Egyetemi doktori disszertáció

FELSZÁLLÓ FATRANSZFORMÁCIÓK KOMPOZÍCIÓI

VÁGVÖLGYI SÁNDOR

József Attila Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Szeged, 1987

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2. oldal
I. Determinisztikus felszálló fatranszformációk	4. oldal
I.1. Alapfogalmak	4. oldal
I.2. Egyenlőségek és tartalmazások	10. oldal
I.3. A részosztályok kompoziciói	21. oldal
II. Fatranszformációk végtelen hiarerhiája az $\mathcal{NDR}$ osztályon belül	27. oldal
II.1. Alapfogalmak	27. oldal
II.2. Az $\mathcal{UNDR}^{m} \subseteq \mathcal{UNDR}^{m+1}$ $(m \geq 1)$ hiarerhia	31. oldal
III. Nemdeterminisztikus felszálló fatranszformációk kompoziciói	53. oldal
III.1. Alapfogalmak	53. oldal
III.2. Deriváció sorozatok	56. oldal
III.3. k-szinkronizált felszálló fatranszformátorok	75. oldal
III.4. Példa	110. oldal
Irodalomjegyzék	114. oldal

Bevezetés

Ismeretes, hogy sem a felszálló fatranszformációk osztálya ($\mathcal{R}$), sem a determinisztikus felszálló fatranszformációk osztálya ($\mathcal{D}\mathcal{R}$) nem zárt a kompozicióra ([4], [7]). Fennállnak a következő valódi tartalmazások:

$$\mathcal{R}^k \subset \mathcal{R}^{k+1} \qquad k = 1,2,\ldots\ .$$
$$\mathcal{D}\mathcal{R} \subset \mathcal{D}\mathcal{R}^2$$

Az értekezés első fejezetében megmutatjuk, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$\mathcal{D}\mathcal{R}^2 = \mathcal{D}\mathcal{R}^k \qquad k = 2,3,4,\ldots\ .$$

Majd a $\mathcal{D}\mathcal{R}$ osztály speciális osztályainak a kompozicióját vizsgáljuk.

Tekintsük az $M = \{\mathcal{D}\mathcal{R}, \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{R}, \mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R}, \mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{L}\mathcal{H}, \mathcal{N}\mathcal{H}\}$ halmazt, ahol $\mathcal{D}\mathcal{R}$ a determinisztikus felszálló fatranszformációk osztálya, $\mathcal{H}$ a homomorfizmusok osztálya, továbbá e két osztály lineáris, nem törlő, lineáris nem törlő részosztályát az $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}\mathcal{N}$ prefix előreirásával jelöljük. Legyen $[M]$ a kompozició által generált transzformációk halmaza!

$[M] = \{\mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_n \mid n \geq 1,\ \mathcal{H}_i \in M,\ 1 \leq i \leq n\}$.

Jelölje $\mathcal{C}_k$ az $(\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^k$ osztályt!

Az M halmaz következő jellemzését adjuk meg.

Megadható $[M]$-nek két olyan M_1, M_2 véges részhalmaza, hogy $[M]$ minden $\mathcal{C}$ elemére az (a), (b), (c) állitások valamelyike teljesül.

(a) $\mathcal{C} \in M_1$,

(b) létezik $\mathcal{C}' \in M_2$ és $k \geq 0$, hogy $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \circ \mathcal{C}_k$,

(c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ valamely $k \geq 0$-ra.

A második fejezetben bebizonyitjuk, hogy az $[M]$ halmaz végtelen sok elemet tartalmaz. Bebizonyitjuk, hogy az $(\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^m$ $m = 1,2,\ldots$ osztályok végtelen hierarhiát alkotnak, azaz fennállnak a

$$(\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^m \subset (\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^{m+1} \qquad m = 1,2,\ldots$$

valódi tartalmazások.

A harmadik fejezetben a nemdeterminisztikus felszálló fatranszformációk kompozicióival foglalkozunk. Bevezetjük a k-szinkronizált felszálló fatranszformátor fogalmát. Az ilyen tipusu fatranszformátorok képesek indukálni az összes olyan transzformációt, amely előáll k darab felszálló fatranszformátor által indukált transzformáció kompoziciójaként.

Forditva, megmutatjuk, hogy bármely k-szinkronizált felszálló fatranszformátor által indukált transzformáció előáll k darab felszálló fatranszformátor által indukált transzformáció kompoziciójaként.

Az első fejezetben közölt eredmények [5]-ben, a második fejezet eredményei [9]-ben, a harmadik fejezet eredményei [8]-ban találhatóak meg.

Megjegyezzük, hogy M. Dauchet [2] disszertációjában a III. fejezet eredményeihez hasonló eredményeket ért el a magmoidok elméletének felhasználásával.

I. fejezet Determinisztikus felszálló fatranszformációk

1. Alapfogalmak

Bevezetjük a dolgozatban szereplő alapvető fogalmakat és jelöléseket.

Legyen Y tetszőleges halmaz. $|Y|$ jelöli Y halmaz számosságát, P(Y) Y részhalmazainak halmazát. Ha Y egy elemü, akkor egyetlen elemével jelöljük. Y^* az Y elemei és az üres szó által generált monoid.

A nemnegativ egész számok halmazát N jelöli. Minden $n \in N$ egészre $[n]$ jelöli az $\{1,\dots,n\}$ halmazt, speciálisan $[0] = \emptyset$.

Rangolt ábécé alatt egy F véges halmazt és $\nu: F \to N$ leképezést értünk, ahol ν minden $f \in F$ elemhez annak aritását rendeli. Minden $m \geq 0$ számra

$$F^m = \{f \in F \mid \nu(f) = m\}$$

az m aritásu függvény szimbólumok halmaza.

Legyen az Y halmaz diszjunkt az F rangolt ábécével. Az Y feletti F-fák $T_F(Y)$ halmazát a következő módon definiáljuk:

i/ $F^0 \cup Y \subseteq T_F(Y)$,

ii/ $f(p_1,\dots,p_m) \in T_F(Y)$ valahányszor $m \geq 1$, $f \in F^m$ és $p_1,\dots,p_m \in T_F(Y)$, és

iii/ minden Y feletti F-fa az i/ és ii/ szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Ha $Y = \emptyset$, akkor a $T_F(Y)$ halmazt egyszerüen T_F-fel jelöljük.

A $T \subseteq T_F(Y)$ halmazt Y feletti F-erdőnek nevezzük.

A $p \in T_F(Y)$ fa $h(p) \in N$ magasságát, $fr(p) \subseteq Y^*$ határát, és $sub(p) \subseteq T_F(Y)$ részfáinak a halmazát a következő módon értelmezzük:

(a) ha $p \in F^0$, akkor $h(p) = 0$, $fr(p) = e$ és $sub(p) = \{p\}$;

(b) ha $p \in Y$, akkor $h(p) = 0$, $fr(p) = p$ és $sub(p) = \{p\}$;

(c) ha $p = f(p_1,\dots,p_m)$, akkor $h(p) = 1+\max(h(p_i) \mid i \in [m])$,

$fr(p) = fr(p_1)\dots fr(p_m)$ és

$sub(p) = \bigcup_{i \in [m]} sub(p_i) \cup \{p\}$.

Bevezetjük az $X = \{x_1,x_2,\dots\}$ segédváltozó halmazt. Jelölje X_n $(n \geq 0)$ az X halmaz $\{x_1,\dots,x_n\}$ részhalmazát. Vegyük észre, hogy $X_0 = \emptyset$.

A $\hat{T}_F(X_n) \subseteq T_F(X_n)$ halmazt a következő módon definiáljuk: $p \in \hat{T}_F(X_n)$ akkor és csak akkor, ha $p \in T_F(X_n)$ és $fr(p)$ X_n-nek egy permutációja, azaz X_n-nek minden eleme pontosan egyszer fordul elő a p fában.

Legyen $p \in T_F(X_n)$ és $y_1,\dots,y_n \in Y$. A $p(y_1,\dots,y_n) \in T_F(Y)$ fát ugy kapjuk meg, hogy p-ben az x_i változó minden előfordulását y_i-vel helyettesitjük minden $i \in [n]$-re.

A τ $(\subseteq T_F \times T_G)$ alaku részhalmazokat fatranszformációknak nevezzük. A $(p,q) \in \tau$ tartalmazást ugy interpretáljuk, hogy τ áttranszformálja p-t q-ba. Ha τ-t T_F és T_G elemei közötti relációnak tekintjük, akkor a $(\tau_1 \circ \tau_2)$ kompoziciót természetes módon értelmezhetjük. Ez ismét fatranszformáció lesz. A τ fatranszformáció

$\{p \mid (\exists q)\ ((p,q) \in \tau)\}$ értelmezési tartománya és

$\{q \mid (\exists p)\ ((p,q) \in \tau)\}$ értékkészlete a szokásos jelentéssel fog birni. Továbbá a τ reláció $T \subseteq T_F$ halmazra való megszoritása

$\tau | T = \{(p,q) | (p,q) \in \tau$ és $p \in T\}$.

Az $\iota_F = \{(p,p) | p \in T_F\}$ identitás reláció szintén fatranszformáció. Az identitás fatranszformációk osztályát $\mathcal{J}$-vel jelöljük.

Legyen $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ két fatranszformáció osztály.
$\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ kompoziciója alatt a
$\{\tau_1 \circ \tau_2 | \tau_1 \in \mathcal{H}_1, \tau_2 \in \mathcal{H}_2\}$ osztályt értjük. Tetszőleges $\mathcal{H}$ fatranszformáció osztályra és $n \in N$ számra legyen
$\mathcal{H}^n = \mathcal{H}$ ha $n = 1$ és $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^{n-1} \circ \mathcal{H}$ ha $n > 1$.
Azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ zárt a kompozicióra, ha $\mathcal{H}^2 \subseteq \mathcal{H}$ teljesül.
Ha $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{H}$, akkor a $\mathcal{H}^2 \subseteq \mathcal{H}$ tartalmazás ekvivalens a
$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}$ egyenlőséggel.

Az $\mathfrak{A} = (F, A, G, A', \Sigma)$ /1/

rendszert felszálló fatranszformátornak /R-transzformátornak/ nevezzük, ahol

(a) F és G rangolt ábécék,

(b) A egy aritásu szimbólumokból álló rangolt ábécé,
A diszjunkt az F és G halmazokkal, az állapothalmaz,

(c) $A' \subseteq A$, a kezdő állapot halmaz,

(d) Σ az átirási szabályok véges halmaza, Σ elemei az alábbi alakuak:

$a(f(x_1, \dots, x_m)) \to q,$ /2/

ahol $a \in A$, $m \geq 0$, $f \in F_m$ és $q \in T_G(A \times X_m)$.

A következőkben, ha $a \in A$ állapot, t pedig fa, akkor $a(t)$ helyett az at jelölést használjuk.

Ha a /2/ átirási szabályt részletesebben akarjuk leirni, akkor választhatjuk az alábbi alakot:

$$af(x_1,\dots,x_m)\to \bar{q}(a_1x_{i_1},\dots,a_nx_{i_n}) \qquad /3/$$

ahol $n\geq 0$, $\bar{q}\in T_G(X_n)$, $a_j\in A$, $x_{i_j}\in X_m$, $(j\in[n])$, vagy irhatjuk az

$$af(x_1,\dots,x_m)\to \bar{q}(a_{1_1}x_1,\dots,a_{1_{n_1}}x_1,\dots$$

$$\dots,a_{m_1}x_m,\dots,a_{m_{n_m}}x_m) \qquad /4/$$

alakban, ahol $n_i\geq 0$, $a_{i_j}\in A$, $(i\in[m],\ j\in[n_i])$ és $\bar{q}\in T_G(X_n)$, ahol $n=n_1+\dots+n_m$.

Tekintsünk két $p,q\in T_G(A\times T_F(X))$ fát, azt mondjuk, hogy q a p fából megkapható közvetlen derivációval $\mathfrak{N}$-ban, ha q a p fából ugy áll elő, hogy az $af(p_1,\dots,p_m)$ részfának valamely p-beli előfordulását a $\bar{q}(a_1p_{i_1},\dots,a_np_{i_n})$ alaku fával helyettesitjük, feltéve, hogy a /3/ átirási szabály eleme Σ-nak. Az $\mathfrak{N}$-beli közvetlen derivációt $\Rightarrow_{\mathfrak{N}}$-val jelöljük. A $\Rightarrow_{\mathfrak{N}}$ reláció reflexiv-tranzitiv lezártját $\overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{N}}$ fogja jelölni.

A $\tau_{\mathfrak{N}(a)}=\{(p,q)\mid p\in T_F,\ q\in T_G\ ap\overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{N}}q$ relációt az $\mathfrak{N}$ felszálló fatranszformátor $a\in A$ állapota által indukált transzformációnak nevezzük.

A $\tau\subseteq T_F\times T_G$ fatranszformáció indukálható (D)R-transzformátorral, ha $\tau=\tau_{\mathfrak{N}}$ valamely (D)R transzformátorra.

A következőkben az R transzformátorok speciális osztályait definiáljuk.

i/ Az /1/R-transzformátor determinisztikus (D), ha nincs két olyan különböző átirási szabálya, amelyek bal oldalai megegyeznek és $|A'| = 1$.

ii/ Az /1/R-transzformátor teljesen definiált, ha tetszőleges $a \in A$ állapotra és $f \in F$ szimbólumra létezik /2/ szabály Σ-ban.

iii/ Az /1/R-transzformátort homomorfizmusnak (H) nevezzük, ha determinisztikus, teljesen definiált, és egy állapota van, azaz $A = \{a_o\}$ teljesül.

iv/ Az /1/R-transzformátor lineáris (L) ha minden /4/ szabályára és minden $i \in [m]$ számra $n_i \leq 1$,

v/ Az /1/R-transzformátor nemtörlő (N) ha minden /4/ szabályára és $i \in [m]$ számra $n_i \geq 1$,

vi/ Az /1/R-transzformátor lineáris nemtörlő, ha /1/ lineáris és nemtörlő.

A H transzformátorok L,N,LN részosztályait hasonló módon definiáljuk.

A következőkben jelölje

DR a determinisztikus R-transzformátorok,

LDR a lineáris determinisztikus R-transzformátorok,

LNDR a lineáris nemtörlő determinisztikus R-transzformátorok,

NDR a nemtörlő determinisztikus R-transzformátorok,

H a homomorfizmusok,

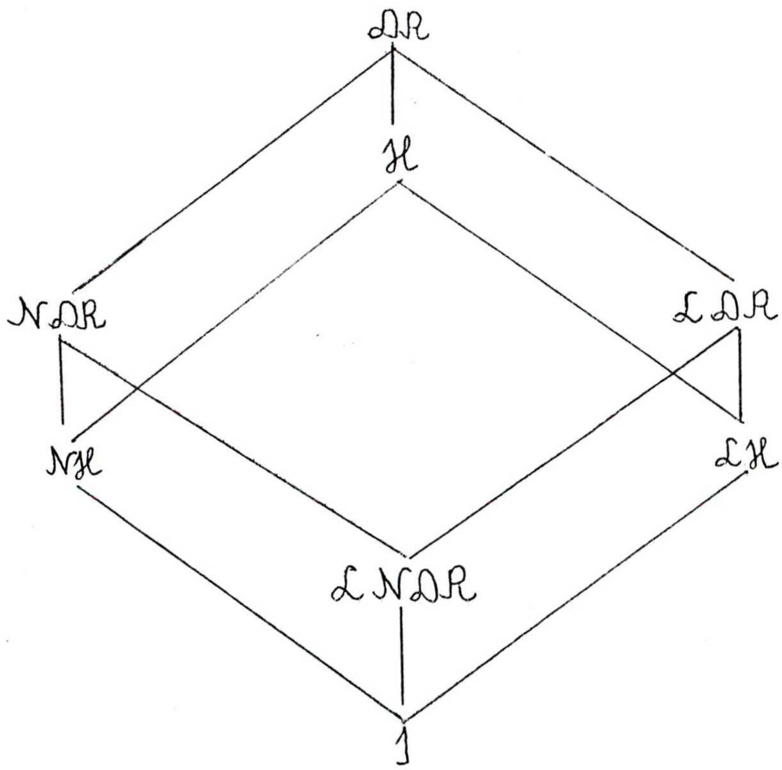
LH a lineáris homomorfizmusok,

LNH a lineáris nemtörlő homomorfizmusok,

NH a nemtörlő homomorfizmusok osztályát.

Az LR, LNR, NR osztályokat hasonlóan értelmezzük.

Legyen K valamelyik fent definiált osztály. A K-transzformátorok által indukált transzformációk osztályát $\mathcal{K}$-val jelöljük. Például $\mathcal{LDR}$ jelöli az LDR-fatranszformátorok által indukált fatranszformációk osztályát.
A $\mathcal{DR}$ osztály és részosztályai közötti tartalmazásokat az alábbi diagram mutatja be.



1. ábra

2. Egyenlőségek és tartalmazások

Ismeretes, hogy $\mathcal{DR}$ nem zárt a kompozicióra ([7]).
Ez azt jelenti, hogy adott $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ DR-transzformátorokhoz általában nem tudunk megadni egy $\mathfrak{C}$ DR-transzformátort, hogy a $\tau_{\mathfrak{C}} = \tau_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{B}}$ egyenlőség teljesüljön.
Mindazonáltal definiálhatunk egy $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ DR-transzformátort, amit $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ kompoziciójának nevezünk és amelynek egy sereg hasznos tulajdonsága van.

1.1. definició. Legyenek $\mathfrak{A} = (F,A,G,\Sigma,a_0)$ és $\mathfrak{B} = (G,B,H,\Sigma',b_0)$ DR-transzformátorok. $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ szintaktikus kompozicióján azt az $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = (F,B\times A,H,\Sigma'',(b_0,a_0))$ DR-transzformátort értjük, amelyre Σ'' az alábbi módon van definiálva: a

$$(b,a)f(x_1,\dots,x_m) \to q'((b_{1_1},a_1)x_{i_1},\dots,(b_{1_{v_1}},a_1)x_{i_1},\dots$$
$$\dots,(b_{n_1},a_n)x_{i_n},\dots,(b_{n_{v_n}},a_n)x_{i_n})$$

szabály eleme Σ''-nek, (ahol $v_j \in N$, $b_{j_k} \in B$, $(j \in [n],\ k \in [v_j])$ és $q' \in T_G(X_v)$ $v = (v_1+\dots+v_n)$) akkor és csakis akkor, ha létezik /3/ alaku szabály Σ-ban, és fennáll az alábbi $b\bar{q} \overset{*}{\underset{\mathfrak{B}}{\Rightarrow}} q'(b_{1_1}x_1,\dots,b_{1_{v_1}}x_1,\dots,b_{n_1}x_n,\dots,b_{n_{v_n}}x_n)$ deriváció.
/ $\mathfrak{B}$ leforditja a $\bar{q}$ fát egészen a levelekig./

<u>1.2. lemma.</u> A fenti definició jelöléseit felhasználva minden $a \in A$, $b \in B$ állapotra, $p \in T_F$, $q \in T_H$ fára

$$(\exists r \in T_G)(ap \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}} r \wedge br \Rightarrow^*_{\mathfrak{B}} q) \Rightarrow (b,a)p \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}} q. \qquad /5/$$

A bizonyitás a p fa magassága szerinti teljes indukcióval végezhető el. $\square$

A következő állitások igazak:

(a) Az /5/ implikáció nem forditható meg, mert $\mathfrak{B}$ lehet törlő, azaz előfordulhat, hogy valamely $p \in T_F$ fát $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ ugy fordit le, hogy p-nek valamely p' részfáját kitörli, ugyanakkor $\mathfrak{A}$ nem tudja leforditani a p' részfát azzal az állapotával, amellyel a p' alá ért. Eképpen $p \in dom\,\tau_{\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}}$, ugyanakkor $p \notin dom\,\tau_{\mathfrak{A}}$, tehát $p \notin dom(\tau_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{B}})$. E probléma kiküszöbölhető, ha megköveteljük $\mathfrak{A}$-tól, hogy teljesen definiált legyen /vö [7]/, vagy ha feltesszük $\mathfrak{B}$-ről, hogy nem törlő.

(b) /5/ megforditható, ha $p \in dom\,\tau_{\mathfrak{A}}$, mivel ebben az esetben $\mathfrak{A}$ leforditja a p' részfát azzal az állapotával, amellyel a részfa alá ért.

(c) Igazak az alábbi implikációk:

i/ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ teljesen definiált $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ teljesen definiált,

ii/ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ egy állapotu $\Rightarrow$ $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ egy állapotu,

iii/ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in N \Rightarrow \mathfrak{A}\circ\mathfrak{B} \in N$,

iv/ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in L \Rightarrow \mathfrak{A}\circ\mathfrak{B} \in L$,

v/ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in LN \Rightarrow \mathfrak{A}\circ\mathfrak{B} \in LN$.

A fenti megjegyzések összegzése az alábbi lemma /vö [1]/.

<u>1.3. lemma.</u> Tetszőleges $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ DR-transzformátorokra az alábbiak teljesülnek:

(a) Ha $\mathcal{A}$ teljesen definiált, vagy $\mathcal{B}$ nem törlő, akkor

$$\tau_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{A}} \circ \tau_{\mathcal{B}} ,$$

(b) $\tau_{\mathcal{A}\circ\mathcal{B}} | \mathrm{dom}\, \tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}} \circ \tau_{\mathcal{B}}$,

(c) ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ x, akkor $\mathcal{A}\circ\mathcal{B}$ is x, ahol x = teljesen definiált, egy állapotu, L,N,LN. $\square$

A fenti lemmákból több egyenlőség következik, némelyik már ismert előző munkákból.

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{DR} = \mathcal{DR} \qquad /6/$$

$$\mathcal{LH} \circ \mathcal{DR} = \mathcal{DR} \qquad /7/$$

$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{DR} = \mathcal{DR} \qquad /8/$$

$$\mathcal{LH} \circ \mathcal{LDR} = \mathcal{LDR} \qquad /9/$$

$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{NDR} = \mathcal{NDR} \qquad /10/$$

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \qquad /11/$$

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{NH} = \mathcal{H} \qquad /12/$$

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{LH} = \mathcal{H} \qquad /13/$$

$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \qquad /14/$$

$$\mathcal{LH} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \qquad /15/$$

$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{NH} = \mathcal{NH} \qquad /16/$$

$$\mathcal{LH} \circ \mathcal{LH} = \mathcal{LH} \qquad /17/$$

A fenti egyenlőségek azért állnak fenn, mert a H(NH,LH) transzformátorok teljesen definiáltak.

Továbbá, szintén igazak az alábbi egyenlőségek:

$$\mathcal{DR} \circ \mathcal{NDR} = \mathcal{DR} \qquad /18/$$

$$\mathcal{DR} \circ \mathcal{LNDR} = \mathcal{DR} \qquad /19/$$

$$\mathcal{DR} \circ \mathcal{NH} = \mathcal{DR} \qquad /20/$$

$$\mathcal{NDR} \circ \mathcal{NDR} = \mathcal{NDR} \qquad /21/$$

$$\mathcal{NDR} \circ \mathcal{LNDR} = \mathcal{NDR} \qquad /22/$$

$$\mathcal{NDR} \circ \mathcal{NH} = \mathcal{NDR} \qquad /23/$$

$$\mathcal{LDR} \circ \mathcal{LNDR} = \mathcal{LDR} \qquad /24/$$

$$\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NDR} = \mathcal{NDR} \qquad /25/$$

$$\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LNDR} = \mathcal{LNDR} \qquad /26/$$

Itt azt használtuk fel, hogy a második komponensek nemtörlő fatranszformáció osztályok.

Egy közismert egyenlőség a

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{LDR} = \mathcal{DR}, \qquad /27/$$

amely megtalálható [1]-ben és [3]-ban.

/27/ bizonyitásából következik, hogy igaz az alábbi

$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{LDR} = \mathcal{DR} \qquad /28/$$

egyenlőség is. Továbbá igaz az

$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{LH} = \mathcal{H} \qquad /29/$$

egyenlőség is. Az 1.3. lemma alapján $\mathcal{LH} \circ \mathcal{NH} \subseteq \mathcal{H}$.
A forditott irányu tartalmazást a következő lemma mondja ki:

1.4. lemma $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{LH} \circ \mathcal{NH}$.

Bizonyitás. Legyen $\mathfrak{A} = (F,a,G,\Sigma,a)$ egy H transzformátor. Nyilvánvaló, hogy minden átirási szabály az alábbi alakban irható:

$$af(x_1,\ldots,x_m) \to q(ax_{i_1},\ldots,ax_{i_n}) \qquad /30/$$

ahol $m \geq 0$, $f \in F_m$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$, $q \in T_G(X_n)$. Minden egyes /30/ átirási szabályra vezessünk be egy uj, n aritású $\bar{f}$ müveleti szimbólumot és tekintsük az $\bar{F} = \{\bar{f} \mid f \in F\}$ rangolt ábécét.

A $\mathcal{L} = (F,b,\bar{F},\Sigma',b)$ és $\mathcal{C} = (\bar{F},c,G,\Sigma'',c)$ H-transzformátorokat a következő módon definiáljuk: valahányszor a /30/ átirási szabály eleme Σ-nak, mindannyiszor

$$bf(x_1,\ldots,x_m) \to \bar{f}(bx_{i_1},\ldots,bx_{i_n}) \in \Sigma' \text{ és}$$

$$c\bar{f}(x_1,\ldots,x_n) \to q(cx_1,\ldots,cx_n) \in \Sigma''.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{L}$ LH és $\mathcal{C}$ NH transzformátor, továbbá az

$$ap \overset{*}{\underset{\mathfrak{A}}{\Longrightarrow}} q \Leftrightarrow (\exists r \in T_{\bar{F}})(bp \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} r \wedge cr \overset{*}{\underset{\mathcal{C}}{\Longrightarrow}} q)$$

ekvivalencia minden $p \in T_F$, $q \in T_G$ fára igazolható, a p fa magassága szerinti teljes indukcióval.

A fentiek szerint az

$$\mathcal{LH} \circ \mathcal{NH} = \mathcal{H} \qquad /31/$$

egyenlőség teljesül.

A következő lemma [6] 213. oldalán lévő 2. gyakorlat következménye. A gyakorlat kimondja, hogy bármely $\mathfrak{A}$ DR transzformátorra dom $\tau_{\mathfrak{A}}$ felismerhető valamely DR-automatával /a DR-automata definiciója megtalálható [6]-ban/. Megjegyezzük, hogy a következő módositást kell eszközölni a DR-automata [6]-beli definiciójában: egy 0 aritásu müveleti szimbólum realizáltja nem az állapothalmaz eleme, hanem az állapothalmaz részhalmaza.

<u>1.5. lemma.</u> Bármely adott $\mathfrak{A} = (F,A,G,\Sigma,a_0)$ DR-transzformátorhoz létezik egy $\mathfrak{A}' = (F,P(A),F,\Sigma',\{a_0\})$ LNDR-transzformátor, hogy $\tau_{\mathfrak{A}'} = \iota_F | \mathrm{dom}\, \tau_{\mathfrak{A}}$.

<u>Bizonyitás.</u> A Σ' átirási szabály halmazt az alábbi módon konstruáljuk meg: legyen $B = \{a_1,\dots,a_k\} \in P(A)$, $m \in N$ és $f \in F_m$ tetszőleges,

$$Bf(x_1,\dots,x_m) \to f(B_1x_1,\dots,B_mx_m) \in \Sigma'$$ akkor és csak akkor, ha a következő feltételek teljesülnek:

(a) minden $i \in [k]$-ra létezik

$$a_if(x_1,\dots,x_m) \to q_i(a^i_{1_1}x_1,\dots,a^i_{1_{n_1}}x_1,\dots,$$
$$a^i_{m_1}x_m,\dots,a^i_{m_{n_m}}x_m)$$

alaku átirási szabály Σ-ban, ahol

$n_1,\dots,n_m \geq 0$ /i-től függenek/, $a^i_{j_k} \in A$, $(j \in [m],\ k \in [n_j])$, $q_i \in \hat{T}_G(X_n)$, $(n = n_1+\dots+n_m)$;

(b) $B_j = \bigcup_{i \in [n]} \{a^i_{j_1},\dots,a^i_{j_{n_j}}\}$, $j \in [m]$.

Most igazolható a következő állitás: tetszőleges $B = \{a_1,\dots,a_k\} \in P(A)$ halmazra és $p \in T_F$ fára

$$Bp \underset{\mathfrak{A}'}{\overset{*}{\Longrightarrow}} p \Leftrightarrow (\forall j \in [k])(\exists q \in T_G)(a_jp \underset{\mathfrak{A}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} q). \ \square$$

Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két tetszőleges DR-transzformátor. Az 1.3 és 1.5 lemma alapján

$$\tau_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}} | \mathrm{dom}\,\tau_{\mathfrak{A}} = (1_F | \mathrm{dom}\,\tau_{\mathfrak{A}}) \circ \tau_{\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}} =$$
$$= \tau_{\mathfrak{A}'} \circ \tau_{\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}}$$

ahonnan

$$\mathcal{DR}^2 = \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR}, \qquad /32/$$

továbbá ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ LDR-transzformátorok, akkor

$$\mathcal{LDR}^2 = \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LDR} \qquad /33/$$

A következőkben bebizonyitjuk egyik fő eredményünket.

<u>1.6. tétel.</u> Minden $n \geq 2$ számra

$$\mathcal{DR}^{n} = \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR} \qquad \text{és} \qquad /34/$$

$$\mathcal{LDR}^{n} = \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LDR} \qquad /35/$$

<u>Bizonyitás.</u> n szerinti teljes indukcióval. Az $n = 2$ esetet már igazoltuk, /34/ indukciós lépését /és hasonlóan /35/ indukciós lépését/ az alábbi számolás mutatja

$$\mathcal{DR}^{n+1} \overset{/32/}{=} \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR} \circ \mathcal{DR}^{n-1} = \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR}^{n} \overset{\text{i.h.}}{=}$$
$$= \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR} \overset{/26/}{=} \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR} \; . \square$$

<u>1.7. következmény.</u> Fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\mathcal{DR}^{n} = \mathcal{DR}^{2} \qquad n \geq 2, \qquad /36/$$

$$\mathcal{LDR}^{n} = \mathcal{LDR}^{2} \qquad n \geq 2, \qquad /37/$$

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi eredményre.

<u>1.8. lemma.</u> $\mathcal{DR} \subseteq \mathcal{NDR} \circ \mathcal{LH}$.

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $\mathfrak{A} = (F, A, G, \Sigma, a_0)$ DR-transzformátor. Megkonstruáljuk a $\mathfrak{B}$ NDR-transzformátort és a $\mathfrak{C}$ LH-transzformátort, hogy a $\tau_{\mathfrak{A}} = \tau_{\mathfrak{B}} \circ \tau_{\mathfrak{C}}$ egyenlőség teljesüljön. Sorszámozzuk meg a Σ-beli átirási szabályokat, 1-től $|\Sigma|$-ig a következő módon

$$i:\ af(x_1,\dots,x_m) \to \bar{q}(a_{1_1}x_1,\dots,a_{1_{n_1}}x_1,\dots,a_{m_1}x_m,\dots,\ a_{m_{n_m}}x_m), \qquad /39/$$

ahol $n_j \geq 0$, $a_{j_k} \in A$, $(j \in [m],\ k \in [n_j])$ és $\bar{q} \in \hat{T}_G(X_n)$, $(n = n_1+\dots+n_m)$. Megemlitjük, hogy az i-edik átirási szabály fenti leirásában a szimbólumok függenek i-től. Most minden $i \in [|\Sigma|]$ -ra és $j \in [m]$-re definiáljuk az u_j számot:

$$u_j = \begin{cases} n_j & \text{ha } n_j > 0 \\ 1 & \text{ha } n_j = 0 \end{cases}$$

és bevezetünk egy uj $f_i \notin F$ müveleti szimbólumot, amelynek az aritása $u = u_1+\dots+u_m$.

Tekintsük a $\mathcal{B} = (F, A \cup \{b\}, F', \Sigma', a_0)$ DR transzformátort, ahol

(a) $F' = F \cup \{f_i \mid i \in |\Sigma|\}$;

(b) $b \notin A$ egy uj állapot,

(c) Σ'-t a következő módon definiáljuk:

az $$af(x_1,\dots,x_m) \to f_i(b_{1_1}x_1,\dots,b_{1_{u_1}}x_1,\dots,b_{m_1}x_m,\dots\ \dots,b_{m_{u_m}}x_m) \qquad /40/$$

eleme Σ'-nek akkor és csak akkor, ha

i/ Σ i-edik produkciója /39/ alaku és

$$ii/\quad b_{j_1}\dots b_{j_{u_j}} = \begin{cases} a_{j_1}\dots a_{j_{u_j}} & \text{ha } n_j > 0 \\ b & \text{ha } n_j = 0 \end{cases} \qquad j \in [m]$$

teljesülnek, továbbá a $bf(x_1,\dots,x_m) \to f(bx_1,\dots,bx_m)$ eleme Σ'-nek minden $m \geq 0$, $f \in F_m$-re.

Tekintsük a $\mathcal{L} = (F',c,G,\Sigma'',c)$ H-transzformátort, ahol a

$$cf_i(x_1,\dots,x_n) \to \bar{q}(cx_1,\dots,cx_{n_1},\dots, cx_{u_1+\dots+u_{m-1}+1},\dots,cx_{u_1+\dots+u_{m-1}+n_m}) \qquad /41/$$

eleme Σ''-nek akkor és csakis akkor, ha Σ i-edik átirási szabálya /39/, továbbá, hogy $\mathcal{L}$ teljesen definiált legyen, minden $m \geq 0$, $f \in F^m$-re a

$$cf(x_1,\dots,x_m) \to q \text{ szabály eleme } \Sigma''\text{-nek valamely}$$

$q \in T_G(\{c\} \times X_m)$ fára.

$\mathcal{B}$ nemtörlő, mivel $u_j \geq 1$, $(j \in [m])$,

$\tau_{\mathcal{B}(b)} | T_F = \iota_F$ és $\mathcal{L}$ lineáris.

Ahhoz, hogy bebizonyitsuk a $\tau_{\mathfrak{A}} = \tau_{\mathcal{B}} \circ \tau_{\mathcal{L}}$ egyenlőséget, elegendő megmutatni, hogy minden $a \in A$, $p \in T_F$, $q \in T_G$-re teljesül az alábbi ekvivalencia:

$$ap \overset{*}{\underset{\mathfrak{A}}{\Rightarrow}} q \qquad /42/$$

akkor és csak akkor, ha

$$(\exists r \in T_{F'})\,(ap \overset{*}{\underset{\mathcal{B}}{\Rightarrow}} r \wedge cr \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} q) \qquad /43/$$

h(p) szerinti teljes indukcióval bizonyitunk.

Ha $h(p) = 0$, azaz $p = f \in F_0$, akkor $af \to q \in \Sigma$ akkor és csak akkor, ha létezik egy $i \in [|\Sigma|]$ amelyre $af \to f_i \in \Sigma'$ és $cf_i \to q \in \Sigma''$.

Legyen $h(p) \geq 0$, azaz $p = f(p_1,\dots,p_m)$, ahol $m > 0$. Tegyük fel, hogy a /42/ deriváció első lépésében a /39/ átirási szabályt alkalmaztuk. Ekkor

$$a_{j_k} p_j \overset{*}{\underset{\mathfrak{A}}{\Rightarrow}} q_{j_k} \qquad (j \in [m],\ k \in [n_j]) \qquad /44/$$

valamely $q_{j_k} \in T_G$ fára.

Fennáll, hogy $q = \bar{q}(q_{1_1},\dots,q_{1_{n_1}},\dots,q_{m_1},\dots,q_{m_{n_m}})$.

Innen, az indukciós feltevés alapján

$$(\exists r'_{j_k} \in T_{F'})\,(a_{j_k} p_j \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} r'_{j_k} \wedge c r'_{j_k} \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} q_{j_k})\ (j\in[m],\ k\in[n_j]) \qquad /45/$$

továbbá $\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}$ konstrukciója alapján /40/ eleme Σ'-nek, /41/ eleme Σ''-nek. Legyen

$$r_{j_1},\dots,r_{j_{u_j}} = \begin{cases} r'_{j_1},\dots,r'_{j_{n_j}} & \text{ha } n_j > 0 \\ p_j & \text{ha } n_j = 0 \end{cases} \qquad j\in[m],$$

vegyük figyelembe, hogy $\tau_{\mathcal{L}(b)}|T_F = \tau_F$, azt kapjuk, hogy

$$b_{j_k} p_j \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} r_{j_k},\ (j\in[m],\ k\in[u_j]\ \wedge\ c r_{j_k} \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} q_{j_k}\ \ j\in[m], k\in[n_j] \qquad /46/$$

ahonnan /43/ következik az

$$r = f_i(r_{1_1},\dots,r_{1_{u_1}},\dots,r_{m_1},\dots,r_{m_{u_m}}) \qquad /47/$$

fával.

Forditva, tegyük fel, hogy az r fa /43/-ban /47/ alaku. Ekkor a /43/-ban szereplő derivációk első lépésében alkalmazott átirási szabályok /40/ és /41/, ezért /39/ eleme Σ-nak. Továbbá, /46/-ból következik /44/ indukciós feltevés alapján, igy megkapjuk /42/-t. $\square$

Megjegyezzük, hogy ha $\mathfrak{A}$ lineáris a fenti lemmában, akkor $\mathcal{L}$ is az, igy kapjuk az alábbi eredményt:

<u>1.9. következmény.</u> $\mathcal{L}DR \subseteq \mathcal{L}NDR \circ \mathcal{L}H$ /48/

Két utolsó eredményünk alkalmazásával nyerjük az alábbi két érdekes egyenlőséget.

1.10. tétel. Minden $n \geq 2$ -re

$$\mathcal{DR}^n = \mathcal{NDR} \circ \mathcal{LH} \qquad /49/$$

$$\mathcal{LDR}^n = \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LH} \qquad /50/$$

Bizonyitás. $\mathcal{DR}^n \overset{/34/}{=} \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{DR} \overset{/38/}{\subseteq} \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NDR} \circ \mathcal{LH} \overset{/25/}{=}$ $= \mathcal{NDR} \circ \mathcal{LH}$ és hasonlóan kapjuk /50/-et.

A fenti eredmény alapján könnyen tudjuk igazolni a

$$\mathcal{DR}^2 = \mathcal{NH} \circ \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LH} \qquad /51/$$

egyenlőséget.

$$\mathcal{DR}^2 \overset{/39/}{=} \mathcal{NDR} \circ \mathcal{LH} \subseteq \mathcal{DR} \circ \mathcal{LH} \overset{/28/}{=} \mathcal{NH} \circ \mathcal{LDR} \circ \mathcal{LH} \overset{/48/}{\subseteq}$$
$$\mathcal{NH} \circ \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LH} \circ \mathcal{LH} \overset{/17/}{=} \mathcal{NH} \circ \mathcal{LNDR} \circ \mathcal{LH} \subseteq \mathcal{DR}^3 \overset{/36/}{=} \mathcal{DR}^2.$$

A /49/, /51/, /32/ egyenlőségek a $\mathcal{DR}^2$ osztály egy-egy felbontását irják le. Ezen egyenlőségek alapján a $\mathcal{DR}^2$ más felbontásait is levezethetjük.

1.11. lemma

(a) Minden $X \in \{\mathcal{LNDR}, \mathcal{DR}\}$, és $Y \in \{\mathcal{LH}, \mathcal{H}, \mathcal{LDR}, \mathcal{DR}\}$ osztályra $X \circ Y = \mathcal{DR}^2$. /52/

(b) Minden $X \in \{\mathcal{NH}, \mathcal{NDR}\}$, $Y \in \{\mathcal{LNDR}, \mathcal{NDR}, \mathcal{LDR}, \mathcal{DR}\}$ és $Z \in \{\mathcal{LH}, \mathcal{H}, \mathcal{LNDR}, \mathcal{DR}\}$ osztályra

$$X \circ Y \circ Z = \mathcal{DR}^2. \qquad /53/$$

(c) $\mathcal{LDR} \circ \mathcal{DR} = \mathcal{DR}^2$. /54/

(d) Tetszőleges $X \in \{\mathcal{LNDR}, \mathcal{LDR}\}$ és $Y \in \{\mathcal{LH}, \mathcal{LDR}\}$ osztályra

$$X \circ Y = \mathcal{LDR}^2 \qquad /55/$$

Bizonyitás. Csak az (a) állitást igazoljuk, mivel a (b), (c), (d) állitásokat hasonló módon lehet igazolni /51/, /32/, /50/ alkalmazásával.

$$\mathcal{DR}^2 \overset{/49/}{=} \mathcal{NDR} \circ \mathcal{LH} \subseteq X \circ Y \subseteq \mathcal{DR}^2. \square$$

3. A részosztályok kompoziciói

Legyen $M = \{\mathcal{DR}, \mathcal{NDR}, \mathcal{LDR}, \mathcal{LNDR}, \mathcal{H}, \mathcal{NH}, \mathcal{LH}\}$, és jelöljük $[M]$-mel az M elemeiből kompoziciókkal képzett fatranszformációk osztályát, azaz

$$[M] = \{\mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_n \mid n \geq 1,\ \mathcal{H}_i \in M\}.$$

Az egyik legfontosabb probléma, hogy $[M]$ végtelen-e. Az 1.7. következmény alapján tudjuk, hogy $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{DR}^2$ minden $\mathcal{C} \in [M]$-re, mégis $[M]$ végtelen. Ezt a II. fejezetben fogjuk megmutatni. Most $[M]$ strukturáját, felépitését jellemezzük. Minden $k \geq 0$-ra definiáljuk a $\mathcal{C}_k$ osztályt:

(a) $\mathcal{C}_0 = \mathcal{LNDR}$,

(b) $$\mathcal{C}_{k+1} = \begin{cases} \mathcal{C}_k \circ \mathcal{NH} & \text{ha } k = 2m \\ \mathcal{C}_k \circ \mathcal{LNDR} & \text{ha } k = 2m+1 \end{cases} \qquad (m \geq 0)$$

Eredményeinket célszerü táblázatba foglalni. A 2. táblázatot a következő módon töltjük ki. Minden sor elején, illetve oszlop tetején feltüntettünk egy-egy transzformáció osztályt. Ezen osztályok sor-oszlop sorrendben vett kompozicióját a táblázat megfelelő négyzetében tüntettük fel.

	DR	NDR	LDR	LNDR	H	NH	LH
DR	DR^2	DR (18)	DR^2 (52)	DR (19)	DR^2 (52)	DR (20)	DR^2 (52)
NDR	DR^2 (52)	NDR (21)	DR^2 (52)	NDR (22)	DR^2 (52)	NDR (23)	DR^2 (52)
LDR	DR^2 (54)	$LDR \circ NDR$	LDR^2	LDR (24)	$LNDR \circ H$ (48) (15)	$LDR \circ NH$	LDR^2 (55)
LNDR	DR^2 (32)	NDR (25)	LDR^2 (33)	LNDR (26)	$LNDR \circ H$	C_1	LDR^2 (55)
H	DR (6)	$H \circ NDR$	DR (27)	$H \circ C_0$	H (11)	H (12)	H (13)
NH	DR (8)	NDR (10)	DR (28)	$NH \circ C_0$	H (14)	NH (16)	H (29)
LH	DR (7)	$H \circ NDR$ (10) (31)	LDR (9)	$LH \circ C_0$	H (15)	H (31)	LH (17)
DR^2	DR^2 (36)	DR^2 (18)	DR^2 (52) (36)	DR^2 (19)	DR^2 (52) (36)	DR^2 (20)	DR^2 (52) (36)
$LDR \circ NDR$	DR^2 (52) (54) (36)	$LDR \circ NDR$ (21)	DR^2 (52) (54) (36)	$LDR \circ NDR$ (22)	DR^2 (52) (54) (36)	$LDR \circ NDR$ (23)	DR^2 (52) (54) (36)
LDR^2	DR^2 (54) (36)	$LDR^2 \circ NDR$	LDR^2 (37)	LDR^2 (24)	$LNDR \circ H$ (55) (15)	$LNDR \circ H$ (55)(31)	LDR^2 (55) (37)
$LDR \circ NH$	DR^2 (8) (54)	$LDR \circ NDR$ (10)	DR^2 (28) (54)	$LDR \circ NH \circ C_0$	$LNDR \circ H$ (14)	$LDR \circ NH$ (16)	$LNDR \circ H$ (29) (48) (15)
$H \circ NDR$	DR^2 (52) (6)	$H \circ NDR$ (21)	DR^2 (52) (6)	$H \circ NDR$ (22)	DR^2 (52) (6)	$H \circ NDR$ (23)	DR^2 (52) (6)
$LDR^2 \circ NDR$	DR^2 (52) (54) (36)	$LDR^2 \circ NDR$ (21)	DR^2 (52) (54) (36)	$LDR^2 \circ NDR$ (22)	DR^2 (52) (54) (36)	$LDR^2 \circ NDR$ (23)	DR^2 (52) (54) (36)
$LNDR \circ H$	DR^2 (6) (32)	$LDR^2 \circ NDR$ (31) (55) (10)	DR^2 (27) (32)	$LNDR \circ H \circ C_0$	$LNDR \circ H$ (11)	$LNDR \circ H$ (12)	$LNDR \circ H$ (13)

A transzformáció osztályok kompoziciói

2. táblázat

A négyzet alsó részében a kompozició levezetésénél alkalmazott egyenlőségek sorszáma van feltüntetve. Ha egy kompozzicióról nem állitunk semmit, akkor kijelöljük a kompoziciót és az alsó részbe nem irunk semmit. Például a táblázat $\mathcal{LDR}^2$-tel jelölt sorának és $\mathcal{NH}$-val jelölt oszlopának találkozásánál lévő négyzet tartalma

$\mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H}$

/55/, /31/

mivel $\mathcal{LDR}^2\circ\mathcal{NH} \overset{/55/}{=} \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{LH}\circ\mathcal{NH} \overset{/31/}{=} \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H}$

Fennáll az alábbi állitás.

<u>1.12. tétel.</u> Megadható [M]-nek két olyan M_1, M_2 véges részhalmaza, hogy [M] minden $\mathcal{C}$ elemére az alábbi állitások valamelyike teljesül.

(a) $\mathcal{C} \in M_1$,

(b) létezik $\mathcal{C}' \in M_2$ és $k \geq 0$, hogy $\mathcal{C} = \mathcal{C}'\circ\mathcal{C}_k$,

(c) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k$ valamely $k \geq 0$-ra.

<u>Bizonyitás.</u> M_1-et és M_2-t a következő módon definiáljuk:

$M_1 = M \cup \{\mathcal{DR}^2, \mathcal{LDR}\circ\mathcal{NDR}, \mathcal{LDR}^2, \mathcal{LDR}\circ\mathcal{NH}, \mathcal{H}\circ\mathcal{NDR},$
$\mathcal{LDR}^2\circ\mathcal{NDR}, \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H}\}$,

$M_2 = \{\mathcal{H}, \mathcal{NH}, \mathcal{LH}, \mathcal{LDR}\circ\mathcal{NH}, \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H}\}$.

Minden $\mathcal{C} \in [M]$-re létezik egy legkisebb $n \geq 1$ szám, hogy $\mathcal{C} = \mathcal{H}_1\circ\ldots\circ\mathcal{H}_n$, ahol $\mathcal{H}_i \in M$, $i = 1,\ldots,n$. A tételt n szerinti teljes indukcióval bizonyitjuk be.

Ha n = 1, akkor $\mathcal{C} \in M$, és az $M \subseteq M_1$ alapján az (a) állitás teljesül.

Tegyük fel, hogy az n (≥ 1) számra igaz az állitás, és tekintsük a $\mathcal{C} = \mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_{n+1}$ minimális hosszuságu felbontást. A teljes indukciós feltevés alapján állitásunk teljesül a $\mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_n$ osztályra. Három eset lehetséges.

(a) eset. $\mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_n \in M_1$. Eképpen $\mathcal{C} = \mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}_{k+1}$. Igy $\mathcal{C}$-t háromféleképpen adhatjuk meg.

(i) $\mathcal{C} = \mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}_o$ ha $\mathcal{C}'' \in M_2$ és $\mathcal{H}_{n+1} \in \mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R}$;

(ii) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ ha $\mathcal{C}'' = \mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R}$ és $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{N}\mathcal{H}$;

(iii) $\mathcal{C} \in M_1$ bármely más esetben, a bizonyitás a 2. táblázat alapján látható.

(b) eset. Létezik $\mathcal{C}'' \in M_2$ és $k \geq 0$, amelyekre $\mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_n = \mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}_k$, igy $\mathcal{C} = \mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}_k \circ \mathcal{H}_{n+1}$. Két alesetet különböztetünk meg.

(i) $\mathcal{C} = \mathcal{D}\mathcal{R}^2$ ha $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{D}\mathcal{R}$, /32/ alapján.

(ii) $\mathcal{C} = \mathcal{C}'' \circ \mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \in M_1$ ha $\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R}$, /10/, /25/ és a 2. táblázat alapján.

(iii) $\mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{R}^2 & \text{ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{R},\ k = 0 \text{ és } \mathcal{C}'' = \mathcal{L}\mathcal{H} \\ & \text{/33/ és /9/ alapján} \\ & \text{ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{R},\ \text{és } k \geq 1 \text{ vagy } \mathcal{C}'' \neq \mathcal{L}\mathcal{H} \\ \mathcal{D}\mathcal{R}^2 & \text{mivel ebben az esetben } \mathcal{D}\mathcal{R}^2 \overset{/51/}{=} \mathcal{N}\mathcal{H} \circ \mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{L}\mathcal{H} \subseteq \\ & \mathcal{C}'' \circ \mathcal{C}_k \circ \mathcal{H}_{n+1} \subseteq \mathcal{D}\mathcal{R}^2; \end{cases}$

$$(\mathrm{iv})\quad \mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{C}''\circ\mathcal{C}_k \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{LNDR} \text{ és } k = 2m, \ /26/ \\ \qquad \text{alapján} \\ \mathcal{C}''\circ\mathcal{C}_{k+1} \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{LNDR} \text{ és } k = 2m+1; \end{cases} \qquad (m \geq 0)$$

$$(\mathrm{v})\quad \mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{DR}^2 \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H},\ \mathcal{C}'' \neq \mathcal{LH} \text{ vagy } k \geq 2 \text{ mert} \\ \qquad \mathcal{DR}^2 \overset{/51/}{=} \mathcal{NH}\circ\mathcal{LNDR}\circ\mathcal{LH} \subseteq \mathcal{C}''\circ\mathcal{C}_k\circ\mathcal{H}_{n+1} \subseteq \\ \qquad \mathcal{DR}^2 \\ \qquad\qquad \text{ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H},\ \mathcal{C}'' = \mathcal{LH} \text{ és } k = 0,1, \\ \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H} \quad \text{mivel mindkét esetben } \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H} \subseteq \\ \qquad \mathcal{C}''\circ\mathcal{C}_k\circ\mathcal{H}_{n+1} \overset{/14/}{=} \mathcal{LH}\circ\mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H} \subseteq \\ \qquad \mathcal{LDR}^2\circ\mathcal{H} \overset{/55/}{=} \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{LH}\circ\mathcal{H} \overset{/15/}{=} \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{vi})\quad \mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{C}''\circ\mathcal{C}_{k+1} \quad \text{ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{NH} \text{ és } k = 2m \\ \qquad \text{definició szerint} \\ \mathcal{C}''\circ C_k \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{NH} \text{ és } k = 2m+1 \\ \qquad /16/ \text{ alapján} \end{cases} \qquad (m \geq 0);$$

$$(\mathrm{vii})\quad \mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{DR}^2 \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{LH},\ \mathcal{C}'' \neq \mathcal{LH} \text{ vagy } k \geq 2, \\ \qquad \text{hasonlóan mint (v)-nél} \\ \mathcal{LDR}^2 \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{LH},\ \mathcal{C}'' = \mathcal{LH} \text{ és } k = 0, \\ \qquad /5/ \text{ és } /9/ \text{ alapján} \\ \mathcal{LNDR}\circ\mathcal{H} \text{ ha } \mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{LH},\ \mathcal{C}'' = \mathcal{LH} \text{ és } k = 1, \\ \qquad \text{hasonlóan mint (v)-nél} \end{cases}$$

(c) eset. $\mathcal{H}_1 \circ \ldots \circ \mathcal{H}_n = \mathcal{C}_k$ valamely $k \geq 0$-ra, igy $\mathcal{C} = \mathcal{C}_k \circ \mathcal{H}_{n+1}$. Ezt az esetet a (b) esethez hasonlóan lehet tárgyalni, a részletes bizonyitást elhagyjuk.

II. Fatranszformációk végtelen hiarerhiája az $\mathcal{NDR}$ osztályon belül

1. Alapfogalmak

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az

$(\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m \subset (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^{m+1}$ $m = 1,2,3,\ldots$

valódi tartalmazások fennállnak. Ebből következik, hogy az előző fejezetben bevezetett [M] halmaz végtelen.

Mivel $\mathcal{NDR}$ zárt a kompozicióra $(\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m \subset \mathcal{NDR}$ teljesül minden $m \geq 1$-re. A fejezet második felében megmutatjuk, hogy az erősebb $\bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m \subset \mathcal{NDR}$ tartalmazás szintén teljesül.

Bevezetünk néhány, a fejezetben felhasználásra kerülő fogalmat.

Legyen Y tetszőleges halmaz. A szokásos módon értelmezzük Y^*-on a prefix rendezést: minden $\alpha, \beta \in Y^*$ szóra $\alpha \leq \beta$ akkor és csakis akkor, ha α β prefixe, azaz létezik $\gamma \in Y^*$, hogy $\beta = \alpha\gamma$. $\alpha < \beta \iff (\alpha \leq \beta$ és $\alpha \neq \beta)$.

A $p \in T_F(Y)$ fa utjainak $\mathrm{path}(p)$ halmazát és az m rangját $(m \in N)$ az alábbi módon definiáljuk.

(a) ha $p \in Y$ akkor $\mathrm{path}(p) = \{e\}$ és $rn_m(p) = 0$,

(b) ha $p = f(p_1,\ldots,p_n)$ valamely $n \in N$, $f \in F_n$, $p_1,\ldots,p_n \in T_F(Y)$-ra, akkor

$\mathrm{path}(p) = \{e\} \cup \{iv \mid i \in [n],\ v \in \mathrm{path}(p_i)\}$ és

$$rn_m(p) = \begin{cases} \sum\limits_{i\in[n]} rn_m(p_i) & \text{ha } n \neq m, \\ 1+\sum\limits_{i\in[n]} rn_m(p_i) & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

Tehát $rn_m(p)$ jelöli az m aritásu szimbólumok p fabeli előfordulásainak a számát. Legyen $rn(p) = \sum\limits_{m\in N} rn_m(p)$.

Legyen $p\in T_F(Y)$ és $v\in path(p)$. Bevezetjük a v ut által meghatározott $str(p,v)$ részfa, $lab(p,v)$ szimbólum fogalmát, továbbá bevezetjük v p-beli kettes hosszának, $|v|_2$-nek a fogalmát a következő módon.

(a) ha $p\in Y$ akkor $str(p,v) = p$, $lab(p,v) = p$ és $|v|_2 = 0$;

(b) ha $p = f(p_1,\dots,p_n)$ valamely $n\in N$, $f\in F_n$ és $p_1,\dots,p_n\in T_F(Y)$-ra, akkor $v = e$ vagy $v = iv'$ alaku valamely $i\in[n]$ és $v'\in path(p_i)$-re.

Legyen

$$str(p,v) = \begin{cases} p & \text{ha } v = e, \\ str(p_i,v') & \text{ha } v = iv', \end{cases}$$

$$lab(p,v) = \begin{cases} f & \text{ha } v = e, \\ lab(p_i,v') & \text{ha } v = iv' \end{cases}$$

$$|v|_2 = \begin{cases} 0 & \text{ha } v = e \text{ és } n < 2, \\ 1 & \text{ha } v = e \text{ és } n \geq 2, \\ |v'|_2 & \text{ha } v = iv' \text{ és } n < 2, \\ 1+|v'|_2 & \text{ha } v = iv' \text{ és } n \geq 2. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy az utóbbi definicióban $|v'|_2$ a p_i fában értendő. Vázlatosan jellemezzük a fenti három függvényt.

A p-t rendezett, irányitott, $F \cup Y$-beli cimkékkel cimkézett fának tekintjük, v-t a p gyökerétől valamely x csucsig vezető utnak tekintjük. str(p,v) a p fa x csucsnál lévő részfája (az a részfa, aminek x a gyökere), lab$(p,\alpha)(\in F \cup Y)$ cimkével van x cimkézve, végül $|v|_2$ a v ut mentén előforduló 1-nél nagyobb aritásu függvényszimbólumok előfordulásainak a száma. Előfordulhat az is, hogy v valamely $q \neq p$ fának is utja és $|v|_2$ q-ban különbözik $|v|_2$ p-beli értékétől. A szövegkörnyezetből mindig egyértelmüen ki fog derülni, hogy melyik fában értjük $|v|_2$ értékét.

A továbbiakban a $T_F(X_m)$ halmazt egyszerüen $T_{F,m}$-mel jelöljük. Legyen $p,q \in T_{F,m}$, és $i \in [m]$. A p,q fák $p_i \cdot q$ szorzatát ugy kapjuk, hogy x_i összes p-beli előfordulását q-val helyettesitjük.

Legyen $p \in T_{F,m}$ és $i \in [m]$, a p fa i-utjainak a $\text{path}_i(p)$ halmazát a következő módon definiáljuk:

(a) ha $p = x_j$ valamely $j \in [m]$-re, akkor

$$\text{path}_i(p) = \begin{cases} \{e\} & \text{ha } i = j \\ \emptyset & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

(b) ha $p = f(p_1,\dots,p_n)$ valamely $n \geq 0$, $f \in F_n$ és

$p_1,\dots,p_n \in T_{F,m}$-re akkor

$\mathrm{path}_i(p) = \{jv \mid j \in [n],\ v \in \mathrm{path}_i(p_j)\}$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{path}_i(p) \subseteq \mathrm{path}(p)$, továbbá $\mathrm{path}_i(p)$ elemei a p fa gyökeréből valamely x_i-vel cimkézett levélhez vezetnek.

A továbbiakban szükségünk lesz a kiterjesztett transzformáció fogalmára. A $\tau \subseteq T_F(X) \times T_G(X)$ relációt kiterjesztett transzformációnak nevezzük. A τ, σ kiterjesztett transzformációkra a $\mathrm{dom}\,\tau$ értelmezési tartományt, $\tau \circ \sigma$ kompoziciót természetes módon értelmezzük.

Legyen $q \in T_G(AX)$ tetszőleges. A $q' \in T_G(X)$ fát a q párjának nevezzük, ha kielégiti az alábbi feltételeket.

(a) ha $q = ax_i$ ($a \in A$, $i \in N$) akkor $q' = x_i$,

(b) ha $q = g(q_1,\dots,q_n)$ ($n \geq 0$, $g \in G_n$ és $q_1,\dots,q_n \in T_G(AX)$), akkor $q' = g(q_1',\dots,q_n')$,

ahol q_j' q_j-nek a párja minden $j \in [n]$-re.

Tehát a q fa q' párját ugy kapjuk q-ból, hogy q minden ax_i alaku részfáját x_i-vel helyettesitjük.

Az $\mathfrak{A}$ DR-transzformátor a állapotával indukált $\tau'_{\mathfrak{A}(a)}$ kiterjesztett fatranszformációt az alábbi módon definiáljuk: minden $p \in T_F(X)$, $q \in T_G(X)$ fára $(p,q') \in \tau'_{\mathfrak{A}(a)}$ akkor és csak akkor, ha $\exists\, q \in T_G(AX)$ hogy $ap \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}} q$ teljesül, és q' a q fa párja.

Az $\mathfrak{A}$ által indukált kiterjesztett fatranszformáció $\tau'_{\mathfrak{A}(a_0)}$.

Az $\mathfrak{A}$ fatranszformátor uniform (U), ha minden

$af(x_1,\dots,x_m) \to q(a_{1_1}x_1,\dots,a_{1_{n_1}}x_1,\dots,a_{m_1}x_m,\dots$

$\dots,a_{m_{n_m}}x_m) \in \Sigma_{\mathfrak{A}}$ átirási szabályra

és $i \in [m]$ indexre $a_{i_1} = \dots = a_{i_{n_i}}$.

Nyilvánvaló, hogy az $\mathfrak{A} = (F,A,G,A',\Sigma)$ UDR-transzformátor minden átirási szabálya az

$af(x_1,\dots,x_m) \to \bar{q}(a_1x_1,\dots,a_mx_m)$

$(\bar{q} \in T_{G,m}, a_1,\dots,a_m \in A)$ alakban irható.

Minden H-transzformátor UDR-transzformátor definició szerint.

2. Az $\mathcal{UNDR}^m \subset \mathcal{UNDR}^{m+1}$ $(m \geq 1)$ hiarerhia

Mivel $\mathcal{LNDR}$ és $\mathcal{NH}$ az $\mathcal{NDR}$ részosztályai és $\mathcal{NDR}$ zárt a kompozicióra igy $(\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m \subseteq \mathcal{NDR}$ $(m \geq 1)$ tartalmazások fennállnak. Megmutatjuk, hogy az

$(\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m \subset (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^{m+1}$ $(m \geq 1)$ és az

$\bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m \subset \mathcal{NDR}$ valódi tartalmazások fennállnak.

Legyen $\mathfrak{A} = (F,A,G,\Sigma,a_0)$ egy UNDR-transzformátor, és legyen az $af(x_1,\dots,x_n) \to q(a_1x_1,\dots,a_nx_n)$ szabály eleme Σ-nak. Ekkor minden $j \in [n]$-re és $w \in path_j(q)$ utra teljesül a következő állitás:

ha $n > 1$ akkor $|w|_2 \geq 1$,
mivel $|w|_2 = 0$ esetén $\mathcal{U}$ törlő fatranszformátor lenne.
A 2.1. lemma ennek a megjegyzésnek a következménye.

2.1. lemma. Legyen $\mathcal{U} = (F,A,G,\Sigma,a_0)$ egy UNDR-transzformátor. Tegyük fel, hogy
$(p,q) \in \tau'_{\mathcal{U}(a)}$ $(p \in T_{F,m}, q \in T_{G,m}$, $m \geq 0$ és $a \in A)$.
Ekkor

(a) minden $j \in [m]$ számra és $v \in path_j(p)$ utra létezik egy $z \in path_j(q)$ ut, amelyre $|v|_2 \leq |z|_2$ és

(b) minden $j \in [m]$ számra és $v \in path_j(q)$ utra létezik egy $z \in path_j(p)$ ut, hogy $|z|_2 \leq |v|_2$.

Bizonyitás. Az (a) részt bizonyitjuk be, a (b) rész bizonyitása hasonló (a)-hoz. p magassága szerinti teljes indukcióval bizonyitunk.

Ha $p = x_i$ valamely $i \in [m]$-re, akkor $q = x_i$, tehát (a) teljesül.

Legyen $p = f(p_1,\ldots,p_n)$, ahol $n \geq 0$, $f \in F_n$ és $p_1,\ldots,p_n \in T_{F,m}$. Feltevésünk alapján létezik egy $af(x_1,\ldots,x_n) \to \bar{q}(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)$ szabály Σ -ban és léteznek $q_1,\ldots,q_n \in T_{G,m}$ fák, amelyekre a $(p_i,q_i) \in \tau'_{\mathcal{U}(a_i)}$ $(i \in [n])$ tartalmazások teljesülnek. Mivel az $n = 0$ eset ismét triviális, feltehetjük, hogy $n \geq 1$. Ekkor $v = iv'$ valamely $i \in [n]$-re és $v' \in path_j(p_i)$-re.

A $path_i(\bar{q})$ halmaz nem üres, mivel $\mathfrak{A}$ nem törlő, legyen $w \in path_i(\bar{q})$ tetszőleges, a teljes indukciós feltevés alapján létezik $z' \in path_j(q_i)$ ut, hogy a $|v'|_2 \leq |z'|_2$ egyenlőtlenség teljesüljön. Legyen $z = wz'$. Nyilvánvaló, hogy $z \in path_j(q)$.

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

Ha $n = 1$ akkor

$$|v|_2 = |iv'|_2 = |v'|_2 \leq |z'|_2 \leq |w|_2 + |z'|_2 = |wz'|_2 = |z|_2.$$

Ha $n > 1$, akkor a $|w|_2$-re vonatkozó megjegyzésünk alapján

$$|v|_2 = |iv'|_2 = 1 + |v'|_2 \leq |w|_2 + |z'|_2 = |wz'|_2 = |z|_2.$$

Ezzel teljes a bizonyitás. $\square$

A továbbiakban felhasználjuk a szintaktikus kompozició fogalmának általánositását, amelyet az alábbi módon definiálunk:

2.1. definició. Legyen $m \geq 2$ és legyen $\mathfrak{A}_i$ $(i \in [m])$ DR-transzformátor. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ szintaktikus kompozicióját $\mathfrak{A}_1 \circ \ldots \circ \mathfrak{A}_m$-et $m = 2$-re már definiáltuk, ha $m > 2$, akkor legyen

$$\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2 \circ \ldots \circ \mathfrak{A}_m = (\mathfrak{A}_1 \circ \ldots \circ \mathfrak{A}_{m-1}) \circ \mathfrak{A}_m.$$

Az 1.3. lemma alapján teljes indukcióval igazolható Az alábbi állitás: ha $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_m$ NDR-transzformátorok, akkor $\tau_{\mathfrak{A}_1 \circ \ldots \circ \mathfrak{A}_m} = \tau_{\mathfrak{A}_1} \circ \ldots \circ \tau_{\mathfrak{A}_m}$.

Az alábbi lemma azt mondja ki, hogy ez az egyenlőség érvényes kiterjesztett fatranszformációkra is.

2.2. lemma. Legyen $m \geq 2$ és legyen $\mathfrak{A}_i = (F_{i-1}, A_i, F_i, \Sigma_i, a_i)$ DR-transzformátor minden $i \in [m]$-re. Ha $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m$ NDR-transzformátorok, akkor

$$\tau'_{\mathfrak{A}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{A}_m} = \tau'_{\mathfrak{A}_1} \circ \dots \circ \tau'_{\mathfrak{A}_m}.$$

Bizonyitás. m szerinti teljes indukcióval bizonyitunk. Ha $m = 2$, akkor elegendő igazolni, hogy az alábbi ekvivalencia teljesül:

$$(p,q) \in \tau'_{\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{A}_2}((b_1,b_2)) \Leftrightarrow (\exists r \in T_{F_1,n}) \left((p,r) \in \tau'_{\mathfrak{A}_1}(b_1) \text{ és } (r,q) \in \tau'_{\mathfrak{A}_2}(b_2)\right).$$

$(n \geq 0,\ p \in T_{F_0,n},\ q \in T_{F_2,n},\ b_1 \in A_1)$.

Ezt a p fa magassága szerinti teljes indukcióval lehet igazolni. A részletes bizonyitást elhagyjuk.

Végül, az m-szerinti indukciós lépést az alábbi számolás mutatja:

$$\tau'_{\mathfrak{A}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{A}_m} = \tau'_{(\mathfrak{A}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{A}_{m-1}) \circ \mathfrak{A}_m} = \tau'_{\mathfrak{A}_1 \circ \dots \circ \mathfrak{A}_{m-1}} \circ \tau'_{\mathfrak{A}_m} = \tau'_{\mathfrak{A}_1} \circ \dots \circ \tau'_{\mathfrak{A}_m}.$$

Elérkeztünk a II. fejezet fő tételéhez.

2.3. tétel. Teljesülnek az $(\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^k \subsetneq (\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^m$ $(2 \leq m,\ 1 \leq k < m)$ tartalmazások.

Bizonyitás. Mivel a bizonyitás meglehetősen hosszu, az alábbi módon osztjuk fel. Először megadunk egy τ_m fatranszformációt, amely eleme az $(\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^m$ osztálynak. Ezután a 2.4. lemmában jellemezzük a τ_m-et indukáló NDR transz-formátorokat. Ezután feltesszük, hogy $\tau_m \in (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^k$ valamely $k \leq m$-re és a 2.5-2.14. lemmák sorozatával, a 2.14. lemmában igazoljuk, hogy $k < m$ ellentmondáshoz vezet.

Legyen $m \geq 2$ tetszőleges egész szám, m értékét a tétel bizonyitásában lerögzitjük. A τ_m definiálásához az $\mathcal{A}$ LNDR- és $\mathcal{B}$ NH-transzformátort az alábbi módon definiáljuk:

$\mathcal{A} = (F, \{a, d\}, \bar{F}, \Sigma, a)$, ahol

(a) $F = F^0 \cup F^2 \cup F^3$, $F^0 = \{\#\}$, $F^2 = \{f\}$ és $F^3 = \{g\}$;

(b) $\bar{F} = \bar{F}^0 \cup \bar{F}^2 \cup \bar{F}^3$, $\bar{F}^0 = \{\#\}$, $\bar{F}^2 = \{f, \bar{f}\}$ és $\bar{F}^3 = \{g\}$;

(c) Σ az alábbi szabályokból áll:

(i) $a\# \to \#$,

(ii) $af(x_1, x_2) \to \bar{f}(dx_1, dx_2)$,

(iii) $ag(x_1, x_2, x_3) \to g(dx_1, ax_2, dx_3)$,

(iv) $d\# \to \#$,

(v) $df(x_1, x_2) \to f(dx_1, dx_2)$,

(vi) $dg(x_1, x_2, x_3) \to g(dx_1, dx_2, dx_3)$.

Továbbá, vezessük be a $\mathcal{B} = (\bar{F}, \{b\}, F, \Sigma', b)$ NH-transz-formátort, ahol Σ' az alábbi átirási szabályokból áll.

(i) $b\# \to \#$,

(ii) $b\bar{f}(x_1, x_2) \to g_3(bx_1, bx_1, bx_2)$,

(iii) $bf(x_1, x_2) \to f(bx_1, bx_2)$,

(iv) $bg(x_1, x_2, x_3) \to g(bx_1, bx_2, bx_3)$.

A p input fát $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ a következő módon dolgozzák fel. $\mathcal{A}$ a állapotában halad a g_3 szimbólumok középső argumentumai által meghatározott uton addig amig az első f szimbólumot megtalálja. Ezt az f szimbólumot átirja $\bar{f}$ szimbólumra. Az összes többi szimbólum marad ugyanaz, ami volt. Az igy kapott fát jelöljük p'-vel. Ezután $\mathcal{B}$ megkeresi ezt az $\bar{f}$ szimbólumot a p' fában és átirja g-re és $\bar{f}$ első argumentumát megduplázza. A többi szimbólum változatlan marad.

Legyen $\tau_m = (\tau_{\mathcal{A}} \circ \tau_{\mathcal{B}})^m$. Természetesen $\tau_m \in (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^m$. Minden $i \geq 1$ egészre definiáljuk a $P_i, Q_i \in T_{F,i+1}$ fa párokat az alábbi rekurziv módon:

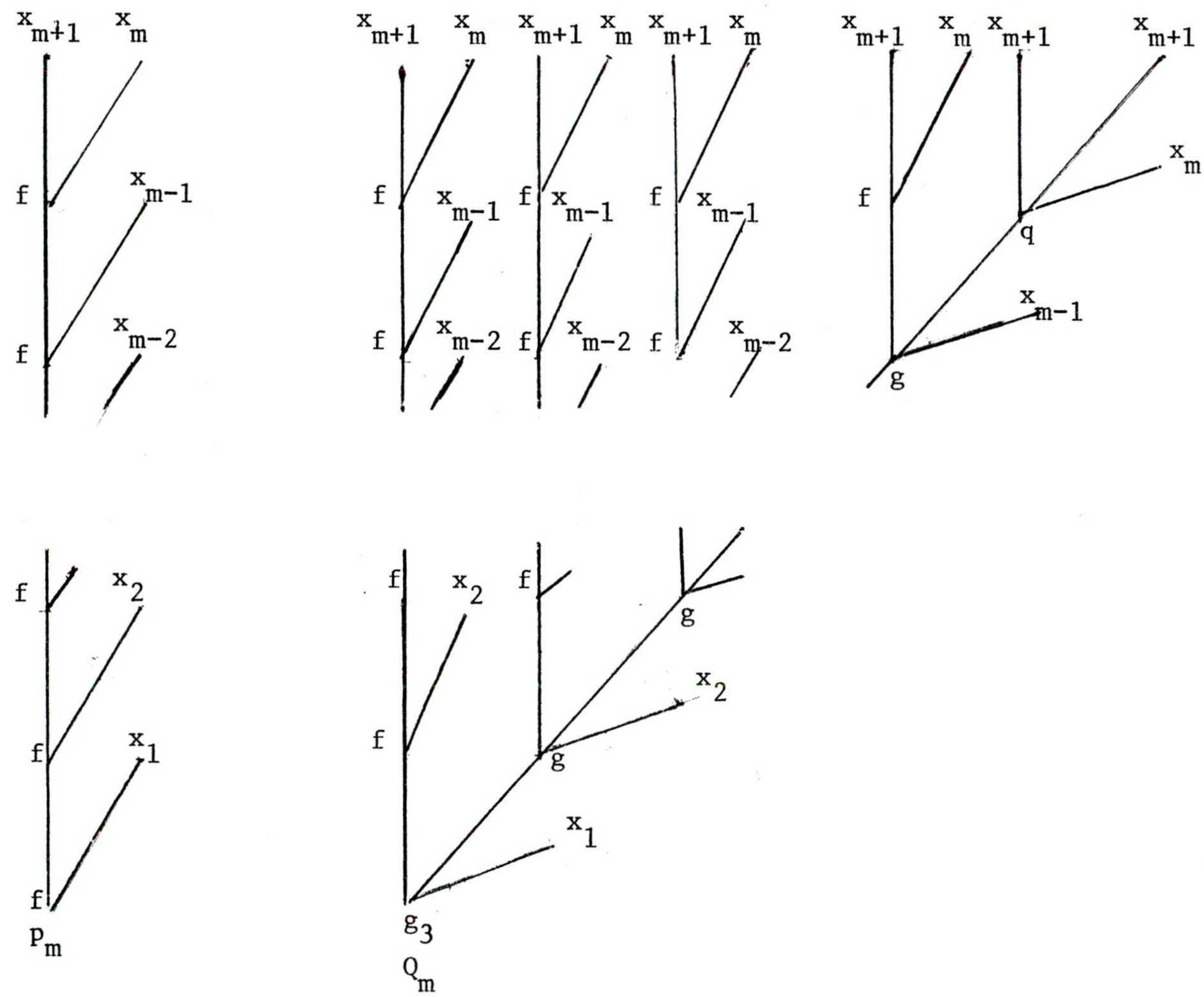
(a) $P_1 = f_2(x_2, x_1)$, $Q_1 = g_3(x_2, x_2, x_1)$,

(b) $P_i = f_2(P_{i-1}(x_2, \ldots, x_{i+1}), x_1)$, $Q_i = g_3(P_{i-1}(x_2, \ldots, x_{i+1}), Q_{i-1}(x_2, \ldots, x_{i+1}), x_1)$ ha $i > 1$.

A P_m, Q_m fákat a 3. ábrán ábrázoljuk.

Bevezetjük a $\tau'_m = (\tau'_{\mathcal{A}} \circ \tau'_{\mathcal{B}})^m$ relációt. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ definiciója alapján könnyen igazolható, hogy $(P_m, Q_m) \in \tau'_m$, továbbá, hogy minden $t_1, \ldots, t_{m+1} \in T_F$ fára

$$(P_m(t_1, \ldots, t_{m+1}),\ Q_m(t_1, \ldots, t_{m+1})) \in \tau_m. \qquad /1/$$



3. ábra

<u>2.4. lemma.</u> Tegyük fel, hogy a $\mathcal{L} = (F,C,F,\Sigma",c_o)$ NDR-transzformátorra teljesül a $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_m$ egyenlőség. Ekkor $(P_m,Q_m) \in \tau'_{\mathcal{L}}$.

<u>Bizonyitás.</u> Először megjegyezzük, hogy $P_m \in \mathrm{dom}\, \tau'_{\mathcal{L}}$.
Mivel $P_m(\#,\ldots,\#) \in \mathrm{dom}\, \tau_m = \mathrm{dom}\, \tau_{\mathcal{L}}$, igy $(P_m, R_m) \in \tau'_{\mathcal{L}}$
valamely $R_m \in T_{F,m+1}$ fára. Nyilvánvaló, hogy R_m az

$$\bar{R}_m(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{n_1\text{-szer}},\ldots,\underbrace{x_{m+1},\ldots,x_{m+1}}_{n_{m+1}\text{-szer}})$$ alakban irható,

ahol $n_i \geq 1$ $(i \in [m+1])$, $\bar{R}_m \in \hat{T}_{F,n}$, $n = n_1 + \ldots + n_{m+1}$.
Következik, hogy minden $t_1,\ldots,t_{m+1} \in T_F$ fára a
$\tau_{\mathcal{L}}(P_m(t_1,\ldots,t_{m+1}))$ fa az $\bar{R}_m(t_{1_1},\ldots,t_{1_{n_1}},\ldots,t_{m+1_1},\ldots,$
$t_{m+1_{n_{m+1}}})$ alakban irható, ahol minden $i \in [m+1]$, $j \in [n_i]$-re
$(t_i, t_{i_j}) \in \tau_{\mathcal{L}}(c_{i_j})$ valamely $c_{i_j} \in C$-re.

E jelölést használva kapjuk, hogy minden $t_1,\ldots,t_{m+1} \in T_F$
fára $Q_m(t_1,\ldots,t_{m+1}) = \bar{R}_m(t_{1_1},\ldots,t_{1_{n_1}},\ldots,t_{m+1_1},\ldots,t_{m+1_{n_{m+1}}})$.

A bizonyitás további részében ezt az egyenlőséget használjuk
fel, a $t_1,\ldots,t_{m+1}$ különböző értékei mellett.

Tegyük fel, hogy $Q_m \neq R_m$. Ez azt jelenti, hogy valamely
$v \in \mathrm{path}(Q_m) \cap \mathrm{path}(R_m)$ utra $\mathrm{lab}(Q_m, v) \neq \mathrm{lab}(R_m, v)$.
Ekkor négy különböző eset lehetséges.

(a) $\mathrm{lab}(Q_m, v) = f$, $\mathrm{lab}(R_m, v) = g$ valamely $f, g \in F$-re,
és $f \neq g$. Ekkor

$$f = \mathrm{lab}(Q_m, v) = \mathrm{lab}(Q_m(\#,\ldots,\#), v) = \mathrm{lab}(\bar{R}_m(\#_{1_1},\ldots,\#_{1_{n_1}},\ldots,\#_{m+1_1},\ldots,\#_{m+1_{n_{m+1}}}), v) = \mathrm{lab}(R_m, v) = g,$$

ami ellentmondás.

(b) $lab(Q_m,v) = x_i$, $lab(R_m,v) = g$ valamely $i\in[m+1]$-re és $g\in F$-re. Most $g = \#$, mivel

$$\# = lab(Q_m(\#,\dots,\#),v) = lab(\bar{R}_m(\#_{1_1},\dots,\#_{1_{n_1}},\dots,\#_{m+1_1},\dots$$

$$\dots,\#_{m+1_{n_{m+1}}}),v) = lab(R_m,v) = g.$$

Ugyanakkor minden $t\in T_F$ fára

$$t = lab(Q_m(\underbrace{\#,\dots,t,\dots,\#}_{i\text{-edik}}),v) =$$

$$= lab(\bar{R}_m(\#_{1_1},\dots,\#_{1_{n_1}},\dots,t_{i_1},\dots,t_{n_i},\dots,\#_{m+1_1},\dots$$

$$\dots,\#_{m+1_{n_{m+1}}}),v) = lab(R_m,v) = g = \#,$$

ami ellentmondás.

(c) $lab(Q_m,v) = f$, $lab(R_m,v) = x_i$ valamely $f\in F$ és $i\in[m+1]$-re. Q_m definiciója alapján látható /vö 3. ábra/, hogy ebben az esetben $str(Q_m,v)$ részfa tartalmaz legalább egy x_j $(j \neq i)$ levelet. Ekkor minden $t\in T_F$ fára teljesül, hogy t részfája a $str(Q_m(\underbrace{\#,\dots,t,\dots,\#}_{j\text{-edik}}),v)$ fának. Szintén teljesül, hogy

$$str(Q_m(\underbrace{\#,\dots,t,\dots,\#}_{j\text{-edik}}),v) = str(\bar{R}_m(\#_{1_1},\dots,\#_{1_{n_1}},\dots,t_{j_1},\dots$$

$$\dots,t_{j_{n_j}},\dots,\#_{m+1_1},\dots,\#_{m+1_{n_{m+1}}}),v) = \#_{i_\ell}$$

valamely $\ell\in[n_i]$-re. Ellentmondás, hiszen t értékét meg tudjuk ugy választani, hogy t nem részfája $\#_{i_\ell}$-nek.

(d) $lab(Q_m, v) = x_i$, $lab(R_m, v) = x_j$ valamely $i, j \in [m+1]$-re, ugy hogy $i \neq j$. Legyen $t \in T_F$ tetszőleges olyan fa, amely az $rn(t) > 0$ egyenlőtlenséget kielégiti. Ekkor

$$\# = lab(Q_m(\#, \ldots, \underset{j\text{-edik}}{t}, \ldots, \#), v) =$$

$$= lab(\bar{R}_m(\#_{1_1}, \ldots, \#_{1_{n_1}}, \ldots, t_{j_1}, \ldots, t_{j_{n_j}}, \ldots, \#_{m+1_1}, \ldots$$

$$\ldots, \#_{m+1_{n_{m+1}}}), v) = t_{j_\ell}$$

valamely $\ell \in [n_j]$-re, továbbá $(t, t_{j_\ell}) \in \tau_{\Sigma(c_{j_\ell})}$ valamely $c_{j_\ell} \in C$-re. De Σ egy NDR-transzformátor, ezért $rn(t_{j_\ell}) > 0$ ami ismét ellentmondás. □

Legyen $k \leq m$ és tegyük fel, hogy $\tau_m \in (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^k$. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in [2k]$-ra létezik egy $\mathfrak{A}_i = (F_{i-1}, A_i, F_i, \Sigma_i, a_i)$ DR-transzformátor, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:

(a) $F_o = F_{2k} = F$,

(b) ha i páratlan, akkor $\mathfrak{A}_i$ LNDR-transzformátor,

(c) ha i páros, akkor $\mathfrak{A}_i$ NH-transzformátor, /2/

(d) $\tau_{\mathfrak{A}_1} \circ \ldots \circ \tau_{\mathfrak{A}_k} = \tau_m$.

Mivel mindegyik $\mathfrak{A}_i$ NDR-transzformátor, a 2.2 és 2.4. lemma alapján kapjuk, hogy

$$(P_m, Q_m) \in \tau'_{\mathfrak{A}_1} \circ \ldots \circ \tau'_{\mathfrak{A}_{2k}}, \qquad /3/$$

azaz minden $i \in [2k]$-ra léteznek az $r_{i-1} \in T_{F_{i-1}, m+1}$ és $r_i \in T_{F_i, m+1}$ fák amelyekre $r_o = P_m$, $r_{2k} = Q_m$ és

$(r_{i-1}, r_i) \in \tau'_{\mathfrak{A}_i}$. Tulajdonképpen a /3/ reláció vezet ellentmondásra a 2.14. lemmában.

<u>2.5. lemma.</u> Minden $i \in [2k]$-ra teljesül, hogy $rn_o(r_{i-1}) = 0$, azaz r_{i-1} nem tartalmaz 0 aritású szimbólumot.

<u>Bizonyitás.</u> Ha $rn_o(r_{i-1}) \neq 0$ akkor $rn_o(r_i) \neq 0$ mivel $\mathfrak{A}_i$ NDR-transzformátor. Most, ha valamely $i \in [2k]$-ra $rn_o(r_{i-1}) \neq 0$, akkor $rn_o(r_{2k}) \neq 0$, ami r_{2k} definiciója alapján ellentmondás. $\square$

Az r_o és r_{2k} fákban az x_j $(j \in [m+1])$ levelekhez vezető utakat az alábbi módon lehet jellemezni. Valahányszor $j \in [m+1]$ és $v \in path_j(r_o)$ vagy $v \in path_j(r_{2k})$, mindannyiszor r_o és r_{2k} definiciója alapján

$$|v|_2 = \begin{cases} j & \text{ha} \quad j \in [m], \\ m & \text{ha} \quad j = m+1. \end{cases} \qquad /4/$$

Ez könnyen leolvasható a 3. ábráról.

<u>2.6. lemma.</u> Minden $i \in [2k]$, $j \in [m+1]$ és $v \in path_j(r_{i-1})$-re $|v|_2$ értéke megegyezik /4/-gyel.

<u>Bizonyitás.</u> A 2.1. lemma (a) része alapján minden $v \in path_j(r_{i-1})$ utra létezik egy $z \in path_j(r_i)$ ut, hogy $|v|_2 \leq |z|_2$. Igy, ha valamely $i \in [2k]$, $j \in [m+1]$ és $v \in path_j(r_{i-1})$-re $|v|_2 > j$ ha $j \in [m]$, és $|v|_2 > m$ ha $j = m+1$, akkor valamely

$z \in path_j(r_{2k})$ utra $|z|_2 > j$ ha $j \in [m]$, és $|z|_2 > m$ ha $j = m+1$. Ez azonban ellentmond /4/-nek.

Hasonló módon, 2.1 lemma (b) részének a felhasználásával kapjuk, hogy a $|v|_2 < j$ ha $j \in [m]$ és $|v|_2 < m$ ha $j = m+1$ feltételből következik, hogy létezik egy $z \in path_j(r_o)$ ut, amely kettes hosszára ugyanaz teljesül, mint v kettes hosszára, ami ismét ellentmond /4/-nek. □

<u>2.7. lemma.</u> Legyen $i \in [2k]$ és $r_i' \in T_{F_i}(A_i X_{m+1})$. Tegyük fel, hogy teljesül az

$$a_i r_{i-1} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{A}_i} r_i' \text{ deriváció.}$$

Tegyük fel, hogy a $cf(x_1,\dots,x_n) \to q(c_1x_1,\dots,c_nx_n)$ átirási szabályt alkalmazta $\mathfrak{A}_i$ a fenti derivációban, ahol $f \in F_{i-1}^n$ valamely $n \geq 1$-re, $c,c_1,\dots,c_n \in A_i$ és $q \in T_{F_i,n}$. Ekkor minden $j \in [n]$ és $w \in path_j(q)$-ra teljesül, hogy

$$|w|_2 = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n = 1, \\ 1 & \text{ha} \quad n > 1 \end{cases}$$

/Megemlitjük, hogy r_i az r_i' párja./

<u>Bizonyitás.</u> A lemma feltételei alapján léteznek az $s_{i-1} \in T_{F_{i-1},m+2}, t_1,\dots,t_n \in T_{F_{i-1},m+1}, s_i \in T_{F_i,m+2}$ és $q_1,\dots,q_n \in T_{F_i,m+1}$, fák, hogy az alábbi feltételek teljesülnek:

(a) s_{i-1}-ben pontosan egyszer fordul elő x_{m+2},

(b) $r_{i-1} = s_{i-1} \underset{m+2}{\cdot} f(t_1,\dots,t_n)$,

(c) $r_i = s_i \underset{m+2}{\cdot} q(q_1,\dots,q_n)$,

(d) $(s_{i-1},s_i)\in \tau'_{\mathcal{A}_i}, (t_j,q_j)\in \tau'_{\mathcal{A}_i(c_j)}$ $(j\in[n])$.

Tegyük fel, hogy valamely $j\in[n]$ és $w\in path_j(q)$-ra $|w|_2$ nem elégiti ki a lemmában kimondott egyenlőséget.
A 2.5. lemma és (a) alapján megválaszthatjuk $\ell\in[m+1]$ értékét ugy, hogy valamely $v\in path_\ell(r_{i-1})$-re v a $v = v_1jv_2$ alakban irható, ahol $v_1\in path_{m+2}(s_{i-1})$ és $v_2\in path_\ell(t_j)$. Továbbá, a 2.1. lemma alapján létezik $z_1\in path_{m+2}(s_i)$ és $z_2\in path_\ell(q_j)$, hogy $|v_1|_2 \le |z_1|_2$ és $|v_2|_2 \le |z_2|_2$. Legyen $z = z_1wz_2$, nyilvánvaló, hogy $z\in path_\ell(r_i)$.

Először az n = 1 esetet tekintjük. Az indirekt feltevés alapján $|w|_2 > 0$, ahonnan

$$|v|_2 = |v_1jv_2|_2 = |v_1|_2+|v_2|_2 < |z_1|_2+|w|_2+|z_2|_2 = |z_1wz_2|_2 =$$
$$= |z|_2,$$ ami ellentmond a 2.6. lemmának.

Most tegyük fel, hogy $n > 1$. Ebben az esetben a II.2 alfejezet elején tett megjegyzésünk értelmében $|w|_2 = 0$ nem állhat fenn, tehát az indirekt feltevés $|w|_2 > 1$. De ekkor

$$|v|_2 = |v_1jv_2|_2 = |v_1|_2+1+|v_2|_2 < |z_1|_2+|w|_2+|z_2|_2 =$$
$$= |z_1wz_2|_2 = |v|_2,$$

ami ellentmondás. $\square$

<u>2.8. lemma.</u> Minden $i\in[2k]$ és $n\ge 4$-re $rn_n(r_{i-1}) = 0$.

<u>Bizonyitás.</u> Tegyük fel, hogy nem igaz az állitás. Legyen $i\in[2k]$ a legnagyobb pozitiv egész szám, amelyre az

$rn_n(r_{i-1}) > 0$ egyenlőtlenség valamely $n \geq 4$-re teljesül. Ekkor az $a_i r_{i-1} \underset{\mathfrak{A}_i}{\overset{*}{\Longrightarrow}} r'_i$ $(r'_i \in T_{F_i}(A_i X_{m+1}))$ derivációban $\mathfrak{A}_i$ legalább egy $cf(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow q(cx_1,\ldots,cx_n)$ alaku szabályt alkalmazott, amelyre $n \geq 4$ és $rn_\ell(q) = 0$ minden $\ell \geq 4$-re. Mivel $\mathfrak{A}_i$ NDR-transzformátor következik, hogy $|w|_2 > 1$ valamely $j \in [n]$ és $w \in path_j(q)$-ra. Ez ellentmond a 2.7. lemmának. $\square$

A bizonyitás e pontjánál megállapithatjuk, hogy minden $i \in [2k]$-ra r_{i-1} minden függvényszimbóluma az $F^1_{i-1} \cup F^2_{i-1} \cup F^3_{i-1}$ halmaz eleme.

<u>2.9. lemma.</u> Tekintsük az $a_i r_{i-1} \underset{\mathfrak{A}_i}{\overset{*}{\Longrightarrow}} r'_i$ $(i \in [2k],\ r'_i \in T_{F_i}(A_i X_{m+1}))$ derivációt. Tegyük fel, hogy a fenti derivációban $\mathfrak{A}_i$ a $cf(x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow q$ $(f \in F^n_{i-1}, n \geq 1$ és $q \in T_{F_i}(A_i X_n))$ szabályt alkalmazta. Ekkor $n \in [3]$ és q az alábbi három alak közül valamelyikkel irható le valamely $u_0, u_1, u_2, u_3 \in T_{F^1_i, 1}$, $c_1, c_2, c_3 \in A_i$, $g \in F^2_i$ és $h \in F^3_i$-ra.

(a) ha $n = 1$ akkor $q = u_0(c_1 x_1)$,

(b) ha $n = 2$ akkor vagy

$q = u_0(g(u_1(c_1 x_{i_1}), u_2(c_2 x_{i_2})))$ ahol $\{i_1, i_2\} = [2]$

vagy

$q = u_0(h(u_1(c_1 x_{i_1}), u_2(c_2 x_{i_2}), u_3(c_3 x_{i_3})))$ ahol $\{i_1, i_2, i_3\} = [2]$, /5/

(c) ha $n = 3$ akkor

$q = u_o(h(u_1(c_1x_{i_1}),u_2(c_2x_{i_2}),u_3(c_3x_{i_3})))$ ahol $\{i_1,i_2,i_3\} = [3]$.

/Megjegyezzük, hogy a $T_{F_i^1,1}$ jelölésben F_i^1-t rangolt ábécé-nek tekintjük. Tehát $u_j \in T_{F_i^1,1}$ azt jelenti, hogy u_j-ben minden függvény szimbólum eleme F_i^1-nek $(j = 0,1,2,3)$./

Bizonyitás. Mivel $\mathfrak{N}_i$ NDR-transzformátor, a tétel állitása a 2.5, 2.7, 2.8 lemmákból következik. □

Definició. Legyen $i \in [2k]$ tetszőleges! Azt mondjuk, hogy r_{i-1} /6/ tipusu ha

(a) valamely $f \in F_{i-1}^3$ és $p_1,p_2,p_3 \in T_{F_{i-1},m+1}$-re $f(p_1,p_2,p_3) \in sub(r_{i-1})$
és /6/
(b) minden $j \in [3]$-ra $n_j > 0$ ahol $n_j = \max\{|v|_2 \mid v \in path_\ell(p_j), \ell \in [m+1]\}$.

2.10. lemma. Nem létezik olyan $i \in [2k]$ amelyre r_{i-1} /6/ tipusu.

Bizonyitás. Elegendő megmutatni, hogy ha r_{i-1} /6/ tipusu, akkor r_i is /6/ tipusu. Ez a lemma bizonyitását adja, hiszen r_{2k} definició szerint nem /6/ tipusu.

Tegyük fel, hogy r_{i-1} /6/ tipusu $(i \in [2k])$. Ekkor a 2.9. lemmából következik, hogy valamely $s_{i-1} \in T_{F_{i-1},m+2}$, $s_i \in T_{F_i,m+2}$, $u_o,u_1,u_2,u_3 \in T_{F_i^1,1}$, $c,c_1,c_2,c_3 \in A_i$

és $q_1,q_2,q_3 \in T_{F_i,m+1}$-re az alábbiak teljesülnek:

(a) $r_{i-1} = s_{i-1} \dot{\overline{m+2}} f(p_1,p_2,p_3)$,

(b) $r_i = s_i \dot{\overline{m+2}} u_o(h(u_1(q_1),u_2(q_2),u_3(q_3)))$,

(c) $cf(x_1,x_2,x_3) \to u_o(h(u_1(c_1x_{i_1}),u_2(c_2x_{i_2}),$
$u_3(c_3x_{i_3}))) \in \Sigma_i$,
$\{i_1,i_2,i_3\} = [3]$,

(d) $(s_{i-1},s_i) \in \tau'_{\mathfrak{A}_i}$, $(p_{i_j},q_j) \in \tau'_{\mathfrak{A}_i(c_j)}$ minden $j \in [3]$-ra.

Továbbá, minden $j \in [3]$-ra, létezik $\ell_j \in [m+1]$ és $v_j \in path_{\ell_j}(p_{i_j})$, hogy $|v|_2 = n_{i_j}$. A 2.1. lemma alapján létezik $z_j \in path_{\ell_j}(q_j)$ ut, hogy $|v_j|_2 \leq |z_j|_2$. Ez azt mutatja, hogy r_i /6/ tipusu a $h(u_1(q_1),u_2(q_2),u_3(q_3))$ részfával. $\square$

<u>Definició.</u> Legyen $i \in [2k]$. Azt mondjuk, hogy r_{i-1} /7/ tipusu ha

(a) valamely $f \in F^3_{i-1}$ és $p_1,p_2,p_3 \in T_{F_{i-1},m+1}$-re
$f(p_1,p_2,p_3) \in sub(r_{i-1})$

és /7/

(b) létezik pontosan egy $j \in [3]$ amelyre $n_j > 0$, ahol n_j ugyanaz, mint a /6/ tipus definiciójában.

<u>2.11. lemma.</u> Nem létezik olyan $i \in [2k]$ amelyre r_{i-1} /7/ tipusu.

<u>Bizonyitás.</u> Mivel r_{2k} nem /7/ tipusu, ugyanazt a gondolatmenetet követjük, mint a 2.10. lemma bizonyitásában. Tegyük fel, hogy r_{i-1} /7/ tipusu. Ekkor a 2.10. lemma jelöléseit felhasználva (a)-(d) ismét fennállnak, és az

általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy

$$|v_1|_2 > 0,\ |v_2|_2 = |v_3|_2 = 0, \text{ azaz } p_{i_2}, p_{i_3} \in T_{F^1_{i-1}, m+1}.$$

Eképpen a 2.1, 2.9 lemmákból következik, hogy $|z_1|_2 > 0$ és $q_2, q_3 \in T_{F^1_i, m+2}$, ami azt jelenti, hogy r_i /7/ tipusu. □

A továbbiakban szükségünk lesz még egy tipusra.

Definició. Azt mondjuk, hogy valamely $i \in [2k]$-ra r_{i-1} /8/ tipusu, ha létezik v, z path(r_{i-1}) amelyek kielégitik az alábbi feltételeket:

(a) $v \nleq z$ és $z \nleq v$,

(b) $\mathrm{str}(r_{i-1}, v) = f(p_1, p_2, p_3)$ valamely $f \in F^3_{i-1}$, $p_1, p_2, p_3 \in T_{F_{i-1}, m+1}$-re, /8/

(c) $\mathrm{str}(r_{i-1}, z) = f'(p'_1, p'_2, p'_3)$ valamely $f' \in F^3_{i-1}$, $p'_1, p'_2, p'_3 \in T_{F_{i-1}, m+1}$-re.

2.12. lemma. Nem létezik $i \in [2k]$, amelyre r_{i-1} /8/ tipusu.

Bizonyitás. Ha r_{i-1} /8/ tipusu, akkor a 2.9. lemma alapján r_i is /8/ tipusu. Ez a lemma bizonyitását adja, hiszen r_{2k} nem /8/ tipusu. □

2.13. lemma. Legyen $i \in [2k]$ páratlan egész. Ekkor $rn_3(r_{i-1}) = rn_3(r_i)$.

<u>Bizonyitás.</u> A 2.9. lemmából nyilvánvalóan következik, hogy $rn_3(r_{i-1}) \leq rn_3(r_i)$. Tegyük fel, hogy $rn_3(r_{i-1}) < rn_3(r_i)$. Ekkor az $a_i r_{i-1} \Longrightarrow^*_{\mathfrak{N}_i} r'_i \ (r'_i \in T_F(A_i X_{m+1}))$ derivációban $\mathfrak{N}_i$ legalább egy /5/ alaku szabályt alkalmazott. Azonban ez ellentmondás, mivel páratlan i-re $\mathfrak{N}_i$ LNDR-transzformátor.

<u>2.14. lemma.</u> $k = m$.

<u>Bizonyitás.</u> Tegyük fel, hogy $k < m$. Ekkor, mivel $rn_3(r_o) = 0$ és $rn_3(r_{2k}) = m$, a 2.13. lemmából következik, hogy valamely páratlan $i \in [2k]$ számra $rn_3(r_{i-1}) \leq rn_3(r_i) - 2$. Ez azt jelenti, hogy létezik $v, z \in path(r_{i-1})$, hogy $v \neq z$, $str(r_{i-1}, v) = f(p_1, p_2)$, $str(r_{i-1}, z) = f'(p'_1, p'_2)$ valamely $f, f' \in F^2_{i-1}, p_j, p'_j \in T_{F_{i-1}, m+1}$ $(j \in [2])$-re, továbbá az $a_i r_{i-1} \Longrightarrow^*_{\mathfrak{N}_i} r'_i \ (r'_i \in T_{F_i}(A_i X_{m+1}))$ derivációban f és f' /5/ tipusu szabály alkalmazásával került átirásra.

Először bebizonyitjuk, hogy $v < z$ vagy $z < v$ teljesül. A $v \not< z$, $z \not< v$ és $v \neq z$ relációkból következik, hogy r_i /8/ tipusu, ami ellentmond a 2.12. lemmának.

Tegyük fel, hogy $v < z$ és az /5/ szabály alkalmazásával irta át $\mathfrak{N}_i$ f-et az $a_i r_{i-1} \Longrightarrow^*_{\mathfrak{N}_i} r'_i$ derivációban. Ekkor, az általánosság megszoritása nélkül feltehetjük, hogy (a), (b), (c), (d) teljesül valamely $s_{i-1}, t_{i-1} \in T_{F_{i-1}, m+2}$, $s_i \in T_{F_i, m+2}$ és $q_1, q_2, q_3 \in T_{F_i, m+1}$-re:

(a) $r_{i-1} = s_{i-1} \underset{m+2}{\cdot} f(p_1, p_2)$,

(b) $p_1 = t_{i-1} \underset{m+2}{\cdot} f'(p_1', p_2')$,

(c) $r_i = s_i \underset{m+2}{\cdot} u_o(h(u_1(q_1), u_2(q_2), u_3(q_3)))$,

(d) $(s_{i-1}, s_i) \in \tau'_{\mathfrak{R}_i}$, $(p_{i_j}, q_j) \in \tau'_{\mathfrak{R}_i}(c_j)$ minden $j \in [3]$-ra.

Vezessük be a következő jelöléseket

$m_j = \max\{|v|_2 \mid v \in path_\ell(p_j)$ valamely $\ell \in [m+1]$-re$\}$ $(j \in [2])$,

$n_j = \max\{|v|_2 \mid v \in path_\ell(q_j)$ valamely $\ell \in [m+1]$-re$\}$ $(j \in [3])$.

A (b) pont alapján tudjuk, hogy $m_1 > 0$. Továbbá $m_2 = 0$ mivel $m_2 > 0$-ból (d) és 2.1. lemma alapján következne, hogy $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ és $n_3 > 0$. Ez azonban azt jelentené, hogy r_i /6/ tipusu, ami ellentmond a 2.10. lemmának.

Eképpen $p_2 \in T_{F^1_{i-1}, m+1}$.

/5/ alapján tudjuk, hogy $\{i_1, i_2, i_3\} = [2]$, ami azt jelenti, hogy $\mathfrak{R}_i$ p_1 és p_2 közül valamelyiket duplikálja. Megmutatjuk, hogy mindkét eset ellentmondáshoz vezet.

Először tegyük fel, hogy 1 egyszer, 2 kétszer fordul elő az i_1, i_2, i_3 sorozatban. Ekkor a 2.1, 2.9 lemmákból következik, hogy pontosan egy $j \in [3]$-ra $n_j > 0$, ami ellentmond a 2.11. lemmának.

Másodszor tegyük fel, hogy 1 kétszer, 2 egyszer fordul elő az i_1, i_2, i_3 sorozatban. De ekkor, mivel f' /5/ alaku szabály alkalmazásával került átirásra, azt kapjuk, hogy r_i /8/ tipusu, ami a 2.12. lemma alapján ujra ellentmondásra vezet.

Tehát k = m. □

Ezzel bebizonyitottuk a 2.3. tételt. □

Most a 2.3. tételt egy másik alakban mondjuk ki. Könnyen igazolható az $\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH} = \mathcal{UNDR}$ azonosság. Valóban, bármely $\mathfrak{A}$ LNDR- és $\mathfrak{B}$ NH-transzformátorra az 1.3. lemma alapján $\tau_{\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}} = \tau_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{B}}$, és könnyen igazolható, hogy ebben az esetben $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ egy UNDR-transzformátor. Forditva, adott $\mathfrak{C}$ UNDR-transzformátorhoz a szokásos átcimkéző módszerrel /vö. [6]-ban a 155. oldalon a 3.1. lemmával/ meg tudunk konstruálni egy $\mathfrak{A}$ LNDR- és $\mathfrak{B}$ NH-transzformátort ugy, hogy $\tau_{\mathfrak{C}} = \tau_{\mathfrak{A}} \circ \tau_{\mathfrak{B}}$ teljesüljön. A fentieknek megfelelően a 2.3. tételt az alábbi alakban is kimondhatjuk.

2.15. tétel. Minden $m \geq 1$-re $\mathcal{UNDR}^m \subset \mathcal{UNDR}^{m+1}$.

Tehát a II. 2. alfejezet elején felvetett problémára választ ad a

2.16. tétel. [M] végtelen halmaz.

Bizonyitás. A 2.16. tétel a 2.3. tétel következménye. □

A következőkben a második problémával foglalkozunk. Igazolható a következő állitás.

2.17. lemma. Létezik egy $\mathfrak{A} = (F, \{a,b\}, \bar{F}, \Sigma, a)$ NDR-transzformátor, hogy $\tau_{\mathfrak{A}} \notin (\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{D}\mathcal{R} \circ \mathcal{N}\mathcal{H})^k$ minden $k \geq 1$-re.

Bizonyitás. $\mathfrak{A}$-t az (a), (b), (c) feltételekkel definiáljuk.

(a) $F = F^0 \cup F^2$, $F^0 = \{\#\}$, $F^2 = \{f\}$

(b) $\bar{F} = \bar{F}^0 \cup \bar{F}^2 \cup \bar{F}^3$, $\bar{F}^0 = \{\#\}$, $\bar{F}^2 = \{f\}$, $\bar{F}^3 = \{g\}$,

(c) Σ az alábbi szabályok halmaza:

(i) $a\# \to \#$, $b\# \to \#$,

(ii) $af(x_1, x_2) \to g(bx_1, ax_1, bx_2)$, $bf(x_1, x_2) \to f(bx_1, bx_2)$.

A P_m, Q_m fákat ugyanugy definiáljuk, mint a 2.3. tétel bizonyitásában. Könnyen igazolható, hogy minden $m \geq 1$-re $(P_m, Q_m) \in \tau'_{\mathfrak{A}}$.

Továbbá, irjuk Q_m-et a

$\bar{Q}_m(x_1, x_2, x_2, \ldots, \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_{m+1}}_{m+1\text{-szer}})$ alakban, ahol

$\bar{Q}_m \in \hat{T}_{F,n}$ $(n = 1+2+\ldots+m+1)$.

Ekkor minden $t_1, \ldots, t_{m+1} \in T_F$ fára

$$(P_m(t_1, \ldots, t_{m+1}), \bar{Q}_m(t_1, t_2, t_2, \ldots, \underbrace{t_{m+1}, \ldots, t_{m+1}}_{m\text{-szer}}, t'_{m+1})) \in \tau_{\mathfrak{A}}$$

teljesül, ahol $t'_{m+1} = \tau_{\mathfrak{A}}(t_{m+1})$.

Ezt a jelölést használva a 2.18. lemma a 2.4. lemmához hasonlóan igazolható. Ezért a bizonyitást elhagyjuk.

2.18. lemma. Ha $\mathfrak{L}$ NDR-transzformátorra teljesül a $\tau_{\mathfrak{A}} = \tau_{\mathfrak{L}}$ egyenlőség, akkor minden $m \geq 1$-re teljesül a $(P_m, Q_m) \in \tau'_{\mathfrak{L}}$ tartalmazás. $\square$

Most befejezzük a 2.17. lemma bizonyitását. Tegyük fel, hogy $\tau_{\mathcal{A}} \in (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^k$ valamely $k \geq 1$-re. Ekkor minden $i \in [2k]$-ra létezik egy $\mathcal{A}_i = (F_{i-1}, A_i, F_i, \Sigma_i, a_i)$ DR-transzformátor amelyre fenállnak /2/ (a)-(c) tulajdonságai és $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}_1} \circ \ldots \circ \tau_{\mathcal{A}_k}$. Válasszuk m-et ugy, hogy $k < m$ teljesüljön. A 2.2. és 2.18. lemmákból következik, hogy

$$(P_m, Q_m) \in \tau'_{\mathcal{A}_1} \circ \ldots \circ \tau'_{\mathcal{A}_k}.$$

Mindazonáltal, ha a 2.3. tétel bizonyitását követjük a /3/ relációtól kezdve, akkor a 2.14. lemmában ellentmondáshoz érkezünk. Ezzel a 2.17. lemma bizonyitása teljes. $\square$

A II. fejezet utolsó tétele a 2.17. lemma következménye.

<u>2.19. tétel.</u> $\bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathcal{LNDR} \circ \mathcal{NH})^k \subset \mathcal{NDR}$.

III. Nemdeterminisztikus felszálló fatranszformációk kompoziciói

1. Alapfogalmak

További fogalmakat, segédeszközöket vezetünk be. Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy N^* diszjunkt a tekintett változóhalmazokkal és rangolt ábécékkel. Legyen G rangolt ábécé. A G-félfák P_G halmazát a következő módon definiáljuk:

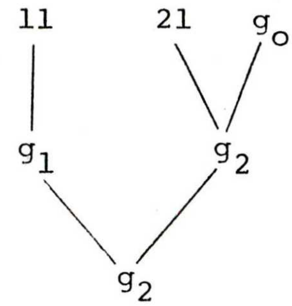
$$P_G = \{p\in T_G(N^*) \mid \text{minden } v\in N^* \text{ szóra ha } lab(p,v)\in N^*, \text{ akkor } lab(p,v) = v\}.$$

Az $S:P_G \to 2^{N^*}$ leképezés minden p félfához az N^* $S(p)$ részhalmazát rendeli, amelyet a következő módon definiáljuk:

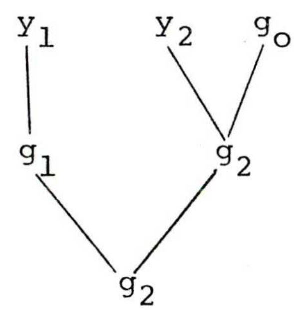
$$S(p) = \{lab(p,v) \mid v\in N^*\} \cap N^*.$$

Világos, hogy $S(p)$ véges halmaz minden $p\in P_G$ félfára. Az $S(p)$ jelölés helyett inkább az egyszerübb S_p jelölést fogjuk használni. Az S_p halmaz elemeit p argumentumainak nevezzük. Legyen Z tetszőleges halmaz, legyen $p\in P_G$ G-félfa és tekintsük a $\varphi:S_p \to Z$ leképezést. A p fában S_p minden u elemét $\varphi(u)$-val helyettesitve egy Z feletti G-fát kapunk, amelyet $p[S_p,\varphi]$-vel jelölünk.

Példa: Legyen $G = \{g_o,g_1,g_2\}$ egy rangolt ábécé, ahol $\nu(g_o) = 0$, $\nu(g_1) = 1$, $\nu(g_2) = 2$ és legyen $Y = \{y_1,y_2\}$. A $p = g_2(g_1(11),g_2(21,g_o))$ félfa az alábbi gráffal szemléltethető:



A $\varphi:\{11,21\}\longrightarrow\{y_1,y_2\}$ leképezést az alábbi módon definiáljuk: $\varphi(11) = y_1$, $\varphi(21) = y_2$.
A $p[S_p,\varphi]$ fa a következő gráffal szemléltethető:



Az A rangolt ábécét állapothalmaznak nevezzük, ha A minden eleme egy aritású függvényszimbólum. Ha A állapothalmaz és D tetszőleges halmaz, akkor AD jelöli az

$$AD = \{a(d) \mid a\in A,\ d\in D\} \text{ halmazt.}$$

Továbbá ha $a\in A$ és $d\in D$ akkor általában ad jelölést használunk a(d) helyett. Ha $A_1,\dots,A_j$ állapothalmazok ($j\in N$) akkor az $A_j\times\dots\times A_1$ Descartes szorzatot állapothalmaznak tekintjük és $A_j\dots A_1$ jelöléssel hivatkozunk rá. Az $A_j\dots A_1$ halmaz elemeit $a_j\dots a_1$ sztringekkel jelöljük, ahol $a_i\in A_i$, $i = 1,\dots,j$.

Legyen $\varphi: A \to B$ tetszőleges leképezés. Az $rg(\varphi) = \{b \mid \varphi(a) = b,\ a \in A\}$ halmazt φ értékkészletének nevezzük.

Tekintsük az N^* halmaz tetszőleges u elemét.

Az $\omega_u: T_G(N^*) \longrightarrow T_G(N^*)$ leképezést a következő módon definiáljuk

(i) $\omega_u(p) = p$ ha $p = f(\in G^o)$,

(ii) $\omega_u(p) = up$ ha $p \in N^*$,

(iii) $\omega_u(p) = f(\omega_u(p_1), \ldots, \omega_u(p_\ell))$ ha $p = f(p_1, \ldots, p_\ell)$, $f \in G^\ell$, $\ell \geq 1$, $p_i \in T_G(Y \cup N^*)$, $i = 1, \ldots, \ell$.

Tehát az $\omega_u(p)$ fát ugy kapjuk meg a p fából, hogy p minden $v \in N^*$ levelét uv-vel helyettesitjük.

Legyenek $U_1, \ldots, U_\ell$ tetszőleges halmazok és legyen V valamely részhalmaza az $(U_o \times U_1 \times \ldots \times U_\ell) \cup \ldots \cup (U_o \times U_1) \cup U_o$ halmaznak. Legyen $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, $[V]_j$ jelöli az

$\{u_j \mid \exists (u_o, \ldots, u_j, \ldots, u_n) \in V,\ o \leq n \leq \ell,\ o \leq j \leq n\}$

halmazt.

Tehát a $[V]_j$ halmaz elemei a V halmaz elemeinek j-edik komponensei.

Az egységes formalizmus kedvéért a következő konvenciót vezetjük be. Legyen G rangolt ábécé, ν pedig legyen G aritásfüggvénye. Ha $u \in G^o$, azaz $\nu(u) = o$, akkor $u(1, \ldots, \nu(u))$ az u G-fát jelöli, sőt tetszőleges ϑ halmazra $u(1, \ldots, \nu(u))[\{1, \ldots, \nu(u)\}, \vartheta]$ is az u G-fát jelöli.

Ebben a fejezetben az $\mathfrak{A} = (F, A, G, A', \Sigma)$ R-transzformátor átirási szabályait

$af \to q[S_q, \varphi]$ $(q \in P_G, f \in F^m, \varphi: S_q \longrightarrow A\{1, \ldots, m\})$

alakban irjuk. Ennek megfelelően

$p_1, p_2 \in T_G(N^* \cup AT_F(N^*))$ fákra $p_1 \Longrightarrow_{\mathfrak{A}} p_2$ közvetlen átmenet teljesül, ha p_1-ből p_2-t ugy kapjuk, hogy p_1 valamely

$af(1,\dots,m)[\{1,\dots,m\},\alpha]$ $(f\in F^m,\ \alpha:\{1,\dots,m\}\to T_F(N^*))$ alaku részfáját $q[S_q,\beta]$ fával helyettesitjük, ahol $af\to q[S_q,\varphi]\in\Sigma$, és a $\beta: S_q\to AT_F(N^*)$ leképezésre teljesül, hogy minden $s\in S_q$ argumentumra ha $\varphi(s) = ct$ $(c\in A,\ t\in\{1,\dots,m\})$ akkor $\beta(s) = c\alpha(t)$.

2. Deriváció sorozatok

Ebben az alfejezetben felszálló fatranszformátorok deriváció sorozatainak jellemzésével fogunk foglalkozni. A továbbiakban k 2-nél nem kisebb természetes számot jelöl, ezenfelül legyen $\mathfrak{A}_i = (G_{i-1}, A_i, G_i, A_i', \Sigma_{\mathfrak{A}_i})$ R-transzformátor $(i = 1,\dots,k)$.

Most megadunk egy P eljárást. P inputja egy, a következő alakban megadott deriváció:

$$/1/:\quad a_j p_{j-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} p_j \quad (a_j\in A_j,\ p_{j-1}\in T_{G_{j-1}},\ p_j\in T_{G_j},\ j\in\{1,\dots,k\})$$

és a

$$p_{j-1} = r_{j-1}[S_{r_{j-1}}, \varphi_{j-1}] \quad (r_{j-1}\in P_{G_{j-1}},\ \varphi_{j-1}: S_{r_{j-1}}\to T_{G_{j-1}})$$

felbontás.

A P eljárás az $r_{j-1}(\in T_{G_{j-1}}(N^*))$ fa magassága szerinti teljes indukcióval előállitja a /2/, /3/ derivációkat, amelyek a következő alakban irhatók fel.

/2/: $a_j r_{j-1}[S_{r_{j-1}},\varphi_{j-1}] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} r_j[S_{r_j},\psi_j] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} r_j[S_{r_j},\varphi_j] = p_j,$

$(\psi_j : S_{r_j} \to A_j rg(\varphi_{j-1}),\ \varphi_j : S_{r_j} \to T_{G_j}),$ minden $s_j \in S_{r_j}$ argumentumra $\psi_j(s_j) \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} \varphi_j(s_j)$ teljesül.

/3/: $a_j r_{j-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} r_j[S_{r_j},\bar{\psi}_j]\ (\bar{\psi}_j : S_{r_j} \to A_j S_{r_{j-1}}),$
és minden $s_j \in S_{r_j}$ argumentumra teljesül, hogy ha $\bar{\psi}_j(s_j) = a_j s_{j-1}$, akkor $\psi_j(s_j) = a_j \varphi_{j-1}(s_{j-1})$.

Tehát a /2/ deriváció az /1/ deriváció olyan átütemezése, amely először az r_{j-1} félfát forditja le, s azután a p_{j-1} többi részét. /3/ pedig /2/-nek az r_{j-1} félfára való megszoritása.

Legyen $h(r_{j-1}) = 0$. Két esetet különböztetünk meg.

<u>1. eset.</u> $r_{j-1} = f \in G^o_{j-1}$. Ebben az esetben $S_{r_{j-1}} = \emptyset$, $\varphi_{j-1} = \emptyset$ és $r_{j-1}[S_{r_{j-1}},\varphi_{j-1}] = f$. Tehát $a_j f \to p_j \in \Sigma_{\mathfrak{R}_j}$, ahol $p_j \in T_{G_j}(Y_j)$. Legyen $r_j = p_j$, eképpen $S_{r_j} = \emptyset$. Legyen $\varphi_j = \emptyset$, $\psi_j = \emptyset$, $\bar{\psi}_j = \emptyset$. A fentiek alapján az /1/ deriváció az alábbi alakot ölti:

/2/: $a_j r_{j-1}[S_{r_{j-1}},\varphi_{j-1}] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} r_j[S_{r_j},\psi_j] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} r_j[S_{r_j},\varphi_j],$

/3/: $a_j r_{j-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_j} r_j[S_{r_j},\bar{\psi}_j].$

2. eset. $r_{j-1} = e\,(\in N^*)$. Ebben az esetben $\varphi_{j-1}(e) =$
$= r_{j-1}[S_{r_{j-1}}, \varphi_{j-1}]$. Legyen $r_j = e$, igy $S_{r_j} = \{e\}$. A
$\psi_j : S_{r_j} \to A_j T_{G_{j-1}}$, $\quad \bar{\psi}_j : S_{r_j} \to A_j S_{r_{j-1}}$ és $\varphi_j : S_{r_j} \to T_{G_j}$
leképezéseket a következő módon definiáljuk:

$\psi_j(e) = a_j r_{j-1}[S_{r_{j-1}}, \varphi_{j-1}]$, $\bar{\psi}_j(e) = a_j e$, $\varphi_j(e) = p_j$.

Eképpen $r_j[S_{r_j}, \psi_j] = a_j r_{j-1}[S_{r_{j-1}}, \varphi_{j-1}]$, $r_j[S_{r_j}, \bar{\psi}_j] = a_j e$.

Tehát megkaptuk a kivánt /2/ és /3/ derivációkat és $\bar{\psi}_j(e) = a_j e$,
$\psi_j(e) = a_j \varphi_{j-1}(e)$, ahol $S_{r_j} = \{e\}$.
Tehát a $h(r_{j-1}) = 0$ magasságra bebizonyitottuk az állitást.

Legyen $r_{j-1} = f(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_\ell) = f(\omega_1(p_1), \ldots, \omega_\ell(p_\ell))$
$(p_1, \ldots, p_\ell \in P_{G_{j-1}}$, $\quad S_{r_{j-1}} = 1 \cdot S_{p_1} \cup 2 \cdot S_{p_2} \cup \ldots \cup \ell \cdot S_{p_\ell}$ ahol
$i \cdot S_{p_i} = \{is \mid s \in S_{p_i}\}$, $i \in \{1, \ldots, \ell\})$
$r_{j-1}[S_{r_{j-1}}, \varphi_{j-1}] = f(p_1[S_{p_1}, \mu_1], \ldots, p_\ell[S_{p_\ell}, u_\ell])$ ahol minden
$i \in [\ell]$ indexre és $s \in S_{p_i}$ argumentumra $\mu_i(s) = \varphi_{j-1}(is)$ teljesül.

Az /1/ deriváció első lépésében alkalmazott produkció a következő alaku: $a_j f \to q[S_q, \varepsilon]$, ahol $q \in P_{G_j}$, $\quad f \in G^{\ell}_{j-1}$
valamely ℓ természetes számra, $\varepsilon : S_q \to A_j\{1, \ldots, \ell\}$.
Következésképpen az /1/ deriváció a következő alakban irható fel:

$$a_j r_{j-1}[S_{r_{j-1}}, \varphi_{j-1}] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_j} q[S_q, \varrho] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_j} q[S_q, \tau]$$

$(\varrho : S_q \to A_j rg(\varphi_{j-1})$, $\tau : S_q \to T_{G_j})$, $\quad$ ahol a ϱ leképezés kielégiti az alábbi formulát:

minden $s \in S_q$ argumentumra ha $\varepsilon(s) = b_j t$ $(t \in \{1, \ldots, \ell\}$, $b_j \in A_j)$
akkor $\varrho(s) = b_j p_t[S_{p_t}, \mu_t]$.

Ebből következik, hogy $\varrho(s) = b_j p_t[s_{p_t}, \mu_t] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} \tau(s)$ igaz.

A kivánt derivációk a következő alakban irhatók fel:

/2/: $a_j f(p_1[s_{p_1}, \mu_1], \ldots, p_\ell[s_{p_\ell}, \mu_\ell]) \underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow} q[s_q, \varrho] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}}$
$\overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} q[s_q, \kappa] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} q[s_q, \tau]$,
ahol $\kappa : S_q \to T_{G_j}(A_j T_{G_{j-1}})$, $\tau : S_q \to T_{G_j}$.

/3/: $a_j f(\omega_1(p_1), \ldots, \omega_\ell(p_\ell)) \underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow} q[s_q, \bar{\varrho}] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} q[s_q, \bar{\kappa}]$,

ahol $\bar{\varrho} : S_q \to A_j T_{G_{j-1}}(N^*)$, $\bar{\kappa} : S_q \to T_{G_j}(A_j S_{q_{j-1}})$.

A κ, $\bar{\varrho}$, $\bar{\kappa}$ leképezéseket az alábbiakban fogjuk definiálni. Minden $s \in S_q$ argumentumra tekintsük a

/4/: $\varrho(s) = b_j p_t[s_{p_t}, \mu_t] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} \tau(s)$ derivációt, ahol
$\varepsilon(s) = b_j t$ teljesül.

Mivel $h(p_t) < h(r_{j-1})$ a teljes indukciós feltevés alapján alkalmazzuk a P eljárást a /4/ derivációra és a $p_t[s_{p_t}, \mu_t]$ felbontásra, ugy nyerjük az /5/, /6/ derivációkat.

/5/: $b_j p_t[s_{p_t}, \mu_t] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} q_s[s_{q_s}, \eta_s] \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} q_s[s_{q_s}, \xi_s] = \tau(s)$,
$(q_s \in P_{G_j}$, $\eta_s : S_{q_s} \to A_j rg(\mu_t)$, $\xi_s : S_{q_s} \to T_{G_j})$, és
minden $v \in S_{q_s}$ argumentumra $\eta_s(v) \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} \xi_s(v)$ teljesül.

/6/: $b_j p_t \overset{*}{\underset{\mathfrak{N}_j}{\Longrightarrow}} q_s[s_{q_s}, \bar{\eta}_s]$ $(\bar{\eta}_s : S_{q_s} \to A_j S_{p_t})$,
és minden $v \in S_{q_s}$ argumentumra ha $\bar{\eta}_s(v) = b_j z$ valamely $b_j \in A_j$ állapotra és $z \in S_{p_t}$ argumentumra, akkor $\eta_s(v) =$
$= b_j \mu_t(z)$.

A $\mathcal{K}, \bar{\varsigma}, \bar{\mathcal{K}}$ leképezések értékét az s argumentumra a

$\mathcal{K}(s) = q_s[s_{q_s}, \eta_s]$, $\bar{\varsigma}(s) = \omega_t(b_j p_t)$, $\bar{\mathcal{K}}(s) = \omega_t(q_s[s_{q_s}, \bar{\eta}_s])$

egyenlőségekkel definiáljuk.

A /2/ deriváció $\varsigma(s) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_j} \mathcal{K}(s) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_j} \mathcal{T}(s)$ alaku részderivációja megegyezik az /5/ derivációval.

A /3/ deriváció $\bar{\varsigma}(s) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_j} \bar{\mathcal{K}}(s)$ alaku részderivációja ugy áll elő a /6/ derivációból, hogy annak minden egyes lépésére alkalmazzuk az ω_t leképezést.

Az alábbiakban megadunk egy S eljárást. Az S inputja egy a következő alakban megadott $D = D_1, \ldots, D_k$ deriváció sorozat:

D_1: $a_1 p_o \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_1} p_1$, $(p_o \in T_{G_o}, a_1 \in A_1, p_1 \in T_{G_1})$,

D_2: $a_2 p_1 \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_2} p_2$, $(a_2 \in A_2,\ p_2 \in T_{G_2})$,

.
.
.

D_k: $a_k p_{k-1} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_k} p_k$, $(a_k \in A_k,\ p_k \in T_{G_k})$,

és a $p_o = r_o[s_{r_o}, \varphi_o]$ felbontás.

S eljárás két deriváció sorozatot állit elő, a

$D^{r_o} = D_1^{r_o}, D_2^{r_o}, \ldots, D_k^{r_o}$ és a $\bar{D}^{r_o} = \bar{D}_1^{r_o}, \bar{D}_2^{r_o}, \ldots, \bar{D}_k^{r_o}$ deriváció sorozatot, ahol D^{r_o} és $\bar{D}^{r_o}$ az alábbi alakkal rendelkeznek:

$D_1^{r_o}$: $a_1 r_o[s_{r_o}, \varphi_o] \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_1} r_1[s_{r_1}, \psi_1] \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_1} r_1[s_{r_1}, \varphi_1] = p_1$

$(r_1 \in P_{G_1}(Y_1)$, $\psi_1 : S_{r_1} \rightarrow A_1 rg(\varphi_o)$, $\varphi_1 : S_{r_1} \rightarrow T_{G_1})$ és

minden $s_1 \in S_{r_1}$ argumentumra fennáll a $\psi_1(s_1) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{N}_1} \varphi_1(s_1)$ deriváció.

$D_2^{r_o}$: $a_2 r_1[S_{r_1},\varphi_1] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_2} r_2[S_{r_2},\psi_2] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_2} r_2[S_{r_2},\varphi_2] = p_2$

$(r_2 \in P_{G_2},\quad \psi_2: S_{r_2} \to A_2 rg(\varphi_1),\ \varphi_2: S_{r_2} \to T_{G_2})$ és

minden $s_2 \in S_{r_2}$ argumentumra fennáll a $\psi_2(s_2) \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_2} \varphi_2(s_2)$

deriváció.

.
.
.

$D_k^{r_o}$: $a_k r_{k-1}[S_{r_{k-1}},\varphi_{k-1}] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_k} r_k[S_{r_k},\psi_k] \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_k} r_k[S_{r_k},\varphi_k] = p_k$

$(r_k \in P_{G_k},\quad \psi_k: S_{r_k} \to A_k rg(\varphi_{k-1}),\ \varphi_k: S_{r_k} \to T_{G_k})$

és minden $s_k \in S_{r_k}$ argumentumra fennáll a $\psi_k(s_k) \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_k} \varphi_k(s_k)$

deriváció.

$\bar{D}_1^{r_o}$: $a_1 r_o \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_1} r_1[S_{r_1},\bar{\psi}_1]$ $(\bar{\psi}_1: S_{r_1} \to A_1 S_{r_o})$,

$\bar{D}_2^{r_o}$: $a_2 r_1 \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_2} r_2[S_{r_2},\bar{\psi}_2]$ $(\bar{\psi}_2: S_{r_2} \to A_2 S_{r_1})$,

.
.
.

$\bar{D}_k^{r_o}$: $a_k r_{k-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{R}_k} r_k[S_{r_k},\bar{\psi}_k]$ $(\bar{\psi}_k: S_{r_k} \to A_k S_{r_{k-1}})$.

Minden $j \in \{1,\dots,k\}$ indexre és minden $s_j \in S_{r_j}$ argumentumra ha $\bar{\psi}_j(s_j) = b_j s_{j-1}$ valamely $b_j \in A_j$ állapotra és $s_{j-1} \in S_{r_{j-1}}$ argumentumra, akkor $\psi_j(s_j) = b_j \varphi_{j-1}(s_{j-1})$.

A P eljárást alkalmazva a D_1 derivációra és a $p_o = r_o[S_{r_o},\varphi_o]$ felbontásra, nyerjük a $D_1^{r_o}$, $\bar{D}_1^{r_o}$ derivációkat. Tegyük fel, hogy valamely j $(2 \le j \le k)$ indexre a $D_{j-1}^{r_o}$, $\bar{D}_{j-1}^{r_o}$ derivációkat már megkonstruáltuk.

A $D_{j-1}^{r_o}$ derivációból kapjuk a $p_{j-1} = r_{j-1}[S_{r_{j-1}},\varphi_{j-1}]$ felbontást. A P eljárást alkalmazva a D_j derivációra és a $p_{j-1} = r_{j-1}[S_{r_{j-1}},\varphi_{j-1}]$ felbontásra nyerjük a $D_j^{r_o}$, $\bar{D}_j^{r_o}$

derivációkat.

Az alfejezet további részében előkészitjük a k-szinkronizált felszálló fatranszformátor fogalmát. A k-szinkronizált felszálló fatranszformátort ugy definiáljuk, hogy az ilyen tipusu transzformátorokkal indukálni tudjuk k darab felszálló fatranszformátor kompozicióját.

Tekintsük az $\mathfrak{A}_i = (G_{i-1}, A_i, G_i, A_i', \Sigma_{\mathfrak{A}_i})$ $(i = 1,\dots,k)$ felszálló fatranszformátorokat. A G_o rangolt ábécé aritás függvényét ν-vel jelöljük. A fejezet hátra levő részére lerögzitjük ezeket a jelöléseket.

Tekintsük a $D = D_1,\dots,D_k$ derivàció sorozatot:

$$D_1:\ a_1 p_o \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{A}_1} p_1 \quad (p_o \in T_{G_o}, p_1 \in T_{G_1}, a_1 \in A_1'),$$

$$D_2:\ a_2 p_1 \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{A}_2} p_2 \quad (p_2 \in T_{G_2}, a_2 \in A_2'),$$

$$\vdots$$

$$D_k:\ a_k p_{k-1} \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{A}_k} p_k \quad (p_k \in T_{G_k}, a_k \in A_k'),$$

továbbá tekintsük a p_o fa $p_o = q_o[S_{q_o}, \gamma_o]$ felbontását, ahol $q_o \in P_{G_o}$, $\gamma_o : S_{q_o} \to T_{G_o}$.

Alkalmazva az S eljárást a D deriváció sorozatra és a $p_o = q_o[S_{q_o}, \gamma_o]$ felbontásra nyerjük a D^{q_o} és $\bar{D}^{q_o}$ deriváció-sorozatokat:

$$D_1^{q_o}:\ a_1 q_o[S_{q_o}, \gamma_o] \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{A}_1} q_1[S_{q_1}, \alpha_1] \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{A}_1} q_1[S_{q_1}, \gamma_1] = p_1,$$

$$(q_1 \in P_{G_1}, \quad \alpha_1 : S_{q_1} \to A_1 rg(\gamma_o), \ \gamma_1 : S_{q_1} \to T_{G_1})$$

és minden $s_1 \in S_{q_1}$ argumentumra fennáll az $\alpha_1(s_1) \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{A}_1} \gamma_1(s_1)$ deriváció.

$D_2^{q_o}$: $a_2q_1[s_{q_1},\gamma_1] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_2} q_2[s_{q_2},\alpha_2] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_2} q_2[s_{q_2},\gamma_2] = p_2$,

$(q_2 \in P_{G_2}$, $\alpha_2 : S_{q_2} \to A_2 rg(\gamma_1)$, $\gamma_2 : S_{q_2} \to T_{G_2})$,

és minden $s_2 \in S_{q_2}$ argumentumra fennáll az

$\alpha_2(s_2) \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_2} \gamma_2(s_2)$ deriváció.

.
.
.

$D_k^{q_o}$: $a_k q_{k-1}[s_{q_{k-1}},\gamma_{k-1}] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_k} q_k[s_{q_k},\alpha_k] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_k} q_k[s_{q_k},\gamma_k] = p_k$,

$(q_k \in P_{G_k}$, $\alpha_k : S_{q_k} \to A_k rg(\gamma_{k-1})$, $\gamma_k : S_{q_k} \to T_{G_k})$,

és minden $s_k \in S_{q_k}$ argumentumra fennáll az

$\alpha_k(s_k) \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_k} \gamma_k(s_k)$ deriváció.

$\bar{D}_1^{q_o}$: $a_1 q_o \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_1} q_1[s_{q_1},\bar{\alpha}_1]$, $(\bar{\alpha}_1 : S_{q_1} \to A_1 S_{q_o})$,

$\bar{D}_2^{q_o}$: $a_2 q_1 \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_2} q_2[s_{q_2},\bar{\alpha}_2]$, $(\bar{\alpha}_2 : S_{q_2} \to A_2 S_{q_1})$,

.
.
.

$\bar{D}_k^{q_o}$: $a_k q_{k-1} \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_k} q_k[s_{q_k},\bar{\alpha}_k]$, $(\bar{\alpha}_k : S_{q_k} \to A_k S_{q_{k-1}})$,

és minden $j \in [k]$ indexre és minden $s_j \in S_{q_j}$ argumentumra ha

$\bar{\alpha}_j(s_j) = b_j s_{j-1}$ $(b_j \in A_j, s_{j-1} \in S_{q_{j-1}})$, akkor $\alpha_j(s_j) = b_j \gamma_{j-1}(s_{j-1})$.

A $Z_{(D,q_o)}$ halmazt és az

$\Omega_{(D,q_o)} : Z_{(D,q_o)} \to A_1 \cup A_2 A_1 \cup \ldots \cup A_k \ldots A_1 rg(\gamma_o)$,

$\Theta_{(D,q_o)} : S_{q_k} \to Z_{(D,q_o)}$,

$\Psi_{(D,q_o)} : S_{q_k} \to A_k \ldots A_1 T_{G_o}$

leképezéseket a következő módon definiáljuk:

$Z_{(D,q_o)} = \{(s_o,s_1,\dots,s_j) \mid s_o \in S_{q_o}, s_1 \in S_{q_1},\dots,s_j \in S_{q_j}, j \in \{1,\dots,k\}$ és $(j=k$ vagy $(j<k$ és nincsen olyan $s_{j+1} \in S_{q_{j+1}}$, $b_{j+1} \in A_{j+1}$, hogy $\bar{\alpha}_{j+1}(s_{j+1}) = b_{j+1}s_j))$ és minden $i \in \{1,\dots,j\}$ indexre $\bar{\alpha}_i(s_i) = b_i s_{i-1}$ $b_i \in A_i)\}$.

Minden $(s_o,s_1,\dots,s_j) \in Z_{(D,q_o)}$-ra $\Omega_{(D,q_o)}((s_o,s_1,\dots,s_j)) = b_j \dots b_1 \gamma_o(s_o)$ akkor és csak akkor, ha minden $i \in [j]$-re $\bar{\alpha}_i(s_i) = b_i s_{i-1}$.

Minden $s_k \in S_{q_k}$ argumentumra $\Theta_{(D,q_o)}(s_k) = (s_o,s_1,\dots,s_k)$ akkor és csak akkor, ha minden $i \in \{1,\dots,j\}$ indexre $\alpha_i(s_i) =$ $= b_i s_{i-1}$ $(b_i \in A_i)$.

Minden $s_k \in S_{q_k}$ argumentumra $\Psi_{(D,q_o)}(s_k) = b_k \dots b_1 \gamma_o(s_o)$ akkor és csak akkor, ha $\Theta_{(D,q_o)}(s_k) = (s_o,s_1,\dots,s_k)$ és $\Omega_{(D,q_o)}((s_o,s_1,\dots,s_k)) = b_k \dots b_1 \gamma_o(s_o)$.

Világos, hogy fennáll a $\Psi_{(D,q_o)} = \Theta_{(D,q_o)} \circ \Omega_{(D,q_o)}$ azonosság.

A D deriváció sorozathoz és a $p_o = q_o[S_{q_o}, \gamma_o]$ felbontáshoz hozzárendeljük a

$$K_{(D,q_o)}: (q_k[S_{q_k}, \Psi_{(D,q_o)}], \Theta_{(D,q_o)}, Z_{(D,q_o)}, \Omega_{(D,q_o)})$$

konfigurációt. A konfiguráció szót azért használjuk, mert $K_{(D,q_o)}$-at megfeleltetjük annak a k-szinkronizált R-transzformátor konfigurációjának, amelyet ugy konstruálunk meg, hogy a $\tau_{\mathfrak{R}_1} \circ \dots \circ \tau_{\mathfrak{R}_k}$ transzformációt indukálja.

Tovább folytatjuk a D deriváció sorozat tanulmányozását. Minden $s_o \in S_{q_o}$ argumentumra a $\gamma_o(s_o)$ fa a következő alakban irható fel: $\gamma_o(s_o) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$, ahol $u_o \in G_o$ és $\vartheta_o : \{1,\dots, \nu(u_o)\} \to T_{G_o}$.

Kettő esetet különböztetünk meg.

1. eset. $Z_{(D,q_o)} = \emptyset$. Tekintsük az $r_o = q_o[S_{q_o}, \xi_o]\,(\in P_{G_o})$ félfát, ahol a $\xi_o : S_{q_o} \to T_{G_o}(N^*)$ leképezés a következő formulával van definiálva: minden $s_o \in S_{q_o}$ argumentumra $\xi_o(s_o) = \omega_{s_o}(u_o(1,\dots,\nu(u_o)))$ ha $\gamma_o(s_o) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]\,(u_o \in G_o$, $\vartheta_o : \{1,\dots,\nu(u_o)\} \to T_{G_o})$. Igazolható, hogy $K_{(D,q_o)} = K_{(D,r_o)}$ teljesül.

2. eset. $Z_{(D,q_o)} \neq \emptyset$. A D deriváció sorozathoz megkonstruáljuk az $E = E_1,\dots,E_k$ derivációsorozatot ugy, hogy minden $i \in \{1,\dots,k\}$ indexre az E_i deriváció megegyezik a D_i derivációval, eltekintve a közvetlen derivációk sorrendjétől. Be fogjuk még vezetni az $\bar{E} = \bar{E}_1,\dots,\bar{E}_k$ deriváció sorozatot is.

$$E_1:\ a_1 q_o[S_{q_o}, \gamma_o] \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}_1} q_1[S_{q_1}, \alpha_1] \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}_1} q_1[S_{q_1}, \beta_1] \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}_1} q_1[S_{q_1}, \gamma_1]$$
$$(q_1 \in P_{G_1},\quad \alpha_1 : S_{q_1} \to A_1 rg(\gamma_o),\ \beta_1 : S_{q_1} \to T_{G_1}(A_1 T_{G_o}),$$
$$\gamma_1 : S_{q_1} \to T_{G_1}).$$

$$\bar{E}_1:\ a_1 q_o[S_{q_o}, \xi_o] \overset{*}{\Rightarrow}_{\mathfrak{R}_1} q_1[S_{q_1}, \bar{\beta}_1] \quad (\xi_o : S_{q_o} \to T_{G_o}(N^*),$$
$$\bar{\beta}_1 : S_{q_1} \to T_{G_1}(A_1 N^*),$$

ξ_o a következő formulával van definiálva: minden $s_o \in S_{q_o}$ argumentumra ha $\gamma_o(s_o) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ valamely $u_o \in G_o$ függvényszimbólumra és $\vartheta_o : \{1,\dots,\nu(u_o)\} \to T_{G_o}$

leképezésre, akkor $\xi_o(s_o) = \omega_{s_o}(u_o(1,\ldots,\nu(u_o)))$.

Most a β_1 és $\bar{\beta}_1$ leképezéseket fogjuk definiálni. Minden $s_1 \in S_{q_1}$ argumentumra tekintsük D

/1/: $\alpha_1(s_1) \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} \gamma_1(s_1)$ részderivációját.

Tegyük fel, hogy $\bar{\alpha}_1(s_1) = b_1 s_o$ és $\alpha_1(s_1) = b_1\gamma_o(s_o) =$
$= b_1 u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$, ahol $s_o \in S_{q_o}$, $b_1 \in A_1$,
$u_o \in G_o$, $\vartheta_o : \{1,\ldots,\nu(u_o)\} \to T_{G_o}$.

A P eljárást alkalmazva az /1/ derivációra és a $\gamma_o(s_o) =$
$= u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$ felbontásra, nyerjük a /2/, /3/ derivációkat.

/2/: $b_1 u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\},\vartheta_o] \Rightarrow_{\mathfrak{A}_1} u_1[S_{u_1},\delta_1] \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_1}$
$\Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} u_o[S_{u_1},\vartheta_1] = \gamma_1(s_1)$, ahol $u_1 \in P_{G_1}$,
$\delta_1 : S_{u_1} \to A_1 T_{G_o}$, $\vartheta_1 : S_{u_1} \to T_{G_1}$ és minden $v_1 \in S_{u_1}$
argumentumra fennáll a $\delta_1(v_1) \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} \vartheta_1(v_1)$ deriváció.

/3/: $b_1 u_o(1,\ldots,\nu(u_o)) \Rightarrow_{\mathfrak{A}_1} u_1[S_{u_1},\bar{\delta}_1]$, ahol
$\bar{\delta}_1 : S_{u_1} \to A_1\{1,\ldots,\nu(u_o)\}$ és minden $v_1 \in S_{u_1}$ argumentumra
ha $\bar{\delta}_1(v_1) = c_1 t_o$ $(c_1 \in A_1, t_o \in \{1,\ldots,\nu(u_o)\})$ akkor
$\delta_1(v_1) = c_1\vartheta_o(t_o)$.

A $\beta_1(s_1)$, $\bar{\beta}_1(s_1)$ értékeket az alábbi egyenlőségekkel definiáljuk:

$$\beta_1(s_1) = u_1[S_{u_1},\delta_1],\ \bar{\beta}_1(s_1) = \omega_{s_o}(u_1[S_{u_1},\bar{\delta}_1]).$$

Válasszuk ℓ értékét ugy, hogy $2 \le \ell \le k$ egyenlőtlenség teljesüljön. Az E_ℓ, $\bar{E}_\ell$ derivációk az alábbiak:

$$E_\ell:\ a_\ell q_{\ell-1}[s_{q_{\ell-1}},\gamma_{\ell-1}] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} q_\ell[s_{q_\ell},\alpha_\ell] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} q_\ell[s_{q_\ell},\beta_\ell] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell}$$
$$\Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} q_\ell[s_{q_\ell},\gamma_\ell]$$
$$(q_\ell \in P_{G_\ell},\quad \alpha_\ell : S_{q_\ell} \to A_\ell rg(\gamma_{\ell-1}),$$
$$\beta_\ell : S_{q_\ell} \to T_{G_\ell}(A_\ell T_{G_{\ell-1}}),\qquad \gamma_\ell : S_{q_\ell} \to T_{G_\ell}).$$

$$\bar{E}_\ell:\ a_\ell q_{\ell-1}[s_{q_{\ell-1}},\xi_{\ell-1}] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} q_\ell[s_{q_\ell},\bar{\beta}_\ell]$$
$$(\xi_{\ell-1} : S_{q_{\ell-1}} \to T_{G_{\ell-1}}(N^*),\qquad \bar{\beta}_\ell : S_{q_\ell} \to T_{G_\ell}(A_\ell N^*)).$$

A $\xi_{\ell-1}$ leképezést a következő formulával definiáljuk: minden $s_{\ell-1} \in S_{q_{\ell-1}}$ argumentumra ha $\beta_{\ell-1}(s_{\ell-1}) = u_{\ell-1}[s_{u_{\ell-1}},\delta_{\ell-1}]$ akkor $\xi_{\ell-1}(s_{\ell-1}) = \omega_{s_{\ell-1}}(u_{\ell-1})$. Most a β_ℓ és $\bar{\beta}_\ell$ leképezéseket fogjuk definiálni. Minden $s_\ell \in S_{q_\ell}$ argumentumra tekintsük D

/1/ $\alpha_\ell(s_\ell) \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} \gamma_\ell(s_\ell)$ részderivációját.

Tegyük fel, hogy $\bar{\alpha}_\ell(s_\ell) = b_\ell s_{\ell-1}$ és $\alpha_\ell(s_\ell) = b_\ell \gamma_{\ell-1}(s_{\ell-1}) =$
$= b_\ell u_{\ell-1}[s_{u_{\ell-1}},\vartheta_{\ell-1}]$, ahol $s_{\ell-1} \in S_{q_{\ell-1}}$, $b_\ell \in A_\ell$, $u_{\ell-1} \in P_{G_{\ell-1}}$, és a $\gamma_{\ell-1}(s_{\ell-1}) = u_{\ell-1}[s_{u_{\ell-1}},\vartheta_{\ell-1}]$ felbontást az $E_{\ell-1}$ derivációból vettük. Alkalmazva a P eljárást az /1/ derivációra és a $\gamma_{\ell-1}(s_{\ell-1}) = u_{\ell-1}[s_{u_{\ell-1}},\vartheta_{\ell-1}]$ felbontásra nyerjük a /2/ és /3/ derivációkat.

/2/ $b_\ell u_{\ell-1}[s_{u_{\ell-1}},\vartheta_{\ell-1}] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} u_\ell[s_{u_\ell},\delta_\ell] \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} u_\ell[s_{u_\ell},\vartheta_\ell] = \gamma_\ell(s_\ell)$,
ahol
$u_\ell \in P_{G_\ell}$, $\quad \delta_\ell : S_{u_\ell} \to A_\ell T_{G_{\ell-1}}(Y_{\ell-1})$, $\vartheta_\ell : S_{u_\ell} \to T_{G_\ell}$,
és minden $v_\ell \in S_{u_\ell}$ argumentumra fennáll a
$\delta_\ell(v_\ell) \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} \vartheta_\ell(v_\ell)$ deriváció.

/3/ $b_\ell u_{\ell-1} \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_\ell} u_\ell[s_{u_\ell},\bar{\delta}_\ell]$, ahol $\bar{\delta}_\ell : S_{u_\ell} \to A_\ell S_{u_{\ell-1}}$ és minden $v_\ell \in S_{u_\ell}$ argumentumra ha $\bar{\delta}_\ell(v_\ell) = c_\ell t_{\ell-1}$ $(c_\ell \in A_\ell,\ t_{\ell-1} \in S_{u_{\ell-1}})$ akkor $\delta_\ell(v_\ell) = c_\ell \vartheta_{\ell-1}(t_{\ell-1})$.

$\beta_\ell(s_\ell)$ és $\bar{\beta}_\ell(s_\ell)$ értékét az alábbi egyenlőségekkel definiáljuk:
$\beta_\ell(s_\ell) = u_\ell[S_{u_\ell},\delta_\ell]$, $\bar{\beta}_\ell(s_\ell) = \omega_{s_{\ell-1}}(u_\ell[S_{u_\ell},\bar{\delta}_\ell])$.
Tekintsük az $r_o \in P_{G_o}$ félfát, amelyet az $r_o = q_o[S_{q_o},\xi_o]$ egyenlőséggel definiálunk, ahol a ξ_o leképezést az $\bar{E}_1$ derivációban vezettük be.

Definiáljuk a $\lambda_o: S_{r_o} \to T_{G_o}$ leképezést az alábbi formulával:
$\lambda_o(s_o i) = \vartheta_o(i)$ ha $\gamma_o(s_o) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$,
ahol $s_o \in S_{q_o}$, $u_o \in G_o$, $\vartheta_o: \{1,\dots,\nu(u_o)\} \to T_{G_o}$, $i \in \{1,\dots,\nu(u_o)\}$.
Fennáll a $q_o[S_{q_o},\gamma_o] = r_o[S_{r_o},\lambda_o]$ egyenlőség.
Tekintsük az $r_1 \in P_{G_1}$ félfát, amelyet az $r_1 = q_1[S_{q_1},\xi_1]$ egyenlőséggel definiálunk, ahol $\xi_1: S_{q_1} \to T_{G_1}(N^*)$;
minden $s_1 \in S_{q_1}$ argumentumra $\xi_1(s_1) = \omega_{s_1}(u_1)$ ha $\beta_1(s_1) = u_1[S_{u_1},\delta_1]$.
Látható, hogy az $S_{r_1} = \{s_1 t_1 \mid s_1 \in S_{q_1}, \xi_1(s_1) = \omega_{s_1}(u_1),\ t_1 \in S_{u_1}\}$ egyenlőség teljesül.
Az $\eta_1: S_{r_1} \to A_1 T_{G_o}$, $\bar{\eta}_1: S_{r_1} \to A_1 S_{r_o}$ és $\lambda_1: S_{r_1} \to T_{G_1}$ leképezéseket a következő módon definiáljuk:
minden $\bar{s}_1 \in S_{r_1}$ argumentumra tekintsük az $\bar{s}_1 = s_1 t_1$ egyértelmü felbontást, ahol $s_1 \in S_{q_1}$, $\bar{\alpha}_1(s_1) = b_1 s_o$ valamely $b_1 \in A_1$ állapotra és $s_o \in S_{q_o}$ argumentumra, $\xi_1(s_1) = \omega_{s_1}(u_1)$, $t_1 \in S_{u_1}$, $\beta_1(s_1) = u_1[S_{u_1},\delta_1]$, $\bar{\beta}_1(s_1) = \omega_{s_o}(u_1[S_{u_1},\bar{\delta}_1])$, $\gamma_1(s_1) = u_1[S_{u_1},\vartheta_1]$ és az $\alpha_1,\beta_1,\bar{\beta}_1,\gamma_1,\delta_1,\bar{\delta}_1,\vartheta_1$ leképezéseket az $E_1,\bar{E}_1$ derivációkban vezettük be.
Legyen $\eta_1(s_1 t_1) = \delta_1(t_1)$, $\bar{\eta}_1(s_1 t_1) = \omega_{s_o}(\bar{\delta}_1(t_1))$, $\lambda_1(s_1 t_1) = \vartheta_1(t_1)$.
Mivel fennáll a $\delta_1(t_1) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_1} \vartheta_1(t_1)$ deriváció igy az $\eta_1(s_1 t_1) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_1} \lambda_1(s_1 t_1)$ deriváció is teljesül. Tehát az $E_1,\bar{E}_1$ derivációkból nyerjük az $E_1', \bar{E}_1'$ derivációkat:

E_1': $a_1 r_o[s_{r_o},\lambda_o] \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_1} r_1[s_{r_1},\eta_1] \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_1} r_1[s_{r_1},\lambda_1]$,

$\bar{E}_1'$: $a_1 r_o \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_1} r_1[s_{r_1},\bar{\eta}_1]$,

és minden $v_1 \in S_{r_1}$ argumentumra ha $\bar{\eta}_1(v_1) = c_1 v_o$ valamely $c_1 \in A_1$ állapotra és $v_o \in S_{r_o}$ argumentumra, akkor $\eta_1(v_1) = c_1 \lambda_o(v_o)$.

Legyen $\ell \in \{2,\dots,k\}$ tetszőleges! Tekintsük az $r_\ell \in P_{G_\ell}$ félfát, amelyet a következő egyenlőséggel definiálunk:

$r_\ell = q_\ell[s_{q_\ell},\xi_\ell]$, $\xi_\ell : S_{q_\ell} \longrightarrow T_{G_\ell}(N^*)$, minden $s_\ell \in S_{q_\ell}$ argumentumra $\xi_\ell(s_\ell) = \omega_{s_\ell}(u_\ell)$ ha $\beta_\ell(s_\ell) = u_\ell[s_{u_\ell},\delta_\ell]$.

Látható, hogy az $S_{r_\ell} = \{ s_\ell t_\ell \mid \xi_\ell(s_\ell) = \omega_{s_\ell}(u_\ell),\ t_\ell \in S_{u_\ell}\}$ egyenlőség teljesül.

Az $\eta_\ell : S_{r_\ell} \longrightarrow A_\ell T_{G_{\ell-1}}$, $\bar{\eta}_\ell : S_{r_\ell} \longrightarrow A_\ell S_{r_{\ell-1}}$ és $\lambda_\ell : S_{r_\ell} \longrightarrow T_{G_\ell}$ leképezéseket a következő módon definiáljuk:

minden $\bar{s}_\ell \in S_{r_\ell}$ argumentumra tekintsük az $\bar{s}_\ell = s_\ell t_\ell$ egyértelmü felbontást, ahol $s_\ell \in S_{q_\ell}$, $\xi_\ell(s_\ell) = \omega_{s_\ell}(u_\ell)$, $t_\ell \in S_{u_\ell}$, $\beta_\ell(s_\ell) = u_\ell[s_{u_\ell},\delta_\ell]$, $\bar{\beta}_\ell(s_\ell) = u_\ell[s_{u_\ell},\bar{\delta}_\ell]$, $\gamma_\ell(s_\ell) = u_\ell[s_{u_\ell},\vartheta_\ell]$, és az $\alpha_\ell, \bar{\alpha}_\ell, \beta_\ell, \bar{\beta}_\ell, \gamma_\ell, \delta_\ell, \bar{\delta}_\ell, \vartheta_\ell$ leképezéseket az E_ℓ, $\bar{E}_\ell$ derivációkban vezettük be, és $\bar{\alpha}_\ell(s_\ell) = b_\ell s_{\ell-1}$ valamely $b_\ell \in A_\ell$ állapotra és $s_{\ell-1} \in S_{q_{\ell-1}}$ argumentumra.

Legyen $\eta_\ell(s_\ell t_\ell) = \delta_\ell(t_\ell)$, $\bar{\eta}_\ell(s_\ell t_\ell) = \omega_{s_{\ell-1}}(\bar{\delta}_\ell(t_\ell))$, $\lambda_\ell(s_\ell t_\ell) = \vartheta_\ell(t_\ell)$. Mivel fennáll a $\delta_\ell(t_\ell) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_\ell} \vartheta_\ell(t_\ell)$ deriváció, így az $\eta_\ell(s_\ell t_\ell) \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_\ell} \lambda_\ell(s_\ell t_\ell)$ deriváció is teljesül.

Tehát az E_ℓ, $\bar{E}_\ell$ derivációkból nyerjük az E_ℓ', $\bar{E}_\ell'$ derivációkat:

E_ℓ': $a_\ell r_{\ell-1}[s_{r_{\ell-1}},\lambda_{\ell-1}] \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_\ell} r_\ell[s_{r_\ell},\eta_\ell] \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_\ell} r_\ell[s_{r_\ell},\lambda_\ell]$,

$\bar{E}_\ell'$: $a_\ell r_{\ell-1} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{R}_\ell} r_\ell[s_{r_\ell},\bar{\eta}_\ell]$, és minden $v_\ell \in S_{r_\ell}$ argumentumra ha $\bar{\eta}_\ell(v_\ell) = c_\ell v_{\ell-1}$ valamely $c_\ell \in A_\ell$ állapotra és $v_{\ell-1} \in S_{r_{\ell-1}}$ argumentumra, akkor $\eta_\ell(v_\ell) = c_\ell \lambda_{\ell-1}(v_{\ell-1})$.

Az $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ R-transzformátorokhoz definiáljuk a $\Sigma(\ell)$ és V_ℓ halmazokat $(0 \le \ell \le k)$ és a $V = V_0 \cup \dots \cup V_k$ halmazt a következő módon:

$\Sigma(0) = G_0$,

$V_0 = \Sigma(0)$,

$$\Sigma(1) = \{(b_1, u_0, u_1[S_{u_1}, \varphi_1], \varrho_1, W_1, \tau_1) \mid b_1 u_0 \to u_1[S_{u_1}, \varphi_1] \in \Sigma_{\vartheta_1},$$
$$u_1 \in P_{G_1}(Y_1),\ \varphi_1 : S_{u_1} \to A_1 S_{u_0},$$
$$W_1 = \{(t_0, t_1) \mid \varphi_1(t_1) = c_1 t_0, c_1 \in A_1, t_0 \in S_{u_0}\},$$
$$\varrho_1 : S_{u_1} \to W_1, \varrho_1(t_1) = (t_0, t_1) \text{ ha } \varphi_1(t_1) = c_1 t_0,$$
$$\tau_1 : W_1 \to A_1 S_{u_0};\ \tau_1((t_0, t_1)) = c_1 t_0 \text{ ha } \varphi_1(t_1) = c_1 t_0\}.$$

Látható, hogy minden $t_1 \in S_{u_1}$ argumentumra $\varphi_1(t_1) = \tau_1(\varrho_1(t_1))$, azaz a $\varphi_1 = \varrho_1 \circ \tau_1$ azonosság teljesül.

Azt mondjuk, hogy a $(b_1, u_0, u_1[S_{u_1}, \varphi_1], \varrho_1, W_1, \tau_1) \in \Sigma(1)$ elemet generálja a $b_1 u_0 \to u_1[S_{u_1}, \varphi_1]$ átirási szabály.

$V_1 = \{(u_0, \sigma_1) \mid u_0 \in \Sigma(0), \sigma_1 \in \Sigma(1)$, és σ_1 második komponense $u_0\}$.

Legyen $j \in \{2, \dots, k\}$ index tetszőleges, és tegyük fel, hogy minden $i \in \{1, \dots, j\}$ indexre a $\Sigma(i)$ és V_i halmazokat már definiáltuk, és minden $\sigma_i = (b_i \dots b_1, u_0, u_i[S_{u_i}, \varphi_i], \varrho_i, W_i, \tau_i) \in \Sigma_{\mathfrak{L}}(i)$ elemre fennáll a $\varphi_i = \varrho_i \circ \tau_i$ egyenlőség.

A $\Sigma(j)$ és V_j halmazokat a következőképpen definiáljuk:

$(b_j \dots b_1, u_0, u_j[S_{u_j}, \varphi_j], \varrho_j, W_j, \tau_j) \in \Sigma(j)$ akkor és csak akkor, ha /1/-/6/ teljesülnek.

/1/ $(b_{j-1}\ldots b_1, u_o, u_{j-1}[S_{u_{j-1}}, \varphi_{j-1}], \varsigma_{j-1}, W_{j-1}, \tau_{j-1}) \in \Sigma(j-1)$,

/2/ fennáll a $b_j u_{j-1} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{A}_j} u_j[S_{u_j}, \varepsilon_j]$ deriváció, ahol

$u_j \in P_{G_j}(Y_j)$, $\varepsilon_j : S_{u_j} \longrightarrow A_j S_{u_{j-1}}$,

/3/ $\varphi_j : S_{u_j} \longrightarrow A_j A_{j-1}\ldots A_1\{1,\ldots,\nu(u_o)\}$, $\varphi_j(t_j) = c_j c_{j-1}\ldots c_1 t_o$
ha $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$ és $\varphi_{j-1}(t_{j-1}) = c_{j-1}\ldots c_1 t_o$,

/4/ $W_j = \{(t_o,\ldots,t_{j-1},t_j) \mid \varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}, c_j \in A_j, t_{j-1} \in S_{u_{j-1}},$
$\varsigma_{j-1}(t_{j-1}) = (t_o,\ldots,t_{j-1})\} \cup$
$\{(t_o,\ldots,t_{j-1}) \in W_{j-1} \mid$ nincsen olyan $t_j \in S_{u_j}, c_j \in A_j$,
hogy $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$ teljesüljön$\} \cup$
$\{(t_o,\ldots,t_\ell) \in W_{j-1} \mid 1 \le \ell \le j-2\}$,

/5/ $\varsigma_j : S_{u_j} \longrightarrow W_j$, $\varsigma_j(t_j) = (t_o,\ldots,t_{j-1},t_j)$ ha $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$
és

$\varsigma_{j-1}(t_{j-1}) = (t_o,\ldots,t_{j-1})$,

/6/ $\tau_j : W_j \longrightarrow A_j\ldots A_1\{1,\ldots,\nu(u_o)\}$; $\tau_j\big|_{W_j \cap W_{j-1}} = \tau_{j-1}\big|_{W_j \cap W_{j-1}}$
és ha $(t_o,\ldots,t_{j-1},t_j) \in W_j$, $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$, akkor
$\tau_j((t_o,\ldots,t_{j-1},t_j)) = c_j \tau_{j-1}((t_o,\ldots,t_{j-1}))$.

Azt mondjuk, hogy a $b_j u_{j-1} \overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathfrak{A}_j} u_j[S_{u_j}, \varepsilon_j]$ deriváció és a $(b_{j-1}\ldots b_1, u_o, u_{j-1}[S_{u_{j-1}}, \varphi_{j-1}], \varsigma_{j-1}, W_{j-1}, \tau_{j-1}) \in \Sigma(j-1)$ elem generálja a $(b_j\ldots b_1, u_o, u_j[S_{u_j}, \varphi_j], \varsigma_j, W_j, \tau_j) \in \Sigma(j)$ elemet. Látható, hogy minden $(b_j\ldots b_1, u_o, u_j[S_{u_j}, \varphi_j], \varsigma_j, W_j, \tau_j) \in \Sigma(j)$ elemre fennáll a $\varphi_j = \varsigma_j \circ \tau_j$ egyenlőség.

$(u_o, \sigma_1,\ldots,\sigma_{j-1},\sigma_j) \in V_j$ akkor és csak akkor, ha /1/ és /2/ teljesülnek:

/1/ $(u_o, \sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}) \in V_{j-1}$, σ_{j-1} alakja $(b_{j-1} \ldots b_1, u_o,$ $u_{j-1}[S_{u_{j-1}}, \varphi_{j-1}], \varrho_{j-1}, w_{j-1}, \tau_{j-1})$, σ_j alakja $(b_j \ldots b_1, u_o,$ $u_j[S_{u_j}, \varphi_j], \varrho_j, w_j, \tau_j)$,

/2/ a $b_j u_{j-1} \Longrightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} u_j[S_{u_j}, \varepsilon_j]$ deriváció a σ_{j-1} elemmel generálja a $\sigma_j (\in \Sigma(j))$ elemet.

A következőkben definiálni fogjuk a

$\mathcal{K}_i : [Z_{(D,q_o)}]_i \longrightarrow \Sigma(i)$ $i=0,1,\ldots,k$ leképezéseket.

Legyen $s_o \in [Z_{(D,q_o)}]_o$, azaz $s_o \in S_{q_o}$, $\mathcal{K}_o(s_o)$ értékét a következő formulával definiáljuk:

$\mathcal{K}_o(s_o) = u_o$ ha $\gamma_o(s_o) = u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$, $(\vartheta_o : \{1,\ldots,\nu(u_o)\} \rightarrow T_{G_o})$.

Legyen $s_1 \in [Z_{(D,q_1)}]_1$, azaz $s_1 \in S_{q_1}$. Tekintsük az

$\alpha_1(s_1) = b_1 u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ $(u_o \in G_o$, $\vartheta_o : \{1,\ldots,\nu(u_o)\} \rightarrow T_{G_o})$ felbontást.

A P eljárást alkalmazva D_1 /1/: $\alpha_1(s_1) \Longrightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} \gamma_1(s_1)$ részderivációjára és az $u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ felbontásra nyerjük a /2/ és /3/ derivációkat.

/2/: $b_1 u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o] \Longrightarrow_{\mathfrak{A}_1} u_1[S_{u_1}, \delta_1] \Longrightarrow^*_{\mathfrak{A}_1}$

$\Longrightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} u_1[S_{u_1}, \vartheta_1] = \gamma_1(s_1)$, ahol $u_1 \in P_{G_1}$,

$\delta_1 : S_{u_1} \longrightarrow A_1 T_{G_o}$, $\vartheta_1 : S_{u_1} \longrightarrow T_{G_1}$, és minden $v_1 \in S_{u_1}$ argumentumra $\delta_1(v_1) \Longrightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} \vartheta_1(v_1)$ teljesül.

/3/: $b_1 u_o \Longrightarrow_{\mathfrak{A}_1} u_1[S_{u_1}, \bar{\delta}_1]$, ahol $\bar{\delta}_1 : S_{u_1} \longrightarrow A_1\{1,\ldots,\nu(u_o)\}$ és minden $v_1 \in S_{u_1}$ argumentumra ha $\bar{\delta}_1(v_1) = c_1 t_o$ $(c_1 \in A_1$, $t_o \in \{1,\ldots,\nu(u_o)\}$, akkor $\delta_1(v_1) = c_1 \vartheta_o(t_o)$.

$\beta_1(s_1) = u_1[S_{u_1},\delta_1]$, $\bar{\beta}_1(s_1) = \omega_{s_0}(u_1[S_{u_1},\bar{\delta}_1])$, ahol a $\beta_1,\bar{\beta}_1$ leképezéseket az $E_1,\bar{E}_1$ derivációkban definiáltuk.

Legyen $\mathcal{K}_1(s_1)$ azon $\Sigma(1)$-beli elem, amelyet $b_1u_0 \to u_1[S_{u_1},\bar{\delta}_1]$ produkció generál.

Tegyük fel, hogy $j\in\{2,\dots,k\}$ és minden $i\in\{0,\dots,j-1\}$ indexre már definiáltuk a $\mathcal{K}_i$ leképezést. Ekkor a $\mathcal{K}_j$ leképezést a következő módon definiáljuk:

minden $s_j(\in[Z_{(D,q_0)}]_j = S_{q_j})$ argumentumra $\bar{\alpha}_j(s_j) = b_js_{j-1}$ valamely $b_j\in A_j$ állapotra és $s_{j-1}\in S_{q_{j-1}}$ argumentumra. Igy $\alpha_j(s_j) = b_j\gamma_{j-1}(s_{j-1})$. $\mathcal{K}_{j-1}(s_{j-1})$ a $(b_{j-1}\dots b_1,u_0,u_{j-1}[S_{u_{j-1}},\varphi_{j-1}],$ $\varrho_{j-1},W_{j-1},\tau_{j-1})$ alakkal rendelkezik. Tekintsük a $\gamma_{j-1}(s_{j-1}) =$ $= u_{j-1}[S_{u_{j-1}},\vartheta_{j-1}]$ felbontást, amelyet az E_{j-1} derivációból veszünk. A P eljárást alkalmazva D_j

/1/ $\alpha_j(s_j) \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} \gamma_j(s_j)$ részderivációjára és az $u_{j-1}[S_{u_{j-1}},\vartheta_{j-1}]$ felbontásra nyerjük a /2/ és /3/ derivációkat.

/2/ $b_ju_{j-1}[S_{u_{j-1}},\vartheta_{j-1}] \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} u_j[S_{u_j},\delta_j] \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} u_j[S_{u_j},\vartheta_j] = \gamma_j(s_j)$,
ahol $u_j\in P_{G_j}$, $\delta_j: S_{u_j}\to A_jT_{G_{j-1}}$, $\vartheta_j: S_{u_j}\to T_{G_j}$,
és minden $v_j\in S_{u_j}$ argumentumra a $\delta_j(v_j) \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} \vartheta_j(v_j)$ deriváció teljesül.

/3/ $b_ju_{j-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_j} u_j[S_{u_j},\bar{\delta}_j]$, ahol $\bar{\delta}_j: S_{u_j}\to A_jS_{u_{j-1}}$ és minden $v_j\in S_{u_j}$ argumentumra ha $\bar{\delta}_j(v_j) = c_jt_{j-1}$ $(c_j\in A_j, t_{j-1}\in S_{u_{j-1}})$ akkor $\delta_j(v_j) = c_j\vartheta_{j-1}(t_{j-1})$.

Legyen $\mathcal{K}_j(s_j)$ $\Sigma(j)$ azon eleme, amelyet a /3/ deriváció és $\mathcal{K}_{j-1}(s_{j-1})$ $(\in\Sigma(j-1))$ generál.

A D deriváció sorozathoz és a $p_0 = r_0[S_{r_0},\lambda_0]$ felbontáshoz hozzárendeljük a $K_{(D,r_0)} = (r_k[S_{r_k},\psi_{(D,r_0)}],$ $\Theta_{(D,r_0)}, Z_{(D,r_0)}, \mathcal{R}_{(D,r_0)})$ konfigurációt.

Az E'_ℓ, $\bar{E}'_\ell$ deriváció sorozatok segitségével megmutatjuk a $K_{(D,q_o)}$ és $K_{(D,r_o)}$ konfigurációk közötti kapcsolatot.

/1/ Az $r_k = q_k[S_{q_k}, \xi_k]$ fát az E'_k derivációban vezettük be, és tudjuk, hogy minden $s_k \in S_{q_k}$ argumentumra $\xi_k(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ ahol $\mathcal{H}_k(s_k) = (b_k \dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varrho_k, W_k, \tau_k)$.

/2/ $Z_{(D,r_o)} = \{(s_o t_o, s_1 t_1, \dots, s_j t_j) \mid (s_o, s_1, \dots, s_\ell) \in Z_{(D,q_o)}$ $(1 \leq j \leq \ell \leq k$ és $\mathcal{H}_\ell(s_\ell) =$ $= (b_\ell \dots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell}, \varphi_\ell], \varrho_\ell, W_\ell, \tau_\ell)$ és $(t_o, t_1, \dots, t_j) \in W_\ell\}$.

/3/ Minden $\bar{s}_k \in S_{r_k}$ argumentumra tekintsük az $\bar{s}_k = s_k t_k$ egyértelmü felbontást, ahol $s_k \in S_{q_k}$, $\mathcal{H}_k(s_k) = (b_k \dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varrho_k, W_k, \tau_k)$, $\xi_k(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ és $t_k \in S_{u_k}$. Ekkor ha $\varphi_k(t_k) = c_k \dots c_1 t_o$ és $\psi_{(D,q_o)}(s_k) =$ $= u_o(1, \dots, \nu(u_o))[\{1, \dots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ $(u_o \in G_o$, $\vartheta_o : \{1, \dots, \nu(u_o)\} \longrightarrow T_{G_o})$ akkor $\psi_{(D,r_o)}(s_k t_k) = c_k \dots c_1 \vartheta_o(t_o)$.

/4/ A $Z_{(D,r_o)}$ halmaz definiciójából következik, hogy minden $(\bar{s}_o, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_j) \in Z_{(D,r_o)}$ elemre létezik egy $(s_o, s_1, \dots, s_\ell) \in$ $\in Z_{(D,q_o)}$ $(j \leq \ell \leq k)$, hogy $\mathcal{H}_\ell(s_\ell) = (b_\ell \dots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell}, \varphi_\ell], \varrho_\ell, W_\ell, \tau_\ell)$, és valamely $(t_o, t_1, \dots, t_j) \in W_\ell$ elemre fennállnak a következő egyenlőségek: $\bar{s}_o = s_o t_o$, $\bar{s}_1 = s_1 t_1, \dots, \bar{s}_j = s_j t_j$.
Ha $\tau_\ell((t_o, t_1, \dots, t_j)) = c_j \dots c_1 t_o$ és $\Omega_{(D,q_o)}((s_o, s_1, \dots, s_\ell)) =$ $= b_\ell \dots b_1 u_o(1, \dots, \nu(u_o))[\{1, \dots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ valamely $u_o \in G_o$ müveleti szimbólumra és $\vartheta_o : \{1, \dots, \nu(u_o)\} \longrightarrow T_{G_o}$ leképezésre, akkor $\Omega_{(D,r_o)}((\bar{s}_o, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_j)) = c_j \dots c_1 \vartheta_o(t_o)$.

/5/ Minden $\bar{s}_k \in S_{r_k}$ argumentumra tekintsük az $\bar{s}_k = s_k t_k$ egyértelmü felbontást, ahol $s_k \in S_{q_k}$,
$\mathcal{H}_k(s_k) = (b_k \dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varrho_k, W_k, \tau_k)$,
$\xi_k(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ és $t_k \in S_{u_k}$.
Ha $\Theta_{(D,q_o)}(s_k) = (s_o, s_1, \dots, s_k)$ és $\varrho_k(t_k) = (t_o, t_1, \dots, t_k)$ akkor $\Theta_{(D,r_o)}(\bar{s}_k) = (s_o t_o, s_1 t_1, \dots, s_k t_k)$.

3. k-szinkronizált felszálló fatranszformátorok

Ebben az alfejezetben bevezetjük a k-szinkronizált felszálló fatranszformátor fogalmát, és bebizonyitjuk, hogy a k-szinkronizált felszálló fatranszformátorok által indukált relációk megegyeznek azokkal a relációkkal, amelyek előállnak k darab felszálló fatranszformátor által indukált reláció kompoziciójaként.

3.1. definició. A $\mathcal{T} = (G_o, G_1, \dots, G_k, A_1, \dots, A_k, A_1', \dots, A_k', \Sigma_{\mathcal{T}}, V)$ rendszert k-szinkronizált felszálló (R-) transzformátornak nevezzük, ahol

/1/ $k \geq 2$,

/2/ $G_o, G_1, \dots, G_k$ rangolt ábécék,

/3/ $A_1, \dots, A_k$ állapothalmazok, tetszőleges $i \in \{1, \dots, k\}$ indexre $A_i \dots A_1 \cap T_{G_o} = \emptyset$ és $A_k \dots A_1 \cap T_{G_k} = \emptyset$.

/4/ Az $A_1' \subseteq A_1, \dots, A_k' \subseteq A_k$ állapothalmazokat kezdő állapothalmazoknak nevezzük.

/5/ $\Sigma_{\mathcal{L}}$ véges átirási szabály halmaz,

$\Sigma_{\mathcal{L}} = \Sigma_{\mathcal{L}}(0) \cup \Sigma_{\mathcal{L}}(1) \cup \ldots \cup \Sigma_{\mathcal{L}}(k)$, és valahányszor $i \neq j$, mindannyiszor $\Sigma_{\mathcal{L}}(i) \cap \Sigma_{\mathcal{L}}(j) = \emptyset$.

$V = V_o \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$, ahol $V_o = \Sigma_{\mathcal{L}}(0)$ és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre $V_i \subseteq \Sigma_{\mathcal{L}}(0) \times \Sigma_{\mathcal{L}}(1) \times \ldots \times \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ és $[V_i]_i = \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$.

$\Sigma_{\mathcal{L}}(0) = G_o$ és $\sigma_j \in \Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ átirási szabályok a következő alakuak:

$\sigma_j = (b_j \ldots b_1, u_o, u_j[S_{u_j}, \varphi_j], \varsigma_j, W_j, \tau_j)$ ahol

$b_i \in A_i$ $(i = 1, \ldots, j)$,

$u_o \in G_o$,

$u_j \in P_{G_j}$, $\varphi_j : S_{u_j} \to A_j \ldots A_1 \{1, \ldots, \nu(u_o)\}$

W_j véges részhalmaza az $(N^*)^2 \cup \ldots \cup (N^*)^{j+1}$ halmaznak, ahol $(N^*)^1 = N^*$ és minden $\ell \geq 1$ egész számra $(N^*)^{\ell+1} = (N^*)^{\ell} \times N$.

$\varsigma_j : S_{u_j} \to W_j$,

$\tau_j : W_j \to (A_j \ldots A_2 A_1 \cup \ldots \cup A_2 A_1 \cup A_1)[W_j]_o$,

és teljesülnek az alábbi követelmények:

a.) $j = 1$

i/ $W_1 = \{(t_o, t_1) \mid t_1 \in S_{u_1}, \varphi_1(t_1) = c_1 t_o, t_o \in S_{u_o}, c_1 \in A_1\}$,

ii/ minden $t_1 \in S_{u_1}$ argumentumra ha $\varphi_1(t_1) = c_1 t_o$ akkor $\varsigma_1(t_1) = (t_o, t_1)$,

iii/ $\varphi_1 = \varsigma_1 \circ \tau_1$,

iv/ $V_1 = \{(u_o, \sigma_1) \mid u_o \in G_o$, és $\sigma_1 (\in \Sigma_{\mathcal{L}}(1))$ második komponense $u_o\}$.

b.) $j > 1$, ha $(u_o, \sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_j) \in V_j$ és $\sigma_{j-1} =$
$= (b_{j-1} \ldots b_1, u_o, u_{j-1}[S_{u_{j-1}}, \varphi_{j-1}], \varrho_{j-1}, W_{j-1}, \tau_{j-1})$,
akkor $(u_o, \sigma_1, \ldots, \sigma_{j-1}) \in V_{j-1}$ és létezik egy ε_j:
$S_{u_j} \longrightarrow A_j[W_{j-1}]_{j-1}$ leképezés, amelyre i/-iv/
teljesülnek:

i/ $W_j = \{(t_o, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j) \mid \varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1},$
$c_j \in A_j, t_j \in S_{u_j}, t_{j-1} \in S_{u_{j-1}}, \varrho_{j-1}(t_{j-1}) =$
$= (t_o, t_1, \ldots, t_{j-1})\} \cup$
$\cup \{(t_o, t_1, \ldots, t_\ell) \mid 1 \leq \ell \leq j-2, (t_o, t_1, \ldots, t_\ell) \in$
$W_{j-1}\} \cup$
$\cup \{(t_o, t_1, \ldots, t_{j-1}) \in W_{j-1} \mid$ nincsen olyan
$t_j \in S_{u_j}$ argumentum $c_j \in A_j$ állapot,
hogy $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}\}$.

ii/ $\tau_j\big|_{W_j \cap W_{j-1}} = \tau_{j-1}\big|_{W_j \cap W_{j-1}}$ és
ha $(t_o, t_1, \ldots, t_j) \in W_j$, $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1} (c_j \in A_j,$
$t_{j-1} \in [W_{j-1}]_{j-1})$ és $\tau_{j-1}((t_o, t_1, \ldots, t_{j-1})) =$
$= c_{j-1} \ldots c_1 t_o$, akkor $\tau_j((t_o, t_1, \ldots, t_j)) =$
$= c_j \ldots c_1 t_o$.

iii/ Minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra ha $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$
$c_j \in A_j, t_{j-1} \in W_{j-1}$ és $\varrho_{j-1}(t_{j-1}) = (t_o, t_1, \ldots, t_{j-1})$
akkor $\varrho_j(t_j) = (t_o, \ldots, t_{j-1}, t_j)$.

iv/ $\varphi_j = \varrho_j \circ \tau_j$.

(Látható, hogy minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra
$\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1} (c_j \in A_j, t_{j-1} \in S_{u_{j-1}})$ akkor és csak
akkor, ha $\varrho_j(t_j) = (t_o, \ldots, t_{j-1}, t_j)$ és
$\tau_j((t_o, \ldots, t_{j-1}, t_j)) = c_j \ldots c_1 t_o$.)

A dolgozat további részében a G_o rangolt ábécé aritás függvényét ν-vel jelöljük.

<u>3.2. definició.</u> Legyen $\mathcal{B}$ a 3.1. definicióban definiált k-szinkronizált felszálló fatranszformátor. A $(q[S_q,\psi],\Theta,Z,\Omega)$ rendszert $\mathcal{B}$-konfigurációjának nevezzük, ahol $q \in P_{G_k}$,

ψ: $S_q \to A_k \dots A_1 T_{G_o}$, Θ: $S_q \to Z$, minden $s_k \in S_q$ argumentumra

$\Theta(s_k) = (s_o,\dots,s_{k-1},s_k)$ valamely $s_o,\dots,s_{k-1} \in N^*$ szavakra.

Z véges részhalmaza az $(N^*)^2 \cup \dots \cup (N^*)^k \cup (N^*)^{k+1}$ halmaznak, ugy hogy az alábbi két feltétel teljesül:

i/ tetszőleges $j \in \{0,\dots,k\}$ indexre, minden $s_j, \bar{s}_j \in [Z]_j$ argumentumra ha $s_j = \bar{s}_j \bar{\bar{s}}_j$, akkor $s_j = \bar{s}_j$ és $\bar{\bar{s}}_j = e$.

ii/ Minden $s_k \in S_q$ argumentumra $\Theta(s_k)$ az egyetlen olyan eleme Z-nek, amely alakja $(s_o,\dots,s_{k-1},s_k)$ valamely $s_o,\dots,s_{k-1} \in N^*$ szavakra.

Ω: $Z \to (A_k A_{k-1} \dots A_1 \cup A_{k-1} \dots A_1 \cup \dots \cup A_1) T_{G_o}$ leképezésre fennáll a $\psi = \Theta \circ \Omega$ azonosság, azaz az alábbi diagram kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
S_q \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\Theta"'] & & (A_k A_{k-1} \dots A_1 \cup A_{k-1} \dots A_1 \cup \dots \cup A_1) T_{G_o} \\
& Z \arrow[ur, "\Omega"'] &
\end{tikzcd}$$

A $(q[S_q,\psi],\Theta,Z,\Omega)$ konfigurációt kezdő konfigurációnak nevezzük, ha $q = e \in N^*$ /e az üres szó/ és $\psi(e) \in A_k' \dots A_1' T_{G_o}$ és $Z = \{\underbrace{(e,\dots,e)}_{k\text{-szor}}\}$

3.3. definició. Legyenek $K_1 = (q^1[S_{q^1},\psi^1],\Theta^1,Z^1,\Omega^1)$ és $K_2 = (q^2[S_{q^2},\psi^2],\Theta^2,Z^2,\Omega^2)$ a $\mathcal{L} = (G_o,G_1,\dots,G_k,A_1,\dots,A_k,A_1',\dots,A_k',\Sigma_{\mathcal{L}},V)$ k-szinkronizált felszálló fatranszformátor konfigurációi. Azt mondjuk, hogy a K_1, K_2 konfigurációk között közvetlen átmenet van $\mathcal{L}$-ben, ha léteznek a $\mathcal{H}_j\colon [Z^1]_j \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ $(j = 0,1,\dots,k)$ leképezések, ugy hogy az alábbi követelmények teljesülnek.

/1/ Minden $(s_o,s_1,\dots,s_j) \in Z^1$ $(1 \le j \le k)$ elemre ha $\Omega^1((s_o,s_1,\dots,s_j)) = b_j \dots b_1 u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$ $(u_o \in G_o \cup Y_o, b_j \dots b_1 \in A_j \dots A_1, \vartheta_o\colon \{1,\dots,\nu(u_o)\} \longrightarrow T_{G_o})$, akkor $\mathcal{H}_o(s_o) = u_o$, $\mathcal{H}_i(s_i) = (b_i \dots b_1, u_o, u_i[S_{u_i},\varphi_i], \rho_i, W_i, \tau_i)$ valamely u_i félfára, W_i halmazra, ρ_i, τ_i leképezésekre $(i = 1,\dots,j)$ és $(\mathcal{H}_o(s_o),\mathcal{H}_1(s_1),\dots,\mathcal{H}_j(s_j)) \in V_j$.

/2/ $q^2 = q^1[S_{q^1},\xi]$, ahol a $\xi\colon S_{q^1} \longrightarrow T_{G_k}(N^*)$ leképezés a következő formulával van definiálva: minden $s_k \in S_{q^1}$ argumentumra $\xi(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ ha $\mathcal{H}_k(s_k) = (b_k \dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k},\varphi_k], \rho_k, W_k, \tau_k)$.

/3/ $Z^2 = \{(s_o t_o, s_1 t_1, \dots, s_j t_j) \mid (s_o,s_1,\dots,s_\ell) \in Z^1$ valamely ℓ indexre $1 \le j \le \ell \le k$ és $\mathcal{H}_\ell(s_\ell) = (b_\ell \dots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell},\varphi_\ell], \rho_\ell, W_\ell, \tau_\ell)$ és $(t_o,t_1,\dots,t_j) \in W_\ell\}$.

/4/ Minden $\bar{s}_k \in S_{q^2}$ argumentumra tekintsük az egyértelmü $\bar{s}_k = s_k t_k$ felbontást, ahol $s_k \in S_{q^1}$, $\mathcal{K}_k(s_k) = (b_k \ldots b_1, u_o, u_k[s_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, W_k, \tau_k)$, $\xi_k(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$, $t_k \in S_{u_k}$. Ha $\Theta^1(s_k) = (s_o, s_1, \ldots, s_k)$ és $\varsigma_k(t_k) = (t_o, t_1, \ldots, t_k)$ akkor $\Theta^2(\bar{s}_k) = (s_o t_o, s_1 t_1, \ldots, s_k t_k)$.

/5/ Legyen $\bar{s}_k \in S_{q^2}$ tetszőleges és tekintsük az $\bar{s}_k = s_k t_k$ egyértelmü felbontást, ahol $s_k \in S_{q^1}$, $\mathcal{K}_k(s_k) = (b_k \ldots b_1, u_o, u_k[s_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, W_k, \tau_k)$, $\xi_k(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ és $t_k \in S_{u_k}$. Ha $\varphi_k(t_k) = c_k \ldots c_1 t_o$ és $\psi^1(s_k) = u_o(1, \ldots, \nu(u_o)) \cdot$ $\cdot [\{1, \ldots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ $(u_o \in G_o$, $\vartheta_o : \{1, \ldots, \nu(u_o)\} \to$ $\to T_{G_o})$, akkor $\psi^2(\bar{s}_k) = c_k \ldots c_1 \vartheta_o(t_o)$.

/6/ Minden $(\bar{s}_o, \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_j) \in Z^2$ elemre létezik egy $(s_o, s_1, \ldots, s_\ell) \in Z^1$ vektor valamely ℓ indexre $1 \leq j \leq$ $\leq \ell \leq k)$ ugy, hogy

$\mathcal{K}_\ell(s_\ell) = (b_\ell \ldots b_1, u_o, u_\ell[s_{u_\ell}, \varphi_\ell], \varsigma_\ell, W_\ell, \tau_\ell)$ és valamely $(t_o, t_1, \ldots, t_j) \in W_\ell$ vektorra fennállnak az $\bar{s}_o = s_o t_o$, $\bar{s}_1 = s_1 t_1, \ldots, \bar{s}_j = s_j t_j$ egyenlőségek. Ha $\tau_\ell((t_o, t_1, \ldots, t_j)) =$ $= c_j \ldots c_1 t_o$ és

$\Omega^1((s_o, s_1, \ldots, s_\ell)) = b_\ell \ldots b_1 u_o (1, \ldots, \nu(u_o))[\{1, \ldots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ $(u_o \in G_o \cup Y_o, \vartheta_o : \{1, \ldots, \nu(u_o)\} \to T_{G_o})$, akkor $\Omega^2((\bar{s}_o, \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_j)) = c_j \ldots c_1 \vartheta_o(t_o)$.

Megjegyezzük, hogy a K_1 konfiguráció és az /1/ feltételt kielégitő $\mathcal{K}_i$ $(i = 0, \ldots, k)$ leképezések egyértelmüen meghatározzák a K_2 konfigurációt.

A közvetlen átmenetre a $\Longrightarrow_{\mathcal{L}}$ jelölést használjuk. A $\Longrightarrow_{\mathcal{L}}$ reláció reflexiv-tranzitiv lezártját $\overset{*}{\Longrightarrow}_{\mathcal{L}}$ jelöli.

<u>3.4. definició.</u> Tekintsük a $\mathcal{L} = (G_o, G_1, \ldots, G_k, Y_o, Y_1, \ldots, Y_k, A_1, \ldots, A_k, A_1' \ldots, A_k', \Sigma_{\mathcal{L}}, V)$ k-szinkronizált felszálló fatranszformátort.

A $\tau_{\mathcal{L}} = \{(p,q) \mid p \in T_{G_o}(Y_o), q \in T_{G_k},$

$K_o = (e[\{e\}, \psi_o : e \to bp], \Theta^o, Z^o, \Omega^o) \Rightarrow_{\mathcal{L}}^{*} (q, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$

valamely K_o kezdő konfigurációra$\}$

relációt a $\mathcal{L}$ által indukált transzformációnak nevezzük.

A $(q, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ alaku konfigurációkat - ahol $q \in T_{G_k}$ - végkonfigurációknak nevezzük.

<u>3.5. tétel.</u> Legyenek $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_i = (G_{i-1}, A_i, G_i, A_i', \Sigma_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_i})$ $(i = 1, \ldots, k, k \geq 2)$ felszálló fatranszformátorok. Létezik egy $\mathcal{L}$ k-szinkronizált felszálló fatranszformátor, hogy

$$\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_1} \circ \ldots \circ \tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_k}.$$

<u>Bizonyitás.</u> Legyen $\mathcal{L} = (G_o, G_1, \ldots, G_k, A_1, \ldots, A_k, A_1', \ldots, A_k', \Sigma_{\mathcal{L}}, V)$, ahol $\Sigma_{\mathcal{L}}(o) = \Sigma(o), \ldots, \Sigma_{\mathcal{L}}(k) = \Sigma(k)$ (a $\Sigma(o), \ldots, \Sigma(k)$, V halmazokat az előző alfejezetben definiáltuk). Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $A_k \ldots A_1 \cap T_{G_k} = \emptyset$ és minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ indexre $A_i \ldots A_1 \cap T_{G_o} = \emptyset$. Tehát $\mathcal{L}$ kielégiti a 3.1. definició /3/ követelményét.

Először bebizonyitjuk a $\tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_1} \circ \ldots \circ \tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_k} \subseteq \tau_{\mathcal{L}}$ tartalmazást. Tegyük fel, hogy $(p_o, p_k) \in \tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_1} \circ \tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_2} \circ \ldots \circ \tau_{\mathcal{O}\!\mathcal{L}_k}$. Ekkor léteznek $a_1 \in A_1', \ldots, a_k \in A_k'$ kezdő állapotok és D deriváció sorozat:

D: $a_1p_o \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_1} p_1,\ a_2p_1 \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_2} p_2, \dots, a_kp_{k-1} \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_k} p_k$, ahol $p_i \in T_{G_i}(Y_i)$ $(i = 0,\dots,k)$.

Vegyük a p_o fa tetszőleges $p_o = q_o[S_{q_o}, \gamma_o]$ felbontását, ahol $q_o \in P_{G_o}$ és $\gamma_o : S_{q_o} \longrightarrow T_{G_o}$. Az előző alfejezetben a D deriváció sorozathoz és a q_o félfához megkonstruáltuk a $K_{(D,q_o)} = (q_k[S_{q_k}, \Psi_{(D,q_o)}], \Theta_{(D,q_o)}, Z_{(D,q_o)}, \Omega_{(D,q_o)})$ konfigurációt. Látható, hogy $K_{(D,q_o)}$ konfigurációja a $\mathcal{L}$ k-szinkronizált felszálló fatranszformátornak.

Legyen $r_o = q_o[S_{q_o}, \xi_o]$, ahol a $\xi_o : S_{q_o} \longrightarrow T_{G_o}(N^*)$ leképezés az alábbi formulával van definiálva:

minden $s_o \in S_{q_o}$ argumentumra $\xi_o(s_o) = \omega_{s_o}(u_o(1,\dots,\nu(u_o)))$, ha $\gamma_o(s_o) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ $(u_o \in G_o$, $\vartheta_o : \{1,\dots,\nu(u_o)\} \to T_{G_o}$.

$K_{(D,r_o)}$ is konfigurációja $\mathcal{L}$-nek.

A $\Rightarrow_{\mathcal{L}}$ reláció definiciójából következik, hogy $K_{(D,q_o)} = K_{(D,r_o)}$ vagy $K_{(D,q_o)} \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_{(D,r_o)}$.

Legyen $\ell = h(p)+1$, tekintsük a $p^o, p^1, \dots, p^\ell \in P_G$ félfákat, ahol minden $i \in \{0,\dots,\ell\}$ indexre $p_o = p^i[S_{p^i}, \gamma^i]$ $(\gamma^i : S_{p^i} \longrightarrow T_{G_o}(N^*)$ teljesül, és

i/ $p^o = e$, $\gamma^o(e) = p_o$ és

ii/ $p^{i+1} = p^i[S_{p^i}, \xi^{i+1}]$, ahol a $\xi^{i+1} : S_{p^i} \longrightarrow T_{G_o}(N^*)$ leképezés a következő formulával van definiálva:

minden $s^i \in S_{p^i}$ argumentumra $\xi^{i+1}(s^i) = \omega_{s^i}(u_o(1,\dots,\nu(u_o)))$ ha $\gamma^i(s^i) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ valamely $u_o \in G_o$ müveleti szimbólumra és $\vartheta_o : \{1,\dots,\nu(u_o)\} \longrightarrow T_{G_o}$ leképezésre. Ebben az esetben minden $s^{i+1} \in S_{p^{i+1}}$ argumentumnak létezik az egyértelmü $s^{i+1} = s^i t^i$ felbontása, ahol $s^i \in S_{p^i}$,

$\gamma^i(s^i) = u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$, $u_o \in G_o$
$\vartheta_o : \{1,\dots,\nu(u_o)\} \to T_{G_o}$ és $t^i \in \{1,\dots,\nu(u_o)\}$.
Ekkor $\gamma^{i+1}(s^{i+1}) = \vartheta_o(t^i)$.

Tudjuk, hogy $K_{(D,p^i)} = K_{(D,p^{i+1})}$ vagy $K_{(D,p^i)} \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_{(D,p^{i+1})}$ teljesül $(i = 0,\dots,\ell-1)$. Már csak azt kell bebizonyitani, hogy $K_{(D,p^0)}$ kezdő és $K_{(D,p^\ell)}$ vég konfigurációja a $\mathcal{L}$ k-szinkronizált felszálló fatranszformátornak.

Az állitás első része nyilvánvaló.

Mivel $p^\ell = p_o$ és $p_o \in T_{G_o}(Y_o)$ igy $S_{p^\ell} = \emptyset$, tehát $K_{(D,p^\ell)} =$ $= (p_k,\emptyset,\emptyset,\emptyset)$.

Bebizonyitottuk, hogy $(p_o,p_k) \in \tau_{\mathcal{L}}$.

Bebizonyitjuk a forditott irányu tartalmazást:

$\tau_{\mathcal{L}} \subseteq \tau_{\mathfrak{A}_1} \circ \tau_{\mathfrak{A}_2} \circ \dots \circ \tau_{\mathfrak{A}_k}$.

Tekintsük a $K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} \dots \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_n$ deriváció sorozatot, ahol $n \geq 1$, $K_o = (e[\{e\},\psi^o],\Theta^o,z^o,\Omega^o)$ kezdő konfiguráció és $K_i = (q^i[S_{q^i},\psi^i],\Theta^i,z^i,\Omega^i)$ $(i = 1,\dots,n)$.

Tegyük fel, hogy $\psi^o(e) = a_k\dots a_1p$. Legyen $p^o,p^1,\dots,p^\ell$ a bizonyitás első részében megkonstruált félfa sorozat, ahol $p^\ell = p$. Látható, hogy $n \leq \ell$. Ekkor létezik a $D =$ $= D_1,\dots,D_k$ deriváció sorozat:

D_1: $a_1p^n \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} p_1[S_{p_1},\eta_1]$ $(p_1 \in P_{G_1},$ $\eta_1 : S_{p_1} \to A_1S_{p^n})$,

D_2: $a_2p_1 \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_2} p_2[S_{p_2},\eta_2]$ $(p_2 \in P_{G_2},$ $\eta_2 : S_{p_2} \to A_2S_{p_1})$,

$\vdots$

D_k: $a_kp_{k-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_k} p_k[S_{p_k},\eta_k]$ $(p_k \in P_{G_k},$ $\eta_k : S_{p_k} \to A_kS_{p_{k-1}})$, ugy, hogy az alábbi állitások teljesülnek:

i/ $p_k = q^n$,

ii/ $\psi_{(D,p^n)} = \psi^n$,

iii/ $Z^n = Z_{(D,p^n)}$,

iv/ $\Theta^n = \Theta_{(D,p^n)}$,

v/ $\Omega^n = \Omega_{(D,p^n)}$,

ahol a $Z_{(D,p^n)}$ halmaz és a

$\Theta_{(D,p^n)} : S_{p_k} \longrightarrow Z_{(D,p^n)}$,

$\psi_{(D,p^n)} : S_{p_k} \longrightarrow (A_k \ldots A_2A_1 \cup \ldots \cup A_2A_1 \cup A_1) rg(\gamma^n)$,

$\Omega_{(D,p^n)} : Z_{(D,p^n)} \longrightarrow (A_k \ldots A_2A_1 \cup \ldots \cup A_2A_1 \cup A_1)\, rg(\gamma^n)$

leképezések a következő módon vannak definiálva:

/1/ $Z_{(D,p^n)} = \{(s_o, s_1, \ldots, s_j) \mid s_o \in S_{p^n}, s_1 \in S_{p_1}, \ldots, s_j \in S_{p_j}$,

$1 \leq j \leq k$ és ($j = k$ vagy ($j < k$ és nincsen

olyan $s_{j+1} \in S_{q_{j+1}}$ argumentum és $b_{j+1} \in A_{j+1}$

állapot, hogy $\eta_{j+1}(s_{j+1}) = b_{j+1}s_j$)) és

$\eta_i(s_i) = b_i s_{i-1}$ $(b_i \in A_i)$, $i = 1, \ldots, j\}$.

/2/ Minden $(s_o, s_1, \ldots, s_j) \in Z_{(D,p^n)}$ $(1 \leq j \leq k)$ vektorra

$\Omega_{(D,p^n)}((s_o, s_1, \ldots, s_j)) = b_j \ldots b_1 \gamma^n(s_o)$ akkor és csak

akkor, ha $\eta_i(s_i) = b_i s_{i-1}$ $(b_i \in A_i)$, $i = 1, \ldots, j$.

/3/ Minden $s_k \in S_{q^n}$ argumentumra $\Theta_{(D,p^n)}(s_k) = (s_o, s_1, \ldots, s_k)$

akkor és csak akkor, ha $\eta_i(s_i) = b_i s_{i-1}$ $(b_i \in A_i)$

$(i = 1, \ldots, k)$.

/4/ $\Psi_{(D,p^n)} = \Theta_{(D,p^n)} \circ \Omega_{(D,p^n)}$.

n szerinti teljes indukcióval bizonyitunk. Legyen n = 1.

Ebben az esetben $p^1 = u_o(1,\dots,\nu(u_o))$, $u_o = \mathrm{root}(p)$.

A $\mathcal{L}$-beni közvetlen átmenet definiciójából következik, hogy léteznek a $\mathcal{K}_i : \{e\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ $(i = 0,\dots,k)$ leképezések ugy, hogy a K_o konfigurációval meghatározzák a K_1 konfigurációt, és $\mathcal{K}_o(e) = u_o$, $\mathcal{K}_1(e) = (a_1, u_o, u_1[S_{u_1}, \varphi_1], \varsigma_1, W_1, \tau_1)$, és igy tovább, $\mathcal{K}_k(e) = (a_k \dots a_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, W_k, \tau_k)$, és $(\mathcal{K}_o(e), \mathcal{K}_1(e), \dots, \mathcal{K}_k(e)) \in V_k$.

A $\mathcal{L}$ transzformátor konstrukciójának megfelelően létezik egy $D = D_1,\dots,D_k$ deriváció sorozat:

D_1: $a_1 u_o(1,\dots,\nu(u_o)) \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_1} u_1[S_{u_1}, \varphi_1]$,

D_i: $a_i u_{i-1} \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_i} u_i[S_{u_i}, \eta_i]$ valamely $\eta_i : S_{u_i} \to A_i S_{u_{i-1}}$

leképezésre, $(i = 2,\dots,k)$,

ugy, hogy az alábbi állitások teljesülnek:

i/ $q^1 = u_k$,

ii/ $\Psi_{(D,p^1)} = \Psi^1$,

iii/ $Z^1 = W_k = Z_{(D,p^1)}$,

iv/ $\Theta^1 = \varsigma_k = \Theta_{(D,p^1)}$,

v/ $\Omega^1 = \tau_k = \Omega_{(D,p^1)}$.

Az n = 1 esetre teljes a bizonyitás.

Tegyük fel, hogy az állitás igaz n-1-re, ahol $n \geq 2$.

Ez azt jelenti, hogy létezik a

$D = D_1,\dots,D_k$ deriváció sorozat:

D_1: $a_1 p^{n-1} \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_1} p_1[S_{p_1}, \eta_1]$ $(p_1 \in P_{G_1},$ $\eta_1 : S_{p_1} \to A_1 S_{p^{n-1}})$,

D_2: $a_2 p_1 \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_2} p_2[S_{p_2}, \eta_2]$ $(p_2 \in P_{G_2},$ $\eta_2 : S_{p_2} \to A_2 S_{p_1})$,

$\vdots$

D_k: $a_k p_{k-1} \Rightarrow^*_{\mathcal{R}_k} p_k[S_{p_k}, \eta_k]$ $(p_k \in P_{G_k},$ $\eta_k : S_{p_k} \to A_k S_{p_{k-1}})$,

ugy hogy az alábbi állitások teljesülnek:

i/ $p_k = q^{n-1}$

ii/ $\Psi_{(D,p^{n-1})} = \Psi^{n-1}$,

iii/ $Z^{n-1} = Z_{(D,p^{n-1})}$,

iv/ $\Theta^{n-1} = \Theta_{(D,p^{n-1})}$,

v/ $\Omega^{n-1} = \Omega_{(D,p^{n-1})}$.

A $K_{n-1} \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_n$ átmenet miatt léteznek a $\mathcal{H}_i : [Z^{n-1}]_i \to \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ $(i = 0,1,\dots,k)$ leképezések, amelyek kielégitik a 3.3. definició /1/ feltételét.

Tekintsük az $r_o,\dots,r_k$ félfákat: $r_o = p^n$, minden $i \in \{2,\dots,k\}$ indexre $r_i = p_i[S_{p_i}, \varepsilon_i]$, ahol az $\varepsilon_i : S_{p_i} \to T_{G_i}(N^*)$ leképezés a következő módon van definiálva: minden $s \in S_{p_i}$ argumentumra ha $\mathcal{H}_i(s) = (b_i \dots b_1, u_o, u_i[S_{u_i}, \varphi_i], \varsigma_i, W_i, \tau_i)$ produkció harmadik komponense $u_i[S_{u_i}, \varphi_i]$, akkor $\varepsilon_i(s) = \omega_s(u_i)$.
A $\xi_i : S_{r_i} \to A_i S_{r_{i-1}}$ $(i \in \{1,\dots,k\})$ leképezést a következő módon definiáljuk: tudjuk, hogy minden $\bar{s}_i \in S_{r_i}$ argumentumra egyértelmüen létezik az $\bar{s}_i = s_i t_i$ felbontás, ahol $s_i \in S_{p_i}$, $\mathcal{H}_i(s_i) = (b_i \dots b_1, u_o, u_i[S_{u_i}, \varphi_i], \varsigma_i, W_i, \tau_i)$ és $t_i \in S_{u_i}$. Ha $\varsigma_i(t_i) = (t_o,\dots,t_{i-1},t_i)(\in W_i)$ és $\tau_i((t_o,\dots,t_{i-1},t_i)) = c_i \dots c_1 t_o$ valamely $c_i \in A_i,\dots,c_1 \in A_1$ állapotokra és $\eta_i(s_i) = b_i s_{i-1}$ valamely $s_{i-1} \in S_{p_{i-1}}$ argumentumra, akkor

$\xi_i(s_i t_i) = c_i s_{i-1} t_{i-1}$.

Tehát az $E_i: a_i r_{i-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_i} r_i[S_{r_i}, \xi_i]$ $(i = 1,\dots,k)$ derivációk teljesülnek.

A $\mathfrak{L}$-beni átmenet definiciója, $r_k, Z_{(E,p^n)}, \Theta_{E,p^n}, \Omega_{(E,p^n)}$, $\psi_{(E,p^n)}$ definiciója alapján következik, hogy

i/ $r_k = q^n$,

ii/ $\psi_{(E,p^n)} = \psi^n$,

iii/ $Z^n = Z_{(E,p^n)}$,

iv/ $\Theta^n = \Theta_{(E,p^n)}$,

v/ $\Omega = \Omega_{(E,p^n)}$.

Tegyük fel, hogy $(p,q) \in \mathcal{T}_{\mathfrak{L}}$. Ekkor léteznek a $K_o,\dots,K_n$ $(n \geq 1)$ konfigurációk, ugy, hogy $K_o = (e[\{e\},\psi^o],\Theta^o, Z^o, \Omega^o)$ kezdő konfiguráció, ahol $\psi^o(e) = a_k \dots a_1 p$ valamely $a_k \in A'_k, \dots$ $\dots, a_1 \in A'_1$ állapotokra, K_n végkonfiguráció, $K_n = (q,\emptyset,\emptyset,\emptyset)$, és $K_{i-1} \Rightarrow_{\mathfrak{L}} K_i$ $(i = 1,\dots,n)$.

Az imént bizonyitott állitás szerint létezik egy $D = D_1,\dots,D_k$ derivációs sorozat:

D_1: $a_1 p^n \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_1} p_1[S_{p_1}, \eta_1]$, $(p_1 \in P_{G_1}$, $\eta_1: S_{p_1} \rightarrow A_1 S_{p^n})$,

D_2: $a_2 p_1 \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_2} p_2[S_{p_2}, \eta_2]$, $(p_2 \in P_{G_2}$, $\eta_2: S_{p_2} \rightarrow A_2 S_{p_1})$,

$\vdots$

D_k: $a_k p_{k-1} \Rightarrow^*_{\mathfrak{A}_k} p_k[S_{p_k}, \eta_k]$, $(p_k \in P_{G_k}$, $\eta_k: S_{p_k} \rightarrow A_k S_{p_{k-1}})$,

ugy, hogy az alábbi állitások teljesülnek:

i/ $p_k = q$,

ii/ $\psi_{(D,p^n)} = \psi^n = \emptyset$,

iii/ $Z^n = Z_{(D,p^n)}$,

iv/ $\Theta^n = \Theta_{(D,p^n)}$,

v/ $\Omega^n = \Omega_{(D,p^n)}$.

Eképpen $Z_{(D,p^n)} = \emptyset$, $\Theta_{(D,p^n)} = \emptyset$, $\Omega_{(D,p^n)} = \emptyset$, $Z_{(D,p^n)}$ definiciója szerint $S_{p_i} = [Z_{(D,p^n)}]_i$ $(i = 1,\ldots,k)$. Tehát

$p_i \in T_{G_i}$ $(i = 1,\ldots,k)$.

Látható, hogy az $a_1 p^n[S_{p^n}, \gamma^n] \Rightarrow^*_{\mathcal{U}_1} p_1$ deriváció fennáll.

Tehát $(p^n[S_{p^n}, \gamma^n], q) \in \tau_{\mathcal{U}_1} \circ \tau_{\mathcal{U}_2} \circ \ldots \circ \tau_{\mathcal{U}_k}$.

A tétel bizonyitása teljes. $\square$

<u>3.6. tétel.</u> Legyen $\mathcal{L} = (G_o, G_1, \ldots, G_k, A_1, A_2, \ldots, A_k, A_1', \ldots, A_k', \Sigma_{\mathcal{L}}, V)$ egy k-szinkronizált felszálló fatranszformátor. Ekkor léteznek olyan $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k$ felszálló fatranszformátorok, amelyekre teljesül a $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{U}_1} \circ \tau_{\mathcal{U}_2} \circ \ldots \circ \tau_{\mathcal{U}_k}$ egyenlőség.

<u>Bizonyitás.</u> Minden $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ számra a $\Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ produkció halmazt rangolt ábécének tekintjük a ν^i: $\Sigma_{\mathcal{L}}(i) \rightarrow \{0,1,2,\ldots\}$ aritás függvénnyel, amely leképezést a következő módon definiáljuk: minden

$\sigma = (b_i \ldots b_1, u_o, u_i[S_{u_i}, \varphi_i], \varsigma_i, W_i, \tau_i) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ produkcióra $\nu^i(\sigma) = |S_{u_i}|$, ahol $|S_{u_i}|$ jelöli az S_{u_i} halmaz elemeinek a számát. Emlékeztetünk, hogy a G_o rangolt ábécé aritás függvényére a ν jelölést használjuk.

Bevezetjük még az alábbi konvenciót:

Legyen $S \subseteq N^*$. Ha $S \neq \emptyset$, akkor $\xi_o, \xi_k : S \rightarrow S$ az identitás leképezést jelölik. Ha $S = \emptyset$, akkor $\xi_o, \xi_k : S \rightarrow S$ az üres halmazt jelölik. Minden $j \in \{1,\ldots,k\}$ számra ha $S \neq \emptyset$, akkor

$\xi_j: S \rightarrow \{1,\ldots,|S|\}$ azon függvényt jelöli, amely minden $s \in S$ elemhez az S lexikografikusan rendezett halmazban az s szóhoz tartozó sorszámot rendeli. Ha $S = \emptyset$ akkor ξ_j az üres halmazt jelöli. Tehát ξ_j mindig bijektiv függvényt jelöl, amelyet az értelmezési tartománya egyértelmüen meghatároz.

Tekintsük az $\mathfrak{N}_1 = (G_o, A_1, \Sigma_{\mathcal{L}}(1), \Sigma_{\mathfrak{N}_1}, A_1')$ felszálló fatranszformátort, ahol

$(b_1 u_o \rightarrow \sigma_1(1,\ldots,\nu^1(\sigma_1))[\{1,\ldots,\nu^1(\sigma_1)\}, \beta_1] \in \Sigma_{\mathfrak{N}_1}$ akkor

és csak akkor, ha 1/, 2/ teljesülnek.

1/ $(b_1, u_o, u_1[s_{u_1}, \varphi_1], \varsigma_1, W_1, \tau_1) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(1)$,

2/ $(\sigma_o, (b_1, u_o, u_1[s_{u_1}, \varphi_1], \varsigma_1, W_1, \tau_1)) \in V_1$ és a $\beta_1: \{1,\ldots,\nu^1(\sigma_1)\} \rightarrow A_1\{1,\ldots,\nu(\sigma_o)\}$ leképezés a következő módon van definiálva:

Legyen $\xi_o: \{1,\ldots,\nu(u_o)\} \rightarrow \{1,\ldots,\nu(u_o)\}$, $\xi_1: s_{u_1} \rightarrow \{1,\ldots,|s_{u_1}|\}$.
Minden $t_1 \in s_{u_1}$ argumentumra $\beta_1(\xi_1(t_1)) = c_1 \xi_o(t_o)$ akkor és csak akkor, ha $\varsigma_1(t_1) = (t_o, t_1)$ és $\tau_1((t_o, t_1)) = c_1 t_o$.
(Tehát minden $t_1 \in s_{u_1}$ argumentumra $\beta_1(\xi_1(t_1)) = c_1 \xi_o(t_o)$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_1(t_1) = c_1 t_o$.)

Minden $j \in \{2,\ldots,k-1\}$ számra tekintsük az $\mathfrak{N}_j = (\Sigma_{\mathcal{L}}(j-1), A_j, \Sigma_{\mathcal{L}}(j), \Sigma_{\mathfrak{N}_j}, A_j')$ felszálló fatranszformátort, ahol a $\Sigma_{\mathfrak{N}_j}$ produkció halmaz a következő módon van definiálva:
$b_j \sigma_{j-1} \rightarrow \sigma_j(1,\ldots,\nu^j(\sigma_j))[\{1,\ldots,\nu^j(\sigma_j)\}, \beta_j] \in \Sigma_{\mathfrak{N}_j}$ akkor és csak akkor, ha 1/, 2/ teljesülnek.

1/ Létezik $(\sigma_o, \ldots, \sigma_{j-1}, \sigma_j) \in V_j$ ugy, hogy $\sigma_{j-1} = (b_{j-1} \ldots b_1, u_o, u_{j-1}[s_{u_{j-1}}, \varphi_{j-1}], \varsigma_{j-1}, W_{j-1}, \tau_{j-1})$, $\sigma_j = (b_j \ldots b_1, u_o, u_j[s_{u_j}, \varphi_j], \varsigma_j, W_j, \tau_j)$. Létezik egy $\varepsilon_j: s_{u_j} \rightarrow A_j[W_{j-1}]_{j-1}$

leképezés, amely kielégiti a 3.1. definició 5.b pontjának i/-iv/ feltételeit.

2/ A $\beta_j : \{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\} \to A_j\{1,\dots,\nu^{j-1}(\sigma_{j-1})\}$ leképezést a következő módon definiáljuk:

Legyen $\xi_{j-1} : S_{u_{j-1}} \to \{1,\dots,|S_{u_{j-1}}|\}$, $\xi_j : S_{u_j} \to \{1,\dots,|S_{u_j}|\}$. Minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra $\beta_j(\xi_j(t_j)) = c_j\xi_{j-1}(t_{j-1})$ $(c_j \in A_j, t_{j-1} \in S_{u_{j-1}})$ akkor és csak akkor, ha $\varrho_j(t_j) = (t_o,\dots,t_{j-1},t_j)$ és $\tau_j((t_o,\dots,t_{j-1},t_j)) = c_j\dots c_1 t_o$.
(Tehát minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra $\beta_j(\xi_j(t_j)) = c_j\xi_{j-1}(t_j)$ $(c_j \in A_j, t_{j-1} \in S_{u_{j-1}})$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$.)

Tekintsük az $\mathfrak{A}_k = (\Sigma_{\mathcal{L}}(k-1), A_k, G_k, \Sigma_{\mathfrak{A}_k}, A_k')$ felszálló fatranszformátort, ahol a $\Sigma_{\mathfrak{A}_k}$ produkcióhalmaz a következő módon van definiálva:

$$a_k\sigma_{k-1} \to u_k[S_{u_k}, \beta_k] \in \Sigma_{\mathfrak{A}_k} \text{ akkor és csak akkor,}$$

ha 1/, 2/ teljesülnek.

1/ Létezik $(\sigma_o,\dots,\sigma_{k-1},\sigma_k) \in V$, ugy hogy $\sigma_{k-1} = (b_{k-1}\dots b_1, u_o, u_{k-1}[S_{u_{k-1}}, \varphi_{k-1}], \varrho_{k-1}, W_{k-1}, \tau_{k-1})$, $\sigma_k = (b_k\dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varrho_k, W_k, \tau_k)$. Létezik egy $\varepsilon_k : S_{u_k} \to A_k[W_{k-1}]_{k-1}$ leképezés, amely kielégiti a 3.3. definició 5.b pontjának i/-iv/ feltételeit.

2/ A $\beta_k : S_{u_k} \to A_k\{1,\dots,\nu^{k-1}(\sigma_{k-1})\}$ leképezés a következő módon van definiálva:

Legyen $\xi_{k-1} : S_{u_{k-1}} \to \{1,\dots,|S_{u_{k-1}}|\}$, $\xi_k : S_{u_k} \to S_{u_k}$. Minden $t_k \in S_{u_k}$ argumentumra $\beta_k(t_k) = c_k\xi_{k-1}(t_{k-1})$ akkor és csak akkor, ha $\varrho_k(t_k) = (t_o,\dots,t_{k-1},t_k)$ és $\tau_k((t_o,\dots,t_{k-1},t_k)) = c_k\dots c_1 t_o$.

(Tehát minden $t_k \in S_{u_k}$ argumentumra $\beta_k(t_k) = c_k \xi_{k-1}(t_{k-1})$ $(c_k \in A_k, t_{k-1} \in S_{u_{k-1}})$ akkor és csak akkor, ha $\xi_k(t_k) = c_k t_{k-1}$.)

Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $A_1 \cap T_{\Sigma_{\mathcal{L}}(0)} = \emptyset$, $A_k \cap T_{\Sigma_{\mathcal{L}}(k-1)} = \emptyset$, és minden $i \in \{2,\dots,k-1\}$ számra $A_i \cap T_{\Sigma_{\mathcal{L}}(i-1)} = \emptyset$, $A_i \cap T_{\Sigma_{\mathcal{L}}(i)} = \emptyset$, $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$ fatranszformátorok kielégitik az 1.10. definició /2/ követelményét.

Be fogjuk bizonyitani, hogy $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\mathfrak{A}_1} \circ \dots \circ \tau_{\mathfrak{A}_k}$.
Legyen $\mathcal{L}$ az a k-szinkronizált fatranszformátor, amelyet a 3.5. tételben szereplő konstrukcióval nyerünk az $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_k$ felszálló fatranszformátorokból.

$$\mathcal{L} = (G_0, \Sigma_{\mathcal{L}}(1),\dots,\Sigma_{\mathcal{L}}(k-1), G_k, A_1,\dots,A_k, A_1',\dots,A_k', \Sigma_{\mathcal{L}}, \bar{V}).$$

Az általánosság elvesztése nélkül feltehetjük, hogy $A_i \dots A_1 \cap T_{G_0} = \emptyset$ $(i = 1,\dots,k)$ és $A_k \dots A_1 \cap T_{G_0} = \emptyset$. Tehát $\mathcal{L}$ kielégiti a 3.1. definició /3/ követelményét. A 3.5. tétel alapján $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\mathfrak{A}_1} \circ \tau_{\mathfrak{A}_2} \circ \dots \circ \tau_{\mathfrak{A}_k}$, igy elegendő belátni, hogy $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{L}}$.

Meg fogjuk konstruálni a $\gamma_j : \Sigma_{\mathcal{L}}(j) \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ $(j = 0,\dots,k-1)$ bijektiv leképezéseket és a $\gamma_k : \Sigma_{\mathcal{L}}(k) \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}}(k)$ szürjektiv leképezést, és be fogjuk bizonyitani, hogy minden $j \in \{0,\dots,k\}$ számra a $\gamma_0,\dots,\gamma_j$ leképezések kielégitik az /1/ feltételt, és minden $j \in \{0,\dots,k\}$ számra a γ_j leképezés kielégiti a /2/ feltételt.

/1/ feltétel: két eset van

1. eset $0 \le j \le k-1$. Ebben az esetben

ha $(\sigma_0,\dots,\sigma_j) \in V_j$ akkor $(\gamma_0(\sigma_0),\dots,\gamma_j(\sigma_j)) \in \bar{V}_j$ és
ha $(\bar{\sigma}_0,\dots,\bar{\sigma}_j) \in \bar{V}_j$ akkor $(\gamma_0^{-1}(\bar{\sigma}_0),\dots,\gamma_j^{-1}(\bar{\sigma}_j)) \in V_j$.

2. eset $j = k$. Ebben az esetben

ha $(\sigma_o,\dots,\sigma_k)\in V_k$ akkor $(\gamma_o(\sigma_o),\dots,\gamma_k(\sigma_k))\in \bar{V}_k$, és

ha $(\bar{\sigma}_o,\dots,\bar{\sigma}_{k-1},\bar{\sigma}_k)\in\bar{V}_k$ akkor létezik egyetlen $\sigma_k\in\Sigma_{\mathcal{L}}(k)$

ugy, hogy $\gamma_k(\sigma_k) = \bar{\sigma}_k$ és

$(\gamma_o^{-1}(\bar{\sigma}_o),\dots,\gamma_{k-1}^{-1}(\bar{\sigma}_{k-1}),\sigma_k)\in V_k$.

/2/ feltétel: három eset van.

1. eset. $j = 0$. Ebben az esetben $\Sigma_{\bar{\mathcal{L}}}(0) = \Sigma_{\mathcal{L}}(0)$, és γ_o az identitás függvény.

2. eset. $1\leq j\leq k-1$. Legyen $(\sigma_o,\dots,\sigma_j)\in V_j$ és $\sigma_o = u_o$. Tegyük fel, hogy σ_ℓ $(1\leq \ell\leq j)$ alakja $(b_\ell\dots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell},\varphi_\ell],\varrho_\ell, W_\ell,\tau_\ell)$.

Legyen $\xi_o:\{1,\dots,\nu(u_o)\} = [W_j]_o \to \{1,\dots,\nu(u_o)\}$,

$\xi_\ell: S_{u_\ell} = [W_j]_\ell \to \{1,\dots,|S_{u_\ell}|\}$ $(\ell = 1,\dots,j)$.

Ekkor $\gamma_j(\sigma_j)$ alakja a következő: $\gamma_j(\sigma_j) = (b_j\dots b_1, u_o, \sigma_j(1,\dots,\nu^j(\sigma_j))[\{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\},\bar{\varphi}_j],\bar{\varrho}_j,\bar{W}_j,\bar{\tau}_j)$ és a következők teljesülnek:

i/ $[\bar{W}_j]_o = [W_j]_o$ és $[\bar{W}_j]_i = \{1,\dots,|[W_j]_i|\} = \{1,\dots,|S_{u_i}|\} = rg(\xi_i)$ $(i = 1,\dots,j-1)$.

ii/ $(t_o,t_1,\dots,t_\ell)\in W_j$ akkor és csak akkor, ha $(\xi_o(t_o),\xi_1(t_1),\dots,\xi_\ell(t_\ell))\in\bar{W}_j$ $(1\leq \ell\leq j, t_o\in N^*, t_1\in N^*,\dots,t_\ell\in N^*)$.

iii/ Minden $t_j\in S_{u_j}$ argumentumra $\varphi_j(t_j) = c_j\dots c_1 t_o$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\varphi}_j(\xi_j(t_j)) = c_j\dots c_1\xi_o(t_o)$, $(t_o\in S_{u_o}, c_1\in A_1,\dots,c_j\in A_j)$.

iv/ Minden $t_j\in S_{u_j}$ argumentumra $\varrho_j(t_j) = (t_o,t_1,\dots,t_j)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\varrho}_j(\xi_j(t_j)) = (\xi_o(t_o),\xi_1(t_1),\dots$ $\dots,\xi_j(t_j))$.

v/ Minden $(t_o,t_1,\dots,t_\ell)\in W_j$ $(1\le \ell\le j)$ vektorra

$\tau_j((t_o,t_1,\dots,t_\ell)) = c_\ell\dots c_1t_o$ akkor és csak akkor,

ha $\bar{\tau}_j((\xi_o(t_o),\xi_1(t_1),\dots,\xi_\ell(t_\ell))) = c_\ell\dots c_1\xi_o(t_o)$,

$t_o\in\{1,\dots,\nu(u_o)\}, c_1\in A_1,\dots,c_\ell\in A_\ell)$.

3. eset. $j = k$. Legyen $(\sigma_o,\sigma_1,\dots,\sigma_k)\in V_k$ és $\sigma_o = u_o$. Tegyük fel, hogy σ_ℓ $(1\le \ell\le k)$ alakja $(b_\ell\dots b_1,u_o,u_\ell[S_{u_\ell},\varphi_\ell],\varrho_\ell, W_\ell,\tau_\ell)$. Legyen $\xi_o:\{1,\dots,\nu(u_o)\} = [W_k]_o\to\{1,\dots,\nu(u_o)\}$,

$\xi_\ell:S_{u_\ell} = [W_k]_\ell\to\{1,\dots,|S_{u_\ell}|\}$, $(\ell = 1,\dots,k-1)$,

$\xi_k:S_{u_k} = [W_k]_k\to S_{u_k}$. Ekkor $\gamma_k(\sigma_k)$ alakja

$(b_k\dots b_1,u_o,u_k[S_{u_k},\bar{\varphi}_k],\bar{\varrho}_k,\bar{W}_k,\bar{\tau}_k)$ és a következők teljesülnek:

i/ $[\bar{W}_k]_o = [W_k]_o,[\bar{W}_k]_i = \{1,\dots,[W_k]_i\} = \{1,\dots,|S_{u_i}|\} =$

$= rg(\xi_i)$, $(i = 1,\dots,k-1)$ és $[\bar{W}_k]_k = S_{u_k} = rg(\xi_k)$.

ii/ $(t_o,t_1,\dots,t_\ell)\in W_k$ akkor és csak akkor, ha

$(\xi_o(t_o),\xi_1(t_1),\dots,\xi_\ell(t_\ell))\in \bar{W}_k$ $(1\le \ell\le k,\ t_o\in N^*,\dots$

$\dots,t_\ell\in N^*)$.

iii/ Minden $t_k\in S_{u_k}$ argumentumra $\varphi_k(t_k) = c_k\dots c_1t_o$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\varphi}_k(\xi_k(t_k)) = c_k\dots c_1t_o$

$(t_o\in S_{u_o},c_1\in A_1,\dots,c_k\in A_k)$.

iv/ Minden $t_k\in S_{u_k}$ argumentumra $\varrho_k(t_k) = (t_o,t_1,\dots,t_k)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\varrho}_k(\xi_k(t_k)) = (\xi_o(t_o),$

$\xi_1(t_1),\dots,\xi_k(t_k))$.

v/ Minden $(t_o,t_1,\dots,t_\ell)\in W_k$ $(1\le \ell\le k)$ argumentumra

$\tau_k((t_o,t_1,\dots,t_\ell)) = c_\ell\dots c_1t_o$ akkor és csak akkor,

ha $\bar{\tau}_k((\xi_o(t_o),\xi_1(t_1),\dots,\xi_\ell(t_\ell))) = c_\ell\dots c_1t_o$,

$t_o\in\{1,\dots,\nu(u_o)\}, c_1\in A_1,\dots,c_\ell\in A_\ell)$.

A $\gamma_j : \Sigma_{\mathcal{L}}(j) \to \Sigma_{L}(j)$ leképezéseket $\mathfrak{A}_j$ és $\Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ konstrukciójának megfelelően fogjuk definiálni. Legyen j = 0. Mivel $\Sigma_{\mathcal{L}}(0) = \Sigma_{L}(0)$, legyen γ_0 az identitás leképezés.

Legyen j = 1. Ebben az esetben

$(b_1, u_o, \sigma_1(1,\dots,\nu^1(\sigma_1))[\{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\}, \bar{\varphi}_1], \bar{\rho}_1 \bar{W}_1, \bar{\tau}_1) \in$
$\in \Sigma_{L}(1)$ akkor és csak akkor, ha i/-v/ teljesülnek.

i/ $(u_o, \sigma_1) \in V$ ugy hogy σ_1 alakja $(b_1, u_o, u_1[S_{u_1}, \varphi_1], \rho_1, W_1, \tau_1)$.

ii/ $\gamma_o(u_o) = u_o$,
$b_1 u_o \to \sigma_1(1,\dots,\nu^1(\sigma_1))[\{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\}, \beta_1] \in \Sigma_{\mathfrak{A}_1}$,
ahol a $\beta_1 : \{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\} \to A_1\{1,\dots,\nu(u_o)\}$
leképezés a következő módon van definiálva:
Legyen $\xi_o : \{1,\dots,\nu(u_o)\} \to \{1,\dots,\nu(u_o)\}$,
$\xi_1 : S_{u_1} \to \{1,\dots,|S_{u_1}|\}$.
Minden $t_1 \in S_{u_1}$ argumentumra $\beta_1(\xi_1(t_1)) = c_1 \xi_o(t_o)$ akkor és csak akkor, ha $\rho_1(t_1) = (t_o, t_1)$ és $\tau_1((t_o, t_1)) = c_1 t_o$.
(Tehát minden $t_1 \in S_{u_1}$ argumentumra $\beta_1(\xi_1(t_1)) = c_1 \xi_o(t_o)$ akkor és csak akkor, ha $\varphi_1(t_1) = c_1 t_o$.)

iii/ $\bar{\varphi}_1 = \beta_1$.

iv/ $\bar{\rho}_1 : \{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\} \to \bar{W}_1$; minden $\xi_1(t_1) \in \{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\}$ számra ha $\beta_1(\xi_1(t_1)) = c_1 \xi_o(t_o)$ $(c_1 \in A_1, t_o \in \{1,\dots,\nu(u_o)\}$, akkor $\bar{\rho}_1(\xi_1(t_1)) = (\xi_o(t_o), \xi_1(t_1))$.

v/ $\bar{\tau}_1 : \bar{W}_1 \to A_1\{1,\dots,\nu(u_o)\}$; minden $(\xi_o(t_o), \xi_1(t_1)) \in \bar{W}_1$ elemre ha $\beta_1(\xi_1(t_1)) = c_1 \xi_o(t_o)$ $(c_1 \in A_1, t_o \in \{1,\dots,\nu(u_o)\})$, akkor $\bar{\tau}_1((\xi_o(t_o), \xi_1(t_1))) = c_1 \xi_o(t_o)$.

Látható, hogy $(\gamma_o(\sigma_o), \bar{\sigma}_1) \in \bar{V}_1$ akkor és csak akkor, ha
$\sigma_o = u_o \in \Sigma_{\mathcal{L}}(0), \bar{\sigma}_1 \in \Sigma_{L}(1)$ alakja

$(b_1, u_o, \sigma_1(1,\dots,\nu^1(\sigma_1))[\{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\}, \bar{\varphi}_1], \bar{\xi}_1, \bar{w}_1, \bar{\tau}_1)$, és a $b_1u_o \to \sigma_1(1,\dots,\nu^1(\sigma_1))\ [\{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\}, \bar{\varphi}_1] \in \Sigma_{\mathcal{L}}(1)$ produkció generálja a $\bar{\sigma}_1$ produkciót.

A $\gamma_1 : \Sigma_{\mathcal{L}}(1) \to \Sigma_{\mathcal{C}}(1)$ leképezést a következő módon definiáljuk:

Legyen $\sigma_1 = (b_1, u_o, u_1[S_{u_1}, \varphi_1], \xi_1, w_1, \tau_1) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(1)$, ekkor $\mathfrak{A}_1$ és $\mathcal{C}$ konstrukciója alapján létezik egyetlen $b_1u_o \to \sigma_1(1,\dots,\nu^1(\sigma_1))\ [\{1,\dots,\nu^1(\sigma_1)\}, \beta_1] \in \Sigma_{\mathfrak{A}_1}$ produkció, amely egyetlen $\bar{\sigma}_1 \in \Sigma_{\mathcal{C}}(1)$ produkciót generál. $\gamma_1(\sigma_1)$ értéke definició szerint $\bar{\sigma}_1$.

$\Sigma_{\mathcal{C}}(1)$ definiciója alapján látható, hogy γ_1 ráképezés, tehát γ_1 bijektiv.

$\mathfrak{A}_1$ és $\Sigma_{\mathcal{C}}(1)$ konstrukciója alapján rutin munka ellenőrizni, hogy γ_o, γ_1 kielégitik az /1/ feltételt, és γ_1 kielégiti a /2/ feltételt.

Legyen $j \in \{2,\dots,k-1\}$ index tetszőleges. Feltehetjük, hogy a $\Sigma_{\mathcal{C}}(0)$, $\Sigma_{\mathcal{C}}(1), \dots, \Sigma_{\mathcal{C}}(j-1)$ halmazok és $\gamma_o, \gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}$ leképezések már definiálva vannak, és $\gamma_o, \dots, \gamma_{j-1}$ kielégitik az /1/ feltételt, és γ_j kielégiti a /2/ feltételt. Tudjuk, hogy

$(b_j \dots b_1, u_o, \sigma_j(1,\dots,\nu^j(\sigma_j))\ [\{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\}, \bar{\varphi}_j], \bar{\xi}_j, \bar{w}_j, \bar{\tau}_j) \in \Sigma_{\mathcal{C}}(j)$ akkor és csak akkor, ha i/-v/ teljesülnek.

i/ Létezik egy $(\sigma_o, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j) \in V_j$ elem ugy, hogy $\sigma_o = u_o$, σ_{j-1} alakja $(b_{j-1} \dots b_1, u_o, u_{j-1}[S_{u_{j-1}}, \varphi_{j-1}], \xi_{j-1}, w_{j-1}, \tau_{j-1})$, σ_j alakja $(b_j \dots b_1, u_o, u_j[S_{u_j}, \varphi_j], \xi_j, w_j, \tau_j)$. Létezik egy $\varepsilon_j : S_{u_j} \to A_j[W_{j-1}]_{j-1}$ leképezés amelyre teljesülnek a 3.1. definició 5.b pontjának i/-iv/ feltételei.

ii/ $\gamma_{j-1}(\sigma_{j-1}) = (b_{j-1}\dots b_1, u_o,$
$\sigma_{j-1}(1,\dots,\nu^{j-1}(\sigma_{j-1}))\ [\{1,\dots,\nu^{j-1}(\sigma_{j-1})\}, \bar{\varphi}_{j-1}], \bar{\xi}_{j-1}, \bar{W}_{j-1},$
$\bar{\tau}_{j-1}) \in \Sigma_{\underset{\sim}{L}}(j-1)$ és
$b_j\sigma_{j-1} \to \sigma_j(1,\dots,\nu^j(\sigma_j))\ [\{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\}, \beta_j] \in \Sigma_{\mathfrak{A}_j},$
ahol a $\beta_j : \{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\} \to A_j\{1,\dots,\nu^{j-1}(\sigma_{j-1})\}$ leképezés
a következő módon van definiálva:

Legyen $\xi_{j-1} : S_{u_{j-1}} \to \{1,\dots,|S_{u_{j-1}}|\}$, $\xi_j : S_{u_j} \to \{1,\dots,|S_{u_j}|\}$.
Minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra $\beta_j(t_j) = c_j \xi_{j-1}(t_{j-1})$ akkor és
csak akkor, ha $\varrho_j(t_j) = (t_o,\dots,t_{j-1},t_j)$ és
$\tau_j((t_o,\dots,t_{j-1},t_j)) = c_j\dots c_1 t_o$.
(Tehát minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra $\beta_j(\xi_j(t_j)) = c_j \xi_{j-1}(t_{j-1})$
akkor és csak akkor, ha $\varepsilon_j(t_j) = c_j t_{j-1}$.)

iii/ $\bar{W}_j = \{(\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{j-2}, \xi_{j-1}(t_{j-1}), \xi_j(t_j)) \mid \beta_j(\xi_j(t_j)) =$
$= c_j \xi_{j-1}(t_{j-1}),\ \bar{\varrho}_{j-1}(\xi_{j-1}(t_{j-1})) = (\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{j-2}, \xi_{j-1}(t_{j-1}))\} \cup$
$\cup \{(\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_\ell) \in \bar{W}_{j-1} \mid 1 \le \ell \le j-2\} \cup \{\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{j-1} \in \bar{W}_{j-1} \mid$
nincsen olyan $\bar{t}_j \in \{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\}, c_j \in A_j$, hogy $\beta_j(\bar{t}_j) =$
$= c_j \bar{t}_{j-1}\}$.

iv/ A $\bar{\varrho}_j : \{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\} \to \bar{W}_j$ leképezés kielégíti az alábbi
feltételt: minden $t_j \in S_{u_j}$ argumentumra ha
$\beta_j(\xi_j(t_j)) = c_j \xi_{j-1}(t_{j-1})$ és $\bar{\varrho}_{j-1}(\xi_{j-1}(t_{j-1})) =$
$= (\xi_o(t_o),\dots,\xi_{j-1}(t_{j-1})),$
akkor $(\xi_o(t_o),\dots,\xi_{j-1}(t_{j-1}), \xi_j(t_j)) \in \bar{W}_j$ és $\bar{\varrho}_j(\xi_j(t_j)) =$
$= (\xi_o(t_o),\dots,\xi_{j-1}(t_{j-1}), \xi_j(t_j))$.

v/ A $\bar{\tau}_j : \bar{W}_j \to A_j\dots A_1\{1,\dots,\nu(u_o)\}$ leképezésre teljesül, hogy
$\bar{\tau}_j|_{\bar{W}_j \cap \bar{W}_{j-1}} = \bar{\tau}_{j-1}|_{\bar{W}_j \cap \bar{W}_{j-1}}$ és ha
$(t_o,\dots,t_{j-2}, \xi_{j-1}(t_{j-1}), \xi_j(t_j)) \in \bar{W}_j, \beta_j(\xi_j(t_j)) = c_j \xi_{j-1}(t_{j-1}),$

és $\bar{\zeta}_{j-1}(\xi_{j-1}(t_{j-1})) = (\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{j-2},\xi_{j-1}(t_{j-1}))$, akkor

$\bar{\tau}_j((\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{j-2},\xi_{j-1}(t_{j-1}),\xi_j(t_j))) =$

$= c_j\bar{\tau}_{j-1}((\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_{j-2},\xi_{j-1}(t_{j-1})))$.

vi/ $\bar{\varphi}_j = \bar{\zeta}_j \circ \bar{\tau}_j$.

Látható, hogy $(\gamma_o(\sigma_o),\dots,\gamma_{j-1}(\sigma_{j-1}),\bar{\sigma}_j) \in \bar{V}_j$ akkor és csak akkor, ha i/-ii/ teljesülnek.

i/ $\sigma_i \in \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ $(i = 0,\dots,j-1)$, $(\gamma_o(\sigma_o),\dots,\gamma_{j-1}(\sigma_{j-1})) \in V_{j-1}$,

$\sigma_o = u_o$, σ_{j-1} alakja $(b_{j-1}\dots b_1,u_o,u_{j-1}[s_{u_{j-1}},\varphi_{j-1}],$ $\zeta_{j-1},w_{j-1},\tau_{j-1})$

ii/ Létezik egy $\sigma_j = (b_j\dots b_1,u_o,u_j[s_{u_j},\varphi_j],\zeta_j,w_j,\tau_j) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(j)$, ugy hogy $(\sigma_o,\dots,\sigma_{j-1},\sigma_j) \in V_j$, és létezik egy $\varepsilon_j: s_{u_j} \to A_j[w_{j-1}]_{j-1}$ leképezés, amelyre a 3.1. definició /5/.b pontjának i/-iv/ feltételei teljesülnek.

$\bar{\sigma}_j = (b_j\dots b_1,u_o,\sigma_j(1,\dots,\nu^j(\sigma_j))[\{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\},\bar{\varphi}_j],\bar{\zeta}_j,$ $\bar{w}_j,\bar{\tau}_j)$ kielégiti a $\Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ definiciójában szereplő ii/-v/ követelményeket.

A $\gamma_j: \Sigma_{\mathcal{L}}(j) \to \Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ leképezést a következő módon definiáljuk: Tekintsük az alábbi Γ_j halmazt.

$(\bar{\gamma}_j: \Sigma_{\mathcal{L}}(j) \to \Sigma_{\mathcal{L}}(j)) \in \Gamma_j$ akkor és csak akkor, ha az i/-ii/ feltételek teljesülnek.

i/ minden $\sigma_j \in \Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ produkcióra $\bar{\gamma}_j(\sigma_j) = \bar{\sigma}_j$ alakja $(b_j\dots b_1,u_o,\sigma_j(1,\dots,\nu^j(\sigma_j))[\{1,\dots,\nu^j(\sigma_j)\},\bar{\varphi}_j],\bar{\zeta}_j,\bar{w}_j,\bar{\tau}_j)$ és létezik egy $(\sigma_o,\dots,\sigma_{j-1},\sigma_j) \in V_j$ vektor ugy, hogy $\sigma_o = u_o$, σ_{j-1} alakja $(b_{j-1}\dots b_1,u_o,u_{j-1}[s_{u_{j-1}},\varphi_{j-1}],$ $\zeta_{j-1},w_{j-1},\tau_{j-1})$, σ_j alakja $(b_j\dots b_1,u_o,u_j[s_{u_j},\varphi_j],\zeta_j,w_j,\tau_j)$

ii/ létezik egy $\varepsilon_j : S_{u_j} \longrightarrow A_j[W_{j-1}]_{j-1}$ leképezés, amelyre a 3.1. definició /5/.b pontjának i/-iv/ feltételei teljesülnek, és $\bar{\sigma}_j$ kielégiti a $\Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ definiciójában szereplő ii/-v/ követelményeket.

Látható, hogy ha $\bar{\gamma}_j \in \Gamma_j$, akkor $\bar{\gamma}_j$ injektiv és $\bar{\gamma}_j$ kielégiti a /2/ feltételt $\mathfrak{A}_j$ és $\Sigma_{\mathcal{L}}(j)$ konstrukciója miatt. Ezt a tényt felhasználva kapjuk a $|\Gamma_j| = 1$ egyenlőséget. Legyen γ_j a Γ_j halmaz egyetlen eleme. Látható, hogy γ_j bijektiv, és $\gamma_o, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_j$ kielégitik az /1/ feltételt.

Legyen $j = k$. Feltehetjük, hogy $\Sigma_{\mathcal{L}}(0), \Sigma_{\mathcal{L}}(1), \ldots, \Sigma_{\mathcal{L}}(k-1)$ halmazok és $\gamma_o, \ldots, \gamma_{k-1}$ leképezések már definiálva vannak, és $\gamma_o, \ldots, \gamma_{k-1}$ kielégitik az /1/ feltételt, γ_{k-1} kielégiti a /2/ feltételt.

Tudjuk, hogy $(b_k \ldots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, \bar{W}_k, \bar{\tau}_k) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(k)$ akkor és csak akkor, ha i/-v/ teljesülnek.

i/ Létezik egy $(\sigma_o, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k) \in V_k$ elem, ahol $\sigma_o = u_o$, σ_{k-1} alakja $(b_{k-1} \ldots b_1, u_o, u_{k-1}[S_{u_{k-1}}, \varphi_{k-1}], \varsigma_{k-1}, W_{k-1}, \tau_{k-1})$, σ_k alakja $(b_k \ldots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, W_k, \tau_k)$. Létezik egy $\varepsilon_k : S_{u_k} \longrightarrow A_k[W_{k-1}]_{k-1}$ leképezés, amely kielégiti a 3.1. definició 5.b pontjának i/-iv/ követelményeit.

ii/ $\gamma_{k-1}(\sigma_{k-1}) = (b_{k-1} \ldots b_1, u_o, \sigma_{k-1}(1, \ldots, \nu^{k-1}(\sigma_{k-1}))[\{1, \ldots, \nu^{k-1}(\sigma_{k-1})\}, \bar{\varphi}_{k-1}], \bar{\varsigma}_{k-1}, \bar{W}_{k-1}, \bar{\tau}_{k-1}) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(k-1)$ és $b_k \sigma_{k-1} \rightarrow u_k[S_{u_k}, \beta_k] \in \Sigma_{\mathfrak{A}_k}$, ahol a $\beta_k : S_{u_k} \longrightarrow A_k\{1, \ldots, \nu^{k-1}(\sigma_{k-1})\}$ leképezés a következő módon van definiálva:

Legyen $\xi_{k-1} : S_{u_{k-1}} \longrightarrow \{1, \ldots, |S_{u_{k-1}}|\}$, $\xi_k : S_{u_k} \longrightarrow S_{u_k}$. Minden $t_k \in S_{u_k}$ argumentumra $\beta_k(t_k) = c_k \xi_{k-1}(t_{k-1})$ akkor és csak akkor, ha $\varsigma_k(t_k) = (t_o, \ldots, t_{k-1}, t_k)$ és

$\tau_k((t_o,\ldots,t_{k-1},t_k)) = c_k\ldots c_1 t_o$.

(Tehát minden $t_k \in S_{u_k}$ argumentumra $\beta_k(\xi_k(t_k)) =$
$= c_k\xi_{k-1}(t_{k-1})$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon_k(t_k) = c_k t_{k-1}$.)

iii/ $\bar{W}_k = \{(\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}),\xi_k(t_k)) | \beta_k(\xi_k(t_k)) =$
$= c_k\xi_{k-1}(t_{k-1}), \bar{\xi}_{k-1}(\xi_{k-1}(t_{k-1})) = (\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}))\} \cup$
$\cup \{(\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\bar{t}_{k-1}) \in W_{k-1} |$ nincsen olyan
$\bar{t}_k \in S_{u_k}$ argumentum, $c_k \in A_k$, hogy $\beta_k(t_k) = c_k\bar{t}_{k-1}\} \cup$
$\cup \{(\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{\ell-1},\bar{t}_\ell) \in W_{k-1} | 1 \leq \ell \leq k-2\}$.

iv/ $\bar{\xi}_k : S_{u_k} \rightarrow \bar{W}_k$ leképezés kielégiti a következő követelményt: minden $t_k \in S_{u_k}$ argumentumra ha $\beta_k(\xi_k(t_k)) =$
$= c_k\xi_{k-1}(t_{k-1})$ és
$\bar{\xi}_{k-1}(\xi_{k-1}(t_{k-1})) = (\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}))$ akkor
$(\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}),\xi_k(t_k)) \in W_k$ és $\bar{\xi}_k(\xi_k(t_k)) =$
$= (\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}),\xi_k(t_k))$.

v/ A $\bar{\tau}_k : \bar{W}_k \rightarrow (A_k\ldots A_2A_1 \cup \ldots \cup A_2A_1 \cup A_1)\{1,\ldots,\nu(u_o)\}$ leképezésre teljesül, hogy
$\bar{\tau}_k|_{\bar{W}_k \cap \bar{W}_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}|_{\bar{W}_k \cap \bar{W}_{k-1}}$, és ha
$(\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}),\xi_k(t_k)) \in \bar{W}_k$, $\beta_k(\xi_k(t_k)) =$
$= c_k\xi_{k-1}(t_{k-1})$ és $\bar{\xi}_{k-1}(\xi_{k-1}(t_{k-1})) = (\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}))$
akkor $\bar{\tau}_k((\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1}),\xi_k(t_k))) =$
$= c_k\tau_{k-1}((\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{k-2},\xi_{k-1}(t_{k-1})))$.

vi/ $\varphi_k = \bar{\xi}_k \circ \bar{\tau}_k$.

Látható, hogy $(\gamma_o(\sigma_o),\ldots,\gamma_{k-1}(\sigma_{k-1}),\bar{\sigma}_k) \in \bar{V}_k$, akkor és csak akkor, ha i/-ii/ teljesülnek.

i/ $\sigma_i \in \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ $(i = 0,\dots,k-1)$, $(\gamma_0(\sigma_0),\dots,\gamma_{k-1}(\sigma_{k-1})) \in V_{k-1}$, $\sigma_0 = u_0$, σ_{k-1} alakja $(b_{k-1}\dots b_1, u_0, u_{k-1}[S_{u_{k-1}}, \varphi_{k-1}], \varsigma_{k-1}, W_{k-1}, \tau_{k-1})$.

ii/ Létezik egy $\sigma_k = (b_k\dots b_1, u_0, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, W_k, \tau_k) \in \Sigma_{\mathcal{L}}(k)$ produkció, amelyre $(\sigma_0,\dots,\sigma_{k-1},\sigma_k) \in V_k$, és létezik egy $\varepsilon_k: S_{u_k} \longrightarrow A_k[W_{k-1}]_{k-1}$ leképezés, amely kielégiti a 3.1. definició /5/.b pontjának i/-iv/ feltételeit, és $\bar{\sigma}_k = (b_k\dots b_1, u_0, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \bar{\varsigma}_k, \bar{W}_k, \bar{\tau}_k)$ kielégiti a $\Sigma_{\mathcal{L}'}(k)$ definiciójában szereplő ii/-vi/ feltételeket.

A γ_k: $\Sigma_{\mathcal{L}}(k) \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}'}(k)$ leképezést a következő módon definiáljuk: Tekintsük az alábbi Γ_k halmazt.

$\bar{\gamma}_k$: $\Sigma_{\mathcal{L}}(k) \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}'}(k) \in \Gamma_k$ akkor és csak akkor, ha az i/-ii/ teljesülnek.

i/ minden $\sigma_k \in \Sigma_{\mathcal{L}}(k)$ produkcióra $\bar{\gamma}_k(\sigma_k) = \bar{\sigma}_k$ alakja $(b_k\dots b_1, u_0, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \bar{\varsigma}_k, \bar{W}_k, \bar{\tau}_k)$ és létezik egy $(\sigma_0,\dots,\sigma_{k-1},\sigma_k) \in V_k$ vektor, amelyre $\sigma_0 = u_0$, σ_{k-1} alakja $(b_{k-1}\dots b_1, u_0, u_{k-1}[S_{u_{k-1}}, \varphi_{k-1}], \varsigma_{k-1}, W_{k-1}, \tau_{k-1})$, σ_k alakja $(b_k\dots b_1, u_0, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varsigma_k, W_k, \tau_k)$

ii/ létezik egy $\varepsilon_k: S_{u_k} \longrightarrow A_k[W_{k-1}]_{k-1}$ leképezés, amelyre a 3.1. definició /5/.b pontjának i/-iv/ feltételei teljesülnek, és $\bar{\sigma}_k$ kielégiti a $\Sigma_{\mathcal{L}'}(k)$ definiciójában szereplő ii/-vi/ feltételeket.

$\mathfrak{A}_k$ és $\Sigma_{\mathcal{L}'}(k)$ definiciója alapján látszik, hogy ha $\bar{\gamma}_k \in \Gamma_k$, akkor $\bar{\gamma}_k$ kielégiti a /2/ feltételt. Ezt a tényt felhasználva látható, hogy $|\Gamma_k| = 1$.

Legyen γ_k a Γ_k halmaz egyetlen eleme. Látható, hogy γ_k szürjektiv. Felhasználva azt a tényt, hogy γ_k kielégiti a /2/ feltételt könnyen bizonyitható, hogy a $\gamma_0,\dots,\gamma_k$

leképezések kielégitik az /1/ feltételt.

A továbbiakban be fogjuk bizonyitani, hogy $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\overline{\mathcal{L}}}$.
A bizonyitásnál felhasználjuk, hogy minden $j \in \{0,\dots,k\}$ indexre a $\gamma_0,\dots,\gamma_j$ leképezések kielégitik az /1/ feltételt és a γ_j leképezés kielégiti a /2/ feltételt.

Tegyük fel, hogy a $K_0 = (e[\{e\}, \psi_0 : e \mapsto bp], \Theta^0, Z^0, \Omega)$ konfiguráció kezdő konfigurációja a $\mathcal{L}$ transzformátornak és valamely $K_1 = (q^1[S_{q^1}, \psi^1], \Theta^1, Z^1, \Omega^1)$ konfigurációra fennáll a $K_0 \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} K_1$ deriváció. Ekkor K_0 kezdő konfigurációja $\overline{\mathcal{L}}$ -nek is.
Be fogjuk bizonyitani, hogy létezik a $\overline{\mathcal{L}}$ transzformátornak $\overline{K}_1 = (q^1[S_{q^1}, \psi^1], \overline{\Theta}^1, \overline{Z}^1, \overline{\Omega}^1)$ konfigurációja és

$$(*) \quad \begin{array}{l} \alpha_0 : [Z^1]_0 \longrightarrow [\overline{Z}^1]_0 \\ \vdots \\ \alpha_k : [Z^1]_k \longrightarrow [\overline{Z}^1]_k \end{array}$$

bijektiv leképezések hogy α_0 és α_k identitás leképezések, és $K_0 \overset{*}{\underset{\overline{\mathcal{L}}}{\Longrightarrow}} \overline{K}_1$ teljesül, sőt

i/ minden $s_k \in S_{q^1}$ argumentumra $\Theta^1(s_k) = (s_0, s_1, \dots, s_k)$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\Theta}^1(\alpha_k(s_k)) =$
$= (\alpha_0(s_0), \alpha_1(s_1), \dots, \alpha_k(s_k))$ és

ii/ minden $(s_0, s_1, \dots, s_j) \in Z^1$ $(1 \leq j \leq k)$ elemre
$\Omega^1((s_0, s_1, \dots, s_j)) = \overline{\Omega}^1((\alpha_0(s_0), \alpha_1(s_1), \dots, \alpha_j(s_j)))$, és

iii/ $(s_0, s_1, \dots, s_j) \in Z^1$ akkor és csak akkor, ha
$(\alpha_0(s_0), \alpha_1(s_1), \dots, \alpha_j(s_j)) \in \overline{Z}^1$ $(1 \leq j \leq k)$, $(s_0, s_1, \dots, s_j) \in (N^*)^j$.

Forditva, ha $K_0 \overset{*}{\underset{\overline{\mathcal{L}}}{\Longrightarrow}} \overline{K}_1$ teljesül, akkor létezik K_1 konfigurációja $\mathcal{L}$-nek és $(*)$ bijektiv függvények, ugy hogy α_0, α_k identitás függvények és i/ ii/ iii/ teljesülnek.
Végül, ha K_1 vég konfiguráció, akkor $\overline{K}_1$ is vég konfiguráció

és forditva, ha $\bar{K}_1$ vég konfiguráció, akkor K_1 is vég konfiguráció, tehát $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\bar{\mathcal{L}}}$.

Először a fenti állitásnak az első részét fogjuk bebizonyitani, a második rész hasonlóan bizonyitható be. A $K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} K_1$ deriváció hossza szerinti teljes indukcióval bizonyitunk.

a./ A $K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} K_1$ deriváció hossza 0, $(K_o = K_1)$.

Triviális.

b./ Tegyük fel, hogy az állitás igaz a $K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} K_1$, $K_o \overset{*}{\underset{\bar{\mathcal{L}}}{\Longrightarrow}} \bar{K}_1$ derivációra és a $(*)$ függvényekre, sőt $K_1 \underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} K_2 = (q^2[S_{q^2}, \Psi^2], \Theta^2, Z^2, \Omega^2)$ teljesül.

A $\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}$ reláció definiciója alapján léteznek a $\mathcal{H}_i\colon [Z^1]_i \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ $(i = 0,\dots,k)$ leképezések, amelyekre teljesül, hogy minden $(s_o,s_1,\dots,s_j) \in Z^1$ $(1 \le j \le k)$ elemre ha $\Omega^1((s_o,s_1,\dots,s_j)) = b_j \dots b_1 u_o (1,\dots,\nu(u_o))\,[\{1,\dots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$ $(b_j \in A_j,\dots,b_1 \in A_1, u_o \in G_o$, $\vartheta_o\colon \{1,\dots,\nu(u_o)\} \longrightarrow T_{G_o}$ akkor $\mathcal{H}_o(s_o) = u_o$, $\mathcal{H}_i(s_i) = (b_i \dots b_1, u_o, u_i[S_{u_i}, \varphi_i], \varrho_i, W_i, \tau_i)$ $(i = 1,\dots,j)$, és $(\mathcal{H}_o(s_o),\dots,\mathcal{H}_j(s_j)) \in V_j$.

Tekintsük a $\bar{\mathcal{H}}_i\colon [\bar{Z}^1]_i \longrightarrow \Sigma_{\bar{\mathcal{L}}}(i)$ $(i = 0,\dots,k)$ leképezéseket, ahol minden $s_i \in [Z^1]_i$ argumentumra $\bar{\mathcal{H}}_i(\alpha_i(s_i)) = \gamma_i(\mathcal{H}_i(s_i))$ $(i \in \{1,\dots,k\})$.

Megjegyezzük, hogy értelmes a fenti definició, mert α_i és γ_i leképezések bijektivek.

Az indukciós feltevés alapján minden $(s_o,s_1,\dots,s_j) \in Z^1$ $(1 \le j \le k)$ elemre $\Omega^1((s_o,s_1,\dots,s_j)) = \bar{\Omega}^1((\alpha_o(s_o),\alpha_1(s_1),\dots,\alpha_j(s_j)))$. Mivel $\mathcal{H}_o = \bar{\mathcal{H}}_o$ és minden $s_i \in [Z^1]_i$ argumentumra a $\mathcal{H}_i(s_i)$ produkció első két komponense megegyezik a $\bar{\mathcal{H}}_i(\alpha_i(s_i))$ produkció első két komponensével, $(i = 1,\ldots,k)$, és minden $(\sigma_o,\sigma_1,\ldots,\sigma_j)\in V_j$ $(1\leq j\leq k)$ elemre $(\gamma_o(\sigma_o),\gamma_1(\sigma_1),\ldots,\gamma_j(\sigma_j))\in \bar{V}_j$, igy a $\bar{\mathcal{H}}_i$ $(i = 1,\ldots,k)$ leképezések kielégitik a 3.3. definició /1/ feltételét.

A $\bar{\mathcal{H}}_i$ leképezések egyértelmüen meghatároznak egy $\bar{K}_2 = (\bar{q}^2[S_{\bar{q}^2},\bar{\psi}^2],\ \bar{\theta}^2,\bar{z}^2,\bar{\Omega}^2)$ konfigurációját a $\mathcal{L}$ transzformátornak, amelyre a $\bar{K}_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} \bar{K}_2$ közvetlen átmenet teljesül.

Először bebizonyitjuk, hogy $q^2[S_{q^2},\psi^2] = \bar{q}^2[S_{\bar{q}^2},\bar{\psi}^2]$.

A $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{J}} K_2$ közvetlen átmenet alapján tudjuk, hogy $q^2 = q^1[S_{q^1},\delta]$, ahol $\delta: S_{q^1} \to T_{G_k}(N^*)$ leképezés kielégiti a következő formulát: minden $s_k\in S_{q^1}$ argumentumra ha $\mathcal{H}_k(s_k) = (b_k\ldots b_1,u_o,u_k[S_{u_k},\varphi_k],\varsigma_k,W_k,\tau_k)$ akkor $\delta(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$. Az indukciós feltevés és a $\bar{K}_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} \bar{K}_2$ közvetlen átmenet alapján nyerjük, hogy $\bar{q}^2 = q^1[S_{q^1},\bar{\delta}]$, ahol $\bar{\delta}: S_{q^1} \to T_{G_k}(N^*)$ leképezés kielégiti a következő formulát: minden $s_k\in S_{q^1}$ argumentumra ha $\mathcal{H}_k(s_k) = (b_k\ldots b_1,u_o,u_k[S_{u_k},\varphi_k],$ $\varsigma_k,W_k,\tau_k)$ és $\delta(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ akkor $\bar{\mathcal{H}}_k(\alpha_k(s_k)) = \bar{\mathcal{H}}_k(s_k) =$ $= \gamma_k(\mathcal{H}_k(s_k)) = (b_k\ldots b_1,u_o,u_k[S_{u_k},\varphi_k],\bar{\varsigma}_k,\bar{W}_k,\bar{\tau}_k)$ valamely $\bar{\varsigma}_k,\bar{\tau}_k$ leképezésekre, $\bar{W}_k$ halmazra, és $\bar{\delta}(s_k) = \omega_{s_k}(u_k) = \delta(s_k)$, tehát $q^2 = \bar{q}^2$.

Ismét a $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{J}} K_2$ és $\bar{K}_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} \bar{K}_2$ átmenetek alapján kapjuk, hogy a ψ^2 és $\bar{\psi}^2$: $S_{q^2} \to A_k\ldots A_1 T_{G_o}$ leképezések kielégitik a következő formulákat:

Legyen $\bar{s}_k\in S_{q^2}$ argumentum tetszőleges, és tekintsük az egyértelmü $\bar{s}_k = s_k t_k$ felbontást, ahol $s_k\in S_{q^1}$, $\delta(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$ valamely $u_k\in P_{G_k}$ félfára, $t_k\in S_{u_k}$ és $\mathcal{H}_k(s_k)$ alakja

$(b_k \ldots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \varrho_k, W_k, \tau_k)$. A fentiek teljesülése esetén ha $\varphi_k(t_k) = c_k \ldots c_1 t_o$, $c_k \ldots c_1 \in A_k \ldots A_1$, $t_o \in \{1, \ldots$ $\ldots, \nu(u_o)\})$ és $\psi^1(s_k) = u_o(1, \ldots, \nu(u_o))[\{1, \ldots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ $(u_o \in G_o$; $\vartheta_o : \{1, \ldots, \nu(u_o)\} \longrightarrow T_{G_o})$, akkor $\psi^2(s_k t_k) = c_k \ldots c_1 \vartheta_o(t_o)$. Tudjuk, hogy $\bar{s}_k$ argumentumnak ugyanaz a felbontása van, ha a $\bar{\delta} = \delta$ és $\bar{\mathcal{K}}_k$ leképezéseket használjuk, mert $\bar{\mathcal{K}}_k(s_k)$ alakja $(b_k \ldots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \bar{\varrho}_k, \bar{W}_k, \bar{\tau}_k)$. Mivel $\varphi_k(t_k) = c_k \ldots c_1 t_o$ és $\psi^1(s_k) = u_o(1, \ldots, \nu(u_o))[\{1, \ldots$ $\ldots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ igy $\bar{\psi}^2(s_k t_k) = c_k \ldots c_1 \vartheta_o(t_o)$.

Tehát azt kaptuk, hogy $\psi^2 = \bar{\psi}^2$.

$$Z^2 = \{(s_o t_o, \ldots, s_j t_j) \mid (s_o, \ldots, s_\ell) \in Z^1,\ j \leq \ell \leq k,\ \mathcal{K}_\ell(s_\ell) = (b_\ell \ldots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell}, \varphi_\ell], \varrho_\ell, W_\ell, \tau_\ell) \text{ és } (t_o, t_1, \ldots, t_j) \in W_\ell\}.$$

$$\bar{Z}^2 = \{(\alpha_o(s_o)\bar{t}_o, \ldots, \alpha_j(s_j)\bar{t}_j) \mid (\alpha_o(s_o), \ldots, \alpha_\ell(s_\ell)) \in \bar{Z}^1,\ j \leq \ell \leq k, \text{ és } (\bar{t}_o, \ldots, \bar{t}_j) \text{ eleme } \bar{\mathcal{K}}_\ell(\alpha_\ell(s_\ell)) \text{ ötödik komponensének.}\}$$

Most definiáljuk az $\alpha_i^2 : [Z^2]_i \longrightarrow [\bar{Z}^2]_i$ $(i = 0, \ldots, k)$ leképezéseket. Legyen α_o^2 és α_k^2 az identitás függvény, és minden $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ számra, minden $s_i t_i \in [Z^2]_i$ argumentumra $\alpha_i^2(s_i t_i) = \alpha_i(s_i)\,\xi_i(t_i)$, ahol $\mathcal{K}_i(s_i) = (b_i \ldots b_1, u_o, u_i[S_{u_i}, \varphi_i], \varrho_i, W_i, \tau_i)$ és $\xi_i : S_{u_i} \longrightarrow \{1, \ldots, |S_{u_i}|\}$. Meg kell mutatni, hogy α_i^2 $(i = 1, \ldots, k-1)$ bijektiv leképezés. Legyen $s_i t_i = \bar{s}_i \bar{t}_i (\in [Z^2]_i)$ és tegyük fel, hogy $s_i \neq \bar{s}_i$. Ekkor s_i, $\bar{s}_i$ közül az egyik valódi kezdőszelete a másiknak, amely ellentmond a konfiguráció definiciójának, tehát α_i^2 definiciója értelmes. Tegyük fel, hogy $\alpha_i^2(s_i t_i) = \alpha_i^2(\bar{s}_i \bar{t}_i)$, ahol $s_i \neq \bar{s}_i$ vagy $t_i \neq \bar{t}_i$. Ha $s_i \neq \bar{s}_i$ akkor $\alpha_i(s_i) \neq \alpha_i(\bar{s}_i)$ és mivel ξ_i értékkészlete N, tehát $\alpha_i(s_i)\xi_i(t_i) \neq \alpha_i(\bar{s}_i)\xi_i(\bar{t}_i)$.

Ha $s_i = \bar{s}_i$ és $t_i \neq \bar{t}_i$ akkor $\alpha_i^2(s_i t_i) = \alpha_i(s_i)\xi_i(t_i) \neq \alpha_i(s_i)\xi_i(\bar{t}_i) = \alpha^2(\bar{s}_i\bar{t}_i)$ mivel $\xi_i(t_i) \neq \xi_i(\bar{t}_i)$, tehát azt kaptuk, hogy α_i^2 injektiv. Legyen $\bar{s}_i\bar{t}_i \in [Z^2]_i$, ekkor létezik $(\bar{s}_o\bar{t}_o,\dots,\bar{s}_i\bar{t}_i,\dots,\bar{s}_j\bar{t}_j) \in Z^2$ elem, ahol $i \leq j \leq k$. A Z^2 halmaz konstrukciója alapján $(\bar{s}_o,\dots,\bar{s}_i,\dots,\bar{s}_j,\dots,\bar{s}_\ell) \in Z^1$ valamely $\bar{s}_{j+1},\dots,\bar{s}_\ell \in N^*$ szavakra, $j \leq \ell \leq k$ számra, és

$$\bar{\mathcal{K}}_\ell(\bar{s}_\ell) = \begin{cases} (b_\ell\dots b_1, \sigma_o, \sigma_\ell(1,\dots,\nu^\ell(\sigma_\ell))[\{1,\dots,\nu^\ell(\sigma_\ell)\}, \bar{\varphi}_\ell], \\ \bar{\delta}_\ell, \bar{W}_\ell, \bar{\tau}_\ell) \text{ ha } \ell \leq k. \\ (b_k\dots b_1, \sigma_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \delta_k, W_k, \tau_k) \text{ ha } \ell = k, \end{cases}$$

és $(\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_i,\dots,\bar{t}_j) \in W_\ell$. Az indukciós feltevés alapján létezik egy $(s_o,\dots,s_i,\dots,s_j,\dots,s_\ell) \in Z^1$ elem, amelyre $(\alpha_o(s_o),\dots\alpha_i(s_i),\dots,\alpha_j(s_j),\dots\alpha_\ell(s_\ell)) = (\bar{s}_o,\dots,\bar{s}_i,\dots$ $\dots,\bar{s}_j,\dots,\bar{s}_\ell)$. Mivel $\bar{\mathcal{K}}_\ell(s_\ell) = \gamma_\ell(\mathcal{H}_\ell(s_\ell))$ definició szerint, alkalmazzuk a /2/ feltétel ii/ pontját, amely kimondja, hogy $(\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_i,\dots,\bar{t}_j) \in \bar{W}_\ell$ akkor és csak akkor, ha $(\xi_o^{-1}(\bar{t}_o),\dots,\xi_i^{-1}(\bar{t}_i),\dots,\xi_j^{-1}(\bar{t}_j)) \in W_\ell$, ahol $\xi_o,\dots,\xi_j$ leképezések a feltételben vannak definiálva.

Tehát $(s_o\xi_o^{-1}(\bar{t}_o),\dots,s_i\xi_i^{-1}(\bar{t}_i),\dots,s_j\xi_j^{-1}(\bar{t}_j)) \in Z^2$, és $\alpha_i^2(s_i\xi_i^{-1}(\bar{t}_i)) = \alpha_i(s_i)\xi_i(\xi_i^{-1}(\bar{t}_i)) = \alpha_i(s_i)\bar{t}_i = \bar{s}_i\bar{t}_i$.

Tehát α_i^2 szürjektiv $(i = 1,\dots,k-1)$.

Ezzel beláttuk, hogy α_i^2 bijektiv $(i = 0,\dots,k)$.

Legyen $\bar{s}_k \in S_{q^2}$ tetszőleges, és tekintsük az $\bar{s}_k = s_k t_k$ egyértelmü felbontást, ahol $s_k \in S_{q^1}$, $\mathcal{K}_k(s_k) = (b_k\dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \delta_k, W_k, \tau_k)$, $\delta(s_k) = \omega_{s_k}(u_k)$, $t_k \in S_{u_k}$. Ebben az esetben $\bar{\mathcal{K}}_k(s_k) = \gamma_k(\mathcal{H}_k(s_k)) = (b_k\dots b_1, u_o, u_k[S_{u_k}, \varphi_k], \bar{\delta}_k, \bar{W}_k, \bar{\tau}_k)$.

A /2/ feltétel iv/ pontját alkalmazva $\varrho_k(t_k) =$
$= (t_o, t_1, \dots, t_k)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\varrho}_k(t_k) =$
$= (\xi_o(t_o), \xi_1(t_1), \dots, \xi_k(t_k))$ ahol $\xi_o, \dots, \xi_k$ leképezések a feltételben vannak definiálva.

Az indukciós feltevés szerint $\Theta^1(s_k) = (s_o, s_1, \dots, s_k)$ akkor és csak akkor, ha $\bar{\Theta}^1(s_k) = (\alpha_o(s_o), \alpha_1(s_1), \dots, \alpha_k(s_k))$.
A $\Theta^2, \bar{\Theta}^2$ leképezések definiciója alapján nyerjük, hogy
$\Theta^2(\bar{s}_k) = (s_o t_o, s_1 t_1, \dots, s_k t_k)$ akkor és csak akkor, ha
$\bar{\Theta}^2(\bar{s}_k) = (\alpha_o(s_o)\xi_o(t_o), \alpha_1(s_1)\xi_1(t_1), \dots \alpha_k(s_k)\xi_k(t_k)) =$
$= (\alpha_o^2(s_o t_o), \alpha_1^2(s_1 t_1), \dots, \alpha_k^2(s_k t_k))$. Ezzel beláttuk, hogy az $\alpha_o^2, \dots, \alpha_k^2$ leképezések kielégitik az i/ feltételt.

Legyen $(s_o t_o, \dots, s_j t_j) \in Z^2$ vektor tetszőleges, ahol $1 \leq j \leq k$, $(s_o, \dots, s_j, \dots, s_\ell) \in Z^1$ valamely $s_{j+1}, \dots$
$\dots, s_\ell \in N^*$ szavakra, $j \leq \ell \leq k$ számra és $\mathcal{K}_\ell(s_\ell) =$
$= (b_\ell \dots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell}, \varphi_\ell], \varrho_\ell, W_\ell, \tau_\ell)$ és $(t_o, \dots, t_j) \in W_\ell$.
Tudjuk, hogy $\Omega^1((s_o, \dots, s_j, \dots, s_\ell)) =$
$= b_\ell \dots b_1 u_o(1, \dots, \nu(u_o))[\{1, \dots, \nu(u_o)\}, \vartheta_o]$ valamely
$\vartheta_o : \{1, \dots, \nu(u_o)\} \to T_{G_o}$ leképezésre, és $\tau_\ell((t_o, \dots, t_j)) =$
$= c_j \dots c_1 t_o$ valamely $c_j \in A_j, \dots, c_1 \in A_1$ állapotokra és
$t_o \in \{1, \dots, \nu(u_o)\}$ argumentumra, eképpen
$\Omega^2((s_o t_o, \dots, s_j t_j)) = c_j \dots c_1 \vartheta_o(t_o)$.
Az indukciós feltevés alapján $(\alpha_o(s_o), \dots \alpha_j(s_j), \dots, \alpha_\ell(s_\ell)) \in$
$\in \bar{Z}^1$ és $\bar{\mathcal{K}}_\ell(\alpha_\ell(s_\ell)) = \gamma_\ell(\mathcal{K}_\ell(s_\ell)) =$

$$= \begin{cases} (b_\ell \dots b_1, u_o, u_\ell[S_{u_\ell}, \bar{\varphi}_\ell], \bar{\varrho}_\ell, \bar{W}_\ell, \bar{\tau}_\ell) \text{ ha } \ell = k \\ (b_\ell \dots b_1, u_o, \mathcal{K}_\ell(s_\ell)(1, \dots, \nu^\ell(\mathcal{K}_\ell(s_\ell))[\{1, \dots, \nu^\ell(\mathcal{K}_\ell(s_\ell))\}, \\ \bar{\varphi}_\ell], \bar{\varrho}_\ell, \bar{W}_\ell, \bar{\tau}_\ell) \text{ ha } 1 < \ell < k. \end{cases}$$

A γ_ℓ leképezés kielégiti a /2/ feltétel v/ pontját, tehát

$\tau_\ell((t_o,\dots,t_j)) = c_j\dots c_1 t_o$ akkor és csak akkor, ha
$\bar{\tau}_\ell((\xi_o(t_o),\dots,\xi_j(t_j))) = c_j\dots c_1\xi_o(t_o)$, ahol $\xi_o,\dots,\xi_j$
leképezések a feltételben vannak definiálva.
Tehát $\bar{\tau}_\ell((\xi_o(t_o),\dots,\xi_j(t_j))) = c_j\dots c_1\xi_o(t_o)$ teljesül.
Az indukciós feltevés alapján $\bar{\Omega}^1((\alpha_o(s_o),\dots,\alpha_j(s_j),\dots$
$\dots,\alpha_\ell(s_\ell))) = b_\ell\dots b_1 u_o(1,\dots,\nu(u_o))[\{1,\dots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$.
$\bar{\Omega}^2$ és α_i^2 $(i = o,\dots,k)$ leképezések definiciója alapján
$\bar{\Omega}^2((\alpha_o(s_o)\xi_o(t_o),\dots,\alpha_j(s_j)\xi_j(t_j))) = \bar{\Omega}^2((\alpha_o^2(s_o t_o),\dots$
$\dots\alpha_j^2(s_j t_j))) = c_j\dots c_1\vartheta_o(t_o)$.
Bebizonyitottuk, hogy az $\alpha_o^2,\dots,\alpha_k^2$ leképezések kielégitik a ii/ feltételt.

Belátjuk, hogy az $\alpha_o^2,\dots,\alpha_k^2$ leképezések kielégitik a iii/ feltételt. Legyen $(s_o t_o,\dots,s_j t_j)\in Z^2$ tetszőleges, ahol $1\le j\le k$ és $(s_o,\dots,s_j,\dots,s_\ell)\in Z^1$ valamely $s_{j+1},\dots,s_\ell\in N^*$ szavakra, $j\le \ell\le k$ számra, $(t_o,\dots,t_j)$ vektor eleme $\mathcal{H}_\ell(s_\ell)$ ötödik komponensének. Tudjuk, hogy $\bar{\mathcal{H}}_\ell(\alpha_\ell(s_\ell)) = \gamma_\ell(\mathcal{H}_\ell(s_\ell))$. A γ_ℓ leképezés kielégiti a /2/ feltételt, tehát a $(\xi_o(t_o),\dots$
$\dots,\xi_j(t_j))$ vektor eleme $\bar{\mathcal{H}}_\ell(\alpha_\ell(s_\ell))$ ötödik komponensének, ahol $\xi_o,\dots,\xi_j$ leképezések a feltételben vannak definiálva.
Tehát az indukciós feltevés és $\bar{Z}^2$ definiciója alapján
$(\alpha_o(s_o)\xi_o(t_o),\dots,\alpha_j(s_j)\xi_j(t_j))\in\bar{Z}^2$.
Forditva, legyen $(v_o,\dots,v_j)\in Z^2$ tetszőleges. A Z^2 halmaz konstrukciója alapján létezik két vektor,
$(\bar{s}_o,\dots,\bar{s}_j,\dots,\bar{s}_\ell)\in\bar{Z}^1$, $(1\le j\le \ell\le k)$ és $(\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_j)\in$
$\in(N^*)^j$, amelyekre teljesülnek a $v_i = \bar{s}_i\bar{t}_i$ $(i = o,\dots,j)$ egyenlőségek és $(\bar{t}_o,\dots,\bar{t}_j)$ eleme $\bar{\mathcal{H}}_\ell(\bar{s}_\ell)$ ötödik komponensének.

Az indukciós feltevés alapján $(\alpha_o^{-1}(\bar{s}_o),\ldots,\alpha_j^{-1}(\bar{s}_j),\ldots$
$\ldots,\alpha_\ell^{-1}(\bar{s}_\ell))\in Z^1$. Tudjuk, hogy $\bar{\mathcal{H}}_\ell(\bar{s}_\ell) = \gamma_\ell(\mathcal{H}_\ell(\alpha_\ell^{-1}(\bar{s}_\ell)))$.
A γ_ℓ leképezés kielégiti a /2/ feltétel ii/ pontját, tehát
$(\xi_o^{-1}(t_o),\ldots,\xi_j^{-1}(t_j))$ eleme $\mathcal{H}_\ell(\alpha_\ell^{-1}(\bar{s}_\ell))$ ötödik komponensének,
ahol a $\xi_o,\ldots,\xi_j$ leképezések a feltételben vannak definiálva.
Tehát $(\alpha_o^{-1}(\bar{s}_o)\xi_o^{-1}(\bar{t}_o),\ldots,\alpha_j^{-1}(\bar{s}_j)\xi_j^{-1}(\bar{t}_j))\in Z^2$, és
$\alpha_i^2(\alpha_i^{-1}(\bar{s}_i)\xi_i^{-1}(\bar{t}_i)) = \bar{s}_i\bar{t}_i \quad (i = 0,\ldots,j)$.
Az állitás első részét bebizonyitottuk.

Az állitás második részét a $K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} K_1$ átmenet hossza szerinti teljes indukcióval bizonyitjuk.

a./ A $K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} \bar{K}_1$ derivåció hossza nulla, azaz $\bar{K}_1 = K_o$.
Triviális.

b./ Tegyük fel, hogy az állitás igaz a $K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} \bar{K}_1$,
$K_o \overset{*}{\underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} K_1$ derivációkra és a $(*)$ függvényekre,
és a $\bar{K}_1 \underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \bar{K}_2$ közvetlen átmenet teljesül.

A $\underset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}$ reláció definiciója szerint léteznek a
$\bar{\mathcal{H}}_i:[\bar{Z}^1]\to \Sigma_{\mathcal{L}}(i) \quad (i = 0,\ldots,k)$ leképezések, amelyek kielégitik az alábbi formulát: minden $(\bar{s}_o,\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_j)\in Z^1 \quad (1\le j\le k)$
elemre ha $\mathfrak{R}^1((\bar{s}_o,\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_j)) = b_j\ldots b_1 u_o(1,\ldots,\nu(u_o))[\{1,\ldots$
$\ldots,\nu(u_o)\},\vartheta_o]$ $(b_j\in A_j,\ldots,b_1\in A_1,\ u_o\in G_o,\quad \vartheta_o:\{1,\ldots,\nu(u_o)\}\to$
T_{G_o}, akkor $\bar{\mathcal{H}}_o(s_o) = u_o$, minden $i\in\{1,\ldots,j\}$ számra $\bar{\mathcal{H}}_i(s_i)$
alakja

$$\begin{cases} (b_i\ldots b_1,u_o,\sigma_i(1,\ldots,\nu^i(\sigma_i))[\{1,\ldots,\nu^i(\sigma_i)\},\bar{\varphi}_i],\bar{\varsigma}_i,\bar{w}_i,\bar{\tau}_i) \\ \qquad \text{ha } 1\le i\le k-1, \\ (b_k\ldots b_1,u_o,u_k[S_{u_k},\varphi_k],\varsigma_k,w_k,\tau_k) \quad \text{ha } i = k, \end{cases}$$

és $(\bar{\mathcal{H}}_o(\bar{s}_o),\ldots,\mathcal{H}_j(\bar{s}_j))\in\bar{V}_j$.

Tekintsük a $\mathcal{H}_i : [Z^1]_i \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{L}}(i)$ $(i = 0,\dots,k-1)$ leképezéseket, ahol minden $s_i \in [Z^1]_i$ argumentumra $\mathcal{H}_i(s_i) = \gamma_i^{-1}(\bar{\mathcal{H}}_i(\alpha_i(s_i)))$. $\mathcal{H}_i$ $(i = 0,\dots,k-1)$ definiciója értelmes, mert α_i, γ_i leképezések bijektivek. A 3.2 definiciónak megfelelően minden $\bar{s}_k \in [Z^1]_k$ elemre $\bar{\Theta}^1(\bar{s}_k)$ az egyetlen olyan eleme a $\bar{Z}^1$ halmaznak, amely alakja $(\bar{s}_o,\dots,\bar{s}_{k-1},\bar{s}_k)$ valamely $\bar{s}_o,\dots,\bar{s}_{k-1} \in N^*$ szavakra.

Tudjuk, hogy $(\mathcal{H}_o(\bar{s}_o),\dots,\mathcal{H}_{k-1}(\bar{s}_{k-1}),\bar{\mathcal{H}}_k(\bar{s}_k)) \in \bar{V}_k$. A $\gamma_o,\dots,\gamma_{k-1},\gamma_k$ leképezések kielégitik az /1/ feltételt, tehát létezik egyetlen $\sigma_k \in \Sigma_{\mathcal{L}}(k)$ produkció, amelyre $\gamma_k(\sigma_k) = \bar{\mathcal{H}}_k(\bar{s}_k)$ és $(\gamma_o^{-1}(\mathcal{H}_o(s_o)),\dots,\gamma_{k-1}^{-1}(\mathcal{H}_{k-1}(s_{k-1}))\ \sigma_k) \in V_k$. Legyen $\mathcal{H}_k(\bar{s}_k) = \sigma_k$.

Az indukciós feltevés alapján minden $(s_o,s_1,\dots,s_j) \in Z^1$ $(1 \leq j \leq k)$ vektorra $\Omega^1((s_o,s_1,\dots,s_j)) = \bar{\Omega}^1((\alpha_o(s_o),\alpha_1(s_1),\dots,\alpha_j(s_j)))$. Mivel $\mathcal{H}_o = \bar{\mathcal{H}}_o$ és minden $s_i \in [Z^1]_i$ elemre $\mathcal{H}_i(s_i)$ első két komponense megegyezik $\bar{\mathcal{H}}_i(\alpha_i(s_i))$ első két komponensével, $(i = 1,\dots,k)$, és minden $(s_o,s_1,\dots,s_j) \in Z^1$ $(1 \leq j \leq k)$ elemre $(\mathcal{H}_o(s_o),\mathcal{H}_1(s_1),\dots,\mathcal{H}_j(s_j)) \in V_j$, következik, hogy a $\mathcal{H}_i$ $(i = 0,1,\dots,k)$ leképezések kielégitik a 3.3 definició /1/ feltételét.

A $\mathcal{H}_i$ $(i = 0,1,\dots,k)$ leképezések egyértelmüen meghatároznak egy K_2 konfigurációt, amelyre $K_1 \overset{}{\underset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} K_2$ átmenet teljesül. Ettől kezdve az állitás második részének bizonyitása hasonló az első rész bizonyitásához. A tétel bizonyitása teljes. $\square$

A következőkben a fenti eredményeket, fogalmakat egy példán keresztül szemléltetjük.

<u>Példa.</u> Tekintsük az alábbi két felszálló fatranszformátort:

$\mathfrak{A}_1 = (G_o, A_1, G_1, A_1', \Sigma_{\mathfrak{A}_1})$, ahol

$G_o = G_o^2 \cup G_o^o,\ G_o^2 = \{g_o\},\ G_o^o = \{x_o\},$

$G_1 = G_1^2 \cup G_1^o,\ G_1^2 = \{g_1\},\ G_1^o = \{x_1, y_1\}$

$A_1 = \{a_1, b_1, c_1\},\ A_1' = \{a_1\},$

$$\Sigma_{\mathfrak{A}_1} = \{b_1x_o \to y_1,\ b_1x_o \to x_1,\ a_1g_o \to g_1(1,2)[\{1,2\}, \varphi_{11}: 1 \mapsto b_1 1,$$
$$\varphi_{11}: 2 \mapsto b_1 2],$$
$$a_1g_o \to g_1(1,2)[\{1,2\}, \varphi_{12}: 1 \mapsto b_1 1, \varphi_{11}: 2 \mapsto c_1 2]\}.$$

$$\tau_{\mathfrak{A}_1} = \{(g_o(x_o, x_o), g_1(y_1, y_1)),\ (g_o(x_o, x_o), g_1(x_1, x_1)),$$
$$(g_o(x_o, x_o), g_1(x_1, y_1)),\ (g_o(x_o, x_o), g_1(y_1, x_1))\}.$$

$\mathfrak{A}_2 = (G_1, A_2, G_2, A_2', \Sigma_{\mathfrak{A}_2})$, ahol

$G_2 = G_2^2 \cup G_2^o,\ G_2^2 = \{g_2\},\ G_2^o = \{x_2, y_2, z_2\},$

$A_2 = \{a_2, b_2\},\ A_2' = \{a_2\},$

$$\Sigma_{\mathfrak{A}_2} = \{a_2g_1 \to g_2(1,2)[\{1,2\}, \varphi_2: 1 \mapsto b_2 1, \varphi_2: 2 \mapsto b_2 1],$$
$$b_2x_1 \to y_2, b_2x_1 \to z_2,\ b_2y_1 \to x_2\},$$

$$\tau_{\mathfrak{A}_1} \circ \tau_{\mathfrak{A}_2} = \{(g_o(x_o, x_o), g_2(x_2, x_2)),\ (g_o(x_o, x_o), g_2(y_2, y_2)),$$
$$(g_o(x_o, x_o), g_2(y_2, z2)),\ (g_o(x_o, x_o), g_2(z_2, y_2)),$$
$$(g_o(x_o, x_o), g_2(z_2, z_2))\}.$$

A 3.5. tételben szereplő konstrukció szerint az $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ transzformátorokhoz megkonstruáljuk a $\mathfrak{B}$ 2-szinkronizált felszálló fatranszformátort.

$\mathcal{L} = (G_o, G_1, A_1, A_2, A_1', A_2', \Sigma_{\mathcal{L}}, V)$, ahol

$\Sigma_{\mathcal{L}}(0) = V_o = G_o$,

$\Sigma_{\mathcal{L}}(1) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$, ahol $\sigma_1 = (b_1, x_o, y_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$,

$\sigma_2 = (b_1, x_o, x_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$, $\sigma_3 = (a_1, g_o, g_1(1,2)[\{1,2\}, \varphi_3: 1 \mapsto b_1 1;$

$\varphi_3: 2 \mapsto b_1 2], \varrho_3: 1 \mapsto (1,1), \varrho_3: 2 \mapsto (2,2), \{(1,1), (2,2)\}$,

$\tau_3: (1,1) \mapsto b_1 1, \tau_3: (2,2) \mapsto b_1 2)$,

$\sigma_4 = (a_1, g_o, g_1(1,2)[\{1,2\}, \varphi_4: 1 \mapsto b_1 1, \varphi_4: 2 \mapsto c_1 2], \varrho_4: 1 \mapsto (1,1),$

$\varrho_4: 2 \mapsto (2,2), \{(1,1), (2,2)\}, \tau_4: (1,1) \mapsto b_1 1; \tau_4: (2,2) \mapsto c_1 2)$.

$V_1 = \{(x_o, \sigma_1), (x_o, \sigma_2), (g_o, \sigma_3), (g_o, \sigma_4)\}$,

$\Sigma_{\mathcal{L}}(2) = \{\sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9\}$, ahol $\sigma_5 = (b_2 b_1, x_o, x_2, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$,

$\sigma_6 = (b_2 b_1, x_o, y_2, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$, $\sigma_7 = (b_2 b_1, x_o, z_2, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$,

$\sigma_8 = (a_2 a_1, g_o, g_2(1,2)[\{1,2\}, \varphi_8: 1 \mapsto b_2 b_1 1, \varphi_8: 2 \mapsto b_2 b_1 1]$,

$\varrho_8: 1 \mapsto (1,1,1); \varrho_8: 2 \mapsto (1,1,2), \{(1,1,1), (1,1,2), (2,2)\}$,

$\tau_8: (1,1,1) \mapsto b_2 b_1 1; \tau_8: (1,1,2) \mapsto b_2 b_1 1; \tau_8: (2,2) \mapsto b_2 1)$,

$\sigma_9 = (a_2 a_1, g_o, g_2(1,2)[\{1,2\}, \varphi_9: 1 \mapsto b_2 b_1 1; \varphi_9: 2 \mapsto b_2 b_1 1]$,

$\varrho_9: 1 \mapsto (1,1,1); \varrho_9: 2 \mapsto (1,1,2), \{(1,1,1), (1,1,2), (2,2)\}$,

$\tau_9: (1,1,1) \mapsto b_2 b_1 1; \tau_9: (1,1,2) \mapsto b_2 b_1 1; \tau_9: (2,2) \mapsto c_1 1)$.

$V_2 = \{(x_o, \sigma_1, \sigma_5), (x_o, \sigma_2, \sigma_6), (x_o, \sigma_2, \sigma_7), (g_o, \sigma_3, \sigma_8), (g_o, \sigma_4, \sigma_9)\}$.

Tekintsük a $\mathcal{L}$ transzformátor $K_o, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ konfigurációit, ahol K_o kezdő, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 vég konfiguráció.

$K_o = (a_2 a_1 g_o(x_o, x_o), \Theta_o: e \mapsto (e,e,e), \{(e,e,e)\}, \Omega_o: (e,e,e) \mapsto$

$a_2 a_1 g_o(x_o, x_o))$,

$K_1 = (g_2(b_2 b_1 x_o, b_2 b_1 x_o), \Theta_1: 1 \mapsto (1,1,1); \Theta_1: 2 \mapsto (1,1,2),$

$\{(1,1,1), (1,1,2), (2,2)\}, \Omega_1: (1,1,1) \mapsto b_2 b_1 x_o;$

$\Omega_1: (1,1,2) \mapsto b_2 b_1 x_o; \Omega_1: (2,2) \mapsto b_1 x_o)$,

$K_2 = (g_2(x_2, x_2), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$,

$K_3 = (g_2(y_2, y_2), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$,

$K_4 = (g_2(y_2, z_2), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$,

$K_5 = (g_2(z_2,y_2),\emptyset,\emptyset,\emptyset$,

$K_6 = (g_2(z_2,z_2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)$.

A K_o konfigurációból kiinduló, vég konfigurációban végződő összes átmenetek az alábbiak:

$K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_2$,

$K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_3$,

$K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_4$,

$K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_5$,

$K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_6$,

A $K_o \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_1$ átmenetet az alábbi leképezések határozzák meg:

$\mathcal{K}_o:\{e\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(0)$; $\mathcal{K}_o(e) = g_o$,

$\mathcal{K}_1:\{e\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(1)$; $\mathcal{K}_1(e) = \sigma_3$,

$\mathcal{K}_2:\{e\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(2)$; $\mathcal{K}_2(e) = \sigma_8$.

A $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_2$ átmenetet az alábbi leképezések határozzák meg:

$\mathcal{K}_o:\{1,2\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(0)$; $\mathcal{K}_o(1) = x_o$; $\mathcal{K}_o(2) = x_o$,

$\mathcal{K}_1:\{1,2\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(1)$; $\mathcal{K}_1(1) = \sigma_1$; $\mathcal{K}_1(2) = \sigma_2$,

$\mathcal{K}_2:\{1,2\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(2)$; $\mathcal{K}_2(1) = \sigma_5$; $\mathcal{K}_2(2) = \sigma_5$.

A $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_3$ átmenetet az alábbi leképezések határozzák meg:

$\mathcal{K}_o:\{1,2\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(0)$; $\mathcal{K}_o(1) = x_o$; $\mathcal{K}_o(2) = x_o$,

$\mathcal{K}_1:\{1,2\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(1)$; $\mathcal{K}_1(1) = \sigma_2$; $\mathcal{K}_1(2) = \sigma_1$,

$\mathcal{K}_2:\{1,2\} \to \Sigma_{\mathcal{L}}(2)$; $\mathcal{K}_2(1) = \sigma_6$; $\mathcal{K}_2(2) = \sigma_6$, A $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_4$ átmenetet az alábbi leképezések határozzák meg:

$\mathcal{H}_o:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(0)$; $\mathcal{H}_o(1) = x_o$; $\mathcal{H}_o(2) = x_o$,

$\mathcal{H}_1:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(1)$; $\mathcal{H}_1(1) = \sigma_2$; $\mathcal{H}_1(2) = \sigma_2$,

$\mathcal{H}_2:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(2)$; $\mathcal{H}_2(1) = \sigma_6$; $\mathcal{H}_2(2) = \sigma_7$.

A $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_5$ átmenetet az alábbi leképezések határozzák meg:

$\mathcal{H}_o:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(0)$; $\mathcal{H}_o(1) = x_o$; $\mathcal{H}_o(2) = x_o$,

$\mathcal{H}_1:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(1)$; $\mathcal{H}_1(1) = \sigma_2$; $\mathcal{H}_1(2) = \sigma_2$,

$\mathcal{H}_2:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(2)$; $\mathcal{H}_2(1) = \sigma_7$; $\mathcal{H}_2(2) = \sigma_6$.

A $K_1 \Rightarrow_{\mathcal{L}} K_6$ átmenetet az alábbi leképezések határozzák meg:

$\mathcal{H}_o:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(0)$; $\mathcal{H}_o(1) = x_o$; $\mathcal{H}_o(2) = x_o$,

$\mathcal{H}_1:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(1)$; $\mathcal{H}_1(1) = \sigma_2$; $\mathcal{H}_1(2) = \sigma_2$,

$\mathcal{H}_2:\{1,2\}\to\Sigma_{\mathcal{L}}(2)$; $\mathcal{H}_2(1) = \sigma_7$; $\mathcal{H}_2(2) = \sigma_7$.

Látható, hogy $\tau_{\mathcal{L}} = \tau_{\vartheta_1} \circ \tau_{\vartheta_2}$.

Irodalomjegyzék

[1] Baker, B.S., Composition of top-down and bottom-up tree transductions, Inf. and Control, v. 41, 1979, pp. 186-213.

[2] Dauchet, M., Transduction de forets, bimorphismes de magmoides - Thése de doctorat, Universite de Lille I 1977 .

[3] Engelfriet, J., Bottom-up and top-down tree transformations - A comparison, Math. Syst. Theory, v. 9, 1975, pp. 198 -231.

[4] Engelfriet, J., Three hierarchies of transducers. MST 15 1982 , 95-125.

[5] Fülöp. Z. and Vágvölgyi, S., Results on compositions of deterministic root-to-frontier tree transformations, Acta Cybernetica, tomus 8, f. 1, 1987.

[6] Gécseg, F., Steinby, M., Tree automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

[7] Rounds, W.C., Mappings and grammars on trees, Math. Syst. Theory, v.4, 1970, pp. 257-287.

[8] Vágvölgyi, S., On compositions of root-to-frontier tree transformations, Acta Cybernetica, tomus 7, f. 4, 1986.

[9] Vágvölgyi, S., Fülöp, Z., An infinite hierarchy of tree transformations in the class NDR, Acta Cybernetica, tomus 8, f.2, 1987.