17	24	31	30
		21	20	43	57	13	60	44	56	63	68
	2007	8	16	32	27	12	11	24	20	16	15
		4	19	24	27	13	18	22	24	23	29
		21	13	24	28	16	27	21	21	32	28
		19	22	39	45	10	58	39	39	65	65
	2008	3	7	21	23	11	10	22	20	20	17
		1	29	22	26	12	15	26	22	24	24
		15	16	19	23	11	25	20	17	29	21
		16	26	29	31	6	37	27	28	48	40
	2009	6	3	24	22	11	12	22	19	20	19
		1	25	25	26	12	14	25	23	23	21
		14	18	24	24	12	18	20	22	27	25
		18	25	26	29	5	34	22	26	40	42
	2010	4	0	29	26	12	10	25	21	17	16
		2	18	28	29	12	13	23	23	21	19
		13	23	27	22	13	18	24	19	26	22
		15	26	28	29	3	23	24	28	32	34
1960-1989 1960-1995 1960-2000 1960-2005 1960-2010	2011	2	0	25	24	8	7	22	18	21	17
		2	7	24	25	9	10	23	19	22	24
		10	24	24	26	10	13	22	20	24	24
		9	24	25	26	2	22	22	26	32	28
		29	29	52	73	6	69	55	73	66	72
	2012	5	1	22	23	10	10	24	17	13	17
		4	5	22	22	10	9	23	21	20	20
		7	23	23	24	11	17	19	18	27	25
		5	28	24	24	4	17	23	25	34	31
		28	25	28	55	2	48	30	54	52	50
	2013	5	1	32	26	6	9	25	21	18	16
		4	1	29	28	9	6	23	27	20	24
		8	30	28	24	3	11	24	20	33	30
		4	31	32	31	3	20	26	33	35	32
		23	31	33	52	1	39	36	54	41	43
	2014	4	1	29	27	11	11	27	23	19	16
		3	0	29	28	12	13	25	23	22	26
		7	30	26	31	6	16	26	25	32	28
		4	37	26	29	4	24	26	31	34	35
		27	24	27	44	1	37	28	48	43	45
	2015	4	1	26	29	10	12	29	27	19	20
		5	0	28	27	10	12	25	24	24	22
		4	32	24	32	3	14	26	23	33	31
		5	32	24	30	6	20	23	32	34	39
		28	16	22	45	4	45	29	46	41	47

bázis időszak	előrejelzés éve	CBD	M7	APC	APC (jump)	Poisson LC	Poisson LC (jump)	PLAT	PLAT (jump)	RH	RH (jump)
1960-1989 1960-1995 1960-2000 1960-2005 1960-2010 1960-2015 1990-2015	2016	5	1	27	29	8	10	25	23	18	17
		5	0	22	24	8	10	23	22	21	26
		6	28	22	30	4	10	25	24	27	30
		3	28	23	29	5	20	22	29	30	31
		26	20	29	38	3	30	29	40	41	45
		27	36	42	71	8	67	43	71	68	73
		28	19	79	72	66	71	77	71	81	73
	2017	4	1	26	28	9	10	28	22	18	14
		5	0	23	25	9	8	23	21	21	21
		3	27	25	28	5	11	24	23	32	30
		4	32	22	25	6	19	23	23	36	37
		25	18	21	37	4	36	25	37	37	40
		36	32	41	71	7	58	39	68	65	71
		33	21	72	70	52	67	74	69	77	72
	2018	3	1	28	29	9	8	27	24	16	14
		3	0	26	26	8	7	26	25	21	21
		3	33	27	27	5	9	26	21	31	31
		5	34	23	32	3	18	25	29	35	37
		21	12	27	33	0	32	36	43	42	44
		27	22	44	67	11	62	40	59	67	69
		31	21	76	62	53	63	69	62	79	63

13-15. táblázat: A különböző bázis időszakon illesztett modellek előrejelző képessége (nők)

bázis időszak	előrejelzés éve	CBD	binom. LC	binom. LC (jump)	M7	APC	APC (jump)	Poisson LC	Poisson LC (jump)	PLAT	PLAT (jump)
1960-1989	1990	37	69	63	11	48	53	78	68	67	72
	1991	41	68	61	12	56	62	71	70	62	74
	1992	34	73	61	8	58	60	72	64	61	73
	1993	33	62	60	11	45	43	70	61	53	67
	1994	36	69	59	12	57	62	74	63	57	59
	1995	37	66	61	11	49	64	69	65	54	60
1960-1989 1960-1995	1996	37	48	52	8	53	62	50	49	47	45
		37	53	57	20	49	56	53	57	53	55
	1997	33	40	45	5	53	55	42	47	40	39
		32	41	46	18	51	54	49	55	50	43
	1998	39	46	38	6	50	49	44	41	48	43
		39	47	52	14	48	57	47	55	51	50
	1999	34	42	41	4	50	53	48	47	42	35
		39	48	53	15	48	59	48	54	45	56
	2000	34	36	35	9	41	41	38	37	46	39
		34	28	33	15	40	39	34	40	42	36
1960-1989 1960-1995 1960-2000	2001	42	25	24	7	53	43	24	24	38	28
		41	23	30	10	38	31	25	29	32	28
		41	31	47	22	50	41	32	51	54	51
	2002	44	27	22	6	48	43	23	23	41	39
		42	27	30	9	38	34	26	31	34	27
		38	29	46	23	49	41	29	47	53	46
	2003	38	21	22	3	48	43	26	22	36	32
		40	23	33	10	38	31	25	32	29	30
		37	27	47	24	52	51	27	48	49	47
	2004	42	19	19	5	49	45	20	19	35	32
		42	19	28	8	33	27	20	26	28	26
		37	25	38	23	38	37	23	39	46	36
	2005	44	21	19	4	51	50	21	20	38	33
		43	22	21	5	33	31	22	26	27	26
		39	24	43	20	42	37	24	42	43	37

bázis időszak	előrejelzés éve	CBD	binom. LC	binom. LC (jump)	M7	APC	APC (jump)	Poisson LC	Poisson LC (jump)	PLAT	PLAT (jump)
1960-1989 1960-1995 1960-2000 1960-2005	2006	42	17	15	4	49	36	18	14	33	28
		42	16	27	10	31	30	18	23	26	28
		41	20	36	21	39	35	22	37	41	34
		42	41	63	28	59	66	42	67	63	63
	2007	39	23	19	5	48	38	23	20	34	30
		40	21	28	7	30	30	22	26	28	28
		36	27	39	23	35	40	25	37	41	37
		36	43	57	26	60	64	41	66	55	61
	2008	40	23	21	6	49	40	24	20	29	26
		41	21	24	5	29	30	22	23	28	26
		38	25	31	20	32	35	24	31	33	30
		37	32	52	26	56	52	37	57	50	49
	2009	38	18	18	5	49	42	19	19	30	27
		38	19	23	7	32	30	19	21	30	27
		41	23	30	18	36	39	23	31	38	31
		44	29	52	22	63	51	31	54	49	50
	2010	37	19	19	4	46	38	17	19	30	28
		38	18	23	5	32	32	17	22	31	29
		44	20	28	19	34	33	19	28	33	27
		44	30	46	25	50	52	34	43	47	42
1960-1989 1960-1995 1960-2000 1960-2005 1960-2010	2011	36	18	17	3	45	36	17	15	26	28
		36	19	18	8	29	27	17	18	28	28
		42	22	31	17	31	32	22	30	31	27
		47	32	40	24	46	49	30	44	44	42
		45	52	62	32	59	74	54	71	60	70
	2012	38	19	20	3	44	37	20	18	32	29
		38	19	23	5	31	32	19	21	32	31
		47	25	27	22	34	27	25	26	32	23
		51	36	44	23	44	50	35	42	42	35
		44	49	63	28	57	72	49	73	57	68
	2013	29	23	17	5	39	37	21	17	32	29
		31	21	19	5	32	31	20	18	31	30
		45	22	26	22	31	31	22	27	30	27
		50	33	36	24	40	50	32	41	34	37
		48	48	64	26	53	72	52	70	52	64
	2014	33	16	14	4	42	38	15	14	32	29
		36	15	14	5	35	33	14	16	32	30
		49	20	22	17	35	31	20	21	35	22
		55	32	39	22	48	47	29	39	38	33
		52	48	60	20	56	69	49	68	58	55
2015	32	16	19	4	44	36	16	18	31	27	
	34	16	18	5	32	31	15	18	29	29	
	47	21	26	18	36	28	19	26	31	25	
	51	35	37	20	44	53	37	35	34	32	
	46	45	51	22	58	65	52	58	54	60	

bázis időszak	előrejelzés éve	CBD	binom. LC	binom. LC (jump)	M7	APC	APC (jump)	Poisson LC	Poisson LC (jump)	PLAT	PLAT (jump)
1960-1989 1960-1995 1960-2000 1960-2005 1960-2010 1960-2015 1990-2015	2016	30	13	14	5	35	34	13	14	31	29
		30	15	17	7	34	30	14	17	30	28
		47	16	20	14	34	31	17	21	30	28
		54	29	38	17	41	38	27	35	32	31
		50	50	47	20	54	56	51	54	41	41
		51	50	62	26	59	68	49	67	50	56
		49	55	57	15	60	63	57	62	63	61
	2017	32	20	16	4	41	40	19	15	32	32
		34	14	15	6	33	33	12	16	31	30
		45	18	28	15	35	38	17	24	35	32
		53	35	38	18	43	49	35	41	32	31
		44	46	49	20	47	61	51	55	39	49
		40	51	57	28	53	73	58	65	50	61
		40	57	59	19	75	72	64	66	76	70
	2018	26	18	17	5	36	30	19	19	30	26
		26	17	17	10	32	32	17	16	28	25
		45	20	24	15	30	26	20	25	25	21
		52	32	38	17	39	44	34	39	28	29
		46	46	46	10	51	54	48	54	39	36
		44	52	63	28	54	68	55	67	47	52
		41	57	64	14	70	71	56	69	70	73



## Irodalom

Ágoston *et al.* (2019): Ágoston, Kolos Csaba – Burka, Dávid – Kovács, Erzsébet – Vaskövi, Ágnes – Vékás, Péter, 2019, Klaszterelemzési eljárások halandósági adatokra. *Statisztikai Szemle* **97(7)**, pp 629–655.

<https://doi.org/10.20311/stat2019.7.hu0629>

*Alkema et al.* (2010): Alkema, Leontine – Raftery, Adrian E. – Gerland, Patrick – Clark, Samuel J. – Pelletier, Francois – Buettner, Thomas, 2010, Probabilistic projections of the total fertility rate for all countries. Working Paper No. 97, Center for Statistics and the Social Sciences, University of Washington.

<https://csss.uw.edu/Papers/wp97.pdf>

*Alkema et al.* (2011): Alkema, Leontine – Raftery, Adrian E. – Gerland, Patrick – Clark, Samuel J. – Pelletier, Francois – Buettner, Thomas – Heilig, Gerhard K., 2011, Probabilistic projections of the total fertility rate for all countries. *Demography* **48(3)**, pp 815–839.

<https://doi.org/10.1007/s13524-011-0040-5>

*Arató et al.* (2009): Arató, Miklós – Bozsó, Dávid – Elek, Péter – Zempléni, András, 2009, Forecasting and simulating mortality tables. *Mathematical and Computer Modelling* **49(3–4)**, pp 805–813.

<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.01.012>

*Bajkó et al.* (2015): Bajkó, Attila – Maknics, Anita – Tóth, Krisztián – Vékás, Péter, 2015, A magyar nyugdíjrendszer fenntarthatóságáról. *Közgazdasági Szemle* **62(12)**, pp 1229–1257.

<https://doi.org/10.18414/KSZ.2015.12.1229>

*Brillinger* (1986): Brillinger, D. R., 1986, The natural variability of vital rates and associated statistics. *Biometrics* **42(4)**, pp 693–734.

<https://doi.org/10.2307/2530689>

*Brouhns et al.* (2002): Brouhns, Natacha – Denuit, Michel – Vermunt, Jeroen K., 2002, A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics* **31(3)**, pp 373–393.

[https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(02\)00185-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(02)00185-3)

*Cairns et al.* (2006): Cairns, Andrew J. G. – Blake, David – Dowd, Kevin, 2006, A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration. *Journal of Risk and Insurance* **73(4)**, pp 687–718.

<https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2006.00195.x>

*Ediev* (2013): Ediev, Dalkhat M., 2013, Comparative importance of the fertility model, the total fertility, the mean age and the standard deviation of age at childbearing in population projections. Presented at IUSSP International Population Conference, 26–31 August 2013. Busan, South Korea.

[https://iussp.org/sites/default/files/event\\_call\\_for\\_papers/TF%20MS%20SD\\_what%20matters\\_StWr.pdf](https://iussp.org/sites/default/files/event_call_for_papers/TF%20MS%20SD_what%20matters_StWr.pdf)

*Enders (2014)*: Enders, Walter, 2014, Applied econometric time series. *Wiley Series*, 4th edition, New York.

*Hunt–Blake (2014)*: Hunt, Andrew – Blake, David, 2014, A general procedure for constructing mortality models. *North American Actuarial Journal* **18(1)**, pp 116–138.

<https://doi.org/10.1080/10920277.2013.852963>

*Hunt–Blake (2015)*: Hunt, Andrew – Blake, David, 2015, On the structure and classification of mortality models. *Pensions Institute Working Paper* PI-1506

<http://www.pensions-institute.org/wp-content/uploads/2019/workingpapers/wp1506.pdf>

*Klinger (1992)*: Klinger, András (szerk.), 1992, Történeti statisztikai idősorok, 1867-1992, I. kötet, Népeesség–népmozgalom. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest.

*Lee (2000)*: Lee, Ronald, 2000, The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal* **4(1)**, pp 80–93.

<https://doi.org/10.1080/10920277.2000.10595882>

*Lee–Carter (1992)*: Lee, Ronald – Carter, Lawrence R., 1992, Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* **87(419)**, pp 659–671.

<https://doi.org/10.2307/2290201>

*Lee–Miller (2001)*: Lee, Ronald – Miller, Timothy, 2001, Evaluating the performance of the Lee-Carter method for forecasting mortality. *Demography* **38(4)**, pp 537–549.

<https://doi.org/10.1353/dem.2001.0036>

*Lee–Tuljapurkar (1994)*: Lee, Ronald D. – Tuljapurkar, Shripad, 1994, Stochastic population forecasts for the United States: Beyond high, medium and low. *Journal of the American Statistical Association* **89(428)**, pp 1175–1189.

<https://doi.org/10.2307/2290980>

*Li–Gerland (2009)*: Li, Nan – Gerland, Patrick, 2009, Modelling and projecting the postponement of childbearing in low-fertility countries. Presented at the IUSSP International Population Conference, 27 September–2 October 2009. Marrakesh, Morocco.

<https://iussp2009.princeton.edu/papers/90315>

*Plat (2009)*: Plat, Richard, 2009, On stochastic mortality modeling. *Insurance: Mathematics and Economics* **45(3)**, pp 393–404.

<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2009.08.006>

*Renshaw–Haberman (2006)*: Renshaw, Arthur – Haberman, Steven, 2006, A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* **38(3)**, pp 556–570.

<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.12.001>

Ševčíková *et al.* (2011): Ševčíková, Hana – Alkema, Leontine – Raftery, Adrian E., 2011, bayesTFR: An R package for probabilistic projections of the total fertility rate. *Journal of Statistical Software* **43(1)**, pp 1–29.

<https://doi.org/10.18637/jss.v043.i01>

Ševčíková *et al.* (2016): Ševčíková, Hana – Li, Nan – Kantorová, Vladimíra – Gerland, Patrick – Raftery, Adrian E., 2016, Age-specific mortality and fertility rates for probabilistic population projections. In Schoen, Robert (ed.), *Dynamic Demographic Analysis*. The Springer Series on Demographic Methods and Population Analysis 39. Cham, Springer, pp 285–310.

[https://doi.org/10.1007/978-3-319-26603-9\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26603-9_15)

Thatcher *et al.* (1998): Thatcher, A. Roger – Kannisto, Väinö – Vaupel, James W., 1998, The force of mortality at ages 80 to 120. *Odense Monographs on Population Aging Series*, No. 5, Odense University Press.

<https://www.demogr.mpg.de/Papers/Books/Monograph5/ForMort.htm>

Vékás (2019): Vékás, Péter, 2019, Az élettartam-kockázat modellezése. Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest. ISBN 978-963-503-768-1

[http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/4112/1/elettartam\\_0612.pdf](http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/4112/1/elettartam_0612.pdf)

Villegas *et al.* (2018): Villegas, Andrés M. – Kaishev, Vladimir K. – Millosovich, Pietro, 2018, StMoMo: An R package for stochastic mortality modeling. *Journal of Statistical Software* **84(3)**, pp 1–38.

<https://doi.org/10.18637/jss.v084.i03>

Wilmoth (1993): Wilmoth, John R., 1993, Computational methods for fitting and extrapolating the Lee–Carter model of mortality change. Technical Report, Department of Demography, University of California, Berkeley.

<https://u.demog.berkeley.edu/~jrw/Papers/LCtech.pdf>