Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Trabajo de grado para optar al título de matemático

La propiedad de aproximación en espacios de Banach

Sebastián Vargas Loaiza

dirigido por
Julio César Delgado Valencia

Octubre de 2021

Resumen

La propiedad de aproximación es pieza fundamental del estudio de operadores entre espacios de Banach. Este trabajo la introduce en el contexto de la teoría de productos tensoriales proyectivos. Mediante técnicas básicas de esta teoría se demuestra que el espacio de Bochner $L_1(E)$ hereda la propiedad de aproximación de E. Por otra parte, se presenta una adaptación del argumento de Grothendieck que demuestra la equivalencia entre el problema de aproximación y el problema 153 del Libro Escocés.

Palabras clave: operadores compactos, operadores nucleares, tensores, traza

Agradecimientos

A mis abuelos, mi mamá y mi tío, por ser pacientemente mi soporte;
a Rosana, mi novia, por su preciosa compañía;
a mis profesores y compañeros, por su calidez y su camaradería;
a Julio, por aceptarme como su estudiante.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La propiedad de aproximación en un espacio de Banach E garantiza la buena definición de la traza de operadores nucleares $T \in \mathcal{N}(E)$ y, por ende, la del determinante de operadores de tipo $1_E + T$. Este trabajo fue impulsado por la necesidad de investigarla en los espacios $\ell_p(E)$. En él demostramos que el espacio de Bochner $L_1(E)$ hereda la propiedad de aproximación de E, incluso la variante acotada—¡con la misma constante! La herramienta clave son los productos tensoriales proyectivos de espacios de Banach, aunque su aparición en el texto no es puramente utilitaria. De hecho, la propiedad de aproximación resalta la belleza de esta estructura más allá de los destellos que se puedan entrever a través de la propiedad universal que la define. Incluso, al final fue imposible resistirse a rescatar parcialmente la caracterización de Grothendieck del problema de aproximación, la cual comprende uno de los problemas más célebres del Libro Escocés.

El Libro Escocés es un compendio de problemas que se redactó a partir de las deliberaciones de algunos miembros de la Escuela de Matemáticas de Lwów y que solía albergar el *Café Escocés*, un café en el corazón de la ciudad—hoy Lviv, Ukrania—en donde departían a menudo. A sus contribuyentes habituales se sumó Stanisław Mazur, un matemático polaco quien, en 1936, anotó el siguiente problema.

Problema 153. Dada una función numérica continua f definida en $[0,1] \times [0,1]$ y un número $\epsilon > 0$, ¿existen números $s_1, ..., s_n$, $t_1, ..., t_n$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que

$$\left| f(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(s, s_i) f(t_i, t) \right| \leq \epsilon$$

para todo s y t en $[0,1]$?

Pero bien es sabido que existen problemas matemáticos de expresión sencilla cuya resolución demanda maquinaria sofisticada. De hecho, en *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, su tesis de 1953, Alexander Grothendieck reformuló esta pregunta en términos de una propiedad del dominio de los espacios vectoriales topológicos [2]:

¿es cierto que el operador identidad de todo espacio localmente convexo puede ser aproximado uniformemente en conjuntos precompactos por operadores de rango finito? En otras palabras, él se preguntó si tales espacios poseían la *propiedad de aproximación*. Una respuesta negativa llegaría en 1973 gracias a un profundo contraejemplo de Per Enflo [8].

Por supuesto, el problema 153 solo ocupa un lugar anecdótico en el texto de Grothendieck, siendo uno más de los diecinueve eslabones de la cadena de equivalencias a la que pertenece la entonces conjetura de *la condition d'approximation* [10, Proposición 37]. De acuerdo con Laurent Schwartz [19, pág. 283], el monumental trabajo de Grothendieck inició con la búsqueda de una buena topología para el producto tensorial de espacios localmente convexos y culminó efectivamente en el influyente artículo *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* [11].

Capítulo 2

Preliminares

Las siguientes páginas están dedicadas a cimentar los prerrequisitos para entender las ideas centrales de este trabajo. Si bien este capítulo repasa terminología estándar presente en el currículo del pregrado, también asume una familiaridad mínima con algunas herramientas básicas del análisis funcional [14, Capítulos 1, 2 y 3] y la teoría de integración de Lebesgue. Su meta es introducir un marco teórico en el que la propiedad de aproximación puede inscribirse naturalmente. El capítulo se divide en tres secciones. La primera es un extracto del primer capítulo de [18], cuya composición gira en torno a la formulación del producto tensorial de espacios vectoriales expuesta en la tercera parte de [21]. La flexibilidad conceptual de dicha caracterización permite establecer sin mayor dificultad dos contribuciones del autor: los Teoremas 2.1.5 y 2.1.9. La segunda es una selección austera pero adecuada del segundo capítulo de [18] en la que se aporta una discusión sobre los cocientes que es indispensable para acceder al resultado más importante de la sección (Teorema 2.2.14). La tercera, por último, es una construcción expedita de la integral y los espacios de Bochner basada en el apéndice E de [4], cuya pretensión final es el Teorema 2.3.6.

2.1. Teoría algebraica de productos tensoriales de espacios vectoriales

Por regla general, toda consideración sobre dos o más espacios vectoriales presupondrá un campo subyacente común $\mathbb{K}$. Sean E, F, y G espacios vectoriales. El espacio de todas las funciones lineales—u *operadores*—de E en F lo denotaremos mediante $L(E, F)$, aunque preferiremos los símbolos $L(E)$ y $E^{\#}$ cuando $E = F$ y $F = \mathbb{K}$, respectivamente. Sea $E \times F$ el espacio vectorial que se obtiene al dotar al producto cartesiano de E y F con las operaciones obvias, es decir, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ y $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ para todo escalar α y todos los x, x', y y y' relevantes. Una función A definida en $E \times F$ con rango en G se llama *bilineal* si las funciones $x \mapsto A(x, y)$

y $y \mapsto A(x,y)$ son lineales para toda elección de y y x. $B(E \times F, G)$, la colección de tales A, es un espacio vectorial con las operaciones usuales definidas de punto en punto. Cuando $G = \mathbb{K}$, simplemente escribiremos $B(E \times F)$.

Definición 2.1.1. Sean E y F espacios vectoriales y sea ϕ una función bilineal en $E \times F$. Decimos que E y F son *ϕ-linealmente disjuntos* si el conjunto $\{\phi(x_r, y_s)\}$ es linealmente independiente para cada elección de conjuntos linealmente independientes $\{x_r\}$ y $\{y_s\}$.

La definición anterior no hace referencia explícita a los cardinales de los conjuntos de índices. De hecho, es fácil mostrar que podemos restringirla al caso finito, de donde obtenemos inmediatamente la siguiente caracterización.

Teorema 2.1.2. *Dos espacios vectoriales E y F son ϕ-linealmente disjuntos solo si para cualquier par de conjuntos finitos $\{x_r\} \subset E$ y $\{y_r\} \subset F$ tales que $\sum \phi(x_r, y_r) = 0$ la independencia lineal de uno implica que el otro solo consta del vector nulo.*

El lector interesado puede consultar la demostración en [21, págs. 403-404]. Un *producto tensorial* de espacios vectoriales E y F es un espacio vectorial M para el cual existe una función bilineal $\phi\colon E \times F \to M$ que, además de hacer a E y F ϕ-linealmente disjuntos, satisface $\operatorname{gen} \phi(E \times F) = M$. Sus elementos se llaman *tensores* y, por definición, son sumas finitas $\sum \phi(x_r, y_r)$ de tensores *elementales*. Siempre que deseemos explicitar ϕ, escribiremos (M, ϕ). El siguiente paso lógico es probar que, en efecto, los productos tensoriales existen; sin embargo, pospondremos este asunto hasta que hayamos mostrado por qué los productos tensoriales son importantes.

Teorema 2.1.3. *Sean E y F espacios vectoriales y (M, ϕ) uno de sus productos tensoriales. Entonces, para toda función bilineal $A\colon E \times F \to G$ existe una única función lineal $\bar{A}$ que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\phi"'] & G \\ M \arrow[ur, dashed, "\bar{A}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $A \overset{u}{\mapsto} \bar{A}$ es un isomorfismo entre $B(E \times F, G)$ y $L(M, G)$.

Demostración. Recordemos que para definir una función lineal en un espacio vectorial basta especificar su acción en una base. Sean $\{x_r\}$ y $\{y_s\}$ bases para E y F, respectivamente. Puesto que estos conjuntos son ϕ-linealmente disjuntos, $B = \{\phi(x_r, y_s)\}$ es un subconjunto de M linealmente independiente, hecho que combinado con $\operatorname{gen} \phi(E \times F) = M$ y la bilinealidad de ϕ implica que B es una base para M y que, en últimas, la asignación $\phi(x_r, y_s) \mapsto A(x_r, y_s)$ define una función lineal $\bar{A}$ en M. Ahora, escojamos cualquier

(x, y) en $E \times F$, poniendo enseguida $x = \sum \alpha_r x_r$ y $y = \sum \beta_s y_s$. Ya que A y ϕ son bilineales y $\bar{A}$ es lineal, se sigue que

$$A(x, y) = \sum \alpha_r \beta_s A(x_r, y_s) = \bar{A}\left(\sum \alpha_r \beta_s \phi(x_r, y_s)\right) = \bar{A}\phi(x, y), \tag{1}$$

mostrando así que $\bar{A}$ hace conmutar el diagrama; cualquier otra función lineal con esta propiedad coincide con $\bar{A}$ en B y por lo tanto es idéntica a ella. Por último, se verifica inmediatamente que para todo escalar α, toda función lineal v en $L(M, G)$ y toda elección de funciones bilineales A y A' en $B(E \times F, G)$, los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "A+\alpha A'"] \arrow[d, "\phi"'] & G \\ M \arrow[ur, dashed, "\bar{A}+\alpha\bar{A}'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\phi v"] \arrow[d, "\phi"'] & G \\ M \arrow[ur, dashed, "v"'] & \end{tikzcd}$$

De aquí que u sea lineal, sobre y uno a uno—note que (1) implica que $A = 0$ se sigue de $u(A) = 0$. $\square$

Es común, pues, pensar en los productos tensoriales como instrumentos de "linealización" [18]. La primera conclusión de este teorema es una propiedad (de M y ϕ) de las que en la teoría de categorías se denominan *universales*. Si bien una justificación adecuada de esta terminología queda fuera de nuestro alcance, cabe resaltar que dos objetos que satisfagan la misma propiedad universal han de ser esencialmente iguales.

Teorema 2.1.4. *Si (M, ϕ) y (M', ϕ') son productos tensoriales de E y F, entonces M y M' son isomorfos.*

Demostración. Apliquemos el Teorema 2.1.3 dos veces para obtener

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[dr, dashed, "\bar{\phi}"'] & E \times F \arrow[l, "\phi'"'] \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\phi"] & M' \\ & M \arrow[ur, dashed, "\bar{\phi}'"'] & \end{tikzcd}$$

Puesto que este diagrama conmuta, se sigue que $\bar{\phi}'\bar{\phi}\phi' = \phi'$, lo cual, a su vez, implica que $\bar{\phi}'\bar{\phi}$ y la identidad en M' coinciden en $\phi'(E \times F)$. Sin embargo, lo último es un generador de M' y por lo tanto $\bar{\phi}'\bar{\phi} = I_{M'}$. Por simetría, $\bar{\phi}\bar{\phi}' = I_M$. La demostración está completa. $\square$

En consecuencia, hablaremos *del* producto tensorial de E y F y lo denotaremos por $E \otimes F$, a pesar de que en distintos pasajes trataremos con espacios formalmente diferentes. Siguiendo esta idea, sin importar qué función bilineal ϕ se asocie a $E \otimes F$ en su definición, también escribiremos $x \otimes y$ en lugar de $\phi(x, y)$, a menos que la claridad nos exija lo contrario. Como se había prometido, es hora de dirimir la cuestión de existencia. Recordemos que un subconjunto de $E^\#$ *separa puntos* si para cada $x \neq 0$ en E al menos uno de sus elementos no se anula en x. Por ejemplo, si E es un espacio de funciones con valores en $\mathbb{K}$, la colección de todos los funcionales de evaluación, a saber, funciones de la forma $f \overset{\hat{x}}{\mapsto} f(x)$, es un subconjunto de $E^\#$ que separa puntos.

Teorema 2.1.5. *Sean E y F espacios vectoriales y fijemos conjuntos que separan puntos $S \subset E^\#$ y $T \subset F^\#$. Sea U el subespacio de $B(E \times F)$ generado por todas las funciones de tipo $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$, donde φ y ψ recorren S y T. Entonces, $E \otimes F$ puede ser visto como $\mathcal{V}$, el subespacio de $U^\#$ generado por todos los funcionales de evaluación.*

Demostración. Definamos $\phi\colon E \times F \to \mathcal{V}$ asignando a cada (x, y) su funcional de evaluación. Obviamente, $\phi(E \times F)$ genera a $\mathcal{V}$. Además, es fácil ver que esta función es bilineal. Ahora, sean $\{x_r\}$ y $\{y_r\}$ subconjuntos finitos de E y F, supongamos que $\sum \phi(x_r, y_r) = 0$ y fijemos ψ en T. La última ecuación implica que, en particular,

$$\sum \varphi(x_r)\psi(y_r) = \psi\big(\sum \varphi(x_r)y_r\big) = 0 \qquad (\varphi \in S),$$

que, a su vez, produce $\sum \varphi(x_r)y_r = 0$ porque T separa puntos y ψ fue escogido al azar. Si, adicionalmente, asumimos que $\{y_r\}$ es linealmente independiente, entonces $\varphi(x_r) = 0$ para todo r. Sin embargo, S también separa puntos y por lo tanto cada x_r debe ser nulo. Apelando a la simetría, podemos aplicar el Teorema 2.1.2 para concluir que E y F son ϕ-linealmente disjuntos. Esto termina la demostración. $\square$

Ejemplo 2.1.6. Para todo espacio E, $\mathbb{K} \otimes E$ coincide con E. Por lo tanto, $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ y $\mathbb{K}^2$ no son isomorfos.

Ejemplo 2.1.7. El producto tensorial $E \otimes F$ contiene copias de E y F, siempre que ninguno de ellos sea trivial. El espacio $E \otimes \{0\}$ siempre es trivial.

Ejemplo 2.1.8. Algunos productos tensoriales se manifiestan de forma bastante natural. Tal es el caso de $E^\# \otimes F$, que encaja en $L(E, F)$ como el espacio de funciones lineales de rango finito. Delineemos este ejemplo aún más. Supongamos que E es n-dimensional, fijemos una base $B = \{e_1, ..., e_n\}$ y definamos una base $\{e'_i\}$ para $E^\#$ mediante la fórmula $e'_i(e_j) = \delta_{ij}$[1]. Recordemos que una función lineal $u \in L(E)$ puede ser representada por una matriz cuadrada (α_{ij}) cuyas entradas satisfacen $u(e_j) = \sum \alpha_{ij} e_i$. Un ejercicio clásico de álgebra lineal nos pide, entonces, mostrar que $u \mapsto \sum \alpha_{ii}$ define un funcional lineal en $L(E)$ que no depende de B, a saber, el funcional *traza*. El enfoque "tensorial" brinda una respuesta sucinta. En efecto, considere la función bilineal en $E^\# \times E$ dada

[1] La delta de Kroenecker.

por $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$ y adjunte a ella la linealización Tr provista por el Teorema 2.1.3. Como $u = \sum \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$, se obtiene

$$\operatorname{Tr} u = \sum \alpha_{ij} \operatorname{Tr}(e'_j \otimes e_i) = \sum \alpha_{ij} e'_j(e_i) = \sum \alpha_{ii}.$$

Habiendo discutido sobre los productos tensoriales “desde afuera”, poco se ha dicho explícitamente acerca de sus elementos. Una pregunta natural nos compete: ¿cuándo son iguales dos tensores? El siguiente criterio no deja de ser una agradable respuesta.

Teorema 2.1.9. *Sean E y F espacios vectoriales. Fijemos conjuntos que separan puntos $S \subset E^{\#}$ y $T \subset F^{\#}$. Pongamos $u = \sum x_r \otimes y_r$. Entonces, $u = 0$ si y solo si*

$$\sum \varphi(x_r)\psi(y_r) = 0 \qquad (\varphi \in S)(\psi \in T). \tag{2.1}$$

Demostración. Sean $\mathcal{V}$ y $\phi\colon E \times F \to \mathcal{V}$ como en la formulación y demostración del Teorema 2.1.5. Por el Teorema 2.1.3, ϕ admite una linealización $\bar{\phi}$ en $E \otimes F$ tal que $\bar{\phi}(x \otimes y) = \phi(x, y)$. En virtud de la definición de $\mathcal{V}$, (2.1) se cumple exactamente cuando $\bar{\phi}(u) = 0$, pero, de acuerdo con la demostración del Teorema 2.1.4, $\bar{\phi}$ es en realidad un isomorfismo. La conclusión es evidente. $\square$

Ejemplo 2.1.10. Supongamos que S y T, además de separar puntos, son espacios vectoriales—$E^{\#}$ y $F^{\#}$ son ejemplos, por supuesto. Sea $A\colon E \times F \to B(S \times T)$ tal que $A(x, y)(\varphi, \psi) = \varphi(x)\varphi(y)$. Claramente, A es bilineal. En vista del Teorema 2.1.9, su linealización en $E \otimes F$ es inyectiva y por lo tanto hemos logrado identificar este producto tensorial con un espacio de formas bilineales. De manera análoga, podemos obtener identificaciones con subespacios de $L(S, F)$ y $L(T, E)$.

2.2. Productos tensoriales proyectivos de espacios de Banach

El resurgir del método axiomático impulsó una tendencia unificadora en las matemáticas del siglo XX. En efecto, con la ayuda de unos postulados bien demarcados, las teorías interactuaron, se acoplaron y sus resultados se extendieron por doquier. Los analistas, en particular, dirigieron su atención al estudio de ciertas estructuras algebraicas equipadas con topologías adecuadas para sus investigaciones. Así, por ejemplo, en los años 50, el análisis armónico fue enmarcado en la teoría de grupos topológicos y el análisis funcional se erigió sobre la teoría de espacios vectoriales topológicos. Uno de los máximos exponentes de esta matemática fue Alexander Grothendieck, quien, antes de refundar la geometría algebraica, dedicó los primeros años de su carrera al análisis funcional. De hecho, la siguiente introducción a la teoría de productos tensoriales de espacios de Banach es fruto de su disertación doctoral.

Sean E y F espacios normados reales o complejos. De ahora en adelante, usaremos tipos como $\mathcal{L}$ y $\mathcal{B}$ para denotar los subespacios de los espacios definidos al principio del capítulo que comprenden únicamente funciones continuas. ¿Cómo debería comportarse una norma razonable en $E \otimes F$? En estrecha analogía con las álgebras normadas, parece natural exigir al menos cierta compatibilidad "multiplicativa", a saber, $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$. De hecho, si la norma satisface dicha propiedad y $\sum x_r \otimes y_r$ es una representación finita del tensor u, entonces $\|u\| \leq \sum \|x_r\|\|y_r\|$. Sin más que esta observación, podemos sugerir un buen candidato a norma.

Teorema 2.2.1. *La fórmula*

$$\pi(u) = \text{ínf}\{\sum \|x_r\|\|y_r\| \colon \sum x_r \otimes y_r \text{ es una representación finita de } u\} \tag{2.2}$$

define una norma en $E \otimes F$ tal que $\pi(x \otimes y) = \|x\|\|y\|$ para todo x y y en E y F.

Demostración. Comprobar que π posee todos los atributos de norma es tarea rutinaria, excepto, quizás, cuando se trata de verificar su positividad. Supongamos que $\pi(u) = 0$. Sea $\epsilon > 0$, sean φ y ψ dos miembros de los duales topológicos E^* y F^* y escojamos una representación finita $\sum x_r \otimes y_r$ de u tal que $\|\varphi\|\|\psi\| \sum \|x_r\|\|y_r\| < \epsilon$.[2] Entonces,

$$\left|\bar{A}(u)\right| = \left|\sum \varphi(x_r)\psi(y_r)\right| < \epsilon,$$

donde $\bar{A}$ es la linealización de la forma bilineal $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$. Por lo tanto, $\sum \varphi(x_r)\psi(y_r) = 0$. Como E^* y F^* separan puntos [14, Corolario 1.9.9], u debe ser nulo en virtud del Teorema 2.1.9. Por otra parte, es evidente que $\pi(x \otimes y) \leq \|x\|\|y\|$. Para demostrar la desigualdad recíproca, supongamos que ni x ni y son nulos. Por el teorema de Hahn-Banach [14, Teorema 1.9.6], existen funcionales continuos φ y ψ tales que $\varphi(x) = \|x\|$, $\psi(y) = \|y\|$ y $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Una vez más, un argumento de linealización aplicado a estas condiciones produce $\|x\|\|y\| \leq \sum \|x_r\|\|y_r\|$ para toda representación finita $\sum x_r \otimes y_r$ de $x \otimes y$, de lo cual $\|x\|\|y\| \leq \pi(x \otimes y)$ es consecuencia inmediata. $\square$

A π se le conoce por el nombre de *norma proyectiva*.[3] Es evidente que normas equivalentes dan lugar a normas proyectivas equivalentes. Cada vez que deseemos considerar al producto tensorial junto con esta norma utilizaremos el símbolo $E \otimes_\pi F$. Por lo general, este espacio no es completo aún cuando sus componentes E y F lo son. A su completado le llamaremos *producto tensorial proyectivo de E y F* y lo denotaremos mediante $E \hat{\otimes}_\pi F$.

[2] Por definición, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

[3] Esta norma hace parte de una familia de normas tensoriales *razonables*. Entre ellas también se destaca la norma en $E \otimes F$ como subespacio de formas bilineales continuas (ver Ejemplo 2.1.10), simbolizada ϵ y llamada *norma inyectiva*. En este texto solamente nos concierne la norma proyectiva.

Ejemplo 2.2.2. *Producto tensorial de operadores.* Si S y T yacen respectivamente en $\mathcal{L}(E,F)$ y $\mathcal{L}(G,H)$, entonces existe un único operador $S\otimes T$ en $L(E\otimes G, F\otimes H)$ tal que $S\otimes T(x\otimes y)=S(x)\otimes T(y)$. Si $\sum x_r\otimes y_r$ es una representación finita de u, entonces $\pi(S\otimes T(u))\leq \|S\|\|T\|\sum\|x_r\|\|y_r\|$ y por lo tanto $S\otimes T\in\mathcal{L}(E\otimes_\pi G, F\otimes_\pi H)$ con norma $\|S\otimes T\|\leq\|S\|\|T\|$. De hecho, debemos concluir que $\|S\otimes T\|=\|S\|\|T\|$, pues $\|S(x)\|\|T(y)\|\leq\|S\otimes T\|\|x\|\|y\|$ para todo x y y. Por lo tanto, $S\otimes T$ admite una única extensión continua $S\otimes_\pi T$ en $\mathcal{L}(E\hat{\otimes}_\pi G, F\hat{\otimes}_\pi H)$ tal que $\|S\otimes_\pi T\|=\|S\|\|T\|$.

Si X y Y son subespacios de E y F, entonces $X\otimes_\pi Y$ es subespacio de $E\otimes_\pi F$ en el sentido algebraico, pero no siempre en el topológico.[4] De hecho, puesto que la norma proyectiva de un tensor se calcula en función de sus representaciones, es claro que $\pi_{E\otimes F}\leq\pi_{X\otimes Y}$, mas no hay indicios de que la desigualdad contraria sea cierta, ni siquiera salvo alguna constante positiva. Los subespacios complementados no poseen este defecto.[5]

Teorema 2.2.3. *Sean E y F espacios normados. Si $X\subset E$ y $Y\subset F$ son subespacios complementados, entonces $X\otimes_\pi Y$ es complementado en $E\otimes_\pi F$ y para cualquier par de proyecciones $P\colon E\to X$ y $Q\colon F\to Y$*

$$\pi_{E\otimes F}\leq\pi_{X\otimes Y}\leq\|P\|\|Q\|\pi_{E\otimes F}. \tag{2.3}$$

La demostración es obvia, pues $P\otimes Q$ es la proyección buscada.

Ejemplo 2.2.4. *Inmersión isométrica y complementada de F en $E\otimes_\pi F$* [18, Ejercicio 2.1]. Sea $E\neq\{0\}$ y $x\in E$ con $\|x\|=1$. Entonces, $\operatorname{gen}\{x\}$ está complementado en E con proyección P de norma uno. Claramente, F está complementado en sí mismo con la proyección identidad 1_F. En consecuencia, $\operatorname{gen}\{x\}\otimes_\pi F$ es un subespacio complementado de $E\otimes_\pi F$ con proyección de norma uno, a saber, $P\otimes 1_F$. Sin embargo, F y $\operatorname{gen}\{x\}\otimes_\pi F$ son isométricamente isomorfos, pues $\bar{A}$, el único operador de $L(\operatorname{gen}\{x\}\otimes F, F)$ que verifica $\bar{A}(\alpha x\otimes y)=\alpha y$, es un isomorfismo en virtud del Teorema 2.1.9 y satisface $\pi(\bar{A}^{-1}(y))=\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|=\|y\|$. En particular, F y $\mathbb{K}\otimes_\pi F$ son indistinguibles como espacios normados.

Si G es un espacio normado, entonces $\mathcal{B}(E\times F,G)=\{A\in B(E\times F,G)\colon \|A(x,y)\|\leq C\|x\|\|y\|$ para algún $C\}$. Si, además, G es completo, entonces la fórmula

$$\|A\|=\sup_{\|x\|\leq 1\ \|y\|\leq 1}\|A(x,y)\|$$

define una norma completa en $\mathcal{B}(E\times F,G)$. A estas convenciones las acompaña una elegante versión topológica del Teorema 2.1.3.

[4] Ver [18, Ejercicio 2.7].

[5] $X\subset E$ es complementado en E si existe un operador continuo e idempotente $P\colon E\to X$ tal que $P(E)=X$. En este contexto, a P se le llama *proyección de E sobre X*.

Teorema 2.2.5. *Sea $A\colon E \times F \to G$ una función bilineal continua. Entonces, existe un único operador continuo $\bar{A}\colon E \otimes_\pi F \to G$ tal que $\bar{A}(x \otimes y) = A(x, y)$ para todo x y y. Adicionalmente, la correspondencia $A \mapsto \bar{A}$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(E \times F, G)$ y $\mathcal{L}(E \otimes_\pi F, G)$.*

Observe que $\mathcal{L}(E \otimes_\pi F, G)$ puede ser reemplazado por $\mathcal{L}(E \hat{\otimes}_\pi F, G)$ en la conclusión de este teorema. Además, note que $T \mapsto ((x, y) \mapsto Txy)$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ y $\mathcal{B}(E \times F, G)$. En particular, $(E \hat{\otimes}_\pi F)^*$ puede ser tratado como $\mathcal{B}(E \times F)$ o como $\mathcal{L}(E, F^*)$—o incluso $\mathcal{L}(F, E^*)$. Ahora, fijemos un conjunto I, sea $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_\iota\}_{\iota \in I}$ una familia de escalares no negativos y $\sum \alpha_\iota$ el supremo de todas las sumas finitas $\sum \alpha_i$ o, equivalentemente, la integral de Lebesgue de $\iota \mapsto \alpha_\iota$ con respecto a la medida de contar en $\mathcal{P}(I)$. Si $\boldsymbol{x} = \{x_\iota\} \subset E$, diremos que $\boldsymbol{x}$ es *absolutamente sumable* siempre que $\|\{x_\iota\}\| := \sum \|x_\iota\| < \infty$. En el sentido esperado, es inmediato que

$$\ell_1(E) = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x} \text{ es absolutamente sumable}\} \tag{1}$$

es un espacio normado. Si E es completo, es fácil ver que $\ell_1(E)$ también. En efecto, sea $\epsilon > 0$, $\{\boldsymbol{x}_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\ell_1(E)$ y $\boldsymbol{x}$ la familia definida por $x_\iota = \lim x_\iota^{(n)}$. Si n y m son lo suficientemente grandes, entonces $\sum \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\| < \epsilon$ y por lo tanto $\sum \|x_i^{(n)} - x_i\| \le \epsilon$ para cualquier suma tomada sobre un subconjunto finito de I. De aquí que $\boldsymbol{x}$ sea absolutamente sumable y que $\lim \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}$. Adicionalmente, tampoco es difícil mostrar que para todo $\boldsymbol{x}$ en $\ell_1(E)$ existe uno y solo un x en E con la siguiente propiedad:

> *para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $\mathcal{F}_\epsilon \subset I$ tal que $\|x - \sum_{i \in \mathcal{F}} x_i\| < \epsilon$ para todo conjunto finito $\mathcal{F}_\epsilon \subset \mathcal{F} \subset I$.*

En dicho caso escribiremos $\sum x_\iota = x$. Así, es evidente que $\boldsymbol{x} \mapsto \sum x_\iota$ es un operador lineal continuo, lo cual no es un hecho fortuito, pues hace parte de un esquema superior que abordaremos en la siguiente sección.

De manera parecida, introducimos los espacios de familias con valores en E

$$\ell_\infty(E) = \{\boldsymbol{x}\colon \sup \|x_\iota\| < \infty\} \tag{2}$$

y

$$c_0(E) = \left\{\boldsymbol{x}\colon \begin{array}{c} \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe un conjunto finito } F \\ \text{tal que } \sup_{\iota \in I - F} \|x_\iota\| < \epsilon \end{array}\right\}, \tag{3}$$

normados mediante $\boldsymbol{x} \mapsto \sup \|x_\iota\|$. Las relaciones de dualidad entre los espacios de tipo (1), (2) y (3) son las esperadas. Aquí solo destacaremos la siguiente.

Teorema 2.2.6. *Para todo φ en $c_0(E)^*$ existe $\boldsymbol{\varphi}$ en $\ell_1(E^*)$ tal que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum \varphi_\iota(x_\iota)$.*

Demostración. Sean $\pi_\iota\colon c_0(E) \to E$ y $\theta_\iota\colon E \to c_0(E)$ la proyección y la inyección en la coordenada iota. Entonces, $\boldsymbol{x} = \sum \theta_\iota \pi_\iota(\boldsymbol{x})$ y por lo tanto $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum \varphi\theta_\iota(x_\iota)$ para todo $\boldsymbol{x}$ en $c_0(E)$. Pongamos $\varphi_\iota = \varphi\theta_\iota$. Si F es un conjunto finito de índices, entonces $\sum_{i\in F} \varphi_i(x_i) \leq \|\varphi\|$ para cualquier elección de x_i en E que satisfagan $\|x_i\| \leq 1$ y $\varphi_i(x_i) \in \mathbb{R}$. Así, $\sum_{i\in F} \|\varphi_i\| \leq \|\varphi\|$ y en consecuencia $\sum \|\varphi_\iota\| < \infty$. □

En aras de la simplicidad, acordemos que $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{K})$. A continuación, presentamos el primer producto tensorial proyectivo de verdadero interés [18, Ejemplo 2.6].

Teorema 2.2.7. *Si E es un espacio de Banach, los espacios $\ell_1(E)$ y $\ell_1 \hat{\otimes}_\pi E$ son isométricamente isomorfos.*

Demostración. Sea $\bar{A}$ el operador en $\ell_1 \otimes_\pi E$ tal que $\bar{A}(\boldsymbol{\alpha} \otimes x) = \{\alpha_\iota x\}$. Por el Teorema 2.2.5, $\|\bar{A}\| = 1$. Definamos la familia $\boldsymbol{e}_\iota$ por la fórmula $e^{(\iota)}_\gamma = \delta_{\iota\gamma}$ para todo ι en I. Así, la definición de sumabilidad absoluta implica que $\boldsymbol{x} = \sum \bar{A}(\boldsymbol{e}_\iota \otimes x_\iota)$. Por lo tanto, basta mostrar que $\bar{A}$ es una isometría. Sea $\mathcal{D} = \mathrm{gen}\{\boldsymbol{e}_\iota\}$. Puesto que $\mathcal{D}$ es denso en ℓ_1 y $(\boldsymbol{\alpha}, x) \mapsto \boldsymbol{\alpha} \otimes x$ es continua, para todo x en E se verifica que $\ell_1 \otimes \mathrm{gen}\{x\} \subset \overline{\mathcal{D} \otimes \mathrm{gen}\{x\}}$, y por lo tanto $\ell_1 \otimes E = \overline{\mathcal{D} \otimes E}$. La desigualdad $\pi(u) \leq \|\bar{A}(u)\|$ en $\mathcal{D} \otimes E$ se obtiene por pura manipulación algebraica; un argumento de continuidad extiende su validez a todo $\ell_1 \otimes_\pi E$ y, por cuenta de ello, termina la demostración. □

Observación. La prueba anterior esconde dos resultados que vale la pena resaltar: el primero, que si $\bar{A}(u) = \boldsymbol{x}$, entonces $u = \bar{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \sum \boldsymbol{e}_\iota \otimes x_\iota$; el segundo, que si ponemos $I = \{1, ..., n\}$, entonces $\bar{A}$ es una isometría entre $\ell_1(E)$ y $\mathbb{K}^n \otimes_\pi E$, de donde automáticamente obtenemos la completitud de $F \otimes_\pi E$ para todo espacio de dimensión finita F [18, Ejercicio 2.4]. Concluiremos este comentario justificando por qué no obstante la transición de $E \otimes_\pi F$ a $E \hat{\otimes}_\pi F$ no es del todo inútil [18, Ejercicio 2.5].

Teorema 2.2.8. *Si E y F son espacios de Banach de dimensión infinita, entonces $E \otimes_\pi F$ no es completo.*

Demostración. Sea $0 < r < 1$ y escojamos un vector unitario e_1 en E . Supongamos como hipótesis de definición recursiva que $e_1, ..., e_{n-1}$ son vectores unitarios y linealmente independientes en E tales que para cualquier elección de escalares que incluya a la unidad $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ se verifica que $\|\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{n-1} e_{n-1}\| > r^n/(r+1)^n$. Por el lema de Riesz [7], existe un vector unitario e_n tal que para toda lista de escalares $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ se verifica $\|\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{n-1} e_{n-1} + e_n\| > r$. Claramente, los vectores $e_1, ..., e_n$ son linealmente independientes. Para asegurar el paso inductivo, sea $\alpha_1, ..., \alpha_n$ una lista de escalares de los cuales, sin pérdida de generalidad, los primeros $n-1$ incluyen a la unidad. De esta manera, si $|\alpha_n| < r(r+1)^{-n-1}$, entonces $\|\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n\| > r^n(r+1)^{-n} - |\alpha_n| > r^{n+1}(r+1)^{-n-1}$; sin embargo, esta conclusión es cierta aún si $|\alpha_n| \geq r(r+1)^{-n-1}$, pues en dicho caso $\|\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n\| > |\alpha_n|\, r \geq r^{n+1}(r+1)^{-n-1}$. Hemos, pues, demostrado que para todo $0 < r < 1$ existe una sucesión $\{e_i\}$ de vectores unitarios y linealmente independientes en E tal que para todo $n \geq 1$

$$\|\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n\| > \left(\frac{r}{1+r}\right)^{n+1} \qquad (\alpha_k = 1 \text{ para algún } k). \tag{1}$$

Pongamos $X_{mn} = \text{gen}\{(1-\delta_{mi})e_i\}_{i=1}^n$ y $d_{mn} = d(e_m, X_{mn})$ para todo par de enteros positivos m y n. En particular, (1) implica

$$d_{mn} \geq \left(\frac{r}{r+1}\right)^{n+1} \qquad (1 \leq m < n). \tag{2}$$

De ahora en adelante, fijemos un número $1/2 < r < 1$, una sucesión $\{e_i\}$ que por (1) le corresponde y una sucesión cualquiera $\{f_i\}$ de vectores unitarios y linealmente independientes de F. Pongamos $u_k = \sum_{i=1}^k 3^{-i} e_i \otimes f_i$ para todo $k \geq 1$. Claramente, $\{u_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $E \otimes_\pi F$; sin embargo, afirmamos que $\{u_k\}$ no converge en $E \otimes_\pi F$. Actuemos por reducción al absurdo suponiendo que existe un tensor $u = \sum_{i=1}^l x_i \otimes y_i$ tal que $\lim u_k = u$. Sea $\bar{A}$ la linealización en $E \otimes_\pi F$ de la función bilineal $A\colon E \times F \to \mathcal{L}(E^*, F)$ definida por la fórmula $A(x,y)(\varphi) = \varphi(x)y$. Es fácil comprobar que A es continua; de hecho, el teorema de Hahn-Banach garantiza que $\|A\| = 1$. En virtud del Teorema 2.2.5, $\bar{A}$ también debe ser continua y por lo tanto $\bar{A}(u) = \lim \bar{A}(u_k)$. De aquí se sigue que para todo φ en E^*

$$\varphi(x_1)y_1 + ... + \varphi(x_l)y_l = \sum_{i=1}^\infty \varphi(e_i)\frac{f_i}{3^i}. \tag{3}$$

Sea $Y = \text{gen}\{y_1, ..., y_l\}$ y fijemos $m \geq 1$. Un corolario de separación del teorema de Hahn-Banach aplicado a (2) [14, Corolario 1.9.7] produce funcionales lineales φ_n, $n = m+1, m+2...$, con norma $\|\varphi_n\| = 1/d_{mn}$ que se anulan en X_{mn} y además satisfacen $\varphi_n(e_m) = 1$. Así, evaluando en (3), obtenemos

$$\varphi_n(x_1)y_1 + ... + \varphi_n(x_l)y_l - \frac{1}{3^m}f_m = \sum_{i=n+1}^\infty \varphi_n(e_i)\frac{f_i}{3^i} \qquad (n > m). \tag{4}$$

Puesto que

$$\left\|\sum_{i=n+1}^\infty \varphi_n(e_i)\frac{f_i}{3^i}\right\| \leq \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{\delta_{mn}3^i} \leq \sum_{i=n+1}^\infty \frac{1}{3^i}\left(\frac{r+1}{r}\right)^{n+1} \leq \sum_{i=n+1}^\infty \left(\frac{r+1}{3r}\right)^i$$

y $r+1 < 3r$, (4) implica $f_m \in \overline{Y} = Y$. Por lo tanto, Y contiene un conjunto infinito de vectores linealmente independientes. Absurdo. □

Observación. El teorema anterior se considera parte del folclore de la teoría, por lo que su mención en la literatura usualmente es relegada a los ejercicios. Para una demostración ligeramente distinta, consulte la maquinaria básica de la teoría de sistemas biortogonales en espacios de Banach [12, Teorema 1.22].

Una digresión sobre cocientes

Sean E y F espacios normados. Si X es un subespacio cerrado de E, p es la proyección natural en el cociente $x \mapsto \overline{x}$ y $T\colon E/X \to F$ es un operador continuo, entonces $T_p := Tp$ queda factorizado naturalmente a través de T. Toda función sobreyectiva $Q\colon E \to F$ que admita tal tipo de factorización mediante una isometría recibe el nombre de *operador cociente*, en cuyo caso diremos que F *es cociente de* E—en particular, los cocientes de espacios de Banach son espacios de Banach. A esta definición le corresponde una caracterización sencilla.

Lema 2.2.9. *Sea Q un operador de E en F. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *Q es un operador cociente.*

(b) *$Q(E) = F$ y $\|y\| = \text{ínf}\{\|x\|\colon Q(x) = y\}$ para todo y en F.*

(c) *$Q(B_E) = B_F$, donde $B_E = \{x\colon \|x\| < 1\}$ y $B_F = \{y\colon \|y\| < 1\}$.*

Demostración. Supongamos que Q es un operador cociente que se factoriza a través de la isometría $T\colon E/X \to F$. Puesto que $\|p\| \leq 1$, $\|Q\| \leq 1$ y por ende $Q(B_E) \subset B_F$. Ahora, si $\|y\| < 1$ y $T(\overline{x}) = y$, entonces $\|\overline{x}\| < 1$ y por lo tanto $Q(x + x_0) = y$ para algún x_0 en X tal que $\|x + x_0\| < 1$. Luego $B_F \subset Q(B_E)$ y (a) implica (c). Si se cumple (c), entonces Q es continuo y sobreyectivo; de hecho, $\|Q\| \leq 1$ y por lo tanto $\|y\| \leq \text{ínf}\{\|x\|\colon Q(x) = y\}$ para todo y en F. Por hipótesis, si $\|y\| < \alpha$, existe un x en B_E tal que $Q(x) = \alpha^{-1}y$ o, equivalentemente, existe x en αB_E tal que $Q(x) = y$. En consecuencia, $\|y\| = \text{ínf}\{\|x\|\colon Q(x) = y\} \leq$ y (c) implica (b). Finalmente, si (b) se cumple, entonces $\overline{x} \mapsto Q(x)$ es una isometría entre $E/\ker Q$ y F. Luego Q es un operador cociente. □

Ahora, planteemos un problema diferente. Supongamos que $Q\colon E \to F$ es un operador continuo cuya imagen es todo F. El lema anterior implica que, en particular, Q no es un operador cociente cuando $\|Q\| > 1$. A pesar de limitaciones parecidas, ¿existe alguna norma en F bajo la cual Q sí es un operador cociente? El siguiente teorema recoge el literal (b) del Lema 2.2.9 y resuelve la pregunta.

Teorema 2.2.10. *Si $Q\colon E \to F$ es un operador continuo y sobreyectivo, entonces $\|y\|_Q = \text{ínf}\{\|x\|\colon Qx = y\}$ define la norma en Y bajo la cual Q es un operador cociente. Además, $\|y\| \leq \|Q\|\|y\|_Q$ para todo y en F.*

Demostración. La desigualdad es inmediata y de ella se desprende la positividad de $\|\cdot\|_Q$. Por otra parte, si $\alpha \neq 0$ es un escalar, entonces

$$\|\alpha y\|_Q = \text{ínf}\{\|x\|\colon Qx = \alpha y\} = \text{ínf}\{|\alpha|\|x\|\colon Qx = y\} = |\alpha|\|y\|_Q.$$

Dado que $Q(0) = 0$, $\|0\|_Q = 0$ y por lo tanto $\|\cdot\|_Q$ es compatible con el producto por escalar. Finalmente, para todo y_1 y y_2 en F y cada par x_1 y x_2 tal que $Qx_1 = y_1$ y $Qx_2 = y_2$ se verifica

$$\|y_1 + y_2\|_Q = \text{ínf}\{\|x\|\colon Qx = y_1 + y_2\} \leq \|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|,$$

y por lo tanto $\|y_1 + y_2\|_Q \leq \|y_1\|_Q + \|y_2\|_Q$. □

Adoptemos el símbolo $\hat{E}$ para representar el completado de E. Asimismo, si $Q\colon E \to F$ es un operador continuo, escribiremos $\hat{Q}$ para denotar la única extensión continua de Q en $\hat{E}$. De esta manera, por ejemplo, es claro que $\overline{\ker Q} \subset \ker \hat{Q}$. Supongamos, adicionalmente, que Q es un operador cociente, $T\colon E/X \to F$ es una isometría a través de la cual se factoriza y $\hat{Q}(x) = 0$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en E que converge a x. Entonces, $\text{lím}\,\|\overline{x}_n\| = 0$, pues $\{\|Q(x_n)\|\}$ converge a cero y $Q = Tp$. Sea $\{n_k\}$ una sucesión creciente de enteros positivos sujetos a la desigualdad $\|\overline{x}_{n_k}\| < 1/k$. Para todo $k \geq 1$, escojamos un s_k en X que satisfaga $\|x_{n_k} - s_k\| < 1/k$. Si $\epsilon > 0$ y $k_0 > 2/\epsilon$ es tal que $k \geq k_0$ implica $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon/2$, entonces $\|s_k - x\| < \epsilon$ y por lo tanto $\text{lím}\, s_k = x$. Luego $x \in \overline{X}$. En conclusión,

> *si $Q\colon E \to F$ es un operador cociente, entonces $\ker \hat{Q} = \overline{\ker Q} = \overline{X}$ para toda isometría $T\colon E/X \to F$ a través de la cual Q se factoriza.*

Conservemos las hipótesis del párrafo anterior y supongamos que $x - y \in X$. Entonces, $x - y \in \overline{X}$ y por lo tanto el operador $L\colon E/X \to \hat{E}/\overline{X}$ dado por la fórmula $L(\overline{x}) = \overline{x}$ está bien definido. De hecho, L es una isometría, pues todo x en E satisface $d(x, X) = d(x, \overline{X})$. Como la imagen de L es densa en $\hat{E}/\overline{X}$, $\hat{L}$ es un isomorfismo isométrico entre el completado de E/X y $\hat{E}/\overline{X}$. Así, $\hat{Q} = \hat{T}\hat{L}^{-1}p$ y obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.11. *Si $Q\colon E \to F$ en un operador cociente, entonces $\hat{Q}\colon \hat{E} \to \hat{F}$ también. Por lo tanto, si F es cociente de E, entonces $\hat{F}$ es cociente de $\hat{E}$.*

Los cocientes no solamente son estables bajo la toma de completados, sino también bajo la construcción del producto tensorial proyectivo [18, Proposición 2.5], razón por la cual este lleva su nombre.

Teorema 2.2.12. *Si $Q\colon E \to G$ y $R\colon F \to H$ son operadores cocientes, entonces $Q \otimes R\colon E \otimes_\pi F \to G \otimes_\pi H$ y, por tanto, $Q \otimes_\pi R\colon E\hat{\otimes}_\pi F \to G\hat{\otimes}_\pi H$ son operadores cocientes.*

Demostración. Obviamente, $Q \otimes R$ es un operador sobreyectivo. Ahora, sea v un tensor de $G \otimes_\pi H$, pongamos $s > \pi(v)$ y escojamos una representación $\sum_{r=1}^{n} w_r \otimes z_r$ de v tal que $\sum \|w_r\|\|z_r\| < s$. Como Q y R son operadores cocientes, el Lema 2.2.9 implica que $\|w_r\| = \text{ínf}\{\|x\|\colon Q(x) = w_r\}$ y $\|z_r\| = \text{ínf}\{\|y\|\colon R(y) = z_r\}$ para todo r. Ahora, en vista de que el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$ es continuo y los ínfimos que se acaban de describir son puntos límites de sus respectivos conjuntos, existen x_r y y_r tales que $Q(x_r) = w_r$, $R(y_r) = z_r$ y $\sum \|x_r\|\|y_r\| < s$, de donde obtenemos $\inf\{\|u\|\colon Q \otimes R(u) = v\} < s$. En consecuencia, $\inf\{\|u\|\colon Q \otimes R(u) = v\} \leq \pi(v)$. Finalmente, de $\|Q \otimes R\| = \|Q\|\|R\| \leq 1$, conseguimos $\pi(v) \leq \inf\{\|u\|\colon Q \otimes R(u) = v\}$, que en retorno nos entrega el Teorema 2.2.12 en virtud del Lema 2.2.9 y el Teorema 2.2.11. $\square$

Cerraremos este apartado con un teorema modesto [3, Lema 1.4.a], pero de notables implicaciones estructurales.

Teorema 2.2.13. *Todo espacio de Banach E es el cociente de algún ℓ_1.*

Demostración. Con el literal (c) del Lema 2.2.9 en mente, basta poner $I = B_E$ y definir $Q(\boldsymbol{\alpha}) = \sum \alpha_x x$ para todo $\boldsymbol{\alpha}$ en ℓ_1. $\square$

$\diamondsuit$

Por definición, sabemos que los tensores se pueden representar por sumas finitas de tensores elementales; incluso, el Teorema 2.1.9 es un elegante criterio para distinguirlos entre sí. ¿Qué podemos decir, en cambio, acerca de los miembros de $E\hat{\otimes}_\pi F$? Por ahora, debemos conformarnos con una representación explícita que está en linea con la observación que sucede al Teorema 2.2.7.

Teorema 2.2.14. *Sean E y F espacios de Banach. Sea $u \in E\hat{\otimes}_\pi F$ y $\epsilon > 0$. Entonces, existen familias $\boldsymbol{x}$ en $\ell_\infty(E)$ y $\boldsymbol{y}$ en $\ell_1(F)$ tales que $\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$,*

$$u = \sum x_\iota \otimes y_\iota \quad \text{y} \quad \sum \|x_\iota\|\|y_\iota\| < \pi(u) + \epsilon. \tag{2.4}$$

Demostración. Por el Teorema 2.2.13, existe un operador cociente $Q\colon \ell_1 \to E$ para algún I. Definamos $\boldsymbol{e}_\iota$ para cada $\iota \in I$ como en la prueba del Teorema 2.2.7. Puesto que el operador identidad $1_F\colon F \to F$ es un operador cociente, $Q \otimes_\pi 1_F\colon \ell_1\hat{\otimes}_\pi F \to E\hat{\otimes}_\pi F$ también y por lo tanto existe un v en $\ell_1\hat{\otimes}_\pi F$ tal que $Q \otimes_\pi 1_F(v) = u$ y $\pi(v) < \pi(u) + \epsilon$ al que le corresponde un $\boldsymbol{y}$ en $\ell_1(F)$ que verifica $v = \sum \boldsymbol{e}_\iota \otimes y_\iota$ y $\pi(v) = \|\boldsymbol{y}\|$. En consecuencia, $u = \sum Q(\boldsymbol{e}_\iota) \otimes y_\iota$ y

$$\sum \|Q(\boldsymbol{e}_\iota)\|\|y_\iota\| \leq \sum \|\boldsymbol{e}_\iota\|\|y_\iota\| = \|\boldsymbol{y}\| < \pi(u) + \epsilon.$$

$\square$

En particular, para todo u en $E\hat{\otimes}_\pi F$ existen sucesiones acotadas $\{x_n\} \subset E$ y $\{y_n\} \subset F$ tales que $\sum \|x_n\|\|y_n\| < \infty$ y $u = \sum x_n \otimes y_n$, caso en que diremos que $\sum x_n \otimes y_n$ es una *representación nuclear* de u. Así, el Teorema 2.2.14 implica al instante que para todo u en $E\hat{\otimes}_\pi F$

$$\pi(u) = \inf\{\sum \|x_n\|\|y_n\|\colon \sum x_n \otimes y_n \text{ es una representación nuclear de } u\}. \tag{2.5}$$

Obligatoriamente surge la pregunta de si existe un criterio análogo al Teorema 2.1.9 en términos de representaciones nucleares. La respuesta es parcialmente positiva, pero es tema del siguiente capítulo. Ahora, sea $\mathcal{N}\colon E^*\hat{\otimes}_\pi F \to \mathcal{L}(E,F)$ la linealización de la función bilineal continua $A\colon E^* \times F \to \mathcal{L}(E,F)$ definida por $A(\varphi,y)(x) = \varphi(x)y$ y pongamos $\mathcal{N}(E,F) := \mathcal{N}(E^*\hat{\otimes}_\pi F)$. Por el Teorema 2.2.10, existe una única norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ en $\mathcal{N}(E,F)$ bajo la cual $\mathcal{N}$ es un operador cociente que además satisface $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{N}}$ para todo T en $\mathcal{N}(E,F)$. A $\mathcal{N}(E,F)$ junto con dicha norma se le conoce como el espacio de *operadores nucleares* de E en F. Explícitamente, un operador T de E en F es nuclear cuando existen sucesiones $\{\varphi_i\} \subset E^*$ y $\{y_i\} \subset F$ tales que $\sum \|\varphi_i\|\|y_i\| < \infty$ y $Tx = \sum \varphi_i(x)y_i$ para todo x en E. El caso en que E y F son un mismo espacio de Hilbert es de especial interés.

Ejemplo 2.2.15. *Operadores de clase traza.* Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y T un operador compacto de $\mathcal{H}$ en sí mismo. Como T^*T es compacto, autoadjunto y no-negativo, existe un único operador $|T| \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ compacto y no-negativo tal que $|T|^2 = T^*T$, a quien naturalmente llamamos *el valor absoluto de* T. El estudio de la p-sumabilidad de la sucesión de los *valores singulares* de T, *i . e.*, los autovalores de $|T|$, conduce a las *p-clases de Schatten.* Explícitamente, si $1 \leq p < \infty$, $\{s_n(T)\}$ es la sucesión de valores singulares de T, contando multiplicidades, y $\sum s_n(T)^p < \infty$, entonces decimos que T pertenece a la p-ésima clase de Schatten y que $\|T\|_p = \sqrt[p]{\sum s_n(T)^p}$ es su p-norma. Se puede demostrar que toda p-clase de Schatten es un espacio vectorial y que su p-norma asociada es verdaderamente una norma completa. La primera de estas clases y su norma reciben los nombres de *clase y norma traza.* Esta terminología es motivada por el hecho de que para todo T en dicha clase la serie $\sum_\iota \langle T(e_\iota), e_\iota\rangle$ converge absolutamente para toda base ortonormal $\{e_\iota\}$ de $\mathcal{H}$ sin que su suma dependa de la elección de la base. Se puede demostrar que la clase traza es precisamente el espacio de operadores nucleares de $\mathcal{H}$ en sí mismo [22, Teorema 7.12]. En este sentido, los operadores nucleares extienden la noción de operador de clase traza a familias de operadores entre espacios de Banach. La buena definición de la traza en ausencia de un producto interno, sin embargo, es un asunto más delicado que precisa de la propiedad de aproximación.

Si bien todo operador nuclear es límite en $\mathcal{L}(E,F)$ de operadores de rango finito y por ende compacto, la propiedad de ser compacto es en general más débil que la de ser nuclear.

Ejemplo 2.2.16. Sea $\boldsymbol{\varphi} \in c_0(E^*)$. Como $\boldsymbol{\varphi}$ es una familia acotada, el operador T de $\ell_1(E)$ en ℓ_1 dado por $T\boldsymbol{x} = \{\varphi_\iota(x_\iota)\}$ está bien definido. Si $\pi_\iota\colon \ell_1(E) \to E$ y $\theta_\iota\colon E \to \ell_1(E)$ son la proyección y la inyección en la coordenada iota, entonces $\|T - \sum_{i\in F} T\theta_\iota\pi_\iota\| \leq \sup_{\iota\notin F} \|\varphi_\iota\|$ para cada conjunto finito de índices F. Por lo tanto, $T = \sum T\theta_\iota\pi_\iota$ y T es compacto.

Ahora, supongamos que T es nuclear. El Teorema 2.2.14 implica que existen familias

$\boldsymbol{\psi} \in \ell_1(E)^*$ y $\{\boldsymbol{y}_\gamma\} \in \ell_1(\ell_1)$ tales que $\sup \|\psi_\gamma\| \leq 1$ y

$$T\boldsymbol{x} = \sum \psi_\gamma(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_\gamma \qquad (\boldsymbol{x} \in \ell_1).$$

Esta ecuación a su vez implica que para cada ι y todo x en E tal que $\|x\| \leq 1$ y $\varphi_\iota(x) \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\iota(x) = \sum \langle \psi_\gamma, \theta_\iota x \rangle y_\iota^{(\gamma)} \leq \sum_\gamma |y_\iota^{(\gamma)}|.$$

Así, $\|\varphi_\iota\| \leq \sum_\gamma |y_\iota^{(\gamma)}|$ y por lo tanto

$$\sum \|\varphi_\iota\| \leq \sum_\iota \sum_\gamma |y_\iota^{(\gamma)}| = \sum_\gamma \sum_\iota |y_\iota^{(\gamma)}| = \sum \|\boldsymbol{y}_\gamma\| < \infty.$$

Luego T es compacto pero no nuclear siempre que $\boldsymbol{\varphi}$ no esté en $\ell_1(E^*)$.

Grothendieck formuló el concepto de nuclearidad en espacios localmente convexos en búsqueda de una generalización del resultado que en la teoría de funciones generalizadas recibe el nombre de *teorema del núcleo de Schwartz* [21, pág. 509]. La definición general es moderadamente técnica, no se discutirá aquí, pero su caracterización en espacios normados es bastante sencilla: un espacio normado es nuclear si y solo si su operador identidad es nuclear. En otras palabras, los espacios normados nucleares son exactamente los de dimensión finita.

2.3. La integral de Bochner

Sea X un conjunto y sea $\mathscr{S}$ una colección de subconjuntos de X. En general, escribiremos $\sigma(\mathscr{S})$ para denotar la sigma álgebra generada por $\mathscr{S}$ en X; en especial, si (E, τ) es un espacio topológico, escribiremos $\mathscr{B}(E) = \sigma(\tau)$ para simbolizar la sigma álgebra boreliana de E. En adelante, sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y E un espacio de Banach. En el caso $E = \mathbb{R}$, es común empezar a delinear una teoría de integración en el espacio de funciones de X en E estudiando el subespacio de funciones $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}(\mathbb{E})$-medibles,—o, sencillamente, *Borel-medibles*—puesto que este es lo suficientemente extenso para incluir una plétora de funciones que la teoría de Riemann no cubre y a la vez permite perfeccionar las ideas que no obstante la hicieron tan fructífera. Si E es un espacio de Banach más general, debemos razonar con mayor cautela, pues si bien el conjunto de funciones Borel-medibles conserva los múltiplos escalares de sus elementos, este *no siempre* es cerrado bajo la suma. A continuación, discutiremos un contraejemplo [4, Ejercicio 5.1.8]. Supongamos que $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$ son espacios medibles y pongamos $C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ para todo subconjunto C de $X \times Y$ y todo x en X—es decir, C_x es el corte transversal de C en x. Entonces, afirmamos que

> *el número de cortes transversales de un miembro de la sigma álgebra producto $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ no excede al cardinal del continuo.*

Para ver esto, apliquemos el principio de inducción de las sigma álgebras. Sea $\mathscr{C}$ la colección de subconjuntos de $X \times Y$ que poseen la propiedad en mención. Claramente, todo rectángulo $A \times B$ yace en $\mathscr{C}$. Además, la relación $(X \times Y - C)_x = Y - C_x$ muestra que $\mathscr{C}$ es cerrado bajo la toma de complementos, mientras que $(\bigcup C^{(n)})_x = \bigcup C_x^{(n)}$ implica que toda unión numerable de miembros de $\mathscr{C}$ tiene a lo más $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ cortes transversales y por tanto también pertenece a $\mathscr{C}$. Luego $\mathscr{C}$ es una sigma álgebra en $X \times Y$ que contiene a $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, de lo cual nuestra afirmación es corolario. Ahora, sea I un conjunto cuyo cardinal excede al del continuo, pongamos $E = \ell_1$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}(E) \times \mathscr{B}(E)$ y consideremos las proyecciones en las coordenadas $(x, y) \overset{p_1}{\mapsto} x$ y $(x, y) \overset{p_2}{\mapsto} y$ definidas en $E \times E$. Entonces, p_1 y $-p_2$ son Borel-medibles, pero $s = p_1 - p_2$ no, pues $s^{-1}\{0\}$ es la diagonal en $E \times E$ y tiene tantos cortes transversales como puntos hay en E. A pesar de este defecto, las funciones Borel-medibles exhiben otro tipo de cerradura que explotaremos en breve.

Teorema 2.3.1. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones Borel-medibles y* $\lim f_n = f$*, entonces f es Borel-medible.*

Demostración. Sea U un subconjunto propio y abierto de E. Definamos g en E por $g(x) = d(x, E \setminus U)$. Entonces, g es una función continua de valor real tal que $g^{-1}(\mathbb{R}^+) = U$. Como $\{gf_n\}$ es una sucesión de funciones numéricas medibles, el límite punto por punto $\lim gf_n = gf$ también es una función medible, de donde a su vez se desprende la mensurabilidad de $(gf)^{-1}((0, \infty)) = f^{-1}(U)$. $\square$

A fin de encontrar un espacio de funciones Borel-medibles adecuado para formular una teoría de integración para funciones con valores en E, empecemos considerando las funciones *simples* de X en E, es decir, aquellas cuyo rango es finito. Toda función de este tipo admite una representación canónica $\sum \chi_{A_i} a_i$, donde los a_i son sus distintos valores y los A_i son los subconjuntos respectivos de X en donde ella los alcanza.[6] Es evidente que la colección de dichas funciones es un espacio vectorial. De hecho, tampoco es difícil ver que si de ellas consideramos únicamente las que son Borel-medibles, entonces seguimos conservando un espacio vectorial que en adelante denotaremos por $S(X, E)$— tal conclusión parte de observar que una función simple con representación canónica $\sum \chi_{A_i} a_i$ es Borel-medible si y solo si cada A_i es medible. Una manera sencilla de expandir tal espacio consiste en contemplar todos los límites punto por punto de sucesiones de sus elementos, quienes por el Teorema 2.3.1 siguen siendo funciones Borel-medibles. Entonces, es fácil verificar que toda función en $S(X, E)_{pw}$, el último espacio señalado, tiene rango separable. De esta manera, arribamos al concepto de mensurabilidad fuerte.

Definición 2.3.2. Una función definida en X y con valores en E se denomina *fuertemente medible* si es Borel-medible y tiene rango separable. La colección de dichas funciones se denota $FM(X, E)$.

[6] Aquí usamos χ_A para denotar la función característica de A.

El siguiente teorema esclarece el vínculo entre $S(X,E)$ y $FM(X,E)$.

Teorema 2.3.3. *Los conjuntos* $S(X,E)_{pw}$ *y* $FM(X,E)$ *son idénticos—en particular,* $FM(X,E)$ *es un espacio vectorial. Explícitamente, para toda* f *en* $FM(X,E)$ *existe una sucesión* $\{s_n\}$ *en* $S(X,E)$ *tal que* $\lim s_n = f$*. De hecho, tal sucesión puede elegirse de modo que* $\|s_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ *se cumpla para todo* x*.*

La idea crucial de la demostración consiste en proyectar canónicamente algún subconjunto contable y denso del rango de la función en la esfera unitaria para después reescalar numerablemente considerando múltiplos racionales. El último conjunto descrito necesariamente contiene puntos que aproximan cada $f(x)$ dominadamente. Los detalles técnicos restantes se hallan en [4, pág. 351]. En adelante, fijaremos una medida positiva μ en X y un número $1 \leq p < \infty$, limitando la discusión al subespacio de $FM(X,E)$ que solamente consta de las funciones cuya composición con la norma en E es p-integrable. Como es de esperar, la fórmula $\|f\|_p = (\int \|f\|^p d\mu)^{1/p}$ define una seminorma en dicho espacio; demostrar su completitud es menos trivial, pero se logra imitando argumentos como los de [17, págs. 67-68]. El espacio de Banach que de aquí resulta mediante la identificación de funciones iguales casi en toda parte recibe el nombre de *espacio de Bochner* y se denota $L_p(E)$. Al igual que en el caso clásico, la integral en $L_1(E)$ se construye en dos etapas. En la primera, se define una función S en el subespacio de funciones simples por la fórmula

$$S(s) = \sum \mu(A_i)a_i,$$

donde $\sum \chi_{A_i} a_i$ es la representación canónica de s. Comprobar que S es en realidad un operador continuo con norma $\|S\| \leq 1$ es un ejercicio rutinario, pero extenso y se ofrece al lector interesado. El paso final consiste en extender continuamente S al completado, que no es otro sino $L_1(E)$.

Lema 2.3.4. *Las funciones simples son densas en* $L_p(E)$*.*

Demostración. Fijemos f en $L_p(E)$, adjuntémosle una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ como la descrita en el Teorema 2.3.3 y pongamos $g = 2^p\|f\|^p$. Entonces, el lemma de Fatou indica que

$$\int g d\mu \leq \liminf \int (g - \|s_n - f\|^p) d\mu.$$

Dado que g es una función numérica integrable, el miembro derecho de la desigualdad es igual a $\int g d\mu - \limsup \int \|s_n - f\|^p d\mu$. Por lo tanto, $\limsup \int \|s_n - f\|^p \leq 0$, de donde se deduce $\lim \int \|s_n - f\|^p d\mu = 0$, que en términos equivalentes es $\lim \|s_n - f\|_p = 0$. □

A la extensión continua de S en $L_1(E)$ se le denomina *integral de Bochner* y se escribe $\int f d\mu$ para denotar su evaluación en f.

Ejemplo 2.3.5. Si $X = I$ y la medida subyacente en $L_1(E)$ es la medida de contar, entonces $L_1(E) = \ell_1(E)$ y $\int \boldsymbol{x} d\mu = \sum x_\iota$.

Varios resultados básicos sobre los espacios L_p clásicos se obtienen, *mutatis mutandis*, en la teoría de espacios $L_p(E)$ [13, págs. 16-18]. Sin embargo, hay cuestiones más delicadas que involucran la estructura de E. Por ejemplo, es sabido que si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $g \mapsto \varphi_g$, donde $\varphi_g(f) = \int gf d\mu$, es un isomorfismo isométrico entre L_q y $(L_p)^*$. Cabe, entonces, preguntarse si el operador análogo $g \mapsto \phi_g$, definido por $\phi_g(f) = \int \langle f, g\rangle d\mu$, es una isometría entre $L_q(E^*)$ y $(L_p(E))^*$. Si la medida subyacente es σ-finita, entonces la respuesta es positiva exactamente cuando la traducción apropiada del teorema de Radon-Nikodym—que contempla medidas de valor en E^* y densidades en $L_1(E^*)$—se cumple [13, Teorema 1.3.10].

En la sección anterior demostramos que $\ell_1(E)$ es el producto tensorial proyectivo de ℓ_1 y E. Cerraremos la presente con la siguiente generalización [18, Ejemplo 2.19].

Teorema 2.3.6. *Los espacios $L_1(E)$ y $L_1 \hat{\otimes}_\pi E$ son isométricamente isomorfos.*

Demostración. El argumento es esencialmente el mismo de la demostración del Teorema 2.2.7. En efecto, si $\mathcal{D}$ es el subespacio de L_1 generado por las funciones numéricas simples, entonces a la función bilineal $A\colon L_1 \times E \to L_1(E)$ definida por la fórmula $A(f, a)(x) = f(x)a$ le corresponde una linealización en $L_1 \otimes_\pi E$ que es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{D} \otimes E$ y las funciones simples de $L_1(E)$. Así, solo resta apelar al Lema 2.3.4. $\square$

Capítulo 3

La propiedad de aproximación

Los resultados principales de este capítulo versan exclusivamente sobre espacios de Banach. Sin embargo, las técnicas más generales de espacios localmente convexos, entre las que se destacan algunas consecuencias primarias de los portentosos teoremas de Hahn-Banach, son ineludibles en tramos argumentativos cruciales. La exposición a comenzar está inspirada en el cuarto capítulo de [18]. La primera sección introduce la propiedad de aproximación con algunos ejemplos. La segunda sección, por su parte, examina de cerca la relación entre productos tensoriales proyectivos, la propiedad de aproximación, el problema de aproximación y el operador traza. En ella se aporta un criterio de identificación de elementos de $E\hat{\otimes}_\pi F$ (Corolario 3.2.5.1) que generaliza el Teorema 2.1.9 a partir de un refinamiento de la Proposición 4.6 de [18]. El texto concluye con una adaptación de la caracterización de Grothendieck del problema de aproximación.

3.1. Definición y ejemplos

Sea E un espacio de Banach. Diremos que E posee la *propiedad de aproximación* si para todo $\epsilon > 0$ y todo compacto $K \subset E$ existe un operador de rango finito $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\|x - Tx\| < \epsilon$ para todo x en K o, equivalentemente en el lenguaje de espacios localmente convexos, si su operador identidad es un punto adherente de $E^* \otimes E$ cuando en $\mathcal{L}(E)$ se observa la topología de la convergencia uniforme en conjuntos compactos de E. Si tales T se pueden escoger de forma que $\|T\| \leq C$ para algún $C > 0$ fijo, entonces diremos que E posee la propiedad de aproximación *acotada*. En especial, diremos que E posee la propiedad de aproximación *métrica* si $C = 1$ es posible. Como los operadores continuos preservan compactos y las composiciones con operadores de rango finito son de rango finito, la propiedad de aproximación se preserva bajo isomorfismos continuos—las variantes acotadas, bajo isometrías—y admite dos caracterizaciones inmediatas.

Teorema 3.1.1. *Los siguientes enunciados caracterizan la propiedad de aproximación* *de un espacio de Banach E.*

(a) *Para todo espacio de Banach F, todo compacto $K \subset F$, todo operador $T \in \mathcal{L}(F, E)$ y todo $\epsilon > 0$ existe un operador de rango finito $S \in F^* \otimes E$ tal que $\sup_{y \in K} \|Ty - Sy\| < \epsilon$.*

(b) *Para todo espacio de Banach F, todo compacto $K \subset E$, todo operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y todo $\epsilon > 0$ existe un operador de rango finito $S \in E^* \otimes F$ tal que $\sup_{x \in K} \|Tx - Sx\| < \epsilon$.*

Generalmente, es difícil demostrar que un espacio carece de la propiedad de aproximación. De hecho, el contraejemplo original de Enflo es sumamente rebuscado y el primer hallazgo natural—$\mathcal{L}(\ell_2)$, para ser exactos—involucró argumentos no menos técnicos [20]. En contraste y por fortuna, la literatura ofrece ejemplos didácticos de espacios que sí poseen dicha propiedad.[1]

Ejemplo 3.1.2. *Espacios de funciones numéricas continuas.* Sea X un espacio de Hausdorff compacto y $\mathcal{C}(X)$ el espacio de funciones numéricas en X, *i. e.*, de valor real o complejo, con la norma del supremo. Si $K \subset \mathcal{C}(X)$ es compacto, un argumento 3-ϵ muestra que K es una familia equicontinua [14, pág. 323] y que por tanto a todo $\epsilon > 0$ le corresponden puntos $x_1, ..., x_n$ en X con vecindades respectivas $U_1, ..., U_n$ que recubren a X tales que toda f en K satisface

$$|f(x) - f(x_i)| < \epsilon \qquad (x \in U_i)$$

para todo $i = 1, ..., n$. [2] Sea $\{f_1, ..., f_n\}$ una partición de la unidad en X subordinada a la cubierta $\{U_1, ..., U_n\}$.[3] Entonces, para todo x en X y toda f en K

$$\left| f(x) - \sum f(x_i) f_i(x) \right| \leq \sum_{x \in U_i} |f(x) - f(x_i)| \, f_i(x) < \epsilon$$

y por tanto $\|f - \sum f(x_i) f_i\| \leq \epsilon$. En conclusión, $\mathcal{C}(X)$ posee la propiedad de aproximación.

Recordemos que un conjunto dirigido es aquel que es preordenado y tiene cotas superiores para cada uno de sus subconjuntos finitos, que las redes son funciones definidas en conjuntos dirigidos con valores en espacios topológicos y que por tanto las últimas son susceptibles de converger formalmente como las sucesiones. El siguiente criterio es el resultado de una estimación 3-ϵ sencilla, pero es el ingrediente común a los ejemplos que le suceden [18, Proposición 4.3].

[1] Para ejemplos más elaborados, ver [6].

[2] Usamos "3-ϵ" para calificar argumentos en que elegimos y y z buscando obtener $|x - w| < 3\epsilon$ a partir de $\max\{|x - y|, |y - z|, |z - w|\} < \epsilon$.

[3] Es decir, $f_i \in \mathcal{C}(X)$, $0 \leq f_i \leq 1$, $\overline{\{f_i \neq 0\}} \subset U_i$ y $\sum f_i = 1$ (ver [17, Teorema 2.13]).

Teorema 3.1.3. *Sea $C > 0$ y $\{T_\gamma\} \subset E^* \otimes E$ una red tal que $\|T_\gamma\| \leq C$ para todo γ. Si $\lim T_\gamma = 1_E$ punto por punto, entonces E posee la propiedad de aproximación acotada con constante C.*

Ejemplo 3.1.4. *Espacios L_p con $1 \leq p < \infty$.* Sea X un espacio de medida y denotemos por $\mathcal{P}$ la colección de todas sus particiones—por subconjuntos medibles—finitas. Claramente, $\mathcal{P}$ es un conjunto dirigido bajo el preorden

$$P_1 \leq P_2 \text{ si y solo si todo } A \text{ en } P_1 \text{ es unión de } B\text{s en } P_2.$$

Por otro lado, toda partición P define un operador de rango finito $T_P \in \mathcal{L}(L_p)$ mediante la fórmula

$$T_P f = \sum_{A \in P} \frac{1}{\mu(A)} \left(\int_A f d\mu \right) \chi_A$$

que cumple

$$\begin{aligned} \|T_P f\| &= \sqrt[p]{\sum (\mu(A))^{1-p} \left| \int_A f d\mu \right|^p} \\ &\leq \sqrt[p]{\sum (\mu(A))^{1-p} \left(\int_A |f| d\mu \right)^p} \\ &\leq \sqrt[p]{\sum \int_A |f|^p d\mu} = \|f\|_p \end{aligned}$$

y por tanto $\|T_P\| \leq 1$. Si $f \in L_p$ es una función simple con partición asociada P_0, entonces $T_P f = f$ para toda $P \geq P_0$ y por lo tanto $\lim T_P(f) = f$. Como las funciones simples son densas en L_p, el Teorema 3.1.3 es aplicable para concluir que L_p posee la propiedad de aproximación métrica.

Ejemplo 3.1.5. *Espacios de Hilbert.* Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{B}$ un subconjunto ortonormal y maximal de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de partes finitas de $\mathcal{B}$ ordenado por inclusión. Pongamos $T_P(x) = \sum_{b \in P} \langle x, b \rangle b$ para todo x en $\mathcal{H}$ y P en $\mathcal{P}$. Entonces, $\{T_P\}$ es una red de operadores de rango finito que satisface las hipótesis del Teorema 3.1.3 con constante $C = 1$ [17, Teoremas 4.14 y 4.18]. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ posee la propiedad de aproximación métrica.

Ejemplo 3.1.6. *Espacios con bases de Schauder.* Sea E un espacio de Banach y $\{e_i\}$ una base de Schauder de E, *i. e.*, una sucesión en E que permite representar inequívocamente cada punto de E como la combinación lineal infinita $x = \sum_{i=1}^\infty x_i e_i$. No es difícil mostrar que la fórmula $N(x) = \sup_n \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|$ define una norma completa en E que satisface tres propiedades (ver [9, págs. 183-184]):

i) $\|\cdot\| \leq N$,

II) $\{e_i\}$ es una base de Schauder de (E, N) que induce representaciones idénticas en $(E, \|\cdot\|)$ y (E, N) y

III) las proyecciones asociadas $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ tienen norma menor o igual que 1.

Así, el teorema de la función abierta implica que ambas normas en E son equivalentes y por tanto el teorema 3.1.3 es aplicable.

Mostrar que todo espacio con una base de Schauder es separable es un ejercicio elemental. Sin embargo, la interrogante inversa, propuesta por Banach en su monografía y después bautizada como *el problema de la base*, permaneció abierta durante cuarenta años hasta ser resuelta negativamente por Enflo en [8]. Efectivamente, Enflo construyó un espacio de Banach separable sin la propiedad de aproximación.

3.2. Caracterización de Grothendieck del problema de aproximación

El contraejemplo de Enflo de 1973 es considerado un hito en la historia de la teoría de operadores. De hecho, Pietsch lo cataloga como una "expulsión del paraíso"debido a sus numerosas ramificaciones negativas [15, págs. 286-287], entre ellas, la respuesta definitiva al *problema de aproximación*, que sentencia la imposibilidad de aproximar todo operador compacto por operadores continuos de rango finito. Grothendieck, por su parte, veinte años atrás, advirtió los alcances y las múltiples manifestaciones de *la condition d'approximation*.

Antes de ahondar en las ideas de Grothendieck, conviene repasar algunas definiciones básicas. Sea E un espacio vectorial real o complejo y X un subconjunto de E. A X se le llama convexo si $tX + (1-t)X \subset X$ para todo $0 \le t \le 1$; circular, si $\alpha X \subset X$ para todo $|\alpha| \le 1$; absolutamente convexo, si es convexo y circular; y absorbente, si $E = \bigcup_{t>0} tX$. Salvo el último, todos los atributos aquí mencionados son estables bajo la toma de intersecciones arbitrarias y por lo tanto se habla en general de la envoltura convexa $\diamond X$, la circular $\circ X$ y la absolutamente convexa $\hat{\diamond} X$. Puesto que la envoltura convexa de un conjunto circular es circular, la inclusión $\hat{\diamond} X \subset \diamond(\circ X)$ es válida y por tanto $\hat{\diamond} X = \diamond(\circ X)$.[4] Si E es normado, las tres envolturas preservan conjuntos totalmente acotados.[5] De esto se deduce la compacidad de $\overline{\hat{\diamond}\{x_n\}}$ para toda sucesión $\{x_n\} \in c_0(E)$ y, de aquí, la mitad del pilar de esta sección.

Teorema 3.2.1 (Grothendieck, 1955). *Sea E un espacio normado y K un subconjunto cerrado de E. Entonces, K es compacto si y solo si existe una sucesión $\{x_n\} \in c_0(E)$ tal que $K \subset \overline{\hat{\diamond}\{x_n\}}$.*

[4]Es fácil ver que en general $\circ \diamond X \subsetneq \hat{\diamond} X$. De hecho, si X es un segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que no toca al origen, entonces $\circ(\diamond X)$ es un corbatín.

[5]Esto es cierto en cualquier espacio localmente convexo. Ver [1, Teorema 4.8.9].

Demostración. Basta establecer la necesidad de la condición. Supongamos que K no es vacío y pongamos $K_0 = K$ y $F_0 = \{0\}$. Recursivamente, si K_{n-1} es compacto y no vacío, entonces $2K_{n-1}$ también es compacto y por tanto contiene un subconjunto finito y no vacío F_n tal que

$$2K_{n-1} \subset \bigcup_{x \in F_n} \left\{ y \colon \|y - x\| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Sea

$$K_n = \bigcup_{x \in F_n} \left(\left\{ y \in 2K_{n-1} \colon \|y - x\| \leq \frac{1}{n} \right\} - x \right).$$

Así, para todo x en K y todo $n \geq 1$ existen puntos $y_i \in F_i$, $i = 1, ..., n$, tales que

$$2^n x - 2^{n-1} y_1 - ... - y_n \in K_n \subset \left\{ y \colon \|y\| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

y en consecuencia $K \subset \overline{\diamond\{x_n\}}$ para cualquier enumeración $\{x_n\}$ de $\bigcup F_n$. $\square$

La implicación hacia la derecha—sin duda, la más interesante—es la que normalmente aparece en los libros de texto. Sin embargo, Grothendieck obtuvo un resultado aún más general.

Teorema 3.2.2. *Sean E y F espacios normados y K un subconjunto totalmente acotado de $E\hat{\otimes}_\pi F$. Entonces, existe un compacto $H \subset \ell_1$ y un par de sucesiones $\{x_n\} \in c_0(E)$ y $\{y_n\} \in c_0(F)$ tales que todo $u \in K$ admite una representación*

$$u = \sum \alpha_n x_n \otimes y_n,$$

para algún $\{a_n\} \in H$.

La demostración es similar a la del Teorema 3.2.1, aunque levemente más técnica. Puede consultarse en [5, págs. 31-33]—el Teorema de Tychonoff podría ayudar. Por otra parte, observe que $H \subset \ell_1$ se puede escoger de manera que todos sus elementos tengan norma menor o igual que 1 y por tanto obtenemos:

Corolario 3.2.2.1. *Para todo compacto $K \subset E\hat{\otimes}_\pi F$ existen compactos $K_E \subset E$ y $K_F \subset F$ tales que*

$$K \subset \overline{\hat{\diamond}(K_E \otimes K_F)}.^6$$

Ejemplo 3.2.3. *La propiedad de aproximación de $E\hat{\otimes}_\pi F$.* Supongamos que E y F son espacios de Banach que poseen la propiedad de aproximación. Sea K un compacto de $E\hat{\otimes}_\pi F$ y tomemos compactos K_E y K_F como en el Corolario 3.2.2.1. Sea $M > 0$ tal que

[6] Abuso de notación: $K_E \otimes K_F = \{x \otimes y \colon x \in K_E \text{ y } y \in K_F\}$.

$z \in K_E \cup K_F$ implica $\|z\| \leq M$ y sea $0 < \epsilon < 1$. Entonces, existen operadores continuos de rango finito $R\colon E \to E$ y $L\colon F \to F$ tales que

$$\text{máx}\{\|x - Rx\|, \|y - Ly\|\} < \frac{\epsilon}{2M+1} \qquad (x \in K_E)(y \in K_F).$$

Por lo tanto, el cómputo

$$\begin{aligned}\pi(x \otimes y - [R \otimes_\pi L]\,(x \otimes y)) &\leq \|x\|\|y - Ly\| + \|x - Rx\|\|y - Ly\| + \|y\|\|x - Rx\| \\ &< \frac{2M\epsilon + \epsilon^2}{2M+1} < \left(\frac{2M+1}{2M+1}\right)\epsilon = \epsilon\end{aligned}$$

es correcto para todo $x \otimes y$ en $E_K \otimes E_F$ y, en consecuencia,

$$\pi(u - [R \otimes_\pi L]\,u) \leq \epsilon \qquad (u \in \overline{\hat{\diamond}(K_E \otimes K_F)}).$$

Luego, $E\hat{\otimes}_\pi F$ posee la propiedad de aproximación. Como $\|R \otimes_\pi L\| = \|R\|\|L\|$, todo producto tensorial proyectivo incluso hereda las variantes acotada y métrica de sus componentes.

Corolario 3.2.3.1. *Todo espacio de Banach E con la propiedad de aproximación (métrica) induce un espacio de Bochner $L_1(E)$ con la p.a.(m.).*

Ahora, sea $S \subset E^*$ un subespacio que separa puntos de E y τ una topología localmente convexa en E^* con la propiedad $(E^*, \tau)^* = E$. Por el teorema de separación de Hahn-Banach [16, Teorema 3.4], S es necesariamente τ-denso en E^*. En particular, si $\tau_\mathfrak{c}$ es la topología de la convergencia uniforme en conjuntos compactos de E, entonces S es $\tau_\mathfrak{c}$-denso en E^*.

Teorema 3.2.4. *Si E es un espacio de Banach, entonces $(E^*, \tau_\mathfrak{c})^* = E$.*

Demostración. Como los conjuntos finitos son compactos, $E \subset (E^*, \tau_\mathfrak{c})^*$. Ahora, sea $\Phi \in (E^*, \tau_\mathfrak{c})^*$ y $K \subset E$ un compacto tal que para algún $M > 0$

$$|\Phi(\varphi)| \leq M \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \qquad (\varphi \in E^*). \tag{3.1}$$

Por el Teorema 3.2.1, existe una sucesión $\{x_n\} \in c_0(E)$ tal que (3.1) implica

$$|\Phi(\varphi)| \leq M \sup_n |\varphi(x_n)| \qquad (\varphi \in E^*).$$

En consecuencia, $\{\varphi(x_n)\} \mapsto \Phi(\varphi)$ es un funcional lineal continuo bien definido en $\{\{\varphi(x_n)\}\colon \varphi \in E^*\} \subset c_0$ y, por ende, la restricción de algún $\hat{\Phi} \in c_0^*$. Así, el Teorema 2.2.6 asegura que existe una sucesión $\{\alpha_n\} \in \ell_1$ tal que

$$\Phi(\varphi) = \sum \alpha_n \varphi(x_n) = \varphi\left(\sum \alpha_n x_n\right) \qquad (\varphi \in E^*),$$

donde la última igualdad es válida por la convergencia absoluta de $\sum \alpha_n x_n$ y la completitud de E. Por lo tanto, $\Phi = \sum \alpha_n x_n$. $\square$

Corolario 3.2.4.1. *Si S es un subespacio de E^* que separa puntos de E y $\varphi \in E^*$, entonces para todo compacto $K \subset E$ y todo $\epsilon > 0$ existe un funcional $\varphi' \in S$ tal que* $\sup_{x\in K} |\varphi(x) - \varphi'(x)| < \epsilon$.

Sea Tr el funcional en $E^*\hat{\otimes}_\pi E$ análogo al del Ejemplo 2.1.8. Es tentador "aplicar" Tr a un operador nuclear $T = \sum \varphi_n \otimes x_n$ y llamarle traza de T al número $\sum \varphi_n(x_n)$. Sin embargo, T tiene múltiples representaciones nucleares y por tanto la unicidad de su traza, en principio, es incierta. Grothendieck demostró que la propiedad de aproximación elimina este problema.

Teorema 3.2.5. *Sea E un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*[7]

(a) *E posee la propiedad de aproximación.*

(b) *Si $u \in E^*\hat{\otimes}_\pi E$ tiene una representación nuclear $\sum \varphi_n \otimes x_n$ tal que*

$$\sum \varphi_n(x)x_n = 0 \qquad (x \in E),$$

entonces $\operatorname{Tr} u = 0$.

(c) *Si $u \in E^*\hat{\otimes}_\pi E$ tiene una representación nuclear $\sum \varphi_n \otimes x_n$ tal que*

$$\sum \varphi_n(x)x_n = 0 \qquad (x \in E),$$

entonces $u = 0$.

(d) *Para todo espacio de Banach F, si $u \in E\hat{\otimes}_\pi F$ tiene una representación nuclear $\sum x_n \otimes y_n$ con la propiedad*

$$\sum \varphi(x_n)y_n = 0 \qquad (\varphi \in S)$$

para algún $S \subset E^*$ que separa puntos de E, entonces $u = 0$.

(e) *Para todo espacio de Banach F, si $u \in E\hat{\otimes}_\pi F$ tiene una representación nuclear $\sum x_n \otimes y_n$ con la propiedad*

$$\sum \psi(y_n)x_n = 0 \qquad (\psi \in T)$$

para algún $T \subset F^*$ que separa puntos de F, entonces $u = 0$.

[7] *cf.* [18, Proposición 4.6].

Demostración. Supongamos que E posee la propiedad de aproximación y aceptemos la hipótesis de (e). Como $\sum \|x_n\|\|y_n\| < \infty$, existe una sucesión de enteros positivos $\alpha_n \to \infty$ tal que $\sum \alpha_n \|x_n\|\|y_n\| < \infty$ y por tanto podemos asumir provisionalmente que $\{x_n\} \in \ell_1(E)$ y $\{y_n\} \in c_0(F)$. Si $\psi \in F^*$ y $\epsilon > 0$, entonces el Teorema 3.2.1 y el Corolario 3.2.4.1 implican que existe un funcional $\psi' \in \operatorname{gen} T$ tal que $\sup_n |\psi(y_n) - \psi'(y_n)| < \epsilon$. Así,

$$\left\|\sum \psi(y_n)x_n\right\| = \left\|\sum(\psi(y_n) - \psi'(y_n))x_n\right\| < \epsilon \sum \|x_n\|$$

y, en consecuencia, $\sum \psi(y_n)x_n = 0$ para todo $\psi \in F^*$. Enseguida, supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x_n\} \in c_0(E)$ y $\{y_n\} \in \ell_1(E)$. Para demostrar que $u = 0$, basta verificar que todo $\Lambda \in (E\hat{\otimes}_\pi F)^*$ se anula en u. Según la observación que sucede al Teorema 2.2.5, tales funcionales pueden ser considerados operadores de E en F^*. Sea $\epsilon > 0$ y sea $R = \sum_{i=1}^m \varphi_i \otimes \psi_i \in E^* \otimes F^*$ un operador tal que $\sup_n \|\Lambda x_n - Rx_n\| < \epsilon$. Por hipótesis,

$$\langle u, R\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n, Rx_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_n)\psi_i(y_n) = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_i(y_n)x_n\right) = 0$$

y, así,

$$|\langle u, \Lambda\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\langle y_n, \Lambda x_n - Rx_n\rangle\right| < \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|.$$

Luego, $\langle u, \Lambda\rangle = 0$. Por otra parte, el hecho de que S y T separen puntos de E y F permite concluir que (d) y (e) son enunciados equivalentes. Ahora, supongamos (d) y aceptemos la hipótesis de (c). Entonces, $v = \sum x_n \otimes \varphi_n \in E^{**}\hat{\otimes}_\pi E^*$ satisface la hipótesis de (d) con $S = X$ y en consecuencia $v = 0$. Luego, $\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} v = 0$. Puesto que la implicación $(c) \implies (b)$ es evidente, solo resta verificar $(b) \implies (a)$. Para tal fin, supongamos que E no posee la propiedad de aproximación. Así, el teorema de separación de Hahn-Banach produce un funcional $\Phi \in \mathcal{L}(E)^*$ con la propiedad

$$\Phi(1_E) = 1 \quad \text{y} \quad \Phi(R) = 0 \qquad (R \in E^* \otimes E),$$

equipado con una sucesión $\{x_n\} \in c_0(E)$ y una constante $M > 0$ que satisfacen

$$|\Phi(T)| \leq M \sup_n \|Tx_n\| \qquad (T \in \mathcal{L}(E))$$

y que, por tanto, lo reformulan como un funcional lineal continuo parcialmente definido en $c_0(E)$ que el Teorema de Hahn-Banach extiende y el 2.2.6 mediante sucesión adecuada $\{\varphi_n\} \in \ell_1(E^*)$ representa como

$$\Phi(T) = \sum \varphi_n(Tx_n) \qquad (T \in \mathcal{L}(E)).$$

En particular, $\sum \varphi_n(x_n) = \Phi(1_E) = 1$ y para todo x en E y φ en E^*

$$\varphi\left(\sum \varphi_n(x)x_n\right) = \sum \varphi_n(x)\varphi(x) = \sum \varphi_n(\varphi(x_n)x) = \Phi(\varphi \otimes x) = 0.$$

Luego, $u = \sum \varphi_n \otimes x_n$ satisface la hipótesis de (b), pero no su conclusión. $\square$

La propiedad de aproximación es, pues, la clave para reescribir el Teorema 2.1.9 en el lenguaje de los productos tensoriales proyectivos; también responde a una interrogante natural a la manera en que hemos definido los operadores nucleares, *i. e.*, la inyectividad del operador cociente que los genera.

Corolario 3.2.5.1. *Sean E y F espacios de Banach, entre ellos al menos uno con la propiedad de aproximación. Fijemos conjuntos que separan puntos $S \subset E^*$ y $T \subset F^*$. Entonces, $u \in E\hat{\otimes}_\pi F$ con representación nuclear $\sum x_n \otimes y_n$ es nulo exactamente cuando*

$$\sum \varphi(x_n)\psi(y_n) = 0 \qquad (\varphi \in S)(\psi \in T).$$

Recíprocamente, si este criterio de identificación falla, es porque ni E ni F poseen la propiedad de aproximación.

Corolario 3.2.5.2. *Si E y F son espacios de Banach y al menos uno entre E^* y F posee la propiedad de aproximación, entonces el operador cociente*

$$\mathcal{N} \colon E^*\hat{\otimes}_\pi F \to \mathcal{N}(E, F)$$

es una isometría.

Ahora, consideremos un conjunto $K \subset E$ absolutamente convexo. Entonces, $\operatorname{gen} K = \bigcup_{t>0} tK$ y por lo tanto

$$\|x\|_K = \operatorname{ínf}\{t > 0 \colon x \in tK\}$$

define una seminorma en $\operatorname{gen} K$—el funcional de Minkowski. Veremos, además, que si K es cerrado y acotado, entonces $\|\cdot\|_K$ es una norma completa. A $\operatorname{gen} K$ equipado con dicha norma lo denotaremos por E_K.

Lema 3.2.6. *Sea K un subconjunto cerrado, acotado y absolutamente convexo de un espacio de Banach E. Entonces, E_K es un espacio de Banach. Si, además, K es compacto, entonces existe un compacto absolutamente convexo $L \supset K$ tal que K es compacto en E_L.*[8]

Demostración. Como K es acotado, $\|\cdot\|_K$ es positiva. Comprobemos que es completa. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en E_K. Siendo K cerrado,

$$K = \{x \colon \|x\|_K \leq 1\} \tag{3.2}$$

y por tanto asumiremos que $\{x_n\} \subset K$. De hecho, esta ecuación implica la continuidad de la inyección canónica de E_K en E y por tanto la existencia de $x \in K$ tal que $\operatorname{lím} x_n \overset{E}{=} x$. Sea $\epsilon > 0$ y pongamos $z_n = x_n - x$. Entonces, existe un entero positivo N tal que $n, m \geq N$ implica $\|z_n - z_m\|_K \leq \epsilon$, que por (3.2) equivale a $z_n - z_m \in \epsilon K$. Así,

[8] *cf.* [18, Lema 4.11]

$z_n \in \epsilon K$ y por tanto $\|x_n - x\|_K \leq \epsilon$, siempre que $n \geq N$. Ahora, supongamos que K es compacto. Sea $\{x_n\} \in c_0(E)$ tal que $K \subset \overline{\diamond\{x_n\}}$. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de escalares positivos que diverge al infinito tal que $\{\alpha_n x_n\} \in c_0(E)$ y pongamos $L = \overline{\hat{\diamond}\{\alpha_n x_n\}}$. Entonces, $\|x_n\|_L \leq 1/\alpha_n$ y por lo tanto $\{x_n\} \in c_0(E_L)$. Como K es cerrado en E_L y las clausuras de $\diamond\{x_n\}$ en E y E_L coinciden, solo resta apelar al Teorema 3.2.1. □

Diremos que un operador entre espacios de Banach es *aproximable* si es punto adherente de operadores continuos de rango finito con respecto a la topología inducida por la norma operador. En estos términos, el problema de aproximación consistió en determinar si todo operador compacto era aproximable. La solución es positiva, por ejemplo, para operadores con valores en espacios como los discutidos en la sección anterior. Todos poseen la propiedad de aproximación; condición necesaria y suficiente.

Teorema 3.2.7. *Sea E un espacio de Banach.*

(a) *E posee la propiedad de aproximación si y solo si todo operador compacto con valores en E es aproximable.*

(b) *E^* posee la propiedad de aproximación si y solo si todo operador compacto definido en E es aproximable.*

Demostración. Supongamos que todo operador compacto con valores en E es aproximable. Sea K un subconjunto compacto de E y sea $\epsilon > 0$. De acuerdo con el Lema 3.2.6, K es compacto en E_L para algún compacto absolutamente convexo L que lo contiene. Por hipótesis, la inyección canónica $\mathcal{I}\colon E_L \to E$ debe ser aproximable, así que existe $S_L = \sum_{i=1}^n \psi_i \otimes x_i \in E_L^* \otimes E$ tal que $\|\mathcal{I} - S_L\|_{\mathcal{L}(E_L,E)} < \epsilon$. Hagamos

$$\delta = \epsilon \left(1 + \sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^{-1} \qquad \text{y} \qquad \varphi_L = \mathcal{I}^*\varphi \qquad (\varphi \in E^*).$$

Entonces, $\{\varphi_L \colon \varphi \in E^*\}$ es un subespacio de E_L^* que separa puntos de E_L y por lo tanto existen φ_L^i, $i = 1, ..., n$, que satisfacen $|\langle x, \psi_i - \varphi_L^i\rangle| < \delta$ para todo $x \in K$. De esta manera, si

$$R = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes x_i \qquad \text{y} \qquad R_L = \sum_{i=1}^n \varphi_L^i \otimes x_i,$$

entonces para todo x en K

$$\|x - Rx\| \leq \|x - S_L x\| + \|S_L x - R_L x\| < \epsilon + \sum_{i=1}^n |\langle x, \psi_i - \varphi_L^i\rangle| \|x_i\| < 2\epsilon.$$

Luego, E posee la propiedad de aproximación. Recíprocamente, como los operadores compactos transforman conjuntos acotados en conjuntos totalmente acotados, la propiedad de aproximación en E garantiza la aproximabilidad de todo operador compacto con valores en E. Esto demuestra (a). Ahora, supongamos que E^* posee la propiedad de aproximación. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y $\epsilon > 0$. Como T^* es compacto, la imagen de $B_{F^*} = \{\psi \in F^* \colon \|\psi\| \leq 1\}$ bajo T^*, que llamaremos K, es totalmente acotada y por lo tanto existe un operador continuo de rango finito $R \colon E^* \to E^*$ tal que $\|\varphi - R\varphi\| < \epsilon$ para todo φ en K. Sea J la restricción del operador $T^{**}R^*$ a E. Si el rango de T^{**} y, por tanto, el de J fueran subespacios de F, entonces

$$\begin{aligned}\|T - J\| &= \sup_{x \in B_E} \sup_{\psi \in B_{F^*}} |\langle Tx, \psi\rangle - \langle T^{**}R^*x, \psi\rangle| \\ &= \sup_{x \in B_E} \sup_{\psi \in B_{F^*}} |\langle x, T^*\psi - RT^*\psi\rangle| \\ &\leq \sup_{\varphi \in K} \|\varphi - R\varphi\| \leq \epsilon\end{aligned}$$

y la primera implicación de (b) se deduciría. Para justificar este paso, pongamos $B_E = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}$, $K = \overline{T(B_E)}$, $X = E^*$, $B_{X^*} = \{x^* \in X^* \colon \|x^*\| \leq 1\}$ y $Y = F^*$. Basta demostrar que $T^{**}(B_{X^*}) \subset K$. Sean τ_X y τ_Y las topologías *weak*-* en X^* y Y^*. Entonces, B_E es τ_X-denso en B_{X^*}. Por otro lado, K es compacto en Y^* y por ende τ_Y-cerrado. Luego, $T^{**}(B_{X^*}) \subset K$, pues T^{**} es τ_X-τ_Y-continua y $T^{**}(B_E) \subset K$. Para terminar, supongamos que todo operador compacto definido en E es aproximable. Buscando aplicar (a), sea $T \colon F \to E^*$ compacto y J la restricción de T^* a E. Entonces, para todo x en E y y en F

$$\langle x, J^*y\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \langle y, T^*x\rangle = \langle Ty, x\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Luego, T y la restricción de J^* a F coinciden. Puesto que J^* es aproximable, T es aproximable y concluimos que E^* posee la propiedad de aproximación. $\square$

Por último, analicemos una situación aparentemente inconexa. Sea $A = \{a_{ij}\}$ una matriz $n \times n$ nilpotente de grado 2, *i. e.*, $A^2 = 0$ y $A \neq 0$. Como $\ker A \subset \ker A^2 = \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^n$ tiene una base $\{x_1, ..., x_l, e_1, ..., e_k\}$, donde los x_r son base de $\ker A$ y los e_s son base del complemento. Así, A es semejante a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & B_{lk} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto tiene traza nula. Por analogía, podemos proponer la siguiente generalización. Toda sucesión de sucesiones $\boldsymbol{x} = \{x^{(i)}\} \in \ell_1(c_0)$ es una matriz infinita $\{x_{ij}\}$, si ponemos $x_{ij} = x_j^{(i)}$. Bajo esta convención, podemos definir multiplicación $\boldsymbol{xy} = \{\sum x_{ik}y_{kj}\}$, traza $\operatorname{Tr} \boldsymbol{x} = \sum x_{ii}$ y conjeturar $\boldsymbol{x}^2 = 0 \implies \operatorname{Tr} \boldsymbol{x} = 0$. Si, en cambio, preferimos un problema continuo, reemplazamos $\ell_1(c_0)$ por $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1])$, definimos

$$[f \cdot g](s, t) = \int f(s, x)g(x, t)dx,$$

$$\operatorname{Tr} f = \int f(x,x)dx$$

y preguntamos si $f \cdot f = 0$ implica $\operatorname{Tr} f = 0$. Así caracterizó Grothendieck el problema de aproximación.

Teorema 3.2.8. *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *Todo espacio de Banach posee la propiedad de aproximación.*

(b) *En* $\ell_1(c_0)$, $\boldsymbol{x}^2 = 0$ *implica* $\operatorname{Tr} \boldsymbol{x} = 0$.

(c) *En* $\mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$, $f \cdot f = 0$ *implica* $\operatorname{Tr} f = 0$.

(d) *El problema 153 del Libro Escocés tiene solución positiva: toda función continua* $f \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ *es el límite uniforme de combinaciones lineales de funciones de tipo* $(s,t) \mapsto f(s,s_i)f(t_i,t)$.

Demostración. El orden será $(a) \implies (d) \implies (c) \implies (b) \implies (a)$. Supongamos (a), tomemos f en $\mathcal{C}([0,1] \times [0,1])$ y consideremos el subespacio cerrado de $\mathcal{C}[0,1]$ generado por las funciones $t \overset{\tilde{s}}{\mapsto} f(s,t)$, que ahora llamaremos E. Sea $K = \{\tilde{s} \colon s \in [0,1]\}$ y $\epsilon > 0$. Entonces, K es compacto en E y por lo tanto existe un operador $R = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes e_i \in E^* \otimes E$ tal que $\|\tilde{s} - R\tilde{s}\| < \epsilon$ para todo $s \in [0,1]$. La definición de E implica que los e_i en R se pueden reemplazar por $\tilde{t}_i$, calibrando los φ_i de ser necesario. Más aún, como los funcionales de evaluación $g \overset{\dot{s}}{\mapsto} g(s)$ separan puntos de E, los φ_i se pueden reemplazar por $\dot{s}_i$ más unos escalares de corrección α_i, esto es, después de reordenar y, posiblemente, cambiar n, podemos suponer que $R = \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{s}_i \otimes \tilde{t}_i$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left| f(s,t) - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(s,s_i) f(t_i,t) \right| &= \left| \left[\tilde{s} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \tilde{s}, \dot{s}_i \rangle \tilde{t}_i \right](t) \right| \\
&= \left| [\tilde{s} - R\tilde{s}](t) \right| \\
&\leq \|\tilde{s} - R\tilde{s}\| < \epsilon
\end{aligned}$$

para todo s y t en $[0,1]$. Luego, (d) se cumple. Ahora, si (d) se cumple y f en $\mathcal{C}[0,1]$ satisface $f \cdot f = 0$, entonces el funcional integral se anula en las funciones de tipo $(x,x) \mapsto f(s,x)f(x,t)$ y, por tanto, en todo punto adherente de sus combinaciones lineales. En particular, $\operatorname{Tr} f = \int f(x,x)dx = 0$. Enseguida, sea $\boldsymbol{x} \in \ell_1(c_0)$ tal que $\boldsymbol{x}^2 = 0$ y sea $\{\delta_i\} \in \ell_1$ una sucesión de números positivos tales que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\|x^{(i)}\|}{\|x^{(i)}\| + \delta_i} = 0.$$

Fijemos $C > \|\boldsymbol{x}\| + \sum \delta_i$ y pongamos

$$a^{(i)} = \frac{Cx^{(i)}}{\|x^{(i)}\| + \delta_i} \qquad \text{y} \qquad \alpha_i = \frac{\|x^{(i)}\| + \delta_i}{C}$$

para todo $i \geq 1$. Entonces, $\boldsymbol{x} = \{\alpha_i a^{(i)}\}$ y $\sum \alpha_i < 1$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon + \sum \alpha_i < 1$, pongamos $\beta_k = \alpha_k + \frac{1}{2^k}\epsilon$ y definamos intervalos $U_i = (\sum_{k=1}^{i-1} \beta_k, \sum_{k=1}^{i} \beta_k) \subset [0,1]$. Como la medida de Lebesgue es regular, el Teorema de Representación de Riesz [17, Teorema 2.14] implica que a todo U_i le corresponde una función $g_i \in \mathcal{C}[0,1]$ con soporte en U_i tal que $0 \leq g_i \leq 1$ y $\alpha_i < \int g_i dx$.[9] Sin pérdida de generalidad, podemos incluso suponer que $\int g_i dx = \alpha_i$. Pongamos $f_i = \sqrt{g_i}$ y definamos f en $[0,1] \times [0,1]$ por

$$f(s,t) = \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} f_i(s) f_j(t), & \text{si } s \in U_i \text{ y } t \in U_j \text{ para algunos } i \text{ y } j; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{array} \right\}.$$

La asignación es inequívoca, pues los U_i son disjuntos dos a dos. De hecho, f es continua. Esto es evidente para los puntos de los abiertos $U_i \times U_j$. En cuanto a los demás, basta observar que $\{a^{(i)}\} \in c_0(c_0)$. Así, para todo (s,t) en $U_k \times U_L$

$$\begin{aligned} [f \cdot f](s,t) &= \int f(s,x) f(x,t) dx \\ &= \int_{\bigcup U_i} f(s,x) f(x,t) dx \\ &= \sum_i \int a_{ki} a_{il} g_i(x) f_k(s) f_l(t) dx \\ &= \left(\sum_i \alpha_i a_{ki} a_{il} \right) f_k(s) f_l(t) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_k} \sum_i x_{ki} x_{il} \right) f_k(s) f_l(t) = 0, \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se justifica en el Teorema de la convergencia dominada. En consecuencia, $f \cdot f = 0$ y (c) produce

$$\operatorname{Tr} \boldsymbol{x} = \sum x_{ii} = \sum \alpha_i a_{ii} = \sum \int a_{ii} g_i(x) dx = \int f(x,x) dx = \operatorname{Tr} f = 0.$$

Finalmente, aplicaremos el literal (b) del Teorema 3.2.5 para demostrar que (b) implica la propiedad de aproximación en todo espacio de Banach E. Efectivamente, sea u un elemento de $E^* \hat{\otimes}_\pi E$ con representación nuclear $\sum \varphi_n \otimes x_n$ tal que

$$\sum \langle x, \varphi_n \rangle x_n = 0 \qquad (x \in E).$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{\varphi_n\} \in \ell_1(E^*)$ y $\{x_n\} \in c_0(E)$. Así, si

[9] Ciertamente, las g_i pueden construirse explícitamente, por lo que es posible prescindir del teorema.

ponemos $a_{ij} = \langle x_j, \varphi_i \rangle$, entonces $\boldsymbol{a} = \{a_{ij}\} \in \ell_1(c_0)$ y para todo k y todo l

$$\begin{aligned}
\sum_i a_{ki} a_{il} &= \sum_i \langle x_i, \varphi_k \rangle \langle x_l, \varphi_i \rangle \\
&= \sum_i \langle \langle x_l, \varphi_i \rangle x_i, \varphi_k \rangle \\
&= \left\langle \sum_i \langle x_l, \varphi_i \rangle x_i, \varphi_k \right\rangle \\
&= \langle 0, \varphi_k \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Esto es $\boldsymbol{a}^2 = 0$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Tr} u = \sum \langle x_n, \varphi_n \rangle = \sum a_{nn} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{a} = 0$$

y concluimos que E posee la propiedad de aproximación. $\square$

Bibliografía

[1] E. Beckenstein y L. Narici. *Topological Vector Spaces*. 2.ª ed. Chapman y Hall/CRC, 2010.

[2] F. Bombal. «Alexander Grothendieck's work on functional analysis». En: *Advanced Courses of Mathematical Analysis* II (2007), págs. 16-36. DOI: `https://doi.org/10.1142/9789812708441_0002`.

[3] J.M.F. Castillo y M. González. *Three-space Problems in Banach Space Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[4] D.L. Cohn. *Measure Theory*. Birkäuser Basel, 1980.

[5] A. Defant y K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals*. Elsevier, 1992.

[6] J. Delgado, M. Ruzhansky y B. Wang. «Approximation property and nuclearity on mixed-norm L^p, modulation and Wiener amalgam spaces». En: *J. London Math. Soc.* 94 (2 2016), págs. 391-408. DOI: `https://doi.org/10.1112/jlms/jdw040`.

[7] J. Diestel. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Springer-Verlag New York, 1984.

[8] P. Enflo. «A counterexample to the approximation problem in Banach spaces». En: *Acta Math.* 130 (1973), págs. 309-317. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF02392270`.

[9] M. Fabian y col. *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag New York, 2011.

[10] A. Grothendieck. «Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires». En: *Mem. Amer. Math. Soc.* 16 (1955). DOI: `https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1090/memo/0016`.

[11] A. Grothendieck. «Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques». En: *Bol. Soc. Mat. São Paulo* 8 (1953), págs. 1-79.

[12] P. Hájek y col. *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*. Springer-Verlag New York, 2008.

[13] T. Hytönen y col. *Analysis in Banach Spaces*. Vol. 1. Springer International Publishing, 2016.

[14] R.E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer-Verlag New York, 1998.

[15] A. Pietsch. *History of Banach Spaces and Linear Operators*. Birkäuser Boston, 2007.

[16] W. Rudin. *Functional Analysis*. 2.ª ed. McGraw-Hill, Inc., 1991.

[17] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. 3.ª ed. McGraw-Hill, Inc., 1987.

[18] R. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*. Springer-Verlag London, 2002.

[19] L. Schwartz. *A Mathematician Grappling with His Century*. Birkäuser Basel, 2000.

[20] A. Szankowski. «*B(H)* does not have the approximation propertydoes not have the approximation property». En: *Acta Math.* 147 (1981), págs. 89-108. DOI: `https://doi.org/10.1007/BF02392870`.

[21] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, Inc., 1967.

[22] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer-Verlag New York, 1980.