

**El uso de un sistema de geometría dinámica en el desarrollo de la noción de lugar geométrico en el contexto de una propuesta de formación de maestros de matemática de educación básica primaria.**

**Yanjeline Trujillo Ortega  
Código 0903565**

**Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Área de Educación Matemática  
Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática  
Santiago de Cali  
2019**

**El uso de un sistema de geometría dinámica en el desarrollo de la noción de lugar geométrico en el contexto de una propuesta de formación de maestros de matemática de educación básica primaria.**

**Yanjeline Trujillo Ortega  
Código 0903565**

**Trabajo presentado como proyecto de grado para optar al título de ‘Magister en Educación con énfasis en Educación Matemática’.**

**Asesor Académico: PH. D. Evelio Bedoya Moreno**

**Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Área de Educación Matemática  
Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática  
Santiago de Cali  
2019**

## **Dedicatoria**

A Dios, por darme la vida y estar en cada instante en ella.

A mi esposo, por ser una de las personas que iluminan mi vida, que con su apoyo, a través de

A mi hija, por ser la razón de mí existir y darme esa fuerza de levantarme cada día para ser mejor persona.

## **Agradecimientos**

A Dios que nos da la vida, la salud, que nos hace fuertes, nos da el aguante, e inteligencia, sin Él muchas cosas no habría logrado, especialmente, la culminación de este trabajo de tesis.

A mi esposo por su paciencia, acompañamiento, y comprensión por el tiempo no compartido, a mi hija por alentarme en todo momento.

A mi director, el profesor Evelio Bedoya por su dedicación, apoyo, ayuda y generosa orientación.

A todos mis profesores y compañeros de la Universidad del Valle quienes contribuyeron a mi formación profesional, especialmente a la profesora Ligia Amparo Torres, a mis compañeros Liliana y Walter por ayudarme y animarme a continuar y culminar.

## Resumen

La formación didáctica de los profesores de Matemáticas, y por consiguiente, el uso de un sistema de geometría dinámica en el desarrollo de la noción de lugar geométrico en el contexto de una propuesta de formación de maestros de matemática de educación básica primaria, objeto de estudio y evaluación, se concibió enmarcado, conceptual y metodológicamente, en la propuesta de los organizadores del currículo elaborada en el seno del grupo de investigación sobre Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

El estudio evaluativo sobre formación didáctica de profesores de matemáticas de educación básica primaria. Se especificó en el diseño, planificación, implementación y evaluación de un taller de formación curricular, orientado hacia la reflexión conjunta por parte de todos los participantes, sobre las maneras de concebir, tanto el conocimiento matemático considerado como un sistema o estructura conceptual, como sobre sus metodologías de enseñanza.

Se revisaron documentos como: la Ley General de Educación Ley 115 de 1994, Lineamientos Curriculares de Matemáticas 1998, Estándares básicos de Competencias de Matemáticas 2006, Proyecto Educativo Institucional, Plan de Estudio, Plan de Área, Plan de clase. Se diseñó, estructuro e implemento el taller con base a la Teoría de los Organizadores del Currículo de Rico, (1997). La información se sistematizo, triangulo y analizo mediante la estrategia metodológica de investigación del Análisis Didáctico -curricular del contenido- del Grupo PNA (2004).

En la práctica, la propuesta se refirió al desarrollo de conocimientos didácticos bases de un tipo de formación didáctica orientada hacia el diseño de unidades didácticas sobre los elementos fundamentales que organizan la estructura matemática de un concepto de geometría, en general, y ‘Lugar Geométrico’, en particular.

**Palabras claves:** Formación de docentes de Matemáticas de Educación Básica Primaria, Pensamiento Espacial y los sistemas geométricos, Organizadores del currículo, Análisis didáctico, Geometría Dinámica, Lugar Geométrico.

**Lista de Gráficas**

	Pág.
Gráfica 1. Planes de mejoramiento .....	27
Gráfica 2. Sesiones de trabajo.....	42
Gráfica 3. Relación entre contenidos y los sistemas de representación.....	44
Gráfica 4. Estructura conceptual.....	47
Gráfica 5. Estructura del Diseño Metodológico .....	50
Gráfica 6. Conocimiento procedimental .....	56
Gráfica 7. Representando directamente el ‘Lugar Geométrico’ .....	58
Gráfica 8. Representación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’ .....	59
Gráfica 9. Presentación de errores ligados a objetivos de los focos fundamentales.....	69
Gráfica 10. Software de 'Geometría Dinámica' .....	71

## Lista de Cuadros

	Pág.
Cuadro 1. Guía de los estándares básicos de competencias del docente .....	28
Cuadro 2. Competencias funcionales.....	29
Cuadro 3. Objetivos Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’ .....	48
Cuadro 4. Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’ .....	48
Cuadro 5. Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ .....	48
Cuadro 6. Términos y conceptos de ‘Lugar Geométrico’ que se relacionan con el sistema de ‘Geometría Dinámica’. .....	55
Cuadro 7. Focos de interés de parte de los docentes.....	63
Cuadro 8. Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’ .....	64
Cuadro 9. Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’ .....	64
Cuadro 10. Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’. .....	65
Cuadro 11. Balance total de contribución al desarrollo de los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de Matemáticas.....	65
Cuadro 12. Asociación entre dificultades y objetivos .....	68

## Tabla de contenido

	Pág.
1. Introducción .....	1
2. El problema de investigación.....	4
2.1 Introducción .....	4
2.2 Planteamiento.....	6
2.3 Pregunta problema .....	6
3. Objetivos .....	7
3.1 Objetivo general.....	7
3.2 Objetivos específicos .....	7
4. Justificación .....	8
5. Marcos Referenciales.....	11
5.1 Teórico .....	11
5.1.1 <i>Análisis Didáctico</i> .....	11
5.1.2 <i>Análisis del currículo</i> .....	13
5.1.3 <i>Análisis de contenido</i> .....	15
5.1.4 <i>Análisis cognitivo</i> .....	18
5.1.5 <i>Análisis de instrucción – evaluación</i> .....	18
5.1.6 <i>Los organizadores del currículo</i> .....	18
5.1.7 <i>Contenido Matemático</i> .....	20
5.1.8 <i>Sistemas de representación</i> .....	21
5.1.9 <i>Nuevas tecnologías de representación</i> .....	22
5.1.10 <i>Formación inicial y formación didáctica</i> .....	26
5.1.11 <i>Estándares básicos de competencias del docente</i> .....	27
5.1.12 <i>Procesos generales de la actividad matemática</i> .....	30
5.1.13 <i>Tipos de pensamiento matemático</i> .....	30
6. Metodología .....	31
6.1 Marco metodológico .....	31
6.2 Diseño Metodológico.....	36

6.3	Técnicas e instrumentos de recolección de Información .....	41
6.4	Estructura del Diseño Metodológico .....	49
6.4.1	<i>Etapas.</i> .....	49
6.4.2	<i>Plan de acción.</i> .....	51
7.	Resultados .....	53
7.1	Hallazgos en relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación 54	
7.2	Hallazgos en relación con la fenomenología del tema y la modelización .....	59
7.3	Hallazgos en relación con las expectativas y ejemplificación de tareas desde los objetivos y los procesos generales. ....	62
7.4	Hallazgos en relación con errores y dificultades previsibles en el desarrollo de la Unidad Didáctica.....	67
7.5	Grados de complejidad de las tareas .....	70
8.	Conclusiones .....	73
9.	Reflexiones .....	77
10.	Recomendaciones .....	78
	Referencias.....	79
	Anexo 1. Taller “la noción de Lugar Geométrico usando un sistema de Geometría Dinámica- GeoGebra”. .....	83
	Anexo 2. Unidad Didáctica “noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’ .....	94
	Anexo 3. Apartes desarrollo Unidad Didáctica .....	131

## 1. Introducción

Los sistemas educativos evolucionan al compás de las transformaciones sociales, científicas y tecnológicas; y también bajo la presión de los avances y dinámicas que se dan en las diferentes investigaciones. El sistema educativo colombiano no es ajeno a estas evoluciones sin embargo, estas transformaciones suelen llegar al aula de clase y a los currículos muy lentamente, sorteando todo tipo de apatías, obstáculos y resistencias ante el cambio. Por diversas causas y razones, en la práctica, la Educación Básica Primaria y, muy especialmente, la formación profesional de los docentes son ámbitos especialmente evasivos a los diferentes procesos de cambio.

Los avances de la investigación en Educación Matemática reciente han mostrado que algunas de las causas más importantes de estos inconvenientes y reticencias tienen mucho que ver con las problemas por parte del docente y de las instituciones educativas para acceder a los desarrollos que se van presentando tanto científicos como tecnológicos; así como a la gran complejidad teórica y práctica de los conocimientos didácticos que los procesos de formación y evolución curricular, didáctica y profesional requieren. Pero, se ha mostrado que una opción para enfrentar estos problemas consiste en abordarlas sistémica, profesional y científicamente desde la formación del docente.

Este proyecto de investigación está sustentado en el uso de un sistema de geometría dinámica y desarrollo de la noción de lugar geométrico en el contexto de una propuesta de formación de maestros de matemática de educación básica primaria, con el propósito de estudiar, reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de la propuesta; además, dificultades, reticencias y procesos de acceso a dicha complejidad y adquisición de los conocimientos curriculares y didácticos bases de una formación didáctica más acorde con los desarrollos científicos, tecnológicos, educativos recientes. Para tales efectos, se han considerado como marcos Conceptual y Metodológico del conocimiento curricular y didáctico bases de la formación didáctica, la propuesta de los organizadores para el currículo de matemáticas localizada en los distintos ámbitos o campos de interés de esta investigación, que se indican a continuación:

1. Análisis didáctico
2. Los organizadores del currículo
3. Contenido matemático
4. Sistemas de representación
5. Nuevas tecnologías de representación
6. Formación didáctica

De acuerdo con lo anterior, y en términos generales, este trabajo se constituye en una investigación evaluativa y para ello se centró en desarrollar un contenido matemático específico, noción de ‘Lugar Geométrico’, LG, sistemas de representación usuales para la noción LG, recurso tecnológico, Sistema de ‘Geometría Dinámica’, SGD, y la formación didáctica de los docentes de Matemática de Educación Básica Primaria.

Este trabajo se desarrolló en el marco conceptual y metodológico de la línea de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, PNA, de la Universidad de Granada y en el marco curricular e institucional de la Ley General de Educación (ley 115 de 1994).

En síntesis, el objetivo general de este estudio consiste realizar un estudio basado en las propuestas del Análisis Didáctico para identificar y caracterizar el conocimiento didáctico base de la formación profesional de profesores de matemáticas de Educación Básica Primaria para la enseñanza de la noción de “lugar geométrico” usando un SGD (el de geogebra) como recurso didáctico tecnológico.

Esta investigación se concreta en seis apartados especiales: 1. El problema de investigación. Trata el planteamiento del problema, pregunta problema y el diseño de los objetivos; 2. Los Marcos Referenciales en los cuales se encuentran las teorías que mediante el Análisis Didáctico se aplicaron para dar soporte y ejecución al trabajo. En este apartado se consideraron las teorías de los Organizadores del Currículo y del Análisis Didáctico; sistemas de representación; nuevas tecnologías de representación, formación inicial y formación didáctica desde los documentos del MEN, Ley General de Educación 1994, Lineamientos Curriculares 1998, Estándares Básicos de Competencias 2006. Documentos que sustentan el problema de investigación desde el campo de investigación de la Educación Matemáticas, la didáctica de las Matemáticas y líneas de investigación en desarrollo profesional o formación de profesores de Matemáticas. 3. Metodología

de la investigación. Consistió en un estudio evaluativo sobre formación didáctica de profesores de Matemáticas de Enseñanza Básica Primaria mediante el diseño, planificación, implementación y evaluación de una propuesta curricular. Para concretar en la práctica la propuesta de investigación a evaluar, se instrumentalizó un taller basado en los contenidos, tecnologías y fundamentos mencionados y posteriormente se realizó la unidad didáctica. 4. Presentación y análisis de los resultados. Se presentan los hallazgos en relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación, la fenomenología del tema y la modelización, con las expectativas y ejemplificación de tareas desde los objetivos y los procesos generales, errores y dificultades previsibles en el desarrollo de la unidad didáctica, y grados de complejidad de las tareas y 5. Conclusiones, Reflexiones y Recomendaciones.

## 2. El problema de investigación

### 2.1 Introducción

El problema de investigación en este trabajo se sitúa en una problemática que apunta primeramente a la formación de los profesores de matemáticas de educación básica primaria y a la falta de significado y uso de los conceptos y procesos geométricos utilizando un sistema de ‘Geometría Dinámica’ en esta formación, es decir, la falta de comprensión de un referente, campo de problemas, fenómenos que modelan estos conceptos y la carencia transmisión de un saber a un contexto diferente en el que se han construido estos conceptos o procedimientos.

Se debe tener en cuenta que la formación de los profesores de matemáticas de educación básica primaria en Colombia es cada día más importante ya que incide en la calidad de la educación tomando un papel cada vez mayor dentro de la sociedad actual con su incidencia en el conocimiento, en el desarrollo social y económico. Lo anterior se piensa desde lo que planteaba Durkheim (1911):

Es necesario que, por las vías más rápidas, al ser egoísta y asocial que acaba de nacer superponga ella otro, capaz de llevar una vida moral y social. Esta es en esencia la labor de la educación, y nos percatamos de inmediato de toda su grandeza. No se limita a desarrollar el organismo individual en el sentido marcado por su naturaleza, a hacer patentes fuerzas recónditas deseosas de salir a la luz. La educación ha creado en el hombre un ser nuevo. (p.65).

Asimismo, uno de los tópicos de la Geometría se caracteriza por el manejo exclusivo de manipulaciones algebraicas de lápiz y papel, ejecutados a partir de reglas que generalizan los procedimientos a seguir, dentro de los dos problemas fundamentales en la Geometría Analítica:

1. Dada una ecuación hallar el ‘Lugar Geométrico’ que representa.
2. Dado un ‘Lugar Geométrico’ definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

En la enseñanza tradicional del concepto de ‘Lugar Geométrico’ las reglas dadas, son reforzadas al ejecutar una lista de ejercicios similares, conllevando a que el estudiante aprenda de memoria, sin la interpretación y sin la comprensión significativa de lo que efectúa, como también la desconexión de los conocimientos previos que ya poseen.

Con esta forma de enseñanza son pocos los estudiantes que conectan sus conocimientos anteriores con los nuevos, distinguiendo las características de del concepto, logrando aplicar exitosamente lo correspondiente. Los otros estudiantes, los que no conectan los nuevos conocimientos con los que ya saben, son los que no tardan en confundir lo recién aprendido, dando por válidas algunas que no lo son, olvidando otras que si son posibles, y dando lugar a errores del concepto de ‘Lugar Geométrico’ mostrando así una falta de comprensión de las propiedades y transformaciones posibles de los objetos matemáticos.

Recientemente con la incorporación de nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas, como los Sistemas de ‘Geometría Dinámica’, se ha generado un nuevo campo de investigación dado que ellas por si solas no garantizan un aprendizaje significativo, requiriéndose de Unidades Didácticas que las incorporen e implementen adecuadamente. Los sistemas de ‘Geometría Dinámica’ se caracterizan por permitir articular o interrelacionar múltiples registros de representación e incluir un sistema computacional que realiza manipulaciones de expresiones.

Este campo de indagación con sistemas de ‘Geometría Dinámica’ se convierte en un campo privilegiado para potenciar procesos de comprensión de procedimientos y conceptos asociados con el concepto de ‘Lugar Geométrico’.

Hasta hace algunos años las manipulaciones geométricas era una capacidad que podían efectuar sólo las personas. Esto cambia al surgir los Sistemas de ‘Geometría Dinámica’ que efectúan de manera eficaz y con mayor prontitud estos cálculos; por lo tanto, la importancia de su incorporación, entre otros aspectos, radica en posibilitar el empleo del tiempo en la argumentación y justificación, capacidades que estas herramientas por sí solas no hacen es decir, estas herramientas tecnológicas en el aula de clase pueden convertirse en instrumentos mediadores del aprendizaje y no simplemente herramientas para efectuar cálculos.

## 2.2 Planteamiento

El problema que se abordó se relaciona con el conocimiento matemático curricular y didáctico del profesor (FMEBP) en relación con la enseñanza y aprendizaje de la noción de lugar geométrico utilizando un sistema de geometría dinámica (SGM) como recurso didáctico tecnológico.

Por otra parte, y desde el punto de vista de la autora del trabajo se plantea identificar y caracterizar el conocimiento didáctico y las habilidades de análisis didáctico que pueden permitir desarrollar las reflexiones, fundamentos, resultados y conclusiones del proceso investigativo.

En relación con el contenido matemático la noción de lugar geométrico en educación básica primaria, teniendo en cuenta las dificultades tanto de enseñanza como de aprendizaje- comprensión que algunos estudios de los antecedentes y la experiencia han mostrado por lo general relacionadas con el uso y articulación de múltiples representaciones así como con la visualización la cual es clave para una mejor comprensión de esta noción, siguiendo las recomendaciones y desarrollo de algunos autores como Rico, L.; Lupiáñez, J. L.; Molina, M.; Castro, E.; Coriat, M.; Puig, L.; Sierra, M., y Socas, M. reconocidos en el campo de la didáctica de las matemáticas y formación de profesores de matemática, se ha elegido el sistema de geometría dinámica para este estudio Geogebra por ser además un software libre para diseñar la propuesta de formación de profesores(U.D. de formación de profesores para la enseñanza de la noción de lugar geométrico utilizando el S.G.D.). Teniendo en cuenta todo esto nos propusimos indagar sobre los conocimientos requeridos desde el punto de vista teórico por parte de los maestros y sobre los conocimientos que estos maestros adquieren para apropiarse y utilizar dichas propuestas, a partir de estas consideraciones se formuló la siguiente pregunta orientadora del problema de estudio.

## 2.3 Pregunta problema

¿Qué conocimientos didácticos requieren y utilizan profesores de matemáticas de Educación Básica Primaria en sus prácticas profesionales docentes cuando usan un SGD (El de geogebra) como recurso didáctico tecnológico para la enseñanza de la noción de “lugar geométrico”?

### 3. Objetivos

#### 3.1 Objetivo general

Realizar un estudio basado en las propuestas del Análisis Didáctico para identificar y caracterizar el conocimiento didáctico base de la formación profesional de profesores de matemáticas de Educación Básica Primaria para la enseñanza de la noción de “lugar geométrico” usando un SGD (el de geogebra) como recurso didáctico tecnológico.

#### 3.2 Objetivos específicos

**O.E.1** Determinar y describir los principales conocimientos didácticos del contenido que a la luz de un modelo local de análisis didáctico (como estrategia de formación permanente) requiere un profesor de EBP para realizar su práctica profesional relativa a la enseñanza de la noción de lugar geométrico usando un SGD como recurso didáctico tecnológico.

**O.E.2** Identificar y caracterizar los conocimientos didácticos del (o de) contenido que los profesores de EBP apropian y utilizan al realizar sus prácticas docentes en sus procesos de formación permanente sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático escolar “lugar geométrico” usando un SGD como recurso didáctico tecnológico

**O.E.3** Analizar las relaciones entre el CDC matemático y tecnológico determinado teóricamente y el CDC matemático y tecnológico apropiado por el profesor de EBP durante las actividades (taller) de formación permanente sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de lugar geométrico usando un SGD, de tal manera que permita determinar y evaluar los aportes de las actividades formativas realizadas.

#### 4. Justificación

La importancia del trabajo que aquí se presenta se puede abordar desde dos perspectivas específicas, de una parte, desde el contenido mismo: “Lugar Geométrico”, que nos lleva a una mirada curricular, y la otra, la importancia de implementar en el aula herramientas tecnológicas como mediadoras del aprendizaje de las matemáticas, en particular en el contenido objeto de estudio.

El ser docente va más allá de la simple transmisión de conocimientos, es una actividad compleja que requiere para su ejercicio, de la comprensión del fenómeno educativo. El análisis de la práctica del profesor se ha venido configurando como un tema de interés para la investigación en el campo de la educación matemática y que Llinares (2000) define la práctica profesional del profesor como: “el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor” (p.110). Señala que la práctica del profesor no está inscrita únicamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, como comunidad de práctica profesional en la que se incluyen actividades como tutorías, reuniones de departamento, asistencia a actividades de formación, etc.

Ponte y Chapman (2006) analizan estudios centrados en la enseñanza y en los profesores, realizados por investigadores del PME; específicamente examinan la actividad del profesor enmarcada en dos constructos que no son independientes: el conocimiento y la práctica.

Para comprender la naturaleza de las prácticas, estos autores se basan en diferentes perspectivas planteadas desde la psicología cognitiva, la interacción en el salón de clase, estudios socioculturales, estudios basados en el currículo, estudios biográficos y colaborativos de los profesores, entre otros.

El sólo dominio de una disciplina, no aporta los elementos para el desempeño de la docencia en forma profesional, es necesario hacer énfasis en los aspectos metodológicos y prácticos de su enseñanza, así como en los sociales y psicológicos que van a determinar las características de los grupos en los cuales se va a ejercer su profesión.

La labor docente se ubica en un contexto social, institucional, grupal e individual, de ahí que un docente no puede desconocer las relaciones y determinaciones en ninguno de estos niveles, pues no todos los obstáculos a los que se enfrenta el docente en el salón de clases se originan ahí solamente, sino que son reflejo de un problema social más amplio que repercute en la institución y por supuesto en los salones de clase.

Los conocimientos que sustentan el marco teórico del contenido matemático, sistemas de representación, nuevas tecnologías de representación constituyen conocimientos didácticos que son útiles para organizar el currículo de matemáticas de Educación básica, realizar tareas de diseño y análisis didáctico son, por tanto, necesarios para el conocimiento profesional de los profesores.

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.

Se puede articular en cuatro fases:

1. Análisis de currículo
2. Análisis de contenido
3. Análisis cognitivo
4. Análisis de instrucción-evaluación

Según las cuatro cuestiones principales, mencionadas anteriormente, en el presente trabajo se proponen estudiar, analizar y evaluar las maneras como repercuten estos organizadores en la formación de los profesores de Matemáticas de Educación Básica Primaria.

Para ello se diseñó un taller y posteriormente una unidad didáctica en el que se empleó una serie de materiales basados en la estructura conceptual en la diversidad, conversión, articulación e interrelación de los diferentes Sistemas de representación y en las utilidades didácticas del Sistema de ‘Geometría Dinámica’, SGD, entendidas éstas como recursos mediáticos de representación de la noción de ‘Lugar Geométrico’.

Interesa entonces estudiar y evaluar la forma como profesores de Matemáticas de Educación Básica Primaria introducen e integran en sus propuestas curriculares y, concretamente, en sus diseños de unidades didácticas sobre la noción de ‘Lugar Geométrico’, a los cuales han tenido la

oportunidad de acceder a través del taller y unidad didáctica de formación que se diseñó con tal propósito.

## 5. Marcos Referenciales

### 5.1 Teórico

#### 5.1.1 Análisis Didáctico

Esta investigación se enmarca en la propuesta metodológica del Análisis Didáctico, tomándose de la variedad de definiciones el estructurado por los estudios realizados en Didáctica de la Matemática del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico del Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada, España (2002).

El término ‘Análisis Didáctico’ que se asume se define como un procedimiento centrado en un contenido y contexto determinado, con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades o Unidades Didácticas de enseñanza y aprendizaje, así como el desarrollo de proyectos curriculares o de investigación con base al Conocimiento Didáctico Matemático (Gómez, 2005 p.2 y Bedoya 2002, p. 42).

Gómez (2005) define el término Análisis Didáctico como “un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (p. 3).

Rico (2013) dice que “El análisis didáctico es un método de investigación propio de la didáctica de la matemática, que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación, que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido. Son objeto del análisis didáctico aquellos conceptos, conocimientos, normas, juicios, argumentos, textos y relatos que tienen su origen en la actividad propia de la comunidad de educadores matemáticos, textos que se ajustan a su organización y que regulan su práctica.

Las finalidades del análisis didáctico radican en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos

matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar”. (Pág. 19)

El análisis didáctico sienta sus bases en la fundamentación, la dirección y sistematización de la planificación curricular, que continúa con la puesta en práctica de los procesos de enseñanza y la evaluación de los aprendizajes (contenidos matemáticos escolares específicos) establecidos por la comunidad educativa en un entorno escolar específico (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 13), esto provee las herramientas necesarias para el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el uso de sistemas de ‘Geometría Dinámica’. Por lo cual, al asumirse esta perspectiva se ha desarrollado un trabajo que se estructura bajo cada uno de los componentes que integran en su conjunto el Análisis Didáctico.

El Análisis Didáctico se constituye con las distintas actividades de concreción del modelo didáctico, pensado y fundamentado, metodológica y teóricamente desde la doble perspectiva del conocimiento curricular y didáctico, esto es, desde los fundamentos del currículo (global y local) y de la didáctica de las matemáticas. Su objetivo es la formación profesional (teórica y práctica) de los educadores matemáticos, el desarrollo, innovación y concreción de los currículos locales y el mejoramiento de la actividad o práctica profesional concreta de los profesores de matemáticas (Bedoya, 2002).

En cuanto a la manera de abordar los componentes del Análisis Didáctico, Gómez y Rico (2002) consideran que el contenido matemático es el eje central y por lo tanto el Análisis Matemático o de Contenido se considera como el punto de inicio y de referencia en el proceso, siendo así el Análisis Didáctico una herramienta útil en la práctica educativa en matemáticas; permitiendo realizar un análisis oportuno y ordenado de los contenidos matemáticos y pedagógicos que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje. Dado que se considera que las herramientas conceptuales y metodológicas en las que se basa el Análisis Didáctico, adquieren sentido cuando se utilizan para analizar los diferentes significados de la estructura matemática.

El Análisis Matemático junto con los Análisis Curricular, Cognitivo, Tecnológico, y de Instrucción permiten previamente diseñar las actividades y planificar la gestión dentro de la clase.

El Análisis Didáctico como metodología de investigación incluye diferentes campos entre ellos la formación de profesores. Rojas, Flores y Ramos (2013) utilizan el análisis didáctico de un

contenido matemático como método de indagación para reconocer conocimientos en el quehacer docente, esta metodología permite obtener “...aspectos y componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de un profesor...” (p. 192). Al respecto examinan el contenido de fracciones mediante el análisis didáctico, estableciendo un marco referencial con respecto a la enseñanza y aprendizaje de los números racionales.

En el campo de la Educación Primaria Valverde, Castro y Molina (2013), realizaron una investigación en la que utilizaron el análisis didáctico un experimento de enseñanza para la educación primaria sobre la razón y la proporcionalidad.

Para aclarar o especificar algunos detalles del desarrollo de los componentes del Análisis Didáctico se describen a continuación aspectos a tratados en cada uno de ellos:

### 5.1.2 Análisis del currículo

El Ministerio de Educación Nacional define el Currículo como:

(...) el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional”. (Artículo 76, Ley 115 de 1994).

Según la Ley General de Educación (1994), siendo la planificación del currículo realizado desde dos niveles de responsabilidad; el primero a nivel administrativo y político, que le corresponde al Estado y al municipio certificado de Popayán y el segundo a nivel profesional que le corresponde a la institución educativa y a los docentes; en otras palabras, el Estado y el municipio deciden en la elaboración y reglamentación de las leyes y así qué elementos conceptuales y culturales deben ser objeto del trabajo en el aula y los docentes y administrativos decidirán de qué manera se trabajará en las instituciones educativas y en las aulas dichos elementos.

De acuerdo en lo dispuesto en el artículo 78 de la referida ley, cada establecimiento educativo mantendrá actividades de desarrollo curricular que comprendan la investigación, el diseño y la

evaluación permanentes del currículo, esto lleva a que las instituciones de educación tengan autonomía para estructurar el currículo en cuanto a contenidos, métodos de enseñanza y organización de actividades.

El elemento básico que integra el currículo sobre las decisiones previas que hay que tomar en la programación es el Plan de Estudios que, a su vez, debe cumplir con:

1. La identificación de los contenidos, temas y problemas de cada asignatura y proyecto pedagógico, así como el señalamiento de las diferentes actividades pedagógicas.
2. La distribución del tiempo y las secuencias del proceso educativo, señalando el período lectivo y el grado en que se ejecutarán las diferentes actividades.
3. La metodología aplicable a cada una de las asignaturas y proyectos pedagógicos, señalando el uso del material didáctico, de textos escolares, laboratorios, ayudas audiovisuales, la informática educativa o cualquier otro medio o técnica que oriente o soporte la acción pedagógica.
4. Los logros para cada grado, o conjunto de grados, según los indicadores definidos en el proyecto educativo institucional.
5. Los criterios de evaluación y administración del plan. (Artículo 38, Ley 115 de 1994).

Se revisa el currículo de Matemáticas que abriga al grupo de profesores participantes desde tres niveles de concreción:

***Nivel Nacional.*** Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas. Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado colombiano que es quien elabora las leyes educativas básicas y el municipio certificado de Popayán es quien las desarrolla mediante decretos y normas.

***Nivel Institucional.*** Proyecto Educativo- Plan de Estudios. Es el segundo nivel de concreción. Corresponde a la institución educativa, a sus directivas y profesorado organizado en departamentos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los diferentes estamentos de la comunidad educativa.

***Nivel del Aula.*** Programación de aula. Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones: Cultural, Cognitiva, Formativa y Social que a su vez se descomponen en cuatro niveles: Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico (Rico, 1997).

Por tal motivo este tercer nivel de concreción es el nivel de planificación para el docente, donde hace la toma de decisiones sobre contenido (dimensión cultural), objetivos y competencias (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social).

### 5.1.3 Análisis de contenido

Gómez (2002) define el Análisis de contenido como:

Es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula teniendo en cuenta tres tipos de significados: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los modelos (análisis fenomenológico) (p.263)

La estructura conceptual es la descripción, a nivel de conceptos, procedimientos y algunas de sus relaciones, de la estructura matemática en cuestión, teniendo en cuenta los diferentes sistemas de representación y el análisis fenomenológico que consiste en la identificación de las subestructuras correspondientes a la estructura matemática, de los fenómenos organizados por ellas y de la relación entre subestructuras y fenómenos (Gómez y Rico, 2003). En esta componente también se tiene en cuenta el conocimiento científico matemático que media al conocimiento matemático escolar y algunos aspectos históricos-epistemológicos relacionados con el concepto de 'Lugar Geométrico'.

En cuanto a lo referente de las categorías para analizar el contenido matemático Rico (2013) dice que las categorías consideradas son:

- Conceptual, que considera el momento histórico y el marco poblacional (el quien comunica y a quien comunica) donde se insertan.
- Formal y estructural, que abarca los conceptos, definiciones y procedimientos, junto con la estructura formal, que proporcionan referencia a los contenidos utilizados.

- Representacional, que comprende las notaciones gráficas, simbólicas, y sistemas de signos involucrados.
- Fenomenológica, que aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los cuales se aplican, que dotan de sentido a los contenidos de estudio. (Pág. 18)

### **Histórico**

La evolución histórica del concepto de ‘Lugar Geométrico’ se puede dividir en tres grandes periodos y que se diferencian, básicamente, por el aporte de Apolonio de Perga que estudió curvas conocidas como cónicas; en cada uno de estos periodos subyace el concepto, aunque no siempre sea claro.

- Primer periodo. antes de Apolonio

En este periodo aparece una idea muy intuitiva del concepto con los aportes de Menecmo (siglo 350 a. de C.) el cual trato el problema clásico de la duplicación del cubo: construir un cubo de doble volumen que otro dado, y redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1, introdujo las secciones cónicas descubriendo las curvas lo que se conoce como la llamada triada de Menecmo que es la elipse, parábola e hipérbola.

- Segundo periodo. Era de Apolonio

Apolonio de Perga (247-205 a.C.), su obra fundamental Cónicas, es una especie de complementos de los Elementos de Euclides. Mezcló desde premisas iniciales suficientemente generales con resultados propios en los ocho libros, el mismo, en el prólogo del libro primero, explica el contenido de la obra claramente, los cuatro primeros libros constituyen una introducción elemental. Estos debían ser los que constituirían la materia probablemente ya sabida, pero no organizada como él la propone. A partir del libro V se exponen los hallazgos más importantes del mismo en lo referente al tema.

- Tercer periodo. Post – era Apolonio

El geómetra griego Pappus bajo la influencia de Apolonio escribió La Colección Matemática, una obra muy heterogénea, de un valor científico, histórico y metodológico inconmensurable, en esta se encuentra infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior, además un gran número de cuestiones que se debe situar en las raíces históricas de la Geometría Analítica como son la más elaborada exposición sobre los métodos de Análisis y Síntesis, numerosas soluciones a

los problemas clásicos de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos especialmente el Teorema VII.

### **Conceptual**

La revisión histórica anterior ayuda a diseñar y analizar la estructura conceptual del tema, donde se podrá observar los términos y conceptos relacionados:

- Conocimiento Conceptual. Dentro de este aspecto se pueden observar:
  - Términos
  - Conceptos
  - Resultados
  - Destrezas
  - Razonamientos
  - Estrategias
- Sistemas de representación

En esta sección se describe los distintos sistemas de representación mediante los cuales se hace presente el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y todos los conceptos relacionados con él. Para cada una de las representaciones se destaca sus características sus usos y su finalidad. Estos tipos de representaciones son los siguientes: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

- Fenomenología del tema y modelización

En esta sección se plantean las situaciones y contextos en los que se desarrolla el tema:

- Análisis de Contextos
  - Análisis de Fenómenos
  - Análisis de Situaciones
  - Situación artística
  - Situación laboral
  - Situación científica
  - Situación personal
- Resolución de un problema vía modelización

La modelización de este tema está determinada básicamente en las interacciones que se dan entre modelización, el sistema de ‘Geometría Dinámica’ y el contenido matemático.

#### 5.1.4 Análisis cognitivo

Este análisis permite prever las actuaciones de los docentes en el desarrollo de las actividades de enseñanza y aprendizaje que en este trabajo se proponen (Gómez, 2002, p. 272), permitiendo así al profesor describir y analizar la problemática del aprendizaje de un tema en estudio, mediante expectativas acerca de cómo los estudiantes aprenden determinado conocimiento y como desarrollan este aprendizaje (González y Gómez, 2013).

En este apartado se observaron las siguientes expectativas:

- Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’
- Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

#### 5.1.5 Análisis de instrucción – evaluación

Consiste en la realización, descripción y justificación de todos los procesos en el diseño, planificación e implementación de la Unidad Didáctica o actividades.

De la variedad de tareas compatibles con los Análisis Cognitivo, Curricular, de la Tecnología y de Contenido se procede a seleccionar y justificar algunas de esas tareas para ser incorporadas en el diseño de las actividades o Unidades Didácticas de enseñanza y aprendizaje (Gómez, 2002, p. 288).

En relación con a este trabajo se presentarán los grados de complejidad de las tareas en relación con la reproducción, conexión y reflexión.

#### 5.1.6 Los organizadores del currículo

Se considera la propuesta de los organizadores para el currículo de Matemáticas desarrollada por el Grupo de Investigación del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico, PNA, de la Universidad de Granada en atención a los siguientes presupuestos:

Cuando un profesor inicia la puesta en práctica de las directrices curriculares con un grupo concreto de alumnos necesita tomar una serie de decisiones de carácter general. Estas decisiones se concretan mediante criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos; criterios para la organización, desarrollo y control del trabajo en el aula; prioridades en el proceso de construcción del conocimiento y en la asignación de significados por parte de los alumnos y, finalmente, criterios para valorar los logros en el aprendizaje y para el tratamiento adecuado de los errores. (Rico, 1997, p.39)

Lo anterior lleva a ver cuándo los profesores reflexionan sobre las decisiones que debe tomar en su práctica en lo concerniente a directrices curriculares debe establecer prioridades que afectan los objetivos, los contenidos, metodología y evaluación.

De acuerdo con Rico (1997), el grado de conjunto con que aparecen las componentes del objeto de enseñanza difiere con la mayor exactitud con que aparecen detallados los contenidos. Lleva esto a definir a los organizadores del currículo como: “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (Rico, 1997, p.45). Además, son considerados elementos teóricos y metodológicos, mediadores, articuladores del Análisis Didáctico y sistemas de conocimientos que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos escolares (Bedoya, E. 2002, p.55).

De esta forma el organizador del currículo debe ofrecer un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de comunicación y construcción del conocimiento matemático, con criterios para abordar y controlar la complejidad y un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas.

Un organizador del currículo es un marco conceptual que apoya la construcción del marco teórico y el desarrollo de la investigación al facilitar las múltiples relaciones y los pasos de fronteras de una disciplina a otra, iniciando por el análisis del currículo en relación al concepto matemático (Bedoya, 2010).

Luego la propuesta teórica de los organizadores del currículo (Rico,1997), es la fundamentación teórica en relación a otras disciplinas como: la filosofía, pedagogía, epistemología, fenomenología, semiótica, que también están presentes en el análisis de otros objetos de estudio como el contenido o la instrucción de un concepto matemático y que sirven para realizar el análisis didáctico en general, pero de acuerdo al problema se pueden limitar en algunos aspectos criterio que se usa para no desbordar el problema de la investigación, con lo anterior se hace necesario crear el modelo local de los organizadores del currículo (Bedoya, 2010) ya que el profesor es el objeto de estudio.

### 5.1.7 Contenido Matemático

Un ‘Lugar Geométrico’ es una figura, línea o superficie en la que todos los puntos satisfacen una cierta propiedad y todos los puntos a los que les corresponde la propiedad respectiva pertenecen a la figura respectiva.

Entre los conceptos que han sido retomados por la geometría dinámica, está el de ‘Lugar Geométrico’, que es el recorrido que hace el punto bajo ciertas condiciones determinadas en el plano cartesiano.

Un ejemplo sencillo que puede ilustrar la idea del ‘Lugar Geométrico’, es el desplazamiento del punto  $(x, y)$  cuando este punto se mantiene a la misma distancia de dos puntos diferentes en el plano.

La trayectoria de este punto resulta una recta y la expresión algebraica será una ecuación lineal. Asimismo, un círculo se define y construye como el punto que se desplaza a la misma distancia de otro punto llamado centro. (Lehmann, 1989).

Un ‘Lugar Geométrico’ es el conjunto de todos los puntos que cumplen una cierta condición. (Acosta, M. 2002).

Gómez I., Botana F., Escribano J., Abanades M. (2016) definen que un lugar geométrico es el conjunto de todos los puntos del plano que verifican una propiedad determinada. Por lo tanto: Si  $L$  es un lugar geométrico definido por la propiedad  $P$ , se verifica que:

- a) Todo punto de  $L$  posee la propiedad  $P$ .

b) Todo punto que posee la propiedad P pertenece a L.(Pág. 69)

La comprensión y aprendizaje del concepto de ‘Lugar Geométrico’ por parte del profesor se hace mediante el estudio del análisis de contenido (epistemológico, fenomenológico, ontológico, histórico, semiótico y cognitivo) que dan la estructura conceptual de la noción de ‘Lugar Geométrico’.

De la epistemología, fenomenología, historia y la semiótica, se toma el sentido de la representación, que permita caracterizar una estructura mental en torno al concepto-noción de ‘Lugar Geométrico’, desde las concepciones, creencias del profesor y la evolución del contenido matemático para posteriormente enseñar -diseñar unidades didácticas.

#### 5.1.8 Sistemas de representación

La variedad y a la vez la especificidad de los sistemas de representación y sus posibilidades de articulación, complementación y de visualización, además de constituirse como factores de complejidad conceptual, pueden ser pensados como organizadores curriculares del contenido matemático en torno al cual se desarrolló en este trabajo. Entre los varios autores que tratan de detallar el término de representación se tienen:

- Según Duval, R. (2004) el aprendizaje de la matemática permite el estudio del análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de los textos. Al enseñar y aprender matemática sobrelleva a que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, el manejo de distintos registros de representación y de expresión. Al analizarse las representaciones con cada una de las características como las actividades que éstas permiten realizar, la manera en que se realizan, las cualidades de distintos tipos de registros y por consiguiente, la relación que existe en el uso de los registros de representación y aprendizaje. Es aquí donde se enfoca el análisis a las representaciones semióticas, las cuales se caracterizan por ser representaciones externas y conscientes, a diferencia de las representaciones mentales o computacionales.

- Kaput, J. (1987 y 1992) considera: a la representación de una experiencia por otra, considerando que la capacidad que tienen las personas para trabajar con objetos y procesos muy

elaborados se basa en la interacción entre dos fuentes de organización de su naturaleza de hábitos: las estructuras mentales con las que organizan su mundo de experiencias, y su habilidad para utilizar medios materiales en la organización de sus experiencias.

- Castro y Castro (1997) considera a las representaciones como “las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes”, esto lleva a justificar que un mismo concepto puede admitir varias representaciones.

- Rico habla de las representaciones en matemáticas como aquellas herramientas signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, cuando registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Rico, L. (2009). “Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática”.

- Lupiáñez y Moreno (2001) señalan que: “Por representaciones entenderemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características y propiedades más relevantes” (p.292).

#### 5.1.9 Nuevas tecnologías de representación

Las posibilidades técnicas, lógicas y matemáticas de la herramienta tecnológica, en particular del software de ‘Geometría Dinámica’, siendo instrumentos mediadores de representación y visualización, deben ser aprovechadas como utilidades didácticas, e integrarse bajo una perspectiva organizadora del currículo local. En este campo de estudio los trabajos consultados, han sido: Kaput (1992); Hitt (1998, 2003); Moreno (1998, 2001).

La aparición de la tecnología ha generado cambios en la manera de plantear y desarrollar las clases de Matemáticas en el salón de clases y al respecto Hitt (2003) señaló:

(...) el avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta, pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Actualmente, con la

tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes muy diferentes a los que se seguían en el pasado. (p.214)

A través de aparatos tecnológicos es posible seguir el proceso de construcción de la matemática, a través de algunas de sus representaciones, y acercarnos, dentro de lo que plantea un objetivo didáctico, al concepto matemático. Se puede ver la diferencia entre el trabajo manual con que se explicaban las clases de geometría, y la rapidez y exposición visual con que responden las computadoras, calculadoras y otros dispositivos electrónicos dirigidos por software adecuados para tal finalidad.

Con respecto a ello, Moreno (2001) señaló:

La ‘Geometría Dinámica’ cambia la forma de la enseñanza de la geometría. Tanto la práctica educativa como la investigación han reconocido que la nueva forma de exploración geométrica es diferente a la que se puede llevar a cabo mediante los instrumentos clásicos, regla y compás y el razonamiento basado en figuras mal dibujadas. No son diferencias de apariencias.

Un Sistema de Geometría Dinámica es un programa informático que permite la manipulación y creación de construcciones geométricas. Es importante en este tipo de programas la capacidad de construir modelos geométricos a partir de objetos tales como puntos, rectas, círculos, así como de las dependencias que pueden relacionar unos objetos con otros, además es un editor gráfico que da la posibilidad de dibujar diagramas geométricos en la pantalla del computador, siendo más que un simple editor en el que el usuario puede agarrar con el ratón un elemento del diagrama y arrastrarlo en la pantalla: el diagrama se re dibuja de manera continua conservando intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en su construcción, así como todas las propiedades geométricas contenidas en ella.

La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de ‘Geometría Dinámica’ es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una eventualidad: ya no son estáticas, si no móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla.

Existen diversos softwares de ‘Geometría Dinámica’, con diferencias en relación a licenciamiento, funcionamiento, calidad gráfica, precisión matemática y costos, entre estos programas están:

- Cabri Geometre: el autor CabriLog SAS, está en idioma español trabaja en el sistema operativo Windows, con licencia comercial, con características generales como Herramienta de gran potencial para la enseñanza – aprendizaje de la geometría euclideana, transformacional y analítica, que permite, en forma sencilla, construir objetos geométricos y luego trasladarlos, girarlos, y estudiar en ellos aspectos tales como, simetría o proporciones. Es posible medir las figuras, representar las ecuaciones que les corresponden, comprobar sus propiedades geométricas y realizar cálculos vinculados a sus propiedades.
- Geometer’s Sketchpad: el autor Key curriculum press, está en idioma español trabaja en el sistema operativo Windows, con licencia comercial, con características generales como: se puede trabajar con puntos, rectas, segmentos de recta, rayos, círculos, ángulos, polígonos, curvas cónicas, etc. y cuenta con diversas herramientas, entre ellas, de selección, rotación, dilatación, reflexión, construcción y cálculo. En este programa podemos realizar mediciones de ángulos, segmentos, pendientes, etc. También nos permite construir ecuaciones de rectas, circunferencias y de otras curvas. Los parámetros de las ecuaciones cambian acorde a los cambios en las figuras que representan.
- Regla y compás: el autor Rene Grothmann, trabaja en el sistema operativo Windows, con Licencia Pública GNU., con características generales como: simula las construcciones de la geometría escolar con regla y compás. El programa usa Java y corre en casi todas las plataformas modernas. Además, se pueden editar las construcciones y las tareas para ser publicadas en la red, corre en español inglés, alemán, italiano, portugués, polaco y danés.
- GeoGebra: el autor Markus Hohenwarter, está en idioma español, trabaja en el sistema operativo Windows , Linux y Mac, con licencia gratuito (GNU), con características generales como: ser un software interactivo en el que se asocian, por partes iguales, la geometría y el álgebra. (Fuente: Geogebra.at)

Para las actividades del proyecto utilizaremos el programa GeoGebra.

GeoGebra es una aplicación de código abierto diseñada especialmente para el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría y el Álgebra, dispone de todo tipo de operaciones que plasma sobre la cuadrícula de su interfaz, desde el trazo de simples segmentos y líneas paralelas, hasta la traslación de cualquier objeto conforme a un vector. En su interfaz se puede visualizar un plano geométrico y otro algebraico, interrelacionados de manera que si añadimos elementos en uno u otro se creen de igual forma en el otro, utilizando de manera dinámica la geometría, el álgebra y el cálculo.

Carrillo A. (2012) dice sobre GeoGebra lo siguiente: GeoGebra mantiene la sencillez y el dinamismo, añadiendo algunos valores como ser libre y multiplataforma y, sobre todo, permite trabajar casi todos los bloques de contenidos, por lo que no es solo geometría.

Además, al tener la consideración de software libre no requiere inversión para su uso y algo importante, su continua evolución que hace que nazcan nuevas versiones o que incorporen nuevas herramientas con las que aumenta su potencia y sus posibilidades didácticas.

Estoy convencido que las razones anteriores y alguna más, son las causantes de la generalización de GeoGebra que lo están convirtiendo en un recurso imprescindible para todo el profesorado interesado en trabajar con las TIC en su aula.

GeoGebra no es solo geometría (Geo), al menos como su nombre indica también es álgebra (Gebra), aunque la realidad, es más, es cálculo, es análisis y también estadística; en definitiva, GeoGebra supone una excelente opción para hacer unas matemáticas dinámicas sobre todo en los niveles educativos de Primaria, Secundaria y también Bachillerato.

Es evidente que GeoGebra no tiene la exclusividad como programa para la enseñanza, pero la gran variedad de opciones que ofrece hace que su uso, no sea solo para dibujar o construir, sino también, como veremos a través de algunos ejemplos, permitirá proponer al alumnado sencillas tareas de investigación y experimentación, que en la mayoría de los casos no requerirán demasiados conocimientos técnicos ya que bastará con conocer algunas herramientas básicas y algunos comandos para afrontarlas. (Pág. 9)

El uso en la enseñanza de un SGD, como caso particular de un ambiente interactivo de aprendizaje, se enmarca dentro de las teorías constructivistas del aprendizaje, tal como detallan, entre otros, Yábar en el año 1995 y Bellemain y Capponi en el año 1992, en este sentido la

geometría no se admite como un organismo codificado de conocimientos a transmitir, sino como el resultado de una actividad de los sujetos sobre determinados objetos de su entorno.

En un SGD tales objetos son el resultado de una modelización de determinados conceptos geométricos y las actividades a desarrollar están condicionadas por el tipo de comunicación que se establece con el sistema informático.

La naturaleza del conocimiento matemático que se trabaja cambia respecto del contexto de lápiz y papel; ahora se centra en el estudio de las propiedades invariantes que posee una determinada construcción geométrica, propiedades que el interesado puede observar o predecir manipulando la construcción realizada.

#### 5.1.10 Formación inicial y formación didáctica

La formación del profesor y futuro profesor ha sido materia de incontables análisis y discusiones, desde los factores evidentes y tácitos para la determinación del perfil profesional hasta los resultados esperados de la formación, pasando por los elementos que deben conformar el currículo y su representación y deber en la formación pedagógica, como también las fuentes o factores que deben orientar la conformación del currículo de formación.

Al respecto Bedoya (2002) expone:

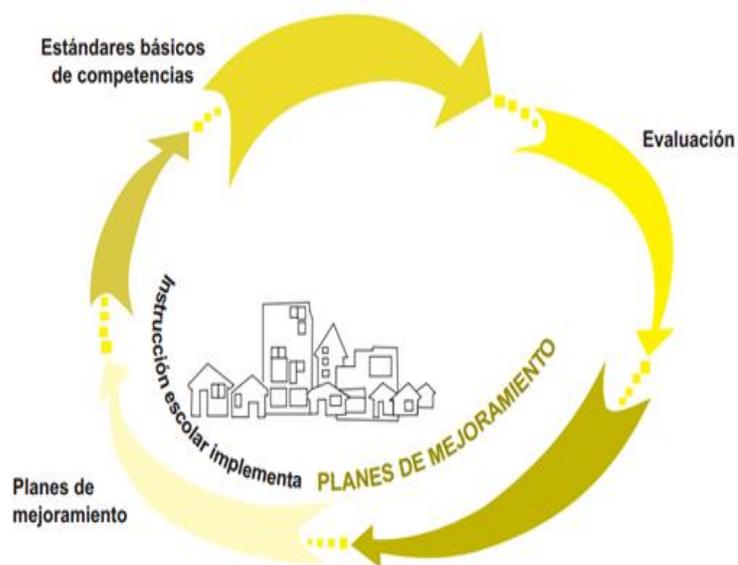
La concepción del futuro profesor como un profesional formado y reflexivo, con dominio de las matemáticas escolares, para lo cual necesita de un plan de formación inicial que le aporte los necesarios conocimientos sobre teoría curricular, nociones generales de didáctica de la matemática y principios organizadores para considerar y mostrar la pluralidad de significados del conocimiento matemático, a los efectos de ser enseñado y aprendido. (p.40).

Rico (2004), al respecto, dice: el profesor de Matemáticas de secundaria necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas.

Rico (1997). El profesor necesita también de conocimientos teóricos y prácticos específicos, relativos a la enseñanza y aprendizaje de su disciplina, a los fundamentos y bases teóricas del currículo de la materia, precisos para su diseño, desarrollo y evaluación. (p.18).

### 5.1.11 Estándares básicos de competencias del docente

Los estándares básicos de competencia son una herramienta en la cual el Ministerio de Educación Nacional, MEN, trabaja desde el año 2002 para implementarlos a nivel nacional como guía (Ver Gráfica 1. Planes de mejoramiento).



Gráfica 1. Planes de mejoramiento<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Fuente: MEN, Programa de Formación Continua (2016)

Cuadro 1. Guía de los estándares básicos de competencias del docente<sup>2</sup>

– El diseño del currículo, el plan de estudios, los proyectos escolares e incluso la enseñanza en el aula.
– La producción de los textos escolares, materiales y demás apoyos educativos, así como la toma de decisión por parte de instituciones y docentes respecto a cuáles utilizar.
– El diseño de las prácticas evaluativas adelantadas dentro de la institución
– La formulación de programas y proyectos, tanto de la formación inicial del profesorado, como de la cualificación de docentes en ejercicio.
– Definir de forma autónoma el PEI en las diversas instituciones educativas orientándolos con los énfasis el cómo se planifica.
– Desarrollar y valorar según sus propósitos educativos, los cuales se insertan en el proyecto nacional, tal como lo exige la constitución.
– Establecer criterios para las evaluaciones externas y los resultados de estas, lo que posibilita monitorear los avances en el tiempo y diseñar estrategias focalizadas de mejoramiento acordes con las necesidades de las regiones e incluso de las instituciones educativas.

- **Competencias funcionales.** Las competencias funcionales corresponden al desempeño de las responsabilidades específicas del cargo de docente o directivo docente, definidas en la ley y los reglamentos. (Ver Cuadro 2. Competencias funcionales).

---

<sup>2</sup> Fuente: Elaboración propia con información tomada de estándares básicos de competencias del docente

Cuadro 2. Competencias funcionales<sup>3</sup>

Área de gestión	Competencias funcionales
	Docentes
<b>Académica</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Dominio curricular</li> <li>– Planeación y organización académica</li> <li>– Pedagógica y didáctica</li> <li>– Evaluación del aprendizaje</li> </ul>
<b>Administrativa</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Uso de recursos</li> <li>– Seguimiento de procesos</li> </ul>
<b>Comunitaria</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Comunicación institucional</li> <li>– Interacción con la comunidad y el entorno</li> </ul>

- **Competencias comportamentales.** Las competencias comportamentales se refieren a las actitudes, los valores, los intereses y las motivaciones con que los educadores cumplen sus funciones. Son comunes a docentes y directivos docentes así:
  - Liderazgo
  - Relaciones interpersonales y comunicación
  - Trabajo en equipo
  - Negociación y mediación
  - Compromiso social e institucional
  - Iniciativa
  - Orientación al logro

---

<sup>3</sup> Fuente: Elaboración propia con información tomada de estándares básicos de competencias del docente.

### 5.1.12 Procesos generales de la actividad matemática

- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.
- Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y con ellas formular y sustentar puntos de vista. Es decir, dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos.
- Comunicar formas distintas de expresar y representar un contenido matemático.
- Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo como medios de validar y rechazar conjeturas y avanzar en el camino hacia la demostración.
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz. Así se vincula la habilidad procedimental con la comprensión conceptual que fundamenta esos procedimientos.

### 5.1.13 Tipos de pensamiento matemático

Son cinco (5) tipos de pensamiento propuestos en los lineamientos curriculares:

- El pensamiento numérico y los sistemas numéricos.
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos.
- El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas.
- El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.
- El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

## 6. Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, específicamente nos proponemos realizar una indagación exploratoria, descriptiva, interpretativa y evaluativa de un taller de formación de profesores de educación básica primaria, la propuesta se diseñara y desarrollara sobre la base del modelo local de los organizadores, siendo un estudio evaluativo sobre formación y didáctica de profesores de matemáticas de enseñanza básica primaria, se concretara en el diseño, planificación, implementación y evaluación del taller de formación curricular, orientado hacia la reflexión conjunta por parte de todos los participantes, sobre sus maneras de concebir, el conocimiento matemático sobre ‘Lugar Geométrico’.

### 6.1 Marco metodológico

La parte evaluativa sobre formación inicial y formación didáctica de profesores de matemáticas de educación básica primaria ha sido diseñado y desarrollado sobre la base del modelo local de los organizadores focalizándolo y estructurándolo en tres componentes de los organizadores del currículo: estructura conceptual del contenido matemático, los sistemas de representación usados en el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y el sistema de ‘Geometría Dinámica’. Los dos últimos se enlazan conjuntamente dentro del currículo de matemáticas en esta investigación para ser empleados sobre el contenido matemático específico. Siendo nuestro interés poder incidir satisfactoriamente en el diseño de actividades y planificación de unidades didácticas que integren los tres elementos anteriores y estudiar las modificaciones e influencias sobre el conocimiento didáctico de los profesores de educación básica primaria.

De acuerdo con la concepción de currículo en que nos basamos en este trabajo, como un programa de formación cuyo objetivo central es dar respuesta a múltiples cuestiones relacionadas con el conocimiento didáctico en torno a un contenido matemático concreto, su enseñanza y aprendizaje, y organizadas estructuralmente teniendo en cuenta múltiples dimensiones (Rico, Castro y Coriat, 1997), el diseño y puesta en marcha del taller requieren de un adecuado y amplio marco de investigación que permita determinar y explicitar los límites y posibilidades de esta

intervención educativa. Como resultado de la evaluación del taller, se espera determinar a distinta escala los alcances e implicaciones a que puede dar lugar su puesta en marcha, así como optimizar los recursos disponibles para sacarles el mayor rendimiento posible.

De esta forma, de los análisis y valoraciones que se realicen en los distintos momentos de implantación del taller cabe esperar recomendaciones y hallazgos de investigación eminentemente prácticos que puedan facilitar la puesta en marcha de nuevos y mejorados talleres, así como algunas consecuencias para el desarrollo profesional de los participantes.

También es pertinente discutir, la forma como estos profesores de matemáticas de Educación básica primaria son influenciados en sus conocimientos profesionales sobre los mencionados contenidos curriculares, después de acceder al modelo de los organizadores a través del taller que hemos diseñado para tales propósitos.

De igual modo, fueron objeto de interés las resistencias y carencias más significativas que se manifestaron durante proceso de puesta en marcha del taller.

Concretamente, se valoraron las cualidades del proceso de desarrollo del taller en orden un conjunto de indicadores ya sean objetivos y subjetivos de calidad y mejora. Igualmente, se caracterizaron o tipificaron los distintos componentes humanos, disciplinares y tecnológicos, relacionados directamente, tanto con el taller como el impacto que se deriven.

***Evaluación de Programas Educativos.*** La evaluación de programas educativos ofrece un marco conceptual y procedimental apropiado sobre el cual se puede fundamentar y organizar la investigación. Al respecto Alvira Martín (1985) señala que la investigación evaluativa es "la acumulación de información sobre una intervención, programa o sobre su funcionamiento y sobre sus efectos y consecuencias".

Dentro del marco educativo un programa, se puede entender según Pérez Juste como un plan sistemático de intervención, diseñado y elaborado intencionalmente para la consecución de unos objetivos de mejora.

La evaluación está presente en el ámbito educativo a pesar de sus dificultades y limitaciones desde el mismo momento en que se identifican las necesidades, se formulan objetivos, se desarrolla el proceso de ejecución planeado y se analizan los resultados alcanzados.

Lo anterior lleva a que la evaluación de programas se configure como componente esencial de los procesos sociales y educativos, por tal motivo no se le debe tratar como algo puntual, sino como un *proceso* que permite obtener información necesaria, relevante, fiable, válida, adecuada y a tiempo, con los cuales se puede emitir *juicios de valor* tanto sobre el proceso como el fruto, lo que conducirá a la toma de decisiones continua de una mejora.

Tyler (1950) define la evaluación de programas como "el proceso para determinar en qué medida los objetivos educativos habían sido alcanzados mediante los programas de currículos y enseñanza". Stufflebeam (1985) nos dice que "la evaluación de programas es el proceso de identificar, obtener y proporcionar información útil y descriptiva acerca del valor y el mérito de las metas, la planificación, la realización y el impacto de un objeto determinado, con el fin de servir de guía para la toma de decisiones, solucionar los problemas de responsabilidad y promover la comprensión de los fenómenos implicados".

Pérez (1995) afirma que es un:

(...) proceso sistemático, diseñado intencional y técnicamente, de recogida de información rigurosa -valiosa, válida y fiable-, orientado a valorar la calidad de un programa, como base para la posterior toma de decisiones de mejora tanto del programa como del personal implicado y, de modo indirecto, del cuerpo social en que se encuentra inmerso.

Observando las definiciones anteriores se puede decir que la evaluación de programas no es un ente aislado del resto que interviene en la actividad educativa, sino que, por el contrario, se encuentra ligada a su desarrollo, dado que ofrece información sobre la marcha de los procesos sociales y/o educativos.

***El Análisis didáctico como metodología de investigación.*** El análisis didáctico ya ha sido utilizado como metodología de investigación en distintos proyectos de investigación, tesis doctorales, de maestría y trabajos de grado desarrollados por parte de integrantes del grupo PNA, por ejemplo, las tesis doctorales de González (1995); Bedoya (2002); Ortiz (2002) y Lupiañez (2009).

Rico (2004) se refiere en particular al importante papel que juega el análisis de contenido (análisis conceptual) en relación con los resultados del proceso de investigación:

“Parte inicial del trabajo de un investigador en educación matemática es el análisis de los conceptos sobre los que va a trabajar y que sostienen la investigación, lo cual debe conducir a una delimitación adecuada del problema. Un diseño adecuado, junto con los instrumentos pertinentes para el análisis de datos, discusión de hallazgos y resultados, contribuyen decisivamente a la calidad del producto final” (p.4).

Al respecto, González y Gallardo (2006) propone el análisis didáctico como un:

(...) procedimiento metodológico para la investigación en Educación Matemática, ilustrándose su operatividad mediante su aplicación en un estudio concreto desarrollado en el ámbito de la comprensión del conocimiento matemático. A nuestro entender, la potencialidad del método radica esencialmente en su capacidad para garantizar un nivel elevado de especificación y concreción para la fase de revisión de antecedentes, manifestando al mismo tiempo una alta disponibilidad para ser empleado en una amplia variedad de investigaciones. (p.16).

Complementariamente propone que los distintos componentes de análisis didáctico a la vez que lo concibe tanto como metodología de investigación cualitativa, así como estrategia para la formación de profesores de matemáticas.

Esta concepción específica del análisis didáctico como metodología de investigación cualitativa en educación matemática y en particular en el campo de la formación de profesores de matemáticas, se ha complementado para el desarrollo de este trabajo con un diseño metodológico de Evaluación de Programas Educativos.

Este tipo de diseño que integra diferentes perspectivas es conocido en el ámbito de la investigación cualitativa como “complementariedad metodológica” (Forns & Gómez, 1995); (Latorre, Del rincón, & Arnal, 1996); (Bericat, 1998); (Pérez, 2000); (De Miguel, 2000).

El Análisis Didáctico se concibe como una propuesta de Formación de Profesores desde un ámbito general, el PNA lo concibe como una estrategia de cualificación y desarrollo profesional y de competencias de los docentes, así como de innovación y desarrollo curricular didáctico. (Bedoya, 2013; Gómez 2007; Rico, 1997).

Siendo necesario que se articulen las informaciones arrojadas de los diferentes referentes metodológicos que se encuentran en esta investigación y la relación de los componentes del sistema didáctico tetraédrico, es aquí donde el análisis didáctico se convierte en la estrategia metodológica de investigación didáctica beneficiosa para analizarla en las tres fases que se dan en la experiencia de los profesores de Educación Básica Primaria del estudio, como son:

- **Primera Fase:** los profesores de Educación Básica Primaria en conjunto con la investigadora realizan un análisis previo para dar cuenta si se distingue lo que es un ‘Lugar Geométrico’ y lo que es un sistema de ‘Geometría Dinámica’, una vez recordados los conocimientos previos del tema, se buscará en acercarse de manera intuitiva a los profesores al concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y la utilización de un sistema de ‘Geometría Dinámica’ para el caso geogebra.
- **Segunda Fase:** de implementación, elaboración de tareas y recogida de información producto del desarrollo de las actividades propuestas en cada una de las secciones del taller, esto se ira analizando mediante el Análisis Didáctico donde se pone a prueba el conocimiento didáctico curricular del profesor de matemáticas de educación básica en relación al contenido matemático y el recurso, con la intención de validar o desvirtuar el significado del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y la utilización de un sistema de ‘Geometría Dinámica’ y al mismo tiempo se recoge información para luego ser analizada.
- **Tercera Fase:** se realiza el análisis final donde se examina en detalle la información de la segunda fase dando unos resultados, que llevan al análisis donde converge los diferentes insumos para realizar el análisis didáctico, también se puede observar la organización de la nueva estructura mental del profesor de Matemáticas de Educación Básica Primaria dando origen al nuevo esquema mental del contenido matemático, en este caso, la nueva manifestación alrededor del Concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y la utilización de un sistema de ‘Geometría Dinámica’, permitiendo tener en cuenta aspectos socioculturales, económicos y políticos en beneficio de su formación continua.

**Triangulación.** Campbell y Fiske (1959) trabajaron con un enfoque multi método articulando y desarrollando la triangulación como estrategia de investigación, trazando dos líneas de desarrollo metodológico en relación a ésta.

Denzin (1970) la trabaja como el uso de diferentes métodos para el estudio de un mismo fenómeno, le abre camino para que se comprenda más ampliamente en las aplicaciones de la triangulación en la investigación social, al combinar dos o más teorías se está refiriendo a la confrontación de diferentes fuentes de datos en un estudio y se ocasiona cuando existe concordancia o discordancia entre estas fuentes, en esta investigación las categorías del Currículo, Formación de Profesores de Matemáticas de Educación Básica, la noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’ y el taller son relacionadas entre sí por las múltiples dimensiones que se consideran para hacer el análisis didáctico en el marco de las teorías de los Organizadores del Currículo de Matemáticas, por lo que con la triangulación se organiza la información del análisis para dar solución a la pregunta problema.

## 6.2 Diseño Metodológico

Esta investigación consta de un conjunto de decisiones, fases y secuencias que requirieron del empleo de técnicas e instrumentos tanto cuantitativos como cualitativos. Por tanto el diseño es más un conjunto organizado y secuencial de pasos a seguirse en el transcurso de la investigación, susceptible, en todo momento, de revisión y mejora, que en un esquema de intervención inamovible.

Un marco conceptual útil y más amplio para describir la complejidad y pluralidad del tipo de diseño que se ha adoptado basado, en dos tipologías de enfoques particulares de investigación: la investigación evaluativa de programas educativos, y la investigación-acción aplicada a la educación, se observa en los trabajos de: Pérez Juste (1994 - 2000), Fernández Ballesteros (1996), Castro (1997*a,b*), Romero (1997) y De Miguel (2000).

El tipo de diseño mixto por el que se optó en la investigación se puede considerar como un diseño susceptible de complementariedad metodológica, pluralista, integrador y participativo

basado en las investigaciones de Latorre, Del Rincón y Arnal (1996); Forns y Gómez (1996) y De Miguel, (1999, 2000); y está orientado especialmente a la toma de decisiones en la práctica.

**Contextos Curriculares.** En esta sección se presentan los distintos contextos que se articulan o coordinan necesariamente en el modelo metodológico, la población interviniente fueron profesores de Matemáticas de Educación Básica Primaria que laboran en Institución Educativa Nuestra Señora del Carmen de la ciudad de Popayán, los cuales se han formado en los conceptos matemáticos en programas de Licenciatura de Educación Básica Primaria, Licenciatura de Educación Básica y que en este trabajo se aplicó la Teoría de los Organizadores del Currículo de Matemáticas y Análisis Didáctico donde el Currículo se concibe como una propuesta de formación para Profesores de Matemáticas en sus tres sub - contextos de concreción: nacional, institucional y del aula.

A continuación se especificarán las características de los Profesores de Educación Básica Primaria en tales sub - contextos donde se concreta el Currículo:

**Nacional.** Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas. Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado Colombiano que es quien elabora las leyes educativas básicas y el municipio certificado de Popayán es quien las desarrolla mediante decretos y normas, en este aspecto se debe tener en cuenta al Ministerio de Educación Nacional define el Currículo como:

(...) el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional. (Artículo 76, Ley 115 de 1994)

Para este fin dan a conocer los lineamientos curriculares de Matemáticas y los estándares básicos de competencias los cuales dan las pautas para la elaboración de los Proyectos Educativos Institucionales de cada institución educativa, a su vez, lo anterior lleva a la elaboración de el Plan de Estudio, el Plan de asignatura, Planes de Curso, Planes de clase, Preparador de la clase, usados para la planeación, ejecución y evaluación del profesor de Matemáticas en el momento del análisis de la Unidad Didáctica

**Institucional.** Proyecto educativo- Plan de estudios. Es el segundo nivel de concreción. Corresponde a la institución educativa, a sus directivas y profesorado organizado en departamentos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los diferentes estamentos de la comunidad educativa.

En este aspecto, la planificación del currículo se realiza desde dos niveles de responsabilidad; el primero a nivel administrativo y político, que le corresponde al Estado Colombiano y al municipio certificado de Popayán y el segundo a nivel profesional que le corresponde a la Institución educativa y a los docentes para esta investigación los docentes de educación básica primaria. En otras palabras, el Estado Colombiano y el municipio deciden en la elaboración, reglamentación de las leyes y así qué elementos conceptuales y culturales deben ser objeto del trabajo en el aula y los docentes objetos de esta investigación y administrativos deben decidir de qué manera se va a trabajar en la institución educativa y aulas dichos elementos. (Ley general de Educación ley 115 de 1994)

Es aquí donde el elemento básico que integra el currículo sobre las decisiones previas que hay que tomar en la programación es el Plan de estudios que a su vez debe cumplir con:

- La identificación de los contenidos, temas y problemas de cada asignatura y proyecto pedagógico, así como el señalamiento de las diferentes actividades pedagógicas.
- La distribución del tiempo y las secuencias del proceso educativo, señalando el período lectivo y el grado en que se ejecutarán las diferentes actividades.
- La metodología aplicable a cada una de las asignaturas y proyectos pedagógicos, señalando el uso del material didáctico, de textos escolares, laboratorios, ayudas audiovisuales, la informática educativa o cualquier otro medio o técnica que oriente o soporte la acción pedagógica.
- Los logros para cada grado, o conjunto de grados, según los indicadores definidos en el proyecto educativo institucional.
- Los criterios de evaluación y administración del plan. (Artículo 38 de la ley 115 de 1994).

De acuerdo en lo dispuesto en el artículo 78 de la ley 115 de 1994, cada establecimiento educativo mantendrá actividades de desarrollo curricular que comprendan la investigación, el diseño y la evaluación permanentes del currículo, esto lleva a que las instituciones de educación

tengan autonomía para estructurar el currículo en cuanto a contenidos, métodos de enseñanza y organización de actividades (Artículo 77 de la ley 115 de 1994).

Lo anterior permite que en la institución donde laboran los docentes que hacen parte de esta investigación puedan trabajar la propuesta de formación sobre un concepto usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’, para tal fin hacen parte de esta investigación los respectivos análisis en todo momento, permitiendo así ir construyendo el conocimiento en contexto, y a la vez ir cumpliendo lo establecido. Los docentes trabajan en una institución de carácter oficial urbana ubicada en estrato 4 y dirigida por religiosas de la comunidad Franciscana.

**Del aula.** Programación de aula. Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones: Cultural, Cognitiva, Formativa y Social que a su vez se descomponen en cuatro sub - niveles Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico (Rico).

En tal sentido esta unidad didáctica se ubica en el tercer nivel de concreción, el nivel de planificación para el docente, tomando decisiones sobre contenido (dimensión cultural), objetivos y competencias (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social).

Los docentes que hacen parte de este estudio trabajan dentro del marco legal establecido por los contextos anteriores, tomando como elemento básico el Plan de estudios de la institución que integra el currículo sobre las decisiones previas que hay que tomar en los Planes de Curso- Planes de clase, y a la vez deben cumplir con:

- La identificación de los contenidos, temas y problemas de la asignatura y proyecto pedagógico, así como el señalamiento de las diferentes actividades pedagógicas a realizar.
- La distribución del tiempo y las secuencias del proceso educativo, señalando el período lectivo y el grado en que se ejecutarán las diferentes actividades.
- La metodología aplicable en la asignatura y proyectos pedagógicos, señalando el uso del material didáctico, de textos escolares, laboratorios, ayudas audiovisuales, la informática educativa o cualquier otro medio o técnica que oriente o soporte la acción pedagógica.

- Los logros para el grado, según los indicadores definidos en el proyecto educativo institucional.
- Los criterios de evaluación y administración del plan. (Artículo 38 de la ley 115 de 1994).

### **Participantes**

**Profesores de Educación Básica Primaria.** En el contexto de esta investigación cualitativa y de carácter etnográfico, la dimensión sociocultural en el que se desarrolló, los participantes estuvieron influenciados por los tres contextos descritos anteriormente. La participación en el taller y demás actividades didácticas fueron autónomas. Los profesores participantes desarrollaron las competencias funcionales y las comportamentales.

En las Competencias Funcionales se trabajaron Áreas de Gestiones como la Académica, Administrativa y Comunitaria.

Dentro del Área Académica cada docente trabajará en la planeación del área, su organización donde se vivencia el dominio curricular, la pedagogía y la didáctica.

En el Área Administrativa se trabajará con los recursos necesarios para lograr lo planeado, facilitando el seguimiento a todos los procesos llevados a cabo.

Y en el Área Comunitaria se debe tener una comunicación acertada con toda la comunidad educativa.

En las Competencias Comportamentales el profesor de Educación Básica Primaria debe tener las actitudes, valores, intereses y motivaciones que logren que todas sus funciones sean acordes a su función donde se demuestre el liderazgo y las buenas relaciones con todos los miembros de la comunidad educativa.

Para este estudio se trabajó en el Área de Gestión Académica ya que en esta parte el docente es donde trabaja la planeación y organización académica de su labor en el aula y es donde se vivencia el dominio curricular, pedagogía y didáctica.

**La investigadora.** En cada sesión el papel que desempeña la investigadora es de profesora, dirigiendo el proceso y colaborando con los profesores que participan en el estudio, asume un doble papel el de investigadora y de docente diseñando, estructurando y aplicando el taller siendo responsable de distintas actuaciones dado que el taller se programó en varias sesiones, y a su vez en varias fases. Al inicio de cada sesión explicaba la dinámica de trabajo, tiempo y recursos que

se usan en la resolución de las tareas propuestas atendiendo las dudas expuestas en el desarrollo de cada sesión.

Orientó las reflexiones que surgieron en el transcurso del taller pidiendo la participación de todos guiando el proceso de institucionalización de los conceptos y procedimientos sugeridos por los docentes participantes, complementando las respuestas aportadas.

### 6.3 Técnicas e instrumentos de recolección de Información

Esta investigación es de tipo abierto basada en una recolección de información continua con observaciones de proceso centrado en los análisis de los apuntes de los participantes y vídeos de algunos momentos de las sesiones del taller.

***Análisis y revisión documental - El Taller.*** Al término del taller se realizaron los análisis y evaluaciones definitivas sobre los distintos aspectos relacionados con los objetivos y metas propuestas.

En cada una de las secciones los profesores y la tallerista realizaron las tareas programadas y siguieron la metodología propuesta: secuenciación y organización de las actividades y descripción de la organización de las actividades

Las actividades se realizaron en 4 sesiones en subsiguiente orden de ejecución:

1. Entrega de documentación y materiales correspondientes.
2. Presentación de la actividad.
3. Realización de la actividad.
4. Reflexión y debate sobre: la adquisición de los conocimientos, Reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo. (Ver Gráfica 2. Sesiones de trabajo).



Gráfica 2. Sesiones de trabajo

En cada una de las cuatro sesiones en que se estructuró el taller, se grabaron apartes las cuales posteriormente fueron transcritas y organizadas en función del tipo de información que se considerara más relevantes en relación con las cuestiones principales de investigación.

Además, se tomaron apuntes en cada sesión. Todas estas tareas, junto con las intervenciones y producciones de los participantes durante el desarrollo de las actividades programadas para cada una de las sesiones del taller, así como durante los debates conjuntos realizados en cada sesión constituyen las principales fuentes documentales de soporte de la información y obtención de datos relevantes para nuestro trabajo.

La investigación al ser de carácter cualitativa observacional descriptiva (etnográfica), permite para realizar los análisis de los datos recogidos utilizar el método de la triangulación dado que este método permite combinar dos o más teorías, fuentes de datos, métodos de investigación, en el estudio de un fenómeno singular, ya que este trabajo es multi - metodológico (Análisis Didáctico, Evaluación de Programas, Triangulación), así facilita explicar de manera más completa, la riqueza y complejidad de diseñar, analizar y evaluar una propuesta de formación.

**Tipos de Actividades.** Se incluyeron en las actividades conocimientos previos para abordar este tema tales como: recursos tecnológicos, formulación de problemas, solución de problemas, así como de representación gráfica.

También se utilizaron actividades de construcción de significados, como por ejemplo, donde se incluyan pasos a seguir en la obtención de la gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.

Entre las actividades de ejercitación, se destacan las de suministrar una gran variedad de pautas para que se reconozca pasos a seguir para hallar un ‘Lugar Geométrico’.

**Descripción de los contenidos específicos.** Entre los términos que aparecen en el tema, se le dio especial importancia a los siguientes:

- Recurso tecnológico - Sistema de ‘Geometría Dinámica’
- ‘Lugar Geométrico’
- Formulación de problemas
- Solución de problemas

**Descripción de conceptos tratados**

- Geogebra como sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Formular problemas.
- Resolver problemas.
- Noción de ‘Lugar Geométrico’.

**Destrezas desarrolladas:**

- Reconocimiento de Geogebra como un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Formular problemas que involucren el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Resolver problemas que involucren el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Representación de un ‘Lugar Geométrico’.

**Tipos de razonamiento que se consideraron:**

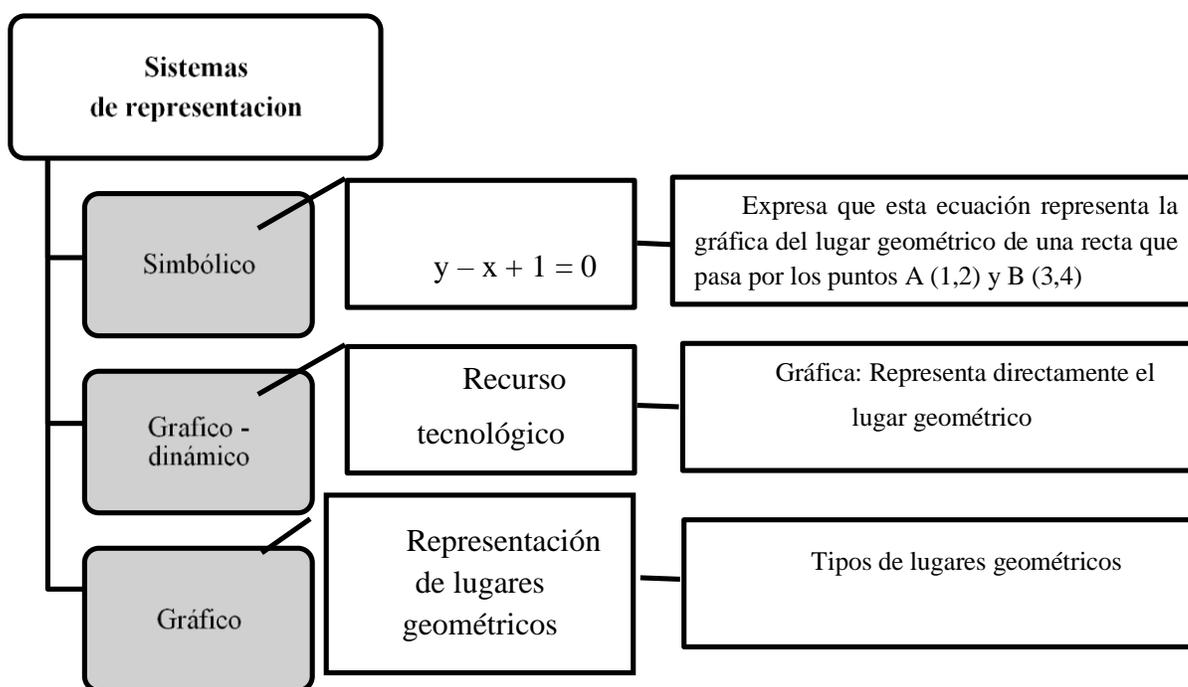
- Deductivo
- Inductivo
- Analógico
- Figurativo

Por último, las estrategias que se trabajaron:

- Reconocimiento de geogebra como sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Aplicación de técnicas de formulación de problemas donde se involucre el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Hallar un ‘Lugar Geométrico’.

### Relación entre contenidos y sistemas de representación

En el siguiente grafico muestro la relación entre contenidos y los sistemas de representación que se desarrollan.



Gráfica 3. Relación entre contenidos y los sistemas de representación

**Secuenciación y organización de las actividades.** Las actividades se realizaron en 4 sesiones subsiguientes de desarrollo:

1. Reflexión conjunta sobre las nociones del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y el sistema de ‘Geometría Dinámica’.
2. Contacto con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ - Geogebra. Construir el ‘Lugar Geométrico’.

3. Dibujar el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con geogebra.
4. Formulación y resolución de problemas.

**Tipos de actividades.** Se incluyeron en las actividades conocimientos previos para abordar este tema, tales como recursos tecnológicos, formulación de problemas, solución de problemas, así como de representación gráfica.

También se utilizaron actividades de construcción de significados, como por ejemplo, donde se incluyan pasos a seguir en la obtención de la gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.

Entre las actividades de ejercitación, se destacan las de suministrar una gran variedad de pautas para que se reconozca pasos a seguir para hallar un ‘Lugar Geométrico’.

Por último, es necesaria la propuesta de problemas para que el profesor o futuro profesor contextualice todos los conocimientos que aprende a lo largo del taller.

**Unidad Didáctica.** Se presentó la unidad didáctica de Noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un Sistema de ‘Geometría Dinámica’. También la descripción del diseño, planificación, implementación y evaluación objetiva (estructural y logística). Se Incluye el trabajo propuesto a los profesores, así como una planificación de las sesiones.

La estructura de esta unidad didáctica se basa en la teoría del análisis didáctico, que consta de: Análisis de currículo, Análisis de contenido, Análisis cognitivo y Análisis de Instrucción - Evaluación.

La intención que se toma del análisis didáctico es explorar con profundidad el significado del concepto matemático, para lo cual se establece un conjunto de instrucciones, es decir, secuencias de actividades para recopilar, organizar y analizar la información. Además, las fuentes del análisis didáctico como lo dice Rico (2004), Lupiañez (2013), y Gómez (2005): aportan instrumentos específicos como: tablas, esquemas conceptuales, entre otros que permiten organizar la información.

En el Análisis de currículo se revisó el currículo de Matemáticas desde los tres niveles de concreción: Nacional, institucional y del aula.

- **Nivel Nacional.** En el primer nivel de concreción, se miran los aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas que corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del Estado que es quien elabora las leyes educativas básicas como Ley general de educación

ley 115 de 1994, y el municipio certificado de Popayán es quien las desarrolla mediante decretos y normas.

- **Nivel Institucional.** En el segundo nivel de concreción se mira el Proyecto educativo-Plan de estudios (PEI) Correspondiente a la institución educativa, a sus directivas y profesorado organizado en departamentos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los diferentes estamentos de la comunidad educativa.
- **Nivel del Aula.** En el tercer nivel de concreción Programación de aula., se observó la planificación de los profesores que intervienen en la investigación, mirando las decisiones sobre contenido que es la dimensión cultural, objetivos y competencias siendo la dimensión cognitiva, observando metodología que es la dimensión formativa y la evaluación que es la dimensión social.

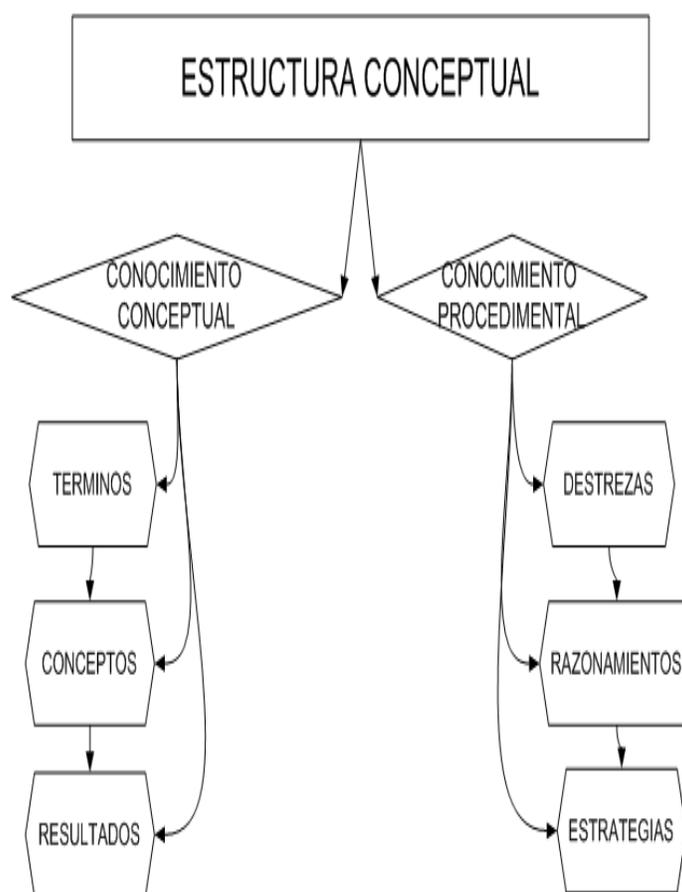
El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones (Cultural, Cognitiva, Formativa y Social) que a su vez se descomponen en cuatro niveles: Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico (Rico, 1997).

Por lo consiguiente unidad didáctica se ubica en el tercer nivel de concreción, el nivel de planificación para el docente, tomando decisiones sobre contenido, objetivos y competencias, metodología y evaluación.

En el Análisis de contenido se mirará el de desarrollo histórico del tema, estructura conceptual, los sistemas de representación, fenomenología del tema y modelización y resolución de un problema vía modelización.

**Desarrollo Histórico del Tema.** La evolución histórica del concepto de ‘Lugar Geométrico’ se puede dividir en tres grandes periodos, que se diferencian básicamente por el aporte de Apolonio de Perga, quien estudio curvas conocidas como cónicas, en cada uno de estos periodos subyace el concepto, aunque no siempre sea nítido.

**Estructura Conceptual.** La revisión histórica ayuda a diseñar y analizar la estructura conceptual del tema, donde se expone un resumen de los términos y conceptos relacionados a continuación:



Gráfica 4. Estructura conceptual

**Los sistemas de representación.** En esta sección se describió los distintos sistemas de representación mediante los cuales se hace presente el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y todos los conceptos relacionados con él. Los tipos de representaciones son los siguientes:

- Representación simbólica
- Representación gráfico-dinámica
- Representación gráfica

**Fenomenología del tema y modelización.** En esta sección se plantearon las situaciones y los contextos en los que se desarrolla el tema, así:

- Análisis de Contextos
- Análisis de Fenómenos
- Análisis de Situaciones

- Resolución de un problema vía modelización

La modelización de este tema se determinará básicamente en las interacciones que se dan entre modelización, el sistema de ‘Geometría Dinámica’ y el contenido matemático.

En el Análisis Cognitivo se observaron los focos de interés para el aprendizaje sobre los cuales se clasifican los objetivos específicos que se espera que alcance el docente participante en este estudio los cuales son:

- Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.
- Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

Los objetivos específicos de esos focos de interés son:

Cuadro 3. Objetivos Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’

<b>Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’</b>	
<b>Objetivos</b>	- Comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
	- Distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
	- Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

Cuadro 4. Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’

<b>Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’</b>	
<b>Objetivos</b>	- Argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo a partir de situaciones dadas.
	- Reconocer y hallar lugares geométricos.
	- Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

Cuadro 5. Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’

<b>Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.</b>	
<b>Objetivos</b>	- Reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

	– Justificar de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.
	– Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

También se observó cómo los anteriores objetivos se vinculan con los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de matemáticas:

- Formular y Resolver Problemas
- Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad
- Comunicar
- Razonar
- Formular, Comparar ejercitar procedimientos y algoritmos

Por último, se identificaron las falencias y las dificultades que se presentaron en el desarrollo de la unidad.

En el análisis instrucción – evaluación se observó el grado de complejidad de las tareas, recursos y materiales que se utilizaron y los criterios de instrumentos de evaluación.

## 6.4 Estructura del Diseño Metodológico

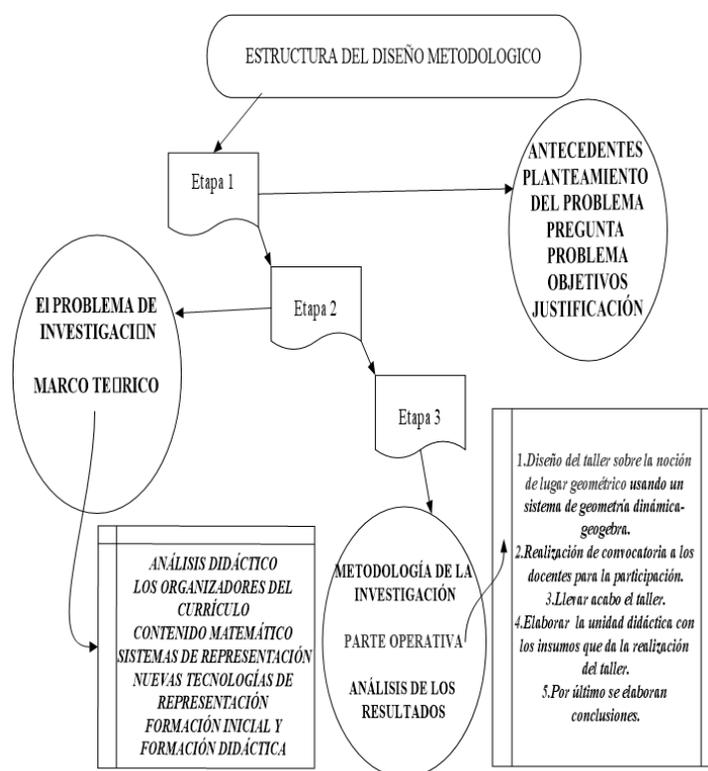
### 6.4.1 Etapas.

Etapas que se dieron para llegar al objetivo de este proceso investigativo. Las etapas son las siguientes:

- **Etapa 1.** En esta etapa se realiza el diagnóstico donde se comenta el proceso de caracterización, de donde surgió la problemática llevando al planteamiento del problema donde se estructura los objetivos, la justificación y la pregunta de investigación con la revisión de literatura, realizando así el estado del arte desde la visual que dan las tres concreciones del currículo, llegando a la escritura del anteproyecto.
- **Etapa 2.** En esta etapa se realiza la propuesta de investigación, se trabaja en los primeros capítulos los cuales dan cuenta del análisis realizado previamente, en el capítulo uno se

concreta el problema de investigación, luego de la revisión del estado del arte donde se establece las fuentes de donde se sacó la información teórica y los antecedentes del problema se escribe el capítulo dos donde se trabaja el Marco Teórico.

- **Etapa 3.** En esta etapa se realiza el capítulo 3 donde se trabaja la metodología de la investigación donde se justifica por qué se asumió ese diseño y como este contribuye a la investigación. Luego se va a la parte operativa donde:
  1. Se diseña el taller sobre la noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’- geogebra.
  2. Se realiza la convocatoria a los docentes para la participación.
  3. Se lleva acabo el taller.
  4. Se trabaja en la unidad didáctica con los insumos que da la realización del taller.
  5. Por último, se elabora el análisis.



Gráfica 5. Estructura del Diseño Metodológico

## 6.4.2 Plan de acción

<b>Etapa Uno</b>	
<b>Descripción del problema</b>	<b>Estrategia</b> - Análisis preliminar o inicial
Producción:	
<b>Diagnóstico</b>	Se realiza:  1- Se realiza la revisión de antecedentes. 2- Se describe el problema. 3- Se formula la pregunta. 4- Se redactan los objetivos. 5- Se justifica la pertinencia del proyecto a realizar. 6- Escritura del anteproyecto .
<b>Problema de investigación</b>	
Fecha: años 2009 - 2018	
<b>Etapa Dos</b>	
<b>Construcción del Marco Teórico</b>	<b>Estrategia</b> - Análisis preliminar - Análisis curricular del contenido
Producción:	
<b>Problema de investigación</b>	Se realiza:  1- Se concreta el problema de investigación. 2- Selección de teorías que sustentan y justifican el trabajo.  Análisis didáctico. Los organizadores del currículo. Contenido matemático. Sistemas de representación. Nuevas tecnologías de representación. Formación inicial y formación didáctica
<b>Marco Teórico</b>	
Fecha: años 2009 - 2018	
<b>Etapa Tres</b>	
Construcción Marco Metodológico Parte Operativa Análisis Conclusiones	Estrategia Análisis de instrucción Análisis de evaluación Retroalimentación Socialización
Producción:	

<b>Marco Metodológico</b>	<p>Se realiza:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Marco metodológico.</li> <li>2. Diseño metodológico.</li> <li>3. Técnicas e instrumentos de recolección de información.</li> <li>4. Estructura del diseño metodológico.</li> <li>5. Se diseña el taller sobre la noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’- geogebra.</li> <li>6. Se realiza la convocatoria a los docentes para la participación.</li> <li>7. Se lleva acabo el taller.</li> <li>8. Se trabaja en la unidad didáctica con los insumos que da la realización del taller.</li> <li>9. Análisis de información.</li> <li>10. Por último se elaboran las conclusiones finales.</li> </ol>	
<b>Presentación y análisis de resultados</b>		
<b>Conclusiones</b>		
	Fecha: años 2009 - 2018	

## 7. Resultados

En cada una de las cuatro sesiones en que se estructuró el taller, se tomaron apuntes en cada sesión, se grabaron apartes de estas las cuales se transcribieron y organizaron en función del tipo de información que se consideraron relevantes para la investigación.

En este estudio se decidió no hacer un análisis individualizado de casos porque con la información que contamos las diferencias entre un docente y otro en un mismo grupo o tipos no resultan tan reveladoras y el interés principal del estudio consiste en determinar aquellos aspectos comunes que permiten caracterizar lo producido. Recordemos que nuestros objetos de estudio son los docentes y en general el taller y la unidad didáctica; y estos tres tipos permiten caracterizar al grupo de docentes mejor que si hiciéramos una descripción detallada de cada uno de ellos. Para nuestro objetivo principal de este estudio, la caracterización de estos tipos resulta una tarea complementaria que enriquece y da sentido cualitativo a los análisis y discusiones realizadas en el capítulo anterior y, lo consideramos un resultado relevante, producto de la investigación.

Recogemos con otro sentido, mediante una reconstrucción narrativa de cualidades comunes y mediante la técnica de triangulación, los resultados de los análisis, obtenidos de manera segmentada y mediante los métodos en el capítulo anterior, con miras a la determinación y caracterización de los profesores.

La Investigación al ser de carácter cualitativo observacional descriptivo permitió realizar los análisis de los datos recogidos utilizando el método de la triangulación dado que este método permitió combinar dos o más teorías, fuentes de datos, métodos de investigación, en este estudio en particular.

Se incluyeron en las actividades conocimientos previos para abordar este tema, tales como recurso tecnológico, formulación de problemas, solución de problemas, así como de representación gráfica, también se utilizaron actividades de construcción de significados, como por ejemplo, donde se incluyeron pasos a seguir en la obtención de la gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.

Entre las actividades de ejercitación, se destacaron las que suministraron una gran variedad de pautas para que se reconociera pasos a seguir para hallar un ‘Lugar Geométrico’, por último, se propusieron problemas para que los docentes participantes contextualizaran sus conocimientos.

Descripción de los contenidos específicos:

- Recurso tecnológico - Sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- ‘Lugar Geométrico’.
- Descripción de conceptos tratados: GeoGebra como sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Formular problemas.
- Resolver problemas.
- Destrezas desarrolladas:
  - Reconocimiento de Geogebra como un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
  - Formula problemas que involucren el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
  - Resolver problemas que involucren el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
  - Representación de un ‘Lugar Geométrico’.
- Tipos de razonamiento considerados:
  - Deductivo
  - Inductivo
  - Analógico
  - Figurativo

Estrategias trabajadas:

- Reconocimiento de geogebra como sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Aplicación de técnicas de formulación de problemas donde se involucre el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Hallar un ‘Lugar Geométrico’.

### 7.1 Hallazgos en relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación

A continuación, se describirán los hallazgos, teniendo en cuenta que el conocimiento matemático escolar se concibe estructurado en conceptos y procedimientos, y simbolizado y procesado mediante diferentes tipos de representaciones. Y que estas representaciones, no sólo se

consideran fundamentales para la didáctica como disciplina y práctica, sino insolubles de los propios conocimientos matemáticos escolares sobre la noción de ‘Lugar Geométrico’.

La mayoría de los docentes que participaron en el taller tendieron a identificar el concepto matemático con su representación simbólica estándar. Así, por ejemplo, para el concepto de ‘Lugar Geométrico’, los docentes participantes consideraron que coincidía con su representación simbólica-algebraica.

Los docentes en relación al conocimiento conceptual y después de la revisión histórica del tema les ayudan a diseñar y analizar la estructura conceptual del tema, donde exponen un resumen de los términos y los conceptos que se relacionan. (Ver Cuadro 6. Términos y conceptos de ‘Lugar Geométrico’ que se relacionan con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.).

Cuadro 6. Términos y conceptos de ‘Lugar Geométrico’ que se relacionan con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

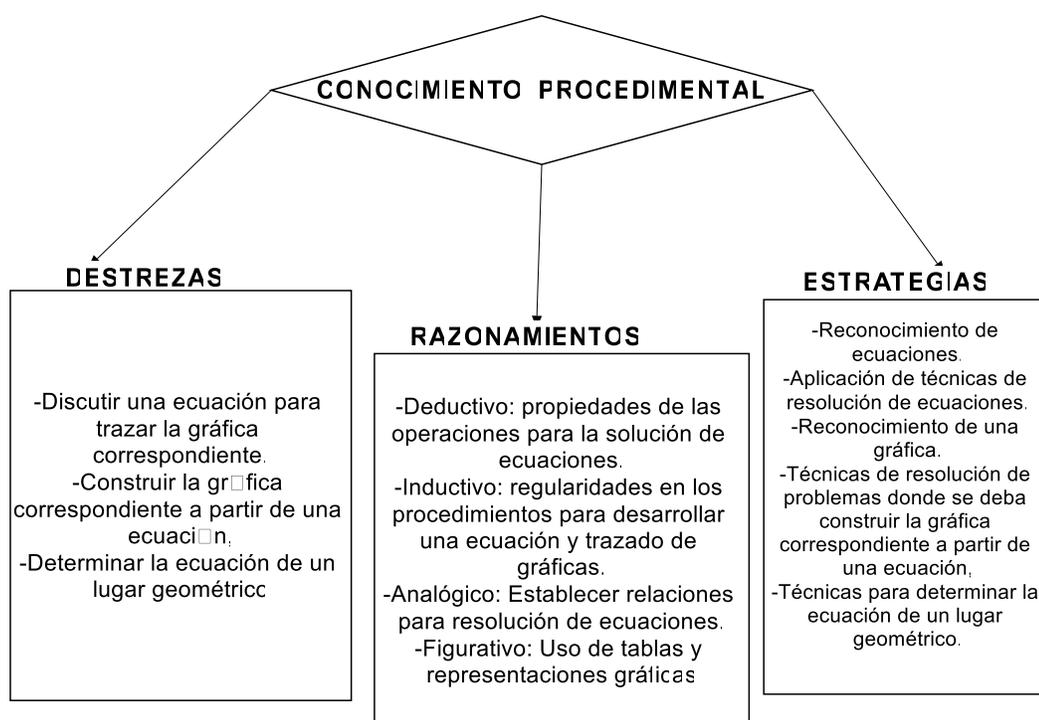
<b>Términos</b>	<b>Conceptos</b>
Sistema lineal.	Recta horizontal dirigida X y recta vertical dirigida Y.
Sistema coordenado en el plano.	Ejes de coordenadas
Distancia entre dos puntos dados.	La distancia $d$ entre dos puntos $P1(X1,Y1)$ y $P2(X2,Y2)$ está dada por la fórmula
Pendiente de una recta.	Pendiente dado el ángulo Pendiente dado el vector Pendiente dados dos puntos Pendiente dada la ecuación de la recta
Gráfica de una ecuación.	Dada una ecuación interpretarla geoméricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente
Construcción de curva.	Pasos a seguir para llegar a la construcción

Ecuación de un 'Lugar Geométrico'	Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación
-----------------------------------	---

Esto lleva a ver unos resultados así:

- Gráfica de una ecuación
- Construcción de curva
- Ecuación de un 'Lugar Geométrico'

Con lo anterior se infiere que los docentes participantes en relación al conocimiento procedimental tienen unas destrezas, unos razonamientos y unas estrategias así:



Gráfica 6. Conocimiento procedimental

Las concepciones academicistas y canónicas del conocimiento matemático, que priman sobre unas maneras de concebirlo y tratarlo más adecuadas para el ámbito escolar, pueden ir bien en la disciplina matemática, donde las propiedades gráficas y sus relaciones con las respectivas

expresiones simbólicas pueden ser consideradas anecdóticas y dadas implícitamente, hasta llegar al extremo de prescindir absolutamente de cualquier referencia gráfica y considerar que los términos son solamente un atributo de la correspondiente expresión algebraica y no de los otros tipos de representación y hasta de fenómenos asociados.

Sin embargo, los docentes participantes en el taller toman una postura de flexibilidad crítica y efectividad autónoma para modificar y enriquecer, no sólo terminológicamente, sino también conceptual y didácticamente, sus ideas y concepciones iniciales, tal como se comprueba, observando las creaciones e intervenciones iniciales y finales en las secciones del taller.

Al realizar las comparaciones, se puede comprobar que los docentes introducen aspectos representacionales y didácticos importantes, sobre los cuales se insisten durante el desarrollo del taller. Los docentes ponen en evidencia haber accedido a una comprensión relevante, trabajada en el taller, sobre la naturaleza del concepto, que consiste en no confundir el concepto escolar con alguna de sus múltiples representaciones, especialmente con su representación simbólica-algebraica.

Todos los docentes tienen en cuenta el carácter múltiple de las representaciones y de la conveniencia didáctica de interrelacionar con reciprocidad al menos dos tipos de representación como el algebraico y el gráfico, como condición para lograr una mejor comprensión del concepto o procedimiento en cuestión.

A continuación se describirán los distintos sistemas de representación mediante los cuales se hace presente el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y todos los conceptos relacionados con él. Para cada una de las representaciones se destaca sus características sus usos y su finalidad. Estos tipos de representaciones son los siguientes: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

#### ▪ **Representación simbólica**

Este sistema de representación se basa en la identificación de un ‘Lugar Geométrico’ a través de su ecuación, y conceptos generales como ejemplo se tienen:

$$y - x + 1 = 0$$

En este caso se expresa que esta ecuación representa la gráfica del ‘Lugar Geométrico’ de una recta que pasa por los puntos A (1,2) y B (3,4).

$$ax + by + c = 0$$

En este caso se expresa que esta ecuación representa la ecuación general de la línea recta.

### **Puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento AB**

En este caso es un concepto general que expresa que si estos puntos del plano equidistan de A y B quiere decir que es el ‘Lugar Geométrico’ mediatriz.

### **Puntos del plano que equidistan una distancia r de un punto O llamado centro.**

En este caso es un concepto que expresa que si todos los puntos cumplen representan el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia.

#### ▪ **Representación gráfico-dinámica**

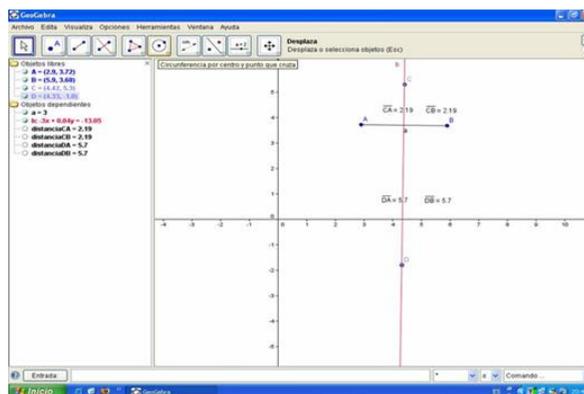
Este sistema de representación se manifiesta cuando se interactúa con un recurso siendo en este caso un sistema de ‘Geometría Dinámica’ el grado de abstracción es tecnológico.

Los sistemas de ‘Geometría Dinámica’ actuales son de gran utilidad para la representación de lugares geométricos siendo muchas las formas en que se puede representar en estos sistemas como ejemplos:

**Simbólica:** Introduciendo una ecuación.

**Gráfica:** Representando directamente el ‘Lugar Geométrico’.

El sistema de ‘Geometría Dinámica’ que se utilizó para ello, en este caso, es GeoGebra.

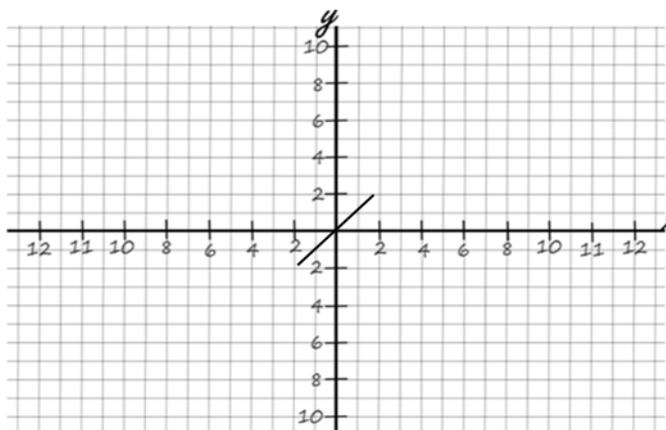


Gráfica 7. Representando directamente el ‘Lugar Geométrico’

En esta imagen se resalta el ‘Lugar Geométrico’ mediatriz en color rojo, de un segmento calculado además las distancias de los puntos C y D extremos del segmento. Estas distancias aparecen sobre el gráfico y también en la pantalla de la izquierda.

### ▪ Representación gráfica

Este sistema de representación se manifiesta cuando se reconoce, a partir de la gráfica de un ‘Lugar Geométrico’, la existencia de la ecuación.



Gráfica 8. Representación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’

De esta manera se representa gráficamente el ‘Lugar Geométrico’ de una línea recta de la forma  $y = mx + b$ , donde  $m=1$  y  $b=1$  llegando a que:  $y = x + 1$ .

Estos análisis y hechos ponen de manifiesto que los docentes han comprendido la importancia de considerar múltiples alternativas representacionales y trabajar no sólo las relaciones entre diferentes tipos de representación, sino también el carácter estructural y sistémico de cada sistema de representación.

### 7.2 Hallazgos en relación con la fenomenología del tema y la modelización

En relación con la incorporación de las nuevas propuestas y tecnologías las primeras reflexiones y conclusiones de los docentes se refirieron críticamente a la necesidad y conveniencia de reformar y mejorar los procesos actuales de formación de los profesores de matemáticas y sus propias concepciones sobre el conocimiento matemático y su enseñanza con una reflexión autocrítica.

Esta conciencia y convicción de la necesidad de un “cambio curricular y didáctico”, así como de sus propias maneras de concebir el conocimiento matemático y su enseñanza, lo tienen claro,

tiene que ser a través de los procesos de formación didáctica que reciben o deben recibir los docentes. Seguidamente se plantearon las situaciones y contextos en los que se desarrolló el tema.

### **Análisis de contextos**

En este tema se responde siempre a los siguientes interrogantes:

- Dada una expresión algebraica, ¿se puede describir en términos geométricos el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que cumplen dicha expresión?
- Dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, ¿se puede encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos?

### **Análisis de fenómenos**

- Fenómenos físicos como en el sistema de navegación de veleros donde las vergas-náuticas dispuestas horizontal y simétricas respecto a los mástiles forman el ‘Lugar Geométrico’ mediatriz
- Solución de problemas relacionados con figuras formadas por puntos que cumplen determinadas condiciones referidas a su posición.

### **Análisis de situaciones**

Situación artística: Los lugares geométricos como la mediatriz, con los puntos equidistantes a los extremos de un segmento o la porción de una circunferencia que es el arco con la equidistancia y la repartición de fuerzas ayudan a trabajar con la métrica en la arquitectura y en el arte.

Situación laboral: La rueda a través del tiempo ha estado presente en muchos inventos entre los que podemos enumerar como la bicicleta, el automóvil, tractor, carretas, etc. Inventos que están presentes en la vida laboral.

Aquí el ‘Lugar Geométrico’ utilizado es la circunferencia, ya que como todos los puntos equidistan a un único punto llamado centro permite repartir las fuerzas y provocar los giros aplicando una fuerza en ese punto determinado.

Situación científica: La forma circular que tiene los relojes se debe a la importancia que tiene el centro de la circunferencia, posibilitando así un solo centro de giro para llegar a todas las partes por igual para medir así el tiempo.

Situación personal: Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona ('Lugar Geométrico') que describe en el terreno.

La respuesta será que esto depende del lugar en el que este la estaca, y la condición determinante es que las diferentes zonas sus puntos deben estar dentro del terreno y a una distancia de la estaca igual o menor que 4, los puntos que cumplen esta condición constituyen un 'Lugar Geométrico'.

Los docentes, consideran que los problemas de las dificultades, introducción y desarrollo del tema sobre la noción de 'Lugar Geométrico' son similares, aunque más simples, sobre las cuales consideran que, de todos modos, no se profundiza.

Por estas razones, proponen desarrollar una serie de actividades y ejercicios sobre las el tema, considerando estos aspectos cognitivos de las dificultades y sus causa, y utilizando una manera más sistemática, como herramienta de apoyo para desarrollar estas actividades y ejercicios.

### **Resolución de un problema vía modelización**

La modelización de este tema está determinada básicamente en las interacciones que se dan entre modelización, el sistema de 'Geometría Dinámica' y el contenido matemático. A modo de ejemplo se realizó el último ejercicio planteado:

Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona ('Lugar Geométrico') que describe en el terreno.

Solución:

- 1) Se observa e identifica los factores que llevaran a las pautas a seguir, con la situación de lo real dentro de las especificaciones del problema matemático.
- 2) Se conjetura las relaciones entre los factores para realiza el dibujo mental, con la manipulación física identificando el objeto matemático. El enunciado del problema lleva al modelo matemático, formulación de una aproximación a la solución.
- 3) Se realiza la manipulación del sistema de geometría dinámico para el caso geogebra, se representa radio de la circunferencia se crea la imagen, de la formulación de una

aproximación a la solución se pasa a la solución y así se completa la solución matemática. Se analiza y se obtienen las conclusiones de los resultados.

En la solución matemática se pasa a interpretar en el contexto del modelo. Al usar el sistema de ‘Geometría Dinámica’ se permite un cambio de contexto permitiendo aplicar propiedades en este caso el sistema de ‘Geometría Dinámica’-geogebra actúa como herramienta de modelización matemática.

### 7.3 Hallazgos en relación con las expectativas y ejemplificación de tareas desde los objetivos y los procesos generales.

De algún modo las actitudes desfavorables o ineficaces se ponen de manifiesto, en las intervenciones de debate y reflexión conjunta, sino también por las propias limitaciones de las propuestas y demás producciones. En esta tipología también, dicha predisposición favorable y efectiva, se ha puesto de manifiesto en las propias prácticas y producciones didácticas de los docentes participantes.

De acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal, y en particular sobre las actitudes, estas tienen, básica y esencialmente, un carácter dinámico y situado en el contexto de la acción. Por eso, para nosotros, su desfavorabilidad está reflejada también en la no presencia de indicadores efectivos dentro de la misma práctica.

▪ **Expectativas.** Se establecieron los siguientes focos de interés para el aprendizaje, sobre los cuales se clasificaron los objetivos específicos que lograría el docente al que va dirigido esta unidad didáctica:

- Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.
- Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

Los objetivos específicos a desarrollar serían:

#### **Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’**

- Comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

- Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

### **Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’**

- Argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.
- Reconocer y hallar lugares geométricos.
- Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

### **Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’**

- Reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Justificar de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.
- Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

#### **▪ Focos de interés**

A continuación se relacionan los focos de interés de parte de las docentes participantes y de su relación con los 9 objetivos relacionados, y a su vez se puede observar también la vinculación de estos objetivos con los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de Matemáticas (Ver Cuadro 7. Focos de interés de parte de los docentes).

Cuadro 7. Focos de interés de parte de los docentes

<b>FRP</b>	=	Formular y resolver problemas.
<b>MPF</b>	=	Modelar procesos y fenómenos de la realidad
<b>C</b>	=	Comunicar
<b>R</b>	=	Razonar
<b>FCE</b>	=	Formular, comparar ejercitar procedimientos y algoritmos

Cuadro 8. Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’

<b>Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.</b>		<b>FRP</b>	<b>MPF</b>	<b>C</b>	<b>R</b>	<b>FCE</b>
<b>1</b>	Comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’(1)	x	x		x	
<b>2</b>	Distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.(2)			x	x	
<b>3</b>	Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.(3)	x	x		x	x
<b>TOTAL</b>		<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>

Cuadro 9. Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’

<b>Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’</b>		<b>FRP</b>	<b>MPF</b>	<b>C</b>	<b>R</b>	<b>FCE</b>
<b>1</b>	Argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.(4)	x	x			x
<b>2</b>	Reconocer y hallar lugares geométricos. (5)	x	x	x	x	x
<b>3</b>	Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’). (6)		x	x		x
<b>TOTAL</b>		<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>

Cuadro 10. Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

<b>Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’</b>		<b>FRP</b>	<b>MPF</b>	<b>C</b>	<b>R</b>	<b>FCE</b>
<b>1</b>	Reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’. (7)	x	x		x	x
<b>2</b>	Justificar de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas. (8)	x		x	x	x
<b>3</b>	Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.(9)	x	x	x	x	x
<b>TOTAL</b>		<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

La siguiente tabla muestra el balance total de contribución al desarrollo de los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de Matemáticas:

Cuadro 11. Balance total de contribución al desarrollo de los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de Matemáticas.

<b>Balance Total</b>		<b>FRP</b>	<b>MPF</b>	<b>C</b>	<b>R</b>	<b>FCE</b>
<b>1</b>	<b>Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.</b>	2	2	1	3	2
<b>2</b>	<b>Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’</b>	2	3	2	1	3
<b>3</b>	<b>Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de</b>	3	3	2	3	3
<b>TOTAL</b>		<b>7</b>	<b>8</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>8</b>

Se puede observar en esta última tabla que a los procesos generales a los que más se contribuye son **MPF** y **FCE** mientras que al resto se contribuye en menor medida. Esto puede resultar engañoso no es que se les dé poca importancia a estos procesos generales, sino que cada foco puede estar más relacionado con unos procesos generales que con otros, pero esto no quiere decir que en el desarrollo de las sesiones de clase no se dedique el suficiente tiempo para desarrollar todos los procesos generales de la manera más uniforme posible.

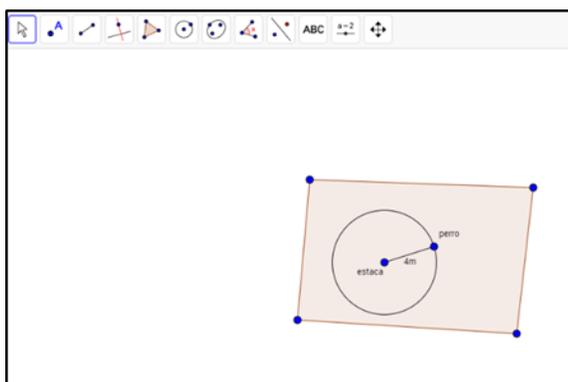
### Ejemplificación de tareas desde los objetivos y los procesos generales

Se seleccionan a continuación dos objetivos que son significativos de esta unidad didáctica:

- Objetivo 6: Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

Para alcanzar este objetivo y contribuir al desarrollo de los procesos generales de “C= Comunicar” y “R= Razonar” se propondría la siguiente tarea:

A la vista de la siguiente gráfica responder los interrogantes:



- ¿En qué puntos se relacionan el concepto y el recurso tecnológico? Justifica la respuesta.
- Decide hay relación entre el concepto matemático y el sistema de ‘Geometría Dinámica’, realizar de manera justificada.
- ¿Se puede calcular un ‘Lugar Geométrico’ partir de la gráfica? Justifica la respuesta.

- Objetivo 9: Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

Para alcanzar este objetivo y contribuir al desarrollo de los procesos generales propondría la siguiente tarea:

- a) Plantear situaciones de formación.
- b) Decidir y justificar los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan plantear situaciones de formación.

#### 7.4 Hallazgos en relación con errores y dificultades previsibles en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

Es importante tener en cuenta los errores en el aprendizaje de las matemáticas, ya que:

- **Primero.** Puede ser que un docente tenga problemas a la hora de asimilar un concepto, o que venga algún error de talleres o temas anteriores. Pero en ambos casos si se ayuda a que el docente tome conciencia de su error, se potenciará su actitud crítica, y se podrá enmendar ese error.
- **Segundo.** Es posible también que al profesor se le haya transmitido algún concepto de forma que éste no es significativo. En este caso, el error será un indicativo que debe intentar mirar de otra manera, con otro método, otros ejemplos, esto hace que se depure el proceso de enseñanza.
- **Tercero.** La propia dificultad de un contenido puede originar errores, lo que, como antes, será señal para el profesor de qué parte del contenido necesita más esfuerzos a la hora de ser transmitido.

Las dificultades y errores más significativos de esta unidad didáctica fueron:

- D1. Dificultades para comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- D2. Dificultades para distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- D3. Errores al explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

- D4. Dificultades al argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.
- D5. Problemas al reconocer y hallar lugares geométricos.
- D6. Conflicto al relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).
- D7. Dificultad reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- D8. Dificultades de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.
- D9. Dificultades para Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

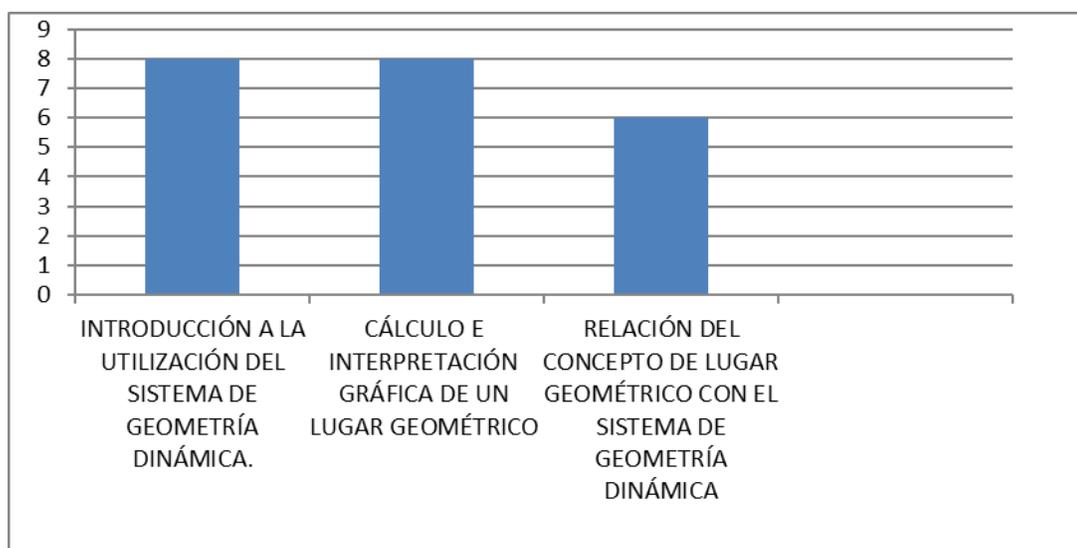
Se presenta la siguiente tabla de asociación entre dificultades y objetivos:

Cuadro 12. Asociación entre dificultades y objetivos

<b>Dificultades</b>		<b>Objetivos asociados</b>
<b>D1</b>	Dificultades para comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	2,4,7,8,9
<b>D2</b>	Dificultades distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	1,4,7,8,9
<b>D3</b>	Errores al Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	4, 5, 6
<b>D4</b>	Dificultades al argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.	1, 2, 7,8,9
<b>D5</b>	Problemas al reconocer y hallar lugares geométricos.	3, 4, 6

<b>D6</b>	Conflicto al relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).	3, 4, 5
<b>D7</b>	Dificultad reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	1, 2, 4, 8,9
<b>D8</b>	Dificultades de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.	1, 2, 4, 7, 9
<b>D9</b>	Dificultades para Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.	1, 2, 4, 7, 8

Para extraer conclusiones se representó en un diagrama de barras el recuento de errores ligados a objetivos de los tres focos fundamentales.



Gráfica 9. Presentación de errores ligados a objetivos de los focos fundamentales.

Es fundamental poner cuidado para próximos talleres en que los docentes estén más familiarizados y manejen un sistema de ‘Geometría Dinámica’ los cuales estén ligados de acuerdo a su expectativa de trabajo frente a los conceptos.

### 7.5 Grados de complejidad de las tareas

Se presentan para cada grado de complejidad un ejemplo de tarea:

- **Reproducción:**

Introducción a la resolución de problemas con lápiz y papel.

Aproximación a la solución de problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.

Mediatriz: es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento.

Circunferencia: es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

- a. Formular dos problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
- b. Realizar las gráficas de la solución de problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
- c. Explicar cuál fue la forma de dar solución.

- **Conexión:**

Contacto con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ - Geogebra.

- a. Construir el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con geogebra.
- b. Comparar con la construcción del día anterior.

- **Reflexión:**

Aproximación a la solución de problemas que involucran el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con geogebra.

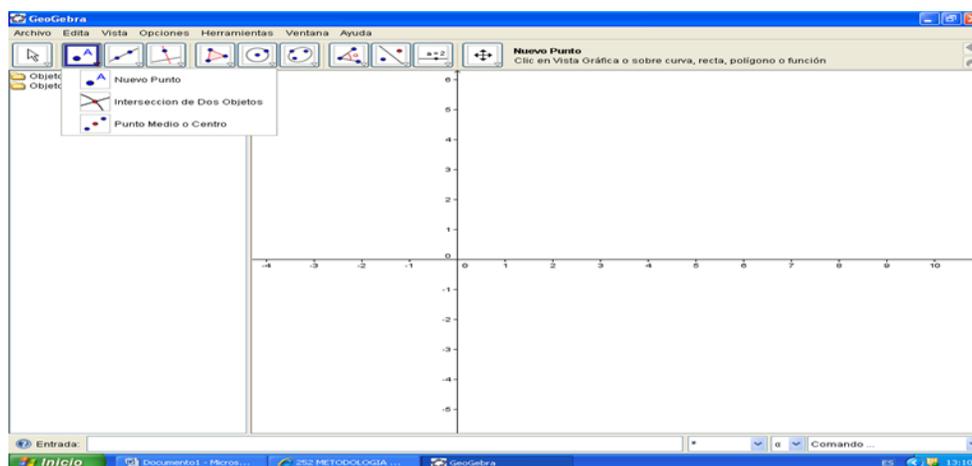
Resolver la siguiente situación:

Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona ('Lugar Geométrico') que describe en el terreno.

Criterios utilizados en la clasificación: para reproducción en este tema el criterio utilizado es que el docente de Matemáticas de Educación Básica Primaria, bien con su conocimiento previo, o mediante aplicación directa de un concepto o procedimiento obtiene el resultado; para conexión, el criterio es que el docente tiene que decidir ante una variedad de técnicas y para ello tiene que analizar el tipo de solución. Y para reflexión se considera problemas relacionados con fenómenos donde a veces el 'Lugar Geométrico' no está descrito mediante una fórmula y es necesaria interpretar lo que se pide.

### Recursos y materiales didácticos

Los materiales y recursos didácticos específicos que se utilizaron en la unidad didáctica fueron software de 'Geometría Dinámica': En esta unidad se utilizara GeoGebra que es software libre que reúne Geometría y Álgebra (Ver Gráfica 10. Software de 'Geometría Dinámica').



Gráfica 10. Software de 'Geometría Dinámica'

De manera muy sencilla, se pueden construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y también gráficas de funciones que pueden ser fácil y dinámicamente modificadas mediante el ratón. El programa también admite expresiones como:  $g: 3x + 4y = 7$  o:  $c: (x - 2)^2 +$

$(y - 3)^2 = 25$  y ofrece una gama de comandos entre los que cabe destacar ‘Lugar Geométrico’, la derivación y la integración.

La característica más destacable de *GeoGebra* es la doble percepción de los objetos: cada expresión de la Ventana de Álgebra se corresponde con un objeto de la Zona Gráfica y viceversa.

También se usaron recursos convencionales como tablero, libreta de apuntes, fotocopias, apuntes propios y relaciones de actividades.

## 8. Conclusiones

Una primera conclusión está relacionada con el desarrollo de mi formación como docente permitiéndome establecer contacto con la realidad, constituyéndose así en un estímulo en mi actividad intelectual, y de reflexión de mi práctica con lo cual me lleva a iniciar el camino hacia el cambio. Esta reflexión es continua de mi hacer pedagógico me llevo a construir mi propia teoría, aplicarla y mirar el resultado positivo o negativo reflexionando corrigiendo y reconstruyendo de nuevo, y a la vez se logró fundamentar conceptualmente el trabajo realizado con los docentes con la revisión y análisis documental.

Una segunda conclusión es que la realización y evaluación del taller permitió identificar algunas carencias y necesidades importantes de dicho Plan, especialmente en relación con el conocimiento o la formación didáctica de los profesores. En términos generales, estas carencias están relacionadas con la necesidad de considerar el contenido matemático desde un punto de vista escolar y de proponer un tratamiento integrado de la estructura conceptual relativa a este contenido matemático, la variedad de los sistemas de representación y las utilidades curriculares del sistema de 'Geometría Dinámica' considerados como recursos tecnológicos de representación. En particular, en relación con lo sistema de 'Geometría Dinámica', se considera alarmante el hecho de que, salvo contadas excepciones, la casi totalidad de los profesores y futuros profesores que participaron manifestaron no haber tenido ningún tipo de experiencia sobre este recurso tecnológico.

Las concepciones de los profesores y futuros profesores sobre la enseñanza del contenido matemático, sobre la estructura conceptual y el conocimiento matemático escolar, sobre los errores y dificultades, sobre la evaluación y otras cuestiones didácticas están basadas fundamentalmente en sus propias experiencias, en sus creencias, intuiciones y opiniones al respecto. No demuestran un manejo de estos conocimientos de manera sistemática y rigurosa, basada, por ejemplo, en fundamentos de Didáctica.

Una tercera conclusión es que la realización y evaluación del taller ha permitido detectar determinadas carencias y dificultades en los profesores que hicieron parte del estudio. Al margen de las dificultades y resistencias hacia el recurso tecnológico, puestas de manifiesto por algunos

de estos profesores, el desarrollo del taller, por una parte, contribuyó a la desmitificación favorable sobre la tecnología como recurso didáctico y, por otra, aportó información y documentación útiles sobre las posibilidades de los sistemas de ‘Geometría Dinámica’, los sistemas de representación y la estructura conceptual como contenidos organizadores del currículo.

A partir del análisis aplicado a las realizaciones de los profesores durante el desarrollo del taller ha descrito y caracterizado el tipo de conocimiento didáctico de estos, así como sus modificaciones y factores de resistencia al cambio, en relación con las cuestiones del estudio, organizadas sistémicamente en el modelo local de los organizadores. En particular, la experiencia de someter reiterada y sistemáticamente a debate sus creencias, actitudes, conocimientos didácticos iniciales sobre el contenido matemático, la enseñanza, los sistemas de representación y los sistemas de ‘Geometría Dinámica’, permitió a estos profesores y futuros profesores realizar alguna reflexión y revisión al respecto. Estos comprendieron y así lo pusieron de manifiesto, que lo que se necesita es por un lado una transformación apropiada del currículo que permita la incorporación de la tecnología y, por el otro lado, una formación y conocimientos didácticos apropiados para poder realizar esta integración y sacarle el mejor partido de manera efectiva.

Una cuarta conclusión está relacionada con las dimensiones subjetivas que consisten en el estudio de la forma como los profesores de matemáticas de educación básica primaria integran y utilizan los distintos elementos del modelo local de los organizadores en sus propuestas curriculares y evaluar el impacto del taller sobre sus conocimientos didácticos.

En relación con la estructura conceptual y los sistemas de representación, se encontró que, todos los participantes, sin excepción, demostraron tener un tipo de concepción o punto de vista sobre la naturaleza del conocimiento matemático “formalista” y “academicista”. Esta manera de concebir el conocimiento matemático concreto que nos ocupa lo centran en un mezclado de lenguajes natural y simbólico algebraico, con muy poca o ninguna referencia. Todos los profesores participantes identificaron el concepto de ‘Lugar Geométrico’. Cuando hicieron alguna referencia a la representación gráfica, la mayoría lo hizo de manera anecdótica.

En relación con el dominio de las utilidades didácticas y las actitudes hacia el sistema de ‘Geometría Dinámica’, encontramos que los profesores demuestran ser Reflexivos, innovadores, autónomos y efectivos frente a la propuesta, aparte de tener una actitud favorable e innovadora en

relación con las posibilidades curriculares de la tecnología, son efectivos y autónomos a la hora de adquirir y adaptar las nuevas propuestas curriculares del taller. Se caracterizaron por ser flexibles y reflexivos. Aunque no dieron grandes muestras de modificación de sus ideas formalistas sobre el contenido matemático, si llegaron a considerar las nociones y procedimientos de la estructura conceptual del tópico con propósitos escolares. Además, demostraron efectiva y explícitamente que comprendieron la pluralidad de los sistemas de representación como recursos didácticos y como sistemas y lenguajes, al menos el gráfico, y también consiguieron algún dominio sobre las diferentes utilidades didácticas de los sistemas de 'Geometría Dinámica' como herramientas mediadoras de representaciones.

En pocas palabras, accedieron efectivamente, con cierta facultad y eficacia al modelo local de los organizadores, consideramos que la clave de estos profesores consistió, además de su predisposición favorable y a pesar de sus ideas iniciales sobre el contenido matemático y su enseñanza, a sus maneras flexibles, reflexivas y críticas de abordar las nuevas propuestas curriculares sobre los distintos elementos o conocimientos teórico-prácticos asociados al modelo.

Las principales características comunes de los profesores y futuros profesores son: una actitud favorable hacia la tecnología, voluntad de cambio, apertura a las propuestas y tecnologías, y una postura reflexiva y crítica, tanto frente a lo determinado o tradicional en relación con el conocimiento matemático y su enseñanza, como ante las nuevas propuestas, así como cierta actitud de compromiso y voluntad para intentar llevar a cabo las nuevas propuestas curriculares y didácticas.

En relación con al conocimiento didáctico encontramos que, inicialmente, todos los profesores y futuros profesores pusieron de manifiesto tener ideas o concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas en primaria de carácter tradicional, en estrecha coherencia con sus ideas formalistas y academicistas sobre el contenido matemático y basadas fundamentalmente en sus propias experiencias como estudiantes o en su labor docente.

Una última conclusión donde el trabajo, como una experiencia de investigación de diseño de una propuesta de formación de docentes de matemática en ejercicio en educación básica permitió analizar desde puntos de vista del modelo local de análisis el papel del SGD (de Geogebra) como recurso tecnológico didáctico (este es como un organizador y mediador para la enseñanza y el

aprendizaje del CME) en relación con el desarrollo de algunas de las competencias matemáticas, didácticas y tecnológicas por parte de los maestros con los que se realizó el trabajo. Y si bien, teóricamente e idealmente(O.E.1) resulta ser un recurso didáctico que presenta grandes posibilidades para el trabajo en el aula, sin embargo en la práctica los docentes tienen muchas dificultades para acceder y poder por ejemplo coordinar y articular las ideas (nociones, representaciones, visualizaciones, modelizaciones) propias de la estructura didáctico conceptual y procedimental de la noción de lugar geométrico en su tratamiento simultáneo entre lo convencional o tradicional (lenguaje natural, papel, lápiz e instrumentos geométricos tradicionales) simultáneamente con el recurso tecnológico.

## 9. Reflexiones

En cuanto a las reflexiones de este estudio, puedo decir que la principal limitante fue la resistencia que pusieron los profesores, y por ende la recolección de los datos se hizo un poco difícil, pues la mayoría de los profesores con los que dialogué rechazaron la invitación porque creían que se les iba a evaluar, o decir si era bueno o malo en su labor docente. A pesar de que les informo sobre el objetivo y el interés de este estudio varios profesores se rehusaron a participar.

En este sentido los profesores tienen prevención hacia lo nuevo, lo desconocido y lo que perciben o creen que de algún modo los desestabiliza o puede llegar a hacerlo. Esto es válido también en relación con nuevos conocimientos, nuevas propuestas, nuevas teorías y nuevas tecnologías. En particular, las propuestas innovadoras y las nuevas tecnologías suelen provocar un sentimiento particular de incertidumbre cuando se cree que los supera y dan ese sentimiento de incapacidad de aprovechar o explotar sus posibilidades.

Una segunda reflexión de esta investigación fue la falta de experiencia sobre la utilización del recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’) por parte de algunos de los docentes participantes.

Finalmente, otra reflexión está relacionada con la consecución de recursos que supone una propuesta de programa de formación de estas características, con lo cual todas las entidades deben apoyar más la formación de los docentes en este campo utilización del recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

## 10. Recomendaciones

Las recomendaciones para futuras investigaciones sobre diseñar, analizar y evaluar una propuesta de formación matemática y tecnológica de profesores de educación básica primaria en torno a la noción de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando recurso tecnológico son, por ejemplo, indagar sobre interrogantes como:

¿Qué repercusiones tienen en el mediano plazo los efectos del taller sobre el desempeño profesional de los profesores?

También sería interesante, para futuras investigaciones, indagar sobre los cambios que hay que introducir en talleres futuros para intentar conseguir que los profesores modifiquen sus actitudes desfavorable y conservadora hacia la participación en estos.

Finalmente, sería interesante que se investigara sobre cuáles serían los efectos al diseñar programas de formación basados en otros modelos locales de los organizadores, por ejemplo, al introducir el organizador modelización en el modelo.

## Referencias

- Acosta, M. (2002). Lugares geométricos. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Serie Memorias*, 10
- Acosta, M.E., Mejía C. & Rodríguez, C.W. (2011). Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido. *Revista Integración, Temas De Matemáticas*, 29(2), 163–174.
- Alvira, M. (1985). La investigación evaluativa: Una perspectiva experimentalista. *Reis: Revista Española De Investigaciones Sociológicas*, 29, 129–141.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
- Bedoya, E. (2017). *Formación profesional de profesores de matemáticas: conocimiento didáctico de contenidos matemáticos, modelos locales de análisis didáctico e innovación curricular en matemáticas* (documento de trabajo para los cursos de Maestría en Educación Matemática). AEM, UV, Cali.
- Bellemain, F., & Capponi, B. (1992). Specificite de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *Educational Studies in Mathematics*, 23(1), 59-97.
- Bericat, E. (1998). *La Integración de los métodos cuantitativos y cualitativos en la investigación social*. Barcelona.
- Campbell, D. & Fiske, D. (1959). Convergent and discriminant validation by multitrait-multimethod matrix, *Psychological Bulletin*, 56.
- Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95–124). Barcelona.
- Carrillo, A. (2012). El dinamismo de Geogebra. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 29.
- Coll, C. (2002). ¿Que es el constructivismo? *Magisterio del Rio de la Plata*. Barcelona.
- De Miguel, M. (2000). La evaluación de programas sociales: Fundamentos y enfoques teóricos. *Revista de Investigación educativa*, 18(2).
- Denzin, N. (1970). *Sociological Methods: A Source Book*. Chicago Aldine Publishing Company.
- Durkheim, E. (1911). *Educación y sociología*. Ediciones Península, Barcelona.
- Duval, R. (1999-2004). *Semiosis y pensamiento humano – Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. Santiago de Cali.
- Fernández Ballesteros, R. (1996). *Evaluación de programas. Una guía práctica en ámbitos sociales, educativos y de salud*. Síntesis, Madrid.

- Forns, M., & Gómez, J. (1995). Evaluación en educación. En *Evaluación de programas: una guía práctica en ámbitos sociales y educativos* (pp. 241 - 282). Síntesis, Madrid.
- González J. & Gallardo J. (2006). *El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática* (conference paper). Universidad de Málaga.
- González P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Revista sigma*, 30, 205-236
- Gómez I., Botana F., Escribano J. & Abanades M. (2016). Concepto de lugar geométrico. Génesis de utilización personal y profesional con distintas herramientas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 67-94.
- Gómez, P (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista Ema*, 7(3).
- Gómez, P (2005). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Funes-Uniandes.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Revista de Educación Matemática*, 10(1), 23-45.
- Hitt, F. (2000). Representation and Mathematics Visualization. *Twenty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, Arizona.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213.
- Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, New York.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Macmillan, New York.
- Kutzler, B. (2000). *The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics*.
- Latorre, A., Del rincón, D. & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona.
- Lehmann C. (1980). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, México D.F.
- Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En *Educación matemática en Portugal, España e Italia. Actas da Escola de Verano-1999* (pp. 109-132). Sociedade Portuguesa de Ciências de la Educação, Lisboa.
- Lupiáñez, J. L. & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Editorial Universidad de Granada, Granada.
- Lupiáñez, J. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.81-101). Comares, S.L, Granada.

- Moreno, L. (1998). *History of Calculus and Technology - The construction of mathematical meaning*. Cinvestav, Mexico.
- Moreno, L. & Santos, L. M. (2001). De la herramienta al instrumento: Una perspectiva informática. *Educación matemática*, 13(2), 78-97.
- Moreno, L. (2002). Evolución y tecnología. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional: *Serie Memorias*. 67.
- Perez Juste, R., Martínez, C. & Rodriguez, G. (1994). *Centros educativos de Calidad*. CECE, Madrid.
- Pérez, R. (2000). La evaluación de programas educativos: conceptos básicos, planteamientos generales y problemática. *Revista de Investigación Educativa*, 18(2), 261-287.
- Ponte, J. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Sense Publishers, Rotterdam.
- República de Colombia, Ministerio de Educación Nacional. Ley 115 de 1994, Arts. 38- 76- 77- 78.
- República de Colombia. (1995). Estándares básicos de competencias matemáticas. MEN, Bogotá.
- República de Colombia. (2000). Lineamientos Curriculares de Matemática. MEN, Bogotá.
- República de Colombia. (2006). Estándares básicos de competencias matemáticas. MEN, Bogotá.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Puig, L., Sierra, M., & Socas, M. (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp 39-59). ice-Horsori, Madrid.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1).
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Rico, L. (2004). Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Ema*, 9(1), 3-19.
- Rico, L. & Fernández-Cano (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Los autores, Granada. España.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. & Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular*. Comares, Granada.
- Rojas, N., Flores, P. & Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Universidad de Granada, Granada, España.
- Romero, H. (1997). *Espacio Educativo, Calidad de la Educación y acreditación*. Bogotá.

- Stufflebeam D. & Shinkfield A. (1985). Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica. *Colección temas de educación España: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia*, Barcelona Ediciones Paidós Ibérica
- Tyler, R. (1950). *Basic principle of curriculum and instruction*. Chicago University
- Valverde, G., Castro, E., & Molina, M. (2013). Empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestro en educación primaria. En *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp.211-213). Granada: Comares, S.L.
- Yábar, J. M. (1995). El ordenador en la enseñanza secundaria dentro de un enfoque constructivista del aprendizaje. *Aula de Innovación Educativa*, 40-41, 33-37.

### **Cibergrafía**

- Casado, M. Lugares geométricos. Calameo. Recuperado de <http://es.calameo.com/read/00160440269c0ea686f34>
- Universidad de Sonora. Apuntes de Historia de las Matemáticas - Volumen I. issuu. Recuperado de [https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes\\_de\\_historia\\_de\\_\\_las\\_matematicas\\_volumen\\_1](https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes_de_historia_de__las_matematicas_volumen_1)
- Boyer, C. & Merzbach, U. A History of Mathematics. Scribd. Recuperado de <https://es.scribd.com/doc/64586857/Carl-B-Boyer-Uta-C-Merzbach-A-History-of-Mathematics>
- Ministerio de Educación Nacional - República de Colombia. Formación continua. Mineducación. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co/1621/w3-propertyvalue-48470.html>
- GeoGebra. GeoGebra Math Apps. Recuperado de <https://www.geogebra.org>

### **Anexo 1. Taller “la noción de Lugar Geométrico usando un sistema de Geometría Dinámica- GeoGebra”.**

- **Taller:** “La noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’- Geogebra”
  - Tallerista: Esp. Yanjeline Trujillo Ortega
  - Participantes: Docentes de Educación Básica Primaria.
- **Lugar:** Institución Educativa Nuestra Señora Del Carmen Popayán
- **Información general:** Este taller hace parte de una investigación sobre formación y conocimiento didáctico de profesores de matemáticas y futuros profesores de educación básica primaria del sector oficial. La información obtenida será utilizada para elaborar los informes correspondientes, en los cuales se reserva el anonimato de los participantes y el debido tratamiento ético de los datos obtenidos.
- **Metodología:** El taller constituye una oportunidad para la reflexión conjunta por parte de todos los participantes, sobre sus maneras de concebir, el conocimiento matemático sobre ‘Lugar Geométrico’. Donde los participantes reflexionaran individual y colectivamente, tomaran nota de lo que considere necesario. En cada sesión se trabajó de la siguiente manera:
  1. Entrega de documentación y materiales correspondientes.
  2. Presentación de la actividad.
  3. Realización de la actividad.
  4. Reflexión y debate sobre: la adquisición de los conocimientos, Reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo.

## Primera sesión

1. Presentación del taller. (10m)
2. Lectura de: Desarrollo histórico del concepto ‘Lugar Geométrico’. (15m)
3. Video: sobre Matemáticas con GeoGebra para docentes de nivel primario. <http://youtu.be/INx7uaNa43c>. (45m)
4. Reflexión conjunta sobre las nociones del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y el sistema de ‘Geometría Dinámica’ (GeoGebra). (10m)
5. Introducción a la resolución de problemas con lápiz y papel. (30m)
  - a. Aproximación a la solución de problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
  - b. Mediatriz: es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento.
  - c. Circunferencia: es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.
  - d. Formular problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
  - e. Realizar las gráficas de la solución de problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
  - f. Explicar cuál fue la forma de dar solución.
6. Reflexión y evaluación de la primera sección. (10m)

### Lectura

Desarrollo histórico del concepto ‘Lugar Geométrico’.<sup>1</sup>

La evolución histórica del concepto de ‘Lugar Geométrico’ se puede dividir en tres grandes periodos, que se diferencian básicamente por el aporte de Apolonio de Perga.

P1 -Menecmo descubrió la familia más útil de curvas de todas las ciencias en ausencia del simbolismo algebraico. Pero no sólo fue esto, sino que independiente de su origen, fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían

importantes propiedades como *lugares* planos, traducibles en básicas expresiones geométricas, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas. Aristeo a finales de siglo IV a. de C. en su libro “Libro de los *lugares* sólidos” trata los *lugares* planos (rectas y círculos), *lugares* sólidos (cónicas por intersección de cilindros y conos con planos) y *lugares* lineales (curvas de orden superior como la cuadratriz o la conoide).

P2 -Apolonio de Perga (247-205 a.C.), su obra fundamental Cónicas, es una especie de complementos de los Elementos de Euclides. Ya en el libro V Apolonio trata, las proposiciones más llamativas de toda la obra. En ellas (51 y 52) consigue, obtener la evoluta de las cónicas, es decir, el ‘*Lugar Geométrico*’ de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Esto equivale a describir sintéticamente las curvas que en el lenguaje de la geometría analítica tendría:

Figura 1: Apuntes historia de Matemáticas Vol. 1 Universidad de Sonora México

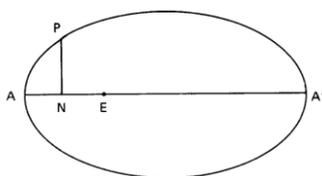


Fig. 1

$$27py^2 = 16(x - p/2)^3$$

Fuente: Apuntes historia de Matemáticas. Vol. 1 Universidad de Sonora México

Con el estudio de las cónicas, Apolonio considera ciertas líneas de referencia—diámetros conjugados o diámetro-tangente—, que juegan un papel de coordenadas cuando toma un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como ‘*Lugar Geométrico*’ se traduce en una relación entre las abscisas y las correspondientes ordenadas, que llamaba el *symptoma* de la curva y que no es sino la expresión de la ecuación analítica de la curva, que en su evolución histórica daría lugar a la llamada por Fermat en la *Isagogela* ecuación característica.

Apolonio en su tratado sobre Lugares planos estudia como las rectas y los círculos cumplen condiciones que los conduce a ser lugares geométricos.

P3 -El geómetra griego Pappus bajo la influencia de Apolonio escribió La Colección Matemática, una obra muy heterogénea, de un valor científico, histórico y metodológico inconmensurable, en esta se encuentra infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior, además un gran número de cuestiones que se debe situar en las raíces históricas de la Geometría Analítica como son la más elaborada exposición sobre los métodos de Análisis y Síntesis, numerosas soluciones a los problemas clásicos de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos especialmente el Teorema VII.238 que permite unificar en la geometría escolar la definición de las tres cónicas como lugares geométricos en relación con distancias a un punto, el foco y a una recta, la directriz y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, según que sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar lo más importante de los problemas geométricos a resolver, en la línea de posibles.

Pero quizá el asunto más importante sea el llamado Problema de Pappus o ‘Lugar Geométrico’ de  $n$  rectas, que en su formulación más sencilla, para tres o cuatro rectas, la solución es una cónica. Realiza un estudio exhaustivo del problema, propone la generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta, es en esta parte donde se observa más general el tema de lugares geométricos.

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes nacen de forma casi simultánea en el siglo XVII.

Descartes abandona el principio de homogeneidad, que lo hacían con anterioridad los griegos siendo esto una de las grandes limitaciones del álgebra geométrica de los griegos, en esto influencio el papel esencial el trato que se dio al problema de Pappus, donde Descartes además desarrolla un completo estudio de curvas planas superiores determinadas como lugares para el caso de más de cuatro líneas. En el tratado el discurso del método, publicado en 1637, trabajo en la

conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

Fermat se ve influenciado con la actividad de reconstrucción del trabajo de Los Lugares Planos de Apolonio y es así como da origen a su trabajo sobre Geometría Analítica, la Isagoge. Mira en las Cónicas de Apolonio como ciertas líneas, que jugaban un papel de coordenadas, se asociaban a una curva dada, de modo que mediante algebra retórica eran expresadas en función de esas líneas las propiedades de la curva. La idea de Fermat estaba en poder invertir esta situación al establecer que una ecuación algebraica en dos incógnitas define, con respecto a un sistema de coordenadas, un ‘Lugar Geométrico’ de puntos, es decir una curva.

Fermat y Descartes desarrollan la idea de Vieta sobre la conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, para problemas geométricos determinados, donde se utilizan sólo ecuaciones determinadas, en que la variable, aunque sea una incógnita, es una constante fija a encontrar. Estos lo desarrollan para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos.

Descartes se propone crear un nuevo método para la resolución de antiguos y nuevos problemas que rompen de forma definitiva con la tradición griega y llega a suplantarla, mientras que Fermat, considera su trabajo como una reformulación de la obra de Apolonio con los instrumentos del Álgebra, es decir, una paráfrasis algebraica de las cónicas de Apolonio.

Los métodos algebraicos, corresponde a Descartes, pero la idea de la Geometría Analítica que es la de asociar ecuaciones a curvas quizá está más clara en Fermat. Por eso el enfoque de Descartes es algo diferente al de Fermat.

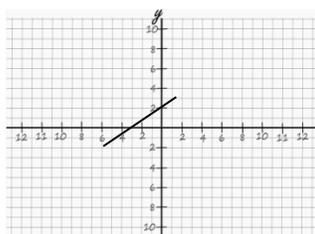
Descartes empieza con la curva correspondiente a un ‘Lugar Geométrico’ de la que deriva la ecuación del lugar, es decir, resuelve problemas geométricos a través de la construcción de la solución geométrica de ecuaciones, Fermat inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva las propiedades geométricas de la curva correspondiente.

La Geometría que desarrollaron Fermat y Descartes, llevaron a la geometría analítica que es la rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan

mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas, es decir cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes.

La geometría analítica se ocupa fundamentalmente de dos tipos de problemas:

- 1) Dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos. Como ejemplo tenemos: recta que pasa por el punto (3,2) con pendiente  $m=2$



En general, una línea recta se puede representar siempre utilizando una ecuación lineal en dos variables,  $x$  e  $y$ , de la forma  $ax + by + c = 0$ , todos los puntos que pertenecen a la línea recta que pasa por A y B cumplen la ecuación lineal  $y = 2x - 4$  ya que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

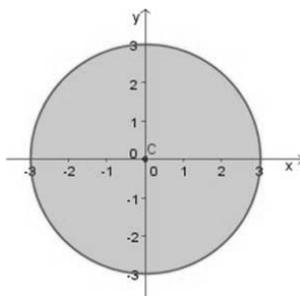
$$y - 2 = 2(x - 3)$$

$$y - 2 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 4$$

- 2) Dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que cumplen dicha expresión. Como ejemplo se tiene:

Una circunferencia de radio 3 y con su centro en el origen es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que satisfacen  $x^2 + y^2 = 9$ .

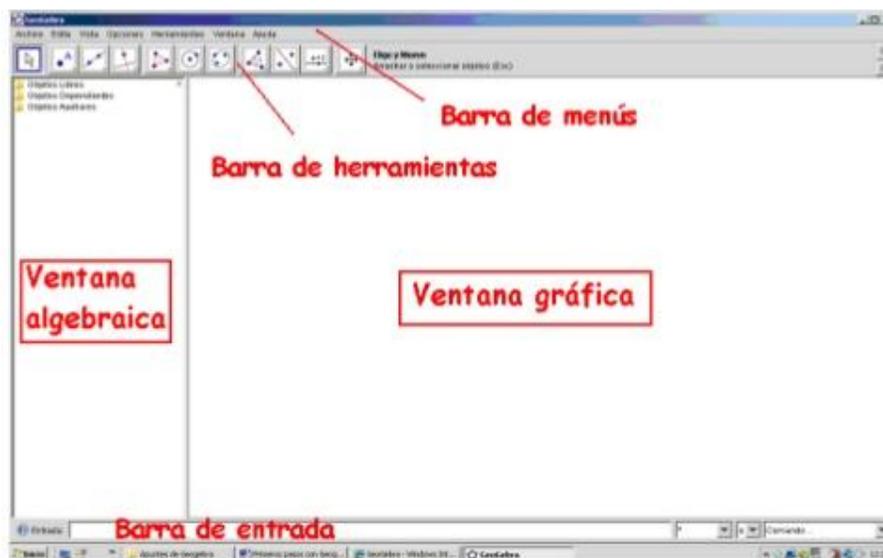


Fuente: Tomado del análisis de contenido de 'Lugar Geométrico', Unidad didáctica (2015), tesis de maestría Yanjeline Trujillo.

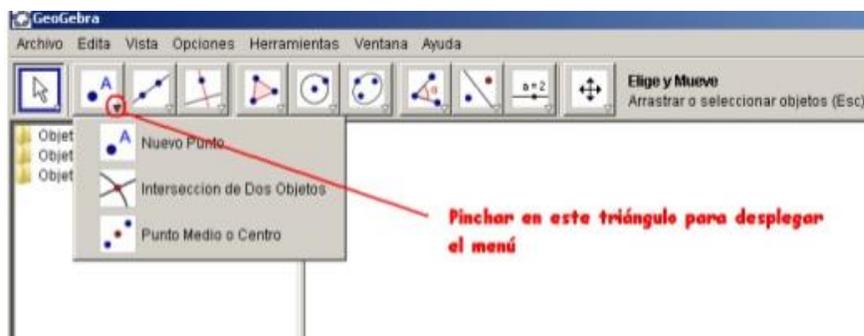
## Segunda sesión

- 1) Entrega de documentación y materiales correspondientes. (10m)
- 2) Presentación de la actividad. (30m)

Contacto con el sistema de 'Geometría Dinámica' - GeoGebra.



Instrucciones sobre principales teclas, comandos, funciones, menús y las opciones que se utilizarán.



- a. Construir el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con GeoGebra.
- b. Comparar con la construcción del día anterior.

Para esta sección será: Mediatriz: es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento.

### 3) Realización de la actividad. (60m)

Cada participante realizó la actividad propuesta. Para dibujar en geogebra la mediatriz de un segmento se inicia por dibujar el segmento. Para ello es conveniente seleccionar la opción “Segmento entre dos puntos” que aparece en el tercero de los iconos de la barra de herramientas. Una vez se tiene el segmento con sus extremos, A y B, se selecciona la opción “Mediatriz” dentro del cuarto icono. Para trazar la mediatriz el programa se selecciona el segmento deseado. Se sitúa el ratón sobre la línea del segmento, que se resaltará al coincidir el ratón con ella, y se pincha. Al hacer esto aparecerá la mediatriz del segmento.

Es conveniente dar un color diferente a la mediatriz para diferenciarla mejor. Para ellos se sitúa el ratón sobre la mediatriz y se pincha con el botón derecho. Se abrirá un menú en el que se seleccionará “propiedades”. Dentro de “propiedades” la pestaña “color” dará a elegir el color deseado para el objeto en cuestión. En este caso se da a la mediatriz un tono rojo.

Se reitera que la mediatriz es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento. Se comprobará que los puntos de la mediatriz cumplen esta propiedad.

Se selecciona en el segundo icono “Nuevo punto” y se pincha sobre la mediatriz marcándose así el punto C. En el icono séptimo se selecciona la opción “distancia” y se pincha sobre el punto C y el extremo del segmento A. Aparecerá en la pantalla la medida del segmento CA. Si se repite

la misma operación con el extremo B aparecerá la medida del segmento CB y se evidenciará que coincide con la del segmento anterior.

4) Reflexión y debate (20m). Sobre:

- La adquisición de los conocimientos.
- Reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo.

### Tercera sesión

1) Entrega de documentación y materiales correspondientes. (10m)

2) Presentación de la actividad. (30m)

- Retroalimentación de la sección anterior.
- Dibujar el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con GeoGebra.

Para esta sección será:

- **Circunferencia:** es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.
- La distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro se denomina radio.

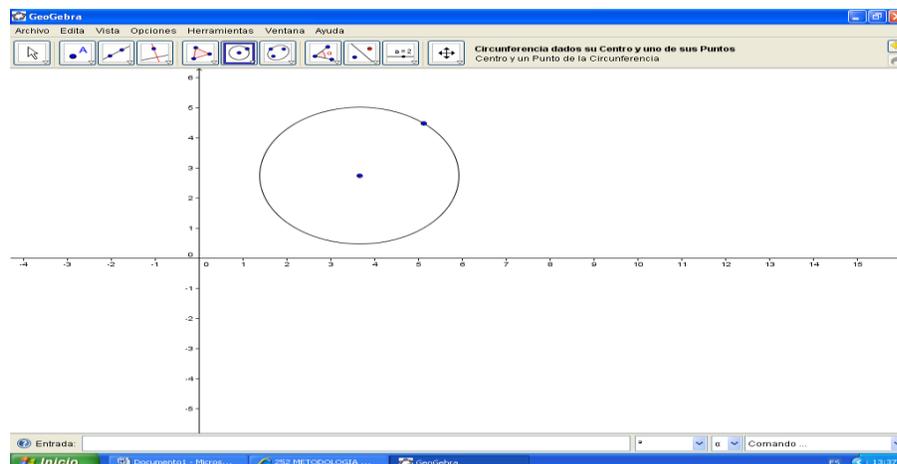
3) Realización de la actividad. (60m)

Cada participante realiza la actividad propuesta.

Para dibujar en GeoGebra la Circunferencia se puede realizar de dos formas así:

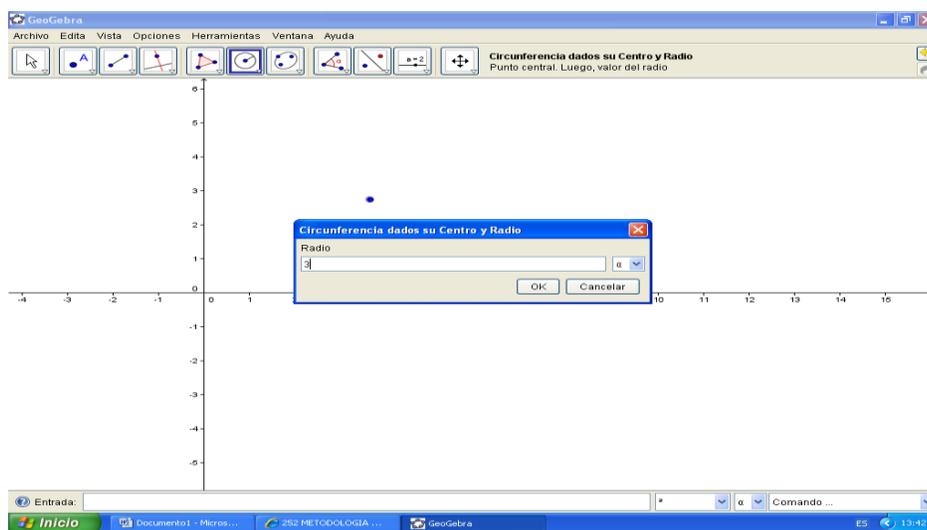
a) Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos:

Se fijan dos puntos. Uno de ellos hará el papel de centro y el otro, será un punto por el que pase la circunferencia. Una vez accedido a la función: Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos, pincho en el punto que será el centro y se va llevando la circunferencia resultante hasta el otro punto, por el que se desea que pase.



#### b) Circunferencia dados su centro y radio:

Se fija un punto. Se accede a la función: Circunferencia dados su centro y radio. Se pincha el punto fijado. A continuación, sale un cuadro en el que debo introducir la medida del radio de la circunferencia. Se obtiene la circunferencia de centro el punto fijado inicialmente, y radio la cantidad que se haya escrito.



#### 4) Reflexión y debate (20m)

Sobre:

- La adquisición de los conocimientos.

- Reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo.

### Cuarta sesión

1) Entrega de documentación y materiales correspondientes. (10m)

2) Presentación de la actividad. (30m)

Retroalimentación de la sección anterior.

Aproximación a la solución de problemas que involucran el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con GeoGebra.

a) Resolver la siguiente situación:

Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona (‘Lugar Geométrico’) que describe en el terreno.

b) Plantear situaciones como la anterior.

3) Realización de la actividad. (60m)

Cada participante realiza la actividad propuesta.

4) Reflexión y debate (20m)

Sobre:

- La adquisición de los conocimientos.
- Reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo.

## **Anexo 2. Unidad Didáctica “noción de ‘Lugar Geométrico’ usando un sistema de ‘Geometría Dinámica’**

- **Elaborada por:** Yanjeline Trujillo Ortega
- **Tutor:** PhD. Evelio Bedoya
- **Línea:** Didáctica de las Matemáticas
- **Institución evaluadora:** Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Área de Educación Matemática, Maestría en Educación, Santiago de Cali.
- **Estructura.** La estructura de esta unidad didáctica se basa en la teoría del análisis didáctico, que consta de:
  - Análisis de currículo (Revisa el currículo de matemáticas desde tres niveles de concreción: Nacional, institucional y del aula)
  - Análisis de contenido (Estructura conceptual, desarrollo histórico, sistemas de representación y fenomenología).
  - Análisis cognitivo (Objetivos y competencias, errores y dificultades, Oportunidades de aprendizaje).
  - Análisis de Instrucción - Evaluación
    - Instrucción (Diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos).
    - Evaluación (Instrumentos y criterios de evaluación).

### **Análisis de currículo**

Para el Ministerio de Educación en Colombia el currículo se define como:

(...) el conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional. (Artículo 76, Ley General de Educación de 1994)

Siendo la planificación del currículo realizado desde dos niveles de responsabilidad; el primero a nivel administrativo y político, que le corresponde al Estado Colombiano y al municipio

certificado de Popayán y el segundo a nivel profesional que le corresponde a la Institución educativa y a nosotros los docentes. En otras palabras, el Estado y el municipio deciden en la elaboración, reglamentación de las leyes y así qué elementos conceptuales y culturales deben ser objeto del trabajo en el aula y los docentes y administrativos deben decidir de qué manera se trabajará en las instituciones educativas y aulas dichos elementos. (Ley General de Educación 115 de 1994).

De acuerdo en lo dispuesto en el artículo 78 de la referida norma, cada establecimiento educativo mantendrá actividades de desarrollo curricular que comprendan la investigación, el diseño y la evaluación permanentes del currículo, esto lleva a que las instituciones de educación tengan autonomía para estructurar el currículo en cuanto a contenidos, métodos de enseñanza y organización de actividades (Artículo 77 de la ley 115 de 1994).

El elemento básico que integra el currículo sobre las decisiones previas que hay que tomar en la programación es el Plan de estudios que a su vez debe cumplir con:

1. La identificación de los contenidos, temas y problemas de cada asignatura y proyecto pedagógico, así como el señalamiento de las diferentes actividades pedagógicas.
2. La distribución del tiempo y las secuencias del proceso educativo, señalando el período lectivo y el grado en que se ejecutarán las diferentes actividades.
3. La metodología aplicable a cada una de las asignaturas y proyectos pedagógicos, señalando el uso del material didáctico, de textos escolares, laboratorios, ayudas audiovisuales, la informática educativa o cualquier otro medio o técnica que oriente o soporte la acción pedagógica.
4. Los logros para cada grado, o conjunto de grados, según los indicadores definidos en el proyecto educativo institucional.
5. Los criterios de evaluación y administración del plan.” (Artículo 38 de la ley 115 de 1994).

Existen niveles de concreción curricular caracterizados por las tomas de decisiones sobre los elementos básicos del currículo:

- **Nivel Nacional:** *Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas.* Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado colombiano que es quien elabora las leyes educativas básicas y el municipio certificado de Popayán es quien las desarrolla mediante decretos y normas.

- **Nivel Institucional:** *Proyecto Educativo- Plan de Estudios*. Es el segundo nivel de concreción. Corresponde a la institución educativa, a sus directivas y profesorado organizado en departamentos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los diferentes estamentos de la comunidad educativa.
- **Nivel del Aula:** *Programación de Aula*. Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones: Cultural, Cognitiva, Formativa y Social que, a su vez, se descomponen en cuatro niveles: Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico. - (Rico, año).

Por tal motivo esta unidad didáctica se ubica en el tercer nivel de concreción, el nivel de Planificación para el docente, tomando decisiones sobre Contenido (dimensión cultural), Objetivos y Competencias (dimensión cognitiva), Metodología (dimensión formativa) y Evaluación (dimensión social).

## **Análisis de contenido**

### **Desarrollo histórico del tema**

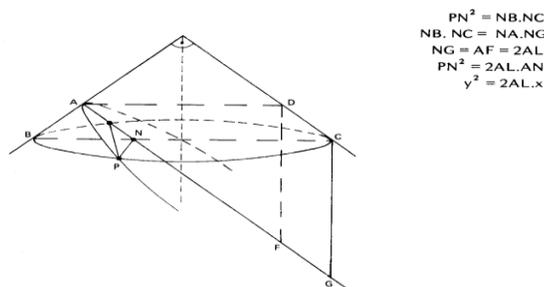
La evolución histórica del concepto de ‘Lugar Geométrico’ se puede dividir en tres grandes periodos, que se diferencian básicamente por el aporte de Apolonio de Perga, quien estudio curvas conocidas como cónicas, en cada uno de estos periodos subyace el concepto, aunque no siempre sea nítido. En la evolución del concepto se observa claramente la necesidad de explicitar y formalizar la noción, que se utiliza de forma tácita desde la época de Menecmo hasta su forma actual.

- **Primer Periodo precedente a Apolonio**

En este periodo aparece una idea muy intuitiva del concepto con los aportes de Menecmo (siglo 350 a. de C.) el cual trato el problema clásico de la duplicación del cubo: construir un cubo de doble volumen que otro dado, y redujo el problema al de la construcción de las dos medias proporcionales entre 2 y 1, introdujo las secciones cónicas descubriendo las curvas lo que se conoce como la llamada triada de Menecmo que es la elipse, parábola e hipérbola.

Menecmo descubrió la familia más útil de curvas de todas las ciencias en ausencia del simbolismo algebraico. Pero no sólo fue esto, sino que independiente de su origen, fue capaz de vincular ambos aspectos de las cónicas, mostrando que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como *lugares* planos, traducibles en básicas expresiones geométricas, que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas.

En la siguiente figura se puede observar cómo pudo Menecmo llegar a expresar  $y^2 = 2px$  para sección del cono rectángulo.



Fuente: Apuntes historia de Matemáticas Vol. 1 Universidad de Sonora México

Aristeo a finales de siglo IV a. de C. en su libro “Libro de los *lugares* sólidos” trata los *lugares* planos (rectas y círculos), *lugares* sólidos (cónicas por intersección de cilindros y conos con planos) y *lugares* lineales (curvas de orden superior como la cuadratrizó la concoide).

- **Segundo Periodo: Era Apolonio**

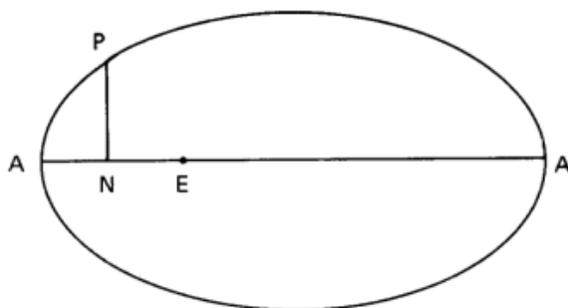
Apolonio de Perga (247-205 a.C.), su obra fundamental Cónicas, es una especie de complementos de los Elementos de Euclides. Mezcló desde premisas iniciales suficientemente generales con resultados propios en los ocho libros, el mismo, en el prólogo del libro primero, explica el contenido de la obra claramente, los cuatro primeros libros constituyen una introducción elemental. Estos debían ser los que constituirían la materia probablemente ya sabida, pero no organizada como él la propone. A partir del libro V se exponen los hallazgos más importantes del mismo en lo referente al tema.

El índice que pudo proponer fue el siguiente:

- I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.
- II. Diámetros, ejes y asíntotas.

- III. Teoremas notables y nuevos. Propiedades de los focos.
- IV. Número de puntos de intersección de cónicas.
- V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
- VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.
- VII. Relaciones métricas sobre diámetros.
- VIII. (Se desconoce su contenido. Tal vez problemas sobre diámetros conjugados).

Ya en el libro V Apolonio trata, las proposiciones más llamativas de toda la obra. En ellas (51 y 52) consigue, obtener la evoluta de las cónicas, es decir, el '*Lugar Geométrico*' de los centros de curvatura, mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Esto equivale a describir sintéticamente las curvas que en el lenguaje de la geometría analítica tendría:



$$27py^2 = 16(x - p/2)^3$$

Fuente: Apuntes historia de Matemáticas Vol. 1 Universidad de Sonora México

Con el estudio de las cónicas, Apolonio considera ciertas líneas de referencia—diámetros conjugados o diámetro-tangente—, que juegan un papel de coordenadas cuando toma un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como rectas de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Para cada cónica, la conocida relación de áreas y longitudes en forma de proporción propiedad geométrica de la curva equivalente a su definición como '*Lugar Geométrico*' se traduce en una relación entre las abscisas y las correspondientes ordenadas, que llamaba el *symptoma* de la curva y que no es sino la expresión

de la ecuación analítica de la curva, que en su evolución histórica daría lugar a la llamada por Fermat en la Isagoge la ecuación característica.

Apolonio en su tratado sobre Lugares planos estudia como las rectas y los círculos cumplen condiciones que los conduce a ser lugares geométricos.

- **Tercer Periodo post - era Apolonio**

El geómetra griego Pappus bajo la influencia de Apolonio escribió La Colección Matemática, una obra muy heterogénea, de un valor científico, histórico y metodológico inconmensurable, en esta se encuentra infinidad de teoremas y problemas sobre Geometría superior, además un gran número de cuestiones que se debe situar en las raíces históricas de la Geometría Analítica como son la más elaborada exposición sobre los métodos de Análisis y Síntesis, numerosas soluciones a los problemas clásicos de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, nuevos estudios y extensiones de propiedades de las secciones cónicas como lugares geométricos especialmente el Teorema VII.238 que permite unificar en la geometría escolar la definición de las tres cónicas como lugares geométricos en relación con distancias a un punto, el foco y a una recta, la directriz y la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, según que sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores, que perseguía la idea de ajustar la envergadura de los instrumentos geométricos a utilizar lo más importante de los problemas geométricos a resolver, en la línea de posibles.

Pero quizá el asunto más importante sea el llamado Problema de Pappus o ‘Lugar Geométrico’ de  $n$  rectas, que en su formulación más sencilla, para tres o cuatro rectas, la solución es una cónica. Realiza un estudio exhaustivo del problema, propone la generalización a más de cuatro rectas y reconoce que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, queda determinada una curva concreta, es en esta parte donde se observa más general el tema de lugares geométricos.

Las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes nacen de forma casi simultánea en el siglo XVII.

Descartes abandona el principio de homogeneidad, que lo hacían con anterioridad los griegos siendo esto una de las grandes limitaciones del álgebra geométrica de los griegos, en esto influencio el papel esencial el trato que se dio al problema de Pappus, donde Descartes además

desarrolla un completo estudio de curvas planas superiores determinadas como lugares para el caso de más de cuatro líneas. En el tratado el discurso del método, publicado en 1637, trabajo en la conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Éste es un fundamento de la geometría analítica, en la que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna.

Fermat se ve influenciado con la actividad de reconstrucción del trabajo de Los Lugares Planos de Apolonio y es así como da origen a su trabajo sobre Geometría Analítica, la Isagoge. Mira en las Cónicas de Apolonio como ciertas líneas, que jugaban un papel de coordenadas, se asociaban a una curva dada, de modo que mediante algebra retórica eran expresadas en función de esas líneas las propiedades de la curva. La idea de Fermat estaba en poder invertir esta situación al establecer que una ecuación algebraica en dos incógnitas define, con respecto a un sistema de coordenadas, un ‘Lugar Geométrico’ de puntos, es decir una curva.

Fermat y Descartes desarrollan la idea de Vieta sobre la conexión entre Álgebra y Geometría, al obtener las ecuaciones que corresponden a diversas construcciones geométricas, para problemas geométricos determinados, donde se utilizan sólo ecuaciones determinadas, en que la variable, aunque sea una incógnita, es una constante fija a encontrar. Estos lo desarrollan para problemas geométricos indeterminados mediante la consideración de ecuaciones indeterminadas en variables continuas que representan segmentos geométricos.

Descartes se propone crear un nuevo método para la resolución de antiguos y nuevos problemas que rompen de forma definitiva con la tradición griega y llega a suplantarla, mientras que Fermat, considera su trabajo como una reformulación de la obra de Apolonio con los instrumentos del Álgebra, es decir, una paráfrasis algebraica de las cónicas de Apolonio.

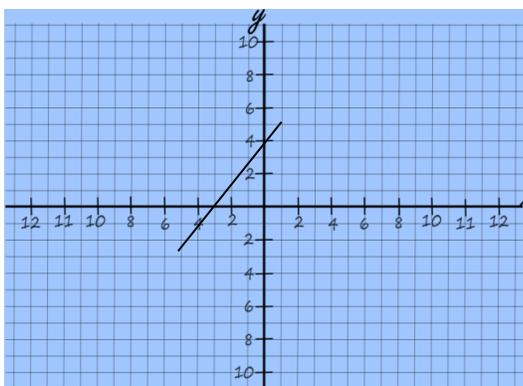
La métodos algebraicos, corresponde a Descartes, pero la idea de la Geometría Analítica que es la de asociar ecuaciones a curvas quizá está más clara en Fermat. Por eso el enfoque de Descartes es algo diferente al de Fermat.

Descartes empieza con la curva correspondiente a un ‘Lugar Geométrico’ de la que deriva la ecuación del lugar, es decir, resuelve problemas geométricos a través de la construcción de la solución geométrica de ecuaciones, Fermat inversamente parte de una ecuación algebraica de la que deriva las propiedades geométricas de la curva correspondiente.

La Geometría que desarrollaron Fermat y Descartes, llevaron a la geometría analítica que es la rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas, es decir cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes

La geometría analítica se ocupa fundamentalmente de dos tipos de problemas:

- 1) Dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos. Como ejemplo tenemos: recta que pasa por el punto (3,2) con pendiente  $m=2$

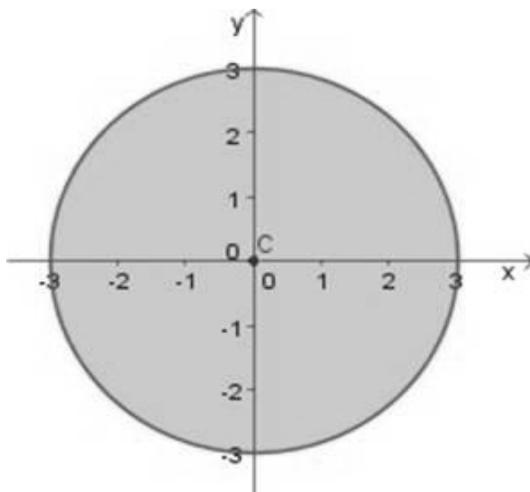


Fuente: Diseño propio

En general, una línea recta se puede representar siempre utilizando una ecuación lineal en dos variables,  $x$  e  $y$ , de la forma  $ax + by + c = 0$ , todos los puntos que pertenecen a la línea recta que pasa por  $A$  y  $B$  cumplen la ecuación lineal.

- 2) Dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que cumplen dicha expresión. Como ejemplo tenemos:

Una circunferencia de radio 3 y con su centro en el origen es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que satisfacen  $x^2 + y^2 = 9$ .



Fuente: Diseño propio

### **Estructura conceptual**

La revisión histórica anterior me ayuda a diseñar y analizarla estructura conceptual del tema, donde expongo un resumen de los términos y conceptos relacionados:

### **Conocimiento conceptual:**

#### **Términos:**

- Sistema lineal.
- Sistema coordenado en el plano.
- Distancia entre dos puntos dados.
- Pendiente de una recta.
- Gráfica de una ecuación.
- Construcción de curva.
- Ecuación de un 'Lugar Geométrico'

#### **Conceptos:**

- Sistema lineal: recta horizontal dirigida X y recta vertical dirigida Y.
- Sistema coordenado en el plano:
  - Ejes de coordenadas, rectas dirigidas X y Y perpendiculares entre sí.

- Abscisa y ordenada  $P(x, y)$ .
- Distancia entre dos puntos dados: Determinar la distancia  $d$  entre  $P_1$  y  $P_2$ . La distancia  $d$  entre dos puntos  $P_1(X_1, Y_1)$  y  $P_2(X_2, Y_2)$  está dada por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Pendiente de una recta:

**Pendiente dado el ángulo:  $m = \operatorname{tg} \alpha$**

**Pendiente dado el vector director de la recta:  $m = \frac{V_1}{V_2}$**

**Pendiente dados dos puntos:  $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$**

**Pendiente dada la ecuación de la recta:  $m = -\frac{A}{B}$**

- Gráfica de una ecuación: Dada una ecuación interpretarla geoméricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente. (Primer problema fundamental de la geometría analítica).
- Construcción de curvas: pasos a seguir para llegar a la construcción
- Ecuación de un ‘Lugar Geométrico’: Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación. (Segundo problema fundamental de la geometría analítica).

### **Resultados:**

- Gráfica de una ecuación
  - El conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación se llama gráfica de la ecuación o, bien, su ‘Lugar Geométrico’.
  - Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación pertenece a la gráfica de la ecuación.
- Construcción de curva
  - Determinación de las intercepciones con los ejes coordenados.
  - Determinación de la simetría de la curva con respecto a los ejes coordenados y al origen.
  - Determinación de la extensión de la curva.

- Determinación de las ecuaciones de las asíntotas verticales u horizontales que la curva puede tener.
- Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
- Trazado de la curva.
- Ecuación de un ‘Lugar Geométrico’
  - Se llama ecuación de un ‘Lugar Geométrico’ a una ecuación de la forma:  $f(x, y) = 0$ , cuyas soluciones reales para valores correspondientes de X y Y son todas las coordenadas de aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el ‘Lugar Geométrico’.

**Conocimiento procedimental:****Destrezas:**

- Discutir una ecuación para trazar la gráfica correspondiente.
- Construir la gráfica correspondiente a partir de una ecuación,
- Determinar la ecuación de un ‘Lugar Geométrico’.

**Razonamientos:**

- Deductivo: propiedades de las operaciones para la solución de ecuaciones.
- Inductivo: regularidades en los procedimientos para desarrollar una ecuación y trazado de gráficas.
- Analógico: Establecer relaciones para resolución de ecuaciones.
- Figurativo: Uso de tablas y representaciones gráficas.

**Estrategias:**

- Reconocimiento de ecuaciones.
- Aplicación de técnicas de resolución de ecuaciones.
- Reconocimiento de una gráfica.
- Técnicas de resolución de problemas donde se deba construir la gráfica correspondiente a partir de una ecuación,

- Técnicas para determinar la ecuación de un ‘Lugar Geométrico’.

### Mapa Conceptual:

Se presenta, a continuación, un Mapa Conceptual que relaciona los conceptos, sistemas de representación y algunos procedimientos entre sí:



Fuente: Diseño propio

### Sistemas de representación

En esta sección se describirá los distintos sistemas de representación mediante los cuales se hace presente el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y todos los conceptos relacionados con él. Para cada una de las representaciones destacaré sus características sus usos y su finalidad. Estos tipos de representaciones son los siguientes: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

- **Representación Simbólica:**

Este sistema de representación se basa en la identificación de un ‘Lugar Geométrico’ a través de su ecuación, y conceptos generales como ejemplo tenemos:

$$y - x + 1 = 0$$

En este caso se expresa que esta ecuación representa la gráfica del ‘Lugar Geométrico’ de una recta que pasa por los puntos A (1,2) y B (3,4).

$$ax + by + c = 0$$

En este caso se expresa que esta ecuación representa la ecuación general de la línea recta.

### **Puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento AB**

En este caso es un concepto general que expresa que si estos puntos del plano equidistan de A y B quiere decir que es el ‘Lugar Geométrico’ mediatriz.

### **Puntos del plano que equidistan una distancia $r$ de un punto O llamado centro**

En este caso es un concepto que expresa que si todos los puntos cumplen representan el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia.

- ***Representación grafico-dinámica:***

Este sistema de representación se manifiesta cuando se interactúa con un recurso siendo en este caso un sistema de ‘Geometría Dinámica’ el grado de abstracción es tecnológico.

Los sistemas de ‘Geometría Dinámica’ actuales son de gran utilidad para la representación de lugares geométricos siendo muchas las formas en que se puede representar en estos sistemas como ejemplos:

Simbólica: Introduciendo una ecuación.

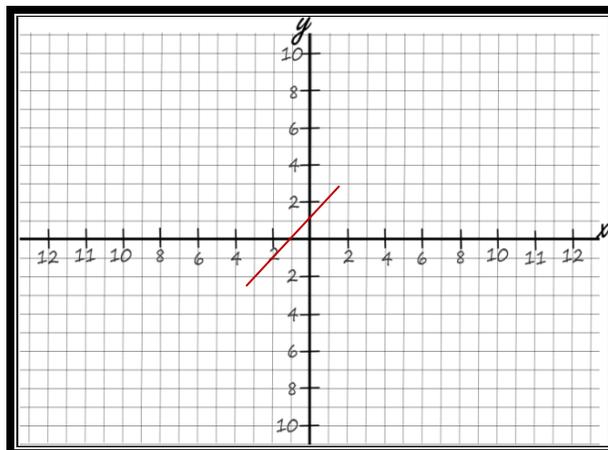
Gráfica: Representando directamente el ‘Lugar Geométrico’.

El sistema de ‘Geometría Dinámica’ que utilizamos para ello en este caso es GeoGebra.

En esta imagen se tiene el ‘Lugar Geométrico’ mediatriz en color rojo, de un segmento calculado además las distancias de los puntos C y D extremos del segmento. Estas distancias aparecen sobre el gráfico y también en la pantalla de la izquierda.

- ***Representación Gráfica:***

Este sistema de representación se manifiesta cuando se reconoce partir de la gráfica de un ‘Lugar Geométrico’ la existencia de la ecuación.



Fuente: Diseño propio

De esta manera se representa gráficamente el ‘Lugar Geométrico’ de una línea recta de la forma  $y = mx + b$ , donde  $m=1$  y  $b=1$  llegando a que:  $y = x + 1$

### Fenomenología del tema y modelización

Se inicia esta sección planteando las situaciones y contextos en los que se desarrolla el tema.

#### – Análisis de contextos:

En este tema se responde siempre a los siguientes interrogantes:

- Dada una expresión algebraica, ¿se puede describir en términos geométricos el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que cumplen dicha expresión?
- Dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, ¿se puede encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos?

#### – Análisis de fenómenos:

- Fenómenos físicos como en el sistema de navegación de veleros donde las vergas-náuticas dispuestas horizontal y simétricas respecto a los mástiles forman el ‘Lugar Geométrico’ mediatriz
- Solución de problemas relacionados con figuras formadas por puntos que cumplen determinadas condiciones referidas a su posición

#### – Análisis de situaciones:

- **Situación artística:** Los lugares geométricos como la mediatriz, con los puntos equidistantes a los extremos de un segmento o la porción de una circunferencia que es el arco con la equidistancia y la repartición de fuerzas ayudan a trabajar con la métrica en la arquitectura y en el arte.
- **Situación laboral:** La rueda a través del tiempo ha estado presente en muchos inventos entre los que podemos enumerar como la bicicleta, el automóvil, tractor, carretas, etc. Inventos que están presentes en la vida laboral. Aquí el ‘Lugar Geométrico’ utilizado es la circunferencia, ya que como todos los puntos equidistan a un único punto llamado centro permite repartir las fuerzas y provocar los giros aplicando una fuerza en ese punto determinado.
- **Situación científica:** La forma circular que tienen los relojes se debe a la importancia que tiene el centro de la circunferencia, posibilitando así un solo centro de giro para llegar a todas las partes por igual para medir así el tiempo.
- **Situación personal:** Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona (‘Lugar Geométrico’) que describe en el terreno.

La respuesta será que esto depende del lugar en el que esté la estaca, y la condición determinante es que las diferentes zonas sus puntos deben estar dentro del terreno y a una distancia de la estaca igual o menor que 4, los puntos que cumplen esta condición constituyen un ‘Lugar Geométrico’.

### **Resolución de un problema vía modelización**

La modelización de este tema está determinada básicamente en las interacciones que se dan entre modelización, el sistema de ‘Geometría Dinámica’ y el contenido matemático.

Realicemos a modo de ejemplo el último ejercicio que se ha planteado:

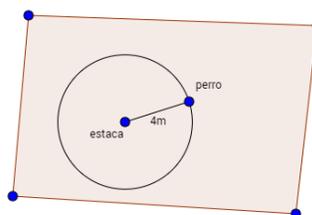
Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona (‘Lugar Geométrico’) que describe en el terreno.

*Solución:*

1) Se observa e identifica los factores que llevarán a las pautas a seguir, con la situación de lo real dentro de las especificaciones del problema matemático.

2) Se conjetura las relaciones entre los factores para realiza el dibujo mental, con la manipulación física identificando el objeto matemático. El enunciado del problema lleva al modelo matemático, formulación de una aproximación a la solución.

3) Se realiza la manipulación del sistema de geometría dinámico para el caso GeoGebra, se representa radio de la circunferencia se crea la imagen, de la formulación de una aproximación a la solución se pasa a la solución y así se completa la solución matemática. Se analiza y se obtienen las conclusiones de los resultados.



En la solución matemática se pasa a interpretar en el contexto del modelo. Al usar el sistema de ‘Geometría Dinámica’ se permite un cambio de contexto permitiendo aplicar propiedades en este caso el sistema de ‘Geometría Dinámica’-GeoGebra actúa como herramienta de modelización matemática.

## 1. Análisis Cognitivo

### ▪ Expectativas

Establezco en primer lugar los siguientes focos de interés para el aprendizaje, sobre los cuales voy a clasificar los objetivos específicos que espero que alcance el docente al que va dirigido esta Unidad Didáctica:

– Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.

- Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.
- Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

Los objetivos específicos a desarrollarse serían:

### **Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’**

1. Comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
2. Distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
3. Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

### **Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’**

4. Argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.
5. Reconocer y hallar lugares geométricos.
6. Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

### **Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.**

7. Reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
8. Justificar de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.
9. Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

En las siguientes tablas se muestran los objetivos anteriormente especificados agrupados en los distintos focos nombrados al comienzo de esta sección.

En las tablas se puede observar también la vinculación de estos objetivos con los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de matemáticas, donde:

- FRP= Formular y Resolver Problemas
- MPF= Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad
- C= Comunicar
- R= Razonar
- FCE= Formular, Comparar ejercitar procedimientos y algoritmos.

Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.

Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.		FRP	MPF	C	R	FCE
1	Comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’	x	x		x	
2	Distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.			x	x	x
3	Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	x	x		x	x
TOTAL		2	2	1	3	2

Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’

Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’		FRP	MPF	C	R	FCE
4	Argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.	x	x			x
5	Reconocer y hallar lugares geométricos	x	x	x	x	x

6	Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).		x	x		x
TOTAL		2	3	2	1	3

Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.

Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’.		FRP	MPF C	R	FCE
7	Reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	x	x		x
8	Justificar de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.	x		x	x
9	Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.	x	x	x	x
TOTAL		3	2	2	3

La siguiente tabla muestra el balance total de contribución al desarrollo de los cinco procesos generales que se contemplan en los lineamientos curriculares de matemáticas:

Balance Total		FRP	MPF	C	R	FCE
1	Introducción a la utilización del sistema de ‘Geometría Dinámica’.	2	2	1	3	2
2	Cálculo e interpretación gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.	2	3	2	1	3

3	Relación del concepto de ‘Lugar Geométrico’ con el sistema de ‘Geometría Dinámica’	3	3	2	3	3
TOTAL		7	8	5	7	8

Se puede observar en esta última tabla que a los procesos generales a los que más se contribuye son **MPF** y **FCE** mientras que al resto se contribuye en menor medida. Esto puede resultar engañoso no es que se le dé poca importancia a estos procesos generales, sino que cada foco puede estar más relacionado con unos procesos generales que con otros, pero esto no quiere decir que en el desarrollo de las sesiones de clase no se dedique el suficiente tiempo para desarrollar todos los procesos generales de la manera más uniforme posible.

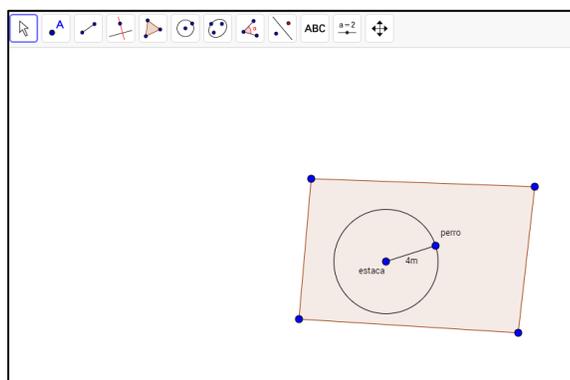
▪ **Ejemplificación de tareas desde los objetivos y los procesos generales**

Se seleccionan a continuación dos objetivos que son significativos de esta unidad didáctica:

- Objetivo 6: Relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

Para alcanzar este objetivo y contribuir al desarrollo de los procesos generales de “C= Comunicar” y “R= Razonar” propondría la siguiente tarea:

A la vista de la siguiente gráfica responder los interrogantes:



- ¿En qué puntos se relacionan el concepto y el recurso tecnológico? Justifica la respuesta.
- Decide hay relación entre el concepto matemático y el sistema de ‘Geometría Dinámica’, realizar de manera justificada.

c) ¿Se puede calcular un ‘Lugar Geométrico’ partir de la gráfica? Justifica la respuesta.

– Objetivo 9: Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

Para alcanzar este objetivo y contribuir al desarrollo de los procesos generales se propondría la siguiente tarea:

a) Plantear situaciones de formación.

b) Decidir y justificar los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan plantear situaciones de formación.

▪ **Errores y dificultades previsibles en el desarrollo de la Unidad Didáctica**

Es importante tener en cuenta los errores en el aprendizaje de las matemáticas, ya que:

- Primero: Puede ser que un docente tenga problemas a la hora de asimilar un concepto, o que venga algún error de talleres o temas anteriores. Pero en ambos casos si se ayuda a que el docente tome conciencia de su error, se potenciará su actitud crítica, y se podrá enmendar ese error.

- Segundo: Es posible también que al profesor se le haya transmitido algún concepto de forma que éste no es significativo. En este caso, el error será un indicativo que debe intentar mirar de otra manera, con otro método, otros ejemplos, esto hace que se depure el proceso de enseñanza.

- Tercero: La propia dificultad de un contenido puede originar errores, lo que, como antes, será señal para el profesor de qué parte del contenido necesita más esfuerzos a la hora de ser transmitido.

Se enumeran las dificultades y errores más significativos de esta unidad didáctica:

D1. Dificultades para comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

D2. Dificultades distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

D3. Errores al Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

D4. Dificultades al argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.

D5. Problemas al reconocer y hallar lugares geométricos.

D6. Conflicto al relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).

D7. Dificultad reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

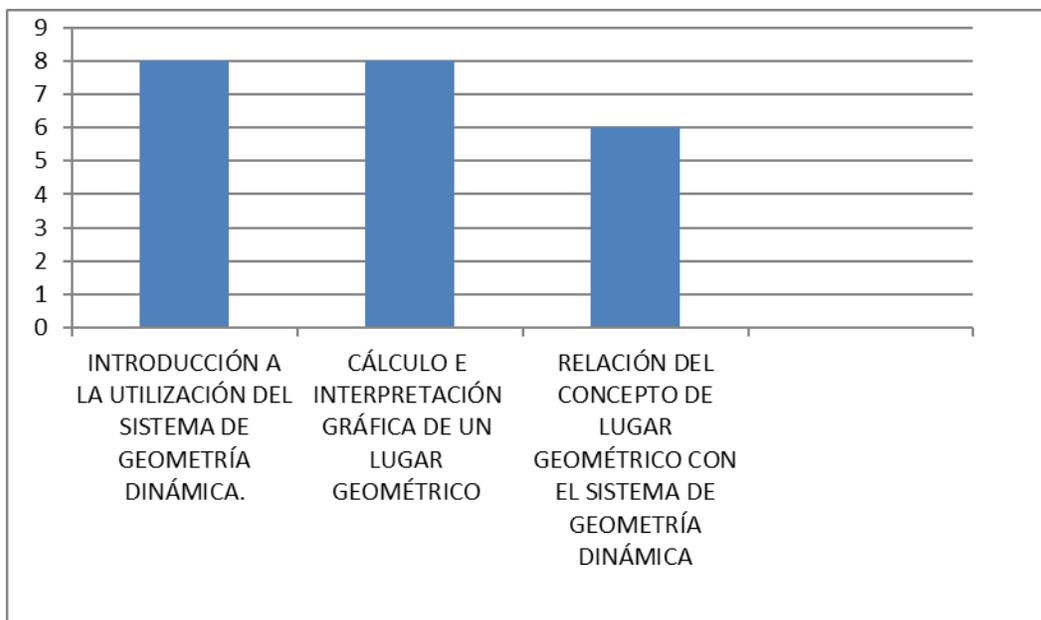
D8. Dificultades de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.

D9. Dificultades para Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.

(Ver sigüientemente cuadro de asociación entre dificultades y objetivos)

<b>Dificultades</b>		<b>Objetivos Asociados</b>
<b>D1</b>	Dificultades para comprender la idea de utilizar un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	2,4,7,8,9
<b>D2</b>	Dificultades distinguir un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	1,4,7,8,9
<b>D3</b>	Errores al Explicar y expresar fenómenos en los que intervenga un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	4, 5, 6
<b>D4</b>	Dificultades al argumentar la existencia o no de un ‘Lugar Geométrico’ y determinarlo partir de situaciones dadas.	1, 2, 7,8,9
<b>D5</b>	Problemas al reconocer y hallar lugares geométricos.	3, 4, 6
<b>D6</b>	Conflicto al relacionar el concepto de ‘Lugar Geométrico’ y su didáctica utilizando un recurso tecnológico (sistema de ‘Geometría Dinámica’).	3, 4, 5
<b>D7</b>	Dificultad reconocer y expresar de manera intuitiva la forma de hallar un ‘Lugar Geométrico’ con un sistema de ‘Geometría Dinámica’.	1, 2, 4, 8,9
<b>D8</b>	Dificultades de hallar lugares geométricos, ayudándose de herramientas tecnológicas.	1, 2, 4, 7, 9
<b>D9</b>	Dificultades para Describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de una propuesta de formación utilizando herramientas tecnológicas en la noción del concepto de ‘Lugar Geométrico’.	1, 2, 4, 7, 8

Para extraer conclusiones se representará en un diagrama de barras el recuento de errores que están ligados a objetivos de los 3 focos fundamentales.



Es fundamental poner cuidado para próximos talleres en que los docentes estén más familiarizados y manejen un sistema de ‘Geometría Dinámica’ los cuales estén ligados de acuerdo a su expectativa de trabajo frente a los conceptos.

## 2. Análisis de instrucción

### ▪ Grados de complejidad de las tareas

Se presentó para cada grado de complejidad un ejemplo de tarea:

#### – Reproducción:

Introducción a la resolución de problemas con lápiz y papel.

Aproximación a la solución de problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.

**Mediatriz:** es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento.

**Circunferencia:** es el ‘Lugar Geométrico’ de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

- a. Formular dos problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
- b. Realizar las gráficas de la solución de problemas que involucren el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz.
- c. Explicar cuál fue la forma de dar solución.

– **Conexión:**

Contacto con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ - GeoGebra.

- a. Construir el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con GeoGebra.
- b. Comparar con la construcción del día anterior.

– **Reflexión:**

Aproximación a la solución de problemas que involucran el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con GeoGebra.

Resolver la siguiente situación:

Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona (‘Lugar Geométrico’) que describe en el terreno.

**Criterio utilizado en la clasificación:**

Para reproducción en este tema el criterio utilizado es que el profesor o futuro profesor de matemáticas de educación básica primaria, bien con su conocimiento previo, o mediante aplicación directa de un concepto o procedimiento obtiene el resultado.

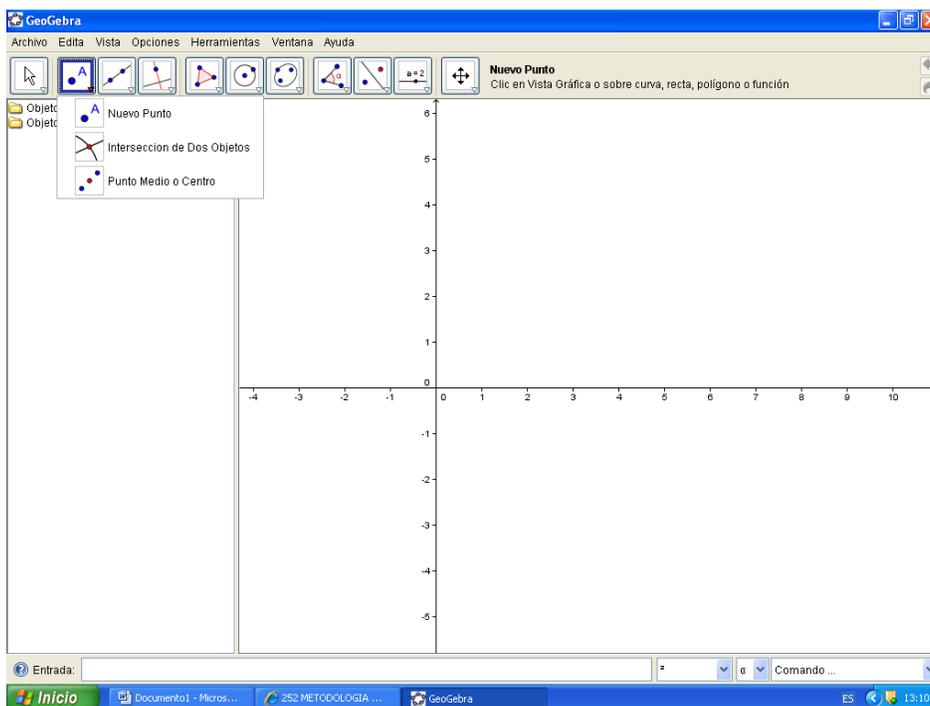
Para conexión, el criterio es que el profesor o futuro profesor tiene que decidir ante una variedad de técnicas y para ello tiene que analizar el tipo de solución.

Y para reflexión he considerado problemas relacionados con fenómenos donde a veces el ‘Lugar Geométrico’ no está descrito mediante una fórmula y es necesaria interpretar lo que se pide.

▪ **Recursos y materiales didácticos**

Los materiales y recursos didácticos específicos que utilizaría en esta unidad didáctica serían:

1. Software de ‘Geometría Dinámica’: En esta unidad se utilizara GeoGebra que es software libre que reúne geometría, álgebra.



De manera muy sencilla, se pueden construir figuras con puntos, segmentos, rectas, vectores, cónicas y también gráficas de funciones que pueden ser fácil y dinámicamente modificadas mediante el ratón. El programa también admite expresiones como:  $g: 3x + 4y = 7$  o:  $c: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$  y ofrece una gama de comandos entre los que cabe destacar ‘Lugar Geométrico’, la derivación y la integración.

La característica más destacable de *GeoGebra* es la doble percepción de los objetos: cada expresión de la Ventana de Álgebra se corresponde con un objeto de la Zona Gráfica y viceversa.

2. También se usarán recursos convencionales como tablero, libreta de apuntes, fotocopias, apuntes propios y relaciones de actividades.

### 3. Desarrollo de la Unidad Didáctica

- **Contenidos específicos de la Unidad Didáctica**

Esta unidad está dirigida para profesores y futuros profesores de matemáticas de educación básica primaria enmarcada dentro de la formación docente continua en Colombia.

A continuación, la gráfica muestra los lineamientos de la formación continua (Formación en servicio) del docente en Colombia.

#### Lineamientos de política para el Subsistema de Formación Continua:



<http://www.mineduacion.gov.co/1621/w3-propertyvalue-48470.html>

#### Descripción de los contenidos específicos de la Unidad Didáctica

De entre los términos que aparecen en el tema tratado, en esta U.D. es de especial importancia a los siguientes:

- Recurso tecnológico - Sistema de 'Geometría Dinámica'.
- 'Lugar Geométrico'.
- Formulación de problemas.
- Solución de problemas.

Ahora se describen los conceptos a tratarse:

- GeoGebra como sistema de 'Geometría Dinámica'.
- Formular problemas.
- Resolver problemas.
- Noción de 'Lugar Geométrico'.

Estas son las destrezas a desarrollarse:

- Reconocimiento de GeoGebra como un sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Formula problemas que involucren el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Resolver problemas que involucren el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Representación de un ‘Lugar Geométrico’.

En cuanto a los tipos de razonamiento, que se verán involucrados en esta unidad didáctica se pueden considerar:

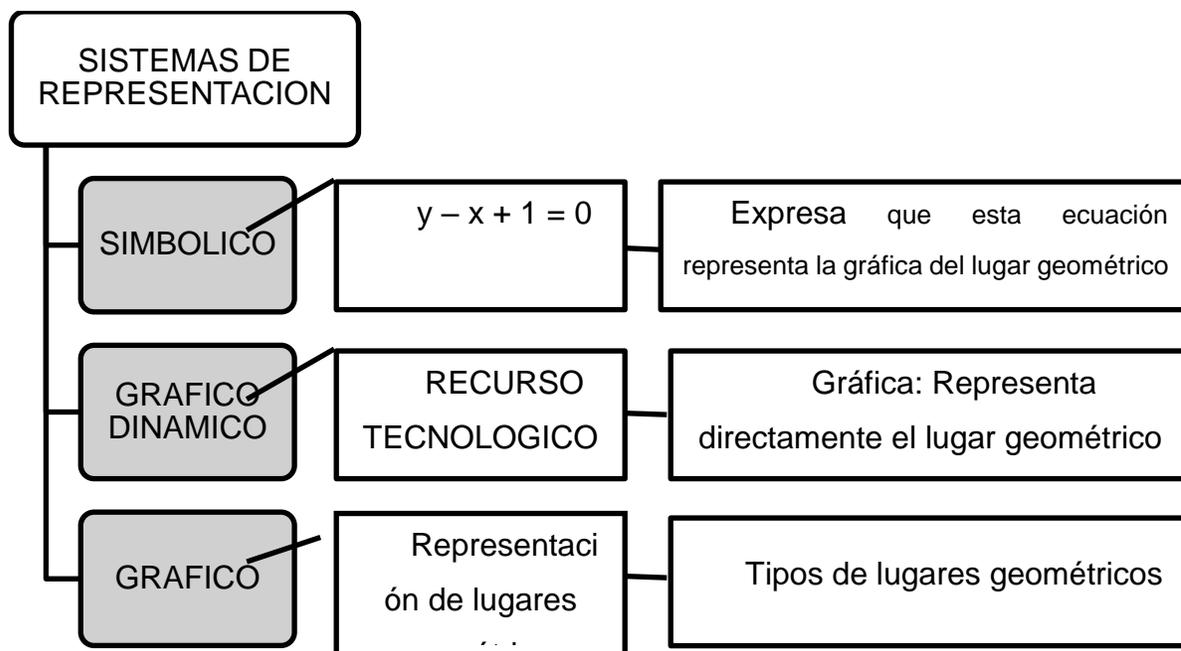
- Deductivo
- Inductivo
- Analógico
- Figurativo

Por ultimo las estrategias que se deben trabajar serian:

- Reconocimiento de GeoGebra como sistema de ‘Geometría Dinámica’.
- Aplicación de técnicas de formulación de problemas donde se involucre el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Aplicación de técnicas de resolución de problemas donde se involucre el concepto de ‘Lugar Geométrico’.
- Hallar un ‘Lugar Geométrico’.

### **Relación entre contenidos y sistemas de representación**

En el siguiente grafico muestro la relación entre contenidos y los sistemas de representación que se desarrollaron



#### ▪ **Secuenciación y organización de las actividades de la Unidad Didáctica**

Descripción de la organización de las actividades de la unidad didáctica:

Las actividades se realizarán en 4 sesiones en orden de ejecución serían:

1. Reflexión conjunta sobre las nociones del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y el sistema de ‘Geometría Dinámica’.
2. Contacto con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ - GeoGebra. Construir el ‘Lugar Geométrico’.
3. Dibujar el ‘Lugar Geométrico’ circunferencia y mediatriz con GeoGebra.
4. Formulación y resolución de problemas.

#### **Tipos de actividades:**

Se incluirán en las actividades conocimientos previos para abordar este tema, tales como recurso tecnológico, formulación de problemas, solución de problemas así como de representación gráfica.

También se utilizarán actividades de construcción de significados, como por ejemplo, donde se incluyan pasos a seguir en la obtención de la gráfica de un ‘Lugar Geométrico’.

Entre las actividades de ejercitación, se destacan las de suministrar una gran variedad de pautas para que se reconozca pasos a seguir para hallar un ‘Lugar Geométrico’.

Por último, veo necesaria la propuesta de problemas para que el profesor o futuro profesor contextualice todos los conocimientos que aprende a lo largo de esta unidad.

Ejemplos de actividades significativas y su función en el desarrollo de la U.D.:

Ejemplo 1

*Resolver la siguiente situación:*

*Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona (‘Lugar Geométrico’) que describe en el terreno.*

Función de la actividad en el desarrollo de la unidad didáctica.

Como actividad de evaluación, pues engloba gran parte de los conocimientos que ha aprendido durante la unidad y la información que suministra la tarea obliga al docente y futuro docente a recordar todo los aprendizajes que se han visto durante las sesiones, es decir, haya usencia de “ayudas” y es él quien debe decidir cómo abordar el ejercicio.

Ejemplo 2

*Plantear situaciones como la anterior.*

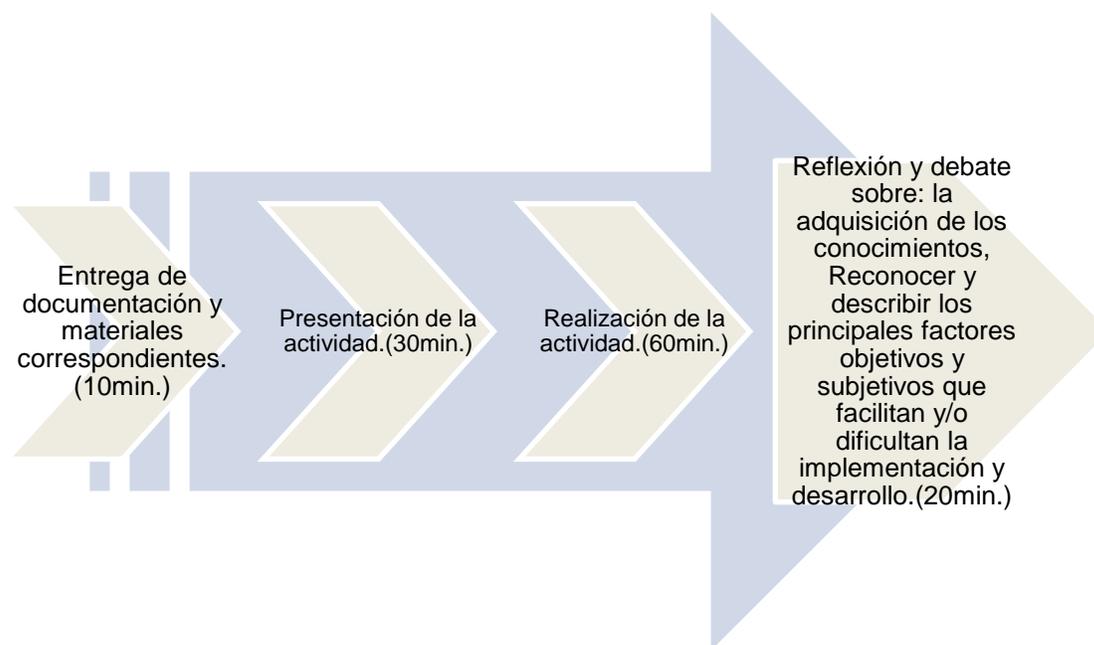
Función de la actividad en el desarrollo de la unidad didáctica.

Como actividad de construcción de significados, pues esta tarea permite introducir el concepto de ‘Lugar Geométrico’ a partir de una situación dada y le permite al docente y futuro docente generalizar.

- **Desarrollo de la secuencia de actividades de la Unidad Didáctica**

Desarrollaré ahora las 4 sesiones de trabajo sobre el tema.

Distribución temporal general de cada sesión: Esta distribución de tiempos será flexible según las necesidades del docente y futuro docente, pero para fijar criterios, ésta será la dinámica de todas las sesiones, desde la primera hasta la cuarta.



### Sesión Primera

#### Contenidos y objetivos de la sesión:

Conceptos básicos: Concepto de ‘Lugar Geométrico’ y sistema de ‘Geometría Dinámica’

Contextos y situaciones: Científico, artística y laboral.

Sistemas de representación utilizados: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

Capacidades a desarrollar y relación con los procesos generales:

- Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad.
- Razonar.

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Esta sesión es de repaso, por lo que los objetivos y contenidos que se impartan no los he considerado específicos de esta sesión. Esta sesión se destinará a recordar a los docentes y futuros docentes los conceptos básicos para abordar las siguientes sesiones.

### **Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores:**

Esta sesión es la primera. Por lo que esta sesión será de revisión de conocimientos previos y servirá de introducción para la siguiente sesión.

### **Secuencia de actividades:**

- Presentación del taller. (10m)
- Lectura de: Desarrollo histórico del concepto ‘Lugar Geométrico’.(15m)
- Video: sobre Matemáticas con GeoGebra para docentes de nivel primario. (45m)
- Reflexión conjunta sobre las nociones del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y el sistema de ‘Geometría Dinámica’ (GeoGebra). (10m)
- Introducción a la resolución de problemas con lápiz y papel. (30m)
- Reflexión y evaluación de la primera sección. (10m)

Material o recurso necesario: Video Beam, fotocopias, portátil y libreta de apuntes.

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo es individual, aunque al final se pueden discutir los diferentes puntos de vista que surjan entre los asistentes.

Comentarios sobre las intenciones al realizar la actividad: Al realizar esta actividad se quiere comprobar si los profesores y futuros profesores distinguen lo que es un ‘Lugar Geométrico’ y lo que es un sistema de ‘Geometría Dinámica’.

## **Sesión Segunda**

### **Contenidos y objetivos de la sesión**

Conceptos básicos: Concepto de ‘Lugar Geométrico’ y sistema de ‘Geometría Dinámica’

Contextos y situaciones: Científico, artística y laboral.

Sistemas de representación utilizados: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

Capacidades a desarrollar y relación con los procesos generales:

- Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad.
- Razonar.
- Comunicar.
- Formular, Comparar ejercitar procedimientos y algoritmos.

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

Una vez recordados los conocimientos previos del tema, esta sesión consistirá en acercar de manera intuitiva a los profesores y futuros profesores al concepto de ‘Lugar Geométrico’ y la utilización de un sistema de ‘Geometría Dinámica’ para el caso GeoGebra.

### **Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores:**

Esta sesión es la segunda. Los profesores y futuros profesores han recordado las nociones básicas sobre ‘Lugar Geométrico’ y el sistema de ‘Geometría Dinámica’ que le permitirán abordar esta sesión y, con relación a la siguiente, los alumnos estarán preparados para abordarla también.

### **Secuencia de actividades**

- Entrega de documentación y materiales correspondientes. (10m)
- Presentación de la actividad. (30m).
- Contacto con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ - Geogebra.
- Realización de la actividad. (60m)
- Cada participante realiza la actividad propuesta.
- Reflexión conjunta sobre las nociones del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y el sistema de ‘Geometría Dinámica’ (GeoGebra).(10m)
- Reflexión y debate (20m)

Material o recurso necesario: portátil, libreta de apuntes y fotocopias.

Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo es individual, aunque se aclararan dudas que se presente y al final se pueden discutir los diferentes puntos de vista que surjan entre los asistentes.

Comentarios sobre las intenciones al realizar la actividad: Esta actividad permite promover el sentido intuitivo de aproximación y crítico para Justificar la existencia de lugares geométricos.

### Sesión Tercera

#### **Contenidos y objetivos de la sesión:**

Conceptos básicos: Concepto de ‘Lugar Geométrico’ y sistema de ‘Geometría Dinámica’

Contextos y situaciones: Científico, artística, personal y laboral.

Sistemas de representación utilizados: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

Capacidades a desarrollar y relación con los procesos generales:

- Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad.
- Razonar.
- Comunicar.
- Formular, Comparar ejercitar procedimientos y algoritmos.

Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:

En esta sesión se pretende que los profesores y futuros profesores se familiaricen con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ y la noción de ‘Lugar Geométrico’, siguiendo la misma metodología que en la sesión anterior.

#### **Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores:**

Esta sesión es la tercera. Igual que en la sesión anterior los profesores y futuros profesores han recordado las nociones básicas sobre ‘Lugar Geométrico’ y el sistema de ‘Geometría Dinámica’ que le permitirán abordar esta sesión y, con relación a la siguiente, los alumnos estarán preparados para abordarla también.

#### **Secuencia de actividades:**

- Entrega de documentación y materiales correspondientes. (10m)
- Presentación de la actividad. (30m).
- Retroalimentación de la sección anterior. Contacto con el sistema de ‘Geometría Dinámica’ - GeoGebra.
- Realización de la actividad. (60m)

- Cada participante realiza la actividad propuesta.
- Reflexión conjunta sobre las nociones del concepto de ‘Lugar Geométrico’, su representación y el sistema de ‘Geometría Dinámica’ (GeoGebra).(10m)
- Reflexión y debate (20m)

Material o recurso necesario: portátil, libreta de apuntes y fotocopias.

Descripción sobre la gestión del aula: Igual que en la anterior sesión el trabajo es individual, aunque se aclararan dudas que se presente y al final se pueden discutir los diferentes puntos de vista que surjan entre los asistentes.

Comentarios sobre las intenciones al realizar la actividad: Esta actividad permite promover el sentido intuitivo de aproximación y crítico para Justificar la existencia de lugares geométricos.

### Sesión Cuarta

#### **Contenidos y objetivos de la sesión**

Conceptos básicos: Concepto de ‘Lugar Geométrico’ y sistema de ‘Geometría Dinámica’

Contextos y situaciones: Científico, personal y laboral.

Sistemas de representación utilizados: representación simbólica, gráfico-dinámica y gráfica.

Capacidades a desarrollar y relación con los procesos generales:

- Modelar Procesos y Fenómenos de la Realidad.
- Razonar.
- Comunicar.
- Formular, Comparar ejercitar procedimientos y algoritmos.
- Formular y Resolver Problemas.

Esta sesión debe englobar todos los contenidos vistos en las sesiones anteriores, ya que formular y resolver problemas está relacionado con el concepto de ‘Lugar Geométrico’. Por tanto todas las actividades planteadas en las sesiones anteriores les pueden servir al profesor y al futuro profesor de educación básica primaria para ilustrar, reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan o le dificultan la implementación y desarrollo de unidades didácticas.

**Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**

Esta sesión es la cuarta Igual que en la sesión anterior los profesores y futuros profesores han visto todas las herramientas que en esta sesión jugarán un enorme papel y además les puede servir en la implementación de unidades didácticas.

**Secuencia de actividades:**

- Entrega de documentación y materiales correspondientes. (10m)
- Presentación de la actividad. (30m).
- Retroalimentación de la sección anterior. Aproximación a la solución de problemas
- Realización de la actividad. (60m)
- Cada participante realiza la actividad propuesta.
- Reflexión y debate (20m)

Material o recurso necesario: portátil, libreta de apuntes y fotocopias.

Descripción sobre la gestión del aula: Igual que en la anterior sesión el trabajo es individual, aunque se aclararan dudas que se presente y al final se pueden discutir los diferentes puntos de vista que surjan entre los asistentes.

Comentarios sobre las intenciones al realizar la actividad: Esta actividad permite promover el sentido intuitivo de aproximación y crítico para Justificar la existencia de lugares geométricos, además de observación y análisis de las diferentes soluciones.

**Evaluación de aprendizajes de la U.D.**

Criterios de evaluación:

1. Reconoce y describe los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo de unidades didácticas.
2. Determina el contenido matemático con la utilizando recurso tecnológico.
3. Propone situaciones y determina la existencia del ‘Lugar Geométrico’ utilizando GeoGebra.
4. Evalúa la adquisición de los conocimientos relativos a estos contenidos y su uso en la propuesta de actividades didácticas.

Instrumentos de evaluación:

- Anotación de las actuaciones que vaya teniendo el profesor o futuro profesor tales como: participación en clase, ya sea trabajando con los compañeros o con preguntas y sugerencias sobre lo tratado en las sesiones.
- Datos y trabajos aportados por el profesor o futuro profesor como:
- Participaciones que abarcará durante el desarrollo del contenido visto en las cuatro sesiones.
- Apuntes de trabajo: se observará lo anotado, con explicaciones razonadas, etc.
- Comportamiento: se valorará positivamente la ayuda a los profesores compañeros y a la buena marcha de las sesiones, así como la corrección en el trato con todos.

Ponderación de los instrumentos de evaluación:

Anotación de las actuaciones	20%
Datos y trabajos aportados	20%
Participaciones	20%
Apuntes de trabajo	20%
Comportamiento	20%

### **Bibliografía**

- Bedoya, E. (2002). Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista de Educación Matemática*, 10 (1), 23-45.
- Lehmann C. (1989). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa, México D.F.
- Ley General de Educación. Ley 115 de 1994. Art. 38- 76- 77- 78, Ministerio de Educación Nacional Republica de Colombia.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado*.
- \_\_\_\_\_. Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14

**Cibergrafía**

<http://es.calameo.com/read/00160440269c0ea686f34>

[https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes\\_de\\_historia\\_de\\_\\_las\\_matematicas\\_volumen\\_1](https://issuu.com/abelgalois/docs/apuntes_de_historia_de__las_matematicas_volumen_1)

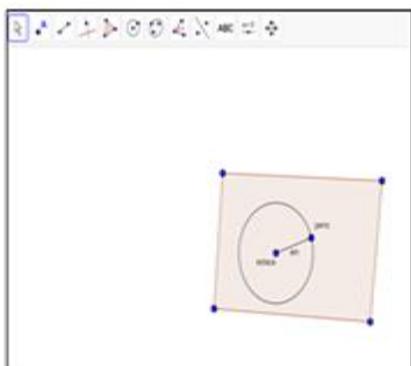
<https://es.scribd.com/doc/64586857/Carl-B-Boyer-Uta-C-Merzbach-A-History-of-Mathematics>

### Anexo 3. Apartes desarrollo Unidad Didáctica

Resolver la siguiente situación:

Marco vive en un terreno rectangular quiere saber si su perro al atarlo a una estaca con una cuerda de 4 m de longitud, y corre alrededor de esta, cuál será la zona (lugar geométrico) que describe en el terreno.

Como actividad de evaluación, engloba gran parte de los conocimientos que ha aprendido durante la unidad y la información que suministra la tarea obliga al docente a recordar todo los aprendizajes que se han visto durante las sesiones, es decir, haya usencia de "ayudas" y es él quien debe decidir cómo abordar el ejercicio.



#### Ejemplo 2

Plantear situaciones como la anterior. Función de la actividad en el desarrollo de la unidad didáctica.

Como actividad de construcción de significados, pues esta tarea permite introducir el concepto de lugar geométrico a partir de una situación dada y le permite al docente y futuro docente generalizar.



Para esta sección será:

Mediatriz: es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos extremos de un segmento

### 3) Realización de la actividad. (60m)

Cada participante realiza la actividad propuesta.

Para dibujar en geogebra la mediatriz de un segmento empezaremos por dibujar el segmento. Para ello es conveniente seleccionar la opción "Segmento entre dos puntos" que aparece en el tercero de los iconos de la barra de herramientas. Una vez tenemos el segmento con sus extremos, A y B, seleccionamos la opción "Mediatriz" dentro del cuarto icono. Para trazar la mediatriz el programa nos pide que seleccionemos el segmento deseado. Situamos el ratón sobre la línea del segmento, que se resaltará al coincidir el ratón con ella, y pinchamos. Al hacer esto aparecerá la mediatriz del segmento.

Es conveniente dar un color diferente a la mediatriz para diferenciarla mejor. Para ellos situamos el ratón sobre la mediatriz y pinchamos con el botón derecho. Se abrirá un menú en el que deberemos seleccionar "propiedades". Dentro de "propiedades" la pestaña "color" nos dará a elegir el color que deseamos para el objeto en cuestión. En este caso damos a la mediatriz un tono rojo.

Como decíamos al principio la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento. Vamos a comprobar que los puntos de nuestra mediatriz cumplen esta propiedad.

Seleccionamos en el segundo icono "Nuevo punto" y pinchamos sobre la mediatriz marcándose así el punto C. En el icono séptimo seleccionamos la opción "distancia" y pinchamos sobre el punto C y el extremo del segmento A. Aparecerá en la pantalla la medida del segmento CA. Si repetimos la misma operación con el extremo B aparecerá la medida del segmento CB y veremos que coincide con la del segmento anterior.

### 4) Reflexión y debate (20m)

Sobre:

- La adquisición de los conocimientos.
- Reconocer y describir los principales factores objetivos y subjetivos que facilitan y/o dificultan la implementación y desarrollo.

  
 PARA DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

**TALLER**  
**EL MUNDO DE LA GEOMETRÍA CUANDO UN SISTEMA DE**  
**GEOMETRÍA DINÁMICA - GEOMETRÍA**

SESIÓN

  
 PARA DOCENTES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

1. DESCRIBIR LOS PRINCIPALES FACTORES OBJETIVOS Y SUBJETIVOS QUE USTED CREE QUE FACILITARÍAN Y/O DIFICILITARÍAN LA IMPLEMENTACIÓN Y DESARROLLO DE LAS SESIONES ANTERIORES.

2. LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS SERÍA MÁS FÁCIL CON LÁPIZ Y PAPEL QUE CON LA TECNOLOGÍA ( SISTEMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA - GEOGEBRA)

1. El procedimiento es claro y facilita la comprensión de contenidos, por ser novedoso y tener actividades lúdicas

2. Pienso que es más fácil con la tecnología por ser en forma dinámica. Llaman la atención y facilita

## I. Solucion:

### 1. Desventajas

- Desconocimiento de la tecnología.
- No red de internet.
- No manejo adecuado de computadores.
- No comprensión de textos.
- No seguir instrucciones.
- No claridad en instrucciones.

### 2. Facilita el trabajo:

- Manaja computadores.
- Dinámico.
- Actual.
- Pasivo.

## II.

Para responder esta ? se deben tener en cuenta Fortalezas y Debilidades, pero hay aspectos positivos y negativos en ambos casos.

• Con lápiz y papel, podemos saber "desfogar" de la época en que vive activa; Sin embargo No podemos asegurar que todos los estudiantes manejen o tengan acceso a redes o computadores.

• Pero mi será siempre importante, la presencia del docente y el contacto del estudiante con el